MAT 1741-Automne 2012-Devoir #3
A remettre le Vendredi 30 Novembre au plus tard à 17h00 au département des mathématiques et statistiques

Nom ____

Prénom ____

Numéro d'étudiant ____

- **Veuillez imprimer le devoir et écrire vos solutions dans l'espace donné**.
- Vous pouvez utiliser le verso des pages ou les pages supplémentaires si nécessaire mais assurez-vous de l'indiquer clairement.
- Il y a 6 questions dans ce devoir plus une question bonis (pas obligatoire).
- Vous devez répondre à toutes les questions 1-5. La question bonis est optionnelle.
- Veuillez rédiger vos réponses de manière lisible et logique.
- Vous pouvez soumettre ce devoir **au plus tard à 17h00** dans le casier "MAT1741A" au rez-de-chaussée du département des mathématiques (KED).

Question 1. [8 points] Considérer les 5 vecteurs suivants de $\mathbb{R}^4$:

$$v_1 = (1, 0, -1, 0),\ v_2 = (0, 0, 1, 0),\ v_3 = (1, 0, 0, 1),\ v_4 = (2, 0, -1, 0),\ v_5 = (-2, 0, 0, 1)$$

et posons $U = \operatorname{span}\{v_1,\, v_2,\, v_3,\, v_4,\, v_5\}$.

1. Donner une base de U formée par un sous-ensemble de l'ensemble $\{v_1,\, v_2,\, v_3,\, v_4,\, v_5\}$.

2. Utiliser le procédé de **Gram-Schmidt** pour trouver une base orthogonale de U.

3. Soit $v = (1,\, -1,\, 0,\, -1) \in \mathbb{R}^4$. Donner la meilleur approximation de v par un élément de U.

4. Donner une base **orthogonale** de $\mathbb{R}^4$ qui contient la base trouvée à la partie (2).

page supplémentaire

Question 2. [8 points] Considérer la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 4 & -16 \\ 2 & 5 & -8 \\ 2 & 2 & -5 \end{bmatrix}.$$

1. Donner le polynôme caractéristique de A et en déduire les valeurs propres de cette matrice.
2. Pour chacune des valeures propres trouvées à la partie précédente, donner une base de l'espace propre associé.
3. Déterminer si la matrice A est diagonalisable. Si vous dites qu'elle l'est, trouver une matrice inversible P et une matrice diagonale D telle que $A = PDP^{-1}$.
4. trouver une matrice inversible Q différente de la matrice P (trouvée à la partie précédente) et une matrice diagonale S différente de la matrice D (trouvée à la partie précédente) telle que $A = QSQ^{-1}$
5. Calculer A^3 en utilisant les résultats de la partie 2 ou la partie 3 de cette question.

page supplémentaire

page supplémentaire

Question 3. [5 points] Montrer que la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 4 & -6 & 3 \\ 3 & -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

n'est pas diagonalisable.

page supplémentaire

Question 4. [5 points] On définit l'application $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{R}^2$ par

$$T\left(p(x)\right) = \left[\begin{array}{c} p(-1) \\ p(0) \end{array} \right].$$

1. Donner l'image du polynôme $p(x) = -2x^2 + 5x + 3$.

2. Montrer que T est une application linéaire.

3. Donner une base et la dimension du noyau de T.

Question 5. [6 points] On définit l'application $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ par

$$T\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + x_4 \\ -2x_1 - 5x_2 + 7x_3 + 3x_4 \\ 3x_1 + 7x_2 - 8x_3 + 6x_4 \end{bmatrix}.$$

1. Montrer que T est une application linéaire (*Indication.* Trouver une matrice A telle que $T(X) = AX$ pour tout $X \in \mathbb{R}^4$).

2. Donner une base et la dimension de l'image, $\mathrm{Im}T$, de T.

3. Donner une base et la dimension du noyau, $\ker T$, de T.

4. Vérifier que $\dim(\mathrm{Im}T) + \dim(\ker T)$=4.

page supplémentaire

Question 6. [4 points] Soit $T : \mathbb{M}_{22} \to \mathbb{P}_3$ une application linéaire qui satisfait:

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\right) = 1 - x^3, \quad T\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = 1 + x, \quad T\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\right) = 12x - 2x^2 + x^3.$$

Trouver

$$T\left(\begin{bmatrix} \frac{11}{12} & 0 \\ -\frac{2}{3} & 2 \end{bmatrix}\right).$$

Question Bonis [5 points] Soit W un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. On définit le complément orthogonal de W dans $\mathbb{R}^n$ comme étant l'ensemble $W^{\perp}$ de tous les vecteurs de $\mathbb{R}^n$ qui sont orthogonaux à W. Autrement dit:

$$W^{\perp} = \{v \in \mathbb{R}^n;\ \ v.u = 0 \quad \forall u \in W\}.$$

1. Montrer que $W^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ (*Indication.* Utiliser le test du sous-espace).

2. Y-a-t-il des éléments communs entre W et $W^{\perp}$? Si oui, peut-on les spécifier?

3. Dans $\mathbb{R}^3$, soit $W = \{(x, y, z);\ \ x - 2y + z = 0\}$. Donner une base et la dimension de $W^{\perp}$.