



SİSTEM TANIMA ÖDEV 2

MUSTAFA CANER SEZER
504191123

1. Birinci Soru

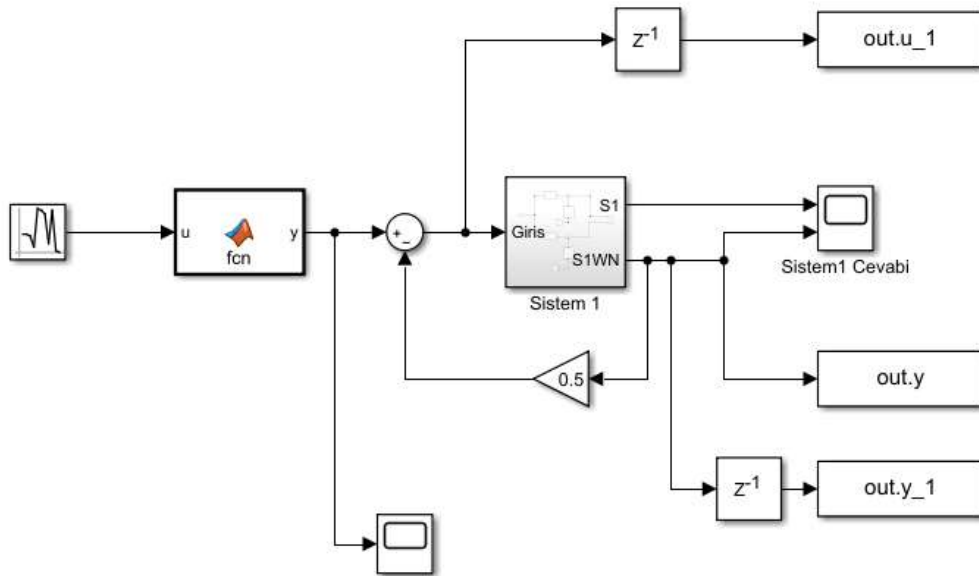
a. A Şıkkı

İlk soruda örnek 2.8 tekrarlanarak sonuçların incelenmesi amaçlanmıştır. Bazı sistemlerde tanıma işlemi, sistemin açık çevrimken kararsızlığa gitmesi nedeniyle açık çevrim olarak uygulanmayabilir. Ya da güvenlik gerekçesiyle sistem açık çevrim çalıştırılmak istenmeyebilir.

Bu nedenlerle, ilk şıkta sistem 1'e tanıma işleminin geribesleme varken nasıl yapılacağı incelenmiştir. Örneğe göre sistem giriş ve çıkışından veriler toplanmıştır. Bu verilerle hatanın karesi minimize edilerek bir kestirim yapılmıştır. Kestirim için kullanılan denklem yapısı aşağıda belirtilmiştir.

$$\begin{bmatrix} \sum y^2(t-1) & -\sum y(t-1)u(t-1) \\ -\sum y(t-1)u(t-1) & \sum u^2(t-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sum y(t)y(t-1) \\ \sum y(t)u(t-1) \end{bmatrix}$$

Hatanın karesini minimize eden ifade yukarıdaki gibi yazılabilir.



Şekil 1 Örnek 2.8 için simulink modeli

Sistem 1 için beyaz gürültü içeren ve içermeyen iki farklı model oluşturulmuştur. Girişte PRBS sinyali yaratmak için bir random number girişi uygulanmış, bu random number girişi fonksiyona sokulup çıkışında 0.5 genlikli PRBS sinyali elde edilmiştir. Geribesleme katsayısı da 0.5 olarak görülebilir. Sistem giriş ve çıkışına ait bilgiler Matlab çalışma ortamına aktarılmıştır ve kalan işlemler Matlab ortamında yapılmıştır. Random numberı PRBS'ye çeviren fonksiyon aşağıdaki gibi görülebilir.

```

1 function y = fcn(u)
2 if u <= 0
3     y = -0.5;
4 else
5     y = 0.5;
6 end
7 end

```

Sistem giriş ve çıkışlarından toplanan datalarla yukarıdaki matris elemanları oluşturulmuş ve sonuçlar **a = -0.74**, **b = 0.86** olarak elde edilmiştir. Bu da fena olmayan bir kestirim olmakla beraber örnek 2.8'de elde edilen sonuçlarla uyumludur.

```

1 N = 100;
2
3 y = get(out.y);
4 y_1 = get(out.y_1);
5 u_1 = get(out.u_1);
6
7 a11 = 0; a21 = 0; a22 = 0; b11 = 0; b21 = 0;
8 for k=1:N
9     a11 = a11 + y_1.Data(k).*y_1.Data(k);
10    a21 = a21 + y_1.Data(k).*u_1.Data(k);
11    a22 = a22 + u_1.Data(k).*u_1.Data(k);
12    b11 = b11 + y.Data(k).*y_1.Data(k);
13    b21 = b21 + y.Data(k).*u_1.Data(k);
14 end
15 A = [a11, -a21; -a21, a22];
16 b = [-b11; b21];
17 x = A\b

```

b. B şıkkı

Sistem tanıma için kullanılan genel yapı aşağıdaki gibidir.

$$y(t) + a_0 y(t-1) = b_0 r(t-1) + e(t) + c_0 e(t-1) \quad (1)$$

Sistemde geribesleme de 2. Denklemden tanımlanmıştır.

$$u(t) = -ky(t) + r(t) \quad (2)$$

İkinci denklem 1'de yerine yazılıp $c_0=0$ kabul edilirse 3. Denkleme ulaşılabilir. Ardından u ve y arasındaki ifadeyle 4. Denklem de oluşturulabilir.

$$y(t) + (a + bk)y(t-1) = br(t-1) + e(t) \quad (3)$$

$$u(t) + (a + bk)u(t-1) = r(t) + ar(t-1) - ke(t) \quad (4)$$

Sistem stasyoner olduğu için bir önceki anıyla bir sonraki anının aynı olduğu kabul edilmiştir. Ayrıca örnek sayısı çok olduğunda toplam da beklenen değer gibi kabul edileceğinden katsayı matrisindeki tüm elemanları bulmak için beklenen değerleri bulmak yeterli olacaktır.

İspata başlarken bazı bilgileri ortaya koyabiliriz.

$$E\{e^2(t)\} = \lambda^2 \quad (5)$$

$$E\{r^2(t)\} = \sigma^2 \quad (6)$$

$$E\{y(t)e(t)\} = 0 \quad (7)$$

$$E\{y(t)r(t)\} = 0 \quad (8)$$

$$E\{y^2(t)\} = b^2 E\{r^2(t-1)\} + E\{e^2(t)\} + (a+bk)^2 * E\{y^2(t-1)\} - 2(a+bk)bE\{y(t-1)r(t-1)\} - 2(a+bk)E\{y(t-1)e(t)\} + E\{r(t-1)e(t)\} \quad (9)$$

$$E\{y^2(t)\} = \frac{1}{1 - (a+bk)^2} (b^2\sigma^2 + \lambda^2) \quad (10)$$

$$E\{u^2(t)\} = \frac{1}{1 - (a+bk)^2} (\sigma^2 + a^2\sigma^2 + k^2\lambda^2 - 2a(a+bk)\sigma^2) \quad (11)$$

$$E\{y(t-1)u(t-1)\} = E\{y(t)u(t)\} = \frac{1}{1 - (a+bk)^2} (ab\sigma^2 - b(a+bk)\sigma^2 - k\lambda^2) \quad (12)$$

$$-E\{y(t)u(t)\} = \frac{1}{1 - (a+bk)^2} k(-b^2\sigma^2 + \lambda^2) \quad (13)$$

Tüm ifadeler 9. Denklemdaki gibi açılıp 5-6-7-8'deki ifadeler yerine konursa ilgili ifadelere ulaşılabilir. Tüm hesaplamalar elle yapıldıktan sonra katsayı matrisinin eşleniği aşağıdaki gibi bulunmuştur.

$$\frac{1}{1 - (a+bk)^2} \begin{pmatrix} (b^2\sigma^2 + \lambda^2) & -k(b^2\sigma^2 + \lambda^2) \\ -k(b^2\sigma^2 + \lambda^2) & k^2(b^2\sigma^2 + \lambda^2) + \{1 - (a+bk)^2\}\sigma^2 \end{pmatrix}$$

2. İkinci Soru

Transfer fonksiyonu aşağıdaki gibi belirtilen bir sisteme genliği sırasıyla 1,3,5 olacak şekilde sinüzoidal giriş işaretleri uygulanmış ve çıkışları gözlenmiştir. Sistemin çıkışına ayrıca beklenen değeri sıfır, varyansı bir olan beyaz gürültü etki etmektedir.

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 0.4s + 1} \quad (14)$$

Sistemi frekans domainine taşırsak aşağıdaki eşitliği elde ederiz.

$$G(jw) = \frac{1}{-w^2 + 0.4jw + 1} \quad (15)$$

Frekans ifadesi yerine 1 yazarsak,

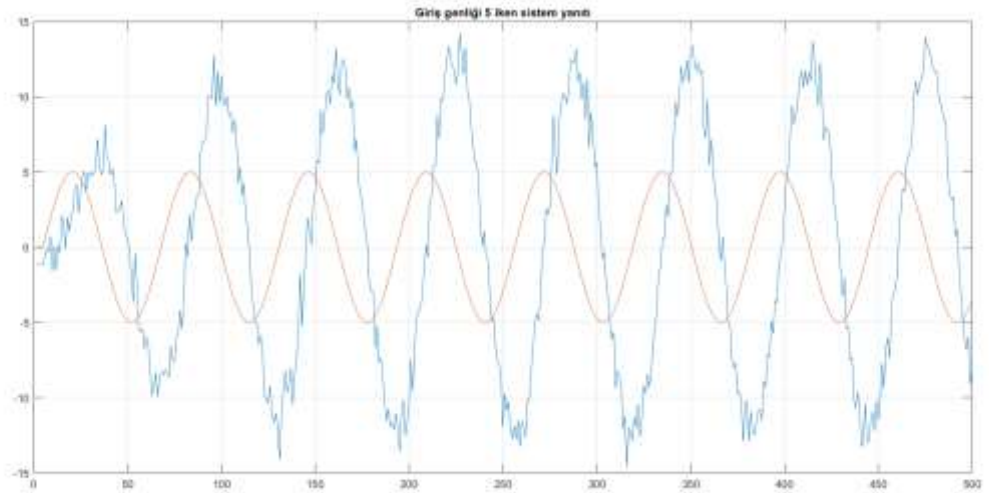
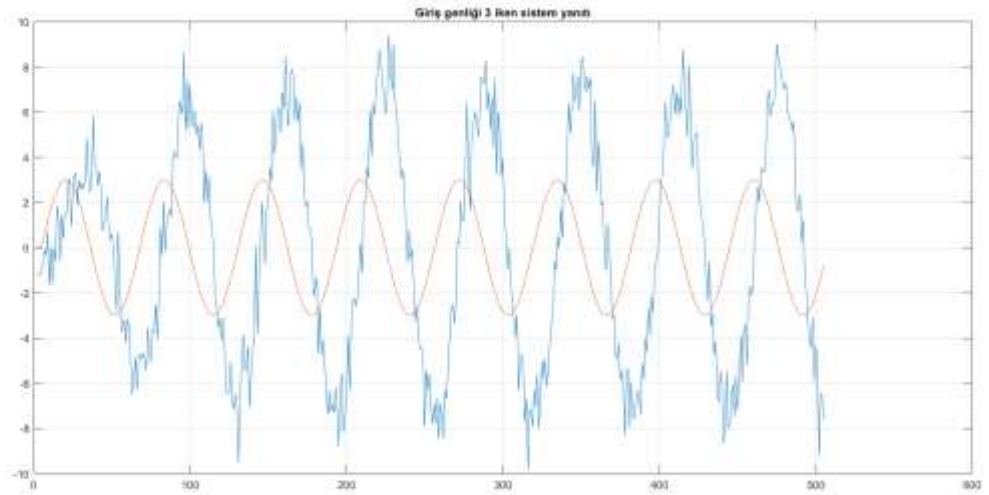
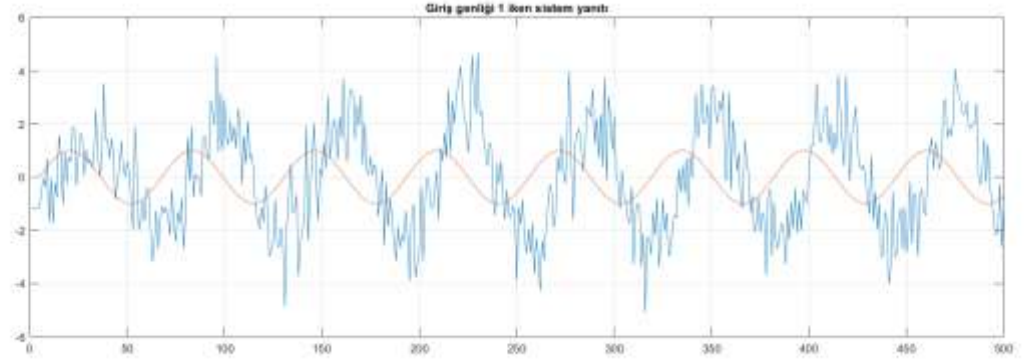
$$G(jw) = \frac{1}{0.4j} \quad (16)$$

$$G(jw) = \frac{-j}{0.4} = -2.5j \quad (17)$$

Son kısımdan da görüleceği üzere frekans 1'e eşit olduğunda sistemin fazı **-pi/2**, genliği **2.5** olarak elde edilir. Gerçekte sistem modelini bilmediğimiz için bu değerlere temel frekans analizi ve gelişmiş frekans analiziyle ulaşılmaya çalışılacaktır.

a. A Şıkki

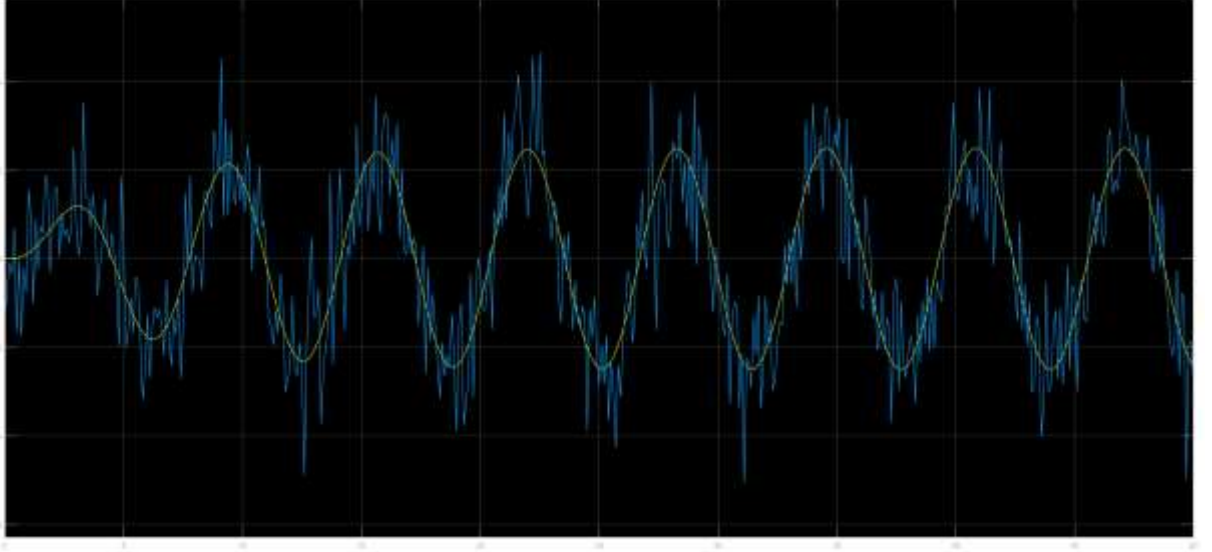
İlk şıkta sistem girişine sinüzoidal giriş uygulanıp, çıkış beyaz gürültü altında incelenmiştir. Bu yöntem temel frekans analizi yöntemi de denir. Sistem girişi sırasıyla genliği 1,3 ve 5 ve frekansı 1 olan sinüzoidal işaret olarak seçilmiştir. Sistem girişi ve sistem çıkışı aşağıda görülebilir.



Sistem çıkışı incelendiğinde giriş işareti düşük genlikte uygulandığında gürültünün etkisi daha fazla olduğu için sistem tanınmanın daha zorlaştığı gözlenmiştir. Giriş

işaretinin genliği büyüdükçe çıkış da sinüs işaretime daha çok yaklaşmıştır fakat hala gürültünün etkileri görülebilir. Aşağıdaki grafikte giriş genliği birken ideal sistem yanıtı ve bozucu etki etmiş sistem yanıtı görülebilir. Çıkış işaretinin genliği ve fazı oldukça değişkenlik gösterdiğinden düzgün tanıma bu yöntemle oldukça zordur.

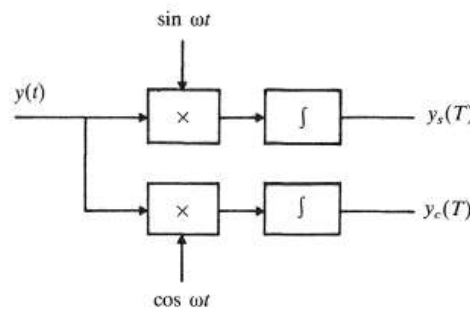
Sinüs giriş işaretinin önemli bir özelliği olarak girişte sinüzoidal işaret uygulanırsa çıkışta da sinüzoidal işaret görülür. Bu nedenle temel frekans analizi yöntemiyle yine de kabaca bir tanıma işlemi yapılabilir. Fakat daha iyi bir tanıma yapmak için farklı yöntemler şarttır.



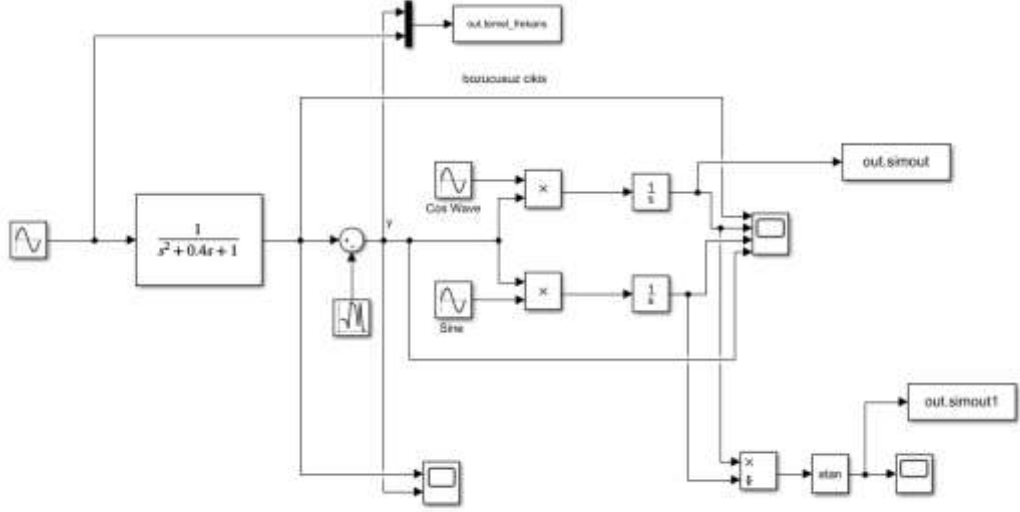
Şekil 2 Giriş genliği 1 iken ideal ve gerçek sistem yanıtları

b. B şıkkı

Gelişmiş frekans analizi için kullanılan yapı aşağıdaki gibidir.



İlk şıkta uygulanan analizin ardından gelişmiş frekans analizi için aşağıdaki simulink yapısı oluşturulmuştur. Giriş işareti genliği 1,3 ve 5 iken simülasyonlar yapılmıştır.



Şekil 3 Gelişmiş Frekans Analizi

Tanınmak istenen sistemin faz ve genliğini bulmak için Söderstrom'un kitabındaki 3.16daki formüller kullanılabilir. Bu formüller,

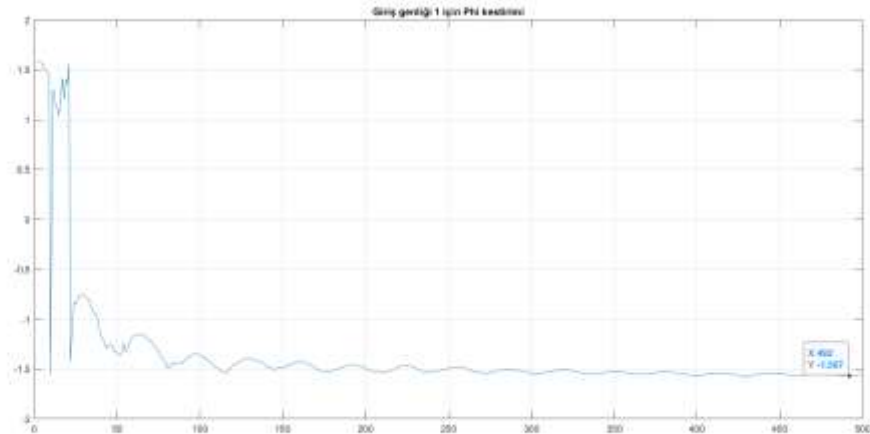
$$y_s(T) = \frac{bT}{2} \cos \varphi \quad (18)$$

$$y_c(T) = \frac{bT}{2} \sin \varphi \quad (19)$$

Çıkışı sinüs ve cosinus ile çarpılıp iki sinyal elde edilmiş, 19. Denklem 18. Denkleme bölündüğünde $\tan \varphi$ elde edilir. Böylece iki sinyal birbirine bölünüp \arctan fonksiyonuna sokularak φ 'ye ulaşılabilir.

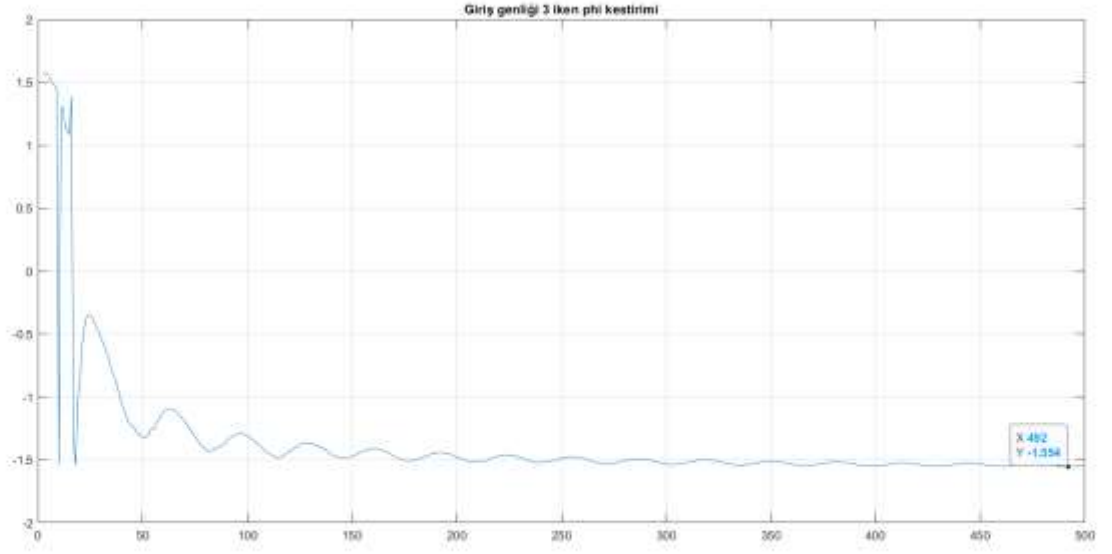
Bu değer hesaplandıktan sonra da 18 ya da 19. Denklemden b'ye ulaşılabilir. Böylece faz ve genlik bilgisi elde edilmiş olur. Örnek hesaplama için $T=50$ olarak alınmıştır. Çıkışın cosinusle çarpılıp integralinin alındığı y_c sinyalinin 50'deki değerine bakılmış, hesaplanan φ değeri de yerine konup b elde edilmiştir.

Aşağıda farklı genlikler için φ ve b kestirimleri görülebilir.



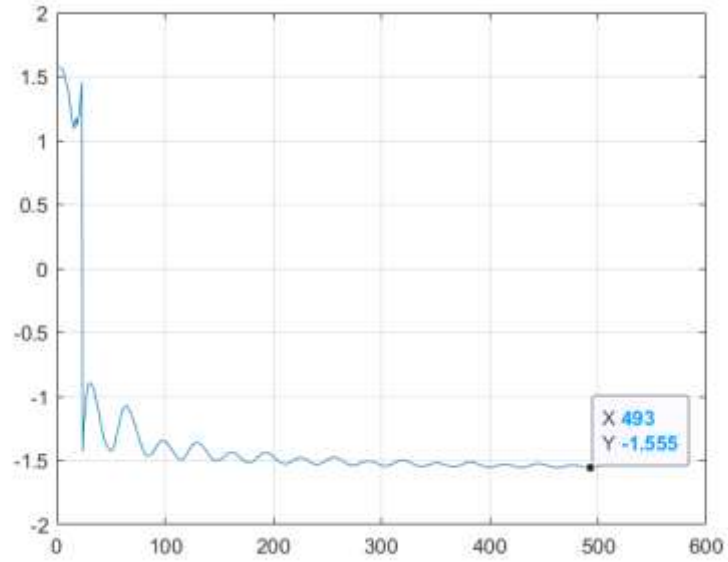
$$y_c(8\pi) = -55.83 = \frac{b}{2} \sin(-89.7) \quad (20)$$

$$b = 2.26 \quad (21)$$



$$y_c(50) = -167.7 = \frac{b}{2} \sin(-89.7) \quad (22)$$

$$b = 6.8 \quad (23)$$



$$y_c(50) = -279.57 = \frac{b}{2} \sin(-89.7) \quad (22)$$

$$b = 11.33 \quad (23)$$

Giriş Genliği	Hesaplanan Çıkış Genliği	Gerçek Çıkış Genliği	Hesaplanan Çıkış Fazı	Gerçek Çıkış Fazı
1	2.26	2.5	-1.56	-1.57
3	6.8	7.5	-1.55	-1.57
5	11.33	12.5	-1.56	-1.57

c. C şıkkı

Temel frekans analizi ve gelişmiş frekans analizi a ve b şıklarında incelenmiştir. Temel frekans analizinde küçük genliklerde gürültünün etkisi yüksek olduğundan, tanıma etkili şekilde gerçekleştirilemez. Aynı şekilde gürültü kaynağı değiştiğinde de bu değişimlerden etkilenmeye açıktır. Gelişmiş frekans analizi daha sistematik bir yol olduğundan sistemin faz ve genliğini daha başarılı şekilde tahmin etmiştir. Burada gelişmiş frekans analizindeki en çarpıcı sonuç simülasyon süresi uzadıkça tahmin edilen faz ve genliğin gerçek değerine o kadar yaklaşması olmuştur. Örnekte $T=50$ olarak alındığında giriş genliği 1 iken çıkış genliği 2.26 olarak tahmin edilirken, $T=100$ alındığı zaman tahmin 2.41'e yükselerek gerçek değere yaklaşmıştır. Bu da, gerçek değere yaklaşmak için simülasyon süresini artırmanın yeterli olacağını gösteren çok önemli bir sonuçtur.