Московский физико-технический институт

М А Т Е М А Т И Ч Е С К А Я   С Т А Т И С Т И К А

I ЗАДАНИЕ

Автор: Яфаров Руслан,
Б13-202

весна 2024

1. Виды сходимости случайных векторов

1. Пусть $X_1, \dots, X_n$ — независимые одинаково распределенные случайные величины с распределением $Exp(\alpha)$, $\alpha > 0$.
Рассмотрим статистику $Y = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$. Найдите такие константы $a(\alpha)$ и $\sigma^2(\alpha) > 0$, что выполнено

$$\sqrt{n}(Y \sin Y - a(\alpha)) \xrightarrow{\mathrm{d}} \mathcal{N}(0,\sigma^2(\alpha)), \text{ при } n \to \infty$$

Решение. По закону больших чисел $Y \xrightarrow{d} \frac{1}{\alpha}$. По ЦПТ $\sqrt{n}\left(Y - \frac{1}{\alpha}\right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{\alpha^2}\right)$. Воспользуемся теоремой 1.4 из С2. Положим $h(x) = x \sin x, b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}, \xi_n = \sqrt{n}\left(Y - \frac{1}{\alpha}\right), a = \frac{1}{\alpha}$. Тогда получим, что $\frac{h(a+\xi_n b_n) - h(a)}{b_n} = \sqrt{n}\left(Y \sin Y - \frac{1}{\alpha}\sin\frac{1}{\alpha}\right) \xrightarrow{d} h'(a)\mathcal{N}\left(0, \frac{1}{\alpha^2}\right) \sim \left(\sin\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha}\cos\frac{1}{\alpha}\right)\mathcal{N}\left(0, \frac{1}{\alpha^2}\right) \sim \mathcal{N}\left(0, \left(\frac{1}{\alpha}\sin\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2}\cos\frac{1}{\alpha}\right)^2\right) \Rightarrow a(\alpha) = \frac{1}{\alpha}\sin\frac{1}{\alpha}, \sigma(\alpha) = \frac{1}{\alpha}\sin\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2}\cos\frac{1}{\alpha}$

2. Пусть $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$,$\{\eta_n\}_{n=1}^{\infty}$,$\{\zeta\}_{n=1}^{\infty}$- последовательности случайных величин. Докажите, что если $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$,$|\xi_n - \eta_n| \le \zeta_n|\xi_n|$, $\zeta_n \xrightarrow{P} 0$, то $\eta_n \xrightarrow{d} \xi$

Решение. По лемме Слуцкого $\zeta_n|\xi_n| \xrightarrow{d} 0$. Тогда $\forall x F_0(x) \ge F_{|\xi_n - \eta_n|}(x) \ge F_{\zeta_n|\xi_n|}(x) \Rightarrow F_{\zeta_n|\xi_n|}(x) \to F_0(x) \forall x \ne 0$ по теореме о зажатой последовательности $\Rightarrow |\xi_n - \eta_n| \xrightarrow{d} 0 \Leftrightarrow |\xi_n - \eta_n| \xrightarrow{P} 0$. $P(|\eta_n - \xi_n| > \varepsilon) = P(\eta_n - \xi_n > \varepsilon) + P(\eta_n - \xi_n < -\varepsilon) \ge P(\eta_n - \xi_n > \varepsilon) \Rightarrow \eta_n - \xi_n \xrightarrow{P} 0 \Rightarrow \eta_n - \xi_n \xrightarrow{d} 0$. $\eta_n = \eta_n - \xi_n + \xi_n \Rightarrow$ по теореме о наследовании сходимости $\eta_n \xrightarrow{d} \xi$

3. Задан набор независимых одинаково распределённых случайных величин $X_1, \dots, X_n$ с распределением $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$. Рассмотрим статистики $Y = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}|X_i|$,$Z = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2$, $T = \sqrt{\frac{2}{\pi}}Z/Y$
Найдите предел сходимости по распределению выражения $\sqrt{n}(T - \sigma)$

Решение. Найдем необходимые моменты и ковариации:

$$\mathbb{E}|X_i| = \int_{\mathbb{R}} |x| p_{X_i}(x)dx = 2\int_0^{+\infty} x\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_0^{+\infty} -\frac{\sigma^2}{x}xd(e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}) = \sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\Bigg|_{+\infty}^{0}$$

$$= \sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

$$\mathbb{E}X_i^2 = \mathbb{D}X_i + (\mathbb{E}X_i)^2 = \sigma^2$$

$$\mathbb{E}|X_i|X_i^2 = 2\int_0^{+\infty} x^3\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx = -2\sigma^2\left(x^2 p_{X_i}(x)\Big|_0^{+\infty} - 2\int_0^{+\infty} x p_{X_i}(x)dx\right) = 2\sigma^2\mathbb{E}|X_i| = 2\sigma^3\sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

$$\mathbb{E}X_i^4 = -\sigma^2\left(0 - \int_{\mathbb{R}} p_{X_i}(x)3x^2dx\right) = 3\sigma^2\mathbb{E}X_i^2 = 3\sigma^4$$

$$\mathbb{D}|X_i| = \sigma^2 - \sigma^2\frac{2}{\pi} = \sigma^2\frac{\pi - 2}{\pi}, \mathbb{D}X_i^2 = \mathbb{E}X_i^4 - (\mathbb{E}X_i^2)^2 = 3\sigma^4 - \sigma^4 = 2\sigma^4$$

$$cov(|X_i|, X_i^2) = \mathbb{E}|X_i|X_i^2 - \mathbb{E}|X_i|\mathbb{E}X_i^2 = 2\sigma^3\sqrt{\frac{2}{\pi}} - \sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma^2 = \sigma^3\sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

Положим $\eta_i = (|X_i|, X_i^2)^T$, тогда $\mathbb{D}\eta_i = \begin{pmatrix} \sigma^2\frac{\pi-2}{\pi} & \sigma^3\sqrt{\frac{2}{\pi}} \\ \sigma^3\sqrt{\frac{2}{\pi}} & 2\sigma^4 \end{pmatrix}$ Далее воспользуемся теоремой 1.4 для $\xi_n = \sum_{i=1}^n \eta_i, h(x,y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{y}{x}, b_n = 1/\sqrt{n}, a = \mathbb{E}\eta_1 = (\sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}}, \sigma^2)^T$. Получим

$$\sqrt{n}(T-\sigma) \xrightarrow{d} (\nabla h|_a, \xi) \sim \mathcal{N}\left(0, \nabla h|_a^T \mathbb{D}\eta \nabla h|_a\right)$$

$$\nabla h = (-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{y}{x^2}, \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{x})^T \Rightarrow \nabla h|_a = (-\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \frac{1}{\sigma})^T \Rightarrow \nabla h|_a^T \mathbb{D}\eta \nabla h|_a = \sigma^2\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$$

4. Пусть ξ,ξ_1,$\xi_2, \dots$ - такие случайные величины, что $(\xi_n - \xi)^2 \xrightarrow{P} 0$ при $n \to \infty$ Показать, что $\xi_n^2 \xrightarrow{P} \xi^2$ при $n \to \infty$

Решение. $(\xi_n - \xi)^2 \xrightarrow{P} 0 \;\Leftrightarrow P(|\xi_n - \xi|^2 > \varepsilon^2) = P(|\xi_n - \xi| > \varepsilon) \to 0 \Rightarrow \xi_n \xrightarrow{P} \xi$. Далее пользуемся теоремой о наследовании сходимости для $h(x) = x^2$

5. Пусть ξ,ξ_1,$\xi_2, \dots$ - случайные величины. Привести пример, когда

1. $\xi_n \xrightarrow{L_2} \xi$, $\xi_n \not\xrightarrow{\text{п.н.}} \xi$, $n \to \infty$
2. $\xi_n \xrightarrow{\text{п.н}} \xi$, $\xi_n \not\xrightarrow{L_2} \xi$, $n \to \infty$
3. $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$, $\xi_n \not\xrightarrow{P} \xi$, $n \to \infty$

Решение.

1. (Ступеньки Риса) Пусть вероятностное пространство $([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \mu)$. Пусть $k \in \mathbb{N}$. Положим $\xi_{\frac{k(k-1)}{2}+i}(\omega) = \begin{cases} 1, \omega \in [\frac{i-1}{k}, \frac{i}{k}] \\ 0, \omega \in [0,1] \backslash [\frac{i-1}{k}, \frac{i}{k}] \end{cases}$,
$i = 1, \dots, k$ Тогда $\forall k \forall i \mathbb{E}(\xi_{\frac{k(k-1)}{2}+i} - 0)^2 = \frac{1}{k} \to 0 \Rightarrow \xi_n \xrightarrow{L_2} 0$, но $\xi_n \not\xrightarrow{\text{п.н.}} 0$

2. То же вероятностное пространство, $\xi_n = \begin{cases} n, \omega \in [0, \frac{1}{n}] \\ 0, \omega \in (\frac{1}{n}, 1] \end{cases}$ Тогда $\xi_n \xrightarrow{\text{п.н}} 0, \mathbb{E}\xi_n^2 = n \Rightarrow$ $\xi_n \not\xrightarrow{L_2} 0$

3. Пусть $\xi \sim \mathcal{N}(0,1), \xi_n = \xi$, тогда $\xi_n \xrightarrow{d} -\xi$, но $P(|\xi_n + \xi| > \varepsilon) = P(|\xi| > \varepsilon/2) \not\to 0$

6. Рассмотрим последовательность d-мерных случайных векторов $\overline{\xi}_n$. Доказать, что если при некотором $\overline{c} \in \mathbb{R}^d$ выполнено соотношение $\overline{\xi}_n \xrightarrow{d} \overline{c}$, то $\overline{\xi}_n \xrightarrow{P} \overline{c}$

Решение. $\overline{\xi}_n \xrightarrow{d} \overline{c} \Rightarrow \xi_n^i \xrightarrow{d} c^i \forall i$. Тогда, если докажем, что $\xi \in \mathbb{R}, \xi \xrightarrow{d} c \in \mathbb{R} \Rightarrow \xi \xrightarrow{P} c$, то утверждение будет доказано, т. к. покомпонентная сх-ть по в-ти влечет сх-ть вектора. Пусть $\xi_n \in \mathbb{R}, \xi_n \xrightarrow{d} c \in \mathbb{R}$. Тогда $P(|\xi_n - c| < \varepsilon) = P(c - \varepsilon < \xi_n < c + \varepsilon) = F_{\xi_n}(c+\varepsilon) - F_{\xi_n}(c - \varepsilon + 0) \geq F_{\xi_n}(c+\varepsilon) - F(c - \varepsilon/2) \to 1 \Rightarrow \xi_n \xrightarrow{P} c$

2. Статистики и оценки. Построение и сравнение оценок

7. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка из распределения $R(0,\theta)$(равномерного распределения на отрезке $[0,\theta]$). Проверьте на несмещенность, состоятельность и сильную состоятельность следующие оценки параметра $\theta : 2\overline{X}, \overline{X} + X_{(n)}/2, (n+1)X_{(1)}, X_{(1)} + X_{(n)}, \frac{n+1}{n}X_{(n)}$.

Решение.

1. $\mathbb{E}(2\overline{X}) = 2\mathbb{E}X_1 = 2\frac{\theta - 0}{2} = \theta \Rightarrow$ оценка несмещенна.
   По УЗБЧ $2\overline{X} \xrightarrow{\text{п. н.}} \theta \Rightarrow$ оценка сильно состоятельна.

2. Пусть $X_{(n)}/2 = \xi_n$. Найдем $p_{\xi_n} : F_{\xi_n}(x) = F_{X_1}^n(2x)$. $p_{\xi_n}(x) = \frac{d}{dx}F_{\xi_n}(x) = nF_{X_1}^{n-1}(2x)p_{X_1}(2x) * 2 = n2^n\frac{x^{n-1}}{\theta^n}I_{[0,\frac{\theta}{2}]}(x)$. $\mathbb{E}\xi_n = \int_0^{\theta/2} xn2^n\frac{x^{n-1}}{\theta^n}dx = n2^n\frac{x^{n+1}}{\theta^n(n+1)}\Big|_0^{\frac{\theta}{2}} = \frac{n}{2n+2}\theta \Rightarrow \mathbb{E}(\overline{X} + X_{(n)}/2) = \frac{\theta}{2}\left(1 + \frac{n}{n+1}\right) \neq \theta \Rightarrow$ оценка является смещенной
   $$F_{\xi_n}(x) = \begin{cases} 1, x \geq \theta/2, \\ (\frac{2x}{\theta})^n, 0 < x < \theta/2 \\ 0, x \leq 0 \end{cases}, \text{ тогда при } n \to \infty \text{ получаем } F(x) = \begin{cases} 1, x \geq \theta/2, \\ 0, x < \theta/2 \end{cases} \Rightarrow$$
   $\xi_n \xrightarrow{d} \frac{\theta}{2} \Leftrightarrow \xi_n \xrightarrow{P} \frac{\theta}{2} \Rightarrow$ по теореме о наследовании сходимости получаем, что $\overline{X} + \xi_n \xrightarrow{P} \theta \Rightarrow$ оценка состоятельная
   Докажем, что $X_{(n)} \xrightarrow{\text{п. н.}} \theta$. Заф. $\omega \in \Omega$, тогда последовательность $\{X_{(n)}(\omega)\}$ является неубывающей и ограниченной сверху $\Rightarrow \exists \xi(\omega) : \lim_{n\to\infty} X_{(n)}(\omega) = \xi(\omega) \Rightarrow$ оценка сильно состоятельная, но $X_{(n)} \xrightarrow{P} \theta \Rightarrow \xi(\omega) = \theta$. Аналогично доказывается, что $X_{(1)} \xrightarrow{\text{п. н.}} 0$. Тогда по теореме о наследовании сходимости оценка является сильно состоятельной

3. Найдем $p_{(n+1)X_{(1)}} : F_{X_{(1)}}(x) = 1 - (1 - F_{X_1}(x))^n \Rightarrow F_{(n+1)X_{(1)}}(x) = 1 - (1 - F_{X_1}(\frac{x}{n+1}))^n \Rightarrow p_{(n+1)X_{(1)}}(x) = n\left(1 - \frac{x}{(n+1)\theta}\right)^{n-1}\frac{1}{\theta}I_{[0,(n+1)\theta]}(x)$
   $\mathbb{E}X_{(1)} = \int_0^\theta xn\left(1 - \frac{x}{\theta}\right)^{n-1}\frac{1}{\theta}dx = \theta n\int_0^1 t(1-t)^{n-1}dt = \theta nB(2,n) = \theta n\frac{\Gamma(2)\Gamma(n)}{\Gamma(n+2)} = \theta n\frac{1!(n-1)!}{(n+1)!} = \frac{\theta}{n+1} \Rightarrow$ оценка $X_{(1)}(n+1)$ несмещенная.
   $$F_{(n+1)X_{(1)}}(x) = \begin{cases} 1, x \geq (n+1)\theta, \\ 1 - \left(1 - \frac{x}{(n+1)\theta}\right)^n, 0 < x < (n+1)\theta \\ 0, x \leq 0 \end{cases} \quad \text{при } n \to \infty \text{ получим } F(x) =$$

$\begin{cases} 1 - e^{-\frac{x}{\theta}}, x \geq 0, \\ 0, x < 0 \end{cases} \quad \Rightarrow$ оценка не состоятельна и сл-но не сильно состоятельна

4. $\mathbb{E}(X_{(1)} + X_{(n)}) = \frac{\theta}{n+1} + \frac{\theta n}{n+1} = \theta \Rightarrow$ оц-ка не смещена. Т. к. $F_{X_{(1)}} \to F(x) = \begin{cases} 1, x \geq 0 \\ 0, x < 0 \end{cases}$, то $X_{(1)} \xrightarrow{P} 0 \Rightarrow$ по теореме о наследовании сходимости оценка является сильно состоятельной.

5. Оценка явлется несмещенной и сильно состоятельной (по модулю предыдущих выкладок это очев).

8. Пусть $\hat{\theta}_n(X)$ — асимптотически нормальная оценка параметра θ с асимптотической дисперсией $\sigma^2(\theta)$. Докажите, что тогда $\hat{\theta}_n(X)$ является состоятельной оценкой θ.

Решение. Пусть $\xi_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$. $\xi_n \xrightarrow{P} 0$ По теореме о наследовании сходимости $\xi_n\sqrt{n}(\hat{\theta}_n(X)-\theta) \xrightarrow{P} 0 \Rightarrow \hat{\theta}_n(X) \xrightarrow{P} \theta$

9. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ - выборка из распределения с параметром σ^2. Пусть, кроме того $D_{\sigma^2}X_1 = \sigma^2$ Докажите, что статистика $s = 1/n\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2$ равна $\overline{X^2} - \left(\overline{X}\right)^2$ и является состоятельной оценкой σ^2. Является ли она несмещенной оценкой того же параметра?

Решение. $1/n\sum_{i=1}^n(X_i-\overline{X})^2 = 1/n\sum_{i=1}^n(X_i^2-2X_i\overline{X}+\left(\overline{X}\right)^2) = 1/n\sum_{i=1}^n X_i^2-2\overline{X}1/n\sum_{i=1}^n X_i-\left(\overline{X}\right)^2 = \overline{X^2} - 2\left(\overline{X}\right)^2 + \left(\overline{X}\right)^2 = \overline{X^2} - \left(\overline{X}\right)^2$. Подставляя в равенство вместо X_i $X_i - \mathbb{E}X_i$ мы получим, что данная оценка равна $\overline{(X - \mathbb{E}X_1)^2} - (\overline{X} - \mathbb{E}X_1)^2 \xrightarrow{\text{п. н.}} \mathbb{D}X_1$ по УЗБЧ. Но $\mathbb{E}s = \mathbb{D}X_1 - \mathbb{D}\overline{X} = \mathbb{D}X_1 - \frac{1}{n}\mathbb{D}X_1 \neq \mathbb{D}X_1 \Rightarrow$ оценка смещена

10. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка из экспоненциального распределения с параметром θ. Покажите, что $\forall k \in \mathbb{N}$ статистика $\sqrt[k]{k!/\overline{X^k}}$ является асимптотически нормальной оценкой параметра θ. Найдите ее асимптотическую дисперсию.

Решение.

$$\psi_{X_1}(t) = \mathbb{E}e^{itX_1} = \int_0^{+\infty} \theta e^{-\theta x} e^{itx} dx = \int_0^{+\infty} \theta e^{x(it-\theta)} dx = -\frac{\theta}{it-\theta} = \left(1 - \frac{it}{\theta}\right)^{-1}$$

$$\frac{d^k}{dt^k}\psi_{X_1}(t) = \frac{i^k}{\theta^k}k!\left(1 - \frac{it}{\theta}\right)^{-k-1} \Rightarrow \mathbb{E}X_1^k = \frac{k!}{\theta^k}$$

Пусть $\xi_n = \sqrt{n}\left(\overline{X^k} - \frac{k!}{\theta^k}\right)$. Тогда по ЦПТ $\xi_n \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(0, \mathbb{D}X^k\right), \mathbb{D}X^k = \frac{(2k)!}{\theta^{2k}} - \frac{(k!)^2}{\theta^{2k}}$. Пользуясь теоремой 1.4 из С2 для $h(x) = \sqrt[k]{k!/x}, b_n = 1/\sqrt{n}$ и $a = \frac{k!}{\theta^k}$.$h'(x) = (\sqrt[k]{k!}x^{-\frac{1}{k}})' = -\frac{1}{k}\sqrt[k]{\frac{k!}{x^{k+1}}} \Rightarrow h'(a) = -\frac{\theta^{k+1}}{k!k} \Rightarrow \sqrt{n}\left(\sqrt[k]{k!/\overline{X^k}} - \theta\right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(0, \sigma^2(\theta)\right)$, где $\sigma^2(\theta) = \mathbb{D}X^k h'(a)^2 = \theta^2\frac{(2k)!-(k!)^2}{(k!k)^2}$

11. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ - выборка из распределения с плотностью

$$p_{\alpha,\beta}(x) = \frac{1}{\alpha} e^{(\beta - x)/\alpha} I_{[\beta,+\infty)}(x)$$

где $\theta = (\alpha, \beta)$ — двумерный параметр. Найдите для θ оценку максимального правдоподобия. Докажите, что полученная для α оценка $\hat{\alpha}_n$ является асимптотически нормальной, и найдите ее асимптотическую дисперсию.

Решение. Пусть $\theta = (\alpha, \beta)$

$$\mathcal{L}(x, \theta) = \frac{1}{\alpha^n} e^{\sum_{i=1}^n \frac{\beta - x_i}{\alpha}} I_{[\beta,+\infty]}(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{\alpha^n} e^{\sum_{i=1}^n \frac{\beta - x_i}{\alpha}} I_{[\beta,+\infty]}(\min(x_1, \ldots, x_n))$$

Для того, чтобы произведение было не 0, должно выплняться $\beta \leq \min(x_1, \ldots, x_n)$, в то же время $\mathcal{L}(x, \theta) \underset{\beta}{\to} \max_\beta \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \beta - x_i \underset{\beta}{\to} \max \Rightarrow \hat{\beta} = X_{(1)}$. $l(x, \theta) = \sum_{i=1}^n \frac{\beta - x_i}{\alpha} - n \ln \alpha \Rightarrow \hat{\alpha_n} = \sum_{i=1}^n \frac{X_i - \beta}{n} = \overline{X} - X_{(1)}$ в силу того, что функция $f(x) = \frac{c}{x} - \ln x, c \leq 0$ имеет глобальный максимум в т. $x = -c$

TODO Доказать асимптотическую нормальность

12. Найдите оценку максимального правдоподобия для параметра сдвига в распределении Коши, т.е. плотность равна

$$p_\theta(x) = \frac{1}{\pi(1 + (x - \theta)^2)}$$

если выборка состоит из а) одного наблюдения, б) двух на- блюдений (т.е. $n = 1, 2$).

Решение.

a $\pi \mathcal{L}(x, \theta) = \frac{1}{1 + (x - \theta)^2} \Rightarrow \hat{\theta} = X_1$

b $l(x, \theta) = -\ln(1 + (x_1 - \theta)^2) - \ln(1 + (x_2 - \theta)^2) - 2\ln\pi \Rightarrow \frac{dl}{d\theta} = \frac{2(x_1 + x_2 - 2\theta)(\theta^2 - \theta x_1 - \theta x_2 + x_1 x_2 + 1)}{(1 + (x_1 - \theta)^2)(1 + (x_2 - \theta)^2)}$. Получаем 2 случая:

(a) $|x_1 - x_2| \leq 2$
Тогда уравенение правдоподобия имеет единственный корень $\frac{x_1 + x_2}{2}$. Легко заметить, что в этой точке достигается максимум всей функции

(b) $|x_1 - x_2| > 2$. Тогда уравнение имеет 3 корня и максимум достигается в одной из точек $\frac{x_1 + x_2}{2} + \sqrt{\left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right)^2 - 1}, \frac{x_1 + x_2}{2} - \sqrt{\left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right)^2 - 1}$. Легко убедиться, что значение функции правдободобия совпадают на них

Тогда оценка максимального правдободобия $\hat{\theta} = \begin{cases} \frac{X_1 + X_2}{2}, |X_1 - X_2| \leq 2 \\ \frac{X_1 + X_2}{2} + \sqrt{\left(\frac{X_1 - X_2}{2}\right)^2 - 1}, |X_1 - X_2| > 2 \end{cases}$

13. Пусть $X_1 \sim R(0, \theta)$. Найдите несмещённую оценку параметра $1/\theta$.

Решение. Для $n = 1$ $\mathbb{E}g(X_1) = \int_0^\theta \frac{1}{\theta} g(x)dx = \frac{1}{\theta} \Rightarrow \forall \theta \int_0^\theta g(x)dx = 1$, что невозможно.
Для $n \geq 2$ пусть $\hat{\theta} = \frac{1}{4\sqrt{X_1 X_2}}$. Тогда

$$\mathbb{E}\hat{\theta} = \int_{[0,\theta]^2} \frac{1}{\theta^2} \frac{1}{2\sqrt{x_1}} \frac{1}{2\sqrt{x_2}} dx_1 dx_2 = \frac{1}{\theta}$$

14. Найдите несмещенную оценку λ^3 по выборке $X_1, \ldots, X_n$ из распределения $Pois(\lambda)$.

Решение. $\varphi_{X_1}(t) = \mathbb{E}e^{tX_1} = e^{\lambda(e^t - 1)} \Rightarrow \frac{d}{dt}\varphi_{X_1}(t) = \lambda e^{t + \lambda(e^t-1)}, \frac{d^2}{dt^2}\varphi_{X_1}(t) = \lambda e^{t+\lambda(e^t-1)} + \lambda^2 e^{2t+\lambda(e^t-1)}, \frac{d^3}{dt^3}\varphi_{X_1}(t) = \lambda e^{t+\lambda(e^t-1)} + \lambda^2 e^{2t+\lambda(e^t-1)} + \lambda^2(2 + \lambda e^t)e^{2t+\lambda(e^t-1)} \Rightarrow \mathbb{E}X_1 = \lambda, \mathbb{E}X_1^2 = \lambda + \lambda^2, \mathbb{E}X_1^3 = \lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda \Rightarrow \hat{\lambda} = X_1^3 - 3X_1^2 + 2X_1$

15. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка из равномерного распределения на отрезке $[0, \theta]$. Сравните следующие оценки параметра θ в равномерном подходе с квадратичной функцией потерь: $\theta : 2\overline{X}, (n+1)X_{(1)}, \frac{n+1}{n}X_{(n)}$.

Решение. По задаче 7 все оценки несмещены $\Rightarrow$ нужно сравнить дисперсии этих случайных величин.

1. $\mathbb{D}(2\overline{X}) = \frac{4}{n}\mathbb{D}X_1 = \frac{\theta^2}{3n}$.
2. $\mathbb{D}(n+1)X_{(1)} = (n+1)^2\mathbb{D}X_{(1)}.\mathbb{E}X_{(1)}^2 = \int_0^\theta x^2 n \left(1 - \frac{x}{\theta}\right)^{n-1} \frac{1}{\theta}dx = n\theta^2 \int_0^1 t^2(1-t)^{n-1}dt = \theta^2 nB(3,n) = \theta^2 n \frac{2!(n-1)!}{(n+2)!} = \frac{2\theta^2}{(n+1)(n+2)} \Rightarrow \mathbb{D}X_{(1)} = \frac{2\theta^2}{(n+1)(n+2)} - \frac{\theta^2}{(n+1)^2} = \frac{n\theta^2}{(n+1)^2(n+2)} \Rightarrow$
$\mathbb{D}(n+1)X_{(1)} = \theta^2\left(1 - \frac{2}{n+2}\right)$
3. $\mathbb{E}X_{(n)}^2 = \int_0^\theta nx^2 \frac{x^{n-1}}{\theta^n}dx = \theta^2 \frac{n}{n+2} \Rightarrow \mathbb{D}X_{(n)} = \theta^2 n \left(\frac{1}{(n+2)} - \frac{n}{(n+1)^2}\right) = \theta^2 \frac{n}{(n+1)^2(n+2)} \Rightarrow$
$\mathbb{D}\frac{n+1}{n}X_{(n)} = \frac{\theta^2}{(n+1)(n+2)}$

Таким образом(асимптотически), $3_{\text{оц}}$ лучше $1_{\text{оц}}$ лучше $2_{\text{оц}}$

16. Пусть $\theta_1^*(X)$ и $\theta_2^*(X)$ — две наилучшие в среднеквадратичном подходе оценки параметра θ в классе всех оценок с од- ним и тем же математическим ожиданием $\tau(\theta)$. Докажите, что тогда для любого θ они совпадают почти наверное.

Решение. $\mathbb{E}(\theta_1^*(X) - \theta)^2 = \mathbb{E}(\theta_2^*(X) - \theta)^2$, при этом $\mathbb{E}\theta_1^*(X) = \mathbb{E}\theta_2^*(X) \Rightarrow \mathbb{E}(\theta_1^*(X))^2 = \mathbb{E}(\theta_2^*(X))^2$. Предположим, $\theta_1^*(X)$ и $\theta_2^*(X)$ не совпадают почти наверное. Тогда $\mathbb{E}(\theta_1^*(X) - \theta_2^*(X))^2 > 0 \Rightarrow \mathbb{E}\theta_1^*(X)\theta_2^*(X) < \mathbb{E}(\theta_1^*(X))^2$. Тогда

$$\mathbb{E}(\theta_1^*(X) - \theta)^2 - \mathbb{E}\left(\frac{\theta_1^*(X) + \theta_2^*(X)}{2} - \theta\right)^2 = \mathbb{E}(\theta_1^*(X))^2 - \frac{\mathbb{E}(\theta_1^*(X))^2}{2} + \frac{\mathbb{E}\theta_1^*(X)\theta_2^*(X)}{2} =$$

$$\frac{1}{2}(\mathbb{E}(\theta_1^*(X))^2 - \mathbb{E}\theta_1^*(X)\theta_2^*(X)) > 0 \Rightarrow$$

оценка $\frac{\theta_1^*(X)+\theta_2^*(X)}{2}$ лучше в данном классе.

17. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ - выборка из нормального распределения с параметрами (a, σ^2). Найдите эффективную оценку а) параметра a, если σ известно; б) параметра σ^2 , если a известно. Вычислите информацию Фишера одного наблюдения в обоих случаях

Решение. Для нормального распределения выполнены условия регулярности.

a $L(a) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sigma^n} e^{\frac{-\sum_{i=1}^n (x_i - a)^2}{2\sigma^2}} \Rightarrow u_a(X) = \sum_{i=1}^n (X_i - a)/\sigma^2 = \frac{n}{\sigma^2}(\overline{X} - a) \Rightarrow$ по критерию эффективности $\overline{X}$ эффективная оценка параметра a, $i(a) = \frac{1}{\sigma^2}$

b $L(\sigma^2) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} e^{\frac{-\sum_{i=1}^n (x_i - a)^2}{2\sigma^2}} \Rightarrow u_{\sigma^2}(X) = \frac{d}{d\sigma^2}\left(-\frac{n}{2}\ln\sigma^2 - \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - a)^2}{2\sigma^2}\right) = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - a)^2}{2\sigma^4} = \frac{n}{2\sigma^4}\left(\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - a)^2}{n} - \sigma^2\right) \Rightarrow \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - a)^2}{n}$ - эффективная оценка σ^2, $i(\sigma^2) = \frac{1}{2\sigma^4}$

18. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка из логистического распределения со сдвигом θ, имеющего плотность

$$p_\theta(x) = \frac{\exp\{\theta - x\}}{(1 + \exp\{\theta - x\})^2}$$

Найдите информацию Фишера $i(\theta)$ одного наблюдения в этой модели.

Решение.

$$u_\theta(x) = \frac{1 - e^{\theta - x}}{1 + e^{\theta - x}} \Rightarrow i(\theta) = \int_{\mathbb{R}} \frac{(1 - e^{\theta - x})^2}{(1 + e^{\theta - x})^2} \frac{e^{\theta - x}}{(1 + e^{\theta - x})^2} dx = \int_0^{+\infty} \frac{(1 - t)^2}{(1 + t)^4} dt =$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{(2 - u)^2}{u^4} du = \int_1^{+\infty} \frac{4 - 4u + u^2}{u^4} du = \left(4\frac{u^{-3}}{-3} - 4\frac{u^{-2}}{-2} + \frac{u^{-1}}{-1}\right)\Bigg|_1^{+\infty} = -\left(-\frac{4}{3} + 2 - 1\right) = \frac{1}{3}$$

19. С помощью метода моментов построить оценку параметра θ для следующих распределений: а)$Bern(\theta)$, б)$Pois(\theta)$, в)$\mathcal{N}(\theta, 1)$, г)$\exp(\theta)$. Является ли данная оценка:

1. несмещенной?
2. состоятельной?
3. сильно состоятельной?
4. асимптотически нормальной?

Решение. В первых 3 случаях оценка $\hat{\theta} = \overline{X}$ является несмещенной, состоятельной и сильно состоятельной по УЗБЧ. По ЦПТ также она явлется асимптотически нормальной с асимптотической дисперсией равной дисперсии этой случайной величины, то есть

a $\mathbb{D}X_1 = \theta(1 - \theta)$

b $\mathbb{D}X_1 = \theta$

c $\mathbb{D}X_1 = 1$

d $\mathbb{E}X_1 = 1/\theta \Rightarrow \hat{\theta} = \frac{1}{\overline{X}}$. По методу моментов оценка сильно состоятельная. По задаче 10 оценка асимптотически нормальная с ас-й дисперсией θ^2. Найдем $p_{\overline{X}}(x)$. В силу независимости $p_{X_1+X_2}(x) = \int_{\mathbb{R}} p_{X_1}(x-t)p_{X_2}(t)dt = \int_{\mathbb{R}} \theta e^{-\theta(x-t)} I_{x-t\geq 0}\theta e^{-\theta t} I_{t\geq 0} dt = \int_0^x \theta^2 e^{-\theta x} = \theta^2 x e^{-\theta x} I_{x\geq 0}$. По индукции получаем, что $p_{X_1+\dots+X_n}(x) = \theta^n \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\theta x} I_{x\geq 0}$. $p_{\xi/n}(x) = \frac{d}{dx}F_{\xi/n}(x) = \frac{d}{dx}F_\xi(nx) = np_\xi(nx) \Rightarrow p_{\overline{X}}(x) = n^n\theta^n\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\theta nx}I_{x\geq 0}$.

$$\mathbb{E}1/\overline{X} = \int_0^{+\infty} n^n\theta^n \frac{x^{n-2}}{(n-1)!}e^{-\theta nx}dx = -\frac{n^{n-1}\theta^{n-1}}{n-1}\left(\frac{x^{n-2}}{(n-2)!}e^{-\theta nx}\bigg|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty}\frac{x^{n-3}}{(n-3)!}e^{-\theta nx}dx\right) =$$

$$\frac{n^{n-1}\theta^{n-1}}{n-1}\int_0^{+\infty}\frac{x^{n-3}}{(n-3)!}e^{-\theta nx}dx = \dots = \frac{(n\theta)^{n-(n-2)}}{n-1}\int_0^{+\infty}e^{-\theta nx}dx = \frac{n\theta}{n-1} \neq \theta \Rightarrow \text{ оценка смещена}$$

20. Решить предыдущую задачу использую вместо метода моментов метод максимального правдоподобия.

Решение. Пусть $\sum_{i=1}^n x_i = a$

a $L(\theta) = \theta^a(1-\theta)^{n-a} \Rightarrow l(\theta) = a\ln\theta + (n-a)\ln(1-\theta) \Rightarrow \frac{d}{d\theta}l(\theta) = \frac{a}{\theta} - \frac{n-a}{1-\theta}$, причем $\frac{d^2}{d\theta^2}l(\theta) = \frac{-a}{\theta^2} - \frac{n-a}{(1-\theta)^2} < 0 \forall\theta \Rightarrow \theta = a/n$ точка строгого глобального максимума $\Rightarrow \hat{\theta} = \overline{X}$

b $L(\theta) = \frac{\theta^a e^{-n\theta}}{x_1!x_2!\dots x_n!} \to \max_\theta \Leftrightarrow H(\theta) = \theta^a e^{-n\theta} \to \max_\theta .h(\theta) = a\ln\theta - n\theta \Rightarrow \frac{d}{d\theta}h(\theta) = \frac{a}{\theta} - n \Rightarrow \hat{\theta} = \overline{X}$

c $L(\theta) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}e^{\frac{-\sum_{i=1}^n(x_i-\theta)^2}{2}} \to \max_\theta \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n(x_i-\theta)^2 \to \min_\theta \Rightarrow \hat{\theta} = \overline{X}$

d $L(\theta) = \theta^n e^{-\theta a}I_{x_{(1)}\geq 0}$. Опустим индикатор, он ни на что не влияет. $l(\theta) = n\ln\theta - \theta a \Rightarrow \frac{d}{d\theta}l(\theta) = \frac{n}{\theta} - a \Rightarrow \hat{\theta} = \frac{1}{\overline{X}}$

Во всех случаях получили те же оценки

21. Рассмотрим распределения Коши с плотностью $p_\theta(x) = \frac{1}{\pi(1+(x-\theta)^2)}$. С помощью выборочной медианы построить асимптотически нормальную оценку для θ^2 и найти ее асимптотическую дисперсию.

Решение. По теореме о выборочной медиане $\hat{\mu}$ является асимтотически нормальной оценкой параметра $z_{\frac{1}{2}} = \theta$ с асимптотической дисперсией $\frac{1}{4p_\theta\left(z_{\frac{1}{2}}\right)} = \frac{\pi^2}{4}$. Ф-я $f(x) = x^2$ является дифференциируемой, по теореме о наследовании асимптотической нормальности получаем, что $\hat{\mu}^2$ является асимптотически нормальной оценкой параметра θ^2 с асимптотичской дисперсией $(2\theta)^2\frac{\pi^2}{4} = (\pi\theta)^2$

22. Пусть $X_1, \dots, X_n$ — выборка из распределения: а)$Bern(\theta)$, б)$Pois(\theta)$, в)$\mathcal{N}(\theta, 1)$, г)$\exp(\theta)$. Для каких функций существует эффективная оценка? Найти соответствующую эффективную оценку и количество информации (фишеровской), содежащейся в одном сообщении.

Решение. Для всех распределений $\Theta = \mathbb{R}$, носитель не зависит от θ и все функции распределений "хорошие", то есть выполняются первые 3 пункта условий регулярности. Пусть $\sum_{i=1}^n x_i = a, T(X) = \sum_{i=1}^n X_i$

a $L(\theta) = \theta^a(1-\theta)^{n-a} \Rightarrow l(\theta) = a\ln\theta + (n-a)\ln(1-\theta) \Rightarrow \frac{d}{d\theta}l(\theta) = \frac{a}{\theta} - \frac{n-a}{1-\theta} \Rightarrow u_\theta(X) = \frac{T}{\theta} - \frac{n-T}{1-\theta} = \frac{n}{\theta(1-\theta}(\frac{T}{n} - \theta) \Rightarrow$ по критерию эффективности $\overline{X}$ - эффективная оценка θ, $i(\theta) = \frac{1}{\theta(1-\theta)}$

b $L(\theta) = \frac{\theta^a e^{-n\theta}}{x_1!x_2!...x_n!} \Rightarrow u_\theta(X) = \frac{T}{\theta} - n = \frac{n}{\theta}(\frac{T}{n} - \theta) \Rightarrow \overline{X}$ эффективная оценка по критерию эффективности, $i(\theta) = \frac{1}{\theta}$

c см. задачу 17

d $L(\theta) = \theta^n e^{-\theta a} I_{x_{(1)} \geq 0} \Rightarrow u_\theta(X) = \frac{n}{\theta} - T = -n(\frac{T}{n} - \frac{1}{\theta}) \Rightarrow$ по критерию эффективности не существует эффективной оценки параметра θ

3. Достаточные статистики. Полные статистики. Оптимальные оценки.

23. Приведите пример такого параметрического семейства распределений P и нетривиальной неполной достаточной статистики $S(X_1, \ldots, X_n)$, где $X_1, \ldots, X_n$ — выборка из неизвестного распределения $P \in \mathcal{P}$, что размерность статистики S равна 1.

Решение. Пример для $\Theta = \mathbb{R}$ я придумать не смог(. Пусть $\Theta = \mathbb{N}, X_i \sim R[0, \theta]$. Тогда $X_{(n)}-$ достаточная статистика. Положим $\varphi(x) = \frac{\sin 2\pi x}{x^{n-1}}$. Тогда $\mathbb{E}\varphi(X_{(n)}) = 0 \forall \theta \in \Theta$

24. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ - выборка из нормального распределения с параметрами (a, σ^2), $a \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$. Найдите оптимальную оценку параметра $\theta = (a, \sigma^2)$.

Решение. $L(\theta) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sigma^n} e^{\frac{-\sum_{i=1}^n (x_i - a)^2}{2\sigma^2}} \Rightarrow T(X) = (\sum_{i=1}^n X_i, \sum_{i=1}^n X_i^2)$ ялвяется полной достаточной статистикой по теореме об экспоненциальных семействах. Решая уравнение несмещённости, получаем, что $S(X) = (\overline{X}, \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2)$ оптимальная оценка.

25. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка из нормального распределения с параметрами $(0, \theta^2)$. Найдите оптимальную оценку для θ.

Решение. Так как нормальное распределение из экспоненциального семейства, $T(X) = \sum_{i=1}^n X_i^2$ является полной достаточной статистикой. Найдем распределение $T(X)$.
$\frac{T(X)}{\theta^2} \sim \chi^2(n), p_{\theta^2\chi^2} = \frac{d}{dx}F_{\chi^2}(x/\theta^2) = 1/\theta^2 p_{\chi^2}(x/\theta^2)$

$$\mathbb{E}\varphi(T) = \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} \int_0^{+\infty} \varphi(x) \left(\frac{x}{\theta^2}\right)^{n/2-1} e^{-\frac{x}{2\theta^2}} d(x/\theta^2) = \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} \int_0^{+\infty} \varphi(t\theta^2) t^{n/2-1} e^{-\frac{t}{2}} dt \Rightarrow$$

положив $\varphi(x) = \sqrt{x}$ получаем $\dfrac{\theta}{2^{n/2}\Gamma(n/2)}\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{(n+1)/2-1}e^{-\frac{t}{2}}dt = \dfrac{\theta 2^{(n+1)/2}}{2^{n/2}\Gamma(n/2)}\displaystyle\int_0^{+\infty} u^{(n+1)/2-1}e^{-u}du$

$= \dfrac{\theta\sqrt{2}\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(n/2)}$. Окончательно получаем $S(X) = \dfrac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\sqrt{2}\Gamma(\frac{n+1}{2})}\sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i^2}$

26. Пусть $X_1, \dots, X_n$ — выборка из пуассоновского распределения с параметром $\theta > 0$. Найдите $\mathbb{E}\left(X_1^2 \middle| \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i\right)$.

Решение. $\sum_{i=1}^{n} X_i$ полная достаточная статистика для параметра θ. $\mathbb{E}X_1^2 = \mathbb{D}X_1 + (\mathbb{E}X_1)^2 = \theta + \theta^2 \Rightarrow$ матожидание равно оптимальной оценке $\theta + \theta^2$. $T(X) = \sum_{i=1} X_i \sim Pois(n\theta) \Rightarrow \mathbb{E}T = n\theta, \mathbb{E}T^2 = n\theta + n^2\theta^2 \Rightarrow S(T) = \frac{T^2 - T}{n^2} + \frac{T}{n}$

27. С помощью критерия факторизации найти достаточную статистику для следующего семейства распределений: а)$Bern(\theta)$, б)$Pois(\theta)$, в)$\mathcal{N}(\theta, 1)$, г)$\exp(\theta)$. Проверить, является ли полученная статистика полной.

Решение. Пусть $\sum_{i=1}^{n} x_i = a$, $T(X) = \sum_{i=1}^{n} X_i$

a $L(\theta) = \theta^a(1-\theta)^{n-a} \Rightarrow T(X)-$ достаточная статистика. $T \sim Bin(n,\theta)\mathbb{E}\varphi(T) = \sum_{k=1}^{n}\varphi(k)C_n^k\theta^k(1-\theta)^{n-k} = 0\forall\theta \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n}\varphi(k)C_n^k z^k = 0\forall z$, где $z = \frac{\theta}{1-\theta} \Rightarrow \forall k\varphi(k) = 0 \Rightarrow$ статистика полная.

b $L(\theta) = \frac{\theta^a e^{-n\theta}}{x_1!x_2!\dots x_n!} \Rightarrow T(X)$ - достаточная статистика. $T(X) \sim Pois(n\theta) \Rightarrow \mathbb{E}\varphi(T) = \sum_{k=0}^{\infty}\varphi(k)e^{-n\theta}\frac{(n\theta)^k}{k!} = 0\forall\theta$ $\frac{d^m}{d\theta^m}e^{n\theta}\mathbb{E}\varphi(T)\Big|_{\theta=0} = \sum_{k=m}^{\infty}\varphi(k)n^k\frac{\theta^{k-m}}{(k-m)!}\Big|_{\theta=0} = n^m\varphi(m) = 0 \Rightarrow \varphi(m) = 0 \Rightarrow$ статистика является полной.

c $L(\theta) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}e^{\frac{-\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)^2}{2}} = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}e^{\frac{-\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{2}}e^{\theta a - \frac{n\theta^2}{2}} \Rightarrow T(X)$ достаточная статистика. $T(X) \sim \mathcal{N}(\theta, n)$

$$\mathbb{E}\varphi(T) = \int_{\mathbb{R}}\sqrt{\frac{1}{2\pi n}}\varphi(x)e^{-\frac{1}{2n}(x-\theta)^2}dx$$

TODO

d $L(\theta) = \theta^n e^{-\theta a}I_{x_{(1)}\geq 0} \Rightarrow T(X)$ - достаточная.

28. Построить оптимальную оценку функции $\tau(\theta) = 5\theta^2 + 3\theta + 7$ для $Bern(\theta)$.

Решение. При $n = 1$ построить несмещенную оценку для θ^2 невозможно, далее полгаем $n \neq 1$. По предыдущей задаче известно, что статистика $T(X) = \sum_{i=1}^{n} X_i$ является полной достаточной. $T(X) \sim Bin(n,\theta) \Rightarrow \mathbb{E}T(X) = n\theta, \mathbb{D}T(X) = n(\theta - \theta^2) \Rightarrow \mathbb{E}T^2(X) = n\theta - n\theta^2 + n^2\theta^2 \Rightarrow \theta^2 = \frac{\mathbb{E}T^2 - \mathbb{E}T}{n^2 - n} \Rightarrow \varphi(T) = 5\frac{T^2 - T}{n^2 - n} + 3\frac{T}{n} + 7$

29. Построить оптимальную оценку функции $\tau(\theta) = \sqrt{\theta}$ для $\exp(\theta)$

Решение. Так как семейство экспоненциальное с правдоподобием $L(\theta) = e^{-\theta\sum_{i=1}^n x_i + n\ln\theta}$, то оценка $T(X) = \sum_{i=1}^n X_i$ является полной достаточной по теореме об экспоненциальном распределении. Решим уравнение несмещенности. По задаче 19 известно, что $p_T(x) = \theta^n \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\theta x}I_{x\geq 0}$. Положим $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$. Тогда

$$\mathbb{E}\varphi(T(X)) = \frac{\theta^n}{(n-1)!}\int_0^{+\infty} x^{n-3/2}e^{-\theta x}dx = -\frac{\theta^{n-1}}{(n-1)!}\left(x^{n-3/2}e^{-\theta x}\Big|_0^{+\infty} - (n-3/2)\int_0^{+\infty} x^{n-5/2}e^{-\theta x}dx\right)$$

$$= \frac{\theta^{n-1}}{(n-1)!}(n-3/2)\int_0^{+\infty} x^{n-5/2}e^{-\theta x}dx = \dots = \frac{\theta^2}{(n-1)!}\Pi_{i=1}^{n-2}(n-i-1/2)\int_0^{+\infty}\sqrt{x}e^{-\theta x}dx$$

$$\int_0^{+\infty}\sqrt{x}e^{-\theta x}dx = \int_0^{+\infty} 2t^2e^{-\theta t^2}dt = -\frac{1}{\theta}\int_0^{+\infty} td(e^{-\theta t^2}) = \frac{1}{\theta}\int_0^{+\infty} e^{-\theta t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{1}{\theta\sqrt{\theta}} \Rightarrow$$

$$\mathbb{E}\varphi(T(X)) = \frac{\sqrt{\pi}\Pi_{i=1}^{n-2}(n-i-1/2)}{2(n-1)!}\sqrt{\theta}$$

Отсюда положив $\psi(T(X)) = \frac{2(n-1)!}{\sqrt{\pi}\Pi_{i=1}^{n-2}(n-i-1/2)}\frac{1}{\sqrt{T(X)}} = \frac{2(n-1)!}{\sqrt{\pi}\Pi_{i=1}^{n-2}(n-i-1/2)}\frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^n X_i}}$ мы получим оптимальную оценку.