十三、變異數分析和試驗設計

Chapter 13 Analysis of variance and experimental design

目錄

學習目標

知識(認知)

1.可以清楚描述在變異數分析的意涵。

2.可以清楚描述在試驗設計的意涵。

3.分辨事前比較與事後比較之間的差異性。

4.可以說明各種情境下，如何選擇事後比較的方法。

技能

1.能夠計算各種情境下的檢定統計值–*F* 值。

2.能夠利用事後比較法，辨識母體平均值配對之間的差異性。

3.綜合所學，能夠於實務領域中，依據特定情境的需求進行變異數分析。

態度(情意)

1.意識到在日常生活或未來工作環境中，變異數分析的重要性。

2.在各種情境下，依據變異數分析獲得的推論，接受統計推論所傳達的意涵。

變異數分析或變方分析(Analysis of variance)簡稱 ANOVA。利用變異數分析檢定三個(含)以上的母體平均值是否相等。利用變異數分析解析實驗型調查的數值資料，了解不同母體平均值是否有顯著性的差異存在。

在前面第 10 章已經介紹，兩個母體平均值之差與比例之差估計和假設檢定，第 11 章也介紹兩個母體變異數的統計推論。當在檢定三個(含)以上母體平均值是否相等時，若使用前述的方法，將三個(含)以上母體平均值的相等性檢定，拆解成兩個母體之間的方式，會使得需檢定的母體配對變很多。若檢定的次數愈多，發生第一種錯誤(type I error)機率愈高。因此，檢定三個(含)以上的母體平均值之相等性，即必須使用變異數分析(analysis of variance, ANOVA)。

若有下列三種欲實驗條件的狀況：

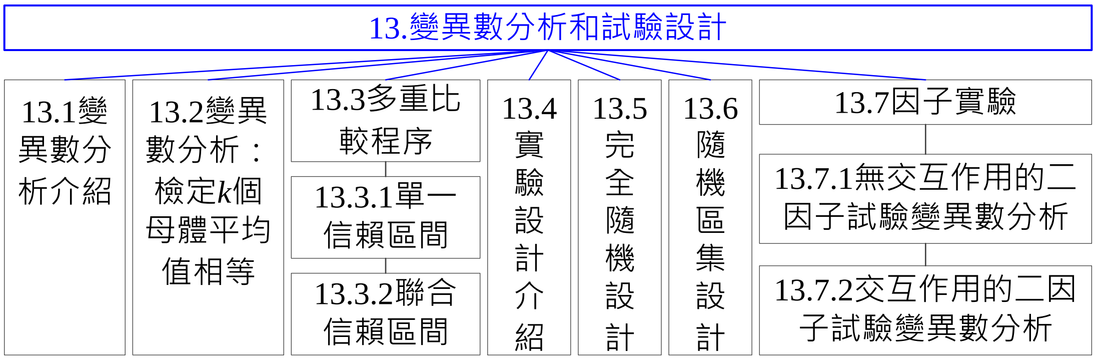
a.欲探索**三種不同來源咖啡豆**(操作變數、實驗變數)經義式濃縮咖啡機(Espresso Machine)製作的**咖啡口感**(目標變數或依變數)是否有差異。

b.欲探索**三種不同來源咖啡豆**(操作變數 1 或實驗變數 1)分別經**義式濃縮咖啡機(Espresso Machine)和虹吸式(蒸溜法)**(操作變數 2 或實驗變數 2)製作的**咖啡口感**(目標變數、依變數)是否有差異。

c.欲探索**三種不同來源咖啡豆**(操作變數 1 或實驗變數 1)分別經利用**四種烘焙條件**(操作變數 2 或實驗變數 2)，後利用義式濃縮咖啡機製作的**咖啡口感**(目標變數或依變數)是否有差異。

可以依據操作變數或實驗變數的數量區分，a 只有「**三種不同來源咖啡豆**」一個操作變數稱為**單因子變異數分析**或**一因子變異數分析**(one factor analysis of variance)；b 和 c 分別有兩個操作變數稱為**雙因子變異數分析**或**二因子變異數分析**(two factor analysis of variance)。

試驗設計(Design of experiments)，又稱為實驗設計，屬於科學探究經常使用的一種規劃設計，期望利用統計學上的原理(隨機性、重複性和區集性)，使實驗變數能夠真實反應(充分發揮)其對研究結果的影響，盡可能排除實驗變數以外的影響和干擾，以單純化觀察和測量實驗變數對實驗結果的影響程度，以提高實驗效果的精準度。廣泛用於自然科學及社會科學各學科的實驗設計中。



章節結構圖

13.1 變異數分析介紹

變異數分析(ANOVA)檢定三個(含)以上的母體平均值是否相等，或驗證三個水準(含)以上的自變數、獨立變數(independent variable)、實驗變數或因子(factor)對依變數(dependent variable)是否有影響。

假設檢定：

虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \ldots = \mu_k$ 所有母體平均值皆相等。

對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_i \neq \mu_j$ $(i \neq j)$所有母體平均值不全部相等。

變異數分析可視為驗證樣本平均值之差是否達到顯著性水準的一種程序。

進行變異數分析的假設(先決條件、預設條件)

a.所有母體的觀測變數分布情況皆屬於常態分布。

b.所有母體的觀測變數之變異數 σ^2 皆相等、同質性或齊一性(homogeneity)。

c.隨機抽取自各母體的樣本皆是相互獨立。

d.自變數或獨立變數對依變數的影響是固定性或一致性。

13.2 變異數分析：檢定 *k* 個母體平均值相等

變異數分析用於檢定 k 個母體特定研究變數之平均值是否相等時，其假設檢定的通式：

虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \ldots = \mu_k$ 所有母體平均值皆相等。

對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_i \neq \mu_j$ $(i \neq j)$所有母體平均值不全部相等。

其中 μ_j：第 j 個母體之平均值

k：欲進行母體平均值檢定的母體數量

單因子變異數分析樣本資料表

樣本 \ 母體	1	2	j	k	平均值
1	x_{11}	x_{12}	x_{1j}	x_{1k}	
2	x_{21}	x_{22}	x_{2j}	x_{2k}	
3	x_{31}	x_{32}	x_{3j}	x_{3k}	
4	x_{41}	x_{42}	x_{4j}	x_{4k}	
i	x_{i1}	x_{i2}	x_{ij}	x_{ik}	
n	x_{n1}	x_{n2}	x_{nj}	x_{nk}	
樣本數量	n_1	n_2	n_j	n_k	
樣本平均值	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$	$\bar{x}_j$	$\bar{x}_k$	$\bar{\bar{x}}$

樣本＼母體	1	2	j	k	平均值
樣本變異數	S_1^2	S_2^2	S_j^2	S_k^2	
樣本標準(偏)差	S_1	S_2	S_j	S_k	

若分別自 k 個母體隨機抽選 n_j 個觀測值為樣本。則：

n_j：來自第 j 個母體的樣本數量、觀測值數量

x_{ij}：來自第 j 個母體的第 i 個樣本之觀測值

$\bar{x}_j = \frac{\sum_{i=1}^{n_j} x_{ij}}{n_j}$，來自第 j 個母體 n_j 個樣本的平均值

$S_j^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n_j}(x_{ij}-\bar{x}_j)^2}{n_j-1}$，來自第 j 個母體 n_j 個樣本的變異數

$S_j = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n_j}(x_{ij}-\bar{x}_j)^2}{n_j-1}}$，來自第 j 個母體 n_j 個樣本的標準(偏)差

$n_t = n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_k = \sum_{j=1}^{k} n_j$，來自全部 k 個母體的樣本總數量或觀測值總數量

$\bar{\bar{x}} = \bar{x}_{..} = \frac{\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j} x_{ij}}{n_t} = \frac{\sum_{j=1}^{k}(n_j \times \bar{x}_j)}{n_t}$，來自全部 k 個母體 n_t 個樣本的總平均值

若分別來自 k 個母體的樣本數量相等，$n_1 = n_2 = n_3 = \ldots = n_k = n$，則 $n_t = k \times n$

$$\bar{\bar{x}} = \frac{\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j} x_{ij}}{n_t} = \frac{\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j} x_{ij}}{k \times n} = \frac{\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j}\frac{x_{ij}}{n}}{\frac{k \times n}{n}} = \frac{\sum_{j=1}^{k}\bar{x}_j}{k}$$

母體變異數 σ² 之樣本間估計值(Between-treatments estimate of population variance)

母體變異數 σ² 的樣本間估計值稱為處理間均方(mean square due to treatment, MSTR)、組間變異數S_c^2、樣本間均方(mean square between, MSB)、組間變異的均方(between-groups mean squares, MSB)、因子變異數(mean square due to factor, MSF)或因子平均變動(Mean Square for Factors, MSF)

$$\text{MSTR} = \frac{\sum_{j=1}^{k} n_j \times (\bar{x}_j - \bar{\bar{x}})^2}{k-1} = \frac{\text{SSTR}}{k-1}$$

其中$\sum_{j=1}^{k} n_j \times (\bar{x}_j - \bar{\bar{x}})^2 = \sum_{j=1}^{k} n_j \times \bar{x}_j^2 - n_t \times \bar{\bar{x}}^2 = \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j}(\bar{x}_j - \bar{\bar{x}})^2$：處理間平方和(sum of squares due to treatment, SSTR)、樣本間平方和(sum of squares between subpopulation, SSB)、因子差異平方和、因子變異(sum of squares due to factor, SSF)、處理間變異(sum of square between treatments, SSB)、組間平方和(sum of square between, SSB)或實驗因子變異。將來自各母體的樣本觀測值，利用來自該母體的樣本平均值取代後，合併成一組資料，再計算其平方和，即為原始資料的組間平方和或組間變異。

$k-1$：SSTR 的自由度

若虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \ldots = \mu_k$ 成立時，MSTR 提供母體變異數 σ² 不偏的估計值。當對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_i \neq \mu_j$ $(i \neq j)$成立時，k 個母體平均值不相等時，MSTR 不是母體變異數 σ² 不偏的估計值，此時，MSTR 的估計會超過母體變異數 σ²。

母體變異數 σ² 之樣本內估計值(Within-treatments estimate of population variance)

母體變異數 σ² 的樣本內估計值稱為誤差均方、均方誤(mean square due to error, MSE)、樣本內均方(mean square within samples or mean square within, MSW)、組內變異數S_e^2、組內變異的均方(within-groups mean squares, MSW)、隨機變異數(mean square due to random error, MSE)或組內不偏變異數(mean square)

$$\text{MSE} = \frac{\sum_{j=1}^{k}(n_j-1)\times S_j^2}{n_t-k} = \frac{\text{SSE}}{n_t-k}$$

其中$\sum_{j=1}^{k}\left(n_j-1\right)\times S_j^2 = \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j}\left(x_{ij}-\bar{x}_j\right)^2$：誤差平方和(sum of squares due to error, **SSE**)、隨機變異、樣本內平方和(sum of squares within samples, **SSW**)、處理內平方和、處理內變異(sum of square within treatment, SSW)、組內平方和(sum of square within, **SSW**)、誤差平方和(sum of square for error, **SSE**)、誤差變異或誤差項變動(sum of squares for error, SSE)。利用來自於 k 個母體的樣本資料，計算來自各母體的樣本平方和，再將其樣本平方和加總，所獲得的平方和稱為來自於各母體樣本資料的組內平分和或組內變異。

n_t-k：SSE 的自由度

MSE 是依據 k 個處理(k 組樣本)之內的變異性計算獲得，不受虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 =\ldots= \mu_k$成立與否的影響。因此 MSE 提供母體變異數 σ^2 不偏的估計值。

比較變異數的估算值：*F* 檢定(Comparing the variance estimate: The *F* test)

若虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \ldots = \mu_k$成立時，MSTR 和 MSE 是兩個相互獨立的母體變異數 σ^2 的不偏估計值。在母體特定研究變數屬於常態分布時，兩個相互獨立的母體變異數估計值屬於 F 分布。故，虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \ldots = \mu_k$成立與變異數分析的假設亦成立時，$\frac{\text{MSTR}}{\text{MSE}}$是屬於分子自由度 $k-1$ 與分母自由度 n_t-k 的 F 分布。

若虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \ldots = \mu_k$不成立時，MSTR 的數值會高估母體的變異數 σ^2，因此，檢定統計值 $F = \frac{\text{MSTR}}{\text{MSE}}$的比值會增加。當檢定統計值 $F = \frac{\text{MSTR}}{\text{MSE}}$的比值高於某一特定標準$F_{\alpha,k-1,n_t-k}$(顯著水準 α)，即可判定**拒絕**虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \ldots = \mu_k$，而**接受**對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_i \neq \mu_j$所有母體平均值不全部相等。

$$\text{檢定統計值 } F = \frac{\text{MSTR}}{\text{MSE}}$$

若檢定統計值 $F \le$ 臨界值$F_{\alpha,k-1,n_t-k}$，接受虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \ldots = \mu_k$。

若檢定統計值 $F >$ 臨界值$F_{\alpha,k-1,n_t-k}$，拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \ldots = \mu_k$，接受對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_i \neq \mu_j$所有母體平均值不全部相等。

變異數分析表(Analysis of variance table, ANOVA Table)

變異數分析的計算程序可以透過變異數分析表(ANOVA table)清楚的呈現。

變異數分析表(ANOVA table)

變異來源(Source of variation)	平方和(Sum of squares)	自由度(Degrees of freedom)	均方(Mean square)	F 值
樣本間變異或組間變異(Treatments)	SSTR	$k-1$	$\text{MSTR} = \frac{\text{SSTR}}{k-1}$	$F = \frac{\text{MSTR}}{\text{MSE}}$
樣本內變異、組內變異或誤差(Error)	SSE	n_t-k	$\text{MSE} = \frac{\text{SSE}}{n_t-k}$	
合計(Total)	SST	n_t-1		

不同變異來源的平方和之加總，稱為總平方和(total sum of squares; sum of square for total; sum of square for total variation, SST or SS_t)、總離均差平方和或總變異。總平方和(SST)的自由度(n_t-1)為樣本間變異的自由度和樣本內變異的自由度之和，$n_t-1 = k-1+n_t-k$。

總平方和(SST)除以其自由度(n_t-1)獲得**總樣本變異數**或**全部樣本變異數**(overall sample variance)。可以視為暫時去除各種處理(treatments)的分野(區分)，將所有觀測值皆視為同一組樣本。

$$\text{SST} = \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j}\left(x_{ij}-\bar{\bar{x}}\right)^2 = \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j}x_{ij} - n_t\times\bar{\bar{x}}^2 = \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j}\left(\bar{x}_j-\bar{\bar{x}}\right)^2 + \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j}\left(x_{ij}-\bar{x}_j\right)^2$$

SST = SSTR + SSE

因此，在進行變異數分析時，可以將**全部樣本變異數**分為樣本間變異(treatments)和樣本內變異(error)兩項；同理，亦可將其**總平方和(SST)**拆成樣本間變異的平方和(SSTR)和樣本內變異的平方和(SSE)。

範例 13.1　九如速食連鎖餐廳有 A1、A2 和 A3 三家加盟店，欲瞭解三家加盟店服務品質是否相同，分別抽取 6 位消費者進行服務品質問卷評量，評量的結果如下表所示：試檢定在顯著水準 α = 0.05 下，三家加盟店的服務品質是否相同？

樣本	加盟店 A1	加盟店 A2	加盟店 A3
1	80	92	95
2	85	94	98
3	90	93	92
4	85	90	78
5	95	91	98
6	90	98	85
樣本平均值	87.5	93.0	91.0
樣本變異數	27.5000	8.0000	64.0000
樣本標準(偏)差	5.2440	2.8284	8.0000

題解：設 μ_1、μ_2 和 μ_3 依序分別為加盟店 A1、A2 和 A3 服務品質的母體平均值。$\bar{x}_1$ = 87.5、$\bar{x}_2$ = 93.0 和 $\bar{x}_3$ = 91.0 依序分別為加盟店 A1、A2 和 A3 服務品質的樣本平均值。k = 3 欲進行母體平均值檢定的母體數量。加盟店 A1 樣本數量 $n_1 = 6$，加盟店 A2 樣本數量 $n_2 = 6$，加盟店 A3 樣本數量 $n_3 = 6$，樣本總數 $n_t = n_1 + n_2 + n_3 = 18$。若分別來自 k 個母體的樣本數量相等，$n_1 = n_2 = n_3 = \ldots = n_k = n$，則 $n_t = k \times n$。全部樣本平均值 $\bar{\bar{x}} = \frac{\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j} x_{ij}}{n_t} = \frac{\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j} x_{ij}}{k\times n} = \frac{\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j} \frac{x_{ij}}{n}}{\frac{k\times n}{n}} = \frac{\sum_{j=1}^{k}\bar{x}_j}{k} = \frac{87.5+93.0+91.0}{3} = 90.5$。$S_1^2 = 27.50$、$S_2^2 = 8.00$ 和 $S_3^2 = 64.00$ 依序分別為加盟店 A1、A2 和 A3 服務品質的樣本變異數。

A.設定顯著水準 α = 0.05，臨界值 $F_{\alpha,k-1,n_t-k} = F_{0.05,3-1,18-3} = F_{0.05,2,15} = 3.6823$(使用 Excel 軟體 F.INV.RT 函數查詢獲得)。

B.虛無假設(null hypothesis) $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$ 加盟店 3 家個別服務品質的母體平均值皆相等。

C.對立假設(alternative hypothesis) $H_1: \mu_i \neq \mu_j$ 加盟店 3 家個別服務品質的母體平均值不全部相等。

D.計算檢定統計值：F 值

$$\text{SSTR} = \sum_{j=1}^{k} n_j \times \left(\bar{x}_j - \bar{\bar{x}}\right)^2 = 6 \times (87.5 - 90.5)^2 + 6 \times (93.0 - 90.5)^2 + 6 \times (91.0 - 90.5)^2 = 54.0 + 37.5 + 1.5 = 93$$

$$\text{MSTR} = \frac{\text{SSTR}}{k-1} = \frac{93}{3-1} = 46.5$$

$$\text{SSE} = \sum_{j=1}^{k}\left(n_j - 1\right) \times S_j^2 = (6-1) \times 27.50 + (6-1) \times 8.00 + (6-1) \times 64.00 = 137.5 + 40.0 + 320.0 = 497.5$$

$$\text{MSE} = \frac{\sum_{j=1}^{k}(n_j-1)\times S_j^2}{n_t-k} = \frac{\text{SSE}}{n_t-k} = \frac{497.5}{18-3} = 33.1667$$

$$\text{檢定統計值 } F = \frac{\text{MSTR}}{\text{MSE}} = \frac{46.5}{33.1667} = 1.4020$$

E.檢定統計值 $F = 1.4020$ < 臨界值 $F_{\alpha,k-1,n_t-k} = 3.6823$，接受虛無假設(null hypothesis) $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$ 加盟店 3 家個別服務品質的母體平均值皆相等。因此，該速食連鎖餐廳 A1、A2 和 A3 三家加盟店的服務品質皆相同，彼此之間沒有達到顯著性的差異水準。

變異數分析表(ANOVA table)

變異來源(Source of variation)	平方和(Sum of squares)	自由度(Degrees of freedom)	均方(Mean square)	F 值
樣本間變異或組間變異(Treatments)	93	2	46.5	1.4020
樣本內變異、組內變異或誤差(Error)	497.5	15	33.1667	

變異來源(Source of variation)	平方和(Sum of squares)	自由度(Degrees of freedom)	均方(Mean square)	F 值
合計(Total)	590.5	17		

範例 13.2 九如速食連鎖餐廳有 A1、A2 和 A3 三家加盟店，欲瞭解三家加盟店服務品質是否相同，分別抽取 5、6 和 7 位消費者進行服務品質問卷評量，評量的結果如下表所示：試檢定在顯著水準 $\alpha = 0.05$ 下，三家加盟店的服務品質是否相同？

樣本	加盟店 A1	加盟店 A2	加盟店 A3
1	80	92	95
2	85	94	98
3	90	93	92
4	85	90	88
5	88	91	98
6		98	90
7			95
合計	428	558	656
樣本平均值	85.6	93.0	93.7
樣本變異數	14.30	8.00	14.90
樣本標準(偏)差	3.7815	2.8284	3.8607

題解：設 μ_1、μ_2 和 μ_3 依序分別為加盟店 A1、A2 和 A3 服務品質的母體平均值。$\bar{x}_1 = 85.6$、$\bar{x}_2 = 93.0$ 和 $\bar{x}_3 = 93.7$ 依序分別為加盟店 A1、A2 和 A3 服務品質的樣本平均值。$k = 3$ 欲進行母體平均值檢定的母體數量。加盟店 A1 樣本數量 $n_1 = 5$，加盟店 A2 樣本數量 $n_2 = 6$，加盟店 A3 樣本數量 $n_3 = 7$，樣本總數 $n_t = n_1 + n_2 + n_3 = 18$。全部樣本平均值 $\bar{\bar{x}} = \frac{\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j} x_{ij}}{n_t} = \frac{\sum_{j=1}^{k}(n_j \times \bar{x}_j)}{n_t} = \frac{428+558+656}{18} = 91.22$。$S_1^2 = 14.30$、$S_2^2 = 8.00$ 和 $S_3^2 = 14.90$ 依序分別為加盟店 A1、A2 和 A3 服務品質的樣本變異數。

A.設定顯著水準 $\alpha = 0.05$，臨界值 $F_{\alpha,k-1,n_t-k} = F_{0.05,3-1,18-3} = F_{0.05,2,15} = 3.6823$(使用 Excel 軟體 F.INV.RT 函數查詢獲得)。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$ 加盟店 3 家個別服務品質的母體平均值皆相等。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_i \neq \mu_j$ 加盟店 3 家個別服務品質的母體平均值不全部相等。

D.計算檢定統計值：F 值

$\text{SSTR} = \sum_{j=1}^{k} n_j \times \left(\bar{x}_j - \bar{\bar{x}}\right)^2 = 5 \times (85.6 - 91.22)^2 + 6 \times (93.0 - 91.22)^2 + 7 \times (93.7 - 91.22)^2 = 158.05 + 18.96 + 43.47 = 220.48$

$\text{MSTR} = \frac{\text{SSTR}}{k-1} = \frac{220.48}{3-1} = 110.24$

$\text{SSE} = \sum_{j=1}^{k}\left(n_j - 1\right) \times S_j^2 = (5 - 1) \times 14.30 + (6 - 1) \times 8.00 + (7 - 1) \times 14.90 = 57.2 + 40.0 + 89.4 = 186.6$

$\text{MSE} = \frac{\sum_{j=1}^{k}(n_j-1)\times S_j^2}{n_t-k} = \frac{\text{SSE}}{n_t-k} = \frac{186.6}{18-3} = 12.4419$

$$\text{檢定統計值 } F = \frac{\text{MSTR}}{\text{MSE}} = \frac{110.24}{12.4419} = 8.8605$$

E.檢定統計值 $F = 8.8605 >$ 臨界值 $F_{\alpha,k-1,n_t-k} = 3.6823$，拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$ 加盟店 3 家個別服務品質的母體平均值皆相等，接受對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_i \neq \mu_j$ 加盟店 3 家個別服務品質的母體平均值不全部相等。因此，該速食連鎖餐廳 A1、A2 和 A3 三家加盟店的服務品質有不相同者，彼此之間有顯著性的差異。

變異數分析表(ANOVA table)

變異來源(Source of variation)	平方和(Sum of squares)	自由度(Degrees of freedom)	均方(Mean square)	F 值
樣本間變異或組間變異(Treatments)	220.48	2	110.24	8.8605
樣本內變異、組內變異或誤差(Error)	186.6	15	12.4419	
合計(Total)	407.08	17		

練習 13.1 假設對統計學課程的喜好程度，可以區分為非常喜歡、喜歡、普通、不喜歡與非常不喜歡 5 種(組)程度，各種人數與統計學小考分數平均值與變異數如下表所示：

	非常喜歡	喜歡	普通	不喜歡	非常不喜歡
人數	10	10	5	15	10
分數平均值	65	63	60	50	40
分數變異數	20	30	25	30	25

請製作變異數分析表(ANOVA table)。

變異來源(Source of variation)	平方和(Sum of squares)	自由度(Degrees of freedom)	均方(Mean square)	F 值

練習 13.2 十全連鎖速食餐廳，人事單位規劃三種點餐櫃臺教育訓練課程，分別對旗下員工進行教育訓練，管理單位欲瞭解三種點餐櫃臺教育訓練課程下，所訓練出來的員工其服務每位消費者時間是否有差異，故從三種教育訓練課程中，分別隨機抽出 5 位員工，並記錄其平均服務每位消費者的時間(單位：秒)如下表所示：

甲教育訓練課程	56	65	58	65	53
乙教育訓練課程	45	51	43	45	49
丙教育訓練課程	58	72	68	71	66

(A)若欲使用變異數分析解析上述問題時，必須有哪些先決條件？

(B)請製作變異數分析表(ANOVA table)。

(C)請檢定三種教育訓練課程對服務時間的影響是否達到顯著性差異水準($\alpha = 0.05$)？

題解：

(A)必須假設餐廳員工服務消費者的時間分布屬於常態分布，且時間分布的變異數皆相等，且三種教育訓練課程彼此之間屬於獨立。故，常態、同質與獨立三種假設為前提條件。

(B)製作變異數分析表(ANOVA table)

甲教育訓練課程後服務消費者時間：56，65，58，65，53，平均值 = 59.4秒，變異數 = 29.30秒^2

乙教育訓練課程後服務消費者時間：45，51，43，45，49，平均值 = 46.6秒，變異數 = 10.80秒^2

丙教育訓練課程後服務消費者時間：58，72，68，71，66，平均值 = 67.0秒，變異數 = 31.00秒^2

全部 15 位消費者平均服務時間$\bar{\bar{x}} = \frac{\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j} x_{ij}}{n_t} = \frac{56+65+58+65+53+45+51+43+45+49+58+72+68+71+66}{5+5+5} = \frac{2730}{15} =$ 57.67 秒

SSTR = $\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j}\left(\bar{x}_j - \bar{\bar{x}}\right)^2 = \sum_{j=1}^{3} n_j \times \left(\bar{x}_j - \bar{\bar{x}}\right)^2$ = 5 × (59.4 – 57.67)^2 + 5 × (46.6 – 57.67)^2 + 5 × (67.0 – 57.67)^2 = 1062.933

SSE = $\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j}\left(x_{ij} - \bar{x}_j\right)^2 = \sum_{j=1}^{k}\left(n_j - 1\right) \times S_j^2$ = (5 – 1) × 29.30 + (5 – 1) × 10.80 + (5 – 1) × 31.00 = 284.4

SST = SSTR + SSE = 1062.933 + 284.4 = 1347.333

變異數分析表(ANOVA table)

變異來源(Source of variation)	平方和(Sum of squares)	自由度(Degrees of freedom)	均方(Mean square)	*F* 值
樣本間變異或組間變異(Treatments)	1062.933	2	531.47	22.425
樣本內變異、組內變異或誤差(Error)	284.4	12	23.70	
合計(Total)	1347.333	14		

(C)

A.設定顯著水準 α = 0.05，臨界值$F_{\alpha,k-1,n_t-k} = F_{0.05,3-1,15-3} = F_{0.05,2,12}$ = 3.8853(使用 Excel 軟體 F.INV.RT 函數查詢獲得)。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_{甲} = \mu_{乙} = \mu_{丙}$三種教育訓練課程服務每位消費者時間的母體平均值皆相等。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_i \neq \mu_j$，其中 i or j = 甲、乙、丙。三種教育訓練課程至少有一個配對服務每位消費者時間的母體平均值不相等。

D.計算檢定統計值：*F* 值

$$檢定統計值\ F = \frac{\text{MSTR}}{\text{MSE}} = \frac{531.47}{23.70} = 22.425$$

E.檢定統計值 F = 22.425 > 臨界值$F_{\alpha,k-1,n_t-k}$ = 3.8853，拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$ 三種教育訓練課程服務每位消費者時間的母體平均值皆相等，接受對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_i \neq \mu_j$，其中 i or j = 甲、乙、丙。三種教育訓練課程至少有一個配對服務每位消費者時間的母體平均值不相等。因此，該連鎖速食餐廳採用三種教育訓練課程對員工的服務時間，彼此之間有顯著性的差異。

範例 13.3 利用三種不同溫度測試麵糰發酵時間(單位：分)如下表所示：

溫度 A	76	95	88	96	93
溫度 B	125	101	93	95	119
溫度 C	115	112	128	121	116

(A)請以顯著水準 α = 0.05 檢定溫度是否影響麵糰發酵時間？

題解：

溫度 A：5個樣本發酵時間平均值 = 89.6分，標準(偏)差 = 8.20分，變異數 = 67.30分^2

溫度 B：5個樣本發酵時間平均值 = 106.6分，標準(偏)差 = 14.52分，變異數 = 210.80分^2

溫度 C：5個樣本發酵時間平均值 = 118.4分，標準(偏)差 = 6.27分，變異數 = 39.30分^2

全部 15 個試驗樣本發酵時間平均值$\bar{\bar{x}} = \frac{\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j} x_{ij}}{n_t} = \frac{1573}{15}$ = 104.8667 分

SSTR = $\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j}\left(\bar{x}_j - \bar{\bar{x}}\right)^2 = \sum_{j=1}^{3} n_j \times \left(\bar{x}_j - \bar{\bar{x}}\right)^2$ = 5 × (89.6 – 104.8667)^2 + 5 × (106.6 – 104.8667)^2 + 5 × (118.4 – 104.8667)^2 = 2096.133

SSE = $\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j}\left(x_{ij} - \bar{x}_j\right)^2 = \sum_{j=1}^{k}\left(n_j - 1\right) \times S_j^2$ = (5 – 1) × 67.30 + (5 – 1) × 210.80 + (5 – 1) × 39.30 = 1269.600

SST = SSTR + SSE = 2096.133 + 1269.600 = 3365.733

變異數分析表(ANOVA table)

變異來源(Source of variation)	平方和(Sum of squares)	自由度(Degrees of freedom)	均方(Mean square)	*F* 值
樣本間變異或組間變異(Treatments)	2096.133	2	1048.067	9.9061
樣本內變異、組內變異或誤差(Error)	1269.600	12	105.800	
合計(Total)	3365.733	14		

A.設定顯著水準 α = 0.05，臨界值$F_{\alpha,k-1,n_t-k} = F_{0.05,3-1,15-3} = F_{0.05,2,12}$ = 3.8853(使用 Excel 軟體 F.INV.RT 函數查詢獲得)。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_A = \mu_B = \mu_C$ 所有母體平均值皆相等。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_i \neq \mu_j$，其中 i or j = A、B、C 有一個(含以上)配對平均值不相等。

D.計算檢定統計值：F 值

$$\text{檢定統計值 } F = \frac{\text{MSTR}}{\text{MSE}} = \frac{1048.067}{105.800} = 9.9061$$

E.檢定統計值 F = 9.9061 > 臨界值$F_{\alpha,k-1,n_t-k}$ = 3.8853，拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_A = \mu_B = \mu_C$ 所有母體平均值皆相等，接受對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_i \neq \mu_j$，其中 i or j = A、B、C 有一個(含以上)配對平均值不相等。因此，三種不同溫度測試麵糰發酵時間，彼此之間有顯著性的差異。

13.3 多重比較程序

利用變異數分析檢定 k 個母體平均值是否相等的過程中，若判定拒絕虛無假設(H_0: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \ldots = \mu_k$ 所有母體平均值皆相等)，接受對立假設(H_1: $\mu_i \neq \mu_j$ 所有母體平均值不全部相等)時，更想知道的是哪些組合配對之間有達到顯著的差異水準，即在對立假設 $\mu_i \neq \mu_j$ 中，i 和 j 分別是屬於哪一個母體(s)。

事後比較(Posteriori comparison)、事後檢定(post hoc tests)

當變異數分析達到顯著水準時，才針對C_2^k組合配對平均值比較，使用 F 檢定，以釐清不同母體之間平均值的實際差異情況，提供相關決策參考。

事前比較(Priori comparison)

從C_2^k組合配對中取一對或數對組合，進行平均值比較或針對特定母體平均值進行估計，採用 t 檢定。基於特定研究理論或特定需求所進行的平均數檢定，又稱計畫性比較。

13.3.1 單一信賴區間

在變異數分析中，有 k 個母體平均值，若欲進行其中 2 個母體平均值之差 $\mu_i - \mu_j$ ($i \neq j$)的區間估計，在信賴水準 1 – α 或顯著水準 α，$\mu_i - \mu_j$ ($i \neq j$)的信賴區間：(平均值之差，以多減少，維持正值)

$$|\bar{x}_i - \bar{x}_j| - t_{\frac{\alpha}{2},v} \times \sqrt{\left(\frac{\sum_{j=1}^{k}(n_j-1)\times S_j^2}{n_t-k}\right) \times \left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j}\right)} \le \mu_i - \mu_j \le |\bar{x}_i - \bar{x}_j| + t_{\frac{\alpha}{2},v} \times \sqrt{\left(\frac{\sum_{j=1}^{k}(n_j-1)\times S_j^2}{n_t-k}\right) \times \left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j}\right)}$$

$$|\bar{x}_i-\bar{x}_j|-t_{\frac{\alpha}{2},v}\times\sqrt{\text{MSE}}\times\sqrt{\left(\frac{1}{n_i}+\frac{1}{n_j}\right)} \le \mu_i-\mu_j \le |\bar{x}_i-\bar{x}_j|+t_{\frac{\alpha}{2},v}\times\sqrt{\text{MSE}}\times\sqrt{\left(\frac{1}{n_i}+\frac{1}{n_j}\right)}$$

其中 $\text{MSE}=\frac{\sum_{j=1}^{k}(n_j-1)\times S_j^2}{n_t-k}=\frac{\text{SSE}}{n_t-k}$

$v=\sum_{i=1}^{k}n_i-k=n_t-k$：屬於 MSE 的自由度

$t_{\frac{\alpha}{2},v=n_t-k}=t_{\frac{\alpha}{2},n_t-k}$：自由度等於 n_t-k 的 t 分布右尾機率$\frac{\alpha}{2}$的臨界值

範例 13.4 九如速食連鎖餐廳有 A1、A2 和 A3 三家加盟店，欲瞭解三家加盟店服務品質是否相同，分別抽取 5、6 和 7 位消費者進行服務品質問卷評量，評量的結果如下表所示：試在顯著水準 α = 0.05 下，運用單一信賴區間法，分別 1 對 1 配對比較三家加盟店的服務品質是否相同？

樣本	加盟店 A1	加盟店 A2	加盟店 A3
1	80	92	95
2	85	94	98
3	90	93	92
4	85	90	88
5	88	91	98
6		98	90
7			95
合計	428	558	656
樣本平均值	85.6	93.0	93.7
樣本變異數	14.30	8.00	14.90
樣本標準(偏)差	3.7815	2.8284	3.8607

題解：設 μ_1、μ_2 和 μ_3 依序分別為加盟店 A1、A2 和 A3 服務品質的母體平均值。$\bar{x}_1$ = 85.6、$\bar{x}_2$ = 93.0 和$\bar{x}_3$ = 93.7 依序分別為加盟店 A1、A2 和 A3 服務品質的樣本平均值。k = 3 欲進行母體平均值檢定的母體數量。加盟店 A1 樣本數量 n_1 = 5，加盟店 A2 樣本數量 n_2 = 6，加盟店 A3 樣本數量 n_3 = 7，樣本總數 $n_t=n_1+n_2+n_3=18$。全部樣本平均值$\bar{\bar{x}}=\frac{\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j}x_{ij}}{n_t}=\frac{\sum_{j=1}^{k}(n_j\times\bar{x}_j)}{n_t}=\frac{428+558+656}{18}=91.22$。$S_1^2$ = 14.30、S_2^2 = 8.00 和S_3^2 = 14.90 依序分別為加盟店 A1、A2 和 A3 服務品質的樣本變異數。

A.設定顯著水準 α = 0.05，臨界值$F_{\alpha,k-1,n_t-k}=F_{0.05,3-1,18-3}=F_{0.05,2,15}=3.6823$(使用 Excel 軟體 F.INV.RT 函數查詢獲得)。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_1=\mu_2=\mu_3$ 加盟店 3 家個別服務品質的母體平均值皆相等。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_i\neq\mu_j$ 加盟店 3 家個別服務品質的母體平均值不全部相等。

D.計算檢定統計值─F 值

$\text{SSTR}=\sum_{j=1}^{k}n_j\times(\bar{x}_j-\bar{\bar{x}})^2=5\times(85.6-91.22)^2+6\times(93.0-91.22)^2+7\times(93.7-91.22)^2=158.05+18.96+43.47=220.48$

$\text{MSTR}=\frac{\text{SSTR}}{k-1}=\frac{220.48}{3-1}=110.24$

$\text{SSE}=\sum_{j=1}^{k}(n_j-1)\times S_j^2=(5-1)\times14.30+(6-1)\times8.00+(7-1)\times14.90=57.2+40.0+89.4=186.6$

$\text{MSE}=\frac{\sum_{j=1}^{k}(n_j-1)\times S_j^2}{n_t-k}=\frac{\text{SSE}}{n_t-k}=\frac{186.6}{18-3}=12.4419$

$$\text{檢定統計值 } F=\frac{\text{MSTR}}{\text{MSE}}=\frac{110.24}{12.4419}=8.8605$$

E.檢定統計值 F = 8.8605 > 臨界值$F_{\alpha,k-1,n_t-k}=3.6823$，拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_1=\mu_2=\mu_3$ 所有母體平均值皆相等，接受對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_i\neq\mu_j$ 所有母體平均值不全部相等。因此，該速食連鎖餐廳 A1、A2 和 A3 三家加盟店的服務品質有不相同者，彼此之間有顯著性的差異。

$\mu_1-\mu_2$ 信賴區間：(平均值之差，以多減少，維持正值)

$$|\bar{x}_i-\bar{x}_j|-t_{\frac{\alpha}{2},v}\times\sqrt{\text{MSE}}\times\sqrt{\left(\frac{1}{n_i}+\frac{1}{n_j}\right)}\ \le\ \mu_i-\mu_j\ \le\ |\bar{x}_i-\bar{x}_j|+t_{\frac{\alpha}{2},v}\times\sqrt{\text{MSE}}\times\sqrt{\left(\frac{1}{n_i}+\frac{1}{n_j}\right)}$$

自由度 $v=\sum_{i=1}^{k}n_i-k=n_t-k=18-3=15$，$t_{\frac{\alpha}{2},v}=t_{\frac{0.05}{2},15}=t_{0.025,15}=2.1314$(使用 Excel 軟體 T.INV 函數查詢獲得)。

$$|93.0-85.6|-2.1314\times\sqrt{12.4419}\times\sqrt{\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)}\ \le\ \mu_1-\mu_2\ \le\ |93.0-85.6|+2.1314\times\sqrt{12.4419}\times\sqrt{\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)}$$

$$7.4-4.5524\le\mu_1-\mu_2\le7.4+4.5524$$

$$2.8476\ \le\ \mu_1-\mu_2\ \le\ 11.9524$$

在 $\mu_1-\mu_2$ 的信賴區間中不包括 0，故 μ_1 和 μ_2 之間有顯著性的差異存在，兩者不相等。因 $\bar{x}_1=85.6<\bar{x}_2=93.0$，故推論 μ_2 有顯著性的高於 μ_1。加盟店 A2 服務品質顯著性的高於加盟店 A1。

$\mu_1-\mu_3$ 信賴區間：(平均值之差，以多減少，維持正值)

$$|\bar{x}_i-\bar{x}_j|-t_{\frac{\alpha}{2},v}\times\sqrt{\text{MSE}}\times\sqrt{\left(\frac{1}{n_i}+\frac{1}{n_j}\right)}\ \le\ \mu_i-\mu_j\ \le\ |\bar{x}_i-\bar{x}_j|+t_{\frac{\alpha}{2},v}\times\sqrt{\text{MSE}}\times\sqrt{\left(\frac{1}{n_i}+\frac{1}{n_j}\right)}$$

自由度 $v=\sum_{i=1}^{k}n_i-k=n_t-k=18-3=15$，$t_{\frac{\alpha}{2},v}=t_{\frac{0.05}{2},15}=t_{0.025,15}=2.1314$(使用 Excel 軟體 T.INV 函數查詢獲得)。

$$|93.7-85.6|-2.1314\times\sqrt{12.4419}\times\sqrt{\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\right)}\le\mu_1-\mu_3\le|93.7-85.6|+2.1314\times\sqrt{12.4419}\times\sqrt{\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\right)}$$

$$8.1-4.4022\ \le\ \mu_1-\mu_3\ \le\ 8.1+4.4022$$

$$3.6978\ \le\ \mu_1-\mu_3\ \le\ 12.5022$$

在 $\mu_1-\mu_3$ 的信賴區間中不包括 0，故 μ_1 和 μ_3 之間有顯著性的差異存在，兩者不相等。因 $\bar{x}_1=85.6<\bar{x}_3=93.7$，故推論 μ_3 有顯著性的高於 μ_1。加盟店 A3 服務品質顯著性的高於加盟店 A1。

$\mu_2-\mu_3$ 信賴區間：(平均值之差，以多減少，維持正值)

$$|\bar{x}_i-\bar{x}_j|-t_{\frac{\alpha}{2},v}\times\sqrt{\text{MSE}}\times\sqrt{\left(\frac{1}{n_i}+\frac{1}{n_j}\right)}\ \le\ \mu_i-\mu_j\ \le\ |\bar{x}_i-\bar{x}_j|+t_{\frac{\alpha}{2},v}\times\sqrt{\text{MSE}}\times\sqrt{\left(\frac{1}{n_i}+\frac{1}{n_j}\right)}$$

自由度 $v=\sum_{i=1}^{k}n_i-k=n_t-k=18-3=15$，$t_{\frac{\alpha}{2},v}=t_{\frac{0.05}{2},15}=t_{0.025,15}=2.1314$(使用 Excel 軟體 T.INV 函數查詢獲得)。

$$|93.7-93.0|-2.1314\times\sqrt{12.4419}\times\sqrt{\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right)}\le\mu_2-\mu_3\le|93.7-93.0|+2.1314\times\sqrt{12.4419}\times\sqrt{\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right)}$$

$$0.7-4.1827\le\mu_2-\mu_3\le0.7+4.1827$$

$$-3.4827\le\mu_2-\mu_3\le4.8827$$

在 $\mu_2-\mu_3$ 的信賴區間中包括 0，故 μ_2 和 μ_3 之間無達到顯著性的差異水準。加盟店 A2 和加盟店 A3 服務品質沒有達到顯著性的差異水準。

練習 13.3　十全連鎖咖啡廳販售甲、乙與丙三種咖啡飲料，各隨機抽取 5 杯飲料測量咖啡因含量(mg/100 ml)如下表所示：

咖啡飲料	咖啡因含量				
甲	151	162	145	175	155
乙	128	132	135	125	131
丙	99	95	85	78	81

(A)請分別計算三種咖啡飲料咖啡因含量的平均值。

(B)由以上數值是否可以顯示三種咖啡飲料中咖啡因含量平均值具有顯著性差異？($F_{2,12,0.05}=3.8853$)

(C)請計算甲和乙兩種咖啡飲料咖啡因含量平均值之差的信賴區間。($t_{12,0.025}=2.179$)

(A) $\bar{x}_{甲} = \frac{151+162+145+175+155}{5} = \frac{788}{5}$ = 157.6 mg/100 ml

$\bar{x}_{乙} = \frac{128+132+135+125+131}{5} = \frac{651}{5}$ = 130.2 mg/100 ml

$\bar{x}_{丙} = \frac{99+95+85+78+81}{5} = \frac{438}{5}$ = 87.6 mg/100 ml

(B)

A.設定顯著水準 $\alpha = 0.05$，臨界值$F_{\alpha,k-1,n_t-k} = F_{0.05,3-1,15-3} = F_{0.05,2,12}$ = 3.8853(使用 Excel 軟體 F.INV.RT 函數查詢獲得)。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_{甲} = \mu_{乙} = \mu_{丙}$咖啡飲料 3 種咖啡因含量的母體平均值皆相等。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_i \neq \mu_j$，i or j = 甲、乙、丙。咖啡飲料 3 種至少有一個配對咖啡因含量的母體平均值不相等。

D.計算檢定統計值─F 值

$\bar{\bar{x}} = \frac{\bar{x}_{甲}+\bar{x}_{乙}+\bar{x}_{丙}}{3} = \frac{157.6+130.2+87.6}{3}$ = 125.1333 mg/100 ml

$\text{SSTR} = \sum_{j=1}^{k} n_j \times \left(\bar{x}_j - \bar{\bar{x}}\right)^2 = 5 \times (157.6 - 125.1333)^2 + 5 \times (130.2 - 125.1333)^2 + 5 \times (87.6 - 125.1333)^2 = 5270.422 + 128.3556 + 7043.756 = 12442.53$

$\text{MSTR} = \frac{\text{SSTR}}{k-1} = \frac{12442.53}{3-1} = 6221.267$

$\text{SST} = \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j}\left(x_{ij} - \bar{\bar{x}}\right)^2 = (151 - 125.1333)^2 + (162 - 125.1333)^2 + (145 - 125.1333)^2 + (175 - 125.1333)^2 + (155 - 125.1333)^2 + (128 - 125.1333)^2 + (132 - 125.1333)^2 + (135 - 125.1333)^2 + (125 - 125.1333)^2 + (131 - 125.1333)^2 + (99 - 125.1333)^2 + (95 - 125.1333)^2 + (85 - 125.1333)^2 + (78 - 125.1333)^2 + (81 - 125.1333)^2 = 13359.73$

SSE = SST – SSTR = 13359.73 – 12442.53 = 917.20

$\text{MSE} = \frac{\sum_{j=1}^{k}(n_j-1)\times s_j^2}{n_t-k} = \frac{\text{SSE}}{n_t-k} = \frac{917.20}{15-3} = 76.4336$

檢定統計值 $F = \frac{\text{MSTR}}{\text{MSE}} = \frac{6221.267}{76.4336} = 81.3944$

E.檢定統計值 F = 81.3944 ＞ 臨界值$F_{\alpha,k-1,n_t-k}$ = 3.8853，拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$咖啡飲料 3 種咖啡因含量的母體平均值皆相等，接受對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_i \neq \mu_j$，其中 i or j = 甲、乙、丙。咖啡飲料 3 種至少有一個配對咖啡因含量的母體平均值不相等。因此，該連鎖咖啡廳販售甲、乙和丙三種咖啡飲料，所含咖啡因含量至少有一個配對組合達到顯著性的差異水準。

(C) $\mu_{甲} - \mu_{乙}$信賴區間：

$$|\bar{x}_{甲} - \bar{x}_{乙}| - t_{\frac{0.05}{2},12} \times \sqrt{\text{MSE}} \times \sqrt{\left(\frac{1}{n_{甲}} + \frac{1}{n_{乙}}\right)} \leq \mu_{甲} - \mu_{乙} \leq |\bar{x}_{甲} - \bar{x}_{乙}| + t_{\frac{0.05}{2},12} \times \sqrt{\text{MSE}} \times \sqrt{\left(\frac{1}{n_{甲}} + \frac{1}{n_{乙}}\right)}$$

$$|157.6 - 130.2| - 2.179 \times \sqrt{76.4336} \times \sqrt{\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{5}\right)} \leq \mu_{甲} - \mu_{乙} \leq |157.6 - 130.2| + 2.179 \times \sqrt{76.4336} \times \sqrt{\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{5}\right)}$$

$$27.4 - 12.0484 \leq \mu_{甲} - \mu_{乙} \leq 27.4 + 12.0484$$

$$15.3516 \leq \mu_{甲} - \mu_{乙} \leq 39.4484$$

練習 13.4　九如咖啡廳有甲、乙、丙三台義式咖啡機，製作義式咖啡飲料，假設義式咖啡飲料的體積分布屬於常態分布，各隨機抽取 5 杯飲料測量體積(ml)平均值與其變異數(ml^2)如下表所示：

咖啡機	平均值	變異數
甲	42.5	2.3
乙	44.6	1.5
丙	46.2	2.7

(A)請製作變異數分析表(ANOVA table)。

(B)以顯著水準 $\alpha = 0.05$ 檢定三台咖啡機所製作咖啡飲料的平均體積 $\mu_{甲}$、$\mu_{乙}$和 $\mu_{丙}$是否全部相等。

(C)請計算甲和乙兩台咖啡機所製作咖啡飲料體積平均值之差的信賴區間。($t_{12,0.025} = 2.179$)

題解：

(A) $\bar{\bar{x}} = \frac{\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j} x_{ij}}{n_t} = \frac{\sum_{j=1}^{k} n_j \times \bar{x}_j}{n_t} = \frac{5\times42.5+5\times44.6+5\times46.2}{5+5+5} = \frac{666.5}{15} = 44.4333$

SSTR $= \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j}\left(\bar{x}_j - \bar{\bar{x}}\right)^2 = \sum_{j=1}^{k} n_j \times \left(\bar{x}_j - \bar{\bar{x}}\right)^2 = 5\times(42.5 - 44.43)^2 + 5\times(44.6 - 44.43)^2 + 5\times(46.2 - 44.43)^2 = 34.43$

SSE $= \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j}\left(x_{ij} - \bar{x}_j\right)^2 = \sum_{j=1}^{k}\left(n_j - 1\right) \times S_j^2 = (5-1)\times 2.3 + (5-1)\times 1.5 + (5-1)\times 2.7 = 26$

SST = SSTR + SSE = 34.43 + 26 = 60.43

變異數分析表(ANOVA table)

變異來源(Source of variation)	平方和(Sum of squares)	自由度(Degrees of freedom)	均方(Mean square)	F 值
樣本間變異或組間變異(Treatments)	34.43	2	17.22	7.95
樣本內變異、組內變異或誤差 (Error)	26	12	2.17	
合計(Total)	60.43	14		

(B)

A.設定顯著水準 $\alpha = 0.05$，臨界值$F_{\alpha,k-1,n_t-k} = F_{0.05,3-1,15-3} = F_{0.05,2,12} = 3.8853$(使用 Excel 軟體 F.INV.RT 函數查詢獲得)。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_{甲} = \mu_{乙} = \mu_{丙}$咖啡機三台製作咖啡飲料體積的母體平均值皆相等。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_i \neq \mu_j$，其中 i or j = 甲、乙、丙。咖啡機三台至少有一個配對製作咖啡飲料體積的母體平均值不相等。

D.計算檢定統計值─F 值

$$\text{檢定統計值 } F = \frac{\text{MSTR}}{\text{MSE}} = \frac{17.22}{2.17} = 7.95$$

E.檢定統計值 $F = 7.95$ ＞ 臨界值$F_{\alpha,k-1,n_t-k} = 3.8853$，拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$ 咖啡機三台製作咖啡飲料體積的母體平均值皆相等，接受對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_i \neq \mu_j$，其中 i or j = 甲、乙、丙。咖啡機三台至少有一個配對製作咖啡飲料體積的母體平均值不相等。因此，該連鎖咖啡廳販售甲、乙和丙三種咖啡飲料，所含咖啡因含量至少有一個配對組合達到顯著性的差異水準。

(C) $\mu_{甲} - \mu_{乙}$信賴區間：

$$|\bar{x}_{甲} - \bar{x}_{乙}| - t_{\frac{0.05}{2},12} \times \sqrt{\text{MSE}} \times \sqrt{\left(\frac{1}{n_{甲}} + \frac{1}{n_{乙}}\right)} \leq \mu_{甲} - \mu_{乙} \leq |\bar{x}_{甲} - \bar{x}_{乙}| + t_{\frac{0.05}{2},12} \times \sqrt{\text{MSE}} \times \sqrt{\left(\frac{1}{n_{甲}} + \frac{1}{n_{乙}}\right)}$$

$$|42.5 - 44.6| - 2.179 \times \sqrt{2.17} \times \sqrt{\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{5}\right)} \leq \mu_{甲} - \mu_{乙} \leq |42.5 - 44.6| + 2.179 \times \sqrt{2.17} \times \sqrt{\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{5}\right)}$$

$$2.1 - 2.0301 \leq \mu_{甲} - \mu_{乙} \leq 2.1 + 2.0301$$

$$0.0699 \leq \mu_{甲} - \mu_{乙} \leq 4.1301$$

練習 13.5 九如大學有 K1、K2 和 K3 三家學生餐廳，為了調查學生對餐廳的滿意度(0~100 分)，分別從三家學生餐廳隨機抽選 5 位用餐後欲離開的學生進行調查，調查結果如下表所示。(A)使否足以顯示三家學生餐廳學生消費滿意度有顯著性差異？(B)請計算 K1 和 K2 兩家學生餐廳消費學生滿意度之差在顯著水準 $\alpha = 0.05$ 的信賴區間。

學生餐廳	滿意度分數				
K1	56	23	26	52	45
K2	35	55	66	44	56
K3	65	55	88	85	76

題解：

學生餐廳	滿意度分數					平均值	標準(偏)差
K1	56	23	26	52	45	40.4	15.0765
K2	35	55	66	44	56	51.2	11.9457
K3	65	55	88	85	76	73.8	13.8094

K1 餐廳樣本平均值$\bar{x}_{K1} = 40.4$，K2 餐廳樣本平均值$\bar{x}_{K2} = 51.2$，K3 餐廳樣本平均值$\bar{x}_{K3} = 73.8$，總樣本平均值$\bar{\bar{x}} = \frac{\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j} x_{ij}}{n_t} = \frac{\sum_{j=1}^{k}(n_j \times \bar{x}_j)}{n_t} = \frac{202+256+369}{15} = 55.1333$。總樣本數 $n_t = n_{K1} + n_{K2} + n_{K3} = 5 + 5 + 5 = 15$。

A.設定顯著水準 $\alpha = 0.05$，臨界值$F_{\alpha,k-1,n_t-k} = F_{0.05,3-1,15-3} = F_{0.05,2,12} = 3.8853$(使用 Excel 軟體 F.INV.RT 函數查詢獲得)。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_{K1} = \mu_{K2} = \mu_{K3}$ 三家學生餐廳消費學生滿意度的母體平均值皆相等。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_i \neq \mu_j$ 三家學生餐廳消費學生滿意度的母體平均值不全部相等。

D.計算檢定統計值−F 值

$$SSTR = \sum_{j=1}^{k} n_j \times \left(\bar{x}_j - \bar{\bar{x}}\right)^2 = 5 \times (40.4 - 55.1333)^2 + 5 \times (51.2 - 55.1333)^2 + 5 \times (73.8 - 55.1333)^2 = 1085.356 + 77.356 + 1743.222 = 2904.933$$

$$MSTR = \frac{SSTR}{k-1} = \frac{2904.933}{3-1} = 1452.467$$

$$SSE = \sum_{j=1}^{k}(n_j - 1) \times S_j^2 = (5-1) \times 15.0765^2 + (5-1) \times 11.9457^2 + (5-1) \times 13.8094^2 = 909.2 + 570.8 + 762.8 = 2242.8$$

$$MSE = \frac{\sum_{j=1}^{k}(n_j-1)\times S_j^2}{n_t-k} = \frac{SSE}{n_t-k} = \frac{2242.8}{15-3} = 186.9$$

$$\text{檢定統計值 } F = \frac{MSTR}{MSE} = \frac{1452.467}{186.9} = 7.7714$$

E.檢定統計值 $F = 7.7714$ > 臨界值$F_{\alpha,k-1,n_t-k} = 3.8853$，拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_{K1} = \mu_{K2} = \mu_{K3}$ 三家學生餐廳消費學生滿意度的母體平均值皆相等，接受對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_i \neq \mu_j$ 三家學生餐廳消費學生滿意度的母體平均值不全部相等。因此，K1、K2 和 K3 三家學生餐廳的消費學生滿意度有不相同者，彼此之間有顯著性的差異。

(B) $\mu_{K1} - \mu_{K2}$ 信賴區間：

$$|\bar{x}_{K1} - \bar{x}_{K2}| - t_{\frac{0.05}{2},12} \times \sqrt{MSE} \times \sqrt{\left(\frac{1}{n_{K1}} + \frac{1}{n_{K2}}\right)} \le \mu_{K1} - \mu_{K2} \le |\bar{x}_{K1} - \bar{x}_{K2}| + t_{\frac{0.05}{2},12} \times \sqrt{MSE} \times \sqrt{\left(\frac{1}{n_{K1}} + \frac{1}{n_{K2}}\right)}$$

$$|40.4 - 51.2| - 2.1788 \times \sqrt{186.9} \times \sqrt{\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{5}\right)} \le \mu_{K1} - \mu_{K2} \le |40.4 - 51.2| + 2.1788 \times \sqrt{186.9} \times \sqrt{\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{5}\right)}$$

$$10.8 - 18.8388 \le \mu_{K1} - \mu_{K2} \le 10.8 + 18.8388$$

$$-8.0388 \le \mu_{K1} - \mu_{K2} \le 29.6388$$

答案：(A) K1、K2 和 K3 三家學生餐廳的消費學生滿意度有不相同者，彼此之間有顯著性的差異；(B) K1 和 K2 兩家學生餐廳消費學生滿意度之差在顯著水準 $\alpha = 0.05$ 的信賴區間-8.0388~29.6388

13.3.2 聯合信賴區間

在變異數分析中，有 k 個母體平均值，若欲進行分別 1 對 1 比較 2 個母體平均值之差 $\mu_i - \mu_j$ $(i \neq j)$的區間估計時，共有C_2^k種組合，若C_2^k種組合的信賴區間同時成立的信賴水準為$(1-\alpha)^{C_2^k}$，此信賴水準小於 $1-\alpha$。欲進行數個平均值之差的信賴區間估計時，依據單一信賴區間的估計方式，恐會降低其可靠度。故，必須使用多重比較程序(multiple comparison procedures)進行母體平均值之差的聯合信賴區間(simultaneous confidence intervals)，以解析所有母體平均值之間是否達到顯著性差異水準。常用的聯合信賴區間估算方法：費雪最低顯著差異(Fisher's least significance difference, LSD)、薛費法檢定法(Scheffe's method)、鄧肯法(Duncan method)、包法隆尼(Bonferroni)和杜凱法 Tukey(honestly, significant difference, HSD)。

13.3.2.1 費雪最低顯著差異法

費雪最低顯著差異法(Fisher's least significance difference procedure, LSD)或費雪最小顯著差異法

Fisher(1949)提出又稱保護的 t 檢定(protected t test)。當進行變異數分析時，F 檢定的結果不顯著，虛無假設(H_0: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \ldots = \mu_k$)成立時，沒有必要進行多重比較程序；若 F 檢定的結果達顯著水準，拒絕虛無假設(H_0: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \ldots = \mu_k$)，接受對立假設($H_1$: $\mu_i \neq \mu_j$ 所有母體平均值不全部相等)時，才有必要進行多重比較程序。因此，欲進行費雪最低顯著差異法(Fisher's least significance difference)分析的先決條件，必需在變異數分析時，F 檢定的結果達顯著水準，拒絕虛無假設(H_0: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \ldots = \mu_k$)，接受對立假設($H_1$: $\mu_i \neq \mu_j$ 所有母體平均值不全部相等)。

A.設定顯著水準 α。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_i = \mu_j$。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_i \neq \mu_j$。

D.檢定統計值(test statistic)─t 值

$$\text{檢定統計值 } t = \frac{\bar{x}_i - \bar{x}_j}{\sqrt{\text{MSE} \times \left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j}\right)}}$$

E.若左側臨界值$-t_{\frac{\alpha}{2},n-k} \leq$ 檢定統計值 $t \leq$ 右側臨界值$t_{\frac{\alpha}{2},n-k}$，判別接受虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_i = \mu_j$。

F.若檢定統計值 $t <$ 左側臨界值$-t_{\frac{\alpha}{2},n-k}$或檢定統計值 $t >$ 右側臨界值$t_{\frac{\alpha}{2},n-k}$，判別拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_i = \mu_j$，接受對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_i \neq \mu_j$。

範例 13.5 九如速食連鎖餐廳有 A1、A2 和 A3 三家加盟店，欲瞭解三家加盟店服務品質是否相同，分別抽取 5、6 和 7 位消費者進行服務品質問卷評量，評量的結果如下表所示：試在顯著水準 α = 0.05 下，利用費雪最低顯著差異法(Fisher's LSD)分別 1 對 1 配對比較三家加盟店的服務品質是否相同？

樣本	加盟店 A1	加盟店 A2	加盟店 A3
1	80	92	95
2	85	94	98
3	90	93	92
4	85	90	88
5	88	91	98
6		98	90
7			95
合計	428	558	656
樣本平均值	85.6	93.0	93.7
樣本變異數	14.30	8.00	14.90

樣本	加盟店 A1	加盟店 A2	加盟店 A3
樣本標準(偏)差	3.7815	2.8284	3.8607

題解：設 μ_1、μ_2 和 μ_3 依序分別為加盟店 A1、A2 和 A3 服務品質的母體平均值。$\bar{x}_1 = 85.6$、$\bar{x}_2 = 93.0$ 和 $\bar{x}_3 = 93.7143$ 依序分別為加盟店 A1、A2 和 A3 服務品質的樣本平均值。$k = 3$ 欲進行母體平均值檢定的母體數量。加盟店 A1 樣本數量 $n_1 = 5$，加盟店 A2 樣本數量 $n_2 = 6$，加盟店 A3 樣本數量 $n_3 = 7$，樣本總數 $n_t = n_1 + n_2 + n_3 = 18$。全部樣本平均值 $\bar{\bar{x}} = \frac{\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j} x_{ij}}{n_t} = \frac{\sum_{j=1}^{k}(n_j \times \bar{x}_j)}{n_t} = \frac{5\times85.6+6\times93.0+7\times93.7143}{18} = \frac{428+558+656}{18} = 91.22$。$S_1^2 = 14.30$、$S_2^2 = 8.00$ 和 $S_3^2 = 14.90$ 依序分別為加盟店 A1、A2 和 A3 服務品質的樣本變異數。

A.設定顯著水準 $\alpha = 0.05$，臨界值 $F_{\alpha,k-1,n_t-k} = F_{0.05,3-1,18-3} = F_{0.05,2,15} = 3.6823$(使用 Excel 軟體 F.INV.RT 函數查詢獲得)。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$ 加盟店 3 家個別服務品質的母體平均值皆相等。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_i \neq \mu_j$ 加盟店 3 家個別服務品質的母體平均值不全部相等。

D.計算檢定統計值—F 值

$$\text{SSTR} = \sum_{j=1}^{k} n_j \times (\bar{x}_j - \bar{\bar{x}})^2 = 5 \times (85.6 - 91.22)^2 + 6 \times (93.0 - 91.22)^2 + 7 \times (93.7 - 91.22)^2 = 158.05 + 18.96 + 43.47 = 220.48$$

$$\text{MSTR} = \frac{\text{SSTR}}{k-1} = \frac{220.48}{3-1} = 110.24$$

$$\text{SSE} = \sum_{j=1}^{k}(n_j - 1) \times S_j^2 = (5-1) \times 14.30 + (6-1) \times 8.00 + (7-1) \times 14.90 = 57.2 + 40.0 + 89.4 = 186.6$$

$$\text{MSE} = \frac{\sum_{j=1}^{k}(n_j-1)\times S_j^2}{n_t-k} = \frac{\text{SSE}}{n_t-k} = \frac{186.6}{18-3} = 12.4419$$

$$\text{檢定統計值 } F = \frac{\text{MSTR}}{\text{MSE}} = \frac{110.24}{12.4419} = 8.8605$$

E.檢定統計值 $F = 8.8605 > $ 臨界值 $F_{\alpha,k-1,n_t-k} = 3.6823$，拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$ 加盟店 3 家個別服務品質的母體平均值皆相等，接受對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_i \neq \mu_j$ 加盟店 3 家個別服務品質的母體平均值不全部相等。因此，該速食連鎖餐廳 A1、A2 和 A3 三家加盟店的服務品質有不相同者，彼此之間有顯著性的差異。

$\mu_1 - \mu_2$ 費雪最低顯著差異法(Fisher's LSD)檢定：

A.設定顯著水準 $\alpha = 0.05$，左側臨界值 $-t_{\frac{\alpha}{2},v=n_t-k} = -t_{\frac{0.05}{2},18-3} = -t_{0.025,15} = -2.1314$(使用 Excel 軟體 T.INV 函數查詢獲得)；右側臨界值 $t_{\frac{\alpha}{2},v=n_t-k} = t_{\frac{0.05}{2},18-3} = t_{0.025,15} = 2.1314$。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_1 = \mu_2$。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_1 \neq \mu_2$。

D.檢定統計值(test statistic)：$t = \frac{\bar{x}_i - \bar{x}_j}{\sqrt{\text{MSE}\times\left(\frac{1}{n_i}+\frac{1}{n_j}\right)}} = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\text{MSE}\times\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}} = \frac{85.6-93.0}{\sqrt{12.4419\times\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)}} = \frac{-7.4}{2.1359} = -3.4646$

E.檢定統計值 $t = -3.4646 < $ 左側臨界值 $-t_{\frac{\alpha}{2},v=n_t-k} = -2.1314$，判別拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_1 = \mu_2$，接受對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_1 \neq \mu_2$。因 $\bar{x}_1 = 85.6 < \bar{x}_2 = 93.0$，故推論 μ_2 有顯著性的高於 μ_1。加盟店 A2 服務品質顯著性的高於加盟店 A1。

$\mu_1 - \mu_3$ 費雪最低顯著差異法(Fisher's LSD)檢定：

A.設定顯著水準 $\alpha = 0.05$，左側臨界值 $-t_{\frac{\alpha}{2},v=n_t-k} = -t_{\frac{0.05}{2},18-3} = -t_{0.025,15} = -2.1314$(使用 Excel 軟體 T.INV 函數查詢獲得)；右側臨界值 $t_{\frac{\alpha}{2},v=n_t-k} = t_{\frac{0.05}{2},18-3} = t_{0.025,15} = 2.1314$。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_1 = \mu_3$。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_1 \neq \mu_3$。

D.檢定統計值(test statistic)：$t = \frac{\bar{x}_i - \bar{x}_j}{\sqrt{MSE \times \left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j}\right)}} = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_3}{\sqrt{MSE \times \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_3}\right)}} = \frac{85.6 - 93.7}{\sqrt{12.4419 \times \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7}\right)}} = \frac{-8.1}{2.0654} = -3.9218$

E.檢定統計值 $t = -3.9318$ < 左側臨界值$-t_{\frac{\alpha}{2}, v=n_t-k} = -2.1314$，判別拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_1 = \mu_3$，接受對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_1 \neq \mu_3$。因$\bar{x}_1 = 85.6 < \bar{x}_3 = 93.7$，故推論 μ_3 有顯著性的高於 μ_1。加盟店 A3 服務品質顯著性的高於加盟店 A1。

$\mu_2 - \mu_3$ 費雪最低顯著差異法(Fisher's LSD)檢定：

A.設定顯著水準 $\alpha = 0.05$，左側臨界值$-t_{\frac{\alpha}{2}, v=n_t-k} = -t_{\frac{0.05}{2}, 18-3} = -t_{0.025,15} = -2.1314$(使用 Excel 軟體 T.INV 函數查詢獲得)；右側臨界值$t_{\frac{\alpha}{2}, v=n_t-k} = t_{\frac{0.05}{2}, 18-3} = t_{0.025,15} = 2.1314$。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_2 = \mu_3$。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_2 \neq \mu_3$。

D.檢定統計值(test statistic)：$t = \frac{\bar{x}_i - \bar{x}_j}{\sqrt{MSE \times \left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j}\right)}} = \frac{\bar{x}_2 - \bar{x}_3}{\sqrt{MSE \times \left(\frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3}\right)}} = \frac{93.0 - 93.7}{\sqrt{12.4419 \times \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right)}} = \frac{-0.7}{1.9624} = -0.3567$

E.左側臨界值$-t_{\frac{\alpha}{2}, v=n_t-k} = -2.1314$ < 檢定統計值 $t = -0.3567$ < 右側臨界值 $t_{0.025,15} = 2.1314$，判別接受虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_2 = \mu_3$，故 μ_2 和 μ_3 之間無達到顯著性的差異水準。加盟店 A2 和加盟店 A3 服務品質沒有達到顯著性的差異水準。

利用檢定統計值$\bar{x}_i - \bar{x}_j$的費雪最低顯著差異法(Fisher's least significance difference procedure)

A.設定顯著水準 α。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_i = \mu_j$。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_i \neq \mu_j$。

D.檢定統計值(test statistic)：$|\bar{x}_i - \bar{x}_j|$

E.若檢定統計值$|\bar{x}_i - \bar{x}_j| \leq LSD = t_{\frac{\alpha}{2}, v=n_t-k} \times \sqrt{MSE \times \left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j}\right)}$，判別接受虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_i = \mu_j$。

F.若檢定統計值$|\bar{x}_i - \bar{x}_j| > LSD = t_{\frac{\alpha}{2}, v=n_t-k} \times \sqrt{MSE \times \left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j}\right)}$，判別拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_i = \mu_j$，接受對立假設(alternative hypothesis)H_1: $\mu_i \neq \mu_j$。

範例 13.6　九如速食連鎖餐廳有 A1、A2 和 A3 三家加盟店，欲瞭解三家加盟店服務品質是否相同，分別抽取 5、6 和 7 位消費者進行服務品質問卷評量，評量的結果如下表所示：試在顯著水準 $\alpha = 0.05$ 下，利用檢定統計值$\bar{x}_i - \bar{x}_j$的費雪最低顯著差異法(Fisher's LSD)分別 1 對 1 配對比較三家加盟店的服務品質是否相同？

樣本	加盟店 A1	加盟店 A2	加盟店 A3
1	80	92	95
2	85	94	98
3	90	93	92
4	85	90	88
5	88	91	98
6		98	90
7			95
合計	428	558	656

樣本	加盟店 A1	加盟店 A2	加盟店 A3
樣本平均值	85.6	93.0	93.7
樣本變異數	14.30	8.00	14.90
樣本標準(偏)差	3.7815	2.8284	3.8607

題解：設 μ_1、μ_2 和 μ_3 依序分別為加盟店 A1、A2 和 A3 服務品質的母體平均值。$\bar{x}_1$ = 85.6、$\bar{x}_2$ = 93.0 和 $\bar{x}_3$ = 93.7143 依序分別為加盟店 A1、A2 和 A3 服務品質的樣本平均值。$k = 3$ 欲進行母體平均值檢定的母體數量。加盟店 A1 樣本數量 $n_1 = 5$，加盟店 A2 樣本數量 $n_2 = 6$，加盟店 A3 樣本數量 $n_3 = 7$，樣本總數 $n_t = n_1 + n_2 + n_3 = 18$。全部樣本平均值 $\bar{\bar{x}} = \frac{\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j} x_{ij}}{n_t} = \frac{\sum_{j=1}^{k}(n_j \times \bar{x}_j)}{n_t} = \frac{428+558+656}{18} = 91.22$。$S_1^2 = 14.30$、$S_2^2 = 8.00$ 和 $S_3^2 = 14.90$ 依序分別為加盟店 A1、A2 和 A3 服務品質的樣本變異數。

A.設定顯著水準 $\alpha = 0.05$，臨界值 $F_{\alpha,k-1,n_t-k} = F_{0.05,3\text{-}1,18\text{-}3} = F_{0.05,2,15} = 3.6823$(使用 Excel 軟體 F.INV.RT 函數查詢獲得)。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$ 加盟店 3 家個別服務品質的母體平均值皆相等。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_i \neq \mu_j$ 加盟店 3 家個別服務品質的母體平均值不全部相等。

D.計算檢定統計值─F 值

$$\text{SSTR} = \sum_{j=1}^{k} n_j \times \left(\bar{x}_j - \bar{\bar{x}}\right)^2 = 5 \times (85.6 - 91.22)^2 + 6 \times (93.0 - 91.22)^2 + 7 \times (93.7 - 91.22)^2 = 158.05 + 18.96 + 43.47 = 220.48$$

$$\text{MSTR} = \frac{\text{SSTR}}{k-1} = \frac{220.48}{3-1} = 110.24$$

$$\text{SSE} = \sum_{j=1}^{k}\left(n_j - 1\right) \times S_j^2 = (5-1) \times 14.30 + (6-1) \times 8.00 + (7-1) \times 14.90 = 57.2 + 40.0 + 89.4 = 186.6$$

$$\text{MSE} = \frac{\sum_{j=1}^{k}(n_j-1)\times S_j^2}{n_t-k} = \frac{\text{SSE}}{n_t-k} = \frac{186.6}{18-3} = 12.4419$$

$$\text{檢定統計值 } F = \frac{\text{MSTR}}{\text{MSE}} = \frac{110.24}{12.4419} = 8.8605$$

E.檢定統計值 $F = 8.8605$ > 臨界值 $F_{\alpha,k-1,n_t-k} = 3.6823$，拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$ 所有母體平均值皆相等，接受對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_i \neq \mu_j$ 加盟店 3 家個別服務品質的母體平均值不全部相等。因此，該速食連鎖餐廳 A1、A2 和 A3 三家加盟店的服務品質有不相同者，彼此之間有顯著性的差異。

$\mu_1 - \mu_2$ 利用檢定統計值 $\bar{x}_i - \bar{x}_j$ 的費雪最低顯著差異法(Fisher's LSD)檢定：

A.設定顯著水準 $\alpha = 0.05$。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_1 = \mu_2$。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_1 \neq \mu_2$。

D.檢定統計值(test statistic)：$|\bar{x}_1 - \bar{x}_2| = |85.6 - 93.0| = |-7.4| = 7.4$

$$t_{\frac{\alpha}{2},v=n_t-k} = t_{\frac{0.05}{2},18-3} = t_{0.025,15} = 2.1314\text{(使用 Excel 軟體 T.INV 函數查詢獲得)}$$

$$\text{LSD} = t_{\frac{\alpha}{2},v=n_t-k} \times \sqrt{\text{MSE} \times \left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j}\right)} = 2.1314 \times \sqrt{12.4419 \times \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right)} = 2.1314 \times 2.1359 = 4.5525$$

E.檢定統計值 $|\bar{x}_1 - \bar{x}_2| = 7.4$ > LSD = 4.5525，判別拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_1 = \mu_2$，接受對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_1 \neq \mu_2$。因 $\bar{x}_1 = 85.6 < \bar{x}_2 = 93.0$，故推論 μ_2 有顯著性的高於 μ_1。加盟店 A2 服務品質顯著性的高於加盟店 A1。

$\mu_1 - \mu_3$ 利用檢定統計值 $\bar{x}_i - \bar{x}_j$ 的費雪最低顯著差異法(Fisher's LSD)檢定：

A.設定顯著水準 $\alpha = 0.05$。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_1 = \mu_3$。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_1 \neq \mu_3$。

D.檢定統計值(test statistic)：$|\bar{x}_1 - \bar{x}_3| = |85.6 - 93.7143| = |-8.1143| = 8.1143$

$t_{\frac{\alpha}{2},v=n_t-k} = t_{\frac{0.05}{2},18-3} = t_{0.025,15} = 2.1314$(使用 Excel 軟體 T.INV 函數查詢獲得)

$\text{LSD} = t_{\frac{\alpha}{2},v=n_t-k} \times \sqrt{\text{MSE} \times \left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j}\right)} = 2.1314 \times \sqrt{12.4419 \times \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7}\right)} = 2.1314 \times 2.0654 = 4.4022$

E.檢定統計值$|\bar{x}_1 - \bar{x}_3| = 8.1143 > \text{LSD} = 4.4022$，判別拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_1 = \mu_3$，接受對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_1 \neq \mu_3$。因$\bar{x}_1 = 85.6 < \bar{x}_3 = 93.7$，故推論 μ_3 有顯著性的高於 μ_1。加盟店 A3 服務品質顯著性的高於加盟店 A1。

$\mu_2 - \mu_3$ 利用檢定統計值$\bar{x}_i - \bar{x}_j$的費雪最低顯著差異法(Fisher's LSD)檢定：

A.設定顯著水準 $\alpha = 0.05$。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_2 = \mu_3$。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_2 \neq \mu_3$。

D.檢定統計值(test statistic)：$|\bar{x}_2 - \bar{x}_3| = |93.0 - 93.7143| = |-0.7143| = 0.7143$

$t_{\frac{\alpha}{2},v=n_t-k} = t_{\frac{0.05}{2},18-3} = t_{0.025,15} = 2.1314$(使用 Excel 軟體 T.INV 函數查詢獲得)

$\text{LSD} = t_{\frac{\alpha}{2},v=n_t-k} \times \sqrt{\text{MSE} \times \left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j}\right)} = 2.1314 \times \sqrt{12.4419 \times \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right)} = 2.1314 \times 1.9624 = 4.1827$

E.檢定統計值$|\bar{x}_2 - \bar{x}_3| = 0.7143 < \text{LSD} = 4.1827$，判別接受虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_2 = \mu_3$，故 μ_2 和 μ_3 之間無達到顯著性的差異水準。加盟店 A2 和加盟店 A3 服務品質沒有達到顯著性的差異水準。

利用費雪最低顯著差異法(Fisher's least significance difference procedure)估算兩母體平均值之差，在信賴水準 $1-\alpha$ 或顯著水準 α 的信賴區間：

$$|\bar{x}_i - \bar{x}_j| \pm \text{LSD} \quad \rightarrow \quad |\bar{x}_i - \bar{x}_j| \pm t_{\frac{\alpha}{2},v=n_t-k} \times \sqrt{\text{MSE} \times \left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j}\right)}$$

其中 $\text{LSD} = t_{\frac{\alpha}{2},v=n_t-k} \times \sqrt{\text{MSE} \times \left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j}\right)}$

範例 13.7 九如速食連鎖餐廳有 A1、A2 和 A3 三家加盟店，欲瞭解三家加盟店服務品質是否相同，分別抽取 5、6 和 7 位消費者進行服務品質問卷評量，評量的結果如下表所示：試在顯著水準 $\alpha = 0.05$ 下，利用費雪最低顯著差異法(Fisher's LSD)估算兩母體平均值之差的信賴區間，分別 1 對 1 配對比較三家加盟店的服務品質是否相同？

樣本	加盟店 A1	加盟店 A2	加盟店 A3
1	80	92	95
2	85	94	98
3	90	93	92
4	85	90	88
5	88	91	98
6		98	90
7			95
合計	428	558	656
樣本平均值	85.6	93.0	93.7
樣本變異數	14.30	8.00	14.90
樣本標準(偏)差	3.7815	2.8284	3.8607

題解：設 μ_1、μ_2 和 μ_3 依序分別為加盟店 A1、A2 和 A3 服務品質的母體平均值。$\bar{x}_1$ = 85.6、$\bar{x}_2$ = 93.0 和 $\bar{x}_3$ = 93.7143 依序分別為加盟店 A1、A2 和 A3 服務品質的樣本平均值。k = 3 欲進行母體平均值檢定的母體數量。加盟店 A1 樣本數量 n_1 = 5，加盟店 A2 樣本數量 n_2 = 6，加盟店 A3 樣本數量 n_3 = 7，樣本總數 $n_t = n_1 + n_2 + n_3 = 18$。全部樣本平均值 $\bar{\bar{x}} = \frac{\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j} x_{ij}}{n_t} = \frac{\sum_{j=1}^{k}(n_j \times \bar{x}_j)}{n_t} = \frac{428+558+656}{18} = 91.22$。$S_1^2$ = 14.30、S_2^2 = 8.00 和 S_3^2 = 14.90 依序分別為加盟店 A1、A2 和 A3 服務品質的樣本變異數。

A.設定顯著水準 α = 0.05，臨界值 $F_{\alpha,k-1,n_t-k} = F_{0.05,3-1,18-3} = F_{0.05,2,15}$ = 3.6823(使用 Excel 軟體 F.INV.RT 函數查詢獲得)。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$ 加盟店 3 家個別服務品質的母體平均值皆相等。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_i \neq \mu_j$ 加盟店 3 家個別服務品質的母體平均值不全部相等。

D.計算檢定統計值─F 值

$$\text{SSTR} = \sum_{j=1}^{k} n_j \times (\bar{x}_j - \bar{\bar{x}})^2 = 5 \times (85.6 - 91.22)^2 + 6 \times (93.0 - 91.22)^2 + 7 \times (93.7 - 91.22)^2 = 158.05 + 18.96 + 43.47 = 220.48$$

$$\text{MSTR} = \frac{\text{SSTR}}{k-1} = \frac{220.48}{3-1} = 110.24$$

$$\text{SSE} = \sum_{j=1}^{k}(n_j - 1) \times S_j^2 = (5-1) \times 14.30 + (6-1) \times 8.00 + (7-1) \times 14.90 = 57.2 + 40.0 + 89.4 = 186.6$$

$$\text{MSE} = \frac{\sum_{j=1}^{k}(n_j-1)\times S_j^2}{n_t-k} = \frac{\text{SSE}}{n_t-k} = \frac{186.6}{18-3} = 12.4419$$

$$\text{檢定統計值 } F = \frac{\text{MSTR}}{\text{MSE}} = \frac{110.24}{12.4419} = 8.8605$$

E.檢定統計值 F = 8.8605 > 臨界值 $F_{\alpha,k-1,n_t-k}$ = 3.6823，拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$ 加盟店 3 家個別服務品質的母體平均值皆相等，接受對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_i \neq \mu_j$ 加盟店 3 家個別服務品質的母體平均值不全部相等。因此，該速食連鎖餐廳 A1、A2 和 A3 三家加盟店的服務品質有不相同者，彼此之間有顯著性的差異。

利用費雪最低顯著差異法(Fisher's LSD)估算 $\mu_1 - \mu_2$ 信賴區間：

A.設定顯著水準 α = 0.05。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_1 = \mu_2$。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_1 \neq \mu_2$。

D.計算信賴區間：$|\bar{x}_1 - \bar{x}_2| \pm \text{LSD}$ = $|85.6 - 93.0| \pm 4.5525$ = 7.4000 ± 4.5525

其中 $\text{LSD} = t_{\frac{\alpha}{2},v=n_t-k} \times \sqrt{\text{MSE} \times \left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j}\right)} = t_{\frac{0.05}{2},18-3} \times \sqrt{12.4416 \times \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right)} = 2.1314 \times 2.1359 = 4.5525$

E.因信賴區間未包括 0，故判別拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_1 = \mu_2$，接受對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_1 \neq \mu_2$。因 $\bar{x}_1 = 85.6 < \bar{x}_2 = 93.0$，故推論 μ_2 有顯著性的高於 μ_1。加盟店 A2 服務品質顯著性的高於加盟店 A1。

利用費雪最低顯著差異法(Fisher's LSD)估算 $\mu_1 - \mu_3$ 信賴區間：

A.設定顯著水準 α = 0.05。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_1 = \mu_3$。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_1 \neq \mu_3$。

D.計算信賴區間：$|\bar{x}_1 - \bar{x}_3| \pm \text{LSD}$ = $|85.6 - 93.7143| \pm 4.4022$ = 8.1143 ± 4.4022

其中 $\text{LSD} = t_{\frac{\alpha}{2},v=n_t-k} \times \sqrt{\text{MSE} \times \left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j}\right)} = t_{\frac{0.05}{2},18-3} \times \sqrt{12.4416 \times \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7}\right)} = 2.1314 \times 2.0654 = 4.4022$

E.因信賴區間未包括 0，故判別拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_1 = \mu_3$，接受對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_1 \neq \mu_3$。因$\bar{x}_1 = 85.6 < \bar{x}_3 = 93.7143$，故推論 μ_3 有顯著性的高於 μ_1。加盟店 A3 服務品質顯著性的高於加盟店 A1。

利用費雪最低顯著差異法(Fisher's LSD)估算 $\mu_2 - \mu_3$ 信賴區間：

A.設定顯著水準 $\alpha = 0.05$。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_2 = \mu_3$。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_2 \neq \mu_3$。

D.計算信賴區間：$|\bar{x}_2 - \bar{x}_3| \pm \text{LSD} = |93.0 - 93.7143| \pm 4.1827 = 0.7143 \pm 4.1827$

其中 $\text{LSD} = t_{\frac{\alpha}{2},v=n_t-k} \times \sqrt{\text{MSE} \times \left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j}\right)} = t_{\frac{0.05}{2},18-3} \times \sqrt{12.4416 \times \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right)} = 2.1314 \times 1.9624 = 4.1827$

E.因信賴區間包括 0，故判別接受虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_2 = \mu_3$，故 μ_2 和 μ_3 之間無達到顯著性的差異水準。加盟店 A2 和加盟店 A3 服務品質沒有達到顯著性的差異水準。

練習 13.6　九如連鎖咖啡廳販售甲、乙與丙三種咖啡飲料，各隨機抽取 5 杯飲料測量咖啡因含量(mg/100 ml)如下表所示：試在顯著水準 $\alpha = 0.05$ 下，利用費雪最低顯著差異法(Fisher's LSD)估算兩母體平均值之差的信賴區間，分別 1 對 1 配對比較三種咖啡飲料咖啡因含量是否相同？

咖啡飲料	咖啡因含量(mg/100 ml)				
甲	151	162	145	175	155
乙	128	132	135	125	131
丙	105	125	133	100	119

題解：設 μ_1、μ_2 和 μ_3 依序分別為甲、乙和丙咖啡飲料咖啡因含量的母體平均值(mg/100 ml)。$\bar{x}_1 = 157.6$、$\bar{x}_2 = 130.2$ 和$\bar{x}_3 = 116.4$ 依序分別為甲、乙和丙咖啡飲料咖啡因含量的樣本平均值(mg/100 ml)。$k = 3$ 欲進行母體平均值檢定的母體數量。甲咖啡樣本數量 $n_1 = 5$，乙咖啡樣本數量 $n_2 = 5$，丙咖啡樣本數量 $n_3 = 5$，全部樣本數量 $n_t = n_1 + n_2 + n_3 = 15$。全部樣本平均值$\bar{\bar{x}} = \frac{\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j} x_{ij}}{n_t} = \frac{\sum_{j=1}^{k}(n_j \times \bar{x}_j)}{n_t} = \frac{788+651+582}{15} = 134.7333$(mg/100 ml)。$S_1^2 = 132.8$、$S_2^2 = 14.7$ 和$S_3^2 = 188.8$ 依序分別為甲、乙和丙咖啡飲料咖啡因含量的樣本變異數。

A.設定顯著水準 $\alpha = 0.05$，臨界值$F_{\alpha,k-1,n_t-k} = F_{0.05,3-1,15-3} = F_{0.05,2,12} = 3.8853$(使用 Excel 軟體 F.INV.RT 函數查詢獲得)。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$ 咖啡飲料三種個別咖啡因含量的母體平均值皆相等。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_i \neq \mu_j$ 咖啡飲料三種個別咖啡因含量的母體平均值不全部相等。

D.計算檢定統計值—F 值

$$\text{SSTR} = \sum_{j=1}^{k} n_j \times \left(\bar{x}_j - \bar{\bar{x}}\right)^2 = 5 \times (157.6 - 134.7333)^2 + 5 \times (130.2 - 134.7333)^2 + 5 \times (116.4 - 134.7333)^2$$
$$= 2614.4222 + 102.7556 + 1680.5556 = 4397.7333$$

$$\text{MSTR} = \frac{\text{SSTR}}{k-1} = \frac{4397.7333}{3-1} = 2198.8667$$

$$\text{SSE} = \sum_{j=1}^{k}(n_j - 1) \times S_j^2 = (5-1) \times 132.8 + (5-1) \times 14.7 + (5-1) \times 188.8 = 531.2 + 58.8 + 755.2 = 1345.2$$

$$\text{MSE} = \frac{\sum_{j=1}^{k}(n_j-1)\times S_j^2}{n_t-k} = \frac{\text{SSE}}{n_t-k} = \frac{1345.2}{15-3} = 112.1$$

$$\text{檢定統計值 } F = \frac{\text{MSTR}}{\text{MSE}} = \frac{2198.8667}{112.1} = 19.6152$$

E.檢定統計值—$F = 19.6152 >$ 臨界值$F_{\alpha,k-1,n_t-k} = 3.8853$，拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$ 咖啡飲料三種個別咖啡因含量的母體平均值皆相等，接受對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_i \neq \mu_j$ 咖

啡飲料三種個別咖啡因含量的母體平均值不全部相等。因此，該速食咖啡廳甲、乙和丙三種咖啡飲料咖啡因含量有不相同者，彼此之間有顯著性的差異。

利用費雪最低顯著差異法(Fisher’s LSD)估算 $\mu_1 - \mu_2$ 信賴區間：

A.設定顯著水準 $\alpha = 0.05$。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_1 = \mu_2$。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_1 \neq \mu_2$。

D.計算信賴區間：$|\bar{x}_1 - \bar{x}_2| \pm \text{LSD} = |157.6 - 130.2| \pm 14.5898 = 27.4000 \pm 14.5898$

其中 $\text{LSD} = t_{\frac{\alpha}{2},v=n_t-k} \times \sqrt{\text{MSE} \times \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)} = t_{\frac{0.05}{2},15-3} \times \sqrt{112.1 \times \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{5}\right)} = 2.1788 \times 6.6963 = 14.5898$

E.因信賴區間未包括數值 0，故判別拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_1 = \mu_2$，接受對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_1 \neq \mu_2$。因 $\bar{x}_1 = 157.6 > \bar{x}_2 = 130.2$，故推論 μ_1 有顯著性的高於 μ_2。甲咖啡飲料咖啡因含量顯著性的高於乙咖啡飲料。

利用費雪最低顯著差異法(Fisher’s LSD)估算 $\mu_1 - \mu_3$ 信賴區間：

A.設定顯著水準 $\alpha = 0.05$。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_1 = \mu_3$。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_1 \neq \mu_3$。

D.計算信賴區間：$|\bar{x}_1 - \bar{x}_3| \pm \text{LSD} = |157.6 - 116.4| \pm 14.5898 = 41.2000 \pm 14.5898$

其中 $\text{LSD} = t_{\frac{\alpha}{2},v=n_t-k} \times \sqrt{\text{MSE} \times \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_3}\right)} = t_{\frac{0.05}{2},15-3} \times \sqrt{112.1 \times \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{5}\right)} = 2.1788 \times 6.6963 = 14.5898$

E.因信賴區間未包括數值 0，故判別拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_1 = \mu_3$，接受對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_1 \neq \mu_3$。因 $\bar{x}_1 = 157.6 > \bar{x}_3 = 116.4$，故推論 μ_1 有顯著性的高於 μ_3。甲咖啡飲料咖啡因含量顯著性的高於丙咖啡飲料。

利用費雪最低顯著差異法(Fisher’s LSD)估算 $\mu_2 - \mu_3$ 信賴區間：

A.設定顯著水準 $\alpha = 0.05$。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_2 = \mu_3$。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_2 \neq \mu_3$。

D.計算信賴區間：$|\bar{x}_2 - \bar{x}_3| \pm \text{LSD} = |130.2 - 116.4| \pm 14.5898 = 13.8000 \pm 14.5898$

其中 $\text{LSD} = t_{\frac{\alpha}{2},v=n_t-k} \times \sqrt{\text{MSE} \times \left(\frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3}\right)} = t_{\frac{0.05}{2},15-3} \times \sqrt{112.1 \times \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{5}\right)} = 2.1788 \times 6.6963 = 14.5898$

E.因信賴區間包括數值 0，故判別接受虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_2 = \mu_3$，故 μ_2 和 μ_3 之間無達到顯著性的差異水準。乙咖啡飲料和丙咖啡飲料咖啡因含量沒有達到顯著性的差異水準。

練習 13.7 在針對一個國際觀光旅館專職員工的工作士氣抽樣調查中，依據員工服務年資分為三組，各組各調查 4~5 位員工，調查數據如下表所示(假設工作士氣的分布使屬於常態分布)，利用費雪最低顯著差異法(Fisher’s LSD)估算兩母體平均值之差的信賴區間，分別 1 對 1 配對比較三組員工工作士氣是否相同？

服務年資	工作士氣量表分數				
1 年以下	71	70	78	80	83
1(含)~5 年以下	68	52	70	66	62
5 年(含)以上	90	86	79	83	

題解：設 μ_1、μ_2 和 μ_3 依序分別為「1 年以下」、「1(含)~5 年以下」和「5 年(含)以上」三組工作士氣的母體平均值。$\bar{x}_1 = 76.4$、$\bar{x}_2 = 63.6$ 和 $\bar{x}_3 = 84.5$ 依序分別為「1 年以下」、「1(含)~5 年以下」和「5 年(含)以上」三組工作士氣的樣本平均值。$k = 3$ 欲進行母體平均值檢定的母體數量。「1 年以下」組樣本數量 $n_1 = 5$，「1(含)~5 年以下」組樣本數量 $n_2 = 5$，「5 年(含)以上」組樣本數量 $n_3 = 4$，樣本總數 $n_t = n_1 + n_2 + n_3 = 14$。全部樣本平均值 $\bar{\bar{x}} = \frac{\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j} x_{ij}}{n_t} = \frac{71+70+78+80+83+68+52+70+66+62+90+86+79+83}{14} = \frac{1038}{14} = 74.1429$。$S_1^2 = 32.30$、$S_2^2 = 50.80$ 和 $S_3^2 = 21.67$ 依序分別為「1 年以下」、「1(含)~5 年以下」和「5 年(含)以上」三組工作士氣的樣本變異數。

A.設定顯著水準 $\alpha = 0.05$，臨界值 $F_{\alpha,k-1,n_t-k} = F_{0.05,3-1,14-3} = F_{0.05,2,11} = 3.9823$(使用 Excel 軟體 F.INV.RT 函數查詢獲得)。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$ 服務年資三種層級個別工作士氣量表分數的母體平均值皆相等。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_i \neq \mu_j$ 服務年資三種層級個別工作士氣量表分數的母體平均值不全部相等。

D.計算檢定統計值—F 值

$\text{SSTR} = \sum_{j=1}^{k} n_j \times \left(\bar{x}_j - \bar{\bar{x}}\right)^2 = 5 \times (76.4 - 74.1429)^2 + 5 \times (63.6 - 74.1429)^2 + 4 \times (84.5 - 74.1429)^2 = 25.4735 + 555.7592 + 429.0816 = 1010.3143$

$\text{MSTR} = \frac{\text{SSTR}}{k-1} = \frac{1010.3143}{3-1} = 505.1571$

$\text{SSE} = \sum_{j=1}^{k}\left(n_j - 1\right) \times S_j^2 = (5 - 1) \times 32.30 + (5 - 1) \times 50.80 + (4 - 1) \times 21.67 = 129.20 + 203.20 + 65.00 = 397.40$

$\text{MSE} = \frac{\sum_{j=1}^{k}(n_j-1)\times S_j^2}{n_t-k} = \frac{\text{SSE}}{n_t-k} = \frac{397.40}{14-3} = 36.1273$

檢定統計值 $F = \frac{\text{MSTR}}{\text{MSE}} = \frac{505.1571}{36.1273} = 13.9827$

E.檢定統計值 $F = 13.9827$ > 臨界值 $F_{\alpha,k-1,n_t-k} = 3.9823$，拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$ 服務年資三種層級個別工作士氣量表分數的母體平均值皆相等，接受對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_i \neq \mu_j$ 服務年資三種層級個別工作士氣量表分數的母體平均值不全部相等。因此，「1 年以下」、「1(含)~5 年以下」和「5 年(含)以上」三組工作士氣有不相同者，彼此之間有達到顯著性的差異。

變異數分析表(ANOVA table)

變異來源(Source of variation)	平方和(Sum of squares)	自由度(Degrees of freedom)	均方(Mean square)	F 值
樣本間變異或組間變異(Treatments)	1010.3143	2	505.1571	13.9827
樣本內變異、組內變異或誤差(Error)	397.40	11	36.1273	
合計(Total)	1407.7143	13		

利用**費雪最低顯著差異法**(Fisher's LSD)估算 $\mu_1 - \mu_2$ 信賴區間：

A.設定顯著水準 $\alpha = 0.05$。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_1 = \mu_2$。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_1 \neq \mu_2$。

D.計算信賴區間：$|\bar{x}_1 - \bar{x}_2| \pm \text{LSD} = |76.4 - 63.6| \pm 8.3669 = 12.8000 \pm 8.3669$

其中 $\text{LSD} = t_{\frac{\alpha}{2},n_t-k} \times \sqrt{\text{MSE} \times \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)} = t_{\frac{0.05}{2},14-3} \times \sqrt{36.1273 \times \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{5}\right)} = 2.2010 \times 3.8014 = 8.3669$

$t_{\frac{\alpha}{2},n_t-k} = t_{\frac{0.05}{2},14-3} = 2.2010$(使用 Excel 軟體 T.INV.2T 函數查詢獲得)

E.因信賴區間 4.4331~21.1669 未包括數值 0，故判別拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_1 = \mu_2$，接受對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_1 \neq \mu_2$。因$\bar{x}_1 = 76.4 > \bar{x}_2 = 63.6$，故推論 μ_1 有顯著性的高於 μ_2。「1 年以下」組工作士氣顯著性的高於「1(含)~5 年以下」組工作士氣。

利用**費雪最低顯著差異法**(Fisher's LSD)估算 $\mu_1 - \mu_3$ 信賴區間：

A.設定顯著水準 $\alpha = 0.05$。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_1 = \mu_3$。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_1 \neq \mu_3$。

D.計算信賴區間：$|\bar{x}_1 - \bar{x}_3| \pm \text{LSD} = |76.4 - 84.5| \pm 8.8744 = 8.1000 \pm 8.8744$

其中 $\text{LSD} = t_{\frac{\alpha}{2},n_t-k} \times \sqrt{\text{MSE} \times \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_3}\right)} = t_{\frac{0.05}{2},14-3} \times \sqrt{36.1273 \times \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{4}\right)} = 2.2010 \times 4.0320 = 8.8744$

$t_{\frac{\alpha}{2},n_t-k} = t_{\frac{0.05}{2},14-3} = 2.2010$(使用 Excel 軟體 T.INV.2T 函數查詢獲得)

E.因信賴區間-0.7744~16.9744 包括數值 0，故判別接受虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_1 = \mu_3$，故 μ_1 和 μ_3 之間無達到顯著性的差異水準。「1 年以下」組和「5 年(含)以上」組工作士氣沒有達到顯著性的差異水準。

利用**費雪最低顯著差異法**(Fisher's LSD)估算 $\mu_2 - \mu_3$ 信賴區間：

A.設定顯著水準 $\alpha = 0.05$。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_2 = \mu_3$。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_2 \neq \mu_3$。

D.計算信賴區間：$|\bar{x}_2 - \bar{x}_3| \pm \text{LSD} = |63.6 - 84.5| \pm 8.8744 = 20.9000 \pm 8.8744$

其中 $\text{LSD} = t_{\frac{\alpha}{2},n_t-k} \times \sqrt{\text{MSE} \times \left(\frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3}\right)} = t_{\frac{0.05}{2},14-3} \times \sqrt{36.1273 \times \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{4}\right)} = 2.2010 \times 4.0320 = 8.8744$

$t_{\frac{\alpha}{2},n_t-k} = t_{\frac{0.05}{2},14-3} = 2.2010$(使用 Excel 軟體 T.INV.2T 函數查詢獲得)

E.因信賴區間 12.0256~29.7744 未包括數值 0，故判別拒絕接受虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_2 = \mu_3$，接受對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_2 \neq \mu_2$。因$\bar{x}_2 = 63.6 < \bar{x}_3 = 84.5$，故推論 μ_3 有顯著性的高於 μ_2。「5 年(含)以上」組工作士氣顯著性的高於「1(含)~5 年以下」組工作士氣。

13.3.2.2 薛費法

薛費檢定法或薛費法(Scheffe's method)是由薛費(H. Scheff'e)於 1959 年提出一種是適用範圍相當廣泛的多重比較法，不論各組樣本數量相等或不相等皆可適用。此法分析時對於分布常態性與變異一致性兩項假設之違反比較不敏感，而且犯型一錯誤機率較小。

在變異數分析中，有 k 個母體平均值，若欲進行分別 1 對 1 比較 2 個母體平均值之差 $\mu_i - \mu_j$ $(i \neq j)$，在信賴水準 $1 - \alpha$ 或顯著水準 α 的信賴區間估算：

$$|\bar{x}_i - \bar{x}_j| \pm \sqrt{(k-1) \times F_{\alpha,k-1,n_t-k}} \times \sqrt{\text{MSE} \times \left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j}\right)}$$

其中$F_{\alpha,k-1,n_t-k}$：分子自由度 v_1 等於 $k - 1$，分母自由度 v_2 等於 $n_t - k$ 的 F 分布右尾機率 α 的臨界值。

範例 13.8　九如速食連鎖餐廳有 A1、A2 和 A3 三家加盟店，欲瞭解三家加盟店服務品質是否相同，分別抽取 5、6 和 7 位消費者進行服務品質問卷評量，評量的結果如下表所示：試在顯著水準 $\alpha = 0.05$ 下，利用**薛費檢定法**(Scheffe's method)估算兩母體平均值之差的信賴區間，分別 1 對 1 配對比較三家加盟店的服務品質是否相同？

樣本	加盟店 A1	加盟店 A2	加盟店 A3
1	80	92	95
2	85	94	98
3	90	93	92
4	85	90	88
5	88	91	98
6		98	90
7			95
合計	428	558	656
樣本平均值	85.6	93.0	93.7
樣本變異數	14.30	8.00	14.90
樣本標準(偏)差	3.7815	2.8284	3.8607

題解：設 μ_1、μ_2 和 μ_3 依序分別為加盟店 A1、A2 和 A3 服務品質的母體平均值。$\bar{x}_1 = 85.6$、$\bar{x}_2 = 93.0$ 和$\bar{x}_3 = 93.7143$ 依序分別為加盟店 A1、A2 和 A3 服務品質的樣本平均值。$k = 3$ 欲進行母體平均值檢定的母體數量。加盟店 A1 樣本數量 $n_1 = 5$，加盟店 A2 樣本數量 $n_2 = 6$，加盟店 A3 樣本數量 $n_3 = 7$，樣本總數 $n_t = n_1 + n_2 + n_3 = 18$。全部樣本平均值$\bar{\bar{x}} = \frac{\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j} x_{ij}}{n_t} = \frac{\sum_{j=1}^{k}(n_j \times \bar{x}_j)}{n_t} = \frac{428+558+656}{18} = 91.22$。$S_1^2 = 14.30$、$S_2^2 = 8.00$ 和$S_3^2 = 14.90$ 依序分別為加盟店 A1、A2 和 A3 服務品質的樣本變異數。

A.設定顯著水準 $\alpha = 0.05$，臨界值$F_{\alpha,k-1,n_t-k} = F_{0.05,3-1,18-3} = F_{0.05,2,15} = 3.6823$(使用 Excel 軟體 F.INV.RT 函數查詢獲得)。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$ 加盟店 3 家個別服務品質的母體平均值皆相等。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_i \neq \mu_j$ 加盟店 3 家個別服務品質的母體平均值不全部相等。

D.計算檢定統計值−F 值

$SSTR = \sum_{j=1}^{k} n_j \times (\bar{x}_j - \bar{\bar{x}})^2 = 5 \times (85.6 - 91.22)^2 + 6 \times (93.0 - 91.22)^2 + 7 \times (93.7 - 91.22)^2 = 158.05 + 18.96 + 43.47 = 220.48$

$MSTR = \frac{SSTR}{k-1} = \frac{220.48}{3-1} = 110.24$

$SSE = \sum_{j=1}^{k}(n_j - 1) \times S_j^2 = (5 - 1) \times 14.30 + (6 - 1) \times 8.00 + (7 - 1) \times 14.90 = 57.2 + 40.0 + 89.4 = 186.6$

$MSE = \frac{\sum_{j=1}^{k}(n_j-1)\times S_j^2}{n_t-k} = \frac{SSE}{n_t-k} = \frac{186.6}{18-3} = 12.4419$

檢定統計值 $F = \frac{MSTR}{MSE} = \frac{110.24}{12.4419} = 8.8605$

E.檢定統計值 $F = 8.8605$ > 臨界值$F_{\alpha,k-1,n_t-k} = 3.6823$，拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$ 加盟店 3 家個別服務品質的母體平均值皆相等，接受對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_i \neq \mu_j$ 加盟店 3 家個別服務品質的母體平均值不全部相等。因此，該速食連鎖餐廳 A1、A2 和 A3 三家加盟店的服務品質有不相同者，彼此之間有顯著性的差異。

利用**薛費檢定法**(Scheffe's method)估算 $\mu_1 - \mu_2$ 信賴區間：

A.設定顯著水準 $\alpha = 0.05$。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_1 = \mu_2$。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_1 \neq \mu_2$。

D.計算信賴區間：$|\bar{x}_1 - \bar{x}_2| \pm \sqrt{(k-1) \times F_{\alpha,k-1,n_t-k}} \times \sqrt{MSE \times \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)} = 7.4000 \pm 5.7964$

其中$F_{\alpha,k-1,n_t-k} = F_{0.05,3-1,18-3} = F_{0.05,2,15} = 3.6823$(使用 Excel 軟體 F.INV.RT 函數查詢獲得)

$\sqrt{(k-1) \times F_{\alpha,k-1,n_t-k}} \times \sqrt{MSE \times \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)} = \sqrt{(3-1) \times 3.6823} \times \sqrt{12.4419 \times \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right)} = 2.7138 \times 2.1359 = 5.7964$

$|\bar{x}_1 - \bar{x}_2| = |85.6 - 93.0| = 7.4000$

E.因信賴區間未包括 0，故判別拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_1 = \mu_2$，接受對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_1 \neq \mu_2$。因$\bar{x}_1 = 85.6 < \bar{x}_2 = 93.0$，故推論 μ_2 有顯著性的高於 μ_1。加盟店 A2 服務品質顯著性的高於加盟店 A1。

利用**薛費檢定法**(Scheffe's method)估算 $\mu_1 - \mu_3$ 信賴區間：

A.設定顯著水準 $\alpha = 0.05$。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_1 = \mu_3$。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_1 \neq \mu_3$。

D.計算信賴區間：$|\bar{x}_1 - \bar{x}_3| \pm \sqrt{(k-1)\times F_{\alpha,k-1,n_t-k}} \times \sqrt{\text{MSE}\times\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_3}\right)} = 8.1143 \pm 5.6050$

其中$F_{\alpha,k-1,n_t-k} = F_{0.05,3-1,18-3} = F_{0.05,2,15} = 3.6823$(使用 Excel 軟體 F.INV.RT 函數查詢獲得)

$\sqrt{(k-1)\times F_{\alpha,k-1,n_t-k}} \times \sqrt{\text{MSE}\times\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_3}\right)} = \sqrt{(3-1)\times 3.6823} \times \sqrt{12.4419\times\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\right)} = 2.7138 \times 2.0654 = 5.6050$

$|\bar{x}_1 - \bar{x}_3| = |85.6 - 93.7413| = 8.1143$

E.因信賴區間未包括 0，故判別拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_1 = \mu_3$，接受對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_1 \neq \mu_3$。因$\bar{x}_1 = 85.6 < \bar{x}_3 = 93.7143$，故推論 μ_3 有顯著性的高於 μ_1。加盟店 A3 服務品質顯著性的高於加盟店 A1。

利用**薛費檢定法**(Scheffe's method)估算 $\mu_2 - \mu_3$ 信賴區間：

A.設定顯著水準 $\alpha = 0.05$。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_2 = \mu_3$。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_2 \neq \mu_3$。

D.計算信賴區間：$|\bar{x}_2 - \bar{x}_3| \pm \sqrt{(k-1)\times F_{\alpha,k-1,n_t-k}} \times \sqrt{\text{MSE}\times\left(\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}\right)} = 0.7143 \pm 5.3256$

其中$F_{\alpha,k-1,n_t-k} = F_{0.05,3-1,18-3} = F_{0.05,2,15} = 3.6823$(使用 Excel 軟體 F.INV.RT 函數查詢獲得)

$\sqrt{(k-1)\times F_{\alpha,k-1,n_t-k}} \times \sqrt{\text{MSE}\times\left(\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}\right)} = \sqrt{(3-1)\times 3.6823} \times \sqrt{12.4419\times\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right)} = 2.7138 \times 1.9624 = 5.3256$

$|\bar{x}_2 - \bar{x}_3| = |93.0 - 93.7143| = 0.7143$

E.因信賴區間包括 0，故判別接受虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_2 = \mu_3$，故 μ_2 和 μ_3 之間無達到顯著性的差異水準。加盟店 A2 和加盟店 A3 服務品質沒有達到顯著性的差異水準。

練習 13.8　九如連鎖咖啡廳販售甲、乙與丙三種咖啡飲料，各隨機抽取 5 杯飲料測量咖啡因含量(mg/100 ml)如下表所示：試在顯著水準 $\alpha = 0.05$ 下，利用**薛費檢定法**(Scheffe's method)估算兩母體平均值之差的信賴區間，分別 1 對 1 配對比較三種咖啡飲料咖啡因含量是否相同？

咖啡飲料	咖啡因含量(mg/100 ml)				
甲	151	162	145	175	155
乙	128	132	135	125	131
丙	105	125	133	100	119

題解：設 μ_1、μ_2 和 μ_3 依序分別為甲、乙和丙咖啡飲料咖啡因含量的母體平均值(mg/100 ml)。$\bar{x}_1 = 157.6$、$\bar{x}_2 = 130.2$ 和$\bar{x}_3 = 116.4$ 依序分別為甲、乙和丙咖啡飲料咖啡因含量的樣本平均值(mg/100 ml)。$k = 3$ 欲進行母體平均值檢定的母體數量。甲咖啡樣本數量 $n_1 = 5$，乙咖啡樣本數量 $n_2 = 5$，丙咖啡樣本數量 $n_3 = 5$，樣本總數 $n_t = n_1 + n_2 + n_3 = 15$。全部樣本平均值$\bar{\bar{x}} = \frac{\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j} x_{ij}}{n_t} = \frac{\sum_{j=1}^{k}(n_j\times\bar{x}_j)}{n_t} = \frac{788+651+582}{15} =$

134.7333。S_1^2 = 132.8、S_2^2 = 14.7 和S_3^2 = 188.8 依序分別為甲、乙和丙咖啡飲料咖啡因含量的樣本變異數。

A.設定顯著水準 $\alpha = 0.05$，臨界值$F_{\alpha,k-1,n_t-k} = F_{0.05,3-1,15-3} = F_{0.05,2,12} = 3.8853$(使用 Excel 軟體 F.INV.RT 函數查詢獲得)。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$ 咖啡飲料三種個別咖啡因含量的母體平均值皆相等。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_i \neq \mu_j$ 咖啡飲料三種個別咖啡因含量的母體平均值不全部相等。

D.計算檢定統計值─F 值

$$\text{SSTR} = \sum_{j=1}^{k} n_j \times \left(\bar{x}_j - \bar{\bar{x}}\right)^2 = 5 \times (157.6 - 134.7333)^2 + 5 \times (130.2 - 134.7333)^2 + 5 \times (116.4 - 134.7333)^2$$
$$= 2614.4222 + 102.7556 + 1680.5556 = 4397.7333$$

$$\text{MSTR} = \frac{\text{SSTR}}{k-1} = \frac{4397.7333}{3-1} = 2198.8667$$

$$\text{SSE} = \sum_{j=1}^{k} (n_j - 1) \times S_j^2 = (5-1) \times 132.8 + (5-1) \times 14.7 + (5-1) \times 188.8 = 531.2 + 58.8 + 755.2 = 1345.2$$

$$\text{MSE} = \frac{\sum_{j=1}^{k}(n_j-1)\times S_j^2}{n_t-k} = \frac{\text{SSE}}{n_t-k} = \frac{1345.2}{15-3} = 112.1$$

$$\text{檢定統計值 } F = \frac{\text{MSTR}}{\text{MSE}} = \frac{2198.8667}{112.1} = 19.6152$$

E.檢定統計值 $F = 19.6152$ ＞ 臨界值$F_{\alpha,k-1,n_t-k} = 3.8853$，拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$ 咖啡飲料三種個別咖啡因含量的母體平均值皆相等，接受對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_i \neq \mu_j$ 咖啡飲料三種個別咖啡因含量的母體平均值不全部相等。因此，該速食咖啡廳甲、乙和丙三種咖啡飲料咖啡因含量有不相同者，彼此之間有顯著性的差異。

利用**薛費檢定法**(Scheffe's method)估算 $\mu_1 - \mu_2$ 信賴區間：

A.設定顯著水準 $\alpha = 0.05$。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_1 = \mu_2$。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_1 \neq \mu_2$。

D.計算信賴區間：$|\bar{x}_1 - \bar{x}_2| \pm \sqrt{(k-1) \times F_{\alpha,k-1,n_t-k}} \times \sqrt{\text{MSE} \times \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)} = 27.4000 \pm 18.6665$

其中$F_{\alpha,k-1,n_t-k} = F_{0.05,3-1,15-3} = F_{0.05,2,12} = 3.8853$(使用 Excel 軟體 F.INV.RT 函數查詢獲得)

$$\sqrt{(k-1) \times F_{\alpha,k-1,n_t-k}} \times \sqrt{\text{MSE} \times \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)} = \sqrt{(3-1) \times 3.8853} \times \sqrt{112.1 \times \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{5}\right)} = 2.7876 \times 6.6963 = 18.6665$$

$|\bar{x}_1 - \bar{x}_2| = |157.6 - 130.2| = 27.4000$

E.因信賴區間未包括 0，故判別拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_1 = \mu_2$，接受對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_1 \neq \mu_2$。因$\bar{x}_1 = 157.6 > \bar{x}_2 = 130.2$，故推論 μ_1 有顯著性的高於 μ_2。甲咖啡飲料咖啡因含量顯著性的高於乙咖啡飲料。

利用**薛費檢定法**(Scheffe's method)估算 $\mu_1 - \mu_3$ 信賴區間：

A.設定顯著水準 $\alpha = 0.05$。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_1 = \mu_3$。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_1 \neq \mu_3$。

D.計算信賴區間：$|\bar{x}_1 - \bar{x}_3| \pm \sqrt{(k-1) \times F_{\alpha,k-1,n_t-k}} \times \sqrt{\text{MSE} \times \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_3}\right)} = 41.2000 \pm 18.6665$

其中$F_{\alpha,k-1,n_t-k} = F_{0.05,3-1,15-3} = F_{0.05,2,12} = 3.8853$(使用 Excel 軟體 F.INV.RT 函數查詢獲得)

$$\sqrt{(k-1) \times F_{\alpha,k-1,n_t-k}} \times \sqrt{\text{MSE} \times \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_3}\right)} = \sqrt{(3-1) \times 3.8853} \times \sqrt{112.1 \times \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{5}\right)} = 2.7876 \times 6.6963 = 18.6665$$

$|\bar{x}_1 - \bar{x}_3| = |157.6 - 116.4| = 41.2000$

E.因信賴區間未包括 0，故判別拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_1 = \mu_3$，接受對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_1 \neq \mu_3$。因$\bar{x}_1 = 157.6 > \bar{x}_3 = 116.4$，故推論 μ_1 有顯著性的高於 μ_3。甲咖啡飲料咖啡因含量顯著性的高於丙咖啡飲料。

利用**薛費檢定法**(Scheffe's method)估算 $\mu_2 - \mu_3$ 信賴區間：

A.設定顯著水準 $\alpha = 0.05$。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_2 = \mu_3$。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_2 \neq \mu_3$。

D.計算信賴區間：$|\bar{x}_2 - \bar{x}_3| \pm \sqrt{(k-1) \times F_{\alpha,k-1,n_t-k}} \times \sqrt{\text{MSE} \times \left(\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}\right)} = 13.8000 \pm 18.6665$

其中$F_{\alpha,k-1,n_t-k} = F_{0.05,3-1,15-3} = F_{0.05,2,12} = 3.8853$(使用 Excel 軟體 F.INV.RT 函數查詢獲得)

$\sqrt{(k-1) \times F_{\alpha,k-1,n_t-k}} \times \sqrt{\text{MSE} \times \left(\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}\right)} = \sqrt{(3-1) \times 3.8853} \times \sqrt{112.1 \times \left(\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\right)} = 2.7876 \times 6.6963 = 18.6665$

$|\bar{x}_2 - \bar{x}_3| = |130.2 - 116.4| = 13.8000$

E.因信賴區間包括 0，故判別接受虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_2 = \mu_3$，故 μ_2 和 μ_3 之間無達到顯著性的差異水準。乙咖啡飲料和丙咖啡飲料咖啡因含量沒有達到顯著性的差異水準。

練習 13.9 在針對一個國際觀光旅館專職員工的工作士氣抽樣調查中，依據員工服務年資分為三組，各組各調查 4~5 位員工，調查數據如下表所示(假設工作士氣的分布使屬於常態分布)，利用**薛費檢定法**(Scheffe's method)估算兩母體平均值之差的信賴區間，分別 1 對 1 配對比較三組員工工作士氣是否相同？

服務年資	工作士氣量表分數				
1 年以下	71	70	78	80	83
1(含)~5 年以下	68	52	70	66	62
5 年(含)以上	90	86	79	83	

題解：設 μ_1、μ_2 和 μ_3 依序分別為「1 年以下」、「1(含)~5 年以下」和「5 年(含)以上」三組工作士氣的母體平均值。$\bar{x}_1 = 76.4$、$\bar{x}_2 = 63.6$ 和$\bar{x}_3 = 84.5$ 依序分別為「1 年以下」、「1(含)~5 年以下」和「5 年(含)以上」三組工作士氣的樣本平均值。$k = 3$ 欲進行母體平均值檢定的母體數量。「1 年以下」組樣本數量 $n_1 = 5$，「1(含)~5 年以下」組樣本數量 $n_2 = 5$，「5 年(含)以上」組樣本數量 $n_3 = 4$，樣本總數 $n_t = n_1 + n_2 + n_3 = 14$。全部樣本平均值$\bar{\bar{x}} = \frac{\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j} x_{ij}}{n_t} = \frac{71+70+78+80+83+68+52+70+66+62+90+86+79+83}{14} = \frac{1038}{14} = 74.1429$。$S_1^2 = 32.30$、$S_2^2 = 50.80$ 和$S_3^2 = 21.67$ 依序分別為「1 年以下」、「1(含)~5 年以下」和「5 年(含)以上」三組工作士氣的樣本變異數。

A.設定顯著水準 $\alpha = 0.05$，臨界值$F_{\alpha,k-1,n_t-k} = F_{0.05,3-1,14-3} = F_{0.05,2,11} = 3.9823$(使用 Excel 軟體 F.INV.RT 函數查詢獲得)。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$ 服務年資三種層級個別工作士氣量表分數的母體平均值皆相等。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_i \neq \mu_j$ 服務年資三種層級個別工作士氣量表分數的母體平均值不全部相等。

D.計算檢定統計值−F 值

$\text{SSTR} = \sum_{j=1}^{k} n_j \times \left(\bar{x}_j - \bar{\bar{x}}\right)^2 = 5 \times (76.4 - 74.1429)^2 + 5 \times (63.6 - 74.1429)^2 + 4 \times (84.5 - 74.1429)^2 = 25.4735 + 555.7592 + 429.0816 = 1010.3143$

$\text{MSTR} = \frac{\text{SSTR}}{k-1} = \frac{1010.3143}{3-1} = 505.1571$

$\text{SSE} = \sum_{j=1}^{k}(n_j-1)\times S_j^2 = (5-1)\times 32.30 + (5-1)\times 50.80 + (4-1)\times 21.67 = 129.20 + 203.20 + 65.00 = 397.40$

$\text{MSE} = \frac{\sum_{j=1}^{k}(n_j-1)\times S_j^2}{n_t-k} = \frac{\text{SSE}}{n_t-k} = \frac{397.40}{14-3} = 36.1273$

檢定統計值 $F = \frac{\text{MSTR}}{\text{MSE}} = \frac{505.1571}{36.1273} = 13.9827$

E.檢定統計值 $F = 13.9827$ > 臨界值$F_{\alpha,k-1,n_t-k} = 3.9823$，拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$ 服務年資三種層級個別工作士氣量表分數的母體平均值皆相等，接受對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_i \neq \mu_j$ 服務年資三種層級個別工作士氣量表分數的母體平均值不全部相等。因此，「1 年以下」、「1(含)~5 年以下」和「5 年(含)以上」三組工作士氣有不相同者，彼此之間有達到顯著性的差異。

變異數分析表(ANOVA table)

變異來源(Source of variation)	平方和(Sum of squares)	自由度(Degrees of freedom)	均方(Mean square)	F 值
樣本間變異或組間變異(Treatments)	1010.3143	2	505.1571	13.9827
樣本內變異、組內變異或誤差 (Error)	397.40	11	36.1273	
合計(Total)	1407.7143	13		

利用**薛費檢定法**(Scheffe's method)估算 $\mu_1 - \mu_2$ 信賴區間：

A.設定顯著水準 $\alpha = 0.05$。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_1 = \mu_2$。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_1 \neq \mu_2$。

D.計算信賴區間：$|\bar{x}_1 - \bar{x}_2| \pm \sqrt{(k-1)\times F_{\alpha,k-1,n_t-k}} \times \sqrt{\text{MSE}\times\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)} = 12.8000 \pm 10.7283$

其中$F_{\alpha,k-1,n_t-k} = F_{0.05,3-1,14-3} = F_{0.05,2,11} = 3.9823$(使用 Excel 軟體 F.INV.RT 函數查詢獲得)

$\sqrt{(k-1)\times F_{\alpha,k-1,n_t-k}} \times \sqrt{\text{MSE}\times\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)} = \sqrt{(3-1)\times 3.9823} \times \sqrt{36.1273\times\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\right)} = 2.8222 \times 3.8014 = 10.7283$

$|\bar{x}_1 - \bar{x}_2| = |76.4 - 63.6| = 12.8$

E.因信賴區間 2.0717~23.5283 未包括數值 0，故判別拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_1 = \mu_2$，接受對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_1 \neq \mu_2$。因$\bar{x}_1 = 76.4 > \bar{x}_2 = 63.6$，故推論 μ_1 有顯著性的高於 μ_2。「1 年以下」組工作士氣顯著性的高於「1(含)~5 年以下」組工作士氣。

利用**薛費檢定法**(Scheffe's method)估算 $\mu_1 - \mu_3$ 信賴區間：

A.設定顯著水準 $\alpha = 0.05$。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_1 = \mu_3$。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_1 \neq \mu_3$。

D.計算信賴區間：$|\bar{x}_1 - \bar{x}_3| \pm \sqrt{(k-1)\times F_{\alpha,k-1,n_t-k}} \times \sqrt{\text{MSE}\times\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_3}\right)} = 8.1000 \pm 11.3790$

其中$F_{\alpha,k-1,n_t-k} = F_{0.05,3-1,15-3} = F_{0.05,2,12} = 3.9823$(使用 Excel 軟體 F.INV.RT 函數查詢獲得)

$\sqrt{(k-1)\times F_{\alpha,k-1,n_t-k}} \times \sqrt{\text{MSE}\times\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_3}\right)} = \sqrt{(3-1)\times 3.9823} \times \sqrt{36.1273\times\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{4}\right)} = 2.8222 \times 4.0320 = 11.3790$

$|\bar{x}_1 - \bar{x}_3| = |76.4 - 84.5| = 8.1$

E.因信賴區間-3.2790~19.4790 包括數值 0，故判別接受虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_1 = \mu_3$，故 μ_1 和 μ_3 之間無達到顯著性的差異水準。「1 年以下」組和「5 年(含)以上」組工作士氣沒有達到顯著性的差異水準。

利用**薛費檢定法**(Scheffe's method)估算 $\mu_2 - \mu_3$ 信賴區間：

A.設定顯著水準 $\alpha = 0.05$。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_2 = \mu_3$。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_2 \neq \mu_3$。

D.計算信賴區間：$|\bar{x}_2 - \bar{x}_3| \pm \sqrt{(k-1)\times F_{\alpha,k-1,n_t-k}} \times \sqrt{\text{MSE}\times\left(\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}\right)} = 20.9000 \pm 11.3790$

其中$F_{k-1,n_t-k,\alpha} = F_{0.05,3-1,15-3} = F_{0.05,2,12} = 3.9823$(使用 Excel 軟體 F.INV.RT 函數查詢獲得)

$$\sqrt{(k-1)\times F_{\alpha,k-1,n_t-k}} \times \sqrt{\text{MSE}\times\left(\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}\right)} = \sqrt{(3-1)\times 3.9823} \times \sqrt{36.1273\times\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{4}\right)} =$$

$2.8222 \times 4.0320 = 11.3790$

$|\bar{x}_2 - \bar{x}_3| = |63.6 - 84.5| = 20.9$

E.因信賴區間 9.5210~32.2790 未包括數值 0，故判別拒絕接受虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_2 = \mu_3$，接受對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_2 \neq \mu_2$。因$\bar{x}_2 = 63.6 < \bar{x}_3 = 84.5$，故推論 μ_3 有顯著性的高於 μ_2。「5 年(含)以上」組工作士氣顯著性的高於「1(含)~5 年以下」組工作士氣。

13.3.2.3 鄧肯法【選擇教材】

鄧肯法或鄧肯氏法(Duncan method; Duncan's multiple-range test)是鄧肯(D.B. Duncan, 1955, 1957)提出的一種差距檢定法，必須使用特別的臨界值表。

在變異數分析中，有 k 個母體平均值，若欲進行分別 1 對 1 比較 2 個母體平均值之差 $\mu_i - \mu_j$ $(i \neq j)$

$$|\bar{x}_i - \bar{x}_j| \pm \mathrm{Q}_{\alpha,k,v=n_t-k} \times \sqrt{\frac{\text{MSE}}{n}}$$

其中 $n = n_i = n_j = n_k$：各處理組的重複數量，若 $n_i \neq n_j$ 時，可利用所有處理組別重複數量的幾何平均值或調和平均值取代 n 值。

$\mathrm{Q}_{\alpha,k,v=n_t-k}$：查**鄧肯法**臨界值表

$v = n_t - k$：誤差項自由度

k：欲檢定的母體(平均值)之數量

範例 13.9 九如速食連鎖餐廳有 A1、A2 和 A3 三家加盟店，欲瞭解三家加盟店服務品質是否相同，分別抽取 5、6 和 7 位消費者進行服務品質問卷評量，評量的結果如下表所示：試在顯著水準 α = 0.05 下，利用**鄧肯法**(Duncan method)估算兩母體平均值之差的信賴區間，分別 1 對 1 配對比較三家加盟店的服務品質是否相同？

樣本	加盟店 A1	加盟店 A2	加盟店 A3
1	80	92	95
2	85	94	98
3	90	93	92
4	85	90	88
5	88	91	98
6		98	90
7			95
合計	428	558	656
樣本平均值	85.6	93.0	93.7

樣本	加盟店 A1	加盟店 A2	加盟店 A3
樣本變異數	14.30	8.00	14.90
樣本標準(偏)差	3.7815	2.8284	3.8607

題解：設 μ_1、μ_2 和 μ_3 依序分別為加盟店 A1、A2 和 A3 服務品質的母體平均值。$\bar{x}_1$ = 85.6、$\bar{x}_2$ = 93.0 和 $\bar{x}_3$ = 93.7143 依序分別為加盟店 A1、A2 和 A3 服務品質的樣本平均值。k = 3 欲進行母體平均值檢定的母體數量。加盟店 A1 樣本數量 n_1 = 5，加盟店 A2 樣本數量 n_2 = 6，加盟店 A3 樣本數量 n_3 = 7，樣本總數 $n_t = n_1 + n_2 + n_3 = 18$。全部樣本平均值 $\bar{\bar{x}} = \frac{\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j} x_{ij}}{n_t} = \frac{\sum_{j=1}^{k}(n_j \times \bar{x}_j)}{n_t} = \frac{428+558+656}{18} = 91.22$。$S_1^2 = 14.30$、$S_2^2 = 8.00$ 和 $S_3^2 = 14.90$ 依序分別為加盟店 A1、A2 和 A3 服務品質的樣本變異數。

A.設定顯著水準 $\alpha = 0.05$，臨界值 $F_{\alpha,k-1,n_t-k} = F_{0.05,3-1,18-3} = F_{0.05,2,15} = 3.6823$(使用 Excel 軟體 F.INV.RT 函數查詢獲得)。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$ 加盟店 3 家個別服務品質的母體平均值皆相等。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_i \neq \mu_j$ 加盟店 3 家個別服務品質的母體平均值不全部相等。

D.計算檢定統計值─F 值

$$\text{SSTR} = \sum_{j=1}^{k} n_j \times \left(\bar{x}_j - \bar{\bar{x}}\right)^2 = 5 \times (85.6 - 91.22)^2 + 6 \times (93.0 - 91.22)^2 + 7 \times (93.7 - 91.22)^2 = 158.05 + 18.96 + 43.47 = 220.48$$

$$\text{MSTR} = \frac{\text{SSTR}}{k-1} = \frac{220.48}{3-1} = 110.24$$

$$\text{SSE} = \sum_{j=1}^{k}(n_j - 1) \times S_j^2 = (5-1) \times 14.30 + (6-1) \times 8.00 + (7-1) \times 14.90 = 57.2 + 40.0 + 89.4 = 186.6$$

$$\text{MSE} = \frac{\sum_{j=1}^{k}(n_j-1) \times S_j^2}{n_t-k} = \frac{\text{SSE}}{n_t-k} = \frac{186.6}{18-3} = 12.4419$$

$$檢定統計值\ F = \frac{\text{MSTR}}{\text{MSE}} = \frac{110.24}{12.4419} = 8.8605$$

E.檢定統計值 F = 8.8605 ＞ 臨界值 $F_{\alpha,k-1,n_t-k}$ = 3.6823，拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$ 加盟店 3 家個別服務品質的母體平均值皆相等，接受對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_i \neq \mu_j$ 加盟店 3 家個別服務品質的母體平均值不全部相等。因此，該速食連鎖餐廳 A1、A2 和 A3 三家加盟店的服務品質有不相同者，彼此之間有顯著性的差異。

利用**鄧肯法**(Duncan method)估算 $\mu_1 - \mu_2$ 信賴區間：

A.設定顯著水準 $\alpha = 0.05$。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_1 = \mu_2$。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_1 \neq \mu_2$。

D.計算信賴區間：$|\bar{x}_1 - \bar{x}_2| \pm Q_{\alpha,k,v=n_t-k} \times \sqrt{\frac{\text{MSE}}{n}} = |85.6 - 93.0| \pm 4.7627 = 7.4000 \pm 4.7627$

其中 $Q_{\alpha,k,v=n_t-k} = Q_{0.05,3,18-3} = 3.160$

$n = \sqrt{n_1 \times n_2} = \sqrt{5 \times 6} = 5.4772$

$Q_{\alpha,k,v=n_t-k} \times \sqrt{\frac{\text{MSE}}{n}} = 3.160 \times \sqrt{\frac{12.4419}{5.4772}} = 3.160 \times 1.5072 = 4.7627$

E.因信賴區間未包括 0，故判別拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_1 = \mu_2$，接受對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_1 \neq \mu_2$。因 $\bar{x}_1 = 85.6 < \bar{x}_2 = 93.0$，故推論 μ_2 有顯著性的高於 μ_1。加盟店 A2 服務品質顯著性的高於加盟店 A1。

利用**鄧肯法**(Duncan method)估算 $\mu_1 - \mu_3$ 信賴區間：

A.設定顯著水準 $\alpha = 0.05$。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_1 = \mu_3$。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_1 \neq \mu_3$。

D.計算信賴區間：$|\bar{x}_1 - \bar{x}_3| \pm Q_{\alpha,k,v=n_t-k} \times \sqrt{\frac{MSE}{n}}$ = |85.6 – 93.7143| ± 4.5826 = 8.1143 ± 4.5826

其中$Q_{\alpha,k,v=n_t-k} = Q_{0.05,3,18-3} = 3.160$

$n = \sqrt{n_1 \times n_3} = \sqrt{5 \times 7} = 5.9161$

$Q_{\alpha,k,v=n_t-k} \times \sqrt{\frac{MSE}{n}} = 3.160 \times \sqrt{\frac{12.4419}{5.9161}} = 3.160 \times 1.4502 = 4.5826$

E.因信賴區間未包括 0，故判別拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_1 = \mu_3$，接受對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_1 \neq \mu_3$。因$\bar{x}_1 = 85.6 < \bar{x}_3 = 93.7143$，故推論 μ_3 有顯著性的高於 μ_1。加盟店 A3 服務品質顯著性的高於加盟店 A1。

利用**鄧肯法**(Duncan method)估算 $\mu_2 - \mu_3$ 信賴區間：

A.設定顯著水準 $\alpha = 0.05$。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_2 = \mu_3$。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_2 \neq \mu_3$。

D.計算信賴區間：$|\bar{x}_2 - \bar{x}_3| \pm Q_{\alpha,k,v=n_t-k} \times \sqrt{\frac{MSE}{n}}$ = |93.0 – 93.7143| ± 4.3784 = 0.7143 ± 4.3784

其中$Q_{\alpha,k,v=n_t-k} = Q_{0.05,3,18-3} = 3.160$

$n = \sqrt{n_2 \times n_3} = \sqrt{6 \times 7} = 6.4807$

$Q_{\alpha,k,v=n_t-k} \times \sqrt{\frac{MSE}{n}} = 3.160 \times \sqrt{\frac{12.4419}{6.4807}} = 3.160 \times 1.3856 = 4.3784$

E.因信賴區間包括 0，故判別接受虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_2 = \mu_3$，故 μ_2 和 μ_3 之間無達到顯著性的差異水準。加盟店 A2 和加盟店 A3 服務品質沒有達到顯著性的差異水準。

練習 13.10 九如連鎖咖啡廳販售甲、乙與丙三種咖啡飲料，各隨機抽取 5 杯飲料測量咖啡因含量(mg/100 ml)如下表所示：試在顯著水準 $\alpha = 0.05$ 下，利用**鄧肯法**(Duncan method)估算兩母體平均值之差的信賴區間，分別 1 對 1 配對比較三種咖啡飲料咖啡因含量是否相同？

咖啡飲料	咖啡因含量(mg/100 ml)				
甲	151	162	145	175	155
乙	128	132	135	125	131
丙	105	125	133	100	119

題解：設 μ_1、μ_2 和 μ_3 依序分別為甲、乙和丙咖啡飲料咖啡因含量的母體平均值(mg/100 ml)。$\bar{x}_1 = 157.6$、$\bar{x}_2 = 130.2$ 和$\bar{x}_3 = 116.4$ 依序分別為甲、乙和丙咖啡飲料咖啡因含量的樣本平均值(mg/100 ml)。$k = 3$ 欲進行母體平均值檢定的母體數量。甲咖啡樣本數量 $n_1 = 5$，乙咖啡樣本數量 $n_2 = 5$，丙咖啡樣本數量 $n_3 = 5$，樣本總數 $n_t = n_1 + n_2 + n_3 = 15$。全部樣本平均值$\bar{\bar{x}} = \frac{\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j} x_{ij}}{n_t} = \frac{\sum_{j=1}^{k}(n_j \times \bar{x}_j)}{n_t} = \frac{788+651+582}{15} = 134.7333$。$S_1^2 = 132.8$、$S_2^2 = 14.7$ 和$S_3^2 = 188.8$ 依序分別為甲、乙和丙咖啡飲料咖啡因含量的樣本變異數。

A.設定顯著水準 $\alpha = 0.05$，臨界值$F_{\alpha,k-1,n_t-k} = F_{0.05,3-1,15-3} = F_{0.05,2,12} = 3.8853$(使用 Excel 軟體 F.INV.RT 函數查詢獲得)。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$ 咖啡飲料三種個別咖啡因含量的母體平均值皆相等。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_i \neq \mu_j$ 咖啡飲料三種個別咖啡因含量的母體平均值不全部相等。

D.計算檢定統計值**—**F 值

SSTR = $\sum_{j=1}^{k} n_j \times (\bar{x}_j - \bar{\bar{x}})^2$ = 5 × (157.6 – 134.7333)² + 5 × (130.2 – 134.7333)² + 5 × (116.4 – 134.7333)²
= 2614.4222 + 102.7556 + 1680.5556 = 4397.7333

MSTR = $\frac{\text{SSTR}}{k-1} = \frac{4397.7333}{3-1}$ = 2198.8667

SSE = $\sum_{j=1}^{k}(n_j - 1) \times S_j^2$ = (5 – 1) × 132.8 + (5 – 1) × 14.7 + (5 – 1) × 188.8 = 531.2 + 58.8 + 755.2 = 1345.2

MSE = $\frac{\sum_{j=1}^{k}(n_j-1)\times S_j^2}{n_t-k} = \frac{\text{SSE}}{n_t-k} = \frac{1345.2}{15-3}$ = 112.1

檢定統計值 $F = \frac{\text{MSTR}}{\text{MSE}} = \frac{2198.8667}{112.1}$ = 19.6152

E.檢定統計值 F = 19.6152 > 臨界值$F_{\alpha,k-1,n_t-k}$ = 3.8853，拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$ 咖啡飲料三種個別咖啡因含量的母體平均值皆相等，接受對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_i \neq \mu_j$ 咖啡飲料三種個別咖啡因含量的母體平均值不全部相等。因此，該速食咖啡廳甲、乙和丙三種咖啡飲料咖啡因含量有不相同者，彼此之間有顯著性的差異。

利用**鄧肯法**(Duncan method)估算 $\mu_1 - \mu_2$ 信賴區間：

A.設定顯著水準 α = 0.05。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_1 = \mu_2$。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_1 \neq \mu_2$。

D.計算信賴區間：$|\bar{x}_1 - \bar{x}_2| \pm Q_{\alpha,k,v=n_t-k} \times \sqrt{\frac{\text{MSE}}{n}}$ = |157.6 – 130.2| ± 15.2703 = 27.4000 ± 15.2703

其中$Q_{\alpha,k,v=n_t-k} = Q_{0.05,3,15-3}$ = 3.225

$n = \sqrt{n_1 \times n_2} = \sqrt{5 \times 5} = 5$

$Q_{\alpha,k,v=n_t-k} \times \sqrt{\frac{\text{MSE}}{n}} = 3.225 \times \sqrt{\frac{112.1}{5}} = 3.225 \times 4.7350 = 15.2703$

E.因信賴區間未包括 0，故判別拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_1 = \mu_2$，接受對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_1 \neq \mu_2$。因$\bar{x}_1$ = 157.6 > $\bar{x}_2$ = 130.2，故推論 μ_1 有顯著性的高於 μ_2。甲咖啡飲料咖啡因含量顯著性的高於乙咖啡飲料。

利用**鄧肯法**(Duncan method)估算 $\mu_1 - \mu_3$ 信賴區間：

A.設定顯著水準 α = 0.05。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_1 = \mu_3$。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_1 \neq \mu_3$。

D.計算信賴區間：$|\bar{x}_1 - \bar{x}_3| \pm Q_{\alpha,k,v=n_t-k} \times \sqrt{\frac{\text{MSE}}{n}}$ = |157.6 – 116.4| ± 15.2703 = 41.2000 ± 15.2703

其中$Q_{\alpha,k,v=n_t-k} = Q_{0.05,3,15-3}$ = 3.225

$n = \sqrt{n_1 \times n_3} = \sqrt{5 \times 5} = 5$

$Q_{\alpha,k,v=n_t-k} \times \sqrt{\frac{\text{MSE}}{n}} = 3.225 \times \sqrt{\frac{112.1}{5}} = 3.225 \times 4.7350 = 15.2703$

E.因信賴區間未包括 0，故判別拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_1 = \mu_3$，接受對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_1 \neq \mu_3$。因$\bar{x}_1$ = 157.6 > $\bar{x}_3$ = 116.4，故推論 μ_1 有顯著性的高於 μ_3。甲咖啡飲料咖啡因含量顯著性的高於丙咖啡飲料。

利用**鄧肯法**(Duncan method)估算 $\mu_2 - \mu_3$ 信賴區間：

A.設定顯著水準 α = 0.05。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_2 = \mu_3$。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_2 \neq \mu_3$。

D.計算信賴區間：$|\bar{x}_2 - \bar{x}_3| \pm Q_{\alpha,k,v=n_t-k} \times \sqrt{\frac{MSE}{n}}$ = |130.2 – 116.4| ± 15.2703 = 13.8000 ± 15.2703

其中$Q_{\alpha,k,v=n_t-k} = Q_{0.05,3,15-3} = 3.225$

$n = \sqrt{n_2 \times n_3} = \sqrt{5 \times 5} = 5$

$Q_{\alpha,k,v=n_t-k} \times \sqrt{\frac{MSE}{n}} = 3.225 \times \sqrt{\frac{112.1}{5}} = 3.225 \times 4.7350 = 15.2703$

E.因信賴區間包括 0，故判別接受虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_2 = \mu_3$，故 μ_2 和 μ_3 之間無達到顯著性的差異水準。乙咖啡飲料和丙咖啡飲料咖啡因含量沒有達到顯著性的差異水準。

練習 13.11 在針對一個國際觀光旅館專職員工的工作士氣抽樣調查中，依據員工服務年資分為三組，各組各調查 4~5 位員工，調查數據如下表所示(假設工作士氣的分布使屬於常態分布)，利用**鄧肯法**(Duncan method)估算兩母體平均值之差的信賴區間，分別 1 對 1 配對比較三組員工工作士氣是否相同？

服務年資	工作士氣量表分數				
1 年以下	71	70	78	80	83
1(含)~5 年以下	68	52	70	66	62
5 年(含)以上	90	86	79	83	

題解：設 μ_1、μ_2 和 μ_3 依序分別為「1 年以下」、「1(含)~5 年以下」和「5 年(含)以上」三組工作士氣的母體平均值。$\bar{x}_1 = 76.4$、$\bar{x}_2 = 63.6$ 和$\bar{x}_3 = 84.5$ 依序分別為「1 年以下」、「1(含)~5 年以下」和「5 年(含)以上」三組工作士氣的樣本平均值。$k = 3$ 欲進行母體平均值檢定的母體數量。「1 年以下」組樣本數量 $n_1 = 5$，「1(含)~5 年以下」組樣本數量 $n_2 = 5$，「5 年(含)以上」組樣本數量 $n_3 = 4$，樣本總數 $n_t = n_1 + n_2 + n_3 = 14$。全部樣本平均值$\bar{\bar{x}} = \frac{\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j} x_{ij}}{n_t} = \frac{71+70+78+80+83+68+52+70+66+62+90+86+79+83}{14} = \frac{1038}{14} = 74.1429$。$S_1^2 = 32.30$、$S_2^2 = 50.80$ 和$S_3^2 = 21.67$ 依序分別為「1 年以下」、「1(含)~5 年以下」和「5 年(含)以上」三組工作士氣的樣本變異數。

A.設定顯著水準 $\alpha = 0.05$，臨界值$F_{\alpha,k-1,n_t-k} = F_{0.05,3-1,14-3} = F_{0.05,2,11} = 3.9823$(使用 Excel 軟體 F.INV.RT 函數查詢獲得)。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$服務年資三種層級個別工作士氣量表分數的母體平均值皆相等。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_i \neq \mu_j$服務年資三種層級個別工作士氣量表分數的母體平均值不全部相等。

D.計算檢定統計值−F 值

$SSTR = \sum_{j=1}^{k} n_j \times (\bar{x}_j - \bar{\bar{x}})^2 = 5 \times (76.4 - 74.1429)^2 + 5 \times (63.6 - 74.1429)^2 + 4 \times (84.5 - 74.1429)^2 = 25.4735 + 555.7592 + 429.0816 = 1010.3143$

$MSTR = \frac{SSTR}{k-1} = \frac{1010.3143}{3-1} = 505.1571$

$SSE = \sum_{j=1}^{k} (n_j - 1) \times S_j^2 = (5-1) \times 32.30 + (5-1) \times 50.80 + (4-1) \times 21.67 = 129.20 + 203.20 + 65.00 = 397.40$

$MSE = \frac{\sum_{j=1}^{k}(n_j-1)\times S_j^2}{n_t-k} = \frac{SSE}{n_t-k} = \frac{397.40}{14-3} = 36.1273$

檢定統計值 $F = \frac{MSTR}{MSE} = \frac{505.1571}{36.1273} = 13.9827$

E.檢定統計值 $F = 13.9827$ > 臨界值$F_{\alpha,k-1,n_t-k} = 3.9823$，拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$服務年資三種層級個別工作士氣量表分數的母體平均值皆相等，接受對立假設(alternative hypothesis)

H_1: $\mu_i \neq \mu_j$ 服務年資三種層級個別工作士氣量表分數的母體平均值不全部相等。因此，「1 年以下」、「1(含)~5 年以下」和「5 年(含)以上」三組工作士氣有不相同者，彼此之間有達到顯著性的差異。

變異數分析表(ANOVA table)

變異來源(Source of variation)	平方和(Sum of squares)	自由度(Degrees of freedom)	均方(Mean square)	F 值
樣本間變異或組間變異(Treatments)	1010.3143	2	505.1571	13.9827
樣本內變異、組內變異或誤差 (Error)	397.40	11	36.1273	
合計(Total)	1407.7143	13		

利用**鄧肯法**(Duncan method)估算 $\mu_1 - \mu_2$ 信賴區間：

A.設定顯著水準 $\alpha = 0.05$。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_1 = \mu_2$。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_1 \neq \mu_2$。

D.計算信賴區間：$|\bar{x}_1 - \bar{x}_2| \pm Q_{\alpha,k,v=n_t-k} \times \sqrt{\frac{\text{MSE}}{n}} = |76.4 - 63.6| \pm 8.7522 = 12.8000 \pm 8.7522$

其中$Q_{\alpha,k,v=n_t-k} = Q_{0.05,3,14-3} = Q_{0.05,3,11} = 3.256$(查詢鄧肯法臨界值表)

$n = \sqrt{n_1 \times n_2} = \sqrt{5 \times 5} = 5$

$Q_{\alpha,k,v=n_t-k} \times \sqrt{\frac{\text{MSE}}{n}} = 3.256 \times \sqrt{\frac{36.1273}{5}} = 3.256 \times 2.6880 = 8.7522$

E.因信賴區間 4.0478~21.5522 未包括數值 0，故判別拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_1 = \mu_2$，接受對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_1 \neq \mu_2$。因$\bar{x}_1 = 76.4 > \bar{x}_2 = 63.6$，故推論 μ_1 有顯著性的高於 μ_2。「1 年以下」組工作士氣顯著性的高於「1(含)~5 年以下」組工作士氣。

利用**鄧肯法**(Duncan method)估算 $\mu_1 - \mu_3$ 信賴區間：

A.設定顯著水準 $\alpha = 0.05$。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_1 = \mu_3$。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_1 \neq \mu_3$。

D.計算信賴區間：$|\bar{x}_1 - \bar{x}_3| \pm Q_{\alpha,k,v=n_t-k} \times \sqrt{\frac{\text{MSE}}{n}} = |76.4 - 84.5| \pm 9.2543 = 8.1000 \pm 9.2543$

其中$Q_{\alpha,k,v=n_t-k} = Q_{0.05,3,14-3} = Q_{0.05,3,11} = 3.256$(查詢鄧肯法臨界值表)

$n = \sqrt{n_1 \times n_3} = \sqrt{5 \times 4} = 4.4721$

$Q_{\alpha,k,v=n_t-k} \times \sqrt{\frac{\text{MSE}}{n}} = 3.256 \times \sqrt{\frac{36.1273}{4.4721}} = 3.256 \times 2.8422 = 9.2543$

E.因信賴區間-1.1543~17.3543 包括數值 0，故判別接受虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_1 = \mu_3$，故 μ_1 和 μ_3 之間無達到顯著性的差異水準。「1 年以下」組和「5 年(含)以上」組工作士氣沒有達到顯著性的差異水準。

利用**鄧肯法**(Duncan method)估算 $\mu_2 - \mu_3$ 信賴區間：

A.設定顯著水準 $\alpha = 0.05$。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_2 = \mu_3$。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_2 \neq \mu_3$。

D.計算信賴區間：$|\bar{x}_2 - \bar{x}_3| \pm Q_{\alpha,k,v=n_t-k} \times \sqrt{\frac{\text{MSE}}{n}} = |63.6 - 84.5| \pm 9.2543 = 20.9000 \pm 9.2543$

其中$Q_{\alpha,k,v=n_t-k} = Q_{0.05,3,14-3} = Q_{0.05,3,11} = 3.256$(查詢鄧肯法臨界值表)

$n = \sqrt{n_2 \times n_3} = \sqrt{5 \times 4} = 4.4721$

$Q_{\alpha,k,v=n_t-k} \times \sqrt{\frac{\text{MSE}}{n}} = 3.256 \times \sqrt{\frac{36.1273}{4.4721}} = 3.256 \times 2.8422 = 9.2543$

E.因信賴區間 11.6457~30.1543 未包括數值 0，故判別拒絕接受虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_2 = \mu_3$，接受對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_2 \neq \mu_2$。因$\bar{x}_2 = 63.6 < \bar{x}_3 = 84.5$，故推論 μ_3 有顯著性的高於 μ_2。「5 年(含)以上」組工作士氣顯著性的高於「1(含)~5 年以下」組工作士氣。

13.3.2.4 龐費洛尼法【選擇教材】

龐費洛尼法或**包法隆尼法**(Bonferroni method)為多重比較法常見的一種方法，類似於獨立樣本 t 檢定，針對 k 組資料的統計檢定時，欲將整體不犯型一錯誤機率維持在 $1 - \alpha$ 的水準之上，必須調整每次個別檢定的 α 值為$\frac{\alpha}{C_2^k}$。

在變異數分析中，有 k 個母體平均值，有$C_2^k = m$ 種母體平均值之差的配對方式，若欲進行分別 1 對 1 比較 2 個母體平均值之差 $\mu_i - \mu_j$ $(i \neq j)$，在信賴水準 $1 - \alpha$ 或顯著水準 α 的信賴區間估算：

$$|\bar{x}_i - \bar{x}_j| \ \pm\ t_{\frac{\alpha}{2m},n_t-k} \times \sqrt{\text{MSE} \times \left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j}\right)}$$

其中$t_{\frac{\alpha}{2m},n_t-k}$：自由度等於 $n_t - k$ 的 t 分布右尾機率$\frac{\alpha}{2m}$的臨界值(使用 Excel 軟體 T.INV 函數查詢獲得)

範例 13.10　九如速食連鎖餐廳有 A1、A2 和 A3 三家加盟店，欲瞭解三家加盟店服務品質是否相同，分別抽取 5、6 和 7 位消費者進行服務品質問卷評量，評量的結果如下表所示：試在顯著水準 $\alpha = 0.05$ 下，利用龐費洛尼法(Bonferroni method)估算兩母體平均值之差的信賴區間，分別 1 對 1 配對比較三家加盟店的服務品質是否相同？

樣本	加盟店 A1	加盟店 A2	加盟店 A3
1	80	92	95
2	85	94	98
3	90	93	92
4	85	90	88
5	88	91	98
6		98	90
7			95
合計	428	558	656
樣本平均值	85.6	93.0	93.7
樣本變異數	14.30	8.00	14.90
樣本標準(偏)差	3.7815	2.8284	3.8607

題解：設 μ_1、μ_2 和 μ_3 依序分別為加盟店 A1、A2 和 A3 服務品質的母體平均值。$\bar{x}_1 = 85.6$、$\bar{x}_2 = 93.0$ 和$\bar{x}_3 = 93.7143$ 依序分別為加盟店 A1、A2 和 A3 服務品質的樣本平均值。$k = 3$ 欲進行母體平均值檢定的母體數量。加盟店 A1 樣本數量 $n_1 = 5$，加盟店 A2 樣本數量 $n_2 = 6$，加盟店 A3 樣本數量 $n_3 = 7$，樣本總量 $n_t = n_1 + n_2 + n_3 = 18$。全部樣本平均值$\bar{\bar{x}} = \frac{\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j} x_{ij}}{n_t} = \frac{\sum_{j=1}^{k}(n_j \times \bar{x}_j)}{n_t} = \frac{428+558+656}{18} = 91.22$。$S_1^2 = 14.30$、$S_2^2 = 8.00$ 和$S_3^2 = 14.90$ 依序分別為加盟店 A1、A2 和 A3 服務品質的樣本變異數。

A.設定顯著水準 $\alpha = 0.05$，臨界值$F_{\alpha,k-1,n_t-k} = F_{0.05,3-1,18-3} = F_{0.05,2,15} = 3.6823$(使用 Excel 軟體 F.INV.RT 函數查詢獲得)。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$ 加盟店 3 家個別服務品質的母體平均值皆相等。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_i \neq \mu_j$ 加盟店 3 家個別服務品質的母體平均值不全部相等。

D.計算檢定統計值$-F$ 值

SSTR = $\sum_{j=1}^{k} n_j \times (\bar{x}_j - \bar{\bar{x}})^2$ = 5 × (85.6 – 91.22)^2 + 6 × (93.0 – 91.22)^2 + 7 × (93.7 – 91.22)^2 = 158.05 + 18.96 + 43.47 = 220.48

MSTR = $\frac{\text{SSTR}}{k-1} = \frac{220.48}{3-1}$ = 110.24

SSE = $\sum_{j=1}^{k}(n_j - 1) \times S_j^2$ = (5 – 1) × 14.30 + (6 – 1) × 8.00 + (7 – 1) × 14.90 = 57.2 + 40.0 + 89.4 = 186.6

MSE = $\frac{\sum_{j=1}^{k}(n_j-1)\times S_j^2}{n_t-k} = \frac{\text{SSE}}{n_t-k} = \frac{186.6}{18-3}$ = 12.4419

檢定統計值 $F = \frac{\text{MSTR}}{\text{MSE}} = \frac{110.24}{12.4419}$ = 8.8605

E.檢定統計值 F = 8.8605 > 臨界值$F_{\alpha,k-1,n_t-k}$ = 3.6823，拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$ 加盟店 3 家個別服務品質的母體平均值皆相等，接受對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_i \neq \mu_j$ 加盟店 3 家個別服務品質的母體平均值不全部相等。因此，該速食連鎖餐廳 A1、A2 和 A3 三家加盟店的服務品質有不相同者，彼此之間有顯著性的差異。

利用龐費洛尼法(Bonferroni method)估算 $\mu_1 - \mu_2$ 信賴區間：

A.設定顯著水準 α = 0.05。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_1 = \mu_2$。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_1 \neq \mu_2$。

D.計算信賴區間：$|\bar{x}_1 - \bar{x}_2| \pm t_{\frac{\alpha}{2m},n_t-k} \times \sqrt{\text{MSE} \times \left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}$ = |85.6 – 93.0| ± 5.7536 = 7.4000 ± 5.7536

其中$C_2^k = m = \frac{k!}{2!\times(k-2)!} = \frac{3!}{2!\times(3-2)!} = \frac{3\times2\times1}{2\times1\times1}$ = 3

$t_{\frac{\alpha}{2m},n_t-k} = t_{\frac{0.05}{2\times3},18-3} = t_{0.00833,15}$ = 2.6937(使用 Excel 軟體 T.INV 函數查詢獲得)。

$t_{\frac{\alpha}{2m},n_t-k} \times \sqrt{\text{MSE} \times \left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)} = 2.6937 \times \sqrt{12.4419 \times \left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)}$ = 2.6937 × 2.1359 = 5.7536

E.因信賴區間未包括 0，故判別拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_1 = \mu_2$，接受對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_1 \neq \mu_2$。因$\bar{x}_1$ = 85.6 < $\bar{x}_2$ = 93.0，故推論 μ_2 有顯著性的高於 μ_1。加盟店 A2 服務品質顯著性的高於加盟店 A1。

利用龐費洛尼法(Bonferroni method)估算 $\mu_1 - \mu_3$ 信賴區間：

A.設定顯著水準 α = 0.05。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_1 = \mu_3$。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_1 \neq \mu_3$。

D.計算信賴區間：$|\bar{x}_1 - \bar{x}_3| \pm t_{\frac{\alpha}{2m},n_t-k} \times \sqrt{\text{MSE} \times \left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_3}\right)}$ = |85.6 – 93.7143| ± 5.5636 = 8.1143 ± 5.5636

其中$C_2^k = m = \frac{k!}{2!\times(k-2)!} = \frac{3!}{2!\times(3-2)!} = \frac{3\times2\times1}{2\times1\times1}$ = 3

$t_{\frac{\alpha}{2m},n_t-k} = t_{\frac{0.05}{2\times3},18-3} = t_{0.00833,15}$ = 2.6937(使用 Excel 軟體 T.INV 函數查詢獲得)。

$t_{\frac{\alpha}{2m},n_t-k} \times \sqrt{\text{MSE} \times \left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_3}\right)} = 2.6937 \times \sqrt{12.4419 \times \left(\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\right)}$ = 2.6937 × 2.0654 = 5.5636

E.因信賴區間未包括 0，故判別拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_1 = \mu_3$，接受對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_1 \neq \mu_3$。因$\bar{x}_1$ = 85.6 < $\bar{x}_3$ = 93.7143，故推論 μ_3 有顯著性的高於 μ_1。加盟店 A3 服務品質顯著性的高於加盟店 A1。

利用龐費洛尼法(Bonferroni method)估算 $\mu_2 - \mu_3$ 信賴區間：

A.設定顯著水準 α = 0.05。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_2 = \mu_3$。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_2 \neq \mu_3$。

D.計算信賴區間：$|\bar{x}_2 - \bar{x}_3| \pm t_{\frac{\alpha}{2m}, n_t-k} \times \sqrt{\text{MSE} \times \left(\frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3}\right)}$ = |93.0 – 93.7143| ± 5.2862 = 0.7143 ± 5.2862

其中$C_2^k = m = \frac{k!}{2!\times(k-2)!} = \frac{3!}{2!\times(3-2)!} = \frac{3\times2\times1}{2\times1\times1} = 3$

$t_{\frac{\alpha}{2m}, n_t-k} = t_{\frac{0.05}{2\times3}, 18-3} = t_{0.00833,15} = 2.6937$(使用 Excel 軟體 T.INV 函數查詢獲得)。

$t_{\frac{\alpha}{2m}, n_t-k} \times \sqrt{\text{MSE} \times \left(\frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3}\right)} = 2.6937 \times \sqrt{12.4419 \times \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right)} = 2.6937 \times 1.9624 = 5.2862$

E.因信賴區間包括 0，故判別接受虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_2 = \mu_3$，故 μ_2 和 μ_3 之間無達到顯著性的差異水準。加盟店 A2 和加盟店 A3 服務品質沒有達到顯著性的差異水準。

練習 13.12 九如連鎖咖啡廳販售甲、乙與丙三種咖啡飲料，各隨機抽取 5 杯飲料測量咖啡因含量(mg/100 ml)如下表所示：試在顯著水準 α = 0.05 下，利用龐費洛尼法(Bonferroni method)估算兩母體平均值之差的信賴區間，分別 1 對 1 配對比較三種咖啡飲料咖啡因含量是否相同？

咖啡飲料	咖啡因含量(mg/100 ml)				
甲	151	162	145	175	155
乙	128	132	135	125	131
丙	105	125	133	100	119

題解：設 μ_1、μ_2 和 μ_3 依序分別為甲、乙和丙咖啡飲料咖啡因含量的母體平均值(mg/100 ml)。$\bar{x}_1$ = 157.6、$\bar{x}_2$ = 130.2 和$\bar{x}_3$ = 116.4 依序分別為甲、乙和丙咖啡飲料咖啡因含量的樣本平均值(mg/100 ml)。k = 3 欲進行母體平均值檢定的母體數量。甲咖啡樣本數量 n_1 = 5，乙咖啡樣本數量 n_2 = 5，丙咖啡樣本數量 n_3 = 5，樣本總數 $n_t = n_1 + n_2 + n_3 = 15$。全部樣本平均值$\bar{\bar{x}} = \frac{\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j} x_{ij}}{n_t} = \frac{\sum_{j=1}^{k}(n_j\times\bar{x}_j)}{n_t} = \frac{788+651+582}{15} = 134.7333$。$S_1^2$ = 132.8、S_2^2 = 14.7 和S_3^2 = 188.8 依序分別為甲、乙和丙咖啡飲料咖啡因含量的樣本變異數。

A.設定顯著水準 α = 0.05，臨界值$F_{\alpha,k-1,n_t-k} = F_{0.05,3-1,15-3} = F_{0.05,2,12}$ = 3.8853(使用 Excel 軟體 F.INV.RT 函數查詢獲得)。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$ 咖啡飲料三種個別咖啡因含量的母體平均值皆相等。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_i \neq \mu_j$ 咖啡飲料三種個別咖啡因含量的母體平均值不全部相等。

D.計算檢定統計值─F 值

$\text{SSTR} = \sum_{j=1}^{k} n_j \times \left(\bar{x}_j - \bar{\bar{x}}\right)^2 = 5 \times (157.6 - 134.7333)^2 + 5 \times (130.2 - 134.7333)^2 + 5 \times (116.4 - 134.7333)^2$
$= 2614.4222 + 102.7556 + 1680.5556 = 4397.7333$

$\text{MSTR} = \frac{\text{SSTR}}{k-1} = \frac{4397.7333}{3-1} = 2198.8667$

$\text{SSE} = \sum_{j=1}^{k}(n_j - 1) \times S_j^2 = (5-1) \times 132.8 + (5-1) \times 14.7 + (5-1) \times 188.8 = 531.2 + 58.8 + 755.2 = 1345.2$

$\text{MSE} = \frac{\sum_{j=1}^{k}(n_j-1)\times S_j^2}{n_t-k} = \frac{\text{SSE}}{n_t-k} = \frac{1345.2}{15-3} = 112.1$

檢定統計值 $F = \frac{\text{MSTR}}{\text{MSE}} = \frac{2198.8667}{112.1} = 19.6152$

E.檢定統計值 F = 19.6152 > 臨界值$F_{\alpha,k-1,n_t-k}$ = 3.8853，拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$ 咖啡飲料三種個別咖啡因含量的母體平均值皆相等，接受對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_i \neq \mu_j$ 咖啡飲料三種個別咖啡因含量的母體平均值不全部相等。因此，該速食咖啡廳甲、乙和丙三種咖啡飲料咖啡因含量有不相同者，彼此之間有顯著性的差異。

利用龐費洛尼法(Bonferroni method)估算 $\mu_1 - \mu_2$ 信賴區間：

A.設定顯著水準 $\alpha = 0.05$。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_1 = \mu_2$。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_1 \neq \mu_2$。

D.計算信賴區間：$|\bar{x}_1 - \bar{x}_2| \pm t_{\frac{\alpha}{2m}, n_t-k} \times \sqrt{\text{MSE} \times \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)} = 27.4000 \pm 18.6123$

其中$C_2^k = m = \frac{k!}{2! \times (k-2)!} = \frac{3!}{2! \times (3-2)!} = \frac{3 \times 2 \times 1}{2 \times 1 \times 1} = 3$

$t_{\frac{\alpha}{2m}, n_t-k} = t_{\frac{0.05}{2 \times 3}, 15-3} = t_{0.00833,12} = 2.7795$(使用 Excel 軟體 T.INV 函數查詢獲得)。

$t_{\frac{\alpha}{2m}, n_t-k} \times \sqrt{\text{MSE} \times \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)} = 2.7795 \times \sqrt{112.1 \times \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{5}\right)} = 2.7795 \times 6.6963 = 18.6123$

E.因信賴區間未包括 0，故判別拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_1 = \mu_2$，接受對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_1 \neq \mu_2$。因$\bar{x}_1 = 157.6 > \bar{x}_2 = 130.2$，故推論 μ_1 有顯著性的高於 μ_2。甲咖啡飲料咖啡因含量顯著性的高於乙咖啡飲料。

利用龐費洛尼法(Bonferroni method)估算 $\mu_1 - \mu_3$ 信賴區間：

A.設定顯著水準 $\alpha = 0.05$。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_1 = \mu_3$。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_1 \neq \mu_3$。

D.計算信賴區間：$|\bar{x}_1 - \bar{x}_3| \pm t_{\frac{\alpha}{2m}, n_t-k} \times \sqrt{\text{MSE} \times \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_3}\right)} = 41.2000 \pm 18.6123$

其中$C_2^k = m = \frac{k!}{2! \times (k-2)!} = \frac{3!}{2! \times (3-2)!} = \frac{3 \times 2 \times 1}{2 \times 1 \times 1} = 3$

$t_{\frac{\alpha}{2m}, n_t-k} = t_{\frac{0.05}{2 \times 3}, 15-3} = t_{0.00833,12} = 2.7795$(使用 Excel 軟體 T.INV 函數查詢獲得)。

$t_{\frac{\alpha}{2m}, n_t-k} \times \sqrt{\text{MSE} \times \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_3}\right)} = 2.7795 \times \sqrt{112.1 \times \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{5}\right)} = 2.7795 \times 6.6963 = 18.6123$

E.因信賴區間未包括 0，故判別拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_1 = \mu_3$，接受對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_1 \neq \mu_3$。因$\bar{x}_1 = 157.6 > \bar{x}_3 = 116.4$，故推論 μ_1 有顯著性的高於 μ_3。甲咖啡飲料咖啡因含量顯著性的高於丙咖啡飲料。

利用龐費洛尼法(Bonferroni method)估算 $\mu_2 - \mu_3$ 信賴區間：

A.設定顯著水準 $\alpha = 0.05$。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_2 = \mu_3$。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_2 \neq \mu_3$。

D.計算信賴區間：$|\bar{x}_2 - \bar{x}_3| \pm t_{\frac{\alpha}{2m}, n_t-k} \times \sqrt{\text{MSE} \times \left(\frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3}\right)} = 13.8000 \pm 18.6123$

其中$C_2^k = m = \frac{k!}{2! \times (k-2)!} = \frac{3!}{2! \times (3-2)!} = \frac{3 \times 2 \times 1}{2 \times 1 \times 1} = 3$

$t_{\frac{\alpha}{2m}, n_t-k} = t_{\frac{0.05}{2 \times 3}, 15-3} = t_{0.00833,12} = 2.7795$(使用 Excel 軟體 T.INV 函數查詢獲得)。

$t_{\frac{\alpha}{2m}, n_t-k} \times \sqrt{\text{MSE} \times \left(\frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3}\right)} = 2.7795 \times \sqrt{112.1 \times \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{5}\right)} = 2.7795 \times 6.6963 = 18.6123$

E.因信賴區間包括 0，故判別接受虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_2 = \mu_3$，故 μ_2 和 μ_3 之間無達到顯著性的差異水準。乙咖啡飲料和丙咖啡飲料咖啡因含量沒有達到顯著性的差異水準。

練習 13.13 在針對一個國際觀光旅館專職員工的工作士氣抽樣調查中，依據員工服務年資分為三組，各組各調查 4~5 位員工，調查數據如下表所示(假設工作士氣的分布使屬於常態分布)，利用龐費

洛尼法(Bonferroni method)估算兩母體平均值之差的信賴區間，分別 1 對 1 配對比較三組員工工作士氣是否相同？

服務年資	工作士氣量表分數				
1 年以下	71	70	78	80	83
1(含)~5 年以下	68	52	70	66	62
5 年(含)以上	90	86	79	83	

題解：設 μ_1、μ_2 和 μ_3 依序分別為「1 年以下」、「1(含)~5 年以下」和「5 年(含)以上」三組工作士氣的母體平均值。$\bar{x}_1 = 76.4$、$\bar{x}_2 = 63.6$ 和 $\bar{x}_3 = 84.5$ 依序分別為「1 年以下」、「1(含)~5 年以下」和「5 年(含)以上」三組工作士氣的樣本平均值。$k = 3$ 欲進行母體平均值檢定的母體數量。「1 年以下」組樣本數量 $n_1 = 5$，「1(含)~5 年以下」組樣本數量 $n_2 = 5$，「5 年(含)以上」組樣本數量 $n_3 = 4$，樣本總數 $n_t = n_1 + n_2 + n_3 = 14$。全部樣本平均值 $\bar{\bar{x}} = \frac{\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j} x_{ij}}{n_t} = \frac{71+70+78+80+83+68+52+70+66+62+90+86+79+83}{14} = \frac{1038}{14} = 74.1429$。$S_1^2 = 32.30$、$S_2^2 = 50.80$ 和 $S_3^2 = 21.67$ 依序分別為「1 年以下」、「1(含)~5 年以下」和「5 年(含)以上」三組工作士氣的樣本變異數。

A.設定顯著水準 $\alpha = 0.05$，臨界值 $F_{\alpha,k-1,n_t-k} = F_{0.05,3-1,14-3} = F_{0.05,2,11} = 3.9823$(使用 Excel 軟體 F.INV.RT 函數查詢獲得)。

B.虛無假設(null hypothesis) $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$ 服務年資三種層級個別工作士氣量表分數的母體平均值皆相等。

C.對立假設(alternative hypothesis) $H_1: \mu_i \neq \mu_j$ 服務年資三種層級個別工作士氣量表分數的母體平均值不全部相等。

D.計算檢定統計值─F 值

$$SSTR = \sum_{j=1}^{k} n_j \times \left(\bar{x}_j - \bar{\bar{x}}\right)^2 = 5 \times (76.4 - 74.1429)^2 + 5 \times (63.6 - 74.1429)^2 + 4 \times (84.5 - 74.1429)^2 = 25.4735 + 555.7592 + 429.0816 = 1010.3143$$

$$MSTR = \frac{SSTR}{k-1} = \frac{1010.3143}{3-1} = 505.1571$$

$$SSE = \sum_{j=1}^{k} \left(n_j - 1\right) \times S_j^2 = (5-1) \times 32.30 + (5-1) \times 50.80 + (4-1) \times 21.67 = 129.20 + 203.20 + 65.00 = 397.40$$

$$MSE = \frac{\sum_{j=1}^{k}(n_j-1) \times S_j^2}{n_t-k} = \frac{SSE}{n_t-k} = \frac{397.40}{14-3} = 36.1273$$

$$\text{檢定統計值 } F = \frac{MSTR}{MSE} = \frac{505.1571}{36.1273} = 13.9827$$

E.檢定統計值 $F = 13.9827$ > 臨界值 $F_{\alpha,k-1,n_t-k} = 3.9823$，拒絕虛無假設(null hypothesis) $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$ 服務年資三種層級個別工作士氣量表分數的母體平均值皆相等，接受對立假設(alternative hypothesis) $H_1: \mu_i \neq \mu_j$ 服務年資三種層級個別工作士氣量表分數的母體平均值不全部相等。因此，「1 年以下」、「1(含)~5 年以下」和「5 年(含)以上」三組工作士氣有不相同者，彼此之間有達到顯著性的差異。

變異數分析表(ANOVA table)

變異來源(Source of variation)	平方和(Sum of squares)	自由度(Degrees of freedom)	均方(Mean square)	F 值
樣本間變異或組間變異(Treatments)	1010.3143	2	505.1571	13.9827
樣本內變異、組內變異或誤差 (Error)	397.40	11	36.1273	
合計(Total)	1407.7143	13		

利用龐費洛尼法(Bonferroni method)估算 $\mu_1 - \mu_2$ 信賴區間：

A.設定顯著水準 $\alpha = 0.05$。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_1 = \mu_2$。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_1 \neq \mu_2$。

D.計算信賴區間：$|\bar{x}_1 - \bar{x}_2| \pm t_{\frac{\alpha}{2m}, n_t-k} \times \sqrt{\text{MSE} \times \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)} = 12.8000 \pm 10.7202$

其中 $C_2^k = m = \frac{k!}{2! \times (k-2)!} = \frac{3!}{2! \times (3-2)!} = \frac{3 \times 2 \times 1}{2 \times 1 \times 1} = \frac{3 \times \cancel{2 \times 1}}{\cancel{2 \times 1} \times 1} = 3$

$t_{\frac{\alpha}{2m}, n_t-k} = t_{\frac{0.05}{2 \times 3}, 14-3} = t_{0.00833,11} = 2.8200$(使用 Excel 軟體 T.INV 函數查詢獲得)

$t_{\frac{\alpha}{2m}, n_t-k} \times \sqrt{\text{MSE} \times \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)} = 2.8200 \times \sqrt{36.1273 \times \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{5}\right)} = 2.8200 \times 3.8014 = 10.7202$

$|\bar{x}_1 - \bar{x}_2| = |76.4 - 63.6| = 12.8$

E.因信賴區間 2.0798~23.5202 未包括數值 0，故判別拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_1 = \mu_2$，接受對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_1 \neq \mu_2$。因 $\bar{x}_1 = 76.4 > \bar{x}_2 = 63.6$，故推論 μ_1 有顯著性的高於 μ_2。「1 年以下」組工作士氣顯著性的高於「1(含)~5 年以下」組工作士氣。

利用龐費洛尼法(Bonferroni method)估算 $\mu_1 - \mu_3$ 信賴區間：

A.設定顯著水準 $\alpha = 0.05$。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_1 = \mu_3$。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_1 \neq \mu_3$。

D.計算信賴區間：$|\bar{x}_1 - \bar{x}_3| \pm t_{\frac{\alpha}{2m}, n_t-k} \times \sqrt{\text{MSE} \times \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_3}\right)} = 8.1000 \pm 11.3705$

其中 $C_2^k = m = \frac{k!}{2! \times (k-2)!} = \frac{3!}{2! \times (3-2)!} = \frac{3 \times 2 \times 1}{2 \times 1 \times 1} = \frac{3 \times \cancel{2 \times 1}}{\cancel{2 \times 1} \times 1} = 3$

$t_{\frac{\alpha}{2m}, n_t-k} = t_{\frac{0.05}{2 \times 3}, 14-3} = t_{0.00833,11} = 2.8200$(使用 Excel 軟體 T.INV 函數查詢獲得)

$t_{\frac{\alpha}{2m}, n_t-k} \times \sqrt{\text{MSE} \times \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_3}\right)} = 2.8200 \times \sqrt{36.1273 \times \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{4}\right)} = 2.8200 \times 4.0320 = 11.3705$

$|\bar{x}_1 - \bar{x}_3| = |76.4 - 84.5| = 8.1$

E.因信賴區間-3.2705~19.4705 包括數值 0，故判別接受虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_1 = \mu_3$，故 μ_1 和 μ_3 之間無達到顯著性的差異水準。「1 年以下」組和「5 年(含)以上」組工作士氣沒有達到顯著性的差異水準。

利用龐費洛尼法(Bonferroni method)估算 $\mu_2 - \mu_3$ 信賴區間：

A.設定顯著水準 $\alpha = 0.05$。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_2 = \mu_3$。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_2 \neq \mu_3$。

D.計算信賴區間：$|\bar{x}_2 - \bar{x}_3| \pm t_{\frac{\alpha}{2m}, n_t-k} \times \sqrt{\text{MSE} \times \left(\frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3}\right)} = 20.9000 \pm 11.3705$

其中 $C_2^k = m = \frac{k!}{2! \times (k-2)!} = \frac{3!}{2! \times (3-2)!} = \frac{3 \times 2 \times 1}{2 \times 1 \times 1} = \frac{3 \times \cancel{2 \times 1}}{\cancel{2 \times 1} \times 1} = 3$

$t_{\frac{\alpha}{2m}, n_t-k} = t_{\frac{0.05}{2 \times 3}, 14-3} = t_{0.00833,11} = 2.8200$(使用 Excel 軟體 T.INV 函數查詢獲得)。

$t_{\frac{\alpha}{2m}, n_t-k} \times \sqrt{\text{MSE} \times \left(\frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3}\right)} = 2.8200 \times \sqrt{36.1273 \times \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{4}\right)} = 2.8200 \times 4.0320 = 11.3705$

$|\bar{x}_2 - \bar{x}_3| = |63.6 - 84.5| = 20.9$

E.因信賴區間 9.5295~32.2705 未包括數值 0，故判別拒絕接受虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_2 = \mu_3$，接受對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_2 \neq \mu_2$。因 $\bar{x}_2 = 63.6 < \bar{x}_3 = 84.5$，故推論 μ_3 有顯著性的高於 μ_2。「5 年(含)以上」組工作士氣顯著性的高於「1(含)~5 年以下」組工作士氣。

13.3.2.5 杜凱法【選擇教材】

杜凱法(Tukey method; Tukey's studentized range test, HSD)是由費雪(R. A. Fisher)所建議，再由杜凱(Tukey, 1949)提出。進行平均值差距檢定時，不管其間層級的數量，以最多階次者為準，查表獲得其臨界值；由於判斷時所採用的臨界值數值比較大，故平均值之間的差異不易達到顯著水準。

在變異數分析中，有 k 個母體平均值，若欲進行分別 1 對 1 比較 2 個母體平均值之差 $\mu_i - \mu_j$ $(i \neq j)$，在信賴水準 $1 - \alpha$ 或顯著水準 α，兩母體平均值之差 $\mu_i - \mu_j$ $(i \neq j)$的信賴區間：

$$|\bar{x}_i - \bar{x}_j| \ \pm \ \mathrm{Q}_{\alpha,k,v=n_t-k} \times \sqrt{\frac{\mathrm{MSE}}{n}}$$

其中 $n = n_i = n_j = n_k$：各處理組的重複數量，若 $n_i \neq n_j$ 時，可利用所有處理組別重複數量的幾何平均值取代 n 值。

$\mathrm{Q}_{\alpha,k,v=n_t-k}$：查杜凱表

$v = n_t - k$：誤差項自由度

k：欲檢定的母體數量

範例 13.11 九如速食連鎖餐廳有 A1、A2 和 A3 三家加盟店，欲瞭解三家加盟店服務品質是否相同，分別抽取 5、6 和 7 位消費者進行服務品質問卷評量，評量的結果如下表所示：試在顯著水準 α = 0.05 下，利用杜凱法(Tukey method)估算兩母體平均值之差的信賴區間，分別 1 對 1 配對比較三家加盟店的服務品質是否相同？

樣本	加盟店 A1	加盟店 A2	加盟店 A3
1	80	92	95
2	85	94	98
3	90	93	92
4	85	90	88
5	88	91	98
6		98	90
7			95
合計	428	558	656
樣本平均值	85.6	93.0	93.7
樣本變異數	14.30	8.00	14.90
樣本標準(偏)差	3.7815	2.8284	3.8607

題解：設 μ_1、μ_2 和 μ_3 依序分別為加盟店 A1、A2 和 A3 服務品質的母體平均值。$\bar{x}_1$ = 85.6、$\bar{x}_2$ = 93.0 和$\bar{x}_3$ = 93.7143 依序分別為加盟店 A1、A2 和 A3 服務品質的樣本平均值。$k = 3$ 欲進行母體平均值檢定的母體數量。加盟店 A1 樣本數量 $n_1 = 5$，加盟店 A2 樣本數量 $n_2 = 6$，加盟店 A3 樣本數量 $n_3 = 7$，樣本總數 $n_t = n_1 + n_2 + n_3 = 18$。全部樣本平均值$\bar{\bar{x}} = \frac{\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j} x_{ij}}{n_t} = \frac{\sum_{j=1}^{k}(n_j \times \bar{x}_j)}{n_t} = \frac{428+558+656}{18} = 91.22$。$S_1^2 = 14.30$、$S_2^2 = 8.00$ 和$S_3^2 = 14.90$ 依序分別為加盟店 A1、A2 和 A3 服務品質的樣本變異數。

A.設定顯著水準 $\alpha = 0.05$，臨界值$F_{\alpha,k-1,n_t-k} = F_{0.05,3-1,18-3} = F_{0.05,2,15} = 3.6823$(使用 Excel 軟體 F.INV.RT 函數查詢獲得)。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$ 加盟店 3 家個別服務品質的母體平均值皆相等。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_i \neq \mu_j$ 加盟店 3 家個別服務品質的母體平均值不全部相等。

D.計算檢定統計值─F 值

$\mathrm{SSTR} = \sum_{j=1}^{k} n_j \times \left(\bar{x}_j - \bar{\bar{x}}\right)^2 = 5 \times (85.6 - 91.22)^2 + 6 \times (93.0 - 91.22)^2 + 7 \times (93.7 - 91.22)^2 = 158.05 + 18.96 + 43.47 = 220.48$

$\mathrm{MSTR} = \frac{\mathrm{SSTR}}{k-1} = \frac{220.48}{3-1} = 110.24$

$\mathrm{SSE} = \sum_{j=1}^{k}(n_j - 1) \times S_j^2 = (5-1) \times 14.30 + (6-1) \times 8.00 + (7-1) \times 14.90 = 57.2 + 40.0 + 89.4 = 186.6$

$\text{MSE} = \frac{\sum_{j=1}^{k}(n_j-1)\times s_j^2}{n_t-k} = \frac{\text{SSE}}{n_t-k} = \frac{186.6}{18-3} = 12.4419$

檢定統計值 $F = \frac{\text{MSTR}}{\text{MSE}} = \frac{110.24}{12.4419} = 8.8605$

E.檢定統計值 $F = 8.8605$ > 臨界值$F_{\alpha,k-1,n_t-k} = 3.6823$，拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$ 加盟店 3 家個別服務品質的母體平均值皆相等，接受對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_i \neq \mu_j$ 加盟店 3 家個別服務品質的母體平均值不全部相等。因此，該速食連鎖餐廳 A1、A2 和 A3 三家加盟店的服務品質有不相同者，彼此之間有顯著性的差異。

利用杜凱法(Tukey method)估算 $\mu_1 - \mu_2$ 信賴區間：

A.設定顯著水準 $\alpha = 0.05$。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_1 = \mu_2$。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_1 \neq \mu_2$。

D.計算信賴區間：$|\bar{x}_1 - \bar{x}_2| \pm \text{Q}_{\alpha,k,v=n_t-k} \times \sqrt{\frac{\text{MSE}}{n}} = 7.4000 \pm 5.5314$

其中$\text{Q}_{\alpha,k,v=n_t-k} = \text{Q}_{0.05,3,18-3} = 3.67$

$n = \sqrt{n_1 \times n_2} = \sqrt{5 \times 6} = 5.4772$ 幾何平均值

$\text{Q}_{\alpha,k,v=n_t-k} \times \sqrt{\frac{\text{MSE}}{n}} = 3.67 \times \sqrt{\frac{12.4419}{5.4772}} = 3.67 \times 1.5072 = 5.5314$

~~$n = \frac{2}{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}} = \frac{2}{\frac{1}{5}+\frac{1}{6}} = 5.4545$ 調和平均值~~

$\text{Q}_{\alpha,k,v=n_t-k} \cancel{\times \sqrt{\frac{\text{MSE}}{n}} = 3.67 \times \sqrt{\frac{12.4419}{5.4545}} = 3.67 \times 1.5103 = 5.5428}$

E.因信賴區間未包括 0，故判別拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_1 = \mu_2$，接受對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_1 \neq \mu_2$。因$\bar{x}_1 = 85.6 < \bar{x}_2 = 93.0$，故推論 μ_2 有顯著性的高於 μ_1。加盟店 A2 服務品質顯著性的高於加盟店 A1。

利用杜凱法(Tukey method)估算 $\mu_1 - \mu_3$ 信賴區間：

A.設定顯著水準 $\alpha = 0.05$。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_1 = \mu_3$。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_1 \neq \mu_3$。

D.計算信賴區間：$|\bar{x}_1 - \bar{x}_3| \pm \text{Q}_{\alpha,k,v=n_t-k} \times \sqrt{\frac{\text{MSE}}{n}} = 8.1143 \pm 5.3222$

其中$\text{Q}_{\alpha,k,v=n_t-k} = \text{Q}_{0.05,3,18-3} = 3.67$

$n = \sqrt{n_1 \times n_3} = \sqrt{5 \times 7} = 5.9161$

$\text{Q}_{\alpha,k,v=n_t-k} \times \sqrt{\frac{\text{MSE}}{n}} = 3.67 \times \sqrt{\frac{12.4419}{5.9161}} = 3.67 \times 1.4502 = 5.3222$

~~$n = \frac{2}{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_3}} = \frac{2}{\frac{1}{5}+\frac{1}{7}} = 5.8333$~~

$\text{Q}_{\alpha,k,v=n_t-k} \cancel{\times \sqrt{\frac{\text{MSE}}{n}} = 3.67 \times \sqrt{\frac{12.4419}{5.8333}} = 3.67 \times 1.4604 = 5.3598}$

E.因信賴區間未包括 0，故判別拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_1 = \mu_3$，接受對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_1 \neq \mu_3$。因$\bar{x}_1 = 85.6 < \bar{x}_3 = 93.7143$，故推論 μ_3 有顯著性的高於 μ_1。加盟店 A3 服務品質顯著性的高於加盟店 A1。

利用杜凱法(Tukey method)估算 $\mu_2 - \mu_3$ 信賴區間：

A.設定顯著水準 $\alpha = 0.05$。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_2 = \mu_3$。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_2 \neq \mu_3$。

D.計算信賴區間：$|\bar{x}_2 - \bar{x}_3| \pm \text{Q}_{\alpha,k,v=n_t-k} \times \sqrt{\frac{\text{MSE}}{n}} = 0.7143 \pm 5.0852$

其中$\text{Q}_{\alpha,k,v=n_t-k} = \text{Q}_{0.05,3,18-3} = 3.67$

$$n = \sqrt{n_2 \times n_3} = \sqrt{6 \times 7} = 6.4807$$

$$\text{Q}_{\alpha,k,v=n_t-k} \times \sqrt{\frac{\text{MSE}}{n}} = 3.67 \times \sqrt{\frac{12.4419}{6.4807}} = 3.67 \times 1.3856 = 5.0852$$

$$\cancel{n = \frac{2}{\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}} = \frac{2}{\frac{1}{6}+\frac{1}{7}} = 6.4615}$$

$$\text{Q}_{\alpha,k,v=n_t-k} \cancel{\times \sqrt{\frac{\text{MSE}}{n}} = 3.67 \times \sqrt{\frac{12.4419}{6.4615}} = 3.67 \times 1.3876 = 5.0926}$$

E.因信賴區間包括 0，故判別接受虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_2 = \mu_3$，故 μ_2 和 μ_3 之間無達到顯著性的差異水準。加盟店 A2 和加盟店 A3 服務品質沒有達到顯著性的差異水準。

速食連鎖餐廳範例中各種事後檢定方法的信賴區間比較

事後檢定法	$\mu_1 - \mu_2$ 信賴區間	$\mu_1 - \mu_3$ 信賴區間	$\mu_2 - \mu_3$ 信賴區間	信賴區間大小順序
費雪最低顯著差異法	7.4000 ± 4.5525	8.1143 ± 4.4022	0.7143 ± 4.1827	5
薛費檢定法	7.4000 ± 5.7964	8.1143 ± 5.6050	0.7143 ± 5.3256	1
鄧肯法	7.4000 ± 4.7627	8.1143 ± 4.5826	0.7143 ± 4.3784	4
龐費洛尼法	7.4000 ± 5.7536	8.1143 ± 5.5636	0.7143 ± 5.2862	2
杜凱法	7.4000 ± 5.5428	8.1143 ± 5.3598	0.7143 ± 5.0926	3

練習 13.14 九如連鎖咖啡廳販售甲、乙與丙三種咖啡飲料，各隨機抽取 5 杯飲料測量咖啡因含量(mg/100 ml)如下表所示：試在顯著水準 α = 0.05 下，利用杜凱法(Tukey method)估算兩母體平均值之差的信賴區間，分別 1 對 1 配對比較三種咖啡飲料咖啡因含量是否相同？

咖啡飲料	咖啡因含量(mg/100 ml)				
甲	151	162	145	175	155
乙	128	132	135	125	131
丙	105	125	133	100	119

題解：設 μ_1、μ_2 和 μ_3 依序分別為甲、乙和丙咖啡飲料咖啡因含量的母體平均值(mg/100 ml)。$\bar{x}_1$ = 157.6、$\bar{x}_2$ = 130.2 和$\bar{x}_3$ = 116.4 依序分別為甲、乙和丙咖啡飲料咖啡因含量的樣本平均值(mg/100 ml)。k = 3 欲進行母體平均值檢定的母體數量。甲咖啡樣本數量 n_1 = 5，乙咖啡樣本數量 n_2 = 5，丙咖啡樣本數量 n_3 = 5，樣本總數 $n_t = n_1 + n_2 + n_3 = 15$。全部樣本平均值$\bar{\bar{x}} = \frac{\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j} x_{ij}}{n_t} = \frac{\sum_{j=1}^{k}(n_j \times \bar{x}_j)}{n_t} = \frac{788+651+582}{15} =$ 134.7333。S_1^2 = 132.8、S_2^2 = 14.7 和S_3^2 = 188.8 依序分別為甲、乙和丙咖啡飲料咖啡因含量的樣本變異數。

A.設定顯著水準 α = 0.05，臨界值$F_{\alpha,k-1,n_t-k} = F_{0.05,3-1,15-3} = F_{0.05,2,12}$ = 3.8853(使用 Excel 軟體 F.INV.RT 函數查詢獲得)。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$ 咖啡飲料三種個別咖啡因含量的母體平均值皆相等。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_i \neq \mu_j$ 咖啡飲料三種個別咖啡因含量的母體平均值不全部相等。

D.計算檢定統計值─F 值

$$\text{SSTR} = \sum_{j=1}^{k} n_j \times \left(\bar{x}_j - \bar{\bar{x}}\right)^2 = 5 \times (157.6 - 134.7333)^2 + 5 \times (130.2 - 134.7333)^2 + 5 \times (116.4 - 134.7333)^2$$
$$= 2614.4222 + 102.7556 + 1680.5556 = 4397.7333$$

$\text{MSTR} = \frac{\text{SSTR}}{k-1} = \frac{4397.7333}{3-1} = 2198.8667$

$\text{SSE} = \sum_{j=1}^{k}(n_j - 1) \times S_j^2 = (5-1) \times 132.8 + (5-1) \times 14.7 + (5-1) \times 188.8 = 531.2 + 58.8 + 755.2 = 1345.2$

$\text{MSE} = \frac{\sum_{j=1}^{k}(n_j-1)\times S_j^2}{n_t-k} = \frac{\text{SSE}}{n_t-k} = \frac{1345.2}{15-3} = 112.1$

檢定統計值 $F = \frac{\text{MSTR}}{\text{MSE}} = \frac{2198.8667}{112.1} = 19.6152$

E.檢定統計值 $F = 19.6152$ > 臨界值$F_{\alpha,k-1,n_t-k} = 3.8853$，拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$ 咖啡飲料三種個別咖啡因含量的母體平均值皆相等，接受對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_i \neq \mu_j$ 咖啡飲料三種個別咖啡因含量的母體平均值不全部相等。因此，該速食咖啡廳甲、乙和丙三種咖啡飲料咖啡因含量有不相同者，彼此之間有顯著性的差異。

利用杜凱法(Tukey method)估算 $\mu_1 - \mu_2$ 信賴區間：

A.設定顯著水準 $\alpha = 0.05$。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_1 = \mu_2$。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_1 \neq \mu_2$。

D.計算信賴區間：$|\bar{x}_1 - \bar{x}_2| \pm Q_{\alpha,k,v=n_t-k} \times \sqrt{\frac{\text{MSE}}{n}} = 27.4000 \pm 17.8509$

其中$Q_{\alpha,k,v=n_t-k} = Q_{0.05,3,15-3} = 3.77$

$n = \sqrt{n_1 \times n_2} = \sqrt{5 \times 5} = 5$

$Q_{\alpha,k,v=n_t-k} \times \sqrt{\frac{\text{MSE}}{n}} = 3.77 \times \sqrt{\frac{112.1}{5}} = 3.77 \times 4.7350 = 17.8509$

E.因信賴區間未包括 0，故判別拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_1 = \mu_2$，接受對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_1 \neq \mu_2$。因$\bar{x}_1 = 157.6 > \bar{x}_2 = 130.2$，故推論 μ_1 有顯著性的高於 μ_2。甲咖啡飲料咖啡因含量顯著性的高於乙咖啡飲料。

利用杜凱法(Tukey method)估算 $\mu_1 - \mu_3$ 信賴區間：

A.設定顯著水準 $\alpha = 0.05$。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_1 = \mu_3$。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_1 \neq \mu_3$。

D.計算信賴區間：$|\bar{x}_1 - \bar{x}_3| \pm Q_{\alpha,k,v=n_t-k} \times \sqrt{\frac{\text{MSE}}{n}} = 41.2000 \pm 17.8509$

其中$Q_{\alpha,k,v=n_t-k} = Q_{0.05,3,15-3} = 3.77$

$n = \sqrt{n_1 \times n_3} = \sqrt{5 \times 5} = 5$

$Q_{\alpha,k,v=n_t-k} \times \sqrt{\frac{\text{MSE}}{n}} = 3.77 \times \sqrt{\frac{112.1}{5}} = 3.77 \times 4.7350 = 17.8509$

E.因信賴區間未包括 0，故判別拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_1 = \mu_3$，接受對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_1 \neq \mu_3$。因$\bar{x}_1 = 157.6 > \bar{x}_3 = 116.4$，故推論 μ_1 有顯著性的高於 μ_3。甲咖啡飲料咖啡因含量顯著性的高於丙咖啡飲料。

利用杜凱法(Tukey method)估算 $\mu_2 - \mu_3$ 信賴區間：

A.設定顯著水準 $\alpha = 0.05$。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_2 = \mu_3$。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_2 \neq \mu_3$。

D.計算信賴區間：$|\bar{x}_2 - \bar{x}_3| \pm Q_{\alpha,k,v=n_t-k} \times \sqrt{\frac{\text{MSE}}{n}} = 13.8000 \pm 17.8509$

其中$Q_{\alpha,k,v=n_t-k} = Q_{0.05,3,15-3} = 3.77$

$n = \sqrt{n_2 \times n_3} = \sqrt{5 \times 5} = 5$

$Q_{\alpha,k,v=n_t-k} \times \sqrt{\frac{\text{MSE}}{n}} = 3.77 \times \sqrt{\frac{112.1}{5}} = 3.77 \times 4.7350 = 17.8509$

E.因信賴區間包括 0，故判別接受虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_2 = \mu_3$，故 μ_2 和 μ_3 之間無達到顯著性的差異水準。乙咖啡飲料和丙咖啡飲料咖啡因含量沒有達到顯著性的差異水準。

咖啡飲料咖啡因含量範例中各種事後檢定方法的信賴區間比較

事後檢定法	$\mu_1 - \mu_2$ 信賴區間	$\mu_1 - \mu_3$ 信賴區間	$\mu_2 - \mu_3$ 信賴區間	信賴區間大小順序
費雪最低顯著差異法	27.4000 ± 14.5898	41.2000 ± 14.5898	13.8000 ± 14.5898	5
薛費檢定法	27.4000 ± 18.6665	41.2000 ± 18.6665	13.8000 ± 18.6665	1
鄧肯法	27.4000 ± 15.2703	41.2000 ± 15.2703	13.8000 ± 15.2703	4
龐費洛尼法	27.4000 ± 18.6123	41.2000 ± 18.6123	13.8000 ± 18.6123	2
杜凱法	27.4000 ± 17.8509	41.2000 ± 17.8509	13.8000 ± 17.8509	3

練習 13.15 在針對一個國際觀光旅館專職員工的工作士氣抽樣調查中，依據員工服務年資分為三組，各組各調查 4~5 位員工，調查數據如下表所示(假設工作士氣的分布使屬於常態分布)，利用杜凱法(Tukey method)估算兩母體平均值之差的信賴區間，分別 1 對 1 配對比較三組員工工作士氣是否相同？

服務年資	工作士氣量表分數				
1 年以下	71	70	78	80	83
1(含)~5 年以下	68	52	70	66	62
5 年(含)以上	90	86	79	83	

題解：設 μ_1、μ_2 和 μ_3 依序分別為「1 年以下」、「1(含)~5 年以下」和「5 年(含)以上」三組工作士氣的母體平均值。$\bar{x}_1 = 76.4$、$\bar{x}_2 = 63.6$ 和 $\bar{x}_3 = 84.5$ 依序分別為「1 年以下」、「1(含)~5 年以下」和「5 年(含)以上」三組工作士氣的樣本平均值。$k = 3$ 欲進行母體平均值檢定的母體數量。「1 年以下」組樣本數量 $n_1 = 5$，「1(含)~5 年以下」組樣本數量 $n_2 = 5$，「5 年(含)以上」組樣本數量 $n_3 = 4$，樣本總數 $n_t = n_1 + n_2 + n_3 = 14$。全部樣本平均值 $\bar{\bar{x}} = \frac{\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j} x_{ij}}{n_t} = \frac{71+70+78+80+83+68+52+70+66+62+90+86+79+83}{14} = \frac{1038}{14} = 74.1429$。$S_1^2 = 32.30$、$S_2^2 = 50.80$ 和 $S_3^2 = 21.67$ 依序分別為「1 年以下」、「1(含)~5 年以下」和「5 年(含)以上」三組工作士氣的樣本變異數。

A.設定顯著水準 $\alpha = 0.05$，臨界值 $F_{\alpha,k-1,n_t-k} = F_{0.05,3-1,14-3} = F_{0.05,2,11} = 3.9823$(使用 Excel 軟體 F.INV.RT 函數查詢獲得)。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$ 服務年資三種層級個別工作士氣量表分數的母體平均值皆相等。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_i \neq \mu_j$ 服務年資三種層級個別工作士氣量表分數的母體平均值不全部相等。

D.計算檢定統計值−F 值

$\text{SSTR} = \sum_{j=1}^{k} n_j \times \left(\bar{x}_j - \bar{\bar{x}}\right)^2 = 5 \times (76.4 - 74.1429)^2 + 5 \times (63.6 - 74.1429)^2 + 4 \times (84.5 - 74.1429)^2 = 25.4735 + 555.7592 + 429.0816 = 1010.3143$

$\text{MSTR} = \frac{\text{SSTR}}{k-1} = \frac{1010.3143}{3-1} = 505.1571$

$\text{SSE} = \sum_{j=1}^{k}\left(n_j - 1\right) \times S_j^2 = (5-1) \times 32.30 + (5-1) \times 50.80 + (4-1) \times 21.67 = 129.20 + 203.20 + 65.00 = 397.40$

MSE = $\frac{\sum_{j=1}^{k}(n_j-1)\times s_j^2}{n_t-k}$ = $\frac{SSE}{n_t-k}$ = $\frac{397.40}{14-3}$ = 36.1273

檢定統計值 F = $\frac{MSTR}{MSE}$ = $\frac{505.1571}{36.1273}$ = 13.9827

E.檢定統計值 F = 13.9827 > 臨界值$F_{\alpha,k-1,n_t-k}$ = 3.9823，拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$ 服務年資三種層級個別工作士氣量表分數的母體平均值皆相等，接受對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_i \neq \mu_j$ 服務年資三種層級個別工作士氣量表分數的母體平均值不全部相等。因此，「1 年以下」、「1(含)~5 年以下」和「5 年(含)以上」三組工作士氣有不相同者，彼此之間有達到顯著性的差異。

變異數分析表(ANOVA table)

變異來源(Source of variation)	平方和(Sum of squares)	自由度(Degrees of freedom)	均方(Mean square)	F 值
樣本間變異或組間變異(Treatments)	1010.3143	2	505.1571	13.9827
樣本內變異、組內變異或誤差 (Error)	397.40	11	36.1273	
合計(Total)	1407.7143	13		

利用杜凱法(Tukey method)估算 $\mu_1 - \mu_2$ 信賴區間：

A.設定顯著水準 α = 0.05。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_1 = \mu_2$。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_1 \neq \mu_2$。

D.計算信賴區間：$|\bar{x}_1 - \bar{x}_2| \pm Q_{\alpha,k,v=n_t-k} \times \sqrt{\frac{MSE}{n}}$ = 12.8000 ± 10.2682

其中$Q_{\alpha,k,v=n_t-k}$ = $Q_{0.05,3,14-3}$ = $Q_{0.05,3,11}$ = 3.82(查詢杜凱表)

$n = \sqrt{n_1 \times n_2} = \sqrt{5 \times 5} = 5$

$Q_{\alpha,k,v=n_t-k} \times \sqrt{\frac{MSE}{n}} = 3.82 \times \sqrt{\frac{36.1273}{5}} = 3.82 \times 2.6880 = 10.2682$

$|\bar{x}_1 - \bar{x}_2| = |76.4 - 63.6| = 12.8$

E.因信賴區間 2.5318~23.0682 未包括數值 0，故判別拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_1 = \mu_2$，接受對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_1 \neq \mu_2$。因$\bar{x}_1$ = 76.4 > $\bar{x}_2$ = 63.6，故推論 μ_1 有顯著性的高於 μ_2。「1 年以下」組工作士氣顯著性的高於「1(含)~5 年以下」組工作士氣。

利用杜凱法(Tukey method)估算 $\mu_1 - \mu_3$ 信賴區間：

A.設定顯著水準 α = 0.05。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_1 = \mu_3$。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_1 \neq \mu_3$。

D.計算信賴區間：$|\bar{x}_1 - \bar{x}_3| \pm Q_{\alpha,k,v=n_t-k} \times \sqrt{\frac{MSE}{n}}$ = 8.1000 ± 10.8573

其中$Q_{\alpha,k,v=n_t-k}$ = $Q_{0.05,3,14-3}$ = $Q_{0.05,3,11}$ = 3.82(查詢杜凱表)

$n = \sqrt{n_1 \times n_3} = \sqrt{5 \times 4} = 4.4721$

$Q_{\alpha,k,v=n_t-k} \times \sqrt{\frac{MSE}{n}} = 3.82 \times \sqrt{\frac{36.1273}{4.4721}} = 3.82 \times 2.8422 = 10.8573$

$|\bar{x}_1 - \bar{x}_3| = |76.4 - 84.5| = 8.1$

E.因信賴區間-2.7573~18.9573 包括數值 0，故判別接受虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_1 = \mu_3$，故 μ_1 和 μ_3 之間無達到顯著性的差異水準。「1 年以下」組和「5 年(含)以上」組工作士氣沒有達到顯著性的差異水準。

利用杜凱法(Tukey method)估算 $\mu_2 - \mu_3$ 信賴區間：

A.設定顯著水準 $\alpha = 0.05$。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_2 = \mu_3$。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_2 \neq \mu_3$。

D.計算信賴區間：$|\bar{x}_2 - \bar{x}_3| \pm Q_{\alpha,k,v=n_t-k} \times \sqrt{\frac{\text{MSE}}{n}} = 20.9000 \pm 10.8573$

其中$Q_{\alpha,k,v=n_t-k} = Q_{0.05,3,14-3} = Q_{0.05,3,11} = 3.82$(查詢杜凱表)

$n = \sqrt{n_2 \times n_3} = \sqrt{5 \times 4} = 4.4721$

$Q_{\alpha,k,v=n_t-k} \times \sqrt{\frac{\text{MSE}}{n}} = 3.82 \times \sqrt{\frac{36.1273}{4.4721}} = 3.82 \times 2.8422 = 10.8573$

$|\bar{x}_2 - \bar{x}_3| = |63.6 - 84.5| = 20.9$

E.因信賴區間 10.0427~31.7573 未包括數值 0，故判別拒絕接受虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_2 = \mu_3$，接受對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_2 \neq \mu_2$。因$\bar{x}_2 = 63.6 < \bar{x}_3 = 84.5$，故推論 μ_3 有顯著性的高於 μ_2。「5 年(含)以上」組工作士氣顯著性的高於「1(含)~5 年以下」組工作士氣。

各種多重比較程序的比較

進行多重比較時，相同條件下信賴區間的大小為薛費檢定法(Scheffe's method) > 龐費洛尼法(Bonferroni method) > 杜凱法(Tukey method) > 鄧肯法(Duncan method) > 費雪最低顯著差異法(Fisher's LSD)。

信賴區間愈大者【如：薛費檢定法(Scheffe's method)】，愈容易將數值 0 納入信賴區間中，使配對比較後，欲容易判定不會達到顯著性差異水準。信賴區間愈小者【如：費雪最低顯著差異法(Fisher's LSD)】，愈不容易將數值 0 納入信賴區間中，使配對比較後，欲容易判定會達到顯著性差異水準。

表 多重比較程序信賴區間之比較

事後比較法	信賴區間
單一信賴區間	$|\bar{x}_i - \bar{x}_j| \pm t_{\frac{\alpha}{2},v} \times \sqrt{\text{MSE}} \times \sqrt{\left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j}\right)}$
費雪最低顯著差異法	$|\bar{x}_i - \bar{x}_j| \pm t_{\frac{\alpha}{2},v=n_t-k} \times \sqrt{\text{MSE} \times \left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j}\right)}$
薛費檢定法	$|\bar{x}_i - \bar{x}_j| \pm \sqrt{(k-1) \times F_{\alpha,k-1,n_t-k}} \times \sqrt{\text{MSE} \times \left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j}\right)}$
鄧肯法	$|\bar{x}_i - \bar{x}_j| \pm Q_{\alpha,k,v=n_t-k} \times \sqrt{\frac{\text{MSE}}{n}}$
龐費洛尼法	$|\bar{x}_i - \bar{x}_j| \pm t_{\frac{\alpha}{2m},v=n_t-k} \times \sqrt{\text{MSE} \times \left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j}\right)}$
杜凱法	$|\bar{x}_i - \bar{x}_j| \pm Q_{\alpha,k,v=n_t-k} \times \sqrt{\frac{\text{MSE}}{n}}$

經過變異數分析，當推論接受虛無假設(H_0: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \ldots = \mu_k$所有母體平均值皆相等)時，若再經過各種事後檢定的方式，亦有可能推論產生兩個配對母體平均值之差信賴區間沒有包含 0 的狀況發生，似乎顯示兩個配對母體平均值達到顯著性差異水準，此種狀況都是在變異數分析時，檢定統計值與臨界值非常接近的狀況才會發生。若有前述狀況發生時，還是以變異數分析為判斷主軸，推論接受虛無假設(H_0: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \ldots = \mu_k$所有母體平均值皆相等)。

13.4 實驗設計介紹

在實驗型研究(experimental research)中需先設定(規劃、操作)欲探索的研究變數(操作變數、實驗變數)，研究過程中控制其他變數(因素)，即可在較單純(控制)環境下，瞭解研究變數(操作變數)對目標變數(依變數、因變數 dependent variable)、反應變數(response variable)或反應(response)的影響。主要目的是在找尋以目標變數最大化或最小化為前提下，研究變數(操作變數)從試驗的變量中找出最佳的變量(條件)。

在某連鎖速食餐廳中，為了提高備餐速度(效率)並期待可以減少工時(人事費用)，欲重新檢討廚房備餐流程之設計，請相關主管重新設計 4 套(處理 treatments)不同的備餐流程(操作變數)，為了驗證 4 套不同備餐流程的備餐速度(效率)[目標變數、依變數]，欲實際驗證每套備餐流程，分別試驗(驗證)一個星期的時間以估計其備餐速度(效率)。

實驗單位(experimental unit)：接受實驗觀察的對象，如特定商場(單位)、餐廳或特定遊憩區的消費者(人)[受測者]、產品、田地、農場。

因子(factor)：能夠控制或調整的變數。例如：溫度、售價。

水準(level)：單獨一個因子(factor)中各種可以區分的不同程度。例如：溫度 30、40、50 和 60°C；售價 30、40 和 50 元。

處理(treatment)：各種因子(一個或一個以上)個別水準的組合。溫度 30°C、溫度 40°C、溫度 50°C；售價 30 元、售價 40 元、售價 50 元。

反應變數(response variable)：實驗欲探索的目標變數(屬於依變數)

13.5 完全隨機設計

完全隨機設計或**完全隨機化設計**(Completely randomized designs, CRD)係指沒有區集設計的單因子實驗設計，又稱為單因子分類(one-way classification)實驗設計。將不同的處理(treatment)水準以隨機的方式分派給實驗單位。**透過隨機分派機制可以降低因為實驗單位的差異，導致對實驗結果的影響，單純呈現實驗變數對實驗結果的關係。**

在實驗研究法中，完全隨機設計使用於研究一個主要變數的影響，在實驗設計中無須考慮其他影響變數。設計比較主要研究變數之不同水準(levels)，對於實驗結果、依變數(dependent variable)、反應(response)或反應變數(response variable)的影響。屬於沒有使用區集設計的單因子實驗設計，一般通稱為單因子分類(one-way classification)的實驗設計。在完全隨機設計中，主要研究變數之不同水準(levels)是隨機分派(randomly assigned)試驗於實驗單位。

全部需要樣本或實驗單位數量 = 水準數量(number of levels) × 重複數量(number of replications)。

美香連鎖咖啡店欲測試新咖啡飲料產品價格的市場接受度，實驗每杯新咖啡飲料 30、40 和 50 元三種價格水準，採用 4 重複的實驗設計，故在美香連鎖咖啡店中三種價格水準隨機性的指派 12 家分店試賣 1 個月，蒐集此 12 家分店新咖啡飲料的販售量，以評估此新咖啡飲料價格在市場上的接受程度。

在完全隨機設計假設欲研究的操作變數有 k 個處理(水準)，在每一個處理(水準)中的反應變數之平均值是否相等，其檢定的程序與「<u>變異數分析：檢定 k 個母體平均值相等</u>」章節中完全相同。假設檢定的通式：

虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \ldots = \mu_k$ 所有母體平均值皆相等。

對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_i \neq \mu_j$ ($i \neq j$)所有母體平均值不全部相等。

其中：μ_j：第 j 個母體之平均值；k：欲進行母體平均值檢定的母體數量

母體變異數 σ² 之處理間估計值(Between-treatments estimate of population variance)

母體變異數 σ² 在處理間之估計值稱為處理間均方(mean square due to treatment, MSTR)、組間變異數、樣本間均方(mean square between, MSB)、組間變異的均方(between-groups mean squares, MSB)、因子變異數(mean square due to factor, MSF)或處理間均方(mean square between treatments)

$$\text{MSTR} = \frac{\sum_{j=1}^{k} n_j \times (\bar{x}_j - \bar{\bar{x}})^2}{k-1} = \frac{\text{SSTR}}{k-1}$$

其中$\sum_{j=1}^{k} n_j \times (\bar{x}_j - \bar{\bar{x}})^2 = \sum_{j=1}^{k} n_j \times \bar{x}_j^2 - n_t \times \bar{\bar{x}}^2 = \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n_j} (\bar{x}_j - \bar{\bar{x}})^2$：處理平方和(**sum of squares due to treatment**, **SSTR)**、樣本間平方和(**sum of squares between subpopulation**, **SSB**)、因子差異平方和、因子變異(**sum of squares due to factor**, **SSF**)、處理間變異(sum of square between treatments, **SSB**)、組間平方和(sum of square between, **SSB**)、實驗因子變異或處理間平方和(sum of square between treatments)

$k-1$：SSTR 的自由度

母體變異數 σ² 之處理內估計值(Within-treatments estimate of population variance)

母體變異數 σ² 在處理內之估計值稱為誤差均方(mean square due to error, MSE)、處理內均方(mean square within treatments)、樣本內均方(mean square within samples, MSW)、組內變異的均方(within-groups mean squares, MSW)、隨機變異數(mean square due to random error, MSE)或組內不偏變異數(mean square)

$$\text{MSE} = \frac{\sum_{j=1}^{k} (n_j - 1) \times S_j^2}{n_t - k} = \frac{\text{SSE}}{n_t - k}$$

其中$\sum_{j=1}^{k} (n_j - 1) \times S_j^2 = \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n_j} (x_{ij} - \bar{x}_j)^2$：**誤差平方和**(sum of squares due to error, **SSE**)、隨機變異、樣本內平方和(sum of squares within samples, **SSW**)、處理內平方和、處理內變異(sum of square within treatment, SSW)、組內平方和(sum of square within, **SSW**)、誤差平方和(sum of square for error, **SSE**)或誤差變異

$n_t - k$：SSE 的自由度

比較變異數的估算值：*F* 檢定(Comparing the variance estimate: The *F* test)

若虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \ldots = \mu_k$ 成立時，MSTR 和 MSE 是兩個相互獨立的母體變異數 σ² 的不偏估計值。在母體特定研究變數屬於常態分布時，兩個相互獨立的母體變異數估計值屬於 F 分布。故，虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \ldots = \mu_k$ 成立，變異數分析的假設亦成立時，$\frac{\text{MSTR}}{\text{MSE}}$是屬於分子自由度 $k-1$ 與分母自由度 $n_t - k$ 的 F 分布。

若虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \ldots = \mu_k$ 不成立時，MSTR 的數值會高估母體的變異數 σ²，因此，檢定統計值 $F = \frac{\text{MSTR}}{\text{MSE}}$的比值會增加。當檢定統計值 $F = \frac{\text{MSTR}}{\text{MSE}}$的比值高於某一特定標準$F_{k-1,n_t-k,\alpha}$ (顯著水準 α)，即可判定**拒絕**虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \ldots = \mu_k$，而**接受**對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_i \neq \mu_j$ 所有母體平均值不全部相等。

$$\text{檢定統計值 } F = \frac{\text{MSTR}}{\text{MSE}}$$

若檢定統計值 $F \leq$ 臨界值$F_{\alpha,k-1,n_t-k}$，接受虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \ldots = \mu_k$。

若檢定統計值 $F >$ 臨界值$F_{\alpha,k-1,n_t-k}$，拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \ldots = \mu_k$，接受對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_i \neq \mu_j$ 所有母體平均值不全部相等。

完全隨機設計的 ANOVA 表(Analysis of variance table, ANOVA Table)

ANOVA 的計算程序可以透過 ANOVA 表格清楚的呈現。

完全隨機設計變異數分析表(ANOVA table)

變異來源(Source of variation)	平方和(Sum of squares)	自由度(Degrees of freedom)	均方(Mean square)	F 值
樣本間變異或組間變異(Treatments)	SSTR	$k-1$	MSTR = $\frac{\text{SSTR}}{k-1}$	$F = \frac{\text{MSTR}}{\text{MSE}}$
樣本內變異、組內變異或誤差(Error)	SSE	$n_t - k$	MSE = $\frac{\text{SSE}}{n_t-k}$	
合計(Total)	SST	$n_t - 1$		

不同變異來源的平方和之加總，稱為**總平方和(total sum of squares; sum of square for total, SST or SS$_t$)**、**總離均差平方和**或**總變異**。總平方和(SST)的自由度(n_t – 1)為樣本間變異的自由度和樣本內變異的自由度之和，$n_t - 1 = k - 1 + n_t - k$。

總平方和(SST)除以其自由度(n_t – 1)獲得**總樣本變異數**或**全部樣本變異數**(overall sample variance)。可以視為暫時去除各種處理(treatments)的分野(區分)，將所有觀測值皆視為同一組樣本。

$$\text{SST} = \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j}\left(x_{ij}-\bar{\bar{x}}\right)^2 = \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j}x_{ij} - n_t\times\bar{\bar{x}}^2 = \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j}\left(\bar{x}_j-\bar{\bar{x}}\right)^2 + \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j}\left(x_{ij}-\bar{x}_j\right)^2$$

$$\text{SST} = \text{SSTR} + \text{SSE}$$

因此，在進行變異數分析時，可以將**全部樣本變異數**分為樣本間變異(treatments)和樣本內變異(error)兩項；同理，亦可將其**總平方和(SST)**拆成樣本間變異的平方和(SSTR)和樣本內變異的平方和(SSE)。

範例 13.12 美香連鎖咖啡店欲測試新咖啡飲料產品價格的市場接受度，實驗每杯新咖啡飲料 30、40 和 50 元三種價格水準，採用 4 重複實驗設計，在該連鎖咖啡店中三種價格水準隨機性指派 12 家分店試賣 1 個月，蒐集此 12 家分店新咖啡飲料販售數量(杯數)，以評估此新咖啡飲料價格在市場上的接受程度。試檢定在顯著水準 α = 0.05 下，3 個價格水準販售數量是否相同？

販售數量(杯數)	30 元 1	40 元 2	50 元 3
分店	2012	1792	1595
分店	2385	1994	1698
分店	2452	1893	1892
分店	2685	1990	1278
樣本平均值$\bar{x}$	2383.50	1917.25	1615.75
樣本變異數 S^2	77869.67	9152.92	65861.58
樣本標準(偏)差 S	279.05	95.67	256.64

題解：設 μ_1、μ_2 和 μ_3 依序分別為定價 30、40 和 50 元在 4 家分店販售數量的母體平均值。$\bar{x}_1$ = 2383.50、$\bar{x}_2$ = 1917.25 和$\bar{x}_3$ = 1615.75 依序分別為定價 30、40 和 50 元在 4 家分店販售數量的樣本平均值。k = 3 欲進行母體平均值檢定的母體數量。定價 30 元樣本數量 n_1 = 4，定價 40 元樣本數量 n_2 = 4，定價 50 元樣本數量 n_3 = 4，樣本總數 $n_t = n_1 + n_2 + n_3 = 12$。若分別來自 k 個母體的樣本數量相等，$n_1 = n_2 = n_3 = \ldots = n_k = n$，則 $n_t = k\times n$。全部樣本平均值 $\bar{\bar{x}} = \frac{\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j}x_{ij}}{n_t} = \frac{\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j}x_{ij}}{k\times n} = \frac{\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j}\frac{x_{ij}}{n}}{\frac{k\times n}{n}} = \frac{\sum_{j=1}^{k}\bar{x}_j}{k} = \frac{2383.50+1917.25+1615.75}{3}$ = 1972.17。S_1^2 = 77869.67、S_2^2 = 9152.92 和S_3^2 = 65861.58 依序分別為定價 30、40 和 50 元在 4 家分店販售數量的樣本變異數。

A.設定顯著水準 α = 0.05，臨界值$F_{\alpha,k-1,n_t-k} = F_{0.05,3-1,12-3} = F_{0.05,2,9}$ = 4.2565(使用 Excel 軟體 F.INV.RT 函數查詢獲得)。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$ 價格所有處理(水準)之販售數量的母體平均值皆相等。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_i \neq \mu_j$ 價格所有處理(水準)之販售數量的母體平均值不全部相等。

D.計算檢定統計值：F 值

$$SSTR = \sum_{j=1}^{k} n_j \times (\bar{x}_j - \bar{\bar{x}})^2 = 4 \times (2383.50 - 1972.17)^2 + 4 \times (1917.25 - 1972.17)^2 + 4 \times (1615.75 - 1972.17)^2$$
$$= 676780.4 + 12063.4 + 508131.4 = 1196975.2$$

$$MSTR = \frac{SSTR}{k-1} = \frac{1196975}{3-1} = 598487.6$$

$$SSE = \sum_{j=1}^{k} (n_j - 1) \times S_j^2 = (4-1) \times 77869.67 + (4-1) \times 9152.92 + (4-1) \times 65861.58 = 458652.5$$

$$MSE = \frac{\sum_{j=1}^{k}(n_j-1)\times S_j^2}{n_t-k} = \frac{SSE}{n_t-k} = \frac{458652.5}{12-3} = 50961.4$$

$$檢定統計值\ F = \frac{MSTR}{MSE} = \frac{598487.6}{50961.4} = 11.74$$

E.檢定統計值 $F = 11.74$ > 臨界值$F_{\alpha,k-1,n_t-k} = 4.2565$，拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$ 價格所有處理(水準)之販售數量的母體平均值皆相等；接受對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_i \neq \mu_j$ 價格所有處理(水準)之販售數量的母體平均值不全部相等。因此，該連鎖咖啡店欲測試新咖啡飲料 30、40 和 50 元三種價格水準的販售數量不全部相等，彼此之間有顯著性的差異。

變異數分析表(ANOVA table)

變異來源(Source of variation)	平方和(Sum of squares)	自由度(Degrees of freedom)	均方(Mean square)	F 值
樣本間變異或組間變異(Treatments)	1196975.2	2	598487.6	11.74
樣本內變異、組內變異或誤差(Error)	458652.5	9	50961.4	
合計(Total)	1655627.7	11		

利用費雪最低顯著差異法(Fisher's LSD) (least significance difference procedure)檢定不同處理(價格水準)之間平均值相互比較是否相等。在顯著水準 $\alpha = 0.05$ 下，自由度 $n_t - k = 12 - 3 = 9$，$t_{\frac{\alpha}{2},n_t-k} = t_{\frac{0.05}{2},12-3} = t_{0.025,9} = 2.2622$(使用 Excel 軟體 T.INV 函數查詢獲得)。

$$LSD = t_{\frac{\alpha}{2},n_t-k} \times \sqrt{MSE \times \left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j}\right)} = 2.2622 \times \sqrt{50961.4 \times \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right)} = 361.1076$$

因為每一個處理(水準)的觀測(樣本)數量相同，故不同處理(水準)之間的費雪最低顯著差異法(Fisher's LSD)檢定標準皆相同。

|定價 30 元$\bar{x}_1$ – 定價 40 元$\bar{x}_2$| = |2383.50 – 1917.25| = 466.25 > LSD = 361.11，判定顯著差異

|定價 30 元$\bar{x}_1$ – 定價 50 元$\bar{x}_3$| = |2383.50 – 1615.75| = 767.75 > LSD = 361.11，判定顯著差異

|定價 40 元$\bar{x}_2$ – 定價 50 元$\bar{x}_3$| = |1917.25 – 1615.75| = 301.50 < LSD = 361.11，判定未顯著差異

故新咖啡飲料的定價以 30 元消費者購買數量最高，分別顯著性的高於定價 40 和 50 元者。

利用 Excel 軟體分析

利用 Excel 2007 協助資料分析，在 Excel 視窗中勾選工具(T)→選取增益集(I)…→勾選分析工具箱→按確定按鈕。回到 Excel 視窗中勾選工具(T)→選取資料分析(D)…→在資料分析視窗中選取單因子變異數分析後按確定。在單因子變異數分析視窗中，輸入範圍(I):反應變數在 excel 視窗中的位置；分組方式：選擇逐欄(C)；輸出選項選擇新工作表(P)。按確定。

利用 Excel 2010 協助資料分析，在 Excel 視窗中勾選檔案→選項後，出現【Excel 選項】小視窗，點選左邊選項中增益集，在增益集選項中勾選分析工具箱-VBA 後，按執行(G)…。出現【增益集】小視窗，點選□分析工具箱-VBA 後，按確定。回到 Excel 視窗中，點選資料→資料分析後，出現【資料分析】小視窗，點選單因子變異數分析後，按確定。出現【單因子變異數分析】小視窗，在輸入範圍中，圈選欲分析資料的範圍後，按確定。

單因子變異數分析

摘要

組	個數	總和	平均	變異數
欄 1	4	9534	2383.5	77869.67
欄 2	4	7669	1917.25	9152.917
欄 3	4	6463	1615.75	65861.58

ANOVA

變源	SS	自由度	MS	F	P-值	臨界值
組間	1196975	2	598487.6	11.74394	0.0031	4.256495
組內	458652.5	9	50961.39			
總和	1655628	11				

練習 13.16 美香連鎖咖啡店欲測試新咖啡飲料產品價格的市場接受度，實驗每杯新咖啡飲料 30、40、50 和 60 元四種價格水準，採用 4 重複實驗設計，在該連鎖咖啡店中四種價格水準隨機性指派 16 家分店試賣 1 個月，蒐集此 16 家分店新咖啡飲料販售數量(杯數)，以評估此新咖啡飲料價格在市場上的接受程度。試檢定在顯著水準 $\alpha = 0.05$ 下，4 個價格水準販售數量是否相同？

販售數量(杯數)	30 元 1	40 元 2	50 元 3	60 元 4
分店	2012	1792	1595	1255
分店	2385	1994	1698	1368
分店	2452	1893	1892	1232
分店	2685	1990	1278	1327
樣本平均值$\bar{x}$	2383.50	1917.25	1615.75	1295.50
樣本變異數 S^2	77869.67	9152.92	65861.58	3973.67
樣本標準(偏)差 S	279.05	95.67	256.64	79.90

題解：設 μ_1、μ_2、μ_3 和 μ_4 依序分別為定價 30、40、50 和 60 元在 4 家分店販售數量的母體平均值。$\bar{x}_1$ = 2383.50、$\bar{x}_2$ = 1917.25、$\bar{x}_3$ = 1615.75 和$\bar{x}_4$ = 1295.50 依序分別為定價 30、40、50 和 60 元在 4 家分店販售數量的樣本平均值。$k = 4$ 欲進行母體平均值檢定的母體數量。定價 30 元樣本數 $n_1 = 4$，定價 40 元樣本數 $n_2 = 4$，定價 50 元樣本數 $n_3 = 4$，定價 60 元樣本數 $n_4 = 4$，樣本總數 $n_t = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = 16$。若分別來自 k 個母體的樣本數量相等，$n_1 = n_2 = n_3 = \ldots = n_k = n$，則 $n_t = k\times n$。全部樣本平均值$\bar{\bar{x}} = \frac{\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j} x_{ij}}{n_t} = \frac{\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j} x_{ij}}{k\times n} = \frac{\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j} \frac{x_{ij}}{n}}{\frac{k\times n}{n}} = \frac{\sum_{j=1}^{k}\bar{x}_j}{k} = \frac{2383.50+1917.25+1615.75+1295.50}{4} = 1803.00$。$S_1^2 = 77869.67$、$S_2^2 = 9152.92$、$S_3^2 = 65861.58$ 和$S_4^2 = 79.90$ 依序分別為定價 30、40、50 和 60 元在 4 家分店販售數量的樣本變異數。

A.設定顯著水準 $\alpha = 0.05$，臨界值$F_{\alpha,k-1,n_t-k} = F_{0.05,4-1,16-4} = F_{0.05,3,12} = 3.4903$(使用 Excel 軟體 F.INV.RT 函數查詢獲得)。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$所有處理(水準)之販售數量的母體平均值皆相等。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_i \neq \mu_j$所有處理(水準)之販售數量的母體平均值不全部相等。

D.計算檢定統計值：F 值

$\text{SSTR} = \sum_{j=1}^{k} n_j \times \left(\bar{x}_j - \bar{\bar{x}}\right)^2 = 4 \times (2383.50 - 1803.00)^2 + 4 \times (1917.25 - 1803.00)^2 + 4 \times (1615.75 - 1803.00)^2 + 4 \times (1295.50 - 1803.00)^2 = 1347921.00 + 52212.25 + 140250.25 + 1030225.00 = 2570608.50$

$\text{MSTR} = \frac{\text{SSTR}}{k-1} = \frac{2570608.50}{4-1} = 856869.50$

$SSE = \sum_{j=1}^{k}(n_j-1)\times S_j^2 = (4-1)\times 77869.67 + (4-1)\times 9152.92 + (4-1)\times 65861.58 + (4-1)\times 3973.67 = 470573.50$

$$MSE = \frac{\sum_{j=1}^{k}(n_j-1)\times S_j^2}{n_t-k} = \frac{SSE}{n_t-k} = \frac{470573.50}{16-4} = 39214.46$$

$$\text{檢定統計值 } F = \frac{MSTR}{MSE} = \frac{856869.50}{39214.46} = 21.8509$$

E.檢定統計值 $F = 21.8509 > $ 臨界值$F_{\alpha,k-1,n_t-k} = 3.4903$，拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$所有母體平均值皆相等；接受對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_i \neq \mu_j$所有母體平均值不全部相等。因此，該連鎖咖啡店欲測試新咖啡飲料 30、40、50 和 60 元四種價格水準的販售數量不全部相等，彼此之間有顯著性的差異。

變異數分析表(ANOVA table)

變異來源(Source of variation)	平方和(Sum of squares)	自由度(Degrees of freedom)	均方(Mean square)	F 值
樣本間變異或組間變異(Treatments)	2570608.50	3	856869.50	21.85
樣本內變異、組內變異或誤差(Error)	470573.50	12	39214.46	
合計(Total)	3041182.00	15		

利用費雪最低顯著差異法(Fisher's LSD) (least significance difference procedure)檢定不同處理(價格水準)之間平均值相互比較是否相等。在顯著水準 $\alpha = 0.05$ 下，自由度 $n_t - k = 16 - 4 = 12$，$t_{\frac{\alpha}{2},n_t-k} = t_{\frac{0.05}{2},16-4} = t_{0.025,12} = 2.1788$(使用 Excel 軟體 T.INV 函數查詢獲得)。

$$LSD = t_{\frac{\alpha}{2},n_t-k} \times \sqrt{MSE \times \left(\frac{1}{n_i}+\frac{1}{n_j}\right)} = 2.1788 \times \sqrt{39214.46 \times \left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)} = 305.09$$

因為每一個處理(水準)的觀測(樣本)數量相同，故不同處理(水準)之間的費雪最低顯著差異法(Fisher's LSD)檢定標準皆相同。

$|$定價 30 元$\bar{x}_1$ – 定價 40 元$\bar{x}_2| = |2383.50 - 1917.25| = 466.25 > LSD = 305.09$，判定顯著差異。

$|$定價 30 元$\bar{x}_1$ – 定價 50 元$\bar{x}_3| = |2383.50 - 1615.75| = 767.75 > LSD = 305.09$，判定顯著差異。

$|$定價 30 元$\bar{x}_1$ – 定價 60 元$\bar{x}_4| = |2383.50 - 1295.50| = 1088.00 > LSD = 305.09$，判定顯著差異。

$|$定價 40 元$\bar{x}_2$ – 定價 50 元$\bar{x}_3| = |1917.25 - 1615.75| = 301.50 < LSD = 305.09$，判定未顯著差異。

$|$定價 40 元$\bar{x}_2$ – 定價 60 元$\bar{x}_4| = |1917.25 - 1295.50| = 621.75 > LSD = 305.09$，判定顯著差異。

$|$定價 50 元$\bar{x}_3$ – 定價 60 元$\bar{x}_4| = |1615.75 - 1295.50| = 320.25 > LSD = 305.09$，判定顯著差異。

故新咖啡飲料的定價以 30 元消費者購買數量最高，顯著性的高於定價 40、50 和 60 元者。

練習 13.17 在完全隨機試驗(CRD)中，若實驗因子有 6 個水準，每一個水準重複執行於 5 個實驗單位中，請完成下列 Anova 表。

變異來源(Source of variation)	平方和(Sum of squares)	自由度(Degrees of freedom)	均方(Mean square)	F 值
樣本間變異或組間變異(Treatments)	200			
樣本內變異、組內變異或誤差(Error)				
合計(Total)	300			

題解：

完全隨機設計變異數分析表(ANOVA table)

變異來源(Source of variation)	平方和(Sum of squares)	自由度(Degrees of freedom)	均方(Mean square)	F 值
樣本間變異或組間變異(Treatments)	SSTR	$k-1$	$MSTR = \frac{SSTR}{k-1}$	$F = \frac{MSTR}{MSE}$

變異來源(Source of variation)	平方和(Sum of squares)	自由度(Degrees of freedom)	均方(Mean square)	F 值
樣本內變異、組內變異或誤差(Error)	SSE	$n_t - k$	MSE = $\frac{SSE}{n_t - k}$	
合計(Total)	SST	$n_t - 1$		

已知 SST 和 SSTR 數值，可以透過 SST = SSTR + SSE 運算出 SSE = SST – SSTR = 300 – 200 = 100。

實驗因子有 6 個水準，$k = 6$，樣本間變異的自由度 = $k - 1 = 6 - 1 = 5$。

實驗因子有 6 個水準，每一個水準重複執行於 5 個實驗單位，可以獲得 6 × 5 = 30 樣本數 $n_t = 30$。誤差項自由度 = $n_t - k = 30 - 6 = 24$。

全部的自由度 = $n_t - 1 = 30 - 1 = 29$

已知各項平方和與自由度即可算出各項的均方 MSTR = $\frac{SSTR}{k-1} = \frac{200}{6-1} = 40$，MSE = $\frac{SSE}{n_t-k} = \frac{100}{30-6} = \frac{100}{24} = 4.1667$

已知 MSTR 和 MSE 數值即可運算出 $F = \frac{MSTR}{MSE} = \frac{40}{4.1667} = 9.6000$，即可依序完成變異數分析表數值。

變異來源(Source of variation)	平方和(Sum of squares)	自由度(Degrees of freedom)	均方(Mean square)	F 值
樣本間變異或組間變異(Treatments)	200	5	40	9.600
樣本內變異、組內變異或誤差(Error)	100	24	4.1667	
合計(Total)	300	29		

13.6 隨機區集設計

在**隨機區集設計**或**隨機化區集設計**(Randomized block design, RBD)中使用一個會影響實驗結果或依變數的主要外在變數(external variables)，如實驗單位(受測者)的年齡層、性別、收入等，將實驗單位區分成數個區集(blocks)。類似市場區隔概念，將實驗單位(受測者)分群比較分析。使用於將實驗單位區分為數個區集的變數特稱為區集變數(blocking variable)。在隨機區集設計中可以鑑別和評量區集變數對實驗結果或依變數的影響程度。

典型隨機區集設計的主要使用限制是只能控制一個外在變數，若有一個以上的外在變數需要控制時，必須使用拉丁方格設計(Latin square design)或因子設計(factorial design)。

區集變數(Blocking variable)	區集一(Block1)	實驗組(Experimental group)	R	T	O
		控制組(Control group)	R		O
	區集二(Block2)	實驗組(Experimental group)	R	T	O
		控制組(Control group)	R		O
	區集三(Block3)	實驗組(Experimental group)	R	T	O
		控制組(Control group)	R		O
	區集四(Block4)	實驗組(Experimental group)	R	T	O
		控制組(Control group)	R		O

美香連鎖咖啡店欲測試新咖啡飲料產品價格的市場接受度，咖啡店的位置和大小與消費者的年齡、性別、收入、職業等(外在變數)皆會影響新咖啡飲料的消費意願。若依據相關文獻和實際觀察分析，選擇消費者收入為區集變數。消費者收入分為低收入(平均月收入 NT$20000 元以下)、中收入(平均月收入 NT$20000~50000 元)和高收入(平均月收入 NT$50001 元以上)三個區集。

實驗每杯 30、40 和 50 元三種價格水準，採用 4 重複的實驗設計，在該連鎖咖啡店中三種價格水準隨機性的指派 12 家分店試賣 1 個月，蒐集此 12 家分店新咖啡飲料分別對低收入、中收入和高收入消費者的販售量，以評估此新咖啡飲料價格在市場上的接受程度。

區集變數	區集	實驗變數：價格(元)											
		30				40				50			
消費者收入	低收入	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O
	中收入	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O
	高收入	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O

美香連鎖咖啡店欲測試新咖啡飲料產品價格的市場接受度，咖啡店的位置和大小與消費者的年齡、性別、收入、職業等(外在變數)皆會影響新咖啡飲料的消費意願。若依據相關文獻和實際觀察分析，選擇消費者收入和性別兩者共同為區集變數。消費者收入分為低收入(平均月收入 NT$20000 元以下)和男性、中收入(平均月收入 NT$20000~50000 元)和男性、高收入(平均月收入 NT$50001 元以上)和男性、低收入(平均月收入 NT$20000 元以下)和女性、中收入(平均月收入 NT$20000~50000 元)和女性與高收入(平均月收入 NT$50001 元以上)和女性六個區集。

實驗每杯 30、40 和 50 元三種價格水準，採用 4 重複的實驗設計，在該連鎖咖啡店中三種價格水準隨機性的指派 12 家分店試賣 1 個月，蒐集此 12 家分店新咖啡飲料分別對低收入和男性、中收入和男性、高收入和男性、低收入和女性、中收入和女性與高收入和女性消費者的販售量，以評估此新咖啡飲料價格在市場上的接受程度。

區集變數	區集	實驗變數：價格(元)											
		30				40				50			
消費者收入性別	低收入男性	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O
	中收入男性	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O
	高收入男性	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O
	低收入女性	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O
	中收入女性	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O
	高收入女性	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O

在完全隨機設計(completely randomized designs, CRD)中，檢定數個處理(水準)對於反應變數平均值的差異，皆是使用檢定統計值 F 值：

$$\text{檢定統計值 } F = \frac{\text{MSTR}}{\text{MSE}}$$

若有實驗未考慮的變數(外生變數)產生變異(差異)時，導致 MSE 數值變大，F 數值變小，在這種情況下，即使不同的處理(水準)之間有顯著性的差異，也無法透過 F 統計值的檢定，顯示出不同處理(水準)對於反應變數平均值的差異。

在隨機區集設計(randomized block design, RBD)中，期望能夠控制引起 MSE 發生變異的外生變數，並提供一個更佳的誤差變異數之估計法，使檢定不同處理(水準)對於反應變數平均值的差異更具效益。

隨機區集設計觀測值和平均值符號

		處理(treatments)					區集平均值
		T_1	T_2	T_j	...	T_k	
區　集 (blocks)	Block 1	x_{11}	x_{12}	x_{1j}	...	x_{1k}	$\bar{x}_{1\cdot}$
	Block 2	x_{21}	x_{22}	x_{2j}	...	x_{2k}	$\bar{x}_{2\cdot}$
	Block i	x_{i1}	x_{i2}	x_{ij}		x_{ik}	$\bar{x}_{i\cdot}$

		處理(treatments)					區集平均值
		T_1	T_2	T_j	…	T_k	
	…	…	…		…	…	…
	Block b	x_{b1}	x_{b2}	x_{bj}	…	x_{bk}	$\bar{x}_{b\cdot}$
處理平均值		$\bar{x}_{\cdot 1}$	$\bar{x}_{\cdot 2}$	$\bar{x}_{\cdot j}$	…	$\bar{x}_{\cdot k}$	$\bar{\bar{x}}$

特定觀測值與所有觀測值之平均值的總差異量數學符號表示

$$x_{ij} - \bar{\bar{x}} = (\bar{x}_{i\cdot} - \bar{\bar{x}}) + (\bar{x}_{\cdot j} - \bar{\bar{x}}) + (x_{ij} - \bar{x}_{i\cdot} - \bar{x}_{\cdot j} + \bar{\bar{x}})$$

其中 k：處理或水準的數量

b：區集的數量

x_{ij}：第 i 個區集(block)與第 j 個處理(水準)的反應變數之觀測值

$\bar{x}_{i\cdot}$：第 i 個區集內(包含不同的處理或水準)反應變數之觀測值的平均值 $\bar{x}_{i\cdot} = \frac{\sum_{j=1}^{k} x_{ij}}{k}$

$\bar{x}_{\cdot j}$：第 j 個處理(水準)內(包含不同的區集)反應變數之觀測值的平均值 $\bar{x}_{\cdot j} = \frac{\sum_{i=1}^{b} x_{ij}}{b}$

$\bar{\bar{x}}$：反應變數的所有觀測值之平均值 $\bar{\bar{x}} = \frac{\sum_{i=1}^{b}\sum_{j=1}^{k} x_{ij}}{b \times k}$

$x_{ij} - \bar{\bar{x}}$：特定觀測值與所有觀測值之平均值的總差異量

$\bar{x}_{i\cdot} - \bar{\bar{x}}$：不同區集所產生的差異

$\bar{x}_{\cdot j} - \bar{\bar{x}}$：不同處理(水準)所產生的差異

$x_{ij} - \bar{x}_{i\cdot} - \bar{x}_{\cdot j} + \bar{\bar{x}}$：隨機差異

將特定觀測值與所有觀測值之平均值的總差異量(上述)數學符號表示式取平方後，由於兩兩交叉相乘項和皆為 0，故可以獲得下列方程式：

$$\sum_{i=1}^{b}\sum_{j=1}^{k}\left(x_{ij} - \bar{\bar{x}}\right)^2 = \sum_{i=1}^{b}\sum_{j=1}^{k}(\bar{x}_{i\cdot} - \bar{\bar{x}})^2 + \sum_{i=1}^{b}\sum_{j=1}^{k}\left(\bar{x}_{\cdot j} - \bar{\bar{x}}\right)^2 + \sum_{i=1}^{b}\sum_{j=1}^{k}\left(x_{ij} - \bar{x}_{i\cdot} - \bar{x}_{\cdot j} - \bar{\bar{x}}\right)^2$$

其中$\sum_{i=1}^{b}\sum_{j=1}^{k}\left(x_{ij} - \bar{\bar{x}}\right)^2$：總變異或總平方和(total sum of square, SST)，其自由度為 $b \times k - 1 = n_t - 1$

$\sum_{i=1}^{b}\sum_{j=1}^{k}\left(\bar{x}_{\cdot j} - \bar{\bar{x}}\right)^2$：處理引起的變異或處理平方和(sum of square due to treatments, SSTR, SSF or SSBW)，其自由度為 $k - 1$

$\sum_{i=1}^{b}\sum_{j=1}^{k}(\bar{x}_{i\cdot} - \bar{\bar{x}})^2$：區集引起的變異或區集平方和(sum of square due to blocks, SSBL or SSBK)，其自由度為 $b - 1$

$\sum_{i=1}^{b}\sum_{j=1}^{k}\left(x_{ij} - \bar{x}_{i\cdot} - \bar{x}_{\cdot j} - \bar{\bar{x}}\right)^2$：隨機變異或誤差平方和(sum of square due to error, SSE)，其自由度為 $b \times k - b - k + 1 = (b - 1) \times (k - 1)$

n_t：全部樣本數($n_t = b \times k$)

自由度分別依序為 $n_t - 1 = (b - 1) + (k - 1) + (b - 1)\times(k - 1)$

故上式可以簡化標示為：

$$SST = SSBL + SSTR + SSE$$

其中 $SST = \sum_{i=1}^{b}\sum_{j=1}^{k}\left(x_{ij} - \bar{\bar{x}}\right)^2$

$SSTR = \sum_{i=1}^{b}\sum_{j=1}^{k}\left(\bar{x}_{\cdot j} - \bar{\bar{x}}\right)^2 = b \times \sum_{j=1}^{k}\left(\bar{x}_{\cdot j} - \bar{\bar{x}}\right)^2$

$SSBL = \sum_{i=1}^{b}\sum_{j=1}^{k}(\bar{x}_{i\cdot} - \bar{\bar{x}})^2 = k \times \sum_{i=1}^{b}(\bar{x}_{i\cdot} - \bar{\bar{x}})^2$

$SSE = \sum_{i=1}^{b}\sum_{j=1}^{k}\left(x_{ij} - \bar{x}_{i\cdot} - \bar{x}_{\cdot j} - \bar{\bar{x}}\right)^2 = SST - SSBL - SSTR$

考慮加入區集設計並重複執行的公式與範例

處理(水準)對反應變數的影響之檢定程序

A.設定顯著水準 α。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_{\cdot 1} = \mu_{\cdot 2} = \mu_{\cdot 3} = \mu_{\cdot 4} = \ldots = \mu_{\cdot k}$ 所有處理(水準)之反應變數的母體平均值皆相等。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_{\cdot i} \neq \mu_{\cdot j}$ 所有處理(水準)之反應變數的母體平均值不全部相等。

D.計算檢定統計值：F 值

$$\text{檢定統計值 } F = \frac{\text{MSTR}}{\text{MSE}}$$

E.若檢定統計值 $F \leq$ 臨界值 $F_{\alpha,k-1,(k-1)\times(b-1)}$，接受虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_{\cdot 1} = \mu_{\cdot 2} = \mu_{\cdot 3} = \mu_{\cdot 4} =\ldots= \mu_{\cdot k}$ 所有處理(水準)之反應變數的母體平均值皆相等。

F.若檢定統計值 $F >$ 臨界值 $F_{\alpha,k-1,(k-1)\times(b-1)}$，拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_{\cdot 1} = \mu_{\cdot 2} = \mu_{\cdot 3} = \mu_{\cdot 4} =\ldots= \mu_{\cdot k}$ 所有處理(水準)之反應變數的母體平均值皆相等，接受對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_{\cdot i} \neq \mu_{\cdot j}$ 所有處理(水準)之反應變數的母體平均值不全部相等。

區集對反應變數的影響之檢定程序

A.設定顯著水準 α。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_{1\cdot} = \mu_{2\cdot} = \mu_{3\cdot} = \mu_{4\cdot} =\ldots= \mu_{b\cdot}$ 所有區集之反應變數的母體平均值皆相等。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_{i\cdot} \neq \mu_{j\cdot}$ 所有區集之反應變數的母體平均值不全部相等。

D.計算檢定統計值：F 值

$$\text{檢定統計值 } F = \frac{\text{MSBL}}{\text{MSE}}$$

E.若檢定統計值 $F \leq$ 臨界值 $F_{\alpha,b-1,(k-1)\times(b-1)}$，接受虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_{1\cdot} = \mu_{2\cdot} = \mu_{3\cdot} = \mu_{4\cdot} =\ldots= \mu_{b\cdot}$ 所有區集之反應變數的母體平均值皆相等。

F.若檢定統計值 $F >$ 臨界值 $F_{\alpha,b-1,(k-1)\times(b-1)}$，拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_{1\cdot} = \mu_{2\cdot} = \mu_{3\cdot} = \mu_{4\cdot} =\ldots= \mu_{b\cdot}$ 所有區集之反應變數的母體平均值皆相等，接受對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_{i\cdot} \neq \mu_{j\cdot}$ 所有區集之反應變數的母體平均值不全部相等。

隨機區集設計的 ANOVA 表(Analysis of variance table, ANOVA Table)

ANOVA 的計算程序可以透過 ANOVA 表格清楚的呈現。隨機區集設計亦可使用 Excel 軟體中，資料→資料分析→「雙因子變異數分析：無重複試驗」視窗，進行統計運算。

隨機區集設計變異數分析表(ANOVA table)(k 個處理和 b 個區集)

變異來源(Source of variation)	平方和(Sum of squares)	自由度(Degrees of freedom)	均方(Mean square)	F 值
樣本間變異或組間變異(Treatments)	SSTR	$k-1$	$\text{MSTR} = \frac{\text{SSTR}}{k-1}$	$F = \frac{\text{MSTR}}{\text{MSE}}$
區集(Blocks)	SSBL	$b-1$	$\text{MSBL} = \frac{\text{SSBL}}{b-1}$	$F = \frac{\text{MSBL}}{\text{MSE}}$
樣本內變異、組內或誤差(Error)	SSE	$(k-1)\times(b-1)$	$\text{MSE} = \frac{\text{SSE}}{(k-1)\times(b-1)}$	
合計(Total)	SST	n_t-1		

範例 13.13 純純連鎖咖啡店欲測試新咖啡飲料產品價格的市場接受度，實驗每杯 30、40、50 和 60 元四種價格水準，在該連鎖咖啡店中四種價格水準隨機性指派 4 家分店試賣 1 個月，蒐集此 4 家分店新咖啡飲料分別對低收入、中收入和高收入消費者販售數量(杯數)，以評估此新咖啡飲料價格在市場上的接受程度。試檢定在顯著水準 $\alpha = 0.05$ 下，4 個價格水準販售數量是否相同？

		價格處理(水準)				區集和	區集平均值
		30 元	40 元	50 元	60 元		
區集	低收入	1502	1409	1325	1325	5561	1390.3
	中收入	1928	1968	1698	1352	6946	1736.5
	高收入	2567	2095	1845	1565	8072	2018.0

	價格處理(水準)				區集和	區集平均值
	30 元	40 元	50 元	60 元		
處理和	5997	5472	4868	4242	20579	
處理平均值	1999.0	1824.0	1622.7	1414.0		1714.9

題解：

價格處理(水準)對販售數量的影響之檢定

A.設定顯著水準 $\alpha = 0.05$，臨界值 $F_{\alpha,k-1,(k-1)\times(b-1)} = F_{0.05,4-1,(4-1)\times(3-1)} = F_{0.05,3,6} = 4.7571$(使用 Excel 軟體 F.INV.RT 函數查詢獲得)。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_{\cdot 1} = \mu_{\cdot 2} = \mu_{\cdot 3} = \mu_{\cdot 4}$ 所有處理(水準)之販售數量的母體平均值皆相等。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_{\cdot i} \neq \mu_{\cdot j}$ 所有處理(水準)之販售數量的母體平均值不全部相等。

D.計算檢定統計值：F 值

SST = $\sum_{i=1}^{b}\sum_{j=1}^{k}\left(x_{ij}-\bar{\bar{x}}\right)^2$ = (1502 – 1714.9)^2 + (1409 – 1714.9)^2 + (1325 – 1714.9)^2 + (1325 – 1714.9)^2 + (1928 – 1714.9)^2 + (1968 – 1714.9)^2 + (1698 – 1714.9)^2 + (1352 – 1714.9)^2 + (2567 – 1714.9)^2 + (2095 – 1714.9)^2 + (1845 – 1714.9)^2 + (1565 – 1714.9)^2 = 1594345

SSBL = $\sum_{i=1}^{b}\sum_{j=1}^{k}(\bar{x}_{i\cdot}-\bar{\bar{x}})^2 = k \times \sum_{i=1}^{b}(\bar{x}_{i\cdot}-\bar{\bar{x}})^2$ = 4 × [(1390.3 – 1714.9)^2 + (1736.5 – 1714.9)^2 + (2018.0 – 1714.9)^2] = 790935.2

SSTR = $\sum_{i=1}^{b}\sum_{j=1}^{k}\left(\bar{x}_{\cdot j}-\bar{\bar{x}}\right)^2 = b \times \sum_{j=1}^{k}\left(\bar{x}_{\cdot j}-\bar{\bar{x}}\right)^2$ = 3 × [(1999.0 – 1714.9)^2 + (1824.0 – 1714.9)^2 + (1622.7 – 1714.9)^2 + (1414.0 – 1714.9)^2] = 574990.3

SSE = $\sum_{i=1}^{b}\sum_{j=1}^{k}\left(x_{ij}-\bar{x}_{i\cdot}-\bar{x}_{\cdot j}-\bar{\bar{x}}\right)^2$ = SST – SSBL – SSTR = 1594345 – 790935.2 – 574990.3 = 228419.5

$$\text{MSTR} = \frac{\text{SSTR}}{k-1} = \frac{574990.3}{4-1} = 191663.4$$

$$\text{MSE} = \frac{\text{SSE}}{(k-1)\times(b-1)} = \frac{228419.5}{(4-1)\times(3-1)} = 38069.9$$

$$\text{檢定統計值 } F = \frac{\text{MSTR}}{\text{MSE}} = \frac{191663.4}{38069.9} = 5.0345$$

E.檢定統計值 F = 5.0345 > 臨界值 $F_{\alpha,k-1,(k-1)\times(b-1)}$ = 4.7571，拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_{\cdot 1} = \mu_{\cdot 2} = \mu_{\cdot 3} = \mu_{\cdot 4}$ 所有處理(水準)之販售數量的母體平均值皆相等；接受對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_{\cdot i} \neq \mu_{\cdot j}$ 所有處理(水準)之販售數量的母體平均值不全部相等。因此，該連鎖咖啡店欲測試新咖啡飲料 30、40、50 和 60 元四種價格水準的販售數量不全部相等，彼此之間有顯著性的差異。

區集對販售數量的影響之檢定

A.設定顯著水準 $\alpha = 0.05$，臨界值 $F_{\alpha,b-1,(k-1)\times(b-1)} = F_{0.05,3-1,(4-1)\times(3-1)} = F_{0.05,2,6} = 5.1433$(使用 Excel 軟體 F.INV.RT 函數查詢獲得)。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_{1\cdot} = \mu_{2\cdot} = \mu_{3\cdot}$所有區集之販售數量的母體平均值皆相等。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_{i\cdot} \neq \mu_{j\cdot}$所有區集之販售數量的母體平均值不全部相等。

D.計算檢定統計值：F 值

$$\text{MSBL} = \frac{\text{SSBL}}{b-1} = \frac{790935.2}{3-1} = 395467.6$$

$$\text{檢定統計值 } F = \frac{\text{MSBL}}{\text{MSE}} = \frac{395467.6}{38069.9} = 10.3879$$

E.檢定統計值 F = 10.3879 > 臨界值 $F_{\alpha,b-1,(k-1)\times(b-1)}$ = 5.1433，拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_{1\cdot} = \mu_{2\cdot} = \mu_{3\cdot}$所有區集之販售數量的母體平均值皆相等；接受對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_{i\cdot} \neq \mu_{j\cdot}$所有區集之販售數量的母體平均值不全部相等。因此，該連鎖咖啡店欲測試新咖啡飲料在低收入、中收入和高收入三種區集的販售數量不全部相等，彼此之間有顯著性的差異。

隨機區集設計變異數分析表(ANOVA table)(k 個處理和 b 個區集)

變異來源(Source of variation)	平方和(Sum of squares)	自由度(Degrees of freedom)	均方(Mean square)	F 值
樣本間變異或組間變異(Treatments)	574990.3	3	191663.4	5.0345
區集(Blocks)	790935.2	2	395467.6	10.3879
樣本內變異、組內或誤差(Error)	228419.5	6	38069.9	
合計(Total)	1594345	11		

練習 13.18 美香連鎖咖啡店欲測試新咖啡飲料產品價格的市場接受度，實驗每杯新咖啡飲料 30、40、50、60 和 70 元五種價格水準，在該連鎖咖啡店中 5 種價格水準隨機性指派 5 家分店試賣 1 個月，蒐集此 5 家分店新咖啡飲料分別對低收入、中收入和高收入消費者販售數量(杯數)，以評估此新咖啡飲料價格在市場上的接受程度。試檢定在顯著水準 α = 0.05 下，5 個價格水準販售數量是否相同？

		處理(水準)					區集和	區集平均值
		30 元	40 元	50 元	60 元	70 元		
	低收入	1502	1409	1325	1225	1032	6493	1298.6
區集	中收入	1928	1968	1698	1352	1057	8003	1600.6
	高收入	2567	2095	1845	1565	1165	9237	1847.4
處理和		5997	5472	4868	4142	3254	23733	
處理平均值		1999.0	1824.0	1622.7	1380.7	1084.7		1582.2

題解：

處理(水準)對販售數量的影響之檢定

A.設定顯著水準 α = 0.05，臨界值 $F_{\alpha,k-1,(k-1)\times(b-1)} = F_{0.05,5-1,(5-1)\times(3-1)} = F_{0.05,4,8}$ = 3.8379(使用 Excel 軟體 F.INV.RT 函數查詢獲得)。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_{\cdot 1} = \mu_{\cdot 2} = \mu_{\cdot 3} = \mu_{\cdot 4} = \mu_{\cdot 5}$ 所有處理(水準)之販售數量的母體平均值皆相等。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_{\cdot i} \neq \mu_{\cdot j}$ 所有處理(水準)之販售數量的母體平均值不全部相等。

D.計算檢定統計值：F 值

SST = $\sum_{i=1}^{b}\sum_{j=1}^{k}\left(x_{ij}-\bar{\bar{x}}\right)^2$ = (1502 – 1582.2)² + (1409 – 1582.2)² + (1325 – 1582.2)² + (1225 – 1582.2)² + (1032 – 1582.2)² + (1928 – 1582.2)² + (1968 – 1582.2)² + (1698 – 1582.2)² + (1352 – 1582.2)² + (1057 – 1582.2)² + (2567 – 1582.2)² + (2095 – 1582.2)² + (1845 – 1582.2)² + (1565 – 1582.2)² + (1165 – 1582.2)² = 2619760.4

SSBL = $\sum_{i=1}^{b}\sum_{j=1}^{k}(\bar{x}_{i\cdot}-\bar{\bar{x}})^2 = k\times\sum_{i=1}^{b}(\bar{x}_{i\cdot}-\bar{\bar{x}})^2$ = 5 × [(1298.6 – 1582.2)² + (1600.6 – 1582.2)² + (1847.4 – 1582.2)²] = 755492.8

SSTR = $\sum_{i=1}^{b}\sum_{j=1}^{k}\left(\bar{x}_{\cdot j}-\bar{\bar{x}}\right)^2 = b\times\sum_{j=1}^{k}\left(\bar{x}_{\cdot j}-\bar{\bar{x}}\right)^2$ = 3 × [(1999.0 – 1582.2)² + (1824.0 – 1582.2)² + (1622.7 – 1582.2)² + (1380.7 – 1582.2)² + (1084.7 – 1582.2)²] = 1565946.4

SSE = $\sum_{i=1}^{b}\sum_{j=1}^{k}\left(x_{ij}-\bar{x}_{i\cdot}-\bar{x}_{\cdot j}-\bar{\bar{x}}\right)^2$ = SST – SSBL – SSTR = 2619760.4 – 755492.8 – 1565946.4 = 298321.2

$$\text{MSTR} = \frac{\text{SSTR}}{k-1} = \frac{1565946.4}{5-1} = 391486.6$$

$$\text{MSE} = \frac{\text{SSE}}{(k-1)\times(b-1)} = \frac{298321.2}{(5-1)\times(3-1)} = 37290.15$$

$$\text{檢定統計值 } F = \frac{\text{MSTR}}{\text{MSE}} = \frac{391486.6}{37290.15} = 10.4984$$

E.檢定統計值 F = 10.4984 > 臨界值 $F_{\alpha,k-1,(k-1)\times(b-1)}$ = 3.8379，拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_{\cdot 1} = \mu_{\cdot 2} = \mu_{\cdot 3} = \mu_{\cdot 4} = \mu_{\cdot 5}$ 所有處理(水準)之販售數量的母體平均值皆相等；接受對立假設(alternative hypothesis) H_1:

$\mu_{\cdot i} \neq \mu_{\cdot j}$ 所有處理(水準)之販售數量的母體平均值不全部相等。因此，該連鎖咖啡店欲測試新咖啡飲料 30、40、50、60 和 70 元 5 種價格水準的販售數量不全部相等，彼此之間有顯著性的差異。

區集對販售數量的影響之檢定

A.設定顯著水準 α = 0.05，臨界值 $F_{\alpha,b-1,(k-1)\times(b-1)} = F_{0.05,3-1,(5-1)\times(3-1)} = F_{0.05,2,8}$ = 4.4590(使用 Excel 軟體 F.INV.RT 函數查詢獲得)。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_{1\cdot} = \mu_{2\cdot} = \mu_{3\cdot}$所有區集之販售數量的母體平均值皆相等。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_{i\cdot} \neq \mu_{j\cdot}$所有區集之販售數量的母體平均值不全部相等。

D.計算檢定統計值：F 值

$$\text{MSBL} = \frac{\text{SSBL}}{b-1} = \frac{755492.8}{3-1} = 377746.4$$

$$\text{檢定統計值 } F = \frac{\text{MSBL}}{\text{MSE}} = \frac{377746.4}{37290.15} = 10.1299$$

E.檢定統計值 F = 10.1299 > 臨界值 $F_{\alpha,b-1,(k-1)\times(b-1)}$ = 4.4590，拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_{1\cdot} = \mu_{2\cdot} = \mu_{3\cdot}$所有區集之販售數量的母體平均值皆相等；接受對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_{i\cdot} \neq \mu_{j\cdot}$所有區集之販售數量的母體平均值不全部相等。因此，該連鎖咖啡店欲測試新咖啡飲料在低收入、中收入和高收入三種區集的販售數量不全部相等，彼此之間有顯著性的差異。

隨機區集設計變異數分析表(ANOVA table)(k 個處理和 b 個區集)

變異來源(Source of variation)	平方和(Sum of squares)	自由度(Degrees of freedom)	均方(Mean square)	F 值
樣本間變異或組間變異(Treatments)	1565946.4	4	391486.6	10.4984
區集(Blocks)	755492.8	2	377746.4	10.1299
樣本內變異、組內或誤差(Error)	298321.2	8	37290.15	
合計(Total)	2619760.4	14		

練習 13.19 欲調查四種不同的蛋捲包裝對銷售數量的影響，分別在台北市五家百貨公司試賣一個月，將銷售數量經過分析獲得 ANOVA 資料如下表所示，試以顯著水準 α = 0.05 檢定(A)不同包裝是否影響銷售數量？(B)不同百貨公司販售是否影響銷售數量。假設此資料符合有母數統計方法分析。

變異來源	差異平方和 SS
包裝(P)	320
販售地點(L)	420
誤差(E)	250

題解：

包裝(水準)對販售數量的影響之檢定

A.設定顯著水準 α = 0.05，臨界值 $F_{\alpha,k-1,(k-1)\times(b-1)} = F_{0.05,4-1,(4-1)\times(5-1)} = F_{0.05,3,12}$ = 3.4903(使用 Excel 軟體 F.INV.RT 函數查詢獲得)。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_{\cdot 1} = \mu_{\cdot 2} = \mu_{\cdot 3} = \mu_{\cdot 4}$ 所有處理(水準)之銷售數量的母體平均值皆相等。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_{\cdot i} \neq \mu_{\cdot j}$ 所有處理(水準)之銷售數量的母體平均值不全部相等。

D.計算檢定統計值：F 值

$$\text{MSP} = \frac{\text{SSP}}{k-1} = \frac{320}{4-1} = 106.6667$$

$$\text{MSE} = \frac{\text{SSE}}{(k-1)\times(b-1)} = \frac{250}{(4-1)\times(5-1)} = 20.8333$$

$$檢定統計值\ F = \frac{MSP}{MSE} = \frac{106.6667}{20.8333} = 5.1200$$

E.檢定統計值 $F = 5.1200 > $ 臨界值 $F_{\alpha,k\text{-}1,(k\text{-}1)\times(b\text{-}1)} = 3.4903$，拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_{\cdot 1} = \mu_{\cdot 2} = \mu_{\cdot 3} = \mu_{\cdot 4}$ 所有處理(水準)之銷售數量的母體平均值皆相等；接受對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_{\cdot i} \neq \mu_{\cdot j}$ 所有處理(水準)之銷售數量的母體平均值不全部相等。因此，四種不同包裝對販售數量不全部相等，彼此之間有顯著性的差異。

販售地點對銷售數量的影響之檢定

A.設定顯著水準 $\alpha = 0.05$，臨界值 $F_{\alpha,b\text{-}1,(k\text{-}1)\times(b\text{-}1)} = F_{0.05,5\text{-}1,(4\text{-}1)\times(5\text{-}1)} = F_{0.05,4,12} = 3.2592$(使用 Excel 軟體 F.INV.RT 函數查詢獲得)。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_{1\cdot} = \mu_{2\cdot} = \mu_{3\cdot} = \mu_{4\cdot} = \mu_{5\cdot}$所有區集之銷售數量的母體平均值皆相等。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_{i\cdot} \neq \mu_{j\cdot}$所有區集之銷售數量的母體平均值不全部相等。

D.計算檢定統計值：F 值

$$MSL = \frac{SSL}{b-1} = \frac{420}{5-1} = 105$$

$$檢定統計值\ F = \frac{MSL}{MSE} = \frac{105}{20.8333} = 5.04$$

E.檢定統計值 $F = 5.04 > $ 臨界值 $F_{\alpha,b\text{-}1,(k\text{-}1)\times(b\text{-}1)} = 3.2592$，拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_{1\cdot} = \mu_{2\cdot} = \mu_{3\cdot} = \mu_{4\cdot} = \mu_{5\cdot}$所有區集之銷售數量的母體平均值皆相等；接受對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_{i\cdot} \neq \mu_{j\cdot}$所有區集之銷售數量的母體平均值不全部相等。因此，不同販售地點對販售數量不全部相等，彼此之間有顯著性的差異。

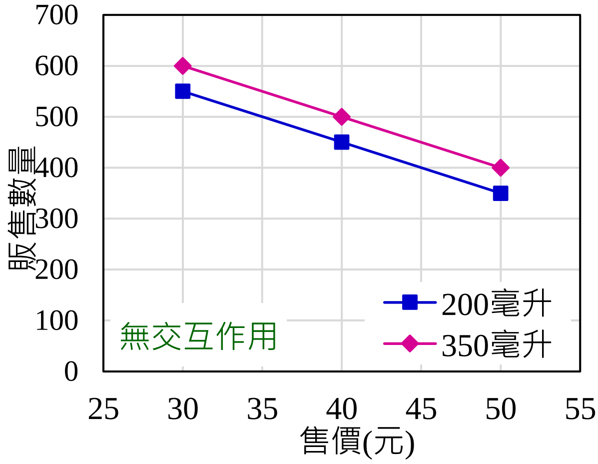
拉丁方設計

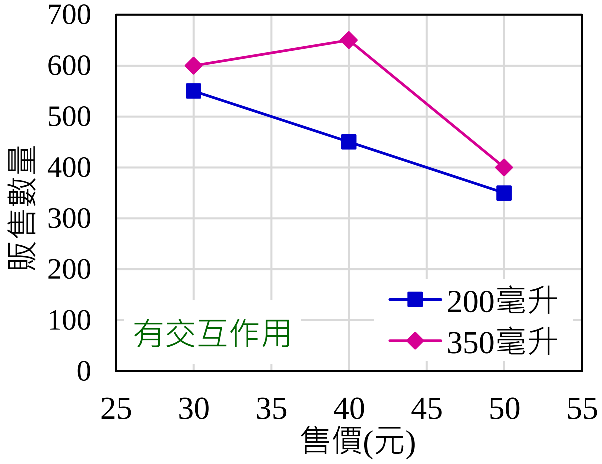
13.7 因子實驗【選擇教材】

在完全隨機設計、隨機區集設計和拉丁方設計中，僅能評量一個實驗變數對實驗結果的影響。若要同時評量兩個或兩個以上實驗變數對實驗結果的影響，即需要使用因子設計。二因子設計(two factorial design)即是兩個實驗變數的實驗設計，又稱為二因子分類(two-way classification)的實驗設計。

在二因子設計(two factorial design)中，有 A 和 B 兩個實驗變數，若其分別有 a 和 b 個水準，此設計可以稱為 a×b 二因子設計。在實驗設計中需要有 a×b 種實驗水準的配對組合，每一個實驗水準的組合可以選擇重複或不重複執行於實驗單位。

在因子設計中可以評量各實驗變數對實驗結果的個別效果，其稱為**主要效果**(main effects)。將各種實驗水準的配對組合重複的執行為實驗單位時，可以評量兩個實驗變數之間是否具有**交互作用**(interaction effects)或**交叉效果**(cross effects)。交互作用是指其中一個實驗變數與實驗結果之間的關係型態，會受另一個實驗變數於不同水準而產生顯著的改變之情況。





實驗每杯新咖啡飲料 30、40 和 50 元三種價格(實驗變數)與 200 和 350 毫升容量(實驗變數)水準，以評估此新咖啡飲料價格在台灣市場上的接受程度。此範例屬於 3×2 二因子設計，從該連鎖咖啡店中隨機抽出 6 個店為實驗單位，依據下表中隨機安排實驗單位的 6 種新咖啡飲料價格與容量組合，試賣一個月統計 6 家店分別販售新咖啡飲料的數量，以提供分析新咖啡飲料市場接受程度。

		價格		
		30 元	40 元	50 元
容量	200 毫升	R O	R O	R O
	350 毫升	R O	R O	R O

實驗每杯新咖啡飲料 30、40 和 50 元三種價格(實驗變數)與 200 和 350 毫升容量(實驗變數)水準，以評估此新咖啡飲料價格在台灣市場上的接受程度。此範例屬於 3×2 二因子設計，欲進行 3 重複實驗，從該連鎖咖啡店中隨機抽出 18 個店為實驗單位，依據下表中隨機安排實驗單位的六種新咖啡飲料價格與容量組合，試賣一個月統計 18 家店分別販售新咖啡飲料的數量，以提供分析新咖啡飲料市場接受程度。

		價格								
		30 元			40 元			50 元		
容量	200 毫升	R O	R O	R O	R O	R O	R O	R O	R O	R O
	350 毫升	R O	R O	R O	R O	R O	R O	R O	R O	R O

在實驗中具有**獨立性**、**常態性**和**變異數齊一性**皆成立時，可以使用 F 分布進行假設檢定。

13.7.1 無交互作用的二因子試驗變異數分析【選擇教材】

在 A 和 B 二因子試驗中，若沒有進行重複試驗時，就不需要考慮交互作用的影響。

二因子分析實驗觀測值和平均值符號(無重複實驗)

		因子 B(factor B)				因子 A 處理平均值
		B_1	B_2	...	B_b	
因子 A (factor A)	A_1	x_{11}	x_{12}	...	x_{1b}	$\bar{x}_{1\cdot}$
	A_2	x_{21}	x_{22}	...	x_{2b}	$\bar{x}_{2\cdot}$
	...	...	...	...	...	...
	A_a	x_{a1}	x_{a2}	...	x_{ab}	$\bar{x}_{a\cdot}$
因子 B 處理平均值		$\bar{x}_{\cdot 1}$	$\bar{x}_{\cdot 2}$	...	$\bar{x}_{\cdot b}$	$\bar{\bar{x}}$

特定觀測值 x_{ij} 與所有觀測值之平均值$\bar{\bar{x}}$的總差異量數學符號表示

$$x_{ij} - \bar{\bar{x}} = (\bar{x}_{i\cdot} - \bar{\bar{x}}) + (\bar{x}_{\cdot j} - \bar{\bar{x}}) + (x_{ij} - \bar{x}_{i\cdot} - \bar{x}_{\cdot j} + \bar{\bar{x}})$$

其中 a：因子 A 的處理或水準數量

b：因子 B 的處理或水準數量

x_{ij}：因子 A 第 i 個處理(水準)與因子 B 第 j 個處理(水準)的反應變數之觀測值

$\bar{x}_{i\cdot}$：因子 A 第 i 個處理(水準)反應變數之觀測值的平均值 $\bar{x}_{i\cdot\cdot} = \frac{\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{r} x_{ijk}}{b\times r}$

$\bar{x}_{\cdot j}$：因子 B 第 j 個處理(水準)反應變數之觀測值的平均值 $\bar{x}_{\cdot j\cdot} = \frac{\sum_{i=1}^{a}\sum_{k=1}^{r} x_{ijk}}{a\times r}$

$\bar{\bar{x}}$：反應變數的所有觀測值之平均值 $\bar{\bar{x}} = \frac{\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{r} x_{ijk}}{a\times b\times r}$

$x_{ij} - \bar{\bar{x}}$：特定觀測值與所有觀測值之平均值的總差異量

$\bar{x}_{i\cdot} - \bar{\bar{x}}$：因子 A 第 i 個處理(水準)與所有觀測值之平均值的差異

$\bar{x}_{\cdot j} - \bar{\bar{x}}$：因子 B 第 j 個處理(水準)與所有觀測值之平均值的差異

$x_{ij} - \bar{x}_{i\cdot} - \bar{x}_{\cdot j} + \bar{\bar{x}}$：隨機差異

將特定觀測值與所有觀測值之平均值的總差異量(上述)數學符號表示式取平方後，由於兩兩交叉相乘項和皆為 0，故可以獲得下列方程式：

$$\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\left(x_{ij} - \bar{\bar{x}}\right)^2 = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(\bar{x}_{i\cdot} - \bar{\bar{x}})^2 + \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\left(\bar{x}_{\cdot j} - \bar{\bar{x}}\right)^2 + \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\left(x_{ij} - \bar{x}_{i\cdot} - \bar{x}_{\cdot j} + \bar{\bar{x}}\right)^2$$

其中$\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\left(x_{ij} - \bar{\bar{x}}\right)^2$：總變異或總平方和(total sum of square, SST)，其自由度為 $a \times b - 1 = n_t - 1$

$\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(\bar{x}_{i\cdot} - \bar{\bar{x}})^2$：因子 A 引起的變異或因子 A 平方和(sum of square due to treatment A, SSA)，其自由度為 $a - 1$

$\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\left(\bar{x}_{\cdot j} - \bar{\bar{x}}\right)^2$：因子 B 引起的變異或因子 B 平方和(sum of square due to treatments B, SSB)，其自由度為 $b - 1$

$\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\left(x_{ij} - \bar{x}_{i\cdot} - \bar{x}_{\cdot j} + \bar{\bar{x}}\right)^2$：隨機變異或誤差平方和(sum of square due to error, SSE)，其自由度為 $a \times b - a - b + 1 = (a - 1) \times (b - 1)$

n_t：全部樣本數($n_t = a \times b$)

自由度分別依序為 $n_t - 1 = (a - 1) + (b - 1) + (a - 1) \times (b - 1)$

故上式可以簡化標示為：

$$\text{SST} = \text{SSA} + \text{SSB} + \text{SSE}$$

其中 $\text{SST} = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\left(x_{ij} - \bar{\bar{x}}\right)^2$

$\text{SSA} = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(\bar{x}_{i\cdot} - \bar{\bar{x}})^2 = b \times \sum_{i=1}^{a}(\bar{x}_{i\cdot} - \bar{\bar{x}})^2$

$\text{SSB} = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\left(\bar{x}_{\cdot j} - \bar{\bar{x}}\right)^2 = a \times \sum_{j=1}^{b}\left(\bar{x}_{\cdot j} - \bar{\bar{x}}\right)^2$

$\text{SSE} = \text{SST} - \text{SSA} - \text{SSB}$

因子 A 對反應變數的影響之檢定程序

A.設定顯著水準 α。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_{1\cdot} = \mu_{2\cdot} = \mu_{3\cdot} = \mu_{4\cdot} = \ldots = \mu_{a\cdot}$因子 A 所有處理(水準)之反應變數的母體平均值皆相等。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_{i\cdot} \neq \mu_{j\cdot}$因子 A 所有處理(水準)之反應變數的母體平均值不全部相等。

D.計算檢定統計值：F 值

$$\text{檢定統計值 } F = \frac{\text{MSA}}{\text{MSE}}$$

E.若檢定統計值 $F \leq$ 臨界值 $F_{\alpha,a-1,(a-1)\times(b-1)}$，接受虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_{1\cdot} = \mu_{2\cdot} = \mu_{3\cdot} = \mu_{4\cdot} = \ldots = \mu_{a\cdot}$因子 A 所有處理(水準)之反應變數的母體平均值皆相等(因子 A 對反應變數沒有顯著影響)。

F.若檢定統計值 $F >$ 臨界值 $F_{\alpha,a-1,(a-1)\times(b-1)}$，拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_{1\cdot} = \mu_{2\cdot} = \mu_{3\cdot} = \mu_{4\cdot} = \ldots = \mu_{a\cdot}$因子 A 所有處理(水準)之反應變數的母體平均值皆相等，接受對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_{i\cdot} \neq \mu_{j\cdot}$ 因子 A 所有處理(水準)之反應變數的母體平均值不全部相等(因子 A 對反應變數有顯著影響)。

因子 B 對反應變數的影響之檢定程序

A.設定顯著水準 α。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_{\cdot 1} = \mu_{\cdot 2} = \mu_{\cdot 3} = \mu_{\cdot 4} = \ldots = \mu_{\cdot b}$因子 B 所有處理(水準)之反應變數的母體平均值皆相等。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_{\cdot i} \neq \mu_{\cdot j}$ 因子 B 所有處理(水準)之反應變數的母體平均值不全部相等。

D.計算檢定統計值：F 值

$$\text{檢定統計值 } F = \frac{\text{MSB}}{\text{MSE}}$$

E.若檢定統計值 $F \leq$ 臨界值 $F_{\alpha,b-1,(a-1)\times(b-1)}$，接受虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_{\cdot 1} = \mu_{\cdot 2} = \mu_{\cdot 3} = \mu_{\cdot 4} = \ldots = \mu_{\cdot b}$因子 B 所有處理(水準)之反應變數的母體平均值皆相等(因子 B 對反應變數沒有顯著影響)。

F.若檢定統計值 $F >$ 臨界值 $F_{\alpha,b-1,(a-1)\times(b-1)}$，拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_{\cdot 1} = \mu_{\cdot 2} = \mu_{\cdot 3} = \mu_{\cdot 4} = \ldots = \mu_{\cdot b}$因子 B 所有處理(水準)之反應變數的母體平均值皆相等，接受對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_{\cdot i} \neq \mu_{\cdot j}$ 因子 B 所有處理(水準)之反應變數的母體平均值不全部相等(因子 B 對反應變數有顯著影響)。

二因子設計變異數分析表(ANOVA table)(無重複試驗)

變異來源(Source of variation)	平方和(Sum of squares)	自由度(Degrees of freedom)	均方(Mean square)	F 值
因子 A	SSA	$a-1$	$\text{MSA} = \frac{\text{SSA}}{a-1}$	$F = \frac{\text{MSA}}{\text{MSE}}$
因子 B	SSB	$b-1$	$\text{MSB} = \frac{\text{SSB}}{b-1}$	$F = \frac{\text{MSB}}{\text{MSE}}$
樣本內變異、組內或誤差	SSE	$(a-1)\times(b-1)$	$\text{MSE} = \frac{\text{SSE}}{(a-1)\times(b-1)}$	
合計	SST	$n_t - 1$		

範例 13.14 美香連鎖咖啡店欲測試新咖啡飲料產品價格的市場接受度，實驗每杯新咖啡飲料 30、40、50 和 60 元四種價格水準(實驗變數 1)與 200、350 和 500 毫升容量水準(實驗變數 2)，故在該連鎖咖啡店中 4 種價格水準與 3 種容量水準，組合成 12 種配對方式，隨機性指派 12 家分店試賣 1 個月，蒐集此 12 家分店新咖啡飲料分別對 200、350 和 500 毫升容量的販售數量(杯數)，以評估此新咖啡飲料價格在市場上的接受程度。試檢定在顯著水準 α = 0.05 下，4 個價格水準販售數量是否相同？3 個容量水準販售數量是否相同？

		售價				處理和	處理平均值
		30 元	40 元	50 元	60 元		$\bar{x}_{1\sim3\cdot}$
容量	200 毫升	1502	1425	1325	958	5210	1302.50
	350 毫升	1655	1508	1396	1052	5611	1402.75
	500 毫升	1805	1625	1565	1105	6100	1525.00
處理和		4962	4558	4286	3115		
處理平均值$\bar{x}_{\cdot 1\sim4}$		1654.00	1519.33	1428.67	1038.33		1410.08

題解：

新咖啡飲料**容量**對販售數量的影響之檢定

A.設定顯著水準 α = 0.05，臨界值 $F_{\alpha,a-1,(a-1)\times(b-1)} = F_{0.05,3-1,(3-1)\times(4-1)} = F_{0.05,2,6}$ = 5.1433(使用 Excel 軟體 F.INV.RT 函數查詢獲得)。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_{1.} = \mu_{2.} = \mu_{3.}$容量 3 種處理(水準)之販售數量的母體平均值皆相等。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_{i.} \neq \mu_{j.}$容量 3 種處理(水準)之販售數量的母體平均值不全部相等。

D.計算檢定統計值：F 值。容量水準數量 a = 3，售價水準數量 b = 4

$\text{SST} = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\left(x_{ij}-\bar{\bar{x}}\right)^2 = (1502-1410.08)^2 + \ldots + (1105-1410.08)^2 = 737506.9167$

$\text{SSA(容量)} = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(\bar{x}_{i.}-\bar{\bar{x}})^2 = b\times\sum_{i=1}^{a}(\bar{x}_{i.}-\bar{\bar{x}})^2 = 4\times[(1302.50-1410.08)^2 + (1402.75-1410.08)^2 + (1525.00-1410.08)^2] = 99335.1667$

$\text{SSB(售價)} = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\left(\bar{x}_{.j}-\bar{\bar{x}}\right)^2 = a\times\sum_{j=1}^{b}\left(\bar{x}_{.j}-\bar{\bar{x}}\right)^2 = 3\times[(1654.00-1410.08)^2 + (1519.33-1410.08)^2 + (1428.67-1410.08)^2 + (1038.33-1410.08)^2] = 629922.9167$

SSE = SST – SSA – SSB = 737506.9167 – 99335.1667 – 929922.9167 = 8248.8333

$$\text{MSA(容量)} = \frac{\text{SSA}}{a-1} = \frac{99335.1667}{3-1} = 49667.58$$

$$\text{MSB(售價)} = \frac{\text{SSB}}{b-1} = \frac{629922.9167}{4-1} = 209974.3$$

$$\text{MSE} = \frac{\text{SSE}}{(a-1)\times(b-1)} = \frac{8248.8333}{(3-1)\times(4-1)} = 1374.806$$

$$\text{檢定統計值 } F\text{(容量)} = \frac{\text{MSA}}{\text{MSE}} = \frac{49667.58}{1374.806} = 36.1270$$

E.檢定統計值 F = 36.1270 > 臨界值 $F_{\alpha,a-1,(a-1)\times(b-1)}$ = 5.1433，拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_{1.} = \mu_{2.} = \mu_{3.}$容量 3 種處理(水準)之販售數量的母體平均值皆相等；接受對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_{i.} \neq \mu_{j.}$容量 3 種處理(水準)之販售數量的母體平均值不全部相等。因此，該連鎖咖啡店欲測試新咖啡飲料 200、350 和 500 毫升三種容量水準的販售數量不全部相等，彼此之間有顯著性的差異。

新咖啡飲料**售價**對販售數量的影響之檢定

A.設定顯著水準 α = 0.05，臨界值 $F_{\alpha,b-1,(a-1)\times(b-1)} = F_{0.05,4-1,(3-1)\times(4-1)} = F_{0.05,3,6}$ = 4.7571(使用 Excel 軟體 F.INV.RT 函數查詢獲得)。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_{\cdot 1} = \mu_{\cdot 2} = \mu_{\cdot 3} = \mu_{\cdot 4}$ 售價 4 種處理(水準)之販售數量的母體平均值皆相等。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_{\cdot i} \neq \mu_{\cdot j}$ 售價 4 種處理(水準)之販售數量的母體平均值不全部相等。

D.計算檢定統計值：F 值

$$\text{檢定統計值 } F\text{(售價)} = \frac{\text{MSB}}{\text{MSE}} = \frac{209974.3}{1374.806} = 152.7302$$

E.檢定統計值 F = 152.7302 > 臨界值 $F_{\alpha,b-1,(a-1)\times(b-1)}$ = 4.7571，拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_{\cdot 1} = \mu_{\cdot 2} = \mu_{\cdot 3} = \mu_{\cdot 4}$ 售價 4 種處理(水準)之販售數量的母體平均值皆相等；接受對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_{\cdot i} \neq \mu_{\cdot j}$ 售價 4 種處理(水準)之販售數量的母體平均值不全部相等。因此，該連鎖咖啡店欲測試新咖啡飲料 30、40、50 和 60 元四種價格水準的販售數量不全部相等，彼此之間有顯著性的差異。

容量×售價二因子設計變異數分析表(ANOVA table)

變異來源(Source of variation)	平方和(Sum of squares)	自由度(Degrees of freedom)	均方(Mean square)	F 值
容量	99335.167	2	49667.58	36.1270
售價	629922.917	3	209974.31	152.7302
誤差	8248.833	6	1374.806	
合計	737506.9	11		

練習 13.20 美香連鎖咖啡店欲測試新咖啡飲料產品價格的市場接受度，實驗每杯新咖啡飲料 30、40 和 50 元等 3 種價格水準(實驗變數 1)與 200、350 和 500 毫升容量水準(實驗變數 2)，在該連鎖咖啡店中 3 種價格水準與 3 種容量水準，組合成 9 種配對方式，隨機性指派 9 家分店試賣 1 個月，蒐集此 9 家分店新咖啡飲料分別對 200、350 和 500 毫升容量的販售數量(杯數)，以評估此新咖啡飲料價格在市場上的接受程度。試檢定在顯著水準 α = 0.05 下，3 種價格水準販售數量是否相同？3 種容量水準販售數量是否相同？

		售價			處理和	處理平均值 $\bar{x}_{1\sim3\cdot}$
		30 元	40 元	50 元		
容量	200 毫升	1502	1425	1325	4252	1417.33
	350 毫升	1655	1508	1396	4559	1519.67
	500 毫升	1805	1625	1565	4995	1665.00
處理和		4962	4558	4286		
處理平均值 $\bar{x}_{\cdot 1\sim3}$		1654.00	1519.33	1428.67		1534.00

題解：此題屬於二因子無重複性試驗

新咖啡飲料**容量**對販售數量的影響之檢定

A. 設定顯著水準 α = 0.05，臨界值 $F_{\alpha,a-1,(a-1)\times(b-1)} = F_{0.05,3-1,(3-1)\times(3-1)} = F_{0.05,2,4}$ = 6.9443(使用 Excel 軟體 F.INV.RT 函數查詢獲得)。

B. 虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_{1\cdot} = \mu_{2\cdot} = \mu_{3\cdot}$容量 3 種處理(水準)之販售數量的母體平均值皆相等。

C. 對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_{i\cdot} \neq \mu_{j\cdot}$容量 3 種處理(水準)之販售數量的母體平均值不全部相等。

D. 計算檢定統計值：F 值。容量水準數量 a = 3，售價水準數量 b = 3

$\mathrm{SST} = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\left(x_{ij} - \bar{\bar{x}}\right)^2 = (1502 - 1534.00)^2 + \ldots + (1565 - 1534.00)^2 = 173630.00$

$\mathrm{SSA}(容量) = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(\bar{x}_{i\cdot} - \bar{\bar{x}})^2 = b \times \sum_{i=1}^{a}(\bar{x}_{i\cdot} - \bar{\bar{x}})^2 = 3 \times [(1417.33 - 1534.00)^2 + (1519.67 - 1534.00)^2 + (1665.00 - 1534.00)^2] = 92932.67$

$\mathrm{SSB}(售價) = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\left(\bar{x}_{\cdot j} - \bar{\bar{x}}\right)^2 = a \times \sum_{j=1}^{b}\left(\bar{x}_{\cdot j} - \bar{\bar{x}}\right)^2 = 3 \times [(1654.00 - 1534.00)^2 + (1519.33 - 1534.00)^2 + (1428.67 - 1534.00)^2] = 77130.67$

SSE = SST – SSA – SSB = 173630.00 – 92932.67 – 77130.67 = 3566.67

$$\mathrm{MSA}(容量) = \frac{\mathrm{SSA}}{a-1} = \frac{92932.67}{3-1} = 46466.33$$

$$\mathrm{MSB}(售價) = \frac{\mathrm{SSB}}{b-1} = \frac{77130.67}{3-1} = 38565.33$$

$$\mathrm{MSE} = \frac{\mathrm{SSE}}{(a-1)\times(b-1)} = \frac{3566.67}{(3-1)\times(3-1)} = 891.67$$

$$檢定統計值\ F(容量) = \frac{\mathrm{MSA}}{\mathrm{MSE}} = \frac{46466.33}{891.67} = 52.1118$$

E. 檢定統計值 F = 52.1118 > 臨界值 $F_{\alpha,a-1,(a-1)\times(b-1)}$ = 6.9443，拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_{1\cdot} = \mu_{2\cdot} = \mu_{3\cdot}$容量 3 種處理(水準)之販售數量的母體平均值皆相等；接受對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_{i\cdot} \neq \mu_{j\cdot}$容量 3 種處理(水準)之販售數量的母體平均值不全部相等。因此，該連鎖咖啡店欲測試新咖啡飲料 200、350 和 500 毫升三種容量水準的販售數量不全部相等，彼此之間有顯著性的差異。

新咖啡飲料**售價**對販售數量的影響之檢定

A. 設定顯著水準 α = 0.05，臨界值 $F_{\alpha,b-1,(a-1)\times(b-1)} = F_{0.05,3-1,(3-1)\times(3-1)} = F_{0.05,2,4}$ = 6.9443(使用 Excel 軟體 F.INV.RT 函數查詢獲得)。

B. 虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_{\cdot 1} = \mu_{\cdot 2} = \mu_{\cdot 3}$ 售價 3 種處理(水準)之販售數量的母體平均值皆相等。

C. 對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_{\cdot i} \neq \mu_{\cdot j}$ 售價 3 種處理(水準)之販售數量的母體平均值不全部相等。

D.計算檢定統計值：F 值

$$\text{檢定統計值 } F(\text{售價}) = \frac{MSB}{MSE} = \frac{38565.33}{891.67} = 43.2508$$

E.檢定統計值 $F = 43.2508$ > 臨界值 $F_{\alpha,b-1,(a-1)\times(b-1)} = 6.9443$，拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_{.1} = \mu_{.2} = \mu_{.3}$ 售價 3 種處理(水準)之販售數量的母體平均值皆相等；接受對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_{.i} \neq \mu_{.j}$ 售價 3 種處理(水準)之販售數量的母體平均值不全部相等。因此，該連鎖咖啡店欲測試新咖啡飲料 30、40 和 50 元 3 種價格水準的販售數量不全部相等，彼此之間有顯著性的差異。

容量×售價二因子設計變異數分析表(ANOVA table)

變異來源(Source of variation)	平方和(Sum of squares)	自由度(Degrees of freedom)	均方(Mean square)	F 值
容量 A	92932.67	2	46466.33	52.1118
售價 B	77130.67	2	38565.33	43.2508
誤差	3566.67	4	891.67	
合計	173630.00	8		

範例 13.15 欲研究各種管理風格(A、B 和 C 三位值班經理)對工作滿意度的影響，隨機抽出 5 位員工分別依序排班於 A、B 和 C 三位值班經理管理下工作，工作後填寫工作滿意度，獲得二因子分類變異數分析 ANOVA 表如下，請利用顯著水準 $\alpha = 0.05$ 進行統計推論(A)管理風格影響工作滿意度？(B)員工影響工作滿意度？

變異來源(Source of variation)	平方和(Sum of squares)	自由度(Degrees of freedom)
管理風格 A	142	2
員工 B	50	4
誤差(Error)	18	8

題解：(A)管理風格對工作滿意度影響之檢定

A.設定顯著水準 $\alpha = 0.05$，臨界值 $F_{\alpha,a-1,(a-1)\times(b-1)} = F_{0.05,3-1,(3-1)\times(5-1)} = F_{0.05,2,8} = 4.459$(使用 Excel 軟體 F.INV.RT 函數查詢獲得)。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_{1.} = \mu_{2.} = \mu_{3.}$ 管理風格 3 種處理(水準)之工作滿意度的母體平均值皆相等。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_{i.} \neq \mu_{j.}$ 管理風格 3 種處理(水準)之工作滿意度的母體平均值不全部相等。

D.計算檢定統計值：F 值

$$MSA(\text{管理風格}) = \frac{SSA}{df} = \frac{SSA}{a-1} = \frac{142}{3-1} = \frac{142}{2} = 71$$

$$MSE = \frac{SSE}{df} = \frac{SSE}{(a-1)\times(b-1)} = \frac{18}{(3-1)\times(5-1)} = \frac{18}{8} = 2.25$$

$$\text{檢定統計值 } F(\text{管理風格}) = \frac{MSA}{MSE} = \frac{71}{2.25} = 31.5556$$

E.檢定統計值 $F = 31.5556$ > 臨界值 $F_{\alpha,a-1,(a-1)\times(b-1)} = 4.459$，拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_{1.} = \mu_{2.} = \mu_{3.}$ 管理風格 3 種處理(水準)之工作滿意度的母體平均值皆相等；接受對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_{i.} \neq \mu_{j.}$ 管理風格 3 種處理(水準)之工作滿意度的母體平均值不全部相等。因此，A、B 和 C 三位值班經理的管理風格對員工工作滿意度不全部相等，彼此之間有顯著性的差異。

員工對工作滿意度影響之檢定

A.設定顯著水準 $\alpha = 0.05$，臨界值 $F_{\alpha,b-1,(a-1)\times(b-1)} = F_{0.05,5-1,(3-1)\times(5-1)} = F_{0.05,4,8} = 3.8379$(使用 Excel 軟體 F.INV.RT 函數查詢獲得)。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_{\cdot 1} = \mu_{\cdot 2} = \mu_{\cdot 3} = \mu_{\cdot 4} = \mu_{\cdot 5}$員工 5 種處理(水準)之工作滿意度的母體平均值皆相等。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_{\cdot i} \neq \mu_{\cdot j}$ 員工 5 種處理(水準)之工作滿意度的母體平均值不全部相等。

D.計算檢定統計值：F 值

$$\text{MSB(員工)} = \frac{\text{SSB}}{df} = \frac{\text{SSB}}{b-1} = \frac{50}{5-1} = = \frac{50}{4} = 12.5$$

$$\text{檢定統計值 } F\text{(員工)} = \frac{\text{MSB}}{\text{MSE}} = \frac{12.5}{2.25} = 5.5556$$

E.檢定統計值 $F = 5.5556$ > 臨界值 $F_{\alpha,b-1,(a-1)\times(b-1)} = 3.8379$，接受拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_{\cdot 1} = \mu_{\cdot 2} = \mu_{\cdot 3} = \mu_{\cdot 4} = \mu_{\cdot 5}$員工 5 種處理(水準)之工作滿意度的母體平均值皆相等，接受對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_{\cdot i} \neq \mu_{\cdot j}$員工 5 種處理(水準)之工作滿意度的母體平均值不全部相等。因此，5 位員工對工作滿意度的影響不全部相等，彼此之間有達到顯著性的差異水準。

練習 13.21 欲研究不同型態包裝(P1、P2、P3 和 P4 四種)對巧克力銷售數量的影響，分別於 S1、S2、S3、S4 和 S5 五家百貨公司門市試賣一個月，分析銷售數量獲得 ANOVA 表如下，請利用顯著水準 $\alpha = 0.05$ 進行統計檢定(A)不同包裝影響銷售數量？(B)不同百貨公司門市影響銷售數量？

變異來源(Source of variation)	平方和(Sum of squares)
包裝 A	300
公司門市 B	200
誤差(Error)	180

題解：此題屬於二因子無重複性試驗，題目直接提供平方和，自由度透過判斷獲得即可進行統計推論

(A)不同包裝對銷售數量影響之檢定

A.設定顯著水準 $\alpha = 0.05$，臨界值 $F_{\alpha,a-1,(a-1)\times(b-1)} = F_{0.05,4-1,(4-1)\times(5-1)} = F_{0.05,3,12} = 3.4903$(使用 Excel 軟體 F.INV.RT 函數查詢獲得)。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_{1\cdot} = \mu_{2\cdot} = \mu_{3\cdot} = \mu_{4\cdot}$包裝 4 種處理(水準)之銷售數量的母體平均值皆相等。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_{i\cdot} \neq \mu_{j\cdot}$包裝 4 種處理(水準)之銷售數量的母體平均值不全部相等。

D.計算檢定統計值：F 值

$$\text{MSA(包裝)} = \frac{\text{SSA}}{df} = \frac{\text{SSA}}{a-1} = \frac{300}{4-1} = 100$$

$$\text{MSE} = \frac{\text{SSE}}{df} = \frac{\text{SSE}}{(a-1)\times(b-1)} = \frac{180}{(4-1)\times(5-1)} = 15$$

$$F\text{(包裝)} = \frac{\text{MSA}}{\text{MSE}} = \frac{100}{15} = 6.6667$$

E.檢定統計值 $F = 6.6667$ > 臨界值 $F_{\alpha,a-1,(a-1)\times(b-1)} = 3.4903$，拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_{1\cdot} = \mu_{2\cdot} = \mu_{3\cdot} = \mu_{4\cdot}$包裝 4 種處理(水準)之銷售數量的母體平均值皆相等；接受對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_{i\cdot} \neq \mu_{j\cdot}$包裝 4 種處理(水準)之銷售數量的母體平均值不全部相等。因此，P1、P2、P3 和 P4 四種巧克力包裝對銷售數量的影響不全部相等，彼此之間有顯著性的差異。

百貨公司門市對銷售數量影響之檢定

A.設定顯著水準 $\alpha = 0.05$，臨界值 $F_{\alpha,b-1,(a-1)\times(b-1)} = F_{0.05,5-1,(4-1)\times(5-1)} = F_{0.05,4,12} = 3.2592$(使用 Excel 軟體 F.INV.RT 函數查詢獲得)。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_{\cdot 1} = \mu_{\cdot 2} = \mu_{\cdot 3} = \mu_{\cdot 4} = \mu_{\cdot 5}$ 百貨公司門市 5 種處理(水準)之銷售數量的母體平均值皆相等。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_{\cdot i} \neq \mu_{\cdot j}$ 百貨公司門市 5 種處理(水準)之銷售數量的母體平均值不全部相等。

D.計算檢定統計值：F 值

$$\text{MSB(百貨公司門市)} = \frac{\text{SSB}}{df} = \frac{\text{SSB}}{b-1} = \frac{200}{5-1} = 50.0000$$

$$F\text{(百貨公司門市)} = \frac{\text{MSB}}{\text{MSE}} = \frac{50.0000}{15} = 3.3333$$

E.檢定統計值 $F = 3.3333$ > 臨界值 $F_{\alpha,b-1,(a-1)\times(b-1)} = 3.2592$，接受拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_{\cdot 1} = \mu_{\cdot 2} = \mu_{\cdot 3} = \mu_{\cdot 4} = \mu_{\cdot 5}$ 百貨公司門市 5 種處理(水準)之銷售數量的母體平均值皆相等，接受對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_{\cdot i} \neq \mu_{\cdot j}$ 百貨公司門市 5 種處理(水準)之銷售數量的母體平均值不全部相等。因此，S1、S2、S3、S4 和 S5 五家百貨公司門市對巧克力銷售數量的影響不全部相等，彼此之間有達到顯著性的差異水準。

13.7.2 交互作用的二因子試驗變異數分析【選擇教材】

在 A 和 B 二因子試驗中，若欲評估兩因子之間的交互作用(interaction)時，在每一個試驗組合皆必須至少執行 2 個(含)以上的重複試驗。

二因子分析實驗觀測值和平均值符號(r 次重複實驗)

		因子 B(factor B)				因子 A 處理平均值
		B$_1$	B$_2$	…	B$_b$	
因子 A (factor A)	A$_1$	x_{111} x_{112} : x_{11r} $\bar{x}_{11\cdot}$	x_{121} x_{122} : x_{12r} $\bar{x}_{12\cdot}$	…	x_{1b1} x_{1b2} : x_{1br} $\bar{x}_{1b\cdot}$	$\bar{x}_{1\cdot\cdot}$
	A$_2$	x_{211} x_{212} : x_{21r} $\bar{x}_{21\cdot}$	x_{221} x_{222} : x_{22r} $\bar{x}_{22\cdot}$	…	x_{2b1} x_{2b2} : x_{2br} $\bar{x}_{2b\cdot}$	$\bar{x}_{2\cdot\cdot}$
	…	…	…	…	…	…
	A$_a$	x_{a11} x_{a12} : x_{a1r} $\bar{x}_{a1\cdot}$	x_{a21} x_{a22} : x_{a2r} $\bar{x}_{a2\cdot}$	…	x_{ab1} x_{ab2} : x_{abr} $\bar{x}_{ab\cdot}$	$\bar{x}_{a\cdot\cdot}$
因子 B 處理平均值		$\bar{x}_{\cdot 1\cdot}$	$\bar{x}_{\cdot 2\cdot}$	…	$\bar{x}_{\cdot b\cdot}$	$\bar{\bar{x}}$

特定觀測值 x_{ijk} 與所有觀測值之平均值 $\bar{\bar{x}}$ 的總差異量數學符號表示

$$x_{ijk} - \bar{\bar{x}} = (\bar{x}_{i\cdot\cdot} - \bar{\bar{x}}) + (\bar{x}_{\cdot j\cdot} - \bar{\bar{x}}) + (\bar{x}_{ij\cdot} - \bar{x}_{i\cdot\cdot} - \bar{x}_{\cdot j\cdot} + \bar{\bar{x}}) + (x_{ijk} - \bar{x}_{ij\cdot})$$

其中 a：因子 A 的處理或水準數量

b：因子 B 的處理或水準數量

r：實驗重複次數

x_{ij}：因子 A 第 i 個處理(水準)與因子 B 第 j 個處理(水準)的反應變數之觀測值

x_{ijk}：因子 A 第 i 個處理(水準)與因子 B 第 j 個處理(水準)在第 k 次重複實驗的反應變數之觀測值

$\bar{x}_{i\cdot\cdot}$：因子 A 第 i 個處理(水準)反應變數之觀測值的平均值 $\bar{x}_{i\cdot\cdot} = \frac{\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{r}x_{ijk}}{b\times r}$

$\bar{x}_{\cdot j\cdot}$：因子 B 第 j 個處理(水準)反應變數之觀測值的平均值 $\bar{x}_{\cdot j\cdot} = \frac{\sum_{i=1}^{a}\sum_{k=1}^{r}x_{ijk}}{a\times r}$

$\bar{x}_{ij\cdot}$：因子 A 第 i 個處理(水準)與因子 B 第 j 個處理(水準)反應變數之觀測值的平均值 $\bar{x}_{ij\cdot} = \frac{\sum_{k=1}^{r}x_{ijk}}{r}$

$\bar{\bar{x}}$：反應變數的所有觀測值之平均值 $\bar{\bar{x}} = \frac{\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{r}x_{ijk}}{a\times b\times r}$

$x_{ijk} - \bar{\bar{x}}$：特定觀測值與所有觀測值之平均值的總差異量

$\bar{x}_{i\cdot\cdot} - \bar{\bar{x}}$：因子 A 第 i 個處理(水準)與所有觀測值之平均值的差異

$\bar{x}_{\cdot j\cdot} - \bar{\bar{x}}$：因子 B 第 j 個處理(水準)與所有觀測值之平均值的差異

$x_{ijk} - \bar{x}_{ij\cdot}$：隨機差異

將特定觀測值 x_{ijk} 與所有觀測值之平均值$\bar{\bar{x}}$的總差異量(上述)數學符號表示式取平方後，由於兩兩交叉相乘項和皆為 0，故可以獲得下列方程式：

$$\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{r}\left(x_{ijk}-\bar{\bar{x}}\right)^2 = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{r}(\bar{x}_{i\cdot\cdot}-\bar{\bar{x}})^2 + \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{r}\left(\bar{x}_{\cdot j\cdot}-\bar{\bar{x}}\right)^2 + \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{r}\left(\bar{x}_{ij\cdot}-\bar{x}_{i\cdot\cdot}-\bar{x}_{\cdot j\cdot}+\bar{\bar{x}}\right)^2 + \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{r}\left(x_{ijk}-\bar{x}_{ij\cdot}\right)^2$$

其中$\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{r}\left(x_{ijk}-\bar{\bar{x}}\right)^2$：總變異或總平方和(total sum of square, SST)，其自由度為 $a \times b - 1 = n_t - 1$

$\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{r}(\bar{x}_{i\cdot\cdot}-\bar{\bar{x}})^2$：因子 A 引起的變異或因子 A 平方和(sum of square due to treatment A, SSA)，其自由度為 $a - 1$

$\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{r}\left(\bar{x}_{\cdot j\cdot}-\bar{\bar{x}}\right)^2$：因子 B 引起的變異或因子 B 平方和(sum of square due to treatments B, SSB)，其自由度為 $b - 1$

$\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{r}\left(\bar{x}_{ij\cdot}-\bar{x}_{i\cdot\cdot}-\bar{x}_{\cdot j\cdot}+\bar{\bar{x}}\right)^2$：因子 A 和因子 B 交互影響的變異 SSAB，其自由度為$(a - 1) \times (b - 1)$

$\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{r}\left(x_{ijk}-\bar{x}_{ij\cdot}\right)^2$：隨機變異或誤差平方和(sum of square due to error, SSE)，其自由度為 $a \times b \times (r - 1) = a \times b \times r - a \times b$

r：重複次數

n_t：全部樣本數($n_t = a \times b \times r$)

自由度分別依序為 $n_t - 1 = (a - 1) + (b - 1) + (a - 1) \times (b - 1) + a \times b \times (r - 1)$

故上式可以簡化標示為：

$$SST = SSA + SSB + SSAB + SSE$$

其中 $SST = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{r}\left(x_{ijk}-\bar{\bar{x}}\right)^2$

$SSA = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{r}(\bar{x}_{i\cdot\cdot}-\bar{\bar{x}})^2 = b \times r \times \sum_{i=1}^{a}(\bar{x}_{i\cdot\cdot}-\bar{\bar{x}})^2$

$SSB = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{r}\left(\bar{x}_{\cdot j\cdot}-\bar{\bar{x}}\right)^2 = a \times r \times \sum_{j=1}^{b}\left(\bar{x}_{\cdot j\cdot}-\bar{\bar{x}}\right)^2$

$SSAB = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{r}\left(\bar{x}_{ij\cdot}-\bar{x}_{i\cdot\cdot}-\bar{x}_{\cdot j\cdot}+\bar{\bar{x}}\right)^2 = r \times \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\left(\bar{x}_{ij\cdot}-\bar{x}_{i\cdot\cdot}-\bar{x}_{\cdot j\cdot}+\bar{\bar{x}}\right)^2$

$SSE = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{r}\left(x_{ijk}-\bar{x}_{ij\cdot}\right)^2 = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{r}x_{ijk}^2 - r \times \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\bar{x}_{ij\cdot}^2$

$SSE = SST - SSA - SSB - SSAB$

因子 A 對反應變數的影響之檢定程序

A.設定顯著水準 α。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_{1\cdot\cdot} = \mu_{2\cdot\cdot} = \mu_{3\cdot\cdot} = \mu_{4\cdot\cdot} = \ldots = \mu_{a\cdot\cdot}$因子 A 所有處理(水準)之反應變數的母體平均值皆相等。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_{i\cdot\cdot} \neq \mu_{j\cdot\cdot}$因子 A 所有處理(水準)之反應變數的母體平均值不全部相等。

D.計算檢定統計值：F 值

$$\text{檢定統計值 } F = \frac{\text{MSA}}{\text{MSE}}$$

E.若檢定統計值 $F \le$ 臨界值 $F_{\alpha,a-1,a\times b\times(r-1)}$，接受虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_{1..} = \mu_{2..} = \mu_{3..} = \mu_{4..} = \ldots = \mu_{a..}$因子 A 所有處理(水準)之反應變數的母體平均值皆相等(因子 A 對反應變數沒有顯著影響)。

F.若檢定統計值 $F >$ 臨界值 $F_{\alpha,a-1,a\times b\times(r-1)}$，拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_{1..} = \mu_{2..} = \mu_{3..} = \mu_{4..} = \ldots = \mu_{a..}$因子 A 所有處理(水準)之反應變數的母體平均值皆相等，接受對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_{i..} \ne \mu_{j..}$因子 A 所有處理(水準)之反應變數的母體平均值不全部相等(因子 A 對反應變數有顯著影響)。

因子 B 對反應變數的影響之檢定程序

A.設定顯著水準 α。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_{.1.} = \mu_{.2.} = \mu_{.3.} = \mu_{.4.} = \ldots = \mu_{.b.}$因子 B 所有處理(水準)之反應變數的母體平均值皆相等。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_{.i.} \ne \mu_{.j.}$因子 B 所有處理(水準)之反應變數的母體平均值不全部相等。

D.計算檢定統計值：F 值

$$\text{檢定統計值 } F = \frac{\text{MSB}}{\text{MSE}}$$

E.若檢定統計值 $F \le$ 臨界值 $F_{\alpha,b-1,a\times b\times(r-1)}$，接受虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_{.1.} = \mu_{.2.} = \mu_{.3.} = \mu_{.4.} = \ldots = \mu_{.b.}$因子 B 所有處理(水準)之反應變數的母體平均值皆相等(因子 B 對反應變數沒有顯著影響)。

F.若檢定統計值 $F >$ 臨界值 $F_{\alpha,b-1,a\times b\times(r-1)}$，拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_{.1.} = \mu_{.2.} = \mu_{.3.} = \mu_{.4.} = \ldots = \mu_{.b.}$因子 B 所有處理(水準)之反應變數的母體平均值皆相等，接受對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_{.i.} \ne \mu_{.j.}$因子 B 所有處理(水準)之反應變數的母體平均值不全部相等(因子 B 對反應變數有顯著影響)。

因子 A 和 B 對反應變數的交互(交叉)影響之檢定程序

A.設定顯著水準 α。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_{ij.} = \mu_{ij.}$A 和 B 因子所有處理(水準)對反應變數的母體平均值無交互作用。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_{ij.} \ne \mu_{ij.}$A 和 B 因子所有處理(水準)對反應變數的母體平均值有交互作用。

D.計算檢定統計值：F 值

$$\text{檢定統計值 } F = \frac{\text{MSAB}}{\text{MSE}}$$

E.若檢定統計值 $F \le$ 臨界值 $F_{\alpha,(a-1)\times(b-1),a\times b\times(r-1)}$，接受虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_{ij.} = \mu_{ij.}$A 和 B 因子所有處理(水準)對反應變數的母體平均值無交互作用(因子 A 和 B 對反應變數沒有交互顯著影響)。

F.若檢定統計值 $F >$ 臨界值 $F_{\alpha,(a-1)\times(b-1),a\times b\times(r-1)}$，拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_{ij.} = \mu_{ij.}$A 和 B 因子所有處理(水準)對反應變數的母體平均值無交互作用，接受對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_{ij.} \ne \mu_{ij.}$A 和 B 因子所有處理(水準)對反應變數的母體平均值有交互作用(因子 A 和 B 對反應變數有交互顯著影響)。

二因子設計變異數分析表(ANOVA table)(r 次重複實驗)

變異來源(Source of variation)	平方和(Sum of squares)	自由度(Degrees of freedom)	均方(Mean square)	F 值
因子 A	SSA	$a-1$	$\text{MSA} = \frac{\text{SSA}}{a-1}$	$F = \frac{\text{MSA}}{\text{MSE}}$
因子 B	SSB	$b-1$	$\text{MSB} = \frac{\text{SSB}}{b-1}$	$F = \frac{\text{MSB}}{\text{MSE}}$
交互作用(Interaction)	SSAB	$(a-1)\times(b-1)$	$\text{MSAB} = \frac{\text{SSAB}}{(a-1)\times(b-1)}$	$F = \frac{\text{MSAB}}{\text{MSE}}$
誤差(Error)	SSE	$a\times b\times(r-1)$	$\text{MSE} = \frac{\text{SSE}}{a\times b\times(r-1)}$	

變異來源(Source of variation)	平方和(Sum of squares)	自由度(Degrees of freedom)	均方(Mean square)	*F* 值
合計(Total)	SST	$n_t - 1$		

範例 13.16 美香連鎖咖啡店欲測試新咖啡飲料產品價格的市場接受度，實驗每杯新咖啡飲料 30、40、50 和 60 元四種價格水準(實驗變數 1)與 200、350 和 500 毫升容量水準(實驗變數 2)，欲進行 3 重複實驗，在該連鎖咖啡店中四種價格水準隨機性的指派 36 家分店試賣 1 個月，蒐集此 36 家分店新咖啡飲料分別對 200、350 和 500 毫升容量的販售數量(杯數)，以評估此新咖啡飲料價格在市場上的接受程度。試檢定在顯著水準 $\alpha = 0.05$ 下，4 個價格水準販售數量是否相同？

		售價				處理和	處理平均值
		30 元	40 元	50 元	60 元		
容量	200 毫升	1502 1594 1625 1573.7	1425 1495 1356 1425.3	1325 1495 1200 1340.0	958 850 652 820.0	15477	1289.8
	350 毫升	1655 1752 1652 1686.3	1508 1526 1495 1509.7	1396 1456 1495 1449.0	1052 959 896 969.0	16842	1403.5
	500 毫升	1805 1795 1746 1782.0	1625 1758 1525 1636.0	1565 1499 1567 1543.7	1105 1250 1148 1167.7	18388	1532.3
處理和		15126	13713	12998	8870		
處理平均值		1680.7	1523.7	1444.2	985.6		1408.5

題解：

新咖啡飲料**容量**對販售數量的影響之檢定

A.設定顯著水準 $\alpha = 0.05$，臨界值 $F_{\alpha,a-1,a\times b\times(r-1)} = F_{0.05,3-1,3\times4\times(3-1)} = F_{0.05,2,24} = 3.4028$(使用 Excel 軟體 F.INV.RT 函數查詢獲得)。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_{1\cdot\cdot} = \mu_{2\cdot\cdot} = \mu_{3\cdot\cdot}$容量 3 種處理(水準)之販售數量的母體平均值皆相等。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_{i\cdot\cdot} \neq \mu_{j\cdot\cdot}$容量 3 種處理(水準)之販售數量的母體平均值不全部相等。

D.計算檢定統計值：*F* 值。容量的水準數 $a = 3$，售價的水準數 $b = 4$，試驗的重複數 $r = 3$。

$SST = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{r}\left(x_{ijk} - \bar{\bar{x}}\right)^2 = (1502 - 1408.5)^2 + (1594 - 1408.5)^2 + ... + (1250 - 1408.5)^2 + (1148 - 1408.5)^2 = 2962551$

$SSA(容量) = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{r}(\bar{x}_{i\cdot\cdot} - \bar{\bar{x}})^2 = b \times r \times \sum_{i=1}^{a}(\bar{x}_{i\cdot\cdot} - \bar{\bar{x}})^2 = 4 \times 3 \times [(1289.8 - 1408.5)^2 + (1403.5 - 1408.5)^2 + (1532.3 - 1408.5)^2] = 353535.1$

$SSB(售價) = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{r}\left(\bar{x}_{\cdot j\cdot} - \bar{\bar{x}}\right)^2 = a \times r \times \sum_{j=1}^{b}\left(\bar{x}_{\cdot j\cdot} - \bar{\bar{x}}\right)^2 = 3 \times 3 \times [(1680.7 - 1408.5)^2 + (1523.7 - 1408.5)^2 + (1444.2 - 1408.5)^2 + (985.6 - 1408.5)^2] = 2407465$

$SSAB(容量\times售價) = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{r}\left(\bar{x}_{ij\cdot} - \bar{x}_{i\cdot\cdot} - \bar{x}_{\cdot j\cdot} + \bar{\bar{x}}\right)^2 = r \times \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\left(\bar{x}_{ij\cdot} - \bar{x}_{i\cdot\cdot} - \bar{x}_{\cdot j\cdot} + \bar{\bar{x}}\right)^2 = 3 \times [(1573.7 - 1289.8 - 1680.7 + 1408.5)^2 + (1425.3 - 1289.8 - 1523.7 + 1408.5)^2 + ... + (1543.7 - 1532.3 - 1444.2 + 1408.5)^2 + (1167.7 - 1532.3 - 985.6 + 1408.5)^2] = 24030.7$

$SSE = SST - SSA - SSB - SSAB = 2962551 - 353535.1 - 2407465 - 24030.7 = 177520$

$$MSA(容量) = \frac{SSA}{a-1} = \frac{353535.1}{3-1} = 176767.5$$

$$MSB(售價) = \frac{SSB}{b-1} = \frac{2407465}{4-1} = 802488.4$$

$$MSAB(容量\times售價) = \frac{SSAB}{(a-1)\times(b-1)} = \frac{24030.7}{(3-1)\times(4-1)} = 4005.12$$

$$\text{MSE} = \frac{\text{SSE}}{a \times b \times (r-1)} = \frac{177520}{3 \times 4 \times (3-1)} = 7396.667$$

$$\text{檢定統計值 } F(\text{容量}) = \frac{\text{MSA}}{\text{MSE}} = \frac{176767.5}{7396.667} = 23.8983$$

E.檢定統計值 $F = 23.8983$ > 臨界值 $F_{\alpha,a-1,a\times b\times(r-1)} = 3.4028$，拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_{1..} = \mu_{2..} = \mu_{3..}$容量 3 種處理(水準)之販售數量的母體平均值皆相等；接受對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_{i..} \neq \mu_{j..}$容量 3 種處理(水準)之販售數量的母體平均值不全部相等。因此，該連鎖咖啡店欲測試新咖啡飲料 200、350 和 500 毫升三種容量水準的販售數量不全部相等，彼此之間有顯著性的差異。

新咖啡飲料**售價**對販售數量的影響之檢定

A.設定顯著水準 $\alpha = 0.05$，臨界值 $F_{\alpha,b-1,a\times b\times(r-1)} = F_{0.05,4-1,3\times 4\times(3-1)} = F_{0.05,3,24} = 3.0088$(使用 Excel 軟體 F.INV.RT 函數查詢獲得)。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_{.1.} = \mu_{.2.} = \mu_{.3.} = \mu_{.4.}$售價 4 種處理(水準)之販售數量的母體平均值皆相等。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_{.i.} \neq \mu_{.j.}$售價 4 種處理(水準)之販售數量的母體平均值不全部相等。

D.計算檢定統計值：F 值

$$\text{檢定統計值 } F(\text{售價}) = \frac{\text{MSB}}{\text{MSE}} = \frac{802488.4}{7396.7} = 108.4932$$

E.檢定統計值 $F = 108.4932$ > 臨界值 $F_{\alpha,b-1,a\times b\times(r-1)} = 3.0088$，拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_{.1.} = \mu_{.2.} = \mu_{.3.} = \mu_{.4.}$售價 4 種處理(水準)之販售數量的母體平均值皆相等；接受對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_{.i.} \neq \mu_{.j.}$售價 4 種處理(水準)之販售數量的母體平均值不全部相等。因此，該連鎖咖啡店欲測試新咖啡飲料 30、40、50 和 60 元四種價格水準的販售數量不全部相等，彼此之間有顯著性的差異。

新咖啡飲料**容量**與**售價**對販售數量的交互影響之檢定

A.設定顯著水準 $\alpha = 0.05$，臨界值 $F_{\alpha,(a-1)\times(b-1),a\times b\times(r-1)} = F_{0.05,(3-1)\times(4-1),3\times 4\times(3-1)} = F_{0.05,6,24} = 2.5082$(使用 Excel 軟體 F.INV.RT 函數查詢獲得)。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_{ij.} = \mu_{ij.}$不同售價與容量組合處理(水準)之販售數量的母體平均值皆相等(售價與容量無交互作用)。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_{ij.} \neq \mu_{ij.}$不同售價與容量組合處理(水準)之販售數量的母體平均值不全部相等(售價與容量有交互作用)。

D.計算檢定統計值：F 值

$$\text{檢定統計值 } F(\text{容量}\times\text{售價}) = \frac{\text{MSAB}}{\text{MSE}} = \frac{4005.12}{7396.7} = 0.5415$$

E.檢定統計值 $F = 0.5415$ < 臨界值 $F_{\alpha,(a-1)\times(b-1),a\times b\times(r-1)} = 2.5082$，接受虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_{ij.} = \mu_{ij.}$不同售價與容量組合處理(水準)之販售數量的母體平均值皆相等。因此，該連鎖咖啡店欲測試新咖啡飲料價格與容量對於販售數量沒有交互作用。

容量×售價二因子設計變異數分析表(ANOVA table)(r 次重複實驗)

變異來源(Source of variation)	平方和(Sum of squares)	自由度(Degrees of freedom)	均方(Mean square)	F 值
容量	353535.1	2	176767.5	23.8983
售價	2407465	3	802488.4	108.4932
交互作用(Interaction)	24030.7	6	4005.12	0.5415
誤差(Error)	177520	24	7396.667	
合計(Total)	2962551	35		

練習 13.22 美香連鎖咖啡店欲測試新咖啡飲料產品價格的市場接受度，實驗每杯新咖啡飲料 30、40 和 50 元三種價格水準(實驗變數 1)與 200、350 和 500 毫升三種容量水準(實驗變數 2)，欲進行 3 重複實驗，在該連鎖咖啡店中 3 種價格水準隨機性的指派 27 家分店試賣 1 個月，蒐集此 27 家分店新咖啡飲料分別對 200、350 和 500 毫升容量的販售數量(杯數)，以評估此新咖啡飲料價格在市場上的接受程度。試檢定在顯著水準 $\alpha = 0.05$ 下，3 個價格水準販售數量是否相同？

		售價			處理和	處理平均值
		30 元	40 元	50 元		
容量	200 毫升	1502 1594 1625 1573.7	1425 1495 1356 1425.3	1325 1495 1200 1340.0	13017	1446.3
	350 毫升	1655 1752 1652 1686.3	1508 1526 1495 1509.7	1396 1456 1495 1449.0	13935	1548.3
	500 毫升	1805 1795 1746 1782.0	1625 1758 1525 1636.0	1565 1499 1567 1543.7	14885	1653.9
處理和		15126	13713	12998		
處理平均值		1680.7	1523.7	1444.2		1549.5

題解：

新咖啡飲料**容量**對販售數量的影響之檢定

A.設定顯著水準 $\alpha = 0.05$，臨界值 $F_{\alpha,a-1,a\times b\times(r-1)} = F_{0.05,3-1,3\times3\times(3-1)} = F_{0.05,2,18} = 3.5546$(使用 Excel 軟體 F.INV.RT 函數查詢獲得)。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_{1..} = \mu_{2..} = \mu_{3..}$容量 3 種處理(水準)之販售數量的母體平均值皆相等。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_{i..} \neq \mu_{j..}$容量 3 種處理(水準)之販售數量的母體平均值不全部相等。

D.計算檢定統計值：F 值。容量的水準數 $a = 3$，售價的水準數 $b = 3$，試驗重複數 $r = 3$

$\text{SST} = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{r}\left(x_{ijk} - \bar{\bar{x}}\right)^2 = (1502 - 1549.5)^2 + (1594 - 1549.5)^2 + \ldots + (1499 - 1549.5)^2 + (1567 - 1549.5)^2 = 561565$

$\text{SSA}(容量) = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{r}(\bar{x}_{i..} - \bar{\bar{x}})^2 = b \times r \times \sum_{i=1}^{a}(\bar{x}_{i..} - \bar{\bar{x}})^2 = 3 \times 3 \times [(1446.3 - 1549.5)^2 + (1548.3 - 1549.5)^2 + (1653.9 - 1549.5)^2] = 193876$

$\text{SSB}(售價) = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{r}\left(\bar{x}_{.j.} - \bar{\bar{x}}\right)^2 = a \times r \times \sum_{j=1}^{b}\left(\bar{x}_{.j.} - \bar{\bar{x}}\right)^2 = 3 \times 3 \times [(1680.7 - 1549.5)^2 + (1523.7 - 1549.5)^2 + (1444.2 - 1549.5)^2] = 260599$

$\text{SSAB}(容量\times售價) = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{r}\left(\bar{x}_{ij.} - \bar{x}_{i..} - \bar{x}_{.j.} + \bar{\bar{x}}\right)^2 = r \times \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\left(\bar{x}_{ij.} - \bar{x}_{i..} - \bar{x}_{.j.} + \bar{\bar{x}}\right)^2 = 3 \times [(1573.7 - 1446.3 - 1680.7 + 1549.5)^2 + (1425.3 - 1446.3 - 1523.7 + 1549.5)^2 + \ldots + (1636.0 - 1653.9 - 1523.7 + 1549.5)^2 + (1543.7 - 1653.9 - 1444.2 + 1549.5)^2] = 1148$

$\text{SSE} = \text{SST} - \text{SSA} - \text{SSB} - \text{SSAB} = 561565 - 193876 - 260599 - 1148 = 105941$

$$\text{MSA}(容量) = \frac{\text{SSA}}{a-1} = \frac{193876}{3-1} = 96938$$

$$\text{MSB}(售價) = \frac{\text{SSB}}{b-1} = \frac{260599}{3-1} = 130300$$

$$\text{MSAB}(容量\times售價) = \frac{\text{SSAB}}{(a-1)\times(b-1)} = \frac{1148}{(3-1)\times(3-1)} = 287.1$$

$$\text{MSE} = \frac{\text{SSE}}{a\times b\times(r-1)} = \frac{105941}{3\times3\times(3-1)} = 5885.63$$

$$檢定統計值\ F(容量) = \frac{\text{MSA}}{\text{MSE}} = \frac{96938}{5885.63} = 16.47$$

E.檢定統計值 $F = 16.47$ > 臨界值 $F_{\alpha,a-1,a\times b\times(r-1)} = 3.5546$，拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_{1..} = \mu_{2..} = \mu_{3..}$容量 3 種處理(水準)之販售數量的母體平均值皆相等；接受對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_{i..} \neq \mu_{j..}$

容量 3 種處理(水準)之販售數量的母體平均值不全部相等。因此，該連鎖咖啡店欲測試新咖啡飲料 200、350 和 500 毫升三種容量水準的販售數量不全部相等，彼此之間有顯著性的差異。

新咖啡飲料**售價**對販售數量的影響之檢定

A.設定顯著水準 $\alpha = 0.05$，臨界值 $F_{\alpha,b-1,a\times b\times(r-1)} = F_{0.05,3-1,3\times3\times(3-1)} = F_{0.05,2,18} = 3.5546$(使用 Excel 軟體 F.INV.RT 函數查詢獲得)。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_{\cdot 1\cdot} = \mu_{\cdot 2\cdot} = \mu_{\cdot 3\cdot}$售價 3 種處理(水準)之販售數量的母體平均值皆相等。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_{\cdot i\cdot} \neq \mu_{\cdot j\cdot}$售價 3 種處理(水準)之販售數量的母體平均值不全部相等。

D.計算檢定統計值：F 值

$$\text{檢定統計值 } F(\text{售價}) = \frac{\text{MSB}}{\text{MSE}} = \frac{130300}{5885.63} = 22.14$$

E.檢定統計值 $F = 22.14$ > 臨界值 $F_{\alpha,b-1,a\times b\times(r-1)} = 3.5546$，拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_{\cdot 1\cdot} = \mu_{\cdot 2\cdot} = \mu_{\cdot 3\cdot}$售價 3 種處理(水準)之販售數量的母體平均值皆相等；接受對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_{\cdot i\cdot} \neq \mu_{\cdot j\cdot}$售價 3 種處理(水準)之販售數量的母體平均值不全部相等。因此，該連鎖咖啡店欲測試新咖啡飲料 30、40 和 50 元 3 種價格水準的販售數量不全部相等，彼此之間有顯著性的差異。

新咖啡飲料**容量**與**售價**對販售數量的交互影響之檢定

A.設定顯著水準 $\alpha = 0.05$，臨界值 $F_{\alpha,(a-1)\times(b-1),a\times b\times(r-1)} = F_{0.05,(3-1)\times(3-1),3\times3\times(3-1)} = F_{0.05,4,18} = 2.9277$(使用 Excel 軟體 F.INV.RT 函數查詢獲得)。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_{ij\cdot} = \mu_{ij\cdot}$不同售價與容量組合處理(水準)之販售數量的母體平均值皆相等(售價與容量無交互作用)。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_{ij\cdot} \neq \mu_{ij\cdot}$不同售價與容量組合處理(水準)之販售數量的母體平均值不全部相等(售價與容量有交互作用)。

D.計算檢定統計值：F 值

$$\text{檢定統計值 } F(\text{容量}\times\text{售價}) = \frac{\text{MSAB}}{\text{MSE}} = \frac{287.1}{5885.63} = 0.0488$$

E.檢定統計值 $F = 0.0488$ < 臨界值 $F_{\alpha,(a-1)\times(b-1),a\times b\times(r-1)} = 2.9277$，接受虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_{ij\cdot} = \mu_{ij\cdot}$不同售價與容量組合處理(水準)之販售數量的母體平均值皆相等。因此，該連鎖咖啡店欲測試新咖啡飲料價格與容量對於販售數量沒有交互作用。

容量×售價二因子設計變異數分析表(ANOVA table)(r 次重複實驗)

變異來源(Source of variation)	平方和(Sum of squares)	自由度(Degrees of freedom)	均方(Mean square)	F 值
容量	193876	2	96938	16.47
售價	260599	2	130300	22.14
交互作用(Interaction)	1148	4	287.1	0.05
誤差(Error)	105941	18	5885.6	
合計(Total)	561565	26		

利用 **Excel** 軟體分析：二因子變異數分析：重複試驗

利用 Excel 協助資料分析，在 Excel 視窗中勾選工具(T)→選取增益集(I)…→勾選分析工具箱→按確定按鈕。回到 Excel 視窗中勾選工具(T)→選取資料分析(D)…→在資料分析視窗中選取雙因子變異數分析：重複試驗後按確定。

	A	B	C	D	E
1		30 元	40 元	50 元	60 元
2	200 毫升	1502	1425	1325	958
3		1594	1495	1495	850
4		1625	1356	1200	652
5	350 毫升	1655	1508	1396	1052
6		1752	1526	1456	959
7		1652	1495	1495	896
8	500 毫升	1805	1625	1565	1105
9		1795	1758	1499	1250
10		1746	1525	1567	1148

在雙因子變異數分析：重複試驗視窗中，輸入範圍(I):$A$1:$E$10；每一樣本的列數(R):3；輸出選項選擇新工作表(P)。按確定。

雙因子變異數分析：重複試驗

摘要	30 元	40 元	50 元	60 元	總和
200 毫升					
個數	3	3	3	3	12
總和	4721	4276	4020	2460	15477
平均	1573.667	1425.333	1340	820	1289.75
變異數	4092.333	4830.333	21925	24084	97855.3
350 毫升					
個數	3	3	3	3	12
總和	5059	4529	4347	2907	16842
平均	1686.333	1509.667	1449	969	1403.5
變異數	3236.333	242.3333	2487	6159	79148.09
500 毫升					
個數	3	3	3	3	12
總和	5346	4908	4631	3503	18388
平均	1782	1636	1543.667	1167.667	1532.333
變異數	997	13663	1497.333	5546.333	60179.88
總和					
個數	9	9	9	9	
總和	15126	13713	12998	8870	
平均	1680.667	1523.667	1444.222	985.5556	
變異數	10237.5	13115.5	14267.69	31765.03	

ANOVA

變源	SS	自由度	MS	F	P-值	臨界值
樣本	353535.1	2	176767.5	23.89827	1.95E-06	3.402826
欄	2407465	3	802488.4	108.4932	4.29E-14	3.008787
交互作用	24030.72	6	4005.12	0.541476	0.771445	2.508189
組內	177520	24	7396.667			
總和	2962551	35				

利用 **SPSS** 軟體分析：二因子變異數分析：重複試驗

利用 SPSS 軟體協助資料分析，在 SPSS Data Editor 視窗中勾選 Analyze→選取 General Linear Model→Univariate…。出現 Univarate 小視窗，將此小視窗左邊的販售數量勾選到右邊的 Dependent Variable:中，將容量和售價勾選到右邊的 Fixed Factor(s):中。按右邊的 Options…按鈕，出現 Univarate: Options 小視窗，在下面 Display 中勾選 Descriptive statistics→按 Continue 按鈕，回到 Univarate 小視窗，再按 OK 按鈕。

	容量	售價	販售數量
1	1	1	1502
2	1	1	1594
3	1	1	1625
4	2	1	1655
5	2	1	1752
6	2	1	1652
7	3	1	1805
8	3	1	1795
9	3	1	1746
10	1	2	1425
11	1	2	1495
12	1	2	1356
13	2	2	1508
14	2	2	1526
15	2	2	1495
16	3	2	1625
17	3	2	1758
18	3	2	1525
19	1	3	1325
20	1	3	1495
21	1	3	1200
22	2	3	1396
23	2	3	1456
24	2	3	1495
25	3	3	1565
26	3	3	1499
27	3	3	1567
28	1	4	958
29	1	4	850
30	1	4	652
31	2	4	1052
32	2	4	959
33	2	4	896
34	3	4	1105
35	3	4	1250
36	3	4	1148

SPSS 分析結果

Univariate Analysis of Variance

Between-Subjects Factors

		N
容量	1	12
	2	12
	3	12
售價	1	9
	2	9
	3	9
	4	9

Descriptive Statistics

Dependent Variable: 販售數量

容量	售價	Mean	Std. Deviation	N
1	1	1573.67	63.971	3
	2	1425.33	69.501	3
	3	1340.00	148.071	3
	4	820.00	155.190	3
	Total	1289.75	312.818	12
2	1	1686.33	56.889	3
	2	1509.67	15.567	3
	3	1449.00	49.870	3
	4	969.00	78.479	3
	Total	1403.50	281.333	12
3	1	1782.00	31.575	3
	2	1636.00	116.889	3
	3	1543.67	38.695	3
	4	1167.67	74.474	3
	Total	1532.33	245.316	12
Total	1	1680.67	101.181	9
	2	1523.67	114.523	9
	3	1444.22	119.447	9
	4	985.56	178.227	9
	Total	1408.53	290.937	36

Tests of Between-Subjects Effects

Dependent Variable: 販售數量

Source	Type III Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Corrected Model	2785030.972[a]	11	253184.634	34.230	.000
Intercept	71422218.028	1	71422218.028	9656.001	.000
容量	353535.056	2	176767.528	23.898	.000
售價	2407465.194	3	802488.398	108.493	.000
容量 * 售價	24030.722	6	4005.120	.541	.771
Error	177520.000	24	7396.667		
Total	74384769.000	36			
Corrected Total	2962550.972	35			

a R Squared = .940 (Adjusted R Squared = .913)

練習 13.23 美香連鎖咖啡店欲測試新咖啡飲料產品價格的市場接受度，實驗每杯新咖啡飲料 30、40 和 50 元三種價格水準(實驗變數 1)與 3、6、9 和 12 %四種蔗糖含量(實驗變數 2)，欲進行 3 重複實驗，在該連鎖咖啡店中 3 種價格水準隨機性的指派 36 家分店試賣 1 個月，蒐集此 36 家分店新

咖啡飲料分別對 3、6、9 和 12 %四種蔗糖含量的販售數量(杯數)，以評估此新咖啡飲料價格在市場上的接受程度。試檢定在顯著水準 $\alpha = 0.05$ 下，3 個價格水準販售數量是否相同？

		售價		
		30 元	40 元	50 元
蔗糖含量	3 %	502	525	325
		594	565	495
		623	515	500
	6 %	655	508	397
		751	526	457
		652	625	496
	9 %	802	625	563
		828	757	499
		746	589	567
	12 %	1005	906	655
		1172	758	720
		1042	889	710

題解：

		售價			處理和	處理平均值
		30 元	40 元	50 元		
蔗糖含量	3 %	502	525	325	4644	516.0
		594	565	495		
		623	515	500		
		573.0	535.0	440.0		
	6 %	655	508	397	5067	563.0
		751	526	457		
		652	625	496		
		686.0	553.0	450.0		
	9 %	802	625	563	5976	664.0
		828	757	499		
		746	589	567		
		792.0	657.0	543.0		
	12 %	1005	906	655	7857	873.0
		1172	758	720		
		1042	889	710		
		1073.0	851.0	695.0		
處理和		9372	7788	6384		
處理平均值		781.0	649.0	532.0		654.0

新咖啡飲料**蔗糖含量**對販售數量的影響之檢定

A.設定顯著水準 $\alpha = 0.05$，臨界值 $F_{\alpha,a-1,a\times b\times(r-1)} = F_{0.05,4-1,4\times3\times(3-1)} = F_{0.05,3,24} = 3.0088$(使用 Excel 軟體 F.INV.RT 函數查詢獲得)。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_{1..} = \mu_{2..} = \mu_{3..} = \mu_{4..}$蔗糖含量的四種處理(水準)之販售數量的母體平均值皆相等。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_{i..} \neq \mu_{j..}$蔗糖含量的四種處理(水準)之販售數量的母體平均值不全部相等。

D.計算檢定統計值：F 值。蔗糖含量的水準數 $a = 4$，售價的水準數 $b = 3$，試驗重複數 $r = 3$

$$SST = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{r}\left(x_{ijk} - \bar{\bar{x}}\right)^2 = (502-654)^2 + (594-654)^2 + \ldots + (720-654)^2 + (710-654)^2 = 1201864$$

$$SSA(\text{蔗糖含量}) = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{r}(\bar{x}_{i..} - \bar{\bar{x}})^2 = b \times r \times \sum_{i=1}^{a}(\bar{x}_{i..} - \bar{\bar{x}})^2 = 3 \times 3 \times [(516-654)^2 + (563-654)^2 + (664-654)^2 + (873-654)^2] = 678474$$

SSB(售價) = $\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{r}(\bar{x}_{.j.}-\bar{\bar{x}})^2 = a \times r \times \sum_{j=1}^{b}(\bar{x}_{.j.}-\bar{\bar{x}})^2$ = 4 × 3 × [(781 – 654)^2 + (649 – 654)^2 + (532 – 654)^2] = 372456

SSAB(蔗糖含量×售價) = $\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{r}(\bar{x}_{ij.}-\bar{x}_{i..}-\bar{x}_{.j.}+\bar{\bar{x}})^2 = r \times \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(\bar{x}_{ij.}-\bar{x}_{i..}-\bar{x}_{.j.}+\bar{\bar{x}})^2$ = 3 × [(573 – 516 – 781 + 654)^2 + (535 – 516 – 649 + 654)^2 + ... + (851 – 873 – 649 + 654)^2 + (695 – 873 – 532 + 654)^2] = 49422

SSE = SST – SSA – SSB – SSAB = 1201864 – 678474 – 372456 – 49422 = 101512

$$\text{MSA(蔗糖含量)} = \frac{\text{SSA}}{a-1} = \frac{678474}{4-1} = 226158$$

$$\text{MSB(售價)} = \frac{\text{SSB}}{b-1} = \frac{372456}{3-1} = 186228$$

$$\text{MSAB(蔗糖含量×售價)} = \frac{\text{SSAB}}{(a-1)\times(b-1)} = \frac{49422}{(4-1)\times(3-1)} = 8237$$

$$\text{MSE} = \frac{\text{SSE}}{a\times b\times(r-1)} = \frac{101512}{4\times3\times(3-1)} = 4229.667$$

$$\text{檢定統計值 } F\text{(蔗糖含量)} = \frac{\text{MSA}}{\text{MSE}} = \frac{226158}{4229.667} = 53.4695$$

E.檢定統計值 F = 53.4695 > 臨界值 $F_{\alpha,a-1,a\times b\times(r-1)}$ = 3.0088，拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_{1..} = \mu_{2..} = \mu_{3..} = \mu_{4..}$蔗糖含量的四種處理(水準)之販售數量的母體平均值皆相等；接受對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_{i..} \neq \mu_{j..}$蔗糖含量的四種處理(水準)之販售數量的母體平均值不全部相等。因此，該連鎖咖啡店欲測試新咖啡飲料 3、6、9 和 12 %四種蔗糖含量水準的販售數量不全部相等，彼此之間有顯著性的差異。

新咖啡飲料**售價**對販售數量的影響之檢定

A.設定顯著水準 α = 0.05，臨界值 $F_{\alpha,b-1,a\times b\times(r-1)} = F_{0.05,3-1,4\times3\times(3-1)} = F_{0.05,2,24}$ = 3.4028(使用 Excel 軟體 F.INV.RT 函數查詢獲得)。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_{.1.} = \mu_{.2.} = \mu_{.3.}$售價 3 種處理(水準)之販售數量的母體平均值皆相等。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_{.i.} \neq \mu_{.j.}$售價 3 種處理(水準)之販售數量的母體平均值不全部相等。

D.計算檢定統計值：F 值

$$\text{檢定統計值 } F\text{(售價)} = \frac{\text{MSB}}{\text{MSE}} = \frac{186228}{4229.667} = 44.029$$

E.檢定統計值 F = 44.029 > 臨界值 $F_{\alpha,b-1,a\times b\times(r-1)}$ = 3.4028，拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_{.1.} = \mu_{.2.} = \mu_{.3.}$售價 3 種處理(水準)之販售數量的母體平均值皆相等；接受對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_{.i.} \neq \mu_{.j.}$售價 3 種處理(水準)之販售數量的母體平均值不全部相等。因此，該連鎖咖啡店欲測試新咖啡飲料 30、40 和 50 元 3 種價格水準的販售數量不全部相等，彼此之間有顯著性的差異。

新咖啡飲料**砂糖含量**與**售價**對販售數量的交互影響之檢定

A.設定顯著水準 α = 0.05，臨界值 $F_{\alpha,(a-1)\times(b-1),a\times b\times(r-1)} = F_{0.05,(4-1)\times(3-1),4\times3\times(3-1)} = F_{0.05,6,24}$ = 2.5082(使用 Excel 軟體 F.INV.RT 函數查詢獲得)。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_{ij.} = \mu_{ij.}$不同售價與蔗糖含量組合處理(水準)之販售數量的母體平均值皆相等(售價與蔗糖含量無交互作用)。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_{ij.} \neq \mu_{ij.}$不同售價與蔗糖含量組合處理(水準)之販售數量的母體平均值不全部相等(售價與蔗糖含量有交互作用)。

D.計算檢定統計值：F 值

$$\text{檢定統計值 } F\text{(蔗糖含量×售價)} = \frac{\text{MSAB}}{\text{MSE}} = \frac{8237}{4229.667} = 1.9474$$

E.檢定統計值 F = 1.9474 < 臨界值 $F_{\alpha,(a-1)\times(b-1),a\times b\times(r-1)}$ = 2.5082，接受虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_{ij.} = \mu_{ij.}$不同售價與蔗糖含量組合處理(水準)之販售數量的母體平均值皆相等。因此，該連鎖咖啡店欲測試新咖啡飲料價格與蔗糖含量對於販售數量沒有交互作用。

蔗糖含量×售價二因子設計變異數分析表(ANOVA table)(*r* 次重複實驗)

變異來源(Source of variation)	平方和(Sum of squares)	自由度(Degrees of freedom)	均方(Mean square)	*F* 值
蔗糖含量	678474	3	226158	53.47
售價	372456	2	186228	44.03
交互作用(Interaction)	49422	6	8237	1.95
誤差(Error)	101512	24	4229.67	
合計(Total)	1201864	35		

利用 **Excel** 軟體分析：二因子變異數分析：重複試驗

利用 Excel 協助資料分析，在 Excel 視窗中勾選工具(T)→選取增益集(I)…→勾選分析工具箱→按確定按鈕。回到 Excel 視窗中勾選工具(T)→選取資料分析(D)…→在資料分析視窗中選取雙因子變異數分析：重複試驗後按確定。

	30 元	40 元	50 元
3%	502	525	325
	594	565	495
	623	515	500
6%	655	508	397
	751	526	457
	652	625	496
9%	802	625	563
	828	757	499
	746	589	567
12%	1005	906	655
	1172	758	720
	1042	889	710

在雙因子變異數分析：重複試驗視窗中，輸入範圍(I):$A$1:$E$12；每一樣本的列數(R):3；輸出選項選擇新工作表(P)。按確定。

雙因子變異數分析：重複試驗

摘要	30 元	40 元	50 元	總和
0.03				
個數	3	3	3	9
總和	1719	1605	1320	4644
平均	573	535	440	516
變異數	3991	700	9925	7173.75
0.06				
個數	3	3	3	9
總和	2058	1659	1350	5067

平均	686	553	450	563
變異數	3171	3969	2487	12906

0.09				
個數	3	3	3	9
總和	2376	1971	1629	5976
平均	792	657	543	664
變異數	1756	7824	1456	14411.75

0.12				
個數	3	3	3	9
總和	3219	2553	2085	7857
平均	1073	851	695	873
變異數	7693	6559	1225	30932.25

總和			
個數	12	12	12
總和	9372	7788	6384
平均	781	649	532
變異數	40567.64	20667.64	14165.45

ANOVA

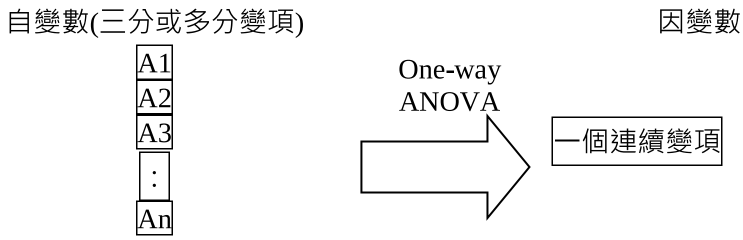
變源	SS	自由度	MS	F	P-值	臨界值
樣本	678474	3	226158	53.46946	8.93E-11	3.008787
欄	372456	2	186228	44.029	9.32E-09	3.402826
交互作用	49422	6	8237	1.947435	0.113858	2.508189
組內	101512	24	4229.667			
總和	1201864	35				

13.8 單因子變異數分析【選擇教材】

問題型態：不同家庭狀況【有三個(含)變量以上】的遊客，其遊憩體驗、旅遊滿意度、遊憩動機、重遊意願是否有顯著的差異？

分析方法

自變數為家庭狀況，設有三個水準：單親家庭組、他人照顧家庭組、雙親家庭組；依變數為連續變項，每個依變項分開考驗，可採用獨立樣本單因子變異數分析(One-way analysis of variance, One-way ANOVA)。



- 若自變數為連續變數(變項)，可用積差相關分析，若要用 One-way ANOVA 分析，應將此連續變項化為間斷變項(非連續變數、類別變項或次序變項)，如自變數是唸書時間，因變數是考試成績，自變數唸書時間可分為，「長程時間」、「中程時間」和「短程時間」組進行分析。若自變數唸書時間只有區分為「長程時間」和「短程時間」兩組時，利用 t-test 分析。
- 自變數的劃分中，三組人數最好不要差距太大(每一組至少都要達到 30 個以上，未達到 30 個時，跟鄰近組別合併)，常用的方法
  1.以唸書時間的平均數上下 0.5 標準差為劃分組別界線，平均數 + 0.5 標準差以上者為「長程時間組」，平均數 - 0.5 標準差以下者為「短程時間組」，兩者之間為「中程時間組」
  2.以唸書時間的平均數上下 1.0 標準差為劃分組別界線，平均數 + 1.0 標準差以上者為「長程時間組」，平均數 - 1.0 標準差以下者為「短程時間組」，兩者之間為「中程時間組」
  3.依據唸書時間的長短，按長短排列，時間在前 25-33 %者為「長程時間組」，時間在後 25-33 %者為「短程時間組」，中間 34-50 %為「中程時間組」

One-way ANOVA 分析 SPSS 操作方法

1. Analyze/Statistics(分析或統計分析) → Compare Means[比較平均數法(M)] → One-Way ANOVA…[單因子變異數分析(O)…]，打開 One-Way ANOVA (單因子變異數分析…)對話視窗
2. 在左邊的對話方塊中的變數(變項)，若是因變數(依變數、檢定變數)者，勾選進入右邊的 Dependent List: [依變數清單(E):]對話方塊中。因變數一次可以分析很多個。
3. 在左邊的對話方塊中的變數(變項)，若是自變數(自變項、因子)者，勾選一個變項進入右下角的 Factor: [因子(F):]對話方塊中。自變數一次只能分析一個。本研究設定年級為自變數。
4. 按 Post Hoc…[Post Hoc 檢定(H)]鈕，即會出現 One-Way ANOVA: Post Hoc Multiple Comparisons(單因子變異數分析: Post Hoc 多重比較)次對話視窗，選取事後比較的統計方法
5. 在 One-Way ANOVA: Post Hoc Multiple Comparisons(單因子變異數分析: Post Hoc 多重比較)次對話視窗中，上面的 Equal Variance Assumed(假設組別母群變異數相同或假設相同的變異數)方塊中選取一種事後比較法，此即在變異數分析中，F 值如達顯著($p < 0.05$)時，所要使用的「事後多重比較法」，常用者為「LSD(L)」、「Scheffe」與「Duncan」法。在勾選「Scheffe」法選項，按 Continue 鈕回到「One-Way ANOVA」(單因子變異數分析)對話視窗。若假設組別母群變異數不相等，在多重事後比較時，選取 Equal Variance Not Assumed(未假設相同的變異數)下方內四種方法之一，按 Continue 鈕回到「One-Way ANOVA」(單因子變異數分析)對話視窗。

   ☐Least-Significant Difference(LSD)：相當於進行所有配對組多重比較 t 檢定

   ☐Bonferroni：Bonferroni 檢定是修改自 LSD 法。適用於非正交比較，以整個實驗為觀念單位。

   ☐Duncan's multiple range test 建議勾選

□Student-Newman-Keuls(S-N-K)：適用於每組人數相等的差距檢定，依平均數大小次序使用不同的臨界值

□Tukey's honestly significant difference：適用於事後非正交比較。每一個比較所用的臨界值均相同

□Tukey's b：Tukey 所提出的另一種事後比較方法

□Scheffe：適用於各組人數不相等，或每次比較包含兩個以上平均數者這種複雜的比較時

6.按 Options…(選項…)鈕，即會出現「One-Way ANOVA: Options」(單因子變異數分析：選項)次對話視窗。

7.在「One-Way ANOVA: Options」(單因子變異數分析：選項)次對話視窗中，在「Statistics」(統計量)方塊中勾選「□Descriptive」[描述性統計量(D)]、「□Homogeneity-of-variance」[變異數的同質性考驗或變異數同質性檢定(H)]。「Descriptive」(描述性統計量)可計算各組觀察值的個數、平均數、標準差、平均數的標準誤、最小值、最大值、各組平均數 95%的信賴區間等。「□Homogeneity-of-variance」(變異數的同質性考驗)是以 Levene 統計量來檢定組別變異數是否相等。

8.按 Continue 鈕回到「One-Way ANOVA」(單因子變異數分析)對話視窗。

9.按 OK 鈕(確定)，以執行單因子變異數分析。

10.獲得下列單因子變異數分析結果。

Descriptives

		N	Mean	Std. Deviation	Std. Error	95% Confidence Interval for Mean Lower Bound	Upper Bound	Minimum	Maximum
項目問題 1	class 1	7	2.43	0.787	0.297	1.7	3.16	1	3
	class 2	4	2.75	0.5	0.25	1.95	3.55	2	3
	class 3	8	2.88	1.246	0.441	1.83	3.92	1	5
	class 4	12	2.08	0.793	0.229	1.58	2.59	1	3
	Total	31	2.45	0.925	0.166	2.11	2.79	1	5
項目問題 2	class 1	7	2.29	1.254	0.474	1.13	3.45	1	4
	class 2	4	2.25	0.5	0.25	1.45	3.05	2	3
	class 3	8	2.13	0.991	0.35	1.3	2.95	1	3
	class 4	12	1.42	0.669	0.193	0.99	1.84	1	3
	Total	31	1.9	0.944	0.169	1.56	2.25	1	4
項目問題 3	class 1	7	2.86	0.69	0.261	2.22	3.5	2	4
	class 2	4	2.25	0.5	0.25	1.45	3.05	2	3
	class 3	8	2.13	1.126	0.398	1.18	3.07	1	4
	class 4	12	1.75	0.754	0.218	1.27	2.23	1	3
	Total	31	2.16	0.898	0.161	1.83	2.49	1	4
項目問題 4	class 1	7	3.43	0.976	0.369	2.53	4.33	2	5
	class 2	4	2.5	1.291	0.645	0.45	4.55	1	4
	class 3	8	2.13	0.354	0.125	1.83	2.42	2	3
	class 4	12	2.42	0.996	0.288	1.78	3.05	1	4
	Total	31	2.58	0.992	0.178	2.22	2.94	1	5
項目問題 5	class 1	7	3.43	0.787	0.297	2.7	4.16	2	4
	class 2	4	2.75	1.5	0.75	0.36	5.14	2	5
	class 3	8	2	1.195	0.423	1	3	1	4
	class 4	12	1.58	0.669	0.193	1.16	2.01	1	3
	Total	31	2.26	1.182	0.212	1.82	2.69	1	5
項目問題 6	class 1	7	1.43	1.134	0.429	0.38	2.48	1	4
	class 2	4	1.75	0.957	0.479	0.23	3.27	1	3

		N	Mean	Std. Deviation	Std. Error	95% Confidence Interval for Mean Lower Bound	95% Confidence Interval for Mean Upper Bound	Minimum	Maximum
	class 3	8	1.25	0.463	0.164	0.86	1.64	1	2
	class 4	12	1.25	0.622	0.179	0.86	1.64	1	3
	Total	31	1.35	0.755	0.136	1.08	1.63	1	4
項目問題 7	class 1	7	3.43	0.535	0.202	2.93	3.92	3	4
	class 2	4	2.25	0.5	0.25	1.45	3.05	2	3
	class 3	8	3	0.756	0.267	2.37	3.63	2	4
	class 4	12	2.08	0.793	0.229	1.58	2.59	1	3
	Total	31	2.65	0.877	0.158	2.32	2.97	1	4
項目問題 8	class 1	7	2.71	0.756	0.286	2.02	3.41	2	4
	class 2	4	2.5	0.577	0.289	1.58	3.42	2	3
	class 3	8	2.13	0.641	0.227	1.59	2.66	1	3
	class 4	12	2.42	1.311	0.379	1.58	3.25	1	5
	Total	31	2.42	0.958	0.172	2.07	2.77	1	5
項目問題 9	class 1	7	1.86	1.069	0.404	0.87	2.85	1	4
	class 2	4	2.25	0.5	0.25	1.45	3.05	2	3
	class 3	8	1.75	0.707	0.25	1.16	2.34	1	3
	class 4	12	1.58	0.669	0.193	1.16	2.01	1	3
	Total	31	1.77	0.762	0.137	1.49	2.05	1	4
項目問題 10	class 1	7	3.43	1.134	0.429	2.38	4.48	2	5
	class 2	4	2.75	0.957	0.479	1.23	4.27	2	4
	class 3	8	2.38	1.061	0.375	1.49	3.26	1	4
	class 4	12	2	1.128	0.326	1.28	2.72	1	4
	Total	31	2.52	1.18	0.212	2.08	2.95	1	5

Test of Homogeneity of Variances

	Levene Statistic	df1	df2	Sig.
項目問題 1	0.985	3	27	0.415
項目問題 2	5.861	3	27	0.003
項目問題 3	1.733	3	27	0.184
項目問題 4	4.260	3	27	0.014
項目問題 5	2.468	3	27	0.084
項目問題 6	1.071	3	27	0.378
項目問題 7	0.372	3	27	0.774
項目問題 8	3.210	3	27	0.039
項目問題 9	0.599	3	27	0.621
項目問題 10	0.328	3	27	0.805

ANOVA

		Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
項目問題 4	Between Groups	7.042	3	2.347	2.816	.058
	Within Groups	22.506	27	.834		
	Total	29.548	30			
項目問題 5	Between Groups	16.555	3	5.518	5.870	.003
	Within Groups	25.381	27	.940		
	Total	41.935	30			

		Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
項目問題 6	Between Groups	.882	3	.294	.490	.692
	Within Groups	16.214	27	.601		
	Total	17.097	30			
項目問題 7	Between Groups	9.716	3	3.239	6.535	.002
	Within Groups	13.381	27	.496		
	Total	23.097	30			
項目問題 8	Between Groups	1.328	3	.443	.456	.715
	Within Groups	26.220	27	.971		
	Total	27.548	30			
項目問題 9	Between Groups	1.396	3	.465	.784	.513
	Within Groups	16.024	27	.593		
	Total	17.419	30			
項目問題 10	Between Groups	9.403	3	3.134	2.617	.071
	Within Groups	32.339	27	1.198		
	Total	41.742	30			

Multiple Comparison(a,b,c 母體判別)

Dependent Variable		(I) class	(J) class	Mean Difference (I-J)	Std. Error	Sig.	95% Confidence Interval Lower Bound	95% Confidence Interval Upper Bound
項目問題 1	Scheffe	class 1	class 2	-0.321	0.569	0.956	-2.02	1.37
			class 3	-0.446	0.47	0.824	-1.85	0.95
			class 4	0.345	0.432	0.886	-0.94	1.63
		class 2	class 1	0.321	0.569	0.956	-1.37	2.02
			class 3	-0.125	0.556	0.997	-1.78	1.53
			class 4	0.667	0.524	0.66	-0.9	2.23
		class 3	class 1	0.446	0.47	0.824	-0.95	1.85
			class 2	0.125	0.556	0.997	-1.53	1.78
			class 4	0.792	0.414	0.323	-0.44	2.03
		class 4	class 1	-0.345	0.432	0.886	-1.63	0.94
			class 2	-0.667	0.524	0.66	-2.23	0.9
			class 3	-0.792	0.414	0.323	-2.03	0.44
	LSD	class 1	class 2	-0.321	0.569	0.577	-1.49	0.85
			class 3	-0.446	0.47	0.351	-1.41	0.52
			class 4	0.345	0.432	0.431	-0.54	1.23
		class 2	class 1	0.321	0.569	0.577	-0.85	1.49
			class 3	-0.125	0.556	0.824	-1.27	1.02
			class 4	0.667	0.524	0.214	-0.41	1.74
		class 3	class 1	0.446	0.47	0.351	-0.52	1.41
			class 2	0.125	0.556	0.824	-1.02	1.27
			class 4	0.792	0.414	0.067	-0.06	1.64
		class 4	class 1	-0.345	0.432	0.431	-1.23	0.54
			class 2	-0.667	0.524	0.214	-1.74	0.41
			class 3	-0.792	0.414	0.067	-1.64	0.06
項目問題 2	Scheffe	class 1	class 2	0.036	0.565	1	-1.65	1.72
			class 3	0.161	0.467	0.989	-1.23	1.55
			class 4	0.869	0.429	0.274	-0.41	2.15
		class 2	class 1	-0.036	0.565	1	-1.72	1.65
			class 3	0.125	0.552	0.997	-1.52	1.77
			class 4	0.833	0.521	0.477	-0.72	2.39
		class 3	class 1	-0.161	0.467	0.989	-1.55	1.23
			class 2	-0.125	0.552	0.997	-1.77	1.52

Dependent Variable		(I) class	(J) class	Mean Difference (I-J)	Std. Error	Sig.	95% Confidence Interval	
							Lower Bound	Upper Bound
			class 4	0.708	0.412	0.414	-0.52	1.94
		class 4	class 1	-0.869	0.429	0.274	-2.15	0.41
			class 2	-0.833	0.521	0.477	-2.39	0.72
			class 3	-0.708	0.412	0.414	-1.94	0.52
	LSD	class 1	class 2	0.036	0.565	0.95	-1.12	1.2
			class 3	0.161	0.467	0.733	-0.8	1.12
			class 4	0.869	0.429	0.053	-0.01	1.75
		class 2	class 1	-0.036	0.565	0.95	-1.2	1.12
			class 3	0.125	0.552	0.823	-1.01	1.26
			class 4	0.833	0.521	0.121	-0.24	1.9
		class 3	class 1	-0.161	0.467	0.733	-1.12	0.8
			class 2	-0.125	0.552	0.823	-1.26	1.01
			class 4	0.708	0.412	0.097	-0.14	1.55
		class 4	class 1	-0.869	0.429	0.053	-1.75	0.01
			class 2	-0.833	0.521	0.121	-1.9	0.24
			class 3	-0.708	0.412	0.097	-1.55	0.14
項目問題 3	Scheffe	class 1	class 2	0.607	0.522	0.719	-0.95	2.16
			class 3	0.732	0.431	0.425	-0.55	2.02
			class 4	1.107	0.396	0.072	-0.07	2.29
		class 2	class 1	-0.607	0.522	0.719	-2.16	0.95
			class 3	0.125	0.51	0.996	-1.4	1.65
			class 4	0.5	0.481	0.782	-0.93	1.93
		class 3	class 1	-0.732	0.431	0.425	-2.02	0.55
			class 2	-0.125	0.51	0.996	-1.65	1.4
			class 4	0.375	0.38	0.808	-0.76	1.51
		class 4	class 1	-1.107	0.396	0.072	-2.29	0.07
			class 2	-0.5	0.481	0.782	-1.93	0.93
			class 3	-0.375	0.38	0.808	-1.51	0.76
	LSD	class 1	class 2	0.607	0.522	0.255	-0.46	1.68
			class 3	0.732	0.431	0.101	-0.15	1.62
			class 4	1.107(*)	0.396	0.009	0.29	1.92
		class 2	class 1	-0.607	0.522	0.255	-1.68	0.46
			class 3	0.125	0.51	0.808	-0.92	1.17
			class 4	0.5	0.481	0.308	-0.49	1.49
		class 3	class 1	-0.732	0.431	0.101	-1.62	0.15
			class 2	-0.125	0.51	0.808	-1.17	0.92
			class 4	0.375	0.38	0.333	-0.41	1.16
		class 4	class 1	-1.107(*)	0.396	0.009	-1.92	-0.29
			class 2	-0.5	0.481	0.308	-1.49	0.49
			class 3	-0.375	0.38	0.333	-1.16	0.41
項目問題 4	Scheffe	class 1	class 2	0.929	0.572	0.465	-0.78	2.63
			class 3	1.304	0.473	0.078	-0.1	2.71
			class 4	1.012	0.434	0.169	-0.28	2.31
		class 2	class 1	-0.929	0.572	0.465	-2.63	0.78
			class 3	0.375	0.559	0.929	-1.29	2.04
			class 4	0.083	0.527	0.999	-1.49	1.65
		class 3	class 1	-1.304	0.473	0.078	-2.71	0.1
			class 2	-0.375	0.559	0.929	-2.04	1.29
			class 4	-0.292	0.417	0.92	-1.53	0.95
		class 4	class 1	-1.012	0.434	0.169	-2.31	0.28
			class 2	-0.083	0.527	0.999	-1.65	1.49
			class 3	0.292	0.417	0.92	-0.95	1.53
	LSD	class 1	class 2	0.929	0.572	0.116	-0.25	2.1
			class 3	1.304(*)	0.473	0.01	0.33	2.27
			class 4	1.012(*)	0.434	0.028	0.12	1.9

Dependent Variable		(I) class	(J) class	Mean Difference (I-J)	Std. Error	Sig.	95% Confidence Interval	
							Lower Bound	Upper Bound
		class 2	class 1	-0.929	0.572	0.116	-2.1	0.25
			class 3	0.375	0.559	0.508	-0.77	1.52
			class 4	0.083	0.527	0.876	-1	1.16
		class 3	class 1	-1.304(*)	0.473	0.01	-2.27	-0.33
			class 2	-0.375	0.559	0.508	-1.52	0.77
			class 4	-0.292	0.417	0.49	-1.15	0.56
		class 4	class 1	-1.012(*)	0.434	0.028	-1.9	-0.12
			class 2	-0.083	0.527	0.876	-1.16	1
			class 3	0.292	0.417	0.49	-0.56	1.15
項目問題 5	Scheffe	class 1	class 2	0.679	0.608	0.743	-1.13	2.49
			class 3	1.429	0.502	0.065	-0.07	2.92
			class 4	1.845(*)	0.461	0.005	0.47	3.22
		class 2	class 1	-0.679	0.608	0.743	-2.49	1.13
			class 3	0.75	0.594	0.664	-1.02	2.52
			class 4	1.167	0.56	0.251	-0.5	2.83
		class 3	class 1	-1.429	0.502	0.065	-2.92	0.07
			class 2	-0.75	0.594	0.664	-2.52	1.02
			class 4	0.417	0.443	0.828	-0.9	1.74
		class 4	class 1	-1.845(*)	0.461	0.005	-3.22	-0.47
			class 2	-1.167	0.56	0.251	-2.83	0.5
			class 3	-0.417	0.443	0.828	-1.74	0.9
	LSD	class 1	class 2	0.679	0.608	0.274	-0.57	1.93
			class 3	1.429(*)	0.502	0.008	0.4	2.46
			class 4	1.845(*)	0.461	0	0.9	2.79
		class 2	class 1	-0.679	0.608	0.274	-1.93	0.57
			class 3	0.75	0.594	0.217	-0.47	1.97
			class 4	1.167(*)	0.56	0.047	0.02	2.32
		class 3	class 1	-1.429(*)	0.502	0.008	-2.46	-0.4
			class 2	-0.75	0.594	0.217	-1.97	0.47
			class 4	0.417	0.443	0.355	-0.49	1.32
		class 4	class 1	-1.845(*)	0.461	0	-2.79	-0.9
			class 2	-1.167(*)	0.56	0.047	-2.32	-0.02
			class 3	-0.417	0.443	0.355	-1.32	0.49
項目問題 6	Scheffe	class 1	class 2	-0.321	0.486	0.931	-1.77	1.13
			class 3	0.179	0.401	0.977	-1.02	1.37
			class 4	0.179	0.369	0.971	-0.92	1.28
		class 2	class 1	0.321	0.486	0.931	-1.13	1.77
			class 3	0.5	0.475	0.775	-0.91	1.91
			class 4	0.5	0.447	0.743	-0.83	1.83
		class 3	class 1	-0.179	0.401	0.977	-1.37	1.02
			class 2	-0.5	0.475	0.775	-1.91	0.91
			class 4	0	0.354	1	-1.05	1.05
		class 4	class 1	-0.179	0.369	0.971	-1.28	0.92
			class 2	-0.5	0.447	0.743	-1.83	0.83
			class 3	0	0.354	1	-1.05	1.05
	LSD	class 1	class 2	-0.321	0.486	0.514	-1.32	0.68
			class 3	0.179	0.401	0.66	-0.64	1
			class 4	0.179	0.369	0.632	-0.58	0.93
		class 2	class 1	0.321	0.486	0.514	-0.68	1.32
			class 3	0.5	0.475	0.301	-0.47	1.47
			class 4	0.5	0.447	0.274	-0.42	1.42
		class 3	class 1	-0.179	0.401	0.66	-1	0.64
			class 2	-0.5	0.475	0.301	-1.47	0.47
			class 4	0	0.354	1	-0.73	0.73
		class 4	class 1	-0.179	0.369	0.632	-0.93	0.58

Dependent Variable		(I) class	(J) class	Mean Difference (I-J)	Std. Error	Sig.	95% Confidence Interval	
							Lower Bound	Upper Bound
			class 2	-0.5	0.447	0.274	-1.42	0.42
			class 3	0	0.354	1	-0.73	0.73
項目問題 7	Scheffe	class 1	class 2	1.179	0.441	0.092	-0.14	2.49
			class 3	0.429	0.364	0.712	-0.66	1.51
			class 4	1.345(*)	0.335	0.005	0.35	2.34
		class 2	class 1	-1.179	0.441	0.092	-2.49	0.14
			class 3	-0.75	0.431	0.404	-2.03	0.53
			class 4	0.167	0.406	0.982	-1.04	1.38
		class 3	class 1	-0.429	0.364	0.712	-1.51	0.66
			class 2	0.75	0.431	0.404	-0.53	2.03
			class 4	0.917	0.321	0.065	-0.04	1.87
		class 4	class 1	-1.345(*)	0.335	0.005	-2.34	-0.35
			class 2	-0.167	0.406	0.982	-1.38	1.04
			class 3	-0.917	0.321	0.065	-1.87	0.04
	LSD	class 1	class 2	1.179(*)	0.441	0.013	0.27	2.08
			class 3	0.429	0.364	0.25	-0.32	1.18
			class 4	1.345(*)	0.335	0	0.66	2.03
		class 2	class 1	-1.179(*)	0.441	0.013	-2.08	-0.27
			class 3	-0.75	0.431	0.093	-1.63	0.13
			class 4	0.167	0.406	0.685	-0.67	1
		class 3	class 1	-0.429	0.364	0.25	-1.18	0.32
			class 2	0.75	0.431	0.093	-0.13	1.63
			class 4	.917(*)	0.321	0.008	0.26	1.58
		class 4	class 1	-1.345(*)	0.335	0	-2.03	-0.66
			class 2	-0.167	0.406	0.685	-1	0.67
			class 3	-.917(*)	0.321	0.008	-1.58	-0.26
項目問題 8	Scheffe	class 1	class 2	0.214	0.618	0.989	-1.63	2.05
			class 3	0.589	0.51	0.723	-0.93	2.11
			class 4	0.298	0.469	0.939	-1.1	1.69
		class 2	class 1	-0.214	0.618	0.989	-2.05	1.63
			class 3	0.375	0.603	0.942	-1.42	2.17
			class 4	0.083	0.569	0.999	-1.61	1.78
		class 3	class 1	-0.589	0.51	0.723	-2.11	0.93
			class 2	-0.375	0.603	0.942	-2.17	1.42
			class 4	-0.292	0.45	0.935	-1.63	1.05
		class 4	class 1	-0.298	0.469	0.939	-1.69	1.1
			class 2	-0.083	0.569	0.999	-1.78	1.61
			class 3	0.292	0.45	0.935	-1.05	1.63
	LSD	class 1	class 2	0.214	0.618	0.731	-1.05	1.48
			class 3	0.589	0.51	0.258	-0.46	1.64
			class 4	0.298	0.469	0.531	-0.66	1.26
		class 2	class 1	-0.214	0.618	0.731	-1.48	1.05
			class 3	0.375	0.603	0.54	-0.86	1.61
			class 4	0.083	0.569	0.885	-1.08	1.25
		class 3	class 1	-0.589	0.51	0.258	-1.64	0.46
			class 2	-0.375	0.603	0.54	-1.61	0.86
			class 4	-0.292	0.45	0.522	-1.21	0.63
		class 4	class 1	-0.298	0.469	0.531	-1.26	0.66
			class 2	-0.083	0.569	0.885	-1.25	1.08
			class 3	0.292	0.45	0.522	-0.63	1.21
項目問題 9	Scheffe	class 1	class 2	-0.393	0.483	0.881	-1.83	1.05
			class 3	0.107	0.399	0.995	-1.08	1.3
			class 4	0.274	0.366	0.905	-0.82	1.37
		class 2	class 1	0.393	0.483	0.881	-1.05	1.83

Dependent Variable		(I) class	(J) class	Mean Difference (I-J)	Std. Error	Sig.	95% Confidence Interval	
							Lower Bound	Upper Bound
			class 3	0.5	0.472	0.772	-0.91	1.91
			class 4	0.667	0.445	0.533	-0.66	1.99
		class 3	class 1	-0.107	0.399	0.995	-1.3	1.08
			class 2	-0.5	0.472	0.772	-1.91	0.91
			class 4	0.167	0.352	0.973	-0.88	1.21
		class 4	class 1	-0.274	0.366	0.905	-1.37	0.82
			class 2	-0.667	0.445	0.533	-1.99	0.66
			class 3	-0.167	0.352	0.973	-1.21	0.88
	LSD	class 1	class 2	-0.393	0.483	0.423	-1.38	0.6
			class 3	0.107	0.399	0.79	-0.71	0.93
			class 4	0.274	0.366	0.461	-0.48	1.03
		class 2	class 1	0.393	0.483	0.423	-0.6	1.38
			class 3	0.5	0.472	0.299	-0.47	1.47
			class 4	0.667	0.445	0.146	-0.25	1.58
		class 3	class 1	-0.107	0.399	0.79	-0.93	0.71
			class 2	-0.5	0.472	0.299	-1.47	0.47
			class 4	0.167	0.352	0.639	-0.55	0.89
		class 4	class 1	-0.274	0.366	0.461	-1.03	0.48
			class 2	-0.667	0.445	0.146	-1.58	0.25
			class 3	-0.167	0.352	0.639	-0.89	0.55
項目問題 10	Scheffe	class 1	class 2	0.679	0.686	0.806	-1.37	2.72
			class 3	1.054	0.566	0.346	-0.63	2.74
			class 4	1.429	0.52	0.08	-0.12	2.98
		class 2	class 1	-0.679	0.686	0.806	-2.72	1.37
			class 3	0.375	0.67	0.957	-1.62	2.37
			class 4	0.75	0.632	0.706	-1.13	2.63
		class 3	class 1	-1.054	0.566	0.346	-2.74	0.63
			class 2	-0.375	0.67	0.957	-2.37	1.62
			class 4	0.375	0.5	0.904	-1.11	1.86
		class 4	class 1	-1.429	0.52	0.08	-2.98	0.12
			class 2	-0.75	0.632	0.706	-2.63	1.13
			class 3	-0.375	0.5	0.904	-1.86	1.11
	LSD	class 1	class 2	0.679	0.686	0.331	-0.73	2.09
			class 3	1.054	0.566	0.074	-0.11	2.22
			class 4	1.429(*)	0.52	0.011	0.36	2.5
		class 2	class 1	-0.679	0.686	0.331	-2.09	0.73
			class 3	0.375	0.67	0.58	-1	1.75
			class 4	0.75	0.632	0.246	-0.55	2.05
		class 3	class 1	-1.054	0.566	0.074	-2.22	0.11
			class 2	-0.375	0.67	0.58	-1.75	1
			class 4	0.375	0.5	0.459	-0.65	1.4
		class 4	class 1	-1.429(*)	0.52	0.011	-2.5	-0.36
			class 2	-0.75	0.632	0.246	-2.05	0.55
			class 3	-0.375	0.5	0.459	-1.4	0.65

*The mean difference is significant at the .05 level.

項目問題 1

	class	N	Subset for alpha = .05
			1
Duncan(a,b)	class 4	12	2.08
	class 1	7	2.43
	class 2	4	2.75
	class 3	8	2.88
	Sig.		0.157
Scheffe(a,b)	class 4	12	2.08

	class	N	Subset for alpha = .05
			1
	class 1	7	2.43
	class 2	4	2.75
	class 3	8	2.88
	Sig.		0.482

Means for groups in homogeneous subsets are displayed.
a. Uses Harmonic Mean Sample Size = 6.653.
b. The group sizes are unequal. The harmonic mean of the group sizes is used. Type I error levels are not guaranteed.

項目問題 3

	class	N	Subset for alpha = .05	
			1	2
Duncan(a,b)	class 4	12	1.75	
	class 3	8	2.13	2.13
	class 2	4	2.25	2.25
	class 1	7		2.86
	Sig.		0.311	0.141
Scheffe(a,b)	class 4	12	1.75	
	class 3	8	2.13	
	class 2	4	2.25	
	class 1	7	2.86	
	Sig.		0.144	

Means for groups in homogeneous subsets are displayed.
a. Uses Harmonic Mean Sample Size = 6.653.
b. The group sizes are unequal. The harmonic mean of the group sizes is used. Type I error levels are not guaranteed.

項目問題 5

	class	N	Subset for alpha = .05		
			1	2	3
Duncan(a,b)	class 4	12	1.58		
	class 3	8	2	2	
	class 2	4		2.75	2.75
	class 1	7			3.43
	Sig.		0.44	0.17	0.213
Scheffe(a,b)	class 4	12	1.58		
	class 3	8	2	2	
	class 2	4	2.75	2.75	
	class 1	7		3.43	
	Sig.		0.211	0.089	

Means for groups in homogeneous subsets are displayed.
a. Uses Harmonic Mean Sample Size = 6.653.
b. The group sizes are unequal. The harmonic mean of the group sizes is used. Type I error levels are not guaranteed.

11. 表格相關項目說明

a.在 Descriptives 表格內 N：每一個分析問題(items)之自變數(自變項、因子)各組(class 1、class 2、class 3、class 4)的實際分析人數(實際樣本數)。每一個分析問題的每一個自變數(自變項、因子)組別之 N 值的數值均需要 3(包含 3)以上，方能代表此一自變數(自變項、因子)組別(class 1、class 2、class 3、class 4)，若無法達到 3 以上時，可以進行並組分析，例如將「class 1」和「class 2」合併成「class n2」組，或暫時將此組數值去除不要列入單因子變異數分析。若要進行併組時，其併組後的組別組成必須要有其代表意義，方能在分析之後進行解讀。

b.在 Descriptives 表格內 Mean：每一個分析問題(items)之自變數(自變項、因子)各組(class 1、class 2、class 3、class 4)樣本的算術平均值。

c.在 Descriptives 表格內 Std. Deviation：每一個分析問題(items)之自變數(自變項、因子)各組(class 1、class 2、class 3、class 4)樣本的標準差/標準(偏)差。

d.在 ANOVA 表格內「F」：進行單因子變異數所獲得之 F 值。

e.在 ANOVA 表格內「Sig.」：進行單因子變異數所獲得之機率值(P 值)。若分析的某項目中此 Sig.數值小於 0.05(顯著水準)代表，此項目中自變數(自變項、因子)各組(class 1、class 2、class 3、class 4)之間的數種組合(class 1 vs. class 2；class 1 vs. class 3；class 1 vs. class 4；class 2 vs. class 3；class 2 vs. class 4；class 3 vs. class 4)中可能有一種或以上的組合，達到顯著性的差異水準；若分析的某項目中此 Sig.數值大於 0.05(顯著水準)代表，此項目中自變數(自變項、因子)各組(class 1、class 2、class 3、class 4)之間的數種組合(class 1 vs. class 2；class 1 vs. class 3；class 1 vs. class 4；class 2 vs. class 3；class 2 vs. class 4；class 3 vs. class 4)中可能沒有任何一種組合，達到顯著性的差異水準。若分析的某項目中此 Sig.數值小於 0.05(顯著水準)，需要繼續觀察事後比較的 Scheffe(或 Duncan)統計分析。

f.在項目問題 5 的 Scheffe 統計表內「N」值：代表在項目問題 5 的分析中，自變數(自變項、因子)各組(class 1、class 2、class 3、class 4)的樣本數。

g.在項目問題 5 的 Scheffe 統計表內 Subset for alpha = .05 下面「1」：代表在項目問題 5 的分析中，自變數(自變項、因子)各組(class 1、class 2、class 3、class 4)的第一個同質性組合(包含 class 4、class 3、class 2)，其意義為 class 4、class 3、class 2 的彼此間各項組合(class 4 vs. class 3；class 4 vs. class 2；class 3 vs. class 2)均未達顯著性差異水準。在此「1」欄內的數字代表自變數(自變項、因子)各組算術平均值。

h.在項目問題 5 的 Scheffe 統計表內 Subset for alpha = .05 下面「2」：代表在項目問題 5 的分析中，自變數(自變項、因子)各組(class 1、class 2、class 3、class 4)的第二個同質性組合(包含 class 3、class 2、class 1)，其意義為 class 3、class 2、class 1 的彼此間各項組合(class 3 vs. class 2；class 3 vs. class 1；class 2 vs. class 1)均未達顯著性差異水準。在此「2」欄內的數字代表自變數(自變項、因子)各組算術平均值。在「1」和「2」欄重疊的是 class 3 和 class 2 兩個自變數(自變項、因子)組別，未重疊的是 class 4 和 class 1 兩個自變數(自變項、因子)組別。代表 class 4 和 class 1 兩個自變數(自變項、因子)組別之間有達到顯著性差異水準，觀察其平均值發現，class 1 對項目問題 5 的平均值有顯著性的比 class 4 高。在報告撰寫時，於 Scheffe 欄位內標示為「class 1 > class 4」，亦可以使用代碼(a,b,c,d 等)代替表示為「a > d」。

i.若在項目問題 5 的 Scheffe 統計表數值模式如下所示：在報告撰寫時，於 Scheffe 欄位內標示為「class 1, class 2, class 3 > class 4」，亦可以使用代碼(a,b,c,d 等)代替表示為「a, b, c > d」。

項目問題 5

	年級	N	Subset for alpha = .05		
			1	2	
Scheffe	class 4	12	1.58		
	class 3	8		2.00	
	class 2	4		2.75	
	class 1	7		3.43	
	Sig.		.211	.089	

j.若在項目問題 5 的 Scheffe 統計表數值模式如下所示：在報告撰寫時，於 Scheffe 欄位內標示為「class 1, class 2 > class 4」，亦可以使用代碼(a,b,c,d 等)代替表示為「a, b > d」。

項目問題 5

	年級	N	Subset for alpha = .05		
			1	2	
Scheffe	class 4	12	1.58		
	class 3	8	2.00	2.00	
	class 2	4		2.75	
	class 1	7		3.43	
	Sig.		.211	.089	

k.若在項目問題 5 的 Scheffe 統計表數值模式如下所示：在報告撰寫時，於 Scheffe 欄位內標示為「class 1 > class 2, class 3 > class 4」，亦可以使用代碼(a,b,c,d 等)代替表示為「a > b, c > d」

項目問題 5

	年級	N	Subset for alpha = .05			
			1	2	3	
Scheffe	class 4	12	1.58			
	class 3	8		2.00		
	class 2	4		2.75		
	class 1	7			3.43	
	Sig.		.211	.089	.189	

l.

13.9 二因子變異數分析(two-way ANOVA)

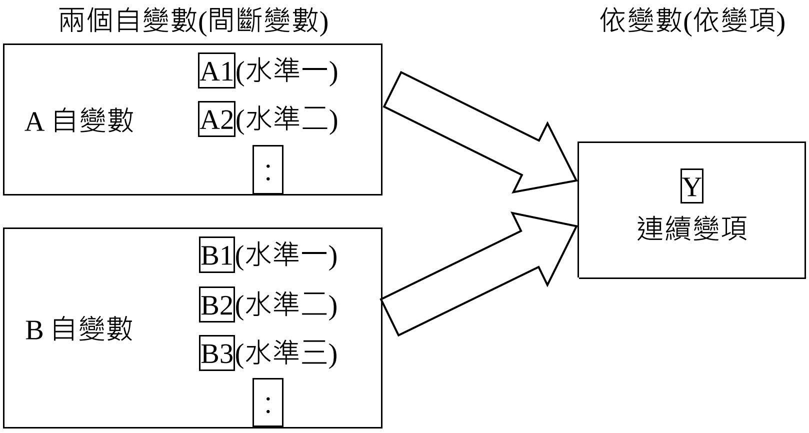
問題型態

遊客的「性別」與「家庭狀況」變數在「旅遊滿意度」上是否有顯著性的交互作用？

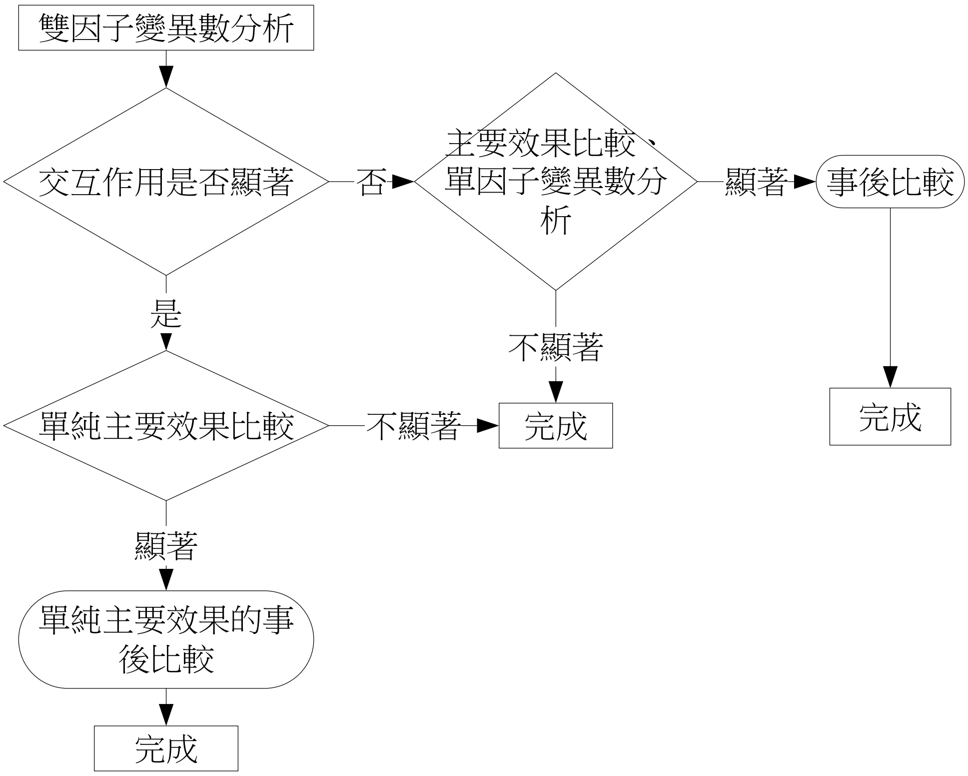
分析方法

研究問題中，自變數為遊客性別、家庭狀況，性別有兩個水準，家庭狀況有三個水準，二者自變項均屬間斷變數；依變數為旅遊滿意度，為連續變數，採用「二因子變異數分析」(two-way ANOVA)最為適宜。

在二因子變異數分析中，自變數(自變項、因子)之間為相互獨立。在實驗設計中也稱「二因子受試者間設計」，又稱「完全隨機化因子設計」(completely randomized factorial design)。



在二因子變異數分析，若 A、B 兩自變數交互作用顯著時，即需進行「單純主要效果」(simple main effects)考驗；若兩自變數交互作用不顯著時，要單獨考驗每一個自變數的「主要效果」(main effects)，其檢驗成果與單獨進行 t-test(二個水準時)或 one-way ANOVA(三個水準或以上時)之結果一樣。



二因子變異數分析 SPSS 操作方法

1.Analyze/Statistics(統計分析) → General Linear Model(一般線性模式) ⇨ Univariate/GLM-General Factorial…，即會出現 Univariate 或 GLM-Genernal Factorial(GLM-一般因子)對話視窗

2.在 Univariate 或 GLM-Genernal Factorial(GLM-一般因子)對話視窗中，將欲進行二因子變異數分析的依變數(依變項)，自左邊的方塊中點選進入，右上角的 Dependent Variable: (依變數)下方的空格中。每次進行二因子變異數分析時，只能分析一個依變數。

3.在 Univariate 或 GLM-Genernal Factorial(GLM-一般因子)對話視窗中，將欲進行二因子變異數分析的自變數(自變項、控制變數、固定因子)，自左邊的方塊中點選進入，右邊的 Fixed Variable: (固定因子)下方的空格中。每次進行二因子變異數分析時，只能分析兩個自變數。

4.在 Univariate 或 GLM-Genernal Factorial(GLM-一般因子)對話視窗中，按右邊的 Post Hoc…鈕(Post Hoc 檢定)，即會出現 Univariate: Post Hoc Multiple Comparisons for Observed Means 的次對話視窗

5.在 Univariate: Post Hoc Multiple Comparisons for Observed Means 的次對話視窗中，自左上角 Factor(s): (因子)下方的方塊中，將欲進行事後比較的自變數(自變項、因子)，點選進入右上角的 Post Hoc Tests for: (Post Hoc 檢定)下方的方塊中。若二因子變異數分析交互作用不顯著時，即可列出自變數(因子)的事後比較，其結果與獨立樣本 t 考驗或單因子變異數分析相同。

6.在 Univariate: Post Hoc Multiple Comparisons for Observed Means 的次對話視窗中，中間的 Equal Variances Assumed(假設相同的變異數)下方各種事後比較的方法中，勾選欲分析比較的選項，建議勾選□Scheffe 選項。

7.在 Univariate: Post Hoc Multiple Comparisons for Observed Means 的次對話方塊中，按 Continue 鈕(繼續鈕)，回到 Univariate 或 GLM-Genernal Factorial(GLM-一般因子)對話視窗。

8.在 Univariate 或 GLM-Genernal Factorial(GLM-一般因子)對話視窗中，點選右邊的 Options 鈕(選項)，即會出現 Univariate: Options 次對話視窗。

9.在 Univariate: Options 次對話視窗中，將左上角 Factor(s) and Factor Interactions: (因子與因子交互作用)

下的自變數和自變數交互作用選項，勾選進入右邊的 Display Means for: (顯示平均數)下的空格中，以便於執行分析時顯示邊緣平均數(marginal means)。

10.在 Univariate: Options 次對話視窗中，在中間的 Display (顯示)方格中勾選下列選項「☐ Descriptive statistics」：描述統計「☐ Estimates of effect size」：效果值的大小「☐ Observed power」：統計考驗力「☐ Homogeneity tests」：同質性考驗

11.在 Univariate: Options 次對話視窗中，按 Continue 鈕(繼續鈕)，回到 Univariate 或 GLM-Genernal Factorial(GLM-一般因子)對話視窗。

12.在 Univariate 或 GLM-Genernal Factorial(GLM-一般因子)對話視窗中，按 OK 鈕(確定鈕)，以執行兩因子變異數分析程序。

Descriptive Statistics

Dependent Variable: 旅遊滿意度

家庭狀況	性別	Mean	Std. Deviation	N
1	1	23.74	9.92	54
	2	24.46	10.93	46
	Total	24.07	10.35	100
2	1	25.21	9.94	42
	2	28.50	9.66	58
	Total	27.12	9.86	100
3	1	20.80	11.38	50
	2	25.16	10.60	50
	Total	22.98	11.16	100
Total	1	23.16	10.53	146
	2	26.21	10.45	154
	Total	24.72	10.58	300

Levene's Test of Equality of Error Variances[a]

Dependent Variable: 旅遊滿意度

F	df1	df2	Sig.	
.856	5	294	.511	

Tests the null hypothesis that the error variance of the dependent variable is equal across groups.
a. Design: Intercept+HOME+SEX+HOME * SEX

Tests of Between-Subjects Effects

Dependent Variable: 旅遊滿意度

Source	Type III Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.	Eta Squared	Noncent. Parameter	Observed Power[a]
Corrected Model	1671.962[b]	5	334.392	3.090	.010	.050	15.450	.871
Intercept	180251.057	1	180251.057	1665.630	.000	.850	1665.630	1.000
HOME	783.621	2	391.811	3.621	.028	.024	7.241	.666
SEX	576.337	1	576.337	5.326	.022	.018	5.326	.633
HOME * SEX	174.479	2	87.240	.806	.448	.005	1.612	.187
Error	31816.075	294	108.218					
Total	216861.000	300						
Corrected Total	33488.037	299						

a. Computed using alpha = .05
b. R Squared = .050 (Adjusted R Squared = .034)

兩因子變異數分析結果顯示，交互作用未達顯著水準(F = 0.806，p = 0.448)，而觀察主要效果(自變數 HOME 和 SEX)的 F 值分別為 3.621(p = 0.028)、5.326(p = 0.022)，均達顯著水準。

因性別(SEX)只有兩項水準，因此可以直接比較邊緣平均數(Marginal Means)，即可得知其間的差異性。

家庭狀況(HOME)有三個水準，其組別間的差異情況，可由事後多重比較方能獲得其結果。

Estimated Marginal Means

1.家庭狀況

Dependent Variable: 旅遊滿意度

家庭狀況	Mean	Std. Error	95% Confidence Interval	
			Lower Bound	Upper Bound
1	24.099	1.044	22.045	26.153
2	26.857	1.054	24.783	28.931
3	22.980	1.040	20.933	25.027

2. 性別

Dependent Variable: 旅遊滿意度

性別	Mean	Std. Error	95% Confidence Interval	
			Lower Bound	Upper Bound
1	23.252	.866	21.548	24.955
2	26.039	.842	24.381	27.696

3. 家庭狀況 * 性別

Dependent Variable: 旅遊滿意度

家庭狀況	性別	Mean	Std. Error	95% Confidence Interval	
				Lower Bound	Upper Bound
1	1	23.741	1.416	20.955	26.527
	2	24.457	1.534	21.438	27.475
2	1	25.214	1.605	22.055	28.373
	2	28.500	1.366	25.812	31.188
3	1	20.800	1.471	17.905	23.695
	2	25.160	1.471	22.265	28.055

Post Hoc Tests

家庭狀況

Multiple Comparisons

Dependent Variable: 旅遊滿意度

Scheffe

(I)家庭狀況	(J)家庭狀況	Mean Difference (I-J)	Std. Error	Sig.	95% Confidence Interval	
					Lower Bound	Upper Bound
1	2	-3.05	1.47	.118	-6.67	.57
	3	1.09	1.47	.760	-2.53	4.71
2	1	3.05	1.47	.118	-.57	6.67
	3	4.14*	1.47	.020	.52	7.76
3	1	-1.09	1.47	.760	-4.71	2.53
	2	-4.14*	1.47	.020	-7.76	-.52

Based on observed means.
* The mean difference is significant at the .05 level.

Homogeneous Subsets

旅遊滿意度

Scheffe[a,b]

家庭狀況	N	Subset	
		1	2
3	100	22.98	
1	100	24.07	24.07
2	100		27.12
Sig.		.760	.118

Means for groups in homogeneous subsets are displayed. Based on Type III Sum of Squares The error term is Mean Square(Error) = 108.218.
a. Uses Harmonic Mean Sample Size = 100.000.
b. Alpha = .05.

討論議題

1.師生非同步教學討論議題：期中考成績分析

老師將期中考成績和其他相關變數進行相關係數統計，結果如下表所示：

相關係數	期中考成績
進入平台學習次數	0.2588
張貼篇數	0.5228
討論次數	0.3927
閱讀數位教材節點時數	0.1074
閱讀數位教材節點數量	0.1492
上課練習平均分數	0.4676
Open book 平常考平均分數	0.5022
模擬考 20200420	0.4289
Close book 平常考 20200427	0.3712

第一回合請於 D+3 日中午 12 點以前從「議題討論」區【張貼】標題：「相關係數意涵解析」，本文：請詳細陳述上表中各相關係數所代表的意涵，及接下來自己應該有的具體學習作為(20 個字以上)。期望可以透過實際數值分析的解析與討論交流，相互激勵，提升學習效益。

待有 30 篇第一回合【張貼】回應或第一回合【張貼】時間結束後，請詳細檢視其他同學的回應內容。自己靜下心來，集思廣益，思考一下。第二回合【張貼】標題：「最佳學習作為」，本文：哪一位同學詮釋得最具體與明確，有哪些是值得讓自己學習之處？(20 個字以上)。第二回合【張貼】截止時間就是本議題在平台上的關閉時間。

2.師生非同步教學討論議題：變異數分析應用

第一回合請於 D+3 日中午 12 點以前從「議題討論」區【張貼】標題：「應用情境」，本文：請針對第 13 章學習的【變異數分析】與【多重比較程序】課程內容，請具體的陳述自己現在或未來最想運用到情境與理由，並明確標示出自變數(名目尺度或順序尺度)和依變數(區間尺度或比例尺度)的名稱(20 個字以上)。

待有 25 篇第一回合【張貼】回應或第一回合【張貼】時間結束後，請詳細檢視其他同學的回應內容。自己靜下心來，集思廣益，思考一下。第二回合【張貼】標題：「最佳詮釋」，本文：哪一位同學詮釋得最具體與明確，請說明理由或者有哪些是值得讓自己學習之處？(10 個字以上)。第二回合【張貼】截止時間就是本議題在平台上的關閉時間。

3.師生非同步教學討論議題：隨機區集設計應用

第一回合請於 D+3 日中午 12 點以前從「議題討論」區【張貼】標題：「應用情境」，本文：請針對第 13 章學習的【隨機區集設計】課程內容，具體陳述您現在或未來最想運用到情境，並明確標示出自變數(名目尺度或順序尺度)、區集變數(名目尺度或順序尺度)和依變數(區間尺度或比例尺度)的【名稱】，依變數評量方式請具體列出(20 個字以上)。

待有 30 篇第一回合【張貼】回應或第一回合【張貼】時間結束後，請詳細檢視其他同學的回應內容。自己靜下心來，集思廣益，思考一下。第二回合【張貼】標題：「最佳詮釋」，本文：哪一

位同學詮釋得最具體與明確，請說明理由或者有哪些是值得讓自己學習之處？(20 個字以上)。第二回合【張貼】截止時間就是本議題在平台上的關閉時間。

4.師生非同步教學討論議題：因子試驗應用

第一回合請於 D+3 日中午 12 點以前從「議題討論」區【張貼】標題：「應用情境」，本文：請針對第 13 章學習的【因子試驗】課程內容，具體陳述您現在或未來最想運用到情境，並明確標示出兩個(或以上)自變數(名目尺度或順序尺度)和一個依變數(區間尺度或比例尺度)的【名稱】，依變數評量方式請具體列出(40 個字以上)。

待有 30 篇第一回合【張貼】回應或第一回合【張貼】時間結束後，請詳細檢視其他同學的回應內容。自己靜下心來，集思廣益，思考一下。第二回合【張貼】標題：「最佳詮釋」，本文：哪一位同學詮釋得最具體與明確，請說明理由或者有哪些是值得讓自己學習之處？(30 個字以上)。第二回合【張貼】截止時間就是本議題在平台上的關閉時間。

重點整理

母體變異數之樣本間估計值(Between-treatments estimate of population variance)

母體變異數 σ² 的樣本間估計值稱為處理間均方(mean square due to treatment, MSTR)、組間變異數S_c^2、樣本間均方(mean square between, MSB)、組間變異的均方(between-groups mean squares, MSB)或因子變異數(mean square due to factor, MSF)

$$\text{MSTR} = \frac{\sum_{j=1}^{k} n_j \times (\bar{x}_j - \bar{\bar{x}})^2}{k-1} = \frac{\text{SSTR}}{k-1}$$

母體變異數之樣本內估計值(Within-treatments estimate of population variance)

母體變異數 σ² 的樣本內估計值稱為誤差均方(mean square due to error, MSE)、樣本內均方(mean square within samples or mean square within, MSW)、組內變異數S_e^2、組內變異的均方(within-groups mean squares, MSW)、隨機變異數(mean square due to random error, MSE)或組內不偏變異數(mean square)

$$\text{MSE} = \frac{\sum_{j=1}^{k} (n_j - 1) \times s_j^2}{n_t - k} = \frac{\text{SSE}}{n_t - k}$$

$$\text{檢定統計值 } F = \frac{\text{MSTR}}{\text{MSE}}$$

若檢定統計值 $F \le$ 臨界值$F_{\alpha,k-1,n_t-k}$，接受虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \ldots = \mu_k$。

若檢定統計值 $F >$ 臨界值$F_{\alpha,k-1,n_t-k}$，拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \ldots = \mu_k$，接受對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_i \neq \mu_j$ 所有母體平均值不全部相等。

變異數分析表(ANOVA table)

變異來源(Source of variation)	平方和(Sum of squares)	自由度(Degrees of freedom)	均方(Mean square)	F 值
樣本間變異、組間或處理(Treatments)	SSTR	$k-1$	$\text{MSTR} = \frac{\text{SSTR}}{k-1}$	$F = \frac{\text{MSTR}}{\text{MSE}}$
樣本內變異、組內或誤差(Error)	SSE	$n_t - k$	$\text{MSE} = \frac{\text{SSE}}{n_t-k}$	
合計(Total)	SST	$n_t - 1$		

$$\text{SST} = \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j}(x_{ij} - \bar{\bar{x}})^2 = \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j} x_{ij} - n_t \times \bar{\bar{x}}^2 = \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j}(\bar{x}_j - \bar{\bar{x}})^2 + \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j}(x_{ij} - \bar{x}_j)^2$$

SST = SSTR + SSE

費雪最低顯著差異法

$$\text{檢定統計值 } t = \frac{\bar{x}_i - \bar{x}_j}{\sqrt{\text{MSE} \times \left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j}\right)}}$$

利用檢定統計值$\bar{x}_i - \bar{x}_j$的費雪最低顯著差異法(Fisher's least significance difference procedure)

A.虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_i = \mu_j$

B.對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_i \neq \mu_j$

C.檢定統計值(test statistic) $|\bar{x}_i - \bar{x}_j|$

D.若$|\bar{x}_i - \bar{x}_j| \le \text{LSD} = t_{\frac{\alpha}{2}, n_t-k} \times \sqrt{\text{MSE} \times \left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j}\right)}$，判別接受虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_i = \mu_j$。

E.若$|\bar{x}_i - \bar{x}_j| > \text{LSD} = t_{\frac{\alpha}{2}, n_t-k} \times \sqrt{\text{MSE} \times \left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j}\right)}$，判別拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_i = \mu_j$，接受對立假設(alternative hypothesis)H_1: $\mu_i \neq \mu_j$。

薛費法

在變異數分析中，有 k 個母體平均值，若欲進行分別 1 對 1 比較 2 個母體平均值之差 $\mu_i - \mu_j$ $(i \neq j)$，在信賴水準 $1-\alpha$ 或顯著水準 α 的信賴區間估算：

$$|\bar{x}_i - \bar{x}_j| \pm \sqrt{(k-1) \times F_{\alpha, k-1, n_t-k}} \times \sqrt{\text{MSE} \times \left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j}\right)}$$

鄧肯法

在變異數分析中，有 k 個母體平均值，若欲進行分別 1 對 1 比較 2 個母體平均值之差 $\mu_i - \mu_j$ $(i \neq j)$

$$|\bar{x}_i - \bar{x}_j| \pm \text{Q}_{\alpha, k, v=n_t-k} \times \sqrt{\frac{\text{MSE}}{n}}$$

龐費洛尼法

在變異數分析中，有 k 個母體平均值，有C_2^k = m 種母體平均值之差的配對方式，若欲進行分別 1 對 1 比較 2 個母體平均值之差 $\mu_i - \mu_j$ $(i \neq j)$，在信賴水準 $1-\alpha$ 或顯著水準 α 的信賴區間估算：

$$|\bar{x}_i - \bar{x}_j| \pm t_{\frac{\alpha}{2m}, v=n_t-k} \times \sqrt{\text{MSE} \times \left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j}\right)}$$

杜凱法

在變異數分析中，有 k 個母體平均值，若欲進行分別 1 對 1 比較 2 個母體平均值之差 $\mu_i - \mu_j$ $(i \neq j)$，在信賴水準 $1-\alpha$ 或顯著水準 α，$\mu_i - \mu_j$ $(i \neq j)$的信賴區間：

$$|\bar{x}_i - \bar{x}_j| \pm \text{Q}_{\alpha, k, v=n_t-k} \times \sqrt{\frac{\text{MSE}}{n}}$$

表 多重比較程序信賴區間之比較

事後比較法	信賴區間
單一信賴區間	$|\bar{x}_i - \bar{x}_j| \pm t_{\frac{\alpha}{2}, v} \times \sqrt{\text{MSE}} \times \sqrt{\left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j}\right)}$
費雪最低顯著差異法	$|\bar{x}_i - \bar{x}_j| \pm t_{\frac{\alpha}{2}, v=n_t-k} \times \sqrt{\text{MSE} \times \left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j}\right)}$
薛費檢定法	$|\bar{x}_i - \bar{x}_j| \pm \sqrt{(k-1) \times F_{k-1, n_t-k, \alpha}} \times \sqrt{\text{MSE} \times \left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j}\right)}$
鄧肯法	$|\bar{x}_i - \bar{x}_j| \pm \text{Q}_{\alpha, k, v=n_t-k} \times \sqrt{\frac{\text{MSE}}{n}}$
龐費洛尼法	$|\bar{x}_i - \bar{x}_j| \pm t_{\frac{\alpha}{2m}, v=n_t-k} \times \sqrt{\text{MSE} \times \left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j}\right)}$
杜凱法	$|\bar{x}_i - \bar{x}_j| \pm \text{Q}_{\alpha, k, v=n_t-k} \times \sqrt{\frac{\text{MSE}}{n}}$

完全隨機設計變異數分析表(ANOVA table)

變異來源(Source of variation)	平方和(Sum of squares)	自由度(Degrees of freedom)	均方(Mean square)	F 值
樣本間變異、組間或處理(Treatments)	SSTR	$k-1$	$\text{MSTR}=\frac{\text{SSTR}}{k-1}$	$\frac{\text{MSTR}}{\text{MSE}}$
樣本內變異、組內或誤差(Error)	SSE	n_t-k	$\text{MSE}=\frac{\text{SSE}}{n_t-k}$	
合計(Total)	SST	n_t-1		

$$\text{SST}=\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j}\left(x_{ij}-\bar{\bar{x}}\right)^2=\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j}x_{ij}-n_t\times\bar{\bar{x}}^2=\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j}\left(\bar{x}_j-\bar{\bar{x}}\right)^2+\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j}\left(x_{ij}-\bar{x}_j\right)^2$$

SST = SSTR + SSE

隨機區集設計變異數分析表(ANOVA table)(k 個處理和 b 個區集)

變異來源(Source of variation)	平方和(Sum of squares)	自由度(Degrees of freedom)	均方(Mean square)	F 值
樣本間變異、組間或處理(Treatments)	SSTR	$k-1$	$\text{MSTR}=\frac{\text{SSTR}}{k-1}$	$F=\frac{\text{MSTR}}{\text{MSE}}$
區集(Blocks)	SSBL	$b-1$	$\text{MSBL}=\frac{\text{SSBL}}{b-1}$	$F=\frac{\text{MSBL}}{\text{MSE}}$
樣本內變異、組內或誤差(Error)	SSE	$(k-1)\times(b-1)$	$\text{MSE}=\frac{\text{SSE}}{(k-1)\times(b-1)}$	
合計(Total)	SST	n_t-1		

二因子設計變異數分析表(ANOVA table)(無重複試驗)

變異來源(Source of variation)	平方和(Sum of squares)	自由度(Degrees of freedom)	均方(Mean square)	F 值
因子 A	SSA	$a-1$	$\text{MSA}=\frac{\text{SSA}}{a-1}$	$F=\frac{\text{MSA}}{\text{MSE}}$
因子 B	SSB	$b-1$	$\text{MSB}=\frac{\text{SSB}}{b-1}$	$F=\frac{\text{MSB}}{\text{MSE}}$
樣本內變異、組內或誤差(Error)	SSE	$(a-1)\times(b-1)$	$\text{MSE}=\frac{\text{SSE}}{(a-1)\times(b-1)}$	
合計(Total)	SST	n_t-1		

二因子設計變異數分析表(ANOVA table)(r 次重複實驗)

變異來源(Source of variation)	平方和(Sum of squares)	自由度(Degrees of freedom)	均方(Mean square)	F 值
因子 A	SSA	$a-1$	$\text{MSA}=\frac{\text{SSA}}{a-1}$	$F=\frac{\text{MSA}}{\text{MSE}}$
因子 B	SSB	$b-1$	$\text{MSB}=\frac{\text{SSB}}{b-1}$	$F=\frac{\text{MSB}}{\text{MSE}}$
交互作用(Interaction)	SSAB	$(a-1)\times(b-1)$	$\text{MSAB}=\frac{\text{SSAB}}{(a-1)\times(b-1)}$	$F=\frac{\text{MSAB}}{\text{MSE}}$
樣本內變異、組內或誤差(Error)	SSE	$a\times b\times(r-1)$	$\text{MSE}=\frac{\text{SSE}}{a\times b\times(r-1)}$	
合計(Total)	SST	n_t-1		

關鍵詞彙解釋

變異數分析(Analysis of variance)

變異數分析或變方分析(Analysis of variance)簡稱 ANOVA。主要為分析類別型資料型態之自變數(Independent variable)與連續型(Continuous)資料型態之依變數(Dependent variable)的關係，當自變數的因子中包含等於或超過三個類別情況時，檢定其各類別間平均值是否相等的統計方法。利用變異數分析檢定三個(含)以上的母體平均值是否相等。利用變異數分析解析實驗型調查的數值資料，了解不同母體平均值是否有顯著性的差異存在。

試驗設計(Design of experiments)

又稱為實驗設計，屬於科學探究經常使用的一種規劃設計，期望利用統計學上的原理(隨機性、重複性和區集性)，使實驗變數能夠真實反應(充分發揮)其對研究結果的影響，盡可能排除實驗變數以外的影響和干擾，以單純化觀察和測量實驗變數對實驗結果的影響程度，以提高實驗效果的精準度。廣泛用於自然科學及社會科學各學科的實驗設計中。

費雪最低顯著差異法(Fisher's Least Significant Difference Procedure, LSD)

又稱為「費雪爾最小顯著差異法」是多重比較方法之一。此法是 t 檢定法的延伸，適用於兩個特定平均值的比較；如果每個實驗處理組的平均數只與控制組的平均數作比較，檢定的第一類型錯誤比預期的大。在欲比較 k 個母體平均值的差異狀況時，先運算 $\mathrm{LSD} = t_{\frac{\alpha}{2},n_t-k} \times \sqrt{\mathrm{MSE} \times \left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j}\right)}$，其中 MSE 是誤差均方，$t_{\frac{\alpha}{2},n_t-k}$是根據顯著性水準 α 和誤差均方的自由度 $df = n_t - k$，由 t 值表查得的 t 值，n_t 為實驗處理組內的所有觀察值個數。i 和 j 配對平均值的差異值$|\bar{x}_i - \bar{x}_j|$與 LSD 比較，當$|\bar{x}_i - \bar{x}_j| > \mathrm{LSD}$ 時，其兩者平均值差異量達到顯著性水準；$|\bar{x}_i - \bar{x}_j| < \mathrm{LSD}$ 兩者平均值差異量未達顯著性水準。

完全隨機設計或**完全隨機化設計**(Completely randomized designs, CRD)

係指沒有區集設計的單因子實驗設計，又稱為單因子分類(one-way classification)實驗設計。將不同的處理方式(treatment)以隨機的方式分派給實驗單位。

在實驗研究法中，完全隨機設計使用於研究一個主要變數的影響，在實驗設計中無須考慮其他影響變數。設計比較主要研究變數之不同水準(levels)，對於實驗結果、依變數(dependent variable)、反應(response)或反應變數(response variable)的影響。屬於沒有使用區集設計的單因子實驗設計，一般通稱為單因子分類(one-way classification)的實驗設計。在完全隨機設計中，主要研究變數之不同水準(levels)是隨機分派(randomly assigned)試驗於實驗單位。

隨機區集設計或**隨機化區集設計**(Randomized block design, RBD)

在中使用一個會影響實驗結果或依變數的主要外在變數(external variables)，如實驗單位(受測者)的年齡層、性別、收入等，將實驗單位區分成數個區集(blocks)。使用於將實驗單位區分為數個區集的變數特稱為區集變數(blocking variable)。在隨機區集設計中可以鑑別和評量區集變數對實驗結果或依變數的影響程度。

因子實驗(factorial experimant)

在完全隨機設計、隨機區集設計和拉丁方設計中，僅能評量一個實驗變數對實驗結果的影響。若要同時評量兩個或兩個以上實驗變數對實驗結果的影響，即需要使用因子設計。二因子設計(two factorial design)即是兩個實驗變數的實驗設計，又稱為二因子分類(two-way classification)的實驗設計。

在二因子設計(two factorial design)中，有 A 和 B 兩個實驗變數，若其分別有 a 和 b 個水準，此設計可以稱為 a×b 二因子設計。在實驗設計中需要有 a×b 種實驗水準的配對組合，每一個實驗水準的組合可以選擇重複或不重複執行於實驗單位。