MÉTODOS CUANTITATIVOS - PROGRAMACIÓN DINÁMICA
GUÍA PARA LA SEGUNDA CLASE COMPUTACIONAL

Profesor: Eduardo Engel. Semestre Otoño, 2025.
Ayudante: Agustín Farías Lobo. Esta versión: 5 de marzo de 2025.

Pregunta I. Cómo consumir una torta. Caso estocástico.

En clases se revisó el problema de “Cómo consumir una torta” en su versión estocástica. La ecuación de Bellman de este problema es

$$v(x,z) = \max_{0\leq c\leq x} \{zu(c) + \beta v(x-c,z')\}.$$

Tal como lo hicimos en la primera clase computacional, dado que $x' = x - c$, es posible reescribir la ecuación de Bellman solo en términos de z, x y x':

$$v(x,z) = \max_{0\leq x'\leq x} \{zu(x-x') + \beta v(x',z')\}. \tag{1}$$

Inicialmente suponemos que z_t sigue un proceso estocástico i.i.d. En particular, suponemos que

$$\Pr(z_t = 0{,}5) = \Pr(z_t = 1) = \Pr(z_t = 1{,}5) = 1/3.$$

En lo que sigue resolvemos numéricamente este problema usando el método de iteración de la función valor o value function iteration (VFI). Sea ϵ el valor que define la precisión de la solución numérica. Los valores de los parámetros y la forma funcional de $u(c)$ que utilizaremos serán

$$\beta = 0{,}96, \qquad \epsilon = 10^{-6}, \qquad u(c) = \log c.$$

1. Genere una grilla de 1.000 valores entre 0.1 y 20. Ella representará a los posibles valores de x y de x'. Defina `nx` como el número de columnas de la grilla.

2. Genere una grilla para los posibles valores de z. Llame `nz` al número de columnas de la grilla.

3. Genere un vector fila `pr` con las probabilidades asociadas a cada posible estado de z.

4. Cree una matriz `C` de `nx` $\times$ `nx`, donde el elemento C_{ij} está dado por la diferencia entre el i-ésimo elemento de la grilla de x y el j-ésimo elemento de la grilla de x'.

5. Cree un arreglo tridimensional `Uz` de dimensiones `nx` $\times$ `nx` $\times$ `nz`, donde el elemento $\texttt{Uz}_{ijk}$ está dado por $z_k C_{ij}$. Fije la utilidad en -10^{10} si $c_t \leq 0$.

6. Resolvemos el problema utilizando el método VFI. Para ello realizamos el siguiente procedimiento:

   a) Comenzamos con un guess inicial: $v_0(x,z)$. Dado que buscamos encontrar una solución a una ecuación funcional, el guess inicial debe ser una matriz de `nx` $\times$ `nz`. En este caso, utilizaremos $v_0(x,z) = 0_{\texttt{nx}\times\texttt{nz}}$.

   b) Inicialice dos matrices: `Vn`, una matriz de `nx` $\times$ `nz` para guardar los valores de cada actualización de la función valor; y una matriz `x_pol` de `nx` $\times$ `nz` para guardar los valores óptimos de x' dados x y z.

c) Actualice la función valor. Para ello realizamos un loop que consiste en: (i) fije la variable de estado z en algún punto de su grilla; (ii) calcule $\mathrm{E}[v_0(x', z')]$ usando el guess inicial y el vector `pr`; (iii) para cada valor de x y x' calcule

$$zu(x - x') + \beta\,\mathrm{E}[v_0(x', z')],$$

donde su resultado debería ser una matriz de `nx` $\times$ `nx`; (iv) encuentre el máximo por fila de la matriz resultante y asígnelo en una de las columnas de `Vn`, y encuentre el índice del valor de x' que maximiza y asígnelo en un vector llamado `index`; (iv) obtenga el x' óptimo para cada x y z a partir de `index` y de la grilla de x; y (v) repita esto para cada valor de la grilla de z.

d) La matriz `Vn` resultante es la primera actualización de la función valor: $v_1(x, z)$.

e) La matriz `x_pol` contiene los valores de x' que maximizaban la matriz para cada x y cada z. A partir de `x_pol` obtenga la primera actualización de la función de política del consumo y guárdela en un vector `c_pol`.

f) Compute la distancia entre v_0 y v_1 como

$$d(v_0, v_1) = \max_{x,z} \left|v_0(x, z) - v_1(x, z)\right|.$$

g) Si $d(v_0, v_1) < \epsilon$, donde ϵ es el parámetro de precisión, entonces hemos encontrado un punto fijo, por lo que v_1 resuelve la ecuación de Bellman. Es decir, $v_1(x, z) = v(x, z)$. En otro caso, es necesario repetir el procedimiento descrito entre c) y f) utilizando como guess el último $v_n(x, z)$ que obtuvo, con $n = 1, 2, ...$, hasta que se cumpla la condición.

h) Cuando se cumpla la condición, termine el loop utilizando `break`.

7. Presente el tiempo que demoró su código en alcanzar convergencia y el número de iteraciones necesarias.

8. Grafique la aproximación numérica de $v(x, z)$ contra x.

9. Grafique $g(x, z)$ contra x. Incluya en su gráfico una recta de 45 grados.

10. Grafique $c(x, z)$ contra x. Provea intuición económica.

A continuación levantamos el supuesto de que z sigue un proceso i.i.d. Asumiremos que $z \in \{0{,}5, 1{,}5\}$ sigue un cadena de Markov de primer orden con una matriz de transición dada por

$$P = \begin{bmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{bmatrix}.$$

11. Redefina la grilla con los posibles valores de z.

12. Cree una matriz `P` que describa la matriz de transición del proceso z_t.

13. Redefina el arreglo tridimensional `Uz` para que describa correctamente los posibles valores de $z_t u(c_t)$ dado c_t y z_t. El arreglo `Uz` debería ser de dimensiones `nx` $\times$ `nx` $\times$ `nz`. Fije la utilidad en -10^{10} si $c_t \leq 0$.

14. Resuelva el problema utilizando el método VFI. Note que el procedimiento a seguir es análogo al realizado en el ítem 6.

15. Presente en una única figura un gráfico de $v(x, z)$ contra x, un gráfico de $g(x, z)$ contra x, y un gráfico de $c(x, z)$ contra x.