1 | 2 | 3 | 4 | Σ
3,5/6 | 4/8 | 12/12 | 3/4 | 22,5/30

Datenanalyse für Naturwissenschaftler*Innen
Statistische Methoden in Theorie und Praxis **Uni Freiburg**
Fernandez Lebron, Andres (RZ: af231) WiSe 2022/23

Blatt 06 2. Dezember 2022

Aufgabe 1 (Zweidimensionale Gaußverteilung)

Betrachten Sie die zweidimensionale Gaußverteilung:

$$P(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{(1-\rho^2)}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2 + \left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)\left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right)\right]\right)$$

mit Korrelationskoeffizient ρ.

(a) Zeigen Sie, dass ein Schnitt durch die Verteilung entlang y für festes x eine Gaußverteilung mit Standardabweichung $\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}$ und Mittelwert $\mu_y + \rho(\sigma_y/\sigma_x)(x-\mu_x)$ ergibt. (3P)

(b) Die unitäre Matrix $U = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ diagonalisiert den Exponenten des Gauß, da die x und y Achsen um den Winkel θ auf die Hauptachsen von Ellipsen projiziert werden. Wir bezeichnen diese neuen Achsen u und v. D.h. wir transformieren die Gaußverteilung von den Variablen σ_x, σ_y, ρ zu den neuen Variablen $\sigma_u, \sigma_v, \theta$, wobei u und v (im Gegensatz zu x und y) nun unkorreliert sind. Zeigen Sie, dass folgende Beziehungen gelten: (3P)

$$\tan 2\theta = \frac{2\rho\sigma_x\sigma_y}{\sigma_y^2 - \sigma_x^2}$$

$$\sigma_u^2 = \frac{\sigma_x^2\cos^2\theta - \sigma_y^2\sin^2\theta}{\cos^2\theta - \sin^2\theta}$$

$$\sigma_v^2 = \frac{\sigma_y^2\cos^2\theta - \sigma_x^2\sin^2\theta}{\cos^2\theta - \sin^2\theta}$$

Lösung

(a) a)

$$h(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_x(x)}$$

$$\Rightarrow E(y|x = const.) = \int yh(y|x)dy$$

o.k.

Bitte mehr Text der deine Lösung motiviert. Ich kann sie nicht nachvollziehen. Wenn du mir die Aufgabe im Tutorat erklären kannst bekommst du dafür auch Punkte.

oder ⇒ auch?

1/3

Sei $E(y|x = const) = ax + b;\ a, b = const.$;

$$\Rightarrow E(E(y|x)) = E(ax+b)$$
$$= a\mu_x + b \iff b = \mu_y - a\mu_x$$

$$Cov(x,y) = \underbrace{E(cov(x,y|x))}_{=0} + Cov(E(x|x), E(y|x))$$
$$= Cov(x, ax+b)$$
$$= a\sigma_x \cdot \sigma_x$$
$$= a\sigma_x^2$$

und

$$
\begin{aligned}
Cov(x,y) &= \rho\sigma_x\sigma_y \\
&\Rightarrow \rho\sigma_x\sigma_y = a\sigma_x^2 \\
&a = \rho\frac{\sigma_y}{\sigma_x} \\
&\Rightarrow E(y|x) = ax + b = \rho\frac{\sigma_y}{\sigma_x}x + \mu_y - \rho\frac{\sigma_y}{\sigma_x\mu_x} = \rho\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x-\mu_x) \quad + \mu_y \quad f
\end{aligned}
$$

b) $\sigma_{y|x}^2 = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(y-\mu_y|x)^2\underbrace{h(y|x)\cdot f_x(x)}_{=f(x,y)}\mathrm{d}y\mathrm{d}x$

subscript

$$\sigma_{y|x}^2\overbrace{\int f_x(x)\mathrm{d}x}^{=1} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(y-\mu_{y|x})^2 f(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x \qquad ?$$

$$
\begin{aligned}
\sigma_{y|x}^2 &= E((y-\mu_{y|x})^2) \\
&= E((y-\mu_{y|x} - \rho\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x-\mu_x)^2)) \qquad ? \\
&= E((y-\mu_{y|x})^2) - 2\rho\frac{\sigma_y}{\sigma_x}E((y-\mu_y)(x-\mu_x)) + \rho^2\frac{\sigma_x^2}{\sigma_y^2}E((x-\mu_x)^2) \\
&= \sigma_y^2 - 2\rho\frac{\sigma_y}{\sigma_x}\rho\sigma_x\sigma_y + \rho^2\frac{\sigma_y^2}{\sigma_x^2}\sigma_x^2 \\
&= \sigma_y^2 - 2\rho^2\sigma_y^2 + \rho^2\sigma_y^2 \\
&= \sigma_y^2 - \rho^2\sigma_y^2 \\
&= \sigma_y^2(1-\rho^2) \\
&\Rightarrow \sigma_{y|x} = \sqrt{\sigma_y^2(1-\rho^2)} = \sigma_y\sqrt{1-\rho^2}
\end{aligned}
$$

■

(b)

$$
\begin{aligned}
Cov(u,v) &= U\ Cov(x,y)\\
&= U^T \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_x^2 & \rho\sigma_x\sigma_y \\ \rho\sigma_x\sigma_y & \sigma_y^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} \sigma_x^2\cos\theta + \rho\sigma_x\sigma_y\sin\theta & \rho\sigma_x\sigma_y\cos\theta - \sigma_y^2\cos\theta \\ \sigma_x^2\sin\theta + \rho\sigma_x\sigma_y\cos\theta & \rho\sigma_x\sigma_y\sin\theta + \sigma_y^2\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

?

Sei $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$? das hast du nicht gerechnet

$Cov(u,v) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$

$$
\begin{aligned}
a_1 &= \sigma_x^2\cos^2\theta - \rho\sigma_x\sigma_y\sin\theta\cos\theta - \rho\sigma_x\sigma_y\cos\theta\sin\theta + \sigma_y^2\sin^2\theta\\
&= \sigma_x^2\cos^2\theta + \sigma_y^2\sin^2\theta - 2\rho\sigma_x\sigma_y\sin\theta\cos\theta\\
a_2 &= \sigma_x^2\cos\theta\sin\theta - \rho\sigma_x\sigma_y\sin^2\theta + \rho\sigma_x\sigma_y\cos^2\theta - \sigma_y^2\sin\theta\cos\theta\\
&= \sin\theta\cos\theta(\sigma_x^2 - \sigma_y^2) + \rho\sigma_x\sigma_y(\cos^2\theta - \sin^2\theta)\\
a_3 &= \sigma_x\sin\theta\cos\theta + \rho\sigma_x\sigma_y\cos^2\theta - \rho\sigma_x\sigma_y\sin^2\theta - \sigma_y^2\cos\theta\sin\theta\\
&= \sin\theta\cos\theta(\sigma_x^2 - \sigma_y^2) + \rho\sigma_x\sigma_y(\cos^2\theta - \sin^2\theta)\\
a_4 &= \sigma_x^2\sin^2\theta + \rho\sigma_x\sigma_y\cos\theta\sin\theta + \rho\sigma_x\sigma_y\sin\theta\cos\theta + \sigma_y^2\cos^2\theta\\
&= \sigma_x^2\sin^2\theta + 2\rho\sigma_x\sigma_y\cos\theta\sin\theta + \sigma_y^2\cos^2\theta
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow Cov(u,v) &= \begin{pmatrix} \sigma_u^2 & 0 \\ 0 & \sigma_v^2 \end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} \sigma_x^2\cos^2\theta + \sigma_y^2\sin^2\theta - 2\rho\sigma_x\sigma_y\sin\theta\cos\theta & \sin\theta\cos\theta(\sigma_x^2 - \sigma_y^2 + \rho\sigma_x\sigma_y(\cos^2\theta - \sin^2\theta)) \\ \sin\theta\cos\theta(\sigma_x^2 - \sigma_y^2) + \rho\sigma_x\sigma_y(\cos^2\theta - \sin^2\theta) & \sigma_x^2\sin^2\theta + 2\rho\sigma_x\sigma_y\cos\theta\sin\theta + \sigma_y^2\cos^2\theta \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow (1)\ & \overbrace{\sin\theta\cos\theta}^{=\frac{1}{2}\sin 2\theta}(\sigma_x^2\sigma_y^2) + \rho\sigma_x\sigma_y\overbrace{(\cos^2\theta - \sin^2\theta)}^{=\cos 2\theta} = 0\\
& \rho\sigma_x\sigma_y\cos 2\theta = \frac{1}{2}\sin 2\theta(\sigma_y^2 - \sigma_x^2)\\
& \frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta} = \frac{2\rho\sigma_x\sigma_y}{(\sigma_y^2 - \sigma_x)}\\
& \tan 2\theta = \frac{2\rho\sigma_x\sigma_y}{\sigma_y^2 - \sigma_x}
\end{aligned}
$$

✓

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow (2)\ \sigma_u^2 &= \sigma_x^2\cos^2\theta + \sigma_y^2\sin^2\theta - 2\rho\sigma_x\sigma_y\sin\theta\cos\theta\\
&\overset{\text{aus (1)}}{=} \sigma_x^2\cos^2\theta + \sigma_y^2\sin\theta - (\sigma_y^2 - \sigma_x^2)\frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta}\sin\theta\cos\theta\\
&= \sigma_x^2\cos^2\theta + \sigma_y^2\sin\theta - (\sigma_y^2 + \sigma_x^2)\frac{2\sin^2\theta\cos^2\theta}{\cos^2\theta - \sin^2\theta}\\
&= \sigma_x^2\cos^2\theta + \frac{2\sigma_x^2\sin^2\theta\cos^2\theta}{\cos^2\theta - \sin^2\theta} + \sigma_y^2\sin^2\theta - \frac{2\sigma_y^2\sin^2\theta\cos^2\theta}{\cos^2\theta - \sin^2\theta}\\
&= \frac{\sigma_x^2\cos^4\theta + \sigma_x^2\sin^2\theta\cos^2 - \sigma_y^2\sin^4\theta - \sigma_y^2\sin^2\cos^2\theta}{\cos^2\theta - \sin^2\theta}\\
&= \frac{\sigma_2\cos^2\theta(\cos^2\theta + \sin^2\theta) - \sigma_y^2\sin^2\theta(\cos^2\theta + \sin^2\theta)}{\cos^2\theta - \sin^2\theta}\\
&= \frac{\sigma_x^2\cos^2\theta - \sigma_y^2\sin^2\theta}{cos^2\theta - \sin^2\theta}
\end{aligned}
$$

$\tan(2\theta)$

Formatierung ↯

✓

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow (3)\ \sigma_v^2 &= \sigma_x^2\sin^2\theta + \sigma_y^2\cos^2\theta + 2\rho\sigma_x\sigma_y\sin\theta\cos\theta\\
&= \sigma_x^2\sin^2\theta + \sigma_y^2\cos^2\theta + (\sigma_y^2\sigma_x^2)\frac{2\sin^2\theta\cos^2\theta}{\cos^2\theta - \sin^2\theta}\\
&= \text{...Analog zu (2), aber } \sigma_y\sigma_x \text{ werden vertauscht}\\
&= \frac{\sigma_y^2\cos^4\theta + \sigma_y^2\sin^2\cos^2\theta - \sigma_x^2\sin^4\theta - \sigma_x^2\sin^2\theta\cos^2\theta}{\cos^2\theta - \sin^2\theta}\\
&= \frac{\sigma_y^2\cos^2\theta - \sigma_x^2\sin^2\theta}{\cos^2\theta - \sin^2\theta}
\end{aligned}
$$

✓

2,5/3

■

Aufgabe 2 (Transformationsmethode)

(a) Zeigen Sie, dass die Transformation, um aus gleichverteilten Zufallszahlen im Intervall $[0,1]$ Zufallszahlen nach einer Potenzverteilung

$$f(x) = (n+1)\,x^n, \quad 0 \le x \le 1, \quad n > -1$$

zu erzeugen, gegeben ist durch:

$$x(r) = r^{\frac{1}{n+1}}.$$

(b) Betrachten Sie jetzt die Breit-Wigner-Verteilung

$$f(x) = \frac{2}{\pi\Gamma}\frac{\Gamma^2}{4\,(x-x_0)^2 + \Gamma^2}.$$

Benutzen Sie das Ergebnis für die Cauchyverteilung aus der Vorlesung, um eine Transformation zu ermitteln, mit der sich Breit-Wigner-verteilte Zufallszahlen erzeugen lassen. (3P)

(c) Zeigen Sie, dass man Zufallszahlen gemäß der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion

$$g(x) = xe^{-x} \qquad 0 < x < \infty$$

erzeugen kann durch die Transformation:

$$x = -\ln(x_1 x_2),$$

wobei x_1, x_2 zwei gleichverteilte Zufallszahlen im Intervall $[0,1]$ sind. Nutzen Sie dazu die Transformationsvorschrift für Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen und die Tatsache, dass das Produkt $z = x_1 x_2$ zweier gleichverteilter Zufallszahlen x_1, x_2 im Intervall $[0,1]$ gemäß $f(z) = -\ln z$ verteilt ist. (3P)

Lösung

(a)

$$f(x) = (n+1)x^n,\ 0 \le x \le 1,\ n > 1$$

$$\Gamma = f(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x')dx' = \int_{-\infty}^{x} (n+1)x'^n dx' = \int_{-\infty}^{0} \underbrace{(n+1)}_{=0} x'^n dx' + \int_0^x (n+1)x'^n dx'$$

$$= \left[\frac{n+1}{n+1}x'^{n+1}\right]_0^x = x^{n+1}$$

2/2

$$\Rightarrow \Gamma = x^{n+1}$$

$$x = \Gamma^{\frac{1}{n+1}}$$ ✓

■

(b)

↯ Γ ≠ r

Cauchy: $x_0 = 0, \Gamma = 2$

$$f(x) = \frac{2}{\pi\Gamma}\frac{\Gamma^2}{4(x-x_0)^2\Gamma^2}$$

$$r\ \cancel{\Gamma} = F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{2\Gamma^2}{\Gamma}\frac{1}{4(x'-x_0)+\Gamma^2}\,dx' = \frac{2\Gamma}{\pi}\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{4(x'-x_0)^2+\Gamma^2}\,dx'$$

2/3

$$= \frac{2\cancel{\Gamma}}{\pi}\left[\frac{1}{2\cancel{\Gamma}}\ \arctan\left(\frac{2(x'-x_0)}{\cancel{\Gamma}}\right)\right]_{-\infty}^{x} = \frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{2(x-x_0)}{\Gamma}\right) - \left(\frac{1}{\pi}\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$
\begin{aligned}
\Gamma \text{mit u} &= \frac{2(x' - x_0)}{\Gamma} \\
\Rightarrow &\int \frac{1}{u^2 u}(Cauchy) \\
&= \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{2(x - x_0)}{\Gamma}\right) + \frac{1}{2} = \overset{r}{\cancel{\Gamma}} \\
\Rightarrow &\arctan\left(\frac{2(x - x_0)}{\Gamma}\right) = \pi\left(\overset{r}{\cancel{\Gamma}} - \frac{1}{2}\right) \\
x &= \frac{\Gamma}{2} \tan\left(\pi(\overset{r}{\cancel{\Gamma}} - \frac{1}{2}) + x_0\right)
\end{aligned}
$$

■

Aufgabe 3 (Zufallszahlengeneratoren)

Lösung

Siehe Jupyter Notebook Aufgabenblatt.

Aufgabe 4 (MMonte-Carlo Integration)

Lösung

Siehe Jupyter Notebook Aufgabenblatt.