Datenanalyse für Naturwissenschaftler*Innen
Statistische Methoden in Theorie und Praxis **Uni Freiburg**
Fernandez Lebron, Andres (RZ: af231) WiSe 2022/23

Blatt 03 10. November 2022

1	2	3	4	Σ
6/6	4,5/6	2/9	7,5/9	20/30

Aufgabe 1 (Fourierfaltung)

Gegeben seien zwei unabhängige Zufallsvariablen x und y, die beide gleichverteilt sind zwischen 0 und 1, d.h. ihre Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion ist gegeben durch

$$f_x(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

und analog durch $f_y(y)$. Benutzen Sie die Fourier-Faltung aus Vorlesung 4 um zu zeigen, dass die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $g(z)$ von $z = x + y$ gegeben ist durch:

$$g(z) = \begin{cases} z & 0 < z < 1, \\ 2 - z & 1 < z < 2, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Lösung

$$f_z(z) = \int_0^1 f_x(z-y) f_y(y) dy$$

Um $f_x(z-y) > 0$ zu sein, muss $0 < z - y < 1$. Also es gibt zwei Fälle: $z \in [0,1]$ und $z \in [1,2]$
Für $z \in [0,1]$:

$$\begin{aligned} f_z(z) &= \int_0^z f_x(z-y) f_y(y) dy + \int_z^1 f_x(z-y) f_y(y) dy \\ &= \int_0^z 1 dy \\ &= [y]_0^z \\ &= z \end{aligned}$$

Für $z \in [1,2]$:

$$\begin{aligned} f_z(z) &= \int_0^{z-1} f_x(z-y) f_y(y) dy + \int_{z-1}^1 f_x(z-y) f_y(y) dy \\ &= \int_{z-1}^1 1 dy \\ &= [y]_{z-1}^1 \\ &= 2 - z \end{aligned}$$

Also:

$$f_z(z) = \begin{cases} z & 0 < z < 1 \\ 2 - z & 1 < z < 2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Aufgabe 2 (Fehlerfortpflanzung)

Zwischen der an einem Leiter angelegten Spannung U, dem Widerstand R und dem fließenden Strom I besteht der Zusammenhang (Ohmsches Gesetz)

$$U = R \cdot I.$$

(a) Nehmen Sie an, der Strom wurde zu $I = 1370 \pm 25\,\mathrm{mA}$ und der Widerstand zu $3600 \pm 70\,\Omega$ gemessen. Berechnen Sie den Wert der Spannung und seinen Fehler. (2.5P)

(b) Nun haben Sie jeweils ein Gerät, das den Strom I und den Widerstand R messen kann. Sie wissen allerdings, dass die Messungen des Stroms und des Widerstands korreliert sind, da beide Geräte von derselben Firma hergestellt wurden. Drücken Sie die Abhängigkeit der Varianz der Spannung $V(U)$ durch die Varianzen $V(R)$ und $V(I)$ aus unter Berücksichtigung des Korrelationskoeffizienten $\rho_{I,R}$. Welchen Wert hat ΔU für $\rho_{I,R} = 0.5$? (3.5P)

Lösung

(a)

$$\begin{aligned}
U &= IR = 1.37\mathrm{A} \cdot 3600\Omega = 4932\mathrm{V} \\
s_U &= \sqrt{(\frac{\partial U}{\partial R})^2 \sigma_R^2 + (\frac{\partial U}{\partial I})^2 \sigma_I^2} \\
&= \sqrt{I^2 \sigma_R^2 + R^2 \sigma_I^2} \\
&= \sqrt{1.37\mathrm{A}^2 \cdot 70\Omega^2 + 3600\Omega^2 \cdot 0.025\mathrm{A}^2} \\
&= 132\mathrm{V} \\
U &= 4932 \pm 132\mathrm{V}
\end{aligned}$$

2,5/2,5

✓

(b)

$$\begin{aligned}
V(U) &= (\frac{\partial U}{\partial R})^2 V(R) + (\frac{\partial U}{\partial I})^2 V(I) + 2\frac{\partial U}{\partial I}\frac{\partial U}{\partial R} cov(I,R) \\
&= (\frac{\partial U}{\partial R})^2 V(R) + (\frac{\partial U}{\partial I})^2 V(I) + 2\frac{\partial U}{\partial I}\frac{\partial U}{\partial R} \rho_{I,R} \sqrt{V(R)}\sqrt{V(I)} \\
&= I^2 V(R)^2 + R^2 V(I)^2 + 2RI\rho_{I,R}\sqrt{V(R)}\sqrt{V(I)}
\end{aligned}$$

2/3,5

f

Für $\rho_{I,R} = 0.5$:

$$V(U) = 1.37\mathrm{A}^2 \cdot 70\Omega^2 + 3600\Omega \cdot 0.025\mathrm{A}^2 + 1.37\mathrm{A} \cdot 3600\Omega \cdot 0.5 \cdot \sqrt{70\Omega} \cdot \sqrt{0.025\mathrm{A}} \approx 12461\mathrm{V}^2$$

ff

$\sqrt{V(U)} = ?$

-0,5P für die Verwendung von V für Varianz und Einheit.

hier ist σ und nicht die Varianz gesucht

Aufgabe 3 (Algebraische und zentrale Momente)

Gegeben sei eine Zufallsvariable x mit der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion (WDF):

$$f(x) = \begin{cases} 3x(3-x^2)/8 & 0 \leq x \leq 2, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) Berechnen Sie die algebraischen Momente $\alpha_n = E[x^n]$ für $n = 1, \ldots, 4$. (4P)

(b) Verwenden Sie die Lösungen aus (a) um die 2., 3. und 4. zentralen Momente zu berechnen. Wie wird das jeweilige Moment auch genannt? (4P)

(c) Interpretieren Sie ihr Resultat. Was sagen die Momente über die WDF aus? (1P)

Lösung

(a)

$$\begin{aligned} n &= 1 : \alpha_1 = E[x] = \int_0^2 x f(x) dx = \int_0^2 \frac{3}{8} x^2 (3 - x^2) dx = \frac{3}{8} \int_0^2 (3x^2 - x^4) dx = \frac{3}{8}[x^3 - \frac{1}{5}x^5]_0^2 = 0.6 \\ n &= 2 : \alpha_2 = E[x^2] = \int_0^2 x^2 f(x) dx = \frac{3}{8} \int_0^2 (3x^4 - x^6) dx = \frac{3}{8}[\frac{3}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7]_0^2 \approx 0.34 \\ n &= 3 (\text{Analog zu n=1 und n=2}) : \alpha_3 = E[x^3] = \frac{3}{8}[\frac{3}{7}x^7 - \frac{1}{9}x^9]_0^2 \approx -0.76 \\ n &= 4 (\text{Analog}) : \alpha_3 = E[x^3] = \frac{3}{8}[\frac{3}{9}x^9 - \frac{1}{11}x^1 1]_0^2 \approx -5.82 \end{aligned}$$

✓ f f f

1/4

(b)

$$\begin{aligned} m_n &= E[(x-\mu)^n] \ \text{ wobei } \mu = E[x] = \alpha_1 \\ \int_0^2 f(x) dx &= \frac{3}{8}[\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3]_0^2 = 1.25 \\ m_2 &= E[(x-\mu)^2] = \int_0^2 (x-\mu)^2 \frac{3}{8} x (3 - x^2) dx \\ &= \frac{3}{8} \int_0^2 (x^2 - 2x\mu + \mu^2) x (3 - x^2) dx \\ &= \frac{3}{8} \int_0^2 (x^3(3-x^2) - 2^2(3-x^2) + \mu^2 x (3 - x^2)) dx \\ &= \alpha_2 - 2\mu\alpha_1 + \int_0^2 f(x) dx \\ &= 0.34 - 1.2 \cdot 0.6 + 0.6^2 \cdot 1.25 \\ &= 0.07 (=\text{Varianz}) \end{aligned}$$

0/4

f

$$
\begin{aligned}
m_3 &= E[(x-\mu)^3] = \int_0^2 (x-\mu)^3 \frac{3}{8} x(3-x^2)dx \\
&= \frac{3}{8}\int_0^2 (x^3 - \mu^3 - 3x^2\mu + 3x\mu^2)x(3-x^2)dx \\
&= \frac{3}{8}\int_0^2 (x^4(3-x^2) - \mu^3 x(3-x^2) - 3^3(3-x^2) + 3\mu^2 x^2(3-x^2))dx \\
&= \alpha_3 - \mu^3 \int_0^2 f(x)dx - 3\mu\alpha_2 + 3\mu^2\alpha_1 \\
&= -0.76 - 0.6^3 \cdot 1.25 - 0.34 \cdot 3 \cdot 0.6 + 3 \cdot 0.6^2 \cdot 0.6 \\
&= -0.994(=\text{Schiefe}) \quad f \\
m_4 &= E[(x-\mu)^4] = \int_0^2 (x-\mu)^4 \frac{3}{8} x(3-x^2)dx \\
&= \frac{3}{8}\int_0^2 (x^4 - 4x^3\mu + 6x^2\mu^2 - 4x\mu^3 + \mu^4)x(3-x^2)dx \\
&= \alpha_4 - 4\mu\alpha_3 + 6\mu^2\alpha_2 - 4\mu^3\alpha_1 + \int_0^2 f(x)dx \\
&= -5.82 + 4 \cdot 0.6 \cdot 0.76 + 6 \cdot 0.6^2 \cdot 0.34 - 4 \cdot 0.6^3 \cdot 0.6 + 0.6^4 \cdot 1.25 \\
&= -3.618(=\text{Kurtosis}) \quad f
\end{aligned}
$$

Schiefe : $\gamma = \frac{m_3}{\sigma^3}$ Kurtosis : $c = \frac{m_4}{\sigma^4} - 3$

(c) Die Varianz ist geringer als bei der Normalverteilung, was bedeutet, dass die Werte näher am Erwartungswert liegen als bei der Normalverteilung.
Aus der Schiefe können wir sagen, dass die Spitze der Verteilung rechts ist und der linke Schwanz länger ist.
Aus dem Kurtosis-Wert können wir sagen, dass die Verteilung im Vergleich zu einer Normalverteilung eine flachere Spitze und dünnere Enden hat oder dass es mehr Datenwerte in der Nähe des Mittelwerts und weniger Datenwerte an den Enden gibt. ✓

1/1