MAT 1741-Problèmes de pratique-Sous-Espace vectoriel et système générateur

1. Dans chaque cas, déterminer si le sous-ensemble U de l'espace vectoriel V est un sous-espace vectoriel de V. Si vous dites que U est un sous-espace vectoriel de V, montrer le. Si vous dites que U n'est pas un sous-espace vectoriel de V, expliquer pourquoi.

   (a) $U = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2 - y^2 + z^2 \geq 3\right\}$, $V = \mathbb{R}^3$.

   (b) $U = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x + y + 2z = 1\right\}$, $V = \mathbb{R}^3$.

   (c) $U = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x \leq 0,\ y \geq 0\right\}$, $V = \mathbb{R}^2$.

   (d) $U = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ xyz = 0\right\}$, $V = \mathbb{R}^3$.

   (e) $U = \left\{(x, y, 2x^2 - y^2);\ x,\ y \in \mathbb{R}\right\}$, $V = \mathbb{R}^3$.

   (f) $U = \{(2x, x - y, x + 2y, -2x + y);\ x,\ y \in \mathbb{R}\}$, $V = \mathbb{R}^4$.

   (g) $U = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix};\ ad = 0 \right\}$, $V = \mathbb{M}_{22}(\mathbb{R})$

   (h) $U = \left\{ \begin{bmatrix} a + 2b + c & -b & 0 \\ a - c & b + 2c & -a \\ 0 & 0 & a + b + c \end{bmatrix};\ a,\ b,\ c \in \mathbb{R} \right\}$, $V = \mathbb{M}_{33}(\mathbb{R})$

   (i) $U = \left\{p(x) \in \mathbb{P}_3;\ p(0) = (p(1))^2\right\}$, $V = \mathbb{P}_3$

   (j) $U = \{p(x) \in \mathbb{P}_4;\ p(0) = p(1)\}$, $V = \mathbb{P}_4$

   (k) $U = \{p(x) \in \mathbb{P}_3;\ \deg p(x) = 3\}$, $V = \mathbb{P}_3$

   (l) $U = \{f \in \mathbb{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R});\ f'' - 2f' + f = 0\}$, $V = \mathbb{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

   (m) $U = \{f \in \mathbb{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R});\ 2f(0) = -f(-1)\}$, $V = \mathbb{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

   (n) $U = \{f \in \mathbb{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R});\ f(0) + f(-1) = 2\}$, $V = \mathbb{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

2. (1) Écrire si possible chacun des vecteurs suivants comme une combinaison linéaire des vecteurs $1 + x$, $1 + x^2$ et $x + x^2$ dans $\mathbb{P}_2$.

$$(a)\, 1 - 3x + 2x^2 \quad (b)\, x \quad (c)\, x^2$$

   (2) Écrire si possible chacun des vecteurs suivants comme une combinaison linéaire des vecteurs $1 + x$, $1 + x^2$ et $x - x^2$ dans $\mathbb{P}_2$.

$$(a)\, 1 - 3x + 2x^2 \quad (b)\, 1 - 3x + 4x^2$$

   (3) Pour quelle(s) valeur(s) du réel t a-t-on $1 - x + tx^2 \in \text{span}\{1 + x,\ 1 + x^2,\ 2 + 2x^2\}$

3. Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ et considérer l'ensemble

$$U = \{X \in \mathbb{M}_{22};\ AX = XA\}.$$

   Montrer que U est un sous-espace de $\mathbb{M}_{22}$ et en donner un système générateur.

4. Parmi les fonctions suivantes de l'espace $\mathbb{F}([0, \pi], \mathbb{R})$, lesquelles sont dans $\text{span}\{\cos^2 x, \sin^2 x\}$?

$$(a)\ \cos 2x \quad (b)\, x^2 \quad (c)\, 1 \quad (d)\ \sin(2x)$$

5. Soit
$$U = \left\{A \in \mathbb{M}_{33}(\mathbb{R})\,;\ A = A^T\right\}.$$
Montrer que U est un sous-espace de $\mathbb{M}_{33}(\mathbb{R})$ et en donner un système générateur.

6. Considérer les trois vecteurs suivants de $\mathbb{R}^4$:
$$v_1 = (-1, 2, -3, 1),\ v_2 = (1, 0, 2, 1),\ v_3 = (0, -4, -3, 2).$$
(1) Dans chaque cas, déterminder si $v \in \text{span}\{v_1, v_2, v_3\}$. Si vous dites que $v \in \text{span}\{v_1, v_2, v_3\}$, écrivez le vecteur comme une combinaison linéaire de v_1, v_2 et v_3.
(a) $v = (0, 0, -5, 6)$
(b) $v = (0, -2, -4, 0)$
(c) $v = (0, -8, -6, 4)$
(2) Soit $v = (-1, 2, -8, t)$. Pour quelle(s) valeur(s) du réel t a-t-on $v \in \text{span}\{v_1, v_2, v_3\}$.

7. Considérer les trois matrices suivantes de $\mathbb{M}_{22}$:
$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},\quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\quad A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$
Dans chaque cas, déterminer si $A \in \text{span}\{A_1, A_2, A_3\}$:
$$(a)\, A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad (b)\, A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad (c)\, A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

8. Soit U et W deux sous-espaces d'un espace vectoriel V.
(1) Montrer que l'intersection, $U \cap W = \{v \in V;\ v \in U \text{ et } v \in W\}$, de U et W est un sous-espace de V.
(2) Montrer qu'en général l'union, $U \cup W = \{v \in V;\ v \in U, \text{ ou } v \in W\}$, de U et W n'est pas un sous-espace de V (il suffit de donner un exemple où $U \cup W$ n'est pas un sous-espace).
(3) On définit la somme de U et W comme étant l'ensemble noté $U + W$ des vecteurs de V qui sont de la forme $u + w$ avec $u \in U$ et $w \in W$:
$$U + W = \{u + w;\ u \in U \text{ et } w \in W\}.$$
Montrer que $U + W$ est un sous-espace de V.

9. Soit V un espace vectoriel et $v \in V$ un vecteur non nul.
(1) Quels sont les sous-espaces de $\text{span}\{v\}$?
(2) Si a est un scalaire non nul, montrer que $\text{span}\{av\} = \text{span}\{v\}$
(3) Plus généralement, si $v, v_1, v_2, \ldots, v_n$ sont des vecteurs dans V tels que $v \in \text{span}\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, montrer que

$$\text{span}\{v, v_1, v_2, \ldots, v_n\} = \text{span}\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$$

(En d'autres mots, on ne change pas l'enveloppe linéaire si on enlève un vecteur qui est une combinaison linéaire des autres). En déduire que

$$\begin{aligned} &\text{span}\left\{(-1,0,1,2),\ (1,-1,-4,2),\ (-1,0,0,2),\ (-1,-1,-3,6),\ (-2,1,5,0)\right\} \\ &\qquad\qquad = \text{span}\left\{(-1,0,1,2),\ (1,-1,-4,2),\ (-1,0,0,2)\right\} \end{aligned}$$

dans $\mathbb{R}^4$.