Les Combinaisons linéaires- Enveloppe linéaire et ensembles générateurs

MAT1741 A Automne 2012

Joseph Khoury
Deṕartement des Mathḿatiques
Université d'Ottawa

Combinaisons linéaires et ensembles générateurs

Rappel :

- $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x - 2y + z = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned} S &= \{(2y - z, y, z) \,|\, y, z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{y(2, 1, 0) + z(-1, 0, 1) \,|\, y, z \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

On dit que pour tout $y, z \in \mathbb{R}$,

$$y(2, 1, 0) + z(-1, 0, 1)$$

est une combinaison linéaire de $(2, 1, 0)$ et $(-1, 0, 1)$.

Combinaisons linéaires et ensembles générateurs (suite)

- $W = \{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \in M_{2,2} \,|\, a, b, d \in \mathbb{R} \}$ est un sous-espace vectoriel de $M_{2,2}$.

$$W = \{ a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \,|\, a, b, d \in \mathbb{R} \}$$

On dit que pour tout $a, b, d \in \mathbb{R}$,

$$a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est une combinaison linéaire de

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Combinaisons linéaires et ensembles générateurs (suite)

Définition

- Soient $v_1, v_2, \ldots, v_k$, des vecteurs dans un espace vectoriel V et $a_1, a_2, \ldots, a_k$ des scalaires. Le vecteur

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_k v_k$$

est appelé une combinaison linéaire des vecteurs $v_1, v_2, \ldots, v_k$.

Combinaisons linéaires et ensembles générateurs (suite)

Définition

- Pour $v_1, v_2, \ldots, v_k$ des vecteurs donnés de l'espace vectoriel V, l'ensemble

$$\mathcal{L}\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$$
$$= \{a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_k v_k \mid a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathbb{R}\}$$

est appelé l'enveloppe linéaire de $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ (en anglais – SPAN). On dit que l'ensemble $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ est un ensemble générateur de $\mathcal{L}\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$.

Combinaisons linéaires et ensembles générateurs (suite)

Définition

- On dit qu'un espace vectoriel W est engendré par les vecteurs $v_1, v_2, \ldots, v_k \in W$ si

$$W = \mathcal{L}\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$$

c.à.d. si et seulement si chaque vecteur de W est une combinaison linéaire de $v_1, v_2, \ldots, v_k$.

Combinaisons linéaires et ensembles générateurs (suite)

Exemples

- $S = \{y(2,1,0) + z(-1,0,1) \,|\, y, z \in \mathbb{R}\}$

$$\Rightarrow S = \mathcal{L}\{\underbrace{(2,1,0)}_{v_1}, \underbrace{(-1,0,1)}_{v_2}\}$$

  - S est engendré par v_1 et v_2
  - $\{v_1, v_2\}$ est un ensemble générateur de S
  - $\{v_1, v_2\}$ engendre S

Combinaisons linéaires et ensembles générateurs (suite)

Exemples

- $W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \mid a, b, d \in \mathbb{R} \right\}$

$$W = \left\{ a \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{v_1} + b \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{v_2} + d \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{v_3} \mid a, b, d \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\Rightarrow W = \mathcal{L}\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{v_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{v_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{v_3} \}$$

Combinaisons linéaires et ensembles générateurs (suite)

Remarque

$S = \mathcal{L}\{\underbrace{(2,1,0)}_{v_1}, \underbrace{(-1,0,1)}_{v_2}\}$

$$S = \mathcal{L}\{v_1, v_2\} = \mathcal{L}\{v_1, v_2, v_1 + v_2\}$$

Pour voir ceci, on constate que si $(x, y, z) \in S$, alors

$$(x, y, z) = yv_1 + zv_2 + 0(v_1 + v_2)$$

Exemples

- Montrez que $\mathbb{R}^2 = \mathcal{L}\{(1,0), (0,1)\}$.
- Montrez que $\mathbb{R}^2 = \mathcal{L}\{(1,-1), (1,1)\}$.

Combinaisons linéaires et ensembles générateurs (suite)

Exemple

$\mathbb{P}_2 = \{a_2x^2 + a_1x + a_0 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$
On voit 3 éléments fixés dans $\mathbb{P}_2$

$$v_1 = x^2 \in \mathbb{P}_2, \quad v_2 = x \in \mathbb{P}_2, \quad v_3 = 1 \in \mathbb{P}_2$$

Alors,

$$\mathbb{P}_2 = \mathcal{L}\{1, x, x^2\}.$$

Combinaisons linéaires et ensembles générateurs (suite)

Théorème

Soit V un espace vectoriel et $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\} \subset V$.

1. *$U = \mathcal{L}\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ est un sous-espace vectoriel de V.*
2. *Si W est n'importe lequel sous-espace vectoriel de V t.q. $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\} \subset W$, alors $\mathcal{L}\{v_1, v_2, \ldots, v_k\} \subset W$. En d'autre mots : $\mathcal{L}\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ est le "plus petit" sous-espace vectoriel de V qui contient $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$.*

Combinaisons linéaires et ensembles générateurs (suite)

Démonstration : On utilise le test du sous-espace vectoriel.

- $0 \in \mathcal{L}\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$?

  Oui, car $0(\in V) = 0(\in \mathbb{R})v_1 + 0(\in \mathbb{R})v_2 + \ldots + 0(\in \mathbb{R})v_k$.

- $\mathcal{L}\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ fermé par l'addition ?

  Oui, soient $u, v \in \mathcal{L}\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$, alors

$$\begin{aligned} u &= a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_k v_k \\ v &= b_1 v_1 + b_2 v_2 + \ldots + b_k v_k \\ u + v &= (a_1 + b_1)v_1 + (a_2 + b_2)v_2 + \ldots + (a_k + b_k)v_k \\ &\Rightarrow u + v \in \mathcal{L}\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}. \end{aligned}$$

Combinaisons linéaires et ensembles générateurs (suite)

Démonstration (suite) :

- $\mathcal{L}\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ fermé pour la multiplication par les scalaires ?

  Oui, soit $u \in \mathcal{L}\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ et $l \in \mathcal{R}$, alors

$$\begin{aligned} u &= a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_k v_k \\ lu &= (la_1)v_1 + (la_2)v_2 + \ldots + (la_k)v_k \\ &\text{c.à.d. } lu \in \mathcal{L}\{v_1, v_2, \ldots, v_k\} \end{aligned}$$

Alors, $\mathcal{L}\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ est un sous-espace vectoriel de V.

Combinaisons linéaires et ensembles générateurs (suite)

Exemples

- $\mathcal{L}\{(1,0,0,1),(1,1,0,0)\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$. Notez que
$$\begin{aligned} & \mathcal{L}\{(1,0,0,1),(1,1,0,0)\} \\ = \ & \{a_1(1,0,0,1)+a_2(1,1,0,0)\,|\,a_1,a_2\in\mathbb{R}\} \\ = \ & \{(a_1+a_2,a_2,0,a_1)\,|\,a_1,a_2\in\mathbb{R}\}\end{aligned}$$
- Dans $\mathbb{P}_2$, $\mathcal{L}\{x^2,1\}$ est un sous-espace de $\mathbb{P}_2$. Notez que
$$\mathcal{L}\{x^2,1\} = \{a_2x^2+a_0\,|\,a_0,a_2\in\mathbb{R}\}$$

Dépendance et indépendance linéaire

<u>Rappel</u> : Deux vecteurs u et v sont colinéaires si et seulement si $u = kv$ ou $v = lu$. (k, l scalaires).

C'est la même chose que de dire :

> *Il existe des scalaires $a, b \in \mathbb{R}$, au moins un de ces deux scalaires est non-nul, tels que*
>
> $$au + bv = \underbrace{0}_{vecteur}$$

La contreposée de cet énoncé est aussie très importante :

> *Deux vecteurs sont non-collinéaire si et seulement si $au + bv = 0$ implique $a = b = 0$.*

Dépendance et indépendance linéaire (suite)

Les concepts de dépendance linéaire et d'indépendance linéaire sont des généralisations de la collinéarité.

Définition

Soit V un espace vectoriel et soient $v_1, v_2, \ldots, v_m$ des vecteurs appartenant à V.

- On dit quer l'ensemble $\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ est linéairement dépendant, ou que les vecteurs $v_1, v_2, \ldots, v_m$ sont linéairement dépendants, s'il existe des scalaires $a_1, a_2, \ldots, a_m$ AVEC AU MOINS UN DE CES SCALAIRES QUI EST NON-NUL, tel que

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_m v_m = 0 \,(\text{vecteur}).$$

Définition (suite)

- On dit que l'ensemble $\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ est linéairement indépendant, ou que les vecteurs $v_1, v_2, \ldots, v_m$ sont linéairement indépendant, si et seulement si

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_m v_m = 0 \,(\text{vecteur})$$

$$\Leftrightarrow a_1 = a_2 = \ldots = a_m = 0 \,(\text{scalaire}).$$

À notez qu'un ensemble donné de vecteurs est soit lin. ind., ou lin. dép..

Dépendance et indépendance linéaire (suite)

Exemple

Déterminer si les ensembles suivants sont linéairement dépendant ou linéairement indépendant.

- $\{(1, 0), (0, 1)\}$ dans $\mathbb{R}^2$,
- $\{(1, -1), (1, 1)\}$ dans $\mathbb{R}^2$,
- $\{(1, 0), (0, 1), (1, 1)\}$ dans $\mathbb{R}^2$,
- $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ dans $M_{2,2}$,
- $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ dans $M_{2,2}$,
- $\{1, \sin x, \cos x\}$ dans $F([0, 2\pi])$,
- $\{1, \cos^2 x, \sin^2 x\}$ dans $F([0, 2\pi])$,

Dépendance et indépendance linéaire (suite)

Exemple (suite)

- $\{(1, 2, 1)\}$ dans $\mathbb{R}^3$,
- $\{(1, 2, 3, -2), (0, 0, 0, 0)\}$ dans $\mathbb{R}^4$.

Théorème

Soit v un espace vectoriel,

- *si $v \in V$, $\{v\}$ est linéairement indépendant $\Leftrightarrow v \neq 0$.*
- *tout ensemble de vecteurs de V qui contient le vecteur 0 est linéairement dépendant.*