MÉTODOS CUANTITATIVOS - PROGRAMACIÓN DINÁMICA
GUÍA PARA LA PRIMERA CLASE COMPUTACIONAL

Profesor: Eduardo Engel. Semestre Otoño, 2025.
Ayudante: Agustín Farías Lobo. Esta versión: 3 de marzo de 2025.

Pregunta I. Cómo consumir una torta.

En clases se revisó el problema de "Cómo consumir una torta" y se concluyó que la formulación recursiva de este problema era

$$v(x) = \max_{0 \le c \le x} \{u(c) + \beta v(x - c)\}.$$

Dado que $x' = x - c$, es posible reescribir la ecuación de Bellman solo en términos de x y x':

$$v(x) = \max_{0 \le x' \le x} \{u(x - x') + \beta v(x')\}. \tag{1}$$

En lo que sigue resolvemos numéricamente la ecuación de Bellman (1) usando el método de iteración de la función valor o value function iteration (VFI). Definiremos ϵ como el valor que define la precisión de la solución numérica. Los valores de los parámetros y la forma funcional de $u(c)$ que utilizaremos serán

$$\beta = 0{,}96, \qquad \epsilon = 10^{-6}, \qquad u(c) = \log c.$$

1. Genere una grilla de 1000 valores entre 0.1 y 10. Ella representará a los posibles valores de x y de x' sobre los que trabajaremos. Defina `nx` como el número de columnas de la grilla.

2. Cree una matriz `C` de `nx` $\times$ `nx`, donde el elemento C_{ij} está dado por la diferencia entre el i-ésimo elemento de la grilla de x y el j-ésimo elemento de la grilla de x'.

3. Cree una matriz `U` de `nx` $\times$ `nx`, donde $U_{ij} = u(C_{ij})$. Fije $u(C_{ij})$ en -10^{10} si $C_{ij} \le 0$.

4. Resolvemos el problema utilizando el método VFI. Para ello realizamos el siguiente procedimiento:

   a) Comenzamos con un guess inicial: $v_0(x)$. Dado que buscamos encontrar una solución a una ecuación funcional, el guess inicial debe ser un vector de `nx` elementos. El valor sugerido en clases es $v_0(x_j) = \log x_j$, donde x_j es el j-ésimo elemento de la grilla de x.

   b) Inicialice tres vectores: `Vn`, un vector de `nx`$\times 1$ para guardar los valores de cada actualización de la función valor; `index`, un segundo vector de `nx` $\times$ 1 para guardar los índices de x' que maximizan un vector auxiliar para cada x; y un vector auxiliar `V_aux` de 1 $\times$ `nx`.

   c) Actualice la función valor. Para ello realizamos un loop que consiste en: (i) fije la variable de estado x en algún punto de la grilla; (ii) para cada valor de x' calcule

   $$u(x - x') + \beta v_0(x')$$

   y guarde sus resultados en el vector auxiliar antes inicializado; (iii) encuentre el máximo del vector auxiliar y asígnelo en `Vn`, y encuentre el índice del valor de x' que lo maximiza y asígnelo en `index`; y (iv) repita esto para cada valor de la grilla de x.

   d) El vector `Vn` resultante es la primera actualización de la función valor: $v_1(x)$.

e) El vector `index` contiene los índices de los valores de x' que maximizaban el vector auxiliar para cada x. A partir de `index` obtenga la primera actualización de la función de política y guárdela en un vector `x_pol`.

f) A partir de la diferencia entre la grilla de x y `x_pol`, obtenga la primera actualización de la función de política del consumo y guárdela en un vector `c_pol`.

g) Compute la distancia entre v_0 y v_1 como

$$d(v_0, v_1) = \max_x \left|v_0(x) - v_1(x)\right|.$$

h) Si $d(v_0, v_1) < \epsilon$, donde ϵ es el parámetro de precisión, entonces hemos encontrado un punto fijo, por lo que v_1 resuelve la ecuación de Bellman. Es decir, $v_1(x) = v(x)$. En otro caso, es necesario repetir el procedimiento descrito entre c) y g) utilizando como guess el último v_n que obtuvo, con $n = 1, 2, ...$, hasta que se cumpla la condición.

i) Cuando se cumpla la condición, termine el loop utilizando `break`.

5. Presente el tiempo que demoró su código en alcanzar convergencia y el número de iteraciones necesarias.

6. Grafique la aproximación numérica de $v(x)$ contra x.

7. Grafique $c(x)$ contra x. Incluya en su gráfico una recta de 45 grados.

8. Repita el procedimiento descrito en 4, pero con las siguientes modificaciones:

   - En lugar de inicializar vectores, fijar x, calcular $u(x - x') + \beta v_0(x')$ para cada x', y repetir ello para cada x; cree una matriz auxiliar de `nx` $\times$ `nx` donde el elemento de la fila i y columna j esté dado por $u(x_i - x'_j) + \beta v_0(x'_j)$, donde x_k es el k-ésimo elemento de la grilla para x y x'_j es el j-ésimo elemento de la grilla de x'.
   - Aplique la función `max` a la matriz anterior, encontrando el máximo en cada fila (por lo que la función opera sobre las columnas). Llame `Vn` el vector que contiene al máximo de cada columna, e `index` al vector que contiene el índice del valor de x' que maximizó cada fila.

   ¿Cambia el tiempo necesario para alcanzar convergencia?

9. Repita el procedimiento de VFI y guarde los valores de d para cada iteración y compruebe que la convergencia de la función valor es monótona.

10. A continuación utilizamos una manera diferente para resolver el problema. En lugar de evaluar convergencia enfocándonos en $d(v_n, v_{n-1})$, evaluamos la convergencia observando la función de política del consumo. Este método de solución numérica se conoce policy function iteration (PFI).

    En este caso alcanzamos una aproximación numérica de la solución de la ecuación de Bellman cuando cumplimos la siguiente condición:

    $$d(c_n, c_{n-1}) = \max_x \left|c_n(x) - c_{n-1}(x)\right| \ < \ \epsilon.$$

    En tal caso, la función de política es $c(x) = c_n(x)$ y la función valor es $v = u(c(x)) + \beta v(x')$.

    Resuelva el problema utilizando PFI. Note que el procedimiento iterativo a realizar es muy similar al descrito en los ítems 4. y 8, pero cambiando el criterio de convergencia que se evalúa en cada iteración.

11. Compare en un gráfico la función de política para el consumo derivada de forma analítica en clases, la función de política obtenida por el método VFI, y la función de política obtenida por el método PFI. Realice lo mismo para la función de valor obtenida bajo las tres metodologías.