**MÉTODOS CUANTITATIVOS - PROGRAMACIÓN DINÁMICA**

**GUÍA PARA LA TERCERA CLASE COMPUTACIONAL**

Profesor: Eduardo Engel. Semestre Otoño, 2025.
Ayudante: Agustín Farías Lobo. Esta versión: 6 de marzo de 2025.

**Pregunta I. Modelo neoclásico de crecimiento**

Considere el modelo neoclásico de crecimiento en su forma determinística. En clases se llegó a que la ecuación de Bellman de este problema es

$$v(k) = \max_{k' \in \Gamma(k)} \{F(k, k') + \beta v(k')\}.$$

Es posible mostrar que cuando $\delta \in (0, 1)$, la ecuación de Bellman de este problema está dada por

$$v(k) = \max_{k'} \{u(f(k) - k' + (1 - \delta)k) + \beta v(k')\}. \tag{1}$$

Las funciones $u(\cdot)$ y $f(\cdot)$ son estrictamente cóncavas y satisfacen las condiciones de Inada. En particular, asuma las siguientes formas funcionales y parametrización:

$$u(c) = \begin{cases} \ln(c) & \text{si } \sigma = 1, \\ \frac{c^{1-\sigma}-1}{1-\sigma} & \text{si } \sigma \neq 1, \end{cases}$$

$$f(k) = k^{\alpha},$$

$$\beta = 0,95, \quad \alpha = 0,33, \quad \delta = 0{,}1, \quad \sigma = 2.$$

Resolveremos el modelo de crecimiento determinístico mediante el método de VFI. Establecemos que existe convergencia si el máximo del módulo de la diferencia entre las iteraciones de la función valor es menor a $\epsilon = 10^{-6}$.

1. A partir de las condiciones de primer orden del problema secuencial, encuentre el estado estacionario de $k$. Es decir, el valor de $k$ tal que $k^{ss} = k_t = k_{t+1}$ para todo $t$.

2. Genere una grilla para $k$ que contenga 1.000 valores equidistantes entre 0.1 y $2k^{ss}$. Ella representará a los posibles valores de $k$ y $k'$ ¿Por qué es conveniente crear una grilla hasta $2k^{ss}$? Llame `nk` al número de columnas de esta grilla.

3. Cree una matriz `C` de dimensiones `nk` $\times$ `nk`, donde el elemento $\mathtt{C}_{ij}$ debe estar dado por el consumo cuando $k$ es el $i$-ésimo elemento de la grilla de $k$ y $k'$ es el $j$-ésimo elemento de la grilla de $k'$.

4. Cree una función `U.m` que tome como argumento una matriz de valores de consumo y el valor de $\sigma$, y que entregue una matriz `U` donde cada elemento $\mathtt{U}_{ij}$ sea el valor de $u(\mathtt{C}_{ij})$. La misma función deberá establecer que $u(c) = -10^{10}$ cuando $c \leq 0$.

5. Con la función `U.m`, cree una matriz con los valores de la utilidad $u(c)$ para cada valor de la matriz `C`.

6. Realizamos el procedimiento de iteración de la función valor de acuerdo al procedimiento que sigue:

   *a*) Comenzamos con un guess inicial: $v_0(k) = 0$. Dado que buscamos encontrar una solución a una ecuación funcional, el guess inicial debe ser un vector de `nx` elementos.

   *b*) Actualice la función valor. Para ello realizamos un loop que consiste en: (i) cree una matriz que calcule
   $$u(k^\alpha - k' + (1-\delta)k) + \beta v_0(k')$$
   para cada $k$ y $k'$; (ii) aplique la función `max` a la matriz anterior, encontrando el máximo en cada fila (por lo que la función opera sobre las columnas); (iii) llame `Vn` el vector que contiene al máximo de cada columna, e `index` al vector que contiene el índice del valor de $x'$ que maximizó cada fila.

   *c*) El vector `Vn` resultante es la primera actualización de la función valor, $v_1(x)$, y el vector `index` contiene los índices de los valores de $k'$ que maximizan la matriz para cada $k$. A partir de `index` obtenga la primera actualización de la función de política ($g(k)$) y guárdela en un vector `k_pol`.

   *d*) A partir de la grilla de $k$ y de `k_pol`, obtenga la primera actualización de la función de política del consumo y guárdela en un vector `c_pol`.

   *e*) A partir de la grilla de $k$ y de `k_pol`, obtenga la primera actualización de la función de política de la inversión y guárdela en un vector `i_pol`.

   *f*) Compute la distancia entre $v_0$ y $v_1$ como
   $$d(v_0, v_1) = \max_k \left| v_0(k) - v_1(k) \right|.$$

   *g*) Si $d(v_0, v_1) < \epsilon$, donde $\epsilon$ es el parámetro de precisión, entonces hemos encontrado un punto fijo, por lo que $v_1$ resuelve la ecuación de Bellman. Es decir, $v_1(k) = v(k)$. En otro caso, es necesario repetir el procedimiento descrito entre b) y f) utilizando como guess el último $v_n$ que obtuvo, con $n = 1, 2, ...$, hasta que se cumpla la condición.

   *h*) Cuando se cumpla la condición, termine el loop utilizando `break`.

7. Presente el tiempo que demoró en alcanzar convergencia y el número de iteraciones necesarias.

8. Grafique $v(k)$ contra la grilla de $k$ y $g(k)$ contra $k$. Presente ambos gráficos en una única figura.

9. Grafique $i(k)$, $c(k)$ y $g(k)$ contra la grilla de $k$ en un único gráfico. Provea la intuición detrás del comportamiento observado.

10. Repita el procedimiento realizado en 6. para $\beta \in \{0{,}99; 0{,}95; 0{,}9; 0{,}8; 0{,}5\}$. Grafique la función valor y la función de política contra la grilla de $k$ para cada valor de $\beta$.

11. A continuación comparamos la solución de la ecuación de Bellman obtenida de forma analítica vista en clases y con la solución obtenida numéricamente. Para ello suponga que
    $$\delta = 1 \quad \text{y} \quad \sigma = 1.$$
    Como se discutió en clases, la solución a la ecuación de Bellman y la función de política en este contexto están dadas por
    $$\begin{aligned} V(k) &= \frac{1}{(1-\alpha\beta)(1-\beta)}\left[(1-\alpha\beta)\ \ln(1-\alpha\beta) + \alpha\beta\ \ln(\alpha\beta)\right] + \frac{\alpha}{1-\alpha\beta}\ln(k), \\ g(k) &= \alpha\beta k^\alpha. \end{aligned}$$

Compare en un gráfico la función valor obtenida analíticamente y la obtenida de forma numérica. Realice lo mismo para la función de política.

12. Siga suponiendo $\delta = 1$, pero ahora resuelva numéricamente la ecuación de Bellman para $\sigma = 0{,}99999$ y para $\sigma = 1{,}00001$. Compare la función valor obtenida para cada caso con la función valor encontrada en el ítem 10.

A continuación suponemos que la función de producción $f(z_t, k_t)$ está dada por $z_t k_t^{\alpha}$, donde $z_t$ es un proceso estocástico markoviano. En particular, suponemos que $z_t \in \{0{,}9, 1{,}1\}$ sigue una cadena de Markov con matriz de transición:

$$P = \begin{bmatrix} 0{,}85 & 0{,}15 \\ 0{,}15 & 0{,}85 \end{bmatrix}.$$

Con ello, el problema secuencial es

$$\begin{array}{ll} \underset{\{c_t, k_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}}{\text{máx}} & \mathrm{E}_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t), \\ \text{s.a} & c_t + k_{t+1} - (1-\delta)k_t \leq z_t k_t^{\alpha}, \\ & c_t, k_{t+1} \geq 0, \\ & k_0 \text{ dado.} \end{array}$$

En lo que sigue, suponemos la siguiente parametrización:

$$\beta = 0,95, \quad \alpha = 0,33, \quad \delta = 0{,}1, \quad \sigma = 2, \quad \epsilon = 10^{-6}.$$

12. Cree la matriz de transición $P$ y una grilla con los posibles valores de $z$. Llame `nz` al número de columnas de tal grilla.

13. Cree un arreglo tridimensional `C` tal que para cada valor de $k$, $k'$ y $z$, obtenemos $c$.

14. Con la función `U.m`, cree una matriz con los valores de la utilidad $u(c)$ para cada valor del arreglo `C`.

15. Resolvemos el problema utilizando el método VFI. Para ello realizamos el siguiente procedimiento:

    *a*) Comenzamos con un guess inicial: $v_0(x, z) = 0$.

    *b*) Actualizamos la función valor. Para ello (i) fijamos las variables de estado $k$ y $z$; (ii) para cada valor de $k$ y de $z$, calcule
    $$T(k, z) = u(c) + \beta\, \mathrm{E}[v_0(k', z')|z];$$
    (iii) encuentre el valor de $k'$ que maximiza $T$ dado $k$ y $z$, y el valor máximo de $T$ dado $k$ y $z$. Repita esto para cada valor de $k$ y $z$.

    *c*) Llame al vector que contiene el máximo de $T$ dado $k$ y $z$, $v_1(k, z)$.

    *d*) Compute la distancia entre $v_0$ y $v_1$ como
    $$d(v_0, v_1) = \underset{k,z}{\text{máx}} \left| v_0(k, z) - v_1(k, z) \right|.$$

    *e*) Si $d(v_0, v_1) < \epsilon$, donde $\epsilon$ es el parámetro de tolerancia, entonces hemos encontrado un punto fijo, por lo que $v_1$ resuelve la ecuación de Bellman. Es decir, $v_1(k, z) = v(k, z)$. En otro caso, es necesario repetir el procedimiento descrito en b), c) y d) utilizando como guess el último $v_n(k, z)$ que obtuvo, con $n = 1, 2, ...$, hasta que se cumpla la condición.

    *f*) En b) obtuvo el valor de $k'$ que maximiza $T$ dados $k$ y $z$. Ese $k'$ corresponde a la función de política $g(x, z)$.

    *g*) Termine el loop utilizando `break`.

16. Presente un gráfico de $v(x, z)$ contra $x$, y un gráfico de $g(x, z)$ contra $x$. Provea intuición económica detrás de sus resultados.