Introduction à l'Algèbre linéaire **(MAT1741 A)**
EXAMEN PARTIEL PRATIQUE II **(17 Novembre 2012)**
Professeur: Joseph Khoury **Durée: 80 minutes**

Nom de famille: Solutions

Prénom: ______

Numéro d'étudiant: ______

Aucune note n'est permise.
Les calculatrices ne sont pas permises.

Cet examen comporte 7 questions et 8 pages. Les questions à choix multiples (1 à 4) valent chacune 2 points sur les 24 points que compte l'examen. Inscrire à l'ENCRE dans les cases ci-dessous les LETTRES correspondant aux réponses à ces questions.

1	2	3	4

Les questions 5 à 7 sont à développement et requièrent une réponse détaillée. Prenez soin de bien rédiger votre solution. Vous pouvez utiliser le verso des pages si vous manquez d'espace au recto et les deux pages additionnelles à la fin.

1. Soit V un espace vectoriel, $v_1, v_2, \ldots, v_n$ et v des vecteurs dans V. Parmi les énoncés suivants, deux sont vrais. Lesquels?

(1) Si $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sont linéairement indépendants mais $v_1, v_2, \ldots, v_n, v$ ne le sont pas, alors v est un multiple scalaire d'au moins un des vecteurs v_i.

(2) $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sont linéairement indépendants si la condition suivante est satisfaite: "$a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$ implique que $a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots a_nv_n = 0$".

(3) Si $a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots a_nv_n = 0$ est seulement possible lorsque $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$, alors $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sont linéairement indépendants.

(4) Si $v \in \text{span}\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, alors au moins un des vecteurs v_i est un multiple scalaire de v.

(5) Si $v \in \text{span}\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, alors $v_1, v_2, \ldots, v_n, v$ sont linéairement dépendants.

(6) Si $v_i \neq v_j$ pour tout $i \neq j$, alors $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ est linéairement indépendant.

A. (3) et (4) **B.** (3) et (5) **C.** (1) et (6)
D. (1) et (2) **E.** (2) et (6) **F.** (2) et (5)

Solution (1) Faux Dans $\mathbb{R}^2$, $v_1 = (1,0)$, $v_2 = (-1,2)$ sont linéairement indépendants, et $v = (0,2) = v_1 + v_2$ est tel que v_1, v_2, v sont linéairement dépendants. Remarquer que v n'est pas un multiple scalaire ni de v_1, ni de v_2

(2) Faux Si $a_1 = \cdots = a_n = 0$, alors $a_1v_1 + \cdots + a_nv_n$ est nul pour n'importe quels vecteurs $v_1, v_2, \ldots, v_n$

(3) Vrai C'est la définition de l'indépendance linéaire

(4) Faux Dans $\mathbb{R}^2$, $v_1 = (1,0)$, $v_2 = (-1,2)$ et $v = (0,2)$
$v = v_1 + v_2 \in \text{Span}\{v_1, v_2\}$ mais ni v_1, ni v_2 est un multiple de v

(5) Vrai $v \in \text{Span}\{v_1, \ldots, v_n\} \Rightarrow v = a_1v_1 + \cdots + a_nv_n$ (où $a_i \in \mathbb{R}$) $\Rightarrow$
$a_1v_1 + \cdots + a_nv_n + (-1)v = 0 \Rightarrow \{v_1, \ldots, v_n, v\}$ est linéairement dépendant.

(6) Faux Dans $\mathbb{R}^2$, $v_1 = (1,0)$, $v_2 = (2,0)$. Alors $v_1 \neq v_2$ mais $\{v_1, v_2\}$ est linéairement dépendant.

2. Considérer la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & 6 & -3 & 10 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 5 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

L'espace-colonne de A est un sous-espace de $\mathbb{R}^r$ et le noyau de A est un sous-espace de $\mathbb{R}^s$. Parmi les six combinaisons ci-dessous, une seule donne les bonnes réponses aux 4 questions suivantes. Laquelle?

(1) Quelle est la valeur de r?

(2) Quelle est la valeur de s?

(3) Quelle est la dimension de l'espace-colonne de A?

(4) Quelle est la dimension du noyau de A?

A. 6, 5, 1, 5 **B.** 5, 6, 4, 2 **C.** 6, 5, 5, 1
D. 5, 6, 2, 4 **E.** 5, 6, 3, 3 **F.** 6, 5, 3, 3

Solution

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & 6 & -3 & 10 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 5 & 0 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Alors $\text{rang}(A) = 3$

(1) $Col(A)$ est un sous-espace de $\mathbb{R}^5$ $\Rightarrow r = 5$

(2) $Ker(A)$ 〃 〃 〃 〃 〃 $\mathbb{R}^6$ $\Rightarrow s = 6$

(3) $\dim Col(A) = \text{rang}(A) = 3$

(4) $\dim Ker(A) = n - \text{rang}(A) = 6 - 3 = 3$

3. Considérer les trois fonctions f, g et h de l'espace $\mathbb{F}(]-2,+\infty[,\mathbb{R})$ définies par

$$f(x)=\frac{1}{x+2},\quad g(x)=\frac{x}{(x+2)(x^2+1)},\quad h(x)=\frac{\alpha x^2+6x+2}{(x+2)(x^2+1)}.$$

où $\alpha\in\mathbb{R}$. Pour quelle valeur de α, la fonction h appartient-elle à l'enveloppe linéaire des fonctions f et g?

A. 3 **B.** 1
C. N'importe quelle valeur de α **D.** 5
E. 0 **F.** 2

Solution on cherche deux scalaires a et b tels que $h = af+bg$.
Ceci est équivalent à dire $h(x) = af(x)+bg(x)$ $\forall x \in]-2,+\infty[$:

$$\frac{\alpha x^2+6x+2}{(x+2)(x^2+1)} = \frac{a}{x+2}+\frac{bx}{(x+2)(x^2+1)} = \frac{ax^2+a+bx^2+2bx}{(x+2)(x^2+1)} \quad \forall x>-2.$$

D'où $\alpha x^2+6x+2 = (a+b)x^2+2bx+a \quad \forall x>-2$

et alors $\begin{cases} a+b=\alpha & (1)\\ 2b=6 & (2)\\ a=2 & (3)\end{cases}$

$(2) \Rightarrow b=3$

$(1) \Rightarrow \alpha = a+b = 2+3=5$

$\boxed{\alpha = 5}$

4. Dans chaque cas, V est un espace vectoriel, U un sous-ensemble de V. Dans quels cas U est un sous-espace de V?

(1) $V = \mathbb{R}^4$, $U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4;\ x^2 + y^4 + z^6 + t^8 = 0\}$.

(2) $V = \mathbb{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $U = \{f \in V;\ f(2)(f(-3))^2 = 0\}$.

(3) $V = \mathbb{M}_{22}$, $U = \{A \in V;\ A^2 = 0\}$.

(4) $V = \mathbb{R}^3$, $U = \{X \in V;\ AX = 2X\}$ où A est une matrice 3×3 fixe.

(5) $V = \mathbb{P}_2$, $U = \{p(x) \in V;\ p(0) \geq 0\}$.

A. (1) et (4) **B.** (2) et (5) **C.** (1), (2) et (5)
D. (4) seulement **E.** (3) seulement **F.** (3) et (4)

Solution (1) U est un sous-espace de V :
Comme $x^2 \geq 0$, $y^4 \geq 0$, $z^6 \geq 0$ et $t^8 \geq 0$, la condition $x^2+y^4+z^6+t^8=0$ est possible seulement si $x^2 = y^4 = z^6 = t^8 = 0$, c'est-à-dire $x = y = z = t = 0$. Alors $U = \{(0,0,0,0)\}$ et c'est un sous-espace

(2) U n'est pas un sous-espace de V

$f(x) = x-2 \in U$ car $f(2)(f(-3))^2 = 0$

$g(x) = x+3 \in U$ car $g(2)(g(-3))^2 = 0$

mais $h = f+g \notin U$ car $h(x) = x-2+x+3 = 2x+1$. D'où

$h(2) = 5$ et $h(-3) = -5 \Rightarrow h(2)(h(-3))^2 = 125 \neq 0$

(3) U n'est pas un sous-espace de V

$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in U$ car $A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in U$ car $B^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

mais $C = A+B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \notin U$ car $C^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

(4) U est un sous-espace de V : 1) $A0 = 0 = 2(0) \Rightarrow 0 \in X$

(2) $X, Y \in U \Rightarrow A(X+Y) = AX + AY = 2X + 2Y = 2(X+Y) \Rightarrow X+Y \in U$

(3) $X \in U$, $a \in \mathbb{R} \Rightarrow A(aX) = a(AX) = a(2X) = 2(aX) \Rightarrow aX \in U$

(5) U n'est pas un sous-espace de V $p(x) = x+1 \in U$ car $p(0) = 1 \geq 0$
mais $-2p(x) = -2x-2 \notin U$ car $(-2p)(0) = -2 < 0$.

5. **[6 points]** Considérer les quatre fonctions f, g, h et k de l'espace $\mathbb{F}([0,\, 2\pi]\,, \mathbb{R})$ définies par:

$$f(x) = x^2,\ \ g(x) = \cos^2 x,\ \ h(x) = \sin^2 x,\ \ k(x) = \cos 2x \qquad \forall x \in [0,\, 2\pi]\,.$$

(1) Montrer que $\{f,\, g,\, h\}$ est linéairement indépendant.

(2) Utiliser la partie précdente pour montrer que $\{f+g,\, f+h\}$ est aussi linéairement indépendant.

(3) Donner une base et la dimension de l'espace $U = \text{span}\,\{f,\, g,\, h,\, k\}$ (Indication: Utiliser l'identité $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$).

(4) Si ϕ et ψ sont deux éléments de $U = \text{span}\,\{f,\, g,\, h,\, k\}$, peut-on avoir $U = \text{span}\,\{\phi,\, \psi\}$?

<u>Solution</u> (1) $a f(x) + b g(x) + c h(x) = 0 \quad \forall x \in [0, 2\pi] \Rightarrow$

$a x^2 + b \cos^2 x + c \sin^2 x = 0 \quad \forall x \in [0, 2\pi]$.

$$\left.\begin{array}{l} \underline{x=0} \quad a\, 0^2 + b \underbrace{\cos^2 0}_{1} + c \underbrace{\sin^2 0}_{0} = 0 \Rightarrow b = 0 \\ \underline{x=\pi/2} \quad a \frac{\pi^2}{4} + b \cos^2(\pi/2) + c \sin^2(\pi/2) = 0 \Rightarrow \frac{\pi^2}{4} a + c = 0 \\ \underline{x=\pi} \quad a\pi^2 + b \underbrace{\cos^2(\pi)}_{1} + c \underbrace{\sin^2(\pi)}_{0} = 0 \Rightarrow \pi^2 a + b = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} a = b = c \\ = 0 \\ \{f, g, h\} \text{ est} \\ \text{l. ind.} \end{array}$$

(2) $a(f+g) + b(f+h) = 0 \Rightarrow (a+b) f + a g + b h = 0$. Comme f, g, h sont linéairement indépendants, cette équation implique que $a+b=0$, $a=0$, $b=0$. D'où $a=b=0$ et $\{f+g, f+h\}$ est linéairement indépendant.

(3) Par l'indication donnée, on a que $k(x) = \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

$\Rightarrow k = 1.f + (-1) g \Rightarrow k = 1.f + (-1) g + 0.h \in \text{span}\{f, g, h\}$.

Donc $U = \text{span}\{f, g, h, k\} = \text{span}\{f, g, h\}$ car $k \in \text{span}\{f, g, h\}$

Comme f, g et h sont l. ind. (partie (1)), $\{f, g, h\}$ forme une base de U. D'où $\dim U = 3$.

(4) Non; Comme $\dim U = 3$, un ensemble contenant moins que 3 vecteurs ne peut pas former un système générateur de U.

6. **[5 points]** Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_{22}$.

(1) Montrer que
$$U = \{X \in \mathbf{M}_{22}; A^{-1}X = XA^T\}$$
est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{M}_{22}(\mathbb{R})$.

(2) Trouver une base et donner la dimension de U.

(3) Si $u, v, w, z \in U$, le sous-ensemble $\{u, v, w, z\}$ peut-il être linéairement indépendant?

Solution (1) Premièrement, noter que $A^{-1} = \frac{1}{3(1)-2(1)} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ et $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$. Alors

1) $U = \left\{ X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_{22} ; \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \right\}$

$= \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_{22} ; \begin{bmatrix} 3a-c & 3b-d \\ -2a+c & -2b+d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+b & 2a+3b \\ c+d & 2c+3d \end{bmatrix} \right\}$

$= \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_{22} ; 3a-c = a+b,\ 3b-d = 2a+3b,\ -2a+c = c+d \text{ et } -2b+d = 2c+3d \right\}$

$= \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_{22} ; 2a-b-c=0,\ 2a+d=0,\ b+c+d=0 \right\}$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$c = s$, $d = t$ sont libres et $a = -\frac{1}{2}t$, $b = -s-t$

$U = \left\{ \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}t & -s-t \\ s & t \end{bmatrix} ; s, t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ s\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -1/2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} ; s, t \in \mathbb{R} \right\}$

$= \text{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1/2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ c'est alors un sous-espace de $\mathbb{M}_{22}$.

2) Comme $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} -1/2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ sont l. ind. (une n'est pas un multiple de l'autre), elles forment une base de U et $\dim U = 2$.

(3) Non un ensemble contenant plus que 2 vecteurs de U est linéairement indépendant car $\dim U = 2$

7. Considérer les 5 vecteurs suivants de $\mathbb{R}^4$:

$v_1 = (1, 0, -1, -2),\ v_2 = (0, 0, 1, 3),\ v_3 = (1, 0, 0, 1),\ v_4 = (2, 1, 0, 0),\ v_5 = (-1, -1, 0, 1)$
et posons $U = \text{span}\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$.

(1) Donner une base de U formée par un sous-ensemble de l'ensemble $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$.

(2) Utiliser le procédé de **Gram-Schmidt** pour trouver une base orthogonale de U.

(3) Soit $v = (2, 1, -3, -1) \in \mathbb{R}^4$. Donner la meilleur approximation de v par un élément de U.

Solution (1) Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, alors $U = Col(A)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 3 & 4 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 3 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

les colonnes pivots de A sont la première, deuxième et 4ème colonnes.

Alors $\{v_1, v_2, v_4\} = \{\underbrace{(1,0,-1,-2)}_{w_1}, \underbrace{(0,0,1,3)}_{w_2}, \underbrace{(2,1,0,0)}_{w_3}\}$ est une base de $Col(A) = U$.

(2) $u_1 = w_1 = (1, 0, -1, -2)$

$$u_2 = w_2 - \text{proj}_{u_1} w_2 = w_2 - \frac{w_2 \cdot u_1}{\|u_1\|^2} u_1 = (0,0,1,3) - \frac{(0,0,1,3)\cdot(1,0,-1,-2)}{6}(1,0,-1,-2)$$

$$u_2 = (0,0,1,3) + \frac{7}{6}(1,0,-1,-2) = \left(\frac{7}{6}, 0, -\frac{1}{6}, \frac{2}{3}\right)$$

$$u_3 = w_3 - \frac{w_3 \cdot u_1}{\|u_1\|^2} u_1 - \frac{w_3 \cdot u_2}{\|u_2\|^2} u_2$$

$$= (2,1,0,0) - \frac{(2,1,0,0)\cdot(1,0,-1,-2)}{6}(1,0,-1,-2) - \frac{(2,1,0,0)\cdot(7/6, 0, -1/6, \frac{2}{3})}{11/6}\left(\frac{7}{6}, 0, -\frac{1}{6}, \frac{2}{3}\right)$$

$$= (2,1,0,0) - \frac{1}{3}(1,0,-1,-2) - \frac{14}{11}\left(\frac{7}{6}, 0, -\frac{1}{6}, \frac{2}{3}\right) = \left(\frac{2}{11}, 1, \frac{6}{11}, -\frac{2}{11}\right)$$

Alors $\left\{(1,0,-1,-2), \left(\frac{7}{6}, 0, -\frac{1}{6}, \frac{2}{3}\right), \left(\frac{2}{11}, 1, \frac{6}{11}, -\frac{2}{11}\right)\right\}$ est une base

Page additionnelle

orthogonale de U

(3) La meilleur approximation de $v = (2,1,-3,-1)$ par un vecteur de U est $\text{proj}_U v = \frac{v \cdot w_1}{\|w_1\|^2} w_1 + \frac{v \cdot w_2}{\|w_2\|^2} w_2 + \frac{v \cdot w_3}{\|w_3\|^2} w_3$

$$\text{proj}_U v = \frac{(2,1,-3,-1)\cdot(1,0,-1,-2)}{6}(1,0,-1,-2) + \frac{(2,1,-3,-1)\cdot(7/6,0,-1/6,2/3)}{11/6}\left(\frac{7}{6},0,\frac{-1}{6},\frac{2}{3}\right)$$

$$+ \frac{(2,1,-3,-1)\cdot\left(\frac{2}{11},1,\frac{6}{11},-\frac{2}{11}\right)}{15/11}\left(\frac{2}{11},1,\frac{6}{11},-\frac{2}{11}\right)$$

9. Page additionnelle