1	2	3	4	Σ
6/9	5,5/6	9/9	0/6	20,5/30

Blatt 02 — 3. November 2022

Aufgabe 1: Rekursive Mittelwert- und Varianzberechnung (9P)

Gegeben sei eine Stichprobe $(x_1, \dots, x_n)$. Zeigen Sie:

(a) Wenn $\bar{x}_{n-1}$ der Mittelwert der ersten $n-1$ Elemente ist, dann gilt: (4P)

$$\bar{x}_n = \bar{x}_{n-1} + \frac{x_n - \bar{x}_{n-1}}{n}$$

(b) Wenn σ_{n-1}^2 die Varianz der ersten $n-1$ Elemente ist, dann gilt: (5P)

$$\sigma_n^2 = \frac{(n-1)\sigma_{n-1}^2 + (x_n - \bar{x}_n)(x_n - \bar{x}_{n-1})}{n}$$

Lösung

(a)

$$\begin{aligned}
\text{Sei} \quad \bar{x}_{n-1} &= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} x_i \\
\bar{x}_n &= \frac{(x_1 + x_2 + \dots + \cancel{x_n - 1}\ x_{n-1}) + x_n}{n} \\
&= \frac{\underset{n}{\cancel{(n-1)}}\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n-1} x_i + x_n\right)}{n} \quad f \qquad 3/4 \\
&= \frac{n-1}{n}\bar{x}_{n-1} + \frac{1}{n}x_n \\
&= \bar{x}_{n-1} + \frac{x_n - \bar{x}_{n-1}}{n} \quad ✓
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
n\sigma_n^2 - (n-1)\sigma_{n-1}^2 &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}_n)^2 - \sum_{i=1}^{n-1}(x_i - \bar{x}_{n-1})^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n-1}((x_i - \bar{x}_n)^2 - (x_i - \bar{x}_{n-1})^2) + (x_n - \bar{x}_n)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n-1}(\cancel{x_i^2} - 2\cancel{x_i}\bar{x}_n - \bar{x}_n^2 - \cancel{x_i^2} + 2x_i\bar{x}_{n-1} - \bar{x}_{n-1}^2) + (x_n - \bar{x}_n)^2 \\
{*} \quad &= \sum_{i=1}^{n-1}(x_i - \bar{x}_n + x_i - \bar{x}_{n-1})(\bar{x}_{n-1} - \bar{x}_n) + (x_n - \bar{x}_n)^2 \quad ✓ \\
? \quad &= (\bar{x}_n - x_n)(\bar{x}_{n-1} - \bar{x}_n) + (x_n - \bar{x}_n)^2 \\
&= (x_n - \bar{x}_n)(x_n - \bar{x}_{n-1}) \\
\Rightarrow \sigma_n^2 &= \frac{(n-1)\sigma_{n-1} + (x_n - \bar{x}_n)(x_n - \bar{x}_{n-1})}{n}
\end{aligned}$$

was ist mit $\frac{1}{n}$ passiert?

3/5

du kannst mir dein Lösung gerne im Tutorat erklären. Ich kann deinen Lösungsweg nicht nachvollziehen

$$* \quad \frac{n-1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}(\underbrace{x_i}_{\bar{x}_{n-1}} - \bar{x}_n + \underbrace{x_i}_{\bar{x}_{n-1}} - \bar{x}_{n-1}) = (n-1)\left(\bar{x}_{n-1} - \frac{\bar{x}_n}{n-1}\right) \neq \bar{x}_n - x_n$$

Aufgabe 2: Marginal- und bedingte Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen (6P)

Betrachten Sie die multivariate Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion (WDF):

$$f(x,y) = \begin{cases} x+y & 0<x<1 \text{ und } 0<y<1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) Wie lauten die marginalen WDFs $f_x(x)$ und $f_y(y)$? Stellen Sie Ihre Formen in einer einfachen Skizze dar. (2P)

(b) Sind x und y unabhängig? Erläutern Sie Ihre Antwort. (2P)

(c) Wie lauten die bedingten WDFs $g(x|y)$ und $h(y|x)$ und wie sind diese mit Bayes' Theorem verbunden? Zeigen Sie, dass diese Beziehung konsistent mit den marginalen WDFs ist, die Sie im vorherigen Teil gefunden haben. (2P)

Lösung

(a)

+ Skizze

1,5/2

$$f_x(x) = \int_0^1 f(x,y)dy = \int_0^1 (x+y)dy = [yx + \frac{1}{2}y^2]_0^1 = x + \frac{1}{2}$$
$$f_y(y) = \int_0^1 f(x,y)dx = \int_0^1 (x+y)dx = [\frac{1}{2}x^2 + yx]_0^1 = y + \frac{1}{2}$$ ✓

(b) x und y sind unabhängig, wenn $f(x,y) = f_x(x)f_y(y)$

$$f_x(x)f_y(y) = (x+\frac{1}{2})(y+\frac{1}{2}) = xy + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{4} \neq x + y = f(x,y)$$ ✓ 2/2

x und y sind abhängig.

(c)

Die bedingten WDFs :

$$h(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_x(x)}$$
$$g(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_y(y)}$$

Bayes' Theorem:

$$g(x|y) = \frac{h(y|x)f_x(x)}{f_y(y)}$$

Überprüfung von Bayes' Theorem:

$$h(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_x(x)} = \frac{x+y}{x+\frac{1}{2}}$$ ✓

2/2

$$g(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_y(y)} = \frac{x+y}{y+\frac{1}{2}}$$ ✓

$$\begin{aligned} g(x|y) &= \frac{h(y|x)f_x(x)}{f_y(y)} \\ &= \frac{\frac{x+y}{x+\frac{1}{2}}(x+\frac{1}{2})}{y+\frac{1}{2}} \\ &= \frac{x+y}{y+\frac{1}{2}} \end{aligned}$$ ✓

Aufgabe 3: Histogramme, Graphen und ein Spiel (9P)

Laden Sie die Datei `Uebung02_Aufgabe3.ipynb` im selben Ordner herunter. In diesem Notebook finden Sie eine Anleitung wie Sie die Spielshow mit den drei Türen aus Übung 1 simulieren und grafisch darstellen können. Die genauen Instruktionen finden Sie in der Aufgabenstellung im Jupyter Notebook.

Lösung

siehe IPYNB-Datei.

Aufgabe 4: Manipulierter Würfel (6P)

Ein Würfelhersteller produziert manipulierte und faire Würfel. Die manipulierten werden für Demonstrationen beim Unterrichten von Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik verwendet. Nachfolgende Tabelle stellt die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Würfelaugen für die beiden Würfeltypen dar.

Würfeltyp	1	2	3	4	5	6
fair	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6
manipuliert	3/15	1/15	1/3	2/15	3/15	1/15

Tabelle 1: Wahrscheinlichkeitsverteilung der Würfelaugen für die beiden Würfeltypen

(a) Bestimmen Sie den Mittelwert und die Varianz der Würfelaugen für beide Würfeltypen. (2P)

(b) Nun möchte die Firmenleitung eine Demonstration durchführen und hat jeweils einen fairen und einen manipulierten Würfel gewählt. Leider wurde vergessen, die Würfel zu markieren, so dass nicht bekannt ist, welcher der beiden Würfel manipuliert ist. Sie nehmen jetzt einen der beiden Würfel und würfeln eine 3. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass dies der manipulierte Würfel ist? Verwenden Sie zur Berechnung das Bayes-Theorem. (4P)

Lösung

(a)

0/2

$$\begin{aligned}
\mu_{\text{fair}} &= \frac{\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}}{6} = \frac{1}{6} && f \\
\sigma^2_{\text{fair}} &= \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6}(x_i-\mu_{\text{fair}})^2 = 0 && f \\
\mu_{\text{manipuliert}} &= \frac{\frac{3}{15}+\frac{1}{15}+\frac{1}{3}+\frac{2}{15}+\frac{3}{15}+\frac{1}{15}}{6} = \frac{1}{6} && f \\
\sigma^2_{\text{manipuliert}} &= \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6}(x_i-\mu_{\text{manipuliert}})^2 \approx 0.009 && f
\end{aligned}$$

(b)

0/4

$$\begin{aligned}
P(\text{Manipuliert}|3) &= \frac{P(3|\text{Manipuliert})P(\text{Manipuliert})}{P(3)} \\
&= \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}} \\
&\approx 0.67 && f
\end{aligned}$$