九、假設檢定

Chapter 9　Hypothesis Testing

目錄

學習目標

知識(認知)

1.可以清楚描述假設檢定的意涵。

2.可以說明各種情境下，假設檢定的程序和標準。

3.分辨型一錯誤與型二錯誤之間的差異性。

4.評價各種情境下，假設檢定的使用價值。

技能

1.能夠計算各種情境下的檢定統計值。

2.能夠利用檢定統計值與臨界值的比較，提出統計推論。

3.綜合所學，能夠於實務領域中，依據特定情境的需求進行假設檢定程序。

態度(情意)

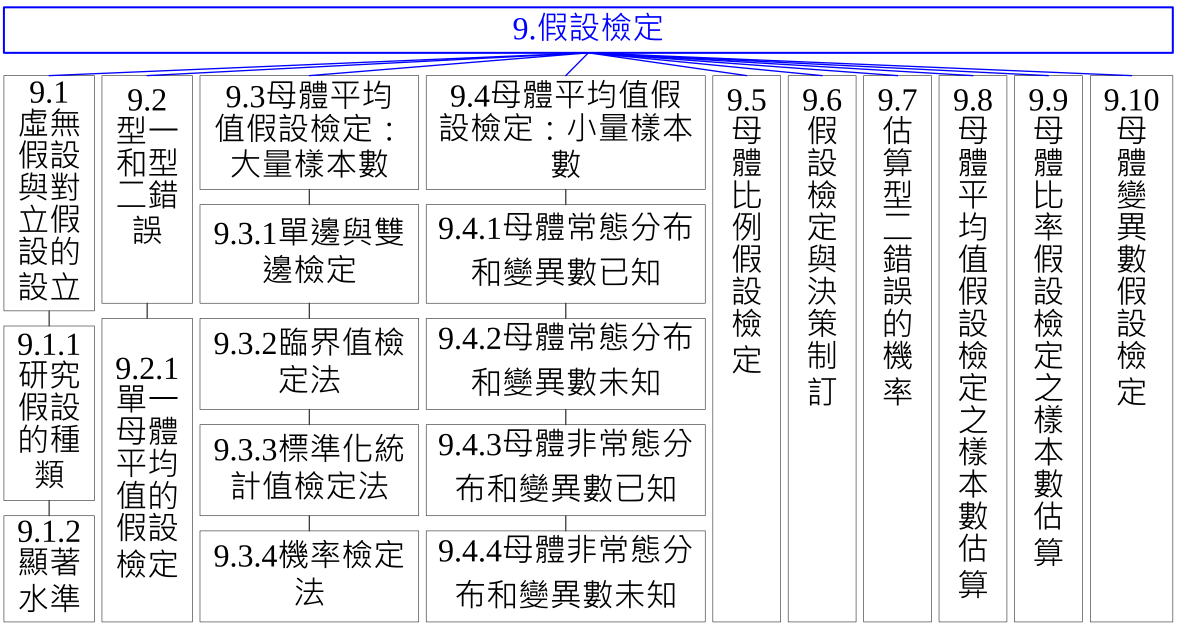
1.意識到在日常生活或未來工作環境中，假設檢定的重要性。

2.在各種情境下，依據假設檢定的程序，接受統計推論所傳達的意涵。

事先建立關於母體參數(parameter)的研究假設，運用蒐集到的樣本統計值(statistic)，推論判斷接受原先的研究假設或拒絕原先的研究假設的一種統計驗證程序(方法)。使統計學可以做為科學性的決策參考工具。在研究假設的檢定過程中，針對母體特定研究變數之參數(parameter)做一個暫時性的研究假設，稱為虛無假設或原始假設(Null hypothesis)，利用 H_0 符號標示，即是受驗證的論述，一般皆是「沒有效果」、「沒有差異」或「維持現狀」的論述。再建立一個與虛無假設完全相反敘述的假設，稱為對立假設(Alternative hypothesis)或研究假設(Research hypothesis)，利用 H_1 或 H_a 符號標示。

建立母體特定研究變數平均值 μ 和比例 p 的假設檢定。

統計假設(Statistical hypothesis)是對一個或多個母體特定研究變數之參數的一種推論、推測或預估。



章節結構圖

9.1 虛無假設與對立假設的設立

9.1.1 顯著水準

速食餐廳強調供應餐點服務的速度，特定連鎖速食餐廳，建立員工服務訓練的標準，在櫃枱接受客人點餐與提供餐飲的標準作業時間設定 $\mu = 50$ 秒，容許的標準(偏)差為 $\sigma = 5$ 秒。

為驗證員工經過訓練計畫後是否達到此一標準，在櫃枱前觀察測量服務員 Rita 服務 20 個客人的平均值時間為$\bar{x} = 53$ 秒，評估 Rita 是否達到此標準作業時間？

$$z_{\bar{x}} = \frac{\bar{x}-\mu}{\sigma_{\bar{x}}} = \frac{\bar{x}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{53-50}{\frac{5}{\sqrt{20}}} = \frac{3}{1.1180} = 2.6834$$

$P(Z \le 2.6834) = 0.9964$；$P(Z \ge 2.6834) = 1 - P(Z \le 2.6834) = 1 - 0.9964$(NORM.S.DIST) $= 0.0036$

在 95 %信賴水準(Confidence level)下，利用樣本平均值$\bar{x}$推估服務客人時間(母體平均值)μ 的信賴區間為

$$\mathrm{P}(\bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \times \sigma_{\bar{x}} \;\le\; \mu \;\le\; \bar{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \times \sigma_{\bar{x}}) = 1-\alpha$$
$$P(\bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \;\le\; \mu \;\le\; \bar{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = 1-\alpha$$
$$P(53 - 1.96 \times \frac{5}{\sqrt{20}} \;\le\; \mu \;\le\; 53 + 1.96 \times \frac{5}{\sqrt{20}}) = 0.95$$
$$P(53 - 2.1913 \;\le\; \mu \;\le\; 53 + 2.1913) = 0.95$$
$$P(50.8087 \;\le\; \mu \;\le\; 55.1913) = 0.95$$

利用樣本平均值$\bar{x}$，推估該樣本可能出現機率顯示，$P(Z \le 2.6834) = 0.9964$；$P(Z \ge 2.6834) = 0.0036$，因此，出現此種樣本組合機率相當少($p \le 0.05$)。以樣本平均值$\bar{x}$推估服務客人時間 μ 在 95 %信賴水準下的信賴區間，並沒有包括原本的母體平均值 $\mu = 50$ seconds。因此，可以推估該樣本可能不是來自於原先的母體，即未達到原先設定的『櫃枱接受客人點餐與提供餐飲的標準作業時間設定 $\mu = 50$ 秒，容許的標準(偏)差為 $\sigma = 5$ 秒』標準。透過抽樣分析顯示，樣本未達到預先設定的服務標準。

為驗證員工經過訓練計畫後是否達到此一標準，在櫃枱前觀察測量服務員 Rita 服務 10 個客人的平均值時間為$\bar{x} = 48$ 秒，評估 Rita 是否達到此標準作業時間？

$$z_{\bar{x}} = \frac{\bar{x}-\mu}{\sigma_{\bar{x}}} = \frac{\bar{x}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{48-50}{\frac{5}{\sqrt{10}}} = \frac{-2}{1.5811} = -1.2649$$

$P(Z \le -1.2649) = 0.1029$；$P(Z \ge -1.2649) = 1 - P(Z \le -1.2649) = 1 - 0.1029$(NORM.S.DIST) $= 0.8971$

在 95 %信賴水準(Confidence level)下，利用樣本平均值$\bar{x}$推估服務客人時間(母體平均值)μ 的信賴區間為

$$P(\bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \;\le\; \mu \;\le\; \bar{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = 1-\alpha$$
$$P(48 - 1.96 \times \frac{5}{\sqrt{10}} \;\le\; \mu \;\le\; 48 + 1.96 \times \frac{5}{\sqrt{10}}) = 0.95$$
$$P(48 - 3.0990 \;\le\; \mu \;\le\; 48 + 3.0990) = 0.95$$
$$P(44.9010 \;\le\; \mu \;\le\; 51.0990) = 0.95$$

利用樣本平均值$\bar{x}$，推估該樣本組合可能出現機率顯示，$P(Z \le -1.2649) = 0.1029$；$P(Z \ge -1.2649) = 0.8971$，因此，出現此種樣本的機會不低($p \ge 0.05$)。以樣本平均值$\bar{x}$推估服務客人時間(母體平均值)$\mu$ 在 95 %信賴水準下的信賴區間，有包括原本的母體平均值 $\mu = 50$ 秒。因此，可以推估該樣本可能是來自於原先的母體，即達到原先設定的『櫃枱接受客人點餐與提供餐飲的標準作業時間設定 $\mu = 50$ 秒，容許的標準(偏)差為 $\sigma = 5$ 秒』。透過抽樣分析顯示，樣本已達到預先設定的服務標準。

若 p 值小於 0.05，表示樣本出現機會在 100 次中可能 5 次，算是少見的樣本組合，研判樣本非來自此母體，此機率 ***p*** 值在統計學稱為顯著水準(significance level)，通常以符號 α(讀音 Alpha)表示之。顯著水準並非僅定 $\alpha = 0.05$ 數值，亦可選擇 $\alpha = 0.01$ 或 0.10 數值。希望研究的樣本抽自此母體，則要選擇較小的 α，反之則選擇較大的 α。

9.1.2 研究假設的種類

研究假設的目的是從兩個關於母體中特定參數可能的數值之相互衝突假設，選擇其中一個假設作為決策的基礎。兩個相互衝突的研究假設之間，範圍彼此互斥，一個假設為真時，另一個假設即為偽。

虛無假設(null hypothesis)可以標記為 H_0，為即將被檢驗的一種陳述，通常此陳述是代表現狀(*status quo*)；對立假設(alternative hypothesis; research hypothesis)可以標記為 H_1 或 H_a。

驗證、檢定研究假設(Testing research hypotheses)

奇遇餐廳原本每月平均盈餘 μ 為 NT \$56000 元，擬執行粉紅佳人(Pink lady)行銷活動，女性顧客只要在星期一到四晚上穿粉紅色衣服到該餐廳用餐時，給予六折優惠，希望吸引顧客的上門，以提升經營績效，增加盈餘。透過觀察一段時間，評估粉紅佳人(Pink lady)行銷活動的效益，該研究驗證的假設即是執行粉紅佳人(Pink lady)行銷活動時，每月平均盈餘是否超過 NT\$ 56000 元，即是 μ > NT \$56000 元。

一般研究假設常被設定為對立假設，故

虛無假設 H_0: $\mu \le 56000$ 元

對立假設 H_1: $\mu > 56000$ 元

因此，研究假設檢定過程若接受虛無假設 H_0: $\mu \le 56000$ 元，顯示執行粉紅佳人(Pink lady)行銷活動對於經營績效提昇，以增加盈餘沒有實質貢獻，可能還增加支出金額，而短少收入金額，故該行銷活動失敗。

研究假設檢定過程若拒絕接受虛無假設 H_0: $\mu \le 56000$ 元，而接受對立假設 H_1: $\mu > 56000$ 元時，顯示執行粉紅佳人(Pink lady)行銷活動對於經營績效提昇，以增加盈餘有實質貢獻，故該行銷活動成功，可以繼續辦理。

驗證、檢定宣稱效度(Testing the validity of a claim)

奇遇餐廳販售蚵仔麵線一碗設定售價 NT\$ 50 元，餐廳規劃標準食譜(standard recipe)時，設計每碗蚵仔麵線應該有 20 顆蚵仔。該標準食譜(每碗蚵仔麵線是否擁有 20 顆蚵仔)的驗證方式，通常先假設該餐廳有依據標準食譜提供蚵仔麵線給顧客。

故

虛無假設 H_0: $\mu \ge 20$ 顆 vs. 對立假設 H_1: $\mu < 20$ 顆

因此，假設檢定過程若接受虛無假設 H_0: $\mu \ge 20$ 顆，顯示提供給消費者的蚵仔麵線有符合標準食譜之設計，消費者可以滿意享用蚵仔麵線，不會有消費者抱怨蚵仔太少，若蚵仔麵線有太多的蚵仔對餐廳成本會增加。因此，驗證結果接受虛無假設時，餐廳宣稱有 20 顆蚵仔成立。

假設檢定過程若拒絕接受虛無假設 H_0: $\mu \ge 20$ 顆，而接受對立假設 H_1: $\mu < 20$ 顆時，每碗蚵仔麵線並沒有依據標準食譜的規劃，讓消費者感覺到蚵仔太少，滿意度會下降，有欺騙消費者的嫌疑。

驗證、檢定決策制定(Testing in decision-making situations)

奇遇餐廳販售清蒸鱸魚一盤設定售價 NT\$ 300 元，餐廳規劃標準食譜(standard recipe)時，設計每盤清蒸鱸魚中有一尾鱸魚，鱸魚購買時設定重量(As-purchased weight, AP) $\mu = 600$ 公克。供貨廠商進貨時，有品管人員抽樣驗證鱸魚是否有達到 AP $\mu = 600$ 公克的驗收標準。

虛無假設 H_0: $\mu = 600$ 公克 vs. 對立假設 H_1: $\mu \ne 600$ 公克

因此，假設檢定過程若接受虛無假設 H_0: $\mu = 600$ 公克，顯示供貨廠商提供的鱸魚有符合標準食譜的設計，可以通過品管人員驗收送進廚房，供廚房進行清蒸鱸魚的烹製之用。因此，驗證結果接受虛無假設時，餐廳可以接受此批鱸魚。

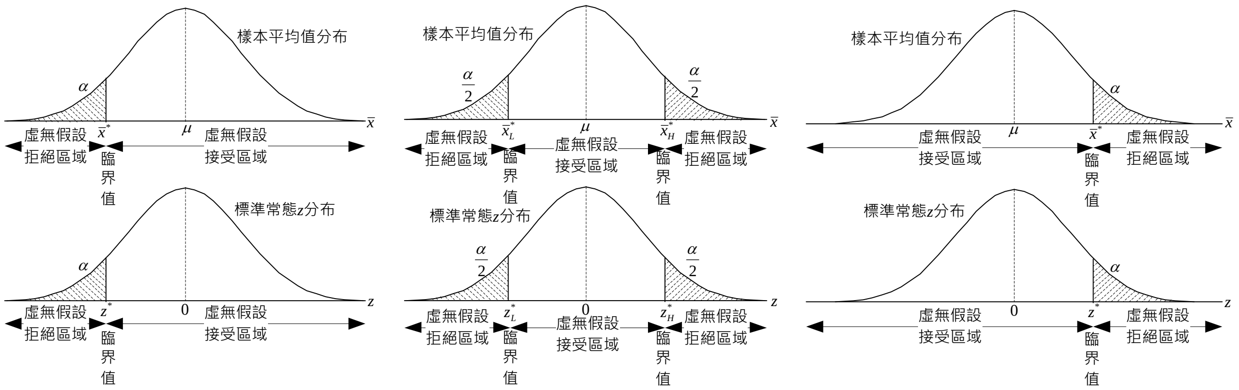
假設檢定過程若拒絕接受虛無假設 H_0: μ = 600 公克，而接受對立假設 H_1: $\mu \neq$ 600 公克時，供貨廠商所提供的鱸魚沒有符合標準食譜的規劃，可能是重量太輕或重量太重，無法通過品管人員的驗收送進廚房。因此，驗證結果接受對立假設，餐廳應拒收此批鱸魚，退回供應廠商。

假設檢定三種型態

左尾檢定(Left-tailed test)	雙尾檢定(Two-tailed test)	右尾檢定(Right-tailed test)
虛無假設 H_0: $\mu \geq 20$ 顆	虛無假設 H_0: $\mu = 600$ 公克	虛無假設 H_0: $\mu \leq 56000$ 元
對立假設 H_1: $\mu < 20$ 顆	對立假設 H_1: $\mu \neq 600$ 公克	對立假設 H_1: $\mu > 56000$ 元

一般有等號(=)的假設都屬於虛無假設(Null hypothesis)。而對立假設(Alternative hypothesis)一般而言是研究者想要建立的假設條件。

臨界值(critical point)就是判定接受虛無假設(虛無假設接受區域)與拒絕虛無假設(虛無假設拒絕區域)判斷點、決策點或接點。



從蚵仔麵線中蚵仔數量的案例中，怕的是不蚵仔數量不足(接受對立假設)，而拒絕虛無假設，接受對立假設，如上面左圖所示，接受對立假設的區域僅會出現在左側，故稱為左尾檢定。

評估粉紅佳人(Pink lady)行銷活動的效益，期望增加盈餘的案例中，期望的是行銷活動成功，可以增加盈餘，如上面右圖所示，接受對立假設的區域僅會出現在右側，故稱為右尾檢定。

在鱸魚購買時設定重量標準案例中，不希望重量過輕或過重，而接受對立假設，進行退貨動作，如上面中圖所示，接受對立假設的區域會出現在左右兩側，故稱為雙尾檢定。

統計上假設檢定又可以從另外一種方式區分為簡單假設(simple hypothesis)和複合假設(composite hypothsis)兩種。當進行假設檢定時，有提供母體分布資料完整者，此研究假設稱為簡單假設(simple hypothesis)，例如：隨機變數 X~$N(\mu,\sigma^2)$，假設檢定母體平均值 μ = 5 和變異數 σ^2 = 2 單一特定數值。進行假設檢定時，未提供的母體分布資料完整者，此研究假設稱為複合假設(composite hypothesis)，例如：隨機變數 X~$N(\mu,\sigma^2)$，下列假設(a) H_0: $\mu = \mu_0$; H_1: $\mu \neq \mu_0$；(b) H_0: $\sigma^2 = \sigma_0^2$; H_1: $\sigma^2 \neq \sigma_0^2$；(c) H_0: $\mu \leq \mu_0, \sigma^2 = \sigma_0^2$; H_1: $\mu > \mu_0, \sigma^2 \neq \sigma_0^2$；(d) H_0: $\mu \geq \mu_0, \sigma^2 = \sigma_0^2$; H_1: $\mu < \mu_0, \sigma^2 \neq \sigma_0^2$；(e) H_0: $\mu = \mu_0, \sigma^2 = \sigma_0^2$; H_1: $\mu \neq \mu_0, \sigma^2 \neq \sigma_0^2$；(f) H_0: $\mu \leq \mu_0, \sigma^2 \geq \sigma_0^2$; H_1: $\mu > \mu_0, \sigma^2 < \sigma_0^2$；(g) H_0: $\mu \geq \mu_0, \sigma^2 \geq \sigma_0^2$; H_1: $\mu < \mu_0, \sigma^2 < \sigma_0^2$；(h) H_0: $\mu = \mu_0, \sigma^2 \geq \sigma_0^2$; H_1: $\mu \geq \mu_0, \sigma^2 < \sigma_0^2$；(i) H_0: $\mu \leq \mu_0, \sigma^2 \leq \sigma_0^2$; H_1: $\mu > \mu_0, \sigma^2 > \sigma_0^2$；(j) H_0: $\mu \geq \mu_0, \sigma^2 \leq \sigma_0^2$; H_1: $\mu < \mu_0, \sigma^2 > \sigma_0^2$；(k) H_0: $\mu = \mu_0, \sigma^2 \leq \sigma_0^2$; H_1: $\mu \geq \mu_0, \sigma^2 > \sigma_0^2$皆屬於非單一特定數值。故，若在進行假設檢定時，有針對隨機變數給予特定機率分布就稱為簡單假設，其餘者皆稱為複合假設。

範例 9.1　奇遇餐廳外場經理觀察(宣稱)消費者在星期一到四時，消費者平均消費金額少於 NT\$ 300 元，有推辭鼓勵消費(現場促銷)不力之嫌，但是會計發現近幾個月來消費者的平均消費金額有增加趨勢，會計欲抽取星期一到四的消費者消費金額為樣本，驗證外場經理的觀察(宣稱)。

甲、應該使用那一組假設來驗證外場經理的觀察(宣稱)？

H_0: $\mu \le 300$ 元	H_0: $\mu \ge 300$ 元	H_0: $\mu = 300$ 元
H_1: $\mu > 300$ 元	H_1: $\mu < 300$ 元	H_1: $\mu \ne 300$ 元

乙、接受虛無假設(Null hypothesis) H_0 時，有何推論？

丙、拒絕虛無假設(Null hypothesis) H_0，接受對立假設(Alternative hypothesis) H_1 時，有何推論？

答案：甲：虛無假設 H_0: $\mu \le 300$ 元；對立假設 H_1: $\mu > 300$ 元；乙：接受虛無假設 H_0: $\mu \le 300$ 元時，外場經理的觀察正確，星期一到四期間確實是比較難經營的時段，宜提出有效行銷方案，以提升消費金額；丙：拒絕虛無假設，接受對立假設 H_1: $\mu > 300$ 元，外場經理的觀察有問題，應該是收帳短缺，宜盡速查明原因。

練習 9.1　奇遇餐廳每日平均營業額 NT$ 35,000 元，現欲在星期一到四晚餐營業額較差的時段，推出粉紅佳人(Pink lady)行銷活動，女性顧客只要在星期一到四晚上穿粉紅色衣服到餐廳用餐時，給予六折優惠，希望吸引顧客的上門，以提升經營績效，增加營業額。欲以三個月的行銷期間為基準，隨機抽樣計算營業額，以驗證粉紅佳人(Pink lady)行銷活動，是否可以提高營業額。

甲、請設定虛無假設(Null hypothesis)和對立假設(Alternative hypothesis)。

乙、接受虛無假設(Null hypothesis) H_0 時，有何推論或建議？

丙、拒絕虛無假設(Null hypothesis) H_0，接受對立假設(Alternative hypothesis) H_1 時，有何推論或建議？

練習 9.2　消費者保護團體關心市售 500 毫升鮮乳容量是否足夠問題，欲檢測是否如廠商所宣稱的平均至少 500 毫升在每一個鮮乳包裝中。

甲、請設定虛無假設(Null hypothesis)和對立假設(Alternative hypothesis)。

乙、接受虛無假設(Null hypothesis) H_0 時，有何推論或建議？

丙、拒絕虛無假設(Null hypothesis) H_0，接受對立假設(Alternative hypothesis) H_1 時，有何推論或建議？

答案：甲：虛無假設 H_0: $\mu \ge 500$ 毫升，對立假設 H_1: $\mu < 500$ 毫升；乙：接受虛無假設 H_0: $\mu \ge 500$ 毫升，該廠商宣稱鮮乳容量足夠，沒有欺騙消費者之嫌；丙：拒絕虛無假設(Null hypothesis) H_0: $\mu \ge 500$ 毫升，接受對立假設(Alternative hypothesis) H_1: $\mu < 500$ 毫升，該廠商宣稱鮮乳容量不足夠，有欺騙消費者之嫌

練習 9.3　全球正受金融海嘯衝擊，主計處公布失業率由去年同期的 0.045 上升至今年此時的 0.065，某研究中心，懷疑主計處現階段調查數據的準確性與公信力，決定自行進行一次調查。請設定虛無假設(Null hypothesis)和對立假設(Alternative hypothesis)並說明其屬於右尾、左尾或雙尾檢定。

練習 9.4　奇遇餐廳以往平均每月消費者抱怨事件 18 件，為提升服務品質，降低消費者抱怨事件的發生。該餐廳投入大量教育訓練費用，提升服務人員的服勤技術和內場人員的生產效益。實施

教育訓練計畫後，今年前半年，平均每月消費者抱怨事件為 10 件，標準(偏)差 1.5 件。該餐廳欲進行統計檢定，以決定此教育訓練費用值不值得。請設定虛無假設(Null hypothesis)和對立假設(Alternative hypothesis)並說明其屬於右尾、左尾或雙尾檢定。

練習 9.5　奇遇連鎖體系餐廳在深水營業點的平均月營業額僅有新台幣 32.5 萬元，若未來半年內月營業額沒有顯著提昇者，連鎖體系欲關閉此營業點。欲利用未來半年的月營業額為樣本，進行統計檢定，以決定是否關閉該營業點。請設定虛無假設(Null hypothesis)和對立假設(Alternative hypothesis)並說明其屬於右尾、左尾或雙尾檢定。

練習 9.6　奇遇連鎖體系餐廳在深水營業點的前一年服務品質調查獲得 67.5 分。近期欲同樣對該營業點的服務品質進行調查，以瞭解該營業點服務品質狀況。請設定虛無假設(Null hypothesis)和對立假設(Alternative hypothesis)並說明其屬於右尾、左尾或雙尾檢定。

9.1.3 單一母體平均值的假設檢定

假設樣本 $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ 抽樣自母體平均值 μ，變方 σ^2 之隨機樣本，一般情況母體平均值 μ 未知，但可以先假設此母體平均值為 μ_0(已知)，透過樣本平均值$\bar{x}$與 μ_0 之差異來推斷和推論母體平均值 μ 是否即是 μ_0。統計假設(statistical hypothesis)是對一個或多個母體參數的一種推測、推斷和推論。假設檢定四步驟：

A.設定顯著水準 $\alpha = 0.05$、0.01 或 0.10。

B.虛無假設(null hypothesis)：一般為研究者欲認證或欲推翻的統計假設，為統計假設中的主要假設，一般利用 H_0 表示。檢定對母體參數的一種暫時性假設。

$$H_0: \mu = \mu_0$$

C.對立假設(alternative hypothesis)：若虛無假設無法成立時，對立假設一定會成立，兩者為互補獨立的陳述。即虛無假設之互補假設，一般採用 H_1 或 H_a 符號表示。或稱研究假設(research hypothesis)。

$$H_1: \mu \neq \mu_0$$

D.計算樣本平均值之標準化值 Z

$$\text{檢定統計值 } Z = \frac{\bar{x}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

在雙尾檢定下，將計算獲得之檢定統計值 Z 值與$z_{\frac{\alpha}{2}}$(臨界值)比較，若$-z_{\frac{\alpha}{2}}$(臨界值) < 檢定統計值 $Z < z_{\frac{\alpha}{2}}$(臨界值)成立，表示接受(或不捨棄)虛無假設 H_0；反之，若檢定統計值 $Z \leq -z_{\frac{\alpha}{2}}$(臨界值)或檢定統計值 $Z \geq z_{\frac{\alpha}{2}}$(臨界值)，表示接受(或不捨棄)對立假設 H_1。

亦可求樣本平均值$\bar{x}$在平均值為 μ_0 母體中發生機率，利用標準常態分布累積函數

$$p = \Phi\left(\frac{\bar{x}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) = P\left(Z \leq \frac{\bar{x}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)$$

若 $p > 0.05$ (或 $p > \frac{0.05}{2} = 0.025$ 雙尾)，推論接受虛無假設 H_0，反之則接受對立假設 H_1。

範例 9.2　奇遇高級海產餐廳平均日營業額 μ_0 為 NT$ 20000 元，標準(偏)差(SD) $\sigma = 5000$ 元。上週 7 個營業日的平均日營業額$\bar{x}$為 25000 元，問此上週業績是否合乎標準值：

題解：樣本平均營業額有可能高於特定數值，亦有可能低於設定數值，此題目是要評量營業額是否為特定的數值，故屬於雙尾檢定。

A.設定顯著水準 $\alpha = 0.05$，左側臨界值$-z_{\frac{\alpha}{2}} = -z_{\frac{0.05}{2}} = -z_{0.025} = -1.96$；右側臨界值$z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{\frac{0.05}{2}} = z_{0.025} = 1.96$(使用 Excel 軟體 NORM.S.INV 函數查詢獲得)。

B.虛無假設 $H_0: \mu = \mu_0 = 20000$ 元

C.對立假設 $H_1: \mu \neq \mu_0 = 20000$ 元

D.計算檢定統計值 Z 值

$$檢定統計值\ Z = \frac{\bar{x}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{25000-20000}{\frac{5000}{\sqrt{7}}} = \frac{5000}{1889.8} = 2.645$$

E.左側臨界值$-z_{0.025} = -1.96 <$ 右側臨界值 $z_{0.025} = 1.96 <$ 檢定統計值 $Z = 2.645$，檢定統計值位於虛無假設拒絕區域內，拒絕接受虛無假設 $H_0: \mu = \mu_0 = 20000$ 元，接受對立假設 $H_1: \mu \neq \mu_0 = 20000$ 元。

答案：上週業績超過標準值，異常高。

範例 9.3 奇遇高級海產餐廳平均日營業額 μ_0 為 NT$ 35000 元，標準(偏)差(SD) σ = 2500 元。上月 30 個營業日的平均日營業額$\bar{x}$為 34500 元，問上月業績是否合乎正常(標準)值？

題解：樣本平均營業額有可能高於特定數值，亦有可能低於設定數值，此題目是要評量營業額是否為特定的數值，故屬於雙尾檢定。

A.設定顯著水準 $\alpha = 0.05$，左側臨界值$-z_{\frac{\alpha}{2}} = -z_{\frac{0.05}{2}} = -z_{0.025} = -1.96$；右側臨界值$z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{\frac{0.05}{2}} = z_{0.025} = 1.96$(使用 Excel 軟體 NORM.S.INV 函數查詢獲得)。

B.虛無假設 $H_0: \mu = \mu_0 = 35000$ 元。

C.對立假設 $H_1: \mu \neq \mu_0 = 35000$ 元。

D.計算檢定統計值 Z 值

$$檢定統計值\ Z = \frac{\bar{x}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{34500-35000}{\frac{2500}{\sqrt{30}}} = \frac{-500}{456.4} = -1.0955$$

E.左側臨界值$-z_{0.025} = -1.96 <$ 檢定統計值 $Z = -1.0955 <$ 右側臨界值 $z_{0.025} = 1.96$，檢定統計值位於虛無假設接受區域內，接受虛無假設 $H_0: \mu = \mu_0 = 35000$ 元。

答案：上月 30 營業日的營業額符合正常標準，沒有異常。

練習 9.7 奇遇高級海產餐廳平均日營業額 μ_0 為 NT$ 30000 元，標準(偏)差(SD) σ = 2500 元。前 5 個營業日的每日營業額分別為 NT$ 21500、23561、24560、35420 和 36534 元，假設顯著水準 $\alpha = 0.05$ 時，問此前 5 個營業日業績是否合乎正常(標準)值？

題解：樣本平均營業額有可能高於特定數值，亦有可能低於設定數值，此題目是要評量營業額是否為特定的數值，故屬於雙尾檢定。將 5 個營業額觀測值運算出樣本平均值$\bar{x} = 28315$ 元。

A.設定顯著水準 $\alpha = 0.05$，左側臨界值$-z_{\frac{\alpha}{2}} = -z_{\frac{0.05}{2}} = -z_{0.025} = -1.96$；右側臨界值$z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{\frac{0.05}{2}} = z_{0.025} = 1.96$(使用 Excel 軟體 NORM.S.INV 函數查詢獲得)

B.虛無假設 $H_0: \mu = \mu_0 = 30000$ 元。

C.對立假設 $H_1: \mu \neq \mu_0 = 30000$ 元。

D.計算檢定統計值 Z 值

$$檢定統計值\ Z = \frac{\bar{x}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{28315-30000}{\frac{2500}{\sqrt{5}}} = \frac{-1685}{1118.034} = -1.5071$$

E.左側臨界值$-z_{0.025} = -1.96 <$ 檢定統計值 $Z = -1.5071 <$ 右側臨界值 $z_{0.025} = 1.96$，檢定統計值位於虛無假設接受區域內，接受虛無假設 $H_0: \mu = \mu_0 = 30000$ 元。

答案：5 個營業日的營業額符合正常標準，沒有異常。

練習 9.8　燕巢咖啡館平均日營業額 μ_0 為 NT\$ 20000 元，標準(偏)差(SD) $\sigma = 1000$ 元。前 7 個營業日的每日營業額分別為 NT\$ 19500、21650、20585、23560、24560、25420 和 25655 元，假設顯著水準 $\alpha = 0.05$ 時，問此前 7 個營業日業績是否合乎正常(標準)值？

題解：樣本平均營業額有可能高於特定數值，亦有可能低於設定數值，此題目是要評量營業額是否為特定的數值，故屬於雙尾檢定。將 7 個營業額觀測值運算出樣本平均值 $\bar{x} = 22990$ 元。

A.設定顯著水準 $\alpha = 0.05$，左側臨界值 $-z_{\frac{\alpha}{2}} = -z_{\frac{0.05}{2}} = -z_{0.025} = -1.96$；右側臨界值 $z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{\frac{0.05}{2}} = z_{0.025} = 1.96$(使用 Excel 軟體 NORM.S.INV 函數查詢獲得)。

B.虛無假設 H_0: $\mu = \mu_0 = 20000$ 元。

C.對立假設 H_1: $\mu \neq \mu_0 = 20000$ 元。

D.計算檢定統計值 Z 值

$$\text{檢定統計值 } Z = \frac{\bar{x}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{22990-20000}{\frac{1000}{\sqrt{7}}} = \frac{2990}{377.964} = 7.9108$$

E.左側臨界值 $-z_{0.025} = -1.96$ < 右側臨界值 $z_{0.025} = 1.96$ < 檢定統計值 $Z = 7.9108$，檢定統計值不位於虛無假設接受區域內，接受對立假設 H_1: $\mu \neq \mu_0 = 20000$ 元。

答案：7 個營業日的營業額不符合正常標準，有異常的高於標準。

9.2 型一和型二錯誤

說明範例一

觀光管理單位欲調查台北燈會參觀者滿意度(0~100 分評量)，參觀者人數達到 600 多萬人次(母體)，限於經費不可能普查，期望透過抽樣可以檢定參觀者滿意度是否超過 60 分(虛無假設 H_0: $\mu \geq 60$；對立假設 H_1: $\mu < 60$)，運用抽樣方法獲得 600 份樣本資料，計算後獲得參觀者滿意度平均值，進行統計推論，可能有下列四種類型的結果：

		母體平均值(真實狀況)	
		高於60分 虛無假設H_0: $\mu \geq 60$	低於60分 對立假設H_1: $\mu < 60$
樣本平均值	80分 虛無假設H_0: $\mu \geq 60$	推論可能正確	推論可能錯誤 型二錯誤
	40分 對立假設H_1: $\mu < 60$	推論可能錯誤 型一錯誤	推論可能正確

假設 600 份樣本資料的滿意度平均值達到 80 分，實際 600 多萬人次(母體)滿意度平均值也高於 60 分，可能讓統計檢定判斷正確，接受虛無假設 H_0: $\mu \geq 60$。

假設 600 份樣本資料的滿意度平均值達到 80 分，實際 600 多萬人次(母體)滿意度平均值是低於 60 分，可能讓統計檢定判斷錯誤，應該是對立假設 H_1: $\mu < 60$ 才對，但接受虛無假設 H_0: $\mu \geq 60$，此種判斷錯誤稱為型二錯誤。

假設 600 份樣本資料的滿意度平均值僅達 40 分，實際 600 多萬人次(母體)滿意度平均值高於 60 分，可能讓統計檢定判斷錯誤，拒絕虛無假設 H_0: $\mu \geq 60$，接受對立假設 H_1: $\mu < 60$，此種判斷錯誤稱為型一錯誤。

假設 600 份樣本資料的滿意度平均值僅達 40 分，實際 600 多萬人次(母體)滿意度平均值亦低於 60 分，可能讓統計檢定判斷正確，接受對立假設 H_1: $\mu < 60$。

在實際狀況下，600 多萬人次(母體)滿意度平均值是未知，故，進行統計檢定時，必須同時考慮到會有前述四種狀況，有兩種狀況判斷正確，也有另外兩種狀況會產生判斷錯誤的情況。因此，管理者需要知道在進行統計推論時，可能會產生判斷錯誤機率高低。

說明範例二

大陸來台觀光人次逐漸增加，旅台期間喜歡購買台灣產茶葉，不肖店家會以非台灣本地產茶葉充當台灣產茶葉販售，大陸遊客購買與否有下列四種狀況

		茶葉產地	
		台灣產茶葉	非台灣產茶葉
遊客決策	購買	正確	被騙了 型二錯誤
	不買	枉費此行 型一錯誤	正確

虛無假設 H_0:台灣產茶葉與對立假設 H_1:非台灣產茶葉，遊客決策有兩種購買者接受虛無假設，不購買者即拒絕虛無假設。遊客本身很想知道其決策判斷正確機率？判斷錯誤機率？

真實的茶葉產品是台灣本地生產者(虛無假設成立)，決策上購買，可歸於決策正確。

真實的茶葉產品是台灣本地生產者(虛無假設成立)，決策上不購買，僅遊客無法回去後與親友享用台灣美味，遊客並沒有金錢上的損失，僅是商家備貨可能滯銷產生損耗，此種決策不正確，屬於型一錯誤或稱為生產者風險(producer’s risk)。

真實的茶葉產品是非台灣本地生產者(虛無假設不成立)，決策上購買，遊客回去後與親友享用的是劣質的茶葉，非台灣美味，遊客有金錢上的損失，商家銷售非台灣本地生產的茶葉，可以獲利，此種遊客決策不正確，屬於型二錯誤或稱為消費者風險(consumer’s risk)。

真實的茶葉產品是非台灣本地生產者(虛無假設不成立)，決策不購買，可歸於決策正確。

學習者必須學習到型一錯誤和型二錯誤的定義，同時學會估算其錯誤機率。

利用虛無假設和對立假設來推論樣本平均值$\bar{x}$是否來自母體平均值 μ_0 的母體，惟此種推論並非完全百分之百正確無瑕疵，此種推論過程有下列四種情況：

(1)樣本平均值$\bar{x}$確實抽自母體平均值為 μ_0 的母體，故虛無假設 H_0: $\mu = \mu_0$ 為真，抽樣數值分析結果顯示樣本平均值$\bar{x}$與母體平均值 μ_0 數值差距小，Z 值小，$p > \alpha$ (0.05)，接受虛無假設 H_0: $\mu = \mu_0$，推測判斷正確，判斷正確機率為 $1 - \alpha$ (95 %)。

(2)樣本平均值$\bar{x}$確實抽自母體平均值為 μ_0 的母體，故虛無假設 H_0: $\mu = \mu_0$ 為真，抽樣數值分析結果顯示樣本平均值$\bar{x}$與母體平均值 μ_0 數值差距大，Z 值大，$p < \alpha$ (0.05)，拒絕虛無假設 H_0: $\mu = \mu_0$，接受對立假設 H_1: $\mu \neq \mu_0$，推測判斷錯誤，這種錯誤情況在統計學上稱為型一錯誤、第一種錯誤、第一類錯誤、型 I 錯誤、型一誤差(type I error)、生產者風險(producer’s risk)或 α-error，錯誤機率以 α (5 %)代表，統計學上稱此 α (5 %錯誤率)為顯著水準(significance level, significant level, or level of significance)。α-risk(α 風險) = P(type I error) = P(接受 $H_1|H_0$ 為真) = P(拒絕 $H_0|H_1$ 為偽)。

(3)樣本平均值$\bar{x}$確非來自母體平均值為 μ_0 的母體，故虛無假設 H_0: $\mu = \mu_0$ 為偽，對立假設 H_1: $\mu \neq \mu_0$ 為真，抽樣數值分析結果顯示樣本平均值$\bar{x}$與母體平均值 μ_0 數值差距小，Z 值小，$p > \alpha$ (0.05)，接受虛無假設 H_0: $\mu = \mu_0$，推測**判斷錯誤**，這種錯誤在統計學上稱為型二錯誤、第二種錯誤、第二類錯誤、

型 II 錯誤、型二誤差(type II error)或消費者風險(consumer's risk)，錯誤機率以 β 代表。β-risk(β 風險) = P(type II error) = P(接受 $H_0|H_1$ 為真) = P(拒絕 $H_1|H_0$ 為偽)。

(4)樣本平均值$\bar{x}$確非來自母體平均值為 μ_0 的母體，故虛無假設 H_0: $\mu = \mu_0$ 為偽，對立假設 H_1: $\mu \neq \mu_0$ 為真，抽樣數值分析結果顯示樣本平均值$\bar{x}$與母體平均值 μ_0 數值差異大，Z 值大，$p < \alpha$ (0.05)，接受對立假設 H_1: $\mu \neq \mu_0$，推測判斷正確，判斷正確機率為 $1 - \beta$。統計學上 $1 - \beta$ 稱為強度(power)或檢(定)力(power of the test)。

事實(true)：真實狀況

		H_0 為真	H_0 為偽；H_1 為真
決策或推論(依據統計驗證後建議的決策)	接受 H_0 (accept H_0)	判斷正確 機率：$1-\alpha$	判斷錯誤，機率：β 型二錯誤(Type II error)
	拒絕 H_0；接受 H_1 (reject H_0; accept H_1)	判斷錯誤，機率：α 型一錯誤(Type I error)	判斷正確 機率：$1-\beta$

進行假設檢定時，決策者所能容忍發生型一錯誤的最高程度，即是此假設檢定的顯著水準(level of singifivance)。

範例 9.4 奇遇餐廳外場經理觀察(宣稱)消費者在星期一到四時，消費者平均消費金額少於 NT$ 300 元，有推辭鼓勵消費(現場促銷)不力之嫌，但是會計發現近幾個月來消費者的平均消費金額有增加趨勢，會計欲抽取星期一到四的消費者消費金額為樣本，驗證外場經理的觀察(宣稱)。其虛無假設和對立假設如下：請解釋下列狀況。

虛無假設 H_0: $\mu \leq 300$ 元 vs. 對立假設 H_1: $\mu > 300$ 元

(A)型一錯誤(Type I error)；(B)型二錯誤(Type II error)；(C)判斷正確；(D)事實上平均消費金額少於 NT$ 300 元，統計推論平均消費金額高於 NT$ 300 元；(E)事實上平均消費金額高於 NT$ 300 元，統計推論平均消費金額高於 NT$ 300 元。

題解：

(A)型一錯誤是虛無假設為真實，但是判斷接受對立假設。此範例中，消費者平均消費金額確實少於 NT$ 300 元，但是透過抽樣所獲得的歸納結論認為消費者平均消費金額卻高於 NT$ 300 元。可能是抽樣誤差所致。

(B)型二錯誤是虛無假設為偽，但是判斷接受虛無假設。此範例中，消費者平均消費金額確實高於 NT$ 300 元，但是透過抽樣所獲得的歸納結論認為消費者平均消費金額卻低於 NT$ 300 元。可能是抽樣誤差所致。

(C)判斷正確有兩種情況。第一種是虛無假設為真，判斷接受虛無假設；第二種是虛無假設為偽，判斷接受對立假設。此範例中，前者是消費者平均消費金額確實低於 NT$ 300 元，同時透過抽樣所獲得的歸納結論認為消費者平均消費金額亦低於 NT$ 300 元，發生機率 $1 - \alpha$；後者是消費者平均消費金額確實高於 NT$ 300 元，同時透過抽樣所獲得的歸納結論認為消費者平均消費金額亦高於 NT$ 300 元，發生機率 $1 - \beta$。

(D)發生型一錯誤，發生機率 α。

(E)決策正確，發生機率 $1 - \beta$。

練習 9.9 消費者保護團體關心市售 500 毫升鮮乳容量是否足夠問題，欲檢測是否如廠商所宣稱的平均至少 500 毫升在每一個鮮乳包裝中。請解釋下列狀況。(A)型一錯誤(Type I error)；(B)型二錯誤(Type II error)；(C)判斷正確。

題解：虛無假設 H_0: $\mu \geq 500$ 毫升；對立假設 H_1: $\mu < 500$ 毫升。

(A)型一錯誤(Type I error)代表虛無假設 H_0: $\mu \geq 500$ 毫升為真，惟判斷錯誤，誤判為對立假設 H_1: $\mu < 500$ 毫升為實。誤會廠商。

(B)型二錯誤(Type II error)代表對立假設 H_1: $\mu < 500$ 毫升為真，惟判斷錯誤，誤判為虛無假設 H_0: $\mu \geq 500$ 毫升為實。消費者吃虧，肥了廠商。

(C)判斷正確者，有虛無假設 H_0: $\mu \geq 500$ 毫升為真，判斷正確虛無假設 H_0: $\mu \geq 500$ 毫升為真，廠商合於標示，驗證為實；另有對立假設 H_1: $\mu < 500$ 毫升為真，判斷正確對立假設 H_1: $\mu < 500$ 毫升為真，廠商不合於標示，同時驗證為實。

練習 9.10 連鎖速食餐廳總部宣稱消費者滿意度超過 35(總分 60 分)。一速食餐廳經理欲使用 60 分為滿分的滿意度問卷，驗證總部宣稱消費者滿意度平均值超過 35 是否為真。

(a) 假設 μ 代表速食餐廳滿意度的平均值，若想要驗證滿意度平均值 μ 超過 35，其虛無假設和對立假設如何設定。

(b) 在這種狀況下，請解釋型一錯誤(Type I error)和型二錯誤(Type II error)。

練習 9.11 一速食餐廳經理發展一套新的服務流程，在用餐尖峰時間可以降低顧客等候備餐的時間。該經理希望新的服務流程可以從現階段等候時間 180 到 360 秒，降到 120 秒以下。假設該經理想要驗證等候時間 120 秒，以支持新的服務流程可以將等候時間降到 120 秒。

(a) 假設 μ 代表新的服務流程的等候時間平均值，若想要驗證等候時間平均值 μ 低於 120 秒，其虛無假設和對立假設如何設定。

(b) 在這種狀況下，請解釋型一錯誤(Type I error)和型二錯誤(Type II error)。

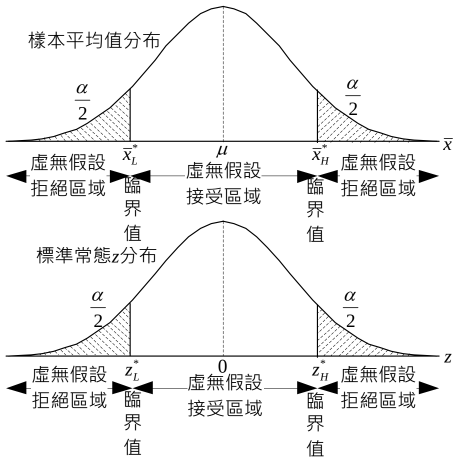
9.3 母體平均值假設檢定：大量樣本數

9.3.1 單尾與雙尾檢定

依據對立假設(Alternative hypothesis)設立時所使用的符號>、<和=，區分假設檢定為單尾(one sided test)與雙尾檢定(two sided test)。

判斷錯誤機率 α 分布在常態分布兩尾端各佔一半，其機率分別為$\frac{\alpha}{2}$，這種假設檢定稱雙邊檢定(two sided test)、雙尾檢定、兩尾檢定(two tailed test)或雙尾假設檢定(two-tailed hypothesis test)。若研究人員推測、質疑母體參數的數值 μ 可能大於假設值 μ_0，或母體參數的數值 μ 亦可能小於假設值 μ_0 時，雙尾檢定的虛無假設(Null hypothesis)和對立假設(Alternative hypothesis)為：

$$\text{虛無假設 } H_0: \mu = \mu_0 \quad \text{vs.} \quad \text{對立假設 } H_1: \mu \neq \mu_0$$



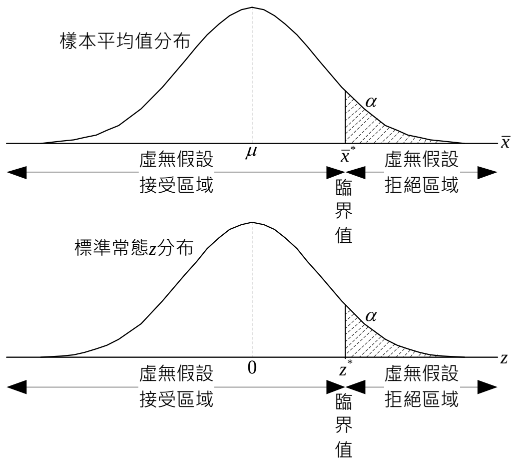
對立假設中有『≠』符號，即為雙尾檢定。在雙邊檢定中可以被接受(虛無假設 H_0)的區域(acceptance region)在常態分布的中間(H_0: $\mu = \mu_0$)；拒絕接受虛無假設 H_0，而接受對立假設 H_1 的區域在常態分布的左右兩端(H_1: $\mu \neq \mu_0$)。左右兩個拒絕區域皆有$\frac{\alpha}{2}$機率(面積)，左右兩個拒絕區域的總和機率(面積)為 α。$\bar{x}_H^*$為上臨界值或右臨界值；$\bar{x}_L^*$為下臨界值或左臨界值。

有些研究只希望母體平均值 μ 比假設值 μ_0 大，而沒有母體平均值 μ 比假設值 μ_0 小的現象，顯著水準 α 全部分配於常態分布的右側；或只希望母體平均值 μ 比假設值 μ_0 小，而沒有母體平均值 μ 比假設值 μ_0 大的現象，顯著水準 α 全部分配於常態分布的左側，這種檢定法稱為單邊檢定(one sided test)、一尾檢定、單尾檢定(one tailed test)或單尾假設檢定(one-tailed hypothesis test)。

右尾檢定(a right-tailed test)

若研究人員推測或質疑母體參數—母體平均值的數值 μ 大於假設值 μ_0 時，虛無假設和對立假設分別為：

$$\text{虛無假設 } H_0: \mu \leq \mu_0 \quad \text{vs.} \quad \text{對立假設 } H_1: \mu > \mu_0$$



對立假設中有『>』符號，即為右尾檢定，拒絕虛無假設(null hypothesis)的區域在樣本平均值$\bar{x}$分布的右尾。

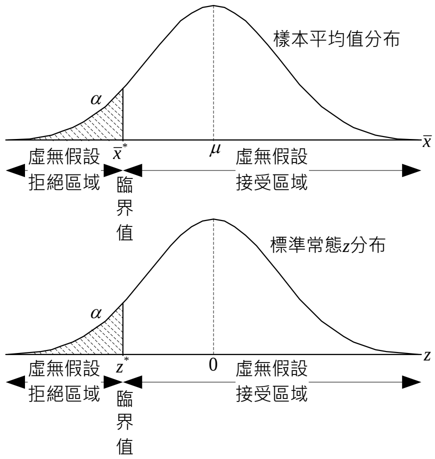
在超過(高於)臨界值(critical value)的區域，即是拒絕虛無假設 H_0 的範圍，稱為**臨界(區)域**(critical region, CR)、**危險(區)域**、**棄卻(區)域**或**拒絕(區)域**(reject region)。未超過(低於)臨界值的區域，即是接受虛無假設 H_0 的範圍，稱為**接受(區)域**(acceptance region, AR)。

若樣本平均值$\bar{x}$落在虛無假設 H_0 拒絕區域時，推論必須拒絕虛無假設 H_0，而接受對立假設 H_1；若樣本平均值$\bar{x}$落在虛無假設 H_0 接受區域時，推論必須接受虛無假設 H_0，而拒絕對立假設 H_1。

左尾檢定(a left-tailed test)

若研究人員推測或質疑母體參數─母體平均值的數值 μ 小於假設值 μ_0 時，虛無假設和對立假設分別為：

虛無假設 H_0: $\mu \geq \mu_0$ vs. 對立假設 H_1: $\mu < \mu_0$



對立假設中有『<』符號，即為左尾檢定，拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0 的區域在樣本平均值$\bar{x}$分布的左尾。

在未超過(低於)臨界值(critical value)的區域，即是拒絕虛無假設 H_0 的範圍，稱為臨界(區)域(critical region, CR)、危險(區)域或拒絕(區)域(reject region)。超過(高於)臨界值的區域，即是接受虛無假設 H_0 的範圍，稱為接受(區)域(acceptance region, AR)。

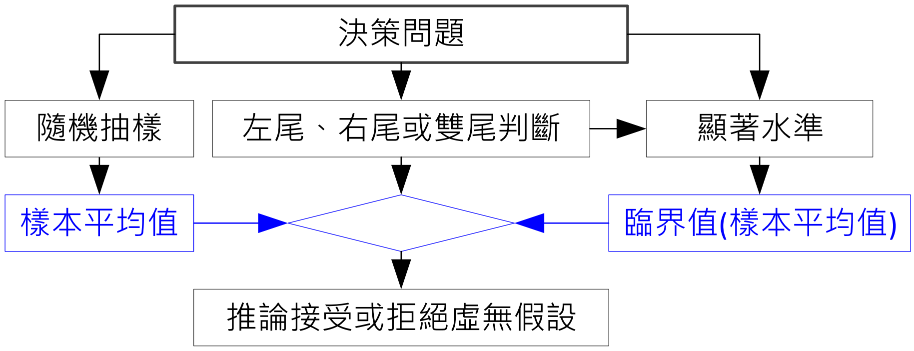
若樣本平均值$\bar{x}$落在虛無假設 H_0 拒絕區域時，推論必須拒絕虛無假設 H_0，而接受對立假設 H_1；若樣本平均值$\bar{x}$落在虛無假設 H_0 接受區域時，推論必須接受虛無假設 H_0，而拒絕對立假設 H_1。

	左尾檢定(left-tailed)	雙尾檢定(two-tailed)	右尾檢定(right-tailed)
假設	H_0: $\mu \geq \mu_0$ vs. H_1: $\mu < \mu_0$	H_0: $\mu = \mu_0$ vs. H_1: $\mu \neq \mu_0$	H_0: $\mu \leq \mu_0$ vs. H_1: $\mu > \mu_0$
虛無假設拒絕區域	左尾	左右兩尾	右尾
α 值	α	$\frac{\alpha}{2}$	α
臨界值	$-z_\alpha$	$-z_{\frac{\alpha}{2}}$ and $z_{\frac{\alpha}{2}}$	z_α
虛無假設拒絕區域	$R = \{Z \leq -z_\alpha\}$	$R = \{Z \leq -z_{\frac{\alpha}{2}}$ or $Z \geq z_{\frac{\alpha}{2}}\}$	$R = \{Z \geq z_\alpha\}$

母體平均值的假設檢定分為**臨界值檢定法**(傳統方法)、***z* 值檢定法**(最常使用方法)和 ***p* 值檢定法**(次常使用方法)。

9.3.2 臨界值檢定法

臨界值檢定法(Critical value test method)或臨界點檢定法(Critical point test method)在驗證過程中，先決定顯著水準 α，依據顯著水準 α 計算樣本平均值臨界點(critical point)或臨界值(critical value) $\bar{x}^*$數值，判別虛無假設(null hypothesis)接受區域和拒絕區域，依據樣本統計值—樣本平均值$\bar{x}$判斷是位於虛無假設接受區域或拒絕區域，提出接受或拒絕虛無假設的推論。



右尾檢定(a right-tailed test)：虛無假設 H_0: $\mu \le \mu_0$ vs. 對立假設 H_1: $\mu > \mu_0$。

樣本平均值臨界值(critical value) $\bar{x}^* = \mu_0 + z_\alpha \times \sigma_{\bar{x}} = \mu_0 + z_\alpha \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

若檢定統計值(樣本平均值)$\bar{x} \le$ 樣本平均值臨界值$\bar{x}^*$，檢定統計值位於虛無假設接受區域內，接受虛無假設(null hypothesis) H_0。

若檢定統計值(樣本平均值)$\bar{x} >$ 樣本平均值臨界值$\bar{x}^*$，檢定統計值不位於虛無假設接受區域內，拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0，接受對立假設(alternative hypothesis) H_1。

左尾檢定(a left-tailed test)：虛無假設 H_0: $\mu \ge \mu_0$ vs. 對立假設 H_1: $\mu < \mu_0$。

樣本平均值臨界值(critical value) $\bar{x}^* = \mu_0 - z_\alpha \times \sigma_{\bar{x}} = \mu_0 - z_\alpha \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

若檢定統計值(樣本平均值)$\bar{x} \ge$ 樣本平均值臨界值$\bar{x}^*$，檢定統計值位於虛無假設接受區域內，接受虛無假設(null hypothesis) H_0。

若檢定統計值(樣本平均值)$\bar{x} <$ 樣本平均值臨界值$\bar{x}^*$，檢定統計值不位於虛無假設接受區域內，拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0，接受對立假設(alternative hypothesis) H_1。

雙尾檢定(a two-tailed test)：虛無假設 H_0: $\mu = \mu_0$ vs. 對立假設 H_1: $\mu \ne \mu_0$。

樣本平均值左側臨界值(critical value)：$\bar{x}_L^* = \mu_0 - z_{\frac{\alpha}{2}} \times \sigma_{\bar{x}} = \mu_0 - z_{\frac{\alpha}{2}} \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$；樣本平均值右側臨界值$\bar{x}_H^* = \mu_0 + z_{\frac{\alpha}{2}} \times \sigma_{\bar{x}} = \mu_0 + z_{\frac{\alpha}{2}} \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

若左側樣本平均值臨界值$\bar{x}_L^* \le$ 檢定統計值(樣本平均值)$\bar{x} \le$ 右側樣本平均值臨界值$\bar{x}_H^*$，檢定統計值位於虛無假設接受區域內，接受虛無假設(null hypothesis) H_0。

若檢定統計值(樣本平均值)$\bar{x} <$ 左側樣本平均值臨界值$\bar{x}_L^*$或檢定統計值(樣本平均值)$\bar{x} >$ 右側樣本平均值臨界值$\bar{x}_H^*$，檢定統計值不位於虛無假設接受區域內，拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0，接受對立假設(alternative hypothesis) H_1。

範例 9.5　奇遇餐廳販售蚵仔麵線一碗設定售價 NT$ 50 元，餐廳規劃標準食譜(standard recipe)時，設計每碗蚵仔麵線應該有 20 顆蚵仔。現今抽查 35 碗蚵仔麵線調查每碗裡面多少蚵仔，分別如下：

編號	蚵仔數量	編號	蚵仔數量	編號	蚵仔數量	編號	蚵仔數量
1	22	11	22	21	22	31	22
2	18	12	18	22	18	32	18
3	17	13	17	23	17	33	17
4	20	14	20	24	20	34	20
5	19	15	19	25	19	35	19
6	26	16	26	26	26		
7	23	17	23	27	23		
8	22	18	22	28	22		
9	18	19	18	29	18		
10	23	20	23	30	23		

驗證該餐廳販售蚵仔麵線是否有符合標準食譜的規劃？是否有欺騙消費者之嫌？

題解：

編號	蚵仔數量 x_i	$x_i-\bar{x}$	$(x_i-\bar{x})^2$	編號	蚵仔數量 x_i	$x_i-\bar{x}$	$(x_i-\bar{x})^2$
1	22	1.4286	2.0408	19	18	-2.5714	6.6122
2	18	-2.5714	6.6122	20	23	2.4286	5.8980
3	17	-3.5714	12.7551	21	22	1.4286	2.0408
4	20	-0.5714	0.3265	22	18	-2.5714	6.6122
5	19	-1.5714	2.4694	23	17	-3.5714	12.7551
6	26	5.4286	29.4694	24	20	-0.5714	0.3265
7	23	2.4286	5.8980	25	19	-1.5714	2.4694
8	22	1.4286	2.0408	26	26	5.4286	29.4694
9	18	-2.5714	6.6122	27	23	2.4286	5.8980
10	23	2.4286	5.8980	28	22	1.4286	2.0408
11	22	1.4286	2.0408	29	18	-2.5714	6.6122
12	18	-2.5714	6.6122	30	23	2.4286	5.8980
13	17	-3.5714	12.7551	31	22	1.4286	2.0408
14	20	-0.5714	0.3265	32	18	-2.5714	6.6122
15	19	-1.5714	2.4694	33	17	-3.5714	12.7551
16	26	5.4286	29.4694	34	20	-0.5714	0.3265
17	23	2.4286	5.8980	35	19	-1.5714	2.4694
18	22	1.4286	2.0408	合計	720	0.0000	246.5714

樣本平均值$\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}=\frac{720}{35}$ = 20.5714 顆，樣本標準(偏)差 $S=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n-1}}=\sqrt{\frac{246.5714}{35-1}}$ = 2.6930 顆。

假設值 μ_0 = 20 顆，母體標準(偏)差 σ 未知時，利用樣本標準(偏)差 S 代替。此例屬於左尾檢定(a left-tailed test)。

A.設定顯著水準 α = 0.05，$z_\alpha = z_{0.05}$ = 1.6449(使用 Excel 軟體 NORM.S.INV 函數查詢獲得)。樣本數量多($n \geq 30$)時，使用標準化 z 值進行臨界值檢定法統計推論。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu \geq 20$ 顆。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu < 20$ 顆。

D.計算樣本平均值臨界值(Compute critical value)

$$\text{樣本平均值臨界值}\bar{x}^* = \mu_0 - z_\alpha \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 20 - 1.6449 \times \frac{2.6930}{\sqrt{35}} = 20 - 0.7488 = 19.3 \text{ 顆}$$

E.檢定統計值(樣本平均值)$\bar{x}$ = 20.5714 顆 ≥ 樣本平均值臨界值$\bar{x}^*$ = 19.3 顆，檢定統計值位於虛無假設接受區域內，接受虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu \geq 20$ 顆，推論(結論)每碗蚵仔麵線符合標準食譜中含有 20 顆蚵仔的規劃，沒有欺騙消費者之嫌。

答案：每碗蚵仔麵線符合標準食譜含 20 顆蚵仔的規劃，沒有欺騙消費者

範例 9.6 奇遇餐廳原本每週平均盈餘 μ 為 NT \$56000 元，執行粉紅佳人(Pink lady)行銷活動，女性顧客只要在星期一到四晚上穿粉紅色衣服到餐廳用餐時，給予六折優惠，希望吸引顧客的上門，以提升經營績效，增加盈餘。在執行一年期間(n = 52)，每週盈餘的平均值$\bar{x}$為 NT\$57500 元，每週盈餘的標準(偏)差 S 為 NT\$ 5000 元。試請運用臨界值檢定法評估粉紅佳人(Pink lady)行銷活動提升經營績效，增加盈餘？

題解：樣本數量 n = 52，屬於樣本數量較多者，樣本平均值$\bar{x}$ = NT\$ 57500 元，樣本標準(偏)差 S = NT\$ 5000 元，μ_0 = NT\$ 56000 元。希望以超過原先的盈餘為目的，故本範例屬於右尾檢定(right-tailed test)。

A.設定顯著水準 α = 0.05，$z_\alpha = z_{0.05}$ = 1.6449(使用 Excel 軟體 NORM.S.INV 函數查詢獲得)。樣本數量多($n \geq 30$)時，使用標準化 z 值進行臨界值檢定法統計推論。

B.虛無假設(null hypothesis) $H_0: \mu \le 56000$ 元。

C.對立假設(alternative hypothesis) $H_1: \mu > 56000$ 元。

D.計算樣本平均值臨界值

樣本平均值臨界值$\bar{x}^* = \mu_0 + z_\alpha \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 56000 + 1.6449 \times \frac{5000}{\sqrt{52}} = 56000 + 1140.501 = 57140.5$ 元

E.檢定統計值(樣本平均值)$\bar{x} = 57500$ 元 ＞ 樣本平均值臨界值$\bar{x}^* = 57140.5$ 元，檢定統計值不位於虛無假設接受區域內，拒絕虛無假設 $H_0: \mu \le 56000$ 元，接受對立假設 $H_1: \mu > 56000$ 元，因此，執行粉紅佳人(Pink lady)行銷活動，可以顯著的增加盈餘。應繼續執行。

答案：執行粉紅佳人(Pink lady)行銷活動成功，可以顯著的增加盈餘

範例 9.7　奇遇餐廳原本每週平均盈餘 μ 為 NT $56000 元，每週盈餘金額屬於常態分布，執行粉紅佳人(Pink lady)行銷活動，女性顧客只要在星期一到四晚上穿粉紅色衣服到餐廳用餐時，給予六折優惠，希望吸引顧客的上門，以提升經營績效，增加盈餘。在執行 5 星期(n = 5)，每週盈餘的平均值$\bar{x}$為 NT$56500 元，每週盈餘的標準(偏)差 S 為 NT$ 500 元。試請運用臨界值檢定法評估粉紅佳人(Pink lady)行銷活動提升經營績效，增加盈餘？

題解：樣本數量 $n = 5$，屬於樣本數量較少者，自由度 $v = n - 1 = 5 - 1 = 4$，樣本平均值$\bar{x}$ = NT$ 56500 元，樣本標準(偏)差 S = NT$ 500 元，μ_0 = NT$ 56000 元。希望以超過原先的盈餘為目的，故本範例屬於右尾檢定(a right-tailed test)。

A.設定顯著水準 $\alpha = 0.05$，$t_{\alpha,n-1} = t_{0.05,5-1} = t_{0.05,4} = 2.1318$(使用 Excel 軟體 T.INV 函數查詢獲得)。樣本數量少($n < 30$)時，屬於常態分布使用 t 值取代 z 值進行臨界值檢定法統計推論。

B.虛無假設(null hypothesis) $H_0: \mu \le 56000$ 元。

C.對立假設(alternative hypothesis) $H_1: \mu > 56000$ 元。

D.計算樣本平均值臨界值

樣本平均值臨界值$\bar{x}^* = \mu_0 + t_{\alpha,n-1} \times \frac{S}{\sqrt{n}} = 56000 + 2.1318 \times \frac{500}{\sqrt{5}} = 56000 + 576.695 = 56476.7$

E.檢定統計值$\bar{x} = 56500$ > 臨界值$\bar{x}^* = 56476.7$，檢定統計值不位於虛無假設接受區域內，拒絕虛無假設 $H_0: \mu \le 56000$，接受對立假設 $H_1: \mu > 56000$，因此，執行粉紅佳人(Pink lady)行銷活動，可以顯著的增加盈餘。應繼續執行。

練習 9.12　奇遇餐廳販售蚵仔麵線一碗設定售價 NT$ 50 元，餐廳規劃標準食譜(standard recipe)時，設計每碗蚵仔麵線應該有 20 顆蚵仔。現今抽查 35 碗蚵仔麵線調查每碗裡面多少蚵仔，分別如下：

編號	蚵仔數量	編號	蚵仔數量	編號	蚵仔數量	編號	蚵仔數量
1	32	11	22	21	22	31	22
2	35	12	18	22	18	32	18
3	17	13	17	23	17	33	17
4	20	14	20	24	21	34	20
5	19	15	19	25	20	35	19
6	26	16	26	26	26		
7	23	17	23	27	23		
8	22	18	22	28	22		
9	18	19	18	29	18		
10	23	20	23	30	23		

驗證該餐廳販售蚵仔麵線是否有符合標準食譜的規劃？是否有欺騙消費者之嫌？

題解：樣本平均值$\bar{x}$ = 21.4000 顆，樣本標準(偏)差 S = 4.0235 顆，μ_0 = 20 顆，母體標準(偏)差 σ 未知時，利用樣本標準(偏)差 S 代替，此例屬於左尾檢定(a left-tailed test)。

A.設定顯著水準 α = 0.05，$z_\alpha = z_{0.05}$ = 1.6449(使用 Excel 軟體 NORM.S.INV 函數查詢獲得)。樣本數量多($n \geq 30$)時，使用標準化 z 值進行臨界值檢定法統計推論。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu \geq 20$ 顆。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu < 20$ 顆。

D.計算樣本平均值臨界值

樣本平均值臨界值$\bar{x}^* = \mu_0 - z_\alpha \times \sigma_{\bar{x}} = \mu_0 - z_\alpha \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 20 - 1.6449 \times \frac{4.0235}{\sqrt{35}} = 20 - 1.1187 = 18.8813$ 顆

E.檢定統計值(樣本平均值)$\bar{x}$ = 21.4000 顆 ≥ 樣本平均值臨界值$\bar{x}^*$ = 18.88 顆，檢定統計值位於虛無假設接受區域內，接受虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu \geq 20$ 顆，推論(結論)每碗蚵仔麵線符合標準食譜中含有 20 顆蚵仔的規劃，沒有欺騙消費者之嫌。

答案：每碗蚵仔麵線符合標準食譜中含有 20 顆蚵仔的規劃，沒有欺騙消費者

9.3.3 標準化統計值檢定法

標準化統計值檢定法或 z 值檢定法在驗證過程中，先將檢定的樣本統計值—**樣本平均值**$\bar{x}$轉化為標準化 z 值，再進行比較檢定程序。

在樣本數量較多($n \geq 30$)的情況下，依據中央極限定理(Central limit theorem)，樣本平均值$\bar{x}$機率分布，會接近常態分布，因此，可以透過標準常態分布進行母體平均值 μ 的驗證、檢定。

母體變異數 σ^2 和標準(偏)差 σ 已知

$$z = \frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma_{\bar{x}}} = \frac{\bar{x}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

母體變異數 σ^2 和標準(偏)差 σ 未知，利用樣本標準(偏)差 S 取代母體標準(偏)差 σ 進行驗證程序

$$z = \frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma_{\bar{x}}} = \frac{\bar{x}-\mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$$

其中$\bar{x}$：樣本平均值

μ_0：虛無假設的驗證標準，驗證母體的平均值

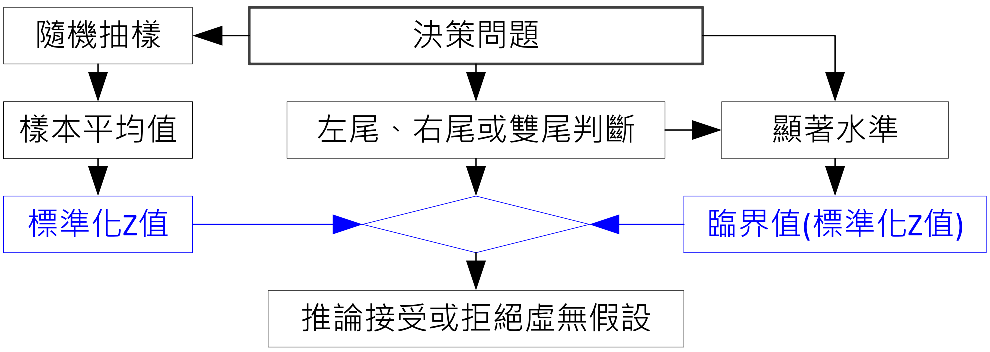
$\sigma_{\bar{x}}$：樣本平均值分布的標準(偏)差 = $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

n：樣本數量

σ：母體標準(偏)差

S：樣本標準(偏)差

在檢定階段，將樣本平均值$\bar{x}$標準化後檢定統計值 z 值與在顯著水準 α 下的標準化臨界值−z_α 或$z_{\frac{\alpha}{2}}$值進行比較，以進行統計推論。



右尾檢定(a right-tailed test)：虛無假設 H_0: $\mu \le \mu_0$　vs.　對立假設 H_1: $\mu > \mu_0$。

臨界值(Critical value) $z^* = z_\alpha$(正值)

若檢定統計值 $z \le$ 臨界值 z_α，檢定統計值位於虛無假設接受區域內，接受虛無假設(null hypothesis) H_0。

若檢定統計值 $z >$ 臨界值 z_α，檢定統計值不位於虛無假設接受區域內，拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0，接受對立假設(alternative hypothesis) H_1。

左尾檢定(a left-tailed test)：虛無假設 H_0: $\mu \ge \mu_0$　vs.　對立假設 H_1: $\mu < \mu_0$。

臨界值(Critical value) $z^* = -z_\alpha$(負值)

若檢定統計值 $z \ge$ 臨界值$-z_\alpha$，檢定統計值位於虛無假設接受區域內，接受虛無假設(null hypothesis) H_0。

若檢定統計值 $z <$ 臨界值$-z_\alpha$，檢定統計值不位於虛無假設接受區域內，拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0，接受對立假設(alternative hypothesis) H_1。

雙尾檢定(a two-tailed test)：虛無假設 H_0: $\mu = \mu_0$　vs.　對立假設 H_1: $\mu \ne \mu_0$。

臨界值(Critical value) 左側(較低)臨界值$z_L^* = -z_{\frac{\alpha}{2}}$(負值)；右側(較高)臨界值$z_H^* = z_{\frac{\alpha}{2}}$(正值)

若左側臨界值$-z_{\frac{\alpha}{2}} \le$ 檢定統計值 $z \le$ 右側臨界值$z_{\frac{\alpha}{2}}$，檢定統計值位於虛無假設接受區域內，接受虛無假設(null hypothesis) H_0。

若檢定統計值 $z <$ 左側臨界值$-z_{\frac{\alpha}{2}}$或檢定統計值 $z >$ 右側臨界值$z_{\frac{\alpha}{2}}$，檢定統計值不位於虛無假設接受區域內，拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0，接受對立假設(alternative hypothesis) H_1。

範例 9.8　奇遇餐廳原本每週平均盈餘 μ 為 NT \$56000 元，執行粉紅佳人(Pink lady)行銷活動，女性顧客只要在星期一到四晚上穿粉紅色衣服到餐廳用餐時，給予六折優惠，希望吸引顧客的上門，以提升經營績效，增加盈餘。在執行一年期間(n = 52)，每週盈餘的平均值$\bar{x}$為 NT\$57500 元，每週盈餘的標準(偏)差 S 為 NT\$ 5000 元。試評估粉紅佳人(Pink lady)行銷活動提升經營績效，增加盈餘？

題解：樣本數量 $n = 52$，屬於樣本數量較多者，樣本平均值$\bar{x}$ = NT\$57500 元，樣本標準(偏)差 S = NT\$ 5000 元，μ_0 = NT\$56000 元，希望以超過原先的盈餘為目的，故本範例屬於右尾檢定(right-tailed test)。

A. 設定顯著水準 $\alpha = 0.05$，臨界值 $z^* = z_\alpha = z_{0.05} = 1.6449$(使用 Excel 軟體 NORM.S.INV 函數查詢獲得)。

B. 虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu \le 56000$ 元。

C. 對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu > 56000$ 元。

D. 計算檢定統計值：標準化 z 值

$$\text{檢定統計值 } z = \frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma_{\bar{x}}} = \frac{\bar{x}-\mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}} = \frac{57500-56000}{\frac{5000}{\sqrt{52}}} = \frac{1500}{693.38} = 2.1633$$

E. 檢定統計值 $z = 2.1633 >$ 臨界值 $z_{0.05} = 1.6449$，檢定統計值不位於虛無假設接受區域內，拒絕虛無假設 H_0: $\mu \le 56000$ 元，接受對立假設 H_1: $\mu > 56000$ 元。

因此，執行粉紅佳人(Pink lady)行銷活動，可以顯著的增加盈餘。應繼續執行。

答案：執行粉紅佳人(Pink lady)行銷活動成功，可以顯著的增加盈餘

練習 9.13　請依據下列假設檢定，在顯著水準分別為 $\alpha = 0.01$、$\alpha = 0.05$ 和 $\alpha = 0.10$，找出假設檢定使用的臨界值。假設樣本數量皆很大。(a)虛無假設 H_0: $\mu = \mu_0$與對立假設 H_1: $\mu \ne \mu_0$；(b)虛無假設 H_0: $\mu \ge \mu_0$與對立假設 H_1: $\mu < \mu_0$；(c) 虛無假設 H_0: $\mu \le \mu_0$與對立假設 H_1: $\mu > \mu_0$。

練習 9.14　假設有一個隨機樣本數量 120，其樣本平均值$\bar{x}$ = 18 與樣本標準(偏)差 S = 15。(A)請使用標準化統計值檢定法，在顯著水準 α = 0.05 檢測虛無假設 H_0: $\mu \le 15$ 與對立假設 H_1: $\mu > 15$，您有何結論？(B)請在顯著水準 α = 0.01 檢測虛無假設 H_0: $\mu = 15$ 與對立假設 H_1: $\mu \ne 15$，您有何結論？

題解：樣本數量 n = 120 屬於樣本數量較多者，樣本平均值$\bar{x}$ = 18，樣本標準(偏)差 S = 15，母體平均值的假設值 μ_0 = 15。

(A)本範例屬於右尾檢定(right-tailed test)：虛無假設中具有小於等於的符號，代表其屬於右尾檢定。

A.設定顯著水準 α = 0.05，臨界值(Critical value) $z^* = z_\alpha = z_{0.05}$ = 1.6449(使用 Excel 軟體 NORM.S.INV 函數查詢獲得)。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu \le 15$。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu > 15$。

D.計算檢定統計值：標準化 z 值

$$z = \frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma_{\bar{x}}} = \frac{\bar{x}-\mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}} = \frac{18-15}{\frac{15}{\sqrt{120}}} = \frac{3}{1.3693} = 2.1909$$

E.檢定統計值 z = 2.1909 ＞ 臨界值 $z_{0.05}$ = 1.6449，檢定統計值不位於虛無假設接受區域內，拒絕虛無假設 H_0: $\mu \le 15$，接受對立假設 H_1: $\mu > 15$。

(B)本範例屬於雙尾檢定(two-tailed test)：虛無假設中具有等於的符號，代表其屬於雙尾檢定。

A.設定顯著水準 α = 0.01，左側臨界值(Critical value) $z_L^* = -z_{\frac{\alpha}{2}} = -z_{0.005} = -2.575$；右側臨界值$z_H^* = z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0.005}$ = 2.575(使用 Excel 軟體 NORM.S.INV 函數查詢獲得)。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu = 15$。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu \ne 15$。

D.計算檢定統計值：標準化 z 值

$$\text{檢定統計值 } z = \frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma_{\bar{x}}} = \frac{\bar{x}-\mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}} = \frac{18-15}{\frac{15}{\sqrt{120}}} = \frac{3}{1.3693} = 2.1909$$

E.左側臨界值$-z_{0.005}$ = –2.575 ＜ 檢定統計值 z = 2.1909 ＜ 右側臨界值 $z_{0.005}$ = 2.575，檢定統計值位於虛無假設接受區域內，接受虛無假設 H_0: $\mu = 15$。

答案：(A)拒絕虛無假設 H_0: $\mu \le 15$，接受對立假設 H_1: $\mu > 15$；(B)接受虛無假設 H_0: $\mu = 15$

練習 9.15　連鎖速食餐廳總部宣稱消費者滿意度超過 35。假設 μ 為速食餐廳滿意度調查平均值，為了驗證總部宣稱滿意度平均值超過 35，設立虛無假設 H_0: $\mu \le 35$ 與對立假設 H_1: $\mu > 35$。從隨機獲得的 70 位消費者滿意度調查中獲得其樣本平均值$\bar{x}$ = 44.52 和樣本標準(偏)差 S = 13.56。請使用顯著水準 α = 0.05 以檢定前述的假設。其結論顯示滿意度平均值超過 35？

9.3.4 機率檢定法

在前面敘述的臨界值檢定法(critical point test method)、標準化統計值檢定法和 z 值檢定法在驗證過程中，皆須設定顯著水準 α 值，才能計算臨界值，進行驗證、檢定程序。不同的顯著水準 α，如 0.01、0.05 和 0.10，即會產生不同的臨界值，若臨界值改變時，所進行的推論(結論)可能會產生差異。

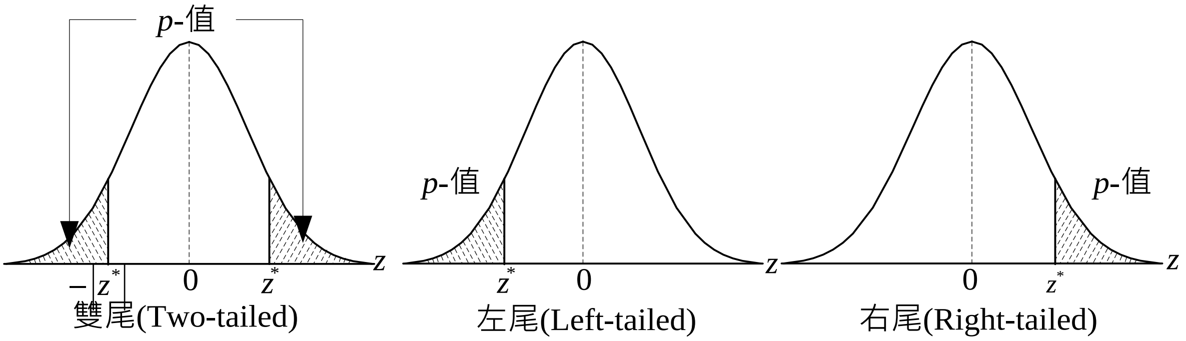
機率檢定法或 p 值檢定法是依據樣本統計值—樣本平均值$\bar{x}$，估算其機率值或 p 值(p value)，再依據機率值或 p 值的高低，進行拒絕或接受虛無假設 H_0 的判定。

p 值(p value)是依據樣本的統計值—樣本平均值$\bar{x}$，推估虛無假設(null hypothesis) H_0 成立機率。p 值亦被稱為受觀測的顯著水準(observed level of significance; observed significance level)或機率值(probability value)。可以視為拒絕虛無假設 H_0，接受對立假設 H_1 最小顯著水準的數值。p 值愈小時，顯示由樣本統計值—樣本平均值$\bar{x}$提供否決虛無假設 H_0 的證據力愈強。

機率檢定法或 p 值檢定法的假設檢定標準

若機率 $p \geq$ 顯著水準 α，接受虛無假設(null hypothesis) H_0，放棄對立假設(alternative hypothesis) H_1。

若機率 $p <$ 顯著水準 α，拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0，接受對立假設(alternative hypothesis) H_1。



右尾檢定(a right-tailed test)：虛無假設 $H_0: \mu \leq \mu_0$　vs.　對立假設 $H_1: \mu > \mu_0$。

機率 p 值代表虛無假設 $H_0: \mu \leq \mu_0$ 成立時，所有可能樣本平均值$\bar{x}$會大於等於某次(觀測)樣本平均值$\bar{x}^*$或$\bar{x}_0$機率。因此，機率 p 值即是在常態分布曲線下高於(大於)臨界值$\bar{x}^*$或標準化臨界值 z^*機率。

$$機率\ p = P(\bar{x} \geq \bar{x}^* | H_0: \mu \leq \mu_0) = P(Z \geq z^*) = P(Z \geq \frac{\bar{x}^*-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}) = 1 - P(Z \leq \frac{\bar{x}^*-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}})$$

其中$\bar{x}^* = \bar{x}_0$：某次(觀測)樣本平均值

z^*：某次(觀測)樣本平均值的標準化數值

α：顯著水準

μ_0：假設值

左尾檢定(a left-tailed test)：虛無假設 $H_0: \mu \geq \mu_0$　vs.　對立假設 $H_1: \mu < \mu_0$。

機率 p 值代表虛無假設 $H_0: \mu \geq \mu_0$ 成立時，所有可能樣本平均值$\bar{x}$會小於等於某次(觀測)樣本平均值$\bar{x}^*$或$\bar{x}_0$機率。因此，機率 p 值即是在常態分布曲線下低於(小於)臨界值$\bar{x}^*$或標準化臨界值 z^*機率。

$$機率\ p = P(\bar{x} \leq \bar{x}^* | H_0: \mu \geq \mu_0) = P(Z \leq z^*) = P(Z \leq \frac{\bar{x}^*-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}})$$

其中$\bar{x}^* = \bar{x}_0$：某次(觀測)樣本平均值

z^*：某次(觀測)樣本平均值的標準化數值

α：顯著水準

μ_0：假設值

雙尾檢定(a two-tailed test)：虛無假設 $H_0: \mu = \mu_0$　vs.　對立假設 $H_1: \mu \neq \mu_0$。

機率 p 值代表虛無假設 $H_0: \mu = \mu_0$ 成立時，所有可能樣本平均值$\bar{x}$大於等於或小於等於某次(觀測)樣本平均值$\bar{x}^*$或$\bar{x}_0$ 機率值的 2 倍。因此，機率 p 值即是在常態分布曲線下低於(小於)臨界值$\bar{x}_L^*$或標準化臨界值z_L^*和高於(大於)臨界值$\bar{x}_H^*$或標準化臨界值z_H^*機率和。

若$\bar{x}^* > \mu_0$：某次(觀測)樣本平均值$\bar{x}^*$大於假設值 μ_0 時

機率 $p = 2 \times P(\bar{x} \geq \bar{x}^* | H_0: \mu = \mu_0) = 2 \times P(Z \geq z^*) = 2 \times P(Z \geq \frac{\bar{x}^*-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}})$

若 $\bar{x}^* < \mu_0$：某次(觀測)樣本平均值 $\bar{x}^*$ 小於假設值 μ_0 時

機率 $p = 2 \times P(\bar{x} \leq \bar{x}^* | H_0: \mu = \mu_0) = 2 \times P(Z \leq z^*) = 2 \times P(Z \leq \frac{\bar{x}^*-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}})$

其中 $\bar{x}^* = \bar{x}_0$：某次(觀測)樣本平均值

z^*：某次(觀測)樣本平均值的標準化數值

α：顯著水準

μ_0：假設值

範例 9.9　在一假設檢定中，虛無假設 $H_0: \mu \leq 1000$ 與對立假設 $H_1: \mu > 1000$，利用樣本資料算出檢定統計值 $z = 2.15$。請計算此假設檢定的 p 值。(機率答案有效位數四捨五入取到小數點後第四位)

題解：在虛無假設中具有小於等於的符號，代表此假設檢定屬於右尾檢定。特定標準化統計值 $z^* = 2.15$。

機率 $p = P(\bar{x} \geq \bar{x}^*) = P(Z \geq z^*) = 1 - P(Z \leq z^*) = 1 - P(Z \leq 2.15) = 1 - 0.9842$(使用 Excel 軟體 NORM.S.DIST 函數查詢獲得) $= 0.0158$

答案：$p = 0.0158$

範例 9.10　在一假設檢定中，虛無假設 $H_0: \mu = 1000$ 與對立假設 $H_1: \mu \neq 1000$，利用樣本資料算出檢定統計值 $z = 2.15$。請計算此假設檢定的 p 值。(機率答案有效位數四捨五入取到小數點後第四位)

題解：在虛無假設中具有等於的符號，代表此假設檢定屬於雙尾檢定。特定標準化統計值 $z^* = 2.15$。

機率 $p = 2 \times P(\bar{x} \geq \bar{x}^*) = 2 \times P(Z \geq z^*) = 2 \times [1 - P(Z \leq z^*)] = 2 \times [1 - P(Z \leq 2.15)] = 2 \times [1 - 0.9842$(使用 Excel 軟體 NORM.S.DIST 函數查詢獲得)$] = 2 \times 0.0158 = 0.0316$

答案：$p = 0.0316$

練習 9.16　一假設檢定中，虛無假設 $H_0: \mu \leq 50$ 與對立假設 $H_1: \mu > 50$，利用樣本數量 $n = 100$ 觀測值，獲得樣本平均值 $\bar{x} = 49.4$ 和樣本標準(偏)差 $S = 4.1$。請計算出此假設檢定的 p 值。(機率答案有效位數四捨五入取到小數點後第四位)

題解：此假設檢定屬於右尾檢定

A.設定顯著水準 $\alpha = 0.05$。

B.虛無假設(null hypothesis) $H_0: \mu \leq 50$。

C.對立假設(alternative hypothesis) $H_1: \mu > 50$。

D.計算機率 p 值

機率 $p = P(\bar{x} \geq \bar{x}^*) = P(Z \geq z^*) = P(Z \geq \frac{\bar{x}^*-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}) = P(Z \geq \frac{49.4-50}{\frac{4.1}{\sqrt{100}}}) = P(Z \geq \frac{-0.6}{0.41}) = P(Z \geq -1.4634) = 1 - P(Z \leq -1.4634) = 1 - 0.0717$(使用 Excel 軟體 NORM.S.DIST 函數查詢獲得) $= 0.9283$

E.因機率 $p = 0.9283 >$ 顯著水準 $\alpha = 0.05$，判斷接受虛無假設(null hypothesis) $H_0: \mu \leq 50$。

答案：$p = 0.9283$

範例 9.11　奇遇餐廳原本每週平均盈餘 μ 為 NT \$56000 元，執行粉紅佳人(Pink lady)行銷活動，女性顧客只要在星期一到四晚上穿粉紅色衣服到餐廳用餐時，給予六折優惠，希望吸引顧客的上門，以提升經營績效，增加盈餘。在執行一年期間($n = 52$)，每週盈餘的平均值 $\bar{x}$ 為 NT\$ 57500 元，每週盈餘的標準(偏)差 S 為 NT\$ 5000 元。試使用 p 值檢定法評估粉紅佳人(Pink lady)行銷活動提升經營績效，增加盈餘？

題解：樣本數量 n = 52，屬於樣本數量較多者，樣本平均值$\bar{x}$ = NT$ 57500 元，樣本標準(偏)差 S = NT$ 5000 元，μ_0 = NT$ 56000 元。希望以超過原先的盈餘為目的，故本範例屬於右尾檢定(a right-tailed test)。

A.設定顯著水準 $\alpha = 0.05$。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu \le 56000$ 元。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu > 56000$ 元。

D.計算機率 p 值

機率 $p = P(\bar{x} \ge \bar{x}^*) = P(Z \ge z^*) = P(Z \ge \frac{\bar{x}^*-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}) = P(Z \ge \frac{57500-56000}{\frac{5000}{\sqrt{52}}}) = P(Z \ge \frac{1500}{693.38}) = P(Z \ge 2.1633) = 1 - P(Z \le 2.1633) = 1 - 0.9847$(使用 Excel 軟體 NORM.S.DIST 函數查詢獲得) = 0.0153

E.機率 $p = 0.0153 < $ 顯著水準 $\alpha = 0.05$，拒絕虛無假設 H_0: $\mu \le 56000$ 元，接受對立假設 H_1: $\mu > 56000$。元。因此，執行粉紅佳人(Pink lady)行銷活動，顯著增加盈餘。應繼續執行此行銷活動。

答案：執行粉紅佳人(Pink lady)行銷活動成功，可以顯著的增加盈餘

範例 9.12 奇遇餐廳販售蚵仔麵線一碗設定售價 NT$ 50 元，餐廳規劃標準食譜(standard recipe)時，設計每碗蚵仔麵線應該有 20 顆蚵仔。現今抽查 35 碗蚵仔麵線平均每碗$\bar{x}$有 20.6 顆蚵仔，標準(偏)差 S 為 2.6930 顆。試利用 p 值檢定法驗證該餐廳販售蚵仔麵線是否有符合標準食譜的規劃？是否有欺騙消費者之嫌？

題解：樣本平均值$\bar{x}$ = 20.6 顆，樣本標準(偏)差 S = 2.6930 顆，μ_0 = 20 顆。母體標準(偏)差 σ 未知時，利用樣本標準(偏)差 S 代替。本範例是以檢出樣本數值是否低於某特定數值，故此例屬於左尾檢定(a left-tailed test)。

A.設定顯著水準 $\alpha = 0.05$。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu \ge 20$ 顆。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu < 20$ 顆。

D.計算機率 p 值

機率 $p = P(\bar{x} \le \bar{x}^*) = P(Z \le z^*) = P(Z \le \frac{\bar{x}^*-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}) = P(Z \le \frac{20.6-20}{\frac{2.6930}{\sqrt{35}}}) = P(Z \le \frac{0.6}{0.4552}) = P(Z \le 1.3181) = 0.9063$(使用 Excel 軟體 NORM.S.DIST 函數查詢獲得)

E.機率 $p = 0.9063 > $ 顯著水準 $\alpha = 0.05$，接受虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu \ge 20$ 顆，推論(結論)每碗蚵仔麵線符合標準食譜中含有 20 顆蚵仔的標準，沒有欺騙消費者之嫌。

答案：每碗蚵仔麵線符合標準食譜中含有 20 顆蚵仔的標準，沒有欺騙消費者

範例 9.13 奇遇餐廳販售清蒸鱸魚一盤設定售價 NT$ 300 元，餐廳規劃標準食譜(standard recipe)時，設計每盤清蒸鱸魚中有一尾鱸魚，鱸魚購買時設定重量(As-purchased weight, AP) μ = 600 公克。供貨廠商進貨時，有品管人員抽樣驗證鱸魚是否有達到 AP μ = 600 公克的驗收標準。今天供貨廠商送貨，經阿華抽驗 50 尾鱸魚，其平均重$\bar{x}$ = 595 公克，標準(偏)差 S = 50 公克。試利用 p 值檢定法，驗證此批鱸魚是否達到驗收標準？

題解：樣本數量 n = 50，樣本平均值$\bar{x}$ = 595 公克，樣本標準(偏)差 S = 50 公克，μ_0 = 600 公克。母體標準(偏)差 σ 未知時，利用樣本標準(偏)差 S 代替。本範例是以檢出樣本數值是否達到某特定數值，故此例屬於雙尾檢定(two-tailed test)。

A.設定顯著水準 $\alpha = 0.05$。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu = 600$ 公克。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu \neq 600$ 公克。

D.計算機率 p 值

因$\bar{x}^* = 595$ 公克 $<$ $\mu_0 = 600$ 公克，機率 $p = 2 \times P(\bar{x} \le \bar{x}^*) = 2 \times P(Z \le z^*) = 2 \times P(Z \le \frac{\bar{x}^* - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}) = 2 \times P(Z \le \frac{595-600}{\frac{50}{\sqrt{50}}}) = 2 \times P(Z \le \frac{-5}{7.0711}) = 2 \times P(Z \le -0.7071) = 2 \times 0.2398$(使用 Excel 軟體 NORM.S.DIST 函數查詢獲得) $= 0.4796$

E.機率 $p = 0.4796$ $>$ 顯著水準 $\alpha = 0.05$，接受虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu = 600$ 公克，顯示供貨廠商提供的鱸魚有符合標準食譜的設計，可以通過品管人員驗收送進廚房，以廚房後場進行備餐之用。因此，驗證結果接受虛無假設時，餐廳可以接受此批鱸魚。

答案：檢驗結果顯示該批鱸魚重量有達到驗收標準

練習 9.17　奇遇餐廳販售清蒸鱸魚一盤設定售價 NT$ 300 元，餐廳規劃標準食譜(standard recipe)時，設計每盤清蒸鱸魚中有一尾鱸魚，鱸魚購買時設定重量(As-purchased weight, AP) $\mu = 650$ 公克。供貨廠商進貨時，有品管人員抽樣驗證鱸魚是否有達到 AP $\mu = 650$ 公克的驗收標準。今天供貨廠商送貨，經小玟抽驗 60 尾鱸魚，其平均重$\bar{x} = 638$ 公克，標準(偏)差 $S = 50$ 公克。試利用 p 值檢定法，驗證此批鱸魚是否達到驗收標準？

題解：樣本數量 $n = 60$，樣本平均值$\bar{x} = 638$ 公克，樣本標準(偏)差 $S = 50$ 公克，$\mu_0 = 650$ 公克。母體標準(偏)差 σ 未知時，利用樣本標準(偏)差 S 代替。本範例是以檢出樣本數值是否達到某特定數值，故此例屬於雙尾檢定(two-tailed test)。

A.設定顯著水準 $\alpha = 0.05$。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu = 650$ 公克。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu \neq 650$ 公克。

D.計算機率 p 值

因$\bar{x}^* = 638$ $<$ $\mu_0 = 650$ 公克，機率 $p = 2 \times P(\bar{x} \le \bar{x}^*) = 2 \times P(z \le z^*) = 2 \times P(Z \le \frac{\bar{x}^* - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}) = 2 \times P(Z \le \frac{638-650}{\frac{50}{\sqrt{60}}})$ $= 2 \times P(Z \le \frac{-12}{6.4550}) = 2 \times P(Z \le -1.8590) = 2 \times 0.0315$(使用 Excel 軟體 NORM.S.DIST 函數查詢獲得) $= 0.0630$

E.機率 $p = 0.0630$ $>$ 顯著水準 $\alpha = 0.05$，接受虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu = 650$ 公克，顯示供貨廠商提供的鱸魚有符合標準食譜的設計，可以通過品管人員驗收送進廚房，以廚房後場進行備餐之用。因此，驗證結果接受虛無假設時，餐廳可以接受此批鱸魚。

答案：檢驗結果顯示該批鱸魚重量有達到驗收標準

練習 9.18　在星期日的報紙顯示一家超級市場廣告宣稱，只要您來此購物消費，一定在 9 分鐘內讓您完成結帳離開。我非常好奇的花了數小時的時間，隨機測量 30 位消費者於結帳櫃台等候的時間，獲得樣本平均值 9.8 分鐘，樣本標準(偏)差 2.5 分鐘。請使用顯著水準 $\alpha = 0.05$ 以完成此假設檢定(a)臨界值法；(b)p-值法。

題解：樣本數量 $n = 30$，樣本平均值$\bar{x} = 9.8$ 分鐘，樣本標準(偏)差 $S = 2.5$ 分鐘，$\mu_0 = 9.0$ 分鐘。母體標準(偏)差 σ 未知時，利用樣本標準(偏)差 S 代替。此例屬於右尾檢定(a right-tailed test)

(a)臨界值法

A.設定顯著水準 $\alpha = 0.05$，$z_\alpha = z_{0.05} = 1.6449$(使用 Excel 軟體 NORM.S.INV 函數查詢獲得)。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu \le 9.0$ 分鐘。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu > 9.0$ 分鐘。

D.計算臨界值

樣本平均值臨界值$\bar{x}^* = \mu_0 + z_\alpha \times \sigma_{\bar{x}} = \mu_0 + z_\alpha \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 9.0 + 1.6449 \times \frac{2.5}{\sqrt{30}} = 9.0 + 0.7508 = 9.7508$ 分鐘

E.因樣本平均值$\bar{x}$(檢定統計值) = 9.8 分鐘 ≥ 樣本平均值臨界值$\bar{x}^*$ = 9.7508 分鐘，檢定統計值不位於虛無假設接受區域內。拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu \le 9.0$ 分鐘，接受對立假設 H_1: $\mu > 9.0$ 分鐘，推論(結論)該超級市場結帳等候時間超過預期宣傳的 9 分鐘，有欺騙消費者之嫌。

(b) P 值法

A.設定顯著水準 $\alpha = 0.05$。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu \le 9.0$ 分鐘。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu > 9.0$ 分鐘。

D.計算機率 p 值

機率 $p = P(\bar{x} \ge \bar{x}^*) = P(Z \ge z^*) = P(Z \ge \frac{\bar{x}^* - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}) = P(Z \ge \frac{9.8-9.0}{\frac{2.5}{\sqrt{30}}}) = P(Z \ge \frac{0.8}{0.4564}) = P(Z \ge 1.7527) = 1 - P(Z \le 1.7527) = 1 - 0.9601$(使用 Excel 軟體 NORM.S.DIST 函數查詢獲得) = 0.0399

E.機率 $p = 0.0399$ < 顯著水準 $\alpha = 0.05$，推論拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu \le 9.0$ 分鐘，接受對立假設 H_1: $\mu > 9.0$ 分鐘，推論(結論)該超級市場結帳等候時間超過預期宣傳的 9 分鐘，有欺騙消費者之嫌。

答案：超級市場結帳等候時間超過預期宣傳的 9 分鐘，有欺騙消費者

練習 9.19　一電信公司宣稱當地消費者撥打長途電話平均通話時間是 10 分鐘。隨機抽樣 100 通長途電話，其通話時間平均值 9.0 分鐘，標準(偏)差 5.2 分鐘。(A)請利用 p 值法，以檢驗長途電話的通話時間日否低於 10 分鐘；(B)假設顯著水準 $\alpha = 0.02$，在前述(A)計算 p 值法中，您會拒絕虛無假設？(C)假設顯著水準 $\alpha = 0.05$，在前述(A)計算 p 值法中，您會拒絕虛無假設？(機率答案有效位數四捨五入取到小數點後第四位)

題解：樣本數量 $n = 100$，樣本平均值$\bar{x} = 9.0$ 分鐘，樣本標準(偏)差 $S = 5.2$ 分鐘，$\mu_0 = 10$ 分鐘。

(A)母體標準(偏)差 σ 未知時，利用樣本標準(偏)差 S 代替。本範例是以檢出樣本數值是否低於某特定數值，故此例屬於左尾檢定(a left-tailed test)。

A.設定顯著水準 $\alpha = 0.05$。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu \ge 10$ 分鐘。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu < 10$ 分鐘。

D.計算機率 p 值

機率 $p = P(\bar{x} \le \bar{x}^*) = P(Z \le z^*) = P(Z \le \frac{\bar{x}^* - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}) = P(Z \le \frac{9.0-10}{\frac{5.2}{\sqrt{100}}}) = P(Z \le \frac{-1.0}{0.52}) = P(Z \le -1.9231) = 0.0272$(使用 Excel 軟體 NORM.S.DIST 函數查詢獲得)

(B) 機率 $p = 0.0272$ > 顯著水準 $\alpha = 0.02$，判斷接受虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu \ge 10$ 分鐘。

(C) 機率 $p = 0.0272$ < 顯著水準 $\alpha = 0.05$，判斷拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu \ge 10$ 分鐘。

練習 9.20　啤酒廠的清涼退火啤酒標示容量 1000 毫升，其經銷商進貨 1000 瓶，經抽樣 39 瓶，平均容量為 996 毫升，標準(偏)差 12 毫升，在顯著水準為 0.05 的前提下，利用 P 值檢定法，檢定經銷商是否要接受此批清涼退火啤酒？

題解：樣本數量 $n = 39$，樣本平均值$\bar{x} = 996$ 毫升，樣本標準(偏)差 $S = 12$ 毫升，母體平均值的假設值 $\mu_0 = 1000$ 毫升。母體標準(偏)差 σ 未知時，利用樣本標準(偏)差 S 代替。本練習是以檢出樣本容量是否低於某特定數值，故此例屬於左尾檢定(a left-tailed test)。

A.設定顯著水準 $\alpha = 0.05$。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu \geq 1000$ 毫升。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu < 1000$ 毫升。

D.計算機率 p 值

機率 $p = P(\bar{x} \leq \bar{x}^*) = P(Z \leq z^*) = P(Z \leq \frac{\bar{x}^* - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}} \times \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}}) = P(Z \leq \frac{996-1000}{\frac{12}{\sqrt{39}} \times \sqrt{\frac{1000-39}{1000-1}}}) = P(Z \leq \frac{-4}{1.8846}) = P(Z \leq -2.1224) =$ 0.0169(使用 Excel 軟體 NORM.S.DIST 函數查詢獲得)

在母體基本單位數量 $N = 1000$ 有限的情況下，樣本平均值抽樣分布的標準差必須進行校正。即樣本平均值$\bar{x}$抽樣分布的標準(偏)差$\sigma_{\bar{x}} = \sqrt{\sigma_{\bar{x}}^2} = \sqrt{\frac{\sigma^2}{n} \times \frac{N-n}{N-1}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \times \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$。當樣本數量高於 30 以上時，母體標準差 σ 未知，可以使用樣本標準差 S 取代運算。

E.機率 $p = 0.0169 < $ 顯著水準 $\alpha = 0.05$，拒絕虛無假設(null hypothesis)，接受對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu < 1000$ 毫升，顯示供貨廠商提供的啤酒容量不符合標準，不通過經銷商檢驗，退貨。

答案：檢驗結果顯示該批啤酒容量未達驗收標準

9.4 母體平均值假設檢定：小量樣本數

9.4.1 母體常態分布和變異數已知【選擇教材】

當母體變異數 σ^2 已知時，假設檢定方式與大量樣本數量相同，故請參閱大量樣本數單元即可。

在母體的分布屬於常態分布，母體變異數 σ^2 和標準(偏)差 σ 可以獲得，樣本數量較少($n < 30$)時，進行母體平均值 μ 的假設檢定，可以使用 z 值檢定法。

母體變異數 σ^2 和標準(偏)差 σ 已知

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma_{\bar{x}}} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

其中$\bar{x}$：樣本平均值

μ_0：虛無假設的驗證標準，驗證母體的平均值

$\sigma_{\bar{x}}$：樣本平均值分布的標準(偏)差 $= \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

n：樣本數量

σ：母體標準(偏)差

在檢定階段，透過樣本平均值標準化後之檢定統計值 z 值與在顯著水準 α 下的標準化臨界值$-z_\alpha$ 或$z_{\frac{\alpha}{2}}$值進行比較，以進行統計推論。

右尾檢定(a right-tailed test)：虛無假設 H_0: $\mu \leq \mu_0$ vs. 對立假設 H_1: $\mu > \mu_0$。

臨界值(Critical value) $z^* = z_\alpha$(正值)

若檢定統計值 $z \leq$ 臨界值 z_α，檢定統計值位於虛無假設接受區域內，接受虛無假設(null hypothesis) H_0。

若檢定統計值 $z >$ 臨界值 z_α，檢定統計值不位於虛無假設接受區域內，拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0，接受對立假設(alternative hypothesis) H_1。

左尾檢定(a left-tailed test)：虛無假設 H_0: $\mu \geq \mu_0$ vs. 對立假設 H_1: $\mu < \mu_0$。

臨界值(Critical value) $z^* = -z_\alpha$(負值)

若檢定統計值 $z \geq$ 臨界值$-z_\alpha$，檢定統計值位於虛無假設接受區域內，接受虛無假設(null hypothesis) H_0。

若檢定統計值 $z < $ 臨界值 $-z_\alpha$，檢定統計值不位於虛無假設接受區域內，拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0，接受對立假設(alternative hypothesis) H_1。

雙尾檢定(a two-tailed test)：虛無假設 H_0: $\mu = \mu_0$ vs. 對立假設 H_1: $\mu \neq \mu_0$。

臨界值(Critical value)：左側臨界值 $z_L^* = -z_{\frac{\alpha}{2}}$(負值)；右側臨界值 $z_H^* = z_{\frac{\alpha}{2}}$(正值)。

若左側臨界值 $-z_{\frac{\alpha}{2}} \leq$ 檢定統計值 $z \leq$ 右側臨界值 $z_{\frac{\alpha}{2}}$，檢定統計值位於虛無假設接受區域內，接受虛無假設(null hypothesis) H_0。

若檢定統計值 $z <$ 左側臨界值 $-z_{\frac{\alpha}{2}}$ 或檢定統計值 $z >$ 右側臨界值 $z_{\frac{\alpha}{2}}$，檢定統計值不位於虛無假設接受區域內，拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0，接受對立假設(alternative hypothesis) H_1。

範例 9.14　奇遇餐廳原本每週平均盈餘 μ 為 NT $56000 元，每週盈餘的標準(偏)差 σ 為 NT$3500 元，每週盈餘金額屬於常態分布，執行粉紅佳人(Pink lady)行銷活動，女性顧客只要在星期一到四晚上穿粉紅色衣服到餐廳用餐時，給予六折優惠，希望吸引顧客的上門，以提升經營績效，增加盈餘。在執行 5 星期(n = 5)，每週盈餘的平均值 $\bar{x}$ 為 NT$56500 元，每週盈餘的標準(偏)差 S 為 NT$ 500 元。試評估粉紅佳人(Pink lady)行銷活動提升經營績效，增加盈餘？

題解：樣本數量 n = 5，屬於樣本數量較少者，樣本平均值 $\bar{x}$ = NT$ 56500 元，樣本標準(偏)差 S = NT$ 500 元，母體標準(偏)差 σ = NT$ 3500 元，μ_0 = NT$ 56000 元。希望以超過原先盈餘為目的，故本範例屬於右尾檢定(a right-tailed test)。

A.設定顯著水準 $\alpha = 0.05$，臨界值(Critical value) $z^* = z_\alpha = z_{0.05} = 1.6449$(使用 Excel 軟體 NORM.S.INV 函數查詢獲得)。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu \leq 56000$ 元。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu > 56000$ 元。

D.計算<u>檢定統計值</u>：標準化 z 值

$$\text{檢定統計值 } z = \frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma_{\bar{x}}} = \frac{\bar{x}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{56500-56000}{\frac{3500}{\sqrt{5}}} = \frac{500}{1565.25} = 0.3194$$

E.檢定統計值 $z = 0.3194 \leq$ 臨界值 $z_\alpha = 1.6449$，檢定統計值位於虛無假設接受區域內，接受虛無假設 H_0: $\mu \leq 56000$ 元，拒絕對立假設 H_1: $\mu > 56000$ 元。因此，執行粉紅佳人行銷活動，沒有顯著的增加盈餘。應考慮是否繼續執行或改變執行方式。

答案：執行粉紅佳人(Pink lady)行銷活動，沒有顯著的增加盈餘

練習 9.21　奇遇餐廳販售清蒸鱸魚一盤設定售價 NT$ 300 元，餐廳規劃標準食譜(standard recipe)時，設計每盤清蒸鱸魚中有一尾鱸魚，鱸魚購買時設定重量(As-purchased weight, AP) μ = 650 公克。供貨廠商進貨時，有品管人員抽樣驗證鱸魚是否有達到 AP μ = 650 公克的驗收標準。已知鱸魚重量的標準(偏)差 σ = 30 公克。今天供貨廠商送貨，經小玟抽驗 10 尾鱸魚，其平均重 $\bar{x}$ = 638 公克，標準(偏)差 S = 50 公克。試利用 z 值檢定法，驗證此批鱸魚是否達到驗收標準？

題解：母體標準(偏)差 σ = 30 公克，樣本數量 n = 10，樣本平均值 $\bar{x}$ = 638 公克，樣本標準(偏)差 S = 50 公克，母體平均值的假設值 μ_0 = 650 公克。本範例是以檢出樣本數值是否達到某特定數值，故此例屬於雙尾檢定(two-tailed test)。

A.設定顯著水準 $\alpha = 0.05$，左側臨界值 $-z_{\frac{\alpha}{2}} = -z_{\frac{0.05}{2}} = -z_{0.025} = -1.96$；右側臨界值 $z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{\frac{0.05}{2}} = z_{0.025} = 1.96$(使用 Excel 軟體 NORM.S.INV 函數查詢獲得)。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu = 650$ 公克。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu \neq 650$ 公克。

D.計算檢定統計值：標準化 z 值

$$檢定統計值\ z = \frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma_{\bar{x}}} = \frac{\bar{x}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{638-650}{\frac{30}{\sqrt{10}}} = \frac{-12}{9.4868} = -1.2649$$

E.左側臨界值$-z_{\frac{\alpha}{2}} = -1.96 \leq$ 檢定統計值 $z = -1.2649 \leq$ 右側臨界值$z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$，檢定統計值位於虛無假設接受區域內，接受虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu = 650$ 公克，顯示供貨廠商提供的鱸魚有符合標準食譜的設計，可以通過品管人員驗收送進廚房，以廚房後場進行備餐之用。因此，驗證結果接受虛無假設時，餐廳可以接受此批鱸魚。

答案：檢驗結果顯示該批鱸魚重量有達到驗收標準

練習 9.22 啤酒廠的清涼退火啤酒標示容量 1000 毫升，已知啤酒液體容量屬於常態分布，且已知其標準偏差為 10 毫升。其經銷商進貨 500 箱，經抽樣 10 瓶，測量啤酒液體平均容量為 996 毫升，標準(偏)差 12 毫升。在顯著水準為 0.05 的前提下，檢定經銷商是否要接受此批清涼退火啤酒？

題解：樣本數量 $n = 39$，樣本平均值$\bar{x} = 996$ 毫升，樣本標準(偏)差 $S = 12$ 毫升，母體平均值的假設值 $\mu_0 = 1000$ 毫升。母體標準(偏)差 $\sigma = 10$ 毫升。本題目是以檢出樣本容量是否低於某特定數值，故此例屬於左尾檢定(a left-tailed test)。

A.設定顯著水準 $\alpha = 0.05$，臨界值(Critical value)：$-z^* = -z_\alpha = -z_{0.05} = -1.6449$(使用 Excel 軟體 NORM.S.INV 函數查詢獲得)。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu \geq 1000$ 毫升。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu < 1000$ 毫升。

D.計算檢定統計值：標準化 z 值

$$檢定統計值\ z = \frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma_{\bar{x}}} = \frac{\bar{x}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{996-1000}{\frac{10}{\sqrt{10}}} = \frac{-4}{3.1623} = -1.2649$$

E.檢定統計值 $z = -1.2649 >$ 臨界值$-z_\alpha = -1.6449$，檢定統計值位於虛無假設接受區域內，推論接受虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu \geq 1000$ 毫升，顯示供貨廠商提供的啤酒容量符合標準，通過經銷商檢驗，可以順利驗收進貨。

答案：檢驗結果顯示該批啤酒容量可達驗收標準

9.4.2 母體常態分布和變異數未知

若母體的分布屬於常態分布(Normal distribution)，母體變異數 σ^2 和標準(偏)差 σ 無法獲得(未知)，在樣本數量較少($n < 30$)的情況時，t 分布可以使用於進行假設檢定。運用 t 分布進行母體平均值的假設檢定時，運用樣本標準(偏)差 S 代替母體標準(偏)差 σ(未知)，自由度為 $n-1$ 的 t 值為

$$檢定統計值\ t = \frac{\bar{x}-\mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$$

其中$\bar{x}$：樣本平均值

μ_0：母體平均值 μ 之假設值

S：樣本標準(偏)差

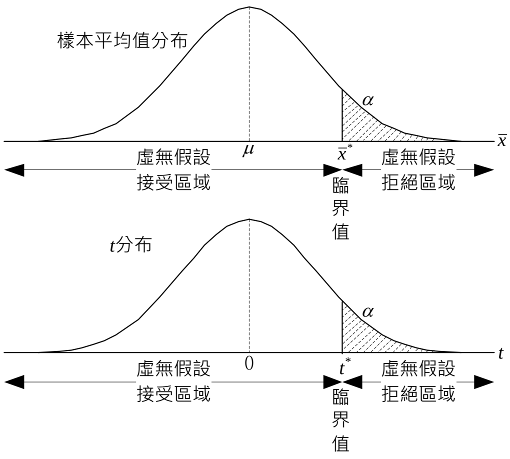
n：樣本數量

在檢定階段，運用樣本平均值運算檢定統計值—t 值與在顯著水準 α 下的臨界值$-t_{\alpha,v=n-1}$或$t_{\frac{\alpha}{2},v=n-1}$值進行比較，以進行統計推論。

右尾檢定(a right-tailed test)：虛無假設 H_0: $\mu \le \mu_0$ vs. 對立假設 H_1: $\mu > \mu_0$。

若檢定統計值 $t \le$ 臨界值 $t_{\alpha,v=n-1}$(正值)，檢定統計值位於虛無假設接受區域內，接受虛無假設(null hypothesis) H_0。

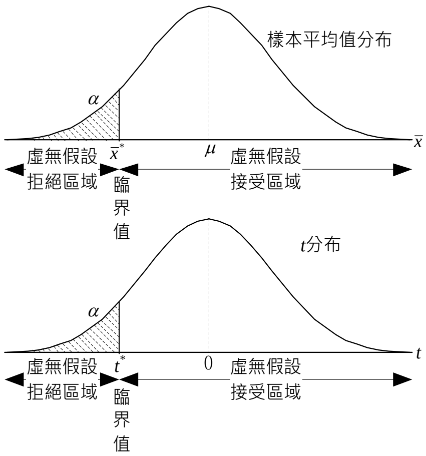
若檢定統計值 $t >$ 臨界值 $t_{\alpha,v=n-1}$(正值)，檢定統計值不位於虛無假設接受區域內，拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0，接受對立假設(alternative hypothesis) H_1。



左尾檢定(a left-tailed test)：虛無假設 H_0: $\mu \ge \mu_0$ vs. 對立假設 H_1: $\mu < \mu_0$。

若檢定統計值 $t \ge$ 臨界值$-t_{\alpha,v=n-1}$(負值)，檢定統計值位於虛無假設接受區域內，接受虛無假設(null hypothesis) H_0。

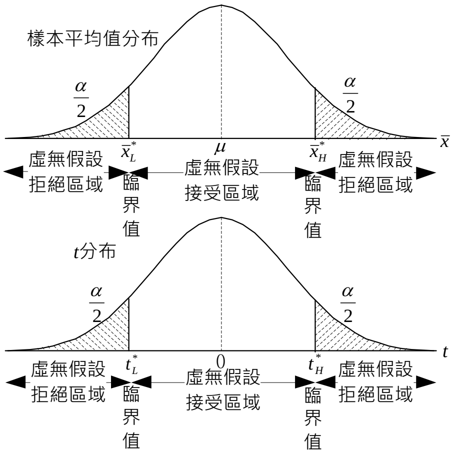
若檢定統計值 $t <$ 臨界值$-t_{\alpha,v=n-1}$(負值)，檢定統計值不位於虛無假設接受區域內，拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0，接受對立假設(alternative hypothesis) H_1。



雙尾檢定(a two-tailed test)：虛無假設 H_0: $\mu = \mu_0$ vs. 對立假設 H_1: $\mu \ne \mu_0$。

若左側臨界值$-t_{\frac{\alpha}{2},v=n-1}$(負值) $\le$ 檢定統計值 $t \le$ 右側臨界值$t_{\frac{\alpha}{2},v=n-1}$(正值)，檢定統計值位於虛無假設接受區域內，接受虛無假設(null hypothesis) H_0。

若檢定統計值 $t <$ 左側臨界值$-t_{\frac{\alpha}{2},v=n-1}$(負值)或檢定統計值 $t >$ 右側臨界值$t_{\frac{\alpha}{2},v=n-1}$(正值)，檢定統計值不位於虛無假設接受區域內，拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0，接受對立假設(alternative hypothesis) H_1。



範例 9.15　奇遇餐廳原本每週平均盈餘 μ 為 NT $56000 元，每週盈餘金額屬於常態分布，執行粉紅佳人(Pink lady)行銷活動，女性顧客只要在星期一到四晚上穿粉紅色衣服到餐廳用餐時，給予六折優惠，希望吸引顧客的上門，以提升經營績效，增加盈餘。在執行 5 星期(n = 5)，每週盈餘的平均值$\bar{x}$為 NT$56500 元，每週盈餘的標準(偏)差 S 為 NT$ 500 元。試評估粉紅佳人(Pink lady)行銷活動提升經營績效，增加盈餘？

題解：樣本數量 n = 5，屬於樣本數量較少者，自由度 $v = n - 1 = 5 - 1 = 4$，樣本平均值$\bar{x}$ = NT$ 56500 元，樣本標準(偏)差 S = NT$ 500 元，μ_0 = NT$ 56000 元。希望以超過原先的盈餘為目的，故本範例屬於右尾檢定(a right-tailed test)。

A.設定顯著水準 $\alpha = 0.05$，臨界值 $t_{\alpha,n-1} = t_{0.05,5-1} = t_{0.05,4} = 2.1318$(使用 Excel 軟體 T.INV 函數查詢獲得)。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu \leq 56000$ 元。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu > 56000$ 元。

D.計算檢定統計值：t 值

$$\text{檢定統計值 } t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}} = \frac{56500 - 56000}{\frac{500}{\sqrt{5}}} = \frac{500}{223.61} = 2.2360$$

E.檢定統計值 $t = 2.2360 \geq$ 臨界值 $t_{\alpha,n-1} = 2.1318$，檢定統計值位於虛無假設接受區域內。拒絕虛無假設 H_0: $\mu \leq 56000$ 元，接受對立假設 H_1: $\mu > 56000$ 元。因此，執行粉紅佳人(Pink lady)行銷活動，有顯著的增加盈餘。應繼續執行粉紅佳人(Pink lady)行銷活動。

練習 9.23　奇遇餐廳販售清蒸鱸魚一盤設定售價 NT$ 300 元，餐廳規劃標準食譜(standard recipe)時，設計每盤清蒸鱸魚中有一尾鱸魚，鱸魚購買時設定重量(As-purchased weight, AP) μ = 650 公克。供貨廠商進貨時，有品管人員抽樣驗證鱸魚是否有達到 AP μ = 650 公克的驗收標準。今天供貨廠商送貨，經小玟抽驗 10 尾鱸魚，其平均重$\bar{x}$ = 638 公克，標準(偏)差 S = 50 公克。試利用 t 值檢定法，驗證此批鱸魚是否達到驗收標準？

題解：樣本數量 n = 10，樣本平均值$\bar{x}$ = 638 公克，樣本標準(偏)差 S = 50 公克，母體平均值的假設值 μ_0 = 650 公克。本範例是以檢出樣本數值是否達到某特定數值，故此例屬於雙尾檢定(two-tailed test)

A.設定顯著水準 $\alpha = 0.05$，左側臨界值$-t_{\frac{\alpha}{2},n-1} = -t_{\frac{0.05}{2},10-1} = -t_{0.025,9} = -2.2622$；右側臨界值$t_{\frac{\alpha}{2},n-1} = t_{\frac{0.05}{2},10-1} = t_{0.025,9} = 2.2622$(使用 Excel 軟體 T.INV 函數查詢獲得)。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu = 650$ 公克。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu \neq 650$ 公克。

D.計算檢定統計值：t 值

$$\text{檢定統計值 } t = \frac{\bar{x}-\mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}} = \frac{638-650}{\frac{50}{\sqrt{10}}} = \frac{-12}{15.8114} = \text{-0.7590}$$

E.左側臨界值$-t_{\frac{\alpha}{2},n-1}$ = -2.2622 ≤ 檢定統計值 t = -0.7590 ≤ 右側臨界值$t_{\frac{\alpha}{2},n-1}$ = 2.2622，檢定統計值位於虛無假設接受區域內，接受虛無假設(null hypothesis) H_0: μ = 650 公克，顯示供貨廠商提供的鱸魚有符合標準食譜的設計，可以通過品管人員驗收送進廚房，以廚房後場進行備餐之用。因此，驗證結果接受虛無假設時，餐廳可以接受此批鱸魚。

答案：檢驗結果顯示該批鱸魚重量有達到驗收標準

練習 9.24 燕巢餐廳販售紅燒吳郭魚一盤設定售價 NT$ 250 元，餐廳規劃標準食譜(standard recipe)時，設計每盤紅燒吳郭魚中有一尾吳郭魚，吳郭魚購買時設定重量(As-purchased weight, AP) μ = 700 公克。供貨廠商進貨時，有品管人員抽樣驗證無郭魚是否有達到 AP μ = 700 公克的驗收標準。今天供貨廠商送貨，經小玫隨機抽驗 13 尾無郭魚，其平均重$\bar{x}$ = 650 公克，標準(偏)差 S = 20 公克。試利用 t 值檢定法，驗證此批無郭魚是否達到驗收標準？

題解：樣本數量 n = 13，樣本平均值$\bar{x}$ = 650 公克，樣本標準(偏)差 S = 20 公克，母體平均值的假設值 μ_0 = 700 公克。本範例是以檢出樣本數值是否達到某特定數值，故此例屬於雙尾檢定(two-tailed test)。

A.設定顯著水準 α = 0.05，左側臨界值$-t_{\frac{\alpha}{2},n-1} = -t_{\frac{0.05}{2},13-1} = -t_{0.025,12}$ = -2.1788；右側臨界值$t_{\frac{\alpha}{2},n-1} = t_{\frac{0.05}{2},13-1} = t_{0.025,12}$ = 2.1788(使用 Excel 軟體 T.INV 函數查詢獲得)。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: μ = 700 公克。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu \neq$ 700 公克。

D.計算檢定統計值：t 值

$$\text{檢定統計值 } t = \frac{\bar{x}-\mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}} = \frac{650-700}{\frac{20}{\sqrt{13}}} = \frac{-50}{5.547} = \text{-9.0139}$$

E.檢定統計值 t = -9.0139 < 左側臨界值$-t_{\frac{\alpha}{2},n-1}$ = -2.1788 < 右側臨界值$t_{\frac{\alpha}{2},n-1}$ = 2.1788，檢定統計值不位於虛無假設接受區域內，接受對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu \neq$ 700 公克，顯示供貨廠商提供的無郭魚沒有符合標準食譜的設計，無法通過品管人員驗收，必須退回此批吳郭魚。

答案：檢驗結果顯示該批無郭魚重量沒有達到驗收標準

練習 9.25 請問在什麼狀況下，可以使用 t-分布於母體平均值的假設檢定？

9.4.3 母體非常態分布和變異數已知【選擇教材】

母體數於非常態分布和變異數 σ^2 已知時，通常皆使用無母數統計方法進行此種狀況的假設檢定。若母體的分布屬於非常態分布(Non-normal distribution)，母體變異數 σ^2 和標準(偏)差 σ 可以獲得(已知)，在樣本數量較少(n < 30)的情況時，亦可利用柴比氏定理(Chebyshev's theorem)進行母體平均值 μ 的假設檢定。

在任何觀測值的分布資料中，至少有$(1-\frac{1}{k^2})$比率或$(1-\frac{1}{k^2}) \times 100$ %的資料，分布在算術平均值為中心，±k 個標準(偏)差的範圍內；樣本資料分布在$\bar{x} \pm k \times S$ 區間內，母體資料分布在 $\mu \pm k \times \sigma$ 區間內。

$$P(|\bar{x}-\mu| \leq k \times \sigma_{\bar{x}}) \geq (1-\frac{1}{k^2}) \quad \rightarrow \quad P(|\bar{x}-\mu| \geq k \times \sigma_{\bar{x}}) = P(|\bar{x}-\mu| \geq k \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) \leq \frac{1}{k^2}$$

$$P(-k \times \sigma_{\bar{x}} \leq \bar{x}-\mu \leq k \times \sigma_{\bar{x}}) \geq (1-\frac{1}{k^2})$$

$$P(-\bar{x}-k \times \sigma_{\bar{x}} \leq -\mu \leq -\bar{x}+k \times \sigma_{\bar{x}}) \geq (1-\frac{1}{k^2})$$

$$P(\bar{x}+k \times \sigma_{\bar{x}} \geq \mu \geq \bar{x}-k \times \sigma_{\bar{x}}) \geq (1-\frac{1}{k^2})$$

$$P(\bar{x} - k \times \sigma_{\bar{x}} \le \mu \le \bar{x} + k \times \sigma_{\bar{x}}) \ge (1 - \frac{1}{k^2})$$

$$P(\bar{x} - k \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{x} + k \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) \ge (1 - \frac{1}{k^2})$$

右尾檢定(a right-tailed test)：虛無假設 $H_0: \mu \le \mu_0$ vs. 對立假設 $H_1: \mu > \mu_0$。

機率 p 值代表虛無假設成立時，樣本平均值$\bar{x}$大於等於臨界值[某次(觀測)樣本平均值] $\bar{x}^*$或$\bar{x}_0$機率。機率 $p = P(\bar{x} \ge \bar{x}^* | H_0: \mu \le \mu_0)$。故，$\bar{x} - \mu_0$屬於正值。

$$\text{先利用}\bar{x}^* - \mu = k \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\text{計算 } k \text{ 值，} k = \frac{\bar{x}^* - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{(\bar{x}^* - \mu) \times \sqrt{n}}{\sigma}$$

$$\text{機率 } p = P(\bar{x} \ge \bar{x}^* | H_0: \mu \le \mu_0) = P(\bar{x} - \mu_0 \ge \bar{x}^* - \mu_0) = P(\bar{x} - \mu_0 \ge k \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = \frac{1}{k^2}$$

其中$\bar{x}^* = \bar{x}_0$：臨界值[某次(觀測)樣本平均值]

若機率 p 值 > 顯著水準 α，接受虛無假設(null hypothesis) H_0。

若機率 p 值 < 顯著水準 α，拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0，接受對立假設(alternative hypothesis) H_1。

左尾檢定(a left-tailed test)：虛無假設 $H_0: \mu \ge \mu_0$ vs. 對立假設 $H_1: \mu < \mu_0$。

機率 p 值代表虛無假設成立時，樣本平均值$\bar{x}$小於等於臨界值[某次(觀測)樣本平均值] $\bar{x}^*$或$\bar{x}_0$機率。機率 $p = P(\bar{x} \le \bar{x}^* | H_0: \mu \ge \mu_0)$。故，$\bar{x} - \mu_0$屬於負值。

$$\text{先利用}\bar{x}^* - \mu = k \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\text{計算 } k \text{ 值，} k = \frac{\bar{x}^* - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{(\bar{x}^* - \mu) \times \sqrt{n}}{\sigma}$$

機率 $p = P(\bar{x} \le \bar{x}^* | H_0: \mu \ge \mu_0) = P(\bar{x} - \mu_0 \le \bar{x}^* - \mu_0) \le P(|\bar{x} - \mu_0| \ge |\bar{x}^* - \mu_0|)$【符號兩邊都是負值，取絕對值之後變正值，符號需要翻轉】 $= P(|\bar{x} - \mu_0| \ge k \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = \frac{1}{k^2}$

其中$\bar{x}^* = \bar{x}_0$：臨界值[某次(觀測)樣本平均值]

若機率 p 值 > 顯著水準 α，接受虛無假設(null hypothesis) H_0。

若機率 p 值 < 顯著水準 α，拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0，接受對立假設(alternative hypothesis) H_1。

雙尾檢定(a two-tailed test)：虛無假設 $H_0: \mu = \mu_0$ vs. 對立假設 $H_1: \mu \ne \mu_0$。

機率 p 值代表虛無假設 $H_0: \mu = \mu_0$ 成立時，所有可能樣本平均值$\bar{x}$大於等於或小於等於某次(觀測)樣本平均值$\bar{x}^*$或$\bar{x}_0$機率值的 2 倍。

$$\text{先利用}\bar{x}^* - \mu = k \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\text{計算 } k \text{ 值} \rightarrow k = \frac{\bar{x}^* - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{(\bar{x}^* - \mu) \times \sqrt{n}}{\sigma}$$

$$\text{機率 } p = P(\bar{x} \le \bar{x}^*) = \frac{1}{k^2}$$

若$\bar{x}^* > \mu_0$：某次(觀測)樣本平均值$\bar{x}^*$大於假設值 μ_0時，故，$\bar{x} - \mu_0$屬於正值。

$$p = 2 \times P(\bar{x} \ge \bar{x}^*) = 2 \times \frac{1}{k^2}$$

$$\text{機率 } p = 2 \times P(\bar{x} \ge \bar{x}^* | H_0: \mu = \mu_0) = 2 \times P(\bar{x} - \mu_0 \ge \bar{x}^* - \mu_0) =$$

若$\bar{x}^* < \mu_0$：某次(觀測)樣本平均值$\bar{x}^*$小於假設值 μ_0時

$$p = 2 \times P(\bar{x} \le \bar{x}^*) = 2 \times \frac{1}{k^2}$$

其中$\bar{x}^* = \bar{x}_0$：臨界值[某次(觀測)樣本平均值]

若機率 p 值 > 顯著水準 α，接受虛無假設(null hypothesis) H_0。

若機率 p 值 < 顯著水準 α，拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0，接受對立假設(alternative hypothesis) H_1。

範例 9.16 奇遇餐廳原本每週平均盈餘 μ 為 NT \$56000 元，每週盈餘的標準(偏)差 σ 為 NT\$500 元，每週盈餘金額屬於非常態分布，執行粉紅佳人(Pink lady)行銷活動，女性顧客只要在星期一到四晚上穿粉紅色衣服到餐廳用餐時，給予六折優惠，希望吸引顧客的上門，以提升經營績效，增

加盈餘。在執行 5 星期(n = 5)，每週盈餘的平均值$\bar{x}$為 NT \$56500 元，每週盈餘的標準(偏)差 S 為 NT \$500 元。試評估粉紅佳人(Pink lady)行銷活動提升經營績效，增加盈餘？

題解：樣本數量 n = 5，屬於樣本數量較少者，樣本平均值$\bar{x}$ = NT\$ 56500 元，樣本標準(偏)差 S = NT\$ 500 元，母體標準(偏)差 σ = NT\$ 500 元，母體平均值的假設值 μ_0 = NT\$ 56000 元。希望以超過原先的盈餘為目的，故本範例屬於右尾檢定(a right-tailed test)。

A.設定顯著水準 $\alpha = 0.05$。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu \le 56000$ 元。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu > 56000$ 元。

D.計算 k 值

$$k = \frac{\bar{x}^* - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{56500-56000}{\frac{500}{\sqrt{5}}} = 2.2361$$

$$\text{機率 } p = P(\bar{x} \ge \bar{x}^*) = \frac{1}{k^2} = \frac{1}{2.2361 \times 2.2361} = 0.2000$$

E.機率 p = 0.2000 ≥ 顯著水準 α = 0.05，接受虛無假設 H_0: $\mu \le 56000$ 元，拒絕對立假設 H_1: $\mu > 56000$ 元。因此，執行粉紅佳人(Pink lady)行銷活動，沒有顯著的增加盈餘。應考慮是否繼續執行或改變執行方式。

練習 9.26　奇遇餐廳販售清蒸鱸魚一盤設定售價 NT\$ 300 元，餐廳規劃標準食譜(standard recipe)時，設計每盤清蒸鱸魚中有一尾鱸魚，鱸魚購買時設定重量(As-purchased weight, AP) μ = 650 公克。供貨廠商進貨時，有品管人員抽樣驗證鱸魚是否有達到 AP μ = 650 公克的驗收標準。已知鱸魚重量分布屬於非常態分布，其標準(偏)差 σ = 30 公克。今天供貨廠商送貨，經小玟抽驗 10 尾鱸魚，其平均重$\bar{x}$ = 638 公克，標準(偏)差 S = 50 公克。試驗證此批鱸魚是否達到驗收標準？

題解：母體標準(偏)差 σ = 30 公克，樣本數量 n = 10，樣本平均值$\bar{x}$ = 638 公克，樣本標準(偏)差 S = 50 公克，母體平均值的假設值 μ_0 = 650 公克。本範例是以檢出樣本數值是否達到某特定數值，故此例屬於雙尾檢定(two-tailed test)。

A.設定顯著水準 $\alpha = 0.05$。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu = 650$ 公克。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu \ne 650$ 公克。

D.計算 k 值

$$k = \frac{\bar{x}^* - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{638-650}{\frac{30}{\sqrt{10}}} = \frac{-12}{9.4868} = -1.2649$$

$$\text{機率 } p = P(\bar{x} \le \bar{x}^*) = \frac{1}{k^2} = \frac{1}{-1.2649 \times -1.2649} = 0.625$$

E.機率 p = 0.625 ≥ α = 0.05，推論接受虛無假設(null hypothesis) H_0: μ = 650 公克，顯示供貨廠商提供的鱸魚有符合標準食譜的設計，可以通過品管人員驗收送進廚房，以廚房後場進行備餐之用。因此，驗證結果接受虛無假設時，餐廳可以接受此批鱸魚。

答案：檢驗結果顯示該批鱸魚重量有達到驗收標準

練習 9.27　啤酒廠的清涼退火啤酒標示容量 1000 毫升，已知啤酒液體容量屬於非常態分布，且已知其標準偏差為 10 毫升。其經銷商進貨 500 箱，經抽樣 10 瓶，測量啤酒液體平均容量為 996 毫升，標準(偏)差 12 毫升。在顯著水準為 0.05 的前提下，檢定經銷商是否要接受此批清涼退火啤酒？

題解：樣本數量 $n = 39$，樣本平均值$\bar{x} = 996$ 毫升，樣本標準(偏)差 $S = 12$ 毫升，母體平均值的假設值 $\mu_0 = 1000$ 毫升。母體標準(偏)差 $\sigma = 10$ 毫升。本題目是以檢出樣本容量是否低於某特定數值，故此例屬於左尾檢定(a left-tailed test)。

A.設定顯著水準 $\alpha = 0.05$。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu \geq 1000$ 毫升。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu < 1000$ 毫升。

D.計算 k 值

$$k = \frac{\bar{x}^* - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{996 - 1000}{\frac{10}{\sqrt{10}}} = \frac{-4}{3.1623} = -1.2649$$

$$\text{機率 } p = P(\bar{x} \leq \bar{x}^*) = \frac{1}{k^2} = \frac{1}{-1.2649 \times -1.2649} = 0.625$$

E.機率 $p = 0.625 \geq \alpha = 0.05$，推論接受虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu \geq 1000$ 毫升，顯示供貨廠商提供的啤酒容量符合標準，通過經銷商檢驗，可以順利驗收進貨。

答案：檢驗結果顯示該批啤酒容量可達驗收標準

9.4.4 母體非常態分布和變異數未知【選擇教材】

若母體的分布屬於非常態分布(Non-normal distribution)，母體變異數 σ^2 和標準(偏)差 σ 無法獲得(未知)，在樣本數量較少($n < 30$)的情況時，必須使用無母數統計學進行母體平均值 μ 的假設檢定。

9.5 母體比例假設檢定

奇遇餐廳原本顧客群以男性居多高達 70 %，女性僅有 30 %，為了提高女性顧客上門的比率，執行粉紅佳人(Pink lady)行銷活動，女性顧客只要穿粉紅色衣服到餐廳用餐時，給予六折優惠，希望吸引女性顧客的上門。在執行一個星期後，觀察計算 400 名顧客，其性別的分布為女性 40 %。試評估粉紅佳人行銷活動是否有顯著地提昇女性顧客上門的比率？此種狀況下，就需要利用【母體比例假設檢定】進行分析。

母體比例 p 的假設檢定，有三種型態

左尾檢定	雙尾檢定	右尾檢定
虛無假設 H_0: $p \geq p_0$	虛無假設 H_0: $p = p_0$	虛無假設 H_0: $p \leq p_0$
對立假設 H_1: $p < p_0$	對立假設 H_1: $p \neq p_0$	對立假設 H_1: $p > p_0$

其中，p 代表母體比例；p_0 代表母體比例的特定值或假設值。

母體比例的假設檢定程序(步驟)和母體平均值的假設檢定程序(步驟)類同。

在樣本數量較多($n > 30$)的情況($n \times p > 5$ 及 $n \times q > 5$)下，樣本比例$\bar{p}$的抽樣分布接近於常態分布 $\bar{p} \sim N(p, \frac{p \times q}{n})$。因此，可以利用標準化 z 值進行檢定。

$$z = \frac{\bar{p} - p_0}{\sigma_{\bar{p}}} = \frac{\bar{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0 \times q_0}{n}}} = \frac{\bar{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0 \times (1 - p_0)}{n}}}$$

其中$\bar{p}$, $\hat{p}$：樣本比例(sample proportion)

p_0：母體比例的特定值、假設值、猜測值或估計值(Null hypothesized proportion)

$\sigma_{\bar{p}}$：樣本比例分布的標準(偏)差(Standard deviation of sample proportion)

在檢定階段，運用樣本比例$\bar{p}$標準化後之檢定統計值─z 值與在顯著水準 α 下的標準化臨界值─z_α 或$z_{\frac{\alpha}{2}}$值進行比較，以進行統計推論。

右尾檢定(a right-tailed test)：虛無假設 H_0: $p \le p_0$ vs. 對立假設 H_1: $p > p_0$。

臨界值(Critical value) $z^* = z_\alpha$(正值)

若統計檢定值 $z \le$ 臨界值 z_α，檢定統計值位於虛無假設接受區域內，接受虛無假設(null hypothesis) H_0。

若統計檢定值 $z >$ 臨界值 z_α，檢定統計值不位於虛無假設接受區域內，拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0，接受對立假設(alternative hypothesis) H_1。

左尾檢定(a left-tailed test)：虛無假設 H_0: $p \ge p_0$ vs. 對立假設 H_1: $p < p_0$。

臨界值(Critical value) $z^* = -z_\alpha$(負值)

若統計檢定值 $z \ge$ 臨界值 $-z_\alpha$，檢定統計值位於虛無假設接受區域內，接受虛無假設(null hypothesis) H_0。

若統計檢定值 $z <$ 臨界值 $-z_\alpha$，檢定統計值不位於虛無假設接受區域內，拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0，接受對立假設(alternative hypothesis) H_1。

雙尾檢定(a two-tailed test)：虛無假設 H_0: $p = p_0$ vs. 對立假設 H_1: $p \ne p_0$。

臨界值(Critical value)：左側(較低)臨界值 $z_L^* = -z_{\frac{\alpha}{2}}$(負值)；右側(較高)臨界值 $z_H^* = z_{\frac{\alpha}{2}}$(正值)。

若左側臨界值 $-z_{\frac{\alpha}{2}} \le$ 統計檢定值 $z \le$ 右側臨界值 $z_{\frac{\alpha}{2}}$，檢定統計值位於虛無假設接受區域內，接受虛無假設(null hypothesis) H_0。

若統計檢定值 $z <$ 左側臨界值 $-z_{\frac{\alpha}{2}}$ 或統計檢定值 $z >$ 右側臨界值 $z_{\frac{\alpha}{2}}$，檢定統計值不位於虛無假設接受區域內，拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0，接受對立假設(alternative hypothesis) H_1。

範例 9.17　奇遇餐廳原本顧客群以男性居多高達 $q_0 = 0.7$，女性只有 $p_0 = 0.3$，為了提高女性顧客上門的比率，執行粉紅佳人(Pink lady)行銷活動，女性顧客只要穿粉紅色衣服到餐廳用餐時，給予六折優惠，希望吸引女性顧客的上門。在執行一個星期後，觀察計算 400 名顧客，其性別的分布為女性 $\bar{p} = 0.4$。試評估粉紅佳人(Pink lady)行銷活動是否有提昇女性顧客上門的比率？

題解：樣本數量 $n = 400$，屬於樣本數量較多者 $n \times p > 5$ 及 $n \times q > 5$，男性比例 $q_0 = 0.7$，女性比例 $p_0 = 0.3$，女性樣本比例 $\bar{p} = 0.4$。希望以超過原先的比例為目的，故本範例屬於右尾檢定(a right-tailed test)。

A. 設定顯著水準 $\alpha = 0.05$，臨界值 $z^* = z_\alpha = z_{0.05} = 1.6449$(使用 Excel 軟體 NORM.S.INV 函數查詢獲得)。

B. 虛無假設(null hypothesis) H_0: 女性比例 $p \le 0.3$。

C. 對立假設(alternative hypothesis) H_1: 女性比例 $p > 0.3$。

D. 計算檢定統計值：標準化 z 值

檢定統計值 $z = \frac{\bar{p}-p_0}{\sigma_{\bar{p}}} = \frac{\bar{p}-p_0}{\sqrt{\frac{p_0 \times q_0}{n}}} = \frac{\bar{p}-p_0}{\sqrt{\frac{p_0 \times (1-p_0)}{n}}} = \frac{0.4-0.3}{\sqrt{\frac{0.3 \times (1-0.3)}{400}}} = \frac{0.1}{0.0229} = 4.3644$

E. 檢定統計值 $z = 4.3644 >$ 臨界值 $z_{0.05} = 1.6449$，檢定統計值不位於虛無假設接受區域內。拒絕虛無假設 H_0: 女性比例 $p \le 0.3$，接受對立假設 H_1: 女性比例 $p > 0.3$。因此，執行粉紅佳人(Pink lady)行銷活動，可以顯著的增加女性顧客上門的比率。應繼續執行。

範例 9.18　如意社區內有金源和銀源兩家咖啡館，依據顧問公司調查顯示，該社區居民對兩家咖啡館的偏好有 40 %的居民偏好金源，60 %的居民偏好銀源。現今採用簡單隨機抽樣選取 150 位居民，其中偏好金源咖啡館者有 62 位。試問顧問公司調查報告是否可靠？($\alpha = 0.05$)

題解一：樣本數量 $n = 150$，屬於樣本數量較多者 $n \times p > 5$ 及 $n \times q > 5$，顧問公司調查偏好銀源比例 $q_0 = 0.60$，偏好金源比例 $p_0 = 0.40$。抽樣發現偏好金源樣本比例 $\bar{p} = \frac{62}{150} = 0.4133$。希望以驗證原先的比例為目的，故本範例屬於雙尾檢定。

A.設定顯著水準 α = 0.05。左側臨界值$z_L^* = -z_{\frac{\alpha}{2}} = -z_{\frac{0.05}{2}}$ = $-z_{0.025}$ = –1.9600；右側臨界值$z_H^* = z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{\frac{0.05}{2}}$ = $z_{0.025}$ = 1.9600(使用 Excel 軟體 NORM.S.INV 函數查詢獲得)。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: 偏好金源比例 p = 0.40。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: 偏好金源比例 $p \neq 0.40$。

D.計算檢定統計值：標準化 z 值

檢定統計值 $z = \frac{\bar{p}-p_0}{\sigma_{\bar{p}}} = \frac{\bar{p}-p_0}{\sqrt{\frac{p_0\times q_0}{n}}} = \frac{\bar{p}-p_0}{\sqrt{\frac{p_0\times(1-p_0)}{n}}} = \frac{0.4133-0.4}{\sqrt{\frac{0.4\times(1-0.4)}{150}}} = \frac{0.0133}{0.0400} = 0.3333$

E.左側臨界值$-z_{0.025}$ = –1.9600 < 檢定統計值 z = 0.3333 < 右側臨界值 $z_{0.025}$ = 1.9600，檢定統計值位於虛無假設接受區域內。接受虛無假設 H_0: 偏好金源比例 p = 0.4。因此，原本顧問公司調查報告的數據可靠。

題解二：樣本數量 n = 150，屬於樣本數量較多者 $n \times p > 5$ 及 $n \times q > 5$，顧問公司調查偏好銀源比例 p_0 = 0.60，偏好金源比例 q_0 = 0.40，抽樣發現偏好金源樣本比例$\bar{q} = \frac{62}{150}$ = 0.4133，偏好銀源樣本比例$\bar{p}$ = 1 – $\bar{q}$ = 1 – 0.4133 = 0.5867。希望以驗證原先的比例為目的，故本範例屬於雙尾檢定。

A.設定顯著水準 α = 0.05。左側臨界值$z_L^* = -z_{\frac{\alpha}{2}} = -z_{\frac{0.05}{2}}$ = $-z_{0.025}$ = –1.9600；右側臨界值$z_H^* = z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{\frac{0.05}{2}}$ = $z_{0.025}$ = 1.9600(使用 Excel 軟體 NORM.S.INV 函數查詢獲得)。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: 偏好銀源比例 p = 0.60。

C.對立假設(alternative hypothesis) 偏好銀源比例 H_1: $p \neq 0.60$。

D.計算檢定統計值：標準化 z 值

檢定統計值 $z = \frac{\bar{p}-p_0}{\sigma_{\bar{p}}} = \frac{\bar{p}-p_0}{\sqrt{\frac{p_0\times q_0}{n}}} = \frac{\bar{p}-p_0}{\sqrt{\frac{p_0\times(1-p_0)}{n}}} = \frac{0.5867-0.6}{\sqrt{\frac{0.6\times(1-0.6)}{150}}} = \frac{-0.0133}{0.0400}$ = -0.3333

E.左側臨界值$-z_{0.025}$ = –1.9600 < 檢定統計值 z = -0.3333 < 右側臨界值 $z_{0.025}$ = 1.9600，檢定統計值位於虛無假設接受區域內。接受虛無假設 H_0: 偏好銀源比例 p = 0.6。因此，原本顧問公司調查報告的數據可靠。

範例 9.19 奇遇咖啡館依據以往經營情況，消費者的再次消費意願達到 75 %。現今採用簡單隨機抽樣選取 150 位消費者，願意再次消費者有 96 位。在顯著水準 α = 0.05 時，消費者再次消費意願是否低於 75 %？

題解：樣本數量 n = 150，屬於樣本數量較多者 $n\times p > 5$ 及 $n\times q > 5$，不願意再次消費比例 q_0 = 0.25，願意再次消費比例 p_0 = 0.75，願意再次消費樣本比例$\bar{p} = \frac{96}{150}$ = 0.6400。希望以驗證是否達到某一標準時，本範例屬於左尾檢定(a left-tailed test)。

A.設定顯著水準 α = 0.05。臨界值 $z^* = -z_\alpha = -z_{0.05}$ = –1.6449(使用 Excel 軟體 NORM.S.INV 函數查詢獲得)。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: 願意再次消費比例 $p \geq 0.75$。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: 願意再次消費比例 $p < 0.75$。

D.計算檢定統計值：標準化 z 值

檢定統計值 $z = \frac{\bar{p}-p_0}{\sigma_{\bar{p}}} = \frac{\bar{p}-p_0}{\sqrt{\frac{p_0\times q_0}{n}}} = \frac{\bar{p}-p_0}{\sqrt{\frac{p_0\times(1-p_0)}{n}}} = \frac{0.64-0.75}{\sqrt{\frac{0.75\times(1-0.75)}{150}}} = \frac{-0.11}{0.0354}$ = –3.1113

E.檢定統計值 z = –3.1113 < 臨界值$-z_{0.05}$ = –1.6449，檢定統計值不位於虛無假設接受區域內。拒絕虛無假設 H_0: 願意再次消費比例 $p \geq 0.75$，接受對立假設 H_1: 願意再次消費比例 $p < 0.75$。因此，現今發現消費者的再次消費意願未達 0.75，必須發現問題，及早解決方能回到以往的水準。

練習 9.28　澄清商務旅館王董事某天前往抽查旅館，發現前一晚 100 間客房中，尚有 25 間空房，是否可以驗證該商務旅館總經理宣稱空房率超過 20 %？(α = 0.05)

題解：樣本數量 n = 100，屬於樣本數量較多者 $n \times p > 5$ 及 $n \times q > 5$，滿房比例 q_0 = 0.8，空房比例 p_0 = 0.2，空房樣本比例 $\bar{p} = \frac{25}{100}$ = 0.25。希望以低於原先的比例為目的，故本範例屬於左尾檢定(a left-tailed test)。

A.設定顯著水準 α = 0.05，臨界值(Critical value) $z^* = -z_\alpha = -z_{0.05}$ = -1.6449(使用 Excel 軟體 NORM.S.INV 函數查詢獲得)。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: 空房比例 $p \geq 0.20$。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: 空房比例 $p < 0.20$。

D.計算檢定統計值：標準化 z 值

檢定統計值 $z = \frac{\bar{p}-p_0}{\sigma_{\bar{p}}} = \frac{\bar{p}-p_0}{\sqrt{\frac{p_0 \times q_0}{n}}} = \frac{\bar{p}-p_0}{\sqrt{\frac{p_0 \times (1-p_0)}{n}}} = \frac{0.25-0.20}{\sqrt{\frac{0.20 \times (1-0.20)}{100}}} = \frac{0.05}{0.04} = 1.2500$

E.檢定統計值 z = 1.2500　>　臨界值-$z_{0.05}$ = -1.6449，檢定統計值位於虛無假設接受區域內。接受虛無假設 H_0: 空房比例 $p \geq 0.20$。

答案：透過抽查的樣本數值推論空房率有超過 20 %。

練習 9.29　澄清社區內有金源和銀源兩家咖啡館，依據顧問公司調查顯示，該社區居民對兩家咖啡館的偏好有 40 %的居民偏好金源，60 %的居民偏好銀源。現今採用簡單隨機抽樣選取 250 位居民，其中偏好金源咖啡館者有 82 位。試問顧問公司調查報告是否可靠？(α = 0.01)

題解一：樣本數量 n = 250，屬於樣本數量較多者 $n \times p > 5$ 及 $n \times q > 5$，顧問公司調查偏好銀源比例 q_0 = 0.60，偏好金源比例 p_0 = 0.40。抽樣發現偏好金源樣本比例 $\bar{p} = \frac{82}{250}$ = 0.3280。希望以驗證原先的比例為目的，故本題目屬於雙尾檢定。

A.設定顯著水準 α = 0.01，左側臨界值(Critical value)：$z_L^* = -z_{\frac{\alpha}{2}} = -z_{\frac{0.01}{2}} = -z_{0.005}$ = –2.5758；右側臨界值 $z_H^* = z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{\frac{0.01}{2}} = z_{0.005}$ = 2.5758(使用 Excel 軟體 NORM.S.INV 函數查詢獲得)。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: 偏好金源比例 $p = 0.40$。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: 偏好金源比例 $p \neq 0.40$。

D.計算檢定統計值：標準化 z 值

檢定統計值 $z = \frac{\bar{p}-p_0}{\sigma_{\bar{p}}} = \frac{\bar{p}-p_0}{\sqrt{\frac{p_0 \times q_0}{n}}} = \frac{\bar{p}-p_0}{\sqrt{\frac{p_0 \times (1-p_0)}{n}}} = \frac{0.3280-0.40}{\sqrt{\frac{0.40 \times (1-0.40)}{250}}} = \frac{-0.0720}{0.0310} = -2.3238$

E.臨界值–$z_{0.005}$ = –2.5758　<　檢定統計值 z = –2.3238　<　臨界值 $z_{0.005}$ = 2.5758，檢定統計值位於虛無假設接受區域內。接受虛無假設 H_0: 偏好金源比例 p = 0.4。透過抽樣所獲得的數值推論原本顧問公司調查報告的數據可靠。

題解二：樣本數量 n = 250，屬於樣本數量較多者 $n \times p > 5$ 及 $n \times q > 5$，顧問公司調查偏好銀源比例 p_0 = 0.60，偏好金源比例 q_0 = 0.40。抽樣發現偏好金源樣本比例 $\bar{p} = \frac{82}{250}$ = 0.3280，偏好銀源樣本比例 $\bar{p} = 1 - \bar{q}$ = 1 – 0.3280 = 0.6720。希望以驗證原先的比例為目的，故本題目屬於雙尾檢定。

A.設定顯著水準 α = 0.01，左側臨界值(Critical value)：$z_L^* = -z_{\frac{\alpha}{2}} = -z_{\frac{0.01}{2}} = -z_{0.005}$ = –2.5758；右側臨界值 $z_H^* = z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{\frac{0.01}{2}} = z_{0.005}$ = 2.5758(使用 Excel 軟體 NORM.S.INV 函數查詢獲得)。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: 偏好銀源比例 $p = 0.60$。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: 偏好銀源比例 $p \neq 0.60$。

D.計算檢定統計值：標準化 z 值

檢定統計值 $z = \frac{\bar{p}-p_0}{\sigma_{\bar{p}}} = \frac{\bar{p}-p_0}{\sqrt{\frac{p_0 \times q_0}{n}}} = \frac{\bar{p}-p_0}{\sqrt{\frac{p_0 \times (1-p_0)}{n}}} = \frac{0.6720-0.60}{\sqrt{\frac{0.60\times(1-0.60)}{250}}} = \frac{0.0720}{0.0310} = 2.3238$

E.臨界值$-z_{0.005} = -2.5758$ < 檢定統計值 $z = 2.3238$ < 臨界值 $z_{0.005} = 2.5758$，檢定統計值位於虛無假設接受區域內。接受虛無假設 H_0: 偏好銀源比例 $p = 0.60$。透過抽樣所獲得的數值推論原本顧問公司調查報告的數據可靠。

練習 9.30　在夜市中阿美消費者宣稱使用空氣槍射破氣球機率至少有 0.85，昨天晚上其射擊 120 次中，打破 95 個氣球，試用顯著水準 $\alpha = 0.05$ 檢定其宣稱是否正確？

題解：樣本數量 $n = 120$，屬於樣本數量較多者 $n \times p > 5$ 及 $n \times q > 5$，宣稱射破比例 $p_0 = 0.85$，射破樣本比例$\bar{p} = \frac{95}{120} = 0.7917$。原始消費者宣稱的射破機率至少 0.85，應設置於虛無假設中，故 H_0: 射破比例 $p \geq 0.85$，若該宣稱射破機率不準確(太高了)，該陳述列於對立假設 H_1: 射破比例 $p < 0.85$，故本範例屬於左尾檢定(a left-tailed test)。

使用標準化 Z 值檢定法(常態分布)

A.設定顯著水準 $\alpha = 0.05$，臨界值 $z^* = -z_\alpha = -z_{0.05} = -1.6449$(使用 Excel 軟體 NORM.S.INV 函數查詢獲得)。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: 射破比例 $p \geq 0.85$。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: 射破比例 $p < 0.85$。

D.計算檢定統計值：標準化 z 值

檢定統計值 $z = \frac{\bar{p}-p_0}{\sigma_{\bar{p}}} = \frac{\bar{p}-p_0}{\sqrt{\frac{p_0 \times q_0}{n}}} = \frac{\bar{p}-p_0}{\sqrt{\frac{p_0 \times (1-p_0)}{n}}} = \frac{0.7917-0.85}{\sqrt{\frac{0.85\times(1-0.85)}{120}}} = \frac{-0.0583}{0.0326} = -1.7896$

E.檢定統計值 $z = -1.7896$ < 臨界值$-z_{0.05} = -1.6449$，檢定統計值不位於虛無假設接受區域內。拒絕虛無假設 H_0: 射破比例 $p \geq 0.85$，接受對立假設 H_1: 射破比例 $p < 0.85$。

答案：透過昨天晚上的射擊推論其宣稱【擊破氣球機率至少有 0.85】陳述不正確

使用機率檢定法(二項分布)

A.設定顯著水準 $\alpha = 0.05$。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: 射破比例 $p \geq 0.85$。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: 射破比例 $p < 0.85$。

D.計算檢定統計值：機率，以隨機變數 X 代表被射破氣球的數量

機率 $F_x(t) = P(X \leq t = 95) = \sum_{x=0}^{t} \binom{n}{x} \times p^x \times q^{n-x} = \sum_{x=0}^{95} \binom{120}{x} \times 0.85^x \times 0.15^{120-x} = 0.0528$ 使用 Excel 軟體 BINOM.DIST 函數查詢獲得

E.機率 $P(X \leq 95) = 0.0528$ > 顯著水準 $\alpha = 0.05$，接受虛無假設 H_0: 射破比例 $p \geq 0.85$。

答案：透過昨天晚上的射擊推論其宣稱【擊破氣球機率至少有 0.85】陳述正確

練習 9.31　在夜市中阿美消費者宣稱使用空氣槍射破氣球機率至少有 0.85，昨天晚上其射擊 12 次中，打破 9 個氣球，試用顯著水準 $\alpha = 0.05$ 檢定其宣稱是否正確？

題解：樣本數量 $n = 12$，屬於樣本數量較少者 $n \times p > 5$ 及 $n \times q > 5$，宣稱射破比例 $p_0 = 0.85$，射破樣本比例$\bar{p} = \frac{9}{12} = 0.75$。希望以低於原先的比例為目的，故本範例屬於左尾檢定(a left-tailed test)。以隨機變數 X 代表 12 次射擊中可以打破的氣球數量。

A.設定顯著水準 $\alpha = 0.05$。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: 射破比例 $p \geq 0.85$。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: 射破比例 $p < 0.85$。

D.計算檢定統計值：機率

機率 $F_x(t) = P(X \le t) = P(X \le 9) = \sum_{x=0}^{t}\binom{n}{x} \times p^x \times q^{n-x} = \sum_{x=0}^{9}\binom{12}{x} \times 0.85^x \times 0.15^{12-x} = 0.2642$ 查二項分布累計機率表或使用 Excel 軟體 BINOM.DIST 函數查詢獲得

E.機率 $P(X \le 9) = 0.2642 >$ 顯著水準 $\alpha = 0.05$，接受虛無假設 H_0: 射破比例 $p \ge 0.85$。

答案：透過昨天晚上的射擊推論其宣稱【擊破氣球機率至少有 0.85】陳述正確

練習 9.32 生產者與消費者約定，整批產品若不良率在 5 %以下時，消費者必須接納允收；若超過 5 %以上時，退貨拒收。(A)若消費者風險(consumer's risk)的錯誤成本大於生產者風險(producer's risk)的錯誤成本，其虛無假設與對立假設如何設立？(B)依據前述的虛無假設和對立假設，隨機抽樣 120 件，顯著水準 $\alpha = 0.05$，依機率值做決策法則為何？

題解：

(A)希望以保護消費者權益為原則，趨向於超過原先約定的比例為目的，故本範例屬於右尾檢定(a right-tailed test)

虛無假設(null hypothesis) H_0: $p \le 0.05$

對立假設(alternative hypothesis) H_1: $p > 0.05$

(B) $n = 120$，屬於樣本數量較多者 $n \times p > 5$ 及 $n \times q > 5$，樣本比例 $\bar{p} \sim N(p, \frac{p \times q}{n})$

$$z = \frac{\bar{p}-p_0}{\sigma_{\bar{p}}} = \frac{\bar{p}-p_0}{\sqrt{\frac{p_0 \times q_0}{n}}} = \frac{\bar{p}-p_0}{\sqrt{\frac{p_0 \times (1-p_0)}{n}}} = \frac{\bar{p}-0.05}{\sqrt{\frac{0.05 \times (1-0.05)}{120}}} = \frac{\bar{p}-0.05}{0.019896} = -2.3238$$

$z_{0.05} = 1.6449$，若 $z = z_{0.05}$，則 $\frac{\bar{p}-0.05}{0.019896} = 1.6449$，$\bar{p} = 0.082725$

若 $\bar{p} > 0.082725$，接受對立假設 H_1: $p > 0.05$，退貨拒收該批貨物

若 $\bar{p} < 0.082725$，接受虛無假設 H_0: $p \le 0.05$，接納允收該批貨物

範例 9.20 在咖啡飲料市場中，隨機抽出 60 位愛喝咖啡的消費者，比較偏好現煮咖啡的比例是否高於即溶咖啡，若欲在顯著水準 0.05 之下，達到消費者偏好現煮咖啡的結論，前述樣本中至少需要有幾位消費者偏好現煮咖啡？

題解：利用 p 代表偏好喝現煮咖啡的比例，希望以偏好現煮咖啡高於即溶咖啡的比例為目的，故本範例屬於右尾檢定(a right-tailed test)。

A.設定顯著水準 $\alpha = 0.05$。臨界值(Critical value) $z^* = z_\alpha = z_{0.05} = 1.6449$(使用 Excel 軟體 NORM.S.INV 函數查詢獲得)。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: $p \le 0.50$。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: $p > 0.50$。

D.計算檢定統計值：標準化 z 值

$$z = \frac{\bar{p}-p_0}{\sigma_{\bar{p}}} = \frac{\bar{p}-p_0}{\sqrt{\frac{p_0 \times q_0}{n}}} = \frac{\bar{p}-p_0}{\sqrt{\frac{p_0 \times (1-p_0)}{n}}} = \frac{\bar{p}-0.50}{\sqrt{\frac{0.50 \times (1-0.50)}{60}}} = \frac{\bar{p}-0.50}{0.06455}$$

E.欲判別拒絕虛無假設 H_0: $p \le 0.50$，接受對立假設 H_1: $p > 0.50$，需要檢定統計值 z > 臨界值 $z^* = 1.6449$。

故檢定統計值 $z = \frac{\bar{p}-0.50}{0.06455} > 1.6449 \rightarrow \bar{p} = \frac{x}{60} > 0.606175 \rightarrow x > 0.606175 \times 60 = 36.37$

答案：前述樣本中至少需要有 37 位消費者偏好現煮咖啡

9.6 假設檢定與決策制訂

事實(true)：真實狀況

		H_0 為真	H_1 為真
決策或推論(依據統計驗證後建議的決策)	接受 H_0 (accept H_0)	判斷正確 機率 $1-\alpha$	判斷錯誤，機率 β 型二錯誤(Type II error)
	拒絕 H_0；接受 H_1 (reject H_0; accept H_1)	判斷錯誤，機率 α 型一錯誤(Type I error)	判斷正確 機率 $1-\beta$

利用假設檢定程序所獲得的推論，當成決策依據時，可以利用改變顯著水準 α 的數值，其為控制型一錯誤(Type I error)發生機率[虛無假設(null hypothesis) H_0 為真，但是拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0，判斷接受對立假設(alternative hypothesis) H_1，判斷錯誤機率]。因此，在檢定程序中，研究者可以操控選定顯著水準 α 的數值，達到控制型一錯誤的目的。犯型一錯誤(Type I error)機率為 α。

但是，型二錯誤[對立假設(alternative hypothesis) H_1 為真，接受虛無假設(null hypothesis) H_0，判斷錯誤]就無法直接被控制。

在驗證、檢定決策制定(Testing in decision-making situations)過程中，利用檢定的推論(結論)制定決策，因此，在制定決策時必須同時考慮到犯型二錯誤機率。原先，犯型一錯誤機率 α 已經在檢定的過程中納入考量。若能瞭解犯型二錯誤機率 β，可以在接受虛無假設(null hypothesis) H_0 時，清楚決策錯誤機率。

故：

檢定的推論(結論)接受虛無假設(null hypothesis) H_0，拒絕對立假設(alternative hypothesis)H_1 時，決策(判斷)正確機率為 $1-\alpha$，決策(判斷)錯誤機率為 β。

檢定的推論(結論)拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0，接受對立假設(alternative hypothesis)H_1 時，決策(判斷)正確機率為 $1-\beta$，決策(判斷)錯誤機率為 α。

α 和 β 皆為判定檢定的精準度、精確性或精確度。α 和 β 數值愈小，驗證或檢定的精準度愈高，可能犯錯機率愈低。$1-\alpha$ 和 $1-\beta$ 數值愈大，驗證或檢定的精準度愈高，可能犯錯機率愈低。$1-\beta$ 稱為檢(定)力(power of the test)，可以判斷檢定的精確程度。

9.7 估算型二錯誤機率

經過檢定過程後，將原本對立假設(alternative hypothesis)H_1 為真實的情況，誤判為接受虛無假設(null hypothesis)H_0，此時發生型二錯誤，其發生機率為 β，則

$$\beta = P(\text{接受虛無假設 } H_0 | \text{對立假設 } H_1 \text{ 為真}) = P(\text{接受虛無假設 } H_0 | \text{虛無假設 } H_0 \text{ 為假})$$

在對立假設所有可能的母體參數區間(x 軸)中，將犯型二錯誤機率 β(y 軸)繪製成一條曲線，此曲線稱為**操作特徵曲線**或**作業特性曲線**(operating characteristic curve, OCC)。在對立假設所有可能的母體參數區間(x 軸)中，將檢(定)力 $1-\beta$(y 軸)繪製成一條曲線，此曲線稱為**檢(定)力曲線**(power curve, PC)。繪製操作特徵曲線和檢(定)力曲線的目的就是協助估算在各種狀況下可能犯型二錯誤機率。

範例 9.21　奇遇餐廳販售蚵仔麵線一碗設定售價 NT$ 100 元，餐廳規劃標準食譜(standard recipe)時，設計每碗蚵仔麵線應該有 20 顆蚵仔。現今抽查 35 碗蚵仔麵線平均每碗$\bar{x}$有 19.10 顆蚵仔，標準(偏)差 S 為 4.50 顆。試利用 p 值檢定法驗證該餐廳販售蚵仔麵線是否有符合標準食譜的規劃？是否有欺騙消費者之嫌？設定犯型一錯誤(Type I error)機率 $\alpha = 0.05$，繪製操作特徵曲線、作業特性曲線(operating characteristic curve, OCC)和檢(定)力曲線(power curve, PC)。

題解：樣本平均值$\bar{x}^*$ = 19.10 顆，樣本標準(偏)差 S = 4.50 顆，母體平均值的假設值 μ_0 = 20 顆，母體標準(偏)差 σ 未知時，利用樣本標準(偏)差 S 代替。本範例是以檢出樣本數值是否低於某特定數值，故此例屬於左尾檢定(a left-tailed test)。

A.設定顯著水準 $\alpha = 0.05$。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu \geq 20$ 顆。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu < 20$ 顆。

D.計算機率 p 值

機率 $p = P(\bar{x} \leq \bar{x}^*) = P(Z \leq z^*) = P(Z \leq \frac{\bar{x}^*-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}) = P(Z \leq \frac{19.10-20}{\frac{4.50}{\sqrt{35}}}) = P(Z \leq \frac{-0.9}{0.7606}) = P(Z \leq -1.1833) = 0.1183$(使用 Excel 軟體 NORM.S.DIST 函數查詢獲得)

E.機率 $p = 0.1183$ > 顯著水準 $\alpha = 0.05$，接受虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu \geq 20$ 顆，推論(結論)每碗蚵仔麵線符合標準食譜中含有 20 顆蚵仔的規劃，沒有欺騙消費者之嫌。

從上述範例中，判斷接受虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu \geq 20$ 顆，若對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu < 20$ 顆為真實，發生型二錯誤，其機率為 β。設定犯型一錯誤(Type I error)機率 $\alpha = 0.05$，進行繪製操作特徵曲線和檢(定)力曲線。繪製操作特徵曲線和檢(定)力曲線是協助判斷在各種情況下，犯型二錯誤(Type II error)機率 β 之一種量化方式。

臨界值(Critical value) $\bar{x}^* = \mu_0 - z_\alpha \times \sigma_{\bar{x}} = \mu_0 - z_\alpha \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 20 - 1.6449 \times \frac{4.5}{\sqrt{35}} = 20 - 1.2512 = 18.7488$ 顆

若檢定統計值$\bar{x} \geq$ 臨界值$\bar{x}^*$ = 18.7488 顆，接受虛無假設(null hypothesis) $\boldsymbol{H_0}$: $\mu \geq 20$ 顆。

若檢定統計值$\bar{x}$ < 臨界值$\bar{x}^*$ = 18.7488 顆，拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu \geq 20$ 顆，**接受**對立假設(alternative hypothesis) $\boldsymbol{H_1}$: $\mu < 20$ 顆。

在左尾檢定時，欲繪製操作特徵曲線、作業特性曲線(operating characteristic curve, OCC)和檢(定)力曲線(power curve, PC)，先計算發生型二錯誤(Type II error)機率 β，因其，判斷接受虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu \geq 20$ 顆，但是對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu < 20$ 顆為真實。估算機率 β 時，在對立假設 H_1: $\mu < 20$ 的條件中，一一估算 β 值。

假設母體平均值 μ_0 = 19.99 顆[對立假設(alternative hypothesis) $\boldsymbol{H_1}$: $\mu < 20$ 顆為真實情況]，型二錯誤(Type II error)機率 β 是在接受虛無假設(null hypothesis) $\boldsymbol{H_0}$: $\mu \geq 20$ 顆機率。在左尾檢定時，應計算臨界值右側機率，即是型二錯誤(Type II error)機率 β。

$\beta = p = P(\bar{x} \geq \bar{x}^*) = P(Z \geq z^*) = P(Z \geq \frac{\bar{x}^*-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}) = P(Z \geq \frac{18.7488-19.99}{\frac{4.5}{\sqrt{35}}}) = P(Z \geq \frac{-1.2412}{0.7606}) = P(Z \geq -1.6318) = 1 - P(Z \leq -1.6318) = 1 - 0.0514$(使用 Excel 軟體 NORM.S.DIST 函數查詢獲得) = 0.9486

假設母體平均值 μ_0 = 19.90 顆，型二錯誤(Type II error)機率 $\beta = p = P(\bar{x} \geq \bar{x}^*) = P(Z \geq z^*) = P(Z \geq \frac{\bar{x}^*-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}) = P(Z \geq \frac{18.7488-19.90}{\frac{4.5}{\sqrt{35}}}) = P(Z \geq \frac{-1.1512}{0.7606}) = P(Z \geq -1.5134) = 1 - P(Z \leq -1.5134) = 1 - 0.0651$(使用 Excel 軟體 NORM.S.DIST 函數查詢獲得) = 0.9349

假設母體平均值 μ_0 = 19.10 顆，型二錯誤(Type II error)機率 $\beta = p = P(\bar{x} \geq \bar{x}^*) = P(Z \geq z^*) = P(Z \geq \frac{\bar{x}^*-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}) = P(Z \geq \frac{18.7488-19.10}{\frac{4.5}{\sqrt{35}}}) = P(Z \geq \frac{-0.3512}{0.7606}) = P(Z \geq -0.4617) = 1 - P(Z \leq -0.4617) = 1 - 0.3222$(使用 Excel 軟體 NORM.S.DIST 函數查詢獲得) = 0.6778

假設母體平均值 μ_0 = 19.00 顆，型二錯誤(Type II error)機率 $\beta = p = P(\bar{x} \geq \bar{x}^*) = P(Z \geq z^*) = P(Z \geq \frac{\bar{x}^*-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}) = P(Z \geq \frac{18.7488-19.00}{\frac{4.5}{\sqrt{35}}}) = P(Z \geq \frac{-0.2512}{0.7606}) = P(Z \geq -0.3302) = 1 - P(Z \leq -0.3302) = 1 - 0.3706$(使用 Excel 軟體 NORM.S.DIST 函數查詢獲得) = 0.6294

假設母體平均值 μ_0 = 18.00 顆，型二錯誤(Type II error)機率 $\beta = p = P(\bar{x} \geq \bar{x}^*) = P(Z \geq z^*) = P(Z \geq \frac{\bar{x}^*-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}) = P(Z \geq \frac{18.7488-18.00}{\frac{4.5}{\sqrt{35}}}) = P(Z \geq \frac{0.7488}{0.7606}) = P(Z \geq 0.9845) = 1 - P(Z \leq -0.9845) = 1 - 0.8376$(使用 Excel 軟體 NORM.S.DIST 函數查詢獲得) = 0.1624

假設母體平均值 μ_0 = 17.00 顆，型二錯誤(Type II error)機率 $\beta = p = P(\bar{x} \geq \bar{x}^*) = P(Z \geq z^*) = P(Z \geq \frac{\bar{x}^*-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}) = P(Z \geq \frac{18.7488-17.00}{\frac{4.5}{\sqrt{35}}}) = P(Z \geq \frac{1.7488}{0.7606}) = P(Z \geq 2.2992) = 1 - P(Z \leq -2.2992) = 1 - 0.9893$(使用 Excel 軟體 NORM.S.DIST 函數查詢獲得) = 0.0107

μ_0 值	Z 值	β	$1-\beta$
17.0000	2.2992	0.0107	0.9893
17.5000	1.6418	0.0503	0.9497
18.0000	0.9845	0.1624	0.8376
18.5000	0.3271	0.3718	0.6282
19.0000	-0.3302	0.6294	0.3706
19.1000	-0.4617	0.6778	0.3222
19.3000	-0.7246	0.7657	0.2343
19.5000	-0.9876	0.8383	0.1617
19.7000	-1.2505	0.8944	0.1056
19.9000	-1.5134	0.9349	0.0651
19.9900	-1.6318	0.9486	0.0514
19.9990	-1.6436	0.9499	0.0501
19.9999	-1.6448	0.9500	0.0500

若利用各種真實的 μ 值與型二錯誤(Type II error)發生機率 β 製作對應曲線圖，稱為操作特徵曲線。會發現在**操作特性曲線**欲靠近原先的驗證值 μ_0，發生型二錯誤(Type II error)機率愈高。

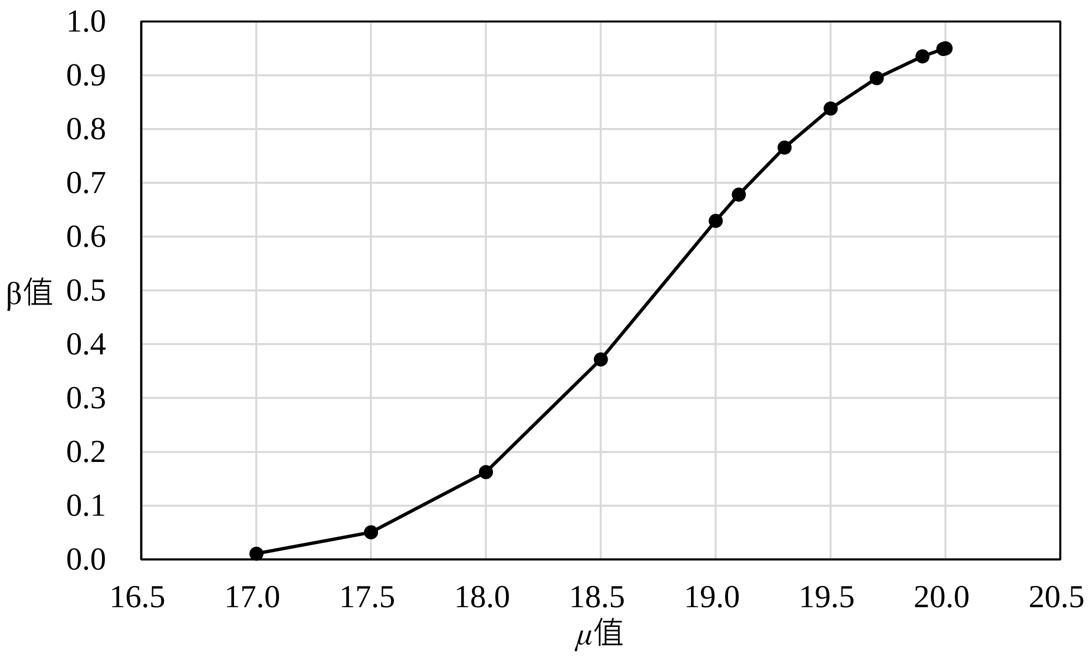


圖　操作特性曲線(operating characteristics curve)

若利用各種真實的 μ 值與檢(定)力(power of the test) $1-\beta$ 製作對應曲線圖，稱為檢(定)力曲線(power curve, PC)。檢(定)力(power of the test) $1-\beta$ 可以視為正確拒絕虛無假設 H_0，接受對立假設 H_1 機率。

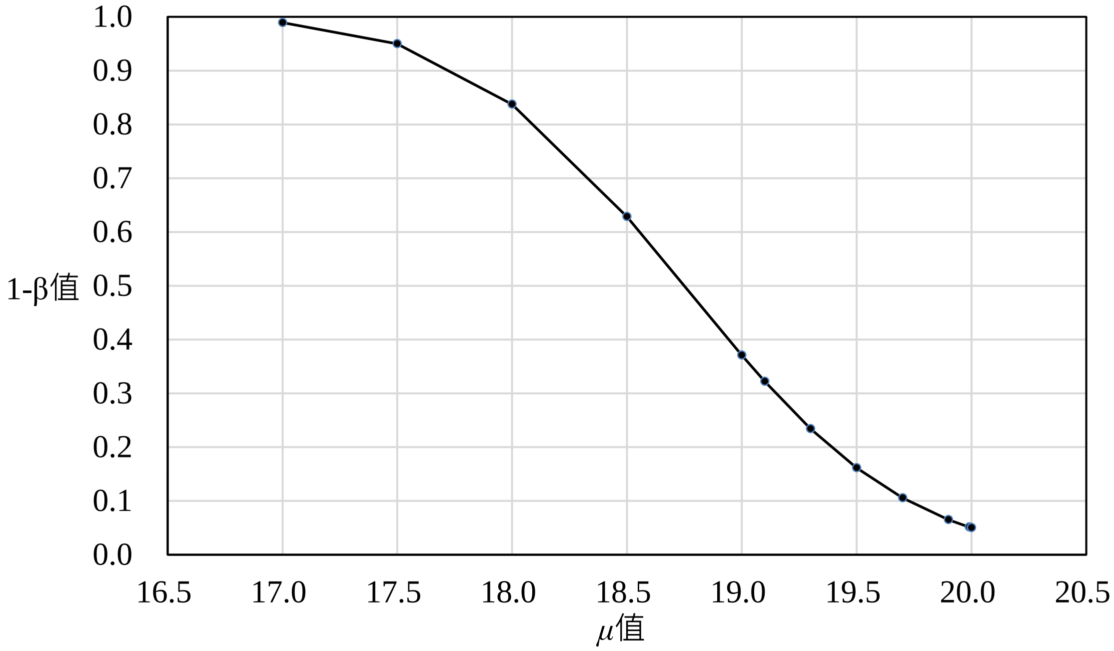


圖　檢(定)力曲線(Power curve)

範例 9.22　永安餐廳販售清蒸鱸魚一盤設定售價 NT$ 300 元，餐廳規劃標準食譜(standard recipe)時，設計每盤清蒸鱸魚中有一尾鱸魚，鱸魚購買時設定重量(As-purchased weight, AP) μ = 600 公克。供貨廠商進貨時，有品管人員抽樣驗證鱸魚是否有達到 AP μ = 600 公克的驗收標準。今天供貨廠商送貨，經品管人員抽驗 50 尾鱸魚，其平均重 $\bar{x}$ = 595 公克，標準(偏)差 S = 50 公克。試利用臨界值檢定法，驗證此批鱸魚是否達到驗收標準？設定犯型一錯誤(Type I error)機率 $\alpha = 0.05$，繪製操作特徵曲線和檢(定)力曲線。

題解：樣本數量 n = 50，樣本平均值 $\bar{x}$ = 595 公克，樣本標準(偏)差 S = 50 公克，母體平均值的假設值 μ_0 = 600 公克。母體標準(偏)差 σ 未知時，利用樣本標準(偏)差 S 代替。本範例是以檢出樣本數值是否達到某特定數值，故此例屬於雙尾檢定(two-tailed test)。

A.設定顯著水準 $\alpha = 0.05$，$z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{\frac{0.05}{2}} = z_{0.025} = 1.9600$(使用 Excel 軟體 NORM.S.INV 函數查詢獲得)。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: μ = 600 公克。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu \neq 600$ 公克。

D.計算臨界值

左側臨界值 $\bar{x}_L^* = \mu_0 - z_{\frac{\alpha}{2}} \times \sigma_{\bar{x}} = \mu_0 - z_{\frac{\alpha}{2}} \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 600 - 1.9600 \times \frac{50}{\sqrt{50}} = 600 - 13.8590 = 586.1410$ 公克

右側臨界值 $\bar{x}_H^* = \mu_0 + z_{\frac{\alpha}{2}} \times \sigma_{\bar{x}} = \mu_0 + z_{\frac{\alpha}{2}} \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 600 + 1.9600 \times \frac{50}{\sqrt{50}} = 600 + 13.8590 = 613.8590$ 公克

E.因左側臨界值 $\bar{x}_L^* = 586.1410$ 公克 $<$ $\bar{x} = 595$ 公克 $<$ 右側臨界值 $\bar{x}_H^* = 613.8590$ 公克，接受虛無假設(null hypothesis) H_0: μ = 600 公克。接受虛無假設(null hypothesis) H_0: μ = 600 公克，顯示供貨廠商提供的鱸魚有符合標準食譜的設計，可以通過品管人員驗收送進廚房，以廚房後場進行備餐之用。

因此，驗證結果接受虛無假設時，餐廳可以接受此批鱸魚。

在雙尾檢定時，欲繪製操作特徵曲線、作業特性曲線(operating characteristic curve, OCC)和檢(定)力曲線(power curve, PC)，先計算發生型二錯誤(Type II error)機率 β，因其，判斷接受虛無假設(null hypothesis)

H_0: μ = 600 公克，但是對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu \neq 600$ 公克為真實。估算機率 β 時，在對立假設 H_1: $\mu \neq 600$ 公克的條件中，一一估算 β 值。

假設母體平均值 μ_0 = 601 公克[對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu \neq 600$ 公克為真實情況]，型二錯誤(Type II error)機率 β 是在接受虛無假設(null hypothesis) H_0: μ = 600 公克機率。在雙尾檢定時，若真實的母體平均值 μ 大於預設值 600 公克，應計算高臨界值(high critical value)左側機率，並減去低臨界值(low critical value)左側機率，即是型二錯誤(Type II error)機率 β。

$\beta = p = P(\bar{x} \le \bar{x}_H^*) - P(\bar{x} \le \bar{x}_L^*) = P(Z \le z_H^*) - P(Z \le z_L^*) = P(Z \le \frac{\bar{x}_H^* - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}) - P(Z \le \frac{\bar{x}_L^* - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}) = P(Z \le \frac{613.8590-601}{\frac{50}{\sqrt{50}}}) - P(Z \le \frac{586.1410-601}{\frac{50}{\sqrt{50}}}) = P(Z \le \frac{12.8590}{7.0711}) - P(Z \le \frac{-14.8590}{7.0711}) = P(Z \le 1.8185) - P(Z \le -2.1014) = 0.9655 - 0.0178$(使用 Excel 軟體 NORM.S.DIST 函數查詢獲得) = 0.9477

M_0 值	β	$1-\beta$
601	0.9477	0.0523
603	0.9291	0.0709
605	0.8910	0.1090
608	0.7953	0.2047
610	0.7070	0.2930
612	0.6036	0.3964
615	0.4359	0.5641
618	0.2791	0.7209
620	0.1926	0.8074
622	0.1248	0.8752
625	0.0576	0.9424
628	0.0228	0.9772
630	0.0112	0.9888
632	0.0052	0.9948
635	0.0014	0.9986
638	0.0003	0.9997
640	0.0001	0.9999

假設母體平均值 μ_0 = 599 公克[對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu \neq 600$ 公克為真實情況]，型二錯誤(Type II error)機率 β 是在接受虛無假設(null hypothesis) H_0: μ = 600 公克機率。在雙尾檢定時，若真實的母體平均值 μ 小於預設值 600 公克，應計算低臨界值(low critical value)右側機率，並減去高臨界值(high critical value)右側機率，即是型二錯誤(Type II error)機率 β。

$\beta = p = P(\bar{x} \ge \bar{x}_L^*) - P(\bar{x} \ge \bar{x}_H^*) = P(Z \ge z_L^*) - P(Z \ge z_H^*) = P(Z \ge \frac{\bar{x}_L^* - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}) - P(Z \ge \frac{\bar{x}_H^* - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}) = P(Z \ge \frac{586.1410-599}{\frac{50}{\sqrt{50}}}) - P(Z \ge \frac{613.8590-599}{\frac{50}{\sqrt{50}}}) = P(Z \ge \frac{-12.8590}{7.0711}) - P(Z \ge \frac{14.8590}{7.0711}) = P(Z \ge -1.8185) - P(Z \ge 2.1014) = [1 - P(Z \le -1.8185)] - [1 - P(Z \le -2.1014)] = [(1 - 0.0345) - (1 - 0.9822)] = 0.9655 - 0.0178 = 0.9477$

μ_0 值	β	$1-\beta$
599	0.9477	0.0523
597	0.9291	0.0709
595	0.8910	0.1090
592	0.7953	0.2047
590	0.7070	0.2930
588	0.6036	0.3964
585	0.4359	0.5641
582	0.2791	0.7209
580	0.1926	0.8074
578	0.1248	0.8752
575	0.0576	0.9424
573	0.0316	0.9684

μ_0 值	β	$1-\beta$
570	0.0112	0.9888
568	0.0052	0.9948
565	0.0014	0.9986
563	0.0005	0.9995
560	0.0001	0.9999

在雙尾檢定的模式中，型二錯誤機率 β 一定是左右對稱，此特性可以當成運算正確性的驗證方式之一。當然，檢定力機率 $1-\beta$ 也一定是左右對稱。

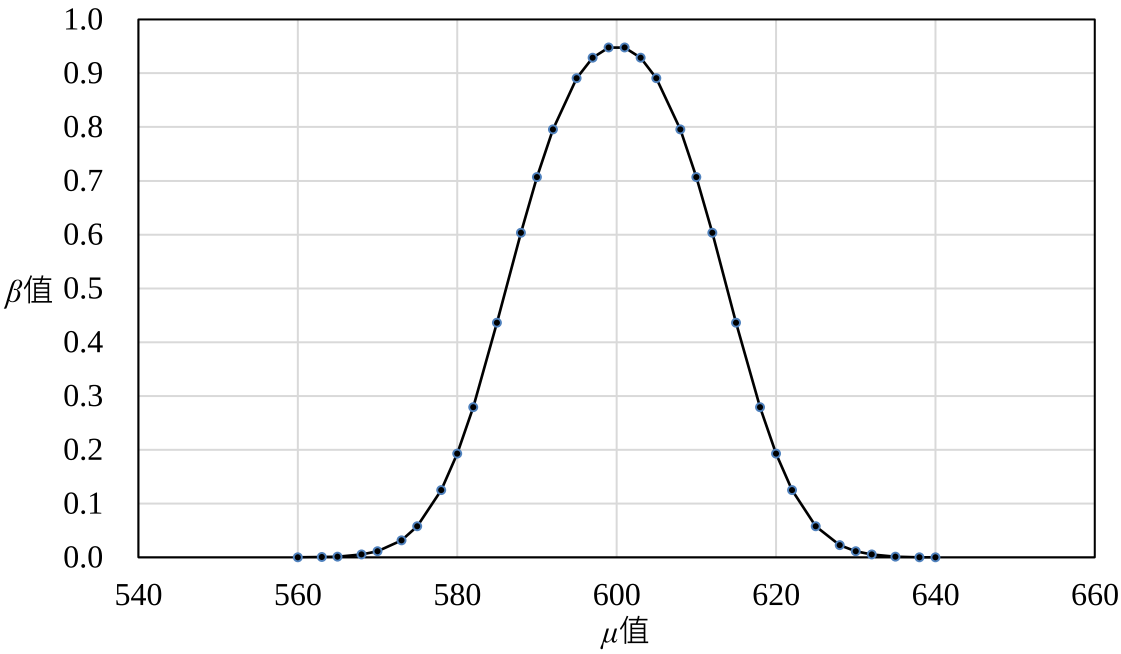


圖　操作特性曲線(operating characteristics curve)

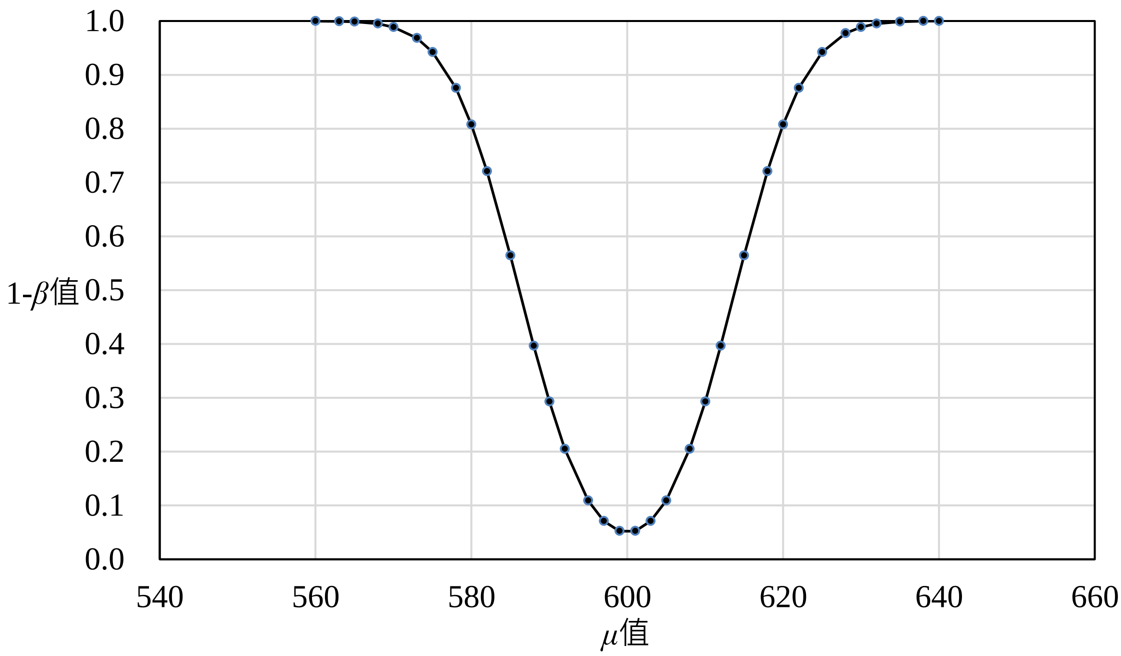


圖　檢(定)力曲線(Power curve)

練習 9.33　彌陀餐廳販售清蒸鱸魚一盤設定售價 NT$ 300 元，餐廳規劃標準食譜(standard recipe)時，設計每盤清蒸鱸魚中有一尾鱸魚，鱸魚購買時設定重量(As-purchased weight, AP) μ = 600 公克。供貨廠商進貨時，有品管人員抽樣驗證鱸魚是否有達到 AP μ = 600 公克的驗收標準。今天供貨廠

商送貨，經品管人員抽驗 50 尾鱸魚，其平均重$\bar{x}$ = 593 公克，標準(偏)差 S = 35 公克。試利用臨界值檢定法，驗證此批鱸魚是否達到驗收標準？設定犯型一錯誤(Type I error)機率 $\alpha = 0.01$，繪製操作特徵曲線、作業特性曲線(operating characteristic curve, OCC)和檢(定)力曲線(power curve, PC)。

範例 9.23 在下列假設檢定中，屬於左尾檢定

虛無假設(null hypothesis) $H_0: \mu \geq 10$；對立假設(alternative hypothesis) $H_1: \mu < 10$。

樣本數 n = 120，母體標準(偏)差 σ = 5，顯著水準 α = 0.05(機率答案有效位數四捨五入取到小數點後第 4 位)。

a.當母體平均值 $\mu = 9$，依據樣本平均值$\bar{x}$推論不拒絕虛無假設 $H_0: \mu \geq 10$ 機率？

b.若母體平均值 $\mu = 9$，依據樣本平均值$\bar{x}$推論接受虛無假設 $H_0: \mu \geq 10$，犯了何種錯誤？

c.若母體平均值 $\mu = 8$，犯型二錯誤(Type II error)機率？

題解：樣本數量 n = 120，母體標準(偏)差 σ = 5，母體平均值的假設值 μ_0 = 10。本範例是屬於左尾檢定(a left-tailed test)。

A.設定顯著水準 $\alpha = 0.05$。

B.虛無假設(null hypothesis) $H_0: \mu \geq 10$。

C.對立假設(alternative hypothesis) $H_1: \mu < 10$。

D.計算臨界值(Compute critical value)：臨界值$\bar{x}^* = \mu_0 - z_\alpha \times \sigma_{\bar{x}} = \mu_0 - z_\alpha \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 10 - 1.6449 \times \frac{5}{\sqrt{120}} = 10 - 0.7508 = 9.2492$。

若樣本平均值$\bar{x}$ ≥ 臨界值$\bar{x}^*$ = 9.2492，**接受**虛無假設(null hypothesis) $\boldsymbol{H_0}: \mu \geq 10$。

若樣本平均值$\bar{x}$ < 臨界值$\bar{x}^*$ = 9.2492，拒絕虛無假設(null hypothesis) $H_0: \mu \geq 10$，**接受**對立假設(alternative hypothesis) $\boldsymbol{H_1}: \mu < 10$。

a.在母體平均值 $\mu = 9$，即對立假設【$H_1: \mu < 10$】為真，不拒絕虛無假設 $H_0: \mu \geq 10$ 機率，即是陳述違犯型二錯誤，在左尾檢定中，即要運算樣本平均值$\bar{x}$ ≥ 臨界值$\bar{x}^*$機率，就是 $P(\bar{x} \geq \bar{x}^*)$。

$p = P(\bar{x} \geq \bar{x}^*) = P(Z \geq z^*) = P(Z \geq \frac{\bar{x}^* - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}) = P(Z \geq \frac{9.2492-9}{\frac{5}{\sqrt{120}}}) = P(Z \geq \frac{0.2492}{0.4564}) = P(Z \geq 0.5460) = 1 - P(Z \leq 0.5460)$

= 1 – 0.7075(使用 Excel 軟體 NORM.S.DIST 函數查詢獲得) = 0.2925

b.當母體平均值 $\mu = 9$，而推論接受虛無假設 $H_0: \mu \geq 10$。就是對立假設為真，假設檢定過程推論接受虛無假設，屬於推論錯誤的狀況，就是典型的型二錯誤(Type II error)。

c.母體平均值 $\mu = 8$，犯型二錯誤(Type II error)機率？違犯型二錯誤的情況就是對立假設為真，假設檢定推論接受虛無假設，即要運算樣本平均值$\bar{x}$ ≥ 臨界值$\bar{x}^*$機率，就是 $P(\bar{x} \geq \bar{x}^*)$。

$p = P(\bar{x} \geq \bar{x}^*) = P(Z \geq z^*) = P(Z \geq \frac{\bar{x}^* - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}) = P(Z \geq \frac{9.2492-8}{\frac{5}{\sqrt{120}}}) = P(Z \geq \frac{1.2492}{0.4564}) = P(Z \geq 2.7369) = 1 - P(Z \leq 2.7369)$

= 1 – 0.9969(使用 Excel 軟體 NORM.S.DIST 函數查詢獲得) = 0.0031

答案：(a)0.2925；(b)型二錯誤；(c)0.0031

練習 9.34 奇遇餐廳原本每週平均盈餘為 NT $58000 元，執行粉紅佳人(Pink lady)行銷活動，女性顧客只要在星期一到四晚上穿粉紅色衣服到餐廳用餐時，給予六折優惠，希望吸引顧客的上門，以提升經營績效，增加盈餘。在執行 32 週後，其每週盈餘如下表所示。試使用 p 值檢定法評估粉紅佳人(Pink lady)行銷活動提升經營績效，增加盈餘？設定犯型一錯誤(Type I error)機率 α = 0.05，繪製操作特徵曲線和檢(定)力曲線。

56000	56000	59860	58000	59000	60050

53000	56800	58000	56700	58690	62000
55000	65000	57620	58600	56400	57800
58000	62500	52000	58620	58600	59060
62000	63250	62000	58620		
65000	61050	58000	59600		

題解：樣本數量 n = 32，屬於樣本數量較多者，樣本平均值$\bar{x}$ = NT\$58838.13 元，樣本標準(偏)差 S = NT\$ 2999.0401 元，μ_0 = NT\$58000 元。希望以超過原先的盈餘為目的，故本範例屬於右尾檢定(a right-tailed test)。

A.設定顯著水準 $\alpha = 0.05$。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu \le 58000$ 元。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu > 58000$ 元。

D.計算檢定統計值：p 值

檢定統計值 $p = P(\bar{x} \ge \bar{x}^*) = P(Z \ge z^*) = P(Z \ge \frac{\bar{x}^* - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}) = P(Z \ge \frac{58838.13 - 58000}{\frac{2999.0401}{\sqrt{32}}}) = P(Z \ge \frac{838.13}{530.1604}) = P(Z \ge 1.5809)$

$= 1 - P(Z \le 1.5809) = 1 - 0.9430$(使用 Excel 軟體 NORM.S.DIST 函數查詢獲得) = 0.0570

E.檢定統計值 p = 0.0570 > 顯著水準 α = 0.05，接受虛無假設 H_0: $\mu \le 58000$ 元。因此，執行粉紅佳人(Pink lady)行銷活動，沒有顯著的增加盈餘。應考慮是否繼續執行。

此題目判斷接受虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu \le 58000$ 元，若對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu >$ 58000 元為真實，發生型二錯誤(Type II error)，其機率為 β。設定犯型一錯誤(Type I error)機率 α = 0.05，進行繪製操作特徵曲線(operating characteristic curve, OCC)和檢(定)力曲線(power curve, PC)。

臨界值$\bar{x}^* = \mu_0 + z_\alpha \times \sigma_{\bar{x}} = \mu_0 + z_\alpha \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 58000 + 1.6449 \times \frac{2999.0401}{\sqrt{32}} = 58000 + 872.0608 = 58872.0608$ 元

若檢定統計值$\bar{x} \le$ 臨界值$\bar{x}^*$ = 58872.0608 元，**接受**虛無假設(null hypothesis) $\boldsymbol{H_0}$: $\mu \le 58000$ 元。

若檢定統計值$\bar{x} >$ 臨界值$\bar{x}^*$ = 58872.0608 元，拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu \le 58000$ 元，**接受**對立假設(alternative hypothesis) $\boldsymbol{H_1}$: $\mu > 58000$ 元。

假設母體平均值 μ_0 = 58001 元(對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu > 58000$ 元為真實情況)，型二錯誤(Type II error)機率 β 是在接受虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu \le 58000$ 元機率。在右尾檢定時，應計算臨界值左側機率，即是型二錯誤機率 β。

$\beta = p = P(\bar{x} \le \bar{x}^*) = P(Z \le z^*) = P(Z \le \frac{\bar{x}^* - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}) = P(Z \le \frac{58872.0608 - 58001}{\frac{2999.0401}{\sqrt{32}}}) = P(Z \le \frac{871.0608}{530.1604}) = P(Z \le 1.6430) =$ 0.9498(使用 Excel 軟體 NORM.S.DIST 函數查詢獲得)

μ_0 值	Z 值	β	$1-\beta$
58001	1.6430	0.9498	0.0502
58100	1.4563	0.9273	0.0727
58200	1.2677	0.8975	0.1025
58300	1.0790	0.8597	0.1403
58400	0.8904	0.8134	0.1866
58500	0.7018	0.7586	0.2414
58600	0.5132	0.6961	0.3039
58700	0.3245	0.6272	0.3728
58800	0.1359	0.5541	0.4459
58900	-0.0527	0.4790	0.5210
59000	-0.2413	0.4047	0.5953
59200	-0.6186	0.2681	0.7319
59400	-0.9958	0.1597	0.8403
59600	-1.3731	0.0849	0.9151

μ_0 值	Z 值	β	$1-\beta$
59800	-1.7503	0.0400	0.9600
60000	-2.1275	0.0167	0.9833
60200	-2.5048	0.0061	0.9939

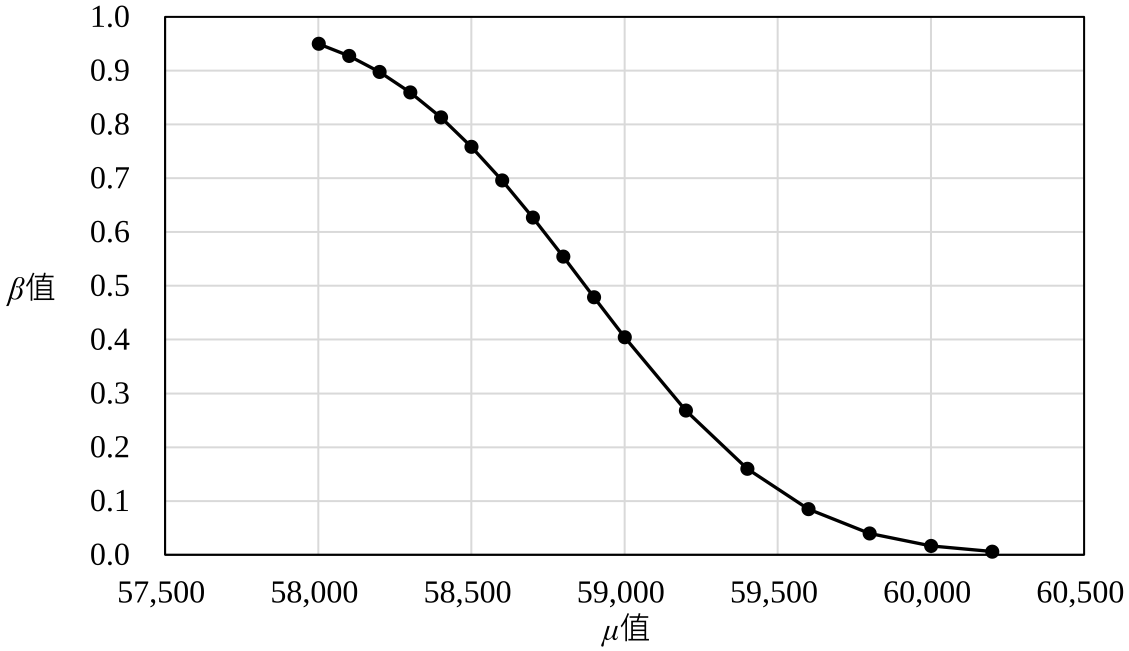


圖　操作特性曲線(operating characteristics curve)

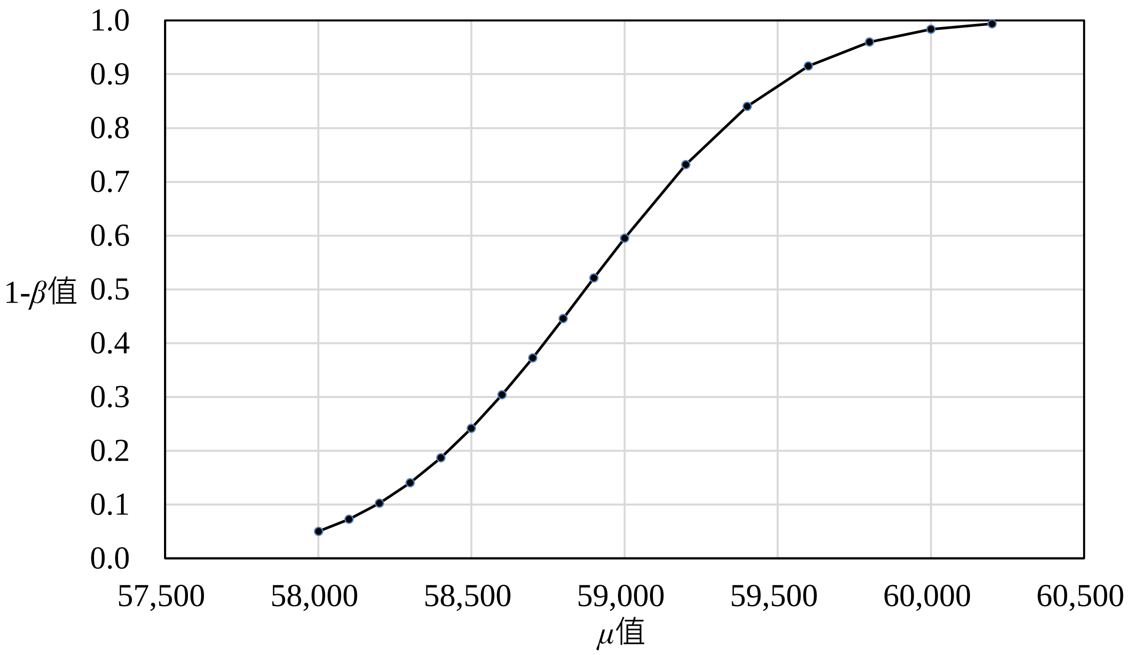


圖　檢(定)力曲線(Power curve)

練習 9.35　奇遇餐廳設定好服務的標準時間，當客人點餐後必須在 8 分鐘之內開始上菜，若超過 8 分鐘尚未上菜時，會造成顧客等待時間過久，導致產生不滿，恐會將該餐廳列為拒絕往來戶。今隨機抽取 35 組顧客，計算在點餐後到第一道菜送餐的時間，樣本標準(偏)差為 3 分鐘，在顯著水準 $\alpha = 0.01$ 下，檢定虛無假設 H_0: $\mu \le 8$。

a.若實際上菜的平均時間為 9 分鐘時，犯型二錯誤(Type II error)機率？

b.若實際上菜的平均時間為 9.5 分鐘時，犯型二錯誤(Type II error)機率？

c.請繪製操作特徵曲線(operating characteristic curve, OCC)和檢(定)力曲線(power cure, PC)。

題解：樣本數量 n = 35，樣本標準(偏)差 S = 3 分鐘，母體平均值假設值 μ_0 = 8 分鐘。本範例是屬於右尾檢定(a right-tailed test)。

A.設定顯著水準 α = 0.01。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu \le 8$ 分鐘。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu > 8$ 分鐘。

D.計算臨界值：樣本平均值臨界值$\bar{x}^* = \mu_0 + z_\alpha \times \sigma_{\bar{x}} = \mu_0 + z_\alpha \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 8 + 2.3264 \times \frac{3}{\sqrt{35}} = 8 + 1.1797 = 9.1797$ 分鐘

若樣本平均值$\bar{x}$ ≤ 樣本平均值臨界值$\bar{x}^*$= 9.1797 分鐘，**接受**虛無假設(null hypothesis) $\boldsymbol{H_0}$: $\mu \le 8$ 分鐘。

若樣本平均值$\bar{x}$ > 樣本平均值臨界值$\bar{x}^*$= 9.1797 分鐘，拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu \le 8$ 分鐘，**接受**對立假設(alternative hypothesis) $\boldsymbol{H_1}$: $\mu > 8$ 分鐘。

a.母體平均值 μ_0 = 9.0 分鐘

犯型二錯誤(Type II error)機率 $p = P(\bar{x} \le \bar{x}^*) = P(Z \le z^*) = P(Z \le \frac{\bar{x}^* - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}) = P(Z \le \frac{9.1797-9}{\frac{3}{\sqrt{35}}}) = P(Z \le \frac{0.1797}{0.5071}) = P(Z \le 0.3544) = 0.6385$(使用 Excel 軟體 NORM.S.DIST 函數查詢獲得)

b. 母體平均值 μ_0 = 9.5 分鐘

犯型二錯誤(Type II error)機率 $p = P(\bar{x} \le \bar{x}^*) = P(Z \le z^*) = P(Z \le \frac{\bar{x}^* - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}) = P(Z \le \frac{9.1797-9.5}{\frac{3}{\sqrt{35}}}) = P(Z \le \frac{-0.3203}{0.5071}) = P(Z \le -0.6316) = 0.2638$(使用 Excel 軟體 NORM.S.DIST 函數查詢獲得)

答案：(a)0.6385；(b)0.2638

範例 9.24 奇遇餐廳原本顧客群以男性居多高達 q_0 = 0.70，女性只有 p_0 = 0.30，為了提高女性顧客上門的比率，執行粉紅佳人(Pink lady)行銷活動，女性顧客只要穿粉紅色衣服到餐廳用餐時，給予六折優惠，希望吸引女性顧客的上門。在執行一個星期後，觀察計算 400 名顧客，其性別的分布為女性$\bar{p}$ = 0.33。試評估粉紅佳人(Pink lady)行銷活動是否有提昇(α = 0.05)女性顧客上門的比率？製作操作特徵曲線和檢(定)力曲線。

題解：樣本數量 n = 400，屬於樣本數量較多者 $n \times p > 5$ 及 $n \times q > 5$，q_0 = 0.70，p_0 = 0.30，樣本比例$\bar{p}$ = 0.33。希望以超過原先的比例為目的，故本範例屬於右尾檢定(a right-tailed test)。

A.設定顯著水準 α = 0.05，臨界值 $z^* = z_\alpha = z_{0.05}$ = 1.6449(使用 Excel 軟體 NORM.S.INV 函數查詢獲得)。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: $p \le 0.30$。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: $p > 0.30$。

D.計算檢定統計值：標準化 z 值

檢定統計值 $z = \frac{\bar{p}-p_0}{\sigma_{\bar{p}}} = \frac{\bar{p}-p_0}{\sqrt{\frac{p_0 \times q_0}{n}}} = \frac{\bar{p}-p_0}{\sqrt{\frac{p_0 \times (1-p_0)}{n}}} = \frac{0.33-0.30}{\sqrt{\frac{0.30 \times (1-0.30)}{400}}} = \frac{0.03}{0.0229} = 1.3093$

檢定統計值 z = 1.3093 < 臨界值 $z_{0.05}$ = 1.6449

$P(Z \ge 1.3093) = 1 - P(Z \le 1.3093) = 1 - 0.9048$(使用 Excel 軟體 NORM.S.DIST 函數查詢獲得) = 0.0952

$P(Z \ge 1.3093) = 0.0952$ > 顯著水準 α = 0.05

E.接受虛無假設 H_0: $p \le 0.30$。

因此，執行粉紅佳人(Pink lady)行銷活動，沒有顯著的增加女性顧客上門的比率。應考慮是否繼續執行。

若以顯著水準 $\alpha = 0.05$，則：

$$P(\bar{p} \geq \bar{p}^*) = P(Z \geq \frac{\bar{p}^* - p_0}{\sigma_{\bar{p}}}) = P(Z \geq \frac{\bar{p}^* - p_0}{\sqrt{\frac{p_0 \times (1-p_0)}{n}}}) = 0.05$$

$$\frac{\bar{p}^* - p_0}{\sqrt{\frac{p_0 \times (1-p_0)}{n}}} = \frac{\bar{p}^* - 0.30}{\sqrt{\frac{0.30 \times (1-0.30)}{400}}} = \frac{\bar{p}^* - 0.30}{0.0229} = 1.6449$$

臨界值(critical value)$\bar{p}^* = 0.3377$

因此：

若檢定統計值$\bar{p} \leq$ 臨界值$\bar{p}^* = 0.3377$，接受虛無假設(null hypothesis) H_0: $p \leq 0.30$。

若檢定統計值$\bar{p} >$ 臨界值$\bar{p}^* = 0.3377$，接受對立假設(alternative hypothesis) H_1: $p > 0.30$。

從上述範例中，判斷接受虛無假設(null hypothesis) H_0: $p \leq 0.30$，若對立假設(alternative hypothesis) H_1: $p > 0.30$ 為真實，發生型二錯誤(Type II error)，其機率為 β。

假設 $p_0 = 0.3001$，型二錯誤(Type II error)機率 $\beta = p = P(\bar{p} \leq \bar{p}^*) = P(\bar{p} \leq 0.3377|p_0 = 0.3001) = P(\frac{\bar{p}-p_0}{\sigma_{\bar{p}}} \leq \frac{0.3377-0.3001}{\sqrt{\frac{0.3001 \times (1-0.3001)}{400}}}) = P(Z \leq \frac{0.0376}{0.0229}) = P(Z \leq 1.6408) = 0.9496$(使用 Excel 軟體 NORM.S.DIST 函數查詢獲得)

假設 $p_0 = 0.3010$，型二錯誤(Type II error)機率 $\beta = p = P(\bar{p} \leq \bar{p}^*) = P(\bar{p} \leq 0.3377|p_0 = 0.3010) = P(\frac{\bar{p}-p_0}{\sigma_{\bar{p}}} \leq \frac{0.3377-0.3010}{\sqrt{\frac{0.3010 \times (1-0.3010)}{400}}}) = P(Z \leq \frac{0.0367}{0.0229}) = P(Z \leq 1.6002) = 0.9452$(使用 Excel 軟體 NORM.S.DIST 函數查詢獲得)

p_0 值	z 值	β	$1-\beta$
0.3001	1.6408	0.9496	0.0504
0.3010	1.6002	0.9452	0.0548
0.3100	1.1979	0.8845	0.1155
0.3200	0.7589	0.7760	0.2240
0.3300	0.3275	0.6284	0.3716
0.3400	-0.0971	0.4613	0.5387
0.3500	-0.5158	0.3030	0.6970
0.3600	-0.9292	0.1764	0.8236
0.3700	-1.3380	0.0904	0.9096
0.3800	-1.7429	0.0407	0.9593
0.3900	-2.1445	0.0160	0.9840
0.4000	-2.5434	0.0055	0.9945
0.4100	-2.9400	0.0016	0.9984
0.4200	-3.3350	0.0004	0.9996
0.4300	-3.7287	0.0001	0.9999

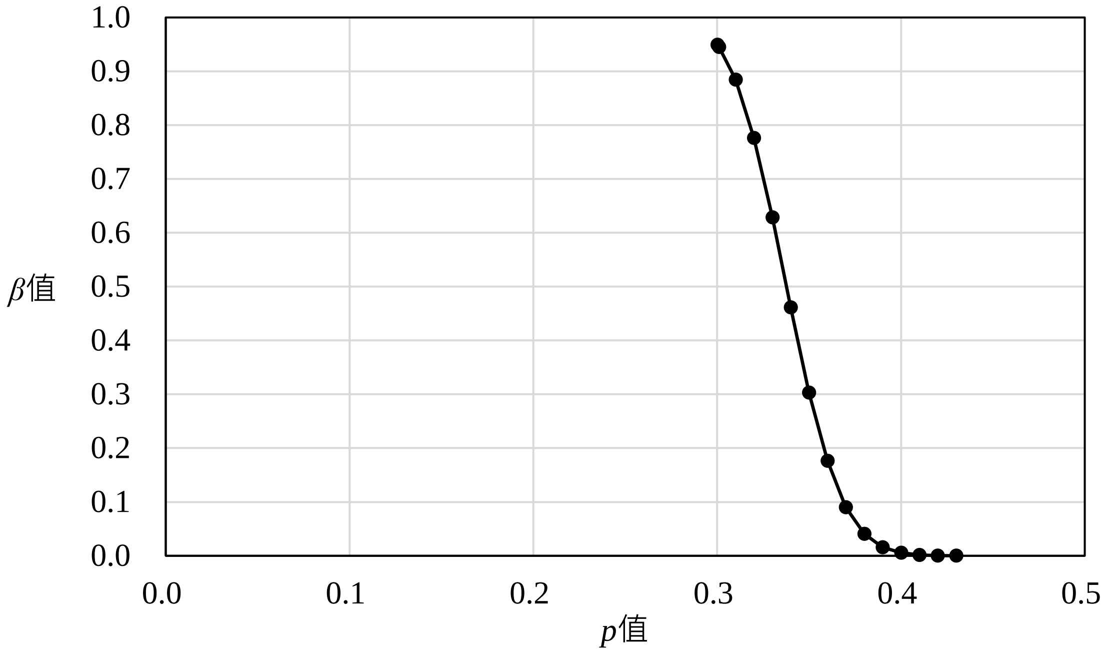


圖 操作特性曲線(operating characteristics curve)

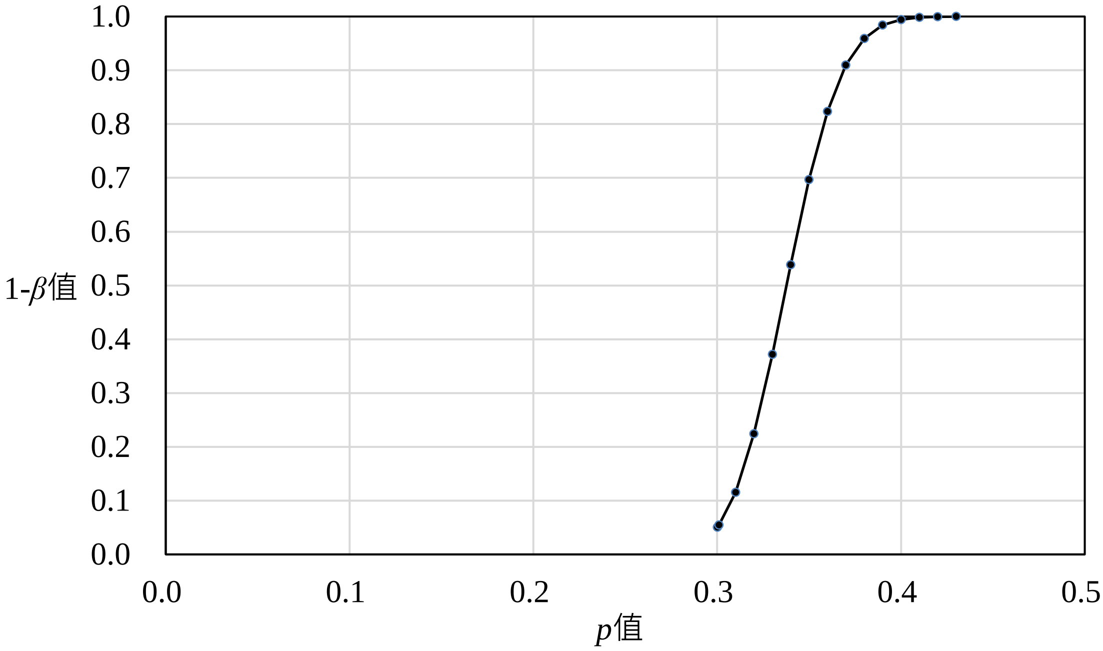


圖 檢(定)力曲線(Power curve)

練習 9.36 欲檢定虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu \le 58000$，對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu > 58000$，若在顯著水準 $\alpha = 0.05$，臨界值(critical value)為 60000，試計算(A)若母體平均值 $\mu = 59000$ 時，會發生型一錯誤(Type I error)機率？(B)若母體平均值 $\mu = 57000$ 時，會發生型二錯誤(Type II error)機率？

題解：(A)依據母體平均值 $\mu = 59000$ 時，對立假設 H_1: $\mu > 58000$ 為真，不會發生型一錯誤，因此發生型一錯誤(Type I error)機率 0.0000；(B)依據母體平均值 $\mu = 57000$ 時，虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu \le 58000$ 為真，不會發生型二錯誤(Type II error)，因此發生型二錯誤(Type II error)機率 0.0000。

練習 9.37 欲檢定虛無假設(null hypothesis) H_0: $p \le 0.75$，對立假設(alternative hypothesis) H_1: $p > 0.75$，若臨界值為 0.79，在顯著水準 $\alpha = 0.05$，試計算若真實母體比率 $p = 0.77$ 時，在樣本數量 n 為 120，會發生型二錯誤(Type II error)機率？(機率答案有效位數四捨五入取到小數點後第 4 位)

題解：本範例屬於右尾檢定。欲計算型二錯誤機率就是計算會推論接受虛無假設機率，在右尾檢定的情況下，就是要計算樣本比例低於樣本比例臨界值($\bar{p}^*$)機率。

型二錯誤(Type II error)機率 $\beta = P$(接受 $H_0|H_1$ 為真) $= p = P(\bar{p} \le \bar{p}^*) = P(\bar{p} \le 0.79|p_0 = 0.77) = P(\frac{\bar{p}-p_0}{\sigma_{\bar{p}}} \le \frac{0.79-0.77}{\sqrt{\frac{0.77\times(1-0.77)}{120}}}) = P(Z \le \frac{0.02}{0.0384}) = P(Z \le 0.5206) = 0.6987$(使用 Excel 軟體 NORM.S.DIST 函數查詢獲得)。

答案：會發生型二錯誤(Type II error)機率 $\beta = 0.6987$

練習 9.38 假設有一常態分布 $N(\mu, \sigma^2 = 32)$，欲執行假設檢定虛無假設 H_0: $\mu \ge 25$ 與對立假設 H_1: $\mu < 25$，在顯著水準 $\alpha = 0.05$ 與樣本數量 $n = 30$。若實際的母體平均值 $\mu = 23$，請計算檢(定)力(power of the test)數值？

題解：顯著水準 $\alpha = 0.05$，$z_\alpha = z_{0.05} = 1.6449$(使用 Excel 軟體 NORM.S.INV 函數查詢獲得)。

虛無假設 H_0: $\mu \ge 25$ 與對立假設 H_1: $\mu < 25$ 判斷為左尾檢定，計算樣本平均值臨界值$\bar{x}^* = \mu_0 - z_\alpha \times \sigma_{\bar{x}} = \mu_0 - z_\alpha \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \mu_0 - z_\alpha \times \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} = 25 - 1.6449 \times \sqrt{\frac{32}{30}} = 25 - 1.6449 \times 1.0328 = 25 - 1.6988 = 23.3012$

型二錯誤(Type II error)機率 $\beta = P$(接受 $H_0|H_1$ 為真) $= p = P(\bar{x} \ge \bar{x}^*|\mu_0 = 23) = P(\bar{x} \ge 23.3012|\mu_0 = 23) = P(\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma_{\bar{x}}} \ge \frac{23.3012-23}{\sqrt{\frac{32}{30}}}) = P(Z \ge \frac{0.3012}{1.0328}) = P(Z \ge 0.2916) = 1 - P(Z \le 0.2916) = 1 - 0.6147$(使用 Excel 軟體 NORM.S.DIST 函數查詢獲得) $= 0.3853$

檢(定)力(power of the test)$1 - \beta = 1 - 0.3853 = 0.6147$

答案：檢(定)力(power of the test) $= 0.6147$

練習 9.39 深水大學觀光系學生畢業後，就業第一年每月薪水介於新台幣 30001 到 40000 元之間者比率有 0.50，今大學評鑑委員為檢定此敘述，設立虛無假設 H_0: $p = 0.50$；對立假設 H_1: $p \ne 0.50$。隨機抽取該系 20 位畢業生，若有 7 到 15 位畢業生第一年每月薪水介於上述範圍內，接受虛無假設，此外接受對立假設。(A)試估算型一錯誤(Type I error)機率；(B)在 $p = 0.65$ 時型二錯誤(Type II error)機率。

題解：就業第一年每月薪水介於新台幣 30001 到 40000 元之間者母體比率 p，以隨機變數 X 表示每月薪水介於上述範圍內的畢業生人數，其機率分布屬於二項分布

$$f(x) = \binom{n}{x} \times p^x \times q^{n-x} = \binom{20}{x} \times p^x \times (1-p)^{20-x}，x = 1, 2, 3, \ldots, 20$$

(A)型一錯誤(Type I error) $\alpha = P$(接受 $H_1|H_0$ 為真) $= P(7 \le X \le 15$ 以外的區域|虛無假設 H_0: $p = 0.50) = P(X < 7$ or $X > 15|\ p = 0.50) = \sum_{x=0}^{6}\binom{20}{x} \times 0.5^x \times 0.5^{20-x} + \sum_{x=16}^{20}\binom{20}{x} \times 0.5^x \times 0.5^{20-x} = 0.0577$(使用 Excel 軟體 BINOM.DIST 函數查詢獲得) $+0.0059 = 0.0636$

(B)型二錯誤(Type II error) $\beta = P$(接受 $H_0|H_1$ 為真) $= P(7 \le X \le 15|p = 0.65) = \sum_{x=7}^{15}\binom{20}{x} \times 0.65^x \times 0.35^{20-x} = \sum_{x=0}^{15}\binom{20}{x} \times 0.65^x \times 0.35^{20-x} - \sum_{x=6}^{15}\binom{20}{x} \times 0.65^x \times 0.35^{20-x} = 0.8818$(使用 Excel 軟體 BINOM.DIST 函數查詢獲得) $- 0.0015 = 0.8803$

答案：(A)型一錯誤(Type I error) $\alpha = 0.0636$；(B)型二錯誤(Type II error) $\beta = 0.8803$

練習 9.40 奇遇餐廳先前入門的消費者，每人點餐金額超過新台幣 125 元有 25 %，為提高消費者點餐金額，進行一連串的促銷活動，期望每人點餐金額超過新台幣 125 元比例提高。(A)此題檢定假設屬於右尾檢定、左尾檢定或雙尾檢定；(B)若隨機抽取 300 位消費者，每人點餐金額超過新台幣 125 元有 70 位，表示促銷活動成功，請計算檢定過程型一錯誤(Type I error)機率。(機率答案有效位數四捨五入取到小數點後第 4 位)

題解：以 p 表示消費者每人點餐金額超過新台幣 125 元的比率

A.虛無假設(null hypothesis) H_0: $p \le 0.25$。

B.對立假設(alternative hypothesis) H_1: $p > 0.25$。 屬右尾檢定

樣本比例 $\bar{p} = \frac{70}{300} = 0.2333$

(B)型一錯誤(Type I error) $\alpha = P$(接受 $H_1|H_0$ 為真) $= P(\bar{p} \ge 0.2333|\ p_0 = 0.25) = P(\frac{\bar{p}-p_0}{\sqrt{\frac{p_0\times(1-p_0)}{n}}} \ge \frac{0.2333-0.25}{\sqrt{\frac{0.25\times(1-0.25)}{300}}}) = P(Z \ge \frac{-0.0167}{0.025}) = P(Z \ge -0.6667) = 1 - P(Z \le -0.6667) = 1 - 0.2525$(使用 Excel 軟體 NORM.S.DIST 函數查詢獲得) $= 0.7475$

答案：(A)右尾檢定；(B)型一錯誤(Type I error) $\alpha = 0.7475$

範例 9.25 一隨機變數 X 屬於常態分布，母體平均值 μ，母體變異數 49，欲假設檢定 H_0: $\mu \le 50$ 與 H_1: $\mu > 50$ 若從前述隨機變數中隨機抽出樣本數量 $n = 20$，其樣本平均值 $\bar{x} > 52$ 時判斷拒絕虛無假設 H_0，接受對立假設 H_1，請估算：(A)此假設檢定的顯著水準 α；(B)若母體平均值 $\mu = 53$，假設檢定的檢(定)力；(C)若樣本平均值 $\bar{x} = 53.52$ 機率。(機率答案有效位數四捨五入取到小數點後第 4 位)

題解：(A)

A.虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu \le 50$。

B.對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu > 50$，屬右尾檢定，所有的錯誤擺在右側(臨界點右邊)，故顯著水準 $\alpha = P(Z > \frac{52-50}{\sqrt{\frac{49}{20}}}) = P(Z > \frac{2}{1.5652}) = P(Z > 1.2778) = 1 - P(Z \le 1.2778) = 1 - 0.8993$(使用 Excel 軟體 NORM.S.DIST 函數查詢獲得) $= 0.1007$

(B)型二錯誤(Type II error)機率 $\beta = p = P(\bar{x} \le \bar{x}^*) = P(Z \le z^*) = P(Z \le \frac{\bar{x}^*-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}})$

檢(定)力 $1 - \beta = P(Z > \frac{52-53}{\sqrt{\frac{49}{20}}}) = P(Z > \frac{-1}{1.5652}) = P(Z > -0.6389) = 1 - P(Z \le -0.6389) = 1 - 0.2614$(使用 Excel 軟體 NORM.S.DIST 函數查詢獲得) $= 0.7385$

(C)機率 $p = P(Z > \frac{53.52-50}{\sqrt{\frac{49}{20}}}) = P(Z > \frac{3.52}{1.5652}) = P(Z > 2.2488) = 1 - P(Z \le 2.2488) = 1 - 0.9877$(使用 Excel 軟體 NORM.S.DIST 函數查詢獲得) $= 0.0123$

答案：(A)顯著水準 $\alpha = 0.1007$；(B)檢(定)力 $1 - \beta = 0.7385$；(C)機率 $p = 0.0123$

9.8 母體平均值假設檢定之樣本數估算【選擇教材】

在母體特定研究變數之平均值 μ 的假設檢定(hypothesis test)過程中，可以透過設定顯著水準 α，達到控制型一錯誤(Type I error)發生機率。透過設定隨機抽樣的樣本數量 n，可以達到控制型二錯誤(Type II error)發生機率 β。故，在假設檢定中估算所需樣本數量的目的，就是要控制型二錯誤機率 β，實際假設檢定的過程中，若隨機抽樣的樣本數量低就會讓可能犯型二錯誤機率上升，同理，若隨機抽樣的樣本數量高，就可以將犯型二錯誤機率下降。

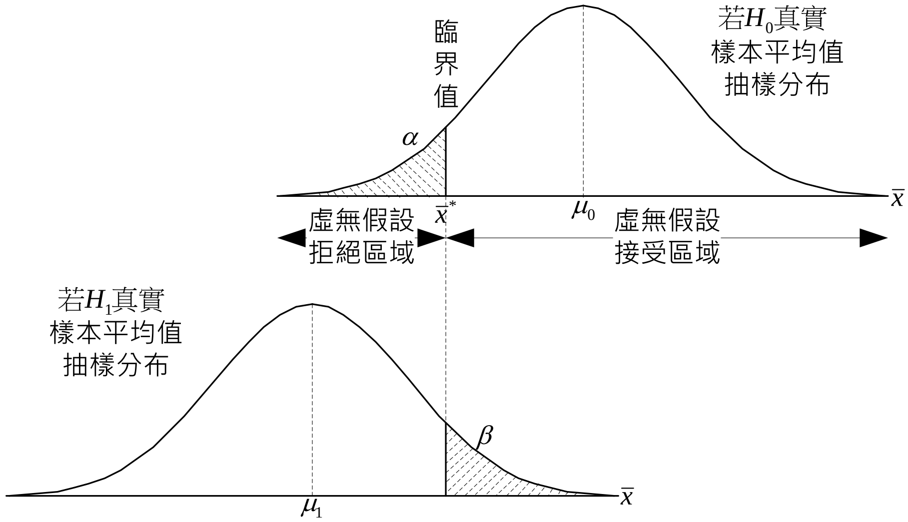
左尾檢定(a left-tailed test)案例(推導後計算樣本數量的公式適用於單尾檢定)

若研究人員推測或質疑母體參數的數值 μ 小於假設值 μ_0 時，虛無假設和對立假設分別為：

虛無假設 $H_0: \mu \geq \mu_0$ vs. 對立假設 $H_1: \mu < \mu_0$

其中 μ_0: 在虛無假設中母體平均值 μ 的假設值或預估值

若虛無假設(null hypothesis)屬於真實，$H_0: \mu \geq \mu_0$ 成立。依據設定的顯著水準 α，會決定虛無假設的拒絕區域($\bar{x} \leq \bar{x}^*$)，其中$\bar{x}^*$為被拒絕與接受虛無假設(null hypothesis) H_0 的臨界值(critical value)。



$$\bar{x}^* = \mu_0 - z_\alpha \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

其中 μ_0： 在虛無假設中母體平均值 μ 的假設值、預估值

z_α：顯著水準 α 對應的標準常態 z 值

σ：母體標準(偏)差

n：樣本數量

若虛無假設(null hypothesis) H_0 屬於錯誤，對立假設(alternative hypothesis) H_1 屬於真實，$H_1: \mu < \mu_0$ 成立。此時，母體平均值為 μ_1。發生型二錯誤(Type II error)機率為 β。同理：

$$\bar{x}^* = \mu_1 + z_\beta \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

其中 μ_1：使用於型二錯誤(Type II error)計算中母體平均值 μ 的假設值或預估值

z_β：型二錯誤(Type II error)發生機率 β 對應的標準常態 z 值

σ：母體標準(偏)差

n：樣本數量

$$\bar{x}^* = \mu_0 - z_\alpha \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \mu_1 + z_\beta \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\mu_0 - \mu_1 = z_\alpha \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} + z_\beta \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = (z_\alpha + z_\beta) \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\sqrt{n} = (z_\alpha + z_\beta) \times \frac{\sigma}{(\mu_0 - \mu_1)} = \frac{(z_\alpha + z_\beta) \times \sigma}{(\mu_0 - \mu_1)}$$

$$n = \frac{(z_\alpha + z_\beta)^2 \times \sigma^2}{(\mu_0 - \mu_1)^2}$$

其中 μ_0：在虛無假設中母體平均值 μ 的假設值或預估值

μ_1：使用於型二錯誤(Type II error)計算中母體平均值 μ 的假設值或預估值

n：在顯著水準 α 的前提下，欲達到型二錯誤(Type II error)發生機率為 β 所需要的樣本數量。

z_β：型二錯誤(Type II error)發生機率 β 對應的標準常態 z 值

z_α：顯著水準 α 對應的標準常態 z 值

σ：母體標準(偏)差

雙尾檢定(a two-tailed test)下需考慮犯型一錯誤機率 α，平均分布於兩端的事實，將隨機抽樣的樣本數量 n 計算公式進行修正，如下：

$$n = \frac{\left(z_{\frac{\alpha}{2}}+z_\beta\right)^2 \times \sigma^2}{(\mu_0-\mu_1)^2}$$

其中 n：在顯著水準 α 的前提下，欲達到型二錯誤(Type II error)發生機率為 β 所需要的樣本數量。

z_β：型二錯誤(Type II error)發生機率 β 對應的標準常態 z 值

$z_{\frac{\alpha}{2}}$：顯著水準$\frac{\alpha}{2}$對應的標準常態 z 值

σ：母體標準(偏)差

μ_0：在虛無假設中母體平均值 μ 的假設值或預估值

μ_1：使用於型二錯誤(Type II error)計算中母體平均值 μ 的假設值或預估值

範例 9.26 奇遇餐廳販售蚵仔麵線，餐廳規劃標準食譜(standard recipe)時，設計每碗蚵仔麵線應該有 20 顆蚵仔。假設每碗蚵仔麵線蚵仔數量的標準(偏)差 σ = 4 顆。若每碗蚵仔麵線平均有 20 顆蚵仔($\mu_0 = 20$)，餐廳願意接受消費者拒絕機率 $\alpha = 0.05$。若每碗蚵仔麵線有 16 顆蚵仔($\mu_1 = 16$)，消費者願意接受機率 $\beta = 0.10$。為了達到這樣機率，必須有抽取的樣本數量為？

題解：虛無假設中母體平均值之假設值 $\mu_0 = 20$ 顆，母體標準(偏)差 σ = 4 顆，顯著水準 $\alpha = 0.05$，計算型二錯誤母體平均值之假設值 $\mu_1 = 16$ 顆，型二錯誤發生機率 $\beta = 0.10$，$z_\alpha = z_{0.05} = 1.6449$，$z_\beta = z_{0.10} = 1.2816$(使用 Excel 軟體 NORM.S.INV 函數查詢獲得)。本範例是以檢出樣本數值是否低於某特定數值，故此例屬於左尾檢定(a left-tailed test)

$$n = \frac{\left(z_\alpha+z_\beta\right)^2 \times \sigma^2}{(\mu_0-\mu_1)^2} = \frac{(1.6449+1.2816)^2 \times 4^2}{(20-16)^2} = \frac{2.9265^2 \times 16}{4^2} = 8.6 \text{ (採用無條件進位法)}$$

在抽樣時，抽取的樣本數量必須達到 9 碗蚵仔麵線，才能夠達到上述機率水準。

在單尾假設檢定中，透過計算樣本數量 n 的公式

$$n = \frac{\left(z_\alpha+z_\beta\right)^2 \times \sigma^2}{(\mu_0-\mu_1)^2}$$

因為**顯著水準 α** 和**型二錯誤(Type II error)發生機率 β** 對 z_α 和 z_β 的關係為，當 α 和 β 數值愈高，z 值愈低。α 和 β 數值與 z 數值兩者為反向關係。

綜合上述公式內容可以發現：

A.**顯著水準 α**、**型二錯誤(Type II error)發生機率 β** 和**樣本數量 n** 三者，只要知道其中兩者數值，即可計算出第三者的數值。

B.顯著水準 α 固定時，樣本數量 n 增加，可以降低型二錯誤(Type II error)發生機率 β。反之，樣本數量 n 降低，可以增加型二錯誤(Type II error)發生機率 β。

C.樣本數量 n 固定時，顯著水準 α 下降，型二錯誤(Type II error)發生機率 β 會上升；顯著水準 α 上升，型二錯誤(Type II error)發生機率 β 會下降。

因此，並不是顯著水準 α 愈低愈好，其可能代表發生型二錯誤(Type II error)機率會增加。

練習 9.41 奇遇餐廳販售清蒸鱸魚一盤設定售價 NT$ 300 元，餐廳規劃標準食譜(standard recipe)時，設計每盤清蒸鱸魚中有一尾鱸魚，鱸魚購買時設定重量(As-purchased weight, AP) μ = 600 公克。該

餐廳跟供貨廠商簽的採購契約，鱸魚的採購價格是以一尾 600 公克重量者為 NT$ 100 元。供貨廠商進貨時，有品管人員抽樣驗證鱸魚是否有達到 AP $\mu = 600$ 公克的驗收標準，檢定顯著水準 $\alpha = 0.025$。若該批鱸魚實際重量為 585 公克，驗收人員可能會錯誤接受該批鱸魚機率為 0.05，假設鱸魚重量的標準(偏)差為 20 公克，請計算檢定所需要的樣本數量？

題解：虛無假設中母體平均值之假設值 $\mu_0 = 600$ 公克，母體標準(偏)差 $\sigma = 20$ 公克，顯著水準 $\alpha = 0.025$，計算型二錯誤母體平均值之假設值 $\mu_1 = 585$ 公克，型二錯誤發生機率 $\beta = 0.05$，$z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{\frac{0.025}{2}} = z_{0.0125} = 2.2414$；$z_\beta = z_{0.05} = 1.6449$(使用 Excel 軟體 NORM.S.INV 函數查詢獲得)。本範例是以檢出樣本數值是否達到某特定數值，故此例屬於雙尾檢定(a two-tailed test)。

需要的樣本數量 $n = \frac{\left(z_{\frac{\alpha}{2}}+z_\beta\right)^2\times\sigma^2}{(\mu_0-\mu_1)^2} = \frac{(2.2414+1.6449)^2\times 20^2}{(600-585)^2} = \frac{3.8863^2\times 400}{15^2} = 26.8$ (採用無條件進位法)

在抽樣時，抽取的樣本數量必須達到 27 尾鱸魚，才能夠達到上述機率水準。

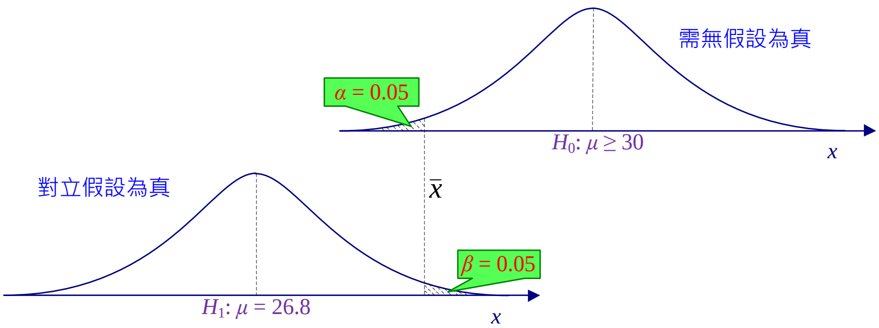
答案：需要樣本數量 27 尾鱸魚

練習 9.42　從一母體~$N(\mu, 25)$隨機抽出 n 個樣本，在顯著水準 $\alpha = 0.05$ 下，檢定虛無假設 H_0: $\mu \geq 30$；對立假設 H_1: $\mu < 30$，期望在母體平均值 $\mu = 26.8$ 時之檢(定)力達 0.95，請估算需要多少樣本數？(答案有效位數取到個位數)

題解：以 μ 符號表示母體平均值。顯著水準 $\alpha = 0.05$，檢(定)力 $= 0.95 = 1 - \beta$，$\beta = 0.05$。$z_\alpha = z_{0.05} = 1.6449$；$z_\beta = z_{0.05} = 1.6449$(使用 Excel 軟體 NORM.S.INV 函數查詢獲得)。

A.虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu \geq 30$，在虛無假設中具有大於等於的符號，代表其假設檢定屬於左尾檢定。

B.對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu < 30$



$$n = \frac{(z_\alpha+z_\beta)^2\times\sigma^2}{(\mu_0-\mu_1)^2} = \frac{(1.6449+1.6449)^2\times 25}{(30-26.8)^2} = \frac{270.5543}{10.24} = 26.42$$

答案：需要 27 人

已知樣本數量 n、型一錯誤機率 α、估算型一錯誤的母體平均值 μ_0 和估算型二錯誤的母體平均值 μ_1，估算型二錯誤機率 β。

$$n = \frac{(z_\alpha+z_\beta)^2\times\sigma^2}{(\mu_0-\mu_1)^2} \rightarrow n \times (\mu_0 - \mu_1)^2 = (z_\alpha + z_\beta)^2 \times \sigma^2 \rightarrow (z_\alpha + z_\beta)^2 = \frac{n\times(\mu_0-\mu_1)^2}{\sigma^2} \rightarrow z_\alpha + z_\beta = \sqrt{\frac{n\times(\mu_0-\mu_1)^2}{\sigma^2}} \rightarrow$$

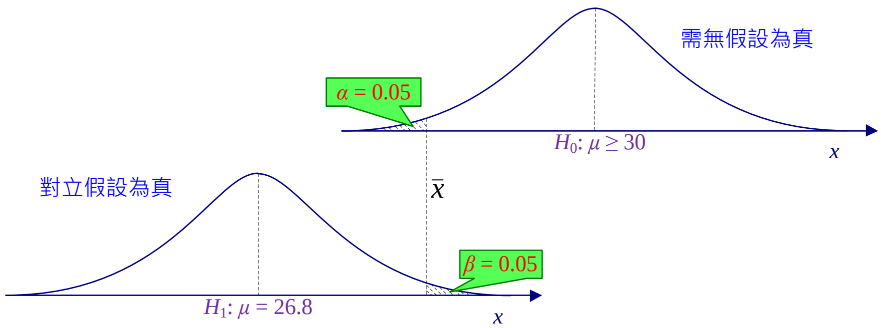
$$z_\beta = \sqrt{\frac{n\times(\mu_0-\mu_1)^2}{\sigma^2}} - z_\alpha$$

練習 9.43　從一母體~$N(\mu, 25)$隨機抽出 $n = 26$ 個樣本，在顯著水準 $\alpha = 0.05$ 下，檢定虛無假設 H_0: $\mu \geq 30$；對立假設 H_1: $\mu < 30$，期望在母體平均值 $\mu = 26.8$ 時，請計算檢(定)力？(答案有效位數取到個位數)

題解：以 μ 符號表示母體平均值。顯著水準 $\alpha = 0.05$。$z_\alpha = z_{0.05} = 1.6449$(使用 Excel 軟體 NORM.S.INV 函數查詢獲得)。

A. 虛無假設(null hypothesis) $H_0: \mu \geq 30$，在虛無假設中具有大於等於的符號，代表其假設檢定屬於左尾檢定。

B. 對立假設(alternative hypothesis) $H_1: \mu < 30$



$z_\beta = \sqrt{\frac{n\times(\mu_0-\mu_1)^2}{\sigma^2}} - z_\alpha = \sqrt{\frac{26\times(30-26.8)^2}{25}} - 1.6449 = 3.2634 - 1.6449 = 1.6185 \rightarrow \beta = 0.0528$(使用 Excel 軟體 NORM.S.DIST 函數查詢獲得) $\rightarrow 1-\beta = 0.9472$

$z_\beta = \sqrt{\frac{n\times(\mu_0-\mu_1)^2}{\sigma^2}} - z_\alpha = \sqrt{\frac{27\times(30-26.8)^2}{25}} - 1.6449 = 3.2634 - 1.6449 = 1.6807 \rightarrow \beta = 0.0464$(使用 Excel 軟體 NORM.S.DIST 函數查詢獲得) $\rightarrow 1-\beta = 0.9536$

前一個練習題目中，樣本數量 $n = \frac{(z_\alpha+z_\beta)^2\times\sigma^2}{(\mu_0-\mu_1)^2} = \frac{(1.6449+1.6449)^2\times25}{(30-26.8)^2} = \frac{270.5543}{10.24} = 26.42$，若採用四捨五入的方式，僅取樣本數量 26 時，其型二錯誤機率 $\beta = 0.0528$ 高於原先期望的 $\beta = 0.05$，無法達到原先的設定標準，因此，前一個練習題目中，必須採用無條件進位法，取樣本數量 27，才能夠達到原先期望的 $\beta = 0.0464$ 低於原先期望的型二錯誤 $\beta = 0.05$。

答案：檢(定)力 $1-\beta = 0.9472$

9.9 母體比率假設檢定之樣本數估算【選擇教材】

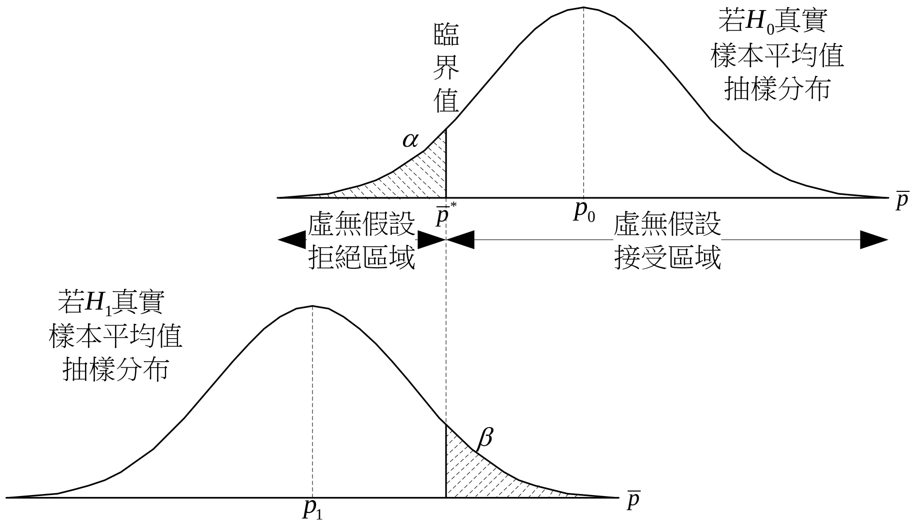
左尾檢定(a left-tailed test)案例(推導後計算樣本數量的公式適用於單尾檢定)

若研究人員推測、質疑母體參數的比例數值 p 小於假設值 p_0 時，虛無假設和對立假設分別為：

虛無假設 $H_0: p \geq p_0$ vs. 對立假設 $H_1: p < p_0$

其中 p_0: 在虛無假設中母體比例 p 的假設值或預估值

若虛無假設(null hypothesis)屬於真實，$H_0: p \geq p_0$ 成立。依據設定的顯著水準 α，會決定虛無假設的拒絕區域($\bar{p} \leq \bar{p}^*$)，其中 $\bar{p}^*$ 為被拒絕與接受虛無假設(null hypothesis) H_0 的臨界值(critical value)。



$$\bar{p}^* = p_0 - z_\alpha \times \frac{\sqrt{p_0 \times (1-p_0)}}{\sqrt{n}} = p_0 - z_\alpha \times \sqrt{\frac{p_0 \times (1-p_0)}{n}}$$

其中 p_0：在虛無假設中母體比例 p 的假設值、預估值

z_α：顯著水準 α 對應的標準常態 z 值

σ：母體標準(偏)差 $= \sqrt{p_0 \times (1-p_0)}$

n：樣本數量

若虛無假設(null hypothesis) H_0 屬於錯誤，對立假設(alternative hypothesis) H_1 屬於真實，H_1: $p < p_0$ 成立。此時，母體平均值為 μ_1。發生型二錯誤(Type II error)機率為 β。同理：

$$\bar{p}^* = p_1 + z_\beta \times \frac{\sqrt{p_1 \times (1-p_1)}}{\sqrt{n}} = p_1 + z_\beta \times \sqrt{\frac{p_1 \times (1-p_1)}{n}}$$

其中 p_1：使用於型二錯誤(Type II error)計算中母體比例 p 的假設值或預估值

z_β：型二錯誤(Type II error)發生機率 β 對應的標準常態 z 值

σ：母體標準(偏)差

n：樣本數量

$$\bar{p}^* = p_0 - z_\alpha \times \sqrt{\frac{p_0 \times (1-p_0)}{n}} = p_1 + z_\beta \times \sqrt{\frac{p_1 \times (1-p_1)}{n}}$$

$$p_0 - p_1 = z_\alpha \times \sqrt{\frac{p_0 \times (1-p_0)}{n}} + z_\beta \times \sqrt{\frac{p_1 \times (1-p_1)}{n}} = \frac{z_\alpha \times \sqrt{p_0 \times (1-p_0)}}{\sqrt{n}} + \frac{z_\beta \times \sqrt{p_1 \times (1-p_1)}}{\sqrt{n}} = \frac{z_\alpha \times \sqrt{p_0 \times (1-p_0)} + z_\beta \times \sqrt{p_1 \times (1-p_1)}}{\sqrt{n}}$$

$$\sqrt{n} = \frac{z_\alpha \times \sqrt{p_0 \times (1-p_0)} + z_\beta \times \sqrt{p_1 \times (1-p_1)}}{p_0 - p_1}$$

$$n = \left[\frac{z_\alpha \times \sqrt{p_0 \times (1-p_0)} + z_\beta \times \sqrt{p_1 \times (1-p_1)}}{p_0 - p_1}\right]^2 = \frac{\left[z_\alpha \times \sqrt{p_0 \times (1-p_0)} + z_\beta \times \sqrt{p_1 \times (1-p_1)}\right]^2}{(p_0 - p_1)^2}$$

其中 p_0：在虛無假設中母體比例 p 的假設值或預估值

p_1：使用於型二錯誤(Type II error)計算中母體比例 p 的假設值或預估值

n：在顯著水準 α 的前提下，欲達到型二錯誤(Type II error)發生機率為 β 所需要的樣本數量。

z_β：型二錯誤(Type II error)發生機率 β 對應的標準常態 z 值

z_α：顯著水準 α 對應的標準常態 z 值

σ：母體標準(偏)差

雙尾檢定

$$n = \frac{\left[z_{\frac{\alpha}{2}} \times \sqrt{p_0 \times (1-p_0)} + z_\beta \times \sqrt{p_1 \times (1-p_1)}\right]^2}{(p_1 - p_0)^2}$$

其中 p_0：虛無假設 H_0 的假設值

p_1：對立假設 H_1 的假設值

範例 9.27　若有一假設檢定 H_0: p = 0.30 時，α = 0.05，H_1: p = 0.25，β = 0.20，請計算需要樣本大小 n？

題解：$z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{\frac{0.05}{2}} = z_{0.025} = 1.9600$；$z_\beta = z_{0.20} = 0.8416$(使用 Excel 軟體 NORM.S.INV 函數查詢獲得)。

需要樣本數 $n = \dfrac{\left[z_{\frac{\alpha}{2}}\times\sqrt{p_0\times(1-p_0)}+z_\beta\times\sqrt{p_1\times(1-p_1)}\right]^2}{(p_1-p_0)^2} = \dfrac{\left[z_{\frac{0.05}{2}}\times\sqrt{0.30\times(1-0.30)}+z_{0.20}\times\sqrt{0.25\times(1-0.25)}\right]^2}{(0.25-0.30)^2} =$
$\dfrac{\left[1.9600\times\sqrt{0.30\times(1-0.30)}+0.8416\times\sqrt{0.25\times(1-0.25)}\right]^2}{(0.25-0.30)^2} = \dfrac{[0.8982+0.3644]^2}{(-0.05)^2} = \dfrac{1.5942}{0.0025} = 637.6$ 取 638

答案：樣本數 n 需要 638

9.10 母體變異數假設檢定

母體變異數 σ^2 的假設檢定，在驗證商品或服務質與量的標準，比母體平均值 μ 的假設檢定更為重要。因為商品或服務的品質一致性、穩定性和波動性，比平均水準在實務操作上更有意義。

母體變異數 σ^2 的假設檢定，有三種型態

左尾檢定	雙尾檢定	右尾檢定
虛無假設 H_0: $\sigma^2 \geq \sigma_0^2$	虛無假設 H_0: $\sigma^2 = \sigma_0^2$	虛無假設 H_0: $\sigma^2 \leq \sigma_0^2$
對立假設 H_1: $\sigma^2 < \sigma_0^2$	對立假設 H_1: $\sigma^2 \neq \sigma_0^2$	對立假設 H_1: $\sigma^2 > \sigma_0^2$

其中，σ^2 代表母體變異數；σ_0^2 代表母體變異數的假設值。

母體變異數 σ^2 的假設檢定程序(步驟)和母體平均值 μ 與比例 p 的假設檢定程序(步驟)類同。

若母體屬於常態分布，樣本是透過隨機抽樣獲得，利用卡方進行母體變異數 σ^2 的假設檢定(Hypothesis test)。

$$\chi^2 = \frac{(n-1)\times S^2}{\sigma_0^2}$$

其中 σ_0^2：虛無假設中代表母體變異數的假設值。

S^2：樣本的變異數

n：樣本數量

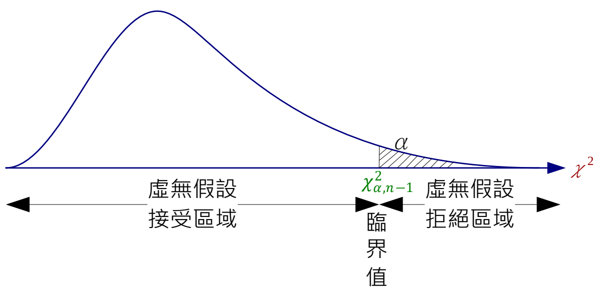
$v = n - 1$，自由度

在檢定階段，運用樣本變異數運算獲得檢定統計值—卡方值 χ^2 與在顯著水準 α 下自由度 $v = n - 1$ 的臨界值—$\chi^2_{\alpha,n-1}$、$\chi^2_{1-\alpha,n-1}$、$\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}$ 或 $\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}$ 值進行比較，以進行統計推論。

右尾檢定(a right-tailed test)：虛無假設 H_0: $\sigma^2 \leq \sigma_0^2$；對立假設 H_1: $\sigma^2 > \sigma_0^2$

若檢定統計值 $\chi^2 \leq$ 臨界值 $\chi^2_{\alpha,n-1}$，**接受**虛無假設(null hypothesis) $\boldsymbol{H_0}$。

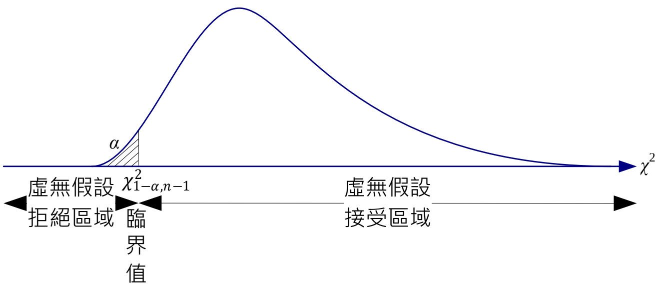
若檢定統計值 χ^2 > 臨界值 $\chi^2_{\alpha,n-1}$，拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0，**接受**對立假設(alternative hypothesis) $\boldsymbol{H_1}$。



左尾檢定(a left-tailed test)：虛無假設 H_0: $\sigma^2 \geq \sigma_0^2$；對立假設 H_1: $\sigma^2 < \sigma_0^2$

若檢定統計值 $\chi^2 \geq$ 臨界值$\chi^2_{1-\alpha,n-1}$，**接受**虛無假設(null hypothesis) $\boldsymbol{H_0}$。

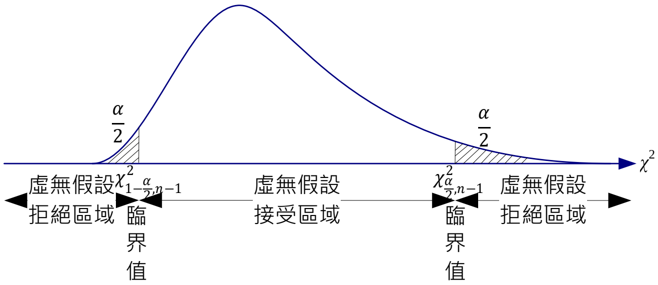
若檢定統計值 $\chi^2 <$ 臨界值$\chi^2_{1-\alpha,n-1}$，拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0，**接受**對立假設(alternative hypothesis) $\boldsymbol{H_1}$。



雙尾檢定(a two-tailed test)：虛無假設 H_0: $\sigma^2 = \sigma_0^2$；對立假設 H_1: $\sigma^2 \neq \sigma_0^2$

若左側臨界值$\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1} \leq$ 檢定統計值 $\chi^2 \leq$ 右側臨界值$\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}$，接受虛無假設(null hypothesis) $\boldsymbol{H_0}$。

若檢定統計值 $\chi^2 <$ 左側臨界值$\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}$或檢定統計值 $\chi^2 >$ 右側臨界值$\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}$，拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0，**接受**對立假設(alternative hypothesis) $\boldsymbol{H_1}$。



範例 9.28 奇遇餐廳販售龍蝦大餐，為了應付客人需求每天必須維持 80 隻龍蝦。若庫存太多，積壓資金與造成龍蝦不新鮮或死亡；庫存太少，恐無法應付消費者需求。依據以往的販售龍蝦大餐的紀錄，分析獲知庫存維持 μ = 80 隻龍蝦，變異數 σ^2 = 5 隻^{2}為宜。這個月隨機抽選 8 天，盤點庫存量，得知樣本變異數 S^2 = 9 隻^2。在顯著水準 α = 0.05 下，試評估龍蝦庫存維持變異數 σ^2 = 5 隻^{2}是否得宜？

題解：樣本數量 n = 8，樣本變異數 S^2 = 9 隻^2，母體變異數σ_0^2 = 5 隻^2。希望確認變異數是否大於 5 為目的檢定，故本範例屬於右尾檢定(a right-tailed test)。

A.顯著水準 α = 0.05，臨界值$\chi^2_{\alpha,n-1} = \chi^2_{0.05,8-1} = \chi^2_{0.05,7}$ = 14.0671[使用 Excel 軟體 CHISQ.INV.RT(右尾機率)函數查詢獲得]。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: $\sigma^2 \leq 5$ 隻^2。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\sigma^2 > 5$ 隻^2。

D.計算檢定統計值：卡方 χ^2 值

檢定統計值 $\chi^2 = \frac{(n-1)\times S^2}{\sigma_0^2} = \frac{(8-1)\times 9}{5} = 12.6$

E.檢定統計值 χ^2 = 12.6 < 臨界值$\chi^2_{\alpha,n-1}$ = 14.0671，檢定統計值位於虛無假設接受區域內，接受虛無假設 H_0: $\sigma^2 \leq 5$ 隻^2。龍蝦庫存維持變異數 σ^2 = 5 隻^{2}得宜，可以應付餐廳的需求。

練習 9.44 奇遇餐廳販售清蒸鱸魚一盤設定售價 NT$ 300 元，餐廳規劃標準食譜(standard recipe)時，設計每盤清蒸鱸魚中有一尾鱸魚，鱸魚購買時設定重量(As-purchased weight, AP) μ = 600 公克，變異數 σ^2 = 10 公克^2。該餐廳跟供貨廠商簽的採購契約，鱸魚的採購價格是以一尾 600 公克重量

者 100 元。供貨廠商進貨時，有品管人員抽樣驗證鱸魚是否有達到 AP 重量變異數 $\sigma^2 = 10$ 公克 ^{2} 的驗收標準。檢定顯著水準 $\alpha = 0.05$。若該批 23 尾鱸魚實際重量變異數 $S^2 = 11$ 公克 ^{2}，試評估該批鱸魚是否達到變異數 $\sigma^2 = 10$ 公克 ^{2} 以內的標準？

題解：樣本數量 $n = 23$，樣本變異數 $S^2 = 11$ 公克 ^{2}，母體變異數 $\sigma_0^2 = 10$ 公克 ^{2}。希望確認變異數是否大於 10 為目的檢定，故本範例屬於右尾檢定(a right-tailed test)。

A.顯著水準 $\alpha = 0.05$，臨界值 $\chi^2_{\alpha,n-1} = \chi^2_{0.05,23-1} = \chi^2_{0.05,22} = 33.9244$[使用 Excel 軟體 CHISQ.INV.RT(右尾機率)函數查詢獲得]。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: $\sigma^2 \le 10$公克^2。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\sigma^2 > 10$公克^2。

D.計算檢定統計值：卡方 χ^2 值

檢定統計值 $\chi^2 = \frac{(n-1)\times S^2}{\sigma_0^2} = \frac{(23-1)\times 11}{10} = 24.2$

E.檢定統計值 $\chi^2 = 24.2 < $ 臨界值 $\chi^2_{\alpha,n-1} = 33.9244$，檢定統計值位於虛無假設接受區域內，接受虛無假設 H_0: $\sigma^2 \le 10$公克^2。該批鱸魚有達到變異數 $\sigma^2 = 10$公克^{2}的標準，可以應付餐廳的需求。

練習 9.45　家家冰淇淋宣稱其販售的冰淇淋重量品管嚴格，重量分布可以達到標準(偏)差為 1.2 公克的標準。現今隨機抽取 10 盒冰淇淋進行重量檢驗，發現其重量分布的標準(偏)差為 1.4 公克。若每盒冰淇淋重量分布是屬於常態分布，請以顯著水準 $\alpha = 0.05$ 檢定該公司宣稱的重量分布是否屬實？

題解：樣本數量 $n = 10$，樣本標準偏差 S = 1.4 公克，樣本變異數 $S^2 = 1.96$，母體標準偏差 $\sigma_0 = 1.2$ 公克，母體變異數 $\sigma_0^2 = 1.2^2 = 1.44$ 公克 ^{2}。本題目希望確認冰淇淋重量分布的標準(偏)差是否等於 1.2 公克為目的，故本範例屬於雙尾檢定。

A.顯著水準 $\alpha = 0.05$，左側臨界值 $\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1} = \chi^2_{1-\frac{0.05}{2},10-1} = \chi^2_{0.975,9} = 2.7004$；右側臨界值 $\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1} = \chi^2_{\frac{0.05}{2},10-1} = \chi^2_{0.025,9} = 19.0228$[使用 Excel 軟體 CHISQ.INV.RT(右尾機率)函數查詢獲得]。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: $\sigma^2 = 1.44$公克^2。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\sigma^2 \ne 1.44$公克^2。

D.計算檢定統計值：卡方 χ^2 值

檢定統計值 $\chi^2 = \frac{(n-1)\times S^2}{\sigma_0^2} = \frac{(10-1)\times 1.96}{1.44} = 12.25$

E.左側臨界值 $\chi^2_{0.975,9} = 2.7004 \le$ 檢定統計值 $\chi^2 = 24.2 \le$ 右側臨界值 $\chi^2_{0.025,9} = 19.0228$，檢定統計值位於虛無假設接受區域內，接受虛無假設 H_0: $\sigma^2 = 1.44$ 公克 ^{2}。透過隨機抽樣 10 盒冰淇淋檢驗其重量，推論該公司宣稱的重量分布標準屬實。

練習 9.46　進行統計檢定時，檢定統計量很可能會發生誤判：(2007 普考統計學概要)

1.請問這些誤判是那些？

2.請問進行統計檢定時，那些誤判發生之機率可以被控制？為什麼？

練習 9.47　一位研究人員欲瞭解兩種肥料對韓國草的生長影響。他隨機選擇 10 所學校區域並將每個區域劃分為二塊，分別施灑兩種肥料進行觀察，紀錄韓國草的高度如下：(2007 普考統計學概要)

肥料	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	3.1	2.6	2.9	3.5	3.4	2.8	3.2	2.6	2.8	2.4
B	3.0	2.4	2.1	3.4	3.0	2.7	3.3	2.7	2.6	2.3

1.請問此種蒐集資料方式的優點或缺點？

2.請協助此位研究人員進行單尾統計檢定和推論，顯著水準 $\alpha = 0.05$

練習 9.48 若監理站申請汽車新牌照辦理時間為一平均數是 6 分鐘和標準差是 1.5 分鐘的常態分布(2007 普考統計學概要)

A.請問一份牌照申請需花 7 分鐘以上才能取得的可能性？

B.若有 1000 份牌照申請，請問至少有 270 份牌照辦理需花 7 分鐘以上才能取得的可能性(寫出真正機率之算式，再求近似機率即可)？

C.單位主管簡化牌照辦理手續，並實施辦理數月。單位主管欲知簡化後平均辦理時間是否小於 6 分鐘，採用系統抽樣，得 25 位牌照辦理時間之平均數為 5.2 分鐘，標準差是 2 分鐘。請問在顯著水準 $\alpha = 0.05$ 下，牌照辦理時間是否縮短了？

題解：以隨機變數 X 代表申請汽車新牌辦理時間(單位：分鐘)

一份牌照申請需花 7 分鐘以上機率 $P(X > 7) = P(Z > \frac{7-\mu}{\sigma}) = P(Z > \frac{7-6}{1.5}) = P(Z > \frac{1}{1.5}) = P(Z > 0.6667) = 1 - P(Z \leq 0.6667) = 1 - 0.7475$(使用 Excel 軟體 NORM.S.DIST 函數查詢獲得) $= 0.2525$

以隨機變數 Y 代表在 1000 份中牌照辦理需花 7 分鐘以上的數量

有 1000 份牌照申請，請問至少有 270 份牌照辦理需花 7 分鐘以上才能取得機率 $F_Y(t) = P(Y \leq t = 270) = \sum_{y=0}^{t} \binom{n}{y} \times p^y \times q^{n-y} = \sum_{y=0}^{270} \binom{1000}{y} \times 0.2525^y \times 0.7475^{1000-y} = 0.9043$(使用 Excel 軟體 BINOM.DIST 函數查詢獲得)

本範例是以檢出樣本數值是否低於某特定數值，故此例屬於左尾檢定(a left-tailed test)。

A.設定顯著水準 $\alpha = 0.05$。

B.虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu \geq 6$ 分鐘。

C.對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu < 6$ 分鐘。

D.計算機率 p 值

機率 $p = P(\bar{x} \leq \bar{x}^*) = P(Z \leq z^*) = P(Z \leq \frac{\bar{x}^* - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}) = P(Z \leq \frac{5.2-6}{\frac{2}{\sqrt{25}}}) = P(Z \leq \frac{-0.8}{0.4}) = P(Z \leq -2) = 0.0228$(使用 Excel 軟體 NORM.S.DIST 函數查詢獲得)

E.機率 $p = 0.0228 <$ 顯著水準 $\alpha = 0.05$，拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0: $\mu \geq 6$ 分鐘，接受對立假設(alternative hypothesis) H_1: $\mu < 6$ 分鐘，推論有顯著的縮短辦理時間。

答案：(A)可能性以機率表達為 0.2525；(B)可能性以機率表達為 0.9043；(C)有顯著的縮短辦理時間

練習 9.49 假設檢定的檢力是________機率？(A)正確的接受虛無假設；(B)不正確的接受虛無假設；(C)正確的拒絕對立假設；(D)正確的拒絕虛無假設。(99 年初等考試統計學大意)

討論議題

1.非同步學習者相互討論議題：資料分析與統計學習方式精進

大家已經經歷統計學一整個學期的學習歷練，同時，也利用寒假時間，可以沉澱回想整個學習過程。課程中老師準備【數位教材】和【牛刀小試】讓大家預習，上課過程中也提供【上課練習】、【平常考】和【議題討論】機制，都是您以往學習歷程中沒有經歷過。

第一回合請於 D+3 日晚上 12 點以前從「議題討論」區【張貼】標題：「資料分析與統計課程重新出發」，本文：如何讓自己更有效益的學習，請具體詮釋您準備的學習方式和態度(10 個字以上)。

待有 30 篇第一回合【張貼】回應或第一回合【張貼】時間結束後，請再次檢視所有同學的回應內容。第二回合【張貼】標題：「最佳詮釋」，本文：哪一位同學詮釋得最好，並具體說明理由(10 個字以上)。期望可以透過學習經驗的交流，相互激勵，提升學習效益。第二回合【張貼】截止時間就是本議題在平台上的關閉時間。

2.師生非同步教學討論議題：型一錯誤和型二錯誤

學會型一錯誤和型二錯誤後，透過自己設計範例說明，分享學習，提高學習者對型一錯誤和型二錯誤的認知。透過數位教材、線上同步課程、練習與平常考的學習歷程，您理解型一錯誤(type I error)和型二錯誤(type II error)的定義。

第一回合請於 D+3 日晚上 12 點以前從「議題討論」區【張貼】標題：「推論情境」，本文：請您思考一下，自己設計一個範例來具體詳細說明，先陳述虛無假設和對立假設的狀況內容，再敘述型一錯誤和型二錯誤以及兩種推論正確的情況(10 個字以上詮釋)。

待有 35 篇第一回合【張貼】回應或第一回合【張貼】時間結束後，請再次詳細檢視所有同學的情境說明。第二回合【張貼】標題：「最佳詮釋」，本文：回應一下哪一位同學詮釋得最好，並說明理由(10 個字以上)。希望可以達到集思廣益的目的，透過討論分析型一錯誤和型二錯誤的特性，期望可以具體提升同學的學習效益。第二回合【張貼】截止時間就是本議題在平台上的關閉時間。

3.學習者相互同步討論議題：辨識左尾、右尾和雙尾檢定

第一回合請於 D+2 日中午 12：00 以前從「議題討論」區【張貼】標題：「辨識方法」，本文：請分析從實際的應用案例或情境中，如何辨識左尾、右尾還是雙尾檢定？可以條列式具體陳述各種檢定的條件(10 個字以上)。

待有 25 篇第一回合【張貼】回應或第一回合【張貼】時間結束後，請再次詳細檢視其他同學的回應內容。第二回合【張貼】標題：「最佳詮釋」，本文：選擇一個或數個您覺得詮釋最佳者，並說明理由(10 個字以上)。第二回合【張貼】截止時間就是本議題在平台上的關閉時間。

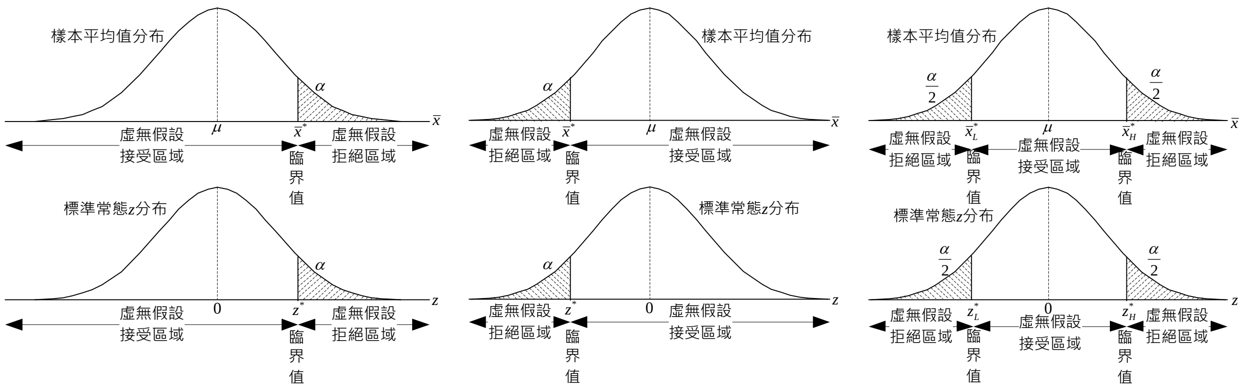
重點整理

研究假設的目的是從兩個關於母體中特定參數可能的數值之相互衝突假設，選擇其中一個假設作為決策的基礎。兩個相互衝突的研究假設之間，彼此互斥，一個假設為真時，另一個假設即為偽。

虛無假設(null hypothesis)可以標記為 H_0，為即將被檢驗的一種陳述，通常此陳述是**代表現狀**(*status quo*)；對立假設(alternative hypothesis; research hypothesis)可以標記為 H_1 或 H_a。

假設檢定三種型態

右尾檢定(Right-tailed test)	左尾檢定(Left-tailed test)	雙尾檢定(Two-tailed test)
$H_0: \mu \le 56000$	$H_0: \mu \ge 20$	$H_0: \mu = 600$
$H_1: \mu > 56000$	$H_1: \mu < 20$	$H_1: \mu \ne 600$



事實(true)：真實狀況

		H_0 為真	H_0 為偽；H_1 為真
決策或推論(依據統計驗證後建議的決策)(decision)	接受 H_0 (accept H_0)	判斷正確 機率 $1-\alpha$	判斷錯誤 機率 β 型二錯誤(Type II error)
	拒絕 H_0；接受 H_1 (reject H_0; accept H_1)	判斷錯誤 機率 α 型一錯誤(Type I error)	判斷正確 機率 $1-\beta$

	雙尾檢定(two-tailed)	左尾檢定(left-tailed)	右尾檢定(right-tailed)
假設	H_0: $\mu = \mu_0$ H_1: $\mu \neq \mu_0$	H_0: $\mu \geq \mu_0$ H_1: $\mu < \mu_0$	H_0: $\mu \leq \mu_0$ H_1: $\mu > \mu_0$
虛無假設拒絕區域	左右兩尾	左尾	右尾
α 值	$\frac{\alpha}{2}$	α	α
臨界值	$-z_{\frac{\alpha}{2}}$ and $z_{\frac{\alpha}{2}}$	$-z_\alpha$	z_α
虛無假設拒絕區域	$R = \{Z \leq -z_{\frac{\alpha}{2}}$ or $Z \geq z_{\frac{\alpha}{2}}\}$	$R = \{Z \leq -z_\alpha\}$	$R = \{Z \geq z_\alpha\}$

機率檢定法或 p 值檢定法的假設檢定標準

若 $p \geq \alpha$，接受虛無假設(null hypothesis) H_0，放棄對立假設(alternative hypothesis) H_1

若 $p < \alpha$，拒絕虛無假設(null hypothesis) H_0，接受對立假設(alternative hypothesis) H_1

母體比例 p 的假設檢定，有三種型態

左尾檢定	右尾檢定	雙尾檢定
H_0: $p \geq p_0$ H_1: $p < p_0$	H_0: $p \leq p_0$ H_1: $p > p_0$	H_0: $p = p_0$ H_1: $p \neq p_0$

在樣本數量較多($n > 30$)的情況($n \times p > 5$ 及 $n \times q > 5$)下，樣本比例$\bar{p}$的抽樣分布接近於常態分布 $\bar{p} \sim N(p, \frac{p \times q}{n})$。因此，可以利用標準化 z 值進行檢定。

$$z = \frac{\bar{p}-p_0}{\sigma_{\bar{p}}} = \frac{\bar{p}-p_0}{\sqrt{\frac{p_0 \times q_0}{n}}} = \frac{\bar{p}-p_0}{\sqrt{\frac{p_0 \times (1-p_0)}{n}}}$$

經過檢定過程後，將原本對立假設(alternative hypothesis)H_1 為真實的情況，誤判為接受虛無假設(null hypothesis)H_0，此時發生型二錯誤，其發生機率為 β，則：

$$\beta = P(\text{接受虛無假設 } H_0 | \text{對立假設 } H_1 \text{ 為真}) = P(\text{接受虛無假設 } H_0 | \text{虛無假設 } H_0 \text{ 為假})$$

繪製操作特徵曲線或作業特性曲線(operating characteristic curve, OCC)和檢(定)力曲線(power curve, PC)是協助判斷在各種情況下，犯型二錯誤(Type II error)機率 β 之一種量化方式。

若利用各種真實的 μ 值與型二錯誤(Type II error)發生機率 β 製作對應曲線圖，稱為操作特徵曲線(operating characteristic curve, OCC)。

若利用各種真實的 μ 值與檢(定)力(power of the test) $1-\beta$ 製作對應曲線圖，稱為檢(定)力曲線(power curve, PC)。檢(定)力(power of the test) $1-\beta$ 可以視為正確拒絕虛無假設 H_0，接受對立假設 H_1 機率。

在母體特定研究變數之平均值 μ 的假設檢定(hypothesis test)過程中，可以透過設定顯著水準 α，達到控制型一錯誤(Type I error)發生機率。透過設定隨機抽樣的樣本數量 n，可以達到控制型二錯誤(Type II error)發生機率 β。

左尾檢定(a left-tailed test)案例(推導後計算樣本數量的公式適用於單尾檢定)

$$n = \frac{(z_\alpha + z_\beta)^2 \times \sigma^2}{(\mu_0 - \mu_1)^2}$$

雙尾檢定(a two-tailed test)下需考慮犯型一錯誤機率 α，平均分布於兩端的事實，將隨機抽樣的樣本數量 n 計算公式進行修正，如下：

$$n = \frac{\left(z_{\frac{\alpha}{2}} + z_\beta\right)^2 \times \sigma^2}{(\mu_0 - \mu_1)^2}$$

母體變異數 σ^2 的假設檢定，有三種型態

左尾檢定	右尾檢定	雙尾檢定
H_0: $\sigma^2 \geq \sigma_0^2$	H_0: $\sigma^2 \leq \sigma_0^2$	H_0: $\sigma^2 = \sigma_0^2$
H_1: $\sigma^2 < \sigma_0^2$	H_1: $\sigma^2 > \sigma_0^2$	H_1: $\sigma^2 \neq \sigma_0^2$

若母體屬於常態分布，樣本是透過隨機抽樣獲得，利用卡方進行母體變異數 σ^2 的假設檢定(Hypothesis test)

$$\chi^2 = \frac{(n-1) \times S^2}{\sigma_0^2}$$

關鍵詞彙解釋

虛無假設(null hypothesis)

針對母體參數所提出的一種假設性陳述，可以標記為 H_0，為即將被檢驗的一種陳述，通常此陳述是**代表現狀**(*status quo*)。

對立假設(alternative hypothesis; research hypothesis)

與虛無假設完全相反的一種假設性陳述，可以標記為 H_1 或 H_a。當虛無假設成立時，對立假設則無法成立；反之，虛無假設無法成立時，對立假設即會成立。

型一錯誤(Type I error)

若虛無假設事實上成立(真實存在)，但統計檢驗的結果不支持虛無假設(拒絕虛無假設)，此種推論判斷錯誤的狀況，稱為型一錯誤或第一型錯誤(type I error)。

事實(true)：真實狀況

		H_0 為真	H_0 為偽；H_1 為真
決策或推論(依據統計驗證後建議的決策)(decision)	接受 H_0 (accept H_0)	判斷正確 機率 $1-\alpha$	判斷錯誤 機率 β 型二錯誤(Type II error)
	拒絕 H_0；接受 H_1 (reject H_0; accept H_1)	判斷錯誤 機率 α	判斷正確 機率 $1-\beta$

事實(true)：真實狀況

	H_0 為真	H_0 為偽；H_1 為真
	型一錯誤(Type I error)	

型二錯誤(Type II error)

若虛無假設事實上不成立(不存在)，但統計檢驗的結果支持虛無假設(接受虛無假設)，此種推論判斷錯誤稱為型二錯誤或第二型錯誤(Type II error)。

檢(定)力(power of the test)

當虛無假設是偽，而拒絕虛無假設機率。假設型二錯誤機率為 β 時，$1-\beta$ 即為檢(定)力。可以視為正確拒絕虛無假設 H_0，接受對立假設 H_1 機率。