**MAT 1741-Problèmes de pratique-Sous-Indèpendence linéaire**

1. Dans chaque cas, déterminer si l'ensemble donné est linéairement indépendent dans l'espace vectoriel $V$.

   (a) $\{(-1,1,0,0),\ (2,-1,1,1),\ (0,1,1,1)\},\ V=\mathbb{R}^4$.

   (b) $\{(1,1,2),\ (0,-1,1),\ (3,-2,1)\},\ V=\mathbb{R}^3$.

   (c) $\left\{1+x,\ 1-x^2,\ x+x^2\right\},\ V=\mathbb{P}_2$.

   (d) $\left\{x^3,\ 1-x^2,\ 1+x^2+x^3\right\},\ V=\mathbb{P}_3$.

   (e) $\left\{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\},\ V=\mathbb{M}_{22}(\mathbb{R})$

   (f) $\left\{\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ -4 & 5 & 3 \\ 11 & -10 & 9 \end{bmatrix}\right\}$

   (g) $\left\{x^3, 1-x^2+2x^3,\ 1,\ 1+x\right\},\ V=\mathbb{P}_3$

   (h) $\left\{\cos^2 x,\ \sin^2 x,\ \cos 2x\right\},\ V=\mathbb{F}(\mathbb{R},\ \mathbb{R})$

   (i) $\left\{-\cos^2 x,\ \sin^2 x,\ -2\right\},\ V=\mathbb{F}([0,\ \pi],\ \mathbb{R})$

2. Soit $V$ un espace vectoriel avec vecteur nul noté par $\mathbf{0}$, $v_1,\ v_2,\ \ldots,\ v_n \in V$.
   (1) Montrer que si $v_i=\mathbf{0}$ pour un certain $i$, alors l'ensemble $S=\{v_1,\ v_2,\ \ldots,\ v_n\}$ est linéairement dépendent.
   (2) Si $S=\{v_1,\ v_2,\ \ldots,\ v_n\}$ contient un sous-ensemble linéairement dépendent, alors $S$ est linéairement dépendent.
   (3) Si $S=\{v_1,\ v_2,\ \ldots,\ v_n\}$ est linéairement indépendent mais $S=\{v_1,\ v_2,\ \ldots,\ v_n,\ v\}$ est linéairement dépendent pour un certain vecteur $v\in V$, montrer que $v\in \operatorname{span}\{v_1,\ v_2,\ \ldots,\ v_n\}$.

3. Considérer la matrice:
   $$A=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$
   Montrer que
   $$U=\{X\in\mathbb{M}_{22};\ AX=XA\}.$$
   est un sous-espace de $\mathbb{M}_{22}$. Donner une base et la dimension de $U$.

4. (1) Donner une base et la dimension du sous-espace

   $U=\operatorname{span}\{1,-1,0,2),\ (-2,2,0,-4),\ (2,1,-1,3),(3,0,-1,5),\ (0,3,-1,-1)\}$

   de $\mathbb{R}^4$.
   (2) Quelle est la dimension du sous-espace de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs:

   $(1,1,1,1),\ (3,2,2,2),\ (2,2,1,3),\ (5,6,3,9),\ (1,0,0,0,),\ (0,1,1,2),\ (0,1,0,0)$.

5. Dans chaque cas, déterminer si l'ensemble $\Omega$ est une base de l'espace vectoriel $V$.
(1) $\Omega = \{(1,-1,1),\ (-1,0,1),\ (1,-2,-3)\}$, $V = \mathbb{R}^3$
(2) $\Omega = \{(-1,2,1,0),\ (0,-1,0,1),\ (2,5,-2,3)\}$, $V = \mathbb{R}^4$
(3) $\Omega = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$, $V = \mathbb{M}_{23}$
(4) $\Omega = \{(0,-2,1),\ (0,-1,0),\ (2,3,1)\}$, $V = \mathbb{R}^3$
(5) $\Omega = \left\{1+x,\ x-x^2,\ 1+x^3,\ x^2+x^3\right\}$, $V = \mathbb{P}_3$
(6) $\Omega = \left\{1+x,\ x-x^2,\ 1+x^2,\ 2-x+x^2\right\}$, $V = \mathbb{P}_2$.

6. Montrer que
$$U = \{p(x) \in \mathbb{P}_4;\ p(0) = 0\}$$
est un sous-espace de $\mathbb{P}_4$ et donner une base et la dimension de $U$.

7. Considérer les vecteurs $v_1 = x - x^2$, $v_2 = 1 + x - 2x^2 + x^3$, $v_3 = 1 + 3x - 4x^2 + x^3$, $v_4 = 3 + 4x - 7x^2 + 3x^3$, $v_5 = -1 - 2x + 3x^2 - x^3$ et $v_6 = -2 - 2x + 4x^2 - 2x^3$ de $\mathbb{P}_3$. Donner une base et la dimension du sous-espace
$$U = \operatorname{span}\{v_1,\ v_2,\ v_3,\ v_4,\ v_5,\ v_6\}$$
de $\mathbb{P}_3$.

8. Considérer la matrice:
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 4 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & -3 & 6 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 & 2 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 3 & -8 & 1 & 6 \end{bmatrix}.$$
(a) Trouver la forme échelonnée réduite de $A$.
(b) Donner une base de l'espace-colonne de $A$.
(c) Donner une base de l'espace-ligne de $A$.
(d) Donner une base du noyeau de $A$.

9. Donner une base et la dimension du sous-espace
$$U = \left\{A \in \mathbb{M}_{33};\ A^T = -A\right\}$$
de $\mathbb{M}_{33}$.

10. Considérer l'ensemble
$$\mathbb{C}^2 = \{(z_1,\ z_2);\ z_1 \in \mathbb{C},\ z_2 \in \mathbb{C}\}.$$
$\mathbb{C}^2$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ comme il est aussi un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
(1) Trouver une base et la dimension de $\mathbb{C}^2$ comme espace vectoriel sur $\mathbb{C}$.
(2) Trouver une base et la dimension de $\mathbb{C}^2$ comme espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.