Proposta de projeto: Monte Carlo e Cadeias de Markov

Amanda Ferreira de Azevedo[1], **Wanderson Douglas Lomenha Pereira**[1]

[1] Universidade Federal do Rio de Janeiro
Instituto Alberto Luiz Coimbra de Pós-Graduação e Pesquisa em Engenharia
Programa de Engenharia de Sistemas e Computação

{afazevedo,wlomenha}@cos.ufrj.br

1. Definição do problema

Seja $G = (V, E)$ um grafo simples, conexo e não orientado, onde V é o conjunto de vértices e E é o conjunto de arestas. Associe um custo não-negativo c_e à cada aresta $e = \{i, j\} \in E$. Denota-se por d_{ij} ao comprimento do menor caminho simples ligando os vértices $i, j \in V$, ou seja, à *distância* entre eles no grafo G. Por fim, o *diâmetro* de G, d, é dado pela maior distância existente entre qualquer par de vértices de G, em termos de número de arestas. Além disso, seja *B* um número positivo que impõe um limite superior para o quanto se pode gastar na escolha das arestas de uma árvore geradora $T = (V_T, E_T)$. Denomina-se por *Budget Minimum Diameter Spanning Tree Problem* (BMDSTP) o problema de encontrar uma árvore geradora T tal que a soma total do custo de suas arestas não ultrapasse B e seu diâmetro seja o menor possível. O problema foi proposto por [Plesnik 1981], sob uma denominação imprecisa onde foi identificado como NP-Difícil. Uma ilustração de uma árvore geradora ótima para o problema é dada na Figura 1.

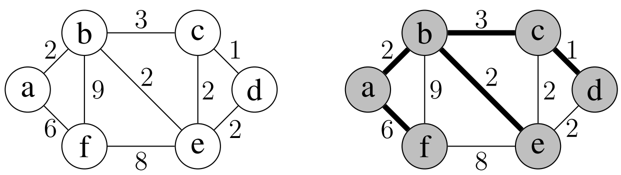

Figura 1. Ilustração de uma árvore geradora de diâmetro mínimo restrita a B = 14. Diâmetro igual a 4.

2. Proposta de Pesquisa

Embora ainda pouco investigado na literatura, o BDMSTP é desafiador e têm um grande potencial de aplicações práticas. Em especial, esse problema foi investigado na dissertação de um dos autores deste projeto[1] onde foi implementado os primeiros algoritmos exatos para o problema. No entanto, o problema se mostrou bastante complicado quando tomado valores mais restritos de B. Assim, gostaríamos de construir uma cadeia de Markov base da seguinte maneira:

- **Estados**:
  - Árvores geradoras de G.
- **Transições:**
  - Seja S_t o estado atual:
    - $*$ Escolha uniformemente uma aresta $e \in E(G) - E(S_t)$ e adicione à árvore S_t, formando um ciclo.

[1] https://www.cos.ufrj.br/index.php/pt-BR/publicacoes-pesquisa/details/15/2974

* Pegue uma aresta $\bar{e}$ aleatória uniformemente do ciclo $C \subseteq E(S_t)$ e delete ela.
* Se $\{\bar{e}\} = \{e\}$, então $S_t = S_{t+1}$
* Caso contrário $S_{t+1} = S_t + \{e\} - \{\bar{e}\}$.

Essa cadeia induz um **passeio aleatório (lazy)** em um grafo não-direcionado associado e todas as transições possuem a mesma probabilidade $\frac{1}{|C|(m-n+1)}$ uniforme.

Para lidar com a otimização, faremos uso da metaheurística *Simulated Annealing*. Para isso, criaremos uma nova CM com distribuição estacionária igual a distribuição de *Botltzmann*. Usaremos *Metropolis-Hastings* para criar uma agenda de resfriamento, a partir da probabilidade de aceite. A distribuição de *Botltzmann* utiliza $f(s)$, uma função sobre os estados da cadeia. No nosso caso, $f(s)$ retornará o diâmetro da árvore associada ao estado s correspondente e nosso objetivo é minimizá-lo. Além disso, para lidar com a restrição de capacidade, pretendemos trabalhar com penalizações, tanto diretamente no custo ou em f. Para finalizar, faremos uma comparação dessas técnicas com os resultados exatos da dissertação[2], analisando tempo e eficiência de cada um.

Referências

Plesnik, J. (1981). The complexity of designing a network with minimum diameter. *Networks*, 11(1):77–85.

[2] https://www.cos.ufrj.br/index.php/pt-BR/publicacoes-pesquisa/details/15/2974