十一、母體變異數的統計推論

Chapter 11　Inferences about population variances

目錄

學習目標

知識(認知)

1.可以清楚陳述母體變異數統計推論的意涵。

2.可以清楚陳述兩個母體變異數統計推論的意涵。

3.可以說明各種狀況下，母體變異數假設檢定的程序和標準。

4.可以說明各種狀況下，兩個母體變異數假設檢定的程序和標準。

5.評價各種情境下，母體變異數例假設檢定的使用價值。

技能

1.能夠計算各種情境下的檢定統計值。

2.能夠利用檢定統計值與臨界值的比較，提出統計推論。

3.綜合所學，能夠於實務領域中，依據特定情境的需求進行假設檢定程序。

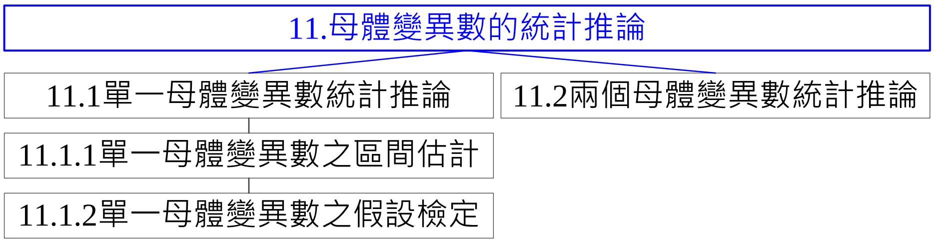
態度(情意)

1.意識到在日常生活或未來工作環境中，母體變異數假設檢定的重要性。

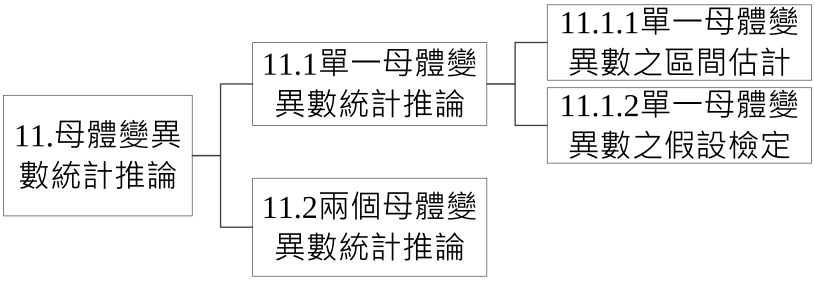
2.在各種情境下，依循假設檢定的程序，接受統計推論所傳達的意涵。

教學時間：2 小時

運用統計學的方法推估母體變異數 σ^2，常被使用於推測商品或服務質與量的分散程度。商品或服務質與量若超過預設標準時，消費者不會有抱怨；但是當商品或服務的質與量未達預設標準時，消費者就會抱怨，甚至產生抑制或改變消費的行為。咖啡容量多寡差異、雞排大小差異、雞腿大小差異、工作量大小差異、等候時間長短差異等，都可能造成管理上的困擾。因此，母體變異數的推估，在實務運用上就變成相當重要。



章節結構圖



11.1 單一母體變異數統計推論

樣本變異數(Sample variance)以 S^2 代表：

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n-1}$$

樣本變異數 S^2 為母體變異數 σ^2 的點估計值。從屬於常態分布的母體中，隨機抽取 n 個樣本。欲利用樣本變異數 S^2 進行母體變異數 σ^2 的統計推論時，可以利用 $\frac{(n-1)\times S^2}{\sigma^2}$ 之抽樣分布屬於自由度 $v = n - 1$ 的卡方分布(chi-square distribution)協助推估。$\chi^2 = \frac{(n-1)\times S^2}{\sigma^2}$，卡方值屬於無因次單位。故，可利用卡方分布進行單一母體變異數的區間估計和假設檢定。

11.1.1 單一母體變異數之區間估計

依據附錄(Appendix)中卡方分布臨界值表顯示 $P(\chi^2 \geq \chi^2_{\alpha}) = \alpha$，卡方分布右尾機率值 α。若卡方值表示成 χ^2_{α}，表示機率(面積)大於 α 的卡方值。

設定顯著水準 α，故信賴水準(信賴係數)$1 - \alpha$，其卡方值的信賴區間為

$$\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1} \leq \chi^2 \leq \chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}$$

$\frac{(n-1)\times S^2}{\sigma^2}$ 之抽樣分布屬於自由度 $v = n - 1$ 的卡方分布(chi-square distribution)

$$\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1} \leq \frac{(n-1)\times S^2}{\sigma^2} \leq \chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1} \rightarrow \frac{1}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}} \geq \frac{\sigma^2}{(n-1)\times S^2} \geq \frac{1}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}} \rightarrow$$

$$\frac{(n-1)\times S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}} \geq \sigma^2 \geq \frac{(n-1)\times S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}} \rightarrow \frac{(n-1)\times S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)\times S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}}$$

範例 11.1　假設台西餐廳每天消費者人數分布屬於常態分布，欲知悉該餐廳每天消費者人數分布的變異數在信賴水準 0.95 之信賴區間？今隨機抽取 15 天計算每天消費者人數分布的變異數 $S^2 = 15.00$ 人 ^{2}。

題解：樣本數量 n = 15，自由度 $v = n - 1 = 15 - 1 = 14$，顯著水準 α = 0.05，樣本變異數 S^2 = 15.00 人 ^{2}。

$\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1} = \chi^2_{\frac{0.05}{2},15-1} = \chi^2_{0.025,14} = 26.1189$；$\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1} = \chi^2_{1-\frac{0.05}{2},15-1} = \chi^2_{0.975,14} = 5.6287$[使用 Excel 軟體 CHISQ.INV.RT(右尾機率)函數查詢獲得]。

$$\frac{(n-1)\times S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}} \le \sigma^2 \le \frac{(n-1)\times S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}} \rightarrow \frac{(15-1)\times 15.00}{26.1189} \le \sigma^2 \le \frac{(15-1)\times 15.00}{5.6287} \rightarrow 8.0401 \le \sigma^2 \le 37.3086 \xrightarrow{\text{開根號}}$$

$$2.8355 \le \sigma \le 6.1081$$

答案：餐廳每天消費者人數分布的變異數在信賴水準 0.95 之信賴區間為 8.0401~37.3086 人 ^{2}，餐廳每天消費者人數分布的標準(偏)差在信賴水準 0.95 之信賴區間為 2.8355~6.1081 人

練習 11.1 若欲知悉口湖餐廳販售清蒸鱈魚，依據標準食譜(standard recipe)設計每盤清蒸鱈魚中，需有鱈魚原料重量必須在一定變異數以下。今隨機抽取欲製作清蒸鱈魚原料 19 個樣本，標準(偏)差為 S = 5 公克。請問清蒸鱈魚原料重量分布的變異數在信賴水準為 0.90 之信賴區間？其分布的標準(偏)差在信賴水準為 0.90 之信賴區間？

題解：樣本數量 n = 19，自由度 $v = n - 1 = 19 - 1 = 18$，顯著水準 α = 0.10，樣本變異數 S^2 = 25 公克 ^{2}。

$\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1} = \chi^2_{\frac{0.10}{2},19-1} = \chi^2_{0.05,18} = 28.8693$；$\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1} = \chi^2_{1-\frac{0.10}{2},19-1} = \chi^2_{0.95,18} = 9.3905$[使用 Excel 軟體 CHISQ.INV.RT(右尾機率)函數查詢獲得]。

$$\frac{(n-1)\times S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}} \le \sigma^2 \le \frac{(n-1)\times S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}} \xrightarrow{\text{帶入數值}} \frac{(19-1)\times 25}{28.8693} \le \sigma^2 \le \frac{(19-1)\times 25}{9.3905} \rightarrow 15.5875 \le \sigma^2 \le 47.9208 \xrightarrow{\text{開根號}}$$

$$3.9481 \le \sigma \le 6.9225$$

答案：清蒸鱈魚原料重量分布的變異數在信賴水準為0.90之信賴區間為15.5875~47.9208公克^2；標準(偏)差在信賴水準為0.90之信賴區間為3.9481~6.9225公克

練習 11.2 若欲知悉燕巢風味餐廳販售蔥燒吳郭魚，依據標準食譜(standard recipe)設計每盤蔥燒吳郭魚中，需有吳郭魚原料重量分布必須在一定變異數以下。今隨機抽取欲製作蔥燒吳郭魚原料 20 個樣本，標準(偏)差為 S = 4 公克。請問清蒸鱈魚原料重量分布的變異數在信賴水準為 0.95 之信賴區間？其標準(偏)差在信賴水準為 0.95 之信賴區間？

題解：樣本數量 n = 20，自由度 $v = n - 1 = 20 - 1 = 19$，顯著水準 α = 0.05，樣本變異數 S^2 = 16 公克 ^{2}。

$\chi^2_{\left(\frac{\alpha}{2}\right),(n-1)} = \chi^2_{\left(\frac{0.05}{2}\right),(20-1)} = \chi^2_{0.025,19} = 32.8523$；$\chi^2_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right),(n-1)} = \chi^2_{\left(1-\frac{0.05}{2}\right),(20-1)} = \chi^2_{0.975,19} = 8.9065$[使用 Excel 軟體 CHISQ.INV.RT(右尾機率)函數查詢獲得]。

$$\frac{(n-1)\times S^2}{\chi^2_{\left(\frac{\alpha}{2}\right),(n-1)}} \le \sigma^2 \le \frac{(n-1)\times S^2}{\chi^2_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right),(n-1)}} \xrightarrow{\text{帶入數值}} \frac{(20-1)\times 16}{32.8523} \le \sigma^2 \le \frac{(20-1)\times 16}{8.9065} \rightarrow 9.2535 \le \sigma^2 \le 34.1323 \xrightarrow{\text{開根號}}$$

$$3.0420 \le \sigma \le 5.8423$$

答案：清蒸鱈魚原料重量分布的變異數在信賴水準為0.95的信賴區間為9.2535~24.1323公克^2；標準(偏)差在信賴水準為0.95的信賴區間為3.0420~5.8423公克

11.1.2 單一母體變異數之假設檢定

從屬於常態分布的母體中，隨機抽取 n 個樣本，利用卡方分布進行母體變異數 σ^2 的假設檢定(Hypothesis test)。其中σ_0^2為假設檢定的預設值或假設值。

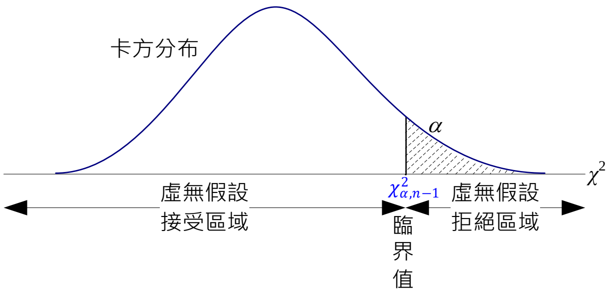
$$\text{檢定統計值 } \chi^2 = \frac{(n-1)\times S^2}{\sigma_0^2}$$

在檢定階段，透過樣本變異數運算獲得的檢定統計值─卡方值 χ^2 與在顯著水準 α 下自由度 $v = n - 1$ 的卡方值$\chi^2_{\alpha,n-1}$、$\chi^2_{1-\alpha,n-1}$、$\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}$或$\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}$值(臨界值)進行比較，以進行統計推論。

右尾檢定(a right-tailed test)：虛無假設 H_0: $\sigma^2 \le \sigma_0^2$；對立假設 H_1: $\sigma^2 > \sigma_0^2$。

若檢定統計值 $\chi^2 \le$ 臨界值$\chi^2_{\alpha,n-1}$，檢定統計值位於虛無假設接受區域內，接受虛無假設(null hypothesis) H_0: $\sigma^2 \le \sigma_0^2$。

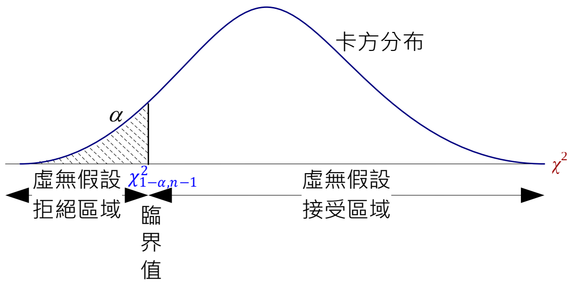
若檢定統計值 $\chi^2 >$ 臨界值$\chi^2_{\alpha,n-1}$，檢定統計值不位於虛無假設接受區域內，拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0: $\sigma^2 \le \sigma_0^2$，接受對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\sigma^2 > \sigma_0^2$。



左尾檢定(a left-tailed test)：虛無假設 H_0: $\sigma^2 \ge \sigma_0^2$；對立假設 H_1: $\sigma^2 < \sigma_0^2$。

若檢定統計值 $\chi^2 \ge$ 臨界值$\chi^2_{1-\alpha,n-1}$，檢定統計值位於虛無假設接受區域內，接受虛無假設(null hypothesis) H_0: $\sigma^2 \ge \sigma_0^2$。

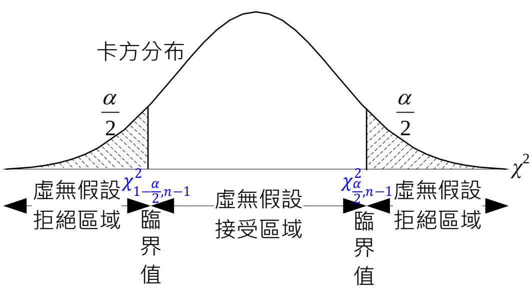
若檢定統計值 $\chi^2 <$ 臨界值$\chi^2_{1-\alpha,n-1}$，檢定統計值不位於虛無假設接受區域內，拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0: $\sigma^2 \ge \sigma_0^2$，接受對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\sigma^2 < \sigma_0^2$。



雙尾檢定(a two-tailed test)：虛無假設 H_0: $\sigma^2 = \sigma_0^2$；對立假設 H_1: $\sigma^2 \ne \sigma_0^2$。

若左側臨界值$\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1} \le$ 檢定統計值 $\chi^2 \le$ 右側臨界值$\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}$，檢定統計值位於虛無假設接受區域內，接受虛無假設(null hypothesis) H_0: $\sigma^2 = \sigma_0^2$。

若檢定統計值 $\chi^2 <$ 左側臨界值$\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}$或檢定統計值 $\chi^2 >$ 右側臨界值$\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}$，檢定統計值不位於虛無假設接受區域內，拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0: $\sigma^2 = \sigma_0^2$，接受對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\sigma^2 \ne \sigma_0^2$。



範例 11.2 若欲知悉四湖餐廳販售清蒸鱈魚，依據標準食譜(standard recipe)設計每盤清蒸鱈魚中，需有鱈魚原料 AP 重 600 公克，容許標準(偏)差 σ = 5 公克。假設供應商提供的鱈魚原料重量屬於常態分布，今隨機抽取欲製作清蒸鱈魚原料 19 個樣本，標準(偏)差為 S = 6 公克，在信賴水準為 0.95 的情況下，該批清蒸鱈魚的原料是否符合重量分散程度的標準？

題解：樣本數量 $n = 19$，自由度 $v = n - 1 = 19 - 1 = 18$，顯著水準 $\alpha = 0.05$，母體變異數預設值$\sigma_0^2 = 25$公克^2，樣本變異數 $S^2 = 36$公克^2，本範例屬於右尾檢定(a right-tailed test)。

A.設定顯著水準 $\alpha = 0.05$。臨界值—卡方值$\chi^2_{\alpha,n-1} = \chi^2_{0.05,19-1} = \chi^2_{0.05,18} = 28.8693$[使用 Excel 軟體 CHISQ.INV.RT(右尾機率)函數查詢獲得]。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: $\sigma^2 \le 25$公克^2

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\sigma^2 > 25$公克^2

D.計算檢定統計值—卡方值

檢定統計值 $\chi^2 = \frac{(n-1)\times S^2}{\sigma_0^2} = \frac{(19-1)\times 36}{25} = 25.92$

E.檢定統計值 $\chi^2 = 25.92 < $ 臨界值$\chi^2_{\alpha,n-1} = 28.8693$，檢定統計值位於虛無假設接受區域內，接受虛無假設(null hypothesis) H_0: $\sigma^2 \le 25$公克^2。因此，該批清蒸鱈魚的原料符合標準菜單的預設標準，容許標準(偏)差 $\sigma = 5$公克以內。

練習 11.3 設計新的統計學評量試題，期望達到特定鑑別度，設定測驗成績的標準(偏)差 12 分，假設評量分數屬於常態分布，今隨機抽取觀光系 30 位學生，線上統計學考試，測驗成績平均值 67.2 分，標準(偏)差 9.5 分，在信賴水準為 0.95 的情況下，該試題是否符合原先設定的鑑別度？

題解：樣本數量 $n = 30$，自由度 $v = n - 1 = 30 - 1 = 29$，顯著水準 $\alpha = 0.05$，母體變異數設定值$\sigma_0^2 = 12^2 = 144$ 分^2，樣本變異數 $S^2 = 9.5^2 = 90.25$分^2。設定測驗成績的標準(偏)差，不希望太高或太低，故本範例屬於雙尾檢定。

A.設定顯著水準 $\alpha = 0.05$。左側臨界值$\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1} = \chi^2_{1-\frac{0.05}{2},30-1} = \chi^2_{0.975,29} = 16.0471$；右側臨界值$\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1} = \chi^2_{\frac{0.05}{2},30-1} = \chi^2_{0.025,29} = 45.7223$[使用 Excel 軟體 CHISQ.INV.RT(右尾機率)函數查詢獲得]。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: $\sigma^2 = 144$分^2

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\sigma^2 \ne 144$分^2

D.計算檢定統計值—卡方值

檢定統計值 $\chi^2 = \frac{(n-1)\times S^2}{\sigma_0^2} = \frac{(30-1)\times 90.25}{144} = 18.1754$

E.左側臨界值$\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1} = 16.0471 <$ 檢定統計值 $\chi^2 = 18.1754 <$ 右側臨界值$\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1} = 45.7223$，檢定統計值位於虛無假設接受區域內，接受虛無假設(null hypothesis) H_0: $\sigma^2 = 144$。因此，該試題符合原先設定鑑別度標準(偏)差 $\sigma = 12$ 分的標準。

練習 11.4 若欲知悉布袋餐廳販售清蒸鱈魚，依據標準食譜(standard recipe)設計每盤清蒸鱈魚中，需有鱈魚原料 AP 重 600 公克，容許標準(偏)差 $\sigma = 5.0$ 公克。假設供應商提供的鱈魚原料重量屬於常態分布，今隨機抽取欲製作清蒸鱈魚原料 22 個樣本，標準(偏)差為 $S = 6.2$ 公克，在信賴水準為 0.90 的情況下，該批清蒸鱈魚的原料是否符合重量分散程度的標準？

題解：樣本數量 $n = 22$，自由度 $v = n - 1 = 22 - 1 = 21$，顯著水準 $\alpha = 0.10$，母體變異數設定值$\sigma_0^2 = 5^2 = 25$ 公克^2，樣本變異數 $S^2 = 6.2^2 = 38.44$ 公克^2。設定鱈魚原料 AP 重，不希望超過特定分散程度，故本範例屬於右尾檢定。

A.設定顯著水準 $\alpha = 0.10$，臨界值$\chi^2_{\alpha,n-1} = \chi^2_{0.10,22-1} = \chi^2_{0.10,21} = 29.6151$[使用 Excel 軟體 CHISQ.INV.RT(右尾機率)函數查詢獲得]。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: $\sigma^2 \le 25$公克^2

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\sigma^2 > 25$公克^2

D.計算檢定統計值—卡方值

檢定統計值 $\chi^2 = \frac{(n-1)\times S^2}{\sigma_0^2} = \frac{(22-1)\times 38.44}{25} = 32.2896$

E.檢定統計值 $\chi^2 = 32.2896$ > 臨界值$\chi^2_{\alpha,n-1} = 29.6151$，檢定統計值不位於虛無假設接受區域內，拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0: $\sigma^2 \le 25$，接受對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\sigma^2 > 25$。因此，該批清蒸鱈魚原料不符合重量分散程度標準，標準(偏)差 $\sigma = 5$ 公克。

11.2 兩個母體變異數統計推論

F 分布除了運用於變異數分布(第 13 章)的假設檢定程序以外，還可以使用於對兩個母體的變異數相等性檢定。此外，在進行其他檢定前，會先做兩個母體變異數相等性檢定以決定下一步該用何種檢定方法。兩個母體平均值之差的統計推論時(第 10 章)，信賴區間和假設檢定都會依據兩母體變異數是否相等，其運算方式有差異。故，兩個母體變異數統計推論是很多統計分析的基礎。

在特定的應用領域中，欲比較兩種不同產品或服務的質量之變異數。進行兩個不同母體變異數比較時，從兩個不同的母體(1 和 2)分別**隨機**抽取 n_1 和 n_2 個樣本。進行兩個母體變異數σ_1^2和σ_2^2統計推論時，以樣本變異數S_1^2和S_2^2為資料依據。兩母體的隨機樣本屬於獨立樣本(Independent sampling)。

兩個母體皆屬於常態分布(若屬於非常態分布時，必須使用無母數方法推論)，若要驗證變異數是否相等$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$時(虛無假設 H_0: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$)，利用兩個樣本變異數的比率$\frac{S_1^2}{S_2^2}$之抽樣分布，屬於分子自由度 $v_1 = n_1 - 1$，分母自由度 $v_2 = n_2 - 1$ 的 F 分布(F-distribution, Fisher distribution)。檢定統計值 $F = \frac{S_1^2}{S_2^2}$，F 值屬於無因次單位。F 分布屬於不對稱分布(向右偏斜)，F 值不可能為負值(–)。

$$F_{\alpha,v_1,v_2} = \frac{\frac{\chi_1^2}{v_1}}{\frac{\chi_2^2}{v_2}} \rightarrow \chi_v^2 = S^2 \times \frac{n-1}{\sigma^2} \rightarrow F_{\alpha,v_1,v_2} = \frac{\frac{\chi_1^2 = \frac{S_1^2\times(n_1-1)}{\sigma_1^2}}{v_1 = n_1 - 1}}{\frac{\chi_2^2 = \frac{S_2^2\times(n_2-1)}{\sigma_2^2}}{v_2 = n_2 - 1}} = \frac{\frac{\chi_1^2 = \frac{S_1^2\times\cancel{(n_1-1)}}{\sigma_1^2}}{\cancel{v_1 = n_1 - 1}}}{\frac{\chi_2^2 = \frac{S_2^2\times\cancel{(n_2-1)}}{\sigma_2^2}}{\cancel{v_2 = n_2 - 1}}} = \frac{\frac{S_1^2}{\sigma_1^2}}{\frac{S_2^2}{\sigma_2^2}} \rightarrow 若\sigma_1^2 = \sigma_2^2 \rightarrow F_{\alpha,v_1,v_2} = \frac{S_1^2}{S_2^2}$$

F_{α,v_1,v_2} (F_{α,v_1,v_2}可簡化成 F_α)或$F_{v_1,v_2,\alpha}$符號代表該特定 F 值以上(右側或右尾)機率(面積)等於 α。$P(F > F_\alpha) = \alpha$。故，右尾 F 值表中，提供右尾機率為 α 的 F 值，若需要左尾機率 $1 - \alpha$ 的 F 值，可利用下列倒數方式獲得。

$$F_{\alpha,v_1,v_2} = \frac{1}{F_{1-\alpha,v_2,v_1}}$$

在統計推論的過程中，將兩個母體中樣本變異數 S^2 較大者視為母體 1(分子)；樣本變異數 S^2 較小者視為母體 2(分母)。因此，F 數值皆會大於 1($F > 1$)。

右尾檢定(a right-tailed test)：因強制將樣本變異數較大者視為母體 1(分子)，故進行單尾檢定時皆屬於右尾檢定。虛無假設 H_0: $\sigma_1^2 \le \sigma_2^2$；對立假設 H_1: $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$。

檢定統計值 $F = \frac{S_1^2}{S_2^2}$

若檢定統計值 $F \le$ 臨界值F_{α,v_1,v_2}，檢定統計值位於虛無假設接受區域內，接受虛無假設(null hypothesis) H_0: $\sigma_1^2 \le \sigma_2^2$。

若檢定統計值 $F >$ 臨界值F_{α,v_1,v_2}，檢定統計值不位於虛無假設接受區域內，拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0: $\sigma_1^2 \le \sigma_2^2$，接受對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$。

雙尾檢定(a two-tailed test)：虛無假設 H_0: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$；對立假設 H_1: $\sigma_1^2 \ne \sigma_2^2$。

檢定統計值 $F = \frac{S_1^2}{S_2^2}$

若檢定統計值 $F \le$ 臨界值$F_{\frac{\alpha}{2},v_1,v_2}$，檢定統計值位於虛無假設接受區域內，接受虛無假設(null hypothesis) H_0: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$。

若檢定統計值 F > 臨界值$F_{\frac{\alpha}{2},v_1,v_2}$，檢定統計值不位於虛無假設接受區域內，拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$，接受對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$。

範例 11.3 請使用附錄 F 分布臨界值表，找出下列各種條件下的 F 值：

a.$F_{0.05}$ 當 $v_1 = 8$ 和 $v_2 = 7$　　b.$F_{0.01}$ 當 $v_1 = 18$ 和 $v_2 = 17$

c.$F_{0.025}$ 當 $v_1 = 11$ 和 $v_2 = 15$　　d.$F_{0.10}$ 當 $v_1 = 20$ 和 $v_2 = 7$

答案：(a)3.7257；(b)3.2124；(c)3.0078；(d)2.5947

範例 11.4 若欲知悉興達港餐廳販售清蒸鱈魚，男女性消費者對於菜色滿意度(非常滿意 10 分至非常不滿意 1 分共 10 個等級)的變異數是否顯著性差異。假設男女性分別對菜色滿意度分布屬於常態分布，今隨機抽取餐廳內有點用清蒸鱈魚的消費者，其中男性 35 名和女性 32 名，其標準(偏)差分別為 1.32 和 1.20，在信賴水準為 0.95 的情況下，男女性消費者對於清蒸鱈魚滿意度變異數是否相等？

題解：男性樣本數 $n_1 = 35$，男性樣本標準(偏)差 $S_1 = 1.32$，男性樣本變異數$S_1^2 = 1.7424$，女性樣本數 $n_2 = 32$，女性樣本標準(偏)差 $S_2 = 1.20$，女性樣本變異數$S_2^2 = 1.4400$。希望檢定男女兩性的變異數是否相等，故本範例屬於雙尾檢定(a two-tailed test)。

A.設定顯著水準 $\alpha = 0.05$，臨界值$F_{\frac{\alpha}{2},v_1,v_2} = F_{\frac{\alpha}{2},n_1-1,n_2-1} = F_{\frac{0.05}{2},35-1,32-1} = F_{0.025,34,31} = 2.0265$(使用 Excel 軟體 F.INV.RT 函數查詢獲得)。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$。

D.計算檢定統計值 F 值

$$\text{檢定統計值 } F = \frac{S_1^2}{S_2^2} = \frac{1.7424}{1.4400} = 1.21$$

E.檢定統計值 $F = 1.21$ ≤ 臨界值$F_{\frac{\alpha}{2},v_1,v_2} = 2.0265$，檢定統計值位於虛無假設接受區域內，接受虛無假設(null hypothesis) H_0: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$。因此，男女對於清蒸鱈魚滿意度的變異數相等。

練習 11.5 若欲知悉阿嵐餐廳販售清蒸鱈魚，男女性消費者對於菜色滿意度(非常滿意 5 分至非常不滿意 1 分共 5 個等級)的變異數是否有顯著性差異。今隨機抽取餐廳內有點用清蒸鱈魚的消費者，其中男性 20 名和女性 20 名，其滿意度評分分別如下表所示。(a)在信賴水準為 0.95 的情況下，男女性消費者對於清蒸鱈魚滿意度變異數是否相等？(b)在信賴水準為 0.90 的情況下，男女性消費者對於清蒸鱈魚滿意度變異數是否相等？(c)在信賴水準為 0.98 的情況下，男女性消費者對於清蒸鱈魚滿意度變異數是否相等？

男 1	男 2	男 3	男 4	男 5	男 6	男 7	男 8	男 9	男 10
5	5	4	2	4	5	1	5	5	5
男 11	男 12	男 13	男 14	男 15	男 16	男 17	男 18	男 19	男 20
4	4	5	2	5	3	3	3	3	3

女 1	女 2	女 3	女 4	女 5	女 6	女 7	女 8	女 9	女 10
5	2	3	2	4	5	1	5	3	5
女 11	女 12	女 13	女 14	女 15	女 16	女 17	女 18	女 19	女 20
5	2	3	2	4	5	1	5	5	5

題解：女性樣本數 $n_{女} = 20$，女性樣本標準(偏)差 $S_{女} = S_1 = 1.5009$，女性樣本變異數$S_1^2 = 2.2526$，男性樣本數 $n_{男} = 20$，男性樣本標準(偏)差 $S_{男} = S_2 = 1.2397$，男性樣本變異數$S_2^2 = 1.5368$。顯著水準 α =

0.05，$F_{\frac{\alpha}{2},v_1,v_2} = F_{0.025,19,19} = 2.5305$。顯著水準 $\alpha = 0.10$，$F_{\frac{\alpha}{2},v_1,v_2} = F_{0.05,19,19} = 2.1712$。顯著水準 $\alpha = 0.02$，$F_{\frac{\alpha}{2},v_1,v_2} = F_{0.01,19,19} = 3.0331$。希望檢定男女兩性的變異數是否相等，故本範例屬於雙尾檢定(a two-tailed test)。

A.設定顯著水準 $\alpha = 0.05$，臨界值$F_{\frac{\alpha}{2},v_1,v_2} = F_{\frac{\alpha}{2},n_1-1,n_2-1} = F_{\frac{0.05}{2},20-1,20-1} = F_{0.025,19,19} = 2.5305$(使用 Excel 軟體 F.INV.RT 函數查詢獲得)。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$。

D.計算檢定統計值─F 值

$$\text{檢定統計值 } F = \frac{S_1^2}{S_2^2} = \frac{2.2526}{1.5368} = 1.4658$$

E.檢定統計值 $F = 1.4658 \leq$ 臨界值$F_{\frac{\alpha}{2},n_1-1,n_2-1} = 2.5305$，檢定統計值位於虛無假設接受區域內，接受虛無假設(null hypothesis) H_0: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$。因此，男女性對於清蒸鱈魚滿意度的變異數相等。

練習 11.6 東石餐廳評估消費者的滿意度(0~10 分)時，欲瞭解男性和女性消費者在接受該餐廳的服務後，其滿意度是否有不同。隨機抽取消費者進行滿意度調查，其中，男性消費者 $n_1 = 35$ 名，其平均滿意度$\bar{x}_1 = 8.62$，標準(偏)差 $S_1 = 1.29$；另外，女性消費者 $n_2 = 32$ 名，其平均滿意度$\bar{x}_2 = 8.25$，標準(偏)差 $S_2 = 1.12$。(A)以 $\alpha = 0.05$ 進行統計檢定，試評估男性和女性消費者在接受該餐廳的服務後，其滿意度之平均值是否有不同；(B)以 $\alpha = 0.05$ 進行統計檢定，試評估男性和女性消費者在接受該餐廳的服務後，其滿意度之變異數是否有不同。

題解：男性樣本數 $n_{男} = 35$，男性樣本平均值$\bar{x}_1 = 8.62$，男性樣本標準(偏)差 $S_{男} = S_1 = 1.29$，男性樣本變異數$S_1^2 = 1.6641$，女性樣本數 $n_{女} = 32$，女性樣本平均值$\bar{x}_2 = 8.25$，女性樣本標準(偏)差 $S_{女} = S_2 = 1.12$，女性樣本變異數$S_2^2 = 1.2544$。

(A)希望比較男性和女性消費者接受東石餐廳服務後，其滿意度之平均值是否有不同，故本範例屬於雙尾檢定(a two-tailed test)。

A.設定顯著水準 $\alpha = 0.05$，左側臨界值(Critical value)：$t_L^* = -t_{\frac{\alpha}{2},n_1+n_2-2} = -t_{\frac{0.05}{2},35+32-2} = -t_{0.025,65} = -1.9971$；右側臨界值：$t_H^* = t_{\frac{\alpha}{2},n_1+n_2-2} = t_{\frac{0.05}{2},35+32-2} = t_{0.025,65} = 1.9971$(使用 Excel 軟體中 T.INV 函數查詢獲得)。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_1 - \mu_2 = 0$。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_1 - \mu_2 \neq 0$。

D.計算檢定統計值：t 值，若虛無假設成立 $\mu_1 - \mu_2 = 0$。

男性和女性消費者滿意度分布**變異數不相等**：檢定統計值 $t = \frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}} = \frac{(8.62-8.25)-(0)}{\sqrt{\frac{1.29^2}{35}+\frac{1.12^2}{32}}} = \frac{0.37}{0.2945} = 1.2563$

男性和女性消費者滿意度分布**變異數相等**：檢定統計值 $t = \frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\left(\frac{(n_1-1)\times S_1^2+(n_2-1)\times S_2^2}{n_1+n_2-2}\right)\times\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}} = \frac{(8.62-8.25)-(0)}{\sqrt{\left(\frac{(35-1)\times 1.29^2+(32-1)\times 1.12^2}{35+32-2}\right)\times\left(\frac{1}{35}+\frac{1}{32}\right)}} = \frac{0.37}{0.2964} = 1.2483$

E.左側臨界值$-t_{\frac{\alpha}{2},n_1+n_2-2} = -1.9971 <$ 檢定統計值 $t = 1.2563 <$ 右側臨界值$t_{\frac{\alpha}{2},n_1+n_2-2} = 1.9971$，檢定統計值位於虛無假設接受區域內，接受虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_1 - \mu_2 = 0$。因此，男性和女性消費者接受東石餐廳服務後，其滿意度之平均值沒有達到顯著差異水準。

A.設定顯著水準 $\alpha = 0.05$，左側臨界值(Critical value)：$z_L^* = -z_{\frac{\alpha}{2}} = -z_{0.025} = -1.9600$；右側臨界值：$z_H^* = z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0.025} = 1.9600$(可使用 Excel 軟體中 NORM.S.INV 函數查詢獲得)。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_1 - \mu_2 = 0$。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_1 - \mu_2 \neq 0$。

D.計算檢定統計值：標準化 z 值，若虛無假設成立 $\mu_1 - \mu_2 = 0$。

檢定統計值 $z = \frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}} = \frac{(8.62-8.25)-(0)}{\sqrt{\frac{1.29^2}{35}+\frac{1.12^2}{32}}} = \frac{0.37}{0.2945} = 1.2563$

E.左側臨界值$-z_{\frac{\alpha}{2}} = -1.9600$ < 檢定統計值 $z = 1.2563$ < 右側臨界值$z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.9600$，檢定統計值位於虛無假設接受區域內，接受虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_1 - \mu_2 = 0$。因此，男性和女性消費者接受東石餐廳服務後，其滿意度之平均值沒有達到顯著差異水準。

(B)檢定滿意度之變異數是否有差異：希望檢定男女兩性的變異數是否相等，故本範例屬於雙尾檢定(a two-tailed test)。

A.設定顯著水準 $\alpha = 0.05$，臨界值$F_{\frac{\alpha}{2},v_1,v_2} = F_{\frac{\alpha}{2},n_1-1,n_2-1} = F_{\frac{0.05}{2},35-1,32-1} = F_{0.025,34,31} = 2.0265$(使用 Excel 軟體 F.INV.RT 函數查詢獲得)。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$。

D.計算檢定統計值 F 值

檢定統計值 $F = \frac{S_1^2}{S_2^2} = \frac{1.6641}{1.2544} = 1.3266$

E.檢定統計值 $F = 1.3266$ ≤ 臨界值$F_{\frac{\alpha}{2},n_1-1,n_2-1} = 2.0265$，檢定統計值位於虛無假設接受區域內，接受虛無假設(null hypothesis) H_0: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$。因此，男女性消費者接受東石餐廳服務後，其滿意度之變異數相等，沒有達到顯著差異水準。

練習 11.7　統計 T 分配自由度為 10 與 F 分配的關係：(A)t(10) = f(10,1)；(B)t(10) = f(1,10)；(C)$t^2(10)$ = f(10,1)；(D)$t^2(10)$ = f(1,10)。(99 年初等考試統計學大意)D

討論議題

1.師生非同步議題討論：單一母體變異數統計推論

第一回合請於 D+3 日中午 12 點以前從「議題討論」區【張貼】標題：「應用情境」，本文：請針對本章學習的【單一母體變異數的統計推論】單元課程內容，請具體陳述現在或未來最想運用到的情境(10 個字以上)，以假設檢定的方式詮釋。

待有 30 篇第一回合【張貼】回應或第一回合【張貼】時間結束後，請詳細檢視其他同學的回應內容。第二回合【張貼】標題：「最佳詮釋」，本文：選擇一位詮釋最佳者，並說明理由(10 字以上)。第二回合【張貼】截止時間就是本議題在平台上的關閉時間。

2.師生非同步議題討論：兩個母體變異數統計推論

第一回合請於 D+3 日中午 12 點以前從「議題討論」區【張貼】標題：「應用情境」，本文：請針對本章學習的【兩個母體變異數的統計推論】單元課程內容，請具體陳述現在或未來最想運用到的情境(10 個字以上)，以假設檢定的方式詮釋。

待有 30 篇第一回合【張貼】回應或第一回合【張貼】時間結束後，請詳細檢視其他同學的回應內容。第二回合【張貼】標題：「最佳詮釋」，本文：選擇一位詮釋最佳者，並說明理由(10 字以上)。第二回合【張貼】截止時間就是本議題在平台上的關閉時間。

重點整理

Excel 函數彙整

Excel 函數	統計功能	輸入資料	輸出資料
F.INV	F 分布	**左尾**累積機率、分子自由度(deg_freedom1)、分母自由度(deg_freedom2)	F 值
F.INV.RT	F 分布	**右尾**累積機率、分子自由度(deg_freedom1)、分母自由度(deg_freedom2)	F 值
FINV	F 分布	**右尾**累積機率、分子自由度(deg_freedom1)、分母自由度(deg_freedom2)	F 值

設定顯著水準 α，故信賴水準(信賴係數)$1-\alpha$，其卡方值的信賴區間為

$$\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}} \le \chi^2 \le \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}$$

$\frac{(n-1)\times S^2}{\sigma^2}$之抽樣分布屬於自由度 $v = n-1$ 的卡方分布(chi-square distribution)

$$\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}} \le \frac{(n-1)\times S^2}{\sigma^2} \le \chi^2_{\frac{\alpha}{2}} \qquad \frac{1}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}} \ge \frac{\sigma^2}{(n-1)\times S^2} \ge \frac{1}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}}$$

$$\frac{(n-1)\times S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}} \ge \sigma^2 \ge \frac{(n-1)\times S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}} \qquad \frac{(n-1)\times S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}} \le \sigma^2 \le \frac{(n-1)\times S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}}$$

從屬於常態分布的母體中，隨機抽取 n 個樣本，將樣本檢定用統計值—卡方值 χ^2 與自由度 $v = n-1$ 的卡方值χ^2_{n-1}進行比較。σ^2_α為假設檢定的預設值或假設值。利用卡方分布進行假設檢定。

$$\text{檢定統計值 } \chi^2 = \frac{(n-1)\times S^2}{\sigma_0^2}$$

兩個母體皆屬於常態分布(若屬於非常態分布時，必須使用無母數方法推論)，若要驗證變異數是否相等$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$時(虛無假設 H_0: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$)，利用兩個樣本變異數的比率$\frac{S_1^2}{S_2^2}$之抽樣分布，屬於分子自由度 $v_1 = n_1 - 1$，分母自由度 $v_2 = n_2 - 1$ 的 F 分布(F-distribution, Fisher distribution)。$F = \frac{S_1^2}{S_2^2}$，F 值屬於無因次單位。F 分布屬於不對稱分布(向右偏斜)，F 值不可能為負值(–)。

F_{α,v_1,v_2} (F_{α,v_1,v_2}可簡化成 F_α)或$F_{v_1,v_2,\alpha}$符號代表該特定 F 值以上(右側或右尾)機率(面積)等於 α。$P(F > F_\alpha) = \alpha$。故，右尾 F 值表中，提供右尾機率為 α 的 F 值，若需要左尾機率 $1-\alpha$ 的 F 值，可利用下列倒數方式獲得。

$$F_{\alpha,v_1,v_2} = \frac{1}{F_{1-\alpha,v_2,v_1}}$$

在統計推論的過程中，將兩個母體中樣本變異數 S^2 較大者視為母體 1；樣本變異數 S^2 較小者視為母體 2。因此，F 數值皆會大於 1($F > 1$)。

關鍵詞彙解釋

卡方分布(chi-square distribution)

卡方分布(χ^2 分布)是統計學中常用的一種機率分布。k 個獨立的標準常態分布變數的平方和即服從自由度為 k 的卡方分布。

F 分布(*F*-distribution, Fisher distribution)

將兩個屬於自卡方分布且互相獨立的隨機變數，各自除以其自由度後再相除，所得的新變數 $F_{n,m}$ 就符合分子和分母自由度分別為 $n-1$ 和 $m-1$ 的 F 分布：$F_{n,m}=\frac{\frac{\chi_n^2}{n}}{\frac{\chi_m^2}{m}}$，$0\le F_{n,m}<\infty$。

區間估計(interval estimation)

對特定變數的未知母體參數估計一個上下限的數值區間，並具體指出該數值區間包含母體參數的可靠度。

配對樣本(matched samples)

兩組樣本事先依據某些特徵或屬性予以配對(組合)，使同一對特徵相同的兩個樣本(組合)，一個分到一組，一個分到另一組，此兩個樣本(組合)即稱為配對樣本。

假設檢定(hypothesis testing)

與估計一起構成推論統計中的核心。針對欲估計未知參數，期望根據抽樣調查結果對未知的真正參數數值做出適當的推論。

統計上對參數數值的一種暫時性假設，就是對一個或多個參數的論述。欲檢驗其正確性的為虛無假設(null hypothesis)，虛無假設一般由研究者自行決定，反應研究者對未知參數的看法。相對於虛無假設陳述方式的另一種有關參數之論述是對立假設(alternative hypothesis)，其反應了執行檢定的研究者對參數可能數值的另一種(對立的)陳述。

期望值(Expected value)

在統計學中特定一個離散型隨機變數的期望值，是在隨機試驗中每次可能結果機率乘以其結果的總和。

針對特定一個連續型隨機變數 X，其機率密度函數 $f(x)$，隨機變數 X 的期望值為 $E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx$。