# Análise de Risco

Sessão 2

Conceitos básicos

Prof. E.A.Schmitz

# Probabilidade – visão empírica

- **Espaço amostral**: conjunto de pontos que representa o resultado de um experimento.
  - Quando o experimento é repetido - cada resultado aparece com uma determinada freqüência.
  - Aumentando o número de vezes do experimento : cada resultado começa a aparecer com uma determinada freqüência com relação aos outros.
- **Probabilidade**: freqüência relativa de ocorrência de cada resultado quando o número de experimentos $\rightarrow \propto$

# Variável aleatória

- Variável aleatória (VA): variável cujo domínio é o espaço amostral .

- Variável  aleatória discreta (X):
  - o número de valores para os quais X tem probabilidade diferente de zero é finita
  - cada intervalo da escala real contém um número finito de valores

# Função de probabilidade

$X = \{ x_1, x_2, \ldots x_n \}$ e $\{p_1, p_2, \ldots p_n\}$

- $f(x_i) = p_i$ se $x = x_i$ $(f(x_i) = 0$ se $x \neq x_i)$
- $f(x)$ é a função de probabilidade de X.

  $\sum f(x_i) = 1$

  $P(a < X < b) = \sum f(x_i)$ $x_i$ in $\{ a..b\}$

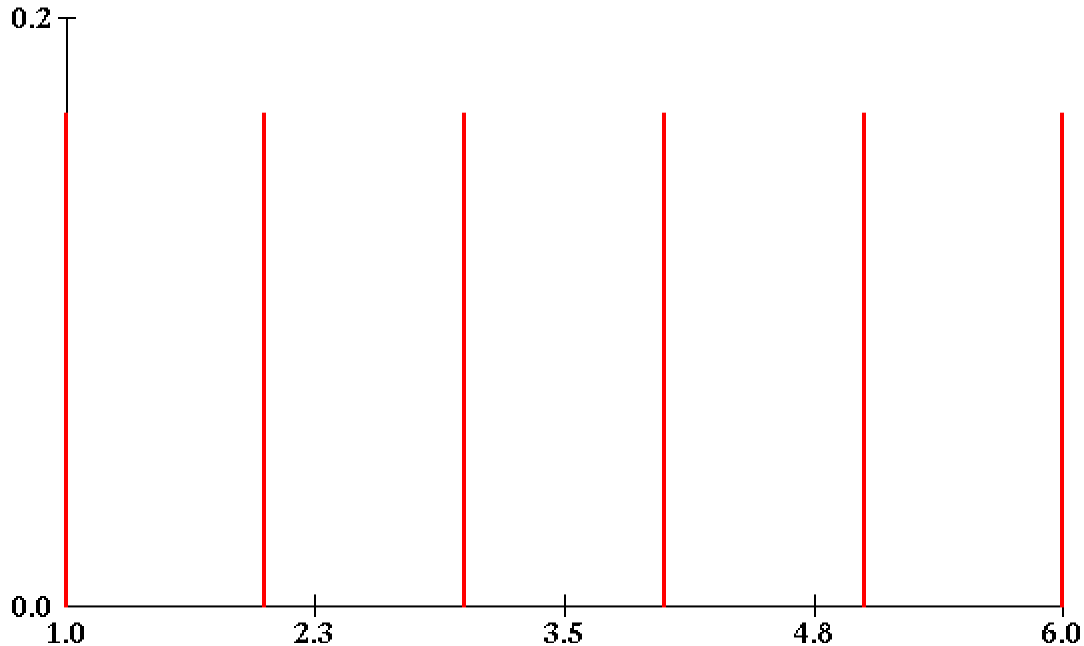
- Se a variável aleatória X é continua:

  $f(x) >= 0$

  $\int f(x)\, dx = 1$

# Exemplo 1

- Função de probabilidade  para a variável aleatória X = "total de pontos obtidos ao jogar um dado".



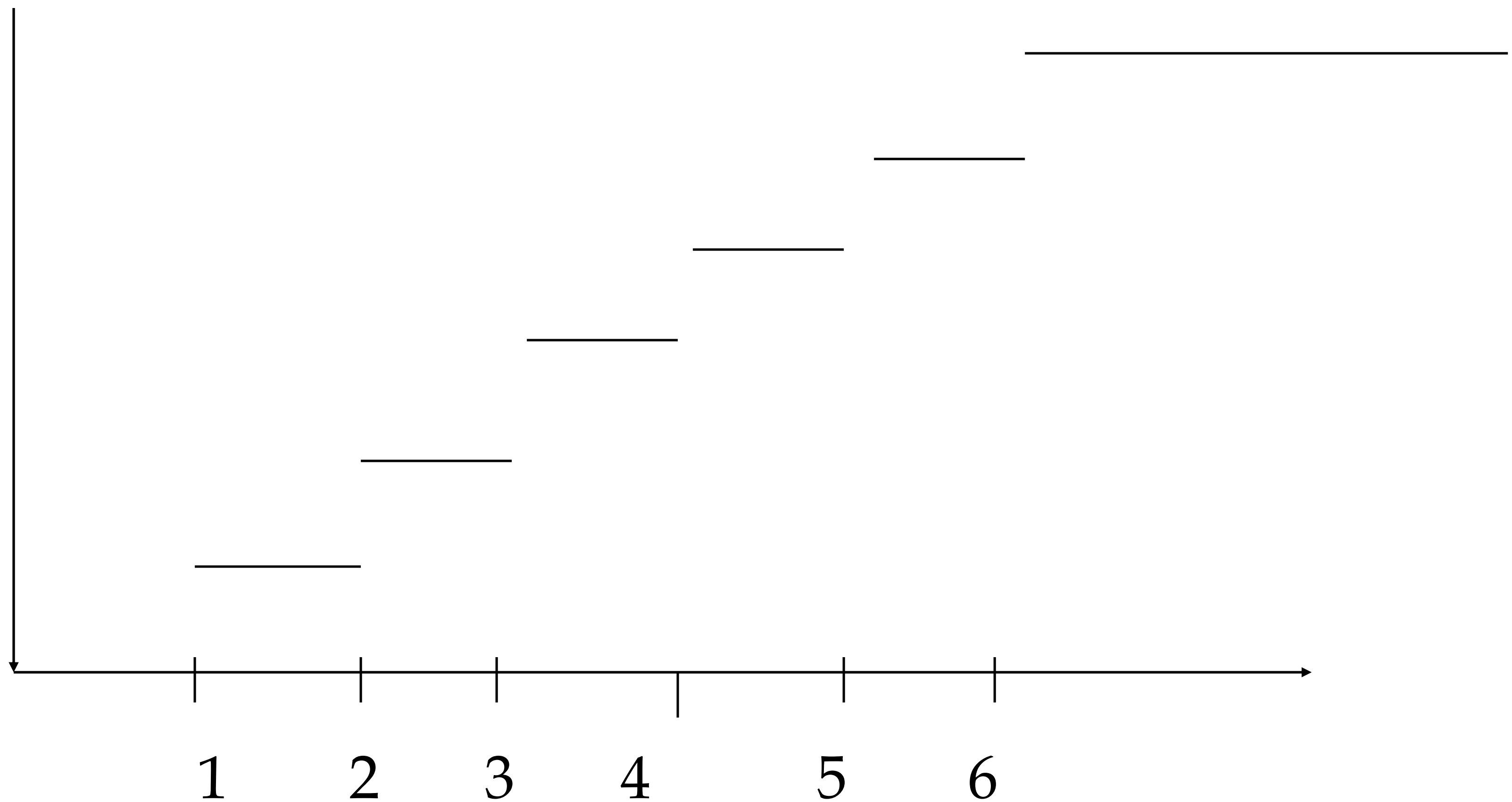
# Função distribuição cumulativa

- Funções discretas
  - $F(b) = P(X <= b) = \sum f(x_i)$ onde $x_i$ in $\{ -\infty..b\}$

- Funções contínuas
  - $F(b) = \int f(x)\,dx$ x in $\{ -\infty..b\}$
  - $P( a < X < b ) = F(b) - F(a)$

# Exemplo 2

Função distribuição cumulativa para o total de pontos obtidos ao jogar um dado.

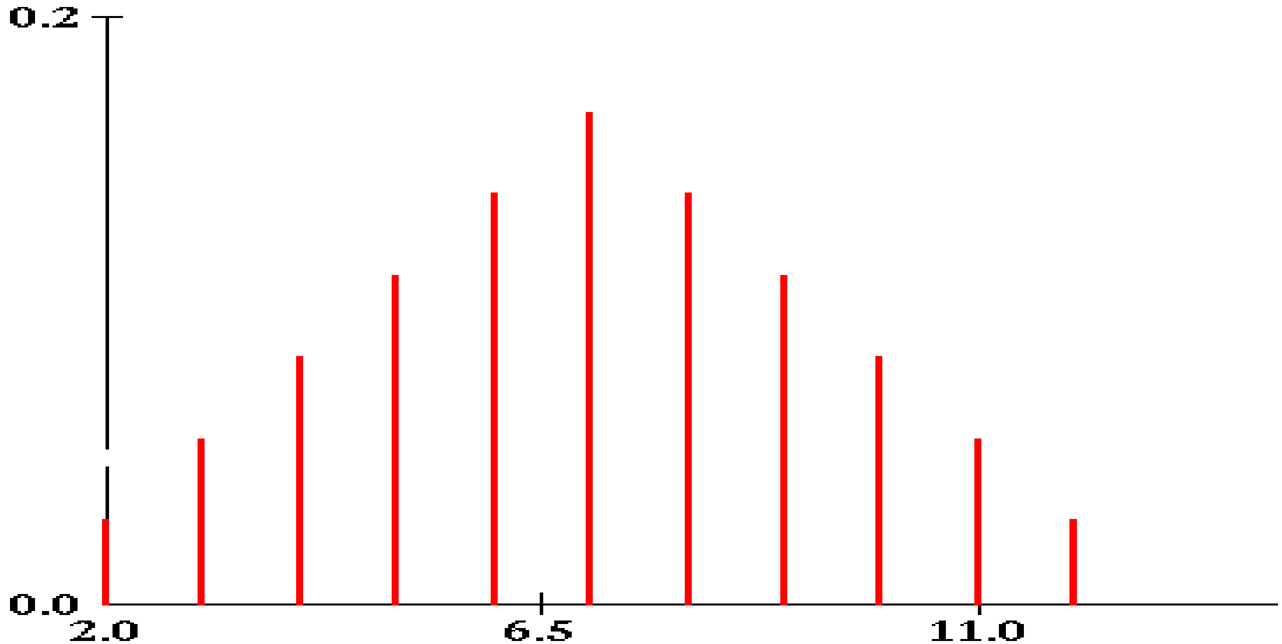


# Exemplo 3-Total de pontos ao jogar dois dados

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | |
| 2 | | | | | | |
| 3 | | | | | | |
| 4 | | | | | | |
| 5 | | | | | | |
| 6 | | | | | | |

# Exemplo 3

Função de probabilidade para o total de pontos obtidos ao jogar dois dados.



# Parâmetros das distribuições: Média

$m = \sum x_i * f(x_i)$ - discreta

$m = \int x * f(x)\, dx$ - discreta

- Média representa o centro de massa do gráfico

# Parâmetros das distribuições: Variância

$s^2 = \sum (x_i - m)^2 * f(x_i)$ - discreta

$s^2 = \int (x - m)^2 * f(x)\, dx$ - contínua

Variância representa a dispersão

desvio padrão = $s = \sqrt{s^2}$ =

# Exemplo 4

- X = “valor obtido ao jogar uma moeda”.
- Cara = 0, Coroa = 1

$X = \{0,1\}\ \{1/2,1/2\}$

$m= 0*1/2+1*1/2=1/2$

$s^2 = (0-1/2)^2*1/2 + (1-1/2)^2*1/2= 1/4$

# Distribuições de probabilidade usadas na análise de risco

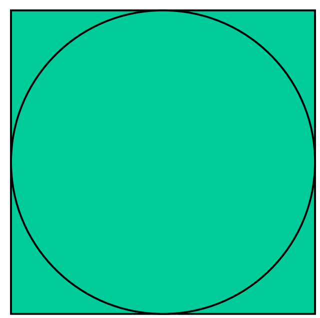
- Uniforme
- Valores possíveis encontram-se numa faixa
- Discreta
- Conjunto de valores possíveis é finito
- Triangular
- Estimativa de 3 pontos

# Técnica de Monte Carlo

- Idéia: conseguir soluções aproximadas para funções complexas através de amostragem computacional.

- Algoritmo para calcular valor de $\pi$ por amostragem:

1. Lançar N dardos ao acaso dentro do quadrado
2. Contar o número de acertos A dentro do círculo.
3. $\pi \cong 4*(A/N)$



# Monte Carlo em R

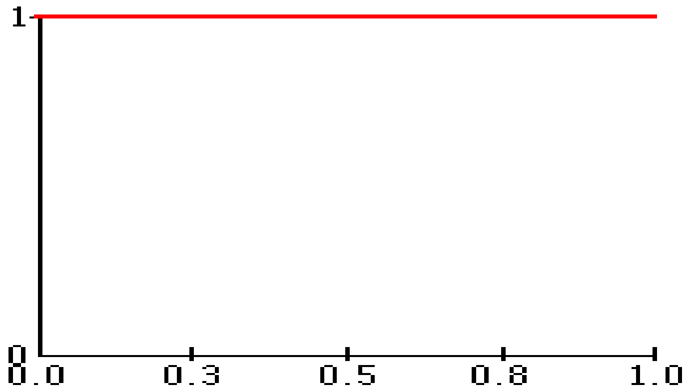
- Gerar “sorteios” de valores aleatórios
- Coletar os resultados amostrados
- Agregar resultados

# Distribuição uniforme

- Sabemos a faixa de valores e assumimos todos igualmente prováveis
- Função do R: (n, min = 0, max = 1)
- Exemplo: Valor da taxa Selic em Janeiro/2017

# Distribuição contínua 0..1

- X = variável contínua entre 0..1 onde todos os valores são eqüiprováveis.
- $m= \int x* f(x)\, dx = \int x* 1\, dx= x^2/2 ]= 1/2$
- $s^2 = \int (x- m )^2 * f(x)\, dx=1/12$



# Distribuição de probabilidade triangular

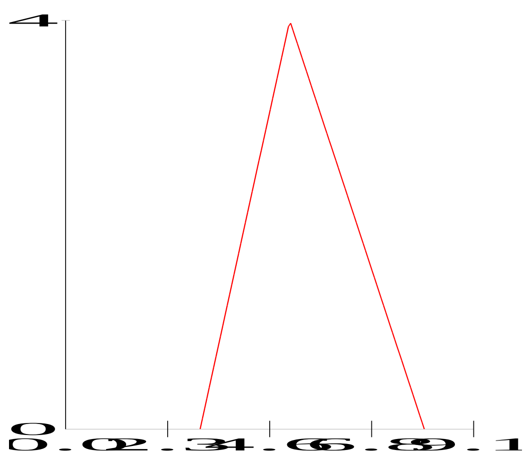
- Valor estimado é definido por:
- limite inferior que aumenta até um máximo e decai até um limite superior

- Função do R: rtriangle(min, max,mprov)
  - Package: triangle
- Exemplo: preço do barril de petróleo em dezembro/2017

# Distribuição Triangular

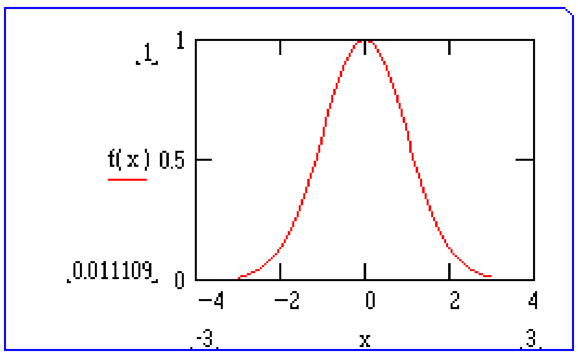
X = variável contínua onde : otimista (a), mais provável(m) e pessimista (b)

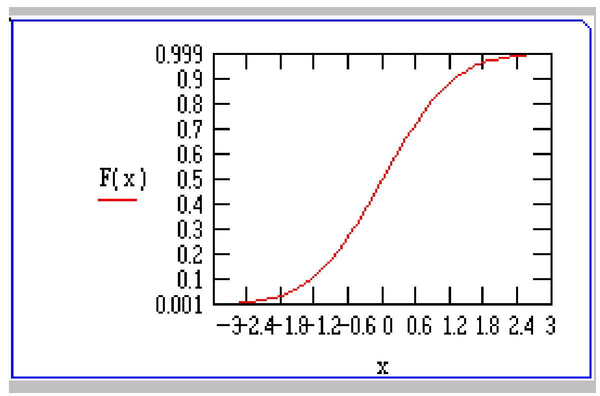
- m= (a+m+b)/3
- $s^2$= (a (a-m)+b(b-a)+m(m-b))/18



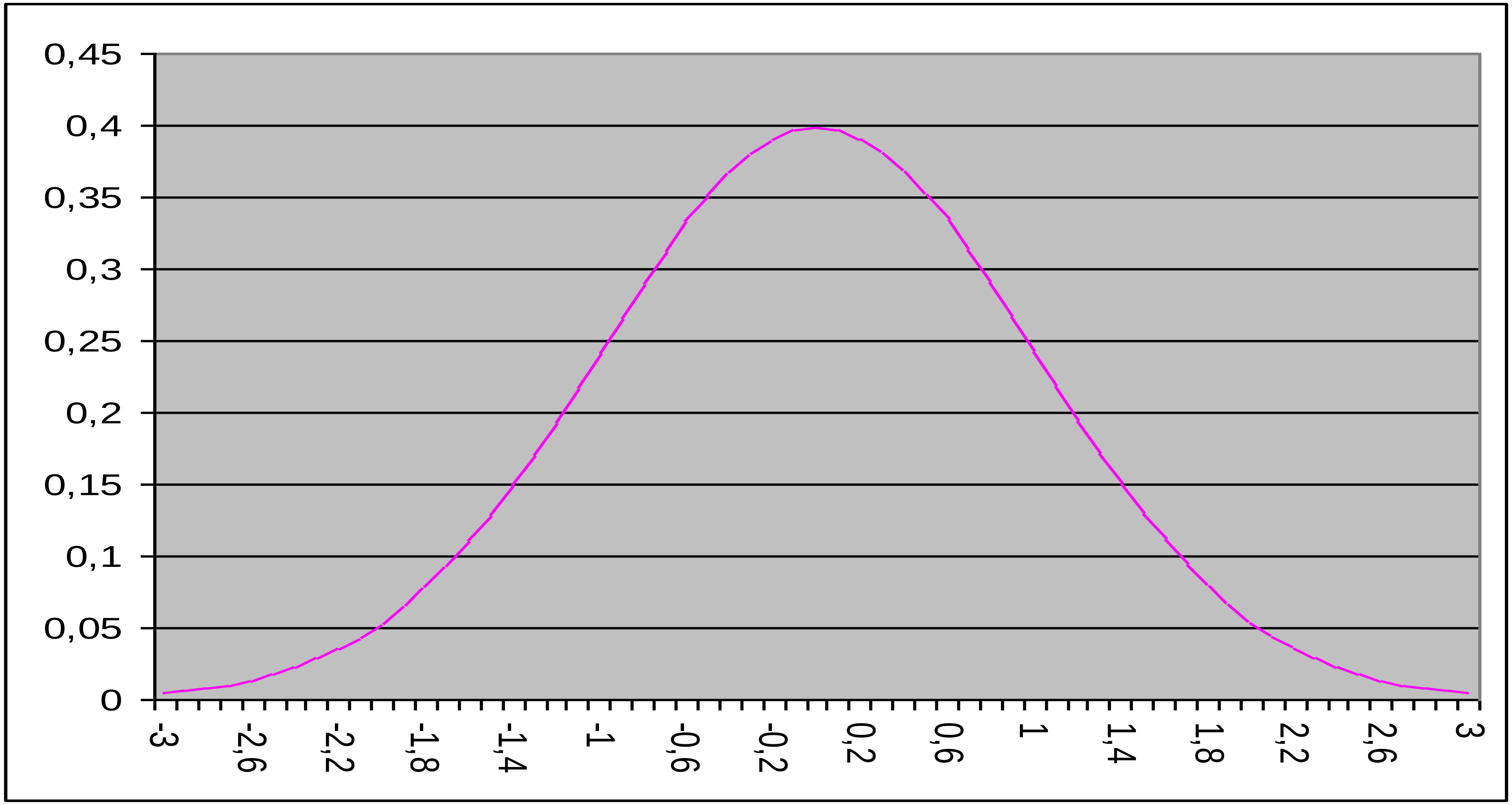
# Distribuição Normal (1)

- $f(x) = k*e^{-1/2\,((x-m)/s)^2}$
- $k = 1/(s.\sqrt{2\pi})$



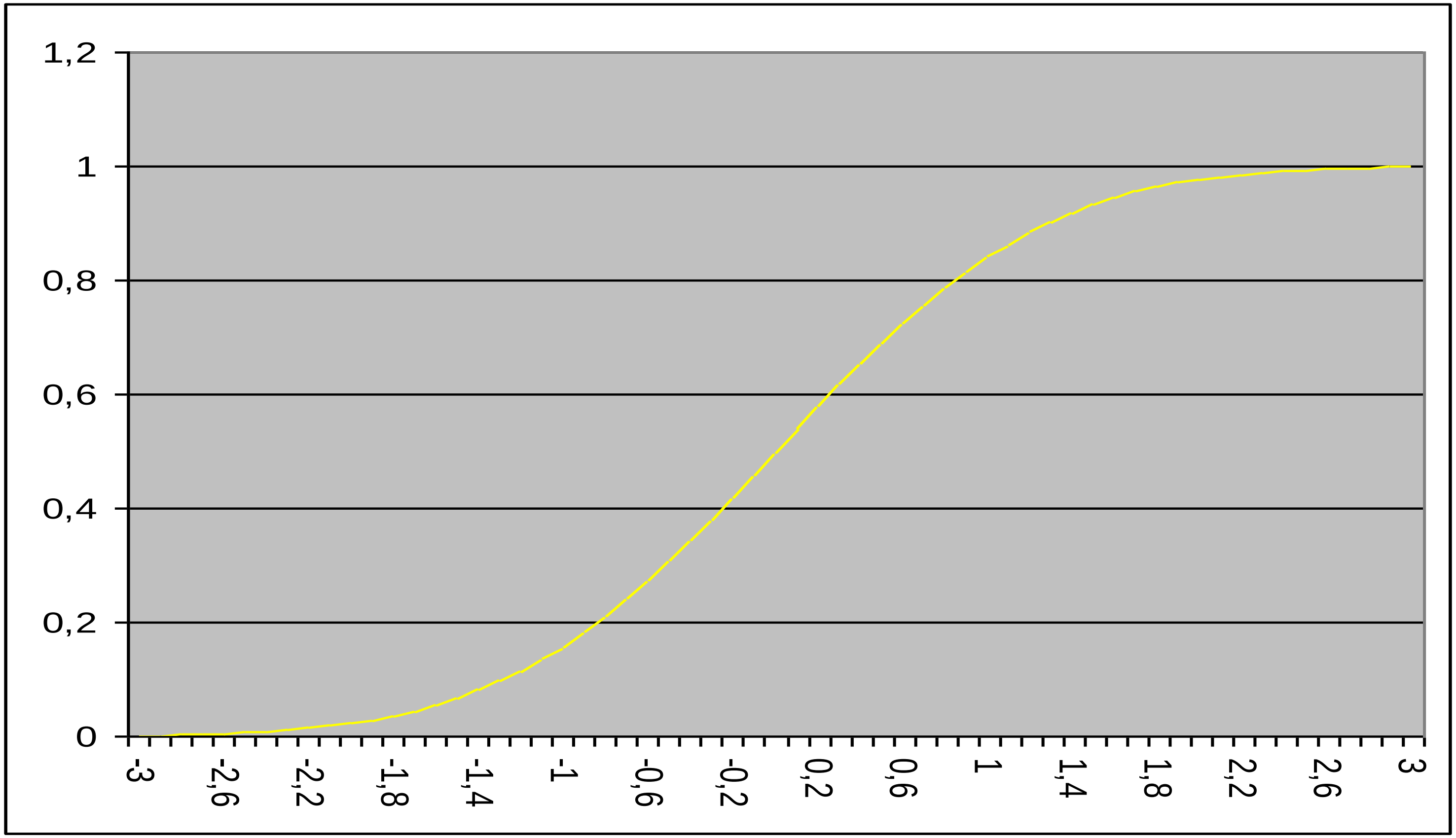



# Distribuição Normal (3)




Normal Reduzida (0,1)

# Distribuição Normal (4)




Φ = cumulativa da normal reduzida

# Distribuição Normal (5)

- Números importantes da normal reduzida:

  $P(m\text{-}s \leq x \leq m\text{-}s) = 0.68$ (68%)

  $P(m-2s \leq x \leq m+2s) = 0.95$ (95%)

  $P(m-2.3s \leq x \leq m+2.3s) = 0.98$ (98%)

  $P(m-3s \leq x \leq m+3s) = 0.995$ (99,5%)

# Teoremas importantes (1)

Transformações lineares de VAs

- Teorema 1: Seja X uma VA com média=m e desvio padrão =s

  se $X1=c_1*X + c_2$
  - então X1 têm como parâmetros
    - $m_1 = c_1*m + c_2$
    - $s_1^2= c_1^2 *s^2$
  - Se $c_1=(1/s)$ e $c_2=(-m/s)$ então...

# Teoremas importantes (2)

Soma de n variáveis aleatórias independentes

$Z = \sum x_i \quad i \in \{1..n\}$

- Teorema 2: Se $(m_i, s_i)$ são os parâmetros de $x_i$. então Z tem como parâmetros:
  - $m = \sum m_i$
  - $s^2 = \sum s_i^{\,2}$

# Teoremas importantes (3)

Uso da distribuição normal reduzida

- Teorema 3:
  - Seja X normal e sua distribuição cumulativa com parâmetros F (m , s).
  - Seja $\Phi$ a normal cumulativa reduzida (m=0 e s=1), então:
  - $P(a<x<=b)=F(b)-F(a)=\Phi((b- m)/ s )-\Phi((a- m)/ s )$

# Teoremas importantes (4)

Soma de n variáveis aleatórias independentes

- Teorema 4: Sejam ($m_i$, $s_i$) são os parâmetros de $x_i$ $i \in \{1..n\}$ onde $x_i$ segue uma normal e $Z = \sum x_i$.

Então Z segue uma distribuição **Normal** com:

  - Média(Z) = $m = \sum m_i$
  - Variância(Z) = $s^2 = \sum s_i^2$

# Teoremas importantes (5)

Teorema central do limite (TCL) (forma forte)

- Teorema 5: Se ($m_i$, $s_i$) são os parâmetros de $x_i$

  e $Z=\sum x_i \;\; i \in \{1..n\}$ onde $x_i$ segue uma distribuição qualquer.

  Então Z **tende** a uma distribuição normal:

  - Média(Z) = $m = \sum m_i$
  - Variância(Z) = $s^2 = \sum s_i^{\,2}$

  (vale para $n \to \infty$, na prática $n>30$)