MAT1741 - Solutions des problèmes suggérés - Espaces vectoriels

$\boxed{1}$ $(x,y) \oplus (x',y') = (x+x'+9,\ y+y'-5)$

$a \odot (x,y) = (ax+9a-9,\ ay-5a+5)$, $a \in \mathbb{R}$.

On vérifie que les 10 axiomes d'un espace vectoriel sont satisfaits

A1 Si $(x,y), (x',y') \in \mathbb{R}^2$, alors

$(x,y) \oplus (x',y') = (x+x'+9,\ y+y'-5) \in \mathbb{R}^2$

A2 Si $(x,y), (x',y') \in \mathbb{R}^2$, alors

$(x,y) \oplus (x',y') = (x+x'+9,\ y+y'-5) = (x'+x+9,\ y'+y-5) = (x',y') \oplus (x,y)$

A3 Si $(x,y), (x',y')$ et $(x'',y'') \in \mathbb{R}^2$, alors

$[(x,y) \oplus (x',y')] \oplus (x'',y'') = (x+x'+9,\ y+y'-5) \oplus (x'',y'') =$

$(x+x'+9+x''+9,\ y+y'-5+y''-5) = (x+x'+x''+18,\ y+y'+y''-10)$.

D'autre part

$(x,y) \oplus [(x',y') \oplus (x'',y'')] = (x,y) \oplus (x'+x''+9,\ y'+y''-5) =$

$(x+x'+x''+9+9,\ y+y'+y''-5-5) = (x+x'+x''+18,\ y+y'+y''-10)$

D'où $[(x,y) \oplus (x',y')] \oplus (x'',y'') = (x,y) \oplus [(x',y') \oplus (x'',y'')]$

A4 Existence d'un vecteur nul :

Cherchons un vecteur $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$(x,y) \oplus (a,b) = (a,b) \oplus (x,y) = (x,y)$.

$(x,y) \oplus (a,b) = (x,y) \Leftrightarrow (x+a+9,\ y+b-5) = (x,y) \Rightarrow$

$x+a+9 = x$ et $y+b-5 = y \Leftrightarrow a = -9$ et $b = 5$.

Le vecteur nul est alors $(-9, 5)$

A5 Existence d'un élément opposé.

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. On cherche un élément $(x',y') \in \mathbb{R}^2$ tel que

$(x,y)\oplus(x',y')=(-9,5) \iff (x+x'+9, y+y'-5)=(-9,5) \iff$

$x+x'+9=-9$ et $y+y'-5=5 \Rightarrow x'=-x-18$ et $y'=-y+10$.

Alors $-(x,y)=(-x-18, -y+10)$

<u>Vérification</u> : $(x,y)\oplus(-x-18,-y+10)=(x-x-18+9, y-y+10-5)$

$=(-9,5)=$ vecteur nul.

<u>M1</u> $\forall a\in\mathbb{R}$, $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$, on a :

$a\odot(x,y)=(ax+9a-9, ay-5a+5)\in\mathbb{R}^2$

<u>M2</u> $\forall a,b\in\mathbb{R}$, $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$:

$(a+b)\odot(x,y)=((a+b)x+9(a+b)-9, (a+b)y-5(a+b)+5)$

D'autre part :

$a\odot(x,y)+b\odot(x,y)=(ax+9a-9, ay-5a+5)\oplus(bx+9b-9, by-5b+5)$

$=(ax+9a-9+bx+9b-9+9, ay-5a+5+by-5b+5-5)$

$=((a+b)x+9(a+b)-9, (a+b)y-5(a+b)+5)=(a+b)\odot(x,y)$

<u>M3</u> $\forall a,b\in\mathbb{R}$, $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$

$a\odot[b\odot(x,y)]=a\odot(bx+9b-9, by-5b+5)$

$=(a(bx+9b-9)+9a-9, a(by-5b+5)-5a+5)$

$=(abx+9ab-9, aby-5ab+5)=(ab)\odot(x,y)$

<u>M4</u> soit $a\in\mathbb{R}$, $(x,y),(x',y')\in\mathbb{R}^2$:

$a\odot[(x,y)\oplus(x',y')]=a\odot(x+x'+9, y+y'-5)=$

$(a(x+x'+9)+9a-9, a(y+y'-5)-5a+5)=$

$(ax+ax'+18a-9, ay+ay'-10a+5)$

D'autre part : $a\odot(x,y)\oplus a\odot(x',y')=$

$(ax+9a-9,\ ay-5a+5) \oplus (ax'+9a-9,\ ay'-5a+5)$

$= (ax+9a-9+ax'+9a-9+9,\ ay-5a+5+ay'-5a+5-5)$

$= (ax+ax'+18a-9,\ ay+ay'-10a+5) = a \odot [(x,y) \oplus (x',y')]$

<u>M5</u> $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$1 \odot (x,y) = (1.x + 9(1) - 9,\ 1.y - 5(1) + 5) = (x,y).$

Alors $(\mathbb{R}^2, \oplus, \odot)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

$\boxed{2}$ (a) U n'est pas un espace vectoriel. L'axiome M1 n'est pas satisfait : $(1,1) \in U$, $-2 \in \mathbb{R}$, mais

$-2\ (1,1) = (-2,-2) \notin U$.

(b) U n'est pas un espace vectoriel. L'axiome M1 n'est pas satisfait :

$(2,1) \in U$, $-2 \in \mathbb{R}$ mais $-2(2,1) = (-4,-2) \notin U$

(c) $\mathbb{R}^2$ muni de ces deux opérations n'est pas un espace vectoriel :

$(a+b)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a+b)x \\ y \end{bmatrix}$ et $a\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax+bx \\ 2y \end{bmatrix} \neq (a+b)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

(d) $\mathbb{R}^2$ muni de ces deux opérations n'est pas un espace vectoriel :

$$a\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}\right) = a\begin{bmatrix} x+x'+1 \\ y+y'+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax+ax'+a \\ ay+ay'+a \end{bmatrix}$$ mais

$$a\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + a\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax \\ ay \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ax' \\ ay' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax+ax'+1 \\ ay+ay'+1 \end{bmatrix}$$ qui n'est

pas en général la même chose que $a\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}\right)$.

$\boxed{3}$ Supposons que l'espace vectoriel V admet deux vecteurs nuls qu'on note par 0 et $0'$. Alors

$0 + 0' = 0'$ (car 0 est nul et $0' \in V$)
$0 + 0' = 0$ (car $0'$ " " " $0 \in V$)
$\Big\}$ D'où $0 = 0'$

$\boxed{4}$ $x \oplus y = xy$ et $a \odot x = x^a$

On vérifie les axiomes d'un espace vectoriel :

<u>A1</u> si $x, y \in \mathbb{R}_+$, $x \oplus y = xy \geq 0$, donc $x \oplus y \in \mathbb{R}_+$

<u>A2</u> si $x, y \in \mathbb{R}_+$, alors $x \oplus y = xy = yx = y \oplus x$

<u>A3</u> si $x, y, z \in \mathbb{R}_+$, alors $x \oplus (y \oplus z) = x \oplus (yz) = x(yz) = (xy)z$ (par l'associativité de la multiplication des réels) $= (x \oplus y) z = (x \oplus y) \oplus z$. Alors $\oplus$ est associative

<u>A4</u> Existence d'un vecteur nul

Soit $x \in \mathbb{R}_+$, alors $x \oplus 1 = x(1) = x$. Alors 1 est le vecteur nul.

<u>A5</u> Existence d'un élément opposé :

Soit $x \in \mathbb{R}_+$, $x \oplus \frac{1}{x} = x \cdot \frac{1}{x} = 1$ (noter que $x \in \mathbb{R}_+ \Rightarrow x \neq 0$). Alors l'opposé de x est $\frac{1}{x}$

<u>M1</u> si $a \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}_+$, alors $a \odot x = x^a \in \mathbb{R}_+$

<u>M2</u> si $a, b \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}_+$, alors $(a+b) \odot x = x^{a+b} = x^a \cdot x^b = x^a \oplus x^b$ (par définition de $\oplus$) $= (a \odot x) \oplus (b \odot x)$ (par définition de $\odot$)

<u>M3</u> si $a \in \mathbb{R}$, $x, y \in \mathbb{R}_+$, alors $a \odot (x \oplus y) = a \odot (xy) = (xy)^a = x^a y^a = x^a \oplus y^a = (a \odot x) \oplus (a \odot y)$

<u>M4</u> si $a, b \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}_+$, alors $(ab) \odot x = x^{ab} = (x^a)^b = b \odot x^a = b \odot (a \odot x)$

<u>M5</u> si $x \in \mathbb{R}_+$, alors $1 \odot x = x^1 = x$.

Alors $(\mathbb{R}_+, \oplus, \odot)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

$\boxed{5}$ (1) $\forall a \in \mathbb{R}$: $a\,0 = a(0+0)$ (car $0+0=0$)

$= a\,0 + a.0$ (distributivité)

Alors $a.0 = a.0 + a.0^{(*)}$. Soit $-a.0$ le vecteur opposé à $a.0$ (chaque vecteur admet un opposé) et ajoutons $-a.0$ à gauche et à droite de (*):

$$a.0 = a.0 + a.0 \Rightarrow \overbrace{a.0+(-a.0)}^{0} = a.0 + \overbrace{a.0+(-a.0)}^{0} \Rightarrow$$

$a.0 = 0$

(2) Soit $a \in \mathbb{R}$ et $u \in V$ tel que $a.u = 0$.

Si $a \neq 0$, alors $\frac{1}{a}$ existe. Multiplions à gauche et à droite de $a.u = 0$ par $\frac{1}{a}$:

$$\frac{1}{a}(a\,u) = \frac{1}{a}(0) \Rightarrow \overbrace{\left(\frac{1}{a}a\right)}^{1} u = 0 \quad (\text{par la propriété } (1)) \Rightarrow$$

$1.u = 0 \Rightarrow u = 0$.

(3) Soit $u \in V$. On doit montrer que l'opposé $-u$ de u est unique. Supposons que v et $v' \in V$ sont deux vecteurs opposés à u. Alors $u+v=0$ et $u+v'=0$.

$u+v=0 \Rightarrow v'+(u+v) = v'+0 = v' \Rightarrow \overbrace{(v'+u)}^{0}+v = v'$ (par l'associativité de $+$) $\Rightarrow 0+v = v' \Rightarrow v = v'$

(4) Soit $u \in V$. On doit montrer que $-1.u$ est le vecteur opposé à u. C'est-à-dire, on doit montrer que $(-1.u)+u = 0$.

Par la partie (1), $0.u = 0 \Rightarrow \underbrace{(-1+1)}_{0}.u = 0 \Rightarrow (-1.u)+(1.u) = 0$

(par la distributivité) $\Rightarrow (-1.u)+u = 0$ car $1.u = u$.