Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών

Αλγόριθμοι και Πολυπλοκότητα

3η σειρά γραπτών ασκήσεων

Αλέξανδρος Μαυρογιάννης
03109677 7ο εξάμηνο

Άσκηση 1: Προβολή Ταινιών

Στην περιγραφή του αλγορίθμου χρησιμοποιούνται λίστες για ευκρίνεια, αλλα μπορεί πολύ εύκολα να υλοποιηθεί μόνο με arrays.

Έστω οτι οι προτιμήσεις του i-οστού συνδρομητή αποτελούν ενα ζεύγος τιμών $pair(i)$ (όπου pair(i).l και pair(i).r οι ξεχωριστές προτιμήσεις του ζεύγους) και η έξοδος είναι μια λίστα *list* απο τέτοια ζεύγη, οπου τα πρώτα στοιχεία όλων των ζευγών αντιστοιχούν στο σύνολο των ταινιών που θα προσφέρονται το Σάββατο (και συμβολίζονται με τη λίστα list.l) και τα δεύτερα στοιχεία στο σύνολο των ταινιών που προσφέρονται τη Κυριακή (και συμβολίζονται με την list.r). Κάθε στοιχείο pair(i).l ή pair(i).r έχει μια boolean τιμή pair(i).pointed που ξεκινάει ως false.

Έστω ακόμα με βάση αυτές τις δομές τις ακόλουθες διαδικασίες:

- swap(pair) που ανταλλάσει τις τιμές μεταξύ των στοιχείων ενός ζεύγους
- can_add(list, pair) που εξετάζει σειριακά την λίστα και επιστρέφει:
  - 1 αν $pair.l \notin list.l$, $pair.r \notin list.r$ οπου το $pair$ μπορεί να προστεθεί στη list όπως είναι.
  - 2 αν $pair.r \in list.r$, $pair.l \notin list.l$ και πρέπει να προστεθεί μόνο το $pair.l$. Στην περίπτωση αυτή, το στοιχείο list(i).r που αντιστοιχεί στο pair.r σημαδεύεται ως list(i).r.pointed=true.
  - 3 αν $pair.l \in list.l$, $pair.r \notin list.r$ και πρέπει να προστεθεί μόνο το *pair.r*. Στην περίπτωση αυτή, το στοιχείο list(i).l που αντιστοιχεί στο pair.l σημαδεύεται ως list(i).l.pointed=true.
  - 4 αν $pair.l \in list.l$ και $pair.r \in list.r$, οπου δεν χρειάζεται να προστεθεί τιποτα. Στην περίπτωση αυτή, list(i).r.pointed=true και list(i).l.pointed=true .
  - 0 αν το pair δεν μπορεί να προστεθεί στην list, επειδή και τα δύο του στοιχεία υπάρχουν είτε στην list.l είτε στην list.r .
- add(list,pair, mode) που προσθέτει στη list το pair με τον τρόπο που περιγράφεται απο το mode, σύμφωνα με τους κωδικούς που επιστρέφει η can_add.

- Η can_swap(pair) που επιστρέφει true αν pair.l.pointed=false και pair.r.pointed=false

Έτσι, ο ψευδοκώδικας είναι:

```
list=empty
for i =1 to n{
`       temp=can_add(list,pair(i))                // pros8iki tis neas timis an ginetai
        if (temp != 0){
                add(list,pair(i),temp)
        } else {                                  // an de ginetai,
                if can_swap(pair(i)){             // elegxos an ginetai swap i nea timi
                        swap(pair(i))
                        temp=can_add(list,pair(i))
                        if temp!=0{                       // swap, kai pros8iki an ginetai
                                add(list,pair(i),temp)
                        } else{
                                swap(pair(i))             //undo swap
                        }
                } else{                 // swap osa idi yparxonta zevgaria ginetai
                for j = (i-1) to 0 {
                        if can_swap(list(j)){
                                swap(list(j))
                                temp=can_add(list,pair(i))
                                if temp!=0{
                                        add(list,pair(i),temp)
                                        break
                                } else{
                                        swap(list(j))
                                }
                        }
                }               // an den ginetai, pros8iki tainias kai tin alli mera
                if   pair(i).l ∈ list.l
                        add(list,pair(i),3)
                else if   pair(i).l ∈ list.l
                        add(list,pair(i),3)
        }
}
```

Λόγω της ανάγκης για j επαναλήψεις σε κάθε i και εως (j+1) κλήσεις της can_swap σε κάθε j, η πολυπλοκότητα είναι $O(n^3)$

Άσκηση 2: Μέτρηση Συντομότερων Μονοπατιών

Έστω οτι s είναι η αφετηρία. Τότε, D(v) είναι η ελάχιστη απόσταση μιας κορυφής v απο την s και N(v) είναι ο αριθμός των ελαχίστων μονοπατιών μεχρι αυτη. Έχουμε:

$D(s)=0,\ N(s)=1$

$D(v) = min_{w \in neighbours}(D(w)+1)$ και

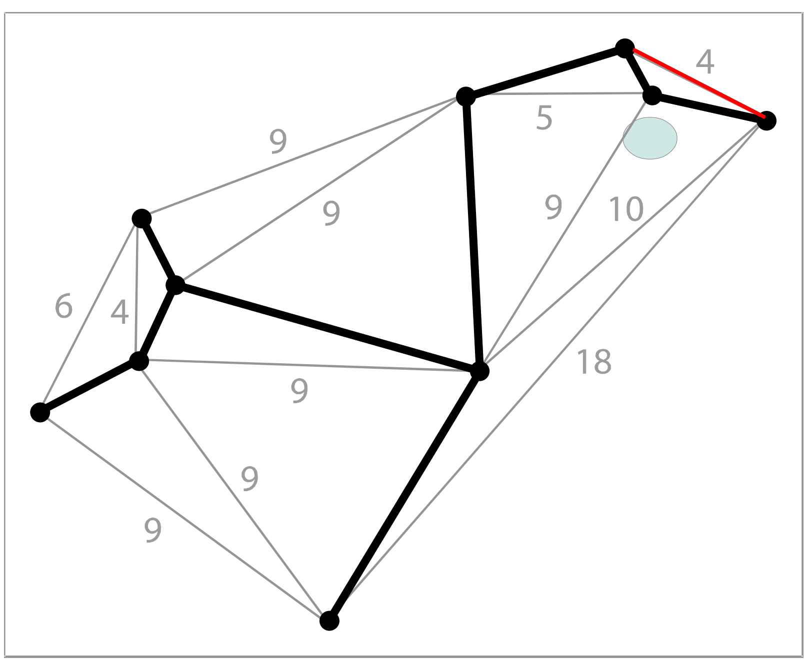
$N(v) = \sum_{w \in neighbours:\ D(w)=D(v)} N(w)$

όπου το σύνολο neighbours συμβολίζει το σύνολο των γειτονικών κορυφών με προορισμό προς τον κόμβο v.

Έτσι, υπολογίζουμε για κάθε κορυφή τις D και N, ξεκινώντας απο την s και συνεχίζοντας με τις γειτονικές της, και έπειτα με τις γειτονικές τους, ωστε να καταλήψουμε στον προορισμό t, οπου το αποτέλεσμα θα είναι N(t). Η χρονική πολυπλοκότητα είναι Θ(V) , μιας και η καθε κορυφή εξετάζεται μονο μια φορά. Η χωρική πολυπλοκότητα ειναι πάλι Θ(V), αφου χρειάζεται για κάθε κορυφή η αποθήκευση 2 τιμών.

Άσκηση 3: Ελάχιστο Συνδετικό Δέντρο υπο περιορισμούς

(α) Στον παρακάτω γράφο είναι τονισμένο το ελάχιστο συνδετικό δέντρο. Άν το σύνολο L συμπεριλαμβάνειει όλα τα ήδη υπάρχοντα φύλλα αλλα καί την κυκλωμένη κορυφή, τότε το ελάχιστο συνδετικό δέντρο υπο περιορισμούς θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει την ακμή που είναι τονισμένη με κόκκινο, και άρα να είναι διαφορετικό απο το ελάχιστο συνδετικό δέντρο του γράφου. Θεωρούμε πως α βάρη που δεν τονίζονται είναι όλα μικρότερα του 4.

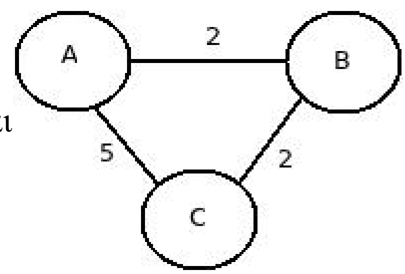


(β) Αρκεί μια μικρή παραλλαγή στον αλγόριθμο του Kruskal:

- Έστω ενα δάσος F οπου κάθε κορυφή του αρχικού γράφου αποτελεί ενα δέντρο.
- Έστω ακόμα το σύνολο S όλων των ακμών του γράφου.
- Ταξινομούμε το S σε αύξουσα σειρά σε $O(|E| \log |E|)$
- Όσο το S δεν είναι κενό και όλα τα δέντρα του F δεν είναι συνδεδεμένα:
    - Αφαίρεση της ακμής με ελάχιστο βάρος απο το S
    - Αν η ακμή αυτή συνδέει δυο δέντρα στο F:
        - Αν κάποια κορυφή απο τα άκρα της ακμής ανήκει στο L και αν αυτή παραμένει φύλλο μετά απο την προσθήκη στο F, τότε προστίθεται στο F , αλλιώς αγνοείται
        - Αν δεν ανήκει στο L, προσθήκη της ακμής στο F.

Μόλις τερματίσει ο αλγόριθμος, θα έχει παραμείνει στο δάσος το ελάχιστο συνδετικό δέντρο οπου όλες οι κορυφές που ανήκουν στο L είναι φύλλα. Η πολυπλοκότητα είναι ίδια με τον αλγόριθμο του Kruskal και της ταξινόμησης, $O(|E| \log |E|)$.

Άσκηση 4: Μοναδικότητα Ελάχιστου Συνδετικού Δέντρου



(α) Έστω ο γράφος του σχήματος με τρείς κορυφές A,B,C και τρείς ακμές με βάρη 2,2 και 5. Το ΕΣΔ αποτελείται απο τις ακμές με βάρη 2 και 2, και είναι μοναδικό αφου οποιοδήποτε άλλο συνδετικό δέντρο αποτελείται απο ακμές με βάρη 2 και 5.

(β) Υπάρχει ιδιότητα των ΕΣΔ που τονίζει πως αν για κάποια τομή `(S,V \ S)` του γράφου υπάρχει μοναδική ελάχιστη ακμή που διασχίζει την `(S,V \ S)`, τότε η ακμή αυτή ανήκει στο ΕΣΔ του γράφου αυτου. Έτσι, αν υπάρχουν μοναδικές ελάχιστες ακμές για όλες τις τομές του γράφου, τότε μονο αυτές αποκλειστικά θα ανήκουν στο ΕΣΔ, και άρα το ΕΣΔ θα είναι μοναδικό αφού όλες οι ακμές που το αποτελούν είναι μοναδικές.

Για αντιπαράδειγμα, έστω πάλι ο απλός γράφος του (α) και S={B}. Σε αυτή την περίπτωση, οι ακμές που διασχίζουν την `(S,V \ S)` είναι ίδιου βάρους, αλλα αποτελούν το ΕΣΔ του γράφου.

(γ) Η συνθήκη είναι: Αν σε κάθε τομή του γράφου όλες οι ακμές ελάχιστου βάρους ανήκουν ταυτόχρονα στο ΕΣΔ, τότε το ΕΣΔ είναι μοναδικό.

Θεωρούμε ως Α ενα ΕΣΔ το οποίο ικανοποιεί τη παραπάνω συνθήκη. Έστω οτι υπάρχει ενα άλλο ΕΣΔ, Β, ίδιου βάρους με το Α το οποίο διαφέρει απο αυτό (τουλάχιστον) σε μια ακμή e_1. Αφού το Α είναι ΕΣΔ που δεν περιλαμβάνει την e_1, θα υπάρχει σίγουρα στον γράφο ενας κύκλος C. Άρα, αφου το Β είναι ΕΣΔ, θα πρέπει να υπάρχει μια ακμή $e_2 \in C$ στο Α που να μην ανήκει στο Β.
Έτσι, παίρνουμε μια τομή (S, V \ S) την οποία διασχίζουν και οι δυο ακμές $e_{1,} e_2$.
Άν e1<e2 τότε το Β δεν είναι ΕΔΤ και αν e2<e1 τότε το Α δεν είναι ΕΔΤ, λόγω του ερωτήματος (β).
Αν e1=e2 τότε δεν θα ανήκουν όλες οι μη-μοναδικές ελάχιστες ακμές στο ίδιο ΕΣΔ, άρα δεν θα ικανοποιείται η συνθήκη.
Επομένως, δεν γίνεται να υπάρχει άλλο ΕΣΔ, και άρα το Α είναι μοναδικό.

(δ) Παραλλάσοντας τον αλγόριθμο του Kruskal, έχουμε:

- Έστω ενα δάσος F οπου κάθε κορυφή του αρχικού γράφου αποτελεί ενα δέντρο.
- Έστω ακόμα το σύνολο S όλων των ακμών του γράφου.
- Ταξινομούμε το S σε αύξουσα σειρά σε $O(|E| \log |E|)$
- Όσο το S δεν είναι κενό και όλα τα δέντρα του F δεν είναι συνδεδεμένα:
    - Αφαίρεση όλων των ακμών με το ελάχιστο βάρος απο το S και τοποθέτηση σε ενα σύνολο T
    - Αν όλες οι ακμές του T συνδέουν διαφορετικά δέντρα στο F ταυτόχρονα, προσθήκη της ακμής στο F.
    - Αν καμία ακμή του T δεν συνδέει δέντρα, τότε αυτή η ελάχιστη τιμή αγνοείται.
    - Αν μερικές ακμές συνδέουν δέντρα και μερικές όχι, τότε δεν υπάρχει μοναδικό ελάχιστο ΕΣΔ
- Αν βρέθηκε ΕΣΔ, τότε τότε αυτό είναι μοναδικό

Πάλι, η πολυπλοκότητα είναι ίδια με την ταξινόμηση και τον αλγόριθμο του Kruskal, δηλαδή $O(|E| \log |E|)$.

Άσκηση 5: Υπολογισμός Ελάχιστου Συντακτικού Δέντρου με Διαγραφή Ακμών

(α) Έστω Α το ΕΣΔ του G που περιέχει την *e*, τότε εφόσον το Α είναι ΕΣΔ, θα υπάρχει ακμή *e'* που ανήκει στον C και δεν ανήκει στο Α. Αφού $e > e'$, το Α δεν είναι ΕΣΔ, αφού υπάρχει ΕΣΔ με μικρότερο βάρος. Επομένως δεν γίνεται να υπάρχει ΕΣΔ που να περιέχει την e. //tofix

(β)

(γ)