Albert-Ludwigs-Universität Freiburg Wintersemester 2022/23

Datenanalyse für Naturwissenschaftler*Innen
Statistische Methoden in Theorie und Praxis

Vorlesung: Dr. Andrea Knue

Übungsleitung: Dr. Constantin Heidegger

Übung 3

Ausgabe: 4. November 2022 10:00 Uhr, Abgabe: 11. November 2022 bis 10:00 Uhr via Ilias

Aufgabe 1: Fourierfaltung (6P)

Gegeben seien zwei unabhängige Zufallsvariablen x und y, die beide gleichverteilt sind zwischen 0 und 1, d.h. ihre Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion ist gegeben durch

$$f_x(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

und analog durch $f_y(y)$. Benutzen Sie die Fourier-Faltung aus Vorlesung 4 um zu zeigen, dass die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $g(z)$ von $z = x + y$ gegeben ist durch:

$$g(z) = \begin{cases} z & 0 < z < 1, \\ 2 - z & 1 < z < 2, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Aufgabe 2: Fehlerfortpflanzung (6P)

Zwischen der an einem Leiter angelegten Spannung U, dem Widerstand R und dem fließenden Strom I besteht der Zusammenhang (Ohmsches Gesetz)

$$U = R \cdot I.$$

(a) Nehmen Sie an, der Strom wurde zu $I = 1370 \pm 25\,\text{mA}$ und der Widerstand zu $3600 \pm 70\,\Omega$ gemessen. Berechnen Sie den Wert der Spannung und seinen Fehler. (2.5P)

(b) Nun haben Sie jeweils ein Gerät, das den Strom I und den Widerstand R messen kann. Sie wissen allerdings, dass die Messungen des Stroms und des Widerstands korreliert sind, da beide Geräte von derselben Firma hergestellt wurden. Drücken Sie die Abhängigkeit der Varianz der Spannung $V(U)$ durch die Varianzen $V(R)$ und $V(I)$ aus unter Berücksichtigung des Korrelationskoeffizienten $\rho_{I,R}$. Welchen Wert hat ΔU für $\rho_{I,R} = 0.5$? (3.5P)

Aufgabe 3: Algebraische und zentrale Momente (9P)

Gegeben sei eine Zufallsvariable x mit der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion (WDF):

$$f(x) = \begin{cases} 3x(3-x^2)/8 & 0 \leq x \leq 2, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) Berechnen Sie die algebraischen Momente $\alpha_n = E[x^n]$ für $n = 1, \ldots, 4$. (4P)

(b) Verwenden Sie die Lösungen aus (a) um die 2., 3. und 4. zentralen Momente zu berechnen. Wie wird das jeweilige Moment auch genannt? (4P)

(c) Interpretieren Sie ihr Resultat. Was sagen die Momente über die WDF aus? (1P)

Aufgabe 4: Zwei- und dreidimensionale Verteilungen (9P)

Laden Sie die Datei `Uebung03_Aufgabe4.ipynb` im selben Ordner herunter. In diesem Jupyter Notebook finden Sie die genauen Instruktionen sowie eine Anleitung, wie Sie zwei- und dreidimensionale Verteilungen darstellen können.