四、機率

Chapter 4 Probability

目錄

圖目錄

學習目標

知識(認知)

1.可以描述各種計數法則適用的狀況。

2.可以描述各種集合基本運算適用的狀況。

3.分辨各種機率理論之間的差異性。

4.評價各種機率理論的使用價值。

技能

1.能夠計算各種事件機率之數值。

2.能夠繪製各種事件的文氏圖。

3.能夠依循步驟，製作樹狀圖，協助解析事件機率。

態度(情意)

1.意識到在各種情境下，「機率」概念的重要性。

2.在各種實務領域中，可以客觀地接受機率數值的意涵。

針對特定事件發生的可能程度利用數值化表達的一種方式，即為機率的典型概念。研究調查結論的推定，主要依據實驗或觀測資料的可信度(certainty)，若可信度高，其結論可靠和受信賴程度高；可信度低，結論就不可靠和受信賴程度低。決定可信度高低的方法即是機率理論(probability theory)和不確定性科學(the science of uncertainty)。機率數值介於 0 和 1 區間，機率 $p = 0$ 時，代表該特定事件幾乎不會發生；機率 $p = 1$ 時，代表該特定事件幾乎一定會發生。機率數值可以提供決策者，對於未知的事件，進行決策判斷、制訂的重要依據。推算特定事件未來可能發生機率，即是統計推論(statistical inference)或推論統計學(inferential statistics)。在經營一家餐廳或旅館時，經常面臨的問題是下個月業績會不會成長、下個月來客人數會不會增加、下個月員工的工作效益會不會提升、下個月會不會有盈餘等，不確定性的問題，欲衡量其發生的可能性大小，就必須具體地善用機率的概念，清楚的呈現不確定性問題的可能性高低，以便於管理者採取適當的方式因應。現代社會中經常會在選舉、運動賽事賭盤或賭博中聽到所謂的賠率，表示贏的勝算或機會有多高。一般賠率使用 K1 比 K2 的方式表示，其代表贏機率為$\frac{K2}{K1+K2}$。故，一個運動賽事賭盤開出賠率 10 比 1，代表特定一方贏機率為$\frac{1}{10+1}$。

章節結構圖

4.1 機率意涵

隨機實驗或隨機試驗(Random experiment)：對於未能預知結果的一種實驗或評量過程。隨機實驗可以重複進行，其每次出現的結果之分布，會產生一種穩定的分布狀態(regular distribution)，此穩定狀態下的結果分布，即是此隨機實驗中每種可能結果機率的分布情況。

丟錢幣，有正面(H)與反面(T)兩種，若丟很多次，其可能出現的結果如下：

HHTHTTHHHTTHTH....

此實驗結果稱為隨機序列(random sequence or random series)，序列中的 H 或 T 稱為結果(outcome)、樣本點、試驗(trial)或~~事件(event)~~。當實驗次數增加時，H 或 T 在序列中所得的結果會趨近於特定數值，H 或 T 會在全部實驗中約各佔$\frac{1}{2}$的比例，此種比例稱為實驗結果的機率(probability)。

機率概念就是特定事件自然發生之結果所佔的一種比例、相對次數和機會。機率屬於無因次單位(dimensionless unit)。機率：評量事件發生的可能性大小。

4.2 機率分布

機率分布(Probability distribution)是應用機率相關理論描述特定隨機變數的特性，離散型機率分布會顯示隨機變數所有可能結果及各種結果個別發生的機率；連續型機率分布顯示隨機變數在特定範圍內的機率。

隨機變數(random variable)：一個隨機實驗過程中出現不同結果的數值。樣本空間(sample space)上的實數函數(real-value function)。一般使用 X、Y、Z 等符號代表隨機變數。

樣本空間(**sample space**)：一個隨機實驗過程中全部可能獲得結果(樣本點、元素、觀測點或出象)所組成的集合(set)。一般使用 S 或 Ω 標示。例如：S = {H, T}。所有可能 n 個事件的聯集∪即為樣本空間 $S = \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \sum_{i=1}^{n} A_i$。

間斷樣本空間(discrete sample space)：具有有限個或可數的樣本點。例如：一家餐廳現有的菜單項目。

連續樣本空間(continuous sample space)：具有無限個的樣本點。例如：餐廳冰箱的壽命、一家餐廳的營業額。

結果(outcome)、**樣本點**(sample point)、**觀測點**、出象、**基本出象**(elementary outcome)、**元素(element)**：每一個隨機實驗過程中可能的結果。故樣本點所組成的集合即為樣本空間。

事件(event)：可視為樣本空間中的子集合或部分集合。通常會使用 E 符號代表事件。特定隨機實驗中，可能出現的結果之組別，在投擲錢幣的隨機實驗中，{H}即是一種事件，其出現機率為 0.5000。

簡單事件(simple event)：包含一個樣本點的部分集合。

複合事件(composite event; compound event)：包含兩個或兩個以上樣本點的部分集合。

機率模型(probability models)：陳述特定隨機實驗中，所有可能出現之結果(樣本點、元素、觀測點或出象)(a list of possible outcomes)與其機率(a probability for each outcome)的分布情況。

學生到校上課主要交通工具機率模型

交通工具	機車	自行車	公車	捷運	步行
機率	0.553	0.120	0.025	0.111	0.191

4.3 計數法則

學習**計數法則**(Counting principles)的目的是不需要一一列出所有可能的結果排列或組合，就能夠快速地決定一個隨機實驗可以產生的結果排列或組合數量。排列(permutation)(前後出現順序需考慮)和組合(combination)(前後出現順序不考慮)是兩種最常見的基本計數模型。

4.3.1 乘法定理

若一個隨機實驗可拆解成 n 個步驟，第 1 個步驟有 m_1 種可能結果，第 2 個步驟有 m_2 種可能結果，以此類推，第 n 個步驟有 m_n 種可能結果，依據**乘法定理**、**多步驟隨機實驗之計數法則**、**乘法公式**(multiplication formula)或**乘數定理**，此隨機實驗共有 $m_1 \times m_2 \times m_3 \times \ldots \times m_n$ 種可能排列結果。

$$\text{可能產生之排列結果的總數} = m_1 \times m_2 \times m_3 \times \ldots \times m_n$$

範例 4.1　　丟擲兩個有標註區別記號的銅板，其結果有幾種排列方式？

題解：每一個銅板皆有兩種丟擲結果(H, T)，將此丟擲銅板的過程拆解成兩個步驟，分別丟擲一個銅板，故共有 $2 \times 2 = 4$ 種丟擲可能排列結果。

樣本空間 $S = \{(H, H), (H, T), (T, H), (T, T)\}$，共有四個結果(樣本點、元素、觀測點或出象)。

答案：丟擲兩個銅板，有 4 種排列方式

練習 4.1　　阿飛餐廳菜單中，飲料有 5 種，主菜有 6 種，湯類有 3 種，甜點有 3 種，此餐廳消費者對於選擇單一飲料、主菜、湯類和甜點有幾種選擇結果排列方式？

題解：依據多步驟隨機實驗之計數法則：若隨機實驗可拆解成 n 個步驟，第 1 個步驟有 m_1 種可能結果，第 2 個步驟有 m_2 種可能結果，以此類推，第 n 個步驟有 m_n 種可能結果，此隨機實驗共有 $m_1 \times m_2 \times m_3 \times \ldots \times m_n$ 種可能排列結果。

飲料 5 × 主菜 6 × 湯類 3 × 甜點 3 = 270 種排列方式

答案：270 種排列方式

4.3.2 排列計數法

欲將數個不同物件排成一列，同時考慮到不同物件之間前後順序時，評估一共可以排出幾種排法的數量，即為排列計數法(Permutation count)的目的。排列計數法可以區分為將所有的物件皆進行排列的全部樣本排列計數、僅將部分物件進行排列的部分樣本排列計數、具有相同物件的排列方式、環狀排列方式等四種。

全部樣本排列計數或**全排列計數**

排列(permutation)即是將數個不同的物件排成一列，估算最多有幾種的排列方式。物件可能出現的前後順序皆必須納入考慮。

在 n 個不同物件排列中，最多可以排列出 $n!$種的方式。

$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \times \ldots \times 1$。$n$ 階乘(factorial)：為所有小於或等於 n 的正整數之乘積。

定義：$0! = 1$

$n!$階乘 Excel 函數

利用 Excel 軟體插入(I)→函數(F)…→在插入函數對話方塊中選取類別(C): **數學與三角函數**，選取函數(N): **FACT**→確定。在函數引數對話視窗中，Number 方塊輸入：階乘數。確定。即會在原先選定的儲存格中出現階乘的數值，等於 $1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times$ number。FACT(number)。

範例 4.2　　觀光系一年級欲搭乘交通車前往另一個校區上課，若有兩位學生欲搭乘交通車，此兩位學生上車的順序有幾種？

題解：假設為了計算上車人數，所以僅能從前門上車。兩位學生搭乘，所以有 n = 2 個不同物件排列。搭乘順序有 AB 和 BA 2 種，排列數量 $n! = 2! = 2 \times 1 = 2$(使用 Excel 軟體 FACT 函數查詢獲得)

答案：2 種排列方式

範例 4.3 觀光系一年級欲搭乘交通車前往另一個校區上課，若有三位學生欲搭乘交通車，此三位學生上車的順序有幾種？

題解：假設為了計算上車人數，所以僅能從前門上車。三位學生搭乘，所以有 n = 3 個不同物件排列。搭乘順序有 ABC、ACB、BAC、BCA、CBA 和 CAB 6 種，排列數量 $n! = 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$(使用 Excel 軟體 FACT 函數查詢獲得)。

答案：6 種排列方式

練習 *4.2* 觀光系一年級欲搭乘交通車前往另一個校區上課，若有四位學生欲搭乘交通車，此四位學生上車的順序有幾種？若有五位學生欲搭乘交通車，此五位學生上車的順序有幾種？

題解：假設為了計算上車人數，所以僅能從前門上車。四位學生搭車排列數量，所以有 n = 4 個不同物件排列，排列數量 $n! = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$。五位學生搭車排列數量，所以有 $n = 5$ 個不同物件排列，排列數量 $n! = 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$(使用 Excel 軟體 FACT 函數查詢獲得)。

答案：24 種排列方式；120 種排列方式

練習 *4.3* 觀光系真心咖啡吧，同時接獲六個不同班級訂購咖啡飲料，僅安排一位外送人員，若訂購的六個班級上課教室皆不在同一棟大樓中，請問有幾種不同的外送路線可以選擇？

題解：排列數量 $n! = 6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$(使用 Excel 軟體 FACT 函數查詢獲得)。

答案：720 種外送路線

部分樣本排列計數或**選排列計數**

從全部 n 個不同的原始資料中，隨機抽取 i 個樣本(已抽取的樣本、不再放回，以供下一回合抽樣，故每一個資料最多只會被抽中一次)，依序排列在 i 個位置，共有 $n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-i+1)$種不同的排列(分配)方式，一般使用$P_i^n$符號表示。排列公式(permutation formula)：

$$P_i^n = \frac{n!}{(n-i)!} = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-i+1)$$

其中 $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \times \ldots \times 1$。$n$ 階乘(factorial)：為所有小於或等於 n 的正整數之乘積。

定義：$0! = 1$

排列方式數 Excel 函數

利用 Excel 軟體公式→函數程式庫→其他函數→統計(S)，選取函數(N):**PERMUT**→確定。在函數引數對話視窗中，Number 方塊輸入：物體總數；Number_chosen 方塊輸入：選取物體數。確定。即會在原先選定的儲存格中出現排列方式數量。

範例 4.4 真真飲料店中有 4 位員工，舉行尾牙活動，老闆準備 2 個摸彩獎品，每位員工最多只能獲得一個獎品，分別為 37 吋液晶電視和高級自行車，試問有幾種可能的排列分配情況？

題解：獎品 37 吋液晶電視和高級自行車 2 種必須分開獨立獲得，即已抽中者，不能再具有後續的抽獎機會。從全部 $n = 4$ 個不同的原始資料中，隨機抽取 $i = 2$ 個樣本

$P_i^n = \frac{n!}{(n-i)!} = P_2^4 = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4!}{2!} = \frac{4\times3\times2\times1}{2\times1} = \frac{4\times3\times\cancel{2\times1}}{\cancel{2\times1}} = 4 \times 3 = 12$ 種排列方式(使用 Excel 軟體 PERMUT 函數查詢獲得)

假設有 A、B、C 和 D 四位員工，分配方式有【A 電視、B 自行車】、【A 電視、C 自行車】、【A 電視、D 自行車】、【B 電視、A 自行車】、【B 電視、C 自行車】、【B 電視、D 自行車】、【C 電視、A 自行車】、【C 電視、B 自行車】、【C 電視、D 自行車】、【D 電視、A 自行車】、【D 電視、B 自行車】、【D 電視、C 自行車】共 12 種。

答案：12 種排列分配方式

範例 4.5 阿飛餐廳中有 50 位員工，舉行忘年會活動，老闆準備 3 個摸彩獎品，每位員工最多只能獲得一個獎品，依序為超級 37 吋液晶電視、高級墾丁荒野度假村住宿券和高級自行車，試問有幾種可能的排列(分配)情況？

題解：獎品超級 37 吋液晶電視、高級墾丁荒野度假村住宿券、高級自行車三種必須分開獨立獲得，即已抽中者，不能再具有後續的抽獎機會。從全部 $n = 50$ 個不同的原始資料中，隨機抽取 $i = 3$ 個樣本

$P_i^n = \frac{n!}{(n-i)!} = P_3^{50} = \frac{50!}{(50-3)!} = \frac{50!}{47!} = \frac{50\times49\times48\times\cancel{47!}}{\cancel{47!}} = 50 \times 49 \times 48 = 117600$(使用 Excel 軟體 PERMUT 函數查詢獲得)

答案：117600 種排列分配方式

範例 4.6 餐旅系四年級總共有 5 位同學，欲舉行下一學期班級幹部，一位同學最多只能擔任一個職務，需選舉的班級幹部有班代、副班代、學藝和總務，試問有幾種可能的排列分配情況？

題解：從全部 $n = 5$ 個不同的原始資料中，隨機抽取 $i = 4$ 個樣本。

$P_i^n = \frac{n!}{(n-i)!} = P_4^5 = \frac{5!}{(5-4)!} = \frac{5!}{1!} = \frac{5\times4\times3\times2\times\cancel{1!}}{\cancel{1!}} = 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$ 可能的排列分配方式(使用 Excel 軟體 PERMUT 函數查詢獲得)

答案：120 種排列分配方式

練習 4.4 奇遇餐廳冷凍庫利用密碼控制人員進出，以 0~9 阿拉伯數字中不同的 3 個數字當成密碼，密碼中數字不能重複出現，系統會考慮數字出現的前後順序，正確才開啟，試問總共有幾種密碼數字的排列方式？

題解：從全部 $n = 10$ 個不同的原始資料中，隨機抽取 $i = 3$ 個樣本。

$P_i^n = \frac{n!}{(n-i)!} = P_3^{10} = \frac{10!}{(10-3)!} = \frac{10\times9\times8\times\cancel{7!}}{\cancel{7!}} = \frac{10!}{7!} = 10 \times 9 \times 8 = 720$ 種排列方式(使用 Excel 軟體 PERMUT 函數查詢獲得)

答案：720 種排列方式

練習 4.5 若從 26 個英文字母中，選取 4 個不同英文字母，若依據英文字母前後順序排列，請估算有幾種排列方式？

題解：從全部 $n = 26$ 個不同的原始資料中，隨機抽取 $i = 4$ 個樣本

$P_i^n = \frac{n!}{(n-i)!} = P_4^{26} = \frac{26!}{(26-4)!} = \frac{26!}{22!} = \frac{26\times25\times24\times23\times\cancel{22!}}{\cancel{22!}} = 26 \times 25 \times 24 \times 23 = 358800$(使用 Excel 軟體 PERMUT 函數查詢獲得)

答案：358800 種排列方式

練習 4.6 AC 連鎖咖啡店，欲籌設 A、B 和 C 三家新咖啡店，欲從 8 個儲備幹部中分別選出新咖啡店的店長。請估算在選派店長時有幾種安排方式？

題解：從全部 $n = 8$ 個不同的原始資料中，隨機抽取 $i = 3$ 個樣本

$P_i^n = \frac{n!}{(n-i)!} = P_3^8 = \frac{8!}{(8-3)!} = \frac{8!}{5!} = \frac{8\times7\times6\times\cancel{5!}}{\cancel{5!}} = 8 \times 7 \times 6 = 336$(使用 Excel 軟體 PERMUT 函數查詢獲得)

答案：336 種排列方式

具有相同物件的排列方式

在四個不同物件的排列方式中，有 $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ 種排列方式；若是四個物件皆相同(A A A A)時，不計較此四個物件的前後順序，就會剩下 1 種排列方式。在相同物件的排列方式中，前後位置對調，其外觀皆屬相同，無法觀察出其間的差異，因此，只能算一種排列方式。

在 n 個物件中可以區分為 k 類，每一類中的物件皆相同，無法辨識相同物件之間的差異，其每一類的物件數量分別為 n_1、n_2、n_3、...、n_k 個，會有 $\frac{n!}{n_1!\times n_2!\times n_3!\times\ldots\times n_k!}$ 種排列方式。其中，$n = n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_k$。

範例 4.7　　欲將 3 枝相同廠牌和樣式的自動鉛筆與 2 枝相同廠牌和樣式的一般鉛筆，共 5 枝筆分給 5 位同學，每人一枝，試問共有幾種分法？

題解：在 $n = 5$ 個筆物件中可以區分為 $k = 2$ 類(兩種筆)，每一類中的物件彼此間皆相同，其每一類的物件數量分別為 $n_1 = 3$(自動鉛筆數量)和 $n_2 = 2$ 個(一般鉛筆數量)。

$$\frac{n!}{n_1!\times n_2!\times n_3!\times\ldots\times n_k!} = \frac{5!}{3!\times2!} = \frac{5\times4\times3!}{3!\times2!} = \frac{5\times4\times\cancel{3!}}{\cancel{3!}\times2!} = \frac{5\times4}{2\times1} = 10 \text{ 種可能的排列分配方式(數量)}$$

5 位同學依序排列分配方式：自自自一一、自自一一自、自一一自自、一一自自自、自一自一自、自一自自一、一自自一自、一自自自一、一自一自自和自一自自一，10 種排列方式

答案：10 種排列方式

範例 4.8　　欲將 2 枝相同廠牌和樣式的自動鉛筆、3 枝相同廠牌和樣式的一般鉛筆及 2 枝相同廠牌和樣式的著色筆，共 7 枝筆分給 7 位同學，每人一枝，試問共有幾種分法？

題解：在 $n = 7$ 個筆物件中可以區分為 $k = 3$ 類(三種筆)，每一類中的物件彼此間皆相同，其每一類的物件數量分別為 $n_1 = 2$(自動鉛筆數量)、$n_2 = 3$ 個(一般鉛筆數量)和 $n_3 = 2$ 個(著色筆數量)。

$$\frac{n!}{n_1!\times n_2!\times n_3!\times\ldots\times n_k!} = \frac{7!}{2!\times3!\times2!} = \frac{7\times6\times5\times4\times3!}{2!\times3!\times2!} = \frac{7\times6\times5\times4\times\cancel{3!}}{\cancel{2!}\times\cancel{3!}\times\cancel{2!}} = 7 \times 6 \times 5 = 210 \text{ 種可能的排列分配方式(數量)}$$

答案：210 種排列方式

範例 4.9　　觀光系欲舉辦擲銅板比賽，假設投擲成正面和反面機率相等，若投擲 4 次有 2 次為正面者，有幾種排列方式？若投擲 4 次有 2 次為正面者，其機率有多少？

題解：在 $n = 4$ 個物件中可以區分為 $k = 2$ 類(正面和反面兩類)，每一類中的物件彼此間皆相同，其每一類的物件數量分別為 $n_1 = 2$(正面數量)和 $n_2 = 2$ 個(反面數量)。

$$\frac{n!}{n_1!\times n_2!\times n_3!\times\ldots\times n_k!} = \frac{4!}{2!\times2!} = 6 \text{ 可能的排列分配方式(數量)}$$

排列分配：正正反反、正反正反、正反反正、反正正反、反正反正、反反正正

一個銅板投擲 4 次全部有 $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^4 = 16$ 種排列分配方式(數量)，機率 $= \frac{\text{相同物件排列數量}}{\text{全部排列數量}} = \frac{6}{16} = 0.375$

答案：6 種排列方式；機率 0.375

範例 4.10　　統計學考試題目有 6 題是非題，若事先沒有唸書，考試時答案用投擲銅板決定，假設投擲成正面和反面機率相等，(A)請計算答對 5 題機率？(B)請計算答對 6 題機率？(答案有效位數四捨五入取到小數點後第 4 位)

題解：答對 5 題：在 $n = 6$ 個物件中可以區分為 $k = 2$ 類(答對與答錯兩類)，每一類中的物件皆相同，其每一類的物件數量分別為 $n_1 = 5$(答對者)和 $n_2 = 1$ 個(答錯者)，有$\frac{n!}{n_1!\times n_2!\times n_3!\times\ldots\times n_k!} = \frac{6!}{5!\times 1!} = 6$ 可能的排列分配方式(數量)

投擲 6 次全部有 $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^6 = 64$ 種排列分配方式(數量)，機率 $= \frac{\text{相同物件排列數量}}{\text{全部排列數量}} = \frac{6}{64} = 0.0938$

答對 6 題：在 $n = 6$ 個物件中可以區分為 $k = 2$ 類(答對與答錯兩類)，每一類中的物件皆相同，其每一類的物件數量分別為 $n_1 = 6$(答對者)和 $n_2 = 0$ 個(答錯者)，有$\frac{n!}{n_1!\times n_2!\times n_3!\times\ldots\times n_k!} = \frac{6!}{6!\times 0!} = 1$ 可能的分配方式

投擲 6 次全部有 $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^6 = 64$ 種排列分配方式(數量)，機率 $= \frac{\text{相同物件排列數量}}{\text{全部排列數量}} = \frac{1}{64} = 0.0156$

答案：(A)機率 0.0938；(B)機率 0.0156

練習 *4.7*　統計學考試題目有 8 題是非題，若事先沒有唸書，考試時答案用投擲銅板決定，假設投擲成正面和反面機率相等，(A)請計算答對 5 題機率？(B)請計算答對 6 題機率？(C)請計算答對 7 題機率？(D)請計算答對 8 題機率？(答案有效位數四捨五入取到小數點後第 4 位)

題解：答對 5 題：在 $n = 8$ 個物件中可以區分為 $k = 2$ 類(答對與答錯兩類)，每一類中的物件皆相同，其每一類的物件數量分別為 $n_1 = 5$(答對者)和 $n_2 = 3$ 個(答錯者)，有$\frac{n!}{n_1!\times n_2!\times n_3!\times\ldots\times n_k!} = \frac{8!}{5!\times 3!} = 56$ 可能的排列分配方式(數量)

投擲 8 次全部有 $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^8 = 256$ 種排列分配方式(數量)，機率 $= \frac{\text{相同物件排列數量}}{\text{全部排列數量}} = \frac{56}{256} =$ 0.2188

答對 6 題：在 $n = 8$ 個物件中可以區分為 $k = 2$ 類(答對與答錯兩類)，每一類中的物件皆相同，其每一類的物件數量分別為 $n_1 = 6$(答對者)和 $n_2 = 2$ 個(答錯者)，有$\frac{n!}{n_1!\times n_2!\times n_3!\times\ldots\times n_k!} = \frac{8!}{6!\times 2!} = 28$ 可能的排列分配方式，機率 $= \frac{\text{相同物件排列數量}}{\text{全部排列數量}} = \frac{28}{256} = 0.1094$

答對 7 題：在 $n = 8$ 個物件中可以區分為 $k = 2$ 類(答對與答錯兩類)，每一類中的物件皆相同，其每一類的物件數量分別為 $n_1 = 7$(答對者)和 $n_2 = 1$ 個(答錯者)，有$\frac{n!}{n_1!\times n_2!\times n_3!\times\ldots\times n_k!} = \frac{8!}{7!\times 1!} = 8$ 可能的排列分配方式，機率 $= \frac{\text{相同物件排列數量}}{\text{全部排列數量}} = \frac{8}{256} = 0.0313$

答對 8 題：在 $n = 8$ 個物件中可以區分為 $k = 2$ 類(答對與答錯兩類)，每一類中的物件皆相同，其每一類的物件數量分別為 $n_1 = 8$(答對者)和 $n_2 = 0$ 個(答錯者)，有$\frac{n!}{n_1!\times n_2!\times n_3!\times\ldots\times n_k!} = \frac{8!}{8!\times 0!} = 1$ 可能的排列分配方式，機率 $= \frac{\text{相同物件排列數量}}{\text{全部排列數量}} = \frac{1}{256} = 0.0039$

答案：(A)機率 0.2188；(B)機率 0.1094；(C)機率 0.0313；(D)機率 0.0039

練習 *4.8*　觀光系校外參訪活動，欲安排住宿房間，若有 6 位學生，有一間雙人房和一間四人房，請估算有幾種排列安排方式？

練習 *4.9*　　觀光系校外參訪活動，欲安排住宿房間，若有 6 位學生，有三間雙人房，請估算有幾種排列方式？

練習 *4.10*　　觀光系校外參訪活動，欲安排住宿房間，若有 10 位學生，有一間雙人房和兩間四人房，請估算有幾種排列方式？

範例 4.11　　投擲五個錢幣，出現三個正面機率？

題解：在 n = 5 個物件中可以區分為 k = 2 類(正面和反面 2 類)，每一類中的物件皆相同，其每一類的物件數量分別為 n_1 = 3(正面數量)和 n_2 = 2 個(反面數量)，有$\frac{n!}{n_1!\times n_2!\times n_3!\times\ldots\times n_k!} = \frac{5!}{3!\times 2!} = \frac{5\times4\times3\times2\times1}{3\times2\times1\times2\times1} = \frac{5\times4\times\cancel{3\times2\times1}}{\cancel{3\times2\times1}\times2\times1}$ = 10 種排列方式(數量)

投擲 5 個錢幣全部有 $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5 = 32$ 種排列分配方式(數量)，機率 = $\frac{\text{相同物件排列數量}}{\text{全部排列數量}} = \frac{10}{32} = 0.3125$

$$C_3^5 \times (\frac{1}{2})^2 \times (\frac{1}{2})^3 = 10 \times \frac{1}{32} = \frac{5}{16} = 0.3125$$

答案：機率 0.3215

練習 *4.11*　　請估算字母 MINGTMIINGHM 的排列數量有幾種排列方式？

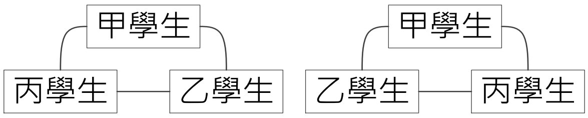
環狀排列方式

若有 n 個相異物件，排列成一個環狀，會有$(n-1)!$種排列方式。

範例 4.12　　觀光系三位學生欲前往咖啡廣場找一個圓形桌子討論統計學功課，不計方位會有幾種座法？

題解：相異物件數量 n = 3，排列數量$(n-1)! = (3-1)! = 2! = 2$。

分別有「甲乙丙」與「甲丙乙」共 2 種環狀順序座法

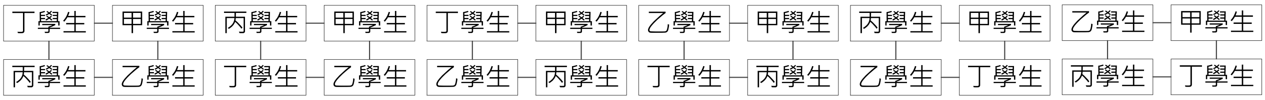


答案：2 種排列方式

範例 4.13 觀光系四位學生欲前往咖啡廣場找一個圓形桌子討論統計學功課，不計方位會有幾種座法？

題解：相異物件數量 $n = 4$，排列數量$(n-1)! = (4-1)! = 3! = 6$。

分別有「甲乙丙丁」、「甲乙丁丙」、「甲丙乙丁」、「甲丙丁乙」、「甲丁乙丙」和「甲丁丙乙」共 6 種環狀順序座法。



答案：6 種排列方式

4.3.3 組合計數法

組合計數法(Combination count)使用於計算由 n 不同物件中取出 i 個物件的不同取法數量，其中在所取出的 i 個物件之間不考慮前後次序的問題。

從全部 n 個不同的物件中，抽取 i 個物件(已抽取的物件、不再放回，以供下一回合抽樣，故每一個物件最多只會被抽中一次)，共有C_i^n或 ${}_nC_i$ 種選擇組合(抽選方式)。

組合公式(combination formula)：

$$C_i^n = \binom{n}{i} = \frac{n!}{i!\times(n-i)!} = \frac{P_i^n}{i!} = \frac{\text{部分樣本排列數量}}{i!}$$

組合計數法只考慮抽取的 i 物件為何，不考慮其被抽取的出現順序或位置。若 A、B、C 三人被抽中的分配方式有(ABC)、(ACB)、(BAC)、(BCA)、(CAB)和(CBA)共六種排列方式，惟在組合計數法中都被視為一種組合方式(number of combinations)。物件出現的前後順序不論(不考慮)。故在 i 個樣本中有 $i!$種不同的組合排列方式，因此在公式中組合計數等於部分樣本排列計數除以 $i!$。

範例 4.14 若樂透彩券從 1 至 4 號中選取 2 個不同號碼，此種樂透彩中有幾種選擇法？

題解：從 1 至 4 號選取 2 個不同號碼，選取的前後順序不影響組合結果。從全部 $n = 4$ 個不同的物件中，抽取 $i = 2$ 個物件。

$C_i^n = \frac{n!}{i!\times(n-i)!} = C_2^4 = \frac{4!}{2!\times(4-2)!} = \frac{4!}{2!\times2!} = \frac{4\times3\times2\times1}{2\times1\times2\times1} = \frac{4\times3\times\cancel{2}\times1}{\cancel{2}\times1\times\cancel{2}\times1} = \frac{24}{4} = 6$ 種組合數量(利用 Excel 軟體 COMBIN 函數查詢獲得)

{1,2,3,4}抽出兩個→{1,2}, {1,3}, {1,4}, {2,3}, {2,4}, {3,4}一共有六種不同組合

答案：6 種組合

範例 4.15 若樂透彩券從 1 至 16 號中選取 4 個不同號碼，此種樂透彩中有幾種選擇法？

題解：從 1 至 16 號選取 4 個不同號碼，選取的前後順序不影響組合結果。從全部 $n = 16$ 個不同的物件中，抽取 $i = 4$ 個物件。

$C_i^n = \frac{n!}{i!\times(n-i)!} = C_4^{16} = \frac{16!}{4!\times(16-4)!} = \frac{16!}{4!\times12!} = \frac{16\times15\times14\times13\times12!}{4\times3\times2\times1\times12!} = \frac{16\times15\times14\times13\times\cancel{12!}}{4\times3\times2\times1\times\cancel{12!}} = 1820$ 種組合數量(利用 Excel 軟體 COMBIN 函數查詢獲得)

答案：1820 種組合

練習 *4.12* 若從 26 個英文字母中，選取 4 個不同英文字母，若英文字母前後順序不影響組合結果，請估算有幾種組合方式？

題解：從 1 至 26 號選取 4 個不同字母，選取的前後順序不影響組合結果。從全部 $n = 26$ 個不同的物件中，抽取 $i = 4$ 個物件。

$C_i^n = \frac{n!}{i!\times(n-i)!} = C_4^{26} = \frac{26!}{4!\times(26-4)!} = \frac{26!}{4!\times22!} = \frac{26\times25\times24\times23\times22!}{4\times3\times2\times1\times22!} = \frac{26\times25\times24\times23\times\cancel{22!}}{4\times3\times2\times1\times\cancel{22!}} =$ 14950(利用 Excel 軟體 COMBIN 函數查詢獲得)

答案：14950 種組合

練習 *4.13* 觀光系學生參加旅館參訪活動，晚上空閒時間玩尋寶遊戲，在特定房間內有 12 位學生，每一位學生皆有自己的編號，從 1 ~ 12 號，今若隨機抽取 4 位學生，請估算抽中的學生，其最小編號是 6 號機率？(答案有效位數四捨五入取到小數點後第 4 位)

題解：所以編號 6 號一定會被抽中，其他三個號碼必須是 7~12 之間的號碼，從 7~12 編號($n = 6$)抽出 $i = 3$ 個號碼的組合數為 combin(6,3) = $C_i^n = \frac{n!}{i!\times(n-i)!} = C_3^6 = \frac{6!}{3!\times(6-3)!} = \frac{6!}{3!\times3!} = \frac{6\times5\times4\times3\times2\times1}{3\times2\times1\times3\times2\times1} = \frac{\cancel{6}\times5\times4\times\cancel{3\times2\times1}}{\cancel{3\times2}\times1\times\cancel{3\times2\times1}} = 20$。

從 12 位學生隨機抽出 4 位的組合數為 combin(12,4) = $C_i^n = \frac{n!}{i!\times(n-i)!} = C_4^{12} = \frac{12!}{4!\times(12-4)!} = \frac{12!}{4!\times8!} = \frac{12\times11\times10\times9\times8!}{4\times3\times2\times1\times8!} = \frac{\cancel{12}\times11\times10\times9\times\cancel{8!}}{\cancel{4\times3}\times2\times1\times\cancel{8!}} = 495$(利用 Excel 軟體 COMBIN 函數查詢獲得)

隨機抽取 4 位學生，其最小編號是 6 號機率 = $\frac{\text{從 7~12 編號}(n=6)\text{抽出}i=3\text{ 個號碼的組合數}}{\text{從 12 位學生隨機抽出 4 位的組合數}} = \frac{20}{495} = 0.0404$

答案：機率 = 0.0404

練習 *4.14* 投擲公正骰子兩次，請估算至少有一次為四點機率？

題解：投擲公正骰子兩次，至少有一次為四點機率 = P(投擲兩次有一次四點) + P(投擲兩次有兩次四點) = 投擲骰子兩次，有一次四點的組合數 × 投擲兩個骰子出現一次四點機率 + 投擲骰子兩次，有兩次四點的組合數 × 投擲兩個骰子出現兩次四點機率 = $C_1^2 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} + C_2^2 \times \frac{1}{6} = 2 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} + 1 \times \frac{1}{6} = \frac{11}{36}$

答案：$\frac{11}{36}$

範例 4.16 觀光系 4 位學生欲前往咖啡廣場找一個圓形桌子僅有 3 個座位討論統計學功課，不計方位會有幾種座法？

題解：$C_3^4 \times (n-1)! = C_3^4 \times (3-1)! = 4 \times 2 = 8$ 種座法

甲乙丙丁 4 為學生有「甲乙丙」、「甲丙乙」、「甲乙丁」、「甲丁乙」、「甲丙丁」、「甲丁丙」、「乙丙丁」和「乙丁丙」共 8 種環狀順序座法

答案：8 種

練習 *4.15* 觀光系 10 位學生欲前往咖啡廣場找一個圓形桌子僅有 4 個座位討論統計學功課，不計方位會有幾種座法？

題解：$C_4^{10} \times (n-1)! = C_4^{10} \times (4-1)! = 210 \times 6 = 1260$ 種座法

Excel 函數

利用 Excel 軟體插入(I)→函數(F)…→在插入函數對話方塊中選取類別(C): **數學與三角函數**，選取函數(N):**COMBIN**→確定。在函數引數對話視窗中，Number 方塊輸入：物件的數目，Number_chosen 方塊中輸入：每個組合中要選的物件數目。確定。即會在原先選定的儲存格中出現組合數量。COMBIN(number,number_choosen)。

4.4 機率理論

對社會科學或自然科學中所有現象或事件的解析，可分為確定模式(deterministic model)與機率模式(probabilistic model)兩種，機率理論(Probability theorem)就是分析機率模式的工具與方法。

若小玫連鎖飲料店珍珠奶茶大杯定價 50 元，該飲料店此項產品收入金額為定價×販售數量，若販售數量確定時，該項產品收入即可獲得明確金額。因此，該項產品收入金額 = 定價×販售數量就是屬於【確定模式】。

若小玫咖啡店年終舉行尾牙餐會，老闆提供一台 iPhone 手機提供摸彩，一共有 10 位員工參加此餐會，若摸彩執行過程公正公開舉行，雖然無法確定哪一位幸運的員工可以獲得手機，但是每位參加的員工皆有$\frac{1}{10}$機會獲得。因此，摸彩不確定性的過程，每位員工獲得手機機率各為$\frac{1}{10}$就是屬於【機率模式】。

客觀機率(Objective probability)

　　古典機率(classical probability)

　　經驗機率(empirical probability)

主觀機率(Subjective probability)

4.4.1 古典機率

在古典機率(Classical probability)或稱為事先機率、先驗機率(Prior probability)的概念中，強調在隨機實驗中各種可能出現的結果(樣本點、元素、觀測點或出象)總數 n[n 數量屬於有限(finite)]，皆是相互排斥(一次實驗只會出現一個樣本點，不會同時出現兩個樣本點)和獨立(前一次實驗出現的樣本點，不會影響下次實驗出現的樣本點)，且每一個樣本點出現機率相同。隨機實驗中任何一個樣本點出現機率皆是$\frac{1}{n}$。在特定事件 A 有 n_A 個樣本點，特定事件 A 發生機率 $P(A) = \frac{n_A}{n}$。古典機率強調樣本點出現機會均等的現象。

每一個特定結果(樣本點、元素、觀測點或出象)發生機率 = $\frac{1}{n}$。

$$\boxed{\text{特定事件 A 發生機率} = \frac{\text{符合事件 A 定義的觀測點數量}(n_A)}{\text{可能出現的觀測點總數}(n)} = P(A) = \frac{n_A}{n}}$$

互斥(mutually exclusive)：一個隨機實驗中，兩個結果(樣本點、元素、觀測點或出象)之間屬於互斥關係時，即代表一個結果(樣本點、元素、觀測點或出象)發生時，同一時間內另一個結果(樣本點、元素、觀測點或出象)不會發生。例如：投擲銅板出現正面(結果)時，即不會出現反面(結果)，即代表投擲銅板出現正面和反面兩個結果(樣本點、元素、觀測點或出象)之間屬於互斥關係。

周延(collectively exhaustive)：一次隨機實驗中，出現的結果(樣本點、元素、觀測點或出象)一定在事先規劃好的選項之中。

古典機率理論的缺失：若可能出現結果(樣本點、元素、觀測點或出象)總數 n 趨近於無限∞、不知或屬於動態，無法估算其事件發生機率。若每一個試驗樣本點出現機率不相等時，亦無法估算其發生機率。

範例 4.17　若從 1 至 16 號樂透彩球中，抽出一個彩球，彩球數字是 4 倍數機率？(答案有效位數四捨五入取到小數點後第 2 位)

題解：在總數 $n = 16$ 個彩球中，事件 A：彩球數字符合 4 倍數的結果(樣本點、元素、觀測點或出象)有{4}, {8}, {12}, {16}共 $n_A = 4$ 個。

$$\text{抽出彩球數字符合 4 的倍數之機率} = \frac{\text{符合事件 A：4 的倍數之觀測點數量}(n_A)}{\text{可能出現的觀測點總數}(n)} = \frac{4}{16} = 0.25$$

答案：0.25

範例 4.18　系學會舉辦彩球摸彩活動，其中 m 個彩球有獎項，n 個彩球沒有獎項(銘謝惠顧)，抽獎後彩球不再放回去供下一位同學抽獎，請問同學先抽或後抽的中獎機率是否相等？請說明理由。

題解：第一位抽獎同學中獎機率 $P_1 = \frac{m}{m+n}$

第二位抽獎同學中獎機率 $P_2 = P$(第一位同學中獎後，第二位同學中獎機率) + P(第一位同學沒有中獎後，第二位同學中獎機率) $= \frac{m}{m+n} \times \frac{m-1}{m+n-1} + \frac{n}{m+n} \times \frac{m}{m+n-1} = \frac{m\times(m-1)+n\times m}{(m+n)\times(m+n-1)} = \frac{m\times(m+n-1)}{(m+n)\times(m+n-1)} = \frac{m}{m+n} = P_1$

答案：因為 $P_2 = P_1$，故同學先抽與後抽中獎機率相同

4.4.2 客觀機率

在客觀機率(Objective probability)或稱為事後機率、後驗機率(Posterior probability)的概念中，陳述在重複 n 次的隨機實驗中，特定事件(event)A 發生機率為出現該特定事件之次數 f_A 與隨機實驗次數 n 之比率或相對次數(relative frequencies)。

$$\text{特定事件 A 發生機率} = \frac{\text{出現特定事件的次數}}{\text{隨機實驗次數}(n)} = P(\mathrm{A}) = \lim_{n\to\infty} \frac{f_{\mathrm{A}}}{n}$$

多次重複隨機實驗時 $n\to\infty$，每一種可能事件(event)出現的相對次數比(頻率)會漸漸趨近於穩定的數值，每一個事件(event)的穩定相對次數比即為該事件的發生機率。

範例 4.19　若從 1 至 10 號樂透彩球中，抽出一個彩球，欲瞭解每一號彩球被抽中機率？每次抽出一個彩球後，放回彩球箱重新再抽取，連續抽取 10000 次。(答案有效位數四捨五入取到小數點後第 3 位)

題解：每一號彩球被抽中的次數會趨近於 1000 次

依據客觀機率理論：每一號彩球被抽中機率 $= \frac{1000}{10000} = 0.100$

答案：0.100

大數法則(Law of large numbers)、大數定理或大數律

若大量(無限次)重複特定隨機實驗時 $n\to\infty$，特定事件出現的相對次數比，會接近該事件實際的發生機率。

4.4.3 主觀機率

在主觀機率(Subjective probability)的概念下，特定事件發生機率，取決於特定個人或族群對發生此事件的相信、信賴或認知程度，而主觀判斷可能發生的可能性。

在面對事先無法進行實驗的事件中，在沒有客觀的依據或理論下，主觀機率的表達方式愈來愈受到大家的接受與重視，惟其精確程度無法和客觀機率比較。主觀機率的論述上缺乏明確的理論依據。故事件的發生機率，最好依據客觀機率進行估算。

4.4.4 機率性質

在一個隨機實驗中，樣本空間為 S，任何一個特定事件 A 發生機率為 P(A)應符合：

$P(S) = 1$

樣本空間 S 內所有結果(樣本點、元素、觀測點或出象)皆發生機率總和等於 1。

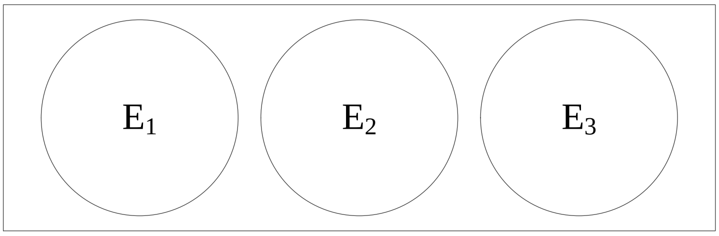
$0 \le P(\mathrm{A}) \le 1$，其中 $\mathrm{A} \in S$

任何一個特定事件 A 發生機率皆介於 0 和 1 之間，機率不可能有負值或大於 1 的情況發生。若特定事件不會發生，其事件機率為 0；特定事件一定會發生，其事件機率為 1。

加法定理(rule of addition)

$P(E_1 \cup E_2 \cup E_3) = P(E_1) + P(E_2) + P(E_3)$，其中 E_1、E_2 與 E_3 彼此之間為互斥事件

若 E_1、E_2 與 E_3 彼此之間為互斥事件，三個事件彼此之間的交集機率 $P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = 0$(代表三個事件不會同時發生)，$E_1$、$E_2$ 或 E_3 事件發生機率為 E_1、E_2 和 E_3 個別發生事件機率的總和。



上述公式可以延續到 n 個彼此之間皆為互斥事件的情況

$$P(\cup_{i=1}^{n} E_i) = \sum_{i=1}^{n} P(E_i)$$

範例 4.20　高高飲料店以人工方式充填飲料，訂定每一杯飲料容量標準為 1000 ± 20 ml，過多或過少皆不符合標準。過去一年裝填的狀況分布如下表。隨機抽取一杯飲料容量過少或過多機率。

容量	事件代號	數量	發生機率
過少	A	505	0.0174
符合標準	B	25000	0.8619
過多	C	3502	0.1207
合計		29007	1.0000

題解：過多、符合標準和過多事件之間為互斥事件，故可以使用加法定理

$P(\mathrm{A}$ 或 $\mathrm{C}) = P(\mathrm{A} \cup \mathrm{C}) = P(\mathrm{A}) + P(\mathrm{C}) = 0.0174 + 0.1207 = 0.1381$

答案：機率 = 0.1381

文氏圖、范氏圖(Venn diagram)

利用一個矩型圖形代表所有可能的結果(樣本點、元素、觀測點或出象)，矩型圖形範圍內即是一個樣本空間，以圓形或橢圓形表示特定事件，矩型內每一個點，代表一個可能的樣本點。

在隨機實驗中，每進行一次試驗，即會產生一個點，此結果(樣本點、元素、觀測點或出象)若在特定事件的圈圈之中，即代表此特定事件會發生；若此樣本點在特定事件的圈圈之外，代表此特定事件不會發生。

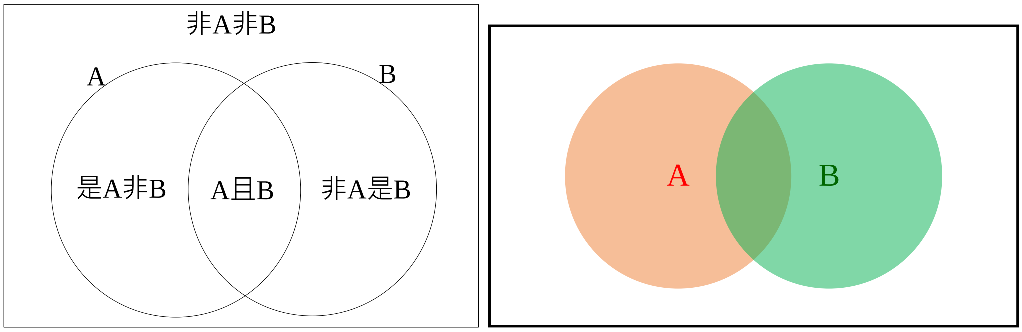


圖 4-1 文氏圖

4.4.5 集合基本運算

4.4.5.1 空事件

空事件 A(Null event A)、空集合(empty set)或不可能事件代表在樣本空間 S 中，特定事件 A 不含任何結果(樣本點、元素、觀測點或出象)，而且一定不會發生的事件，以 ϕ 或{}符號表示。

$$\mathrm{A} = \{\} = \phi \qquad \rightarrow \qquad P(\phi) = 0$$

4.4.5.2 必然事件

特定事件 A 包含所有可能結果(樣本點、元素、觀測點或出象)，即事件 A 包含所有的樣本空間 S 中的每一個樣本點，因此一定會發生的事件，此種集合稱為宇集(universal set)，利用 Ω(少用)符號表示。故，事件 A 發生機率等於 1。

$$\mathrm{A} = S \qquad \rightarrow \qquad P(A) = P(S) = 1$$

4.4.5.3 餘事件

事件 A 的餘事件、補集(Complement of event A; complementary event A)或餘集代表樣本空間內不包含 A 事件的其他所有結果(樣本點、元素、觀測點或出象)的集合，利用 A^C、$\sim A$、A'或$\bar{A}$(此符號盡量少用，恐會與平均值符號混淆)標示。A^C 為事件 A 的餘事件。

$$A^C + A = S \quad \rightarrow \quad P(A^C) + P(A) = P(S) = 1 \quad \rightarrow \quad P(A^C) = 1 - P(A)$$

如下圖中所示，事件 A 的餘事件，即在事件 A 不發生的其他所有事件，表示於圖中灰色底的部分。

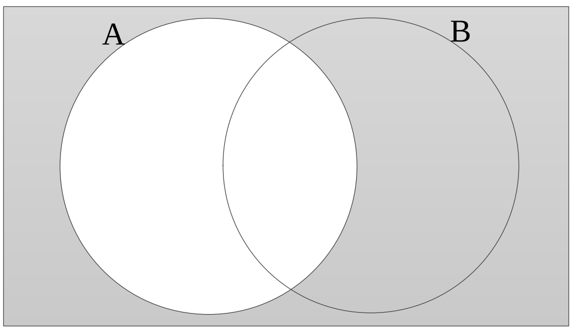


圖 4-2 餘事件文氏圖

在兩個集合中，當集合 A 屬於集合 B 的一部份，A 稱為 B 的子集合(subset)，以符號 A⊂B 表示，讀音為【A 包含於 B】，或以符號 B⊃A 表示，讀音為【B 包含 A】。

4.4.5.4 交集

事件 A 和 B 的交集(Intersection of events A and B)代表在相同樣本空間 S 中，在事件 A 和 B 中共同出現的結果(樣本點、元素、觀測點或出象)所組成的集合，利用 A∩B 標示。如同英文中 and 的意涵。

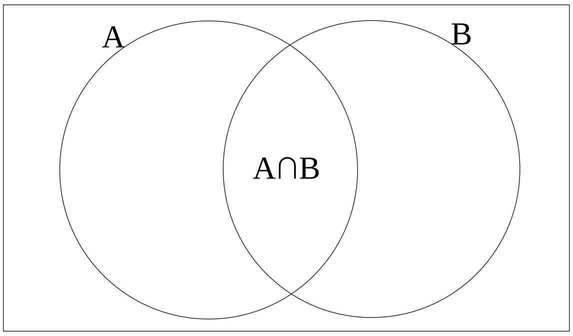


圖 4-3 交集文氏圖

對 A 和 B 兩事件，可以將其機率解析為如下關係：

$$P(\mathrm{A}) = P(\mathrm{A}\cap S) = P[\mathrm{A}\cap(\mathrm{B} + \mathrm{B}^C)] = P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}) + P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}^C)$$
$$P(\mathrm{B}) = P(\mathrm{B}\cap S) = P[\mathrm{B}\cap(\mathrm{A} + \mathrm{A}^C)] = P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}) + P(\mathrm{A}^C\cap\mathrm{B})$$

4.4.5.5 聯集

事件 A 和 B 的聯集(Union of events A and B)代表在相同樣本空間 S 中，所有屬於 A、B 或兩者都有的結果(樣本點、元素、觀測點或出象)所組成之集合，利用 A∪B 標示。如同英文中 or 的意涵。

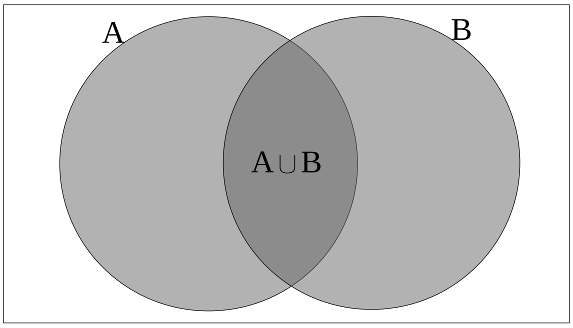


圖 4-4 聯集文氏圖

$$P(\mathrm{A}\cup\mathrm{B}) = P(\mathrm{A}) + P(\mathrm{B}) - P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})$$

練習 *4.16* 若 $P(\mathrm{E}) = 0.35$ 和 $P(\mathrm{F}) = 0.32$，$P(\mathrm{E}$ or $\mathrm{F})$機率為(A)剛好等於 0.03；(B)剛好等於 0.67；(C)等於或小於 0.67；(D)等於或大於 0.67。

答案：(C)

部分集合

集合 A 每一個結果(樣本點、元素、觀測點或出象)都屬於集合 B 內的樣本點，稱 A 是 B 的部分集合或子集合(subset)，以符號 A⊂B(讀作 A 包含於 B)標記。集合 A 中有一個樣本點 a 使得 a∉B，A 就不是 B 的子集合，以符號 A⊄B(讀作 A 不包含 B)標記。

4.4.5.6 互斥事件

互斥事件或相斥事件(mutually exclusive event)代表在相同樣本空間 S 中，A 和 B 事件沒有共同的結果(樣本點、元素、觀測點或出象)，即 A 與 B 兩事件不可能同時發生。

$$\mathrm{A}\cap\mathrm{B} = \phi \quad \text{空集合} \quad \rightarrow \quad P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}) = P(\phi) = 0$$

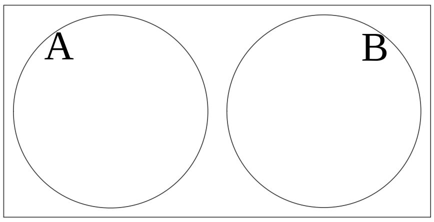


圖 4-5 互斥事件文氏圖

4.4.5.7 狄摩根定理

狄摩根定理(de-Morgen rule)或**迪摩根律**屬於集合理論中敘述餘事件之間運算的一種定律。

A 和 B 兩事件之間，下列成立。

$A^C \cap B^C = (A \cup B)^C$　　　　$A^C \cup B^C = (A \cap B)^C$

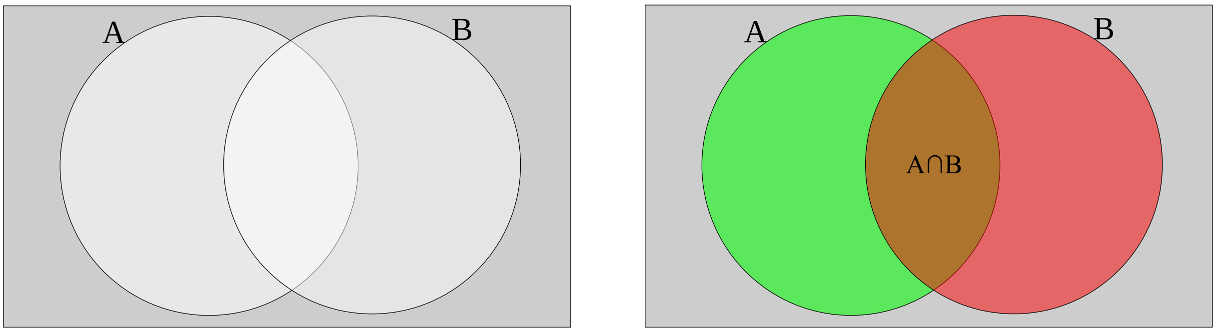


圖 4-6 狄摩根定理文氏圖

狄摩根定理亦可推展到 n 個集合

$$(\cap_{i=1}^{n} A_i)^C = \cup_{i=1}^{n} A_i^C \qquad (\cup_{i=1}^{n} A_i)^C = \cap_{i=1}^{n} A_i^C$$

4.4.5.8 交換律

交換律(commutative rule)敘述兩個事件之間交集與聯集時，不受前後呈現順序的影響。

$$A \cup B = B \cup A \qquad A \cap B = B \cap A$$

4.4.5.9 結合律(associative rule)

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \qquad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

4.4.5.10 分配律(distributive rule)

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C) \qquad (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

範例 4.21　E 和 F 兩事件中若 $P(E) = 0.56$，$P(F) = 0.43$ 和 $P(E \cap F) = 0.25$，E^C 和 F^C 分別是 E 和 F 的餘集(complement)。試計算(A)$P(F^C)$；(B)$P(E^C \cap F)$；(C)$P(E \cup F)$；(D)$P(E^C \cup F^C)$機率。

題解：

(A)依據餘事件 $P(F^C) = 1 - P(F) = 1 - 0.43 = 0.57$

(B)依據 $P(F) = P(E \cap F) + P(E^C \cap F)$，$P(E^C \cap F) = P(F) - P(E \cap F) = 0.43 - 0.25 = 0.18$

(C)依據聯集 $P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F) = 0.56 + 0.43 - 0.25 = 0.74$

(D)依據狄摩根定理 $P(E^C \cup F^C) = P(E \cap F)^C = 1 - P(E \cap F) = 1 - 0.25 = 0.75$

答案：(A)$P(F^C) = 0.57$；(B) $P(E^C \cap F) = 0.18$；(C) $P(E \cup F) = 0.74$；(D) $P(E^C \cup F^C) = 0.75$

練習 *4.17*　E 和 F 兩事件中若 $P(E) = 0.4$，$P(F) = 0.5$ 和 $P(E \cap F) = 0.3$，E^C 和 F^C 分別是 E 和 F 的餘集(complement)。試計算(A)$P(E \cap F^C)$；(B)$P(E^C \cap F^C)$機率。(答案有效位數四捨五入取到小數點後第 1 位)

題解：

(A)依據 $P(E) = P(E∩F) + P(E∩F^C)$，$P(E∩F^C) = P(E) – P(E∩F) = 0.4 – 0.3 = 0.1$

(B)依據狄摩根定理 $P(E^C∩F^C) = P[(E∪F)^C] = 1 – P(E∪F) = 1 – [P(E) + P(F) – P(E∩F)] = 1 – [0.4 +0.5 – 0.3] = 0.4$

答案：(A) $P(E∩F^C) = 0.1$；(B) $P(E^C∩F^C) = 0.4$

練習 4.18 小花期中考試，統計學及格機率為 0.65，經濟學及格機率 0.54，兩科目至少一科及格機率為 0.85，請估計兩科目皆及格機率。(答案有效位數四捨五入取到小數點後第 2 位)

題解：假設統計學及格為 E 事件，統計學及格機率 $P(E) = 0.65$；經濟學及格為 F 事件，經濟學及格機率 $P(F) = 0.54$。兩科目至少一科及格 $P(E∪F) = 0.85$。

$P(E∪F) = P(E) + P(F) – P(E∩F) \rightarrow P(E∩F) = P(E) + P(F) – P(E∪F) = 0.65 + 0.54 – 0.85 = 0.34$

答案：0.34

練習 4.19 E 和 F 兩事件中，已知 $P(E) = 0.47$、$P(F) = 0.35$ 和 $P(E^C∩F) = 0.15$，E^C 和 F^C 分別是 E 和 F 的餘集(complement)。試計算(A) $P(E∩F)$；(B) $P(E∩F^C)$；(C) $P(E∪F)$；(D) $P(E^C∩F^C)$機率。

題解：

(A)依據 $P(F) = P(E∩F) + P(E^C∩F)$，$P(E∩F) = P(F) – P(E^C∩F) = 0.35 – 0.15 = 0.20$

(B)依據 $P(E) = P(E∩F) + P(E∩F^C)$，$P(E∩F^C) = P(E) – P(E∩F) = 0.47 – 0.20 = 0.27$

(C)依據聯集 $P(E∪F) = P(E) + P(F) – P(E∩F) = 0.47 + 0.35 – 0.20 = 0.62$

(D)依據狄摩根定理 $P(E^C∩F^C) = P[(E∪F)^C] = 1 – P(E∪F) = 1 – 0.62 = 0.38$

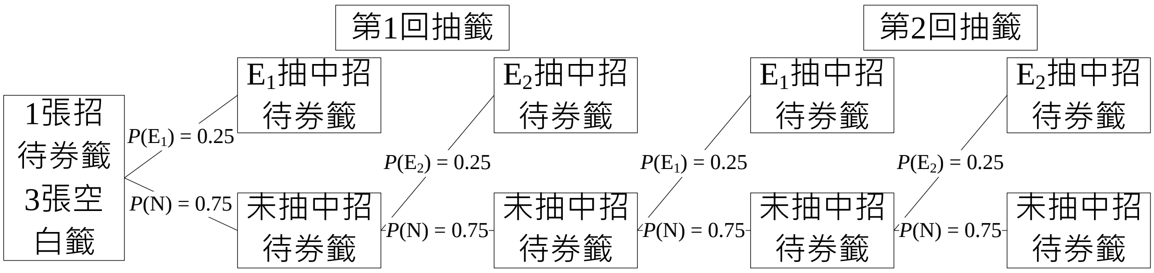
答案：(A) $P(E∩F) = 0.20$；(B) $P(E∩F^C) = 0.27$；(C) $P(E∪F) = 0.62$；(D) $P(E^C∩F^C) = 0.38$

練習 4.20 觀光系一年級甲班 2 位學生學習統計學很用心，老師提供 1 張有機餐廳招待券給該 2 位學生抽獎，製作 1 張招待券的籤，另外再製作 **3** 張空白籤，一起放到抽獎箱抽獎。抽中空白籤者，再將空白籤折好放回抽獎箱，兩人輪流抽獎，優先抽中招待券籤者可以獲得招待券，試計算(A)第 1 位抽獎的學生，抽中招待券機率。(答案有效位數四捨五入取到小數點後第 4 位)

題解：設 E_1 為第 1 位抽籤學生抽中招待券的事件。題目設計：【抽中空白籤者，再將空白籤折好放回抽獎箱，兩人輪流抽獎】。所以，當第一輪都沒有人抽中時，就必須進入第二輪的抽獎，同理，當第一和二輪都沒有人抽中時，就必須進入第三輪抽獎。依此類推。因為，抽中空白籤時，隨即再將空白籤摺好放回抽獎箱，因此，前一回合抽籤的結果，不會影響下回合抽籤機率分布，故兩者是獨立狀態。

(A) $P(E_1)$ = P(第 1 回 E_1 抽中招待券籤) + P(第 2 回 E_1 抽中招待券籤) + P(第 3 回 E_1 抽中招待券籤) + P(第 4 回 E_1 抽中招待券籤) + … = P(第 1 回∩E_1 抽中招待券籤) + P(第 2 回∩E_1 抽中招待券籤) + P(第 3 回∩E_1 抽中招待券籤) + P(第 4 回∩E_1 抽中招待券籤) + … = P(第 1 回) × P(E_1 抽中招待券籤) + P(第 2 回) × P(E_1 抽中招待券籤) + P(第 3 回) × P(E_1 抽中招待券籤) + P(第 4 回) × P(E_1 抽中招待券籤) + … = $1 \times \frac{1}{1+3} + (\frac{3}{1+3})^2 \times (\frac{1}{1+3}) + (\frac{3}{1+3})^4 \times (\frac{1}{1+3}) + (\frac{3}{1+3})^6 \times (\frac{1}{1+3}) + (\frac{3}{1+3})^8 \times (\frac{1}{1+3}) + (\frac{3}{1+3})^{10} \times (\frac{1}{1+3}) + (\frac{3}{1+3})^{12} \times (\frac{1}{1+3}) + (\frac{3}{1+3})^{14} \times (\frac{1}{1+3}) + \ldots = 0.5714$

答案：(A)第 1 位抽籤學生抽中招待券機率 = 0.5714



練習 *4.21* 觀光系一年級甲班 2 位學生學習統計學很用心，老師提供 1 張有機餐廳招待券給該 2 位學生抽獎，製作 1 張招待券的籤，另外再製作 4 張空白籤，一起放到抽獎箱抽獎。抽中空白籤者，再將空白籤折好放回抽獎箱，兩人輪流抽獎，優先抽中招待券籤者可以獲得招待券，試計算(A)第 1 位抽獎的學生，抽中招待券機率。(答案有效位數四捨五入取到小數點後第 4 位)

題解：設 E 為第 1 位抽籤學生抽中招待券的事件

$P(E) = \frac{1}{5} + (\frac{4}{5})^2 \times \frac{1}{5} + (4/5)^4 \times \frac{1}{5} + (4/5)^6 \times \frac{1}{5} + (4/5)^8 \times \frac{1}{5} + (4/5)^{10} \times \frac{1}{5} + (4/5)^{12} \times \frac{1}{5} + (4/5)^{14} \times \frac{1}{5} + (4/5)^{16} \times \frac{1}{5} + \ldots = 0.6000$

答案：$P(E) = 0.5556$

4.5 事件機率

事件機率可分為一個事件發生機率、兩個事件同時發生機率或多個事件同時發生機率。單獨一個事件發生機率可稱為事件機率(Event probability)，當兩個事件或兩個以上事件同時發生機率稱為聯合機率(Joint probability)。

特定事件 A 發生的事件機率(Event probability)，通常使用 $P(A)$符號代表，為特定事件 A 內共有(包含)n個結果(樣本點、元素、觀測點或出象)出現個別機率的總和。

事件機率 $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(E_i)$，$E_i \in A$。

範例 4.22 投擲公正骰子一次，出現奇數或單數(add number)機率？

題解：投擲一個公正骰子樣本空間 $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$，可能出現的結果(樣本點、元素、觀測點或出象)有 6 種，依據古典機率理論每個樣本點機率皆相等，機率為$\frac{1}{6}$。

A 為出現奇數的事件，A = {1, 3, 5}。該事件機率為各樣本點出現機率的和。

出現奇數的**事件機率** $P(A) = P(\{1\}) + P(\{3\}) + P(\{5\}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2} = 0.50$

答案：機率 = 0.50

4.5.1 聯合機率

在相同的樣本空間 S 中，2 個或 2 個以上(k 個)特定事件同時發生機率，表示 2 個或 2 個以上(k 個)特定事件之交集機率，一般使用 $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots \cap A_k)$符號表示其聯合機率(Joint probability)。

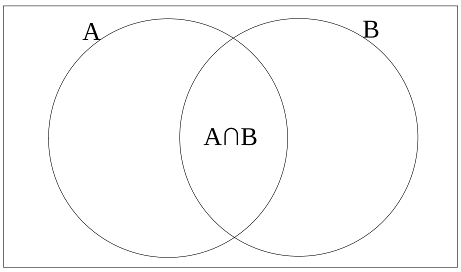


圖 4-7 聯合機率文氏圖

範例 4.23 餐旅系二年級 50 位同學修「統計學」與「資料蒐集與應用」兩門課程，試計算兩門課程分別及格和不及格各種組合的聯合機率？(答案有效位數四捨五入取到小數點後第 2 位)

學生數		統計學	
		及格 E_1	不及格 E_2
資料蒐集與應用	及格 E_3	12	14
	不及格 E_4	11	13

題解：設 E_1 與 E_2 依序分別為「統計學」及格的事件與不及格的事件；設 E_3 與 E_4 依序分別為「資料蒐集與應用」及格的事件與不及格的事件。故，$E_1 \cap E_3$ 為「統計學」和「資料蒐集與應用」都及格的事件；$E_1 \cap E_4$ 為「統計學」及格但「資料蒐集與應用」不及格的事件；$E_2 \cap E_3$ 為「統計學」不及格但「資料蒐集與應用」及格的事件；$E_2 \cap E_4$ 為「統計學」和「資料蒐集與應用」都不及格的事件。

「統計學」和「資料蒐集與應用」都及格的聯合機率 $P(E_1 \cap E_3) = \frac{12}{50} = 0.24$

「統計學」及格但「資料蒐集與應用」不及格的聯合機率 $P(E_1 \cap E_4) = \frac{11}{50} = 0.22$

「統計學」不及格但「資料蒐集與應用」及格的聯合機率 $P(E_2 \cap E_3) = \frac{14}{50} = 0.28$

「統計學」和「資料蒐集與應用」都不及格的聯合機率 $P(E_2 \cap E_4) = \frac{13}{50} = 0.26$

聯合機率表

聯合機率		統計學		合計(邊際機率)
		及格 E_1	不及格 E_2	
資料蒐集與應用	及格 E_3	0.24	0.28	0.52
	不及格 E_4	0.22	0.26	0.48
合計(邊際機率)		0.46	0.54	1.00

四項聯合機率的和為 1。即$[P(E_1 \cap E_3) = \frac{12}{50}] + [P(E_1 \cap E_4) = \frac{11}{50}] + [P(E_2 \cap E_3) = \frac{14}{50}] + [P(E_2 \cap E_4) = \frac{13}{50}] = 1$。

4.5.2 邊際機率

同時擁有 2 個或 2 個以上事件的樣本空間 S 中，僅考慮特定一個特定事件(條件)下個別發生機率，即稱為邊際機率(Marginal probability)。

範例 4.24 餐旅系二年級 50 位同學修「統計學」和「資料蒐集與應用」兩門課程，試計算兩門課程及格與不及格的邊際機率？(答案有效位數四捨五入取到小數點後第 2 位)

學生數		統計學	
		及格 E_1	不及格 E_2
資料蒐集與應用	及格 E_3	12	14
	不及格 E_4	11	13

題解：E_1、E_2、E_3和 E_4 的邊際機率分別為：

統計學及格的邊際機率 $P(E_1) = P(E_1 \cap S) = P[E_1 \cap (E_3 + E_4)] = P(E_1 \cap E_3) + P(E_1 \cap E_4) = 0.24 + 0.22 = 0.46$

統計學不及格的邊際機率 $P(E_2) = P(E_2 \cap S) = P[E_2 \cap (E_3 + E_4)] = P(E_2 \cap E_3) + P(E_2 \cap E_4) = 0.28 + 0.26 = 0.54$

資料蒐集與應用及格的邊際機率 $P(E_3) = P(S \cap E_3) = P[(E_1 + E_2) \cap E_3] = P(E_1 \cap E_3) + P(E_2 \cap E_3) = 0.24 + 0.28 = 0.52$

資料蒐集與應用不及格的邊際機率 $P(E_4) = P(S \cap E_4) = P[(E_1 + E_2) \cap E_4] = P(E_1 \cap E_4) + P(E_2 \cap E_4) = 0.22 + 0.26 = 0.48$

聯合機率表

聯合機率		統計學		合計(邊際機率)
		及格 E_1	不及格 E_2	
資料蒐集與應用	及格 E_3	0.24	0.28	0.52
	不及格 E_4	0.22	0.26	0.48
合計(邊際機率)		0.46	0.54	1.00

在**聯合機率表**中，每一欄或每一列事件機率總和機率，即為**邊際機率**。統計學及格 E_1 和不及格 E_2 的邊際機率和為 1，即[統計學及格的邊際機率 $P(E_1) = 0.46$] + [統計學不及格的邊際機率 $P(E_2) = 0.54$] = 1.00。資料蒐集與應用及格 E_3 和不及格 E_4 的邊際機率和為 1，即[資料蒐集與應用及格的邊際機率 $P(E_3) = 0.52$] + [資料蒐集與應用不及格的邊際機率 $P(E_4) = 0.48$] = 1.00。

4.5.3 條件機率

在已知特定事件發生的情況下，另一事件發生機率為何？已知**事件 B 發生時**[$P(B) \neq 0$]，**事件 A 發生機率**，稱為**事件 A 的條件機率(Conditional probability)**，利用 $P(A|B)$符號表示，讀法：「在 B 條件下，出現 A 機率」。**條件機率**為**聯合機率**和**邊際機率**的**比例**。

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}，其中\ P(B) \neq 0$$

$$P(A \cap B) = P(B) \times P(A|B)$$

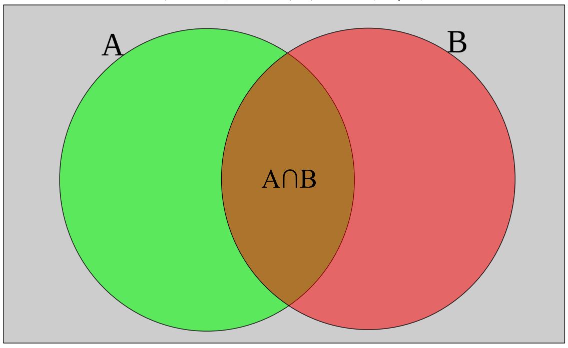


圖 4-8 條件機率文氏圖

同理，已知 A 發生的事件下[$P(A) \neq 0$]，事件 B 發生機率，稱為**事件 B 的條件機率**。

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}，其中\ P(A) \neq 0$$

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B|A)$$

範例 4.25 餐旅系二年級 50 位同學修「統計學」和「資料蒐集與應用」兩門課程，若「統計學」已經及格時，「資料蒐集與應用」及格機率？(答案有效位數四捨五入取到小數點後第 4 位)

聯合機率		統計學		合計(邊際機率)
		及格 E_1	不及格 E_2	
資料蒐集與應用	及格 E_3	0.30	0.38	0.68
	不及格 E_4	0.10	0.22	0.32
合計(邊際機率)		0.40	0.60	1.00

題解：「統計學」及格時 E_1，「資料蒐集與應用」及格 E_3 機率

$$P(E_3|E_1) = \frac{P(E_1 \cap E_3)}{P(E_1)} = \frac{0.30}{0.40} = 0.7500$$

若「統計學」已經及格時，「資料蒐集與應用」及格機率為 0.7500，而原本整體及格機率為 0.6800。故「統計學」及格時，「資料蒐集與應用」及格機率可從 0.6800 提高到 0.7500。

答案：P(「資料蒐集與應用」及格|「統計學」及格) = 0.7500

「統計學」及格時 E_1，「資料蒐集與應用」不及格 E_4 機率 $P(E_4|E_1) = \frac{P(E_1 \cap E_4)}{P(E_1)} = \frac{0.10}{0.40} = 0.2500$

「統計學」不及格時 E_2，「資料蒐集與應用」及格 E_3 機率 $P(E_3|E_2) = \frac{P(E_2 \cap E_3)}{P(E_2)} = \frac{0.38}{0.60} = 0.6333$

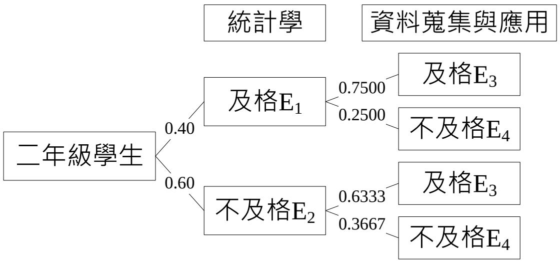
「統計學」不及格時 E_2，「資料蒐集與應用」不及格 E_4 機率 $P(E_4|E_2) = \frac{P(E_2 \cap E_4)}{P(E_2)} = \frac{0.22}{0.60} = 0.3667$

「資料蒐集與應用」及格時 E_3，「統計學」及格 E_1 機率 $P(E_1|E_3) = \frac{P(E_1 \cap E_3)}{P(E_3)} = \frac{0.30}{0.68} = 0.4412$

「資料蒐集與應用」及格時 E_3，「統計學」不及格 E_2 機率 $P(E_2|E_3) = \frac{P(E_2 \cap E_3)}{P(E_3)} = \frac{0.38}{0.68} = 0.5588$

「資料蒐集與應用」不及格時 E_4，「統計學」及格 E_1 機率 $P(E_1|E_4) = \frac{P(E_1 \cap E_4)}{P(E_4)} = \frac{0.10}{0.32} = 0.3125$

「資料蒐集與應用」不及格時 E_4，「統計學」不及格 E_2 機率 $P(E_2|E_4) = \frac{P(E_2 \cap E_4)}{P(E_4)} = \frac{0.22}{0.32} = 0.6875$



練習 4.22 奇遇餐廳販售茶碗蒸，由於餐廳保存不佳，導致現存 12 個茶碗蒸中有 3 個已經生菌數過高，不宜食用。請估算(A)小雯到該餐廳欲購買 2 個茶碗蒸，其所購得的茶碗蒸皆是生菌數過高機率？(B)小雯到該餐廳欲購買 2 個茶碗蒸，其所購得的茶碗蒸皆是生菌數未過高機率？

題解：(A)設 E 為第一個購得茶碗蒸為生菌數過高的事件，F 為第二個購得茶碗蒸為生菌數過高的事件

$$P(E \cap F) = P(E) \times P(F|E) = \left(\frac{3}{12}\right) \times \left(\frac{2}{11}\right) = 0.0455$$

(B)設 E 為第一個購得茶碗蒸為生菌數未過高的事件，F 為第二個購得茶碗蒸為生菌數未過高的事件

$$P(E \cap F) = P(E) \times P(F|E) = \left(\frac{9}{12}\right) \times \left(\frac{8}{11}\right) = 0.5455$$

答案：(A) 0.0455；(B) 0.5455

練習 4.23 已知 E 和 F 事件來自於相同的樣本空間，若 $P(E) = 0.33$、$P(F|E) = 0.27$ 和 $P(E|F) = 0.29$，(A)請計算 E 與 F 的聯合機率？(B)$P(F)$。(答案有效位數四捨五入取到小數點後第 4 位)

題解：

(A)運用已知的條件機率與邊際機率，計算獲得聯合機率 $P(E \cap F) = P(E) \times P(F|E) = 0.33 \times 0.27 = 0.0891$

(B)運用前面已經計算出來的聯合機率和已知的條件機率，計算邊際機率 $P(F) = \frac{P(E \cap F)}{P(E|F)} = \frac{0.0891}{0.29} = 0.3072$

答案：(A)$P(E \cap F) = 0.0891$；(B)$P(F) = 0.3072$

練習 4.24 已知 E 和 F 事件來自於相同的樣本空間，若 $P(F) = 0.83$、$P(E|F) = 0.27$ 和 $P(E|F^C) = 0.69$，F^C 是 F 的餘集(complement)。請計算(A) $P(E)$；(B) $P(F|E)$。(答案有效位數四捨五入取到小數點後第 4 位)

題解：運用已知的條件機率與邊際機率，計算獲得聯合機率 $P(E \cap F) = P(F) \times P(E|F) = 0.83 \times 0.27 = 0.2241$

$P(\mathrm{E|F^C}) = \frac{P(\mathrm{E \cap F^C})}{P(\mathrm{F^C})} = \frac{P(\mathrm{E}) - P(\mathrm{E \cap F})}{1 - P(\mathrm{F})} = \frac{P(\mathrm{E}) - 0.2241}{1 - 0.83} = 0.69 \rightarrow P(\mathrm{E}) - 0.2241 = 0.69 \times (1 - 0.83) = 0.69 \times 0.17 = 0.1173$

$\rightarrow P(\mathrm{E}) = 0.3414$

$P(\mathrm{F|E}) = \frac{P(\mathrm{E \cap F})}{P(\mathrm{E})} = \frac{0.2241}{0.3414} = 0.6564$

答案：(A) $P(\mathrm{E}) = 0.3414$；(B) $P(\mathrm{F|E}) = 0.6564$

練習 4.25 已知 E 和 F 事件來自於相同的樣本空間，若 $P(\mathrm{E}) = 0.38$、$P(\mathrm{F}) = 0.23$ 和 $P(\mathrm{E \cup F}) = 0.57$，$\mathrm{E^C}$ 和 $\mathrm{F^C}$ 分別是 E 和 F 的餘集(complement)。請計算(A) $P(\mathrm{E|F})$；(B) $P(\mathrm{E \cap F^C})$；(C) $P(\mathrm{E^C \cup F^C})$；(D) $P(\mathrm{E|F^C})$。(答案有效位數四捨五入取到小數點後第 4 位)

題解：

(A) $P(\mathrm{E|F}) = \frac{P(\mathrm{E \cap F})}{P(\mathrm{F})} = \frac{P(\mathrm{E}) + P(\mathrm{F}) - P(\mathrm{E \cup F})}{P(\mathrm{F})} = \frac{0.38 + 0.23 - 0.57}{0.23} = 0.1739$

(B) $P(\mathrm{E \cap F^C}) = P(\mathrm{E}) - P(\mathrm{E \cap F}) = P(\mathrm{E}) - [P(\mathrm{E}) + P(\mathrm{F}) - P(\mathrm{E \cup F})] = 0.3400$

(C) $P(\mathrm{E^C \cup F^C}) = 1 - P(\mathrm{E \cap F}) = 1 - [P(\mathrm{E}) + P(\mathrm{F}) - P(\mathrm{E \cup F})] = 0.9600$

(D) $P(\mathrm{E|F^C}) = \frac{P(\mathrm{E \cap F^C})}{P(\mathrm{F^C})} = \frac{P(\mathrm{E \cap F^C})}{1 - P(\mathrm{F})} = \frac{0.3400}{1 - 0.23} = 0.4416$

答案：(A) $P(\mathrm{E|F}) = 0.1739$；(B) $P(\mathrm{E \cap F^C}) = 0.3400$；(C) $P(\mathrm{E^C \cup F^C}) = 0.9600$；(D) $P(\mathrm{E|F^C}) = 0.4416$

練習 4.26 提供 $P(\mathrm{E}) = 0.38$、$P(\mathrm{F|E}) = 0.23$ 和 $P(\mathrm{F|E^C}) = 0.05$ 機率數值，$\mathrm{E^C}$ 和 $\mathrm{F^C}$ 分別是 E 和 F 的餘集(complement)。請計算(A) $P(\mathrm{F})$；(B) $P(\mathrm{E \cap F^C})$；(C) $P(\mathrm{E \cup F})$；(D) $P(\mathrm{E^C \cap F^C})$。(答案有效位數四捨五入取到小數點後第 4 位)

題解：

$$P(\mathrm{E \cap F}) = P(\mathrm{E}) \times P(\mathrm{F|E}) = 0.38 \times 0.23 = 0.0874$$

$$P(\mathrm{E^C \cap F}) = P(\mathrm{E^C}) \times P(\mathrm{F|E^C}) = (1 - 0.38) \times 0.05 = 0.0310$$

(A) $P(\mathrm{F}) = P(\mathrm{E \cap F}) + P(\mathrm{E^C \cap F}) = 0.0874 + 0.0310 = 0.1184$

(B) $P(\mathrm{E \cap F^C}) = P(\mathrm{E}) - P(\mathrm{E \cap F}) = 0.38 - 0.0874 = 0.2926$

(C) $P(\mathrm{E \cup F}) = P(\mathrm{E}) + P(\mathrm{F}) - P(\mathrm{E \cap F}) = 0.38 + 0.1184 - 0.0874 = 0.4110$

(D) $P(\mathrm{E^C \cap F^C}) = 1 - P(\mathrm{E \cup F}) = 1 - 0.4110 = 0.5890$

答案：(A) $P(\mathrm{F}) = 0.0874$；(B) $P(\mathrm{E \cap F^C}) = 0.2926$；(C) $P(\mathrm{E \cup F}) = 0.4110$；(D) $P(\mathrm{E^C \cap F^C}) = 0.5890$

練習 4.27 提供 $P(\mathrm{E}) = 0.60$、$P(\mathrm{F}) = 0.50$ 和 $P(\mathrm{F \cap E}) = 0.32$ 機率數值，$\mathrm{E^C}$ 和 $\mathrm{F^C}$ 分別是 E 和 F 的餘集(complement)。請計算(A) $P(\mathrm{E^C \cap F})$；(B) $P(\mathrm{E \cap F^C})$；(C) $P(\mathrm{E^C \cup F^C})$；(D) $P(\mathrm{E^C \cap F^C})$；(E) $P(\mathrm{E|F^C})$。(答案有效位數四捨五入取到小數點後第 4 位)

題解：

(A) $P(\mathrm{E^C \cap F}) = P(\mathrm{F}) - P(\mathrm{E \cap F}) = 0.50 - 0.32 = 0.18$

(B) $P(\mathrm{E \cap F^C}) = P(\mathrm{E}) - P(\mathrm{E \cap F}) = 0.60 - 0.32 = 0.28$

(C) $P(\mathrm{E^C \cup F^C}) = P(\mathrm{E \cap F})^C = 1 - P(\mathrm{E \cap F}) = 1 - 0.32 = 0.68$

(D) $P(\mathrm{E^C \cap F^C}) = 1 - P(\mathrm{E \cup F}) = 1 - [P(\mathrm{E}) + P(\mathrm{F}) - P(\mathrm{E \cap F})] = 1 - (0.6 + 0.50 - 0.32) = 0.22$

(E) $P(\mathrm{E|F^C}) = \frac{P(\mathrm{E \cap F^C})}{P(\mathrm{F^C})} = \frac{P(\mathrm{E \cap F^C})}{1 - P(\mathrm{F})} = \frac{0.28}{1 - 0.50} = 0.56$

答案：(A) $P(\mathrm{E^C \cap F}) = 0.1800$；(B) $P(\mathrm{E \cap F^C}) = 0.2800$；(C) $P(\mathrm{E^C \cup F^C}) = 0.6800$；(D) $P(\mathrm{E^C \cap F^C}) = 0.2200$；**(E)** $P(\mathrm{E|F^C}) = 0.5600$

範例 4.26 提供 $P(\mathrm{E}) = 0.60$、$P(\mathrm{F|E}) = 0.50$ 和 $P(\mathrm{E|F}) = 0.32$ 機率數值，請計算 $P(\mathrm{F})$。(答案有效位數四捨五入取到小數點後第 4 位)

題解：$P(\mathrm{E \cap F}) = P(\mathrm{E}) \times P(\mathrm{F|E}) = P(\mathrm{F}) \times P(\mathrm{E|F}) = 0.60 \times 0.50 = P(\mathrm{F}) \times 0.32 \rightarrow P(\mathrm{F}) = 0.9375$

答案：$P(\mathrm{F}) = 0.9375$

練習 *4.28* 觀光系一年級甲班 10 位學生學習統計學很用心，老師提供 3 張有機餐廳招待券給該 10 位學生抽獎，製作 3 張招待券的籤，另外再製作 10 張空白籤，一起放到抽獎箱抽獎，經抽出的籤不再放回去抽獎箱中供下一位抽取，試計算(A)第 1 位抽獎的學生，抽中招待券機率；(B)第 2 位抽獎的學生，抽中招待券機率；(C)第 10 位抽獎的學生，抽中招待券機率；(D)10 位學生都沒有抽中機率。(答案有效位數四捨五入取到小數點後第 4 位)

題解：設 E_i 為第 *i* 位學生抽中招待券的事件，E_i^C 代表第 *i* 位學生沒有抽中招待券的事件。

(A) $P(E_1) = \frac{\text{招待券數}}{\text{招待券數+空白籤數}} = \frac{3}{3+10} = 0.2308$

(B) $P(E_2) = P(E_1 \cap E_2) + P(E_1^C \cap E_2) = P(E_1) \times P(E_2|E_1) + P(E_1^C) \times P(E_2|E_1^C) = \frac{3}{3+10} \times \frac{2}{2+10} + \frac{10}{3+10} \times \frac{3}{3+9} = \frac{6}{156} + \frac{30}{156} = \frac{36}{156} = \frac{3}{13} = 0.2308$。在每一個籤被抽中機率皆相等的前題下，故，在抽籤後，不放回去情況時，前抽者或後抽者的抽中機率相等。在抽籤後，放回去情況時，前抽者或後抽者的抽中機率亦相等。

(C) $P(E_{10}) = 0.2308$ 同理

(D) 10 位學生沒有抽中的組合數，即是 10 張空白券，都被 10 位學生抽中，剩下 3 張剛好都是招待券的籤，故僅有一種組合，即$C_{10}^{10} = 1$。所有結果的組合數，從 13 個籤中隨機抽出 10 個，一共有$C_{10}^{13} = 286$(利用 Excel 軟體 COMBIN 函數查詢獲得)種組合數。10 位學生都沒有抽中機率 $= \frac{\text{沒有抽中的組合數}}{\text{所有結果的組合數}} = \frac{C_{10}^{10}}{C_{10}^{13}} = \frac{1}{C_{10}^{13}} = \frac{1}{\frac{13!}{10!\times(13-10)!}} = \frac{1}{\frac{13!}{10!\times 3!}} = \frac{1}{\frac{13\times12\times11\times10!}{10!\times3\times2\times1}} = \frac{1}{\frac{13\times12\times11\times\cancel{10!}}{\cancel{10!}\times3\times2\times1}} = \frac{1}{\frac{13\times12\times11}{3\times2\times1}} = \frac{1}{286} = 0.0035$

答案：(A) $P(E_1) = 0.2308$；(B) $P(E_2) = 0.2308$；(C) $P(E_{10}) = 0.2308$；(D) 0.0035

練習 *4.29* 觀光系一年級甲班 10 位學生學習統計學很用心，老師提供 3 張有機餐廳招待券給該 10 位學生抽獎，製作 3 張招待券的籤，另外再製作 12 張空白籤，一起放到抽獎箱抽獎，經抽出的籤不再放回去抽獎箱中供下一位抽取，試計算(A)第 1 位抽獎的學生，抽中招待券機率；(B)第 2 位抽獎的學生，抽中招待券機率；(C)第 10 位抽獎的學生，抽中招待券機率；(D)10 位學生都沒有抽中機率。(答案有效位數四捨五入取到小數點後第 4 位)

題解：設 E_i 為第 *i* 位學生抽中招待券事件，E_i^C 代表第 *i* 位學生沒有抽中招待券事件。

(A) $P(E_1) = \frac{\text{招待券數}}{\text{招待券數+空白籤數}} = \frac{3}{3+12} = 0.2000$

(B) $P(E_2) = P(E_1 \cap E_2) + P(E_1^C \cap E_2) = P(E_1) \times P(E_2|E_1) + P(E_1^C) \times P(E_2|E_1^C) = \frac{3}{3+12} \times \frac{2}{2+12} + \frac{12}{3+12} \times \frac{3}{3+11} = \frac{6}{210} + \frac{36}{210} = \frac{42}{210} = \frac{3}{15} = 0.2000$

(C) $P(E_{10}) = 0.2000$ 同理

(D) 10 位學生沒有抽中的組合數，即是 12 張空白券，都被 10 位學生抽中，剩下 5 張籤中有三張是招待券的籤，故有 66 種組合，即$C_{10}^{12} = 66$(利用 Excel 軟體 COMBIN 函數查詢獲得)。所有結果的組合數，從 12+3 個籤中隨機抽出 10 個，即$C_{10}^{15} = 3003$。$\frac{\text{沒有抽中的組合數}}{\text{所有結果的組合數}} = \frac{C_{10}^{12}}{C_{10}^{15}} = \frac{\frac{12!}{10!\times(12-10)!}}{\frac{15!}{10!\times(15-10)!}} = \frac{\frac{12!}{10!\times2!}}{\frac{15!}{10!\times5!}} = \frac{\frac{12\times11\times10!}{10!\times2\times1}}{\frac{15\times14\times13\times12\times11\times10!}{10!\times5\times4\times3\times2\times1}} = \frac{\frac{12\times11\times\cancel{10!}}{\cancel{10!}\times2\times1}}{\frac{15\times14\times13\times12\times11\times\cancel{10!}}{\cancel{10!}\times5\times4\times3\times2\times1}} = \frac{66}{3003} = 0.0220$

答案：(A) $P(E_1) = 0.2000$；(B) $P(E_2) = 0.2000$；(C) $P(E_{10}) = 0.2000$；(D) 0.0220

範例 4.27 已知 $P(E) = 0.52$，$P(F) = 0.25$ 與 $P(E|F) = 0.83$，F^C 是 F 的餘集(complement)。請計算 $P(E|F^C)$ 機率。(答案有效位數四捨五入取到小數點後第 2 位)

題解：$P(E|F) = 0.83 = \frac{P(E\cap F)}{P(F)} = \frac{P(E\cap F)}{0.25} \rightarrow P(E\cap F) = 0.2075$

$P(F^C) = 1 - P(F) = 1 - 0.25 = 0.75$

$P(E \cap F^C) = P(E) - P(E \cap F) = 0.52 - 0.2075 = 0.3125$

$P(E|F^C) = \frac{P(E \cap F^C)}{P(F^C)} = \frac{0.3125}{0.75} = 0.41667$

答案：$P(E|F^C) = 0.42$

4.6 機率運算法則

一個事件與其他事件的關係可以區分為**獨立事件**(Independent event)、**相依事件**(dependent event)和**互斥事件**(mutually exclusive event)三種型態。

4.6.1 獨立事件

在相同的樣本空間中，A 事件發生不會影響 B 事件發生機率，故 A 和 B 事件之間互為獨立事件。下列關係式皆會成立。以 A⊥B 符號代表 A 和 B 兩事件之間屬於獨立事件(Independent events)。

$$P(A|B) = P(A) \qquad \text{條件機率 = 邊際機率}$$

$$P(B|A) = P(B) \qquad \text{條件機率 = 邊際機率}$$

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

上述三者中任何一個條件成立時，A 和 B 兩事件可以被判定互為獨立事件。當上述任何一個條件成立時，其他兩個條件亦會同時成立。當 A 和 B 兩事件之間屬於獨立事件時，A 事件發生機率不受到 B 事件發生與否的影響。故，$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A)$，因此，$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$。

在相同的樣本空間中，若 A、B 和 C 事件之間為完全獨立事件(Mutually independent)，下列關係式皆會成立。以 A⊥B⊥C 符號代表 A、B 和 C 三事件之間屬於(互為)獨立事件。

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$
$$P(A \cap C) = P(A) \times P(C)$$
$$P(B \cap C) = P(B) \times P(C)$$
$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \times P(B) \times P(C)$$

當 A 和 B 兩個事件互為獨立事件時，A 與 B^C 之間關係亦為獨立事件，A^C 與 B 之間關係亦為獨立事件和 A^C 與 B^C 之間關係亦為獨立事件。

範例 4.28　大學某班級 62 位學生全部參加中餐丙級檢定考試，判斷學生性別和通過與否是否獨立？

檢定考試 / 性別	通過(A)	未通過(B)	合計
男生(C)	16	14	30
女生(D)	20	12	32
合計	36	26	62

題解：聯合機率 $P(A \cap C) = \frac{16}{62} = 0.2581$　　$P(A) \times P(C) = \frac{36}{62} \times \frac{30}{62} = 0.2810$

因為 $P(A \cap C) = 0.2581 \neq P(A) \times P(C) = 0.2810$，因此判斷性別與檢定通過與否兩者之間不為獨立事件。

答案：性別與檢定通過與否兩者之間不為獨立事件

範例 4.29　同時投擲公正骰子和銅板一次，出現骰子 3 和銅板 H 機率？

題解：同時投擲公正骰子和銅板屬於相互獨立事件

A 事件：骰子樣本空間：$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$，可能出現的結果(樣本點、元素、觀測點或出象)有 6 種，依據古典機率理論每個樣本點機率皆相等，機率為$\frac{1}{6}$。

B 事件：銅板樣本空間：S = {H, T}，可能出現的樣本點有 2 種，依據古典機率理論每個樣本點機率皆為 $\frac{1}{2}$。

$$\text{聯合機率 } P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{6} = P(A) \qquad P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{6}} = \frac{1}{2} = P(B)$$

答案：出現骰子 3 和銅板 H 機率$\frac{1}{12}$

範例 4.30　事件 E 與 F 互為獨立事件，且已知 $P(\text{E}) = 0.52$ 與 $P(\text{F}) = 0.25$，請計算 $P(\text{E} \cap \text{F})$與 $P(\text{E} \cap \text{F}^C)$機率。(答案有效位數四捨五入取到小數點後第 2 位)

題解：事件 E 與 F 之間屬於獨立事件，故聯合機率 $P(\text{E} \cap \text{F}) = P(\text{E}) \times P(\text{F}) = 0.52 \times 0.25 = 0.13$

因 $P(\text{E}) = P(\text{E} \cap S) = P[\text{E} \cap (\text{F} + \text{F}^C)] = P(\text{E} \cap \text{F}) + P(\text{E} \cap \text{F}^C)$，故 $P(\text{E} \cap \text{F}^C) = P(\text{E}) - P(\text{E} \cap \text{F}) = 0.52 - 0.13 = 0.39$

答案：$P(\text{E} \cap \text{F}) = 0.13$；$P(\text{E} \cap \text{F}^C) = 0.39$

練習 4.30　事件 E 與 F 互為獨立事件，且已知 $P(\text{E}) = 0.52$ 與 $P(\text{F}) = 0.25$，E^C 和 F^C 分別是 E 和 F 的餘集(complement)。請計算 $P(\text{E} \cup \text{F})$、$P(\text{E}^C \cap \text{F})$、$P(\text{E}^C \cup \text{F})$、$P(\text{E}^C \cap \text{F}^C)$與 $P(\text{E}^C \cup \text{F}^C)$機率。(答案有效位數四捨五入取到小數點後第 2 位)

題解：

$P(\text{E} \cap \text{F}) = P(\text{E}) \times P(\text{F}) = 0.52 \times 0.25 = 0.13$

$P(\text{E} \cup \text{F}) = P(\text{E}) + P(\text{F}) - P(\text{E} \cap \text{F}) = 0.52 + 0.25 - 0.13 = 0.64$

$P(\text{E}^C \cap \text{F}) = P(\text{F}) - P(\text{E} \cap \text{F}) = 0.25 - 0.13 = 0.12$

$P(\text{E}^C \cup \text{F}) = P(\text{E}^C) + P(\text{F}) - P(\text{E}^C \cap \text{F}) = 1 - P(\text{E}) + P(\text{F}) - P(\text{E}^C \cap \text{F}) = 1 - 0.52 + 0.25 - 0.12 = 0.61$

$P(\text{E}^C \cap \text{F}^C) = P[(\text{E} \cup \text{F})^C] = 1 - P(\text{E} \cup \text{F}) = 1 - 0.64 = 0.36$

$P(\text{E}^C \cup \text{F}^C) = P[(\text{E} \cap \text{F})^C] = 1 - P(\text{E} \cap \text{F}) = 1 - 0.13 = 0.87$

答案：$P(\text{E} \cup \text{F}) = 0.64$；$P(\text{E}^C \cap \text{F}) = 0.12$；$P(\text{E}^C \cup \text{F}) = 0.61$；$P(\text{E}^C \cap \text{F}^C) = 0.36$；$P(\text{E}^C \cup \text{F}^C) = 0.87$

範例 4.31　假設事件 E 與 F 互為獨立事件，請證明事件 E 的餘集 E^C 和事件 F 的餘集 F^C 兩者亦是互為獨立事件。

題解：事件 E 與 F 互為獨立事件，事件 E 與 F 交集機率 $P(\text{E} \cap \text{F}) = P(\text{E}) \times P(\text{F})$

$P(\text{E}^C \cap \text{F}^C) = P[(\text{E} \cup \text{F})^C] = 1 - P(\text{E} \cup \text{F}) = 1 - [P(\text{E}) + P(\text{F}) - P(\text{E} \cap \text{F})] = 1 - P(\text{E}) - P(\text{F}) + P(\text{E} \cap \text{F}) = 1 - P(\text{E}) - P(\text{F}) + P(\text{E}) \times P(\text{F}) = [1 - P(\text{E})] \times [1 - P(\text{F})] = P(\text{E}^C) \times P(\text{F}^C)$

因 $P(\text{E}^C \cap \text{F}^C) = P(\text{E}^C) \times P(\text{F}^C)$關係成立，故事件 E 的餘集 E^C 和事件 F 的餘集 F^C 兩者亦是互為獨立事件

4.6.2 相依事件

A 事件發生會影響另一個 B 事件發生機率。下列關係式皆不會成立。

$$P(\text{A}|\text{B}) = P(\text{A})$$
$$P(\text{B}|\text{A}) = P(\text{B})$$
$$P(\text{A} \cap \text{B}) = P(\text{A}) \times P(\text{B})$$

上述三者中任何一個條件**不成立**時，A 和 B 兩事件之間可以被判定為**相依事件(Dependent events)**、**從屬事件**或**不獨立事件**。當上述任何一個條件不成立時，其他兩個條件亦會同時不成立。

範例 4.32　餐旅系二年級 50 位同學修「統計學」和「資料蒐集與應用」兩門課，試問「統計學」及格與否是否會影響「資料蒐集與應用」及格機率？

聯合機率		統計學		合計(邊際機率)
		及格 E_1	不及格 E_2	
資料蒐集與應用	及格 E_3	0.30	0.38	0.68
	不及格 E_4	0.10	0.22	0.32
合計(邊際機率)		0.40	0.60	1.00

題解：$P(E_1) = 0.40$「統計學」及格的事件機率；$P(E_2) = 0.60$「統計學」不及格的事件機率。$P(E_3) = 0.68$「資料蒐集與應用」及格的事件機率；$P(E_4) = 0.32$「資料蒐集與應用」不及格的事件機率

$$\text{聯合機率 } P(E_1 \cap E_3) = 0.30 \neq P(E_1) \times P(E_3) = 0.40 \times 0.68 = 0.272$$

$$\text{條件機率 } P(E_3|E_1) = \frac{P(E_1 \cap E_3)}{P(E_1)} = \frac{0.30}{0.40} = 0.75 \neq P(E_3) = 0.68 \text{ 邊際機率}$$

$$\text{條件機率 } P(E_1|E_3) = \frac{P(E_1 \cap E_3)}{P(E_3)} = \frac{0.30}{0.68} = 0.44 \neq P(E_1) = 0.40 \text{ 邊際機率}$$

事件 E_3(「資料蒐集與應用」及格事件)的條件機率不等於事件 E_3(「資料蒐集與應用」及格事件)的邊際機率。

事件 E_1(「統計學」及格事件)的**條件機率不等於**事件 E_1(「統計學」及格事件)的**邊際機率**。

故「統計學」及格與否**會影響**「資料蒐集與應用」及格機率。「統計學」及格或不及格和「資料蒐集與應用」及格或不及格兩者為相依事件。

4.6.3 互斥事件

A 與 B 兩事件沒有共同的結果(樣本點、元素、觀測點或出象)，A 與 B 兩事件之間屬於**互斥事件**(Mutually exclusive events, disjoint events)。即 A 事件發生時，B 事件絕不會發生，故 $P(A \cap B) = 0$，A 與 B 兩事件交集為空集合，機率為 0；另 A 與 B 兩事件聯集機率為個別機率相加 $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$。

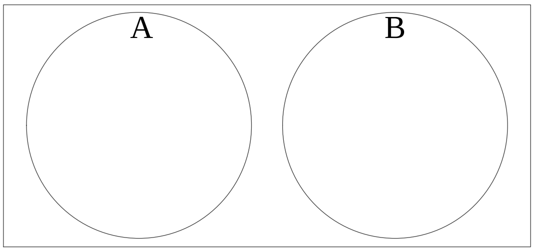


圖 4-9 互斥事件文氏圖

4.6.4 加法法則

加法法則(Addition rule)使用於計算兩事件聯集機率。兩個事件(單獨一個或兩個一起)可能發生機率。

4.6.4.1 兩事件屬互斥關係

兩個事件屬於互斥(exclusive)關係或互斥事件，代表兩個事件不會同時發生。即兩個事件屬於互斥關係時，兩個事件同時發生機率為 0，$P(A \cap B) = 0$。在兩個事件之間屬於互斥關係時，其加法法則為：

$$P(\text{A 或 B}) = P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

4.6.4.2 兩事件屬非互斥關係

$$P(\text{A 或 B 或 A 及 B 同時發生}) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

式中 $P(A \cap B)$是 A 及 B 事件同時發生機率。

範例 4.33 餐旅系某班學生 50 人，其中 20 歲學生有 35 人，女性學生有 30 人，而女性學生中 20 歲的有 21 人，該班學生年齡為 20 歲或是女性機率有多少？(答案有效位數四捨五入取到小數點後第 2 位)

題解：20 歲(E 事件)和女性(F 事件)兩者非互斥關係。20 歲學生(E 事件)機率 $P(\mathrm{E}) = \frac{35}{50} = 0.7$。女性學生(F 事件)機率 $P(\mathrm{F}) = \frac{30}{50} = 0.6$。

E 和 F 事件交集機率 $P(\mathrm{E}\cap\mathrm{F}) = \frac{21}{50} = 0.42$，代表 20 歲學生同時也是女性學生機率

加法法則：E 和 F 事件聯集機率 $P(\mathrm{E}\cup\mathrm{F}) = P(\mathrm{E}) + P(\mathrm{F}) - P(\mathrm{E}\cap\mathrm{F}) = 0.7 + 0.6 - 0.42 = 0.88$，即為隨機抽選一位學生時，該學生年齡 20 歲或女性機率

答案：學生年齡為 20 歲或女性機率 0.88

練習 *4.31* 已知 $P(\mathrm{E}\cap\mathrm{F}) = 0.18$、$P(\mathrm{E}\cap\mathrm{F}^C) = 0.12$ 與 $P(\mathrm{E}^C\cap\mathrm{F}) = 0.42$，$\mathrm{E}^C$ 和 F^C 分別是 E 和 F 的餘集(complement)。請計算 $P(\mathrm{E}\cup\mathrm{F})$、$P(\mathrm{E}^C\cup\mathrm{F}^C)$與 $P(\mathrm{E}^C\cap\mathrm{F}^C)$機率；事件 E 與 F 是否為互斥事件？是否為獨立事件？為什麼。(答案有效位數四捨五入取到小數點後第 2 位)

題解：$P(\mathrm{E}) = P(\mathrm{E}\cap S) = P[\mathrm{E}\cap(\mathrm{F} + \mathrm{F}^C)] = P(\mathrm{E}\cap\mathrm{F}) + P(\mathrm{E}\cap\mathrm{F}^C) = 0.18 + 0.12 = 0.30$

$P(\mathrm{F}) = P(\mathrm{F}\cap S) = P(S\cap\mathrm{F}) = P[(\mathrm{E} + \mathrm{E}^C)\cap\mathrm{F}] = P(\mathrm{E}\cap\mathrm{F}) + P(\mathrm{E}^C\cap\mathrm{F}) = 0.18 + 0.42 = 0.60$

$P(\mathrm{E}\cup\mathrm{F}) = P(\mathrm{E}) + P(\mathrm{F}) - P(\mathrm{E}\cap\mathrm{F}) = 0.30 + 0.60 - 0.18 = 0.72$

$P(\mathrm{E}^C\cup\mathrm{F}^C) = P[(\mathrm{E}\cap\mathrm{F})^C] = 1 - P(\mathrm{E}\cap\mathrm{F}) = 1 - 0.18 = 0.82$

$P(\mathrm{E}^C\cap\mathrm{F}^C) = P[(\mathrm{E}\cup\mathrm{F})^C] = 1 - P(\mathrm{E}\cup\mathrm{F}) = 1 - 0.72 = 0.28$

$P(\mathrm{E}\cup\mathrm{F}) = 0.72 \neq P(\mathrm{E}) + P(\mathrm{F}) = 0.30 + 0.60 = 0.90$，故 E 和 F 兩者非互斥事件

$P(\mathrm{E}\cap\mathrm{F}) = 0.18 = P(\mathrm{E}) \times P(\mathrm{F}) = 0.30 \times 0.60 = 0.18$，故 E 和 F 兩者獨立事件

答案：$P(\mathrm{E}\cup\mathrm{F}) = 0.72$；$P(\mathrm{E}^C\cup\mathrm{F}^C) = 0.82$；$P(\mathrm{E}^C\cap\mathrm{F}^C) = 0.28$；事件 E 與 F 兩者非互斥事件，兩者為獨立事件

練習 *4.32* 已知 E、F 與 G 為互斥事件，$P(\mathrm{E}) = 0.32$、$P(\mathrm{F}) = 0.24$ 與 $P(\mathrm{G}) = 0.21$，E^C 和 G^C 分別是 E 和 G 的餘集(complement)。請計算 $P(\mathrm{E}\cup\mathrm{F}\cup\mathrm{G})$、$P[\mathrm{E}^C\cap(\mathrm{F}\cup\mathrm{G})]$與 $P[(\mathrm{F}\cup\mathrm{G}^C)^C]$機率。(答案有效位數四捨五入取到小數點後第 2 位)

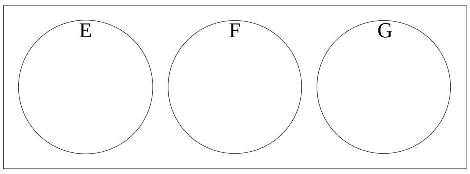
題解：

$P(\mathrm{E}\cup\mathrm{F}\cup\mathrm{G}) = P(\mathrm{E}) + P(\mathrm{F}) + P(\mathrm{G}) = 0.32 + 0.24 + 0.21 = 0.77$

E、F 與 G 為互斥事件，E 分別與 F 和 G 沒有交集，故 E 的餘集與 F 和 G 的聯集之交集，亦等於 F 和 G 的聯集 $P[\mathrm{E}^C\cap(\mathrm{F}\cup\mathrm{G})] = P(\mathrm{F}\cup\mathrm{G}) = P(\mathrm{F}) + P(\mathrm{G}) = 0.24 + 0.21 = 0.45$

$P[(\mathrm{F}\cup\mathrm{G}^C)^C] = 1 - P(\mathrm{F}\cup\mathrm{G}^C) = 1 - P(\mathrm{G}^C) = 1 - [1 - P(\mathrm{G})] = P(\mathrm{G}) = 0.21$

答案：$P(\mathrm{E}\cup\mathrm{F}\cup\mathrm{G}) = 0.77$；$P[\mathrm{E}^C\cap(\mathrm{F}\cup\mathrm{G})] = 0.45$；$P[(\mathrm{F}\cup\mathrm{G}^C)^C] = 0.21$



4.6.5 乘法法則

當兩個隨機實驗同時進行，各隨機實驗之特定事件同時發生之機率可以透過條件機率的方式呈現。

$$P(A\cap B) = P(A) \times P(B|A) = P(B) \times P(A|B) \quad \rightarrow \quad \text{獨立和非獨立都成立}$$

當兩個隨機實驗同時進行，各隨機實驗之特定事件同時發生之機率為**兩事件獨立**發生機率之相乘積，即為乘法法則(Multiplication rule)或乘法定理(Multiplication theorem)。當事件 A 和 B 為獨立事件，$P(B|A) = P(B)$和 $P(A|B) = P(A)$，故 $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$。

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) \quad \rightarrow \quad \text{僅獨立成立}$$

乘法法則運用可以推展至三個事件(A_1、A_2、A_3、…、A_k)以上

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots \cap A_k) = P(A_1) \times P(A_2|A_1) \times P(A_3|A_1 \cap A_2) \times \ldots \times P(A_k|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots \cap A_{k-1}) \quad \rightarrow \quad \text{獨立和非獨立都成立}$$

當 k 個隨機實驗同時進行，各隨機實驗之特定事件同時發生之機率為 ***k*** **事件獨立**發生機率之相乘積，即為乘法法則(Multiplication rule)或乘法定理(Multiplication theorem)。當事件 A_1、A_2、…、A_k 彼此間互為獨立事件，$P(A_2|A_1) = P(A_2)$和 $P(A_3|A_1 \cap A_2) = P(A_3)$，故 $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots \cap A_k) = P(A_1) \times P(A_2) \times P(A_3) \times \ldots \times P(A_k)$。

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots \cap A_k) = P(A_1) \times P(A_2) \times P(A_3) \times \ldots \times P(A_k) \quad \rightarrow \quad \text{僅獨立成立}$$

範例 4.34　設同時擲公正硬幣及骰子，其出現正面(H)及 3 點之機率？(答案有效位數四捨五入取到小數點後第 4 位)

題解：同時擲公正硬幣及骰子屬於兩個相互獨立事件

硬幣出現 H 之機率 $P(\text{H}) = \frac{1}{2}$　　骰子出現 3 點之機率 $P(3) = \frac{1}{6}$

同時出現正面(H)及 3 點之機率 $P(\text{H} \cap 3) = P(\text{H}) \times P(3) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{12} = 0.0833$

答案：機率 0.0833

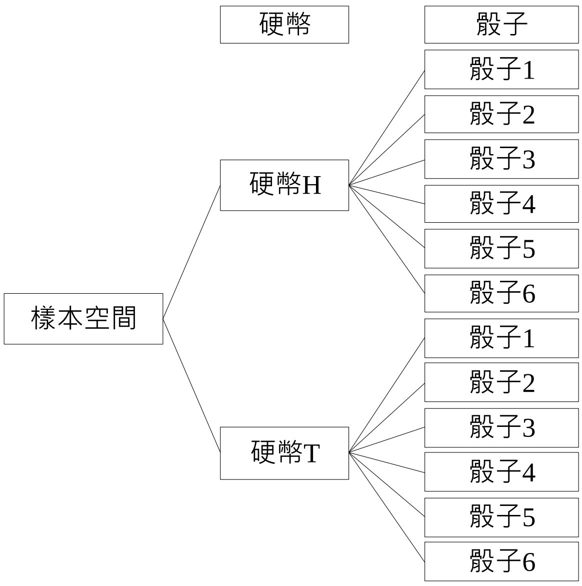


圖 4-10 樹狀圖

範例 4.35　設高雄地區居民男女性別比例男性為 0.51，而女性比例為 1 – 0.51 = 0.49，一個家庭出生四個嬰兒全為女性之機率為 $P(GGGG) = (0.49)^4 = 0.0576$。若一家庭中 4 個嬰兒中有一個為男性之現象有 BGGG，GBGG，GGBG 和 GGGB 共 4 種，每種情形之機率為$(0.49)^3 \times (0.51) = 0.06$，故四種情形之機率和為 0.06 + 0.06 + 0.06 + 0.06 = 0.24。

家庭中有四個嬰兒各種出生性別組合之機率

男	女	機率
0	4	$(0.49)^4 = 0.0576$

男	女	機率
1	3	$4 \times (0.51) \times (0.49)^3 = 0.240$
2	2	$6 \times (0.51)^2 \times (0.49)^2 = 0.3747$
3	1	$4 \times (0.51)^3 \times (0.49) = 0.260$
4	0	$(0.51)^4 = 0.0677$
合計		1.000

4.6.5.1 兩個事件交集機率

計算兩事件交集機率，可透過**條件機率**(已知時)進行估算

$$P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}) = P(\mathrm{A}) \times P(\mathrm{B}|\mathrm{A}) = P(\mathrm{B}) \times P(\mathrm{A}|\mathrm{B})$$

4.6.5.2 三個事件交集機率

計算三個事件交集機率，亦可透過**條件機率**(已知時)進行估算

$$P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}\cap\mathrm{C}) = P(\mathrm{A}) \times P(\mathrm{B}|\mathrm{A}) \times P(\mathrm{C}|\mathrm{A}\cap\mathrm{B})$$

$$P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}\cap\mathrm{C}\cap\mathrm{D}) = P(\mathrm{A}) \times P(\mathrm{B}|\mathrm{A}) \times P(\mathrm{C}|\mathrm{A}\cap\mathrm{B}) \times P(\mathrm{D}|\mathrm{A}\cap\mathrm{B}\cap\mathrm{C})$$

4.6.6 分割集合

若在樣本空間 S 中有 $A_1, A_2, A_3,\ldots, A_m$ 事件為彼此皆為互斥事件(mutually exclusive event)和周延事件(exhaustive events)，其中任何兩個不同事件 A_i 和 A_j 的交集∩皆為空集合($A_i \cap A_j = \phi$，其中 $i \neq j$，$i, j = 1,\ldots, m$)，同時樣本空間 $S = \bigcup_{i=1}^{m} A_i = \sum_{i=1}^{m} A_i = A_1 + A_2 + A_3 +\ldots+ A_m$，此$\{A_1, A_2, A_3,\ldots, A_m\}$為分割集合(partition set)。

符合下列公式的集合即為分割集合(partition set)

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_m) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) +\ldots+ P(A_m) = P(S) = 1.0000 \text{ 代表周延特性}$$

$$P(A_i \cap A_j) = 0.0000\text{，其中 } i \neq j\text{，} i, j = 1,\ldots, m \text{ 代表互斥特性}$$

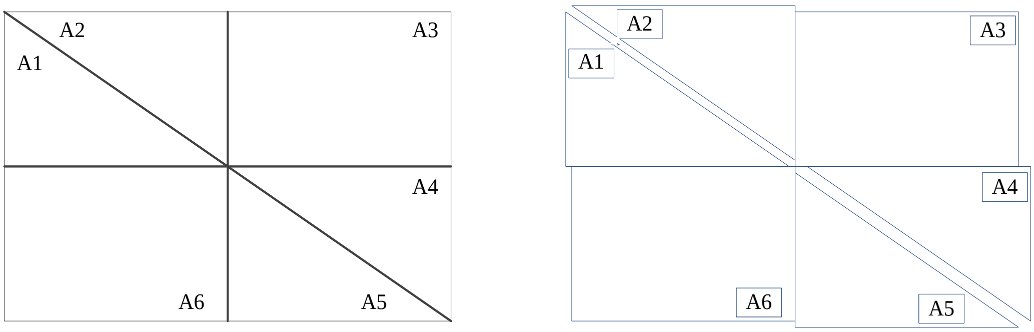


圖 4-11 分隔集合示意圖

總(全)機率定理(法則)(total probability theorem; theorem of total probability)

B 事件為與 A_i 事件在同一樣本空間 S 中另一個特定事件，B 事件分別與 $A_1, A_2, A_3,\ldots, A_m$ 事件有交集存在。其中，$A_1, A_2, A_3,\ldots, A_m$ 事件所構成的集合$\{A_1, A_2, A_3,\ldots, A_m\}$為分割集合(partition set)。

$$\boxed{P(B) = P(B \cap S) = P(B \cap \textstyle\sum_{i=1}^{m} A_i) = \sum_{i=1}^{m} P(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^{m} P(A_i) \times P(B|A_i)}$$

說明：$P(B) = P(B \cap S) = P[B \cap (A + A^C)] = P(B \cap A) + P(B \cap A^C) = P(B \cap \sum_{i=1}^{m} A_i) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) +\ldots+ P(B \cap A_m)$

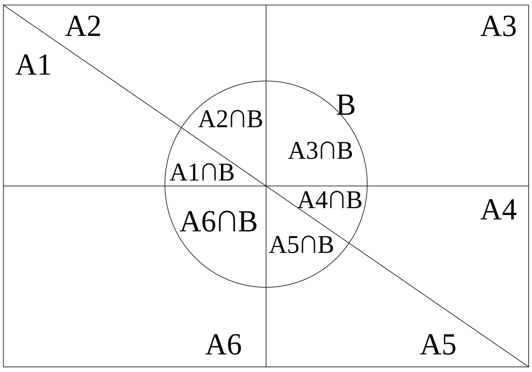


圖 4-12 總機率定理文氏圖

範例 4.36　深水大學觀光系一年級修統計學課程，期中考男生考試不及格人數佔全班$\frac{1}{6}$；女生考試不及格人數佔全班$\frac{1}{4}$。試估算隨機抽取一位觀光系一年級學生，其統計學期中考成績不及格機率？(答案有效位數四捨五入取到小數點後第 4 位)

題解：樣本空間 S：全部觀光系一年級學生 = $\{F_1, F_2\}$。F_1：代表男生；F_2：代表女生。則 F_1 和 F_2 屬於分割集合。E 代表統計學期中考不及格的事件。

期中考男生考試不及格人數佔全班$\frac{1}{6}$ → P(統計學期中考不及格的事件∩男生) = $P(E \cap F_1) = \frac{1}{6} = 0.1667$。題目提供聯合機率。

女生考試不及格人數佔全班$\frac{1}{4}$ → P(統計學期中考不及格的事件∩女生) = $P(E \cap F_2) = \frac{1}{4} = 0.2500$

邊際機率：不及格機率 $P(E) = P(E \cap S) = P[E \cap (F_1 + F_2)] = P(E \cap F_1) + P(E \cap F_2) = 0.1667 + 0.2500 = 0.4167$。運用總機率定理運算。

答案：隨機抽取一位學生，統計學期中考成績不及格機率 0.4167

範例 4.37　觀光系一年級修統計學課程，期中考男生考試不及格者有$\frac{1}{6}$；女生考試不及格者有$\frac{1}{7}$。男生有 10 位；女生有 40 位。試估算隨機抽取一位觀光系一年級學生，其統計學期中考成績不及格機率？(答案有效位數四捨五入取到小數點後第 4 位)

題解：樣本空間 S：全部觀光系一年級學生 = $\{F_1, F_2\}$。事件 F_1：代表男生 $P(F_1) = \frac{10}{10+40} = 0.2000$；事件 F_2：代表女生 $P(F_2) = \frac{40}{10+40} = 0.8000$。$P(F_1) + P(F_2) = 0.2000 + 0.8000 = 1.0000 = P(S)$，則 F_1 和 F_2 兩事件屬於分割集合。E 代表統計學期中考不及格的事件。

期中考男生考試不及格者有$\frac{1}{6}$ → P(統計學期中考不及格的事件|男生) = $P(E|F_1) = \frac{1}{6} = 0.1667$。題目提供條件機率。

女生考試不及格者有$\frac{1}{7}$ → P(統計學期中考不及格的事件|女生) = $P(E|F_2) = \frac{1}{7} = 0.1429$

邊際機率：隨機抽取一位學生，期中考成績不及格機率 $P(E) = P(E \cap S) = P[E \cap (F_1 + F_2)] = P(E \cap F_1) + P(E \cap F_2) = P(F_1) \times P(E|F_1) + P(F_2) \times P(E|F_2) = 0.2000 \times 0.1667 + 0.8000 \times 0.1429 = 0.1476$。運用總機率定理運算。

答案：隨機抽取一位學生，期中考成績不及格機率 0.1476

範例 4.38　阿良餐廳販售螃蟹大餐，其供應商提供螃蟹經民間業者檢驗是否硝基夫喃代謝物殘留，依據該民間業者以往的檢驗記錄顯示，硝基夫喃代謝物實際低於標準者，被檢驗為高於標準者(誤判)機率為 0.02；硝基夫喃代謝物實際高於標準者，被檢驗為低於標準者(誤判)機率為 0.08。若今進貨一批螃蟹，硝基夫喃代謝物高於標準者有 10 %，低於標準者有 90 %。

進貨現場抽取一隻螃蟹送驗。試估算在檢驗結果誤判機率？(答案有效位數四捨五入取到小數點後第 3 位)

題解：E_1：硝基夫喃代謝物高於標準者的事件 $P(E_1)$ = 0.10；E_2：硝基夫喃代謝物低於標準者的事件 $P(E_2)$ = 0.90。$P(E_1) + P(E_2) = 0.10 + 0.90 = 1.00 = P(S)$，則 E_1 和 E_2 屬於分割集合。F：檢驗結果誤判的事件。

硝基夫喃代謝物實際低於標準者，被檢驗為高於標準者(誤判)機率為 0.02 → P(檢驗結果誤判|硝基夫喃代謝物低於標準者) = $P(F|E_2)$ = 0.02

硝基夫喃代謝物實際高於標準者，被檢驗為低於標準者(誤判)機率為 0.08 → P(檢驗結果誤判|硝基夫喃代謝物高於標準者) = $P(F|E_1)$ = 0.08

邊際機率：檢驗結果誤判機率 $P(F) = P(F\cap S) = P[F\cap(\mathrm{E}_1 + \mathrm{E}_2)] = P(F\cap E_1) + P(F\cap E_2) = P(E_1) \times P(F|E_1) + P(E_2) \times P(F|E_2) = 0.10 \times 0.08 + 0.90 \times 0.02 = 0.026$。運用總機率定理運算。

答案：現場抽取一隻螃蟹送驗，檢驗結果誤判機率為 0.026

練習 *4.33* 若 E_1、E_2 和 E_3 事件之間屬於分割集合，與 E_1、E_2 和 E_3 事件在相同樣本空間中有另一個 F 事件，已知 $P(\mathrm{E}_1) = 0.40$、$P(\mathrm{E}_2) = 0.29$、$P(\mathrm{E}_3) = 0.31$、$P(\mathrm{F}|\mathrm{E}_1) = 0.47$、$P(\mathrm{F}|\mathrm{E}_2) = 0.39$ 和 $P(\mathrm{F}|\mathrm{E}_3) = 0.41$，請計算(A) $P(\mathrm{E}_1|\mathrm{F})$；(B) $P(\mathrm{E}_2|\mathrm{F})$；(C) $P(\mathrm{E}_3|\mathrm{F})$ (答案有效位數四捨五入取到小數點後第 4 位)

題解：$P(\mathrm{F}) = P(\mathrm{F}\cap S) = P[\mathrm{F}\cap(\mathrm{E}_1 + \mathrm{E}_2 + \mathrm{E}_3)] = P(\mathrm{F}\cap\mathrm{E}_1) + P(\mathrm{F}\cap\mathrm{E}_2) + P(\mathrm{F}\cap\mathrm{E}_3) = P(\mathrm{E}_1) \times P(\mathrm{F}|\mathrm{E}_1) + P(\mathrm{E}_2) \times P(\mathrm{F}|\mathrm{E}_2) + P(\mathrm{E}_3) \times P(\mathrm{F}|\mathrm{E}_3) = 0.40 \times 0.47 + 0.29 \times 0.39 + 0.31 \times 0.41 = 0.4282$。運用總機率定理運算。

(A) $P(\mathrm{E}_1|\mathrm{F}) = \frac{P(\mathrm{E}_1\cap\mathrm{F})}{P(\mathrm{F})} = \frac{P(\mathrm{E}_1)\times P(\mathrm{F}|\mathrm{E}_1)}{P(\mathrm{F})} = \frac{0.40\times0.47}{0.4282} = 0.4390$

(B) $P(\mathrm{E}_2|\mathrm{F}) = \frac{P(\mathrm{E}_2\cap\mathrm{F})}{P(\mathrm{F})} = \frac{P(\mathrm{E}_2)\times P(\mathrm{F}|\mathrm{E}_2)}{P(\mathrm{F})} = \frac{0.29\times0.39}{0.4282} = 0.2641$

(C) $P(\mathrm{E}_3|\mathrm{F}) = \frac{P(\mathrm{E}_3\cap\mathrm{F})}{P(\mathrm{F})} = \frac{P(\mathrm{E}_3)\times P(\mathrm{F}|\mathrm{E}_3)}{P(\mathrm{F})} = \frac{0.31\times0.41}{0.4282} = 0.2968$

答案：(A)$P(\mathrm{E}_1|\mathrm{F}) = 0.4390$；(B)$P(\mathrm{E}_2|\mathrm{F}) = 0.2641$；(C)$P(\mathrm{E}_3|\mathrm{F}) = 0.2968$

4.7 貝氏定理

貝氏定理(Bayes' theorem, Bayes, rule)是詮釋隨機事件 A 和 B 的條件機率與邊際機率的一種定理。通常在事件 B 發生的前提下事件 A 發生機率 $P(\mathrm{A}|\mathrm{B})$，與事件 A 發生的前提下事件 B 發生機率 $P(\mathrm{B}|\mathrm{A})$，兩者是不一樣的狀況，貝氏定理也是在陳述此兩者之間的關係。

若已知在樣本空間 S 中有 $A_1, A_2, A_3,\ldots, A_m$ 事件為彼此皆為**互斥事件**(mutually exclusive event)和**周延事件**(exhaustive events)，其中任何兩個不同事件 A_i 和 A_j 的交集∩皆為空集合($A_i\cap A_j = \phi$，其中 $i\neq j$，$i, j = 1,\ldots, m$)，樣本空間 $S = \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \sum_{i=1}^{n} A_i$，此$\{A_1, A_2, A_3, \ldots, A_m\}$為**分割集合**(partition set)。

B 事件為與 A_i 事件同一樣本空間 S 中的另一特定事件，另已知 $P(A_i)$及 $P(B|A_i)$數值，在已知 B 事件發生的條件下，A_i 事件發生的條件機率 $P(A_i|B)$：

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i\cap B)}{P(B)} = \frac{P(B\cap A_i)}{P(B\cap S)} = \frac{P(B\cap A_i)}{P(B\cap A_1)+P(B\cap A_2)+P(B\cap A_3)+\cdots+P(B\cap A_m)}$$
$$= \frac{P(A_i)\times P(\mathrm{B}|\mathrm{A}_i)}{P(\mathrm{A}_1)\times P(\mathrm{B}|\mathrm{A}_1)+P(\mathrm{A}_2)\times P(\mathrm{B}|\mathrm{A}_2)+P(\mathrm{A}_3)\times P(\mathrm{B}|\mathrm{A}_3)+\cdots+P(\mathrm{A}_m)\times P(\mathrm{B}|\mathrm{A}_m)}$$

$P(A_i)$為**事前機率**(prior probability)。已知者：在獲得隨機實驗與樣本空間的特性，依據機率概念與機率運算法則，獲得特定事件機率。

$P(B|A_i)$為**條件機率**(conditional probability)。已知者

$P(A_i|B)$為**事後機率**(posterior probability)或**修正機率**(revised probability)。欲知者：供後續決策時，準確性可以提高。

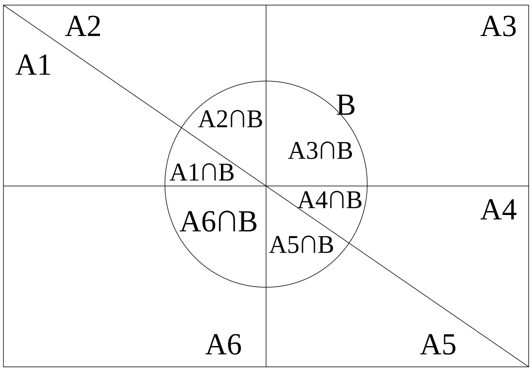


圖 4-13 貝氏公式文氏圖

貝氏公式(Bayes formula)

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B \cap A_i)}{P(B \cap S)} = \frac{P(A_i) \times P(B|A_i)}{\sum_{j=1}^{m} P(A_j) \times P(B|A_j)}$$

範例 4.39 阿良餐廳前半年同時向 S_1 和 S_2 兩家肉品供應商採購冷凍豬肉，S_1 供應商採購 300 箱，S_2 供應商採購 200 箱，阿良餐廳老闆不惜成本自費送衛生局檢驗豬肉抗生素殘留量，結果其中發現 S_1 供應商的供貨有 5 箱抗生素殘留過量(B)，S_2 供應商有 6 箱抗生素殘留過量(B)，阿良餐廳老闆皆將殘留過量的豬肉整箱送焚化場銷毀。試估算在送焚化場銷毀的豬肉中，來自 S_1 供應商機率？(答案有效位數四捨五入取到小數點後第 4 位)

題解：S_1 供應商提供肉品的事件機率 $P(S_1) = \frac{300}{300+200} = \frac{300}{500} = 0.6$；$S_2$ 供應商提供肉品的事件機率 $P(S_2) = \frac{200}{500} = \frac{200}{300+200} = 0.4$。$P(S_1) + P(S_2) = 0.6 + 0.4 = 1.0 = P(S)$，$S_1$ 和 S_2 兩事件屬於分割集合

抗生素殘留是否合格的條件機率

	S_1 供應商	S_2 供應商
抗生素殘留不過量(G)	0.9833	0.9700
抗生素殘留過量(B)	0.0167	0.0300
合計	1.0000	1.0000

S_1 供應商提供肉品抗生素殘留不過量機率 $P(G|S_1) = \frac{P(G \cap S_1)}{P(S_1)} = \frac{295}{300} = 0.9833$

S_1 供應商提供肉品抗生素殘留過量機率 $P(B|S_1) = \frac{P(B \cap S_1)}{P(S_1)} = \frac{5}{300} = 0.0167$

S_2 供應商提供肉品抗生素殘留不過量機率 $P(G|S_2) = \frac{P(G \cap S_2)}{P(S_2)} = \frac{194}{200} = 0.9700$

S_2 供應商提供肉品抗生素殘留過量機率 $P(B|S_2) = \frac{P(B \cap S_2)}{P(S_2)} = \frac{6}{200} = 0.0300$

抗生素殘留是否合格的聯合機率

	S_1 供應商	S_2 供應商	合計(邊際機率)
抗生素殘留不過量(G)	0.5900	0.3880	0.9780
抗生素殘留過量(B)	0.0100	0.0120	0.0220
合計(邊際機率)	0.6000	0.4000	1.0000

所有肉品中 S_1 供應商提供且抗生素殘留不過量機率 $P(G \cap S_1) = P(G|S_1) \times P(S_1) = 0.9833 \times 0.6 = 0.5900$

所有肉品中 S_1 供應商提供且抗生素殘留過量機率 $P(B \cap S_1) = P(B|S_1) \times P(S_1) = 0.0167 \times 0.6 = 0.0100$

所有肉品中 S_2 供應商提供且抗生素殘留不過量機率 $P(G \cap S_2) = P(G|S_2) \times P(S_2) = 0.9700 \times 0.4 = 0.3880$

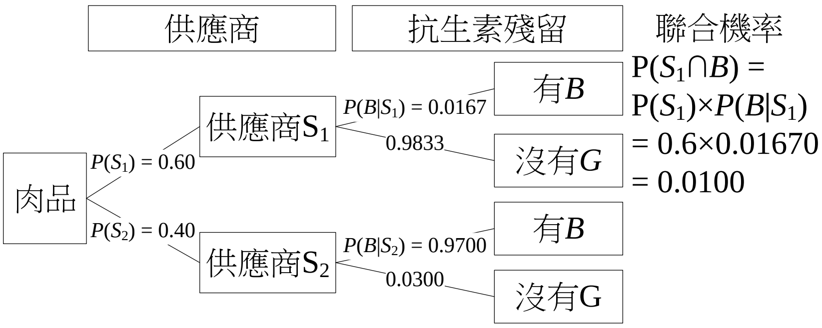
所有肉品中 S_2 供應商提供且抗生素殘留過量機率 $P(B\cap S_2) = P(B|S_2) \times P(S_2) = 0.0300 \times 0.4 = 0.0120$

不論是 S_1 或 S_2 供應商，肉品中抗生素殘留不過量機率 $P(G) = P(G\cap S) = P[G\cap(S_1 + S_2)] = P(G\cap S_1) + P(G\cap S_2)$
$= 0.5900 + 0.3880 = 0.9780$

不論是 S_1 或 S_2 供應商，肉品中抗生素殘留過量機率 $P(B) = P(B\cap S) = P[B\cap(S_1 + S_2)] = P(B\cap S_1) + P(B\cap S_2)$
$= 0.0100 + 0.0120 = 0.0220$

送焚化場銷毀的豬肉(B)中，來自 S_1 供應商機率 $P(S_1|B) = \frac{P(S_1\cap B)}{P(B)} = \frac{0.0100}{0.0220} = 0.4545 = \frac{5}{5+6} = \frac{5}{11}$ [S_1 供應商的供貨有 5 箱抗生素殘留過量(B)，S_2 供應商有 6 箱抗生素殘留過量(B)]

同理，送焚化場銷毀的豬肉(B)中，來自 S_2 供應商機率 $P(S_2|B) = \frac{P(S_2\cap B)}{P(B)} = \frac{0.0120}{0.0220} = 0.5455 = \frac{6}{5+6} = \frac{6}{11}$ [S_1 供應商的供貨有 5 箱抗生素殘留過量(B)，S_2 供應商有 6 箱抗生素殘留過量(B)]



練習 4.34 深水大學餐旅系四年級學生，男生佔 15 %，女生佔 85 %。已知男生中有 70 %擁有中餐丙級證照；女生 85 %擁有中餐丙級證照。若從該系四年級學生隨機抽取一位學生，若確定此學生擁有中餐丙級證照，此生屬於男生機率？女生機率？(答案有效位數四捨五入取到小數點後第 4 位)

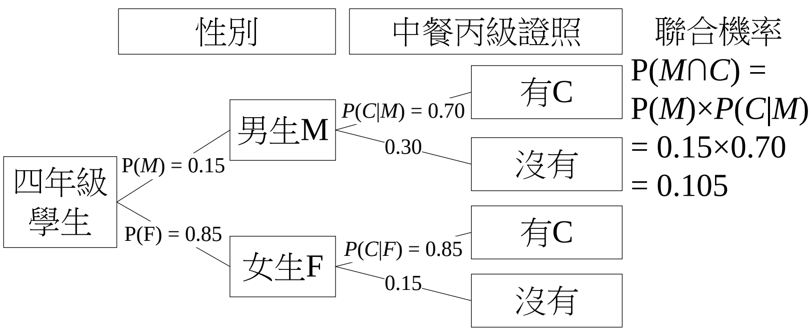
題解：C 表示擁有中餐丙級證照的事件；M 表示男生的事件 $P(M) = 0.15$；F 表示女生的事件 $P(F) = 0.85$。M 和 F 兩事件屬於分割集合 $P(M) + P(F) = 0.15 + 0.85 = 1.00 = P(S)$。男生 70 %擁有中餐丙級證照 $P(C|M) = 0.70$；女生 85 %擁有中餐丙級證照 $P(C|F) = 0.85$。

隨機抽一位學生擁有中餐丙級證照機率 $P(C) = P(C\cap S) = P[C\cap(M + F)] = P(C\cap M) + P(C\cap F) = P(M) \times P(C|M) + P(F) \times P(C|F) = 0.15 \times 0.70 + 0.85 \times 0.85 = 0.8275$。依據總機率定理。

確定此學生擁有中餐丙級證照，此生屬於男生機率 $P(M|C) = \frac{P(M\cap C)}{P(C)} = \frac{P(M)\times P(C|M)}{P(C)} = \frac{0.15\times 0.70}{0.8275} = 0.1269$

確定此學生擁有中餐丙級證照，此生屬於女生機率 $P(F|C) = \frac{P(F\cap C)}{P(C)} = \frac{P(F)\times P(C|F)}{P(C)} = \frac{0.85\times 0.85}{0.8275} = 0.8731$

答案：隨機抽取一位學生，若確定此學生擁有中餐丙級證照，此生屬於男生機率 0.1269；女生機率 0.8731。



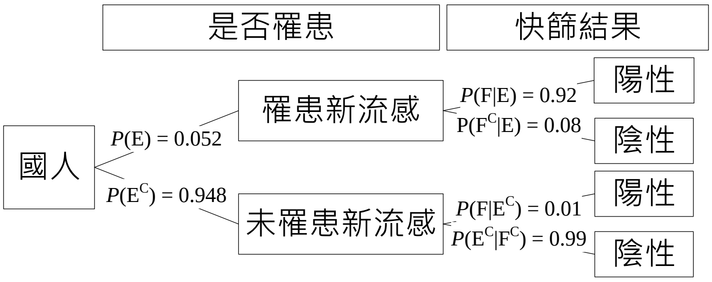
練習 4.35 使用 H_1N_1 新流感快篩試劑檢測國人罹患 H_1N_1 新流感的準確性和可靠性，假設經過長時間的統計分析獲得，罹患 H_1N_1 新流感時 92 %可以利用 H_1N_1 快篩試劑篩選出陽性反應；沒有

罹患 H_1N_1 新流感者，使用快篩試劑會有 1 %會產生陽性反應，被誤認為罹患新流感。假設有 5.2 %的國人罹患新流感，若從全體國人隨機抽選一位，以 H_1N_1 快篩試劑檢測，發現其為陽性者，請估算此位國人隨後以血清檢查確認其罹患新流感機率。(答案有效位數四捨五入取到小數點後第 4 位)

題解：E 表示被抽中的國人罹患新流感之事件；未罹患新流感為 E^C 事件，E 與 E^C 兩事件屬於分割集合 $P(E) + P(E^C) = P(S) = 1.0000$。F 表示被抽中的國人經快篩試劑檢驗為陽性之事件。假設有 5.2 %的國人罹患新流感 $P(E) = 0.052$；$P(E^C) = 1 - P(E) = 1 – 0.052 = 0.948$。罹患 H_1N_1 新流感時 92 %可以利用 H_1N_1 快篩試劑篩選出陽性反應 $P(F|E) = 0.92$。沒有罹患 H_1N_1 新流感者，使用快篩試劑會有 1 %會產生陽性反應 $P(F|E^C) = 0.01$。

依據貝氏公式 $P(E|F) = \frac{P(E\cap F)}{P(F)} = \frac{P(E\cap F)}{P(F\cap S)} = \frac{P(E\cap F)}{P[F\cap(E+E^C)]} = \frac{P(E\cap F)}{P(F\cap E)+P(F\cap E^C)} = \frac{P(E)\times P(F|E)}{P(E)\times P(F|E)+P(E^C)\times P(F|E^C)} = \frac{0.052\times 0.92}{0.052\times 0.92+0.948\times 0.01} = 0.8346$

答案：機率 = 0.8346

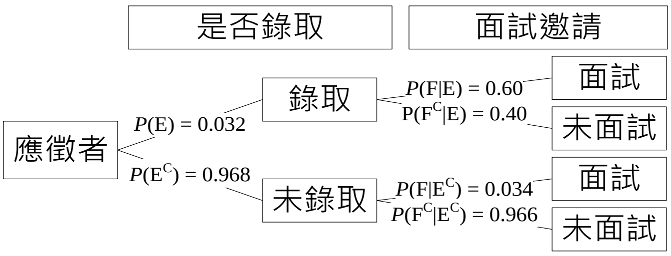


練習 *4.36* 本系畢業生小琦欲應徵進入深水高級連鎖餐廳服務，以往應徵者經書面審查後有一部份會通知面試，再決定是否錄取，也有經書面審查即通知錄取者，已知該高級餐廳的平均錄取率為 3.2 %，以往被錄取的人員有 60 %經過面試，而未被錄取的應徵者僅有 3.4 %經過面試。該生已經有面試，請估算其被錄取機率？(答案有效位數四捨五入取到小數點後第 4 位)

題解：E 表示被錄取之事件，未被錄取之事件為 E^C，E 和 E^C 兩事件為分割集合，$P(E) + P(E^C) = P(S)$ 1.0000。F 表示參加面試之事件。該高級餐廳的平均錄取率為 3.2 % → $P(E) = 0.032$；以往被錄取的人員有 60 %經過面試 → $P(F|E) = 0.60$；$P(E^C) = 1 – P(E) = 1 - 0.032 = 0.968$；未被錄取的應徵者僅有 3.4 %經過面試 → $P(F|E^C) = 0.034$。

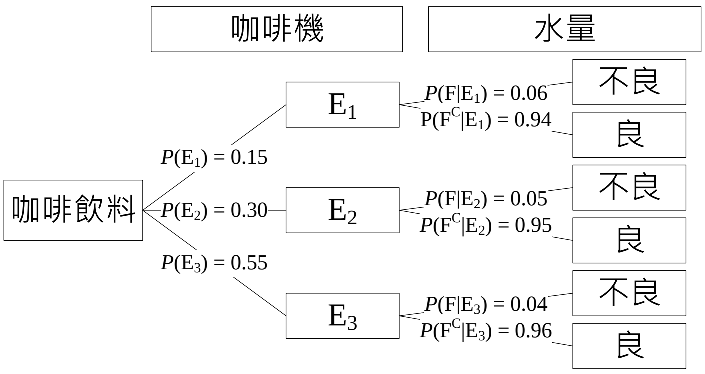
依據貝氏公式 $P(E|F) = \frac{P(E\cap F)}{P(F)} = \frac{P(E\cap F)}{P(F\cap S)} = \frac{P(E\cap F)}{P[F\cap(E+E^C)]} = \frac{P(E\cap F)}{P(F\cap E)+P(F\cap E^C)} = \frac{P(E)\times P(F|E)}{P(E)\times P(F|E)+P(E^C)\times P(F|E^C)} = \frac{0.032\times 0.60}{0.032\times 0.60+0.968\times 0.034} = 0.3684$

答案：機率 = 0.3684



練習 *4.37* 小琦餐廳擁有三部全自動研磨咖啡機，已知 E_1、E_2 和 E_3 咖啡機分別製作 15、30 和 55 %咖啡飲料，依據以往操作紀錄，E_1、E_2 和 E_3 咖啡機在製作咖啡飲料時，水量太多或太少的不良率依序分別為 6、5 和 4 %。(A)試求在全部咖啡飲料中，隨機抽取一杯為水量太多或

太少機率？(B)在已知咖啡飲料為水量太多或太少，此咖啡飲料分別來自 E_1、E_2 和 E_3 咖啡機機率？(答案有效位數四捨五入取到小數點後第 4 位)



範例 4.40　高雄深水商業大樓每位員工每天皆有喝一杯咖啡的習慣，該大樓一樓有 A 和 B 兩家不同體系連鎖咖啡館，若小歐今天喝的是 A 家咖啡，明天喝 A 和 B 兩家咖啡機率分別為 0.4 和 0.6；若小歐今天喝的是 B 家咖啡，明天喝 A 和 B 兩家咖啡機率分別為 0.52 和 0.48。假設本週星期一小歐喝的是 A 家咖啡，星期四喝的是 B 家咖啡，請估算小歐星期二和星期三喝的是不同連鎖體系咖啡之機率？

題解：星期四喝的是 B 家咖啡，星期二和星期三喝的是不同連鎖體系咖啡之機率 = P(星期二喝 A 星期三喝 B 或星期二喝 B 星期三喝 A|星期四喝 B) = $\frac{P\left(\text{星期二喝 A 星期三喝 B 或星期二喝 B 星期三喝 A}\cap\text{星期四喝 B}\right)}{P\left(\text{星期四喝 B}\right)}$ =

$$\frac{P\left(\text{星期二喝 A 星期三喝 B 星期四喝 B}\right)+P\left(\text{星期二喝 B 星期三喝 A 星期四喝 B}\right)}{P\left(\text{星期四喝 B}\cap S\right)}=$$

$$\frac{P\left(\text{星期二喝 A 星期三喝 B 星期四喝 B}\right)+P\left(\text{星期二喝 B 星期三喝 A 星期四喝 B}\right)}{P\left[\text{星期四喝 B}\cap\left(\text{星期二喝 A 星期三喝 A}+\text{星期二喝 A 星期三喝 B}+\text{星期二喝 B 星期三喝 A}+\text{星期二喝 B 星期三喝 B}\right)\right]}=$$

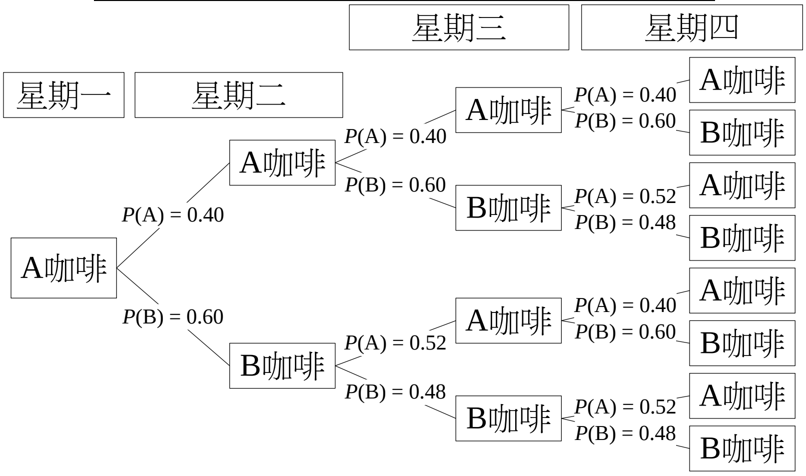
$$\frac{P\left(\text{星期二喝 A 星期三喝 B 星期四喝 B}\right)+P\left(\text{星期二喝 B 星期三喝 A 星期四喝 B}\right)}{P\left(\text{星期二 A 星期三 A 星期四 B}\right)+P\left(\text{星期二 A 星期三 B 星期四 B}\right)+P\left(\text{星期二 B 星期三 A 星期四 B}\right)+P\left(\text{星期二 B 星期三 B 星期四 B}\right)}=$$

$$\frac{(0.40\times0.60\times0.48)+(0.60\times0.52\times0.60)}{(0.40\times0.40\times0.60)+(0.40\times0.60\times0.48)+(0.60\times0.52\times0.60)+(0.60\times0.48\times0.48)}=\frac{0.1152+0.1872}{0.096+0.1152+0.1872+0.13824}=0.5635$$

答案：P(星期二喝 A 星期三喝 B 或星期二喝 B 星期三喝 A|星期四喝 B) = 0.5635

0.4	0.4	0.4	0.064
0.4	0.4	0.6	0.096
0.4	0.6	0.52	0.1248

0.4	0.6	0.48	0.1152
0.6	0.52	0.4	0.1248
0.6	0.52	0.6	0.1872
0.6	0.48	0.52	0.14976
0.6	0.48	0.48	0.13824



練習 4.38　阿良餐廳前半年同時向 S_1、S_2 和 S_3 三家肉品供應商採購冷凍豬肉，S_1 供應商採購 300 箱，S_2 供應商採購 200 箱，S_3 供應商採購 400 箱，阿良餐廳老闆不惜成本自費送衛生局檢驗豬肉抗生素殘留量，結果其中發現 S_1 供應商的供貨有 5 箱抗生素殘留過量(B)，S_2 供應商有 6 箱抗生素殘留過量(B)，S_3 供應商有 2 箱抗生素殘留過量(B)，阿良餐廳老闆皆將殘留過量的豬肉整箱送焚化場銷毀。試估算在送焚化場銷毀的豬肉中，來自 S_1 供應商機率？來自 S_2 供應商機率？來自 S_3 供應商機率？(答案有效位數四捨五入取到小數點後第 4 位)

答案：$P(S_1|\text{B}) = 0.3846$；$P(S_2|\text{B}) = 0.4615$ 和 $P(S_3|\text{B}) = 0.1538$

練習 4.39　擲一個公正骰子(有 6 面，每 1 面點數分別為 1、2、3、4、5 和 6)三次，點數和為 5 機率？(答案有效位數四捨五入取到小數點後第 4 位)

題解：計數法則：6 × 6 × 6 = 216 種排列方式。點數和 5 事件的樣本空間 = {(1,1,3), (1,2,2), (1,3,1), (2,1,2), (2,2,1), (3,1,1)}，一共有 6 種排列方式。

$P(\text{點數和 } 5) = \frac{6}{216} = \frac{1}{36} = 0.0278$

答案：0.0278

練習 4.40　擲一個公正骰子(有 6 面，每 1 面點數分別為 1、2、3、4、5 和 6)三次，點數和為 6 機率？(答案有效位數四捨五入取到小數點後第 4 位)

題解：計數法則：6 × 6 × 6 = 216 種排列方式。點數和 6 事件的樣本空間 = {(1,1,4), (1,2,3), (1,3,2), (1,4,1), (2,1,3), (2,2,2), (2,3,1), (3,1,2), (3,2,1), (4,1,1)}，一共有 10 種排列方式。

$P(\text{點數和 } 6) = \frac{10}{216} = 0.0463$

答案：0.0278

練習 4.41　若 $P(F) = 0.35$、$P(E|F) = 0.45$ 和 $P(F|E) = 0.35$，請計算 $P(E)$機率？

題解：$P(F) \times P(E|F) = P(\text{E}\cap\text{F})$　　$P(E) \times P(F|E) = P(E\cap F)$

$P(F) \times P(E|F) = P(E) \times P(F|E)$ → $0.35 \times 0.45 = P(E) \times 0.35$ → $P(E) = 0.45$

答案：$P(E) = 0.45$

練習 4.42 若 E 與 F 二事件互相獨立，則下列何者正確？(A)P(E∪F) = P(E) + P(F)；(B)P(E∩F) = P(E) + P(F)；(C)P(E∩F) = 0；(D)P(E|F) = P(E)。(99 年公務人員初等考試統計學大意)

練習 4.43 設有 E 和 F 二事件，且 P(E) = 0.4, P(F|E) = 0.35, P(E∪F) = 0.69。則 P(F)等於：(A)0.14；(B)0.43；(C)0.75；(D)0.59。(99 年公務人員初等考試統計學大意)

練習 4.44 袋中有 1 個黑球與 1 個白球。「事件」A 代表第 1 球取到白球，「事件」B 代表第 2 球取到白球。一次取 1 球，而且取出不放回，則下列敘述何者正確：①A 與 B 是「互斥事件」(disjoint events)；②A 與 B 是「獨立事件」(independent events)。(A)①與②都正確；(B)僅①正確；(C)僅②正確；(D)①與②都不正確。(2007 初等考試統計學大意) B 事件 A 的樣本空間 S = {白球，黑球}；事件 B 的樣本空間 S = {白球，黑球}

練習 4.45 袋中有 1 個黑球與 1 個白球。「事件」A 代表第 1 球取到白球，「事件」B 代表第 2 球取到白球。一次取 1 球，而且取出放回，則下列敘述何者正確：①A 與 B 是「互斥事件」(disjoint events)；②A 與 B 是「獨立事件」(independent events)。(A)①與②都正確；(B)僅①正確；(C)僅②正確；(D)①與②都不正確。(2007 初等考試統計學大意)

練習 4.46 一個機器人投籃球的進球率為 0.7，假設每次投擲互為獨立，機器人要投進一球才罷手，則至少投 10 球之機率為：(A)$(0.7)^9$；(B)$(0.7)^{10}$；(C)$(0.3)^9$；(D)$(0.3)^{10}$。(2007 初等考試統計學大意)

練習 4.47 袋中共有 10 個球，其中有 2 個紅球。一次取 1 球，取出不放回，則第 2 球會取到紅球之機率為：(A)$\frac{2}{10}$；(B)$\frac{2}{9}$；(C)$\frac{1}{9}$；(D)不一定。(2007 初等考試統計學大意) A

題解：第一球{紅球,非紅球}，兩者是分割集合。

P(第二球是紅色) = P(第二球是紅色∩S) = P[第二球是紅色∩(第一球是紅色 + 第一球是非紅色)] = P(第二球是紅色∩第一球是紅球) + P(第二球是紅色∩第一球是非紅球) = P(第二球是紅色|第一球是紅球) × P(第一球是紅色) + P(第二球是紅色|第一球是非紅球) × P(第一球是非紅色) = $\frac{1}{1+8}\times\frac{2}{2+8}+\frac{2}{2+7}\times\frac{8}{2+8}=\frac{1}{9}\times\frac{2}{10}+\frac{2}{9}\times\frac{8}{10}=\frac{2}{90}+\frac{16}{90}=\frac{18}{90}=\frac{2}{10}=0.2000$

答案：第二球是紅色機率$\frac{2}{10}$

練習 4.48 人群中男生的比例為 α，有 3/4 男生體重超過 70 公斤，有 1/5 女生體重超過 70 公斤。今由此人群隨機抽取 1 人，若此人體重超過 70 公斤，則此人為男生之機率為：(A) $\le \alpha$；(B) $\ge \alpha$；(C) $\le (1-\alpha)$；(D) $\ge (1-\alpha)$。(2007 初等考試統計學大意)

練習 4.49 一箱燈泡 10 個，其中 1 個是有瑕疵的，訂購者收到燈泡後隨機抽出二個檢驗，只要發現其中有 1 個是瑕疵品，則全箱退回。試問會退貨機率為：(A)0.9；(B)0.8；(C)0.2；(D)0.1。(99 年公務人員初等考試統計學大意)

練習 4.50 A、B 和 C 三人依序丟擲一個公正骰子，第一位擲到 6 點者，就是贏者。第一輪就有人會贏機率是多少？(A)1/216；(B)91/216；(C)1/2；(D)5/9。(99 年公務人員初等考試統計學大意)

練習 4.51 人群中有 B 型肝炎的人占有 30 %。B 型肝炎檢驗「偽陽性」(沒病的人但檢驗結果呈陽性反應)占有 10 %，而「偽陰性」(有病的人但檢驗結果呈陰性反應)占有 20 %。今有一人 B

型肝炎檢驗呈陽性反應，則此人真有 B 型肝炎之機率為何？(取到小數第二位) (A) 0.77；(B) 0.79；(C) 0.82；(D) 0.85。(2007 初等考試統計學大意)

題解：事件 F 表示罹患 B 型肝炎；事件 F 的餘集 F^C 表示未罹患 B 型肝炎。事件 F 和 F^C 兩者屬於分割集合 $P(F) + P(F^C) = 1.0000$。$P(F) = 0.30$；$P(F^C) = 1 - 0.30 = 0.70$。

事件 E 表示檢驗為陽性，事件 E 的餘集 E^C 表示檢驗為陰性。事件 E 和 E^C 兩者屬於分割集合 $P(E) + P(E^C) = 1.0000$。

B 型肝炎檢驗「偽陽性」(沒病的人但檢驗結果呈陽性反應) = $P(E|F^C) = 0.10 = \frac{P(E\cap F^C)}{P(F^C)} = \frac{P(E)-P(E\cap F)}{1-P(F)} = \frac{P(E)-P(E\cap F)}{1-0.30} = \frac{P(E)-P(E\cap F)}{0.70}$ → $0.10 \times 0.70 = 0.07 = P(E) - P(E\cap F)$

B 型肝炎檢驗「偽陰性」(有病的人但檢驗結果呈陰性反應) = $P(E^C|F) = 0.20 = \frac{P(E^C\cap F)}{P(F)} = \frac{P(F)-P(E\cap F)}{P(F)} = \frac{0.30-P(E\cap F)}{0.30}$ → $0.20 \times 0.30 = 0.06 = 0.30 - P(E\cap F)$ → $P(E\cap F) = 0.30 - 0.06 = 0.24$

$0.07 = P(E) - P(E\cap F) = P(E) - 0.24$ → $P(E) = 0.07 + 0.24 = 0.31$

一人 B 型肝炎檢驗呈陽性反應，此人真有 B 型肝炎之機率 = $P(F|E) = \frac{P(F\cap E)}{P(E)} = \frac{P(E\cap F)}{P(E)} = \frac{0.24}{0.31} = 0.7742$

答案：一人 B 型肝炎檢驗呈陽性反應，此人真有 B 型肝炎之機率 = 0.7742

練習 4.52 Suppose that the following contingency table was set up:

	C	D
A	12	15
B	35	26

(a) What was the probability of event B? (b)What was the probability of event A and D? (c) What was the probability of event A or D?

範例 4.41 隨機變數 X 與 Y 機率分布(probability distribution)如下表所示：試估算(A)$P(X > 2|Y = 1)$；(B)$P(X = Y|Y < 3)$。(答案有效位數四捨五入取到小數點後第 4 位)

		Y		
		1	2	3
X	1	0.10	0.05	0.13
	2	0.12	0.06	0.21
	3	0.13	0.07	0.13

題解：(A)$P(X > 2|Y = 1) = \frac{P(X>2\cap Y=1)}{P(Y=1)} = \frac{0.13}{0.10+0.12+0.13} = 0.3714$

(B)$P(X = Y|Y < 3) = \frac{P(X=Y\cap Y<3)}{P(Y<3)} = \frac{0.10+0.06}{0.10+0.12+0.13+0.05+0.06+0.07} = 0.3019$

答案：(A) 0.3714；(B) 0.3019

練習 4.53 是非題(○)若 A 和 B 屬於獨立事件，$P(A) = 0.6$，$P(B) = 0.4$，則 $P(A^C\cap B^C) = 0.24$。

題解：$P(A^C\cap B^C) = P(A^C) \times P(B^C) = 0.4 \times 0.6 = 0.24$

練習 4.54 是非題(○)若 $P(A\cap B) < P(A) \times P(B)$，則 $P(A|B) < P(A)$。

範例 4.42 自 A 連鎖餐廳正職員工中，隨機抽取 300 位員工，調查其對餐廳提供的薪資的滿意程度，結果如下表所示。試估算(A)從此連鎖餐廳中選出一位男性員工，該員工對餐廳薪資的滿意機率？(B)從此連鎖餐廳中找出一位不滿意的員工，此員工為女性機率？(答案有效位數四捨五入取到小數點後第 4 位)

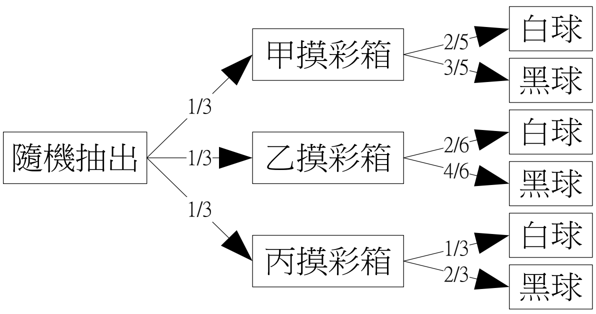
	滿意	不滿意	沒有意見
男	0.34	0.05	0.13
女	0.21	0.06	0.21

題解：(A) $P(\text{滿意}|\text{男}) = \frac{P(\text{滿意}\cap\text{男})}{P(\text{男})} = \frac{0.34}{0.52} = 0.6538$ (B) $P(\text{女}|\text{不滿意}) = \frac{P(\text{女}\cap\text{不滿意})}{P(\text{不滿意})} = \frac{0.06}{0.11} = 0.5455$

答案：(A) 0.6538；(B) 0.5455

練習 *4.55* 若有三個摸彩箱，甲箱有 2 個白球和 3 個黑球，乙箱中有 2 個白球和 4 個黑球，丙箱中有 1 個白球和 2 個黑球，請估算(A)從每一個摸彩箱中皆隨機抽出一球，三球皆為黑球機率；(B)隨機選擇一個摸彩箱，從此摸彩箱中，隨機抽出一球，其為黑球機率；(C)銜接前一小題，若抽出之球為黑球，其來自甲摸彩箱機率。(答案有效位數四捨五入取到小數點後第 4 位)

題解：假設 E 為抽出黑球的事件



(A) 每一個摸彩箱皆抽出黑球機率 $= \frac{3}{2+3} \times \frac{4}{2+4} \times \frac{2}{1+2} = \frac{3}{5} \times \frac{4}{6} \times \frac{2}{3} = 0.26667$

(B) $P(\text{E}) = P(\text{E}\cap\text{甲}) + P(\text{E}\cap\text{乙}) + P(\text{E}\cap\text{丙}) = P(\text{甲}) \times P(\text{E}|\text{甲}) + P(\text{乙}) \times P(\text{E}|\text{乙}) + P(\text{丙}) \times P(\text{E}|\text{丙}) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{5} + \frac{1}{3} \times \frac{4}{6} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{5} + \frac{4}{18} + \frac{2}{9} = 0.64444$

(C) $P(\text{甲}|\text{E}) = \frac{P(\text{甲}\cap\text{E})}{P(\text{E})} = \frac{P(\text{甲})\times P(\text{E}|\text{甲})}{P(\text{E})} = \frac{\frac{1}{3}\times\frac{3}{5}}{0.64444} = \frac{0.2}{0.64444} = 0.310345$

答案：(A) 0.2667；(B) 0.6444；(C) 0.3103

範例 4.43 若有兩個摸彩箱，甲摸彩箱有 2 個白球和 3 個黑球，乙摸彩箱有 1 個白球和 3 個黑球，從甲摸彩箱隨機抽出 1 球，放入乙摸彩箱中，再從乙摸彩箱中隨機抽取一個球，請估算(A)抽出者為白球機率；(B)若已知抽出為白球，計算原先由甲摸彩箱抽出放入乙摸彩箱為白球之機率。(答案有效位數四捨五入取到小數點後第 4 位)

題解：假設 E 為自乙摸彩箱抽出白球的事件；F 為由甲摸彩箱抽出白球放入乙摸彩箱之事件；F^{C} 為由甲摸彩箱抽出黑球放入乙摸彩箱之事件

(A) $P(\text{E}) = P(\text{E}\cap S) = P[\text{E}\cap(\text{F} + \text{F}^{\text{C}})] = P(\text{E}\cap\text{F}) + P(\text{E}\cap\text{F}^{\text{C}}) = P(\text{F}) \times P(\text{E}|\text{F}) + P(\text{F}^{\text{C}}) \times P(\text{E}|\text{F}^{\text{C}}) = \frac{2}{2+3} \times \frac{1+1}{1+3+1} + \frac{3}{2+3} \times \frac{1}{1+3+1} = \frac{7}{25} = 0.28$

(B) $P(\text{F}|\text{E}) = \frac{P(\text{F}\cap\text{E})}{P(\text{E})} = \frac{P(\text{F})\times P(\text{E}|\text{F})}{P(\text{E})} = \frac{\frac{2}{2+3}\times\frac{1+1}{1+3+1}}{0.28} = \frac{4}{7} = 0.5714$

答案：(A) 0.2800；(B) 0.5714

練習 *4.56* 若有甲和乙兩台咖啡機，每台每次可以製作一杯咖啡飲料，甲咖啡機製作咖啡飲料的不良率為 0.02，乙咖啡機不良率為 0.04。現今隨機選擇一台咖啡機製作 10 杯咖啡飲料，兩台咖啡機被選中機率相等。請估算(A)所有咖啡飲料皆合乎標準機率；(B)若所有咖啡飲料皆合乎標準，所用咖啡機為乙咖啡機機率。(答案有效位數四捨五入取到小數點後第 4 位)

題解：

(A) 所有咖啡飲料皆合乎標準機率 $= \frac{1}{2} \times (1 - 0.02)^{10} + \frac{1}{2} \times (1 - 0.04)^{10} = \frac{1}{2} \times 0.8171 + \frac{1}{2} \times 0.6648 = 0.7410$

(B) P(乙咖啡機|合格) = $\frac{P(\text{乙咖啡機}\cap\text{合格})}{P(\text{合格})} = \frac{\frac{1}{2}\times(1-0.04)^{10}}{\frac{1}{2}\times(1-0.02)^{10}+\frac{1}{2}\times(1-0.04)^{10}} = \frac{\frac{1}{2}\times0.6648}{0.7410}$ = 0.4486

答案：(A) 0.7410；(B) 0.4486

範例 4.44 若有甲和乙兩台咖啡機，每台每次可以製作一杯咖啡飲料，甲咖啡機製作咖啡飲料的不合格率為 0.02，乙咖啡機不合格率為 0.04。現今利用兩台咖啡機製作咖啡飲料，甲咖啡機生產 60 %，乙咖啡機製作 40 %。請估算(A)製作過程品管發現一杯咖啡飲料不合格，此杯咖啡飲料由乙咖啡機製作機率；(B)製作過程隨機抽取一杯，其不合格機率。(答案有效位數四捨五入取到小數點後第 4 位)

題解：

(A) P(乙咖啡機|不合格) = $\frac{P(\text{乙咖啡機}\cap\text{不合格})}{P(\text{不合格})} = \frac{P(\text{乙咖啡機})\times P(\text{不合格}|\text{乙咖啡機})}{P(\text{甲咖啡機})\times P\left(\text{不合格}\middle|\text{甲咖啡機}\right)+P(\text{乙咖啡機})\times P(\text{不合格}|\text{乙咖啡機})} =$
$\frac{0.40\times0.04}{0.60\times0.02+0.40\times0.04} = \frac{0.016}{0.012+0.016}$ = 0.5714

(B) P(不合格) = P(甲咖啡機∩不合格) + P(乙咖啡機∩不合格) = P(甲咖啡機) × P(不合格|甲咖啡機) + P(乙咖啡機) × P(不合格|乙咖啡機) = 0.60 × 0.02 + 0.40 × 0.04 = 0.0280

答案：(A) 0.5714；(B) 0.0280

範例 4.45 若由五張分別標示 1、2、3、4 和 5 的卡片中，由甲隨機抽選一張，乙由剩下的四張隨機抽選一張。請估算(A)甲抽選卡片數字大於乙抽選卡片數字機率；(B)甲抽選卡片數字剛好等於乙抽選卡片數字加 2 機率。(答案有效位數四捨五入取到小數點後第 4 位)

題解：

(A) P(甲卡片數字 > 乙卡片數字) = P(甲=2, 乙=1) + P(甲=3, 乙=2) + P(甲=3, 乙=1) + P(甲=4, 乙=3) + P(甲=4, 乙=2) + P(甲=4, 乙=1) + P(甲=5, 乙=4) + P(甲=5, 乙=3) + P(甲=5, 乙=2) + P(甲=5, 乙=1) = 10 × $(\frac{1}{5}\times\frac{1}{4}) = \frac{1}{2}$ = 0.50

(B) P(甲卡片數字 = 乙卡片數字 + 2) = P(甲=3, 乙=1) + P(甲=4, 乙=2) + P(甲=5, 乙=3) = 3 × $(\frac{1}{5}\times\frac{1}{4}) = \frac{3}{20}$ = 0.15

答案：(A) 0.50；(B) 0.15

範例 4.46 投擲一個不平衡(不公正)的骰子，1 點和 4 點出現機率皆為$\frac{1}{4}$，另外，2 點、3 點、5 點和 6 點出現機率皆為$\frac{1}{8}$。請計算投擲此骰子兩次點數和小於 5 機率。(答案有效位數四捨五入取到小數點後第 4 位)

題解：投擲此骰子兩次點數和小於 5 的樣本空間 = {(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (3,1)}。投擲此骰子兩次的點數，彼此之間屬於相互獨立。

投擲此骰子兩次點數和小於 5 機率 = $(\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}) + (\frac{1}{4}\times\frac{1}{8}) + (\frac{1}{4}\times\frac{1}{8}) + (\frac{1}{8}\times\frac{1}{4}) + (\frac{1}{8}\times\frac{1}{8}) + (\frac{1}{8}\times\frac{1}{4}) = \frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{32}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\frac{1}{32} = \frac{4+2+2+2+1+2}{64} = \frac{13}{64}$ = 0.2031

答案：投擲此骰子兩次點數和小於 5 機率 = $\frac{13}{64}$ = 0.2031

範例 4.47 假設 E 和 F 為兩個相互獨立事件，P(E) = 0.5 與 P(F) = 0.6。E^C 和 F^C 分別是 E 和 F 的餘集(complement)。請計算(A) P(E∪F)；(B) $P(E^C\cap F)$；(C) $P(E^C\cup F)$；(D) $P(E^C\cap F^C)$；(G) $P(E^C\cup F^C)$。(答案有效位數四捨五入取到小數點後第 4 位)

題解：因為 E 與 F 為相互獨立事件 E⊥F，所以 P(E∩F) = P(E) × P(F) = 0.5 × 0.6 = 0.30

(A) P(E∪F) = P(E) + P(F) – P(E∩F) = 0.5 + 0.6 – 0.30 = 0.80

(B) $P(F) = P(F\cap S) = P(S\cap F)= P[(E + E^C)\cap F] = P(E\cap F) + P(E^C\cap F) \rightarrow P(E^C\cap F) = P(F) – P(E\cap F) = 0.6 – 0.30 = 0.30$

(C) $P(E^C\cup F) = P(E^C) + P(F) – P(E^C\cap F) = 1 – P(E) + P(F) – P(E^C\cap F) = 1 – 0.5 + 0.6 – 0.30 = 0.80$

(D) $P(E^C\cap F^C) = P(E\cup F)^C = 1 – P(E\cup F) = 1 – 0.80 = 0.20$

(G) $P(E^C\cup F^C) = P(E\cap F)^C = 1 – P(E\cap F) = 1 – 0.30 = 0.70$

答案：(A) $P(E\cup F) = 0.80$；(B) $P(E^C\cap F) = 0.30$；(C) $P(E^C\cup F) = 0.80$；(D) $P(E^C\cap F^C) = 0.20$；(G) $P(E^C\cup F^C) = 0.70$

範例 4.48 已知隨機變數 X 和 Y 的聯合機率分布如下表所示：請計算相關係數？(答案有效位數四捨五入取到小數點後第 4 位)

Y \ X	1	2
1	0.3	0.1
2	0.1	0.1
3	0.2	0.2

題解：

y_i \ x_i	1	2	$f(y_i)$合計(邊際機率)
1	0.3	0.1	0.4
2	0.1	0.1	0.2
3	0.2	0.2	0.4
$f(x_i)$合計(邊際機率)	0.6	0.4	1.0

$E(X) = \sum_{i=1}^{n_x} x_i \times f(x_i) = 1\times0.6 + 2\times0.4 = 1.4$

$E(Y) = \sum_{i=1}^{n_y} y_i \times f(y_i) = 1\times0.4 + 2\times0.2 + 3\times0.4 = 2.0$

$E(X^2) = \sum_{i=1}^{n_x} x_i^2 \times f(x_i) = 1^2\times0.6 + 2^2\times0.4 = 2.2$

$E(Y^2) = \sum_{i=1}^{n_y} y_i^2 \times f(y_i) = 1^2\times0.4 + 2^2\times0.2 + 3^2\times0.4 = 4.8$

$V(X) = \sum_{i=1}^{n_x}[x_i - E(X)]^2 \times f(x_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \times f(x_i) – [E(X)]^2 = 2.2 – 1.4^2 = 0.24$

$V(Y) = \sum_{i=1}^{n_y}[y_i - E(Y)]^2 \times f(y_i) = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \times f(y_i) – [E(Y)]^2 = 4.8 – 2.0^2 = 0.80$

$E(X\times Y) = \sum_{i=1}^{n_x}\sum_{j=1}^{n_y} x_i \times y_j \times f(x_i y_j) = 1\times1\times0.3 + 1\times2\times0.1 + 1\times3\times0.2 + 2\times1\times0.1 + 2\times2\times0.1 + 2\times3\times0.2 = 2.9$

母體相關係數 $\rho_{xy} = \frac{Cov(x,y)}{\sigma_x\times\sigma_y} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x\times\sigma_y} = \frac{\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i-\mu_x)\times(y_i-\mu_y)}{N}}{\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i-\mu_x)^2}{N}}\times\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(y_i-\mu_y)^2}{N}}} = \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i-\mu_x)\times(y_i-\mu_y)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{N}(x_i-\mu_x)^2}\times\sqrt{\sum_{i=1}^{N}(y_i-\mu_y)^2}} =$

$$\frac{\sum_{i=1}^{N} x_i\times y_i - \frac{\sum_i^N x_i\times\sum_i^N y_i}{N}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^{N} x_i)^2}{N}}\times\sqrt{\sum_{i=1}^{N} y_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^{N} y_i)^2}{N}}} = \frac{E(x\times y)-E(x)\times E(y)}{\sqrt{V(x)}\times\sqrt{V(y)}} = \frac{2.9-1.4\times2.0}{\sqrt{0.24}\times\sqrt{0.80}} = \frac{0.1}{0.4382} = 0.2282$$

答案：相關係數 0.2282

機率樹型圖(probability tree)、樹狀圖(tree diagram)

綜合兩事件或兩事件以上機率或條件機率所構成的圖形。

討論議題

1.師生在非同步教學討論議題：期中考準備分享

針對進入大學後第一次的期中考試，第 1 章到第 4 章的課程內容，分享一下現階段自己準備的方式。第一回合請於 D 日中午 1200 以前從「議題討論」區【張貼】標題：「期中考準備分享」，本文：請分享自己準備的心得，並分析一下較弱的單元項目，與積極改善的方式(50 個字以上)。

期望可以透過學習經驗的交流，相互激勵，提升學習效益。待有 40 篇第一回合【張貼】回應後或第一回合回應【張貼】時間結束後，一一檢視其他同學的張貼內容。第二回合【張貼】標題：「

最大收穫」，本文：自己靜下心來，思考一下，給您最大的收穫(25 個字以上詮釋)。透過同學之間的討論分享，可以提升學習效益。加油。第二回合【張貼】截止時間就是本議題在平台上的關閉時間。

2.學生同步教學討論議題：期中考高分關鍵因素分析

針對進入大學後第一次的期中考試，統計學期中考試要考高分的關鍵因素討論。第一回合請於 D 日早上 0920 以前從「議題討論」區【張貼】標題：「高分關鍵」，本文：請分享自己經歷過期中考試後，請分析若要考取統計學高分的最重要關鍵因素(建議 10 個字以內詮釋)。

期望可以透過學習經驗的交流，相互激勵，提升學習效益。待有 40 篇第一回合【張貼】回應後或第一回合回應【張貼】時間結束後，一一檢視其他同學的張貼內容。第二回合【張貼】標題：「最大收穫」，本文：自己靜下心來，思考一下，此議題討論後給您最大的收穫(建議 10 個字以內詮釋)。透過同學之間的討論分享，可以提升學習效益。加油。第二回合【張貼】截止時間就是本議題在平台上的關閉時間。

3.師生在非(學習者)同步教學討論議題：閉書平常考 20181105 應考心得與分享

第一回合請於 D 日早上 1130 以前從「議題討論」區【張貼】標題：「閉書平常考分享」，本文：在此之前，所有考試評量和練習都是開書的方式進行，在 D 日(星期一)第 1 章到第 4 章閉書複習平常考後，分析一下自己的應考心得。分享一下自己比較得心應手的單元項目，與其解題的技巧(20 個字以上)，可以貼上考試過程使用的 Excel 檔案參考說明。

期望可以透過學習經驗的交流，相互激勵，提升學習效益。待有 40 篇第一回合【張貼】回應後或第一回合回應【張貼】時間結束後，檢視其他同學的回應內容。第二回合【張貼】標題：「最大收穫」，本文：自己靜下心來，思考一下，給您最大的收穫，請再具體回應一次(10 個字以上)。透過同學之間的討論分享，可以提升學習效益。加油。第二回合【張貼】截止時間就是本議題在平台上的關閉時間。

4.師生在非同步教學討論議題：期中考後學習檢討與分享

在經歷過人生中第一次的大學期中考試，也體驗數位教材和數位參數化評量試題的功力。在整個學習歷程中，都是很新鮮的體會。不過，數位化的學習評量，就是快速，就是公平，就是現實，馬上知道客觀的成績。第一回合請於 D+3 日中午 1200 以前從「議題討論」區【張貼】標題：「學習檢討與分析」，本文：來檢討自己學習的狀況，以及往後補強的積極作為(20 個字以上詮釋)。

期中考試經歷過了，不要太計較過去，勇於面對未來的學習內容。透過自己的學習檢討，以及彼此的激勵和分享，提升學習效益。待有 40 篇第一回合【張貼】回應後或第一回合回應【張貼】時間結束後，檢視其他同學的回應內容。第二回合【張貼】標題：「最大收穫」，本文：自己靜下心來，思考一下，給您最大的收穫，請再具體回應一次(10 個字以上)。透過同學之間的檢討與分享，可以提升學習效益。加油。第二回合【張貼】截止時間就是本議題在平台上的關閉時間。

5.非同步教學中，學習者相互討論議題：您對 20171105 第 3 章和第 4 章平常考心得分享

第一回合請於 20171106 中午 1200 以前從「議題討論」區【張貼】標題：「平常考檢討與分析」，本文：請於 20171105(星期三)第 3 章和第 4 章平常考後，回應一下您準備的方向與應考心得(25 個字以上詮釋)。

期望可以透過學習經驗的交流，相互激勵，提升學習效益。待有 40 篇第一回合【張貼】回應後或第一回合回應【張貼】時間結束後，檢視其他同學的張貼內容。第二回合【張貼】標題：「最大

收穫」，本文：自己靜下心來，思考一下，給您最大的收穫，請再具體回應一次(25 個字以上詮釋)。加油。第二回合【張貼】截止時間就是本議題在平台上的關閉時間。

6.師生在非同步教學討論議題：期中考成績相關係數分析

依據平台統計至 20211114 0900 為止的紀錄，分析獲得下列相關係數數值。請詳細敘述表格內中各種相關係數所代表的意涵。第一回合請於 D+3 日中午 1200 以前從「議題討論」區【張貼】標題：「期中考成績相關係數分析」，本文：請分析各種相關係數代表那些意義，與由該數值呈現的意義，接下來自己該有的具體學習作為(20 個字以上)。

待有 30 篇第一回合【張貼】回應後或第一回合回應【張貼】時間結束後，請一一檢視其他同學的張貼內容。第二回合【張貼】標題：「最大收穫」，本文：請具體評論哪一個同學回應得最具體與明確，有哪些可以讓自己學習之處？(10 個字以上詮釋)。第二回合【張貼】截止時間就是本議題在平台上的關閉時間。

相關係數	期中考 20211109 成績
上課次數(進入平台本課程上課次數)	0.53
張貼篇數(所有討論版張貼文章)	0.46
討論次數(課程討論和議題討論次數)	-0.22
閱讀時數(閱讀節點教材時間)	0.36
閱讀次數(閱讀節點數量)	0.53
上課練習平均分數	0.73
開書平常考平均分數	0.39
平常考 20211108 成績	0.78

重點整理

Excel 函數彙整

Excel 函數	統計功能	輸入資料	輸出資料
PRODUCT	連續相乘	數個需要連續相乘的數值	相乘數值
FACT	階乘數	數值	階乘數
PERMUT	排列數	物體總數，選取物體數	排列方式數量
COMBIN	組合數	物件的數目，每個組合中要選的物件數目	組合數量
QUARTILE	四分位數	統計欄位，四分位序	四分位數

機率(probability)

機率(probability)概念就是特定事件自然發生之結果所佔的一種比例、相對次數和機會。

隨機變數(random variable)

一個隨機實驗過程中出現不同結果的數值。

樣本空間(sample space)

一個隨機實驗過程中全部可能獲得結果(outcome)所組成的集合(set)。

樣本點(sample point)、觀測點

每一個隨機實驗過程中可能的結果。故結果(樣本點、元素、觀測點或出象)所組成的集合即為樣本空間。

事件(event)

可視為樣本空間中的子集合或樣本空間中的部分集合。

機率模型(probability models)

陳述特定隨機實驗中，所有可能出現之結果(樣本點、元素、觀測點或出象)(a list of possible outcomes)與其機率(a probability for each outcome)的分布情況。

多步驟隨機實驗之計數法則、乘法定理、乘法公式(multiplication formula)

$$\text{可能產生之結果組合的總數} = m_1 \times m_2 \times m_3 \times \ldots \times m_n$$

排列(permutation)

在 n 個不同物件排列中，最多可以排列出 $n!$種的方式。

部分樣本排列計數

$$P_i^n = \frac{n!}{(n-i)!} = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-i+1)$$

具有相同物件的排列方式

$$\frac{n!}{n_1! \times n_2! \times n_3! \times \ldots \times n_k!}$$

環狀排列方式

若有 n 個相異物件，排列成一個環狀，有$(n-1)!$種排列方式。

組合公式(combination formula)

$$C_i^n = \binom{n}{i} = \frac{n!}{i! \times (n-i)!} = \frac{P_i^n}{i!} = C_{n\ i}$$

古典機率理論(Classical probability theorem)

$$\text{特定事件 A 發生機率} = \frac{\text{符合事件 A 定義的觀測點數量}}{\text{可能出現的觀測點總數}(n)} = P(\mathrm{A}) = \frac{n_A}{n}$$

客觀機率理論(Objective probability theorem)

$$\text{特定事件 A 發生機率} = \frac{\text{出現特定事件的次數}}{\text{隨機實驗次數}(n)} = P(\mathrm{A}) = \lim_{n\to\infty} \frac{f_\mathrm{A}}{n}$$

加法定理(rule of addition)

$P(E_1 \cup E_2 \cup E_3) = P(E_1) + P(E_2) + P(E_3)$，$E_1$、$E_2$、$E_3$ 彼此為互斥事件

事件 A 的餘集

$$P(A^C) = 1 - P(A)$$

事件 A 和 B 的聯集(Union of events A and B)

$$P(A \cup B) = P(\mathrm{A}) + P(\mathrm{B}) - \mathrm{P}(\mathrm{A} \cap B)$$

互斥事件

$$A \cap B = \phi \qquad \text{空集合} \qquad P(A \cap B) = 0$$

狄摩根定理(de-Morgen rule)

$$\mathrm{A}^C \cap \mathrm{B}^C = (\mathrm{A} \cup \mathrm{B})^C$$
$$\mathrm{A}^C \cup \mathrm{B}^C = (\mathrm{A} \cap \mathrm{B})^C$$

交換律(commutative rule)

$$\mathrm{A} \cup \mathrm{B} = \mathrm{B} \cup \mathrm{A}$$
$$\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \mathrm{B} \cap \mathrm{A}$$

結合律(associative rule)

$$(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) \cup \mathrm{C} = \mathrm{A} \cup (\mathrm{B} \cup \mathrm{C})$$
$$(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) \cap \mathrm{C} = \mathrm{A} \cap (\mathrm{B} \cap \mathrm{C})$$

分配律(distributive rule)

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$
$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

條件機率(Conditional probability)

條件機率為聯合機率和邊際機率的比值。

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}\text{，其中 } P(B) \neq 0 \text{ or } P(B) > 0$$
$$P(A \cap B) = P(B) \times P(A|B)$$

分割集合(partition set)

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_m) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \ldots + P(A_m) = 1.0000$$
$$P(A_i \cap A_j) = 0.0000\text{，其中 } i \neq j\text{，} i, j = 1, \ldots, m$$

總機率定理

$$P(B) = P(B \cap S) = \sum_{i=1}^{m} P(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^{m} P(A_i) \times P(B|A_i)$$

貝氏定理

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B \cap A_i)}{P(B)} = \frac{P(A_i) \times P(B|A_i)}{\sum_{j=1}^{m} P(A_j) \times P(B|A_j)}$$