TD2 Mathématiques pour la Physique : Partie A

Objectif : Apprendre à dériver/intégrer de la même façon que nous apprenons les tables de multiplication.

1 Dérivation

La dérivée d'une fonction f correspond au taux de variation instantanée de f sur un intervalle infinitésimal *dt*. Ainsi, la dérivée de f(t) par rapport à la variable t est définie par :

$$\frac{df}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} \tag{1}$$

avec Δt : une variation finie de t. Les notations $\frac{df}{dt} = f' = \dot{f}$ sont également valables.

1.1 Dérivées des fonctions

1.1.1 Dérivées des fonctions simples

Calculer les dérivées première et seconde des fonctions suivantes :

a) $f = 1 + 6t$

b) $f = 4t^2 + 2t^3$

c) $f = (1 + 2t)^3$

d) $f = \sqrt{1 + 5t}$

e) $f = (t + 7t^2)^{1/3}$

1.1.2 Dérivée d'un produit de fonctions simples

a) Rappeler la règle de dérivation du produit $u \cdot v$, où u et v sont deux fonctions dérivables.

b) Calculer la dérivée de la fonction $f = (\sqrt{1 + 5t})(t + 7t^2)^{1/3}$.

1.2 Comparaison de deux méthodes de dérivation

Considérons la fonction :

$$f(t) = \frac{6(4t^2 + 2t^3)}{(1 + 2t)^3} \tag{2}$$

1.2.1 Dérivation classique

a) Rappeler la règle de dérivation du quotient $\frac{u}{v}$, où u et v sont deux fonctions dérivables.

b) Calculer la dérivée de la fonction f.

1.2.2 Dérivation avec la méthode « Feynman »

Lorsque une fonction f(t) est de la forme $f = k \cdot u^a \cdot v^b \cdot w^c ...$, avec k : constante ; u, v, w... : fonctions dérivables ; et a, b, c... : constantes ; nous pouvons utiliser la méthode du physicien Richard Feynman pour la dérivation :

$$\frac{df}{dt} = f \cdot \left[a\frac{du/dt}{u} + b\frac{dv/dt}{v} + c\frac{dw/dt}{w} + ... \right] \tag{3}$$

Vérifiez pour l'équation 2 le résultat précédent (1.2.1) en utilisant cette fois-ci la méthode Feynman.

N.B : Cette méthode ne peut pas être applicable aux fonctions sinusoïdales ni exponentielles.

2 Intégration

Le processus inverse de la dérivation est l'*intégration*. L'intégrale $\int$ d'une fonction f correspond à l'aire sous la courbe décrite par celle-ci entre deux points a et b. Lorsque l'intégrale est dite indéfinie, nous nous intéresserons plus précisément au calcul de la primitive de f, plus un terme constante C qui dépend des conditions initiales F(t=0). Il vient :

$$F(t) = \int f(t)dt + C \tag{4}$$

avec $F' = f$ et C = cte.

2.1 Calcul de primitives

Calculer les primitives des fonctions suivantes (avec C = 0) :

a) $f = 1 + 6t$

b) $f = 4t^2 + 2t^3$

c) $f = (1 + 2t)^3$

d) $f = \sqrt{1 + 5t}$

e) $f = cos(\omega t)$; ω : constante

f) $f = sin(\omega t)$; ω : constante

g) $f = e^{-\alpha t}$; α : constante

2.2 Calcul des primitives vérifiant une condition initiale

Calculer les primitives des fonctions suivantes :

a) $f = a_0$; avec F(t=0) = v_0 ; a_0, v_0 : constantes

b) $f = a_0 t + v_0$; avec F(t=0) = x_0 ; a_0, v_0, x_0 : constantes