Datenanalyse für Naturwissenschaftler*Innen
Statistische Methoden in Theorie und Praxis
Fernandez Lebron, Andres (RZ: af231)

Uni Freiburg
WiSe 2022/23

Blatt 05 — 25. November 2022

Aufgabe 1 (Erwartungstreue)

6,5/8

Gegeben sei eine Stichprobe $(x_1, \ldots, x_n)$ vom Umfang n. Der Erwartungswert $E[x]$ der zugrundeliegenden Wahrscheinlichkeitsverteilung sei μ.

(a) Zeigen Sie, dass der Schätzer für den Mittelwert der wahren Verteilung

$$\hat{\mu} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \overline{x}$$

erwartungstreu ist. (1P)

(b) Nehmen Sie nun an, dass der wahre Wert des Mittelwertes der zugrundeliegenden Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion bekannt ist. Zeigen Sie, dass der Schätzer für die Varianz der wahren Verteilung

$$\hat{V}(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2$$

erwartungstreu ist. (1P)

(c) Nehmen Sie nun an, dass der wahre Wert des Mittelwertes nicht bekannt ist und stattdessen der Schätzer aus (a) verwendet wird. Zeigen Sie, dass die so erhaltene Varianz nicht erwartungstreu ist. (3P)

(d) Wie muss man den Schätzer für die Varianz modifizieren, um zu einem erwartungstreuen Schätzer zu kommen? (3P)

Lösung

(a)

$$\begin{aligned}
E\left[\overline{x}\right] &= E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right] \\
&= \frac{1}{n} \cdot E\left[\sum_{i=1}^{n} x_i\right] \\
&= \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} E\left[x_i\right] \\
&= \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \mu \\
&= \frac{1}{n} \cdot n \cdot \mu \\
&= \mu
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ ist erwartungstreu ✓

1/1

■

(b)

$$
\begin{aligned}
\hat{V}(x) &= E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\right] \\
&= E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - 2\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\cdot\mu + \frac{n}{n}\mu^2\right] \\
&= E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right] - 2E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\right]E\left[\mu\right] + E\left[\mu^2\right] \\
&= E\left[x^2\right] - 2E\left[\mu\right]E\left[\mu\right] + \mu^2 \\
&= E\left[x^2\right] - 2\mu^2 + \mu^2 \\
&= E\left[x^2\right] - \mu^2 \\
&= E\left[x^2\right] - E\left([x]\right)^2 \\
&= Var(x)
\end{aligned}
$$

1/1

✓

■

(c)

Sei $\mu = E[x]$, $\sum_{i=1}^{n} \iff \sum$, $\hat{V}(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i) - \overline{x}^2$

$$
\begin{aligned}
E\left[\hat{V}(x)\right] &= E\left[\frac{1}{n}\sum(x_i-\overline{x})^2\right] = \\
&= E\left[\frac{1}{n}\sum(x_i-\mu+\mu+\overline{x})^2\right] = \\
&= E\left[\frac{1}{n}\sum(x_i-\mu)^2 - 2(x_i-\mu)(\overline{x}-\mu) + (\overline{x}-\mu)^2\right] \\
&= E\left[\frac{1}{n}\sum(x_i-\mu)^2 - 2\frac{1}{n}\sum(x_i-\mu)(\overline{x}-\mu) + \frac{1}{n}\sum(\overline{x}-\mu)^2\right] \\
&= E\left[\frac{1}{n}\sum(x_i-\mu)^2 - \frac{1}{n}2(\overline{x}-\mu)\sum(x_i-\mu) + \frac{n}{n}(\overline{x}-\mu)^2\right] \\
&\overset{*}{=} E\left[\frac{1}{n}\sum(x_i-\mu)^2 - \frac{1}{n}2(\overline{x}-\mu)\cdot n(\overline{x}-\mu) + (\overline{x}-\mu)^2\right] \\
&= E\left[\frac{1}{n}\sum(x_i-\mu)^2 - 2(\overline{x}-\mu) + (\overline{x}-\mu)\right] \\
&= E\left[\frac{1}{n}\sum(x_i-\mu)^2 - (\overline{x}-\mu)^2\right] \\
&= E\left[\frac{1}{n}\sum(x_i-\mu)^2\right] - E\left[\ (\overline{x}-\mu)^2\right] \\
&= \mathrm{Var}(x) - \underbrace{E\left[(\overline{x}-\mu)^2\right]}_{=\frac{1}{n}\mathrm{Var}(x)} \\
&= \frac{n-1}{n}\mathrm{Var}(x) \neq \mathrm{Var}(x) \\
&\Rightarrow \text{ist nicht erwartungstreu}
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{* \ \overline{x}-\mu = \frac{1}{n}\sum(x_i-\mu) = \frac{1}{n}\sum x_i - \frac{1}{n}\sum\mu = \frac{1}{n}\sum(x_i-\mu)}
$$

+ Rechnung

3/3

✓

für d)

Faktor $\frac{n}{n-1}$ zu nutzen, sodass $\hat{V}(x) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2$ und dann:

$$
\begin{aligned}
E[\hat{V}] = \frac{n}{n-1}E\left[\hat{V}(x)\right] &\overset{(b)}{=} \frac{n}{n-1}\cdot\frac{n-1}{n}\mathrm{Var}(x) \\
&= \mathrm{Var}(x)
\end{aligned}
$$

1,5/3

Aufgabe 2 (Stühle und Tische)

6/6

Eine Firma erhält den Auftrag, für die oberen Klassen einer Schule neue Schulmöbel herzustellen. Da zufallsbedingte Ungenauigkeiten in der Herstellung nicht ausgeschlossen werden können, wurde angenommen, dass die Höhe der Stühle in guter Approximation als normalverteilte Zufallsvariable angesehen werden kann mit einer durchschnittlichen Sitzhöhe von 84 cm und einer Standardabweichung von 5 cm.

(a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein Stuhl eine Sitzhöhe von mindestens 81 cm hat. Verwenden Sie dazu die Tabelle für die Standardnormalverteilung aus Vorlesung 6 und eine dafür geeignete Variablentransformation. (3P)
Hinweis: es reicht aus nur die erste Spalte zu betrachten.

(b) Berechnen Sie nun die Mindesthöhe x der 20% höchsten Stühle. (3P)

Lösung μ, $\overline{x} = 84cm$, $\sigma = 5cm$

(a)

$$\begin{aligned} z_0 &= \frac{x_0 - \mu}{\sigma} \\ &= \frac{81 - 84}{5} \\ &= -\frac{3}{5} \\ &= -0.6 \end{aligned}$$

✓

3/3

$$\begin{aligned} P(x \geq 81) &= P(z \geq -0.6) \\ &= 1 - P(z \geq +0.6) \\ &= 1 - (1 - P(z \leq 0.6)) \\ &= P(z \leq 0.6) \\ &\overset{\text{(tabelle)}}{=} 0.7257 \end{aligned}$$

✓

(b)

$$P = 0.8 \overset{\text{(tabelle)}}{\Rightarrow} z_0 = 0.85$$

3/3

$$\begin{aligned} x_0 &= \mu + \sigma z_0 \\ &= 84 + 5 \cdot 0.85 \\ &= 88.25cm \text{ Mindesthöhe für die 20\% höchsten Stühle} \end{aligned}$$

✓

Aufgabe 3 (Binomial- und Poissonverteilungen)

Lösung

Siehe Jupyter Notebook Aufgabenblatt.

Aufgabe 4 (Zentraler Grenzwertsatz)

Lösung

Siehe Jupyter Notebook Aufgabenblatt.