Base et Dimension

MAT1741 A Automne 2012

Joseph Khoury
Deṕartement des Mathḿatiques
Université d'Ottawa

Base

Définition

Soit V un espace vectoriel et $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset V$. On dit que $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ est une base de V si

1. $V = \mathcal{L}\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$,
2. $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ est linéairement indépendant.

Base (suite)

Exemples

Démontrez que les ensembles suivants sont une base pour leurs espaces vectoriels respectifs.

- $\{(1,0),(0,1)\}$, $\mathbb{R}^2$;
- $\{(1,-1),(1,1)\}$, $\mathbb{R}^2$;
- $\{(2,1,0),(-1,0,1)\}$, $S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x-2y+z=0\}$;
- $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$, $W=\{A\in M_{2,2} \mid A=A^t\}$;
- $\{1,\cos x,\sin x\}$, $Q=\mathcal{L}\{1,\cos x,\sin x\}$;

base (suite)

Exemples (suite)

- Soit $V = \mathbb{R}^n$. Pour un entier $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ on définit

$$e_j = (0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{j^e \text{ coordonnée}}, 0, \ldots, 0)$$

$\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, $\mathbb{R}^n$.

<u>Question</u> : Est-ce que chaque base de V contient le même nombre d'éléments ?

e.g. $\{(1,0),(0,1)\}$ et $\{(1,-1),(1,1)\}$ sont des bases paur $\mathbb{R}^2$.

Base (suite)

Théorème

Soit V un espace vectoriel et supposons que $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ et $\{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$ sont des bases de V. Alors, $n = m$.

Démonstration : Rappel

taille de tout ensemble de générateur de V

$$\geq$$

taille de tout ensemble linéairement indépendant de V

Puisque $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ engendre V et que $\{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$ est linéairement indépendant

$$n \geq m$$

Puisque $\{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$ engendre V et $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ est linéairement indépendant

$$m \geq n$$

$$\Rightarrow n = m.$$

Base (suite)

Définition

Soit V un espace vectoriel. S'il existe une base $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ (c.à.d. il y a un nombre fini d'éléments), on dit que la dimension de V est n, et on écrit $\dim V = n$.

Autrement (c.à.d. si V n'a pas de base fini), on dit que V est de dimension infinie, et on écrit $\dim V = \infty$.

Par convention, $\dim \{0\} = 0$.

Base (suite)

Exemples

- $\dim \mathbb{R}^2 = 2$,
- $\dim \mathbb{R}^n = n$, puisque $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ est une base de $\mathbb{R}^n$.
- Soit $W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \mid a, b, d \in \mathbb{R} \right\}$, alors $\dim W = 3$ puisque on a vu que
$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$
est une base pour W.
- $\dim M_{2,2} = 4$ puisque
$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$
est une base pour $M_{2,2}$.

Base (suite)

Exemples

- $$M_{p,q} = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1q} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2q} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pq} \end{pmatrix} \,\middle|\, a_{ij} \in \mathbb{R} \right\}$$
  est un espace vectoriel. $\dim M_{p,q} = pq$.
- $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x - 2y + z = 0\}$, $\dim S = 2$ puisque $\{(2, 1, 0), (-1, 0, 1)\}$ est une base de S.
- $\dim \mathbb{P}_2 = 3$, puisque $\{1, t, t^2\}$ est une base de $\mathbb{P}_2$.
- $\mathbb{P}_m = \{$ polynôme de degré $\leq m\}$ est un espace vectoriel. $\dim \mathbb{P}_m = m + 1$.

Base (suite)

Exemples

- $V = F(\mathbb{R})$ (ou $V = F([a,b])$), $\dim V = \infty$.

  Démonstration : Supposons que $F(\mathbb{R})$ est de dimension $n < \infty$. Alors tout ensemble linéairement indépendant d'él'ements de V contient au plus n éléments. Par contre, voici un ensemble linéairement indépendant d'éléments de V qui contient $n+1$ éléments :

  $$\underbrace{\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}}_{n+1 \text{ éléments}} \subset F(\mathbb{R})$$

  Ceci contredit le fait que $\dim V = n$.

  $$\Rightarrow \dim F(\mathbb{R}) = \infty$$

Base (suite)

Remarque

taille de tout ensemble linéairement indépendant

$\leq \dim V \leq$

taille de tout ensemble générateur de V

Théorème

Soit V un espace vectoriel de dimension finie, $\dim V = n < \infty$

1. *Si $\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ $(m < n)$ est linéairement indépendant, il existe $v_{m+1}, v_{m+2}, \ldots, v_n$ tel que $\{v_1, v_2, \ldots, v_m, v_{m+1}, v_{m+2}, \ldots, v_n\}$ est une base de V.*
2. *Si $\{w_1, w_2, \ldots, w_l\}$ $(l > n)$ engendre V, il existe des indices $i_1, i_2, \ldots, i_n$ tel que $\{w_{i_1}, w_{i_2}, \ldots, w_{i_n}\}$ est une base de V.*

Base (suite)

Exemples

- $V = \mathbb{R}^3$, $\dim V = 3$. L'ensemble $\{(1,0,1),(0,1,0)\}$ est linéairement indépendant mais ce n'est pas une base de $\mathbb{R}^3$.
- $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$ engendre $D = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$, mais ce n'est pas une base de D.

Base (suite)

Résumé : Soit V un espace vectoriel avec $\dim V = n < \infty$. Alors,

1. Tout ensemble linéairement indépendant $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ est une base de V (c.à.d. engendre V aussi).
2. Tout ensemble générateur $\{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ est une base de V (c.à.d. linéairement indépendant aussi).

Dimensions de sous-espaces vectoriels

Théorème

Soit V un espace vectoriel de dimesion $\dim V = n < \infty$. *Soit U un sous-espace vectoriel de V. Alors,*

$$\dim U \leq \dim V,$$

et

$$\dim U = \dim V \Leftrightarrow U = V.$$

Propriété à propos des bases

Soit l'espace vectoriel V de dim $V = n < \infty$ et $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ une base de V. pour tout $v \in V$, il existe des scalaires <u>uniques</u> $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tel que

$$v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_n v_n$$

<u>Démonstration</u> : Supposons que $v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_n v_n$ et $v = b_1 v_1 + b_2 v_2 + \ldots + b_n v_n$,

$$v - v = 0 = (a_1 - b_1)v_1 + (a_2 - b_2)v_2 + \ldots + (a_n - b_n)v_n$$

$$\Rightarrow \quad \left.\begin{array}{r} a_1 - b_1 = 0 \\ a_2 - b_2 = 0 \\ \vdots \\ a_n - b_n = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \begin{array}{c} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \\ \vdots \\ a_n = b_n \end{array}$$

Donc, les scalaires $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont déterminées de manière unique. On les appelles les coordonnée de v par rapport à la base $\mathcal{B}$.