MAT 1741 - Solutions des problèmes suggérés - (1)

Indépendance linéaire - Base et dimension

$\boxed{1}$ (a) $\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ $rg(A) = rg[A|B] = 2 <$ # inconnus

alors le système admet une infinité de solutions et les vecteurs sont alors linéairement dépendants

(b) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ $rg(A) = rg[A|B] = 2 <$ # inconnus.

le système est compatible avec une infinité de solutions.

les vecteurs sont alors linéairement dépendants

(c) $\{1+x, 1-x^2, x+x^2\} \subseteq P_2$

$a(1+x) + b(1-x^2) + c(x+x^2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a+b=0 \\ a+c=0 \\ -b+c=0 \end{cases}$

$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ $rg\, A = rg[A|B] = 2 <$ # inconnus

Il y a une infinité de solutions. Alors les vecteurs sont linéairement dépendants

(d) $ax^3 + b(1-x^2) + c(1+x^2+x^3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} b+c=0 \\ -b+c=0 \\ a+c=0 \end{cases}$

$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right]$ $rg(A) = rg[A|B] =$ # inconnus.

Le système admet une solution unique. Les vecteurs sont alors linéairement indépendants.

(e) $a\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a+c+d=0 \\ a+b+d=0 \\ a+b+c=0 \\ b+c+d=0 \end{cases}$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right]$$

$rg\, A = rg\, [A|B] = 4 = \#$ inconnus

Le système admet une solution unique

$a = b = c = d = 0$ et les 4 matrices sont linéairement indépendantes.

(f) $a \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ -4 & 5 & 3 \\ 11 & -10 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$

$$\begin{cases} -a + 3b + 3c = 0 \\ a - b + c = 0 \\ 2b + 4c = 0 \\ -2b - 4c = 0 \\ a + b + 5c = 0 \\ a + 3c = 0 \\ 3a + b + 11c = 0 \\ -2a - 2b - 10c = 0 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 11 & 0 \\ -2 & -2 & -10 & 0 \\ 1 & 3 & 9 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & 0 \\ 0 & 4 & 8 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 0 \\ 0 & 10 & 20 & 0 \\ 0 & -8 & -16 & 0 \\ 0 & 6 & 12 & 0 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$rg(A) = rg\,[A|B] = 2 < \#$ inconnus

Le système admet une infinité de solutions.

Les matrices sont alors linéairement dépendantes

(g) $a x^3 + b(1 - x^2 + 2x^3) + c(1) + d(1+x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} b + c + d = 0 & (1) \\ d = 0 & (2) \\ -b = 0 & (3) \\ a + 2b = 0 & (4) \end{cases}$

$$\left.\begin{array}{l} (2) \text{ et } (3) \text{ et } (1) \Rightarrow c = 0 \\ (4) \text{ et } (3) \Rightarrow a = 0 \end{array}\right\} \text{ Donc } a = b = c = d = 0$$

Les 4 polynômes sont linéairement indépendants.

(h) On sait que $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$ (identité trigonométrique)

Alors $1.\cos^2 x + (-1)\sin^2 x + (-1)\cos(2x) = 0$: C'est une combinaison linéaire nulle sans que les coefficients soient tous nuls. Alors $\cos^2 x$, $\sin^2 x$, $\cos 2x$ sont linéairement indépendants.

(i) $a(-\cos^2 x) + b(2\sin^2 x) + c(-2) = 0 \quad \forall x \in [0, \pi]$

$\underline{x=0}$ $\quad a(-\underbrace{\cos^2 0}_{1}) + b(\underbrace{\sin^2 0}_{0}) + c(-2) = 0 \Rightarrow -a - 2c = 0$

$\underline{x=\pi/2}$ $\quad a(-\underbrace{\cos^2 \pi/2}_{0}) + b(\underbrace{\sin^2(\pi/2)}_{1}) + c(-2) = 0 \Rightarrow b - 2c = 0$

$\underline{x=\pi/4}$ $\quad a(-\cos^2(\frac{\pi}{4})) + b\sin^2(\frac{\pi}{4}) + c(-2) = 0 \Rightarrow -\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b - 2c = 0$

$\Rightarrow -a + b - 4c = 0$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & -4 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{array}\right]$$

Le système admet alors une solution unique $a = b = c = 0$ et donc $-\cos^2 x$, $\sin^2 x$, -2 sont linéairement indépendants.

$\boxed{2}$ (1) Supposons que $v_1 = 0$, alors $1.\overset{0}{\tilde{v_1}} + 0.v_2 + 0v_3 + \dots + 0.v_n = 0$

C'est une combinaison linéaire nulle de $v_1, \dots, v_n$ sans que tous les coefficients soient nuls. Alors $\{v_1, \dots, v_n\}$ est linéairement dépendant.

(2) Supposons que $v_1, \dots, v_r$ sont linéairement dépendents avec $r \leq n$.

Alors, il existe $a_1, a_2, \dots, a_r \in \mathbb{R}$ non tous nuls tels que

$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_r v_r = 0$. Donc

$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_r v_r + 0 v_{r+1} + \dots + 0.v_n = 0$

ce qui montre que $\{v_1, \dots, v_n\}$ est linéairement dépendent.

(3) Supposons que $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sont linéairement indépendants, (4)
mais $v_1, \ldots, v_n, v$ sont linéairement dépendants. Alors, on peut trouver des scalaires $a_1, a_2, \ldots, a_n$ et a non tous nuls tels que $a_1 v_1 + \ldots + a_n v_n + a v = 0^{(*)}$. Si $a = 0$, on obtient que $a_1 v_1 + \ldots + a_n v_n = 0$ ce qui implique (par le fait que les vecteurs $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sont linéairement indépendants) que $a_1 = \ldots = a_n = 0$ mais ceci contredit le fait que les scalaires $a_1, \ldots, a_n$ et a ne sont pas tous nuls. Alors $a \neq 0$

$(*) \Rightarrow a v = -a_1 v_1 - \ldots - a_n v_n$ et $v = \left(-\frac{a_1}{a}\right) v_1 + \ldots + \left(-\frac{a_n}{a}\right) v_n$ (on peut diviser par a car $a \neq 0$) ce qui implique que $v \in \mathrm{Span}\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$.

$\boxed{3}$ $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

$$U = \left\{ X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{22} ;\ AX = XA \right\}$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{22} ;\ \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{22} ;\ \begin{bmatrix} 2a+3c & 2b+3d \\ -a+c & -b+d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a-b & 3a+b \\ 2c-d & 3c+d \end{bmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{22} ;\ \begin{cases} 2a+3c = 2a-b \\ 2b+3d = 3a+b \\ -a+c = 2c-d \\ -b+d = 3c+d \end{cases} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} ;\ \begin{matrix} b+3c = 0 \\ 3a-b-3d = 0 \\ a+c-d = 0 \\ b+3c = 0 \end{matrix} \right\}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$rg(A) = rg(A|B] = 2 <$ # inconnues.

Alors le système admet une infinité de solutions

les variables c, d sont libres et on a : $a = -c+d$, $b = -3c$. D'où

$$U = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{22} ;\ a = -c+d,\ b = -3c \right\}$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} -c+d & -3c \\ c & d \end{bmatrix} ;\ c, d \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ c \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} ;\ c, d \in \mathbb{R} \right\}$$

$$U = \operatorname{span} \left\{ \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Comme les deux matrices $\begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ sont linéairement indépendantes (une n'est pas un multiple de l'autre), elles forment une base de U. Alors $\dim U = 2$.

$\boxed{4}$ (1) Noter que U est l'espace-colonne de la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & -4 & 3 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Comme les pivots se trouvent à la première et 3ème colonne, une base de U est alors $\{(1,-1,0,2), (2,1,-1,3)\}$ et la dimension de U est 2.

(2) De même U est l'espace colonne de

$$A=\begin{bmatrix}1&3&2&5&1&0&0\\1&2&2&6&0&1&1\\1&2&1&3&0&1&0\\1&2&3&9&0&2&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&3&2&5&1&0&0\\0&-1&0&1&-1&1&1\\0&-1&-1&-2&-1&1&0\\0&-1&1&4&-1&2&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&3&2&5&1&0&0\\0&1&0&-1&1&-1&-1\\0&0&-1&-3&0&0&-1\\0&0&1&3&0&1&-1\end{bmatrix}$$

$$\sim\begin{bmatrix}1&3&2&5&1&0&0\\0&1&0&-1&1&-1&-1\\0&0&-1&-3&0&0&-1\\0&0&0&0&0&1&-2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&3&2&5&1&0&0\\0&1&0&-1&1&-1&-1\\0&0&1&3&0&0&1\\0&0&0&0&0&1&-2\end{bmatrix}$$

Comme les pivots se trouvent aux colonnes 1, 2, 3 et 6, une base de U est alors $\{(1,1,1,1), (3,2,2,2), (2,2,1,3), (0,1,1,2)\}$ et $\dim U = 4$.

$\boxed{5}$ (1) Comme Ω contient 3 vecteurs et $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, il suffit de vérifier si ces 3 vecteurs sont linéairement indépendants ;

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&-1&1&0\\-1&0&-2&0\\1&1&-3&0\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1&-1&1&0\\0&-1&-1&0\\0&2&-4&0\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1&-1&1&0\\0&1&1&0\\0&0&-6&0\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1&-1&1&0\\0&1&1&0\\0&0&1&0\end{array}\right]$$

Le système admet une solution unique (solution triviale). Alors les 3 vecteurs sont linéairement indépendants. Ils forment ainsi une base de $\mathbb{R}^3$.

(2) Ω contient seulement 3 vecteurs. Comme $\dim \mathbb{R}^4 = 4$, une base de $\mathbb{R}^4$ doit contenir 4 vecteurs (linéairement indépendants). Alors Ω n'est pas une base de $\mathbb{R}^4$.

(3) $\dim M_{23} = 2\times 3 = 6$. Ω contient seulement 4 matrices.

Donc Ω n'est pas une base de M_{23}

(4) $$\left[\begin{array}{ccc|c}0&0&2&0\\-2&-1&3&0\\1&0&1&0\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&1&0\\-2&-1&3&0\\0&0&1&0\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&1&0\\0&-1&5&0\\0&0&1&0\end{array}\right]$$

Solution unique (triviale), donc les 3 vecteurs sont linéairement indépendants. Comme $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, alors Ω est une base de $\mathbb{R}^3$

(5) $a(1+x)+b(x-x^2)+c(1+x^3)+d(x^2+x^3)=0 \Rightarrow \begin{cases} a+c=0 \\ a+b=0 \\ -b+d=0 \\ c+d=0 \end{cases}$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Solution unique $a=b=c=d=0$ et les polynômes sont linéairement indépendants. Comme $\dim \mathbb{P}_3 = 4$, Ω est alors une base de $\mathbb{P}_3$.

(6) $\dim \mathbb{P}_2 = 3$ et Ω contient 4 vecteurs, donc Ω n'est pas une base

$\boxed{6}$ $U = \{ p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 \in \mathbb{P}_4 \,;\, p(0) = 0 \}$

$= \{ a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 \in \mathbb{P}_4 \,;\, \underbrace{a_0}_{p(0)} = 0 \}$

$= \{ a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 \,;\, a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R} \} = \operatorname{span}\{x, x^2, x^3, x^4\}$.

Alors U est un sous-espace de $\mathbb{P}_4$. De plus, il est facile de montrer que x, x^2, x^3, x^4 sont linéairement indépendants. Donc $\{x, x^2, x^3, x^4\}$ forme une base de U et $\dim U = 4$.

$\boxed{7}$ $a v_1 + b v_2 + c v_3 + d v_4 + e v_5 + f v_6 = 0$

$a(x-x^2) + b(1+x-2x^2+x^3) + c(1+3x-4x^2+x^3) + d(3+4x-7x^2+3x^3) +$

$e(-1-2x+3x^2-x^3) + f(-2-2x+4x^2-2x^3) = 0 \Rightarrow$

$$\begin{cases} b+c+3d-e-2f=0 \\ a+b+3c+4d-2e-2f=0 \\ -a-2b-4c-7d+3e+4f=0 \\ b+c+3d-e-2f=0 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{cccccc|c} 0 & 1 & 1 & 3 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 4 & -2 & -2 & 0 \\ -1 & -2 & -4 & -7 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 3 & 4 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 3 & 4 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Le système admet une infinité de solutions

Les vecteurs sont linéairement dépendants. Le fait que le nombre de pivots est 2 indique qu'il y a seulement deux polynômes qui sont linéairement indépendants. La base est formée par n'importe quelle paire de deux polynômes linéairement indépendants.

Par exemple $\{x-x^2, 1+x-2x^2+x^3\}$ et $\{x-x^2, 1+3x-4x^2+x^3\}$ sont deux bases de U. $\dim U = 2$.

$\boxed{8}$

(a)
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 4 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & -3 & 6 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 & 2 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 3 & -8 & 1 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3/2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (*)$$

(b) Une base de l'espace-colonne de A est alors
$\{(1,2,3,0,2,-3), (0,1,1,1,1,1), (2,4,6,-2,2,-8)\}$

(c) Une base de l'espace-ligne de A est
$\{(1,0,-1,0,3,-3), (0,1,0,0,-2,5), (0,0,0,1,-3/2,1)\}$

(d) Le noyau de A est l'espace des solutions du système homogène $AX=0$

La forme (*) indique qu'il y a une infinité de solutions du système $AX=0$ et que x_3, x_5, x_6 sont des variables libres.

Posons $x_3 = s$, $x_5 = t$, $x_6 = u$. Alors

$x_1 = s - 3t + 3u$, $x_2 = 2t - 5u$ et $x_4 = \frac{3}{2}t - u$.

D'où :

$$\operatorname{Ker}(A) = \left\{ \begin{bmatrix} s-3t+3u \\ 2t-5u \\ s \\ 3/2\,t-u \\ t \\ u \end{bmatrix} ; s,t,u \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ s\begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix} + t\begin{bmatrix}-3\\2\\0\\3/2\\1\\0\end{bmatrix} + u\begin{bmatrix}3\\-5\\0\\-1\\0\\1\end{bmatrix} ; s,t,u \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \operatorname{Span}\left\{ \underbrace{\begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix}}_{v_1}, \underbrace{\begin{bmatrix}-3\\2\\0\\3/2\\1\\0\end{bmatrix}}_{v_2}, \underbrace{\begin{bmatrix}3\\-5\\0\\-1\\0\\1\end{bmatrix}}_{v_3} \right\}$$ et $\{v_1, v_2, v_3\}$ est une base de $\operatorname{Ker} A$.

$\boxed{9}$ $$U = \left\{ \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \in M_{33} ; \begin{bmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a & -b & -c \\ -d & -e & -f \\ -g & -h & -i \end{bmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \in M_{33} ; a=-a,\ d=-b,\ g=-c,\ e=-e,\ h=-f,\ i=-i \right\}$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \in M_{33} ; a=e=i=0,\ d=-b,\ g=-c,\ h=-f \right\}$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} 0 & b & c \\ -b & 0 & f \\ -c & -f & 0 \end{bmatrix} ; b,c,f \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ b\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + f\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} ; b,c,f \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \operatorname{Span}\left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{A_1}, \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{A_2}, \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}}_{A_3} \right\}.$$

Montrons ensuite que A_1, A_2, A_3 sont linéairement indépendants :

$$aA_1 + bA_2 + cA_3 = 0 \Rightarrow a\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow a=b=c=0.$$

Alors $\{A_1, A_2, A_3\}$ est une base de U et $\dim U = 3$.

$\boxed{10}$ $\mathbb{C}^2 = \{(z_1, z_2) ; z_1, z_2 \in \mathbb{C}\}$.

(1) $\mathbb{C}^2 = \{(z_1, z_2) ; z_1, z_2 \in \mathbb{C}\} = \{z_1(1,0) + z_2(0,1) ; z_1, z_2 \in \mathbb{C}\}$
$= \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{(1,0), (0,1)\}$. clairement $\{(1,0), (0,1)\}$ est linéairement indépendant. Donc c'est une base de $\mathbb{C}^2$ sur $\mathbb{C}$: $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^2 = 2$.

(2) Ici on regarde $\mathbb{C}^2$ comme espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire nos scalaires doivent être des réels :

$\mathbb{C}^2 = \{(z_1, z_2) ; z_1, z_2 \in \mathbb{C}\} = \{(x+iy, a+ib) ; x, y, a, b \in \mathbb{R}\}$
$= \{x(1,0) + a(0,1) + y(i,0) + b(0,i) ; x, y, a, b \in \mathbb{R}\}$
$= \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\{(1,0), (0,1), (i,0), (0,i)\}$

On montre ensuite que les vecteurs $(1,0), (0,1), (i,0)$ et $(0,i)$ de $\mathbb{C}^2$ sont linéairement indépendants sur $\mathbb{R}$:
$a(1,0) + b(0,1) + c(i,0) + d(0,i) = (0,0) \Rightarrow a + ic = 0$ et $b + id = 0 \Rightarrow a = b = c = d = 0$. Alors
$\{(1,0), (0,1), (i,0), (0,i)\}$ est une base de $\mathbb{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et
$\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}^2 = 4$.