7 juin 2021

Se concentrer sur l'essentiel

— On peut sauter le calcul du biais dans la question 3 du premier problème et se concentrer sur l'interprétation quand $m = 1$ ou $m \to +\infty$.

— Pour la question 2 de l'exercice 2, on pourra admettre que $\mathbb{P}(M = \mu | X_1, X_2, \ldots, X_n)$ est proportionnelle à

$$\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{n}{\sigma^2} + \frac{1}{\tau^2}\right)\mu^2 - 2\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{\sigma^2} + \frac{m}{\tau^2}\right)\mu + \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{\sigma^2} + \frac{m^2}{\tau^2}\right).$$

— On peut sauter le calcul de la question 2.c du troisième problème (la réponse est 2) et se concentrer sur l'interprétation du résultat.

— On peut sauter la question 3 du troisième problème.

1 Estimateur du nombre de boules dans une urne

On considère une urne contenant n boules, numérotées de 1 à n. On ne connaît pas n et on souhaite l'estimer. Pour cela, on procède à m tirages avec remise.

1. Donner un estimateur simple de n.
2. Calculer l'estimateur par maximum de vraisemblance de n.
3. Montrer que le biais de cet estimateur est

$$-\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^m.$$

   Que vaut-il quand $m = 1$? Quand $m \to +\infty$?

2 Estimation de densité

Considérons une variable aléatoire X suivant une loi normale de paramètres μ et σ^2.

1. Étant donné un échantillon de $n \in \mathbb{N}^*$ observations de X, calculer l'estimateur par maximum de vraisemblance de μ et σ.
2. Supposons maintenant que μ est la réalisation d'une variable aléatoire réelle M qui suit une loi normale de moyenne m et de variance τ^2. Calculer l'estimateur de Bayes de μ.
3. Décomposer l'estimateur de Bayes de μ en la somme d'un terme fonction de la moyenne empirique de l'échantillon et un terme dépendant de la moyenne a priori. Que se passe-t-il quand n augmente ?

3 Distribution de Rayleigh

Soit H une variable aléatoire modélisant la hauteur journalière maximale atteinte par un cours d'eau. On suppose que H suit une distribution de Rayleigh de densité

$$f(x;a) = \begin{cases} \dfrac{x}{a}\exp\left(-\dfrac{x^2}{2a}\right) & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où le paramètre a est inconnu. Supposons que l'on dispose d'une série statistique $\{h_1,h_2,\ldots h_n\}$ d'observations indépendantes de H. Proposer une estimation de la probabilité $P(H > \bar{h})$, où $\bar{h} > 0$ est une hauteur donnée arbitraire.