MAT 1741-Problèmes de pratique-Espace vectoriel

1. Sur l'ensemble $\mathbb{R}^2$, on définit une addition $\oplus$ et une multiplication par un scalaire non standards $\odot$ de la façon suivante:

$$(x, y) \oplus (x', y') = (x + x' + 9, y + y' - 5)$$
$$a \odot (x, y) = (ax + 9a - 9, ay - 5a + 5), \quad a \in \mathbb{R}$$

Montrer que l'ensemble $\mathbb{R}^2$ muni de ces deux opérations est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

2. Dans chaque cas, déterminer si l'ensemble donné est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ pour les opérations spécifiées.

   (a) L'ensemble $U = \{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2;\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$ muni de l'addition et la multiplication par un scalaire standards de $\mathbb{R}^2$.

   (b) L'ensemble $U = \{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2;\ x \geq y\}$ muni de l'addition et la multiplication par un scalaire standards de $\mathbb{R}^2$.

   (c) L'ensemble $\mathbb{R}^2$ muni de l'addition standard et la multiplication par un scalaire définie de la manière suivante:

$$a \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax \\ y \end{bmatrix}$$

   (d) L'ensemble $\mathbb{R}^2$ muni de la multiplication par un scalaire standard et une addition définie de la manière suivante:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + a + 1 \\ y + b + 1 \end{bmatrix}$$

3. Montrer que dans un espace vectoriel V, le vecteur nul est unique.

4. Soit $\mathbb{R}_+$ l'ensemble de tous les nombres réels positifs. On définit dans $\mathbb{R}_+$ une addition $\oplus$ et une multiplication par un scalair $\odot$ de la façon suivante:

$$x \oplus y = xy, \quad a \odot x = x^a.$$

Montrer que $(\mathbb{R}_+, \oplus, \odot)$ est un espace vectoriel sr $\mathbb{R}$.

5. Soit V un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ dont le vecteur nul est noté par $\mathbf{O}$. Montrer que:
(1) $\forall a \in \mathbb{R}$, $a\mathbf{O}$=$\mathbf{O}$.
(2) $\forall a \in \mathbb{R}$, $\forall u \in V$, si au=$\mathbf{O}$, alors $a = 0$ ou u=$\mathbf{O}$
(3) $\forall u \in V$, le vecteur opposé de u est unique (supposer que v, $v' \in V$ sont deux vecteurs opposés de u et montrer que $v = v'$).
(4) $\forall u \in V$, $-1.u = -u$ (l'opposé de u).