1 Решение задачи 2

Пусть $\mathcal{L} = \{c^i a^n b^k a^j \,|\, (k > n) \vee (i = j \,\&\, n > 2)\}$. Язык $\mathcal{L} \in \mathtt{CFL}$, поскольку $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2$, где

$$\mathcal{L}_1 = \{c^i a^n b^k a^j \,|\, k > n\} \in \mathtt{CFL},$$

$$\mathcal{L}_2 = \{c^i a^n b^k a^j \,|\, i = j \,\&\, n > 2\} \in \mathtt{CFL}.$$

Язык $\mathcal{L}$ недетерминирован, так как $\mathcal{L}_2 \notin \mathtt{DCFL}$. Докажем это с помощью леммы о накачке для $\mathtt{DCFL}$. Пусть n — длина накачки. Рассмотрим слова

$$w_1 = c^n a^{n+2} \in \mathcal{L}_2,$$

$$w_2 = c^n a^{n+2} b a^n \in \mathcal{L}_2.$$

У них общий префикс $x = c^n a^{n+1}$, $|x| > n$, и различные суффиксы $y = a$ и $z = aba^n$ соответственно, причём $y[0] = z[0]$. Будем предполагать выполненным пересечение с регулярной аппроксимацией $c^* a^2 a^* b? a^*$.

Пусть накачивается только префикс x, т.е. существует разбиение $x = x_0 x_1 x_2 x_3 x_4$, $|x_1 x_3| > 0$, $|x_1 x_2 x_3| \leq n$, такое, что $(\forall i \in \mathbb{N})\ x_0 x_1^i x_2 x_3^i x_4 y \in \mathcal{L}_2$ и $x_0 x_1^i x_2 x_3^i x_4 z \in \mathcal{L}_2$. Рассмотрим разбиения префикса x.

- $x_1 x_3 = c^i$ для некоторого i. Отрицательная накачка рассинхронизирует число букв c и a в слове w_1;
- $x_1 = c^i$, $x_3 = a^j$ для некоторых i, j. При отрицательной накачке наблюдаем рассинхронизацию числа букв c и a уже в слове w_2;
- $x_1 x_3 = a^i$ для некоторого i. Вновь отрицательная накачка рассинхронизирует число букв c и a в слове w_1.

Пусть теперь префикс x и суффиксы y, z накачиваются синхронно, т.е. существуют разбиения $x = x_0 x_1 x_2$, $y = y_0 y_1 y_2$, $z = z_0 z_1 z_2$, где $|x_1 x_2| \leq n$, $|x_1| > 0$, такие, что $(\forall i \in \mathbb{N})\ x_0 x_1^i x_2 y_0 y_1^i y_2 \in \mathcal{L}_2$ и $x_0 x_1^i x_2 z_0 z_1^i z_2 \in \mathcal{L}_2$. Заметим, что $x_1 = a^i$ для некоторого i. Какое бы мы ни выбрали разбиение y ($y_1 = a$ или $y_1 = \varepsilon$), при отрицательной накачке слово w_1 выходит из языка из-за рассинхронизации числа букв a и c. Таким образом, $\mathcal{L}_2 \notin \mathtt{DCFL}$, и $\mathcal{L} \notin \mathtt{DCFL}$.