

UYARLAMALI KONTROL SİSTEMLERİ

ÖDEV 4

MUSTAFA CANER SEZER

504191123

1. Soru

$$y(t) + ay(t-1) = bu(t-1) + e(t) + ce(t-1)$$

Şeklinde verilen sistemin parametre kestirimi

- Recursive Least Squares
- Recursive Least Squares with forgetting factor
- Extended Least Squares
- Least Means Square
- Projection Algorithm
- Stochastic Approximation Algorithm

İle yapılacaktır.

- Recursive Least Squares

Recursive Least squares ile parametre kestirimi, Astrom'un kitabında da belirttiği üzere özet olarak şu şekilde yapılabilir,

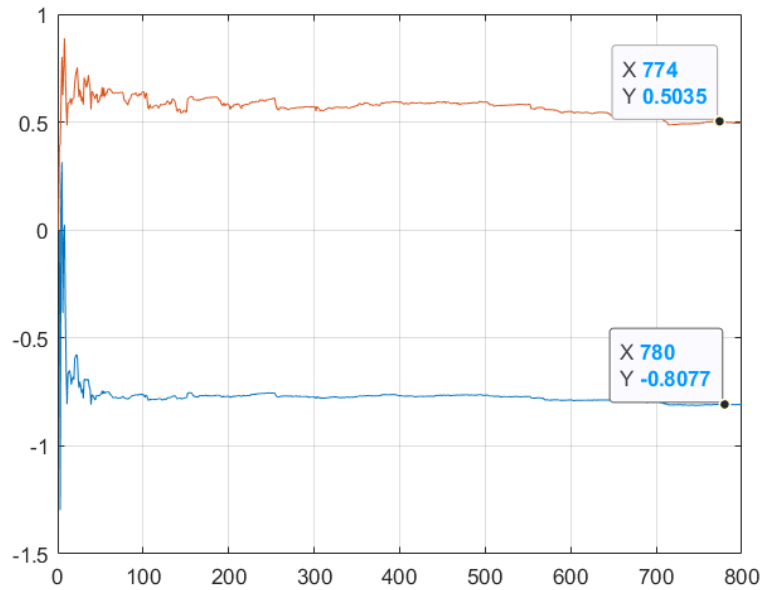
$$\hat{\theta}(t) = \hat{\theta}(t-1) + K(t)(y(t) - \varphi^T(t)\hat{\theta}(t-1)) \quad (2.15)$$

$$K(t) = P(t)\varphi(t) \left(I + \varphi^T(t)P(t-1)\varphi(t) \right)^{-1} \quad (2.16)$$

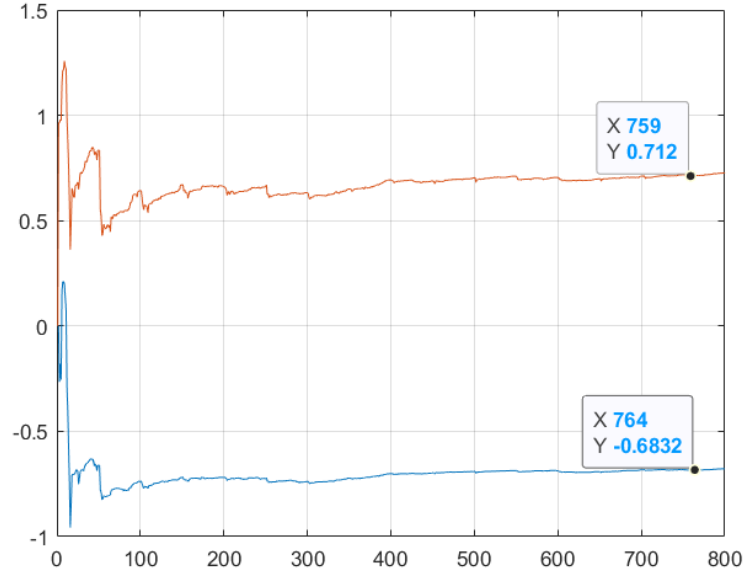
$$P(t) = P(t-1) - P(t-1)\varphi(t) \left(I + \varphi^T(t)P(t-1)\varphi(t) \right)^{-1} \varphi^T(t)P(t-1) \\ = \left(I - K(t)\varphi^T(t) \right) P(t-1) \quad (2.17)$$

□

Burada P ve theta matrislerini bir değer ile initialize etmemiz gerekir. Kodda öncelikle $P(0)=10^6 \cdot I$ ile, theta matrisi ise 2×1 'lik bir sıfır matrisi ile başlatılmıştır. Bunun için sonuçlar,



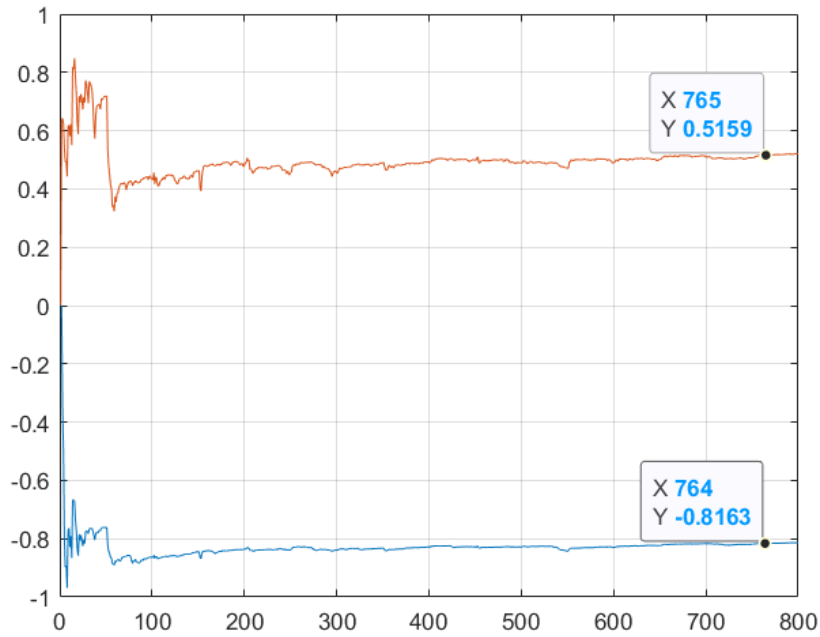
Şekil 1 $c=0$ iken recursive least squares



Şekil 2 $c=-0.5$ iken recursive least squares

Görüldüğü üzere recursive least squares, $c=0$ iken değerlere yaklaşık sonuç verirken $c=-0.5$ olunca gerçek değerlerin uzağında kalmıştır. Ayrıca noise her seferinde değişik olduğundan parametre yakınsamaları da her simülasyonda farklı şekilde olmuştur. Değerlerin başlangıçta oldukça farklı değer aralıklarında gidip geldiği görülmüştür.

Parametreleri başlatırken kullandığımız 10^6 değerinin etkisini incelemek için başlangıçta 10^2 ile bir initialize işlemi uyguladığımızda $c=0$ 'da aşağıdaki sonuç elde edilmiştir. Algoritma sonunda parametrelere yakınsamıştır fakat yakınsama işlemi 10^6 'ya göre daha uzun sürmüştür. Bundan sonraki simülasyonlar aksi belirtilmedikçe 10^6 için yapılmıştır.



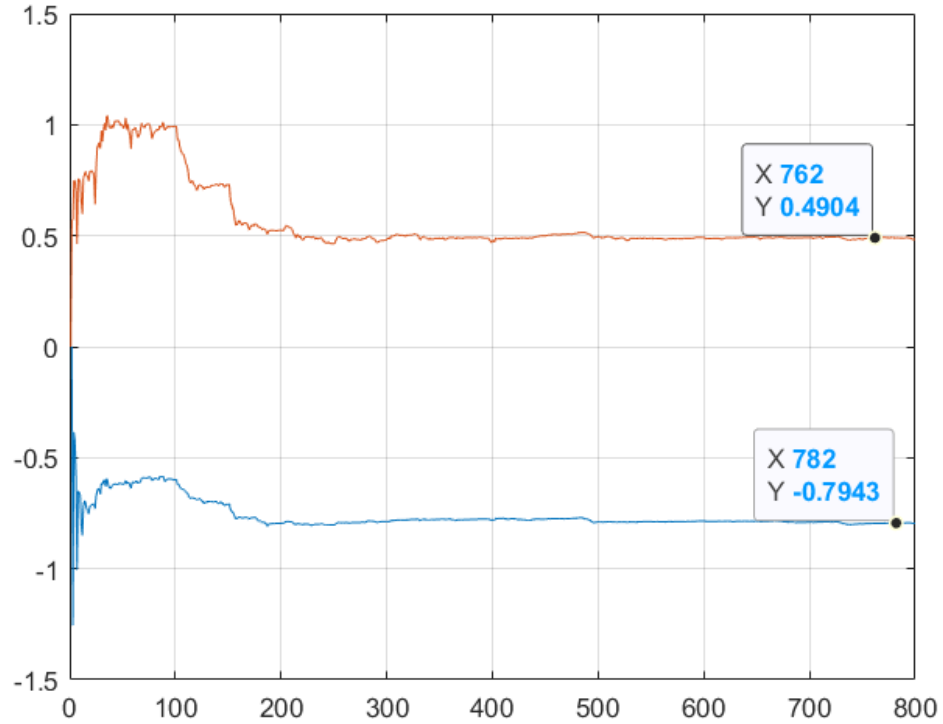
Şekil 3 $P=10^2 \cdot I$ ile yakınsama

- Recursive Least Squares with forgetting factor

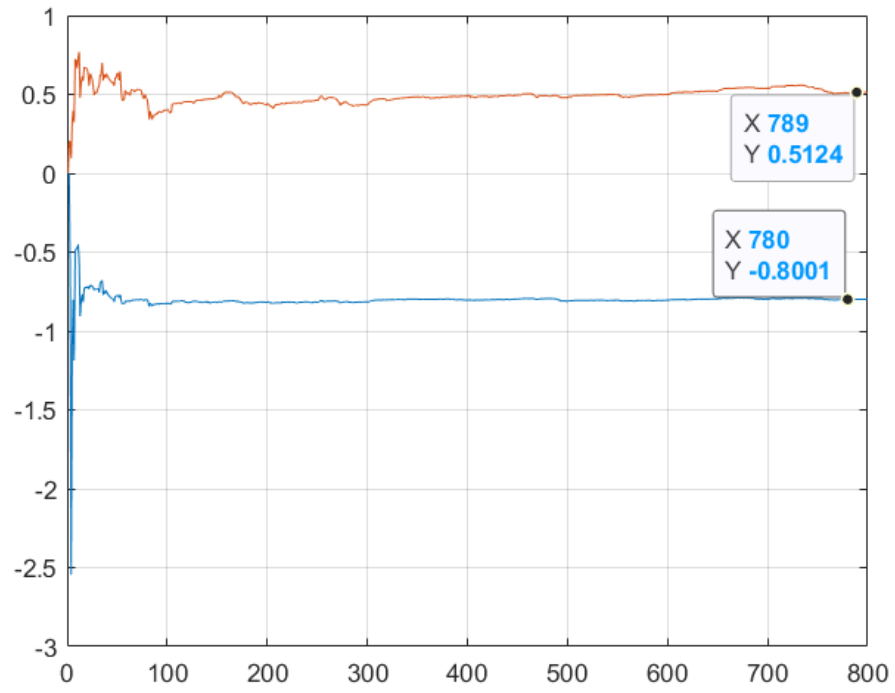
Recursive least squares algoritmasında en son kaç datanın dikkate alınacağına forgetting factor ile karar verebiliriz. RLS ile oldukça benzer fakat lambda katsayısı eklenmiş halidir.

$$\begin{aligned}\hat{\theta}(t) &= \hat{\theta}(t-1) + K(t) \left(y(t) - \varphi^T(t) \hat{\theta}(t-1) \right) \\ K(t) &= P(t) \varphi(t) = P(t-1) \varphi(t) (\lambda I + \varphi^T(t) P(t-1) \varphi(t))^{-1} \quad (2.21) \\ P(t) &= (I - K(t) \varphi^T(t)) P(t-1) / \lambda\end{aligned}$$

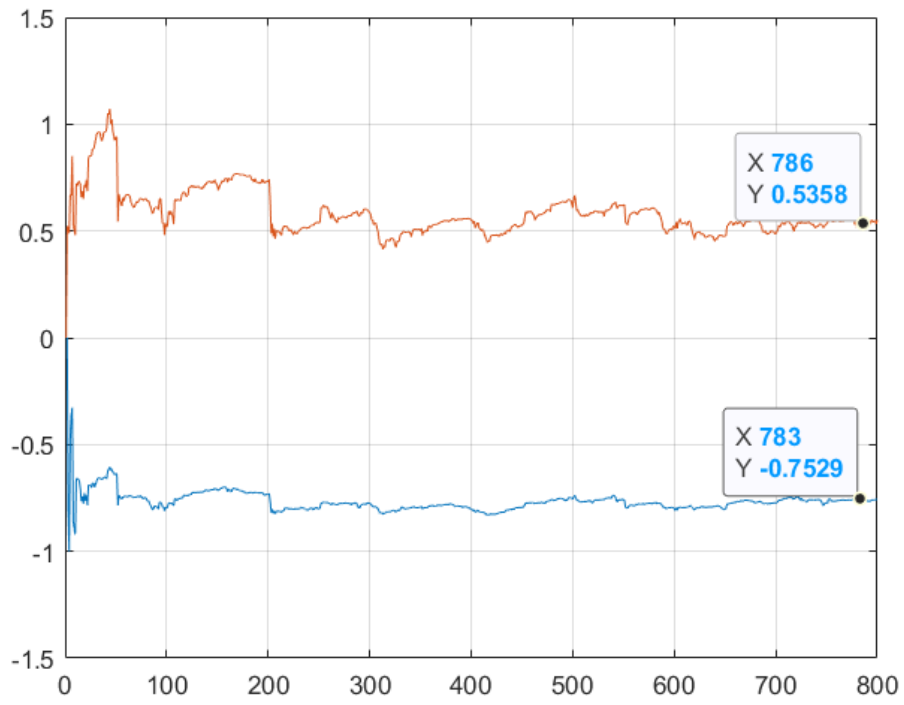
Astrom'un kitabında da belirtildiği üzere çözüm şu şekildedir. Lambda değerleri Astromun kitabındaki gibi 1,0.999,0.99,0.95 olarak alınıp simülasyonlar yapılmıştır.



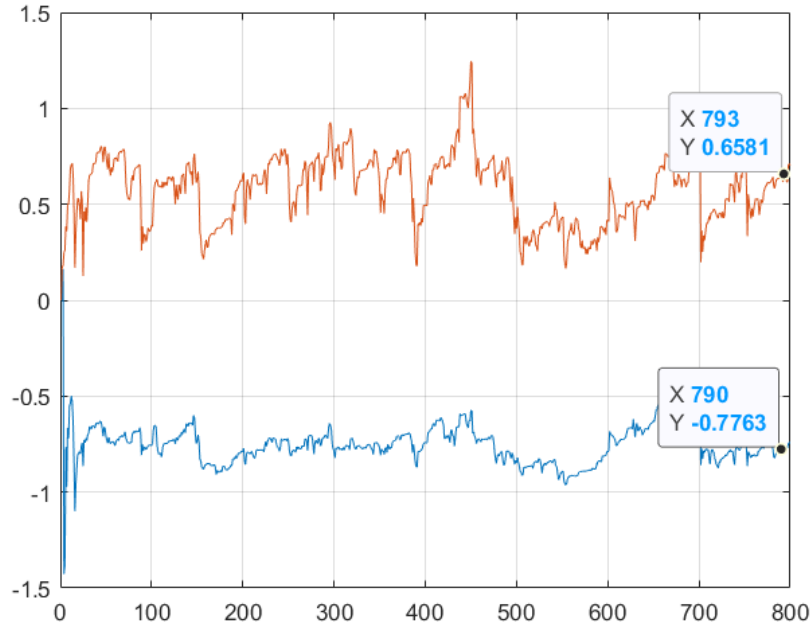
Şekil 4 $c=0$, $\lambda=1$



Şekil 5 $c=0$, $\lambda = 0.999$



Şekil 6 $c=0$, $\lambda = 0.99$

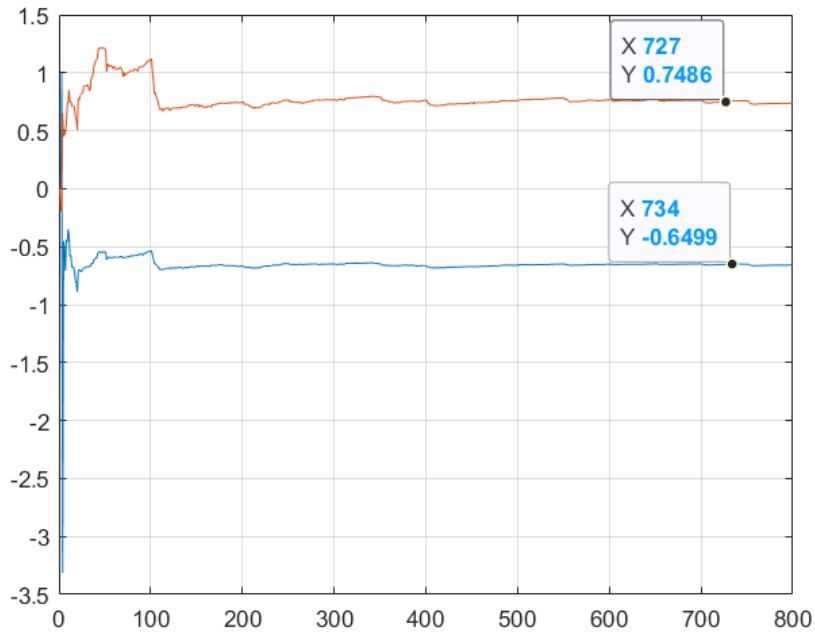


Şekil 7 $c=0, \lambda=0.95$

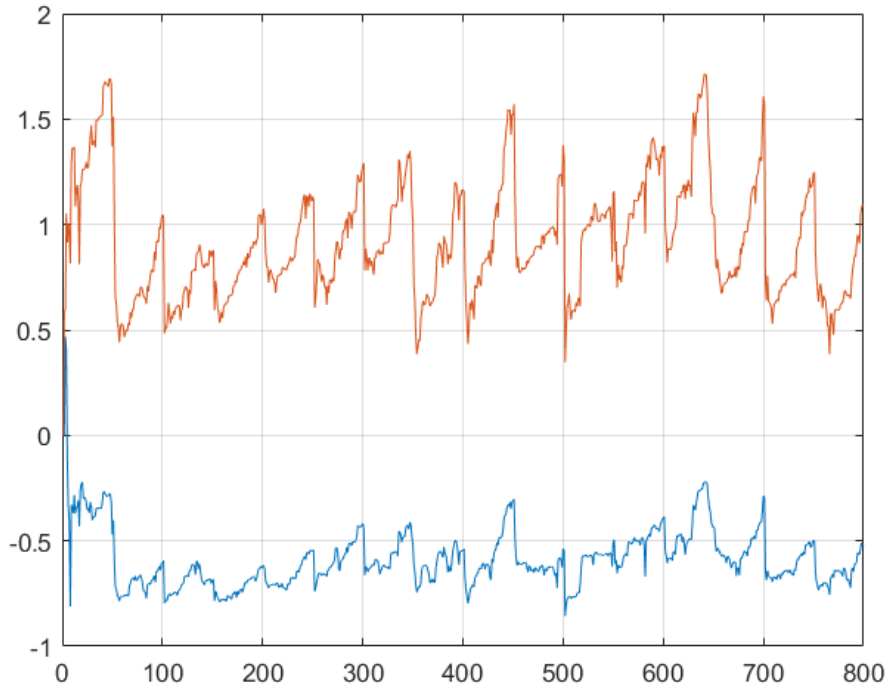
Görüldüğü gibi lambda düştükçe parametre kestirimi daha dalgalı bir hal almıştır. Lambdanın değeriyle sistemin hafızası arasındaki ilişki

$$N = \frac{2}{1 - \lambda}$$

Olduğundan lambda değeri düştükçe sistemin hafızasında tuttuğu datalar da azalır. Dolayısıyla dalgalı davranış bu şekilde açıklanabilir. Aynı simülasyonlar $c=-0.5$ için aşağıdaki gibi yapılmıştır.



Şekil 8 $c=-0.5, \lambda=1$



Şekil 9 $c=-0.5$, $\lambda=0.95$

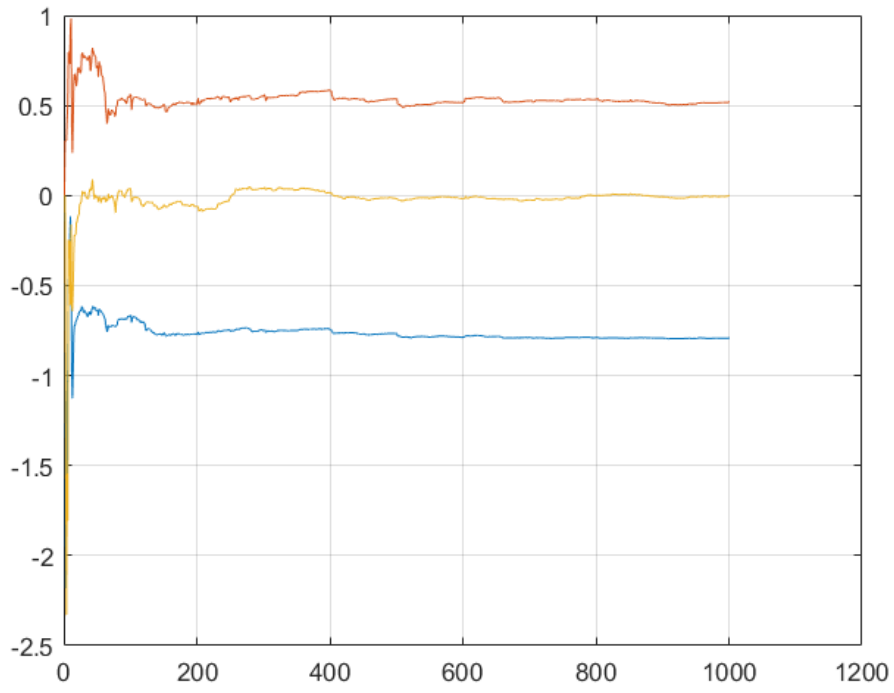
Unutma katsayılı RLS görüldüğü üzere $c=-0.5$ olduğunda daha dalgalı bir performans göstermiştir.

- Extended Least Squares

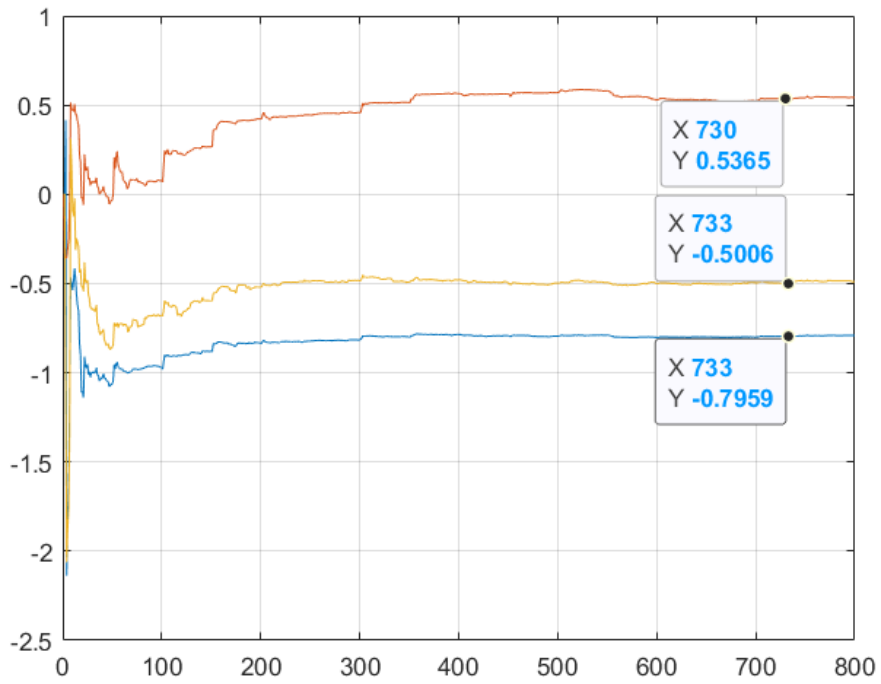
Extended Least Squares metodunda kestirdiğimiz a ve b parametrelerinin yanında bir de c parametresi eklenmiştir. ELS, çözümü aşağıdaki gibidir,

$$\begin{aligned}
 P_0 &= 10^6 I, \text{ or } P_0 = (\psi^T \psi)^{-1}, \quad \text{size}(P) = n_u \times n_u \\
 \phi^T(k+1) &= [-y(k) \quad -y(k-1) \quad \dots \quad -y(k-n_a+1) \\
 &\quad u(k-d+1) \quad u(k-d-2) \quad \dots \quad u(k-d-n_b+1) \\
 &\quad \epsilon(k) \quad \epsilon(k-1) \quad \dots \quad \epsilon(k-n_c+1)] \\
 K(k+1) &= P(k) \phi(k+1) [I + \phi^T(k+1) P(k) \phi(k+1)]^{-1} \\
 \epsilon(k+1) &= y(k+1) - \phi^T(k+1) \hat{\theta}(k) \\
 \hat{\theta}(k+1) &= \hat{\theta}(k) + K(k+1) \epsilon(k+1) \\
 P(k+1) &= [I - K(k+1) \phi^T(k+1)] P(k)
 \end{aligned}$$

Bu algoritma implemente edilmiş ve $c=0$ ile $c=-0.5$ için sonuçlar gözlenmiştir.



Şekil 10 $c=0$ iken els



Şekil 11 $c=-0.5$ iken els

Görüldüğü gibi ne RLS, ne de unutma katsayılı RLS $c=-0.5$ durumunda parametreleri doğru tahmin edebiliyorken ELS algoritması parametrelerin kestirimini her iki durumda da başarılı bir şekilde yapmıştır.

- Least Means Square

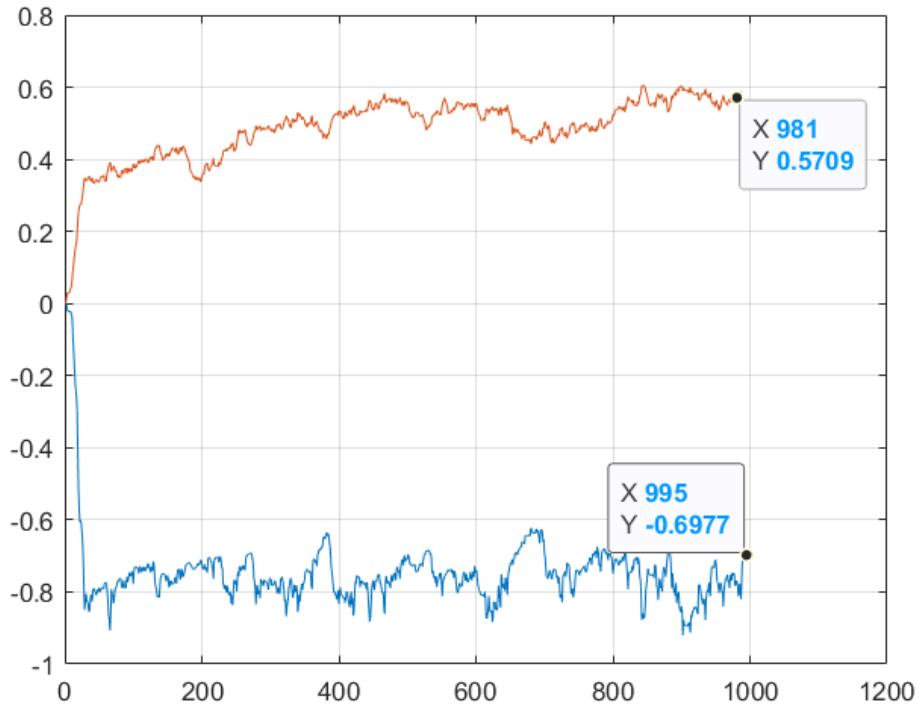
Astromun kitabında genel hali

$$\hat{\theta}(t) = \hat{\theta}(t-1) + P(t)\phi(t) \left(y(t) - \phi^T(t)\hat{\theta}(t-1) \right)$$

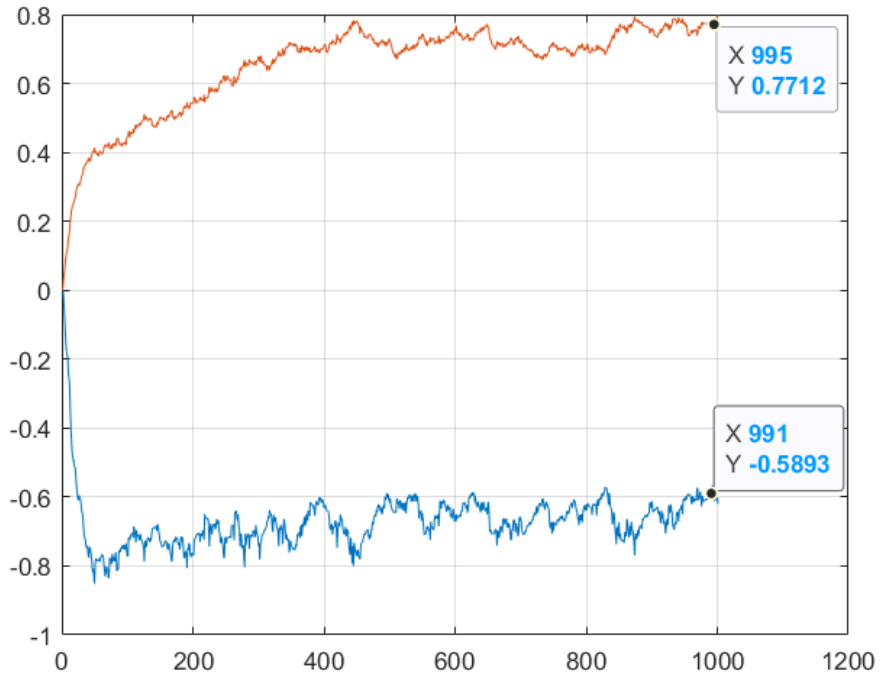
Verilen denklemde least means square algoritması için

$$P(t) = \gamma$$

Olarak kabul edilir. Bu şekilde kod düzenlendiğinde $c=0$ ve $c=-0.5$ için çıktılar incelenmiştir. Gamma parametresi astrom'un kitabındaki gibi 0.01 seçilmiştir.



Şekil 12 $c = 0$ iken lms



Şekil 13 $c=-0.5$

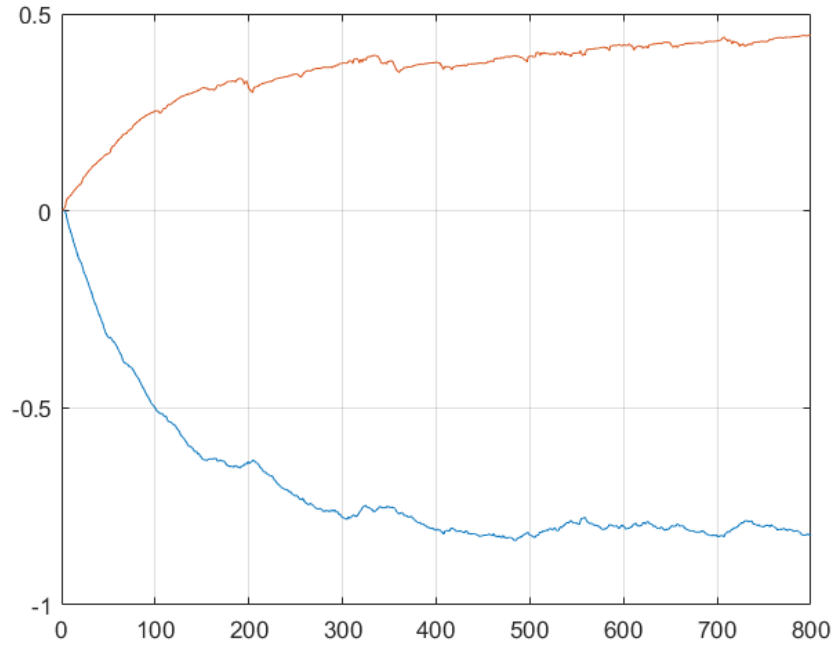
Least means square algoritması, parametre kestiriminde $c=0$ 'da nispeten daha başarılı iken $c=-0.5$ olduğunda gerçek değerlerden oldukça uzak bir kestirim gerçekleştirmiştir.

- Projection Algorithm

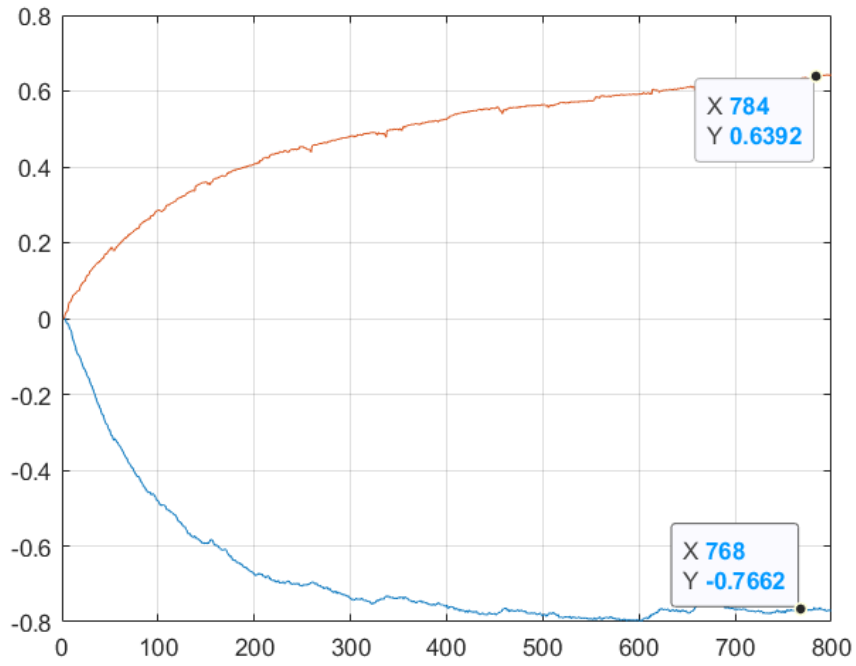
LMS algoritmasındaki genel halde $P(t)$ yerine

$$P(t) = \frac{\gamma}{\alpha + \varphi^T(t)\varphi(t)} \quad \alpha \geq 0, \quad 0 < \gamma < 2$$

Yazıldığında projection algoritması elde edilir. Projection algoritmasında $c=0$ ve $c=-0.5$ için simülasyonlar yapılmıştır. Burada $\alpha=0.2$, $\gamma=0.01$ seçilmiştir.



Şekil 14 $c=0$ için projection algoritması



Şekil 15 $c=-0.5$ için projection algoritması

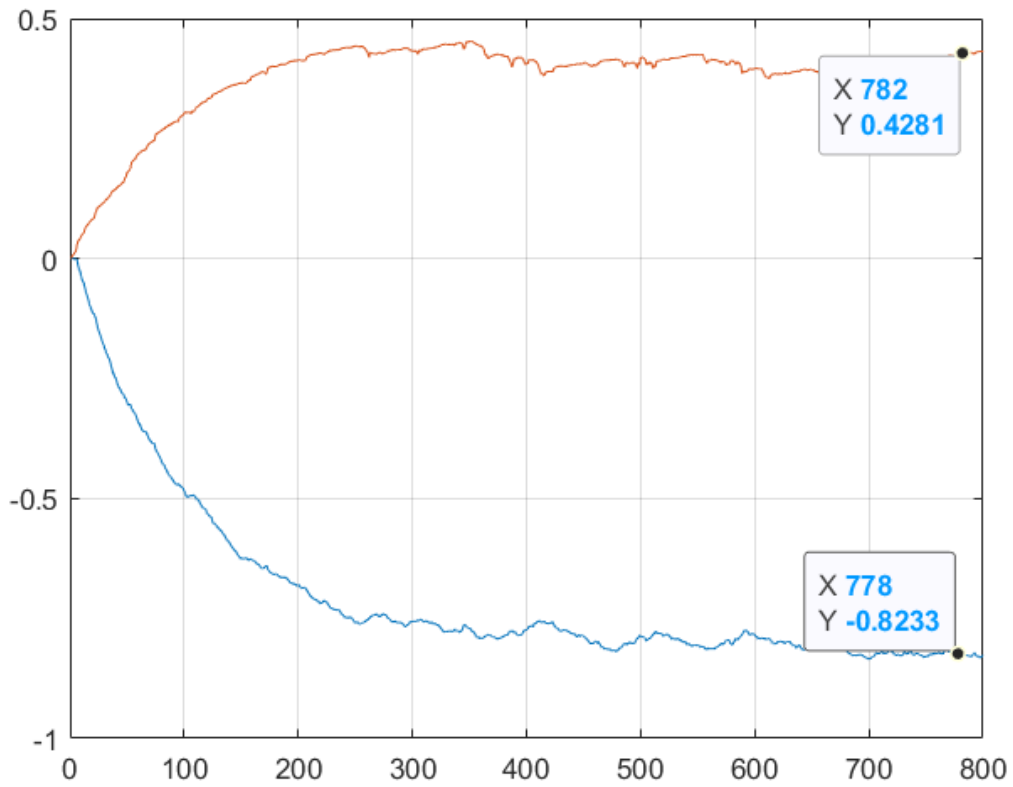
Projection algoritması, $c=0$ ve $c=-0.5$ iken kestirimi başlangıçtan itibaren daha smooth bir şekilde gerçekleştirmiştir. Son kestirimlerde $c=0$ 'da daha başarılı bir performans sergilemiştir ve bu haliyle LMS'ten daha iyi kestirim yapmıştır.

- Stochastic Approximation Algorithm

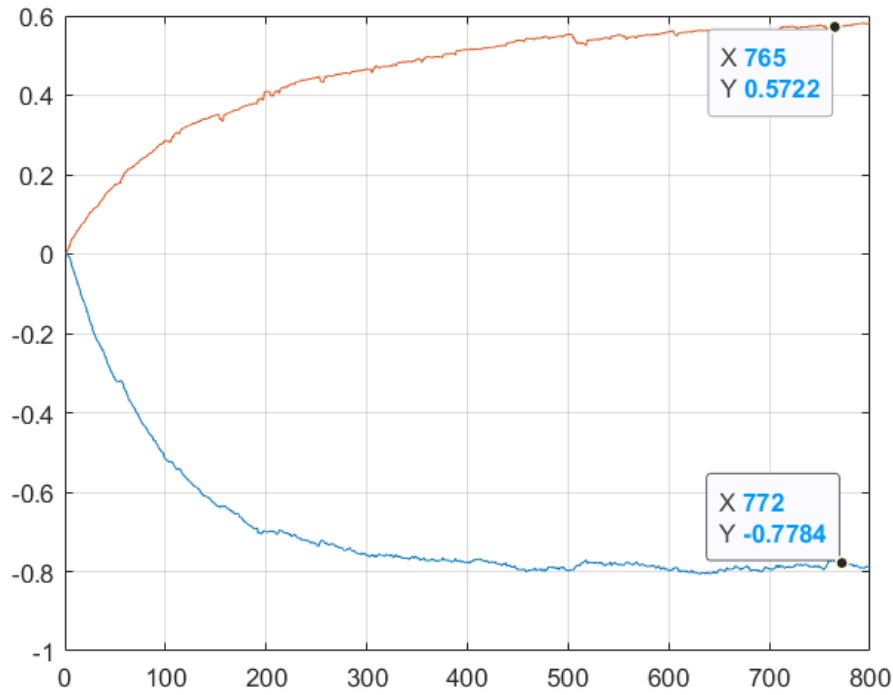
Yine aynı şekilde genel denklemde $P(t)$ yerine

$$P(t) = \frac{\gamma}{\sum_{i=1}^t \varphi^T(i) \varphi(i)}$$

Yazıldığında elde edilir. Aynı şekilde $c=0$, $c=-0.5$ için denemeler yapılmıştır. Gamma değeri 0.01 olarak kabul edilmiştir.



Şekil 16 $c=0$ için sa algorithm



Şekil 17 $c=-0.5$ için sa algorithm

Görüldüğü gibi algoritma $c=0$ ve $c=-0.5$ 'te benzer kestirimler göstermiştir. İkisinde de gerçek değerlerin uzağında kalmıştır ama kestirim önceki algoritmalarla göre çok daha smooth gerçekleşmiştir.

Özet olarak RLS, RLS with forgetting factor, ELS, LMS, PA, SA karşılaştırılırsa; RLS, RLS w lambda, ELS başlangıçta çok daha ani tepkilerle doğru sonuçlara ulaşmışlardır. Fakat c parametresi devreye girdiğinde RLS ve RLS w lambda kötü performans sergilerken ELS parametreleri doğru tahmin etmeyi başarmıştır. Bunlara ek olarak LMS algoritmasında PA ve SA'ya göre daha hızlı bir başlangıç görülürken herhangi bir değere yakınsamadığı da tespit edilmiştir. Bu durumu çözmek için P değeri normalleştirildiğinde Projection algoritmasıyla hızda biraz daha yavaşlama olsa da bir değere yakınsama gerçekleşmiştir.

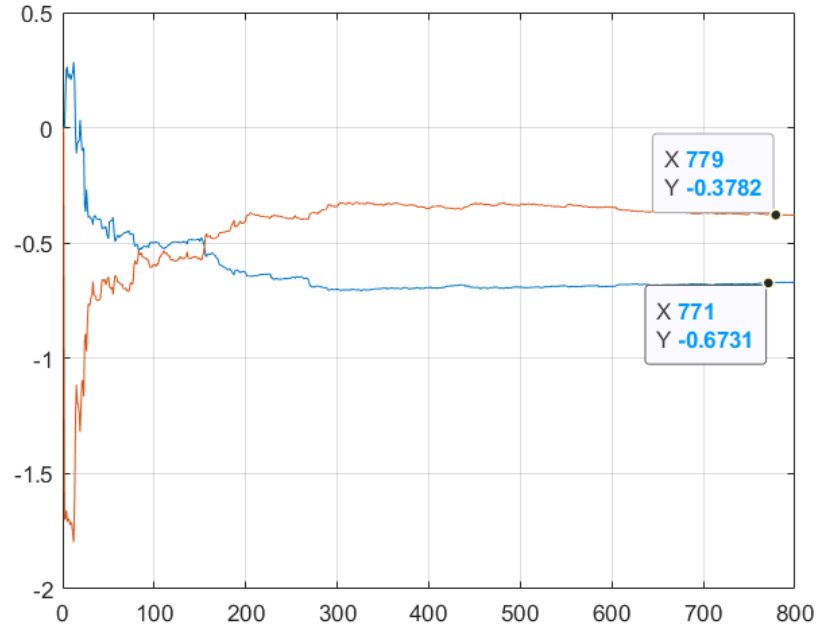
2. Soru

Astrom'un kitabında örnek 2.10'da görüldüğü gibi geribesleme parametrelerine dayanarak yeni eşitlikler aşağıdaki gibi yazılabilir,

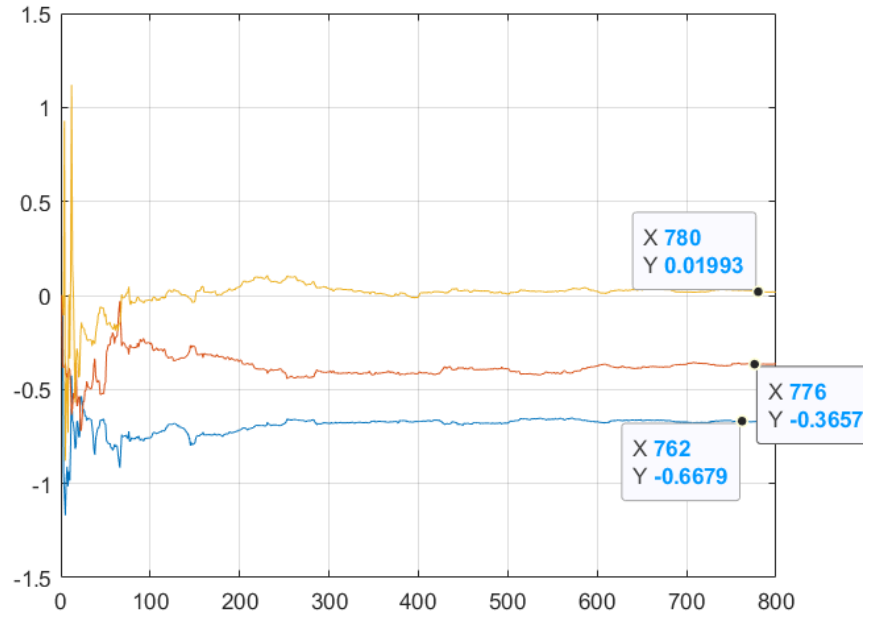
$$y(t) = (-ay(t-1) + bu(t-1) - u(t) + e(t) + ce(t-1))/1.2 \quad (1)$$

$$y(t) = (-a - 0.32)y(t-1) + bu(t-1) - u(t) + e(t) + ce(t-1) \quad (2)$$

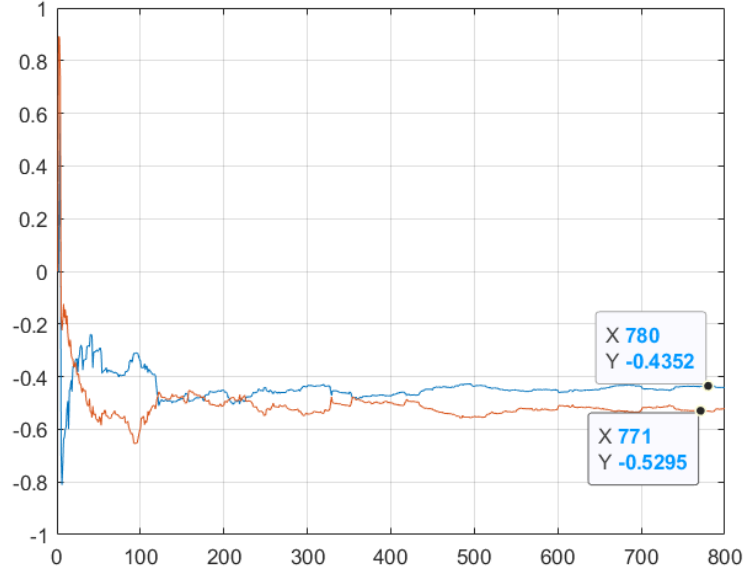
Bu geribeslemeli eşitliklere göre $c=0$ iken ve $P=10^6$ ile başlatılmış ve RLS ile ERLS algoritmalarında $y(t)$ eşitliği yerine bu denklemler yazılarak denemeler yapılmıştır. Bu durumda simülasyon sonuçları,



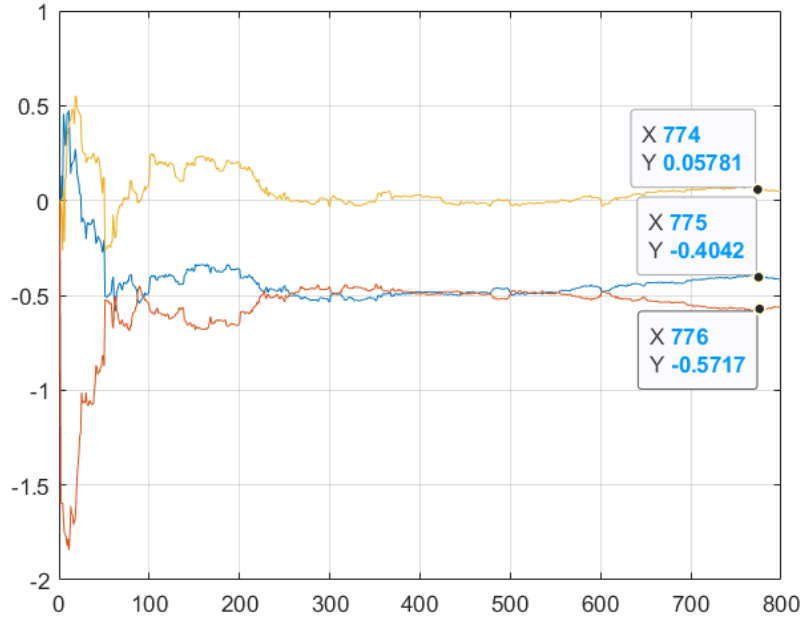
Şekil 18 $u(t) = -0.2y(t)$ için RLS



Şekil 19 $u(t) = -0.2y(t)$ için ERLS



Şekil 20 $u(t)=-0.32y(t-1)$ için RLS



Şekil 21 $u(t)=-0.32y(t-1)$ için ERLS

Görüldüğü üzere sistem iki geribesleme için de başarılı sistem parametre kestirimi yapamamıştır. İlgili algoritmalara ait kodlar ekte bulunabilir.