Orthogonalité

MAT1741 A Automne 2012

Joseph Khoury
Département des Mathématiques
Université d'Ottawa

Produit scalaire

$$\left.\begin{array}{rcl} u & = & (x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ v & = & (y_1, y_2, \ldots, y_n) \end{array}\right\} u \cdot v = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n$$

$$||u|| = \sqrt{u \cdot u} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$$

Définition

Soit $\{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$ un ensemble de vecteurs de $\mathbb{R}^n$. On dit que cet ensemble est orthogonal si

$$u_i \cdot u_j = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ \neq 0 & \text{si } i = j \end{cases}$$

Si en plus, on a $||u_i|| = 1, \forall\ i = 1, 2, \ldots, k$, on dit que l'ensemble $\{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$ est orthonormé.

Produit scalaire (suite)

Exemples

1. $\{(1,0),(0,1)\}$ dans $\mathbb{R}^2$ est orthonormé.
2. $\{(1,1),(1,-1)\}$ dans $\mathbb{R}^2$ est orthogonal.
3. La base canonique $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ dans $\mathbb{R}^n$ est orthonormé.
4. $\{(1,0,1),(0,1,0)\}$ est orthogonal, mais poas une base de $\mathbb{R}^3$. par contre, c'est une base de $W = \mathcal{L}\{(1,0,1),(0,1,0)\} = \{(x,y,z) \mid -x+z=0\}$.

Produit scalaire (suite)

Théorème

Si $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\} \subset \mathbb{R}^n$ *est orthogonal, alors il en suit que* $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ *est une base de* $\mathbb{R}^n$*, et pour tout* $v \in \mathbb{R}^n$

$$v = \left(\frac{v \cdot u_1}{u_1 \cdot u_1}\right) u_1 + \left(\frac{v \cdot u_2}{u_2 \cdot u_2}\right) u_2 + \ldots + \left(\frac{v \cdot u_n}{u_n \cdot u_n}\right) u_n$$

où $\left(\frac{v \cdot u_i}{u_i \cdot u_i}\right)$ *sont les coefficients de Fourier par rapport à la base orthogonale* $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$.

Produit scalaire (suite)

Théorème

Si $S = \{u_1, u_2, \ldots, u_k\} \subset \mathbb{R}^n$ *est orthogonal, alors*

1. S *est lin. ind. (pas une base à moins que* $k = n$*).*
2. $||u_1 + u_2 + \ldots + u_k||^2 = ||u_1||^2 + ||u_2||^2 + \ldots + ||u_k||^2$

Projections orthogonals

Idée générale :

$proj_W v$: projection orthogonale de $v \in \mathbb{R}^n$ sur W (c'est un vecteur appartenant à W). C'est le vecteur dans W qui est le "plus approché" de v (meilleur approximation de v par un élément de W).

Projections orthogonals (suite)

Exemple

$W = \mathcal{L}\{u\}$, $(u \neq 0)$ est la droite passant par l'origine et dirigé selon u dans $\mathbb{R}^n$.

$$proj_W v = proj_u v = \left(\frac{v \cdot u}{u \cdot u}\right) u$$

On veut étendre cette notion à des espace W quelconques.

Projections orthogonals (suite)

Définition

Soit $\{w_1, w_2, \ldots, w_k\} \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble orthogonal et soit $W = \mathcal{L}\{w_1, w_2, \ldots, w_k\}$ (un s.e.v. de $\mathbb{R}^n$). Pour $v \in \mathbb{R}^n$ (v n'est pas nécessairement dans W), la projection orthogonale de v sur W est le vecteur

$$proj_W v = \left(\frac{v \cdot w_1}{w_1 \cdot w_1}\right) w_1 + \left(\frac{v \cdot w_2}{w_2 \cdot w_2}\right) w_2 + \ldots + \left(\frac{v \cdot w_k}{w_k \cdot w_k}\right) w_k$$

Projections orthogonals (suite)

Théorème

Soit $\{w_1, w_2, \ldots, w_k\} \subset \mathbb{R}^n$ *un ensemble orthogonal et soit* $W = \mathcal{L}\{w_1, w_2, \ldots, w_k\}$. *Pour* $v \in \mathbb{R}^n$,

1. $proj_W v \in W$
2. $v - ptoj_W v$ *est orthogonal à chaque vecteur de* W.
3. $\forall\ w \in W$, *on a* $||v - w|| \geq ||v - proj_W v||$

$\Rightarrow$ $proj_W v$ *est la meilleure approximation de* v *par des vecteurs de* W.

Projections orthogonals (suite)

Exemple

Soit $W = \{(x, y, z) \mid -x + z = 0\}$ et $v = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ un vecteur quelconque, calculez $proj_W v$.

Algorithme de Gram-Schmidt

<u>Idée</u> : Convertir n'importe laquelle base de W à une base orthogonale de W.

Soit W un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, et soit $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ une base de W. On construit une base orthogonale $\{w_1, w_2, \ldots, w_k\}$ de W comme suit :

Algorithme de Gram-Schmidt

Procédure (Algorithme de Gram-Schmidt) :

1. Posez $w_1 = v_1$.
2. Posez $w_2 = v_2 - proj_{w_1} v_2$.
   Note :
   a) $\{w_1, w_2\}$ orthogonal
   $$\begin{aligned} w_1 \cdot w_2 &= w_1 \cdot (v_2 - proj_{w_1} v_2) \\ &= w_1 \cdot \left(v_2 - \frac{(v_2 \cdot w_1)}{(w_1 \cdot w_1)} w_1 \right) \\ &= w_1 \cdot v_2 - \frac{(v_2 \cdot w_1)}{(w_1 \cdot w_1)} (w_1 \cdot w_1) \\ &= 0 \end{aligned}$$
   b) Exercice : $\mathcal{L}\{w_1, w_2\} = \mathcal{L}\{v_1, v_2\}$

Algorithme de Gram-Schmidt (suite)

3. Posez

$$\begin{aligned} w_3 &= v_3 - proj_{\mathcal{L}\{w_1,w_2\}} v_3 \\ &= v_3 - \left(\frac{(v_3 \cdot w_1)}{(w_1 \cdot w_1)}\right) w_1 - \left(\frac{(v_3 \cdot w_2)}{(w_2 \cdot w_2)}\right) w_2 \end{aligned}$$

   Il en suit que $\{w_1, w_2, w_3\}$ est orthgonal, et $\mathcal{L}\{w_1, w_2, w_3\} = \mathcal{L}\{v_1, v_2, v_3\}$.

4. Ainsi de suite ...
5. $w_j = v_j - proj_{\mathcal{L}\{w_1,w_2,\ldots,w_{j-1}\}} v_j, \quad j = 2, 3, \ldots, k.$

Algorithme de Gram-Schmidt (suite)

Exemples

1. Soit $W = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + w = 0\}$. Trouvez une base orthogonale de W.
2. Pour W comme ci-haut, trouvez la meilleur approximation de $v = (1, 0, 0, 0)$ parmi tous les vecteurs de W.

Algorithme de Gram-Schmidt (suite)

Définition

Soit $W \subset \mathbb{R}^n$. On définit le complément orthogonal de W par

$$W^{\perp} = \{v \in \mathbb{R}^n \mid v \cdot w = 0 \forall\ w \in W\}$$

Notez que $W^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.