Lista 2 - Otimização Não Linear Inteira Mista
COS886 - 2021/3

Amanda Ferreira de Azevedo - afazevedo@cos.ufrj.br

PESC/UFRJ — 28 de janeiro de 2022

Exercício 1.1

Suponha que f é diferenciável, ou seja, seu gradiente ∇f existe em cada ponto do dom f. Então f é convexa se e somente se dom f é convexo e se a equação abaixo é satisfeita para todo $x, y \in \operatorname{dom} f$.

$$f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)^\top (y - x)$$

Afirmação: ($\Rightarrow$) Se f é convexa então $\mathbf{dom}(f)$ é convexo e vale $f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)^T (y - x)$

Demonstração: Como f é convexa, temos que para todo $x, y \in \mathbf{dom}(f)$ e $t \in [0, 1]$

$$\begin{aligned}
f(ty + (1-t)x) &\leq tf(y) + (1-t)f(x) \\
f(x + t(y-x)) &\leq f(x) + t(f(y) - f(x)) \\
f(x + t(y-x)) - f(x) &\leq t(f(y) - f(x)) \\
\frac{f(x + t(y-x)) - f(x)}{t} &\leq f(y) - f(x)
\end{aligned}$$

Tomando o limite quando $t \to 0$, isto é,

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x + t(y-x)) - f(x)}{t} = \langle \nabla f(x)^T, (y - x) \rangle$$

Que é a derivada direcional de f na direção do vetor $y - x$. Dessa forma,

$$f(x)^T (y - x) \leq f(y) - f(x)$$

■

Afirmação: $(\Leftarrow)$ Se $\mathbf{dom}(f)$ é convexo e vale $f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)^T(y-x)$ então f é convexa

Demonstração: Sejam $x, y \in \mathbf{dom}(f)$. Pela convexidade do $\mathbf{dom}(f)$, sabemos que para todo $t \in [0,1]$ vale

$$z = tx + (1-t)y \in \mathbf{dom}(f)$$

Daí, por hipótese, temos que

$$f(x) \geq f(z) + \nabla f(z)^T(x-z) \tag{1}$$
$$f(y) \geq f(z) + \nabla f(z)^T(y-z) \tag{2}$$

Considere coeficientes $t \in [0,1]$ não-negativos. Multiplicando (1) por t e (2) por $(1-t)$ temos

$$t\, f(x) \geq t\, [f(z) + \nabla f(z)^T(x-z)] \tag{3}$$
$$(1-t)\, f(y) \geq (1-t)\, [f(z) + \nabla f(z)^T(y-z)] \tag{4}$$

Agora, vamos somar (3) e (4).

$$tf(x) + (1-t)f(y) \geq t[f(z) + \nabla f(z)^T(x-z)] + (1-t)[f(z) + \nabla f(z)^T(y-z)]$$

Daí, temos

$$\begin{aligned}
tf(x) + (1-t)f(y) &\geq tf(z) + t\nabla f(z)^T(x-z) + (1-t)f(z) + (1-t)\nabla f(z)^T(y-z)] \\
&\geq f(z)\underbrace{[t + (1-t)]}_{=1} + \nabla f(z)^T[t(x-z) + (1-t)(y-z)] \\
&\geq f(z) + \nabla f(z)^T[t(x-z) + (1-t)(y-z)] \\
&\geq f(z) + \nabla f(z)^T[tx - \cancel{tz} + y - z - ty + \cancel{tz}] \\
&\geq f(z) + \nabla f(z)^T[\underbrace{tx + (1-t)y}_{z} - z] \\
&\geq f(z) = f(tx + (1-t)y)
\end{aligned}$$

Assim,

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$$

Com isso, f é convexa. ■

Exercício 1.2

Suponha que f seja duas vezes diferenciável, ou seja, sua hessiana ou segunda derivada $\nabla^2 f$ existe em cada ponto do dom f. Mostre que f é convexa se e somente se $\operatorname{dom} f$ é convexo e a sua hessiana é semidefinida positiva para todo $x \in \operatorname{dom} f$.

Para essa demonstração, será necessário fazer uso de alguns resultados.

Teorema 1: (Taylor com resto de Lagrange)
Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^2. Sejam, ainda, $x, d \in \mathbb{R}^n$. Então, existe $\alpha \in (0, 1)$ tal que

$$f(x + d) = f(x) + \nabla f(x)^T d + \frac{1}{2} d^T \ \nabla^2 f(x + \alpha d) \ d \ .$$

Teorema 2: (Taylor de segunda ordem)
Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^2. Sejam, ainda, $x, d \in \mathbb{R}^n$. Então,

$$f(x + d) = f(x) + \nabla f(x)^T d + \frac{1}{2} d^T \ \nabla^2 f(x) \ d + o(\|d\|^2) \ .$$

Afirmação: ($\Leftarrow$) Se **dom**(f) é convexo e a sua hessiana é semidefinida positiva para todo $x \in$ **dom**(f) então f é convexa.

Demonstração:
Pelo **Teorema 1**, existe $\alpha \in (0, 1)$ tal que

$$f(y) = f(x) + \nabla f(x)^T (y - x) + \frac{1}{2}(y - x)^T \nabla^2 f(x + \alpha(y - x))(y - x)$$

Como o **dom**(f) é convexo, $x + \alpha(y - x) \in$ **dom**(f). Além disso, por hipótese, $\nabla^2 f$ é **positiva semidefinida positiva** para todo $x \in$ **dom**(f), então

$$\frac{1}{2}(y - x)^T \nabla^2 f(x + \alpha(y - x))(y - x) \geq 0$$

Assim,

$$f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)^T (y - x), \forall x, y \in \mathbf{dom}(f)$$

O que vimos na demonstração do item anterior que implica que f é convexa.

■

Afirmação: ($\Rightarrow$) Se f é convexa então **dom**(f) é convexo e a sua hessiana é semidefinida positiva para todo $x \in$ **dom**(f).

Demonstração: Sejam $x \in$ **dom**(f) e $d \in \mathbb{R}^n$ quaisquer.

Pela continuidade da Hessiana, qualquer ponto $x \in$ **dom**(f) é ponto interior. Dessa forma, podemos considerar um ponto $y = x + \alpha d \in$ **dom**(f) para $\alpha > 0$ suficientemente pequeno, onde d é uma direção viável. Pelo exercício anterior,

$$f(x + \alpha d) \geq f(x) + \underbrace{\alpha \nabla f(x)^T d}_{\text{linearidade}}$$

Pelo **Teorema 2**,

$$\begin{aligned} 0 &\leq f(x + \alpha d) - f(x) - \alpha \nabla f(x)^T d \\ &= \frac{1}{2}(\alpha d)^t \nabla^2 f(x)(\alpha d) + o(\|\alpha d\|^2) \\ &= \frac{\alpha^2}{2} d^T \nabla^2 f(x) d + o(\|\alpha d\|^2) \end{aligned}$$

Dividindo por α^2, tomando o limite quando $\alpha \to 0$, temos

$$\frac{1}{2} d^T \nabla^2 f(x) d \geq 0$$

concluindo que $\nabla^2 f(x)$ é positiva semidefinida.

■

Exercício 3.16

Para cada uma das funções seguintes, determine se a função é convexa, côncava ou nenhuma das duas.

1. $f(x_1, x_2) = x_1 x_2$ no $\mathbb{R}^2_{++}$
2. $f(x_1, x_2) = \frac{1}{x_1 x_2}$ no $\mathbb{R}^2_{++}$
3. $f(x_1, x_2) = \frac{x_1^2}{x_2}$ no $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_{++}$

Afirmação: $f(x_1, x_2) = x_1 x_2$ no $\mathbb{R}^2_{++}$ é nenhuma das duas

Demonstração: Calculando a Hessiana de f, temos

$$\nabla^2 f(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Para testar a positividade, considere um vetor **x** de $\mathbb{R}^2$. Então,

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

O que nos dá

$$\begin{bmatrix} x_2 & x_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_2 x_1 + x_1 x_2 = 2x_1 x_2$$

Como $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$, então vemos que não podemos afirmar que a hessiana é semidefinida positiva nem negativa. Note também que os autovalores de $\nabla^2 f$ são 1 e -1. Dessa forma, f não é nenhuma das duas.

Outra forma de enxergar isso é olhando para o determinante dos menores principais líderes. Note que o determinante da matriz toda é menor ou igual a zero e o primeiro elemento da matriz é zero.

■

Afirmação: $f(x_1, x_2) = \frac{1}{x_1 x_2}$ no $\mathbb{R}^2_{++}$ é convexa

Demonstração: A Hessiana de f é

$$\nabla^2 f(x) = \begin{bmatrix} \frac{2}{x_1^3 x_2} & \frac{1}{x_1^2 x_2^2} \\ \frac{1}{x_1^2 x_2^2} & \frac{2}{x_1 x_2^3} \end{bmatrix}$$

Calcularemos o determinante dos menores principais líderes, isto é, a matriz $\begin{bmatrix} \frac{2}{x_1^3 x_2} \end{bmatrix}$ e $\nabla^2 f(x)$.

Como $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^2_{++}$, o determinante de $\begin{bmatrix} \frac{2}{x_1^3 x_2} \end{bmatrix}$ será estritamente maior que zero. Agora calculando o determinante de $\nabla^2 f(x)$, temos

$$det[\nabla^2 f(x)] = \frac{2}{x_1^3 x_2} \cdot \frac{2}{x_1 x_2^3} - \frac{1}{x_1^2 x_2^2} \cdot \frac{1}{x_1^2 x_2^2} = \frac{4}{x_1^4 x_2^4} - \frac{1}{x_1^4 x_2^4} = \frac{3}{x_1^4 x_2^4} > 0$$

Logo, $\nabla^2(f)$ é positiva definida e f é convexa. ■

Afirmação: $f(x_1, x_2) = \frac{x_1^2}{x_2}$ no $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_{++}$ é convexa

Demonstração: A Hessiana de f é

$$\nabla^2 f(x) = \begin{bmatrix} \frac{2}{x_2} & \frac{-2x_1}{x_2^2} \\ \frac{-2x_1}{x_2^2} & \frac{2x_1^2}{x_2^3} \end{bmatrix}$$

Aqui faremos o mesmo procedimento, vamos analisar os determinantes dos menores principais líderes. Note que o determinante da submatriz indicada por $\left[\frac{2}{x_2}\right]$ possui valores não-negativos, uma vez que $x_2 \in \mathbb{R}_{++}$. Agora, calculando o determinante da matriz principal,

$$det[\nabla^2 f(x)] = \frac{2}{x_2} \cdot \frac{2x_1^2}{x_2^3} - \frac{-2x_1}{x_2^2} \cdot \frac{-2x_1}{x_2^2} = 0$$

Logo, $\nabla^2(f)$ é semi-positiva definida e f é convexa. ■

Exercício 3.18

Adapte a prova da concavidade do função do log-determinante para mostrar que

1. Mostre que a função abaixo é convexa

$$f(X) = \mathrm{Tr}\left(X^{-1}\right) \text{ no } \mathrm{dom}\, f = \mathbb{S}^n_{++}$$

2. Mostre que a função abaixo é côncava

$$f(X) = (\det X)^{(1/n)} \text{ no } \mathrm{dom}\, f = \mathbb{S}^n_{++}$$

Afirmação: A função abaixo é convexa

$$f(X) = \mathrm{Tr}\left(X^{-1}\right) \text{ no } \mathrm{dom}\, f = \mathbb{S}^n_{++}$$

Demonstração: Considere uma reta qualquer parametrizada por $X = Z + tV$, onde $V, Z \in S^n$. Seja $g(t) = f(Z + tV)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ tal que $X \in S^n_{++}$.

Queremos provar que se para todo $X \in S^n_{++}$ e para todo $V \in \mathbb{S}_n$ g é convexo então f será convexo. Então,

$$\begin{aligned}
g(t) &= \mathrm{Tr}\left\{X^{-1}\right\} \\
&= \mathrm{Tr}\left\{(Z+tV)^{-1}\right\} \\
&= \mathrm{Tr}\left\{\underbrace{Z^{\frac{-1}{2}}\left(I + tZ^{\frac{-1}{2}}VZ^{\frac{-1}{2}}\right)^{-1}}_{B}\underbrace{Z^{\frac{-1}{2}}}_{A}\right\} \\
&= \mathrm{Tr}\left\{Z^{-1}\left(I + tZ^{\frac{-1}{2}}VZ^{\frac{-1}{2}}\right)^{-1}\right\} && \because \mathrm{Tr}\{BA\} = \mathrm{Tr}\{AB\}
\end{aligned}$$

Como $Z, V \in S^n$, podemos escrever $Z^{-\frac{1}{2}}VZ^{-\frac{1}{2}} = Q\Sigma Q^T$, onde Q é a matriz ortogonal e Σ é a matriz diagonal com autovalores λ_i's de $Z^{-\frac{1}{2}}VZ^{-\frac{1}{2}}$ em sua diagonal. Dessa forma,

$$\begin{aligned}
g(t) &= \mathrm{Tr}\left\{Z^{-1}\left(I + tQ\Sigma Q^T\right)^{-1}\right\} \\
&= \mathrm{Tr}\left\{Z^{-1}Q\,(I + t\Sigma)^{-1}\,Q^T\right\} && \because Q^{-1} = Q^T \\
&= \mathrm{Tr}\left\{\underbrace{Q^T}_{A}\,\underbrace{Z^{-1}Q(I + t\Sigma)^{-1}}_{B}\right\} && \because \mathrm{Tr}\{BA\} = \mathrm{Tr}\{AB\} \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(Q^TZ^{-1}Q\right)_{ii}(1 + t\lambda_i)^{-1} && \because \text{ definição de traço}
\end{aligned}$$

Dessa forma, g é uma combinação linear de coeficientes $(Q^TZ^{-1}Q)_{ii}$ de funções convexas $(1 + t\lambda_i)^{-1}$, em que $(1 + t\lambda_i)^{-1} > 0$. Portanto, g é convexa, o que implica que f é convexa. ■

Afirmação: Mostre que a função abaixo é côncava

$$f(X) = (\det X)^{(1/n)} \text{ no } \mathrm{dom}\, f = \mathbb{S}^n_{++}$$

Demonstração: Novamente, considere uma reta qualquer parametrizada por $X = Z + tV$, onde $V, Z \in S^n$. Seja $g(t) = f(Z + tV)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ tal que $X \in S^n_{++}$.

Queremos provar que se para todo $X \in S^n_{++}$ e para todo $V \in \mathbb{S}_n$ g é convexo então f será convexo. Então,

$$
\begin{aligned}
g(t) &= (\det(Z + tV))^{1/n} \\
&= \left(\det Z^{1/2} \det\left(I + tZ^{-1/2}VZ^{-1/2}\right) \det Z^{1/2}\right)^{1/n} \\
&= \left(\det Z^{1/2} \det Z^{1/2} \det(I + tZ^{-1/2}VZ^{-1/2})\right)^{\frac{1}{n}} && \because \operatorname{Tr}\{BA\} = \operatorname{Tr}\{AB\} \\
&= \left(\det Z \det(I + tZ^{-1/2}VZ^{-1/2})\right)^{\frac{1}{n}} && \because \det AB = \det A \det B
\end{aligned}
$$

Uma vez que

$$\left(Z^{-\frac{1}{2}}VZ^{\frac{1}{2}}\right)^T = Z^{\frac{1}{2}}VZ^{-\frac{1}{2}}$$

Pois $Z, V \in S^n$, podemos escrever $Z^{-\frac{1}{2}}VZ^{-\frac{1}{2}} = Q\Sigma Q^T$, onde Q é a matriz ortogonal e Σ é a matriz diagonal com autovalores λ_i's de $Z^{-\frac{1}{2}}VZ^{-\frac{1}{2}}$ em sua diagonal. Dessa forma,

$$
\begin{aligned}
&= \left(\det Z \det(I + tZ^{-1/2}VZ^{-1/2})\right)^{\frac{1}{n}} \\
&= (\det Z)^{\frac{1}{n}} \left(\det(I + tQ\Sigma Q^T)\right)^{\frac{1}{n}} && \because \det AB = \det A \det B \\
&= (\det Z)^{1/n} \left(\prod_{i=1}^{n} (1 + t\lambda_i)\right)^{1/n} && \because \text{ definição de determinante}
\end{aligned}
$$

Onde λ_i, $\forall i = 1, \ldots, n$ são os autovalores de $Z^{-1/2}VZ^{-1/2}$. Como a média geométrica é uma função côncava em $\mathbb{R}^n_{++}$ e $(1 + t\lambda_i) > 0$, $\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{1/n}$ é côncava. Além disso, $Z > 0$ e portanto, $\det Z^{\frac{1}{n}} > 0$. Logo, g é côncava o que implica que f é côncava.

$\blacksquare$

Exercício 3.36

Apresente os conjugados das seguintes funções:

1. $f(x) = \frac{1}{2}x^\top Qx$, sendo $Q \in \mathbb{S}^n_{++}$
2. $f(x) = \max_{i=1,\dots,n} x_i$ no $\mathbb{R}^n$
3. $f(x) = x^p$ no $\mathbb{R}_{++}$para $p > 1$
4. $f(x) = x^p$ no $\mathbb{R}_{++}$para $p < 0$

Definição:

Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. A função $f^* : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por

$$f^*(y) = \sup_{x \in \mathrm{dom}\, f} \left(y^T x - f(x)\right),$$

é chamada o *conjugado* de uma função f. O domínio de uma função conjugado consiste em $y \in \mathbb{R}^n$, para o qual o *supremo* é finido, ou seja, para qual a diferença $y^T x - f(x)$ é limitada sobre o **dom**(f).

$\boxed{f(x) = \frac{1}{2}x^\top Qx, \text{ sendo } Q \in \mathbb{S}^n_{++}}$

A função conjugado de f será, por definição:

$$f^*(y) = \sup_{x \in \mathbf{dom}(f)} \left(\underbrace{x^T y - \frac{1}{2}x^\top Qx}_{g(x)} \right)$$

Vamos derivar g e igualar ao vetor nulo para encontramos os pontos críticos $\bar{x}$. Aplicando a regra da cadeia,

$$g'(\bar{x}) = y - (\frac{1}{2}Q\bar{x} + \frac{1}{2}\bar{x}^T Q) = y - Q\bar{x}$$

Igualando $g'(\bar{x})$ ao vetor nulo, temos

$$y - Q\bar{x} = 0 \Rightarrow \bar{x} = \frac{y}{Q}$$

Como $g''(\bar{x}) = -Q < 0$, então $\bar{x}$ é um ponto de máximo. Substituindo $\bar{x}$ em $f^*(y)$

$$\begin{aligned} f^*(y) &= \frac{y}{Q}^\top y - \frac{1}{2}\frac{y}{Q}^\top Q\frac{y}{Q} \\ &= y^\top Q^{-1}y - \frac{1}{2}y^\top Q^{-1}QQ^{-1}y \\ &= y^\top Q^{-1}y - \frac{1}{2}y^\top Q^{-1}y \\ &= \frac{1}{2}y^\top Q^{-1}y \end{aligned}$$

$\boxed{f(x) = \max_{i=1,\ldots,n} x_i \text{ no } \mathbb{R}^n}$

A função conjugado de f será, por definição:

$$f^*(y) = \sup_{x \in \mathbf{dom}(f)} \left(\underbrace{x^T y - \max_i x_i}_{g(x)} \right)$$

Vamos analisar o $\mathbf{dom}(f^*)$.

1. Se alguma coordenada de y for negativa, $y_k < 0$, então $g(x)$ é ilimitada superiormente. Para tal, basta tomar x com as entradas todas nulas, exceto por $x_k = -t$, para algum $t \in \mathbb{R}$ tal que $t > 0$. Fazendo $t \to \infty$, x, cresce indefinidamente. Nesse caso, y não estará no $\mathbf{dom}(f^*)$.

2. Por outro lado, se $y \geq 0$ e $\sum_{i=1}^n y_i > 1$, então $g(x)$ ainda será ilimitada. Neste caso, basta tomar um vetor x com suas entradas iguais a t, com $t > 0$. Fazendo $t \to \infty$, podemos escolher x como sendo tão grande quanto se queira, crescendo indefinidamente. Novamente, y não estará no $\mathbf{dom}(f^*)$.

3. Se $y \geq 0$ e $\sum_{i=1}^n y_i < 1$, de forma análoga, podemos escolher x como sendo tão pequeno quanto se queira, decrescendo indefinidamente. Neste caso, bastaria que x tivesse todas as coordenadas com entradas $-t$. Novamente, y não estará no $\mathbf{dom}(f^*)$.

4. Finalmente, se $y \geq 0$ e $\sum_{i=1}^n y_i = 1$, então $y^T x \leq \max_i x_i$ para todo x. Dessa forma, $y^T x - \max_i x_i \leq 0$. Logo $g(x)$ é limitada superiormente por zero e esse valor é atingido quando é zero.

Portanto,

$$f^*(y) = \begin{cases} 0 & \text{se } y \geq 0, \quad \displaystyle\sum_{i=1}^n y_i = 1 \\ \infty & \text{c.c.} \end{cases}$$

$$\boxed{f(x) = x^p \text{ no } \mathbb{R}_{++} \text{para } p > 1}$$

A função conjugado de f será, por definição:

$$f^*(y) = \sup_{x \in \textbf{dom}(f)} \left(\underbrace{yx - x^p}_{g(x)} \right)$$

Vamos derivar g e igualar a zero para encontramos seus pontos críticos $\bar{x}$.

$$g'(\bar{x}) = y - p\bar{x}^{p-1}$$

Como $p > 1$ e $x \in \mathbb{R}_{++}$, temos que se $y \leq 0$, o máximo será atingido quando o supremo for igual a zero.

Dessa forma, os pontos restantes $\textbf{dom}(f^*)$ estão definidos para $y > 0$. Os pontos críticos de $g'(x)$ serão

$$g'(\bar{x}) = 0 \Leftrightarrow y - p\bar{x}^{p-1} = 0 \Leftrightarrow \bar{x} = \left(\frac{y}{p}\right)^{p/(p-1)}$$

Como $g''(\bar{x}) = -p(p-1)\bar{x}^{p-2} < 0$, então $\bar{x}$ é um ponto de máximo. Agora, vamos substituir em $f^*(y)$.

$$\begin{aligned}
g(\bar{x}) &= y\left(\frac{y}{p}\right)^{1/(p-1)} - \left(\frac{y}{p}\right)^{p/(p-1)} \\
&= p\frac{y}{p}\left(\frac{y}{p}\right)^{1/(p-1)} - \left(\frac{y}{p}\right)^{p/(p-1)} \\
&= p\left(\frac{y}{p}\right)^{p/(p-1)} - \left(\frac{y}{p}\right)^{p/(p-1)} \\
&= (p-1)\left(\frac{y}{p}\right)^{p/(p-1)}
\end{aligned}$$

Dessa forma, temos que

$$f^*(y) = \begin{cases} 0 & \text{se } y \leq 0 \\ (p-1)\left(\frac{y}{p}\right)^{p/(p-1)} & \text{se } y > 0 \end{cases}$$

$$\boxed{f(x) = x^p \text{ no } \mathbb{R}_{++} \text{para } p < 0}$$

Repetiremos o procedimento acima. Neste caso, $p < 0$ e $\bar{x} \in \mathbb{R}_{++}$. Assim, se $y \geq 0$, então $\bar{x}$ pode crescer indefinidamente. Dessa maneira, y estaria fora do $\mathbf{dom}(f^*)$.

Dessa forma, os pontos que estão no $\mathbf{dom}(f^*)$ estão definidos para $y < 0$. Os pontos críticos de $g'(x)$ serão

$$\bar{x} = \left(\frac{y}{p}\right)^{\frac{1}{(p-1)}}$$

Substituindo $\bar{x}$ em $f^*(y)$,

$$f^*(y) = (p-1)\left(\frac{y}{p}\right)^{p/(p-1)}$$

Donde $f^*(y)$ pode ser escrita como

$$f^*(y) = \begin{cases} (p-1)\left(\frac{y}{p}\right)^{p/(p-1)} & \text{se } y < 0 \\ \infty & \text{se } c.c. \end{cases}$$