Домашнее задание № 3.
<u>Методы многомерного поиска.</u>

<u>Цель работы:</u>

1. **Изучение алгоритмов многомерного поиска 1-го и 2-го порядка.**
2. **Разработка программ реализации алгоритмов многомерного поиска 1-го и 2-го порядка.**
3. **Вычисление экстремумов функции.**

<u>Методические указания.</u>

4.2.1. Метод наискорейшего градиентного спуска.
Стратегия поиска.

Стратегия решения задачи состоит в построении последовательности точек $\{x^k\}, k=0,1,\ldots,$ таких, что $f(x^{k+1})<f(x^k), k=0,1,\ldots$. Точки последовательности $\{x^k\}$ вычисляются по правилу $x^{k+1}=x^k-\alpha^k\nabla f(x^k)$, где точка x^0 задается пользователем; величина шага α^k определяется для каждого значения k из условия:

$$\varphi(\alpha^k)=f(x^k-\alpha^k\nabla f(x^k))\to\min_{\alpha^k}.$$

Решение задачи $\alpha^{*k}=Arg\min f(x^k+\alpha^k d^k)$, где $d^k=-\nabla f(x^k)$, может осуществляться с использованием необходимого условия минимума $\frac{d\varphi(\alpha^k)}{d\alpha^k}=0$ с последующей проверкой достаточного условия минимума $\frac{d^2\varphi(\alpha^k)}{d\alpha^{k2}}>0$. Такой путь может быть использован либо при простой минимизирующей функции $\varphi(\alpha^k)$, либо при аппроксимации достаточно сложной функции $\varphi(\alpha^{*k})=f(x^k-\alpha^k\nabla f(x^k))$ полиномом $P(\alpha^k)$ (как правило, второй или третьей степени), и тогда условие $\frac{d\varphi(\alpha^k)}{d\alpha^k}=0$ замещается условием $\frac{dP(\alpha^k)}{d\alpha^k}=0$, а условие $\frac{d^2\varphi(\alpha^k)}{d\alpha^{k2}}>0$ - условием $\frac{d^2P(\alpha^k)}{d\alpha^{k2}}>0$.

Другой путь решения задачи $\alpha^{*k}=Arg\min f(x^k+\alpha^k d^k)$ связан с использованием численных методов, когда ищется $\min_{\alpha^k\in[a,b]}\varphi(\alpha^{*k})=\min_{\alpha^k\in[a,b]}f(x^k-\alpha^k\nabla f(x^k))$, т.е. с использованием методов одномерного поиска. Границы интервала $\lfloor a,b\rfloor$ задаются пользователем. При этом степень близости найденного значения α^k к оптимальному значению α^{*k}, удовлетворяющему условиям $\frac{d\varphi(\alpha^k)}{d\alpha^k}=0$ и $\frac{d^2\varphi(\alpha^k)}{d\alpha^{k2}}>0$, зависит от задания интервала $\lfloor a,b\rfloor$ и точности методов одномерной минимизации.

Построение последовательности $\{x^k\}, k=0,1,\ldots,$ заканчивается в точке x^k, для которой $\|\nabla f(x^k)\|<\varepsilon_1$, где $\varepsilon_1>0$ - заданное число, или если $k\geq M$, M - предельное число итераций, или при двукратном одновременном выполнении неравенств $\|x^{k+1}-x^k\|<\varepsilon_1, |f(x^{k+1})-f(x^k)|<\varepsilon_2$, где ε_2 - малое положительное число. Вопрос о том, может ли точка x^k рассматриваться как найденное приближение искомой точки локального минимума x^*, решается путем дополнительного исследования.

Алгоритм.

Ш.1. Задать x^0, $\varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 > 0$, предельное число итераций M. Найти градиент функции в начальной точке $\nabla f(x^0) = \left[\frac{\partial f(x^0)}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_n}\right]^T$.

Ш.2. Положить $k = 0$.

Ш.3. Вычислить $\nabla f(x^k)$.

Ш.4. Проверить выполнение критерия окончания $\|\nabla f(x)\| < \varepsilon_1$:

$a)$ если неравенство выполнено, то $x^* = x^k$;

$b)$ если нет, то перейти на Ш.6.

Ш.5. Проверить выполнение неравенства $k \geq M$:

$a)$ если неравенство выполнено, то $x^* = x^k$;

$b)$ если нет, то перейти на Ш.6.

Ш.6. Вычислить величину шага $\alpha^{*k} = Arg \min f(x^k + \alpha^k d^k)$, где $d^k = -\nabla f(x^k)$.

Ш.7. Вычислить $x^{k+1} = x^k - \alpha^k \nabla f(x^k)$.

Ш.8. Проверить выполнение условий: $\|x^{k+1} - x^k\| < \varepsilon_1, \left| f(x^{k+1}) - f(x^k) \right| < \varepsilon_2$:

$a)$ если оба условия выполнены при текущем значении k и $k = k - 1$, то $x^* = x^{k+1}$; расчет окончен;

$b)$ если хотя бы одно из условий не выполнено, то положить $k = k + 1$ и перейти на Ш.3.

Замечание 3.2.

Метод наискорейшего спуска гарантирует сходимость последовательности $\{x^k\}$ к точке минимума для сильно выпуклых функций.

4.2.2. Метод Флетчера-Ривза и Полака-Рибьера.

Постановка задачи

Требуется найти безусловный минимум функции $f(x)$ многих переменных, т,е. найти такую точку $x^* \in R^n$, что $f(x^*) = \min_{x \in R^n} f(x)$ на множестве допустимых решений $X \in R^n$. При этом предполагается использование методов одномерного поиска $\alpha^{*k} = Arg \min_{\alpha^k \in R^1} f(x^k + \alpha^k d^k)$ для определения величины шага в направлении поиска d^k.

Стратегия поиска.

Стратегия метода Флетчера-Ривза (FR) состоит в построении последовательности точек $\{x^k\}, k = 0,1,\ldots$, таких, что $f(x^{k+1}) < f(x^k), k = 0,1,\ldots$. Точки последовательности $\{x^k\}$ вычисляются по правилу:

$$x^{k+1} = x^k + \alpha^k d^k, k = 0,1,\ldots; \qquad (4.1.1.)$$

$$d^k = -\nabla f(x^k) + w^{k-1} d^{k-1}; \qquad (4.1.2.)$$

$$d^0 = -\nabla f(x^0); \qquad (4.1.3.)$$

$$w^{k-1} = \frac{\|\nabla f(x^k)\|^2}{\|\nabla f(x^{k-1})\|^2}. \qquad (4.1.4.)$$

Точка x^0 задается пользователем, величина шага α^{*k} определяется для каждого значения k из условия $\alpha^{*k} = Arg \min\limits_{\alpha^k \in R^1} f(x^k + \alpha^k d^k)$. Решение задачи одномерной минимизации может осуществляться либо из условия $\frac{d\varphi(\alpha^k)}{d\alpha^k} = 0, \frac{d^2\varphi(\alpha^k)}{d\alpha^{k2}} > 0$, либо численно, с использованием методов одномерной минимизации, когда решается задача:

$$\varphi(\alpha^k) \to \min_{\alpha^k \in [a,b]}. \qquad (4.1.5.)$$

При численном решении задачи определения величины шага степень близости найденного значения α^k к оптимальному значению α^{*k}, удовлетворяющему условиям $\frac{d\varphi(\alpha^k)}{d\alpha^k} = 0, \frac{d^2\varphi(\alpha^k)}{d\alpha^{k2}} > 0$, зависит от задания интервала $[a,b]$ и точности одномерной минимизации.

Вычисление величины w^{k-1} по формуле (4.1.4.) обеспечивает для квадратичной формы $f(x) = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} {}_{ij}\, x_i x_j$ построение последовательности H-сопряженных направлений $d^0, d^1, \ldots, d^k, \ldots$, для которых $\langle d^j, Hd^i \rangle = 0,\ \forall i, j = 0,1,\ldots,k; i \neq j$. При этом в точках последовательности $\{x^k\}$ градиенты функции $f(x)$ взаимно перпендикулярны, т.е. $\langle \nabla f(x^{k+1}), \nabla f(x^k) \rangle = 0,\ k = 0,1,\ldots$.

Для квадратичных функций $f(x)$ с матрицей $H > 0$ метод Флетчера-Ривза является конечным и сходится за число шагов, не превышающее n - размерность x вектора переменных.

При минимизации неквадратичных функций метод не является конечным, при этом следует отметить, что погрешность в решении задачи (4.1.5.) приводит к нарушению не только перепендикулярности градиентов, но и H-сопряженности направлений. Для неквадратичных функций, как правило, используется алгоритм Полака-Рибьеры, когда в формулах (4.1.1. – 4.1.3.) величина w^{k-1} вычисляется следующим образом:

Флетчер-Ривз:

$$w^{k-1} = \begin{cases} \frac{\|\nabla f(x^k)\|^2}{\|\nabla f(x^{k-1})\|^2}, & k \notin J, \\ 0, & k \in J, \end{cases}$$

Полак-Рибьр:

$$w^{k-1} = \begin{cases} \frac{\langle \nabla f(x^k), [\nabla f(x^k) - \nabla f(x^{k-1})] \rangle}{\|\nabla f(x^{k-1})\|^2}, & k \notin J, \\ 0, & k \in J, \end{cases}$$

где $J = \{0, n, 2n, \ldots\}$. В отличие от алгоритма Флетчера-Ривза алгоритм Полака-Рибьера предусматривает использование итерации наискорейшего спуска через каждые n шагов. Построение последовательности $\{x^k\}$ заканчивается в точке, для которой $\|\nabla f(x^k)\| < \varepsilon_1$, где $\varepsilon_1 > 0$ - заданное число, или при $k \geq M$, M - предельное число итераций, или при двукратном одновременном выполнении двух неравенств $\|x^{k+1} - x^k\| < \delta_2, |f(x^{k+1}) - f(x^k)| < \varepsilon_2$, где δ_2, ε_2 - малые положительные числа. Вопрос о том, может ли точка x^k рассматриваться как найденное приближение искомой точки минимума, решается путем проведения дополнительного исследования.

Алгоритм.

Ш.1. Задать $x^0, \varepsilon_1, \delta_2, \varepsilon_2, M$ - предельное число итераций. Вычислить градиент $\nabla f(x^0)$.

Ш.2. Положить $k=0$.

Ш.3. Вычислить $\nabla f(x^k)$.

Ш.4. Проверить выполнение критерия окончания $\|\nabla f(x^k)\| < \varepsilon_1$:

$a)$ если критерий выполнен, $x^* = x^k$, расчет заканчивается;

$b)$ если нет, то перейти на Ш.5.

Ш.5. Проверить условие $k \geq M$:

$a)$ если неравенство выполняется, то расчет окончен и $x^* = x^k$;

$b)$ если нет, то при $k=0$ перейти на Ш.6., а при $k \geq 1$ перейти на Ш.7.

Ш.6. Определить $d^0 = -\nabla f(x^0)$.

Ш.7. Определить

Флетчер-Ривз:
$$w^{k-1} = \frac{\|\nabla f(x^k)\|^2}{\|\nabla f(x^{k-1})\|^2}$$
, или

Полак-Рибьер:
$$w^{k-1} = \begin{cases} \dfrac{\langle \nabla f(x^k), [\nabla f(x^k) - \nabla f(x^{k-1})] \rangle}{\|\nabla f(x^{k-1})\|^2}, & k \notin J, \\ 0, & k \in J. \end{cases}$$

Ш.8. Определить $d^k = -\nabla f(x^k) + w^{k-1} d^{k-1}$.

Ш.9. Найти α^{*k} из условия $\alpha^{*k} = Arg \min\limits_{\alpha^k \in R^1} f(x^k + \alpha^k d^k)$.

Ш.10. Вычислить $x^{k+1} = x^k + \alpha^k d^k$.

(Ш.10. Для алгоритма Полака-Рибьера: Если $k=n$, то переход на Ш.2)

Ш.11. Проверить выполнение условий $\|x^{k+1} - x^k\| < \delta_2, |f(x^{k+1}) - f(x^k)| < \varepsilon_2$:

$a)$ в случае выполнения обоих условий в двух последовательных итерациях с номерами k и $k-1$ расчет окончен, найдена точка $x^* = x^k$.

$b)$ если не выполняется хотя бы одно из условий, полагаем $k = k+1$ и переход на Ш.3.

4.2.3. Метод Девидона-Флетчера-Пауэлла.

Постановка задачи

Пусть дана функция $f(x)$, ограниченная снизу на множестве R^n и имеющая непрерывные частные производные во всех его точках (т.е. $f(x) \in C^1(X)$, $X = R^n$).

Требуется найти локальный минимум функции $f(x)$ на множестве допустимых решений $X = R^n$, т.е. найти такую точку $x^* \in R^n$, что $f(x^*) = \min\limits_{x \in R^n} f(x)$.

Стратегия поиска.

Стратегия метода Девидона-Флетчера-Пауэлла (DFP) состоит в построении последовательности точек $\{x^k\}$, таких, что $f(x^{k+1}) < f(x^k), k = 0,1,...$. Точки последовательности $\{x^k\}$ вычисляются по правилу:

$$x^{k+1} = x^k - \alpha^{*k} G^{k+1} \nabla f(x^k), \; k = 0,1,..., \qquad (4.2.1.)$$

где G^{k+1} - матрица размера $n \times n$, являющаяся аппроксимацией обратной матрицы Гессе. Она вычисляется по правилу:

$$G^{k+1} = G^k + \Delta G^k, G^0 = E, \qquad (4.2.2.)$$

$$\Delta G^k = \frac{\Delta x^k (y^k)^T}{(y^k)^T \Delta g^k} - \frac{G^k \Delta g^k (G^k \Delta g^k)^T}{(\Delta g^k)^T G^k \Delta g^k}, \qquad (4.2.3.)$$

где $\Delta x^k = x^{k+1} - x^k, \Delta g^k = \nabla f(x^{k+1}) - f(x^k)$.

Точка x^0 задается пользователем, величина шага α^{*k} определяется из условия:

$$\alpha^{*k} = Arg \min_{\alpha^k \in [a,b]} \varphi(x^k + \alpha^k d^k). \qquad (4.2.4.)$$

Решение задачи (4.2.4.) может выполняться как из условия $\frac{d\phi(\alpha)}{d\alpha^k} = 0, \frac{d^2\phi(\alpha)}{d\alpha^{k\,2}} > 0$, либо численно, с использованием методов одномерной минимизации, когда решается задача: $\varphi(\alpha^k) \to \min_{\alpha^k \in [a,b]}$ оптимизации.

Формулы (4.2.2.), (4.2.3.) при аналитическом решении задачи (4.2.4.) обеспечивают построение последовательности $\{G^k\}$ положительно определенных матриц, таких, что $G^k \to H^{-1}(x^*)$ при $k \to \infty$. Следствием этого для квадратичной функции $f(x) = \frac{1}{2}\langle Hx, x\rangle + \langle b, x\rangle, H > 0$, является тот факт, что направления $d^k, k = 0,1,...,$ будут H -сопряженными и, следовательно, алгоритм DFP сойдется не более чем за n шагов.

Для неквадратичных функций $f(x)$ алгоритм DFP перестаёт быть конечным и его сходимость зависит от точности решения задачи (4.2.4.). Глобальную сходимость алгоритма можно гарантировать лишь при его обновлении через каждые n шагов, т.е. когда в формуле (4.2.1.):

$$G^{k+1} = \begin{cases} E, k \in J; J = \{0, n, 2n, ...\}, \\ G^k + \Delta G^k, k \notin J. \end{cases}$$

Построение последовательности $\{x^k\}$ заканчивается в точке x^{*k}, для которой $\nabla f(x^k) < \varepsilon_1$, где ε_1 - заданное число, или при $k \ge M$ (M - предельное число итераций), или при двукратном одновременном выполнении двух неравенств: $\|x^{k+1} - x^k\| < \delta_2, |f(x^{k+1}) - f(x^k)| < \varepsilon_2$, где $\delta_2 > 0, \varepsilon_2 > 0$ - малые положительные числа. Вопрос о том, может ли точка x^k рассматриваться как найденное приближение искомой точки x^* минимума, решается путем проведения дополнительного исследования.

Алгоритм.

Ш.1. Задать $x^0, \varepsilon_1, \delta_2, \varepsilon_2, M$ - предельное число итераций. Найти градиент $\nabla f(x^0)$.

Ш.2. Положить $k = 0, G^0 = E$.

Ш.3. Вычислить $\nabla f(x^k)$.

Ш.4. Проверить критерий окончания $\|\nabla f(x^k)\| < \varepsilon_1$:

$a)$ если критерий выполнен, $x^* = x^k$, расчет заканчивается;

$b)$ Если нет, то перейти на Ш.5.

Ш.5. Проверить условие $k \geq M$:

$a)$ если неравенство выполняется, то расчет окончен и $x^* = x^k$;

$b)$ если нет, то при $k = 0$ перейти на Ш.10., а при $k \geq 1$ перейти на Ш.6.

Ш.6. Вычислить $\Delta g^k = \nabla f(x^{k+1}) - \nabla f(x^k)$.

Ш.7. Вычислить $\Delta x^k = x^{k+1} - x^k$.

Ш.8. Вычислить $$\Delta G^k = \frac{\Delta x^k \left(\Delta x^k\right)^T}{\left(\Delta x^k\right)^T \Delta g^k} - \frac{G^k \Delta g^k \left(\Delta g^k\right)^T G^{kT}}{\left(\Delta g^k\right)^T G^k \Delta g^k}.$$

Ш.9. Вычислить $G^{k+1} = G^k + \Delta G^k$.

Ш.10. Определить $d^k = -G^{k+1} \nabla f(x^k)$.

Ш.11. Вычислить $$\alpha^{*k} = Arg \min_{\alpha^k \in [a,b]} f(x^k + \alpha^k d^k).$$

Ш.12. Вычислить $x^{k+1} = x^k + \alpha^{*k} d^k$.

Ш.13. Проверить условия $\left\| x^{k+1} - x^k \right\| < \delta_2, \left| f(x^{k+1}) - f(x^k) \right| < \varepsilon_2$:

$a)$ в случае выполнения обоих условий в двух последовательных итерациях с номерами k и $k - 1$ расчет окончен, найдена точка $x^* = x^{k+1}$.

$b)$ если не выполняется хотя бы одно из условий, полагаем $k = k + 1$ и переход на Ш.3.

4.2.4. Метод Бройдена-Флетчера-Гольдфарба-Шенно.(BFGS).

Обозначим

[illegible]

Тогда

[illegible]

Отсюда

$$H^{k+1} = H^k + \frac{y_k y_k^T}{y_k^T s_k} - \frac{H^k s_k s_k^T H^k}{s_k^T H^k s_k}$$

Такая замена обеспечивает более устойчивый процесс

поиска экстремума. Как видно из соотношений для H^{k+1} и $\tilde{H}^{k+1}$ формулы

пересчета для DFP и BFGS взаимнообратны.

$$\tilde{H}^{k+1} = \tilde{H}^k + \frac{(s_k - \tilde{H}^k y_k) s_k^T + s_k (s_k - \tilde{H}^k y_k)^T}{s_k^T y_k} - \frac{(s_k - \tilde{H}^k y_k)^T y_k}{(s_k^T y_k)^2} s_k s_k^T$$

$$\tilde{H}^{k+1} = \left(I - \frac{s_k y_k^T}{s_k^T y_k}\right) \tilde{H}^k \left(I - \frac{y_k s_k^T}{s_k^T y_k}\right) + \frac{s_k s_k^T}{s_k^T y_k}.$$

$$H^{k+1} = H^k + \frac{(y_k - H^k s_k) y_k^T + y_k (y_k - H^k s_k)^T}{y_k^T s_k} - \frac{(y_k - H^k s_k)^T s_k}{(y_k^T s_k)^2} y_k y_k^T$$

$$H^{k+1} = \left(I - \frac{y_k s_k^T}{y_k^T s_k}\right) H^k \left(I - \frac{s_k y_k^T}{y_k^T s_k}\right) + \frac{y_k y_k^T}{y_k^T s_k}.$$

4.2.4. Метод Левенберга-Марквардта.

Постановка задачи

Пусть дана функция $f(x)$, ограниченная снизу на множестве R^n и имеющая непрерывные вторые частные производные во всех его точках (т.е. $f(x) \in C^2(X),\ X = R^n$).

Требуется найти локальный минимум функции $f(x)$ на множестве допустимых решений $X = R^n$, т.е. найти такую точку $x^* \in R^n$, что $f(x^*) = \min\limits_{x \in R^n} f(x)$.

Стратегия поиска.

Стратегия метода Левенберга-Марквардта (LM) состоит в построении последовательности точек $\{x^k\}$, таких, что $f(x^{k+1}) < f(x^k),\ k = 0,1,\ldots$. Точки последовательности $\{x^k\}$ вычисляются по правилу:

$$x^{k+1} = x^k - \left[H(x^k) + \mu^k E\right]^{-1} \nabla f(x^k),\ k = 0,1,\ldots, \qquad (4.3.1.)$$

где точка x^0 задается пользователем, E - единичная матрица, μ^k - последовательность положительных чисел, таких, что матрица $\left[H(x^k) + \mu^k E\right]^{-1}$ положительно определена. Как правило, число μ^0 назначается как минимум на порядок больше, чем самый большой элемент матрицы $H(x^0)$, а в ряде стандартных программ полагается $\mu^0 = 10^4$. Если $f\left(x^k - \left[H(x^k) + \mu^k E\right]^{-1} \nabla f(x^k)\right) < f(x^k)$, то $\mu^{k+1} = \frac{\mu^k}{2}$. В противном случае $\mu^{k+1} = 2\mu^k$. Легко видеть, что алгоритм Левенберга-Марквардта в зависимости от величины μ^k на каждом шаге по своим свойствам приближается либо к алгоритму Ньютона, либо к алгоритму градиентного спуска.

Построение последовательности $\{x^k\}$ заканчивается, когда либо $\left\|\nabla f(x^k) < \varepsilon_1\right\|$, либо число итераций $k \ge M$, где ε_1 - малое положительное число, а M - предельное число итераций.

Вопрос о том, может ли точка x^k рассматриваться как найденное приближение искомой точки минимума, решается путем проведения дополнительного исследования.

Алгоритм.

Ш.1. Задать $x^0, \varepsilon_1, \delta_2, \varepsilon_2, M$ - предельное число итераций. Найти градиент $\nabla f(x^0)$ и матрицу Гессе $H(x^0)$.

Ш.2. Положить $k = 0,\ \mu^k = \mu^0$.

Ш.3. Вычислить $\nabla f(x^k)$.

Ш.4. Проверить критерий окончания $\left\|\nabla f(x^k)\right\| < \varepsilon_1$:

$a)$ если критерий выполнен, $x^* = x^k$, расчет заканчивается;

$b)$ если нет, то перейти на Ш.5.

Ш.5. Проверить условие $k \ge M$:

$a)$ если неравенство выполняется, то расчет окончен и $x^* = x^k$;

$b)$ если нет, то перейти на Ш.6.

Ш.6. Вычислить $H(x^k)$.

Ш.7. Вычислить $H(x^k)+\mu^k E$.

Ш.8. Вычислить $\left[H(x^k)+\mu^k E\right]^{-1}$.

Ш.9. Вычислить $d^k=-\left[H(x^k)+\mu^k E\right]^{-1}\nabla f(x^k)$.

Ш.10. Вычислить $x^{k+1}=x^k-\left[H(x^k)+\mu^k E\right]^{-1}\nabla f(x^k)$.

Ш.11. Проверить выполнение условия $f(x^{k+1})<f(x^k)$:

$a)$ если неравенство выполняется, то перейти на Ш.12;

$b)$ если нет, перейти на Ш.13.

Ш.12. Положить $k=k+1, \mu^{k+1}=\dfrac{\mu^k}{2}$ и перейти на Ш.3.

Ш.13. Положить $\mu^{k+1}=2\mu^k$ и перейти на Ш.7.

Замечание 4.1. В окрестности точки минимума x^* метод Левенберга-Марквардта обладает скоростью сходимости, близкой к квадратичной.

Задание.

Требуется найти минимум тестовой функции Розенброка:

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n-1}\left[a(x_i^2-x_{i+1})^2+b(x_i-1)^2\right]+f_0.$$

1. Методами сопряженных градиентов (методом Флетчера-Ривза и методом Полака-Рибьера).
2. Квазиньютоновским методом (Девидона-Флетчера-Пауэлла).
3. Методом Левенберга-Марквардта.

Замечание 4.2. В качестве методов одномерного поиска использовать любой из известных методов одномерного поиска.

Варианты задания:

1. $a=50, b=2, f_0=10, n=2$;
2. $a=150, b=2, f_0=100, n=3$;
3. $a=80, b=3, f_0=110, n=2$;
4. $a=250, b=2, f_0=50, n=2$;
5. $a=70, b=5, f_0=30, n=3$;
6. $a=30, b=2, f_0=80, n=4$;
7. $a=250, b=2, f_0=300, n=2$;
8. $a=158, b=2, f_0=40, n=2$;
9. $a=500, b=2, f_0=10, n=2$;
10. $a=350, b=2, f_0=110, n=2$;
11. $a=300, b=5, f_0=15, n=2$;
12. $a=200, b=1, f_0=25, n=2$;
13. $a=100, b=15, f_0=15, n=2$;
14. $a=500, b=5, f_0=35, n=2$;
15. $a=100, b=3, f_0=15, n=2$;
16. $a=140, b=2, f_0=24, n=2$;

17. $a=1000, b=10, f_0=150, n=2$;
18. $a=100, b=2, f_0=45, n=3$;
19. $a=220, b=3, f_0=12, n=2$;
20. $a=500, b=15, f_0=25, n=2$;
21. $a=30, b=3, f_0=45, n=3$;
22. $a=180, b=2, f_0=15, n=2$;
23. $a=200, b=5, f_0=48, n=3$;
24. $a=300, b=25, f_0=250, n=2$;
25. $a=10, b=250, f_0=45, n=3$.

1. **Найти все стационарные точки и значения функций соответствующие этим точкам.**
2. **Оценить скорость сходимости указанных алгоритмов и сравнить по времени получение результата оптимизации для разных методов.**
3. **Реализовать алгоритмы программированием на одном из языков высокого уровня (C^{++}, $C^{\#}$, Python, Haskell и др.).**
4. **Отчет представить в стандартном виде (TEX, PDF).**

Требования к отчету.

1. Отчет должен содержать:
1.1. титульный лист;
1.2. цель работы;
1.3. постановку задачи;
1.4. проверку решения на допустимость.
2. Исследование выполнить с помощью написанной Вами программы с результатами в графическом виде.
3. Кроме текста исследования следует привести также текст исходного кода программ.
4. Отчет оформляется в формате PDF желательно в редакторе TEX.