TD2 Propagation d'incertitudes

Objectifs :

1. Retravailler en autonomie les notions de métrologie.
2. Aborder le problème de propagation d'incertitudes en étudiant différentes situations pratiques de mesures physiques et électriques.

Outils mathématiques complémentaires

Méthode 1

Un résultat de mesure doit être présenté sous la forme : $Y = Y_{mes} \pm \Delta Y$. Dans le cas où la grandeur Y dépend de plusieurs grandeurs, c'est-à-dire $Y = f(X_1, X_2, ..., X_n)$, avec $\Delta X_1, \Delta X_2, ..., \Delta X_n$ l'erreur des grandeurs mesurées, l'*erreur* ou *incertitude* maximale de ΔY peut être exprimée à partir de l'équation en dérivées suivante :

$$|\Delta Y| = \Delta X_1 \left|\frac{\partial Y}{\partial X_1}\right| + \Delta X_2 \left|\frac{\partial Y}{\partial X_2}\right| + ... + \Delta X_n \left|\frac{\partial Y}{\partial X_n}\right| \qquad (1)$$

où $\frac{\partial Y}{\partial X_1}$ dénote la dérivée de Y par rapport à la variable X_1 (et dans ce cas on considère les autres variables comme des constantes). La valeur absolue l'expression de l'erreur maximale permet d'éviter toute compensation de l'influence de l'erreur sur une variable par celle d'une autre.

Pour calculer $|\Delta Y|$ il faut donc :

1. Calculer les dérivées dites « partielles » $\frac{\partial Y}{\partial X_n}$, $\frac{\partial Y}{\partial X_2}$,..., $\frac{\partial Y}{\partial X_n}$
2. Remplacer dans l'expression de l'erreur maximale et éventuellement faire l'application numérique.

Méthode 2

La section précédente présente un type de calcul qui majore (surestime) toutes les incertitudes de manière générale. De façon à calculer ces incertitudes plus finement, on a dévéloppé la méthode de calcul en quadrature. Ainsi, *incertitude* maximale de ΔY peut être exprimée à partir de l'équation suivante :

$$|\Delta Y| = \sqrt{\left(\Delta X_1 \frac{\partial Y}{\partial X_1}\right)^2 + \left(\Delta X_2 \frac{\partial Y}{\partial X_2}\right)^2 + ... + \left(\Delta X_n \frac{\partial Y}{\partial X_n}\right)^2} \qquad (2)$$

Exercice 1 : Débit d'une pompe

On souhaite mesurer le débit d'une pompe avec une horloge et mètre à ruban. Pour cela on laisse un réservoir de section droite rectangulaire se remplir d'eau pendant 120 s. D'une part, le temps est mesuré avec une précision de 1 seconde. D'autre part, la hauteur d'eau relevée est de 30 cm $\pm$ 2 mm, la longueur du réservoir est de 20 cm $\pm$ 1 mm et la largeur est de 12 cm $\pm$ 1 mm.

1. Donner la définition mathématique du débit volumique.
2. Quel est le débit de la pompe ? Pour cela, faire l'application numérique en utilisant l'équation de la question précédente et donner le résultat (valeur et unité).
3. Donner l'expression de l'incertitude maximale (méthode 1) pour cette mesure.
4. Faire l'application numérique et donner la valeur de l'erreur et son unité.

Exercice 2 : Puissance électrique

Soit la puissance électrique $P = R.I^2$. On mesure $R = 100 \pm 10$ Ω, $I = 100 \pm 10$ mA.

1. Exprimer l'incertitude ΔP en utilisant la notion de dérivée logarithmique (méthode 1).
2. Exprimer l'incertitude ΔP en utilisant la méthode 2.

Exercice 3 : Gain en tension d'un amplificateur à transistor

Le gain en tension d'un amplificateur à transistor est donné par l'expression :

$$A_v = \frac{v_{out}}{v_{in}} = -\frac{R_C||R_L}{r'_e}$$

On donne, $R_C =$ 3,6 kΩ, $R_L = 10$ kΩ et $r'_e = 23$ Ω. Leurs incertitudes respectives sont de 10 %.

1. On considère la grandeur électrique (2 résistances en dérivation), $R_{CL} = R_C||R_L$. Exprimer l'incertitude ΔR_{CL} (méthode 2) et donner sa valeur et son unité.
2. Exprimer l'incertitude ΔA_v (méthode 2) et donner sa valeur et son unité.