Introduction à l'Algèbre linéaire (MAT1741 A)

EXAMEN FINAL (Automne 2012)

Professeur: Joseph Khoury. **Durée: 3 heures**

Nom de famille: Solution

Prénom:

Numéro d'étudiant:

Aucune note n'est permise.

Les calculatrices ne sont pas permises.

Cet examen comporte 15 questions et 16 pages. Les questions à choix multiples (1 à 10) valent chacune 1 point sur les 40 points que compte l'examen. Inscrire à l'ENCRE dans les cases ci-dessous les LETTRES correspondant aux réponses à ces questions.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Les questions 11 à 15 sont à développement et requièrent une réponse détaillée. Prenez soin de bien rédiger votre solution. Vous pouvez utiliser le verso des pages si vous manquez d'espace au recto et les deux pages additionnelles à la fin.

1. Parmi les cinq sous-ensembles suivants de l'espace $\mathbb{P}_2$ des ploynômes de degré inférieur ou égal à 2, seulement deux sont des sous-espaces de $\mathbb{P}_2$. Lesquels?

$S = \{p(x) \in \mathbb{P}_2;\ p(0) \leq 2\}$ Non : $p(x) = x+1 \in S$, mais $3p(x) \notin S$

$T = \{p(x) \in \mathbb{P}_2;\ 2p(0) + 3p(1) = 0\}$ Oui

$U = \{p(x) \in \mathbb{P}_2;\ p(-x) - 2p(x) = -1\}$ Non $0 \notin U$

$V = \{p(x) \in \mathbb{P}_2;\ p(-1)f(2) = 0\}$ Non $x+1,\ x-2 \in V$, mais $x+1+x-2 \notin V$

$W = \{p(x) \in \mathbb{P}_2;\ (p(-1))^2 + (p(2))^2 = 0\}$ Oui

A. U et T **B.** T et W **C.** S et T
D. U et S **E.** V et W **F.** U et V

$T = \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2;\ 2a_0 + 3(a_0 + a_1 + a_2) = 0\} = \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2;\ a_0 = -\frac{3}{5}a_1 - \frac{3}{5}a_2\}$
$= \{a_1(x - 3/5) + a_2(x^2 - 3/5);\ a_1, a_2 \in \mathbb{R}\} = \mathrm{span}\{x - 3/5,\ x^2 - 3/5\}$ sous-espace.
$W = \{p(x) \in \mathbb{P}_2;\ p(-1) = p(2) = 0\} = \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2;\ a_0 - a_1 + a_2 = 0 \text{ et } a_0 + 2a_1 + 4a_2 = 0\}$
$= \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2;\ a_1 = -a_2 \text{ et } a_0 = -2a_2\} = \{a_0(-2 - x + x^2);\ a_0 \in \mathbb{R}\} = \mathrm{span}\{-2 - x + x^2\}$

2. Lesquels des énoncés suivants sont **vrais**?

(1) Si u, v, w sont trois vecteurs linéairement indépendants dans un espace vectoriel V, alors $u - v + w$, $u + v$ et w sont aussi linéairement indépendants.

(2) Si $\{u - v + w,\ u + v,\ w\}$ est un système générateur d'un espace vectoriel V, alors il en est de même pour l'ensemble $\{u,\ v,\ w\}$.

(3) Si $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -2$, alors $\begin{vmatrix} -3a & -3g & -3d \\ b - 2c & h - 2i & e - 2f \\ c & i & f \end{vmatrix} = 6$.

(4) Si A et B sont deux matrices carrées inversibles de même format, alors
Faux
$$(A^{-1}BA)^{-1} = AB^{-1}A^{-1}.$$
$(A^{-1}BA)^{-1} = A^{-1}B^{-1}(A^{-1})^{-1} = A^{-1}B^{-1}A$

(5) $\{1,\ 1 + x,\ 1 + x + x^2\}$ est une base de $\mathbb{P}_2$: Vrai car $\dim \mathbb{P}_2 = 3$ et les 3 polynômes sont l. in[d.]

A. (1) et (4) seulement **B.** (1), (3) et (4) seulement
C. (1), (2) et (5) seulement **D.** (3) et (4) seulement
E. (3) seulement **F.** (2), (4) et (5) seulement

Sol (1) Vrai $a(u - v + w) + b(u + v) + cw = 0 \Rightarrow (a+b)u + (-a+b)v + (a+c)w = 0 \Rightarrow$
$a + b = -a + b = a + c = 0$ (car u, v, w sont l. ind.) $\Rightarrow a = b = c = 0$
2) Vrai si $z \in V \Rightarrow z = a(u - v + w) + b(u + v) + cw = (a+b)u + (-a+b)v + (a+c)w \in \mathrm{span}\{u, v, w\}$
3) Faux $\begin{vmatrix} -3a & -3g & -3d \\ b - 2c & h - 2i & e - 2f \\ c & i & f \end{vmatrix} = -3\begin{vmatrix} a & g & d \\ b & h & e \\ c & i & f \end{vmatrix} = -3\begin{vmatrix} a & b & c \\ g & h & i \\ d & e & f \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 3(-2) = -6$

3. Soit $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{M}_{22}(\mathbb{R})$ une application linéaire qui satisfait:

$$T\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}-1 & 2\\ 1 & 0\end{bmatrix},\ T\left(\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}.$$

Trouver $T\left(\begin{bmatrix}-1\\4\end{bmatrix}\right)$.

A. $\begin{bmatrix}-2 & 5\\ 1 & 1\end{bmatrix}$ **B.** $\begin{bmatrix}-2 & -5\\ 1 & -1\end{bmatrix}$ **C.** $\begin{bmatrix}2 & 5\\ 1 & 1\end{bmatrix}$

D. $\begin{bmatrix}2 & -5\\ 1 & -1\end{bmatrix}$ **E.** $\begin{bmatrix}-2 & -5\\ -1 & 1\end{bmatrix}$ **F.** $\begin{bmatrix}2 & 5\\ -1 & -1\end{bmatrix}$

<u>Sol</u> $\begin{bmatrix}-1\\4\end{bmatrix} = a\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} + b\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix} \Rightarrow b = 1,\ a + 2b = 4 \Rightarrow a = 2$. D'où

$\begin{bmatrix}-1\\4\end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} + 1.\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix} \Rightarrow T\left(\begin{bmatrix}-1\\4\end{bmatrix}\right) = 2T\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right) + 1.T\left(\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}\right)$ (car T est linéaire)

$= 2\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 1 & 0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2 & 5\\ 1 & 1\end{bmatrix}$

4. Considérer le sous-ensemble

$$W = \{A \in \mathbb{M}_{33};\ A^T = -A\}$$

de $\mathbb{M}_{33}$. Parmi les énoncés suivants, un seul est vrai. Lequel?

A. W n'est pas un sous-espace de $\mathbb{M}_{33}$
B. W est un sous-espace de $\mathbb{M}_{33}$ de dimension 4
C. W est un sous-espace de $\mathbb{M}_{33}$ de dimension 3
D. W est un sous-espace de $\mathbb{M}_{33}$ de dimension 2
E. W est un sous-espace de $\mathbb{M}_{33}$ de dimension 1
F. W est un sous-espace de $\mathbb{M}_{33}$ de dimension 0

<u>Sol</u> $W = \left\{\begin{bmatrix}a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{bmatrix} \in M_{33};\ \begin{bmatrix}a & d & g\\ b & e & h\\ c & f & i\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-a & -b & -c\\ -d & -e & -f\\ -g & -h & -i\end{bmatrix}\right\}$

$= \left\{\begin{bmatrix}a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{bmatrix} \in M_{33};\ a = 0,\ d = -b,\ g = -c,\ e = 0,\ h = -f,\ i = 0\right\} =$

$\left\{\begin{bmatrix}0 & b & c\\ -b & 0 & f\\ -c & -f & 0\end{bmatrix};\ b, c, f \in \mathbb{R}\right\} = \left\{b\underbrace{\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}}_{M_1} + c\underbrace{\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{bmatrix}}_{M_2} + f\underbrace{\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\end{bmatrix}}_{M_3};\ b, c, f \in \mathbb{R}\right\}$

$= \mathrm{Span}\{M_1, M_2, M_3\}$. De plus $\{M_1, M_2, M_3\}$ est l. ind (vérifier). D'où $\dim W = 3$

5. Calculer

$$\begin{array}{cc} I & B \\ \multicolumn{2}{c}{\left[\begin{array}{cc|cc}1&0&0&1\\0&1&1&0\\\hline 0&0&0&-1\\0&0&1&0\end{array}\right]^{2012}} \\ & C\end{array}.$$

$C^2 = \begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix}$
$= \begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix} = -I_2$
$C^3 = -C$

A. $\begin{bmatrix}1&0&2012&0\\0&1&0&0\\2012&0&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$

B. $\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$

C. $\begin{bmatrix}1&0&2012&2012\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$

D. Aucune des autres réponses

E. $\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&2012&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$

F. $\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{bmatrix}$

<u>Solution</u> $A^2 = \left[\begin{array}{c|c}I&B\\\hline 0&C\end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c}I&B\\\hline 0&C\end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c}I&B+BC\\\hline 0&C^2\end{array}\right]$ À noter que $BC = \begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$
$\Rightarrow B+BC = \begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix}$

$A^3 = \left[\begin{array}{c|c}I&B\\\hline 0&C\end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c}I&B+BC\\\hline 0&C^2\end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c}I&B+BC+BC^2\\\hline 0&C^3\end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c}I&B+BC-B\\\hline 0&-C\end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c}I&BC\\\hline 0&-C\end{array}\right]$

$A^4 = \left[\begin{array}{c|c}I&B\\\hline 0&C\end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c}I&BC\\\hline 0&-C\end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c}I&BC-BC\\\hline 0&-C^2\end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c}I&0\\\hline 0&I\end{array}\right] = I_4 \Rightarrow A^{2012} = (A^4)^{503} = I_4 = \begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$

6. Donner les dimensions des sous-espaces:

$$U = \text{span}\{\sin x, \cos x, \sin(x+1)\}$$
$$W = \text{span}\{2\sin x, 3\cos x\}$$

de $\mathbb{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. (Indication: $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$)

A. $\dim U = 1$, $\dim W = 3$
B. $\dim U = 2$, $\dim W = 2$
C. $\dim U = 3$, $\dim W = 2$
D. $\dim U = 1$, $\dim W = 2$
E. $\dim U = 2$, $\dim W = 3$
F. $\dim U = 3$, $\dim W = 3$

<u>Solution</u> $\sin(x+1) = \sin x \underbrace{\cos 1}_{\alpha} + \cos x \underbrace{\sin 1}_{\beta} = \alpha \sin x + \beta \cos x$; $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Alors $\text{span}\{\sin x, \cos x, \sin(x+1)\} = \text{span}\{\sin x, \cos x\}$ car $\sin(x+1) \in \text{span}\{\sin x, \cos x\}$

De plus, supposons que $a\cos x + b\sin x = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$:

$$\left.\begin{array}{ll} \underline{x=0} & a\underbrace{\cos 0}_{1} + b\underbrace{\sin 0}_{0} = 0 \Rightarrow a = 0 \\ \underline{x=\pi/2} & a\underbrace{\cos \pi/2}_{0} + b\underbrace{\sin \pi/2}_{1} = 0 \Rightarrow b = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \{\sin x, \cos x\} \text{ est lin. ind.}$$

D'où $\dim U = \dim W = 2$.

7. Considérer la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1+a \\ 1 & 0 & a+2 \end{bmatrix}$$

où $a \in \mathbb{R}$. Laquelle des combinaisons suivantes représente les réponses aux deux questions suivantes:

(1) Pour quelles valeurs de a, la matrice A est-elle **inversible**? $a \neq -1$

(2) Pour $a = 0$, quelle est la première ligne de A^{-1}? $[2/3, \ -4/3, \ 1/3]$

A. $a \neq \pm 1$, $[\frac{2}{3} \ \ -\frac{4}{3} \ \ \frac{1}{3}]$
B. Aucune de ces combinaisons
C. $a \neq -3$, $[\frac{2}{3} \ \ \frac{4}{3} \ \ \frac{1}{3}]$
D. $a \neq 1$, $[\frac{2}{3} \ \ -\frac{4}{3} \ \ \frac{1}{3}]$
E. $a \neq -1$, $[\frac{2}{3} \ \ -\frac{4}{3} \ \ \frac{1}{3}]$
F. $a \neq -1$, $[-\frac{2}{3} \ \ \frac{4}{3} \ \ \frac{1}{3}]$

__Sol__ $\det(A) = \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1+a \\ 1 & 0 & a+2 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1+a \\ 0 & -2 & a+1 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1+a \\ 0 & 0 & 3a+3 \end{bmatrix} = 3a+3$

A est inversible $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0 \Leftrightarrow a \neq -1$

__$a=0$__ $\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 & 2/3 & 1/3 \end{array}\right]$

$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 4/3 & -2/3 & -1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 & 2/3 & 1/3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2/3 & -4/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 & 2/3 & 1/3 \end{array}\right]$

8. L'ensemble $B = \{v_1 = (1, -2, 0), \ v_2 = (0, 0, 1), \ v_3 = (2, 1, 0)\}$ forme une **base orthogonale** de $\mathbb{R}^3$. Trouver les coefficients de Fourrier du vecteur $v = (-1, 1, 1) \in \mathbb{R}^3$ dans la base B. Autrement dit, trouver le triplet (c_1, c_2, c_3) tel que

$$v = c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3.$$

A. $\left(\frac{3}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$
B. $\left(-\frac{3}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$
C. $\left(-\frac{3}{5}, -1, -\frac{1}{5}\right)$
D. Aucune des autres réponses
E. $\left(\frac{3}{5}, -1, -\frac{1}{5}\right)$
F. $\left(-\frac{3}{5}, 1, -\frac{1}{5}\right)$

__Sol__ Comme B est orthogonale, on a que

$$c_1 = \frac{v \cdot v_1}{\|v_1\|^2} = \frac{(-1,1,1) \cdot (1,-2,0)}{5} = -3/5$$

$$c_2 = \frac{v \cdot v_2}{\|v_2\|^2} = \frac{(-1,1,1) \cdot (0,0,1)}{1} = 1$$

$$c_3 = \frac{v \cdot v_3}{\|v_3\|^2} = \frac{(-1,1,1) \cdot (2,1,0)}{5} = -1/5$$

9. Soit A une matrice carrée de format $n \times n$. Parmi les énoncés suivants, un seul n'est pas équivalent à la condition **"Le système homogène $AX = 0$ n'admet pas une solution non triviale"**. Lequel?

A. Les colonnes de A forment une base de $\mathbb{R}^n$.
B. Les colonnes de A forment un système générateur de $\mathbb{R}^n$.
C. 0 est une valeur propre de A.
D. Le déterminant de A n'est pas nul.
E. 0 n'est pas une valeur propre de A.
F. Les lignes de A sont linéairement indépendantes comme vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

Sol l'énoncé : « Le système $AX=0$ n'admet pas une solution non triviale" est équivalente à "A est inversible", donc « 0 n'est pas une valeur propre de A »

10. Soit A une matrice de format 2012×2000 et soit $B \in \mathbb{R}^{2000}$ un vecteur non nul. Répondre aux trois questions suivantes.

(1) Le système $AX = B$ peut-il être incompatible?

(2) Le système $AX = B$ peut-il avoir une infinité de solutions?

(3) Le système $AX = B$ peut-il avoir une solution unique?

A. Non, Non, Oui	**B.** Non, Oui, Non	**C.** Oui, Oui, Oui
D. Non, Non, Non	**E.** Oui, Non, Oui	**F.** Oui, Non, Non

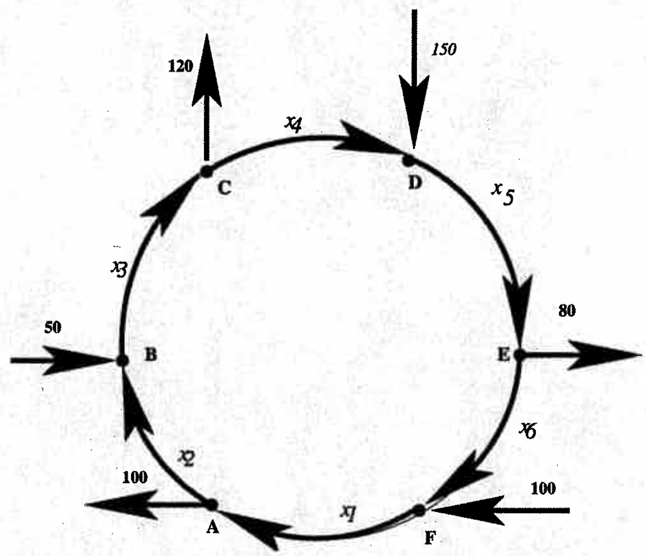
Sol Le système $AX=B$ est non homogène à 2012 équations et 2000 inconnues.

(1) oui car il est possible que $rg(A) \neq rg[A|B]$

(2) oui " " " " " $rg(A) = rg[A|B] < 2000$

(3) oui " " " " " $rg(A) = rg[A|B] = 2000$.

11. Le diagramme suivant représente un "rond point" de réseau routier où les lettres A, B, C, D, E et F représentent les intersections, les flèches indiquent le sens du traffic. Les nombres et les variables x_i autour des flèches indiquent le nombre de voitures qui passent par l'intersection durant la même période du temps.



(1) Écrire le système (S) d'équations linéaires qui décrit le réseau. Indiquer aussi toutes les contraintes sur les variables x_i. **Pour cette partie, n'effectuer aucune réduction du système. Juste donner le système (S) avec les contraintes. La réduction de la matrice augmentée du système est faite pour vous à la partie suivante.**

(2) Sachant que la **forme échelonnée réduite** de la matrice augmentée du système (S) est:

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 100 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 50 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -70 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 80 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

donner la solution générale du Système (S) (Ignorer les contraintes sur les variables pour cette partie).

(3) En utilisant votre réponse à la partie (2), déterminer le flux minimal le long du chemin FA.

(4) Si le chemin CD est fermé pour la construction, utiliser votre réponse à la partie (2) pour déterminer les flux le long de chaque portion du rond point.

<u>Solution</u> Pour chaque Jonction on a Flux rentrant = Flux sortant

A $x_1 = x_2 + 100$
B $x_2 + 50 = x_3$
C $x_3 = x_4 + 120$
D $x_4 + 150 = x_5$
E $x_5 = x_6 + 80$
F $x_6 + 100 = x_1$

$\iff (S) : \begin{cases} x_1 - x_2 = 100 \\ x_2 - x_3 = -50 \\ x_3 - x_4 = 120 \\ x_4 - x_5 = -150 \\ x_5 - x_6 = 80 \\ x_1 - x_6 = 100 \end{cases}$

Chaque variable x_i est un entier ≥ 0.

(2) D'après la forme échelonnée donnée, on a que $x_6 = t$ est libre et la solution générale s'écrit comme

$$\begin{cases} x_1 = t+100 \\ x_2 = t \\ x_3 = t+50 \\ x_4 = t-70 \\ x_5 = t+80 \\ x_6 = t \end{cases}$$ avec $t \geq 0$ et un entier.

(3) Note que $x_4 \geq 0 \Rightarrow t-70 \geq 0 \Rightarrow t \geq 70$.
Le flux sur le chemin FA est $x_1 = t+100$. Alors, le flux minimal est 170 car $t \geq 70$

(4) CD est fermé $\Rightarrow x_4 = 0 \Rightarrow t = 70 \Rightarrow$
$x_1 = 170$, $x_2 = 70$, $x_3 = 120$, $x_4 = 0$, $x_5 = 150$, $x_6 = 70$.

12. Considérer les 5 vecteurs suivants de $\mathbb{R}^4$:

$v_1 = (-1,1,0,1),\ v_2 = (1,1,0,0),\ v_3 = (1,0,0,1),\ v_4 = (1,2,0,2),\ v_5 = (-2,2,0,2)$

et posons $U = \text{span}\{v_1,\ v_2,\ v_3,\ v_4\, v_5\}$.

(1) Sans faire aucun calcul, expliquer pourquoi l'ensemble

$$\{v_1,\ v_2,\ v_3,\ v_4,\ v_5\}$$

est nécessairement linéairement dépendant dans $\mathbb{R}^4$.

(2) Donner une base de U formée par un sous-ensemble de $\{v_1,\ v_2,\ v_3,\ v_4,\ v_5\}$.

(3) Donner une base orthogonale de U.

(4) Soit $v = (1,\ 1,\ 2,\ -2) \in \mathbb{R}^4$. Donner la meilleure approximation de v par un élément de U.

(5) Donner une base **orthogonale de** $\mathbb{R}^4$ qui contient la base trouvée à la partie (2).

Solution (1) Comme $\dim \mathbb{R}^4 = \underline{\underline{4}}$ et que $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ contient $\underline{\underline{5}}$ vecteurs, l'ensemble est linéairement dépendant.

(2) $U = \text{Col}(A)$ où $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

$$A \sim \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Les vecteurs v_1, v_2, v_3 forment alors une base de $U = \text{span}\{v_1, \ldots, v_5\}$

(3) On applique le procédé de Gram-Schmidt :

$w_1 = v_1 = (-1,1,0,1)$

$$w_2 = v_2 - \frac{v_2 \cdot w_1}{\|w_1\|^2} w_1 = (1,1,0,0) - \frac{(1,1,0,0)\cdot(-1,1,0,1)}{3}(-1,1,0,1) = (1,1,0,0)$$

$$w_3 = v_3 - \frac{v_3 \cdot w_1}{\|w_1\|^2} w_1 - \frac{v_3 \cdot w_2}{\|w_2\|^2} w_2 = (1,0,0,1) - \frac{(1,0,0,1)\cdot(-1,1,0,1)}{3}(-1,1,0,1) - \frac{(1,0,0,1)\cdot(1,1,0,0)}{2}(1,1,0,0)$$

$$w_3 = (1,0,0,1) - \frac{1}{2}(1,1,0,0) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0, 1\right)$$

Alors $\{(-1,1,0,1), (1,1,0,0), (1/2, -1/2, 0, 1)\}$ est une base orthogonale de U

(4) La meilleure approximation de v par un vecteur de U est donné par : $\text{proj}_U v = \frac{v \cdot w_1}{\|w_1\|^2} w_1 + \frac{v \cdot w_2}{\|w_2\|^2} w_2 + \frac{v \cdot w_3}{\|w_3\|^2} w_3$

$= \frac{(1,1,2,-2)\cdot(-1,1,0,1)}{3}(-1,1,0,1) + \frac{(1,1,2,-2)\cdot(1,1,0,0)}{2}(1,1,0,0) +$

$\frac{(1,1,2,-2)\cdot(1/2,-1/2,0,1)}{3/2}(1/2,-1/2,0,1) = -\frac{2}{3}(-1,1,0,1) + (1,1,0,0) - \frac{4}{3}\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0,1\right)$

$\text{proj}_U v = (1,1,0,-2)$

(5) On sait que le vecteur $v - \text{proj}_U v$ est orthogonal à U, c'est-à-dire, il est orthogonal à w_1, w_2, w_3 :

$v - \text{proj}_U v = (1,1,2,-2) - (1,1,0,-2) = (0,0,2,0)$.

Alors $\{(-1,1,0,1), (1,1,0,0), (1/2,-1/2,0,1), (0,0,2,0)\}$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}^4$.

13. **[6 points]** Considérer la matrice

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Donner le polynôme caractéristique de A et en déduire que les valeurs propres de A sont 1 et 2.

(b) Trouver une base et donner la dimension de l'espace propre $E_1 = \{v \in \mathbb{R}^3;\ Av = v\}$ associé à la valeur propre 0.

(c) Trouver une base et donner la dimension de l'espace propre $E_2 = \{v \in \mathbb{R}^3;\ Av = 2v\}$ associé à la valeur propre 2.

(d) La matrice A est-elle diagonalisable? si vous dites oui, trouver une matrice inversible P et une matrice diagonale D telle que $A = PDP^{-1}$. **Utiliser la méthode de votre choix pour justifier que P est inversible.**

<u>Solution</u> (a) Le polynôme caractéristique de A et $\det(A-\lambda I) = 0 \Rightarrow$

$$\det\begin{bmatrix} -1-\lambda & 3 & -1 \\ -3 & 5-\lambda & -1 \\ -3 & 3 & 1-\lambda \end{bmatrix} \overset{(-1)L_2+L_3\to L_3}{=} \det\begin{bmatrix} -1-\lambda & 3 & -1 \\ -3 & 5-\lambda & -1 \\ 0 & \lambda-2 & 2-\lambda \end{bmatrix} = (2-\lambda)\det\begin{bmatrix} -1-\lambda & 3 & -1 \\ -3 & 5-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$(2-\lambda)\det\begin{bmatrix} -1-\lambda & 2 & -1 \\ -3 & 4-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = (2-\lambda)\det\begin{bmatrix} -1-\lambda & 2 \\ -3 & 4-\lambda \end{bmatrix} = (2-\lambda)\left[\lambda^2 - 3\lambda + 2\right]$$

$= -(\lambda-2)^2(\lambda-1)$. Les valeurs propres de A sont alors $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$.

(b) $E_1 = \ker(A - I)$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 3 & -1 & 0 \\ -3 & 4 & -1 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & -1 & 0 \\ -3 & 4 & -1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$x_3 = t$ est libre, $x_1 = t$, $x_2 = t$

$E_1 = \left\{\begin{bmatrix} t \\ t \\ t \end{bmatrix},\ t \in \mathbb{R}\right\} = \text{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$. Une base de E_1 est $\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$ et $\dim E_1 = 1$

(c) $E_2 = \ker(A - 2I)$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -3 & 3 & -1 & 0 \\ -3 & 3 & -1 & 0 \\ -3 & 3 & -1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$x_2 = s$ et $x_3 = t$ sont libres et $x_1 = s - \frac{1}{3}t$

$$E_2 = \left\{ \begin{bmatrix} s-\frac{1}{3}t \\ s \\ t \end{bmatrix} ; s,t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ s\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -1/3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} ; s,t \in \mathbb{R} \right\} =$$

span$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$. Comme $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ sont linéairement indépendants (l'un n'est pas un multiple de l'autre), ils forment une base de E_2 et $\dim E_2 = 2$.

(d) Comme $\dim E_1 + \dim E_2 = 3$, la matrice est diagonalisable.

Posons $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, alors P est inversible (car

$$\det P = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} = -\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 1 \neq 0).$$

et $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ alors on a que $A = PDP^{-1}$

14. Considérer les deux vecteurs $v = (1, 0, 1)$ et $w = (1, 1, 1)$ de $\mathbb{R}^3$. On définit une application $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de la façon suivante:

$$T(u) = u \times (v \times w), \qquad \forall u \in \mathbb{R}^3.$$

(a) Si $u = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$, trouver une formule pour $T(u)$.

(b) Montrer que T est une application linéaire.

(c) Donner la matrice standard de T.

(d) Donner une base et la dimension de l'image, $\mathrm{Im}(T)$, de T. Donner aussi une description géomértique complète de $\mathrm{Im}(T)$.

(e) Donner une base et la dimension du noyau, $\ker(T)$, de T. Donner aussi une description géomértique complète de $\ker(T)$.

<u>Solution</u> Noter tout d'abord que $v \times w = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1, 0, 1)$

(a) $T(u) = u \times (v \times w) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (y, -x-z, y)$

D'où $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} y \\ -x-z \\ y \end{bmatrix}$

(b) Noter que $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \Rightarrow T(u) = Au$: T est alors linéaire.

(c) La matrice standard de T est $[\,T(e_1) \;\; T(e_2) \;\; T(e_3)\,] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. D'où $\mathrm{Im}\,T = \mathrm{Col}(A) = \mathrm{span}\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

Comme $\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ sont linéairement indépendants (un n'est pas un multiple de l'autre), ils forment une base de $\mathrm{Im}(T)$. D'où $\dim(\mathrm{Im}\,T) = 2$

$\mathrm{Im}\,T$ est un plan de $\mathbb{R}^3$ qui passe par $(0, 0, 0)$ et ayant le vecteur

$\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1, 0, 1)$ comme vecteur normal.

(e) $\ker T = \{ x \in \mathbb{R}^3 ; Ax = 0 \}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$ $x_3 = t$ est libre, $x_1 = -t$, $x_2 = 0$

$$\ker T = \left\{ \begin{bmatrix} -t \\ 0 \\ t \end{bmatrix} ; t \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ est une base de $\ker T$ et $\dim \ker T = 1$.

Géométriquement, $\ker T$ est la droite qui passe par $(0,0,0)$ et qui est parallèle au vecteur $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

15. Pour chacun des énoncés suivants, déterminer si l'énoncé est **vrai** or **faux**. **Si vous dites que l'énoncé est vrai, expliquer pourquoi et si vous dites qu'il est faux, donner un exemple pour illustrer.**

(1) Si A est une matrice carrée de format 2012×2012 telle $A^2 = -A$, alors $\det(A) = 0$ ou $\det(A) = 1$.

(2) Chaque matrice inversible est diagonalisable.

(3) Si A est une matrice de format 2000×2012, alors les colonnes de A sont toujours linéairement dépendantes.

(4) $\{\cos(2x),\ \sin(x)\}$ est linéairement indépendant dans l'espace $\mathbb{F}([0, \pi], \mathbb{R})$.

(5) Soit A une matrice de format 5×6. Si une forme échelonnée de A admet une ligne nulle, alors le système homogène $AX = 0$ admet une infinité de solutions.

(6) Si $T : \mathbb{M}_{44} \to \mathbb{P}_4$ est une transformation linéaire, alors $\dim(\ker T) \leq 4$.

Solution (1) Vrai $A^2 = -A \Rightarrow \det(A^2) = \det(-A) \Rightarrow [\det(A)]^2 = (-1)^{2012}\det(A)$

$\Rightarrow (\det A)^2 = \det A \Rightarrow (\det A)^2 - \det A = 0 \Rightarrow \det A(\det A - 1) = 0 \Rightarrow \det A = 0$

ou $\det A = 1$.

(2) Faux $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, alors A est inversible comme $\det(A) = 1 \neq 0$.

$\det(A - \lambda I) = \det\begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)^2 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 1$.

$\left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$: $x_1 = t$ est libre et $x_2 = 0 \Rightarrow E_1 = \left\{\begin{bmatrix} t \\ 0 \end{bmatrix} ; t \in \mathbb{R}\right\} = \text{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$

Donc $\dim E_1 = 1 < 2$. A n'est pas diagonalisable.

(3) Vrai les colonnes de A sont des vecteurs de $\mathbb{R}^{2000}$. Comme il y a 2012 vecteurs, elles sont linéairement dépendantes.

(4) Vrai $a\cos(2x) + b\sin x = 0 \quad \forall x \in [0, \pi]$:

$\left.\begin{array}{ll} \underline{x=0} & a(1) + b(0) = 0 \Rightarrow a = 0 \\ \underline{x=\pi/2} & a\cos(\pi) + b\sin(\pi/2) = 0 \Rightarrow -a + b = 0 \Rightarrow b = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow a = b = 0.$

(5) Vrai Si A est de format 5×6, alors $AX = 0$ admet toujours une

infinité de solutions.

(b) <u>Faux</u> Ker T est un sous-espace de $M_{4\times 4}$, alors $\dim(\text{Ker}\,T) \leq \dim(M_{44}) = 16$

Il est possible que $\dim(\text{Ker}\,T) > 4$.