Численные методы

affeeal

14 апреля 2024 г.

Содержание

1 Формат отчётов

- Титульная страница.
- Постановка задачи.
- Основные теоретические сведения.
- Реализация (листинг).
- Результаты.

2 Лекция от 12.04.2024

2.1 Введение

Численные методы — математические методы, предполагающие получение приближённого решения поставленной задачи. Все методы, относящиеся к этому классу имеют методологическую погрешность. Альтернативой выступают *точные методы*, не имеющие методологической погрешности.

Пример. Решение СЛАУ методом Гаусса — точный метод, методом Зейделя (Якоби) — приближённый метод.

Вычислительные методы — совокупность численных методов и точных методов, реализованных на ЦВМ. При решении практических задач на ЦВМ применяются вычислительные методы, в силу чего задачи также называются *вычислительными*. При решении вычислительной задачи возникают следующие виды погрешности:

1. *Инструментальная* — получена при измерении входных данных как вручную, так и автоматически. Бывает устранимой и неустранимой.
2. *Методологическая* — погрешность численного метода.
3. *Вычислительная* — обусловлена ограниченностью разрядной сетки и способами округления. Различают округление усечением и дополнением.

Точные методы не имеют методологической погрешности, численные — имеют.

2.2 Классификация численных методов

1. *Прямые (точные) методы.* Если разница между решением и результатом расчёта нулевая, то решение точное. Иначе — приближённое.
2. *Методы эквивалентных преобразований.* Исходная задача заменяется эквивалетными, имеющими то же самое решение.

   Пример. Задача нахождения значения функции в точке эквивалентна нахождению производной функции в точке.

3. *Методы аппроксимации* (не путать с задачей аппрокиимации). Исходная задача заменяется другой, решение которой в некотором смысле близко к решению исходной задачи. Вводится количественная мера такой близости, которая оценивается и сравнивается с пороговым значением, допустимым для конкретной практической задачи.

   Пример. Абсолютное значение температуры.

   Разделяют два подхода к аппроксимации: *линеаризация* — фрагмент кривой заменяется прямой, и *дискретизация* — непрерывная кривая заменяется на конечный набор точек.

4. *Итерационные методы.* Предполагают вычисление приближения к решению в текущий момент времени по значению в предыдущий момент времени. В ряде случаев говорят о построении нового приближения к решению по значению предыдущего. Метод может быть *сходящимся* и *расходящимся*. Необходимо анализировать условие сходимости. Кроме того, необходимо определение начального приближения, а также условие окончания счёта.

5. *Методы Монте-Карло (методы испытаний).*

   Пример. Метод Монте-Карло для вычисления значения определённого интеграла.

3 Лекция от 19.04.2024

3.1 Приближение функций

Под *приближением функций* понимают описание исходно заданной функции $f(x)$, её аналога $g(x)$, при этом $|f(x) - g(x)| \to 0$ и / или $f(x_i) = g(x_i)$ в некоторых точках.

* Пример с интерполяцией функции по точкам. *

Различают

- Задачи интерполяции: $f(x) \approx g(x)$, $f(x_i) = g(x_i)$, x_i — некоторые точки, называемые узлами интерполяции. При этом, как правило, значения функций между узлами интеполяции отличаются незначительно (с точностью до заданного ε. Здесь $x \in [a, b]$.
- Задача аппроксимации. $f(x) \approx g(x)$, $x \in [a, b]$; $\sum(f(x_i) - g(x_i))^2 \to \min$ — метод наименьших квадратов.
- Задача экстраполяции. $f(x) \approx g(x)$, $x \notin [a, b]$.

Отметим, что функции могут задаваться

1. Аналитически.

   Примеры.

- $f(x) = e^x$;
- $f(x) = \sin(\frac{\pi}{2}x)$, $x \in [0, 4]$;
- $f(x) = \int_a^b e^x x^5 dx$, $x \in [a, b]$;

2. Таблично.

3. Графически.

Пример. Интерполяция кубическим сплайном. $S_i(x) = a_i + b_i(x - x_{i-1}) + c_i(x - x_{i-1}) + d_i(x - xi - 1)^3$, $i = 1, ..., n$ — узел интерполяции.

Условие гладкости функции: $S_i(x_i) = S_{i+1}(x_i)$, $S_i'(x_i) = S_{i+1}'(x_i)$, $S_i''(x_i) = S_{i+1}''(x_i)$, $i = 1, ..., n - 1$.

Условия гладкости на краях:

...

4 Вычислительные задачи. Вычислительные алгоритмы.

Вычислительная задача — это задача, в основе которой лежит вычислительный метод (все численные методы, а также точные, реализуемые на компьютере). Вычислительный метод определяет вычислительный алгоритм.

После выполнения конечного числа элементарных действий ...