Московский физико-технический институт

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

II ЗАДАНИЕ

Автор: Яфаров Руслан,
Б13-202

осень 2023

I Случайные величины и их характеристики

1.

3.3°. Распределение дискретной случайной величины ξ определяется формулами: $\mathsf{P}\{\xi = k\} = C/k(k+1)(k+2)$, $k = 1, 2, \ldots$ Найти: а) постоянную C; б) $\mathsf{P}\{\xi \geqslant 3\}$; в) $\mathsf{P}\{n_1 \leqslant \xi \leqslant n_2\}$.

Решение.

a

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right)\right) =$$

$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$. Имеем $\frac{C}{4} = 1 \Rightarrow C = 4$.

b $P(\xi \geq 3) = 1 - P(\xi < 3) = 1 - (P(\xi = 1) + P(\xi = 2)) = \frac{1}{6}$.

c $P(n_1 \leq \xi \leq n_2) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n_1} - \frac{1}{n_2} - \frac{1}{n_1+1} + \frac{1}{n_2+1}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n_1(n_1+1)} - \frac{1}{n_2(n_2+1)}\right)$

2.

Пусть ξ и η — независимые случайные величины с распределениями $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ p_1 & p_2 & \ldots & p_n \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} (b_1 & b_2 & \ldots & b_m \\ q_1 & q_2 & \ldots & q_m \end{pmatrix}$ соответственно. Найти совместное распределение ξ и η.

Решение. $P(\xi = a_i, \eta = b_j) = p_i q_j$

3.

3.17°. Случайные величины ξ и η независимы. Найти $\mathsf{P}\{\xi = \eta\}$, если: а) ξ и η имеют одно и то же дискретное распределение $\mathsf{P}\{\xi = x_k\} = \mathsf{P}\{\eta = x_k\} = p_k$, $k = 0, 1, \ldots$;

Решение. $P(\xi = \eta) = \sum_{k=0}^{\infty} P(\xi = x_k, \eta = x_k) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k^2$

4.

Случайная величина ξ имеет распределение $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1/3 & 1/6 & 1/2 \end{pmatrix}$.

Положим $\eta = \xi^2$. Найти:

а) распределение случайной величины η;

б) совместное распределение случайных величин ξ и η.

Решение.

a $P(\eta = 1) = \frac{5}{6}, P(\eta = 0) = \frac{1}{6}$

b $P(\xi = -1, \eta = 1) = \frac{1}{3}, P(\xi = 0, \eta = 0) = \frac{1}{6}, P(\xi = 1, \eta = 1) = \frac{1}{2}$

5.

3.16°. Совместное распределение $p_{ij} = \mathsf{P}\{\xi_1 = i,\ \xi_2 = j\}$ случайных величин ξ_1, ξ_2 задано таблицей:

$i \backslash j$	−1	0	1
−1	1/8	1/12	7/24
1	5/24	1/6	1/8

Найти: а) одномерные распределения $p_{i\cdot} = \mathsf{P}\{\xi_1 = i\}$, $p_{\cdot j} = \mathsf{P}\{\xi_2 = j\}$; б) совместное распределение $q_{ij} = \mathsf{P}\{\eta_1 = i, \eta_2 = j\}$ случайных величин $\eta_1 = \xi_1 + \xi_2$, $\eta_2 = \xi_1\xi_2$; в) одномерные распределения $q_{i\cdot} = \mathsf{P}\{\eta_1 = i\}$, $q_{\cdot j} = \mathsf{P}\{\eta_2 = j\}$.

Решение.

a $p_{i\cdot} = \sum_j p_{ij}, p_{\cdot j} = \sum_i p_{ij}$. $p_{-1\cdot} = \frac{1}{2}, p_{1\cdot} = \frac{1}{2}, p_{\cdot -1} = \frac{1}{3}, p_{\cdot 0} = \frac{1}{4}, p_{\cdot 1} = \frac{5}{12}$

b $q_{-21} = \frac{1}{8}, q_{-10} = \frac{1}{12}, q_{10} = \frac{1}{6}, q_{21} = \frac{1}{8}, q_{0-1} = \frac{1}{2}$

c $q_{-2\cdot} = q_{-21}, q_{-1\cdot} = q_{-10}, q_{0\cdots} = q_{0-1}, q_{1\cdot} = q_{10}, q_{2\cdot} = q_{21}, q_{\cdot -1} = q_{0-1}, q_{\cdot 0} = \frac{1}{4}, q_{\cdot 1} = \frac{1}{4}$

6.

Случайные величины ξ и η принимают значения a_1, a_2, a_3 и b_1, b_2 соответственно. Вероятности $P\{\xi{=}a_i, \eta = b_j\}$ записаны в таблицу P (i — номер строки, j — номер столбца). Выяснить, являются ли случайные величины ξ и η независимыми, если:

а) $P = \begin{pmatrix} 1/15 & 3/10 \\ 2/15 & 1/10 \\ 1/5 & 1/5 \end{pmatrix}$; б) $P = \begin{pmatrix} 2/15 & 1/5 \\ 1/15 & 1/10 \\ 1/5 & 3/10 \end{pmatrix}$.

Решение.

a $P(\xi = a_1) = \frac{11}{30}, P(\eta = b_1) = \frac{2}{5}, P(\xi = a_1, \eta = b_1) = \frac{1}{15} \neq P(\xi = a_1)P(\eta = b_1) = \frac{11}{75} \Rightarrow$ Нет, не являются.

b $P(\xi = a_1) = \frac{1}{3}, P(\xi = a_2) = \frac{1}{6}, P(\xi = a_3) = \frac{1}{2}, P(\eta = b_1) = \frac{2}{5}, P(\eta = b_2) = \frac{3}{5}$ Являются.

7.

3.78°. Найти $\mathsf{M}\xi$, $\mathsf{D}\xi$, $\mathsf{M}\xi^{[k]}$ ($k = 1, 2, \ldots$), если:
а) $\mathsf{P}\{\xi = m\} = \frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}$, $m = 0, 1, 2, \ldots$;
б) $\mathsf{P}\{\xi = m\} = C_n^m p^m q^{n-m}$, $q = 1 - p$, $m = 0, 1, 2, \ldots, n$.

(Найти только математическое ожидание и дисперсию)

Решение.

a

$$\mathbb{E}\xi = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda^m}{(m-1)!}e^{-\lambda} = \lambda e^{-\lambda}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\lambda^m}{m!} = \lambda,\ \mathbb{E}\xi(\xi - 1) = e^{-\lambda}\sum_{m=0}^{\infty} m(m-1)\frac{\lambda^m}{m!} = \lambda^2 e^{-\lambda}\sum_{m=2}^{\infty}\frac{\lambda^{m-2}}{(m-2)!}$$

$$= \lambda^2 = \mathbb{E}\xi^2 - \mathbb{E}\xi \Rightarrow \mathbb{E}\xi^2 = \lambda^2 + \lambda \Rightarrow \mathbb{D}\xi = \mathbb{E}\xi^2 - (\mathbb{E}\xi)^2 = \lambda$$

b

$$\xi = \sum_{i=1}^{n} \xi_i, \xi_i \sim Bern(p), \xi_i \text{ независимы } \Rightarrow \mathbb{E}\xi = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\xi_i = np.\ \mathbb{D}\xi = \sum_{i=1}^{n}\mathbb{D}\xi_i = npq$$

8.

3.80°. Совместное распределение ξ_1, ξ_2 определяется условиями $\mathsf{P}\{\xi_1\xi_2 = 0\} = 1$, $\mathsf{P}\{\xi_i = 1\} = \mathsf{P}\{\xi_i = -1\} = 1/4$, $i = 1, 2$. Найти $\mathsf{M}\xi_1$, $\mathsf{M}\xi_2$, $\mathsf{D}\xi_1$, $\mathsf{D}\xi_2$, $\operatorname{cov}(\xi_1, \xi_2)$.

Решение. $P(\xi_1 \neq 0) \geq \frac{1}{2} \Rightarrow P(\xi_2 = 0) \geq \frac{1}{2}$(от противного доказывается очевидно). $P(\xi_2 = 0) > \frac{1}{2}$ быть не может так как тогда $\sum_{a_i} P(\xi = a_i) > 1 \Rightarrow P(\xi_1 = 0) = P(\xi_2 = 0) = \frac{1}{2}$ $\mathbb{E}\xi_1 = \mathbb{E}\xi_2 = 0$ $\mathbb{D}\xi_1 = \mathbb{D}\xi_2 = \frac{1}{2}$. $\operatorname{cov}(\xi_1, \xi_2) = \mathbb{E}\xi_1\xi_2 = 0$

9.

3.95°. Найти ковариационную матрицу случайного вектора $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, если:

а) ξ_1, ξ_2, ξ_3 независимы и имеют стандартное нормальное распределение;

б) вектор ξ имеет равномерное распределение в кубе $\left\{(x_1, x_2, x_3)\colon \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant 3} |x_i| \leqslant \sqrt{3}\right\}$;

в) вектор ξ с верятностью $1/6$ принимает каждое из 6 значений $(0, 0, \pm\sqrt{3})$, $(0, \pm\sqrt{3}, 0)$, $(\pm\sqrt{3}, 0, 0)$.

Решение.

a $\operatorname{cov}\xi = E$

b

$$\mathbb{D}x_i = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3} \Rightarrow \text{ так как } x_i \text{ независимы } \operatorname{cov}\xi = 2\sqrt{3}E$$

c $\mathbb{E}x_i = 0 \Rightarrow \mathbb{D}x_i = \mathbb{E}x_i^2 = 3 * \frac{1}{3} = 1$. $x_i x_j = 0 \forall i \neq j \Rightarrow cov\xi = E$

10.

3.96°. Какие из приведенных ниже матриц могут, а какие не могут быть ковариационными для случайного вектора $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, в) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$,

г) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, д) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, е) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

ж) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$?

Решение.

a Может, пример выше

b Не может, $\mathbb{D}\eta = 0 \Rightarrow \eta = const$, а значит $\eta - \mathbb{E}\eta = 0 \Rightarrow cov(\xi_i, \xi_j) = 0$.

c Не может, так как она не симментрична

d Ну, вроде может

e Не может, так как она не положительно полуопределена

f не положительно полуопределена

g Ну, вроде может

11.

3.32°. Найти распределение суммы двух независимых слагаемых ξ_1 и ξ_2, если слагаемые распределены:
а) показательно с одним и тем же параметром α;
б) по закону Пуассона с параметрами λ_1 и λ_2.

(б)

Решение.

$$P(\xi = m) = \sum_{k=0}^{m} P(\xi_1 = k)P(\xi_2 = m-k) = \sum_{k=0}^{m} \frac{\lambda_1^k}{k!} e^{-\lambda_1} \frac{\lambda_2^{m-k}}{(m-k)!} e^{-\lambda_2} = \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{m!} \sum_{k=0}^{m} C_m^k \lambda_1^k \lambda_2^{m-k}$$

$$= \frac{(\lambda_1+\lambda_2)^m}{m!} e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}$$

12.

3.189°. Случайные величины ξ и η независимы;

$$P\{\xi = k\} = P\{\eta = k\} = pq^{k-1},$$
$$q = 1 - p, \quad 0 < p < 1, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Найти:
а) $P\{\xi = \eta\}$; б) $P\{\xi > \eta\}$; в) $P\{\xi < \eta\}$;
г) $P\{\xi = k \mid \xi > \eta\}$; д) $P\{\xi = k \mid \xi < \eta\}$;
е) $P\{\xi = k \mid \xi = \eta\}$; ж) $P\{\xi = k \mid \xi + \eta = l\}$;
з) $M\{\xi \mid \xi + \eta = l\}$, $l \geqslant 2$.

(а, б, в)

Решение.

a $P(\xi = \eta) = \sum_{k=1}^{\infty} (pq^{k-1})^2 = p^2q^{-2} \sum_{k=1}^{\infty} q^{2k} = p^2q^{-2} \frac{q^2}{1-q^2} = \frac{p^2}{1-q^2}$

b Из соображений симметрии $P(\xi > \eta) = P(\eta > \xi) = p$. $2p + P(\xi = \eta) = 1 \Rightarrow p = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{p^2}{1-q^2}\right)$

13.

. (Т. §8. Задача 4.) Из урны, содержащей m белых и n чёрных шаров, по схеме случайного выбора с возвращением извлекают шары до первого появления белого шара. Найти математическое ожидание и дисперсию числа вынутых шаров.

Решение. Пусть вероятность вынуть белый шар равна $p = \frac{m}{m+n}$, черный - $q = 1 - p$. Тогда $\xi-$ случайная величина, равная кол-ву вынутых шаров. $P(\xi = k) = q^{k-1}p$. Рассмотрим функцию $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} x^k = \dfrac{x}{1-x}.f'(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} kx^{k-1}.f''(x) = \dfrac{-2(x-1)}{(x-1)^4} = \dfrac{2}{(1-x)^3} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} k(k-1)x^{k-2} \Rightarrow \mathbb{E}\xi = \sum\limits_{k=1}^{\infty} pq^{k-1}k = pf'(q) = \dfrac{p}{(1-q)^2} = \dfrac{1}{p} = 1 + \dfrac{n}{m}.\mathbb{E}\xi(\xi-1) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} pq^{k-1}k(k-1) = qpf''(q) = \dfrac{2qp}{p^3} = \dfrac{2q}{p^2} \Rightarrow \mathbb{E}\xi^2 = \dfrac{2q}{p^2} + \dfrac{1}{p} = \dfrac{2q+p}{p^2} \Rightarrow \mathbb{D}\xi = \dfrac{2q+p}{p^2} - \dfrac{1}{p^2} = \dfrac{1-p}{p^2} = \dfrac{q}{p^2} = \dfrac{n}{m}\left(1 + \dfrac{n}{m}\right)$

II Схема Бернулли: закон больших чисел, предельные теоремы Пуассона и Муавра-Лапласа

14.

4.2°. Пусть случайная величина η_n равна сумме очков, появившихся при n бросаниях симметричной игральной кости. Используя неравенство Чебышева, оценить сверху

$$\mathsf{P}\left\{\left|\frac{\eta_n}{n} - 3{,}5\right| > \varepsilon\right\}, \quad \varepsilon > 0.$$

Решение. $\eta_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i$, где ξ_i- сл-я величина очков одного броска кубика, оч-но ξ_i независимы. $\mathbb{E}\xi_i = \frac{7}{2}, \mathbb{D}\xi = \frac{35}{12} \Rightarrow \mathbb{E}\eta_n = n\frac{7}{2}, \mathbb{D}\eta_n = n\frac{35}{12}$. По неравенству Чебышева $P(\left|\frac{\eta_n}{n} - 3.5\right| > \varepsilon) = P(|\eta_n - 3.5n| > n\varepsilon) = P(|\eta_n - \mathbb{E}\eta_n| > n\varepsilon) \leq \frac{\mathbb{D}\eta_n}{n^2\varepsilon^2} = \frac{35}{12n\varepsilon^2}$

15.

2.67°. Пусть η_N — суммарное число появлений «5» и «6» в N бросаниях игральной кости. При $N = 1800$ найти вероятность того, что $\eta_N \geqslant 620$.

Решение. $\eta_N \sim Bin(N, \frac{1}{3}) \Rightarrow \mathbb{E}\eta_N = \frac{N}{3} = 600, \mathbb{D}\eta_N = \frac{2N}{9} = 400$ По интегральной теореме Муавра-Лапласа $P(\eta_N \geq 620) = \int_{\frac{620-600}{\sqrt{400}}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1 - \Phi(1) \approx 0.1587$

16.

2.70°. Из урны, содержащей 1 белый и 4 черных шара, по схеме случайного выбора с возвращением проводят 2500 извлечений шаров. Найти приближенное значение вероятности того, что число появлений белого шара заключено между 480 и 540.

Решение. $\xi \sim Bin(2500, \frac{1}{5}) \mathbb{E}\xi = 500, \mathbb{D}\xi = 400, P(480 \leq \xi \leq 540) = P(\frac{480-500}{\sqrt{400}} \leq \frac{\xi - \mathbb{E}\xi}{\sqrt{\mathbb{D}\xi}} \leq \frac{540-500}{\sqrt{400}}) = P(-1 \leq \overset{*}{\xi} \leq 2) = \Phi(2) - \Phi(-1) \approx 0.8185$

17.

. (Т. §10. Задача 2.) Закон распределения случайной величины ξ определяется формулами:

$$P\{\xi = 0\} = 1 - \frac{\sigma^2}{\Delta^2}, \quad P\{\xi = -\Delta\} = P\{\xi = \Delta\} = \frac{\sigma^2}{2\Delta^2}.$$

Сравнить точное значение вероятности $P\{|\xi| \geq \Delta\}$ с оценкой, полученной по неравенству Чебышева.

Решение. $\mathbb{E}\xi = 0, \mathbb{E}\xi^2 = \sigma^2 \Rightarrow \mathbb{D}\xi = \sigma^2, P(|\xi| \geq \Delta) \leq \frac{\sigma^2}{\Delta^2}$. Они равны, емае...

18.

. Книга в 500 страниц содержит 50 опечаток. Оценить вероятность того, что на случайно выбранной странице имеется не менее 3 опечаток, используя биномиальный закон распределения и его нормальное и пуассоновское приближения. Сравнить результаты.

Решение.

19.

Найти вероятность того, что среди 10 000 новорождённых будет не менее половины мальчиков, если вероятность рождения мальчика равна 0,515.

Решение. $\xi \sim Bin(N,p) P(\xi \geq \frac{N}{2}) = \int_{\frac{\frac{N}{2} - Np}{\sqrt{Np(1-p)}}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1 - \Phi\left(\sqrt{\frac{N}{p(1-p)}}\left(\frac{1}{2} - p\right)\right) = 1 - \Phi\left(\sqrt{\frac{10000}{0.515 * 0.485}}(-0.015)\right) \approx 1 - \Phi(-0.94911) \approx 0.8289$

III Случайная величина в общей теоретико вероятностной схеме. Характеристические и производящие функции. Центральная предельная теорема

20.

(Т §8. Задача 1.) Длина диаметра круга равномерно распределена в отрезке $[0,1]$. Найти математическое ожидание и дисперсию площади круга.

Решение. $\mathbb{E}(\frac{\pi\xi^2}{4}) = \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}} \pi x^2 I_{x\in[0,1]}dx = \frac{\pi}{12}.\mathbb{E}\left(\frac{\pi\xi^2}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}\int_{\mathbb{R}} \pi^2 x^4 I_{x\in[0,1]}dx = \frac{\pi^2}{80} \Rightarrow \mathbb{D}\left(\frac{\pi\xi^2}{4}\right) = \frac{\pi^2}{80} - \frac{\pi^2}{144} = \frac{\pi^2}{180}$

21.

Пусть случайная величина ξ имеет строго возрастающую непрерывную функцию распределения $F(x)$. Найти функцию распределения случайной величины $\eta = F(\xi)$.

Решение. По теореме об обратной функции $\exists F^{-1}(x)$. Тогда $F_\eta(y) = P(\eta \le y) = P(F(\xi) \le y) = P(\xi \le F^{-1}(y)) = F_\xi(F^{-1}(y))$

22.

Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — независимые одинаково распределённые случайные величины с функцией распределения $F(x)$. Найти функции распределения случайных величин $\eta = \min_{1\le i\le n} \xi_i$ и $\zeta = \max_{1\le i\le n} \xi_i$.

Решение.

$$F_\eta(x) = P(\min_{1\le i\le n} \xi_i \le x) = 1 - P(\min_{1\le i\le n} \xi_i > x) = 1 - \prod_{i=1}^{n} P(\xi_i > x) = 1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - F_{\xi_i}(x))$$

$$F_\zeta(x) = \prod_{i=1}^{n} F_{\xi_i}(x)$$

23.

. Вычислить характеристические функции для следующих законов распределения:

а) равномерного распределения в интервале $(-a, a)$;
б) распределения Пуассона (найти также производящую функцию);
в) нормального распределения $N(a, \sigma^2)$.

Решение.

a $\xi \sim R(-a, a)$

$$\psi_\xi(t) = \mathbb{E}e^{it\xi} = \mathbb{E}\cos t\xi + i\mathbb{E}\sin t\xi = \int_{-a}^{a} \cos tx \frac{1}{2a} dx + i \int_{-a}^{a} \sin tx \frac{1}{2a} dx = \begin{cases} -\frac{\sin tx}{2ta} = \Big|_{-a}^{a} = -\frac{\sin ta}{ta}, t \neq 0 \\ 1, t = 0 \end{cases}$$

b $\xi \sim Pois(\lambda)$

$$\psi_\xi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{itk} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(e^{it}\lambda)^k}{k!} = e^{\lambda(e^{it}-1)}$$

c $\xi \sim N(a, \sigma^2)$

$$\psi_\xi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\left(\frac{x-a}{\sigma} - \sigma ti\right)^2 - 2ati + \sigma^2 t^2\right)} dx =$$

$$\frac{e^{ati - \frac{\sigma^2 t^2}{2}} \sigma}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{\left(\frac{x-a}{\sigma} - \sigma ti\right)^2}{2}} d\left(\frac{x-a}{\sigma} - \sigma ti\right) = e^{ati - \frac{\sigma^2 t^2}{2}} \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du}{\sqrt{2\pi}} = e^{ati - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$$

24.

. Найти законы распределения, которым соответствуют следующие характеристические функции:

$$\cos t, \quad e^{it}\cos t, \quad \frac{1}{2 - e^{it}}.$$

Решение.

a $\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} = e^{it*1}\frac{1}{2} + e^{it(-1)}\frac{1}{2} \Rightarrow \xi \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

b $e^{it}\cos t = \cos^2 t + i\sin t\cos t = \frac{1}{2} + \frac{\cos 2t}{2} + i\frac{\sin 2t}{2} = \frac{e^{it*0}}{2} + \frac{e^{it*2}}{2} \Rightarrow \xi \sim \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

c $\frac{1}{2 - e^{it}} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{itk}}{2^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{itk}}{2^{k+1}} \Rightarrow P(\xi = k) = \frac{1}{2^{k+1}} \forall k = 0, 1, \cdots$

25.

. Пусть $\xi_{m,n}$, где $m = 1,\, 2,\, \dots,\, n,$ — независимые случайные величины с распределением

$$P\left\{\xi_{m,n} < x\right\} = \begin{cases} 1 - e^{-\alpha_n x}, & x \geq 0, \alpha_n = \lambda n, \lambda > 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Найти предельное распределение при $n \to \infty$ для случайной величины $\xi_n = \xi_{1,n} + \xi_{2,n} + \cdots + \xi_{n,n}$.

Решение. $P(\xi_{m,n} < x) = F(x) \Rightarrow \frac{dF}{dx} = p(x) = \begin{cases} \alpha_n e^{-\alpha_n x}, x \geq 0 \\ 0, x < 0 \end{cases} \Rightarrow \mathbb{E}\xi_{m,n} = \int_0^{+\infty} p(x) x dx =$
$\int_0^{+\infty} \alpha_n e^{-\alpha_n x} x dx = -\int_0^{+\infty} x d(e^{-\alpha_n x}) = -(x e^{-\alpha_n x}|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} e^{-\alpha_n x} dx) = \left.\frac{e^{-\alpha_n x}}{-\alpha_n}\right|_0^{+\infty} = \frac{1}{\alpha_n}$
$\mathbb{E}\xi_{m,n}^2 = \int_0^{+\infty} p(x) x^2 dx = -(x^2 e^{-\alpha_n x}|_0^{+\infty} - 2\int_0^{+\infty} x e^{-\alpha_n x} dx) = \frac{2}{\alpha_n^2} \Rightarrow \mathbb{D}\xi_{m,n} = \frac{1}{\alpha_n^2} \Rightarrow \frac{\xi_n - n\mathbb{E}\xi_{m,n}}{\sqrt{n\mathbb{D}\xi_{m,n}}} =$
$\sqrt{n}\frac{\xi_n - \frac{1}{\lambda}}{\frac{1}{\lambda}} = \sqrt{n}(\lambda\xi_n - 1)$

IV Условное математическое ожидание

26.

. Пусть случайные величины ξ и η одинаково распределены, независимы и имеют (безусловные) математические ожидания $E\xi$ и $E\eta$ соответственно. Найти $E(\xi|\xi + \eta)$.

Решение. Из соображений симметрии, $\mathbb{E}(\xi|\xi+\eta) = \mathbb{E}(\eta|\xi+\eta) = E, 2E = \mathbb{E}(\xi+\eta|\xi+\eta)$(по линейности) $= \xi + \eta \Rightarrow \mathbb{E}(\xi|\xi+\eta) = E = \frac{\xi+\eta}{2}$

27.

. Пусть $\eta, \xi_1, \dots, \xi_n$ – случайные величины из L^2_Ω. Найти такую функцию $f(\xi_1, \dots, \xi_n)$, которая минимизирует $E(\eta - f(\xi_1, \dots, \xi_n))^2$, т.е. дает наилучший прогноз значений η по наблюдаемым значениям случайных величин $\xi_1, \dots, \xi_n$.

Решение.

V Многомероное нормальное распределение

28.

. Пусть случайные векторы η_1 и η_2 таковы, что их компоненты некоррелированы (т.е. имеют нулевые ковариации, а совместное распределение η_1 и η_2 (в прямом произведении евклидовых пространств) является многомерным нормальным. Доказать, что случайные векторы η_1 и η_2 независимы. (Кратко: в случае многомерного нормального распределения некоррелированность влечет за собой независимость.)

Решение.

29.

. Доказать, что наилучшая функция, делающая оценку значения η при известных $\xi_1, \ldots, \xi_n$, в случае многомерного нормального распределения вектора $(\eta, \xi_1, \ldots, \xi_n)$ совпадает с линейной.

Решение.