УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
А. А. Воронов
16 января 2024 г.

ПРОГРАММА

по дисциплине: **Математическая статистика**
по направлению подготовки: 09.03.01 «Информатика и вычислительная техника»
физтех-школа: **ВШПИ**
кафедра: **высшей математики**
курс: 2
семестр: 4

лекции — 30 часов
практические (семинарские) занятия — 30 часов
лабораторные занятия — нет

Диф. зачёт — 4 семестр

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ — 60

Самостоятельная работа:
теор. курс — 45 часов

Программу составил
к. ф.-м. н., доцент М. П. Савёлов

Программа принята на заседании кафедры
высшей математики 2 ноября 2023 г.

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н., профессор Г. Е. Иванов

1. Виды сходимостей случайных векторов и связи между ними. Связь между сходимостью векторов и сходимостью их компонент. Теорема о наследовании сходимости.
2. Закон больших чисел, усиленный закон больших чисел и многомерная центральная предельная теорема для случайных векторов (б/д). Лемма Слуцкого. Пример применения леммы Слуцкого и его обобщение на многомерный случай (доказательство для одномерного случая).
3. Вероятностно–статистическая модель. Понятия наблюдения и выборки. Основная задача математической статистики. Параметрическая статистическая модель.
4. Эмпирическое распределение и эмпирическая функция распределения. Теорема Гливенко–Кантелли.
5. Статистики и оценки. Примеры статистик: выборочные характеристики, порядковые статистики. Основные свойства оценок (несмещенность, состоятельность, сильная состоятельность, асимптотическая нормальность) и взаимосвязи между ними.
6. Наследование состоятельности и сильной состоятельности при взятии непрерывной функции. Лемма о наследовании асимптотической нормальности.
7. Метод подстановки и метод моментов, их связь. Состоятельность и асимптотическая нормальность оценки метода моментов.
8. Квантили и выборочные квантили. Теорема об асимптотической нормальности выборочной квантили. Теорема о выборочной медиане (б/д).
9. Сравнение оценок, функция потерь и функция риска. Подходы к сравнению оценок: равномерный, байесовский, минимаксный, асимптотический.
10. Понятие плотности в дискретном случае. Неравенство Рао–Крамера и эффективные оценки. Критерий эффективности оценки.
11. Экспоненциальные семейства распределений. Их связь с условием существования эффективной оценки.
12. Достаточные статистики. Критерий факторизации Неймана–Фишера (доказательство для дискретного случая). Теорема Колмогорова–Блекуэлла–Рао об улучшении несмещенной оценки.
13. Полные статистики. Теорема Лемана–Шеффе об оптимальной оценке. Теорема о полной достаточной статистике в экспоненциальном семействе (б/д). Нахождение оптимальных оценок с помощью полных достаточных статистик.

14. Доверительные интервалы. Метод центральной статистики. Асимптотические доверительные интервалы. Построение асимптотических доверительных интервалов с помощью асимптотически нормальных оценок.
15. Метод максимального правдоподобия. Экстремальное свойство функции правдоподобия (б/д). Состоятельность оценки максимального правдоподобия (б/д).
16. Асимптотическая нормальность оценки максимального правдоподобия в регулярном случае для одномерного параметра (б/д). Асимптотическая эффективность оценки максимального правдоподобия (б/д). Условия, при которых эффективная оценка параметра является оценкой максимального правдоподобия.
17. Линейная регрессионная модель. Оценка наименьших квадратов, ее основные свойства. Теорема о наилучшей оценке в классе линейных оценок (б/д). Несмещенная оценка для дисперсии ошибки измерений σ^2.
18. Гауссовская линейная модель. Достаточные статистики в гауссовской линейной модели. Наилучшие несмещенные оценки параметров в гауссовской линейной модели, их распределения.
19. Распределения хи-квадрат, Стьюдента и Фишера, их свойства. Теорема об ортогональном разложении гауссовского вектора (б/д). Доверительные интервалы для параметров гауссовской линейной модели.
20. Проверка статистических гипотез: общие принципы и основные понятия (критическое множество, уровень значимости, альтернативы, ошибки первого и второго рода, функция мощности). Наиболее мощные и равномерно наиболее мощные критерии. Несмещенность и состоятельность статистического критерия.
21. Лемма Неймана–Пирсона. Построение с ее помощью наиболее мощных критериев. Теорема о монотонном отношении правдоподобия (б/д). Построение равномерно наиболее мощных критериев для односторонних альтернатив. Двойственность доверительного оценивания и проверки гипотез.
22. F-критерий для проверки линейных гипотез в гауссовской линейной модели.
23. Введение в A/B тестирование: одновыборочный и двухвыборочных критерий Стьюдента (t-test), Z-критерий (Z-test), критерий Фишера равенства дисперсий, критерий Вальда. U-критерий Манна–Уитни (б/д).
24. Критерий хи-квадрат Пирсона. Теорема Пирсона. Состоятельность критерия хи-квадрат. Критерий Колмогорова. Критерий фон Мизеса–Смирнова.
25. Байесовские оценки. Теорема о наилучшей оценке в байесовском подходе.
26. Бутстреп.

Литература

1. *Севастьянов Б. А.* Курс теории вероятностей и математической статистики. — Москва : Наука, 1982.
2. *Боровков А. А.* Математическая статистика. — Санкт-Петербург : Лань, 2010.
3. *Ширяев А. Н.* Вероятность — 1. В 2-х кн. — 3-е изд. — Москва : МЦНМО, 2004.
4. *Леман Э.* — Теория точечного оценивания. — Москва : Физматлит, 1991. — 448 с.

ЗАДАНИЯ

Литература

1. *Ивченко Г. И., Медведев Ю. И.* Математическая статистика. — Москва : Высш. шк., 1984. (цитируется — С1)
2. *Жуковский М. Е., Родионов И. В., Шабанов Д. А.* Введение в математическую статистику : учебное пособие. — Москва : МФТИ, 2016. (цитируется — С2)

ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 14–20 марта)

I. Виды сходимости случайных векторов

С.2: §1, № 1–3.

Т.1. Пусть $\xi, \xi_1, \xi_2, \ldots$ — такие случайные величины, что $(\xi_n - \xi)^2 \xrightarrow{\mathbf{P}} 0$ при $n \to \infty$. Показать, что $\xi_n^2 \xrightarrow{\mathbf{P}} \xi^2$ при $n \to \infty$.

Т.2. Пусть $\xi, \xi_1, \xi_2, \ldots$ — случайные величины. Привести пример, когда:

а) $\xi_n \xrightarrow{L_2} \xi$ и при этом $\xi_n \overset{\text{п.н.}}{\nrightarrow} \xi$, $n \to \infty$;

б) $\xi_n \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi$ и при этом $\xi_n \overset{L_2}{\nrightarrow} \xi$, $n \to \infty$;

в) $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$ и при этом $\xi_n \overset{\mathbf{P}}{\nrightarrow} \xi$, $n \to \infty$.

Т.3. Рассмотрим последовательность d-мерных случайных векторов $\vec{\xi}_n$. Доказать, что если при некотором $\vec{c} \in \mathbb{R}^d$ выполнено соотношение $\vec{\xi}_n \xrightarrow{d} \vec{c}$, то $\vec{\xi}_n \xrightarrow{\mathbf{P}} \vec{c}$.

II. Статистики и оценки. Построение и сравнение оценок

С.2: §2, № 1; 3; 4; 6.

С.2: §3, № 3; 4; 7; 8.

С.2: §4, № 1; 2; 5; 6.

Т.4. С помощью метода моментов построить оценку параметра θ для следующих распределений:

а) $Bern(\theta)$; б) $Pois(\theta)$; в) $\mathcal{N}(\theta, 1)$; г) $\exp(\theta)$.

Является ли полученная оценка:

1) несмещенной?
2) состоятельной?
3) сильно состоятельной?
4) асимптотически нормальной?

Т.5. Решить предыдущую задачу, используя вместо метода моментов метод максимального правдоподобия.

Т.6. Рассмотрим распределение Коши с плотностью $p_\theta(x) = \frac{1}{\pi(1+(x-\theta)^2)}$. С помощью выборочной медианы построить асимптотически нормальную оценку для θ^2 и найти ее асимптотическую дисперсию.

Т.7. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка из распределения:
а) $Bern(\theta)$; б) $Pois(\theta)$; в) $\mathcal{N}(\theta, 1)$; г) $\exp(\theta)$.

Для каких функций $\tau(\theta)$ существует эффективная оценка? Найти соответствующую эффективную оценку и количество (фишеровской) информации, содержащейся в одном наблюдении.

III. Достаточные статистики. Полные статистики. Оптимальные оценки

С.2: §7, № 1; 5; 7; 8.

Т.8. С помощью критерия факторизации найти достаточную статистику для следующего семейства распределений:
а) $Bern(\theta)$; б) $Pois(\theta)$; в) $\mathcal{N}(\theta, 1)$; г) $\exp(\theta)$.

Проверить, является ли полученная статистика полной.

Т.9. Построить оптимальную оценку функции $\tau(\theta) = 5\theta^2 + 3\theta + 7$ для $Bern(\theta)$.

Т.10. Построить оптимальную оценку функции $\tau(\theta) = \sqrt{\theta}$ для $\exp(\theta)$.

ВТОРОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 9–15 мая)

I. Байесовские оценки

С.2: §14, № 1–5.

II. Проверка гипотез и доверительное оценивание

С.2: §8, № 2; 3; 6.

С.2: §10, № 1; 6*; 7; 8*.

С.2: §12, № 1; 2; 4; 6; 8.

Т.1. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка из распределения:
а) $Bern(\theta)$; б) $Pois(\theta)$; в) $\mathcal{N}(\theta, 1)$; г) $\exp(\theta)$.

Построить доверительный интервал для параметра θ.

Т.2. Рассмотрим распределение Коши с плотностью $p_\theta(x) = \frac{1}{\pi(1+(x-\theta)^2)}$. С помощью выборочной медианы построить доверительный интервал для θ^2.

Т.3. Пусть $X_1, \dots, X_n$ — выборка из экспоненциального распределения с параметром θ. Построить равномерно наиболее мощный критерий для проверки гипотезы $H_0 : \theta = \theta_0$ против альтернативы:

а) $H_1 : \theta > \theta_0$; б) $H_1 : \theta < \theta_0$.

Т.4. Пусть $X_1, \dots, X_n$ — выборка из $Bern(\theta)$. Проверить гипотезу $H_0 : \theta \le \theta_0$ против альтернативы $H_1 : \theta > \theta_0$.

III. Линейная регрессия. Проверка линейных гипотез.

С.2: §9, № 2-6.

С.2: §11, № 2; 4; 5.

С.1: гл.5, 3, 4.

Т.5. Имеется 2 гирьки с весами θ_1 и θ_2. На одних и тех же весах сначала взвесили первую гирьку, затем вторую, а потом обе сразу. Найти оценку наименьших квадратов для θ_1 и θ_2 и несмещенную оценку дисперсии ошибки измерений. Проверьте гипотезы:

а) $H_0 : \theta_1 = \theta_2$; б) $H_0 : 2\theta_1 = 3\theta_2$.

IV. Задачи для решения с использованием Python

Т.6. 1) Сгенерировать значение θ из равномерного распределения на отрезке $[-10, 10]$.

2) Сгенерировать выборку $X_1, \dots, X_{1000}$ из распределения Коши с плотностью $p_\theta(x) = \frac{1}{\pi(1+(x-\theta)^2)}$.

3) Найти выборочную медиану $\hat{\theta}$ и выборочное среднее $\overline{X}$.

4) Проделать шаги 2–3 еще 100 раз, получив набор из 101 значения выборочной медианы и 101 значения выборочного среднего.

5) Построить гистограмму по 101 полученному значению величины $\hat{\theta}$ и провести вертикальную линию, соответствующую значению θ.

6) Построить гистограмму, аналогичную той, которая была в предыдущем пункте, используя при этом $\overline{X}$ вместо $\hat{\theta}$.

7) Сделать вывод о том, какая статистика лучше оценивает параметр θ.

8) Повторить шаги 1–7 еще 2 раза.

9) Привести теоретическое объяснение результатов, полученных в ходе численного эксперимента.

10) Является ли $\hat{\theta}$ состоятельной? Получить ответ аналитически. Подтвердите аналитические расчеты с помощью построенной выше гистограммы.

11) Является ли $\hat{\theta}$ асимптотически нормальной? Получить ответ аналитически. Подтвердите аналитические расчеты с помощью построения вспомогательной гистограммы по 101 значению величины $\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta)$.

12) Ответить на вопросы пунктов 10–11, заменив $\hat{\theta}$ на $\overline{X}$.

T.7. Решить предыдущую задачу, заменив распределение Коши на $\mathcal{N}(\theta, 1)$.

T.8. Рассмотрим равномерное распределение $U[0, \theta]$. Пусть $\hat{\theta}_1$ — оптимальная оценка параметра θ, а $\hat{\theta}_2$ — оценка, построенная с помощью метода моментов. Сравнить $\hat{\theta}_1$ и $\hat{\theta}_2$ тем же способом, что и в предыдущей задаче. Найти дисперсию аналитически и численно. Предполагая, что размер выборки стремится к бесконечности, сравнить (аналитически) скорость стремления к нулю дисперсий оценок с асимптотикой вида $\frac{1}{ni(\theta)}$ из неравенства Крамера–Рао. Могут ли аналогичные результаты получиться в случае, когда выполнены условия регулярности?

T.9. Рассмотрим следующий эксперимент. Имеется 2 гирьки с весами $\theta_1 = 5$ и $\theta_2 = 8$. На одних и тех же весах сначала n раз взвесили первую первую гирьку, получив значения $X_1, \ldots, X_n$, затем $2n$ раз взвесили вторую гирьку, получив значения $Y_1, \ldots, Y_{2n}$, а потом n раз взвесили сразу обе гирьки.

1) При каждом $n = 1, 2, \ldots, 200$ с помощью гауссовской линейной модели реализуйте данный эксперимент, предполагая, что $\sigma^2 = 1$, и проверьте гипотезу $H_0 : 8\theta_1 = 5\theta_2$ с помощью F-критерия.

2) Пусть $\xi_n = 0$, если гипотеза H_0 отвергается, и $\xi_n = 1$ в противном случае. Доля правильных ответов в первых n экспериментах вычисляется по формуле $\frac{\sum_{i=1}^n \xi_n}{n}$. Проиллюстрируйте графически, как в зависимости от n меняется доля правильных ответов.

3) Проделайте аналогичную процедуру с гипотезой $H_0 : 2\theta_1 = 3\theta_2$.

4) Вычислите оптимальную оценку для θ_1 и сравните ее с оценкой $\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$.

5) Вычислите оптимальную оценку для θ_2 и сравните ее с оценкой $\frac{\sum_{i=1}^{2n} Y_i}{2n}$.

T.10. Сгенерируйте выборку из $\mathcal{N}(0, 1)$ размера 1000. Преобразуйте выражение

$$D_n = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| F_n(x) - F(x) \right|$$

так, чтобы вместо $\sup_{x \in \mathbb{R}}$ получился максимум по конечному множеству. Постройте график зависимости D_n от n при $1 \le n \le 1000$. Верно ли, что у последовательности D_n есть предел? Если да, то чему он равен и как называется соответствующий вид сходимости? Найдите с помощью выборки приближенное значение $\mathbf{P}(\sqrt{n} D_n \le x)$ при $x \in [-1, 10]$ и постройте график этой функции. Изобразите на том же графике функцию распределения $K(x)$, соответствующую распределению Колмогорова.

T.11. 1) Пусть $\theta = -10$. Сгенерировать выборку размера $n = 200$ из распределения $\mathcal{N}(\theta, 1)$. Построить точный доверительный интервал для θ.

2) Повторить пункт 1 для остальных значений θ из множества

$\Theta = \left\{\frac{k}{10} : k = -100, -99, \ldots, 100\right\}$.

3) Построить график, отметив на оси абсцисс значения $\theta \in \Theta$ и изобразив при каждом θ вертикальный отрезок, соответствующий доверительному интервалу, построенному при данном θ. На полученном графике изобразить прямую $f(\theta) = \theta$.

4) Повторить пункты 1–3 при $n \in \{5, 10, 100\}$. Как меняется длина доверительного интервала с ростом n? Подтвердить результаты численного эксперимента аналитически.

Т.12. Решить предыдущую задачу, заменив $\mathcal{N}(\theta, 1)$ на $Pois(\theta)$.

Т.13. 1) Сгенерируйте выборку $X_1, \ldots, X_{1000}$ из распределения $\mathcal{N}(70, 10)$.

2) Будем интерпретировать X_i как время, необходимое курьеру для доставки i-го заказа. Через T обозначим время, необходимое для доставки большей части заказов (скажем, 95% заказов). Другими словами, T — это квантиль порядка $0,95$ распределения $\mathcal{N}(70, 10)$. Найдите T с точностью до второго знака после запятой.

3) Постройте по выборке оценку величины T. С помощью бутстрепа оцените точность полученной оценки.

4) Повторите пункты 1-3, используя вместо числа $0,95$ значения $0,9$ и $0,8$.

Задания составили: к. ф.-м. н., доцент М. П. Савёлов

к. ф.-м. н., ст. преп. М. В. Меликян