Wyznaczenie pozycji użytkownika systemu GNSS na podstawie obserwacji kodowych – model pozycjonowania Single Point Positioning

Systemy Nawigacji Satelitarnej

Maciej Grzymała
maciej.grzymala@pw.edu.pl
Wydział Geodezji i Kartografii, Politechnika Warszawska
Warszawa, 2024

1 Cel ćwiczenia

Rozwiązanie pozycji odbiornika, na podstawie danych obserwacji kodowych, z wykorzystaniem modelu pozycjonowania Single Point Positioning (SPP).

Zadanie należy wykonać na podstawie danych obserwacyjnych i nawigacyjnych, zapisanych w plikach w formacie RINEX. Program umożliwiać ma obliczenie współrzędnych odbiornika dla całej doby, co 30 sekund, niezależnie dla każdej epoki.

Program powinien umożliwiać wybór maski elewacji oraz eliminacje błędów związanych z propagacją fali przez atmosferę (przynajmniej opóźnienia troposferycznego).

Dodatkowo, program może dawać możliwość:

- wyboru typu obserwacji kodowej;
- wyboru metody eliminacji błędu troposfery i jonosfery;
- wykonania wizualizacji, przedstawiających szereg czasowy wyznaczonych współrzędnych punktu lub wizualizacji położenia punktu "w czasie rzeczywistym";
- przeliczenia wyznaczonych współrzędnych XYZ do układów płaskich/lokalnych/krzywoliniowych;
- obliczenia współczynników DOP.

2 Kolejność wykonania zadania

Ustawienia wstępne:

- odczytanie danych obserwacyjnych i nawigacyjnych, korzystając z funkcji `readrnx`;
- zadeklarowanie odpowiedniej daty obliczeń;
- ustawienie maski elewacji.

2.1 Rozwiązanie pozycji dla pojedynczej epoki t_r:

1. selekcja pseudoodległości, zapisanych w zmiennej `obs`, zarejestrowanych w danej epoce t_r, i odpowiadających im satelitów, na podstawie identyfikatorów ze zmiennej `iobs`, w których zapisane są czasy obserwacji oraz numery satelitów;

2. Zdefiniowanie wartości przybliżonych:
   - zadeklarowanie przybliżonych współrzędnych odbiornika $\mathbf{x_0}$;
   - $\delta t_r = 0s$ - poprawka do zegara odbiornika
   - $\tau = 0.07s$ - czas propagacji sygnału

Ponieważ niewiadomymi w rozwiązaniu pozycji metodą najmniejszych kwadratów będą przyrosty do współrzędnych, a nie same współrzędne odbiornika, toteż cały proces będzie należało wykonać w sposób iteracyjny, aż do momentu, kiedy różnica między współrzędnymi, wyznaczonymi z kolejnych iteracji, nie będzie się różnić o więcej niż 1 mm. Zazwyczaj 5 iteracji jest całkowicie wystarczające, dlatego zamiast definiowania warunku na spójność wyznaczonych współrzędnych z kolejnych iteracji, obliczenia wykonać można dla z góry ustalonej liczby pięciu iteracji.

Pętla na iteracyjne wyznaczenie szukanej pozycji odbiornika (przyrostów do współrzędnych przybliżonych). Dla kolejnej iteracji (1:5):

Dla każdego satelity obserwowanego w danej epoce:

1. Obliczenie współrzędnych satelity (współrzędnych xyz oraz błędu zegara satelity, z uwzględnieniem poprawki relatywistycznej, δt^s) na czas emisji sygnału t^s:

$$t^s = t_r + \delta t_r - \tau \tag{1}$$

$$x_0^s, y_0^s, z_0^s, \delta t^s = \text{satpos}(t_r, \text{nav}) \tag{2}$$

   *uwaga: czas propagacji sygnału τ w pierwszej iteracji jest wartością znaną, przybliżoną, taką samą dla każdego satelity. W kolejnych iteracjach, wartość ta będzie zależeć od obliczonej w poprzedniej iteracji odległości geometrycznej: $\tau = \rho_0^s/c$ i **będzie różna dla każdego satelity!**

2. Transformacja współrzędnych satelity do chwilowego układu współrzędnych, na moment odbioru sygnału:

$$\begin{bmatrix} x^s \\ y^s \\ z^s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\omega_E\tau) & \sin(\omega_E\tau) & 0 \\ -\sin(\omega_E\tau) & \cos(\omega_E\tau) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_0^s \\ y_0^s \\ z_0^s \end{bmatrix} \tag{3}$$

   gdzie:
   - $\omega_E = 7.2921151467 \cdot 10^{-5}[\frac{rad}{s}]$ prędkość obrotowa Ziemi
   - τ - czas propagacji sygnału (w pierwszej iteracji wartość znana, przybliżona, w kolejnych iteracjach, mając wyznaczoną odległość geometryczną ρ_r^s: $\tau = \rho_0^s/c$
   - c = 299792458.0 [m/s] - prędkość światła

3. Obliczenie odległości geometrycznej między satelitą a odbiornikiem:

$$\rho_0^s = \sqrt{(x^s - x_0)^2 + (y^s - y_0)^2 + (z^s - z_0)^2} \tag{4}$$

   * uwaga: za współrzędne satelity x^s, y^s, z^s przyjmujemy współrzędne "obrócone" do chwilowego układu współrzędnych $\rightarrow$ wynik równania (3);

   *uwaga: z obliczonych odległości geometrycznych (lub czasu propagacji sygnału $\tau = \rho_0^s/c$) dla danego satelity będziemy musieli skorzystać w kolejnej iteracji, dlatego trzeba te wartości zapisać do jakiejś zmiennej.

4. Wyznaczenie elewacji (i azymutu, niezbędnego do wyznaczenia opóźnienia jonosferycznego) satelity oraz odrzucenie satelitów znajdujących się poniżej maski;

   *uwaga! Współrzędne przybliżone odbiornika $\mathbf{x_0}$ w pierwszej iteracji mogą być bardzo odległe od rzeczywistej pozycji odbiornika. Dlatego w pierwszej iteracji, za wartość elewacji można przyjąć np. 90° dla każdego satelity. W kolejnych iteracjach należy obliczyć odpowiednie kierunki do satelitów, najpierw przeliczając współrzędne odbiornika $\mathbf{x_0}$ do współrzędnych krzywoliniowych, wykorzystując algorytm Hirvonena.

5. Wyznaczenie opóźnienia troposferycznego δT_r^s i jonosferycznego δI_r^s dla danego satelity (wzory w odpowiednich prezentacjach).

Ułożenie równań obserwacyjnych i rozwiązanie pozycji metodą najmniejszych kwadratów:

(a) Przypomnijmy, uproszczone równanie pseudoodległości dla obserwacji kodowych, z uwzględnieniem wpływu błędów pomiarowych, można przedstawić następująco:

$$P_r^s = \rho_r^s + c\delta t_r - c\delta t^s + \delta I_r^s + \delta T_r^s \tag{5}$$

gdzie:

P_r^s : pomierzona wartość pseudoodległości między satelitą s i odbiornikiem r

ρ_r^s : odległość geometryczna między satelitą s i odbiornikiem r

c : prędkość światła

δt_r : błąd zegara odbiornika r

δt^s : błąd zegara satelity s

δI_r^s : wpływ refrakcji jonosferycznej

δT_r^s : wpływ refrakcji troposferycznej

Lewa stronę równania reprezentuje pomierzona wartość odległości (pseudoodległość) pomiędzy odbiornikiem r i satelitą s. Prawa strona równania są to parametry składające się na tę pomierzoną wartość odległości, czyli odległość geometryczna oraz błędy pomiarowe.

(b) Zapisanie zlinearyzowanych równań obserwacyjnych w taki sposób, aby niewiadome znalazły się po jednej stronie równania, a znane po drugiej (jako elementy znane, traktujemy również modelowane wartości opóźnienia atmosferyczne i błąd zegara satelity):

*uwaga! Jako niewiadomą będziemy liczyć przyrost do przybliżonej wartości błędu zegara satelity $\Delta(c\delta t_r) \rightarrow$ błąd zegara, z równania (), możemy rozwinąć do: $c\delta t_r = c\delta t_r + \Delta(c\delta t_r)$

$$P_r^s - \rho_0^s + c\delta t^s - c\delta t_r - \delta T_r^s - \delta I_r^s = \frac{-(x^s - x_0)}{\rho_0^s} \cdot \Delta x + \frac{-(y^s - y_0)}{\rho_0^s} \cdot \Delta y + \frac{-(z^s - z_0)}{\rho_0^s} \cdot \Delta z + \Delta(c\delta t_r)$$

Lewa strona tego równania stanowić będzie element wektora wyrazów wolnych y. Współczynniki przy niewiadomych, po prawej stronie równania, będą stanowić elementy macierzy równań obserwacyjnych A.

(c) Zbudowanie wektora wyrazów wolnych y oraz macierzy równań obserwacyjnych A. Będą one miały tyle wierszy, ile satelitów obserwowanych w danej epoce, powyżej maski elewacji.

Dla pojedynczego satelity, elementy wektora y i macierzy A będą wyglądać następująco:

$$y_r^s = P_r^s - \rho_0^r + c\delta t^s - c\delta t_r - \delta T_r^s - \delta I_r^s \tag{6}$$

$$A^s = \begin{bmatrix} \frac{-(x^s - x_r)}{\rho_r^s} & \frac{-(y^s - y_r)}{\rho_r^s} & \frac{-(z^s - z_r)}{\rho_r^s} & 1 \end{bmatrix} \tag{7}$$

(d) Układ równań w postaci macierzowej będzie wyglądał następująco:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y^{s1} \\ y^{s2} \\ \vdots \\ y^{sn} \end{bmatrix}}_{\mathbf{y}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{-(x^{s1}-x_0)}{\rho_0^{s1}} & \frac{-(y^{s1}-y_0)}{\rho_0^{s1}} & \frac{-(z^{s1}-z_0)}{\rho_0^{s1}} & 1 \\ \frac{-(x^{s2}-x_0)}{\rho_0^{s2}} & \frac{-(y^{s2}-y_0)}{\rho_0^{s2}} & \frac{-(z^{s2}-z_0)}{\rho_0^{s2}} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{-(x^{sn}-x_0)}{\rho_0^{sn}} & \frac{-(y^{sn}-y_0)}{\rho_0^{sn}} & \frac{-(z^{sn}-z_0)}{\rho_0^{sn}} & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \\ c\delta t_r \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} \tag{8}$$

(e) Powyższy układ równań rozwiązujemy następująco:

$$\mathbf{x} = (\mathbf{A^T A})^{-1}\mathbf{A^T y} \tag{9}$$

6. Poprawiamy współrzędne przybliżone odbiornika oraz przybliżoną wartość poprawki zegara odbiornika:

$$\begin{bmatrix} x_r = x_0 + \Delta x \\ y_r = y_0 + \Delta y \\ z_r = z_0 + \Delta z \end{bmatrix} \tag{10}$$

$$\delta t_r = \delta t_r + \Delta \delta t_r / c \tag{11}$$

UWAGA!!!

Wyznaczone współrzędne odbiornika x_r, y_r, z_r oraz błąd zegara odbiornika δt_r stanowią dane wejściowe do następnej iteracji!!! Zatem w kolejnych iteracjach, za współrzędne przybliżone odbiornika $\mathbf{x_0}$ przyjmujemy obliczone w poprzedniej iteracji współrzędne $\mathbf{x_r}$ (np. równanie 4). Natomiast w równaniach (1) i (6) podstawiamy nowy błąd zegara odbiornika δt_r. Z kolei w równaniu (1) wykorzystujemy obliczone w porpzedniej iteracji odległości geometryczne ρ_0^s i na ich podstawie liczymy czas propagacji sygnalu τ (**dla każdego satelity odległość geometryczna i czas propagacji sygnału są inne! Tylko w pierwszej iteracji przyjmujemy takie same dla wszystkich satelitów.**).

7. Szukaną pozycją odbiornika, a także kierunkami do satelity czy współczynnikami DOP, są wartości obliczone w ostatniej iteracji.

Obliczone współrzędne odbiornika, dla każdej epoki, należy zapisać do zmiennej i porównać ze współrzędnymi referencyjnymi.