



# Wydział Geodezji i Kartografii

POLITECHNIKA WARSZAWSKA

## SYSTEMY WYSOKOŚCI: NIWELACJA SATELITARNA – WYSOKOŚCI NORMALNE

WYBRANE ZAGADNIENIA GEODEZJI WYŻSZEJ

MACIEJ GRZYMAŁA

maciej.grzymala@pw.edu.pl

WYDZIAŁ GEODEZJI I KARTOGRAFII, POLITECHNIKA WARSZAWSKA  
Warszawa, 2023

---

### 1 Zadanie

Na podstawie danych współrzędnych krzywoliniowych oraz wysokości normalnej trasy w podanym modelu wysokości, wykonaj profil wysokościowy odcinka w systemie wysokości normalnych, w układzie *PL-EVRF2007-NH*, wykorzystując aktualnie obowiązujący model quasigeoidy: *PL-geoid2021*. Przedstaw przebieg trasy oraz profil na odpowiednich wizualizacjach (wykonaj aplikację).

### 2 Dane

Danymi wejściowymi niech będą pliki *.gpx*, zawierające ślady tras rowerowych, które pobrać można np. ze strony szlaków rowerowych Green Velo <https://greenvelo.pl/mapa>. Pliki w takim formacie można również pobrać m.in. z serwisu Strava. Format *.gpx* jest to nic innego jak typ plików *.xml*, zawierający informacje nawigacyjne, na ogół po prostu współrzędne geodezyjne punktów: szerokość i długość geodezyjna oraz wysokość (czasem również wiele innych...).

- Wysokości podane w plikach z portalu GreenVelo są wysokościami nad poziomem morza, odniesionymi do poziomu morza w mareografie w Kronsztadzie. Układem wysokości normalnych, wykorzystanym w plikach z GreenVelo, jest *PL-KRON86*.
- Wysokości podane w plikach *.gpx* z portalu Strava, są wysokosciami nad poziomem morza, które wyznaczone zostały w oparciu o globalny model geoidy: *EGM96*.

Do wykonania zadania należy pobrać ślad trasy dowolnego szlaku rowerowego Green Velo lub ślad trasy zarejestrowany przez użytkownika aplikacji Strava (proszę jednak, aby pliki te nie powtarzały się pośród Was – szlaków Green Velo jest ponad 150, a tras w Stravie praktycznie nieskończoność...).

## 3 Wykonanie zadania

### 3.1 Operacje na plikach .gpx

Pliki w formacie .gpx można bez większych problemów odczytać, korzystając z języka python. Wszystkie niezbędne odpowiedzi do operowania na plikach .gpx oraz na danych zawartych w tych plikach, przedstawiono w serii bardzo pomocnych artykułów:

- <https://betterdatascience.com/data-science-for-cycling-how-to-read-gpx-strava-routes-with-python/>

Artykuły te stanowią świetną pomoc do wykonania zadania.

### 3.2 System wysokości normalnych

Najważniejszym punktem tego ćwiczenia jest jednak zapoznanie się z dwoma systemami wysokości. Jednym z nich jest dobrze znany system wysokości elipsoidalnych, czyli wysokość mierzona wzdłuż normalnej do elipsoidy, przechodzącą przez dany punkt. Drugim systemem wysokości, obowiązującym w Polsce, jest system wysokości normalnych. Wysokość normalna czyli wysokość względem średniego poziomu morza – odległość punktu od quasigeoidy.

Pod pojęciem niwelacji satelitarnej kryje metoda wyznaczenia wysokości normalnej punktu, na podstawie pomierzonej wysokości elipsoidalnej. Wysokość elipsoidalną otrzymujemy wprost jako wynik pomiarów satelitarnych GNSS. Związek wysokości elipsoidalnej i normalnej można zapisać jako:

$$H_N = h_{elip} - \zeta \quad (1)$$

$\zeta$  są to tzw. anomalie wysokości: odstęp elipsoidy od quasigeoidy – powierzchni, którą możemy w dużym uproszczeniu nazwać powierzchnią odniesienia dla systemu wysokości normalnych.

Quasigeoida, podobnie jak geoida, nie jest powierzchnią, którą opisać można w sposób analityczny. Dlatego powierzchnie te reprezentuje się w postaci modeli dyskretnych. Obecnie obowiązujący w Polsce w pracach geodezyjnych model quasigeoidy, PL-geoid2021, pobrać można ze strony:

- <http://www.gugik.gov.pl/bip/prawo/modele-danych>

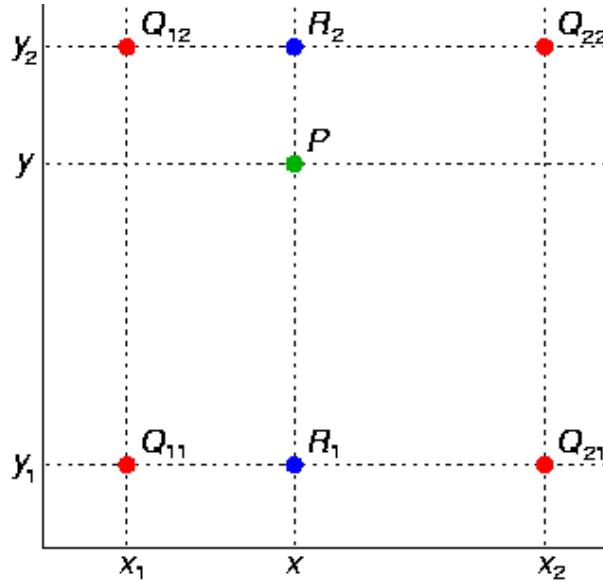
Model ten jest reprezentowany poprzez regularną siatkę referencyjną o rozdzielczości  $0.01^\circ$  szerokości geodezyjnej północnej ( $\varphi$ ) i długości geodezyjnej wschodniej ( $\lambda$ ), na której węzłach obliczono wartości anomalii wysokości.

Ponieważ model jest w postaci danych dyskretnych, gdzie wartości  $\zeta$  podane są wyłącznie dla punktów siatki, zadaniem będzie obliczenie tych wartości dla punktów trasy – interpolacja.

### 3.3 Interpolacja biliniowa

Interpolacja dwuliniowa (ang. \*bilinear interpolation\*) – metoda rozszerzająca interpolację liniową na interpolację funkcji dwóch zmiennych. Intuicyjnie jest złożeniem dwóch interpolacji liniowych.

W celu przeprowadzenia interpolacji dwuliniowej przeprowadza się dwie interpolacje liniowe dla jednego kierunku (np. wzdłuż osi OX w układzie współrzędnych kartezjańskim), a następnie dla tak uzyskanych wartości przeprowadza się interpolację liniową dla drugiego kierunku (w tym przypadku osi OY).



Najpierw przeprowadzana jest interpolacja liniowa wzdłuż osi OX na podstawie wzorów:

$$R_1 = Q_{11} + \frac{Q_{21} - Q_{11}}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

$$R_2 = Q_{12} + \frac{Q_{22} - Q_{12}}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

Następnie przeprowadzana jest interpolacja wzdłuż osi OY:

$$P = R_1 + \frac{R_2 - R_1}{y_2 - y_1}(y - y_1)$$

Obliczenia te można wykonać korzystając z funkcji z biblioteki python scipy. Biblioteka ta zawiera wiele modułów przeznaczonych do obliczeń numerycznych, jedną z nich jest moduł interpolate. Polecaną funkcją jest funkcja `interp`.

## 4 Koeljność obliczeń – zmiana zastosowanego modelu wysokościowego

1. Pierwszym krokiem jest wykonanie zadania, które nazwać możemy "odwrotną"niwelacją satelitarną – na podstawie danych wysokości normalnych, w danym, w zależności od typu pliku, systemie wysokości, należy przeliczyć do systemu wysokości elipsoidalnych. Wykorzystane będzie tutaj zatem wzór:

$$h_{elip} = H_{N(model)} + \zeta_{(model)} \quad (2)$$

2. W kolejnym kroku należy wykonać zadanie niwelacji satelitarnej, tzn.: na podstawie znanych wysokości elipsoidalnych punktów, obliczonych w poprzednim kroku, i danego modelu quasigeoidy, należy obliczyć wysokość normalną w obowiązującym w Polsce układzie wysokości *PL-EVRF2007*:

$$H_{N(PL-EVRF2007)} = h_{elip} - \zeta_{(PL-EVRF2007)} \quad (3)$$

3. Niewiadome wartości  $\zeta$  należy najpierw wyinterpolować metodą interpolacji dwuliniowej dla danego położenia punktów trasy.

## 5 Wymagania

- Obliczenie wysokości elipsoidalnych oraz normalnych w układzie Amsterdam dla punktów trasy;
- obliczenie różnic wysokości pomiędzy dwoma systemami wysokości normalnych dla danego odcinka trasy – czyli porównanie wysokości danych w pliku z wysokościami w układzie PL-EVRF2007, obliczonymi w ramach zadania;
- Wykonanie profilu trasy – dla wysokości normalnych. Można też wykonać dodatkowo profil dla wysokości elipsoidalnych lub względnych;
- Wykonanie wizualizacji trasy;
- Dla danych w Stravie można również wykonać wykresy związane z prędkością jazdy;
- Może aplikacja? (PyQt, Dash)

Przydatne linki:

- <https://plotly.com/python/mapbox-layers/>
- <https://plotly.com/python/scattermapbox/>
- <https://plotly.com/python/hover-text-and-formatting/>
- <https://plotly.com/python/creating-and-updating-figures/>