Formulações em Programação Inteira

Alguns Problemas Clássicos a Formular:

- Problema de Atribuição.
- Problema da Mochila 0-1.
- Problema da Mochila Inteira.
- Problema de Cobertura de Conjuntos.
- Problema do Caixeiro Viajante.
- Custos Fixos.
- Problema do Lote Econômico Não Capacitado.
- Problema de Localização Não Capacitado.
- Alternativas Discretas ou Disjunções.

O Problema da Atribuição

Problema de Atribuição:

- n pessoas para executar n tarefas distintas.
- Cada pessoa deve executar uma única tarefa.
- Algumas pessoas são mais aptas a executar certas tarefas.
- c_{ij}: custo estimado para o indivíduo i executar a tarefa j.

Objetivo: atribuir tarefas a pessoas, ao menor custo total possível.

Formulação do Problema de Atribuição

Definição das Variáveis:

- $x_{ij} \in \{0, 1\}$: atribuição da tarefa j para a pessoa i

Definição das Restrições:

- Cada pessoa deve efetuar uma única tarefa :
  $$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \ \forall i = 1, \ldots, n$$
- Cada tarefa será efetuada por uma única pessoa:
  $$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \ \forall j = 1, \ldots, n$$
- As variáveis x_{ij} são binárias 0-1:
  $x_{ij} \in \{0, 1\}, \forall i = 1, \ldots, n, \ \ \forall j = 1, \ldots, n$

Definição da Função Objetivo:

- O custo das atribuições deve ser minimizado: $\min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$.

Formulação do Problema de Atribuição

$$\min \left\{ \sum_{i=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} c_{ij} x_{ij} : x \in P \cap \mathbb{B}^{n \times n} \right\}$$

Onde P é uma *região poliédrica* (ou seja, uma região de $\mathbb{R}^{n^2}$ definida pela interseção de um conjunto de restrições lineares) dada por:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \ \forall i = 1, \ldots, n$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \ \forall j = 1, \ldots, n$$

$$x_{ij} \geq 0, \ \forall j = 1, \ldots, n, \ \forall j = 1, \ldots, n$$

O Problema da Mochila 0-1

Problema da Mochila 0-1:

- Uma empresa dispõe de b reais para investir.
- n projetos *atraentes* foram pre-selecionados para investimento.
- Investir no projeto j custa a_j e produz um retorno c_j.

Objetivo: selecione um subconjunto de projetos de máximo retorno (sem exceder o orçamento disponível).

Formulação do Problema da Mochila 0-1

Definição das variáveis:

- $x_j \in \{0, 1\}$: investir ou não no projeto j

Definição das restrições:

- Não é possível investir mais do que b:
  $\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \leq b$
- Todas as variáveis x_j são binárias 0-1: $x_j \in \{0, 1\}$, $\forall j = 1, \ldots, n$

Definição da função objetivo:

- O retorno do investimento deve ser maximizado: $\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$.

Formulação do Problema da Mochila 0-1

$$\max \left\{ \sum_{j=1}^{n} c_j x_j : x \in P \cap \mathbb{B}^n \right\}$$

onde P é dado por:

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \leq b$$

$$0 \leq x_j \leq 1, \ \forall j = 1, \ldots, n$$

O Problema de Localização Não Capacitado

Dados de entrada:

- Conjunto $M = \{1, \ldots, m\}$: clientes.
- Conjunto $N = \{1, \ldots, n\}$: locais candidatos a sediar depósitos.
- f_j: custo fixo a pagar se o depósito $j \in N$ é aberto.
- c_{ij}: custo unitário de transporte entre $j \in N$ e $i \in M$.

Objetivo: minimizar os custos de instalação de depósitos
e de transporte para suprir todos os clientes.

Modelo para o Problema de Localização Não Capacitado

Definição das variáveis:

- $y_j \in \{0, 1\}, \ \forall j \in N$: abrir ou não um depósito em j.
- $x_{ij} \geq 0, \ \forall i \in M, \ \forall j \in N$:
  fração da demanda do cliente i atendida pelo depósito j.

Definição das restrições:

- 100% da demanda de $i \in M$ deve ser atendida: $\sum\limits_{j \in N} x_{ij} = 1, \forall i \in M$.
- m é o número máximo de clientes que $j \in N$ pode atender:
  $\sum\limits_{i \in M} x_{ij} \leq m y_j, \forall j \in N$.

Definição da função objetivo:

- Minimizar custos de instalação e transporte:
  $$\min \sum_{i \in M} \sum_{j \in N} c_{ij} x_{ij} + \sum_{j \in N} f_j y_j$$

Modelo para o Problema de Localização Não Capacitado

$$\min \left\{ \sum_{i \in M} \sum_{j \in N} c_{ij} x_{ij} + \sum_{j \in N} f_j y_j : (x, y) \in \mathcal{P} \cap \mathbb{R}_+^{mn} \times \mathbb{B}^n \right\}$$

onde a formulação $\mathcal{P}$ é dada por:

$$\sum_{j \in N} x_{ij} = 1, \forall i \in M$$

$$\sum_{i \in M} x_{ij} \leq m y_j, \forall j \in N$$

$$x_{ij} \geq 0, \ \forall i \in M, \ \forall j \in N$$

$$0 \leq y_j \leq 1, \ \forall j \in N$$

Por que não precisamos impor que $x_{ij} \in \{0, 1\}, \ \forall i \in M, \ \forall j \in N$?

Se j_i é o depósito aberto mais próximo de i, então $x_{ij_i} = 1$!

Exemplo da Mochila 0-1

Considere o conjunto de pontos:

$X = \{(0,0,0,0),(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1),(0,1,0,1),(0,0,1,1)\}$

Os poliedros abaixo definem formulações para X?

$$\mathcal{P}_1 = \{x \in \mathbb{R}^4 : 0 \leq x \leq 1,\ 83x_1 + 61x_2 + 49x_3 + 20x_4 \leq 100\}$$

$$\mathcal{P}_2 = \{x \in \mathbb{R}^4 : 0 \leq x \leq 1,\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 1x_4 \leq 4\}$$

$$\mathcal{P}_3 = \left\{ \begin{array}{lccc} x \in \mathbb{R}^4 : & 0 \leq x \leq 1 & & \\ & 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 & \leq & 4 \\ & x_1 + x_2 + x_3 & \leq & 1 \\ & x_1 + x_4 & \leq & 1 \end{array} \right\}$$

$\mathcal{P}$ é uma formulação para X se e somente se $X = \mathcal{P} \cap \mathbb{Z}^4$.