Wyznaczenie współczynników DOP - równania obserwacyjne

Systemy Nawigacji Satelitarnej

Maciej Grzymała
maciej.grzymala@pw.edu.pl
Wydział Geodezji i Kartografii, Politechnika Warszawska
Warszawa, 2022

Contents

Aby wyznaczyć współczynniki DOP, należy po części opisać i wyprowadzić metodę wyznaczania pozycji w pomiarach GNSS, ponieważ współczynniki te wyznacza się na podstawie macierzy będących elementem modelu pozycjonowania.

1 Równanie obserwacji

1. Równanie pseudoodległości dla obserwacji kodowych, z uwzględnieniem wpływu błędów pomiarowych, można przedstawić następująco:

$$P_r^s = \rho_r^s + c(\delta t_r - \delta t^s) + \delta O_r^s + \delta I_r^s + \delta T_r^s + M_r^s + E_r \tag{1}$$

   Lewa strona równania opisuje obserwowaną wartość odległości pomiędzy odbiornikiem r i satelitą s (pseudoodległość z pomiaru, taka jaką nam pomierzył odbiornik). Prawa reprezentuje parametry składające się na pomierzoną wartość pseudoodległości (czyli w skrócie odległość geometryczna + błędy pomiarowe)

   Poszczególne parametry równania dotyczą:

   P_r^s : pomierzona wartość pseudoodległości między satelitą s i odbiornikiem r
   ρ_r^s : odległość geometryczna między satelitą s i odbiornikiem r
   c : prędkość światła
   δt_r : błąd zegara odbiornika r
   δt^s : błąd zegara satelity s
   δO_r^s : błąd orbity satelity s
   δI_r^s : wpływ refrakcji jonosferycznej
   δT_r^s : wpływ refrakcji troposferycznej
   δM_r^s : wpływ wielotorowości sygnału na obserwacje kodowe
   E_r : szum odbiornika dla obserwacji kodowych

2. Odległość geometryczną satelita-odbiornik zapisać można jako:

$$\rho_r^s = ||\vec{X}^s - \vec{X}_r|| = \sqrt{(x^s - x_r)^2 + (y^s - y_r)^2 + (z^s - z_r)^2} \tag{2}$$

   gdzie:

   - x_r, y_r, z_r: współrzędne odbiornika w układzie ECEF
   - x^s, y^s, z^s: współrzędne satelity w układzie ECEF

   Zaniedbując błędy pomiarowe (błędy, które możemy w jakiś sposób zamodelować i w ten sposób obliczyć i wyeliminować, jak opóźnienie troposferyczne i troposferyczne; błędy, które możemy zaniedbać w większości aplikacji, jak błąd orbity czy wielotorowość oraz szum pomiarowy; zaniedbać można również błąd zegara satelity, który jest znany, na podstawie danych z efemerydy), oraz podstawiając odległość geometryczną (2) do (1), otrzymamy równanie pseudoodległości kodowej w następującej postaci:

$$P_r^s = \sqrt{(x^s - x_r)^2 + (y^s - y_r)^2 + (z^s - z_r)^2} + c\delta t_r \tag{3}$$

$$P_r^s = \rho_r^s + c\delta t_r \tag{4}$$

   Parametrami nieznanymi powyższego równania są współrzędne odbiornika (x_r, y_r, z_r) oraz poprawka zegara odbiornika (δt_r). Wyznaczenie odległości pomiędzy satelitą a odbiornikiem wymaga znajomości czasu transmisji i rejestracji sygnału w jednakowej skali czasu (np. skali czasu GPS). A więc czas rejestracji sygnału w skali czasu odbiornika (mniej dokładne zegary) należy poprawić o korektę zegara odbiornika. Poprawka ta wyznaczana jest jako wartość nieznana δt_r razem ze współrzędnymi odbiornika. Poprawki do zegara satelity są znane z depeszy nawigacyjnej (efemerydy transmitowanej), dlatego zostały one pominięte we wzorach (3) oraz (4).

2 Linearyzacja równania

Równanie (3) jest równaniem nieliniowym (wyrażenie pod pierwiastkiem). Aby rozwiązać układ równań obserwacyjnych korzystając z metody najmniejszych kwadratów (metoda wykorzystywana wyłącznie do równań liniowych), należy równanie to przekształcić do postaci liniowej (czyli zlinearyzować). Linearyzację równania można przeprowadzić rozwijając funkcję (3) w *szereg Taylora* wokół współrzędnych przybliżonych odbiornika x_0, takich że:.

$$x_r = x_0 + \Delta x \tag{5a}$$
$$y_r = y_0 + \Delta y \tag{5b}$$
$$z_r = z_0 + \Delta z \tag{5c}$$

gdzie:

- x_0, y_0, z_0 to współrzędne przybliżone odbiornika
- przyrosty współrzędnych Δx, Δy, Δz stanowią szukane w procesie wyznaczenia pozycji w pomiarach GNSS. Ich wyznaczenie równoznaczne jest z wyznaczeniem współrzędnych odbiornika x_r, y_r, z_r - za współrzędne przybliżone przyjmuje się określone wartości, więc są to parametry znane.

1. Równanie pseudoodległości (3) dla współrzędnych przybliżonych odbiornika zapisujemy jako:

$$P_0^s = \sqrt{(x^s - x_0)^2 + (y^s - y_0)^2 + (z^s - z_0)^2} + c\delta t_0 \tag{6}$$

2. Rozwinięcie funkcji $f(x)$ w szereg Taylora możemy zapisać jako:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'}{1!}(x_0) \cdot \Delta x + \frac{f''}{2!}(x_0)^2 \cdot \Delta x + ... \tag{7}$$

Ograniczając rozwiązanie wyłącznie do wyrazu pierwszego rzędu mamy natomiast:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x \tag{8}$$

W naszym przypadku, $f(x)$ oraz $f(x_0)$ to kolejno:

$$f(x) = \rho_r^s = \sqrt{(x^s - x)^2 + (y^s - y)^2 + (z^s - z)^2} \tag{9a}$$
$$f(x_0) = \rho_0^s = \sqrt{(x^s - x_0)^2 + (y^s - y_0)^2 + (z^s - z_0)^2} \tag{9b}$$

Zatem korzystając z (8) możemy powiązać ze sobą wartości odległości geometrycznych dla szukanej pozycji odbiornika oraz współrzędnych przybliżonych.

3. Mając funkcję wielu zmiennych, a taką jest $f(x)$: $f(x, y, z)$, równanie (8) zapiszemy z wykorzystaniem pochodnych cząstkowych jako:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{\delta f(x_0, y_0, z_0)}{\delta x_0} \cdot \Delta x + \frac{\delta f(x_0, y_0, z_0)}{\delta y_0} \cdot \Delta y + \frac{\delta f(x_0, y_0, z_0)}{\delta z_0} \cdot \Delta z \tag{10}$$

4. Pochodne cząstkowe funkcji $f(x_0)$ zapiszemy następująco (mamy funkcję złożoną - wykorzystujemy zasadę, że pochodna funkcji złożonej jest iloczynem pochodnej funkcji wewnętrznej oraz zewnętrznej)

Dla współrzędnej x (dla pozostałych obliczenia są analogiczne)

$$
\begin{aligned}
\frac{\delta f(x_0, y_0, z_0)}{\delta x_0} &= [\sqrt{(x^s - x_0)^2 + (y^s - y_0)^2 + (z^s - z_0)^2}]' = \\
&= \frac{1}{2\sqrt{(x^s - x_0)^2 + (y^s - y_0)^2 + (z^s - z_0)^2}} \cdot \frac{[(x_s - x_0)^2]'}{1} = \\
&= \frac{1}{2\sqrt{(x^s - x_0)^2 + (y^s - y_0)^2 + (z^s - z_0)^2}} \cdot \frac{-2x_s + 2x_0}{1} = \\
&= \frac{-(x^s - x_0)}{\sqrt{(x^s - x_0)^2 + (y^s - y_0)^2 + (z^s - z_0)^2}} = \frac{-(x^s - x_0)}{\rho_0^s}
\end{aligned}
\tag{11}
$$

5. Podstawiając wyznaczone w (11) pochodne cząstkowe do (10), otrzymamy:

$$
\rho_r^s = \rho_0^s + \frac{-(x^s - x_0)}{\rho_0^s} \cdot \Delta x + \frac{-(y^s - y_0)}{\rho_0^s} \cdot \Delta y + \frac{-(z^s - z_0)}{\rho_0^s} \cdot \Delta z \tag{12}
$$

6. Podstawiając pod ρ_r^s z równania (12), wartość pseudoodległości z równania (4) dostaniemy *zlinearyzowaną postać równania pseudoodległości*:

$$
P_r^s - c\delta t_r = \rho_0^s + \frac{-(x^s - x_0)}{\rho_0^s} \cdot \Delta x + \frac{-(y^s - y_0)}{\rho_0^s} \cdot \Delta y + \frac{-(z^s - z_0)}{\rho_0^s} \cdot \Delta z \tag{13}
$$

7. Przenosząc na prawą stronę równania poprawkę zegara odbiornika, natomiast na lewą stronę odległość geometryczną dla współrzędnych przybliżonych (wartość obliczoną), otrzymujemy postać, iż po lewej stronie równania mamy różnicę wartości pomierzonej P_r^s i obliczonej ρ_0^s, a po prawej wartości szukane (3 współrzędne XYZ oraz poprawka do zegara odbiornika) w postaci zlinearyzowanej. I to jest nasze równanie obserwacyjne.

$$
\Delta P = P_r^s - \rho_0^s = \frac{-(x^s - x_0)}{\rho_0^s} \cdot \Delta x + \frac{-(y^s - y_0)}{\rho_0^s} \cdot \Delta y + \frac{-(z^s - z_0)}{\rho_0^s} \cdot \Delta z + c\delta t_r \tag{14}
$$

8. Zaniedbując obecność błędów przypadkowych, (14) zapisać można w postaci macierzowej:

$$
\begin{bmatrix} \Delta P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-(x^s - x_0)}{\rho_0^s} & \frac{-(y^s - y_0)}{\rho_0^s} & \frac{-(z^s - z_0)}{\rho_0^s} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \\ c\delta t_r \end{bmatrix} \tag{15}
$$

9. Równanie (15) przedstawia sytuacje dla jednego satelity. Ponieważ w procesie wyznaczania pozycji wykorzystujemy obserwacje do kilku (lub więcej) satelitów, należy zapisać je dla n satelitów:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \Delta P_1 \\ \Delta P_2 \\ \vdots \\ \Delta P_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{L}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{-(x^{s1}-x_0)}{\rho_0^{s1}} & \frac{-(y^{s1}-y_0)}{\rho_0^{s1}} & \frac{-(z^{s1}-z_0)}{\rho_0^{s1}} & 1 \\ \frac{-(x^{s2}-x_0)}{\rho_0^{s2}} & \frac{-(y^{s2}-y_0)}{\rho_0^{s2}} & \frac{-(z^{s2}-z_0)}{\rho_0^{s2}} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{-(x^{sn}-x_0)}{\rho_0^{sn}} & \frac{-(y^{sn}-y_0)}{\rho_0^{sn}} & \frac{-(z^{sn}-z_0)}{\rho_0^{sn}} & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \\ c\delta t_r \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} \tag{16}$$

Zatem, stosując zapis macierzowy możemy zapisać to równanie w postaci:

$$\mathbf{L} = \mathbf{A}\mathbf{x} \tag{17}$$

gdzie:

- $\mathbf{L}$ - wektor wyrazów wolnych (wektor ΔP)
- $\mathbf{A}$ - macierz współczynników przy niewiadomych (macierz równań obserwacyjnych)
- $\mathbf{x}$ - wektor niewiadomych (wektor $[\Delta x, \Delta y, \Delta z, c\delta t_r]^T$)

Ponieważ pomiary GNSS obarczone są wpływem błędów pomiarowych, równanie (17) należy zapisać z uwzględnieniem tych błędów: wektor $\mathbf{v}$ to wektor błędów (poprawek obserwacyjnych)

$$\mathbf{L} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{v} \tag{18}$$

Należy zwrócić uwagę, iż budując macierz $\mathbf{A}$ nie potrzebne są nam żadne obserwacje. Mierzone przez odbiornik pseudoodległości zawarte są w wektorze wyrazów wolnych $\mathbf{L}$. Macierz współczynników $\mathbf{A}$ reprezentuje wyłącznie geometrię satelitów. Należy zauważyć, że elementy macierzy $\mathbf{A}$ są to *cosinusy kierunkowe* wektora satelita-odbiornik (oczywiście poza ostatnią kolumną) - przyrost danej współrzędnej podzielony przez długość odcinka.

Wyznaczając wartości współczynników DOP potrzebna jest nam właśnie macierz $\mathbf{A}$.

2.1 Rozwiązanie metodą najmniejszych kwadratów

Chcąc wyznaczyć pozycję w obserwacjach GNSS, należy rozwiązać równanie (18). Ponieważ pomiary obarczone są wpływem błędów przypadkowych (wektor $\mathbf{v}$) oraz wykonujemy obserwacje z pewną nadliczbowością (4 niewiadome, natomiast możemy mieć dużo więcej równań obserwacyjnych) rozwiązanie tego równania wykonuje się metodą *najmniejszych kwadratów*. Metoda ta umożliwia optymalizację rozwiązania do warunku $\mathbf{v}^T\mathbf{v} = min$ (lub inaczej: $|\mathbf{vv}| = min$).

Rozwiązaniem równania (18) jest:

$$\mathbf{x} = -(\mathbf{A^T A})^{-1}\mathbf{A^T L} \tag{19}$$

3 Wyznaczenie współczynników DOP

1. Macierz $\mathbf{Q} = (\mathbf{A^T A})^{-1}$ jest tak zwaną macierzą wariancyjno-kowariancyjną. Zawiera ona współczynniki wariancji i kowariancji poszczególnych niewiadomych zawartych w wektorze $\mathbf{x}$. Na ich podstawie wyznaczane są m.in. parametry opisujące precyzję wyznaczenia pozycji, określane jako współczynniki DOP. Macierz $\mathbf{Q}$ jest postaci:

$$Q = \begin{bmatrix} q_x & q_{xy} & q_{xz} & q_{xt} \\ q_{xy} & q_y & q_{yz} & q_{yt} \\ q_{xz} & q_{yz} & q_z & q_{zt} \\ q_{xt} & q_{yt} & q_{zt} & q_t \end{bmatrix} \tag{20}$$

w której elementy na przekątnej opisują wariancję zmiennych oraz elementy poza przekątną opisują kowariancję zmiennych.

Na podstawie tej macierzy możemy policzyć wartości współczynników DOP:

- **GDOP**
$$GDOP = \sqrt{q_x + q_y + q_z + q_t} \tag{21}$$
- **PDOP**
$$PDOP = \sqrt{q_x + q_y + q_z} \tag{22}$$
- **TDOP**
$$TDOP = \sqrt{q_t} \tag{23}$$

Natomiast, wykonując transformację macierzy $\mathbf{Q}$ będącej w układzie ECEF do układu topocentrycznego *neu*, wykorzystując macierz obrotu R_{neu}

$$R_{neu} = \begin{bmatrix} -sin\varphi cos\lambda & -sin\lambda & cos\varphi cos\lambda \\ -sin\varphi sin\lambda & cos\lambda & cos\varphi sin\lambda \\ cos\varphi & 0 & sin\varphi \end{bmatrix} \tag{24}$$

gdzie φ oraz λ są to współrzędne miejsca obserwacji.

$$Q_{neu} = R^T Q_{xyz} R \tag{25}$$

uwaga!

obrotowi do układu *neu* podlega wyłącznie macierz Q w postaci 3×3, bez ostatniego wiersza i kolumny.

$$Q_{neu} = \begin{bmatrix} q_n & q_{ne} & q_{nu} \\ q_{ne} & q_e & q_{eu} \\ q_{nu} & q_{eu} & q_u \end{bmatrix} \tag{26}$$

Korzystając z macierz Q_{neu} możemy wyznaczyć dodatkowo współczynniki DOP związane z lokalnym układem topocentrycznym:

- **HDOP**

$$HDOP = \sqrt{q_n + q_e} \tag{27}$$

- **VDOP**

$$VDOP = \sqrt{q_u} \tag{28}$$

Ponadto, korzystając z wartości na całej przekątnej, możemy ponownie wyznaczyć wartość współczynnika PDOP. Wartość ta powinna być równa współczynnikowi PDOP obliczonemu z macierzy Q w układzie ECEF.

- **PDOP$_{\mathbf{neu}}$**

$$PDOP = \sqrt{q_n + q_e + q_u} \tag{29}$$

kontrola:

$$PDOP = PDOP_{neu} \tag{30}$$