MAT 1741 – Solutions des problèmes suggérés – Système générateur et sous-espaces

1 (a) $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ; x^2 - y^2 + z^2 \geq 3\}$, $V = \mathbb{R}^3$

U n'est pas un sous-espace de $\mathbb{R}^3$ car $(0,0,0) \notin U$: $0^2 - 0^2 + 0^2 = 0 \neq 3$.

(b) $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ; x + y + 2z = 1\}$, $V = \mathbb{R}^3$

U n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ car $(0,0,0) \notin U$: $0 + 0 + 2(0) = 0 \neq 1$

(c) $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ; x \leq 0, y \geq 0\}$, $V = \mathbb{R}^2$

U n'est pas un sous-espace de $\mathbb{R}^2$ car il n'est pas fermé sous la multiplication par un scalaire : $(-1,1) \in U$, mais $-2(-1,1) = (2,-2) \notin U$

(d) $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ; xyz = 0\}$, $V = \mathbb{R}^3$

U n'est pas un sous-espace de $\mathbb{R}^3$ car il n'est pas fermé sous l'addition : $(1,0,1) \in U$, $(0,1,1) \in U$, mais

$(1,0,1) + (0,1,1) = (1,1,2) \notin U$ comme $xyz = 2 \neq 0$

(e) $U = \{(x,y,2x^2-y^2) ; x,y \in \mathbb{R}\}$, $V = \mathbb{R}^3$

U n'est pas un sous-espace de $\mathbb{R}^3$;

$$\left.\begin{array}{l} (1,1,1) \in U \text{ car } z = 1 = 2(1)^2 - 1^2 \\ (-1,1,1) \in U \text{ car } z = 1 = 2(-1)^2 - 1^2 \end{array}\right\} \text{ mais } (1,1,1) + (-1,1,1) = (0,2,2) \notin U \text{ car } 2 \neq 2(0)^2 - 2^2$$

(f) $U = \{(2x, x-y, x+2y, -2x+y) ; x,y \in \mathbb{R}\}$, $V = \mathbb{R}^4$

$$U = \{x(2,1,1,-2) + y(0,-1,2,1) ; x,y \in \mathbb{R}\} = \text{span}\{(2,1,1,-2), (0,-1,2,1)\}$$

C'est un sous-espace de $\mathbb{R}^4$.

(g) $U = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} ; ad = 0 \right\}$, $V = M_{22}(\mathbb{R})$

U n'est pas un sous-espace car il n'est pas fermé sous l'addition ;

$\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix} \in U$ et $\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix} \in U$ mais $\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix} \notin U$

(h) $U = \left\{ \begin{bmatrix} a+2b+c & -b & 0 \\ a-c & b+2c & -a \\ 0 & 0 & a+b+c \end{bmatrix} ; a,b,c \in \mathbb{R} \right\}$, $V = M_{33}(\mathbb{R})$

$$U = \left\{ a\begin{bmatrix}1&0&0\\1&0&-1\\0&0&1\end{bmatrix} + b\begin{bmatrix}2&-1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix} + c\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&2&0\\0&0&1\end{bmatrix} ; a,b,c \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \text{Span}\left\{ \begin{bmatrix}1&0&0\\1&0&-1\\0&0&1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2&-1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1&0&0\\-1&2&0\\0&0&1\end{bmatrix} \right\}$$

C'est un sous-espace de $M_{33}(\mathbb{R})$

(i) $U = \{ p(x) \in \mathbb{P}_3 ; p(0) = (p(1))^2 \}$, $V = \mathbb{P}_3$

U n'est pas un sous-espace vectoriel de V comme il n'est pas fermé sous la multiplication par un scalaire :

$p(x) = 1 - x + x^2 \in U$ car $p(0) = (p(1))^2 = 1$. Mais

$q(x) = 2p(x) = 2 - 2x + 2x^2 \notin U$ car $q(0) = 2$, $q(1) = 2 \Rightarrow$

$q(0) \neq (q(1))^2$.

(j) $U = \{ p(x) \in \mathbb{P}_4 ; p(0) = p(1) \}$, $V = \mathbb{P}_4$.

U est un sous-espace de $\mathbb{P}_4$. Pour montrer ceci, utilisons le test du sous-espace :

① Le polynôme nul 0 de $\mathbb{P}_4 \in U$: $0(0) = 0(1) = 0$

② Si $p(x), q(x) \in U$, alors $p(0) = p(1)$ et $q(0) = q(1)$. D'où

$(p+q)(0) = p(0) + q(0) = p(1) + q(1) = (p+q)(1) \Rightarrow p+q \in U$.

③ Si $p(x) \in U$, $\alpha \in \mathbb{R}$, alors $p(0) = p(1)$ et on a

$(\alpha p)(0) = \alpha . p(0) = \alpha p(1) = (\alpha p)(1) \Rightarrow \alpha p(x) \in U$

(k) $U = \{ p(x) \in \mathbb{P}_3 ; \deg p(x) = 3 \}$, $V = \mathbb{P}_3$

U n'est pas un sous-espace de $\mathbb{P}_3$ car il n'est pas fermé sous l'addition : $p(x) = 1 + x^3 \in U$, $q(x) = 1 - x^3 \in U$, mais $p(x) + q(x) = 2 \notin U$ comme $\deg(p(x) + q(x)) \neq 3$.

(l) $U = \{ f \in \mathbb{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) ; f'' - 2f' + f = 0 \}$, $V = \mathbb{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

On montre que U est un sous-espace de V en utilisant le test de sous-espace :

① La fonction nulle 0 satisfait $0'' - 2 0' + 0 = 0$. Donc $0 \in U$

② Soit $f, g \in U$, alors $f'' - 2f' + f = 0$ et $g'' - 2g' + g = 0 \Rightarrow$

$$(f+g)'' - 2(f+g)' + (f+g) = f'' + g'' - 2(f' + g') + (f+g) =$$

$$\underbrace{(f'' - 2f' + f)}_{0} + \underbrace{(g'' - 2g' + g)}_{0} = 0 \Rightarrow f + g \in U$$

③ Soit $f \in U$, $\alpha \in \mathbb{R}$, alors $f'' - 2f' + f = 0$ et on a :

$$(\alpha f)'' - 2(\alpha f)' + \alpha f = \alpha . f'' - 2\alpha f' + \alpha f = \alpha \underbrace{(f'' - 2f' + f)}_{0} = \alpha . 0 = 0$$

$\Rightarrow \alpha f \in U$.

(m) $U = \{ f \in \mathbb{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) ; 2f(0) = -f(-1) \}$, $V = \mathbb{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

U est un sous-espace de V :

① La fonction nulle satisfait $2\, 0(0) = -0(-1) = 0 \Rightarrow 0 \in U$

② $f, g \in U$, alors $2f(0) = -f(-1)$ et $2g(0) = -g(-1)$. D'où

$$2(f+g)(0) = 2(f(0) + g(0)) = 2f(0) + 2g(0) = -f(-1) - g(-1) =$$

$$-[f(-1) + g(-1)] = -(f+g)(-1)$$. Donc $f + g \in U$.

③ Soit $f \in U$, $\alpha \in \mathbb{R}$, alors $2f(0) = -f(-1)$ et on a :

$$2(\alpha f)(0) = \alpha(2f(0)) = \alpha(-f(-1)) = -\alpha f(-1) = -(\alpha f)(-1).$$

Alors $\alpha f \in U$

(m) $U = \{ f \in \mathbb{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \,;\, f(0) + f(-1) = 2 \}$, $V = \mathbb{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$

U n'est pas un sous-espace de V car la fonction nulle 0 ne satisfait pas $0(0) + 0(-1) = 2$. Donc $0 \notin U$.

$\boxed{2}$ (1) (a) $1 - 3x + 2x^2 = \alpha(1+x) + \beta(1+x^2) + \gamma(x+x^2) \iff \begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ \alpha + \gamma = -3 \\ \beta + \gamma = 2 \end{cases}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \Rightarrow \alpha = -2,\ \beta = 3,\ \gamma = -1$$

Alors $\alpha = -2$, $\beta = 3$, $\gamma = -1$. D'où $1 - 3x + 2x^2 \in \text{Span}\{1+x, 1+x^2, x+x^2\}$

et $1 - 3x + 2x^2 = -2(1+x) + 3(1+x^2) - (x+x^2)$

(b) $x = \alpha(1+x) + \beta(1+x^2) + \gamma(x+x^2) \iff \begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha + \gamma = 1 \\ \beta + \gamma = 0 \end{cases}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \end{array}\right] \Rightarrow \alpha = \tfrac{1}{2},\ \beta = -\tfrac{1}{2},\ \gamma = 1/2$$

Alors $x \in \text{Span}\{1+x, 1+x^2, x+x^2\}$ et on a :

$x = \frac{1}{2}(1+x) - \frac{1}{2}(1+x^2) + \frac{1}{2}(x+x^2)$

(c) $x^2 = \alpha(1+x) + \beta(1+x^2) + \gamma(x+x^2) \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha + \gamma = 0 \\ \beta + \gamma = 1 \end{cases}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \end{array}\right] \Rightarrow \alpha = -\frac{1}{2},\ \beta = \frac{1}{2},\ \gamma = 1/2$$

Alors $x^2 \in \text{Span}\{1+x,\ 1+x^2,\ x+x^2\}$ et on a :

$$x^2 = -\frac{1}{2}(1+x) + \frac{1}{2}(1+x^2) + \frac{1}{2}(x+x^2)$$

(2) (a) $1-3x+2x^2 = \alpha(1+x) + \beta(1+x^2) + \gamma(x-x^2) \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ \alpha + \gamma = -3 \\ \beta - \gamma = 2 \end{cases} \Rightarrow$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right].$$

Le système est incompatible. Alors

$$1-3x+2x^2 \notin \text{Span}\{1+x,\ 1+x^2,\ x-x^2\}$$

(b) $1-3x+4x^2 = \alpha(1+x) + \beta(1+x^2) + \gamma(x-x^2) \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ \alpha + \gamma = -3 \\ \beta - \gamma = 4 \end{cases}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Le système est compatible avec une infinité de solutions. Donc $1-3x+4x^2 \in \text{Span}\{1+x,\ 1+x,\ x-x^2\}$ et il y a une infinité de façons d'écrire $1-3x+4x^2$ comme une combinaison linéaire de $1+x$, $1+x^2$ et $x-x^2$:

$\gamma = t \Rightarrow \alpha = -t-3$, $\beta = t+4$. Posons $t=0$, alors $\alpha = -3$, $\beta = 4$

et $1-3x+4x^2 = -3(1+x) + 4(1+x^2)$

(3) On cherche des scalaires α, β, γ tels que

$$1-x+tx^2 = \alpha(1+x) + \beta(1+x^2) + \gamma(2+2x^2) \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + 2\gamma = 1 \\ \alpha = -1 \\ \beta + 2\gamma = t \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & t \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & t \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & t-2 \end{array}\right]$$

$1-x+tx^2 \in \text{Span}\{1+x, 1+x^2, 2+2x^2\} \Leftrightarrow$ le système est compatible $\Leftrightarrow$ $t-2=0 \Leftrightarrow t=2.$

$\boxed{3}$ $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, $U = \{X \in M_{22}(\mathbb{R});\ AX = XA\}$

$$X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in U \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ -a+2c & -b+2d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-b & 2b \\ c-d & 2d \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a = a-b & (1) \\ b = 2b & (2) \\ -a+2c = c-d & (3) \\ -b+2d = 2d & (4) \end{cases}$$

$(1) \Rightarrow b=0$, $(2) \Rightarrow b=0$, $(4) \Rightarrow b=0$

$(3) \Rightarrow a-c-d=0$ ou bien $d = a-c$

Alors $X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ c & a-c \end{bmatrix}$; $a, c \in \mathbb{R}$

$$U = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ c & a-c \end{bmatrix};\ a, c \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix};\ a, c \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \text{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Alors U est un sous-espace de M_{22} et $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \right\}$ est un système générateur de U.

$\boxed{4}$ (a) $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 1.\cos^2 x + (-1)\sin^2 x \in \text{span}\{\cos^2 x, \sin^2 x\}$ 7

(b) Supposons que $x^2 \in \text{span}\{\cos^2 x, \sin^2 x\}$, alors on peut trouver deux réels a et b tels que $x^2 = a\cos^2 x + b\sin^2 x \quad \forall x \in [0, \pi]$.

$\underline{x=0}$: $0^2 = a(1)^2 + b(0)^2 \Rightarrow a = 0$ ①

$\underline{x=\pi/2}$ $(\pi/2)^2 = a(0) + b(1)^2 \Rightarrow b = \frac{\pi^2}{4}$

$\underline{x=\pi}$ $\pi^2 = a(-1)^2 + b(0)^2 \Rightarrow a = \pi^2$ Contradiction à ①

Alors $x^2 \notin \text{span}\{\cos^2 x, \sin^2 x\}$

(c) $\forall x \in [0, \pi]$, on sait que $\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \Rightarrow$

$1 \in \text{span}\{\cos^2 x, \sin^2 x\}$

(d) Supposons que $\sin(2x) \in \text{span}\{\cos^2 x, \sin^2 x\}$, alors il existe deux réels a, b tels que : $\sin(2x) = a\cos^2 x + b\sin^2 x \quad \forall x \in [0, \pi]$:

$\underline{x=0}$ $0 = a(1)^2 + b(0^2) \Rightarrow a = 0$ ①

$\underline{x=\pi/4}$ $1 = a\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + b\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \Rightarrow a + b = 2$ ②

$\underline{x=\pi/2}$ $0 = a(0)^2 + b(1)^2 \Rightarrow b = 0$ ③

① et ③ $\Rightarrow a + b = 0$: Contradiction à ②.

Alors $\sin(2x) \notin \text{span}\{\cos^2 x, \sin^2 x\}$.

$\boxed{5}$ Soit $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \in U$. Alors $A = 2A^T \Rightarrow$

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a = a \\ b = d \\ c = g \\ d = b \\ e = e \\ f = h \end{cases} \qquad \begin{matrix} g = c \\ h = f \\ i = i \end{matrix}$$

Alors $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & e & f \\ c & f & i \end{bmatrix}$ et

$$U = \left\{ \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & e & f \\ c & f & i \end{bmatrix} ; \ a,b,c,e,f,i \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ a\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + e\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + f\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + i\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ; \ a,b,c,e,f,i \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \operatorname{Span}\left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{A_1}, \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{A_2}, \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{A_3}, \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{A_4}, \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{A_5}, \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{A_6} \right\}$$

Alors U est un sous-espace de $M_{33}(\mathbb{R})$ et $\{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6\}$ est un système générateur de U.

$\boxed{6}$ (a)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -4 & 0 \\ -3 & 2 & -3 & -5 \\ 1 & 1 & 2 & 6 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -5 \\ 0 & 2 & 2 & 6 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Le système est compatible avec la solution unique $x_1 = 2$, $x_2 = 2$, $x_3 = 1$.

Alors $(0,0,-5,6) \in \operatorname{Span}\{(-1,2,-3,1), (1,0,2,1), (0,-4,-3,2)\}$ et on a:

$$(0,0,-5,6) = 2(-1,2,-3,1) + 2(1,0,2,1) + 1.(0,-4,-3,2)$$

(b)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -4 & -2 \\ -3 & 2 & -3 & -4 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & -2 \\ 0 & -1 & -3 & -4 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right]$$

Le système est incompatible

D'où $(0,-2,-4,0) \notin \text{span}\{v_1, v_2, v_3\}$

(C) $$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -4 & -8 \\ -3 & 2 & -3 & -6 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & -8 \\ 0 & -1 & -3 & -6 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & -1 & -3 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -5 & -10 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

système compatible avec la solution unique $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ et $x_3 = 2$.

D'où $(0,-8,-6,4) \in \text{span}\{v_1, v_2, v_3\}$ et $(0,-8,-6,4) = 2(0,-4,-3,2)$

(2) $$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -4 & 2 \\ -3 & 2 & -3 & -8 \\ 1 & 1 & 2 & t \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -5 \\ 0 & 2 & 2 & t-1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -5 \\ 0 & 2 & 2 & t-1 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 6 & t-1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & t-1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & t-7 \end{array}\right]$$

$(-1,2,-8,t) \in \text{span}\{v_1, v_2, v_3\} \Leftrightarrow$ le système est compatible $\Leftrightarrow$

$t-7=0 \Leftrightarrow t=7$.

7 (a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$

$$\begin{cases} a+b=1 & (1) \\ a+c=2 & (2) \\ a-c=3 & (3) \\ a+b=4 & (4) \end{cases}$$

Remarquer que (1) et (4) donnent une contradiction. Alors a, b, c n'existent pas et $A \notin \text{span}\{A_1, A_2, A_3\}$

(b) $A = aA_1 + bA_2 + cA_3 \Longleftrightarrow$

$$\begin{cases} a+b=1 \\ a+c=4 \\ a-c=2 \\ a+b=1 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Le système est compatible avec la solution unique $x_1 = 3$, $x_2 = -2$, $x_3 = 1$

Alors $A \in \text{span}\{A_1, A_2, A_3\}$ et on a:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

(c) $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = aA_1 + bA_2 + cA_3 \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -3/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -3/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Le système est compatible avec la solution unique $x_1 = 1/2$, $x_2 = -3/2$, $x_3 = 1/2$

Alors $A \in \text{span}\{A_1, A_2, A_3\}$ et on a: $A = \frac{1}{2}A_1 - \frac{3}{2}A_2 + \frac{1}{2}A_3$

$\boxed{8}$ (1) Par le test de sous-espace:

(i) $0 \in U$ et $0 \in W$ (car U, W sont des sous-espaces de V) $\Rightarrow$

$0 \in U \cap W$

(ii) Soit $u, v \in U \cap W$, alors $u, v \in U$ et $u, v \in W \Rightarrow u+v \in U$ (car U est fermé sous l'addition) et $u+v \in W$ (car W est fermé sous l'addition) $\Rightarrow u+v \in U \cap W$

(iii) Soit $u \in U \cap W$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, alors $u \in U$ et $u \in W \Rightarrow$ $\alpha u \in U$ et $\alpha u \in W$ (car U, W sont fermés sous la multiplication par un scalaire) $\Rightarrow \alpha u \in U \cap W$

Alors $U \cap W$ est un sous-espace.

(2) Dans $V = \mathbb{R}^2$, considérer les deux sous-espaces:

$U = \{(x,0);\ x \in \mathbb{R}\}$ (l'axe des x) et $W = \{(0,y);\ y \in \mathbb{R}\}$ (l'axe des y). Noter que

$U = \{x(1,0);\ x \in \mathbb{R}\} = \operatorname{span}\{(1,0)\}$ et $W = \operatorname{Span}\{(0,1)\}$. Donc U et W sont clairement des sous-espaces de V.

$(1,0) \in U \Rightarrow (1,0) \in U \cup W$

$(0,1) \in W \Rightarrow (0,1) \in U \cup W$

Mais $(1,0) + (0,1) = (1,1) \notin U \cup W$ car $(1,1) \notin U$ et $(1,1) \notin W$.

Donc $U \cup W$ n'est pas un sous-espace.

(3) $U + W = \{u + w;\ u \in U \text{ et } w \in W\}$.

Montrons que $U + W$ est un sous-espace de V:

(i) $0 = 0 + 0 \Rightarrow 0 \in U + W$

(ii) Soit $x, x' \in U + W$, alors il existe $u, u' \in U$ et $w, w' \in W$ tels que $x = u + w$ et $x' = u' + w'$. Alors $x + x' = \underbrace{(u+u')}_{\in U} + \underbrace{(w+w')}_{\in W} \in U + W$.

(iii) Soit $x \in U + W$ et α un scalaire.

Alors $x = u + w$ où $u \in U$ et $w \in W$. D'où $\alpha x = \alpha(u+w) = \underbrace{\alpha u}_{\in U} + \underbrace{\alpha w}_{\in W} \in U + W$.

Alors $U + W$ est un sous-espace de V.

$\boxed{9}$ (1) Clairement $\{0\}$ est un sous-espace de $\text{span}\{v\}$

Si U est un sous-espace <u>non nul</u> de $\text{span}\{v\}$, alors U contient un vecteur non nul u. Comme $u \in \text{span}\{v\}$, alors $u = \alpha v$ pour un certain scalaire non nul α.

$\alpha v \in U \Rightarrow \frac{1}{\alpha}(\alpha v) \in U$ (car U est un sous-espace) $\Rightarrow v \in U$

$\Rightarrow \text{span}\{v\} \subseteq U$. Mais $U \subseteq \text{span}\{v\}$. D'où $U = \text{span}\{v\}$

Donc les seuls sous-espaces de $\text{span}\{v\}$ sont $\{0\}$ et $\text{span}\{v\}$.

(2) Pour montrer que $\text{span}\{v\} = \text{span}\{av\}$ on doit montrer une double inclusion: $\text{span}\{v\} \subseteq \text{span}\{av\}$ et $\text{span}\{av\} \subseteq \text{span}\{v\}$.

Soit $u \in \text{span}\{v\}$, alors $u = \alpha v$ où $\alpha \in \mathbb{R}$. D'où

$u = \alpha v = \frac{\alpha}{a}(av) \in \text{span}\{av\} \Rightarrow \text{span}\{v\} \subseteq \text{span}\{av\}$.

Réciproquement, si $u \in \text{span}\{av\}$, alors $u = \alpha(av)$ où α est un scalaire $\Rightarrow u = (\alpha a)v \in \text{span}\{v\}$. Donc $\text{span}\{av\} \subseteq \text{span}\{v\}$.

(3) Écrivons $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$ où α_i est un scalaire (on peut faire ceci car $v \in \text{span}\{v_1, \dots, v_n\}$).

Si $x \in \text{span}\{v, v_1, \dots, v_n\}$, alors $x = bv + b_1 v_1 + \dots + b_n v_n$ où $b, b_1, \dots, b_n$ sont des scalaires. D'où

$x = b(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n) + b_1 v_1 + \dots + b_n v_n =$

$(\alpha_1 b + b_1) v_1 + \cdots + (\alpha_n b + b_n) v_n \in \text{Span}\{v_1, \ldots, v_n\}$.

D'où $\text{Span}\{v, v_1, \ldots, v_n\} \subseteq \text{span}\{v_1, \ldots, v_n\}$.

Réciproquement : $v_1, \ldots, v_n \in \text{Span}\{v, v_1, \ldots, v_n\} \Rightarrow$

$\text{Span}\{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq \text{Span}\{v, v_1, \ldots, v_n\}$.

Alors $\text{Span}\{v, v_1, \ldots, v_n\} = \text{Span}\{v_1, \ldots, v_n\}$.

$(-1, -1, -3, 6) = 1.(-1, 0, 1, 2) + 1.(1, -1, -4, 2) + 1.(-1, 0, 0, 2)$

$\Rightarrow (-1, -1, -3, 6) \in \text{Span}\{(-1, 0, 1, 2), (1, -1, -4, 2), (-1, 0, 0, 2)\}$

De même

$(-2, 1, 5, 0) = 1.(-1, 0, 1, 2) + (-1)(1, -1, -4, 2) + 0(-1, 0, 0, 2)$

$\Rightarrow (-2, 1, 5, 0) \in \text{span}\{(-1, 0, 1, 2), (1, -1, -4, 2), (-1, 0, 0, 2)\}$.

On conclut alors que

$\text{Span}\{(-1, 0, 1, 2), (1, -1, -4, 2), (-1, 0, 0, 2), (-1, -1, -3, 6), (-2, 1, 5, 0)\} =$

$\text{Span}\{(-1, 0, 1, 2), (1, -1, -4, 2), (-1, 0, 0, 2)\}$ par la partie (3).