十六、無母數統計法

Chapter 16　Nonparametric Statistics

目錄

學習目標

知識(認知)

1.可以清楚陳述無母數統計的意涵。

2.可以清楚在無母數統計的情況下，陳述兩個配對研究變數分布相等性檢定的意涵。

3.可以說明在無母數統計的各種狀況下，適合度檢定的程序和標準。

4.可以說明在無母數統計的各種狀況下，三個母體以上分布相同性假設檢定的程序和標準。

5.評價各種無母數統計的情境下，適合度假設檢定和相同性假設檢定的使用價值。

技能

1.能夠計算各種情境下的檢定統計值。

2.能夠利用檢定統計值與臨界值的比較，提出統計推論。

3.綜合所學，能夠於實務領域中，依據特定情境的需求進行假設檢定程序。

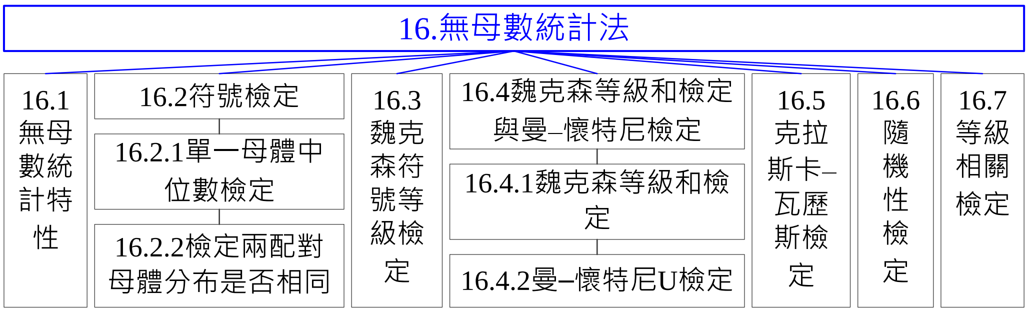
態度(情意)

1.意識到在日常生活或未來工作環境中，無母數統計法的重要性與應用價值。

2.在各種情境下，依循假設檢定的程序，接受統計推論所傳達的意涵。

前面各章節的統計假設與推論過程中，皆須假設研究變數分布屬於常態分布，方能利用 Z、t、F 和 χ^2 進行顯著性檢定。

在資料數量不多的情況下，欲對名目尺度(Nominal scale)和順序尺度(Ordinal scale)的資料進行假設檢定時，可以稱為無母數檢定(non-parametric tests)或自由分布檢定(distribution-free tests)。



章節結構圖

16.1 無母數統計特性

A.母體數值分布的型態不限定

無母數統計特別適合於質化資料的分析，類別資料(名目尺度)和順序資料(順序尺度)通常不屬於常態分布，而是屬於多項分布型態，故資料無法獲得平均值與變異數等母體參數(母數)，故不適合於有母數統計分析，而適合於無母數統計分析。

B.統計推論的對象不限於特定母體參數(母數)

無母數統計可檢定資料的分布是否合乎特定假設分布或兩母體的分布是否相同。

C.無母數統計方法的假設條件較少

無母數統計不需要對母體分布或母體參數進行假設。無母數統計亦不需設定樣本數量大小。

無母數統計方法的優點

母體分布未知時，可以進行統計推論比較。

樣本數量 n 不多時，計算過程相當簡單。

在母體屬於常態分配時，較有母數分析不易得到顯著結果；在母體不是常態分布時，無母數分析之檢定力較有母數分析高。

~~具有穩健特性。~~

無母數統計方法的缺點

母體分布已知時，與母數統計法相比，其統計分析效益較差。

缺乏相關機率表格可以使用。

針對常態分布資料若進行無母數分析時，將使檢定力降低。

16.2 符號檢定

符號檢定(sign test)是無母數統計中最常使用與最基礎的一種方法。可以使用於檢定

(A)單一母體中央趨勢(中位數)的假設。

在母數統計的區間估計與假設檢定中，若樣本數量太少時，母體分布又未知，無法進行信賴區間估計與假設檢定，在無母數統計中，可以使用符號檢定中位數。

(B)成對母體分布是否相同的假設檢定。

在無母數統計中，特別適合於母體分布未知，且樣本數量少的情況。

16.2.1 單一母體中位數檢定

母體分布可能為常態分布或偏態分布。若母體分布屬於偏態分布時，在評量其中央趨勢時，以選用中位數(median)為評量指標較為適當。當母體分布事先未知時，一般以檢定其中位數等於特定數值為其假設，而非以檢定其平均值等於特定數值為其假設，較為保守。故，在母體分布未知的情況下，運用符號檢定以了解母體的中央趨勢。當母體分布未知或已知其為偏態分布時，欲檢定母體特定變數中位數 M_d 或 m_e 是否等於特定數值 m_0(推測值)。從單一母體隨機抽出 n 個基本單位為樣本，評量其特定變數的觀測值分別為 $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$。分別將觀測值 x_i 與特定中位數數值 m_0(推測值)比較，兩者差異為

$$\mathrm{D}_i = x_i - m_0$$

若 $\mathrm{D}_i = x_i - m_0 > 0$，獲得一個正號(+)；$\mathrm{D}_i = x_i - m_0 < 0$，獲得一個負號(-)；$\mathrm{D}_i = x_i - m_0 = 0$，忽略不計。分別計算在 n 個觀測值可以獲得的正號(+)和負號(-)數量。

當母體中位數 M_d 等於 m_0 時，獲得正號(+)和負號(-)數量應相等或非常接近。

若發現獲得正號(+)和負號(-)數量明顯差異很大時，可推估該母體中位數 M_d 不等於特定中位數數值 m_0(推測值)。

若母體特定變數中位數 M_d 剛好等於特定中位數數值 m_0(推測值)時，獲得正號(+)和負號(-)的機率皆為 0.5。在檢定母體特定變數中位數 M_d 是否等於特定中位數數值 m_0(推測值)，亦可視為在檢定獲得正號(+)的機率是否為 0.5 和獲得負號(-)的機率是否為 0.5。在 n 個觀測值中獲得正號(+)的次數屬於二項分布，故運用符號檢定即是檢測獲得正號(+)的機率 p 是否等於 0.50。

單一母體中位數檢定程序

A.設定顯著水準 α

B.設立虛無假設和對立假設

C.計算獲得正號(+)的次數或負號(-)的次數

D.決定拒絕區域與接受區域

E.計算檢定統計值 S_0：獲得正號(+)的次數

F.統計推論

單一母體中位數檢定可以分為樣本數量小($n \le 20$)與樣本數量大($n > 20$)兩種情況運算。

樣本數量小($n \le 20$)符號檢定

符號檢定統計值 S_0：獲得正號(+)的次數，屬於二項分布，$\mathrm{S}_0 \sim \mathrm{B}(n_r, p = 0.5)$。$n_r$ 是扣除 $\mathrm{D}_i = x_i - m_0 = 0$ $(x_i = m_0)$的樣本數量。

臨界值法統計判斷法則

雙尾檢定

若左側臨界值 S_L $\le$ 檢定統計值 S_0 $\le$ 右側臨界值 S_H，接受虛無假設(null hypothesis) H_0。

若檢定統計值 S_0 $<$ 左側臨界值 S_L 或檢定統計值 S_0 $>$ 右側臨界值 S_H，拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0，接受對立假設(alternative hypothesis) H_1。

其中：S_L是在左側(較低)臨界值；S_H是在右側(較高)臨界值

左尾檢定

若檢定統計值 $S_0 \geq$ 臨界值 S_L，接受虛無假設(null hypothesis) H_0。

若檢定統計值 $S_0 <$ 臨界值 S_L，拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0，接受對立假設(alternative hypothesis) H_1。

其中：S_L是在左側(較低)臨界值

右尾檢定

若檢定統計值 $S_0 \leq$ 臨界值 S_H，接受虛無假設(null hypothesis) H_0。

若檢定統計值 $S_0 >$ 臨界值 S_H，拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0，接受對立假設(alternative hypothesis) H_1。

其中：S_H是在右側(較高)臨界值

範例 19.1 觀光系小蘭同學欲知道學生每週餐飲費用(假設為非常態分布)的中位數是否為新台幣 1000 元，以知曉其自己的花費是高於中位數還是低於中位數。小蘭隨機抽出 10 位學生，其每週餐飲費用如下表所示，以顯著水準 $\alpha = 0.05$ 進行符號統計檢定。

學生	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
費用(元)	1200	950	1230	650	780	1350	1425	1620	1000	1304

題解：假設學生每週餐飲費用為非常態分布，故採用符號檢定方式。學生餐飲費用有可能高於新台幣 1000 元，亦有可能低於新台幣 1000 元，故此例屬於雙尾檢定(a two-tailed test)

A.設定顯著水準 $\alpha = 0.05$。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0:每週餐飲費用中位數 $= 1000$ 元 或 H_0:每週餐飲費用高於 1000 元的機率 $p = 0.50$。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1:每週餐飲費用中位數 $\neq 1000$ 元 或 H_1:每週餐飲費用高於 1000 元的機率 $p \neq 0.50$。

D.計算檢定統計值 S_0

學生	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
費用(元)	1200	950	1230	650	780	1350	1425	1620	1000	1304
符號	+	-	+	-	-	+	+	+	0	+

獲得正號(+)的次數為 6，故 $S_0 = 6$，$n_r = 10$(樣本數) – 1(觀測值 $x_i =$ 檢定中位數 m_0 的樣本數) = 9。檢定統計值 S_0 屬於二項分布 S_0~B(9,0.50)。

E.決定接受區域與拒絕區域

在雙尾檢定中顯著水準 $\alpha = 0.05$，故左右兩側的拒絕虛無假設的機率為$\frac{\alpha}{2} = 0.025$

二項分布 S~B(9,0.50)累積機率分布 $P(x \leq t) = \sum_{x=0}^{t} \binom{n}{x} \times p^x \times q^{n-x}$

n	t	累積機率	雙尾機率
9	0	0.0020	$\frac{\alpha}{2} = 0.025\downarrow$
9	1	0.0195	
9	2	0.0898	
9	3	0.2539	
9	4	0.5000	
9	5	0.7461	

n	t	累積機率	雙尾機率
9	6	0.9102	
9	7	0.9805	
9	8	0.9980	$\frac{\alpha}{2}=0.025\uparrow$
9	9	1.0000	

$P(S\le 1)=0.0195<\frac{\alpha}{2}=0.025$ 且 $P(S\le 2)=0.0898>\frac{\alpha}{2}=0.025$，故左側(較低)臨界值 $S_L=2$。

同理，$P(S\le 8)=0.9980$，$P(S=9)=1-P(S\le 8)=1-0.9980=0.0020<\frac{\alpha}{2}=0.025$ 且 $P(S\le 7)=0.9805$，$P(S=8)+P(S=9)=1-P(S\le 7)=1-0.9805=0.0195<\frac{\alpha}{2}=0.025$ 並 $P(S\le 6)=0.9102$，$P(S=7)+P(S=8)+P(S=9)=1-P(S\le 6)=1-0.9102=0.0898>\frac{\alpha}{2}=0.025$，右側(較高)臨界值 $S_H=6$。【較高(右側)臨界值需要達到$\frac{\alpha}{2}=0.025$ 的右尾機率，所以，從左尾-∞累積到的機率是 $1-(\frac{\alpha}{2}=0.025)=0.975$，若較高(右側)臨界值選擇 $t=7$ 累積機率達到 0.9805，右尾機率未達$\frac{\alpha}{2}=0.025$，僅有 $1-0.9805=0.0195$，故選擇較高(右側)臨界值選擇 $t=6$ 累積機率達到 0.9102，右尾機率達$\frac{\alpha}{2}=0.025$ 以上，有 $1-0.9102=0.0898$。因此，較高(右側)臨界值選擇 $t=6$。】

F.左側(較低)臨界值 $S_L=2\le$ 檢定統計值 $S_0=6\le$ 較高(右側)臨界值 $S_H=6$，接受虛無假設(null hypothesis) H_0: 每週餐飲費用中位數 = 1000 元 或 H_0:每週餐飲費用高於 1000 元的機率 $p=0.50$。因此，依據小蘭同學的統計推論發現每週餐飲費用的中位數為新台幣 1000 元。

練習 19.1 觀光系小蘭同學欲知道學生每週交通支出(假設為非常態分布)的中位數是否為新台幣 500 元，以知曉其自己的支出是高於中位數還是低於中位數。小蘭隨機抽出 12 位學生，其上週交通支出如下表所示，以顯著水準 $\alpha=0.05$ 進行符號統計檢定。

學生	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
費用(元)	510	450	230	650	780	350	425	620	710	345	645	533

題解：假設學生每週交通支出為非常態分布，故採用符號檢定方式。學生交通支出有可能高於新台幣 500 元，亦有可能低於新台幣 500 元，故此例屬於雙尾檢定(a two-tailed test)

A.設定顯著水準 $\alpha=0.05$。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0:每週交通支出中位數 = 500 元 或 H_0:每週交通支出高於 500 元的機率 $p=0.50$。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1:每週交通支出中位數 ≠ 500 元 或 H_1:每週交通支出高於 500 元的機率 $p\neq 0.50$。

D.計算檢定統計值 S_0

學生	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
費用(元)	510	450	230	650	780	350	425	620	710	345	645	533
符號	+	-	-	+	+	-	-	+	+	-	+	+

獲得正號(+)的次數為 7，故 $S_0=7$，$n_r=12$(樣本數) – 0(觀測值 $x_i=$ 檢定中位數 m_0 的樣本數) = 12。檢定統計值 S_0 屬於二項分布 S_0~B(12,0.50)。

E.決定接受區域與拒絕區域

在雙尾檢定中顯著水準 $\alpha=0.05$，故左右兩側的拒絕虛無假設的機率為$\frac{\alpha}{2}=0.025$

二項分布 S~B(12,0.50)累積機率分布 $P(x\le t)=\sum_{x=0}^{t}\binom{n}{x}\times p^x\times q^{n-x}$

n	t	累積機率
12	0	0.0002
12	1	0.0032

n	t	累積機率
12	2	0.0193
12	3	0.0730
12	4	0.1938
12	5	0.3872
12	6	0.6128
12	7	0.8062
12	8	0.9270
12	9	0.9807
12	10	0.9968
12	11	0.9998
12	12	1.0000

$P(S \leq 2) = 0.0193 < \frac{\alpha}{2} = 0.025$ 且 $P(S \leq 3) = 0.0730 > \frac{\alpha}{2} = 0.025$，故左側(較低)臨界值 $S_L = 3$。

同理，$P(S \leq 9) = 0.9807$，$P(S \geq 10) = 1 - P(S \leq 9) = 1 - 0.9807 = 0.0193 < \frac{\alpha}{2} = 0.025$ 且 $P(S \leq 8) = 0.9270$，$P(S \geq 9) = 1 - P(S \leq 8) = 1 - 0.9270 = 0.0730 > \frac{\alpha}{2} = 0.025$，右側(較高)臨界值 $S_H = 8$。

F.左側(較低)臨界值 $S_L = 3 \leq$ 檢定統計值 $S_0 = 7 \leq$ 右側(較高)臨界值 $S_H = 8$，接受虛無假設(null hypothesis) H_0:每週交通支出中位數 $= 500$ 元 或 H_0:每週交通支出高於 500 元的機率 $p = 0.50$。因此，依據小蘭同學的統計推論發現每週交通支出的中位數為新台幣 500 元。

練習 19.2 觀光系小花同學欲知道學生每週咖啡飲料支出(假設為非常態分布)的中位數是否為新台幣 300 元，以知曉其自己的支出是高於中位數還是低於中位數。隨機抽出 14 位學生，其上週咖啡飲料支出如下表所示，以顯著水準 $\alpha = 0.05$ 進行符號統計檢定。

學生	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
費用(元)	110	150	230	150	180	350	425	60	110	345	245	133	70	150

題解：假設學生每週咖啡飲料支出為非常態分布，故採用符號檢定方式。學生每週咖啡飲料支出有可能高於新台幣 300 元，亦有可能低於新台幣 300 元，故此例屬於雙尾檢定(a two-tailed test)。

A.設定顯著水準 $\alpha = 0.05$。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0:每週咖啡飲料支出中位數 $= 300$ 元 或 H_0:每週咖啡飲料支出高於 300 元的機率 $p = 0.50$。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1:每週咖啡飲料支出中位數 $\neq 300$ 元 或 H_1:每週咖啡飲料支出高於 300 元的機率 $p \neq 0.50$。

D.計算檢定統計值 S_0

學生	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
費用(元)	110	150	230	150	180	350	425	60	110	345	245	133	70	150
符號	-	-	-	-	-	+	+	-	-	+	-	-	-	-

獲得正號(+)的次數為 3，故 $S_0 = 3$，$n_r = 14$(樣本數) – 0(觀測值 $x_i =$ 檢定中位數 m_0 的樣本數) = 14。檢定統計值 S_0 屬於二項分布 $S_0 \sim B(14,0.50)$。

E.決定接受區域與拒絕區域

在雙尾檢定中顯著水準 $\alpha = 0.05$，故左右兩側的拒絕虛無假設的機率為$\frac{\alpha}{2} = 0.025$

二項分布 S~B(14,0.50)累積機率分布 $P(x \leq t) = \sum_{x=0}^{t} \binom{n}{x} \times p^x \times q^{n-x}$

n	t	累積機率
14	0	0.0001
14	1	0.0009

n	t	累積機率
14	2	0.0065
14	3	0.0287
14	4	0.0898
14	5	0.2120
14	6	0.3953
14	7	0.6047
14	8	0.7880
14	9	0.9102
14	10	0.9713
14	11	0.9935
14	12	0.9991
14	13	0.9999
14	14	1.0000

$P(S \le 2) = 0.0065 < \frac{\alpha}{2} = 0.025$ 且 $P(S \le 3) = 0.0287 > \frac{\alpha}{2} = 0.025$，故左側(較低)臨界值 $S_L = 3$。

同理，$P(S \le 11) = 0.9935$，$P(S \ge 12) = 1 - P(S \le 11) = 1 - 0.9935 = 0.0065 < \frac{\alpha}{2} = 0.025$ 且 $P(S \le 10) = 0.9713$，$P(S \ge 11) = 1 - P(S \le 10) = 1 - 0.9713 = 0.0287 > \frac{\alpha}{2} = 0.025$，右側(較高)臨界值 $S_H = 10$。

F.左側(較低)臨界值 $S_L = 3 \le$ 檢定統計值 $S_0 = 3 \le$ 右側(較高)臨界值 $S_H = 10$，接受虛無假設(null hypothesis) H_0:每週咖啡飲料支出中位數 = 300 元 或 H_0:每週咖啡飲料支出高於 300 元的機率 $p = 0.50$。因此，依據小花同學的統計推論發現每週咖啡飲料支出的中位數為新台幣 300 元。

機率 p 值法統計判斷法則

運用臨界值法在顯著水準 $\alpha = 0.05$，進行臨界值上下限的運算時比較繁雜一點。運用機率 p 值法比較簡便一些。

雙尾檢定

若檢定統計值 $S_0 \ge \frac{n_r}{2}$ [n_r是扣除 $D_i = 0(x_i = m_0)$的樣本數量]時，機率 $p = 2 \times P(S \ge S_0|n_r,p = 0.50)$

若檢定統計值 $S_0 < \frac{n_r}{2}$ [n_r是扣除 $D_i = 0(x_i = m_0)$的樣本數量]時，機率 $p = 2 \times P(S \le S_0|n_r,p = 0.50)$

左尾檢定

機率 $p = P(S \le S_0|n_r,p = 0.50)$

右尾檢定

機率 $p = P(S \ge S_0|n_r,p = 0.50)$

範例 19.2 觀光系小蘭同學欲知道學生上週餐飲費用(假設為非常態分布)的中位數是否為新台幣 1000 元，以知曉其自己的花費是高於中位數還是低於中位數。小蘭隨機抽出 10 位學生，其上週餐飲費用如下表所示，以顯著水準 $\alpha = 0.05$ 進行統計檢定。

學生	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
費用(元)	1200	950	1230	650	780	1350	1425	1620	1000	1304

題解：假設學生上週餐飲費用為非常態分布，故採用符號檢定方式。學生餐飲費用有可能高於新台幣 1000 元，亦有可能低於新台幣 1000 元，故此例屬於雙尾檢定(a two-tailed test)。

A.設定顯著水準 $\alpha = 0.05$。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: 上週餐飲費用中位數 = 1000 元 或 H_0:上週餐飲費用高於 1000 元的機率 $p = 0.50$。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: 上週餐飲費用中位數 $\ne$ 1000 元 或 H_1:上週餐飲費用高於 1000 元的機率 $p \ne 0.50$。

D.計算檢定統計值 S_0

學生	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
費用(元)	1200	950	1230	650	780	1350	1425	1620	1000	1304
符號	+	-	+	-	-	+	+	+	0	+

獲得正號(+)的次數為 6，故 $S_0 = 6$，$n_r = 10$(樣本數) – 1(觀測值 x_i = 檢定中位數 m_0 的樣本數) = 9。檢定統計值 S_0 屬於二項分布 $S_0 \sim B(9,0.50)$。

E.計算機率 p 值

$$S_0 = 6 > \frac{n_r}{2} = \frac{9}{2} = 4.5$$

機率 $p = 2 \times P(S \geq S_0|n_r,p = 0.50) = 2 \times P(S \geq 6|9,p = 0.50) = 2 \times [1 - P(S \leq 5)] = 2 \times [1 - 0.7461$(使用 Excel 軟體 BINOM.DIST 函數查詢獲得)] $= 2 \times 0.2539 = 0.5078$

F.因機率 $p = 0.5078$ > 顯著水準 $\alpha = 0.05$，故接受虛無假設(null hypothesis) H_0: 上週餐飲費用中位數 = 1000 元 或 H_0:上週餐飲費用高於 1000 元的機率 $p = 0.50$。因此，依據小蘭同學的統計推論發現上週餐飲費用的中位數為新台幣 1000 元。

練習 19.3 觀光系小蘭同學欲知道學生每週交通支出(假設為非常態分布)的中位數是否為新台幣 500 元，以知曉其自己的支出是高於中位數還是低於中位數。小蘭隨機抽出 12 位學生，其上週交通支出如下表所示，以顯著水準 $\alpha = 0.05$ 進行符號統計檢定。

學生	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
費用(元)	510	450	230	650	780	350	425	620	710	345	645	533

題解：假設學生每週交通支出為非常態分布，故採用符號檢定方式。學生交通支出有可能高於新台幣 500 元，亦有可能低於新台幣 500 元，故此例屬於雙尾檢定(a two-tailed test)

A.設定顯著水準 $\alpha = 0.05$。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0:每週交通支出中位數 = 500 元 或 H_0:每週交通支出高於 500 元的機率 $p = 0.50$。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1:每週交通支出中位數 ≠ 500 元 或 H_1:每週交通支出高於 500 元的機率 $p \neq 0.50$。

D.計算檢定統計值 S_0

學生	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
費用(元)	510	450	230	650	780	350	425	620	710	345	645	533
符號	+	-	-	+	+	-	-	+	+	-	+	+

獲得正號(+)的次數為 7，故 $S_0 = 7$，$n_r = 12$(樣本數) – 0(觀測值 x_i = 檢定中位數 m_0 的樣本數) = 12。檢定統計值 S_0 屬於二項分布 $S_0 \sim B(12,0.50)$。

E.計算機率 p 值

$$S_0 = 7 > \frac{n_r}{2} = \frac{12}{2} = 6.0$$

機率 $p = 2 \times P(S \geq S_0|n_r,p = 0.50) = 2 \times P(S \geq 7|12,p = 0.50) = 2 \times [1 - P(S \leq 6)] = 2 \times [1 - 0.6128$(使用 Excel 軟體 BINOM.DIST 函數查詢獲得)] $= 2 \times 0.3872 = 0.7744$

F.因機率 $p = 0.7744$ > 顯著水準 $\alpha = 0.05$，故接受虛無假設(null hypothesis) H_0:每週交通支出中位數 = 500 元 或 H_0:每週交通支出高於 500 元的機率 $p = 0.50$。因此，依據小蘭同學的統計推論發現每週交通支出的中位數為新台幣 500 元。

練習 19.4 觀光系小花同學欲知道學生每週咖啡飲料支出(假設為非常態分布)的中位數是否為新台幣 300 元，以知曉其自己的支出是高於中位數還是低於中位數。隨機抽出 14 位學生，其上週咖啡飲料支出如下表所示，以顯著水準 $\alpha = 0.05$ 進行符號統計檢定。

學生	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
費用(元)	110	150	230	150	180	350	425	60	110	345	245	133	70	150

題解：假設學生每週咖啡飲料支出為非常態分佈，故採用符號檢定方式。學生每週咖啡飲料支出有可能高於新台幣 300 元，亦有可能低於新台幣 300 元，故此例屬於雙尾檢定(a two-tailed test)

A.設定顯著水準 $\alpha = 0.05$。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0:每週咖啡飲料支出中位數 $= 300$ 元 或 H_0:每週咖啡飲料支出高於 300 元的機率 $p = 0.50$。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1:每週咖啡飲料支出中位數 $\neq 300$ 元 或 H_1:每週咖啡飲料支出高於 300 元的機率 $p \neq 0.50$。

D.計算檢定統計值 S_0

學生	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
費用(元)	110	150	230	150	180	350	425	60	110	345	245	133	70	150
符號	-	-	-	-	-	+	+	-	-	+	-	-	-	-

獲得正號(+)的次數為 3，故 $S_0 = 3$，$n_r = 14$(樣本數) – 0(觀測值 $x_i =$ 檢定中位數 m_0 的樣本數) = 14。檢定統計值 S_0 屬於二項分布 $S_0 \sim B(14,0.50)$。

E.計算機率 p 值

$$S_0 = 3 < \frac{n_r}{2} = \frac{14}{2} = 7.0$$

機率 $p = 2 \times P(S \leq S_0|n_r,p = 0.50) = 2 \times P(S \leq 3|14,p = 0.50) = 2 \times 0.0287$(使用 Excel 軟體 BINOM.DIST 函數查詢獲得) $= 0.0574$

F.因機率 $p = 0.0574 >$ 顯著水準 $\alpha = 0.05$，故接受虛無假設(null hypothesis) H_0:每週咖啡飲料支出中位數 $= 300$ 元 或 H_0:每週咖啡飲料支出高於 300 元的機率 $p = 0.50$。因此，依據小花同學的統計推論發現每週咖啡飲料支出的中位數為新台幣 300 元。

樣本數量大($n \geq 20$)符號檢定

當樣本數量增加($n \geq 20$)時，欲檢定母體中位數 M_d 等於特定值 m_0 之二項分布會趨近於常態分布，故，可以運用標準化 z 值分布進行母體中位數 M_d 等於特定中位數特定值 m_0(推測值)之檢定。假設檢定

虛無假設(null hypothesis) H_0: $M_d = m_0$ 或 H_0: $P(M_d > m_0) = 0.50$

對立假設(alternative hypothesis) H_1: $M_d \neq m_0$ 或 H_0: $P(M_d > m_0) \neq 0.50$

在樣本數量增加($n \geq 20$)時，欲檢定母體中位數 M_d 等於特定值 m_0 之二項分布會趨近於常態分布，獲得正號(+)次數的平均值與標準(偏)差分別為：

平均值 $\mu_S = 0.50 \times n$

標準(偏)差 $\sigma_S = \sqrt{0.50 \times 0.50 \times n} = 0.50 \times \sqrt{n}$

故，在樣本數量增加($n \geq 20$)時，獲得正號(+)次數之二項分布會趨近於常態分布：$S_0 \sim N(0.50 \times n, 0.50 \times 0.50 \times n)$

檢定統計值 $z = \frac{S-E(S)}{\sqrt{\sigma_S^2}} = \frac{S-0.50\times n}{0.50\times\sqrt{n}}$

請參閱前面章節

16.2.2 檢定兩配對母體分布是否相同

符號檢定可使用於檢定兩個配對母體分布是否相同。例如檢定相同消費者對兩家連鎖速食餐廳的滿意度是否相同；相同消費者對兩個生態旅遊行程的體驗價值是否相同；相同消費者對兩種咖啡豆所烹製咖啡飲料的喜愛程度是否相同。

符號檢定時，利用兩個配對樣本的差，屬於正值或負值，轉換為正號與負號的數量，以檢定兩個配對母體的分布是否相同。假設(x_{1i}, x_{2i})為配對的樣本觀測值，兩者之間的差 d_i 為

$$d_i = x_{1i} - x_{2i}$$

當 $d_i > 0$ 為正值時，可以獲得一個正號(+)；$d_i < 0$ 為負值時，可以獲得一個負號(-)；$d_i = 0$ 代表 x_{1i} 與 x_{2i} 為兩個配對樣本觀測值相等，不計入正負符號數量。

若兩個配對母體的分布相同，獲得正號和負號的數量應該相等或非常相近；若兩個配對母體的分布不相同，獲得正號(+)和負號(-)的數量應該不相等或差距非常大。

當兩個配對母體分布相同時，扣除 x_{1i} 與 x_{2i} 兩個配對樣本觀測值相等的觀測值數量，分別出現正號(+)與出現負號(-)的機率 p 應皆為 0.50；故運用符號檢定兩個配對母體分布是否相同，如同檢定在二項分布母體出現正號(+)或出現負號(-)的機率 p 是否等於 0.50。

範例 19.3　欲了解觀光系學生對 A 和 B 兩家連鎖速食餐廳的滿意度分布(假設為非常態分布)是否相同，今隨機抽取 12 位同學進行調查分析，調查結果如下表所示，在顯著水準 $\alpha = 0.05$ 下，進行學生對 A 和 B 兩家連鎖速食餐廳的滿意度分布是否相同之統計檢定。

學生	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
A 餐廳滿意度	10	9	3	6	8	5	5	6	10	4	5	6
B 餐廳滿意度	2	9	9	5	7	3	4	2	0	3	7	4

題解：學生對兩家連鎖速食餐廳的滿意度，不同學生的感受有可能是 A 餐廳高於 B 餐廳，亦有可能是 B 餐廳高於 A 餐廳，故此例屬於雙尾檢定(a two-tailed test)。

A.設定顯著水準 $\alpha = 0.05$。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: 學生對兩家連鎖速食餐廳滿意度分布相同 或 H_0:學生對 A 餐廳的滿意度高於 B 餐廳的機率 $p = 0.50$。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: 學生對兩家連鎖速食餐廳滿意度分布不相同 或 H_1: 學生對 A 餐廳的滿意度高於 B 餐廳的機率 $p \neq 0.50$。

D.計算檢定統計值 S_0

設學生滿意度 A 餐廳高於 B 餐廳者為 $d_i = x_{Ai} - x_{Bi} > 0$ 可以獲得一個正號(+)；學生滿意度 A 餐廳低於 B 餐廳者為 $d_i = x_{Ai} - x_{Bi} < 0$ 可以獲得一個負號(-)；學生滿意度 A 餐廳等於 B 餐廳者為 $d_i = x_{Ai} - x_{Bi} = 0$ 忽略不計。

學生	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
A 餐廳滿意度 x_{Ai}	10	9	3	6	8	5	5	6	10	4	5	6
B 餐廳滿意度 x_{Bi}	2	9	9	5	7	3	4	2	0	3	7	4
符號	+		-	+	+	+	+	+	+	+	-	+

滿意度有差異的樣本數量 $n_r = 12 - 1 = 11$，獲得正號(+)數量為 $S_0 = 9$。檢定統計值 S_0 屬於二項分布 $S_0 \sim B(11,0.50)$。

E.計算機率 p 值

$$S_0 = 9 > \frac{n_r}{2} = \frac{11}{2} = 5.5$$

機率 $p = 2 \times P(S \geq S_0|n_r,p = 0.50) = 2 \times P(S \geq 9|11,p = 0.50) = 2 \times [1 - P(S \leq 8)] = 2 \times [1 - 0.9673$(使用 Excel 軟體 BINOM.DIST 函數查詢獲得)$] = 2 \times 0.0327 = 0.0654$

F.因機率 $p = 0.0654 >$ 顯著水準 $\alpha = 0.05$，故接受虛無假設(null hypothesis) H_0: 學生對兩家連鎖速食餐廳滿意度分布相同 或 H_0:學生對 A 餐廳的滿意度高於 B 餐廳的機率 $p = 0.50$。因此，依據隨機抽出 12 位學生的調查資料，統計推論發現學生對於兩家連鎖速食餐廳的滿意度分布相同，沒有達到顯著性的差異水準。

練習 19.5 欲了解學生對 A 和 B 兩種咖啡飲料的接受程度分布(假設為非常態分布)是否相同，今隨機抽取 10 位同學進行調查分析，調查結果如下表所示，在顯著水準 $\alpha = 0.05$ 下，進行學生對 A 和 B 兩種咖啡飲料的接受程度分布是否相同之統計檢定。

學生	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A 接受程度	10	9	3	6	8	5	5	6	10	4
B 接受程度	2	9	9	5	7	3	4	2	0	3

題解：學生對兩種咖啡飲料的接受程度，不同學生的感受有可能有 A 咖啡飲料高於 B 咖啡飲料，亦有可能是 B 咖啡飲料高於 A 咖啡飲料，故此例屬於雙尾檢定(a two-tailed test)。

A.設定顯著水準 $\alpha = 0.05$。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: 學生對兩種咖啡飲料接受程度分布相同 或 H_0:學生對 A 咖啡飲料的接受程度高於 B 咖啡飲料的機率 $p = 0.50$。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: 學生對兩種咖啡飲料接受程度分布不相同 或 H_1: 學生對 A 咖啡飲料的接受程度高於 B 咖啡飲料的機率 $p \neq 0.50$。

D.計算檢定統計值 S_0

設學生接受程度 A 咖啡飲料高於 B 咖啡飲料者為 $d_i = x_{Ai} - x_{Bi} > 0$ 可以獲得一個正號(+)；學生接受程度 A 咖啡飲料低於 B 咖啡飲料者為 $d_i = x_{Ai} - x_{Bi} < 0$ 可以獲得一個負號(-)；學生接受程度 A 咖啡飲料等於 B 咖啡飲料者為 $d_i = x_{Ai} - x_{Bi} = 0$ 忽略不計。

學生	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A 接受程度 x_{Ai}	10	9	3	6	8	5	5	6	10	4
B 接受程度 x_{Bi}	2	9	9	5	7	3	4	2	0	3
符號	+		-	+	+	+	+	+	+	+

學生接受程度有差異的樣本數量 $n_r = 10 - 1 = 9$，獲得正號(+)數量為 $S_0 = 8$。檢定統計值 S_0 屬於二項分布 $S_0 \sim B(9,0.50)$。

E.計算機率 p 值

$$S_0 = 8 > \frac{n_r}{2} = \frac{9}{2} = 4.5$$

機率 $p = 2 \times P(S \geq S_0|n_r,p = 0.50) = 2 \times P(S \geq 8|9,p = 0.50) = 2 \times [1 - P(S \leq 7)] = 2 \times [1 - 0.9805$(使用 Excel 軟體 BINOM.DIST 函數查詢獲得)$] = 2 \times 0.0195 = 0.0390$

F.因機率 $p = 0.0390 <$ 顯著水準 $\alpha = 0.05$，故拒絕虛無假設，接受對立假設(alternative hypothesis) H_1: 學生對兩種咖啡飲料接受程度分布不相同 或 H_1: 學生對 A 咖啡飲料的接受程度高於 B 咖啡飲料的機

率 $p \neq 0.50$。因此，依據隨機抽出 10 位學生的調查資料，統計推論發現學生對於兩種咖啡飲料接受程度分布不相同，有達到顯著性的差異水準。

練習 19.6 欲了解學生對 A 和 B 兩種教學方式的接受程度分布(假設為非常態分布)是否相同，今隨機抽取 11 位同學進行調查分析，調查結果如下表所示，在顯著水準 $\alpha = 0.05$ 下，進行學生對 A 和 B 兩種教學方式的接受程度分布是否相同之統計檢定。

學生	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
A 接受程度	10	9	3	6	8	5	5	6	10	4	9
B 接受程度	2	9	9	5	7	3	4	2	0	3	8

題解：學生對兩種教學方式的接受程度，不同學生的感受有可能有 A 教學方式高於 B 教學方式，亦有可能是 B 教學方式調高於 A 教學方式，故此例屬於雙尾檢定(a two-tailed test)。

A.設定顯著水準 $\alpha = 0.05$。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: 學生對兩種教學方式接受程度分布相同 或 H_0:學生對 A 教學方式的接受程度高於 B 教學方式的機率 $p = 0.50$。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: 學生對兩種教學方式接受程度分布不相同 或 H_1: 學生對 A 教學方式的接受程度高於 B 教學方式的機率 $p \neq 0.50$。

D.計算檢定統計值 S_0

設學生接受程度 A 教學方式高於 B 教學方式者為 $d_i = x_{Ai} - x_{Bi} > 0$ 可以獲得一個正號(+)；學生接受程度 A 教學方式低於 B 教學方式者為 $d_i = x_{Ai} - x_{Bi} < 0$ 可以獲得一個負號(-)；學生接受程度 A 教學方式等於 B 教學方式者為 $d_i = x_{Ai} - x_{Bi} = 0$ 忽略不計。

學生	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
A 接受程度 x_{Ai}	10	9	3	6	8	5	5	6	10	4	9
B 接受程度 x_{Bi}	2	9	9	5	7	3	4	2	0	3	8
符號	+		-	+	+	+	+	+	+	+	+

學生接受程度有差異的樣本數量 $n_r = 11 - 1 = 10$，獲得正號(+)數量為 $S_0 = 9$。檢定統計值 S_0 屬於二項分布 $S_0 \sim B(10,0.50)$。

E.計算機率 p 值

$$S_0 = 9 > \frac{n_r}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

機率 $p = 2 \times P(S \geq S_0|n_r,p = 0.50) = 2 \times P(S \geq 9|10,p = 0.50) = 2 \times [1 - P(S \leq 8)] = 2 \times [1 - 0.9893$(使用 Excel 軟體 BINOM.DIST 函數查詢獲得)$] = 2 \times 0.0107 = 0.0215$

F.因機率 $p = 0.0215 <$ 顯著水準 $\alpha = 0.05$，故拒絕虛無假設，接受對立假設(alternative hypothesis) H_1: 學生對兩種教學方式接受程度分布不相同 或 H_1: 學生對 A 教學方式的接受程度高於 B 教學方式的機率 $p \neq 0.50$。因此，依據隨機抽出 11 位學生的調查資料，統計推論發現學生對於兩種教學方式接受程度分布不相同，有達到顯著性的差異水準。

範例 19.4 假設學生對 A 和 B 兩種咖啡飲料的接受程度分布屬於常態分布，欲了解學生對 A 和 B 兩種咖啡飲料的接受程度分布是否相同，今隨機抽取 10 位同學進行調查分析，調查結果如下表所示，在顯著水準 $\alpha = 0.05$ 下，進行學生對 A 和 B 兩種咖啡飲料的接受程度分布是否相同之統計檢定。

學生	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

A 接受程度	10	9	3	6	8	5	5	6	10	4
B 接受程度	2	9	9	5	7	3	4	2	0	3

題解：母體確定屬於常態分布時，可以使用母數統計法進行統計檢定。假設 μ_A 是學生對 A 咖啡飲料接受程度的母體平均值；μ_B 是學生對 B 咖啡飲料接受程度的母體平均值。本範例屬於兩配對母體，且屬於常態分布，因此，運用 t 檢定法進行兩母體平均值相等性檢定。學生對兩種咖啡飲料的接受程度，不同學生的感受有可能有 A 咖啡飲料高於 B 咖啡飲料，亦有可能是 B 咖啡飲調高於 A 咖啡飲料，故此例屬於雙尾檢定(a two-tailed test)。

A.設定顯著水準 $\alpha = 0.05$，左側臨界值$-t_{\frac{\alpha}{2},\nu} = -t_{\frac{\alpha}{2},n-1} = -t_{\frac{0.05}{2},10-1} = -t_{0.025,9} = -2.2622$；右側臨界值$t_{\frac{\alpha}{2},\nu} = t_{\frac{\alpha}{2},n-1} = t_{\frac{0.05}{2},10-1} = t_{0.025,9} = 2.2622$(使用 Excel 軟體 T.INV 函數查詢獲得)。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_A = \mu_B$ 或 $\mu_d = \mu_A - \mu_B = 0$。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu_A \neq \mu_B$ 或 $\mu_d = \mu_A - \mu_B \neq 0$。

D.計算檢定統計值 t，若虛無假設成立 $\mu_d = \mu_A - \mu_B = 0$

學生	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	合計	平均值
A 接受程度 x_{Ai}	10	9	3	6	8	5	5	6	10	4	66	
B 接受程度 x_{Bi}	2	9	9	5	7	3	4	2	0	3	44	
$d_i = x_{Ai} - x_{Bi}$	8	0	-6	1	1	2	1	4	10	1	22	2.2
d_i^2	64	0	36	1	1	4	1	16	100	1	224	

檢定統計值 $t = \frac{\bar{d}-\mu_d}{\sigma_{\bar{d}}} = \frac{\bar{d}-\mu_d}{s_{\bar{d}}} = \frac{\bar{d}-\mu_d}{\frac{s_d}{\sqrt{n}}} = \frac{\bar{d}-\mu_d}{\frac{\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(d_i^2)-\frac{\left(\sum_{i=1}^{n}d_i\right)^2}{n}}{n-1}}}{\sqrt{n}}} = \frac{2.2-0}{\frac{\sqrt{\frac{224-\frac{22^2}{10}}{10-1}}}{\sqrt{10}}} = \frac{2.2}{\frac{\sqrt{\frac{224-48.4}{9}}}{3.1623}} = \frac{2.2}{\frac{\sqrt{19.5111}}{3.1623}} = \frac{2.2}{\frac{4.4171}{3.1623}} = \frac{2.2}{1.3968} = 1.5750$

E.左側臨界值$-t_{\frac{\alpha}{2},\nu} = -2.2622$ < 檢定統計值 $t = 1.5750$ < 右側臨界值$t_{\frac{\alpha}{2},\nu} = 2.2622$，接受虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu_d = 0$ 或 $\mu_A = \mu_B$。學生對兩種咖啡飲料的接受程度母體平均值沒有達到顯著性差異水準。因此，學生對 A 和 B 兩種咖啡飲料的接受程度分布平均值相同，沒有達到顯著性差異水準。

16.3 魏克森符號等級檢定

在前述符號檢定中，僅利用所有配對組合中觀測值有差異的樣本數 n 與配對組合觀測值有差異時獲得正號(+)數量或負號(-)數量 S_0 兩個數值，未再利用配對組合中觀測值的差異量，因而浪費此數值資訊的參考價值。

在魏克森符號等級檢定法(Wilcoxon signed-rank test)中，即針對符號檢定的缺失進行修正，同時考慮配對組合觀測值有差異時獲得正號(+)數量或負號(-)數量 S_0 與配對組合中觀測值的差異量的等級。

在魏克森符號等級檢定法先計算配對樣本觀測值之差異量 $d_i = x_{Ai} - x_{Bi}$，取絕對值$|d_i| = |x_{Ai} - x_{Bi}|$，再依據數值$|d_i|$大小，由小排到大，並給予等級。當差異量數值相等$|d_i| = |d_j|$時，利用其平均數作為等級。不計兩配對組合觀測值相同的樣本，亦不排序和給予等級。

假設 R^+為正的 d_i 值之等級和；R^-為負的 d_i 值之等級和。若兩配對母體分布型態相同時，R^+與 R^-數值應相等或非常相近。倘若 R^+與 R^-數值有明顯的差異量，表示兩配對母體分布型態不相同。故，在魏克森符號等級檢定法選擇 R^+與 R^-數值為檢定統計值。

雙尾檢定

檢定統計值選用 R^+與 R^-數值較小者，即檢定統計值 $R = \min(R^+, R^-)$。便於查表與計算。

右尾檢定

檢定統計值 R = R^-，在右尾檢定時 R^-數值比較小。

左尾檢定

檢定統計值 R = R^+，在左尾檢定時 R^+數值比較小。

不論在右尾、左尾或雙尾中，檢定統計值 R 數值愈小，顯示兩個母體分布型態愈不相同。

魏克森符號等級檢定法統計判斷法則

雙尾檢定

若檢定統計值 R ≤ 臨界值$R_{\frac{\alpha}{2}}$，接受虛無假設(null hypothesis) H_0。

若檢定統計值 R > 臨界值$R_{\frac{\alpha}{2}}$，拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0，接受對立假設(alternative hypothesis) H_1。

左尾檢定

若檢定統計值 R ≤ 臨界值 R_α，接受虛無假設(null hypothesis) H_0。

若檢定統計值 R > 臨界值 R_α，拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0，接受對立假設(alternative hypothesis) H_1。

右尾檢定

若檢定統計值 R ≤ 臨界值 R_α，接受虛無假設(null hypothesis) H_0。

若檢定統計值 R > 臨界值 R_α，拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0，接受對立假設(alternative hypothesis) H_1。

在大量樣本數量($n \geq 30$)時，檢定統計值 R 分布會趨近於常態分布，其平均值和變異數分別為：

平均值 E(R) = $\bar{R} = \frac{n\times(n+1)}{4}$

變異數 V(R) = $\frac{n\times(n+1)\times(2\times n+1)}{24}$

在大量樣本數量($n \geq 30$)時，檢定統計值 $z = \frac{R-\frac{n\times(n+1)}{4}}{\sqrt{\frac{n\times(n+1)\times(2\times n+1)}{24}}}$

大量樣本數量($n \geq 30$)時，統計判斷法則

雙尾檢定

若檢定統計值 z ≥ 臨界值-$z_{\frac{\alpha}{2}}$，接受虛無假設(null hypothesis) H_0。

若檢定統計值 z < 臨界值-$z_{\frac{\alpha}{2}}$，拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0，接受對立假設(alternative hypothesis) H_1。

左尾檢定

若檢定統計值 z ≥ 臨界值-z_α，接受虛無假設(null hypothesis) H_0。

若檢定統計值 z < 臨界值-z_α，拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0，接受對立假設(alternative hypothesis) H_1。

右尾檢定

若檢定統計值 z ≥ 臨界值-z_α，接受虛無假設(null hypothesis) H_0。

若檢定統計值 z < 臨界值-z_α，拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0，接受對立假設(alternative hypothesis) H_1。

範例 19.5 觀光系小蘭同學欲知道學生每週餐飲費用(假設為非常態分布)的中位數是否為新台幣 1000 元，以知曉其自己的花費是高於中位數還是低於中位數。小蘭隨機抽出 10 位學生，其每週餐飲費用如下表所示，以顯著水準 $\alpha = 0.05$ 利用魏克森符號等級檢定法進行統計檢定。

學生	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
費用(元)	1200	950	1230	650	780	1350	1425	1620	1000	1304

題解：學生餐飲費用有可能高於新台幣 1000 元，亦有可能低於新台幣 1000 元，故此例屬於雙尾檢定(a two-tailed test)。

A.設定顯著水準 $\alpha = 0.05$。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0:每週餐飲費用中位數 $= 1000$ 元 或 H_0:每週餐飲費用高於 1000 元的機率 $p = 0.50$。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1:每週餐飲費用中位數 $\neq 1000$ 元 或 H_1:每週餐飲費用高於 1000 元的機率 $p \neq 0.50$。

D.計算檢定統計值 R $m_0 = 1000$ 元

學生 i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
費用(元) x_i	1200	950	1230	650	780	1350	1425	1620	1000	1304
$d_i = x_i - m_0$	200	-50	230	-350	-220	350	425	620	0	304
$\lvert d_i \rvert$	200	50	230	350	220	350	425	620	0	304
序位等級	2	1	4	6.5	3	6.5	8	9		5
正值等級	2		4			6.5	8	9		5
負值等級		1		6.5	3					

觀測值與特定數值 m_0(推測值)有差異的樣本數 $n_r = 10 - 1 = 9$

正的 d_i 值之等級和 $R^+ = 2 + 4 + 6.5 + 8 + 9 + 5 = 34.5$

負的 d_i 值之等級和 $R^- = 1 + 6.5 + 3 = 10.5$

檢定統計值 $R = \min(R^+, R^-) = \min(34.5, 10.5) = 10.5 = R^-$

E.決定臨界值 $R_{\frac{\alpha}{2}} = R_{\frac{0.05}{2}} = R_{0.025}$

Wilcoxon 符號等級檢定臨界值表–配對母體

單尾 α =	雙尾 α =	$n = 5$	$n = 6$	$n = 7$	$n = 8$	$n = 9$
0.05	0.10	1	2	4	6	8
0.025	0.05		1	2	4	6
0.01	0.02			0	2	3
0.005	0.01				0	2

$R_{\frac{\alpha}{2}} = R_{\frac{0.05}{2}} = R_{0.025} = 6$ (查 Wilcoxon 符號等級檢定臨界值表)

F.統計推論：檢定統計值 $R = 10.5 >$ 臨界值 $R_{\frac{\alpha}{2}} = R_{\frac{0.05}{2}} = R_{0.025} = 6$，拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0，接受對立假設(alternative hypothesis) H_1:每週餐飲費用中位數 $\neq 1000$ 元 或 H_1:每週餐飲費用高於 1000 元的機率 $p \neq 0.50$。因此，依據小蘭同學隨機抽樣的樣本，以魏克森符號等級檢定法進行的統計推論發現，每週餐飲費用的中位數顯著性的不等於新台幣 1000 元。

使用魏克森符號等級檢定法時比符號檢定法多運用差異量大小的資訊，使得魏克森符號等級檢定法檢定力較佳，統計推論比較可靠。

練習 19.7 觀光系小蘭同學欲知道學生上週交通支出(假設為非常態分布)的中位數是否為新台幣 500 元，以知曉其自己的支出是高於中位數還是低於中位數。小蘭隨機抽出 12 位學生，其上週交通支

出如下表所示，以顯著水準 $\alpha = 0.05$ 利用魏克森符號等級檢定法進行統計檢定。

學生	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
費用(元)	510	450	230	650	780	350	425	620	710	345	645	533

題解：假設學生上週交通支出為非常態分布，可採用魏克森符號等級檢定法檢定。學生交通支出有可能高於新台幣 500 元，亦有可能低於新台幣 500 元，故此例屬於雙尾檢定(a two-tailed test)。

A.設定顯著水準 $\alpha = 0.05$。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0:上週交通支出中位數 = 500 元 或 H_0:上週交通支出高於 500 元的機率 $p = 0.50$。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1:上週交通支出中位數 $\neq$ 500 元 或 H_1:上週交通支出高於 500 元的機率 $p \neq 0.50$。

D.計算檢定統計值 R　$m_0 = 500$ 元

學生	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
費用(元)	510	450	230	650	780	350	425	620	710	345	645	533
$d_i = x_i - m_0$	10	-50	-270	150	280	-150	-75	120	210	-155	145	33
$\|d_i\|$	10	50	270	150	280	150	75	120	210	155	145	33
序位等級	1	3	11	7.5	12	7.5	4	5	10	9	6	2
正值等級	1			7.5	12			5	10		6	2
負值等級		3	11			7.5	4			9		

觀測值與特定數值 m_0(推測值)有差異的樣本數 $n_r = 12 - 0 = 12$

正的 d_i 值之等級和 $R^+ = 1 + 7.5 + 12 + 5 + 10 + 6 + 2 = 43.5$

負的 d_i 值之等級和 $R^- = 3 + 11 + 7.5 + 4 + 9 = 34.5$

檢定統計值 $R = \min(R^+, R^-) = \min(43.5, 34.5) = 34.5 = R^-$

E.決定臨界值 $R_{\frac{\alpha}{2}} = R_{\frac{0.05}{2}} = R_{0.025} = 14$ (查 Wilcoxon 符號等級檢定臨界值表)

F.統計推論：檢定統計值 R = 34.5 > 臨界值 $R_{\frac{\alpha}{2}} = R_{\frac{0.05}{2}} = R_{0.025} = 14$，拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0，接受對立假設(alternative hypothesis) H_1:上週交通支出中位數 $\neq$ 500 元 或 H_1:上週交通支出高於 500 元的機率 $p \neq 0.50$。因此，依據小蘭同學隨機抽樣的樣本，以魏克森符號等級檢定法進行的統計推論發現，上週交通支出的中位數顯著性的不等於新台幣 500 元。

練習 19.8　蔡同學欲知道學生上月租屋支出(假設為非常態分布)的中位數是否為新台幣 5000 元，以知曉其自己的支出是高於中位數還是低於中位數。蔡同學隨機抽出 14 位學生，其上月租屋支出如下表所示，以顯著水準 $\alpha = 0.05$ 利用魏克森符號等級檢定法進行統計檢定。

學生	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
費用(元)	5100	4500	4230	6500	7800	4350	4250	6200	7100	4500	6450	5330	6005	5800

題解：假設學生上月租屋支出為非常態分布，可採用魏克森符號等級檢定法檢定。學生租屋支出有可能高於新台幣 5000 元，亦有可能低於新台幣 5000 元，故此例屬於雙尾檢定(a two-tailed test)。

A.設定顯著水準 $\alpha = 0.05$。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0:上月租屋支出中位數 =5000 元 或 H_0:上月租屋支出高於 5000 元的機率 $p = 0.50$。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1:上月租屋支出中位數 $\neq$ 5000 元 或 H_1:上月租屋支出高於 5000 元的機率 $p \neq 0.50$。

D.計算檢定統計值 R　$m_0 = 5000$ 元

學生	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
費用(元)	5100	4500	4230	6500	7800	4350	4250	6200	7100	4500	6450	5330	6005	5800
$d_i = x_i - m_0$	100	-500	-770	1500	2800	-650	-750	1200	2100	-500	1450	330	1005	800
$\|d_i\|$	100	500	770	1500	2800	650	750	1200	2100	500	1450	330	1005	800
序位等級	1	3.5	7	12	14	5	6	10	13	3.5	11	2	9	8
正值等級	1			12	14			10	13		11	2	9	8
負值等級		3.5	7			5	6			3.5				

觀測值與特定數值 m_0(推測值)有差異的樣本數 $n_r = 14 – 0 = 14$

正的 d_i 值之等級和 $R^+ = 1 + 12 + 14 + 10 + 13 + 11 + 2 + 9 + 8 = 80$

負的 d_i 值之等級和 $R^- = 3.5 + 7 + 5 + 6 + 3.5 = 25$

檢定統計值 $R = \min(R^+, R^-) = \min(80, 25) = 25 = R^-$

E.決定臨界值 $R_{\frac{\alpha}{2}} = R_{\frac{0.05}{2}} = R_{0.025} = 21$ (查 Wilcoxon 符號等級檢定臨界值表)

F.統計推論：檢定統計值 $R = 25 > $ 臨界值 $R_{\frac{\alpha}{2}} = R_{\frac{0.05}{2}} = R_{0.025} = 21$，拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0，接受對立假設(alternative hypothesis) H_1:上月租屋支出中位數 $\neq 5000$ 元 或 H_1:上月租屋支出高於 5000 元的機率 $p \neq 0.50$。因此，依據蔡同學隨機抽樣的樣本，以魏克森符號等級檢定法進行的統計推論發現，上月租屋支出的中位數顯著性的不等於新台幣 5000 元。

16.4 魏克森等級和檢定與曼–懷特尼檢定

欲檢定兩個獨立母體平均值之差，在小樣本($n < 30$)情況下需要假設母體屬於常態分布，運用有母數統計法，當兩母體變異數已知時，採用標準化 z 值分布；兩母體變異數未知時，採用 t 值分布。在小樣本($n < 30$)情況下需要假設母體屬於非常態分布，就必須使用無母數統計法中的魏克森等級和檢定(Wilcoxon rank sum test)和曼–懷特尼 U 檢定(簡稱 M-W 檢定)(Mann-Whitney U test)。

當母體分布無法確定或無法獲得準確地(樣本)觀測值之數值，但可以明確的知道觀測值之數值大小排列順序時，即可使用魏克森等級和檢定和曼–懷特尼 U 檢定(簡稱 M-W 檢定)，進行兩個獨立母體的平均值或分布是否相等的檢定。

16.4.1 魏克森等級和檢定

魏克森等級和檢定法(Wilcoxon rank sum test)或魏克森符號等級和檢定(Wilcoxon sign rank sum test)適用於兩個獨立母體分布未知，同時隨機抽樣獲得的樣本數量少($n < 30$)之情況。

在兩個相互獨立的母體中，從母體 1 隨機抽出 n_1 個樣本，從母體 2 隨機抽出 n_2 個樣本，再將所有的 $n = n_1 + n_2$ 個樣本混合，依據其觀測值大小，由小排到大排序，並給予序位等級。

在魏克森等級和檢定法中的檢定統計值為兩個獨立母體樣本的個別等級和，通常使用樣本數量 n 較少的母體樣本之等級和為檢定統計值，當母體 1 樣本數量 $n_1 <$ 母體 2 樣本數量 n_2 時，使用母體 1 樣本的等級和 W_1 為檢定統計值；母體 1 樣本數量 $n_1 =$ 母體 2 樣本數量 n_2 時，兩個獨立母體任選一個樣本的等級和 W_1 或 W_2 為檢定統計值。當兩個獨立母體樣本的等級和數值相等和非常接近時，顯示兩個母體的分布沒有差異；兩個獨立母體樣本的等級和數值相距甚遠時，顯示兩個母體的分布有差異。

魏克森等級和檢定法統計判斷法則

雙尾檢定

若左側臨界值 $W_L \le$ 檢定統計值 $W \le$ 右側臨界值 W_H，接受虛無假設(null hypothesis) H_0

若檢定統計值 $W <$ 左側臨界值 W_L 或檢定統計值 $W >$ 右側臨界值 W_H，拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0，接受對立假設(alternative hypothesis) H_1

其中：W_L 是在左側(較低)臨界值；W_H 是在右側(較高)臨界值，運用較低樣本數 n_1、較高樣本數 n_2 和顯著水準 α 三個參數查詢魏克森等級和檢定表即可獲得此臨界值

單尾檢定

設母體 1 為樣本數量較少者，當母體 1 分布位於母體 2 的右側時，若檢定統計值 $W_1 \le$ 臨界值 W_H，接受虛無假設(null hypothesis) H_0

設母體 1 為樣本數量較少者，當母體 1 分布位於母體 2 的右側時，若檢定統計值 $W_1 >$ 臨界值 W_H，拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0，接受對立假設(alternative hypothesis) H_1

設母體 1 為樣本數量較少者，當母體 1 分布位於母體 2 的左側時，若檢定統計值 $W_1 \ge$ 臨界值 W_L，接受虛無假設(null hypothesis) H_0

設母體 1 為樣本數量較少者，當母體 1 分布位於母體 2 的左側時，若檢定統計值 $W_1 <$ 臨界值 W_L，拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0，接受對立假設(alternative hypothesis) H_1

範例 19.6 欲了解觀光系學生對 A 和 B 兩家連鎖速食餐廳的滿意度分布是否相同，若滿意度分布屬於非常態分布，今分別隨機抽取 10 和 12 位同學進行調查分析，調查結果如下表所示，在顯著水準 $\alpha = 0.05$ 下，利用魏克森等級和檢定法，進行學生對 A 和 B 兩家連鎖速食餐廳的滿意度分布是否相同之統計檢定。

學生	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
A 餐廳滿意度	10	9	3	6	8	5	5	6	10	4		
B 餐廳滿意度	2	9	9	5	7	3	4	2	0	3	7	4

題解：學生對兩家連鎖速食餐廳的滿意度，不同學生的感受有可能是 A 餐廳高於 B 餐廳，亦有可能是 B 餐廳高於 A 餐廳，故此例屬於雙尾檢定(a two-tailed test)。

A.設定顯著水準 $\alpha = 0.05$。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: 學生對兩家連鎖速食餐廳滿意度分布相同。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: 學生對兩家連鎖速食餐廳滿意度分布不相同。

D.計算檢定統計值 W

將兩家餐廳的樣本觀測值數值合併排列其序位等級，若兩觀測值數值相同時，取其平均值為其序位等級。

學生	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
A 餐廳滿意度 x_{Ai}	10	9	3	6	8	5	5	6	10	4		
序位等級	21.5	19	5	13.5	17	11	11	13.5	21.5	8		
B 餐廳滿意度 x_{Bi}	2	9	9	5	7	3	4	2	0	3	7	4
序位等級	2.5	19	19	11	15.5	5	8	2.5	1	5	15.5	8

因為 A 餐廳的樣本數 $n_A = 10 <$ B 餐廳的樣本數 $n_B = 12$，故檢定統計值為 A 餐廳樣本的序位等級和 $W_A = 21.5 + 19 + 5 + 13.5 + 17 + 11 + 11 + 13.5 + 21.5 + 8 = 141$

E.因左側臨界值 $W_L = 89 \le$ 檢定統計值 $W = 141 \le$ 右側臨界值 $W_H = 141$(查魏克森等級和檢定表)，接受

虛無假設(null hypothesis) H_0: 學生對兩家連鎖速食餐廳滿意度分布相同。因此，依據分別隨機抽出 10 和 12 位學生的調查資料，統計推論發現學生對於兩家連鎖速食餐廳的滿意度分布相同，沒有達到顯著性的差異水準。

練習 19.9 欲了解學生對 A 和 B 兩種咖啡飲料的接受程度分布(假設為非常態分布)是否相同，今隨機分別抽取 10 位同學進行調查分析，調查結果如下表所示，在顯著水準 $\alpha = 0.05$ 下，利用魏克森等級和檢定法，進行學生對 A 和 B 兩種咖啡飲料的接受程度分布是否相同之統計檢定。

學生	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A 接受程度	10	9	3	6	8	5	5	6	10	4
B 接受程度	2	9	9	5	7	3	4	2	0	3

題解：學生對兩種咖啡飲料的接受程度，不同學生的感受有可能有 A 咖啡飲料高於 B 咖啡飲料，亦有可能是 B 咖啡飲調高於 A 咖啡飲料，故此例屬於雙尾檢定(a two-tailed test)。

A.設定顯著水準 $\alpha = 0.05$。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: 學生對兩種咖啡飲料接受程度分布相同 或 H_0:學生對 A 咖啡飲料的接受程度高於 B 咖啡飲料的機率 $p = 0.50$。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: 學生對兩種咖啡飲料接受程度分布不相同 或 H_1: 學生對 A 咖啡飲料的接受程度高於 B 咖啡飲料的機率 $p \neq 0.50$。

D.計算檢定統計值 W

將兩種咖啡飲料的接受程度的樣本觀測值數值合併排列其序位等級，由小排到大，若兩觀測值數值相同時，取其平均值為其序位等級。

學生	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A 接受程度 x_{Ai}	10	9	3	6	8	5	5	6	10	4
序位等級	19.5	17	5	12.5	16	10	10	12.5	19.5	7.5
B 接受程度 x_{Bi}	2	9	9	5	7	3	4	2	0	3
序位等級	2.5	17	17	10	15	5	7.5	2.5	1	5

因為 A 咖啡飲料的樣本數 $n_A = 10 = $ B 咖啡飲料的樣本數 $n_B = 10$，故檢定統計值任意選擇 A 咖啡飲料樣本的序位等級和 $W_A = 19.5 + 17 + 5 + 12.5 + 16 + 10 + 10 + 12.5 + 19.5 + 7.5 = 129.5$

E.因左側臨界值 $W_L = 89 \leq$ 檢定統計值 $W_A = 129.5 >$ 右側臨界值 $W_H = 128$(查魏克森等級和檢定表)，拒絕虛無假設，接受對立假設(alternative hypothesis) H_1: 學生對兩種咖啡飲料接受程度分布不相同 或 H_1: 學生對 A 咖啡飲料的接受程度高於 B 咖啡飲料的機率 $p \neq 0.50$。因此，依據分別隨機抽出 10 和 10 位學生的調查資料，統計推論發現學生對於兩種咖啡飲料接受程度分布不相同，達到顯著性的差異水準。

練習 19.10 欲了解學生對 A 和 B 兩種教學方式的接受程度分布(假設為非常態分布)是否相同，今分別隨機抽取 11 和 12 位同學進行調查分析，調查結果如下表所示，在顯著水準 $\alpha = 0.05$ 下，利用魏克森等級和檢定法，進行學生對 A 和 B 兩種教學方式的接受程度分布是否相同之統計檢定。

學生	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
A 接受程度	10	9	3	6	8	5	5	6	10	4	9	
B 接受程度	2	9	9	5	7	3	4	2	0	3	8	4

題解：學生對兩種教學方式的接受程度，不同學生的感受有可能有 A 教學方式高於 B 教學方式，亦有可能

是 B 教學方式調高於 A 教學方式，故此例屬於雙尾檢定(a two-tailed test)。

A.設定顯著水準 $\alpha = 0.05$。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: 學生對兩種教學方式接受程度分布相同 或 H_0:學生對 A 教學方式的接受程度高於 B 教學方式的機率 $p = 0.50$。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: 學生對兩種教學方式接受程度分布不相同 或 H_1: 學生對 A 教學方式的接受程度高於 B 教學方式的機率 $p \neq 0.50$。

D.計算檢定統計值 W

將兩種教學方式的接受程度的樣本觀測值數值合併排列其序位等級，由小排到大，若兩觀測值數值相同時，取其平均值為其序位等級。

學生	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
A 接受程度 x_{Ai}	10	9	3	6	8	5	5	6	10	4	9	
序位等級	22.5	19.5	5	13.5	16.5	11	11	13.5	22.5	8	19.5	
B 接受程度 x_{Bi}	2	9	9	5	7	3	4	2	0	3	8	3
序位等級	2.5	19.5	19.5	11	15	5	8	2.5	1	5	16.5	8

因為 A 教學方式的樣本數 $n_A = 11 < $ B 教學方式的樣本數 $n_B = 12$，故檢定統計值為 A 教學方式樣本的序位等級和 $W_A = 22.5 + 19.5 + 5 + 13.5 + 16.5 + 11 + 11 + 13.5 + 22.5 + 8 + 19.5 = 162.5$

E.因左側臨界值 $W_L = 104 \leq$ 右側臨界值 $W_H = 160 \leq$ 檢定統計值 $W = 162.5$(查魏克森等級和檢定表)，拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0: 學生對兩種教學方式接受程度分布相同，接受對立假設(alternative hypothesis) H_1: 學生對兩種教學方式接受程度分布不相同。因此，依據分別隨機抽出 11 和 13 位學生的調查資料，統計推論發現學生對於兩種教學方式接受程度分布不相同，達到顯著性的差異水準。

16.4.2 曼–懷特尼 U 檢定

曼–懷特尼 U 檢定(Mann-Whitney U test)與魏克森等級和檢定法類似，皆是使用於檢定兩個獨立母體分布是否相同，皆是運用兩個獨立母體個別樣本的等級和進行檢定。在曼–懷特尼 U 檢定可分為小量樣本數($n_1 \leq 10$; $n_2 \leq 10$)與大量樣本數($n_1 \geq 10$; $n_2 \geq 10$)兩種。

小量樣本數($n_1 \leq 10$ 和 $n_2 \leq 10$)

檢定程序

由母體 1 隨機抽出 n_1 個樣本與由母體 2 隨機抽出 n_2 個樣本，混合排序，由小排到大，分別計算其序位等級和 W_1 和 W_2。

計算兩個參數值 U_1 和 U_2

$$U_1 = n_1 \times n_2 + \frac{n_1 \times (n_1+1)}{2} - W_1$$

$$U_2 = n_1 \times n_2 + \frac{n_2 \times (n_2+1)}{2} - W_2$$

其中 $n_1 \times n_2 + \frac{n_1 \times (n_1+1)}{2}$是母體 1 樣本的最大序位等級和；$n_1 \times n_2 + \frac{n_2 \times (n_2+1)}{2}$是母體 2 樣本的最大序位等級和。另 $U_1 + U_2 = n_1 \times n_2$。

計算檢定統計值 U

雙尾檢定 $U = \min(U_1, U_2)$

單尾檢定，若對立假設 H_1: 母體 1 分布位於母體 2 的右側，$U = U_1$。

單尾檢定，若對立假設 H_1: 母體 1 分布位於母體 2 的左側，$U = U_2$。

利用曼–懷特尼 U 統計機率表計算機率 p 值

曼–懷特尼 U 統計機率判斷法則

雙尾檢定

若機率 $p > \frac{\alpha}{2}$，接受虛無假設(null hypothesis) H_0。

若機率 $p < \frac{\alpha}{2}$，拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0，接受對立假設(alternative hypothesis) H_1。

單尾檢定

若機率 $p > \alpha$，接受虛無假設(null hypothesis) H_0。

若機率 $p < \alpha$，拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0，接受對立假設(alternative hypothesis) H_1。

範例 19.7 欲了解觀光系學生對 A 和 B 兩家連鎖速食餐廳的滿意度分布是否相同，若滿意度分布屬於非常態分布，今分別隨機抽取 5 和 5 位同學進行調查分析，調查結果如下表所示，在顯著水準 $\alpha = 0.05$ 下，利用曼–懷特尼 U 檢定法，進行學生對 A 和 B 兩家連鎖速食餐廳的滿意度分布是否相同之統計檢定。

學生	1	2	3	4	5
A 餐廳滿意度	10	9	3	6	8
B 餐廳滿意度	2	9	9	5	7

題解：學生對兩家連鎖速食餐廳的滿意度，不同學生的感受有可能是 A 餐廳高於 B 餐廳，亦有可能是 B 餐廳高於 A 餐廳，故此例屬於雙尾檢定(a two-tailed test)。

A.設定顯著水準 $\alpha = 0.05$。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: 學生對兩家連鎖速食餐廳滿意度分布相同。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: 學生對兩家連鎖速食餐廳滿意度分布不相同。

D.計算檢定統計值 U

將兩家餐廳的樣本觀測值數值合併排列其序位等級，若兩觀測值數值相同時，取其平均值為其序位等級。

學生	1	2	3	4	5	序位等級和 W
A 餐廳滿意度 x_{Ai}	10	9	3	6	8	
序位等級	10	8	2	4	6	30
B 餐廳滿意度 x_{Bi}	2	9	9	5	7	
序位等級	1	8	8	3	5	25

$$U_A = n_A \times n_B + \frac{n_A \times (n_A+1)}{2} - W_A = 5 \times 5 + \frac{5\times(5+1)}{2} - 30 = 25 + 15 - 30 = 10$$

$$U_B = n_A \times n_B + \frac{n_B \times (n_B+1)}{2} - W_B = 5 \times 5 + \frac{5\times(5+1)}{2} - 25 = 25 + 15 - 25 = 15$$

雙尾檢定 $U = \min(U_A, U_B) = \min(10, 15) = 10$

E.$P(U \le 10) = 0.3452$(查曼–懷特尼 U 檢定統計機率表) $> \frac{\alpha}{2} = \frac{0.05}{2}$，接受虛無假設(null hypothesis) H_0: 學生對兩家連鎖速食餐廳滿意度分布相同。因此，依據分別隨機抽出 5 和 5 位學生的調查資料，統計推論發現學生對於兩家連鎖速食餐廳的滿意度分布相同，沒有達到顯著性的差異水準。

練習 19.11 欲了解學生對 A 和 B 兩種咖啡飲料的接受程度分布(假設為非常態分布)是否相同，今隨機分別抽取 6 和 6 位同學進行調查分析，調查結果如下表所示，在顯著水準 $\alpha = 0.05$ 下，利用曼–懷特尼 U 檢定法，進行學生對 A 和 B 兩種咖啡飲料的接受程度分布是否相同之統計檢定。

學生	1	2	3	4	5	6
A 接受程度	10	9	3	6	8	5
B 接受程度	2	9	9	5	7	3

題解：學生對兩種咖啡飲料的接受程度，不同學生的感受有可能有 A 咖啡飲料高於 B 咖啡飲料，亦有可能是 B 咖啡飲調高於 A 咖啡飲料，故此例屬於雙尾檢定(a two-tailed test)。

A.設定顯著水準 $\alpha = 0.05$。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: 學生對兩種咖啡飲料接受程度分布相同 或 H_0:學生對 A 咖啡飲料的接受程度高於 B 咖啡飲料的機率 $p = 0.50$。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: 學生對兩種咖啡飲料接受程度分布不相同 或 H_1: 學生對 A 咖啡飲料的接受程度高於 B 咖啡飲料的機率 $p \neq 0.50$。

D.計算檢定統計值 U

將兩種咖啡飲料的接受程度的樣本觀測值數值合併排列其序位等級，由小排到大，若兩觀測值數值相同時，取其平均值為其序位等級。

學生	1	2	3	4	5	6	序位等級和 W
A 接受程度 x_{Ai}	10	9	3	6	8	5	
序位等級	12	10	2.5	6	8	4.5	43
B 接受程度 x_{Bi}	2	9	9	5	7	3	
序位等級	1	10	10	4.5	7	2.5	35

$$\mathrm{U_A} = n_\mathrm{A} \times n_\mathrm{B} + \frac{n_\mathrm{A}\times(n_\mathrm{A}+1)}{2} - \mathrm{W_A} = 6 \times 6 + \frac{6\times(6+1)}{2} - 43 = 36 + 21 - 43 = 14$$

$$\mathrm{U_B} = n_\mathrm{A} \times n_\mathrm{B} + \frac{n_\mathrm{B}\times(n_\mathrm{B}+1)}{2} - \mathrm{W_B} = 6 \times 6 + \frac{6\times(6+1)}{2} - 35 = 36 + 21 - 35 = 22$$

雙尾檢定 $\mathrm{U} = \min(\mathrm{U_A}, \mathrm{U_B}) = \min(14, 22) = 14$

E.$P(\mathrm{U} \le 14) = 0.2944$(查曼–懷特尼 U 檢定統計機率表) $> \frac{\alpha}{2} = \frac{0.05}{2}$，接受虛無假設(null hypothesis) H_0: 學生對兩種咖啡飲料接受程度分布相同。因此，依據分別隨機抽出 6 和 6 位學生的調查資料，統計推論發現學生對兩種咖啡飲料接受程度分布相同，沒有達到顯著性的差異水準。

大量樣本數($n_1 \ge 10$ 和 $n_2 \ge 10$)

在兩個母體樣本數量 n 皆高於 10 時，若虛無假設為真，統計值 U 屬於常態分布，即可使用標準化 Z 分布進行統計檢定。

統計值 U 的期望值 $E(\mathrm{U}) = \frac{n_1\times n_2}{2}$

統計值 U 的變異數 $V(\mathrm{U}) = \sigma_\mathrm{U}^2 = \frac{n_1\times n_2\times(n_1+n_2+1)}{12}$

統計值 U 的標準(偏)差 $\sigma_\mathrm{U} = \sqrt{\sigma_\mathrm{U}^2} = \sqrt{\frac{n_1\times n_2\times(n_1+n_2+1)}{12}}$

檢定統計值 $z = \frac{\mathrm{U}-E(\mathrm{U})}{\sigma_\mathrm{U}} = \frac{\mathrm{U}-\frac{n_1\times n_2}{2}}{\sqrt{\frac{n_1\times n_2\times(n_1+n_2+1)}{12}}}$

大量樣本數量($n_1 \ge 10$ 和 $n_2 \ge 10$)時，統計判斷法則

雙尾檢定

若左側臨界值$-z_{\frac{\alpha}{2}} \le$ 檢定統計值 $z \le$ 右側臨界值$z_{\frac{\alpha}{2}}$，接受虛無假設(null hypothesis) H_0。

若檢定統計值 $z <$ 左側臨界值$-z_{\frac{\alpha}{2}}$或檢定統計值 $z >$ 右側臨界值$z_{\frac{\alpha}{2}}$，拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0，接受對立假設(alternative hypothesis) H_1。

左尾檢定

若檢定統計值 $z \geq$ 臨界值-z_α，接受虛無假設(null hypothesis) H_0。

若檢定統計值 $z <$ 臨界值-z_α，拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0，接受對立假設(alternative hypothesis) H_1。

右尾檢定

若檢定統計值 $z \leq$ 臨界值 z_α，接受虛無假設(null hypothesis) H_0。

若檢定統計值 $z >$ 臨界值 z_α，拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0，接受對立假設(alternative hypothesis) H_1。

範例 19.8 欲了解觀光系學生對 A 和 B 兩家連鎖速食餐廳的滿意度分布是否相同，若滿意度分布屬於非常態分布，今分別隨機抽取 10 和 12 位同學進行調查分析，調查結果如下表所示，在顯著水準 $\alpha = 0.05$ 下，利用曼–懷特尼 U 檢定，進行學生對 A 和 B 兩家連鎖速食餐廳的滿意度分布是否相同之統計檢定。

學生	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
A 餐廳滿意度	10	9	3	6	8	5	5	6	10	4		
B 餐廳滿意度	2	9	9	5	7	3	4	2	0	3	7	4

題解：學生對兩家連鎖速食餐廳的滿意度，不同學生的感受有可能是 A 餐廳高於 B 餐廳，亦有可能是 B 餐廳高於 A 餐廳，故此例屬於雙尾檢定(a two-tailed test)。

A.設定顯著水準 $\alpha = 0.05$，左側臨界值-$z_{\frac{\alpha}{2}} = -z_{\frac{0.05}{2}} = -1.96$；右側臨界值$z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{\frac{0.05}{2}} = 1.96$(使用 Excel 軟體 NORM.S.INV 函數查詢獲得)。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: 學生對兩家連鎖速食餐廳滿意度分布相同。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: 學生對兩家連鎖速食餐廳滿意度分布不相同。

D.計算檢定統計值 z

將兩家餐廳的樣本觀測值數值合併排列其序位等級，若兩觀測值數值相同時，取其平均值為其序位等級。

學生	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	等級和 W
A 餐廳滿意度 x_{Ai}	10	9	3	6	8	5	5	6	10	4			
序位等級	21.5	19	5	13.5	17	11	11	13.5	21.5	8			141
B 餐廳滿意度 x_{Bi}	2	9	9	5	7	3	4	2	0	3	7	4	
序位等級	2.5	19	19	11	15.5	5	8	2.5	1	5	15.5	8	112

$$\mathrm{U_A} = n_\mathrm{A} \times n_\mathrm{B} + \frac{n_\mathrm{A}\times(n_\mathrm{A}+1)}{2} - \mathrm{W_A} = 10 \times 12 + \frac{10\times(10+1)}{2} - 141 = 120 + 55 - 141 = 34$$

$$\mathrm{U_B} = n_\mathrm{A} \times n_\mathrm{B} + \frac{n_\mathrm{B}\times(n_\mathrm{B}+1)}{2} - \mathrm{W_B} = 10 \times 12 + \frac{12\times(12+1)}{2} - 112 = 120 + 78 - 112 = 86$$

雙尾檢定 $\mathrm{U} = \min(\mathrm{U_A}, \mathrm{U_B}) = \min(34, 86) = 34$

統計值 U 的期望值 $E(\mathrm{U}) = \frac{n_\mathrm{A}\times n_\mathrm{B}}{2} = \frac{10\times12}{2} = 60$

統計值 U 的變異數 $V(\mathrm{U}) = \sigma_\mathrm{U}^2 = \frac{n_\mathrm{A}\times n_\mathrm{B}\times(n_\mathrm{A}+n_\mathrm{B}+1)}{12} = \frac{10\times12\times(10+12+1)}{12} = 230$

檢定統計值 $z = \frac{\mathrm{U}-E(\mathrm{U})}{\sigma_\mathrm{U}} = \frac{34-60}{\sqrt{230}} = \frac{-26}{15.1658} = -1.7144$

E.因左側臨界值-$z_{\frac{\alpha}{2}} = -1.96 \leq$ 檢定統計值 $z = -1.7144 \leq$ 右側臨界值$z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$，接受虛無假設(null hypothesis) H_0: 學生對兩家連鎖速食餐廳滿意度分布相同。因此，依據分別隨機抽出 10 和 12 位學生的調查資料，統計推論發現學生對於兩家連鎖速食餐廳的滿意度分布相同，沒有達到顯著性的差異水

準。

練習 19.12 欲了解學生對 A 和 B 兩種咖啡飲料的接受程度分布(假設為非常態分布)是否相同，今隨機分別抽取 12 和 11 位同學進行調查分析，調查結果如下表所示，在顯著水準 $\alpha = 0.05$ 下，利用曼–懷特尼 U 檢定法，進行學生對 A 和 B 兩種咖啡飲料的接受程度分布是否相同之統計檢定。

學生	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
A 接受程度	10	9	3	6	8	5	6	8	8	1	8	9
B 接受程度	2	9	9	5	7	3	2	3	5	4	2	

題解：學生對兩種咖啡飲料的接受程度，不同學生的感受有可能有 A 咖啡飲料高於 B 咖啡飲料，亦有可能是 B 咖啡飲調高於 A 咖啡飲料，故此例屬於雙尾檢定(a two-tailed test)。

A.設定顯著水準 $\alpha = 0.05$，左側臨界值-$z_{\frac{\alpha}{2}}$ = -$z_{\frac{0.05}{2}}$ = -1.96；右側臨界值$z_{\frac{\alpha}{2}}$ = $z_{\frac{0.05}{2}}$ = 1.96(使用 Excel 軟體 NORM.S.INV 函數查詢獲得)。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: 學生對兩種咖啡飲料接受程度分布相同 或 H_0:學生對 A 咖啡飲料的接受程度高於 B 咖啡飲料的機率 $p = 0.50$。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: 學生對兩種咖啡飲料接受程度分布不相同 或 H_1: 學生對 A 咖啡飲料的接受程度高於 B 咖啡飲料的機率 $p \neq 0.50$。

D.計算檢定統計值 Z

將兩種咖啡飲料的接受程度的樣本觀測值數值合併排列其序位等級，由小排到大，若兩觀測值數值相同時，取其平均值為其序位等級。

學生	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	序位等級和 W
A 接受程度 x_{Ai}	10	9	3	6	8	5	6	8	8	1	8	9	
序位等級	23	20.5	6	12.5	16.5	10	12.5	16.5	16.5	1	16.5	20.5	172
B 接受程度 x_{Bi}	2	9	9	5	7	3	2	3	5	4	2		
序位等級	3	20.5	20.5	10	14	6	3	6	10	8	3		104

$$U_A = n_A \times n_B + \frac{n_A \times (n_A+1)}{2} - W_A = 12 \times 11 + \frac{12\times(12+1)}{2} - 172 = 132 + 78 - 172 = 38$$

$$U_B = n_A \times n_B + \frac{n_B \times (n_B+1)}{2} - W_B = 12 \times 11 + \frac{11\times(11+1)}{2} - 104 = 132 + 66 - 104 = 94$$

雙尾檢定 U = min(U_A, U_B) = min(38, 94) = 38

統計值 U 的期望值 $E(\mathrm{U}) = \frac{n_A \times n_B}{2} = \frac{12\times 11}{2} = 66$

統計值 U 的變異數 $V(\mathrm{U}) = \sigma_U^2 = \frac{n_A \times n_B \times (n_A + n_B + 1)}{12} = \frac{12\times 11\times(12+11+1)}{12} = 264$

檢定統計值 $z = \frac{\mathrm{U}-E(\mathrm{U})}{\sigma_U} = \frac{38-66}{\sqrt{264}} = \frac{-28}{16.2481} = -1.7233$

E.因左側臨界值-$z_{\frac{\alpha}{2}}$ = -1.96 ≤ 檢定統計值 z = -1.7233 ≤ 右側臨界值$z_{\frac{\alpha}{2}}$ = 1.96，接受虛無假設(null hypothesis) H_0: 學生對兩種咖啡飲料接受程度分布相同。因此，依據分別隨機抽出 12 和 11 位學生的調查資料，統計推論發現學生對兩種咖啡飲料接受程度分布相同，沒有達到顯著性的差異水準。

練習 19.13 欲了解學生對 A 和 B 兩種教學方式的接受程度分布(假設為非常態分布)是否相同，今分別隨機抽取 11 和 12 位同學進行調查分析，調查結果如下表所示，在顯著水準 $\alpha = 0.05$ 下，利用曼–懷特尼 U 檢定法，進行學生對 A 和 B 兩種教學方式的接受程度分布是否相同之統計檢定。

學生	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
A 接受程度	10	9	3	6	8	5	5	6	10	4	9	

B 接受程度	2	9	9	5	7	3	4	2	0	3	8	4

題解：學生對兩種教學方式的接受程度，不同學生的感受有可能有 A 教學方式高於 B 教學方式，亦有可能是 B 教學方式調高於 A 教學方式，故此例屬於雙尾檢定(a two-tailed test)。

A.設定顯著水準 $\alpha = 0.05$，左側臨界值-$z_{\frac{\alpha}{2}}$ = -$z_{\frac{0.05}{2}}$ = -1.96；右側臨界值$z_{\frac{\alpha}{2}}$ = $z_{\frac{0.05}{2}}$ = 1.96(使用 Excel 軟體 NORM.S.INV 函數查詢獲得)。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: 學生對兩種教學方式接受程度分布相同 或 H_0:學生對 A 教學方式的接受程度高於 B 教學方式的機率 $p = 0.50$。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: 學生對兩種教學方式接受程度分布不相同 或 H_1: 學生對 A 教學方式的接受程度高於 B 教學方式的機率 $p \neq 0.50$。

D.計算檢定統計值 Z

將兩種教學方式的接受程度的樣本觀測值數值合併排列其序位等級，由小排到大，若兩觀測值數值相同時，取其平均值為其序位等級。

學生	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	序位等級和 W
A 接受程度 x_{Ai}	10	9	3	6	8	5	5	6	10	4	9		
序位等級	22.5	19.5	5	13.5	16.5	11	11	13.5	22.5	8	19.5		162.5
B 接受程度 x_{Bi}	2	9	9	5	7	3	4	2	0	3	8	3	
序位等級	2.5	19.5	19.5	11	15	5	8	2.5	1	5	16.5	8	105.5

$$\mathrm{U_A} = n_A \times n_B + \frac{n_A \times (n_A+1)}{2} - \mathrm{W_A} = 11 \times 12 + \frac{11 \times (11+1)}{2} - 162.5 = 132 + 66 - 162.5 = 35.5$$

$$\mathrm{U_B} = n_A \times n_B + \frac{n_B \times (n_B+1)}{2} - \mathrm{W_B} = 11 \times 12 + \frac{12 \times (12+1)}{2} - 105.5 = 132 + 78 - 105.5 = 104.5$$

雙尾檢定 $\mathrm{U} = \min(\mathrm{U_A}, \mathrm{U_B}) = \min(35.5, 104.5) = 35.5$

統計值 U 的期望值 $E(\mathrm{U}) = \frac{n_A \times n_B}{2} = \frac{11 \times 12}{2} = 66$

統計值 U 的變異數 $V(\mathrm{U}) = \sigma_{\mathrm{U}}^2 = \frac{n_A \times n_B \times (n_A + n_B + 1)}{12} = \frac{11 \times 12 \times (11+12+1)}{12} = 264$

檢定統計值 $z = \frac{\mathrm{U} - E(\mathrm{U})}{\sigma_{\mathrm{U}}} = \frac{35.5-66}{\sqrt{264}} = \frac{-30.5}{16.2481} = -1.8772$

E.因左側臨界值-$z_{\frac{\alpha}{2}}$ = -1.96 $\leq$ 檢定統計值 z = -1.8772 $\leq$ 右側臨界值$z_{\frac{\alpha}{2}}$ = 1.96，接受虛無假設(null hypothesis) H_0: 學生對兩種教學方式接受程度分布相同。因此，依據分別隨機抽出 11 和 12 位學生的調查資料，統計推論發現學生對兩種教學方式接受程度分布相同，沒有達到顯著性的差異水準。

16.5 克拉斯卡–瓦歷斯檢定

在母數統計法中的變異數分析時，皆會假設不同的母體分布皆屬於常態分布，同時其變異數相等。故變異數分析不適用於順序尺度(ordinal scale)的數值型態之分析。運用克拉斯卡–瓦歷斯檢定法(Kruskal-Wallis test, K-W 檢定)於順序尺度的數值型態，與母數統計法中的變異數分析目的雷同。克拉斯卡–瓦歷斯檢定法可以視為曼–懷特尼 U 檢定的一種延伸運用，以檢定三個或三個以上獨立母體分布是否相同。

克拉斯卡–瓦歷斯檢定法(Kruskal-Wallis test, K-W 檢定)或 H 檢定法使用於檢定 k 組獨立樣本(independent samples)是否來自相同的一個母體或中位數(medians)相等的 k 組母體。

A.設定顯著水準 α。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: $M_{d1} = M_{d2} = M_{d3} = \ldots = M_{dk}$ 或 H_0: k 個母體分布皆相同。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: $M_{di} \neq M_{dj}$ 或 H_0: k 個母體中至少有兩個母體之間的分布不相同。

其中 M_{d1}：代表第 1 組獨立樣本的中位數(medians)、median of the sample 1

D.計算檢定統計值：W 值(χ^2)

$$W = \frac{12}{n_t \times (n_t+1)} \times \sum_{i=1}^{k} \frac{\left(\sum_{i=1}^{k} R_i\right)^2}{n_i} - 3 \times (n_t+1)$$

其中 n_t：代表全部樣本數量 $n_t = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$

R_i：代表第 i 組獨立個別樣本在全部樣本中的(大小)順位(rank)

n_i：代表第 i 組獨立樣本的樣本數量

k：獨立樣本的組數

顯著性判斷

若檢定統計值 $W \leq$ 臨界值$\chi^2_{\alpha,k-1}$代表推論虛無假設(null hypothesis) H_0: $M_{d1} = M_{d2} = M_{d3} = \ldots = M_{dk}$ 成立。

若檢定統計值 $W >$ 臨界值$\chi^2_{\alpha,k-1}$代表拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0: $M_{d1} = M_{d2} = M_{d3} = \ldots = M_{dk}$，推論對立假設(alternative hypothesis) H_1: $M_{di} \neq M_{dj}$ 成立。

其中$\chi^2_{\alpha,k-1}$：代表在顯著水準 α，自由度 $df = k - 1$ 的卡方值。

k：獨立樣本的組數

事後比較公式

$$\text{CD} = z_{\frac{\alpha}{k\times(k-1)}} \times \sqrt{\frac{N\times(N+1)}{12} \times \left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j}\right)}$$

其中$\bar{R}_i$：代表第 i 組獨立個別樣本在全部樣本中的(大小)順位(rank)之平均值

$\bar{R}_j$：代表第 j 組獨立個別樣本在全部樣本中的(大小)順位(rank)之平均值

$z_{\frac{\alpha}{k\times(k-1)}}$：代表在機率為$\frac{\alpha}{k\times(k-1)}$時的標準化 z 值。例：在 $\alpha = 0.05$ 和 $k = 3$ 條件，$z = 2.3940$。

α：代表顯著水準

N：代表全部樣本數量

n_i：代表第 i 組獨立樣本的樣本數量

k：獨立樣本的組數

顯著性判斷

若$|\bar{R}_i - \bar{R}_j| <$ CD 代表第 i 組和第 j 組中位數之間經事後比較後，發現沒有顯著性差異。

若$|\bar{R}_i - \bar{R}_j| >$ CD 代表第 i 組和第 j 組中位數之間經事後比較後，發現達到顯著性差異水準。

範例 19.9　欲了解觀光系學生對 A、B 和 C 三家連鎖速食餐廳的滿意度分布是否相同，若滿意度分布屬於非常態分布，今分別隨機抽取 8、9 和 7 位同學前往進行調查分析，調查結果如下表所示，在顯著水準 $\alpha = 0.05$ 下，利用克拉斯卡–瓦歷斯檢定法，進行學生對 A、B 和 C 三家連鎖速食餐廳的滿意度分布是否相同之統計檢定。

學生	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A 餐廳滿意度	5	7	3	6	8	5	5	6	
B 餐廳滿意度	2	6	9	5	7	3	4	2	0
C 餐廳滿意度	10	9	9	8	7	6	8		

題解：

A.設定顯著水準 $\alpha = 0.05$，臨界值$\chi^2_{\alpha,k-1} = \chi^2_{0.05,3-1} = \chi^2_{0.05,2} = 5.9915$【使用 Excel 軟體 CHISQ.INV.RT(右尾機率)函數查詢獲得】。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: 學生對三家連鎖速食餐廳滿意度分布相同。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: 學生對三家連鎖速食餐廳滿意度分布不完全相同。

D.計算檢定統計值 W

將三家餐廳的樣本觀測值數值合併排列其序位等級，若兩觀測值數值相同時，取其平均值為其序位等級。

學生	1	2	3	4	5	6	7	8	9	等級和 W
A 餐廳滿意度 x_{Ai}	5	7	3	6	8	5	5	6		
序位等級	8.5	16	4.5	12.5	19	8.5	8.5	12.5		90
B 餐廳滿意度 x_{Bi}	2	6	9	5	7	3	4	2	0	
序位等級	2.5	12.5	22	8.5	16	4.5	6	2.5	1	75.5
C 餐廳滿意度 x_{Ci}	10	9	9	8	7	6	8			
序位等級	24	22	22	19	16	12.5	19			134.5

$$n_t = n_A + n_B + n_C = 8 + 9 + 7 = 24$$

檢定統計值 $W = \frac{12}{n_t\times(n_t+1)} \times \sum_{i=1}^{k}\frac{\left(\sum_{i=1}^{k}R_i\right)^2}{n_i} - 3\times(n_t+1) = \frac{12}{24\times(24+1)} \times \left[\frac{90^2}{8}+\frac{75.5^2}{9}+\frac{134.5^2}{7}\right] - 3\times(24+1) = \frac{12}{600} \times (1012.5000 + 633.3611 + 2584.3214) - 75 = 84.6037 - 75 = 9.6037$

E.因檢定統計值 $W = 9.6037 > $ 臨界值$\chi^2_{\alpha,k-1} = 5.9915$，拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0，接受對立假設(alternative hypothesis) H_1: 學生對三家連鎖速食餐廳滿意度分布不完全相同。因此，依據分別隨機抽出 8、9 和 7 位學生的調查資料，統計推論發現學生對於三家連鎖速食餐廳的滿意度分布不完全相同，達到顯著性的差異水準。

A 和 B 兩家連鎖速食餐廳滿意度事後比較

$CD_{AB} = z_{\frac{\alpha}{k\times(k-1)}} \times \sqrt{\frac{N\times(N+1)}{12}\times\left(\frac{1}{n_A}+\frac{1}{n_B}\right)} = z_{\frac{0.05}{3\times(3-1)}} \times \sqrt{\frac{24\times(24+1)}{12}\times\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{9}\right)} = z_{0.00833} \times 3.4359 = 2.3940$(使用 Excel 軟體 NORM.S.INV 函數查詢獲得) $\times 3.4359 = 8.2255$

$\bar{R}_A = \frac{W_A}{n_A} = \frac{90}{8} = 11.25$；$\bar{R}_B = \frac{W_B}{n_B} = \frac{75.5}{9} = 8.3889$

$|\bar{R}_A - \bar{R}_B| = 11.25 - 8.3889 = 2.8611 < CD_{AB} = 8.2255$，代表第 A 組和第 B 組中位數之間經事後比較後，發現沒有顯著性差異。

A 和 C 兩家連鎖速食餐廳滿意度事後比較

$CD_{AC} = z_{\frac{\alpha}{k\times(k-1)}} \times \sqrt{\frac{N\times(N+1)}{12}\times\left(\frac{1}{n_A}+\frac{1}{n_C}\right)} = z_{\frac{0.05}{3\times(3-1)}} \times \sqrt{\frac{24\times(24+1)}{12}\times\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{7}\right)} = z_{0.00833} \times 3.6596 = 2.3940$(使用 Excel 軟體 NORM.S.INV 函數查詢獲得) $\times 3.6596 = 8.7611$

$\bar{R}_A = \frac{W_A}{n_A} = \frac{90}{8} = 11.25$；$\bar{R}_C = \frac{W_C}{n_C} = \frac{134.5}{7} = 19.2143$

$|\bar{R}_A - \bar{R}_C| = |11.25 - 19.2143| = 7.9643 < CD_{AC} = 8.7611$，代表第 A 組和第 C 組中位數之間經事後比較後，發現沒有達到顯著性差異水準。

B 和 C 兩家連鎖速食餐廳滿意度事後比較

$CD_{BC} = z_{\frac{\alpha}{k\times(k-1)}} \times \sqrt{\frac{N\times(N+1)}{12}\times\left(\frac{1}{n_B}+\frac{1}{n_C}\right)} = z_{\frac{0.05}{3\times(3-1)}} \times \sqrt{\frac{24\times(24+1)}{12}\times\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{7}\right)} = z_{0.00833} \times 3.5635 = 2.3940$(使用 Excel 軟體 NORM.S.INV 函數查詢獲得) $\times 3.5635 = 8.5309$

$\bar{R}_B = \frac{W_B}{n_B} = \frac{75.5}{9} = 8.3889$；$\bar{R}_C = \frac{W_C}{n_C} = \frac{134.5}{7} = 19.2143$

$|\bar{R}_B - \bar{R}_C| = |8.3889 - 19.2143| = 10.8254 > CD_{BC} = 8.5309$，代表第 B 組和第 C 組中位數之間經事後比較後，發現有達到顯著性差異水準。因$\bar{R}_B = 8.3889 < \bar{R}_C = 19.2143$，故 C 連鎖速食餐廳滿意度有顯著性的比 B 連鎖速食餐廳滿意度高。

練習 19.14 欲了解學生對 A、B 和 C 三種咖啡飲料的接受程度分布(假設為非常態分布)是否相同，今隨機分別抽取 12、11 和 10 位同學進行調查分析，調查結果如下表所示，在顯著水準 $\alpha = 0.05$ 下，利用克拉斯卡–瓦歷斯檢定法，進行學生對 A、B 和 C 三種咖啡飲料的接受程度分布是否相同之統計檢定。

學生	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
A 接受程度	10	9	3	6	8	5	6	8	8	1	8	9
B 接受程度	2	9	9	5	7	3	2	3	5	4	2	
C 接受程度	2	1	1	5	1	3	2	3	1	4		

題解：

A.設定顯著水準 $\alpha = 0.05$，臨界值$\chi^2_{\alpha,k-1} = \chi^2_{0.05,3-1} = \chi^2_{0.05,2} = 5.9915$【使用 Excel 軟體 CHISQ.INV.RT(右尾機率)函數查詢獲得】。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: 學生對三種咖啡飲料接受程度分布相同。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: 學生對三種咖啡飲料接受程度分布不完全相同。

D.計算檢定統計值 W

將三種咖啡飲料的接受程度的樣本觀測值數值合併排列其序位等級，由小排到大，若兩觀測值數值相同時，取其平均值為其序位等級。

學生	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	序位等級和 W
A 接受程度 x_{Ai}	10	9	3	6	8	5	6	8	8	1	8	9	
序位等級	33	30.5	13	22.5	26.5	19.5	22.5	26.5	26.5	3	26.5	30.5	280.5
B 接受程度 x_{Bi}	2	9	9	5	7	3	2	3	5	4	2		
序位等級	8	30.5	30.5	19.5	24	13	8	13	19.5	16.5	8		190.5
C 接受程度 x_{Ci}	2	1	1	5	1	3	2	3	1	4			
序位等級	8	3	3	19.5	3	13	8	13	3	16.5			90

$$n_t = n_A + n_B + n_C = 12 + 11 + 10 = 33$$

檢定統計值 $W = \frac{12}{n_t \times (n_t+1)} \times \sum_{i=1}^{k} \frac{\left(\sum_{i=1}^{k} R_i\right)^2}{n_i} - 3\times(n_t+1) = \frac{12}{33\times(33+1)} \times \left[\frac{280.5^2}{12} + \frac{190.5^2}{11} + \frac{90^2}{10}\right] - 3\times(33+1) = \frac{12}{1122} \times (6556.688 + 3299.114 + 810) - 102 = 114.0727 - 102 = 12.0727$

E.因檢定統計值 $W = 12.0727 > $ 臨界值$\chi^2_{\alpha,k-1} = 5.9915$，拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0，接受對立假設(alternative hypothesis) H_1: 學生對三種咖啡飲料接受程度分布不完全相同。因此，依據分別隨機抽出 12、11 和 10 位學生的調查資料，統計推論發現學生對三種咖啡飲料接受程度分布不完全相同，達到顯著性的差異水準。

A 和 B 兩種咖啡飲料接受程度事後比較

$CD_{AB} = z_{\frac{\alpha}{k\times(k-1)}} \times \sqrt{\frac{N\times(N+1)}{12} \times \left(\frac{1}{n_A} + \frac{1}{n_B}\right)} = z_{\frac{0.05}{3\times(3-1)}} \times \sqrt{\frac{33\times(33+1)}{12} \times \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{11}\right)} = z_{0.00833} \times 4.0363 = 2.3940$(使用 Excel 軟體 NORM.S.INV 函數查詢獲得) $\times 4.0363 = 9.6628$

$\bar{R}_A = \frac{W_A}{n_A} = \frac{280.5}{12} = 23.375$；$\bar{R}_B = \frac{W_B}{n_B} = \frac{190.5}{11} = 17.3182$

$|\bar{R}_A - \bar{R}_B| = 23.3750 - 17.3182 = 6.0568 < CD_{AB} = 9.6628$，代表第 A 組和第 B 組中位數之間經事後比較後，發現沒有顯著性差異。

A 和 C 兩種咖啡飲料接受程度事後比較

$CD_{AC} = z_{\frac{\alpha}{k\times(k-1)}} \times \sqrt{\frac{N\times(N+1)}{12} \times \left(\frac{1}{n_A} + \frac{1}{n_C}\right)} = z_{\frac{0.05}{3\times(3-1)}} \times \sqrt{\frac{33\times(33+1)}{12} \times \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{10}\right)} = z_{0.00833} \times 4.1403 =$

2.3940(使用 Excel 軟體 NORM.S.INV 函數查詢獲得) × 4.1403 = 9.9117

$\bar{R}_A = \frac{W_A}{n_A} = \frac{280.5}{12} = 23.3750$；$\bar{R}_C = \frac{W_C}{n_C} = \frac{90}{10} = 9.0000$

$|\bar{R}_A - \bar{R}_C|$ = 23.3750 – 9.0000 = 14.3750 > CD_{AC} = 9.9117，代表第 A 組和第 C 組中位數之間經事後比較後，發現達到顯著性差異水準。因$\bar{R}_A$ = 23.3750 > $\bar{R}_C$ = 9.0000，故 A 咖啡飲料有顯著性的比 C 咖啡飲料接受程度高。

B 和 C 兩種咖啡飲料接受程度事後比較

$CD_{BC} = z_{\frac{\alpha}{k\times(k-1)}} \times \sqrt{\frac{N\times(N+1)}{12}\times\left(\frac{1}{n_B}+\frac{1}{n_C}\right)} = z_{\frac{0.05}{3\times(3-1)}} \times \sqrt{\frac{33\times(33+1)}{12}\times\left(\frac{1}{11}+\frac{1}{10}\right)} = z_{0.00833} \times 4.2249 =$ 2.3940(使用 Excel 軟體 NORM.S.INV 函數查詢獲得) × 4.2249 = 10.1144

$\bar{R}_B = \frac{W_B}{n_B} = \frac{190.5}{11} = 17.3182$；$\bar{R}_C = \frac{W_C}{n_C} = \frac{90}{10} = 9.0000$

$|\bar{R}_B - \bar{R}_C|$ = 17.3182 – 9.0000 = 8.3182 < CD_{BC} = 10.1144，代表第 A 組和第 C 組中位數之間經事後比較後，發現沒有達到顯著性差異水準。

練習 19.15 欲了解學生對 A、B 和 C 三種教學方式的接受程度分布(假設為非常態分布)是否相同，今分別隨機抽取 11、12 和 13 位同學進行調查分析，調查結果如下表所示，在顯著水準 α = 0.05 下，利用克拉斯卡–瓦歷斯檢定法，進行學生對 A、B 和 C 三種教學方式的接受程度分布是否相同之統計檢定。

學生	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
A 接受程度	10	9	3	6	8	5	5	6	10	4	9		
B 接受程度	2	9	9	5	7	3	4	3	5	3	8	4	
C 接受程度	2	1	3	5	4	3	4	2	2	3	5	4	6

題解：

A.設定顯著水準 α = 0.05，臨界值$\chi^2_{\alpha,k-1} = \chi^2_{0.05,3-1} = \chi^2_{0.05,2}$ = 5.9915【使用 Excel 軟體 CHISQ.INV.RT(右尾機率)函數查詢獲得】。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: 學生對三種教學方式接受程度分布相同。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: 學生對三種教學方式接受程度分布不相同。

D.計算檢定統計值 W

將三種教學方式的接受程度的樣本觀測值數值合併排列其序位等級，由小排到大，若兩觀測值數值相同時，取其平均值為其序位等級。

學生	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	序位等級和 W
A 接受程度 x_{Ai}	10	9	3	6	8	5	5	6	10	4	9			
序位等級	35.5	32.5	9	26	29.5	21.5	21.5	26	35.5	15.5	32.5			285
B 接受程度 x_{Bi}	2	9	9	5	7	3	4	3	5	3	8	4		
序位等級	3.5	32.5	32.5	21.5	28	9	15.5	9	21.5	9	29.5	15.5		227
C 接受程度 x_{Ci}	2	1	3	5	4	3	4	2	2	3	5	4	6	
序位等級	3.5	1	9	21.5	15.5	9	15.5	3.5	3.5	9	21.5	15.5	26	154

$n_t = n_A + n_B + n_C = 11 + 12 + 13 = 36$

檢定統計值 $W = \frac{12}{n_t\times(n_t+1)} \times \sum_{i=1}^{k}\frac{\left(\sum_{i=1}^{k} R_i\right)^2}{n_i} - 3\times(n_t+1) = \frac{12}{36\times(36+1)} \times \left[\frac{285^2}{11}+\frac{227^2}{12}+\frac{154^2}{13}\right] - 3\times(36+1) = \frac{12}{1332} \times (7384.09 + 4294.08 + 1824.31) - 111 = 121.644 - 111 = 10.6440$

E.因檢定統計值 W = 10.6440 > 臨界值$\chi^2_{\alpha,k-1}$ = 5.9915，拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0，接受對立

假設(alternative hypothesis) H_1: 學生對三種教學方式接受程度分布不完全相同。因此，依據分別隨機抽出 11、12 和 13 位學生的調查資料，統計推論發現學生對三種教學方式接受程度分布不完全相同，達到顯著性的差異水準。

A 和 B 兩種教學方式接受程度事後比較

$CD_{AB} = z_{\frac{\alpha}{k\times(k-1)}} \times \sqrt{\frac{N\times(N+1)}{12}\times\left(\frac{1}{n_A}+\frac{1}{n_B}\right)} = z_{\frac{0.05}{3\times(3-1)}} \times \sqrt{\frac{36\times(36+1)}{12}\times\left(\frac{1}{11}+\frac{1}{12}\right)} = z_{0.00833} \times 4.3978 =$ 2.3940(使用 Excel 軟體 NORM.S.INV 函數查詢獲得) × 4.3978 = 10.5283

$\bar{R}_A = \frac{W_A}{n_A} = \frac{285}{11} = 25.9091$；$\bar{R}_B = \frac{W_B}{n_B} = \frac{227}{12} = 18.9167$

$|\bar{R}_A - \bar{R}_B| = 25.9091 - 18.9167 = 6.9924 < CD_{AB} = 10.5283$，代表第 *A* 組和第 B 組中位數之間經事後比較後，發現沒有顯著性差異。

A 和 C 兩種教學方式接受程度事後比較

$CD_{AC} = z_{\frac{\alpha}{k\times(k-1)}} \times \sqrt{\frac{N\times(N+1)}{12}\times\left(\frac{1}{n_A}+\frac{1}{n_C}\right)} = z_{\frac{0.05}{3\times(3-1)}} \times \sqrt{\frac{36\times(36+1)}{12}\times\left(\frac{1}{11}+\frac{1}{13}\right)} = z_{0.00833} \times 4.3162 =$ 2.3940(使用 Excel 軟體 NORM.S.INV 函數查詢獲得) × 4.3162 = 10.3328

$\bar{R}_A = \frac{W_A}{n_A} = \frac{285}{11} = 25.9091$；$\bar{R}_C = \frac{W_C}{n_C} = \frac{154}{13} = 11.8462$

$|\bar{R}_A - \bar{R}_C| = 25.9091 - 11.8462 = 14.0629 > CD_{AC} = 10.3328$，代表第 *A* 組和第 C 組中位數之間經事後比較後，發現達到顯著性差異水準。因$\bar{R}_A = 25.9091 > \bar{R}_C = 11.3328$，故 A 教學方法有顯著性的比 C 教學方法接受程度高。

B 和 C 兩種教學方法接受程度事後比較

$CD_{BC} = z_{\frac{\alpha}{k\times(k-1)}} \times \sqrt{\frac{N\times(N+1)}{12}\times\left(\frac{1}{n_B}+\frac{1}{n_C}\right)} = z_{\frac{0.05}{3\times(3-1)}} \times \sqrt{\frac{36\times(36+1)}{12}\times\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{13}\right)} = z_{0.00833} \times 4.2176 =$ 2.3940(使用 Excel 軟體 NORM.S.INV 函數查詢獲得) × 4.2176 = 10.0969

$\bar{R}_B = \frac{W_B}{n_B} = \frac{227}{12} = 18.9167$；$\bar{R}_C = \frac{W_C}{n_C} = \frac{154}{13} = 11.8462$

$|\bar{R}_B - \bar{R}_C| = 18.9167 - 11.8462 = 7.0705 < CD_{BC} = 10.0969$，代表第 *A* 組和第 C 組中位數之間經事後比較後，發現沒有達到顯著性差異水準。

16.6 隨機性檢定

在進行統計推論時，若採用簡單隨機抽樣獲得的樣本資料，可能產生的誤差相較於非隨機樣本為小。採用隨機抽樣獲得的樣本，對母體的代表性較高。故，檢驗抽樣所獲得的樣本分布，其是否為隨機抽樣所獲得，就變得非常重要。

在迴歸分析中，觀測值與預測值之殘差，必須具備隨機特性，若非隨機特性，不符合迴歸分析的基本假設，故檢驗觀測值與預測值之殘差是否為隨機亦非常重要。

一排連續數列(集合)中，相鄰相同元素的最大子數列(子集合)，即成為一個連(run)。例如在成功(S)與失敗(F)的範例中，產生下列結果的集合。

$\boxed{\text{S S S}}\boxed{\text{F F F F}}\boxed{\text{S S S}}\boxed{\text{F}}\boxed{\text{S S S S}}$

前面連續三個相同成功 S，構成 S 的最大子數列，接續連續四個失敗 F，構成 F 的最大子數列，依序，在前述 15 個成功與失敗的元素中，一共發現 5 個連(runs)。

在一個數列中，連(run)的數量太多或太少都代表此數列出現成功與失敗的分布不隨機出現，故**隨機性檢定(randomness test)**或**連檢定(runs test)**皆屬於雙尾檢定。

小量樣本數($n_1 \le 10$ 和 $n_2 \le 10$)隨機性檢定

檢定程序

A.設定顯著水準 α。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: 樣本觀測值屬於隨機分布。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: 樣本觀測值不屬於隨機分布。

D.計算檢定統計值–連數 r

樣本觀測值大於中位數者以 H 符號標示；樣本觀測值小於中位數者以 L 符號標示。分別計算 H 和 L 符號的出現次數，將 L 符號的出現個數假設為 n_1；H 符號的出現個數假設為 n_2。查連檢定累計機率表可得 $P(R \le r)$機率，其中 r 為連數，數值範圍大於等於 2 的正整數；統計值連數的觀測值。

計算機率 p 值

若連數 $r \ge \frac{2\times n_1\times n_2}{n_1+n_2}+1$，機率 $p = 2 \times P(R \ge r|n_1, n_2)$

若連數 $r < \frac{2\times n_1\times n_2}{n_1+n_2}+1$，機率 $p = 2 \times P(R \le r|n_1, n_2)$

E.決定統計推論

若連數 $r \ge \frac{2\times n_1\times n_2}{n_1+n_2}+1$，機率 $p = 2 \times P(R \ge r|n_1, n_2)$

當機率 $p = 2 \times P(R \ge r|n_1, n_2) \ge$ 顯著水準 α，接受虛無假設(null hypothesis) H_0。

當機率 $p = 2 \times P(R \ge r|n_1, n_2) <$ 顯著水準 α，拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0，接受對立假設(alternative hypothesis) H_1。

若連數 $r < \frac{2\times n_1\times n_2}{n_1+n_2}+1$，則機率 $p = 2 \times P(R \le r|n_1, n_2)$

當機率 $p = 2 \times P(R \le r|n_1, n_2) \ge$ 顯著水準 α，接受虛無假設(null hypothesis) H_0。

當機率 $p = 2 \times P(R \le r|n_1, n_2) <$ 顯著水準 α，拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0，接受對立假設(alternative hypothesis) H_1。

大量樣本數($n_1 \ge 10$ 和 $n_2 \ge 10$)隨機性檢定

檢定統計值 R 的分布型態會趨近於常態分布，故即可使用標準化 Z 值運算機率，在雙尾檢定方法進行統計推論。

檢定程序

A.設定顯著水準 α。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: 樣本觀測值屬於隨機分布。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: 樣本觀測值不屬於隨機分布。

D.計算檢定統計值–z 值

統計值 r 的平均值或期望值 $E(r) = \bar{r} = \frac{2\times n_1\times n_2}{n_1+n_2}+1$

統計值 r 的變異數 $V(r) = \frac{2\times n_1\times n_2\times(2\times n_1\times n_2-n_1-n_2)}{(n_1+n_2)^2\times(n_1+n_2-1)}$

統計值 r 的標準(偏)差 $\sigma_r = \sqrt{\frac{2\times n_1\times n_2\times(2\times n_1\times n_2-n_1-n_2)}{(n_1+n_2)^2\times(n_1+n_2-1)}}$

檢定統計值 $z = \frac{r-E(r)}{\sigma_r} = \frac{r-\left(\frac{2\times n_1\times n_2}{n_1+n_2}+1\right)}{\sqrt{\frac{2\times n_1\times n_2\times(2\times n_1\times n_2-n_1-n_2)}{(n_1+n_2)^2\times(n_1+n_2-1)}}}$

E.決定統計推論

若左側臨界值$-z_{\frac{\alpha}{2}} \le$ 檢定統計值 $z \le$ 右側臨界值$z_{\frac{\alpha}{2}}$，接受虛無假設(null hypothesis) H_0。

若檢定統計值 $z <$ 左側臨界值$-z_{\frac{\alpha}{2}}$或檢定統計值 $z >$ 右側臨界值$z_{\frac{\alpha}{2}}$，拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0，接受對立假設(alternative hypothesis) H_1。

範例 19.10 欲了解純純咖啡館販售卡布奇諾咖啡飲料數量(杯數)是否屬於隨機性，查詢過去兩週卡布奇諾咖啡飲料的販售數量依日期序如下所示，在顯著水準 $\alpha = 0.05$ 下，利用隨機性檢定法，針對該咖啡館販售卡布奇諾咖啡飲料數量(杯數)進行隨機統計檢定。

15	24	31	24	14	26	37	28	19	45	7	9	23	18

題解：

A.設定顯著水準 $\alpha = 0.05$。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: 咖啡館每天販售卡布奇諾咖啡飲料數量屬於隨機分布。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: 咖啡館每天販售卡布奇諾咖啡飲料數量不屬於隨機分布。

D.計算檢定統計值–連數 r

計算中位數，將前述樣本觀測值依據數值大小，從小排到大排列。樣本數量 $n = 14$ 屬於偶數，中位數為第$\frac{n}{2}$和$\frac{n}{2}+1$個(順位)最大樣本數值(觀測值)的算術平均值。第$\frac{n}{2} = \frac{14}{2} = 7$ 和$\frac{n}{2}+1 = \frac{14}{2}+1 = 7+1 = 8$ 個(順位)，故中位數 $= \frac{23+24}{2} = 23.5$。

7	9	14	15	18	19	23	24	24	26	28	31	37	45

依據原來樣本的日期序位，將樣本觀測值與中位數進行比較，若樣本觀測值數值大於中位數則標示為 H，樣本觀測值數值小於中位數則標示為 L。當樣本觀測值數值等於中位數時，將該觀測值視為不計捨棄。

15	24	31	24	14	26	37	28	19	45	7	9	23	18
L	H	H	H	L	H	H	H	L	H	L	L	L	L
1	2			3	4			5	6	7			

故連數 $r = 7$。L 符號數量有 7 個 $= n_1 = 7$；H 符號數量有 7 個 $= n_2 = 7$。

若連數 $r = 7 < \frac{2 \times n_1 \times n_2}{n_1 + n_2} + 1 = \frac{2\times7\times7}{7+7} + 1 = 7 + 1 = 8$，機率 $p = 2 \times P(R \le r|n_1, n_2) = 2 \times P(R \le 7|7, 7) = 2 \times 0.383$(查連檢定累計機率表) $= 0.766$。

E.因機率 $p = 0.766 > $ 顯著水準 $\alpha = 0.05$，接受虛無假設(null hypothesis) H_0: 咖啡館每天販售卡布奇諾咖啡飲料數量屬於隨機分布。因此，依據過去兩週卡布奇諾咖啡飲料的販售數量，統計推論發現卡布奇諾咖啡飲料的販售數量屬於隨機性。

範例 19.11 欲了解純純咖啡館販售卡布奇諾咖啡飲料數量(杯數)是否屬於隨機性，查詢過去兩週卡布奇諾咖啡飲料的販售數量依日期序如下所示，在顯著水準 $\alpha = 0.05$ 下，利用隨機性檢定法，針對該咖啡館販售卡布奇諾咖啡飲料數量(杯數)進行隨機統計檢定。

15	24	17	24	14	36	19	28	19	45	7	29	23	18

題解：

A.設定顯著水準 $\alpha = 0.05$。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: 咖啡館每天販售卡布奇諾咖啡飲料數量屬於隨機分布。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: 咖啡館每天販售卡布奇諾咖啡飲料數量不屬於隨機分布。

D.計算檢定統計值–連數 r

計算中位數，將前述樣本觀測值依據數值大小，從小排到大排列。樣本數量 $n = 14$ 屬於偶數，中位數為第$\frac{n}{2}$和$\frac{n}{2}+1$個(順位)最大樣本數值(觀測值)的算術平均值。第$\frac{n}{2} = \frac{14}{2} = 7$ 和$\frac{n}{2}+1 = \frac{14}{2}+1 = 7+1 = 8$ 個(順位)，故中位數 $= \frac{19+23}{2} = 21$。

7	14	15	17	18	19	19	23	24	24	28	29	36	45

依據原來樣本的日期序位，將樣本觀測值與中位數進行比較，若樣本觀測值數值大於中位數則標示為 H，樣本觀測值數值小於中位數則標示為 L。當樣本觀測值數值等於中位數時，將該觀測值視為不計捨棄。

15	24	17	24	14	36	19	28	19	45	7	29	23	18
L	H	L	H	L	H	L	H	L	H	L	H	H	L
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12		13

故連數 $r = 13$。L 符號數量有 7 個 $= n_1 = 7$；H 符號數量有 7 個 $= n_2 = 7$。

若連數 $r = 13 \geq \frac{2 \times n_1 \times n_2}{n_1 + n_2} + 1 = \frac{2 \times 7 \times 7}{7+7} + 1 = 7 + 1 = 8$，機率 $p = 2 \times P(R \geq r|n_1, n_2) = 2 \times [1 - P(R \leq r-1|n_1, n_2) = 2 \times [1 - P(R \leq 13\text{-}1|7, 7) = 2 \times [1 - 0.996$(查連檢定累計機率表)$] = 0.008$

E.因機率 $p = 0.008 <$ 顯著水準 $\alpha = 0.05$，拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0，接受對立假設(alternative hypothesis) H_1: 咖啡館每天販售卡布奇諾咖啡飲料數量不屬於隨機分布。因此，依據過去兩週卡布奇諾咖啡飲料的販售數量，統計推論發現卡布奇諾咖啡飲料的販售數量不屬於隨機性。

練習 19.16 欲了解進入純純咖啡館的消費者順序，其身高(公分)是否屬於隨機性，查詢過去 1 個小時內進入該咖啡館消費者的身高依序如下所示，在顯著水準 $\alpha = 0.05$ 下，利用隨機性檢定法，針對進入該咖啡館消費者之身高進行順序隨機統計檢定。

152	124	131	149	184	168	175	185	169	145	174	169	159	139	158

題解：

A.設定顯著水準 $\alpha = 0.05$。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: 進入咖啡館消費者的身高屬於隨機分布。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: 進入咖啡館消費者的身高不屬於隨機分布。

D.計算檢定統計值–連數 r

計算中位數，將前述樣本觀測值依據數值大小，從小排到大排列。樣本數量 $n = 15$ 屬於奇數，中位數為第$\frac{n+1}{2}$個(順位)最大樣本數值(觀測值)。第$\frac{n+1}{2} = \frac{15+1}{2} = 8$ 個(順位)，故中位數 $= 159$。

124	131	139	145	149	152	158	159	168	169	169	174	175	184	185

依據原來樣本的進入咖啡館序位，將樣本觀測值與中位數進行比較，若樣本觀測值數值大於中位數則標示為 H，樣本觀測值數值小於中位數則標示為 L。當樣本觀測值數值等於中位數時，將該觀測值視為不計捨棄。

152	124	131	149	184	168	175	185	169	145	174	169	159	139	158
L	L	L	L	H	H	H	H	H	L	H	H		L	L
1				2					3	4			5	

故連數 $r = 5$。L 符號數量有 7 個 $= n_1 = 7$；H 符號數量有 7 個 $= n_2 = 7$。

若連數 $r = 5 < \frac{2 \times n_1 \times n_2}{n_1 + n_2} + 1 = \frac{2 \times 7 \times 7}{7+7} + 1 = 7 + 1 = 8$，機率 $p = 2 \times P(R \leq r|n_1, n_2) = 2 \times P(R \leq 5|7, 7) = 2 \times 0.078$(查連檢定累計機率表)$= 0.156$

E.因機率 $p = 0.156 >$ 顯著水準 $\alpha = 0.05$，接受虛無假設(null hypothesis) H_0: 進入咖啡館消費者的身高屬於隨機分布。因此，依據過去 1 個小時進入咖啡館消費者的身高順序，統計推論發現進入純純咖啡館消費者之身高屬於隨機性。

範例 19.12 欲了解連續投擲一個錢幣 18 次出現正反面的結果「++--- -+--- ---++ +++」是否屬於隨機性，在顯著水準 $\alpha = 0.05$ 下，利用隨機性檢定法，針對前述結果進行隨機統計檢定。

題解：

A.設定顯著水準 $\alpha = 0.05$。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: 投擲一個錢幣出現正反面的結果屬於隨機分布。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: 投擲一個錢幣出現正反面的結果不屬於隨機分布。

D.計算檢定統計值–連數 r

$\underline{++}\ \underline{----}\ \underline{+}\ \underline{------}\ \underline{+++++}$

故連數 $r = 5$。+符號數量有 8 個 $= n_1 = 8$；-符號數量有 10 個 $= n_2 = 10$。

若連數 $r = 5 < \frac{2\times n_1\times n_2}{n_1+n_2} + 1 = \frac{2\times 8\times 10}{8+10} + 1 = 8.8888 + 1 = 9.8888$，機率 $p = 2 \times P(R \le r|n_1, n_2) = 2 \times P(R \le 5|8, 10) = 2 \times 0.013$(查連檢定累計機率表) $= 0.026$

E.因機率 $p = 0.026 <$ 顯著水準 $\alpha = 0.05$，拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0，接受對立假設(alternative hypothesis) H_1: 投擲一個錢幣出現正反面的結果不屬於隨機分布。因此，依據連續投擲一個錢幣 18 次出現正反面的結果，統計推論發現出現正面與反面的結果不屬於隨機性。

範例 19.13 欲了解連續投擲一個錢幣 30 次出現正反面的結果「++--- -+--- ---++ +++-- --++- +++--」是否屬於隨機性，在顯著水準 $\alpha = 0.05$ 下，利用隨機性檢定法，針對前述結果進行隨機統計檢定。

題解：

A.設定顯著水準 $\alpha = 0.05$，左側臨界值 $-z_{\frac{\alpha}{2}} = -z_{\frac{0.05}{2}} = -z_{0.025} = -1.96$；右側臨界值 $z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{\frac{0.05}{2}} = z_{0.025} = 1.96$(使用 Excel 軟體 NORM.S.INV 函數查詢獲得)。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: 投擲一個錢幣出現正反面的結果屬於隨機分布。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: 投擲一個錢幣出現正反面的結果不屬於隨機分布。

D.計算檢定統計值–z 值

$$\underline{++}\ \underline{----}\ \underline{+}\ \underline{------}\ \underline{+++++}\ \underline{----}\ \underline{++}\ \underline{-}\ \underline{+++}\ \underline{--}$$

故連數 $r = 10$。+符號數量有 13 個 $= n_1 = 13$；-符號數量有 17 個 $= n_2 = 17$。

本例屬於大量樣本數($n_1 \ge 10$ 和 $n_2 \ge 10$)，故檢定統計值 r 的分布型態會趨近於常態分布。

$$E(r) = \bar{r} = \frac{2\times n_1\times n_2}{n_1+n_2} + 1 = \frac{2\times 13\times 17}{13+17} + 1 = \frac{442}{30} + 1 = 15.7333$$

$$\sigma_r = \sqrt{\frac{2\times n_1\times n_2\times(2\times n_1\times n_2-n_1-n_2)}{(n_1+n_2)^2\times(n_1+n_2-1)}} = \sqrt{\frac{2\times 13\times 17\times(2\times 13\times 17-13-17)}{(13+17)^2\times(13+17-1)}} = \sqrt{\frac{442\times 412}{30^2\times 29}} = \sqrt{\frac{182104}{26100}} = \sqrt{6.9772} = 2.6414$$

$$\text{檢定統計值 } z = \frac{r-E(R)}{\sigma_R} = \frac{10-15.7333}{2.6414} = \frac{-5.7333}{2.6414} = -2.1706$$

E.因檢定統計值 $z = -2.1706 <$ 左側臨界值 $-z_{\frac{\alpha}{2}} = -1.96 <$ 右側臨界值 $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$，拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0，接受對立假設(alternative hypothesis) H_1: 投擲一個錢幣出現正反面的結果不屬於隨機分布。因此，依據連續投擲一個錢幣 30 次出現正反面的結果，統計推論發現出現正面與反面的結果不屬於隨機性。

16.7 等級相關檢定

在母數統計法中欲評量母體資料中變數 x 和變數 y 兩個配對變數之間的相關程度，例如：欲評量學生的身高與體重兩個變數的相關程度，即使用 Pearson 相關係數 ρ_{xy}。若欲評量母體資料中兩個順序尺度(ordinal scale)變數的相關程度，例如：欲評量學生國文的成績排名與英文的成績排名兩個配對變數的相關程度，即必須使用等級相關係數 ρ_s 或 Spearman 等級相關係數(Spearman rank correlation coefficient)。

當兩個隨機變數不屬於常態分布時，即不適合使用 Pearson 相關係數 ρ_{xy} 評量兩個變數的相關程度，兩個隨機變數不屬於常態分布時，可以將原始數值型態為區間尺度(interval scale)或比例尺度(ratio scale)轉換為順序尺度的型態，再以等級相關係數 ρ_s 評量兩個變數的相關程度。

利用樣本資料所得的等級相關係數，一般使用 r_s 符號標示。

$$r_s = 1 - \frac{6\times\sum_{i=1}^{n} d_i^2}{n\times(n^2-1)} = 1 - \frac{6\times\sum_{i=1}^{n} d_i^2}{n^3-n}$$

其中 d_i：兩個配對變數第 i 項觀測值的序位等級之差

n：配對樣本數量

等級相關係數 r_s 的數值範圍與 Pearson 相關係數 r_{xy} 的數值範圍相同，皆必須介於-1 到+1 之間。等級相關係數 r_s 的數值意涵亦與 Pearson 相關係數 r_{xy} 相同。

等級相關係數 $r_s = 1$，代表 x_i 與 y_i 兩個變數的等級順序完全相同。

等級相關係數 $r_s = -1$，代表 x_i 與 y_i 兩個變數的等級順序完全相反。

等級相關係數 $r_s = 0$，代表 x_i 與 y_i 兩個變數的等級順序完全沒有關係。

利用樣本觀測值即可估算樣本等級相關係數 r_s，運用樣本等級相關係數 r_s 推論母體等級相關係數 ρ_s，以檢定母體等級相關係數 ρ_s 是否等於 0，即代表兩個順序尺度變數之間是否有關係存在。

小樣本數量($n < 30$)

在母體等級相關係數 $\rho_s = 0$ 的情況，樣本等級相關係數 r_s 屬於一對稱分布，其平均值為 0，變異數為 $\frac{1}{n-1}$，故可以標示為

$$\text{樣本等級相關係數 } r_s \sim \text{對稱分布}(0, \tfrac{1}{n-1})$$

在顯著水準 α 與樣本數量 n 情況下，可利用 Spearman 等級相關臨界值表進行統計檢定，以了解母體等級相關係數 ρ_s 是否等於 0。

雙尾檢定

若左側臨界值$-r_{\frac{\alpha}{2}} \leq$ 檢定統計值 $r_s \leq$ 右側臨界值$r_{\frac{\alpha}{2}}$，接受虛無假設(null hypothesis) H_0。

若檢定統計值 $r_s <$ 左側臨界值$-r_{\frac{\alpha}{2}}$或檢定統計值 $r_s >$ 右側臨界值$r_{\frac{\alpha}{2}}$，拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0，接受對立假設(alternative hypothesis) H_1。

左尾檢定

若檢定統計值 $r_s \geq$ 臨界值$-r_\alpha$，接受虛無假設(null hypothesis) H_0。

若檢定統計值 $r_s <$ 臨界值$-r_\alpha$，拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0，接受對立假設(alternative hypothesis) H_1。

右尾檢定

若檢定統計值 $r_s \leq$ 臨界值 r_α，接受虛無假設(null hypothesis) H_0。

若檢定統計值 $r_s >$ 臨界值 r_α，拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0，接受對立假設(alternative hypothesis) H_1。

大樣本數量($n \geq 30$)

在母體等級相關係數 $\rho_s = 0$ 的情況，樣本等級相關係數 r_s 屬於一常態分布，其平均值為 0，變異數為 $\frac{1}{n-1}$，故可以標示為

$$\text{樣本等級相關係數 } r_s \sim N(0, \tfrac{1}{n-1})$$

在顯著水準 α 與樣本數量 n 情況下，可利用標準化 Z 值進行統計檢定，以了解母體等級相關係數 ρ_s 是否等於 0。

檢定統計值 $z = \frac{r_s - E(r_s)}{\sigma_{r_s}} = \frac{r_s - 0}{\sqrt{\frac{1}{n-1}}}$

雙尾檢定

若左側臨界值$-z_{\frac{\alpha}{2}} \leq$ 檢定統計值 $z \leq$ 右側臨界值$z_{\frac{\alpha}{2}}$，接受虛無假設(null hypothesis) H_0。

若檢定統計值 $z <$ 左側臨界值$-z_{\frac{\alpha}{2}}$或檢定統計值 $z >$ 右側臨界值$z_{\frac{\alpha}{2}}$，拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0，接受對立假設(alternative hypothesis) H_1。

左尾檢定

若檢定統計值 z ≥ 臨界值-z_α，接受虛無假設(null hypothesis) H_0。

若檢定統計值 z < 臨界值-z_α，拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0，接受對立假設(alternative hypothesis) H_1。

右尾檢定

若檢定統計值 z ≤ 臨界值 z_α，接受虛無假設(null hypothesis) H_0。

若檢定統計值 z > 臨界值 z_α，拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0，接受對立假設(alternative hypothesis) H_1。

範例 19.14 欲了解大學生國文成績排名與英文成績排名是否有關係存在，隨機抽取 12 位大二學生，分別蒐集其大一時，國文成績與英文成績，如下表所示，在顯著水準 $\alpha = 0.05$ 下，利用 Spearman 等級相關檢定法，分析國文成績排名與英文成績排名是否有關係存在。

學生	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
國文成績	85	45	88	81	80	90	76	81	60	51	77	82
英文成績	62	78	45	65	78	81	19	65	75	79	67	69

題解：

A.設定顯著水準 $\alpha = 0.05$。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: $\rho_s = 0$(國文成績排名與英文成績排名沒有關係存在)。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\rho_s \neq 0$(國文成績排名與英文成績排名有關係存在)。

D.計算檢定統計值–樣本等級相關係數 r_s

學生	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	合計
國文成績 x_i	85	45	88	81	80	90	76	81	60	51	77	82	
國文排名R_{x_i}	3	12	2	5.5	7	1	9	5.5	10	11	8	4	
英文成績 y_i	62	78	45	65	78	81	19	65	75	79	67	69	
英文排名R_{y_i}	10	3.5	11	8.5	3.5	1	12	8.5	5	2	7	6	
$d_i = R_{x_i} - R_{y_i}$	-7	8.5	-9	-3	3.5	0	-3	-3	5	9	1	-2	
d_i^2	49	72.25	81	9	12.25	0	9	9	25	81	1	4	352.5

樣本數量 $n = 12$

$$\text{檢定統計值 } r_s = 1 - \frac{6\times\sum_{i=1}^{n} d_i^2}{n\times(n^2-1)} = 1 - \frac{6\times352.5}{12\times(12^2-1)} = 1 - \frac{2115}{1716} = 1 - 1.2325 = -0.2325$$

E.因左側臨界值-$r_{\frac{\alpha}{2}}$ = -$r_{\frac{0.05}{2}}$ = -0.591 ≤ 檢定統計值 r_s = -0.2325 ≤ 右側臨界值$r_{\frac{\alpha}{2}}$ = $r_{\frac{0.05}{2}}$ = 0.591(查詢 Spearman 等級相關臨界值表)，接受虛無假設(null hypothesis) H_0: $\rho_s = 0$(國文成績排名與英文成績排名沒有關係存在)。因此，依據隨機抽樣 12 位大二學生，其大一時國文成績與英文成績的統計值，統計推論發現國文成績排名與英文成績排名沒有關係存在。

練習 19.17 欲了解大學生身高排名與體重排名是否有關係存在，隨機抽取 12 位大二學生，分別蒐集其大一時，身高(單位：公分)與體重(單位：公斤)，如下表所示，在顯著水準 $\alpha = 0.05$ 下，利用 Spearman 等級相關檢定法，分析身高排名與體重排名是否有關係存在。

學生	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
身高	175	165	188	181	170	190	176	151	160	179	177	182
體重	62	78	45	65	78	81	59	65	55	79	67	69

題解：

A.設定顯著水準 $\alpha = 0.05$。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: $\rho_s = 0$(身高排名與體重排名沒有關係存在)。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\rho_s \neq 0$(身高排名與體重排名有關係存在)。

D.計算檢定統計值–樣本等級相關係數 r_s

學生	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	合計
身高 x_i	175	165	188	181	170	190	176	151	160	179	177	182	
身高排名R_{x_i}	8	10	2	4	9	1	7	12	11	5	6	3	
體重 y_i	62	78	45	65	78	81	59	65	55	79	67	69	
體重排名R_{y_i}	9	3.5	12	7.5	3.5	1	10	7.5	11	2	6	5	
$d_i = R_{x_i} - R_{y_i}$	-1	6.5	-10	-3.5	5.5	0	-3	4.5	0	3	0	-2	
d_i^2	1	42.25	100	12.25	30.25	0	9	20.25	0	9	0	4	228

樣本數量 $n = 12$

$$r_s = 1 - \frac{6\times\sum_{i=1}^{n} d_i^2}{n\times(n^2-1)} = 1 - \frac{6\times 228}{12\times(12^2-1)} = 1 - \frac{1368}{1716} = 1 - 0.7972 = 0.2028$$

E.因左側臨界值$-r_{\frac{\alpha}{2}} = -r_{\frac{0.05}{2}} = -0.591 \leq$ 檢定統計值 $r_s = 0.2028 \leq$ 右側臨界值$r_{\frac{\alpha}{2}} = r_{\frac{0.05}{2}} = 0.591$(查詢 Spearman 等級相關臨界值表)，接受虛無假設(null hypothesis) H_0: $\rho_s = 0$(身高排名與體重排名沒有關係存在)。因此，依據隨機抽樣 12 位大二學生，其大一時身高與體重的統計值，統計推論發現身高排名與體重排名沒有關係存在。

練習 19.18 欲了解旅行社業務每週工作時間排名與其每週業績排名是否有關係存在，隨機抽取 14 旅行社業務員，分別蒐集其前一週的工作時間(單位：小時)與業績(單位：萬元)，如下表所示，在顯著水準 $\alpha = 0.05$ 下，利用 Spearman 等級相關檢定法，分析工作時間排名與業績排名是否有關係存在。

學生	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
工作時間	45	65	48	51	50	60	56	51	61	59	55	62	57	58
業績	62	120	74	65	78	81	59	65	105	79	67	109	67	69

題解：

A.設定顯著水準 $\alpha = 0.05$。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: $\rho_s = 0$(工作時間排名與業績排名沒有關係存在)。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\rho_s \neq 0$(工作時間排名與業績排名有關係存在)。

D.計算檢定統計值–樣本等級相關係數 r_s

學生	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	合計
工作時間 x_i	45	65	48	51	50	60	56	51	61	59	55	62	57	58	
時間排名R_{x_i}	62	120	74	65	78	81	59	65	105	79	67	109	67	69	
業績 y_i	14	1	13	10.5	12	4	8	10.5	3	5	9	2	7	6	
業績排名R_{y_i}	13	1	7	11.5	6	4	14	11.5	3	5	9.5	2	9.5	8	
$d_i = R_{x_i} - R_{y_i}$	1	0	6	-1	6	0	-6	-1	0	0	-0.5	0	-2.5	-2	
d_i^2	1	0	36	1	36	0	36	1	0	0	0.25	0	6.25	4	121.5

樣本數量 $n = 14$

$$\text{檢定統計值 } r_s = 1 - \frac{6\times\sum_{i=1}^{n} d_i^2}{n\times(n^2-1)} = 1 - \frac{6\times 121.5}{14\times(14^2-1)} = 1 - \frac{729}{2730} = 1 - 0.2670 = 0.7330$$

E.因左側臨界值 $-r_{\frac{\alpha}{2}} = -r_{\frac{0.05}{2}} = -0.545 \leq$ 右側臨界值 $r_{\frac{\alpha}{2}} = r_{\frac{0.05}{2}} = 0.545 \leq$ 檢定統計值 $r_s = 0.7330$(查詢 Spearman 等級相關臨界值表)，拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0: $\rho_s = 0$(工作時間排名與業績排名沒有關係存在)，接受對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\rho_s \neq 0$(工作時間排名與業績排名有關係存在)。因此，依據隨機抽樣 14 位旅行社業務，其前一週工作時間與業績的統計值，統計推論發現工作時間排名與業績排名達到顯著性關係存在。

2×2 列連表

當資料可以簡化為最簡單的 2×2 形式呈現時，即可運用精確檢定(exact test)。其條件為兩邊的邊際和(marginal sums)n_1、n_2、n_3 和 n_4 皆須為非隨機值。A、B、C 和 D 皆為隨機值，當其中一個數值決定後，其他的數值亦會固定。

		變數二		和
		水準一	水準二	
變數一	水準一	A	B	n_3
	水準二	C	D	n_4
和		n_1	n_2	

費氏精確檢定法(Fisher's exact test)

在 2×2 列連表中，其中一個變數(例如：變數一)可以視為母體，水準一就是母體一；水準二就是母體二。在小樣本($n < 20$)數量時，費氏精確檢定法可以使用於檢定兩個母體中特定二元變數的分布是否相同。

		二元變數		合計
		水準一	水準二	
母體	樣本一	A	B	n_3
	樣本二	C	D	n_4
合計		n_1	n_2	

A.設定顯著水準 $\alpha = 0.05$。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: 母體一和母體二的特定二元變數分布相同。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: 母體一和母體二的特定二元變數分布不相同。

D.計算 Fisher 的精確機率(exact probability)

$$p = \frac{\binom{A+B}{A} \times \binom{C+D}{C}}{\binom{A+B+C+D}{A+C}} = \frac{\binom{\text{樣本一樣本總數}}{\text{樣本一水準一樣本數}} \times \binom{\text{樣本二樣本總數}}{\text{樣本二水準一樣本數}}}{\binom{\text{全部樣本數}}{\text{水準一樣本總數}}}$$

E.統計推論

當機率 $p \geq$ 顯著水準 α，接受虛無假設(null hypothesis) H_0。

當機率 $p <$ 顯著水準 α，拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0，接受對立假設(alternative hypothesis) H_1。

範例 19.15 奇遇咖啡館開發出 A 和 B 兩種新的咖啡飲料，經分開隨機調查兩種咖啡飲料的喜歡與否如下。請比較 A 和 B 兩種新的咖啡飲料受歡迎的分布是否相同，在顯著水準 $\alpha = 0.05$ 下，利用費氏精

確檢定法。

飲料	喜歡	不喜歡	合計
A	5	3	8
B	2	8	10
合計	7	11	18

題解：

A.設定顯著水準 $\alpha = 0.05$。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: A 和 B 兩種新咖啡飲料受歡迎的分布相同。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: A 和 B 兩種新咖啡飲料受歡迎的分布不相同。

D.計算檢定統計值–p 值

$$p = \frac{\binom{A+B}{A}\times\binom{C+D}{C}}{\binom{A+B+C+D}{A+C}} = \frac{\binom{5+3}{5}\times\binom{2+8}{2}}{\binom{5+3+2+8}{5+2}} = \frac{\binom{8}{5}\times\binom{10}{2}}{\binom{18}{7}} = \frac{56\times45}{31824} = \frac{2520}{31824} = 0.0792$$

機率 $p = 0.0792 \geq$ 顯著水準 $\alpha = 0.05$，接受虛無假設(null hypothesis) H_0

E.因機率 $p = 0.0792 \geq$ 顯著水準 $\alpha = 0.05$，接受虛無假設(null hypothesis) H_0: A 和 B 兩種新咖啡飲料受歡迎的分布相同。因此，依據隨機抽樣 18 位消費者，分開對 A 和 B 兩種新咖啡飲料調查其喜好性的統計值，統計推論發現消費者對 A 和 B 兩種新咖啡飲料受歡迎的分布相同。

Kolmogorov-Smirnov 適合度檢定(KS 檢定)或 Kolmogorov-Smirnov goodness-of-fit test

欲檢定樣本資料是否符合常態分布、一致性分布、卜瓦松分布或指數分布，可運用單一組樣本資料進行 Kolmogorov-Smirnov 檢定，以驗證之。

A.設定顯著水準 $\alpha = 0.05$。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: 次數分布與特定理論機率分布相符合。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: 次數分布與特定理論機率分布不相符合。

D.計算相對累計次數 $S_n(x) = \frac{x_i \leq x}{n}$

E.計算虛無假設 H_0 成立時，理論之分布函數 $F_0(x) = P(X \leq x)$

F.檢定統計值 D = $\max|F_0(x) - S_n(x)|$

G.統計推論判定

重點整理

Excel函數彙整

Excel 函數	統計功能	輸入資料	輸出資料
RANK.AVG	排序	指定位置，參考區間，0遞減，1遞增	序號，相同等級，輸出平均等級
RANK.EQ	排序	指定位置，參考區間，0遞減，1遞增	序號，相同等級，輸出最高等級
RANK	排序	指定位置，參考區間，0遞減，1遞增	序號，相同等級，輸出最高等級(與excel 2007及之前版本相容)

單一母體中位數檢定程序

A.設定顯著水準 α。

B.設立虛無假設和對立假設。

C.計算獲得正號(+)的次數或負號(-)的次數。

D.決定拒絕區域與接受區域。

E.計算檢定統計值。

F.統計推論。

樣本數量小($n \leq 20$)符號檢定

符號檢定統計值 S_0：獲得正號(+)的次數，屬於二項分布，S_0~$B(n,p = 0.5)$。n 是扣除 $D_i = x_i - m_0 = 0(x_i = m_0)$的樣本數量。

臨界值法統計判斷法則

雙尾檢定

若左側臨界值 $S_L \leq$ 檢定統計值 $S_0 \leq$ 右側臨界值 S_H，接受虛無假設(null hypothesis) H_0。

若檢定統計值 $S_0 <$ 左側臨界值 S_L 或檢定統計值 $S_0 >$ 右側臨界值 S_H，拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0，接受對立假設(alternative hypothesis) H_1。

其中：S_L是在左側(較低)臨界值；S_H是在右側(較高)臨界值

左尾檢定

若檢定統計值 $S_0 \geq$ 臨界值 S_L，接受虛無假設(null hypothesis) H_0。

若檢定統計值 $S_0 <$ 臨界值 S_L，拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0，接受對立假設(alternative hypothesis) H_1。

其中：S_L是在左側(較低)臨界值

右尾檢定

若檢定統計值 $S_0 \leq$ 臨界值 S_H，接受虛無假設(null hypothesis) H_0。

若檢定統計值 $S_0 >$ 臨界值 S_H，拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0，接受對立假設(alternative hypothesis) H_1。

其中：S_H是在右側(較高)臨界值

機率 p 值法統計判斷法則

雙尾檢定

若 $S_0 \geq \frac{n}{2}$ [n 是扣除 $D_i = 0(x_i = m_0)$的樣本數量]時，機率 $p = 2 \times P(S \geq S_0|n,p = 0.50)$

若 $S_0 < \frac{n}{2}$ [n 是扣除 $D_i = 0(x_i = m_0)$的樣本數量]時，機率 $p = 2 \times P(S \leq S_0|n,p = 0.50)$

左尾檢定

機率 $p = P(S \leq S_0|n,p = 0.50)$

右尾檢定

機率 $p = P(S \geq S_0|n,p = 0.50)$

樣本數量大($n \geq 20$)符號檢定

當樣本數量增加($n \geq 20$)時，欲檢定母體中位數 M_d 等於特定值 m_0 之二項分布會趨近於常態分布，故，可以運用標準化 z 值分布進行母體中位數 M_d 等於特定中位數特定值 m_0(推測值)之檢定。假設檢定

虛無假設(null hypothesis) H_0: $M_d = m_0$ 或 H_0: $P(M_d > m_0) = 0.50$

對立假設(alternative hypothesis) H_1: $M_d \neq m_0$ 或 H_0: $P(M_d > m_0) \neq 0.50$

在樣本數量增加($n \geq 20$)時，欲檢定母體中位數 M_d 等於特定值 m_0 之二項分布會趨近於常態分布，獲得正號(+)次數的平均值與標準(偏)差分別為：

平均值 $\mu_S = 0.50 \times n$

標準(偏)差 $\sigma_S = \sqrt{0.50 \times 0.50 \times n} = 0.50 \times \sqrt{n}$

故，在樣本數量增加($n \geq 20$)時，獲得正號(+)次數之二項分布會趨近於常態分佈：$S_0 \sim N(0.50 \times n, 0.50 \times 0.50 \times n)$

檢定統計值 $z = \frac{S - E(S)}{\sqrt{\sigma_S^2}} = \frac{S - 0.50 \times n}{0.50 \times \sqrt{n}}$

在魏克森符號等級檢定法先計算配對樣本觀測值之差異量 $d_i = x_{Ai} - x_{Bi}$，取絕對值$|d_i| = |x_{Ai} - x_{Bi}|$，再依據數值$|d_i|$大小，由小排到大，並給予等級。當差異量數值相等$|d_i| = |d_j|$時，利用其平均數作為等級。不計兩配對組合觀測值相同的樣本，亦不排序和給予等級。

假設 R^+為正的 d_i 值之等級和；R^-為負的 d_i 值之等級和。若兩配對母體分布型態相同時，R^+與 R^-數值應相等或非常相近。倘若 R^+與 R^-數值有明顯的差異量，表示兩配對母體分布型態不相同。故，在魏克森符號等級檢定法選擇 R^+與 R^-數值為檢定統計值。

魏克森符號等級檢定法統計判斷法則

雙尾檢定

若檢定統計值 R ≤ 臨界值$R_{\frac{\alpha}{2}}$，接受虛無假設(null hypothesis) H_0。

若檢定統計值 R > 臨界值$R_{\frac{\alpha}{2}}$，拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0，接受對立假設(alternative hypothesis) H_1。

左尾檢定

若檢定統計值 R ≤ 臨界值 R_α，接受虛無假設(null hypothesis) H_0。

若檢定統計值 R > 臨界值 R_α，拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0，接受對立假設(alternative hypothesis) H_1。

右尾檢定

若檢定統計值 R ≤ 臨界值 R_α，接受虛無假設(null hypothesis) H_0。

若檢定統計值 R > 臨界值 R_α，拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0，接受對立假設(alternative hypothesis) H_1。

在大量樣本數量($n \geq 30$)時，檢定統計值 R 分布會趨近於常態分佈，其平均值和變異數分別為：

平均值 $E(R) = \bar{R} = \frac{n \times (n+1)}{4}$

變異數 $V(R) = \frac{n \times (n+1) \times (2 \times n + 1)}{24}$

在大量樣本數量($n \geq 30$)時，檢定統計值 $z = \frac{R - \frac{n \times (n+1)}{4}}{\sqrt{\frac{n \times (n+1) \times (2 \times n+1)}{24}}}$

大量樣本數量($n \geq 30$)時，統計判斷法則

雙尾檢定

若檢定統計值 z ≥ 臨界值-$z_{\frac{\alpha}{2}}$，接受虛無假設(null hypothesis) H_0。

若檢定統計值 z < 臨界值-$z_{\frac{\alpha}{2}}$，拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0，接受對立假設(alternative hypothesis) H_1。

左尾檢定

若檢定統計值 z ≥ 臨界值-z_α，接受虛無假設(null hypothesis) H_0。

若檢定統計值 z < 臨界值-z_α，拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0，接受對立假設(alternative hypothesis) H_1。

右尾檢定

若檢定統計值 $z \geq$ 臨界值$-z_{\alpha}$，接受虛無假設(null hypothesis) H_0。

若檢定統計值 $z <$ 臨界值$-z_{\alpha}$，拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0，接受對立假設(alternative hypothesis) H_1。

在魏克森等級和檢定法中的檢定統計值為兩個獨立母體樣本的個別等級和，通常使用樣本數量 n 較少的母體樣本之等級和為檢定統計值，當母體 1 樣本數量 $n_1 <$ 母體 2 樣本數量 n_2 時，使用母體 1 樣本的等級和 W_1 為檢定統計值；母體 1 樣本數量 $n_1 =$ 母體 2 樣本數量 n_2 時，兩個獨立母體任選一個樣本的等級和 W_1 或 W_2 為檢定統計值。當兩個獨立母體樣本的等級和數值相等和非常接近時，顯示兩個母體的分布沒有差異；兩個獨立母體樣本的等級和數值相距甚遠時，顯示兩個母體的分布有差異。

魏克森等級和檢定法統計判斷法則

雙尾檢定

若左側臨界值 $W_L \leq$ 檢定統計值 $W \leq$ 右側臨界值 W_H，接受虛無假設(null hypothesis) H_0。

若檢定統計值 $W <$ 左側臨界值 W_L 或檢定統計值 $W >$右側臨界值 W_H，拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0，接受對立假設(alternative hypothesis) H_1。

其中：W_L 是在左側(較低)臨界值；W_H 是在右側(較高)臨界值

單尾檢定

設母體 1 為樣本數量較少者，當母體 1 分布位於母體 2 的右側時，若檢定統計值 $W_1 \leq W_H$(臨界值)，接受虛無假設(null hypothesis) H_0。

設母體 1 為樣本數量較少者，當母體 1 分布位於母體 2 的右側時，若檢定統計值 $W_1 > W_H$(臨界值)，拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0，接受對立假設(alternative hypothesis) H_1。

設母體 1 為樣本數量較少者，當母體 1 分布位於母體 2 的左側時，若檢定統計值 $W_1 \geq W_L$(臨界值)，接受虛無假設(null hypothesis) H_0。

設母體 1 為樣本數量較少者，當母體 1 分布位於母體 2 的左側時，若檢定統計值 $W_1 < W_L$(臨界值)，拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0，接受對立假設(alternative hypothesis) H_1。

在曼–懷特尼 U 檢定可分為小量樣本數($n_1 \leq 10; n_2 \leq 10$)與大量樣本數($n_1 \geq 10; n_2 \geq 10$)兩種。

小量樣本數($n_1 \leq 10$ 和 $n_2 \leq 10$)

檢定程序

由母體 1 隨機抽出 n_1 個樣本與由母體 2 隨機抽出 n_2 個樣本，混合排序，由小排到大，分別計算其序位等級和 W_1 和 W_2。

計算兩個參數值 U_1 和 U_2

$$U_1 = n_1 \times n_2 + \frac{n_1 \times (n_1+1)}{2} - W_1$$

$$U_2 = n_1 \times n_2 + \frac{n_2 \times (n_2+1)}{2} - W_2$$

其中 $n_1 \times n_2 + \frac{n_1 \times (n_1+1)}{2}$是母體 1 樣本的最大序位等級和；$n_1 \times n_2 + \frac{n_2 \times (n_2+1)}{2}$是母體 2 樣本的最大序位等級和。另 $U_1 + U_2 = n_1 \times n_2$。

計算檢定統計值 U

雙尾檢定 $U = \min(U_1, U_2)$

單尾檢定，若對立假設 H_1: 母體 1 分布位於母體 2 的右側，$U = U_1$

單尾檢定，若對立假設 H_1: 母體 1 分布位於母體 2 的左側，$U = U_2$

利用曼–懷特尼 U 統計機率表計算機率 p 值

曼–懷特尼 U 統計機率判斷法則

雙尾檢定

若機率 $p > \frac{\alpha}{2}$，接受虛無假設(null hypothesis) H_0。

若機率 $p < \frac{\alpha}{2}$，拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0，接受對立假設(alternative hypothesis) H_1。

單尾檢定

若機率 $p > \alpha$，接受虛無假設(null hypothesis) H_0。

若機率 $p < \alpha$，拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0，接受對立假設(alternative hypothesis) H_1。

大量樣本數($n_1 \geq 10$ 和 $n_2 \geq 10$)

在兩個母體樣本數量 n 皆高於 10 時，若虛無假設為真，統計值 U 屬於常態分布，即可使用標準化 Z 分布進行統計檢定。

統計值 U 的期望值 $E(U) = \frac{n_1 \times n_2}{2}$

統計值 U 的變異數 $V(U) = \sigma_U^2 = \frac{n_1 \times n_2 \times (n_1+n_2+1)}{12}$

統計值 U 的標準(偏)差 $\sigma_U = \sqrt{\frac{n_1 \times n_2 \times (n_1+n_2+1)}{12}}$

檢定統計值 $z = \frac{U - E(U)}{\sigma_U} = \frac{U - \frac{n_1 \times n_2}{2}}{\sqrt{\frac{n_1 \times n_2 \times (n_1+n_2+1)}{12}}}$

大量樣本數量($n_1 \geq 10$ 和 $n_2 \geq 10$)時，統計判斷法則

雙尾檢定

若左側臨界值$-z_{\frac{\alpha}{2}} \leq$ 檢定統計值 $z \leq$ 右側臨界值$z_{\frac{\alpha}{2}}$，接受虛無假設(null hypothesis) H_0。

若檢定統計值 $z <$ 左側臨界值$-z_{\frac{\alpha}{2}}$或檢定統計值 $z >$ 右側臨界值$z_{\frac{\alpha}{2}}$，拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0，接受對立假設(alternative hypothesis) H_1。

左尾檢定

若檢定統計值 $z \geq$ 臨界值$-z_\alpha$，接受虛無假設(null hypothesis) H_0。

若檢定統計值 $z <$ 臨界值$-z_\alpha$，拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0，接受對立假設(alternative hypothesis) H_1。

右尾檢定

若檢定統計值 $z \leq$ 臨界值 z_α，接受虛無假設(null hypothesis) H_0。

若檢定統計值 $z >$ 臨界值 z_α，拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0，接受對立假設(alternative hypothesis) H_1。

克拉斯卡–瓦歷斯檢定法可以視為曼–懷特尼 U 檢定的一種延伸運用，以檢定三個或三個以上獨立母體分布是否相同。

克拉斯卡–瓦歷斯檢定法(Kruskal-Wallis one-way analysis of variance by ranks)或 H 檢定法使用於檢定 k 組獨立樣本(independent samples)是否來自相同的一個母體或中位數(medians)相等的 k 組母體。

A.設定顯著水準 α。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: $M_{d1} = M_{d2} = M_{d3} = \ldots = M_{dk}$ 或 H_0: k 個母體分布皆相同。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: $M_{di} \neq M_{dj}$ 或 H_0: k 個母體中至少有兩個母體之間的分布不相同。

其中 M_{d1}: 代表第 1 組獨立樣本的中位數(medians)、median of the sample 1

D.計算檢定統計值：W 值

$$W = \frac{12}{n_t \times (n_t+1)} \times \sum_{i=1}^{k} \frac{\left(\sum_{i=1}^{k} R_i\right)^2}{n_i} - 3\times(n_t + 1)$$

其中 n_t：代表全部樣本數量 $n_t = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$

R_i：代表第 i 組獨立個別樣本在全部樣本中的(大小)順位(rank)

n_i：代表第 i 組獨立樣本的樣本數量

k：獨立樣本的組數

顯著性判斷

若檢定統計值 $W <$ 臨界值$\chi^2_{\alpha,k-1}$代表虛無假設(null hypothesis) H_0: $M_{d1} = M_{d2} = M_{d3} = \ldots = M_{dk}$ 成立。

若檢定統計值 $W \geq$ 臨界值$\chi^2_{\alpha,k-1}$代表拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0: $M_{d1} = M_{d2} = M_{d3} = \ldots = M_{dk}$，支持對立假設(alternative hypothesis) H_1: $M_{di} \neq M_{dj}$ 成立。

事後比較公式

$$\mathrm{CD} = z_{\frac{\alpha}{k\times(k-1)}} \times \sqrt{\frac{N\times(N+1)}{12} \times \left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j}\right)}$$

其中$\bar{R}_i$：代表第 i 組獨立個別樣本在全部樣本中的(大小)順位(rank)之平均值

$\bar{R}_j$：代表第 j 組獨立個別樣本在全部樣本中的(大小)順位(rank)之平均值

$z_{\frac{\alpha}{k\times(k-1)}}$：代表在機率為$\frac{\alpha}{k\times(k-1)}$時的標準化 z 值。例：在 $\alpha = 0.05$ 和 $k = 3$ 條件，$z = 2.3940$。

α：代表顯著水準

N：代表全部樣本數量

n_i：代表第 i 組獨立樣本的樣本數量

k：獨立樣本的組數

顯著性判斷

若$|\bar{R}_i - \bar{R}_j| < \mathrm{CD}$ 代表第 i 組和第 j 組中位數之間經事後比較後，發現沒有顯著性差異。

若$|\bar{R}_i - \bar{R}_j| > \mathrm{CD}$ 代表第 i 組和第 j 組中位數之間經事後比較後，發現達到顯著性差異水準。

小量樣本數($n_1 \leq 10$ 和 $n_2 \leq 10$)隨機性檢定

檢定程序

A.設定顯著水準 $\alpha = 0.05$。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: 樣本觀測值屬於隨機分布。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: 樣本觀測值不屬於隨機分布。

D.計算檢定統計值–連數 R

樣本觀測值大於中位數者以 H 符號標示；樣本觀測值小於中位數者以 L 符號標示。分別計算 H 和 L 符號的出現次數，將 L 符號的出現個數假設為 n_1；H 符號的出現個數假設為 n_2。查連檢定累計機率表可得 $P(R \leq r)$機率，其中 r 為連數，數值範圍大於等於 2 的正整數；統計值連數的觀測值。

計算機率 p 值

若 $r \geq \frac{2\times n_1\times n_2}{n_1+n_2} + 1$，機率 $p = 2 \times P(R \geq r|n_1, n_2)$

若 $r < \frac{2\times n_1\times n_2}{n_1+n_2} + 1$，機率 $p = 2 \times P(R \leq r|n_1, n_2)$

E.決定統計推論

若 $r \geq \frac{2\times n_1\times n_2}{n_1+n_2} + 1$，機率 $p = 2 \times P(R \geq r|n_1, n_2)$

當機率 $p = 2 \times P(R \geq r|n_1, n_2) \geq$ 顯著水準 α，接受虛無假設(null hypothesis) H_0。

當機率 $p = 2 \times P(R \geq r|n_1, n_2) <$ 顯著水準 α，拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0，接受對立假設

(alternative hypothesis) H_1。

若 $r < \frac{2\times n_1\times n_2}{n_1+n_2} + 1$，機率 $p = 2 \times P(R \le r|n_1, n_2)$

當機率 $p = 2 \times P(R \le r|n_1, n_2) \ge$ 顯著水準 α，接受虛無假設(null hypothesis) H_0。

當機率 $p = 2 \times P(R \le r|n_1, n_2) <$ 顯著水準 α，拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0，接受對立假設(alternative hypothesis) H_1。

大量樣本數($n_1 \ge 10$ 和 $n_2 \ge 10$)隨機性檢定

檢定統計值 R 的分布型態會趨近於常態分布，故即可使用標準化 Z 值運算機率，在雙尾檢定方法進行統計推論。

檢定程序

A.設定顯著水準 $\alpha = 0.05$。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: 樣本觀測值屬於隨機分布。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: 樣本觀測值不屬於隨機分布。

D.計算檢定統計值–z 值

統計值 R 的平均值或期望值 $E(R) = \bar{R} = \frac{2\times n_1\times n_2}{n_1+n_2} + 1$

統計值 R 的變異數 $V(R) = \frac{2\times n_1\times n_2\times(2\times n_1\times n_2-n_1-n_2)}{(n_1+n_2)^2\times(n_1+n_2-1)}$

統計值 R 的標準(偏)差 $\sigma_R = \sqrt{\frac{2\times n_1\times n_2\times(2\times n_1\times n_2-n_1-n_2)}{(n_1+n_2)^2\times(n_1+n_2-1)}}$

檢定統計值 $z = \frac{R-E(R)}{\sigma_R} = \frac{R-\left(\frac{2\times n_1\times n_2}{n_1+n_2}+1\right)}{\sqrt{\frac{2\times n_1\times n_2\times(2\times n_1\times n_2-n_1-n_2)}{(n_1+n_2)^2\times(n_1+n_2-1)}}}$

E.決定統計推論

若左側臨界值 $-z_{\frac{\alpha}{2}} \le$ 檢定統計值 $z \le$ 右側臨界值 $z_{\frac{\alpha}{2}}$，接受虛無假設(null hypothesis) H_0。

若檢定統計值 $z <$ 左側臨界值 $-z_{\frac{\alpha}{2}}$ 或檢定統計值 $z >$ 右側臨界值 $z_{\frac{\alpha}{2}}$，拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0，接受對立假設(alternative hypothesis) H_1。

利用樣本資料所得的等級相關係數，一般使用 r_s 符號標示。$r_s = 1 - \frac{6\times\sum_{i=1}^{n} d_i^2}{n\times(n^2-1)}$

小樣本數量($n < 30$)

在母體等級相關係數 $\rho_s = 0$ 的情況，樣本等級相關係數 r_s 屬於一對稱分布，其平均值為 0，變異數為 $\frac{1}{n-1}$，故可以標示為

$$\text{樣本等級相關係數 } r_s \sim \text{對稱分布}(0, \frac{1}{n-1})$$

大樣本數量($n \ge 30$)

在母體等級相關係數 $\rho_s = 0$ 的情況，樣本等級相關係數 r_s 屬於一常態分布，其平均值為 0，變異數為 $\frac{1}{n-1}$，故可以標示為

$$\text{樣本等級相關係數 } r_s \sim N(0, \frac{1}{n-1})$$

關鍵詞彙解釋

無母數統計分析(Non-parametric Statistics)

又稱為無母數統計分析，屬於統計學的一個分支，適用於母體分布狀況未知、小量樣本數、母群體分布不屬於常態分布也不易轉換為常態分布。無母數統計推論時所使用的統計值的抽樣分布通常與母體分布無關，不必推論其中位數、適合度、獨立性和隨機性。故，無母數統計又稱為不受分布限制統計法(distribution free)。無母數統計缺乏一般的機率分布表格可供查詢。無母數統計檢定時是以等級(Rank)為主要統計值。

符號檢定(sign test)

符號檢定是無母數統計方法中最簡單的一種，用來檢定兩個配對(關聯)樣本(x_{1i}, x_{2i})(包括重測法及配對法)所代表的兩個母體的平均值是否有差異，但是並不重視兩個關聯樣本的原始分數的差異量 $d_i = x_{1i} - x_{2i}$ 的大小，而是重視 $d_i = x_{1i} - x_{2i}$ 的正負號，稱為「符號檢定」。

理論上，若兩個配對(關聯)母體的平均值之間沒有差異(例如：特定實驗處理無效導致前測與後測之間數值沒有差異)，在所有的 $d_i = x_{1i} - x_{2i}$ 當中，應有一半帶正號，另一半帶負號；即 $d_i = x_{1i} - x_{2i}$ 的中位數在母體當中應為 0。原本是平均數的問題，轉變為中位數的問題；此轉變最大的好處：不再注意母體分布形狀的基本假定；原本要知道平均數有無異可以藉有母數統計中的 t 檢定來判斷，t 檢定中假定兩個配對(關聯)母體皆呈常態分布，而且原始分數為連續變數；轉變為中位數後，以符號檢定可以直接回答中位數是否為零，同時也可知道平均數差異是否為零。因為符號檢定只假定兩個配對(關聯)母體的分布形狀相同(不必一定屬於常態分布)，且原始分數是次序變數即可。

魏克森符號等級檢定法(Wilcoxon signed-rank test)

在魏克森符號等級檢定法(Wilcoxon signed-rank test)中，即針對符號檢定的缺失進行修正，同時考慮配對組合觀測值有差異時獲得正號(+)數量或負號(-)數量 S_0 與配對組合中觀測值的差異量的等級。

在魏克森符號等級檢定法先計算配對樣本觀測值之差異量 $d_i = x_{Ai} - x_{Bi}$，取絕對值$|d_i| = |x_{Ai} - x_{Bi}|$，再依據數值$|d_i|$大小，由小排到大，並給予等級。當差異量數值相等$|d_i| = |d_j|$時，利用其平均數作為等級。不計兩配對組合觀測值相同的樣本，亦不排序和給予等級。

假設 R^+為正的 d_i 值之等級和；R^-為負的 d_i 值之等級和。若兩配對母體分布型態相同時，R^+與 R^-數值應相等或非常相近。倘若 R^+與 R^-數值有明顯的差異量，表示兩配對母體分布型態不相同。故，在魏克森符號等級檢定法選擇 R^+與 R^-數值為檢定統計值。

魏克森等級和檢定法(Wilcoxon rank sum test)

魏克森等級和檢定法(Wilcoxon rank sum test)或魏克森符號等級和檢定(Wilcoxon sign rank sum test)適用於兩個獨立母體分布未知，同時隨機抽樣獲得的樣本數量少($n < 30$)之情況。在兩個相互獨立的母體中，從母體 1 隨機抽出 n_1 個樣本，從母體 2 隨機抽出 n_2 個樣本，再將所有的 $n = n_1 + n_2$ 個樣本混合，依據其觀測值大小，由小排到大排序，並給予序位等級。

在魏克森等級和檢定法中的檢定統計值為兩個獨立母體樣本的個別等級和，通常使用樣本數量 n 較少的母體樣本之等級和為檢定統計值，當母體 1 樣本數量 n_1 < 母體 2 樣本數量 n_2 時，使用母體 1 樣本的等級和 W_1 為檢定統計值；母體 1 樣本數量 n_1 = 母體 2 樣本數量 n_2 時，兩個獨立母體任選一個樣本的等級和 W_1 或 W_2 為檢定統計值。當兩個獨立母體樣本的等級和數值相等和非常接近時，顯示兩個母體的分布沒有差異；兩個獨立母體樣本的等級和數值相距甚遠時，顯示兩個母體的分布有差異。

曼–懷特尼 U 檢定(Mann-Whitney U test)

曼–懷特尼 U 檢定(Mann-Whitney U test)與魏克森等級和檢定法類似，皆是使用於檢定兩個獨立母體分布是否相同，皆是運用兩個獨立母體個別樣本的等級和進行檢定。在曼–懷特尼 U 檢定可分為小量樣本數($n_1 \le 10; n_2 \le 10$)與大量樣本數($n_1 \ge 10; n_2 \ge 10$)兩種。

克拉斯卡–瓦歷斯檢定(Kruskal-Wallis test, K-W 檢定)

在母數統計法中的變異數分析時，皆會假設不同的母體分布皆屬於常態分布，同時其變異數相等。故

變異數分析不適用於順序尺度(ordinal scale)的數值型態之分析。運用克拉斯卡–瓦歷斯檢定法於順序尺度的數值型態，與母數統計法中的變異數分析目的雷同。克拉斯卡–瓦歷斯檢定法(Kruskal-Wallis test, K-W 檢定)可以視為曼–懷特尼 U 檢定的一種延伸運用，以檢定三個或三個以上獨立母體分布是否相同。

克拉斯卡–瓦歷斯檢定法(Kruskal-Wallis test, K-W 檢定)或 H 檢定法使用於檢定 k 組獨立樣本(independent samples)是否來自相同的一個母體或中位數(medians)相等的 k 組母體。

隨機性檢定(Randomness tests, Testing for randomness)

又稱為連檢定(Runs Test)，即運用於檢定樣本是否為隨機產生的(rnadomly generated)。連檢定以一組樣本觀察值依序出現的排序(order)或結果(sequence)判定樣本是否為隨機獲得的樣本，其作法是以在樣本觀察值中某一個符號或特徵出現的連續性(runs)，以衡量樣本的隨機性程度。

斯皮曼等級相關係數(Spearman's Rank Correlation Coefficient)

在母數統計法中欲評量母體資料中變數 x 和變數 y 兩個配對變數之間的相關程度，例如：欲評量學生的身高與體重兩個變數的相關程度，即使用 Pearson 相關係數 ρ_{xy}。若欲評量母體資料中兩個順序尺度(ordinal scale)變數的相關程度，例如：欲評量學生的國文的成績排名與英文的成績排名兩個配對變數的相關程度，即必須使用等級相關係數 ρ_s 或 Spearman 等級相關係數(Spearman rank correlation coefficient)。