УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
А. А. Воронов
15 июня 2023 г.

ПРОГРАММА

по дисциплине: **Теория вероятностей**
по направлению подготовки: 09.03.01 «Информатика и вычислительная техника»
физтех-школа: **ВШПИ**
кафедра: **высшей математики**
курс: 2
семестр: 3

лекции — 30 часов
практические (семинарские) занятия — 30 часов
лабораторные занятия — нет

Диф. зачёт — 3 семестр

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ — 60

Самостоятельная работа:
теор. курс — 30 часов

Программу составил
к. ф.-м. н., доцент С. В. Резниченко

Программа принята на заседании кафедры
высшей математики 11 апреля 2023 г.

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н., профессор Г. Е. Иванов

1. Комбинаторика — математический аппарат элементарной теории вероятностей. Основные понятия комбинаторики: выбор с возвращением и без возвращения, упорядоченные и неупорядоченные выборки; размещения, перестановки, сочетания. Свойства сочетаний, некоторые комбинаторные тождества. Биномиальная формула. Примеры применения комбинаторики в статистической физике: физические статистики Максвелла–Больцмана, Бозе–Эйнштейна, Ферми–Дирака.*
2. Эмпирические основы теории вероятностей. Статистическая устойчивость частот. Вероятностное пространство как модель случайного эксперимента.
3. Дискретное вероятностное пространство. Конечное вероятностное пространство. Классическое определение вероятности. Геометрические вероятности.
4. Исчисление вероятностей в дискретном случае. Основные операции над событиями, алгебра событий. Теорема сложения для n событий. Условная вероятность. Формула полной вероятности, формула Байеса. Теорема умножения для n событий. Независимость событий.
5. Некоторые классические дискретные вероятностные модели и распределения: биномиальное, полиномиальное, геометрическое, гипергеометрическое, пуассоновское.
6. Случайные величины и их характеристики. Независимость случайных величин.
7. Схема Бернулли: закон больших чисел, предельная теорема Пуассона, локальная и интегральная предельные теоремы Муавра–Лапласа. Некоторые следствия закона больших чисел: теорема Вейерштрасса о равномерном приближении непрерывной на отрезке функции полиномами.
8. Случайная величина в общей теоретико-вероятностной схеме. Нормальное распределение. Суммы независимых случайных величин. Характеристические и производящие функции и их свойства. Некоторые применения метода характеристических функций: закон больших чисел при отсутствии дисперсий; центральная предельная теорема.
9. Условное математическое ожидание.
10. Многомерное нормальное распределение.

Знаком («») отмечен необязательный материал.*

Литература

1. *Ширяев А. Н.* Вероятность. — Москва : Наука, 1989 – 2-е изд. и все последующие. — 640 с.
2. *Тутубалин В. Н.* Теория вероятностей и случайных процессов. — Москва : Изд-во МГУ, 1992. — 400 с.
3. *Крамер Г. М.* Математические методы статистики / пер. с англ. — Москва : Мир, 1975. — 648 с.
4. *Худсон Х.* Статистика для физиков / пер. с англ. — Москва : Мир, 1967. — 242 с.
5. *Захаров В. К., Севастьянов Б. А., Чистяков В. П.* Теория вероятностей. — Москва : Наука, 1983. — 160 с.
6. *Феллер В. М.* Введение в теорию вероятностей и её приложения. В 2-х томах / пер. с англ. Т. 1. — Москва : Мир, 1984. — 528 с.
7. *Разанов Ю. А.* Теория вероятностей, случайные процессы и математическая статистика. — 2-е изд. — Москва : Наука, 1989. — 320 с.
8. *Чистяков В. П.* Курс теории вероятностей. — 2-е изд. и все последующие. — Москва : Наука, 1982. — 256 с.

ЗАДАНИЯ

Литература

1. *Зубков А. М., Севастьянов Б. А., Чистяков В. П.* Сборник задач по теории вероятностей. — 2-е изд. — Москва : Наука, 1989. — 320 с. (С)
2. *Захаров В. К., Севастьянов Б. А., Чистяков В. П.* Теория вероятностей. — Москва : Наука, 1983. — 160 с. (Т)

Замечания

Задачи и пункты программы, отмеченные знаком «*», являются необязательными для всех студентов.

ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 6–12 октября)

I. Элементы комбинаторики

1. Имеются m белых и n чёрных шаров, причём $m > n$. Сколькими способами можно разложить все шары в ряд так, чтобы никакие два чёрных шара не лежали рядом?

2. Сколько различных пар можно образовать из 28 костей домино так, чтобы кости, входящие в пару, можно было приложить друг к другу?

3. Сколькими способами 12 полтинников можно разложить по пяти различным пакетам, если ни один из пакетов не должен быть пустым?

4. а) Доказать, что число всевозможных подмножеств конечного множества, содержащего n элементов, равно 2^n.

б) В множестве из n элементов выбираются подмножества A и B так, что $A \subset B$ и $A \neq B$. Доказать, что количество таких пар (A, B) равно $3^n - 2^n$.

5. Доказать, что множество из n элементов можно разбить $\frac{n!}{m_1!\, m_2! \ldots m_k!}$ различными способами на k попарно непересекающихся подмножеств, содержащих по m_1, m_2, …, m_k элементов, где $m_1 + m_2 + \cdots + m_k = n$ и числа m_1, m_2, …, m_k попарно различны.

6. Сколькими различными способами можно разбить множество из 10 элементов на два подмножества из 3 элементов и два подмножества из 2 элементов?

7. Для пилки дров выделено 14 человек. Сколькими способами их можно разделить на пары?

8. Сколькими способами можно выбрать из полной колоды, содержащей 52 карты, 6 карт так, чтобы среди них были все четыре масти? (В полной колоде имеется по 13 карт каждой масти.)

9. Найти номер наибольшего члена в разложении $(a+b)^n$, если

а) $a = \frac{2}{3}, \quad b = \frac{1}{3}, \quad n = 100;$
б) $a = b = \frac{1}{2}, \quad n = 100;$
в) $a = b = \frac{1}{2}, \quad n = 99.$

10. Доказать тождества:

а) $C_n^k = C_n^{n-k}, \quad$ если $\quad 0 \le k \le n;$

б) $C_{n+1}^{k+1} = C_n^k + C_n^{k+1}, \quad$ если $\quad 0 \le k \le n-1;$

в) $\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n;$

г) $\sum_{k=0}^{n} \left(C_n^k\right)^2 = C_{2n}^n;$

д) $C_n^n + C_{n+1}^n + \cdots + C_{n+m-1}^n = C_{n+m}^{n+1}, \quad$ если $\quad m \ge 1.$

11. Доказать, что сумма чисел C_n^k по всем чётным k равна сумме чисел C_n^k по всем нечётным k.

II. Вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{A}, P)$

А) Пространство элементарных событий Ω

12. Из урны, содержащей M различных шаров, наудачу последовательно извлекаются n шаров. Рассмотреть два способа выбора: с возвращением и без возвращения; описать для каждого способа структуру пространства элементарных событий и подсчитать число элементов в Ω в случае упорядоченных и неупорядоченных выборок.

Б) Алгебра событий $\mathcal{A}$

13. Пусть A и B — произвольные события. Проверить справедливость следующих соотношений:

$$\overline{(\overline{A})} = A; \quad A \setminus B = A \setminus AB = A\overline{B}; \quad A \setminus (A \setminus B) = AB;$$

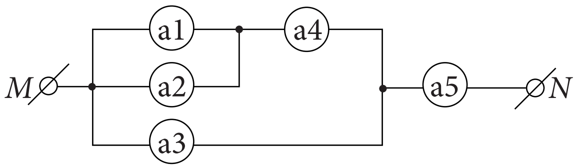
$$A \subseteq B \Rightarrow \overline{B} \subseteq \overline{A}; \quad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}; \quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B};$$

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C);$$

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C).$$

14. Пусть $A_n = \left[a, a + \frac{1}{n}\right)$, $B_n = \left[a, b - \frac{1}{n}\right]$, где $n = 1, 2, \ldots,$ a и b — действительные числа. Найти $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ и $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$.

15. Электрическая цепь между точками M и N составлена по схеме, приведённой на рисунке.



Выход из строя элемента a_i — событие A_i $(i = 1, \ldots, 5)$. Записать выражения для событий C и $\overline{C}$, если C означает разрыв в цепи.

16. Пусть $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ — две алгебры подмножеств Ω с общей единицей $E = \Omega$. Доказать, что $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2$ — также алгебра.

В) Вероятность P

17. Пусть A — некоторое событие, причём $P(A) = 0$, B — произвольное событие. Найти $P(AB)$.

18. Последовательность событий A_n такова, что $A_n \supseteq A_{n+1}$ для каждого $n = 1, 2, \ldots$ Доказать, что существует $\lim_{n\to\infty} P(A_n)$.

III. Классическое определение вероятности. Геометрические вероятности. Дискретное вероятностное пространство

19. Что вероятнее: выиграть у равносильного противника 3 партии из четырёх или 5 из восьми (ничьих не бывает)?

20. С. 1.1–1.4.

21*. С. 1.10.

22. С. 2.7.

23. С. 2.74.

24. (Т. §1. Задача 4.) Найти вероятность того, что дни рождения 12 человек приходятся на разные месяцы года.

25. (Т. §1. Задача 5.) Участник лотереи «Спортлото» заполнил две карточки так, что все зачёркнутые им номера на обеих карточках — разные. Найти вероятность того, что участник не угадал ни одного номера.

26. (Т. §1. Задача 11.) В n конвертов разложено по одному письму n адресатам. На каждом конверте наудачу написан один из n адресов. Найти вероятность p_n того, что хотя бы одно письмо отправится по назначению. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty} p_n$.

27. (Т. §1. Задача 10.) Стержень длиной l разломан в двух наудачу выбранных точках. Чему равна вероятность того, что из полученных кусков можно составить треугольник?

28. Два лица A и B условились встретиться в определённом месте между 12 часами и часом. Пришедший первым ждёт другого в течение 20 минут, после чего уходит. Чему равна вероятность встречи лиц A и B, если приход каждого из них в течение указанного часа может произойти наудачу и моменты прихода независимы?

29. (Парадокс Бертрана.) В круге наудачу выбирается хорда. Чему равна вероятность того, что её длина превзойдёт длину стороны правильного вписанного треугольника?

IV. Условная вероятность. Формула полной вероятности. Формула Байеса. Независимость событий

30. С. 2.10.

31. С. 1.6.

32. С. 2.43.

33*. С. 2.79.

34. (Т. §2. Задача 12.) Вероятность того, что молекула, испытавшая в момент $t = 0$ столкновение с другой молекулой и не имевшая других столкновений до момента t, испытает столкновение в промежуток времени $(t, t + h)$, равна $\lambda h + o(h)$, $h \to 0$. Найти вероятность того, что время свободного пробега будет больше t.

35. (Т. §2. Задача 11.) По каналу связи может быть передана одна из трёх последовательностей букв: AAAA, BBBB, CCCC. Известно, что вероятности каждой из последовательностей равны соответственно 0,3; 0,4 и 0,3. В результате шумов буква принимается правильно с вероятностью 0,6. Вероятности приёма переданной буквы за две другие равны 0,2 и 0,2. Предполагается, что буквы искажаются независимо друг от друга. Найти вероятность того, что передано AAAA, если на приёмном устройстве получено ABCA.

ВТОРОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 1–7 декабря)

I. Случайные величины и их характеристики

1. С. 3.3.

2. Пусть ξ и η — независимые случайные величины с распределениями $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_m \\ q_1 & q_2 & \dots & q_m \end{pmatrix}$ соответственно. Найти совместное распределение ξ и η.

3. С. 3.17(а).

4. Случайная величина ξ имеет распределение $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1/3 & 1/6 & 1/2 \end{pmatrix}$.

Положим $\eta = \xi^2$. Найти

а) распределение случайной величины η;

б) совместное распределение случайных величин ξ и η.

5. С. 3.16.

6. Случайные величины ξ и η принимают значения a_1, a_2, a_3 и b_1, b_2 соответственно. Вероятности $P\{\xi{=}a_i, \eta = b_j\}$ записаны в таблицу P (i — номер строки, j — номер столбца). Выяснить, являются ли случайные величины ξ и η независимыми, если

а) $P = \begin{pmatrix} 1/15 & 3/10 \\ 2/15 & 1/10 \\ 1/5 & 1/5 \end{pmatrix}$; б) $P = \begin{pmatrix} 2/15 & 1/5 \\ 1/15 & 1/10 \\ 1/5 & 3/10 \end{pmatrix}$.

7. С. 3.78 (Найти только математическое ожидание и дисперсию.)

8. С. 3.80.

9. С. 3.95 (в).

10. С. 3.96.

11. С. 3.32 (б).

12. С. 3.189 (а,б,в).

13. (Т. §8. Задача 4.) Из урны, содержащей m белых и n чёрных шаров, по схеме случайного выбора с возвращением извлекают шары до первого появления белого шара. Найти математическое ожидание и дисперсию числа вынутых шаров.

II. Схема Бернулли: закон больших чисел, предельные теоремы Пуассона и Муавра–Лапласа

14. С. 4.2.

15. С. 2.67.

16. С. 2.70.

17. (Т. §10. Задача 2.) Закон распределения случайной величины ξ определяется формулами:

$$P\{\xi = 0\} = 1 - \frac{\sigma^2}{\Delta^2}, \quad P\{\xi = -\Delta\} = P\{\xi = \Delta\} = \frac{\sigma^2}{2\Delta^2}.$$

Сравнить точное значение вероятности $P\{|\xi| \geq \Delta\}$ с оценкой, полученной по неравенству Чебышева.

18. Книга в 500 страниц содержит 50 опечаток. Оценить вероятность того, что на случайно выбранной странице имеется не менее 3 опечаток, используя биномиальный закон распределения и его нормальное и пуассоновское приближения. Сравнить результаты.

19. Найти вероятность того, что среди 10 000 новорождённых будет не менее половины мальчиков, если вероятность рождения мальчика равна 0,515.

III. Случайная величина в общей теоретико-вероятностной схеме. Характеристические и производящие функции. Центральная предельная теорема

20. (Т §8. Задача 1.) Длина диаметра круга равномерно распределена в отрезке $[0, 1]$. Найти математическое ожидание и дисперсию площади круга.

21. Пусть случайная величина ξ имеет строго возрастающую непрерывную функцию распределения $F(x)$. Найти функцию распределения случайной величины $\eta = F(\xi)$.

22. Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — независимые одинаково распределённые случайные величины с функцией распределения $F(x)$. Найти функции распределения случайных величин $\eta = \min_{1 \le i \le n} \xi_i$ и $\zeta = \max_{1 \le i \le n} \xi_i$.

23. Вычислить характеристические функции для следующих законов распределения:

а) равномерного распределения в интервале $(-a, a)$;
б) распределения Пуассона (найти также производящую функцию);
в) нормального распределения $N(a, \sigma^2)$.

24. Найти законы распределения, которым соответствуют следующие характеристические функции:

$$\cos t, \quad e^{it}\cos t, \quad \frac{1}{2 - e^{it}}.$$

25. Пусть $\xi_{m,n}$, где $m = 1, 2, \ldots, n$, — независимые случайные величины с распределением

$$P\{\xi_{m,n} < x\} = \begin{cases} 1 - e^{-\alpha_n x}, & x \ge 0, \alpha_n = \lambda n, \lambda > 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Найти предельное распределение при $n \to \infty$ для случайной величины $\xi_n = \xi_{1,n} + \xi_{2,n} + \cdots + \xi_{n,n}$.

IV. Условное математическое ожидание

26. Пусть случайные величины ξ и η одинаково распределены, независимы и имеют (безусловные) математические ожидания $E\xi$ и $E\eta$ соответственно. Найти $E(\xi|\xi+\eta)$.

27. Пусть $\eta, \xi_1, \dots, \xi_n$ – случайные величины из L^2_Ω. Найти такую функцию $f(\xi_1, \dots, \xi_n)$, которая минимизирует $E(\eta - f(\xi_1, \dots, \xi_n))^2$, т.е. дает наилучший прогноз значений η по наблюдаемым значениям случайных величин $\xi_1, \dots, \xi_n$.

V. Многомерное нормальное распределение

28. Пусть случайные векторы η_1 и η_2 таковы, что их компоненты некоррелированы (т.е. имеют нулевые ковариации, а совместное распределение η_1 и η_2 (в прямом произведении евклидовых пространств) является многомерным нормальным. Доказать, что случайные векторы η_1 и η_2 независимы. (Кратко: в случае многомерного нормального распределения некоррелированность влечет за собой независимость.)

29. Доказать, что наилучшая функция, делающая оценку значения η при известных $\xi_1, \dots, \xi_n$, в случае многомерного нормального распределения вектора $(\eta, \xi_1, \dots, \xi_n)$ совпадает с линейной.

VI. Задачи для решения с использованием Python

30. Сгенерировать результат следующего эксперимента: 100 раз подбросили симметричную монету. Предполагаем, что выпасть может или орёл (исход “1”), или решка (исход “0”). Посчитайте среднюю долю выпадений орла.

31. Метод Монте-Карло для приближенного вычисления площади фигуры. Пусть $M_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \le x \le 1, \ 0 \le y \le x^2\}$. Чему равна вероятность того, что точка, выбираемая случайным образом из множества $Q = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \le x \le 1, \ 0 \le y \le 1\}$, попадет в M_1? Провести следующий численный эксперимент. Смоделировать выборку размером n из равномерного распределения на множестве Q и найти долю элементов выборки, попавших в M_1. В качестве n нужно использовать следующие значения: $10, 100, 1000$. С помощью аналогичных рассуждений найти (приближенно) площадь множества

$$M_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \le x \le 1, \ 0 \le y \le \cos(\sin(x))\}.$$

32. Задача о вычислении π с помощью «иглы Бюффона». Бросим случайным образом иглу длиной 1 на горизонтальный лист бумаги, разлинованный параллельными прямыми так, что расстояние между соседними прямыми также равно 1. Чему равна вероятность того, что упавшая игла пересечет линии бумаги? Повторим этот опыт N раз. Смоделировать, как будет расти с ростом N (т.е. при $N \to \infty$) число пересечений упавшей иглы с линиями бумаги. Как полученные в эксперименте значения позволяют вычислить π? Оценить погрешность вычислений с помощью центральной предельной теоремы.

33. Сгенерировать 100 значений из биномиального распределения

$$\text{a)}\,\mathrm{Bin}(100; 0,01); \qquad \text{b)}\,\mathrm{Bin}(200; 0,005);$$

$$\text{c)}\,\mathrm{Bin}(400; 0,0025); \qquad \text{d)}\,\mathrm{Pois}(1).$$

Постройте (разными полупрозрачными цветами) гистограммы полученных трех выборок в одной системе координат. Какую теорему иллюстрируют полученные результаты?

34. Сгенерировать 100 значений из равномерного на $[0; 2]$ распределения. Центрировать и нормировать сумму полученных значений согласно ЦПТ. Повторить эти две процедуры 50 раз, нарисовать гистограмму по полученным 50 значениям. Изобразить на том же графике плотность стандартного нормального закона. Проделать всё тоже самое для 200 и 300 значений сгенерированных значений. Какую теорему иллюстрируют полученные результаты?

Задания составили:

к. ф.-м. н., доцент С. В. Резниченко
к. ф.-м. н., ст. преп. М. В. Меликян
к. ф.-м. н., доцент М. П. Савелов