Espace-Ligne, Espace-colonne et Noyau d'une matrice

MAT1741 A Automne 2012

Joseph Khoury
Deṕartement des Mathḿatiques
Université d'Ottawa

L'espace-ligne, l'espace-colonne et noyau d'une matrice

Question :

1. Étant donné un ensemble de générateurs d'un espace vectoriel V, trouvez une base (n'importe laquelle) pour V.
2. Étant donné un ensemble $\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ de générateurs pour un espace vectoriel V, trouvez un sous-ensemble de $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ qui est une base de V.

L'espace des lignes et l'espace des colonnes d'une matrice (suite)

Définition

Soit A une matrice $m \times n$,

$$A = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ c_1 & c_2 & \dots & c_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}, \; c_j \equiv j^e \text{ colonne de } A,\ c_j \in \mathbb{R}^m$$

$$A = \begin{pmatrix} - & l_1 & - \\ - & l_2 & - \\ & \vdots & \\ - & l_m & - \end{pmatrix}, \; l_k \equiv k^e \text{ ligne de } A,\ l_k \in \mathbb{R}^n$$

L'espace des lignes de A, est $Lig(A) = Row(A) = \mathcal{L}\{l_1, l_2, \dots, l_m\}$, est une sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

L'espace des colonnes de A, est $Col(A) = \mathcal{L}\{c_1, c_2, \dots, c_n\}$, est une sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^m$.

L'espace des lignes et l'espace des colonnes d'une matrice (suite)

Exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

$$\begin{array}{rcr} Lig(A) & = & \mathcal{L}\{(1,3,3,4),(1,-1,-1,0),(2,1,1,3)\} \\ & = & \mathcal{L}\{(1,3,3,4),(1,-1,-1,0)\} \end{array}$$

(car $(2,1,1,3) = \frac{3}{4}(1,3,3,4) + \frac{5}{4}(1,-1,-1,0)$).

Donc $Lig(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ de dimension 2.

L'espace des lignes et l'espace des colonnes d'une matrice (suite)

Exemple (suite)

$$\begin{aligned} Col(A) &= \mathcal{L}\{(1,1,2),(3,-1,1),(3,-1,1),(4,0,3)\} \\ &= \mathcal{L}\{(1,1,2),(3,-1,1),(4,0,3)\} \\ &= \mathcal{L}\{(1,1,2),(3,-1,1)\} \end{aligned}$$

(car $(4,0,3) = (1,1,2) + (3,-1,1)$.)

Donc $Col(A)$ est une sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ de dimension 2.

L'espace des lignes et l'espace des colonnes d'une matrice (suite)

Théorème

Les opérations élémentaires sue les lignes d'une matrice ne changent pas l'espace des lignes, c.à.d.

$$A \sim \tilde{A} \Rightarrow Lig(A) = Lig(\tilde{A})$$

<u>Dém</u> : Les opérations élémentaires ne sont que des combinaisons linéaires.

L'espace des lignes et l'espace des colonnes d'une matrice (suite)

Exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

$$A \underset{\substack{L_2 := L_2 - L_1 \\ L_3 := L_3 - 2L_1}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{L_1 := L_1 - 3L_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}\{(1,3,3,4),(1,-1,-1,0),(2,1,1,3)\} \\ = {} & \mathcal{L}\{(1,3,3,4),(0,1,1,1)\} \\ = {} & \mathcal{L}\underbrace{\{(1,0,0,1),(0,1,1,1)\}}_{\text{lin. ind.}} \end{aligned}$$

L'espace des lignes et l'espace des colonnes d'une matrice (suite)

Théorème

1. *Les lignes non-nulles d'une matrice FER sont lin. ind.*
2. *Si* $\tilde{A}$ *est la forme FER de la matrice* A*, les lignes non-nulles de* $\tilde{A}$ *forment une base de* $Lig(A)$.
3. $rg(A) = dim(Lig(A))$.

L'espace des lignes et l'espace des colonnes d'une matrice (suite)

Question : Comment les opérations élémentaires sur les lignes affectent-ettes $Col(A)$?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad Col(A) = \mathcal{L}\{(1,1,2),(3,-1,1)\}$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} Col(\tilde{A}) &= \mathcal{L}\{(1,0,0),(0,1,0),(1,1,0)\} \\ &= \mathcal{L}\{(1,0,0),(0,1,0)\} \end{aligned}$$

$$Col(A) \neq Col(\tilde{A}), \text{car } (1,1,2) \in Col(A) \text{ mais } (1,1,2) \notin Col(\tilde{A})$$

L'espace des lignes et l'espace des colonnes d'une matrice (suite)

Peut-on utiliser quand même l'alg de Gauss pour simplifier le calcul de $Col(A)$?

Oui, mais il faut faire attention à comment on interprète le résultat.

Rappel : $Ax = b$ est compatible

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \quad rg(A) = rg(A|b) \\ &\Leftrightarrow \quad b \text{ est une comb. lin. des colonnes de } A \end{aligned}$$

L'espace des lignes et l'espace des colonnes d'une matrice (suite)

Supposons $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

$$M_1 = (c_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \text{ d'où } \tilde{M_1} = (\tilde{c_1}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Remarquez que $rg(M_1) = 1$, donc $\{c_1\}$ est lin. ind.

$$M_2 = (M_1|c_2) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \text{ d'où } \tilde{M_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} rg(M_2) = rg(M_1|c_2) = 2 &\neq rg(M_1) \\ \Rightarrow \quad & c_2 \notin \mathcal{L}\{\text{colonnes de } M_1\} \\ \Rightarrow \quad & c_2 \notin \mathcal{L}\{c_1\} \\ \Rightarrow \quad & \{c_1, c_2\} \text{ est lin. ind.} \end{aligned}$$

L'espace des lignes et l'espace des colonnes d'une matrice (suite)

$$M_3 = (M_2|c_3) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ d'où } \tilde{M}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} & rg(M_3) = rg(M_2|c_3) = 2 = rg(M_2) \\ \Rightarrow \quad & (M_2|c_3) \text{ est compatible} \\ \Rightarrow \quad & c_3 \in \mathcal{L}\{c_1, c_2\} \\ \Rightarrow \quad & \mathcal{L}\{c_1, c_2, c_3\} = \mathcal{L}\{c_1, c_2\} \end{aligned}$$

$$M_4 = (M_3|c_4) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \text{ d'où } \tilde{M}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} & rg(M_4) = rg(M_3|c_4) = 2 = rg(M_3) \\ \Rightarrow \quad & (M_3|c_4) \text{ est compatible} \\ \Rightarrow \quad & c_4 \in \mathcal{L}\{c_1, c_2, c_3\} = \mathcal{L}\{c_1, c_2\} \end{aligned}$$

$$Col(A) = \mathcal{L}\{(1, 1, 2), (3, -1, 1)\}$$

L'espace des lignes et l'espace des colonnes d'une matrice (suite)

Résumé : Soit A une matrice $m \times n$, et $\tilde{A}$ est une forme échelonnée de A. Alors,

1. $dim(Col(A)) = rg(A) = dim(Lig(A))$.
2. les lignes non0nulles de $\tilde{A}$ forment une base de $Lig(A)$.
3. Si les pivots de $\tilde{A}$ sont dans les colonnes $j_1, j_2, \ldots, j_r$, alors les colonnes $j_1, j_2, \ldots, j_r$ de la matrice A forment une base de $Col(A)$.

Exemple

Trouvez une base de $Lig(A)$ et $Col(A)$ pour la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -7 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Le calcul de bases pour des sous-espace vectoriels de $\mathbb{R}^4$

Soit $W = \mathcal{L}\{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

A) Trouvez une base (n'importe laquelle) pour W.

i) Construire la matrice

$$A = \begin{pmatrix} - & v_1 & - \\ - & v_2 & - \\ & \vdots & \\ - & v_p & - \end{pmatrix}$$

$W = Lig(A)$.

ii) Calculer une forme échelonnée de A, disons $\tilde{A}$.

iii) Les lignes non-nulles de $\tilde{A}$ sont une base de W.

Exemple

Calculez une base de

$$W = \mathcal{L}\{(1,1,1,0),(1,1,2,1),(1,1,-1,-1),(1,1,2,2)\}$$

Le calcul de bases pour des sous-espace vectoriels de $\mathbb{R}^4$ (suite)

B) Trouvez une base de W qui est un sous-ensemble de $\{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$.

i) Construire la matrice

$$A = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ v_1 & v_2 & \ldots & v_p \\ | & | & & | \end{pmatrix}$$

$W = Col(A)$.

ii) Calculer une forme EL de A, disons $\tilde{A}$.

iii) Identifier les colonnes pivot de $\tilde{A}$, et choisir ces mêmes colonnes dans A.

Exemple

Trouver une base de

$$W = \mathcal{L}\{(1,1,1,0),(1,1,2,1),(1,1,-1,-1),(1,1,2,2)\}$$

qui est une sous-ensemble de

$$\{(1,1,1,0),(1,1,2,1),(1,1,-1,-1),(1,1,2,2)\}.$$

Noyau d'une matrice

Soit A une matrice $m \times n$.
Rappel: Le système homogène $Ax = 0$ possède toujours la solution triviale $x = 0$, et peut possiblement posséder une infinité de solutions.

Définition

On définit le noyau de A, dénoté $ker(A)$ (ou $nul(A)$) par l'ensemble

$$ker(A) = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, Ax = 0\}$$

Noyau d'une matrice (suite)

Théorème

Pour une matrice $m \times n$ A, $ker(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

Démonstration : On utilise le test du sous-espace vectoriel.

1. $0 \in ker(A)$?
   Oui, puisque $A0 = 0$.
2. Soient $v_1, v_2 \in ker(A)$ $(Av_1 = 0, Av_2 = 0)$, $v_1 + v_2 \in ker(A)$?
   Oui, puisque $A(v_1 + v_2) = Av_1 + Av_2 = 0 + 0 = 0$.
3. Soit $v \in ker(A)$ $(Av = 0)$ et $k \in \mathbb{R}$, $kv \in ker(A)$?
   Oui, puisque $A(kv) = k(Av) = k0 = 0$.

Systèmes homogènes (suite)

Exemples

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, trouvez $ker(A)$.
2. Résolvez le système

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 0 \end{array}.$$

Noyau d'une matrice (suite)

Résultat général : Un système linéaire homogène $Ax = 0$ qui a plus de variables que d'équations, possède toujours une infinité de solutions.

$$\text{nombre de paramètres libre} = \text{nombre de variable - } rg(A)$$

Noyau d'une matrice (suite)

Calcul de $ker(A)$

Exemple

Calculez $ker(A)$, pour

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

Noyau d'une matrice (suite)

Définition

Soit A une matrice $m \times n$, et soit $\tilde{A}$ la forme FER de A ($(A|0) \sim \ldots \sim (\tilde{(A)}|0))$. Supposons qu'il y a k paramètres $s_1, s_2, \ldots, s_k$ dans la solution générale de $(\tilde{A}|0)$, c.à.d.

$$S = \{s_1 v_2 + s_2 v_2 + \ldots + s_k v_k | s_1, s_2, \ldots, s_k \in \mathbb{R}\}.$$

L'ensemble fondamental des solutions (du système $Ax = 0$) est l'ensemble $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$.

Théorème

L'ensemble fondamental des solutions du système $Ax = 0$ est une base pour $ker(A)$. La dimension de $ker(A)$ est alors égale à

$$dim(ker(A)) = nombre\ de\ colonnes\ de\ A\ \text{-}\ rg(A)$$

Remarques concernant les sous-espace vectoriel associés à une matrice $m \times n$, A

1. $ker(A) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.
2. $Lig(A)$ est le sous-espace vectoriel engendré par les lignes de A. $Lig(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.
3. $Col(A) = \{Ax \mid x \in \mathbb{R}^n\}$ est le sous-espace vectoriel engendré par les colonnes de A. $Col(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^m$.

Exemple

Trouver $Lig(A)$, $Col(A)$ et $ker(A)$ pour la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Remarques concernant les sous-espace vectoriel associés à une matrice $m \times n$, A (suite)

Remarque

1. $dim(ker(A)) = n - rg(A)$,
2. $rg(A) = dim(Lig(A)) = dim(Col(A))$,
3. $dim(ker(A)) + dim(Col(A)) = n$,
4. $dim(ker(A)) + dim(Lig(A)) = n$.

Théorème

L'union d'une base pour $Lig(A)$ et d'une base pour $ker(A)$ est égale à une base pour $\mathbb{R}^n$.