TD2 Mathématiques pour la Physique : Partie B

Objectif : Apprendre à manipuler les vecteurs et leurs opérations, notamment la dérivation.

1 Vecteurs

Un vecteur est un segment de droite orienté (flèche), qui représente une grandeur pour laquelle une quantité, une direction et un sens doivent être précisés. En Physique, un vecteur peut représenter un mouvement, une vitesse, une accélération, une force...

Pour un vecteur $\vec{u}$ dans l'espace avec les coordonnées cartésiennes (u_x, u_y, u_z), nous pouvons écrire :

$$\vec{u} = u_x\vec{i} + u_y\vec{j} + u_z\vec{k} \tag{1}$$

avec $\vec{i}$: le vecteur unitaire [1] colinéaire à l'axe x, $\vec{j}$: le vecteur unitaire colinéaire à l'axe y, et $\vec{k}$: le vecteur unitaire colinéaire à l'axe z.

u_x, u_y, u_z sont également appelées composantes. En Physique les composantes d'un vecteur sont souvent représentées par des lettres majuscules, d'où :

$$\vec{U} = U_x\vec{i} + U_y\vec{j} + U_z\vec{k} \tag{2}$$

La longueur du vecteur $\vec{U}$ est appelée norme (ou module) et est notée $\|\vec{U}\|$. Celle-ci est calculée :

Dans l'espace,

$$\|\vec{U}\| = \sqrt{U_x^2 + U_y^2 + U_z^2} \tag{3}$$

Dans le plan,

$$\|\vec{U}\| = \sqrt{U_x^2 + U_y^2} \tag{4}$$

Lorsque on travaille dans le plan, nous pouvons calculer l'angle entre un vecteur et un axe à l'aide des relations trigonométriques.

Considérons les vecteurs suivants :

- $\vec{A} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$
- $\vec{B} = 1\vec{i} - 5\vec{j}$
- $\vec{C} = -\frac{1}{2}\vec{A}$

1.1 Représentation graphique

a) Représenter ces vecteurs sur un graphique.

b) Calculer leurs normes.

1.2 Addition/soustraction

a) Rappeler la méthode graphique d'addition de deux vecteurs (par exemple avec $\vec{A}$ et $\vec{B}$).

b) Exprimer la somme de deux vecteurs à partir de ses composantes.

c) Dessiner et calculer :

- $\vec{A} + \vec{B}$
- $\vec{A} - \vec{B}$

1. vecteur unitaire : vecteur dont la longueur est égale à 1.

- $-\vec{A}+\vec{B}$
- $-\vec{A}-\vec{B}$

d) Calculer les normes des vecteurs résultants des opérations précédentes.

1.3 Produit scalaire

Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$, noté $\vec{U}\cdot\vec{V}$, est un scalaire (nombre) calculé par la relation :

Dans l'espace,

$$\vec{U}\cdot\vec{V} = U_xV_x + U_yV_y + U_zV_z \tag{5}$$

Dans le plan,

$$\vec{U}\cdot\vec{V} = U_xV_x + U_yV_y \tag{6}$$

En général, il existe la relation auxiliaire suivante :

$$\vec{U}\cdot\vec{V} = \|\vec{U}\|\|\vec{V}\|cos\theta \tag{7}$$

avec θ : l'angle entre les deux vecteurs.

a) Calculer le produit scalaire $\vec{A}\cdot\vec{A}$ et l'angle θ entre les vecteurs. Conclure par rapport à $\|\vec{A}\|$.

b) Calculer le produit scalaire $\vec{A}\cdot\vec{B}$ et l'angle θ entre les vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$.

2 Dérivation des vecteurs

Considérons un vecteur $\vec{R}$ qui évolue en fonction du temps (i.e. $\vec{R}(t)$). Nous pouvons écrire en coordonnées cartésiennes :

$$\vec{R}(t) = R_x(t)\vec{i} + R_y(t)\vec{j} + R_z(t)\vec{k} \tag{8}$$

Si l'on s'intéresse au taux de variation instantané de $\vec{R}(t)$ sur un intervalle infinitésimal dt, la dérivée de $\vec{R}(t)$ par rapport à la variable t peut être exprimée :

$$\frac{d\vec{R}(t)}{dt} = \frac{dR_x(t)}{dt}\vec{i} + \frac{dR_y(t)}{dt}\vec{j} + \frac{dR_z(t)}{dt}\vec{k} \tag{9}$$

Cette dérivée est obtenue en utilisant l'expression du vecteur $\vec{R}(t)$ en coordonnées cartésiennes et les règles de dérivation d'une somme de fonctions.

Pour les vecteurs suivants :

- $\vec{R_1}(t) = t\vec{i} + (t+t^2/2)\vec{j} - ((4/\pi^2)sin(\pi t/2))\vec{k}$
- $\vec{R_2}(t) = (v_xt + x_0)\vec{i} + (-gt^2/2 + v_yt + y_0)\vec{j}$; avec $\vec{v} = (v_0cos\theta)\vec{i} + (v_0sin\theta)\vec{j}$ et g, v_0, x_0, y_0, θ : constantes.
- $\vec{R_3}(t) = (rcos(\omega t))\vec{i} + (rsin(\omega t))\vec{j}$; r, ω : constantes.

a) Calculer les dérivées des vecteurs ci-dessus par rapport à la variable t.

b) Calculer la norme des vecteurs résultants quand t = 0.