Proving tree algorithms for succinct data structures

Reynald Affeldt [1] Jacques Garrigue [2]
Xuanrui Qi [3] Kazunari Tanaka [2]

[1] 産業技術総合研究所

[2] 名古屋大学多元数理科学研究科

[3] Tufts University

November 22, 2018

https://github.com/affeldt-aist/succinct

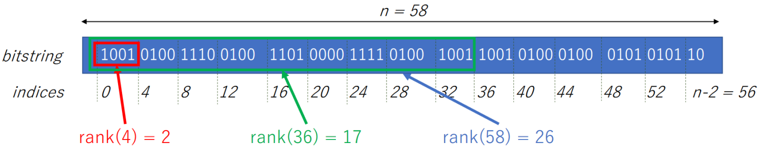
簡潔データ構造

- 時間・空間複雑さが共に良いデータ表現
- 「復号化の要らない圧縮」
- ビッグ・データでは多用されている
- 応用例
  - データマイニングのデータの圧縮
  - グーグル日本語 IME の辞書

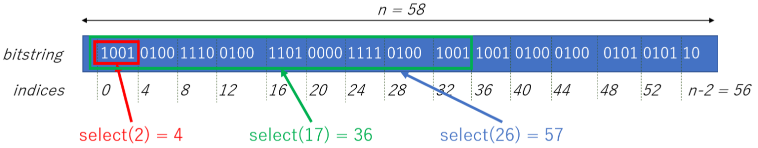
Rank と Select

ビット列への高速のアクセスを実現するために，二つの基本的な関数を最適化する．定数時間で実装可能．

- rank(i) ＝ i ビット目までの 1 の数



- select(i) ＝ i 番目の 1 の位置： rank(select(i)) ＝ i



[Tanaka A., Affeldt, Garrigue 2016] で実装を Coq で証明

今日の話

簡潔データ構造における木構造の表現と利用

二つの視点

表現 rank と select を使って, 木構造をビット列で表現する

利用 木構造 (red-black tree) を使って, 動的変化が可能なビット列を実装

- 両実装の基本性質を Coq/SSReflect で証明
- 前者を後者の上で利用できる

Coq での基本定義

rank は簡単に定義できる. select はその逆関数.

```
Variables (T : eqType) (b : T) (n : nat).
Definition rank i s := count_mem b (take i s).
Definition Rank (i : nat) (B : n.-tuple T) :=
  #|[set k : [1,n] | (k <= i) && (tacc B k == b)]|.
Lemma select_spec (i : nat) (B : n.-tuple T) :
  exists k, ((k <= n) && (Rank b k B == i)) ||
            (k == n.+1) && (count_mem b B < i).
Definition Select i (B : n.-tuple T) :=
  ex_minn (select_spec i B).
```

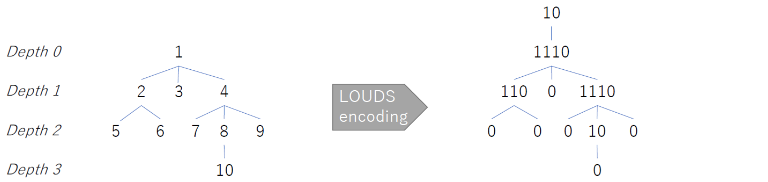
pred s y は y 以前の最後の b. succ s y は y 以後の最初の b.

```
Definition pred s y := select (rank y s) s.
Definition succ s y := select (rank y.-1 s).+1 s.
```

添字を正しく合わせるのが大変.
ここでは添字を 1 から数えるが、本によって異なる.

L.O.U.D.S.

Level-**O**rder **U**nary **D**egree **S**equence
[Navarro 2016, Chapter 8]



Depth 0	*Depth 1*	*Depth 2*	*Depth 3*
1	234	56789	10

	Depth 0	*Depth 1*	*Depth 2*	*Depth 3*
10	1110	11001110	000100	0

- 幅優先に並べた各ノードの次数の一進数表記
- 各ノードの子の数を表す 1 の後に 0 を付ける
- 丁度長さ $2n+2$ のビット列で木の分岐構造が書ける
- 辞書などに応用 (グーグル日本語 IME)

基本操作の実装

木の中のパスと LOUDS 列の中の位置の間に同型を定義する.

必要な操作は

- 根の位置 (疑似ルートの追加で 2, 位置は 0 から数える)
- i 番目の子ノードの位置
- 親ノードの位置
- 子供の数

```
Variable B : seq bool.
Definition LOUDS_child v i :=
  select false (rank true (v + i) B).+1 B.
Definition LOUDS_parent v :=
  pred false B (select true (rank false v B) B).
Definition LOUDS_children v := succ false B v.+1 - v.+1.
```

基本操作の実装

木の中のパスと LOUDS 列の中の位置の間に同型を定義する.

必要な操作は

- 根の位置 (疑似ルートの追加で 2, 位置は 0 から数える)
- i 番目の子ノードの位置
- 親ノードの位置
- 子供の数

```
Variable B : seq bool.
Definition LOUDS_child v i :=
  select false (rank true (v + i) B).+1 B.
Definition LOUDS_parent v :=
  pred false B (select true (rank false v B) B).
Definition LOUDS_children v := succ false B v.+1 - v.+1.
```

問題: 構造的な対応になっていない

First attempt

幅優先操作においてパスpより前に現れるノードの数を count_smaller t pとする

```
Definition LOUDS_position (t : tree) (p : seq nat) :=
  (count_smaller t p + (count_smaller t (rcons p 0)).-1).+2.
(*        0 の数                 1 の数                  疑似ルート *)

Definition LOUDS_subtree B (p : seq nat) :=
  foldl (LOUDS_child B) 2 p.

Theorem LOUDS_positionE t (p : seq nat) :
  let B := LOUDS t in valid_position t p ->
  LOUDS_position t p = LOUDS_subtree B p.

Theorem LOUDS_parentE t (p : seq nat) x :
  let B := LOUDS t in valid_position t (rcons p x) ->
  LOUDS_parent B (LOUDS_position t (rcons p x)) = LOUDS_position t p.

Theorem LOUDS_childrenE t (p : seq nat) :
  let B := LOUDS t in valid_position t p ->
  children t p = LOUDS_children B (LOUDS_position t p).
```

First attempt

様々な問題点

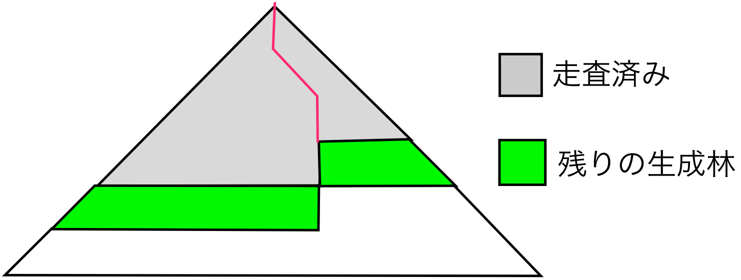
- 幅優先走査が木の構造から離れている
- 構造的な帰納法が使えない
- 欲しい性質が簡単に証明できる「自然な対応」がない
- 証明すると添字が中々合わない

結果的には

- LOUDS に関する証明は 800 行以上
- 50 行を越える補題を多数含む
- もっと自然な対応があるはず

Second try

- 幅優先走査にパスの概念を導入する
- 帰納的な対応を得るために、木ではなく、林から生成
- 生成林は同じレベルから取らなくてもいい!



走査と残り

```
Variable (A B : Type) (f : tree A -> B).

(* パス p より前のノードの幅優先走査 *)
Fixpoint lo_traversal_lt (w : forest A) (p : seq nat) : seq B.

(* パス p 以降の幅優先走査を行うための林 *)
Fixpoint lo_traversal_res (w : forest A) (p : seq nat) : forest A.

(* 両者の関係 *)
Lemma lo_traversal_lt_cat w p1 p2 :
  lo_traversal_lt w (p1 ++ p2) =
  lo_traversal_lt w p1 ++ lo_traversal_lt (lo_traversal_res w p1) p2.

(* All paths lead to Rome *)
Theorem lo_traversal_lt_max t p :
  size p >= height t ->
  lo_traversal_lt [:: t] p = lo_traversal_lt [:: t] (nseq (height t) 0).
```

この定理がlo_traversal_ltの一意性を保証する

LOUDS の順序と位置

```
(* LOUDS_lt もパスを使って定義する *)
Definition LOUDS_lt w p := flatten
  (lo_traversal_lt (node_description \o children_of_node) w p).

(* 通常の幅優先走査で定義された LOUDS と LOUDS_lt の関係 *)
Theorem LOUDS_lt_ok (t : tree A) p :
  size p >= height t -> LOUDS t = true :: false :: LOUDS_lt [:: t] p.

(* LOUDS での位置 *)
Definition LOUDS_position w p := size (LOUDS_lt w p).

(* 幅優先走査におけるノードの位置 *)
Definition LOUDS_index w p := size (lo_traversal_lt id w p).

Lemma LOUDS_position_select w p p' :
  valid_position (head dummy w) p ->
  LOUDS_position w p =
  select false (LOUDS_index w p) (LOUDS_lt w (p ++ p')).

Lemma LOUDS_index_rank w p p' n :
  valid_position (head dummy w) (rcons p n) ->
  LOUDS_index w (rcons p n) =
  size w + rank true (LOUDS_position w p + n) (LOUDS_lt w (p ++ n :: p')).
```

証明した性質

```
Theorem LOUDS_childE (t : tree A) (p p' : seq nat) x :
  let B := LOUDS_lt [:: t] (rcons p x ++ p') in
  valid_position t (rcons p x) ->
  LOUDS_child B (LOUDS_position [:: t] p) x =
  LOUDS_position [:: t] (rcons p x).

Theorem LOUDS_parentE (t : tree A) p p' x :
  let B := LOUDS_lt [:: t] (rcons p x ++ p') in
  valid_position t (rcons p x) ->
  LOUDS_parent B (LOUDS_position [:: t] (rcons p x)) =
  LOUDS_position [:: t] p.

Theorem LOUDS_childrenE (t : tree A) (p p' : seq nat) :
  let B := LOUDS_lt [:: t] (rcons p 0 ++ p') in
  valid_position t p ->
  children t p = LOUDS_children B (LOUDS_position [:: t] p).
```

おまけ 幅優先で構造的な定義

通常の幅優先走査では高さなどで停止性を保証する

```
Variable f : tree A -> B.
Fixpoint lo_traversal'' n (l : forest A) :=
  if n is n'.+1 then
    map f l ++ lo_traversal'' f n' (children_of_forest l)
  else [::].
Definition lo_traversal t := lo_traversal'' (height t) [:: t].
```

それを避けるために、走査を２段階に分ける
木を層のリストに変換し、後でそれを繋ぐ

```
Fixpoint level_traversal t :=
  let: Node a cl := t in
  [:: f t] :: foldr (fun t1 => merge1 (level_traversal t1)) nil cl.

Fixpoint level_traversal_cat (t : tree A) ss {struct t} :=
  let: (s, ss) :=
    if ss is s :: ss then (s, ss) else (nil, nil) in
  let: Node a cl := t in
  (f t :: s) :: foldr level_traversal_cat ss cl.
Definition lo_traversal_cat t := flatten (level_traversal_cat t [::]).
```

level_traversalは木の構造によるが、複雑さが悪い

まとめ

よくなった所

- 全ての証明がパスに関する帰納法
- 自然に共通の補題が現われる
- 全体で 500 行に短縮，長いものでも 25 行以下

問題点

- 相変わらず，長い補題がある (`lo_traversal_lt_max`等)
- あらゆる所にパスが現われる

今後の展望

- 他の幅優先走査に応用できるか

コード

https://github.com/affeldt-aist/succinct