# 五、間斷機率分布

# Chapter 5 Discrete Probability Distribution

目錄



圖標題



表標題



**學習目標**

**知識(認知)**

1.可以描述各種間斷機率分布的特質。

2.可以說明各種間斷機率分布之期望值和變異數的意涵。

3.分辨各種間斷機率分布之間的差異性。

4.評價各種間斷機率分布的使用價值。

**技能**

1.能夠計算各種間斷機率分布的期望值和變異數。

2.能夠計算各種間斷機率分布於各種情境下機率數值。

3.綜合所學，能夠計算實務領域中各種間斷機率分布，於特定情境下機率數值。

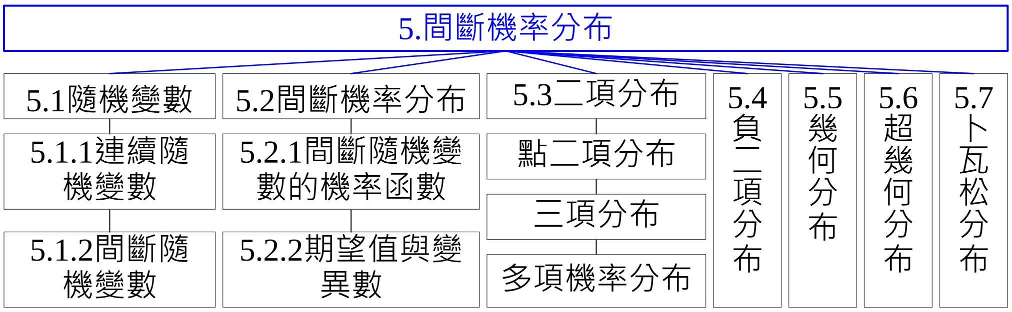
**態度(情意)**

1.意識到在日常生活或未來工作環境中，經常面臨各種屬於間斷機率分布的情境。

2.對日常生活或未來工作環境中，各種間斷機率分布的情境，能夠反應出其意涵。

在隨機實驗中的實驗結果可能是很容易量化陳述的區間尺度或比例尺度數值型態，亦有可能是屬於名目尺度或順序尺度的數值型態。若是屬於名目尺度或順序尺度者的實驗結果，即屬於間斷機率分布，本章即介紹屬於間斷機率分布中的二項分布、負二項分布、幾何分布、超幾何分布和卜瓦松分布，期望可以瞭解各種間斷機率分布的概念與其應用方式。

在經營一家餐廳或旅館時，經常面臨碰到問題成功與失敗、成長或衰退、盈餘或虧損、贊成或反對、抽中或銘謝惠顧等，不確定性的問題與挑戰，欲衡量其發生的可能性大小，就必須具體地善用間斷機率的概念，清楚的呈現不確定性問題的可能性高低，以便於管理者採取適當的方式因應。




章節結構圖

## 5.1 隨機變數

隨機變數(Random variable, RV)是隨機實驗中，描述特定實驗結果之一種數值化的表現方式。所有可能的結果組成之集合為樣本空間 $S$，此可能的結果即是樣本點，可以使用數值、符號、圖形、文字等各種方式表示。

> 利用樣本空間 $S$ 為定義領域的實數(real number)函數稱隨機變數(random variable)。

自然數(natural number){0, 1, 2, 3, …}，包含 0 和正整數。

整數(integer){…, –2, –1, 0, 1, 2, …}，包含 0、正整數、負整數。

有理數(rational number){$\frac{a}{b}$；a 和 b 皆屬於整數，同時 b$\neq$0}，有理數的小數部分屬於有限或循環。

無理數(irrational number)的小數部分屬於無限。

實數(real number, $R$)包含有理數和無理數。可以解釋為實際上存在的數值。

虛數(imaginary number；想像的數)的平方數值屬於負值。定義：$i = \sqrt{-1}$；$i^2 = -1$。若 $a$ 是屬於實數，$ai$ 屬於虛數。

隨機變數的型態可以區分為間斷隨機變數(discrete random variable)及連續隨機變數(continuous random variable)。

### 5.1.1 連續隨機變數

**連續隨機變數**(Continuous random variable) 可以具有無數個不同之變量(數值)，且任何兩個變量(數值)之間都可以再加以無限制的細分。故連續變數變量(數值)在小數點以後的數值具有意義存在。

常態分布(Normal distribution)、指數分布和一致性分布皆屬於連續變數分布。屬於區間尺度或比例尺度。

| 隨機實驗 | 隨機變數 | 隨機變數 $X$ 的樣本空間 |
|---|---|---|
| 遊樂區中遊客的平均消費金額 | 平均消費金額 | $X \geq 0$ |
| 遊樂區中遊客之平均月收入 | 平均月收入 | $X \geq 0$ |
| 遊樂區中遊客之停留時間 | 停留時間 | $X \geq 0$ |

### 5.1.2 間斷隨機變數

在間斷隨機變數(Discrete random variable)或離散隨機變數中，隨機變數可以是**有限個變量**(數值屬於名目尺度)或**無限個順序變量**(數值屬於順序尺度)。一般數值是由記點(counting)獲得。間斷變數的變量(數值)一定是整數，不能有分數存在。故，間斷變數的變量(數值)在小數點以後的數值不具有任何意義存在。

二項分布(Binomial distribution)、負二項分布(negative binomial distribution)、幾何分布(geometric distribution)、超幾何機率分布(hypergeometric probability distribution)與卜瓦松分布(Poisson distribution)屬於分立變數分布或間斷機率分布。屬於名目尺度或順序尺度。

| 隨機實驗 | 隨機變數 | 隨機變數 $X$ 的樣本空間 |
|---|---|---|
| 接受填寫問卷的遊客性別 | 性別 | 1：男　2：女 |
| 遊樂區遊客之同行人數 | 同行人數 | 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, … |
| 遊樂區遊客之居住縣市 | 居住縣市 | 1：台北市　2：新北市<br>3：桃園市　4：新竹縣 … |

## 5.2 間斷機率分布

間斷機率分布(Discrete probability distribution)或離散機率分布的呈現方式可以有機率分布表、機率分布圖或方程式三種。機率分布代表隨機變數變量(數值)的分布情況及其出現機率(或相對次數)，包括機率函數(probability function)、期望值(expected value)、變異數和標準(偏)差。隨機變數 $X$ 之機率分布函數(分配函數)即為機率函數(probability function)，利用 $f(x_i)$符號代表。

範例 5.1　阿格餐廳每日銷售龍蝦套餐數量(隨機變數)$X$ 機率分布，如下表所示：

| $x_i$ | $f(x_i)$ |
|---|---|
| 0 | 0.10 |

| $x_i$ | $f(x_i)$ |
|---|---|
| 1 | 0.25 |
| 2 | 0.30 |
| 3 | 0.25 |
| 4 | 0.10 |
| ~~5~~ | ~~0.00~~ |
| 合計 | 1.00 |

### 5.2.1 間斷隨機變數機率函數

間斷隨機變數 $X$，其有 $N$ 個數值變量分別為 $x_1$、$x_2$、$x_3$、…和 $x_N$，每個數值變量機率函數(probability function)表示為 $f(x_i)$。間斷隨機變數機率函數(機率分布)$f(x_i)$必須符合下列條件：

$$0 \le f(x_i) \le 1$$

$$\sum_{i=1}^{N} f(x_i) = 1$$

間斷隨機變數 $X$ 機率分布，皆分開集中於各個變量(數值)點上，並非連續性的函數。故間斷隨機變數機率函數，又稱為機率密集函數、機率結集函數或機率質量函數(probability mass function, pmf or p.m.f.)。

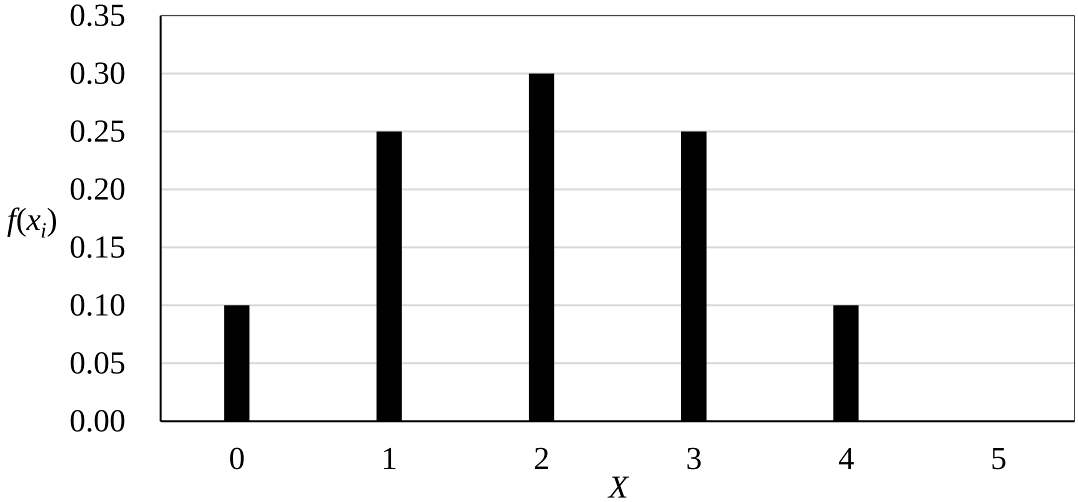



圖 5-1 間斷機率分布示意圖

### 5.2.2 期望值與變異數

有 $N$ 個數值變量分別為 $x_1$、$x_2$、$x_3$、…和 $x_N$ 之隨機變數(population mean)$X$ 的母體平均值 $\mu$ 即為期望值(expected value)，利用 $E(X)$標示，評量隨機變數 $X$ 的中央位置(central location)。利用隨機變數各變量機率函數 $f(x_i)$為其加權值之加權平均數。

期望值(expected value)為進行隨機實驗多次∞時，預期可以觀察得到的觀測值。所有可能變量(結果)的加權平均值，每種可能變量(結果)所對應的加權值為該結果機率函數 $f(x_i)$。亦可詮釋為重複多次測量隨機變數，用所獲得的數值計算之加權平均值。

$$\text{期望值 } E(X) = \sum_{i=1}^{N} x_i \times f(x_i) = \mu$$

投擲一個正常的六面骰子，假設每次投擲骰子獲得的點數(分別是 1，2，3，4，5 和 6 點)以隨機變數 $X$ 代表，其點數 $X$ 的期望值 $E(X) = 3.5$，運算：

$$\text{期望值 } E(X) = \sum_{i=1}^{N} x_i \times f(x_i) = 1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{6} + 3 \times \frac{1}{6} + 4 \times \frac{1}{6} + 5 \times \frac{1}{6} + 6 \times \frac{1}{6} = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = \frac{21}{6} = 3.5$$

期望值性質：

1.加上一個常數 $E(X) + c = E(X + c)$，其中 c 屬於常數(constant)。隨機變數 $X$ 分別加上一個常數之後的期望值，會等於隨機變數 $X$ 的期望值加上一個常數。

2.乘以一個常數 $c \times E(X) = E(c \times X)$，其中 c 屬於常數(constant)。隨機變數 $X$ 分別乘上一個常數之後的期望值，會等於隨機變數 $X$ 的期望值乘上一個常數。

3.兩個隨機變數相加 $E(X) + E(Y) = E(X + Y)$，其中 $Y$ 屬於另一個隨機變數。兩個隨機變數相加之後的期望值，會等於個別隨機變數之期望值的相加。

4.$E[aX + bY] = a \times E(X) + b \times E(Y)$。其中：$X$ 和 $Y$ 代表在同一個機率空間內的兩個隨機變數(相互獨立或非相互獨立)，$a$ 和 $b$ 為實數。

範例 5.2　阿格餐廳每日銷售龍蝦套餐數量 $X$ 機率分布，如下表所示：請計算每日銷售龍蝦套餐分布的期望值？

| $x_i$ | $f(x_i)$ | $x_i \times f(x_i)$ |
|---|---|---|
| 0 | 0.10 | 0.00 |
| 1 | 0.25 | 0.25 |
| 2 | 0.30 | 0.60 |
| 3 | 0.25 | 0.75 |
| 4 | 0.10 | 0.40 |
| ~~5~~ | ~~0.00~~ | ~~0.00~~ |
| 合計 | 1.00 | 2.00 |

題解：期望值 $E(X) = \sum_{i=1}^{N} x_i \times f(x_i) = \mu = 2.00$ 套

答案：每日銷售龍蝦套餐分布的期望值 = 2.00 套

**間斷隨機變數的變異數**

隨機變數 $X$ 有 $N$ 個變量(數值)分別為 $x_1$、$x_2$、$x_3$、…和 $x_N$ 之變異數(variance)，利用 $Var(X)$或 $V(X)$符號標示，評量隨機變數 $X$ 的分散程度或變異程度。隨機變數 $X$ 的母體平均值和期望值分別為 $\mu_X$ 和 $E(X)$。

$$Var(X) = \sigma^2 = \sum_{i=1}^{N}(x_i - \mu)^2 \times f(x_i) = \sum_{i=1}^{N}[\boldsymbol{x_i} - \boldsymbol{E(X)}]^2 \times \boldsymbol{f(x_i)} = \sum_{i=1}^{N} x_i^2 \times f(x_i) - [E(X)]^2$$
$$= \sum_{i=1}^{N} x_i^2 \times f(x_i) - \mu^2 = E(X^2) - \mu^2 = E(X^2) - [E(X)]^2 = E[(x - \mu_X)^2]$$

標準(偏)差(standard deviation) σ

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \mu)^2 \times f(x_i)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{N}[x_i - E(X)]^2 \times f(x_i)}$$

| 間斷隨機變數 | 敘述性統計 |
|---|---|
| 變異數$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{N}(x_i - \mu)^2 \times f(x_i)$ | 變異數$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{N}\frac{(x_i-\mu)^2}{N} = \sum_{i=1}^{N}(x_i - \mu)^2 \times \frac{1}{N}$ |
| 每一個變量機率不相等，故分別乘以不相同的$f(x_i)$，以運算出$E[(X - \mu)^2]$。代表變數與平均值之差平方的期望值，即是變異數。 | 每一個變量機率相等，故統一乘以相同的$\frac{1}{N}$，以運算出$E[(X - \mu)^2]$。代表變數與平均值之差平方的期望值，即是變異數。 |

間斷(離散)隨機變數 $X$ 有 $N$ 個變量(數值)分別為 $x_1$、$x_2$、$x_3$、…和 $x_N$，若每一個變量(數值)出現機率相等，依據隨機變數變異數的定義：

$$\text{變異數 } \sigma^2 = \sum_{i=1}^{N}\frac{(x_i-\mu)^2}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i-\mu)^2}{N} = \frac{(x_1-\mu)^2+(x_2-\mu)^2+\cdots+(x_N-\mu)^2}{N}\text{，其中 } \mu = \frac{\sum_{i=1}^{N}x_1}{N} = \frac{x_1+x_2+\cdots+x_N}{N}$$

若 $x_1$、$x_2$、$x_3$、…、$x_N$ 每一個變量(數值)出現機率不相等時，依序分別為 $f(x_1)$、$f(x_2)$、$f(x_3)$、…、$f(x_N)$，間斷(離散)隨機變數 $X$ 的變異數：

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{N} f(x_i) \times (x_i - \mu)^2 = \sum_{i=1}^{N}(x_i - \mu)^2 \times f(x_i)$$

範例 5.3　阿格餐廳每日銷售龍蝦套餐數量 $X$ 機率分布，如下表所示：請計算每日銷售龍蝦套餐分布的變異數和標準(偏)差？

| $x_i$ | $f(x_i)$ | $x_i \times f(x_i)$ | $x_i^2$ | $x_i^2 \times f(x_i)$ | $x_i - \mu$ | $(x_i - \mu)^2$ | $(x_i - \mu)^2 \times f(x_i)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0.10 | 0.00 | 0 | 0.00 | -2 | 4 | 0.40 |
| 1 | 0.25 | 0.25 | 1 | 0.25 | -1 | 1 | 0.25 |
| 2 | 0.30 | 0.60 | 4 | 1.20 | 0 | 0 | 0.00 |
| 3 | 0.25 | 0.75 | 9 | 2.25 | 1 | 1 | 0.25 |
| 4 | 0.10 | 0.40 | 16 | 1.60 | 2 | 4 | 0.40 |
| ~~5~~ | ~~0.00~~ | ~~0.00~~ | 25 | 0.00 | ~~3~~ | ~~9~~ | ~~0.00~~ |
| 合計 | 1.00 | 2.00 | 55 | 5.30 | | | 1.30 |

題解：期望值 $E(X) = \sum_{i=1}^{N} x_i \times f(x_i) = \mu = 2.00$；$E(X^2) = \sum_{i=1}^{N} x_i^2 \times f(x_i) = 5.30$ 套 $^2$

變異數 $Var(X) = \sigma^2 = \sum_{i=1}^{N}(x_i - \mu)^2 \times f(x_i) = 1.30$ 套 $^2$ $=$ $E(X^2) - [E(X)]^2 = 5.30 - 2.00^2 = 1.30$ 套 $^2$(兩種算法答案都一樣，融會貫通)

標準(偏)差 $\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \mu)^2 \times f(x_i)} = \sqrt{1.30} = 1.14$ 套

答案：每日銷售龍蝦套餐分布的變異數 = 1.30 套 $^2$；標準(偏)差 = 1.14 套

範例 5.4 假設隨機變數 $X$ 為某地區中家庭擁有自行車數量與其機率分布如下表所示：請計算該地區家庭自行車數量分布的期望值、$E(X^2)$、變異數和標準(偏)差？

| $x_i$ | $f(x_i)$ | $x_i \times f(x_i)$ | $x_i^2$ | $x_i^2 \times f(x_i)$ | $x_i - \mu$ | $(x_i - \mu)^2$ | $(x_i - \mu)^2 \times f(x_i)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0.05 | 0.00 | 0 | 0.00 | -2.2 | 4.84 | 0.242 |
| 1 | 0.15 | 0.15 | 1 | 0.15 | -1.2 | 1.44 | 0.216 |
| 2 | 0.45 | 0.90 | 4 | 1.80 | -0.2 | 0.04 | 0.018 |
| 3 | 0.25 | 0.75 | 9 | 2.25 | 0.8 | 0.64 | 0.160 |
| 4 | 0.10 | 0.40 | 16 | 1.60 | 1.8 | 3.24 | 0.324 |
| ~~5~~ | ~~0.00~~ | ~~0.00~~ | 25 | 0.00 | 2.8 | 7.84 | 0.000 |
| 合計 | 1.00 | 2.20 | 55 | 5.80 | | | 0.960 |

題解：期望值 $E(X) = \sum_{i=1}^{N} x_i \times f(x_i) = \mu = 2.20$ 輛；$E(X^2) = \sum_{i=1}^{N} x_i^2 \times f(x_i) = 5.80$ 輛 $^2$

變異數 $Var(X) = \sigma^2 = \sum_{i=1}^{N}(x_i - \mu)^2 \times f(x_i) = 0.960$ 輛 $^2$ $= E(X^2) - [E(X)]^2 = 5.80 - 2.2^2 = 0.960$ 輛 $^2$(兩種算法答案都一樣，融會貫通)

標準(偏)差 $\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \mu)^2 \times f(x_i)} = \sqrt{0.960} = 0.9798$ 輛

答案：家庭自行車數量分布的期望值= 2.2 輛；$E(X^2) = 5.80$ 輛 $^2$；變異數 = 0.960 輛 $^2$；標準(偏)差 = 0.9798 輛

練習 5.1 請計算下列離散機率分布的平均值與標準(偏)差。(答案有效位數四捨五入取到小數點後第 2 位)

| $x_i$ | $f(x_i)$ |
|---|---|
| 0 | 0.05 |
| 1 | 0.12 |
| 2 | 0.21 |
| 3 | 0.24 |
| 4 | 0.15 |
| 5 | 0.11 |
| 6 | 0.08 |
| 7 | 0.04 |
| 合計 | 1.00 |

答案：平均值 = 3.17；標準(偏)差 = 1.75

練習 5.2 小雯飲料店販售超大珍珠奶茶，每天販售預估量 0、1、2、3、4、5 和 6 杯機率分別為 0.03、0.05、0.14、0.31、0.25、0.15 和 0.07，每杯成本新台幣 30 元，販售 60 元，為維繫

最佳品質，當天未販售的皆必須拋棄，請估算(A)每天準備 6 杯的平均利潤？(答案有效位數四捨五入取到小數點後第 1 位)(B)為獲得最大利潤，每天應該準備幾杯？(答案有效位數取到個位數)

題解：設隨機變數 $X$ 為每天販售預估量(杯)

| $x_i$ | $f(x_i)$ | $x_i \times f(x_i)$ |
|---|---|---|
| 0 | 0.03 | 0.00 |
| 1 | 0.05 | 0.05 |
| 2 | 0.14 | 0.28 |
| 3 | 0.31 | 0.93 |
| 4 | 0.25 | 1.00 |
| 5 | 0.15 | 0.75 |
| 6 | 0.07 | 0.42 |
| 合計 | 1.00 | 3.43 |

期望值 $E(X) = \sum_{i=1}^{N} x_i \times f(x_i) = 3.43$

每天準備 6 杯的平均利潤 = $60 \times E(x) - 30 \times 6 = 60 \times E(X) - 180 = 60 \times 3.43 - 180 = 25.8$ 元，每天準備 6 杯，平均能賣 3.43 杯，收入 $60 \times 3.43$ – 成本 $30 \times 6 = 205.8 - 180$ = 利潤 25.8 元。

每天準備 5 杯的平均利潤 = $60 \times 3.43 - 150 = 55.8$ 元

每天準備 4 杯的平均利潤 = $60 \times 3.43 - 120 = 85.8$ 元

每天準備 3 杯的平均利潤 = $60 \times 3.00 - 90 = 90.0$ 元。每天準備 3 杯，最多也僅能賣 3 杯，收入 $60 \times 3$ – 成本 $30 \times 3 = 180 - 90$ = 利潤 90。

每天準備 2 杯的平均利潤 = $60 \times 2.00 - 60 = 60.0$ 元。每天準備 2 杯，最多也僅能賣 2 杯，收入 $60 \times 2$ – 成本 $30 \times 2 = 120 - 60$ = 利潤 60。

答案：(A)每天準備 6 杯平均利潤 = 25.8 元；(B)每天準備 3 杯平均利潤最高

練習 5.3　高雄市大學生平均年 10 萬輛機車中，有死亡事件 4 件，重傷者有 160 件，輕傷者有 635 件，若保險公司死亡每件賠新臺幣 200 萬，重傷每件賠 20 萬，輕傷每件賠 5 萬元，不計其他成本，請估算投保該保險公司者每年需繳交多少保險費，保險公司才能不賠錢？(答案有效位數取到個位數)

題解：設隨機變數 $X$ 為保險公司收益，m 是每年每部機車必須繳交的保費

$$4\times2000000 + 160\times200000 + 635\times50000 = 100000\times m \quad \rightarrow \quad m = 717.5 \text{ 元}$$

答案：718 元

練習 5.4　大牛飲料店依據以往銷售記錄，每日珍珠奶茶數量(杯)如下表所示，請計算(A)此飲料店每日珍珠奶茶銷售數量 $X$ 的期望值 $E(X)$及變異數 $V(X)$；(B)若販售一杯珍珠奶茶利潤為新台幣 15 元，請計算利潤的平均值與標準(偏)差。(答案有效位數取到個位數)

| 數量 $x_i$ | 50 | 60 | 70 | 80 | 90 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x_i)$ | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.3 | 0.1 |

題解：

(A)期望值 $E(x_i) = \sum_{i=1}^{N} x_i \times f(x_i) = 50 \times 0.1 + 60 \times 0.2 + 70 \times 0.3 + 80 \times 0.3 + 90 \times 0.1 = 71$ 杯

變異數 $Var(X) = \sigma^2 = \sum_{i=1}^{N} (x_i - \mu)^2 \times f(x_i) = (50 - 71)^2 \times 0.1 + (60 - 71)^2 \times 0.2 + (70 - 71)^2 \times 0.3 + (80 - 71)^2 \times 0.3 + (90 - 71)^2 \times 0.1 = 44.1 + 24.2 + 0.3 + 24.3 + 36.1 = 129$ 杯 $^2$

(B)假設利潤 $Y = 15 \times X$，利潤的期望值 $E(Y)$與變異數 $Var(Y)$分別為

利潤平均值 $E(Y) = E(15 \times X) = 15 \times E(X) = 15 \times 71 = 1065$ 元

利潤變異數 $Var(Y) = Var(15 \times X) = 15^2 \times Var(X) = 15^2 \times 129 = 29025$

利潤標準(偏)差 SD = σ = $\sqrt{Var(Y)} = \sqrt{29025} = 170.3673$ 元

答案：(A) $E(X) = 71$ 杯；$Var(X) = 129$ 杯 $^2$；(B)利潤平均值 1065 元；利潤標準(偏)差 170 元

練習 5.5 國小學生玩尋寶遊戲，找到寶物的時間，符合下列機率分布，若學生尋寶時間比 5 分鐘快 1 分鐘，即花費 4 分鐘時，給予新台幣 10 元獎勵，比 5 分鐘快 2 分種，給予新台幣 20 元獎勵，依此累計，若尋寶時間達 5 分鐘或更多時間時，就沒有獎勵，請計算(A)平均獎勵多少元；(B)獎勵的標準(偏)差多少元。(答案有效位數四捨五入取到個位數)

| 時間 $x_i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x_i)$ | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.1 | 0.1 | 0.1 | 0.1 |

題解：

| 時間 $x_i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x_i)$ | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.1 | 0.1 | 0.1 | 0.1 |
| 獎勵 | 40 | 30 | 20 | 10 | 0 | 0 | 0 |

(A)期望值 $E(X) = \sum_{i=1}^{N} x_i \times f(x_i) = 40 \times 0.1 + 30 \times 0.2 + 20 \times 0.3 + 10 \times 0.1 + 0 \times 0.1 + 0 \times 0.1 + 0 \times 0.1 = 17$

(B)變異數 $Var(X) = \sigma^2 = \sum_{i=1}^{N} (x_i - \mu)^2 \times f(x_i) = (40 - 17)^2 \times 0.1 + (30 - 17)^2 \times 0.2 + (20 - 17)^2 \times 0.3 + (10 - 17)^2 \times 0.1 + (0 - 17)^2 \times 0.1 + (0 - 17)^2 \times 0.1 + (0 - 17)^2 \times 0.1 = 52.9 + 33.8 + 2.7 + 4.9 + 28.9 + 28.9 + 28.9 = 181$

標準(偏)差 SD = $\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{181} = 13.4536$

答案：(A)平均獎勵 17 元；(B)獎勵的標準(偏)差 13.4536 元

**間斷隨機變數的標準化**

隨機變數 $X$ 有 $N$ 個變量(數值)分別標示為 $x_1$、$x_2$、$x_3$、…、$x_N$。隨機變數 $X$ 的母體平均值和期望值為 $\mu$ 和 $E(X)$。標準化變數($z_i$-變數、$z_i$-值)為隨機變數特定變量 $x_i$ 減去母體平均值和期望值為 $\mu$ 和 $E(X)$後，再除以標準(偏)差 σ。

$$z_i = \frac{x_i - \mu}{\sigma} = \frac{x_i - E(X)}{\sigma}$$

範例 5.5 阿琦餐廳每日銷售龍蝦套餐數量 $X$ 機率分布，如下表所示：請計算每日銷售龍蝦套餐數量的標準化數值？

| $x_i$ | $f(x_i)$ | $x_i \times f(x_i)$ | $x_i - \mu$ | $(x_i - \mu)^2$ | $(x_i - \mu)^2 \times f(x_i)$ | $\frac{x_i - \mu}{\sigma}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0.10 | 0.00 | -2 | 4 | 0.40 | -1.75 |
| 1 | 0.25 | 0.25 | -1 | 1 | 0.25 | -0.88 |
| 2 | 0.30 | 0.60 | 0 | 0 | 0.00 | 0.00 |
| 3 | 0.25 | 0.75 | 1 | 1 | 0.25 | 0.88 |
| 4 | 0.10 | 0.40 | 2 | 4 | 0.40 | 1.75 |
| 5 | 0.00 | 0.00 | 3 | 9 | 0.00 | |
| 合計 | 1.00 | 2.00 | | | 1.30 | 0.00 |

題解：隨機變數 $X$ 期望值 $E(X) = \sum_{i=1}^{N} x_i \times f(x_i) = \mu = 2.00$

變異數 $Var(X) = \sigma^2 = \sum_{i=1}^{N} (x_i - \mu)^2 \times f(x_i) = 1.30$

標準(偏)差 $\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} (x_i - \mu)^2 \times f(x_i)} = \sqrt{1.30} = 1.14$

$$z_i = \frac{x_i - \mu}{\sigma} = \frac{x_i - E(X)}{\sigma} = \frac{0 - 2.00}{1.14} = \frac{-2}{1.14} = -1.75$$

練習 5.6 請計算下列離散機率分布的各變量之標準化 z 值。(答案有效位數四捨五入取到小數點後第 4 位)

| $x_i$ | $f(x_i)$ | $x_i \times f(x_i)$ | $x_i - \mu$ | $(x_i - \mu)^2$ | $(x_i - \mu)^2 \times f(x_i)$ | $\frac{x_i - \mu}{\sigma}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0.05 | 0.00 | -3.17 | 10.0489 | 0.5024 | -1.8118 |
| 1 | 0.12 | 0.12 | -2.17 | 4.7089 | 0.5651 | -1.2403 |
| 2 | 0.21 | 0.42 | -1.17 | 1.3689 | 0.2875 | -0.6687 |
| 3 | 0.24 | 0.72 | -0.17 | 0.0289 | 0.0069 | -0.0972 |
| 4 | 0.15 | 0.60 | 0.83 | 0.6889 | 0.1033 | 0.4744 |
| 5 | 0.11 | 0.55 | 1.83 | 3.3489 | 0.3684 | 1.0460 |
| 6 | 0.08 | 0.48 | 2.83 | 8.0089 | 0.6407 | 1.6175 |
| 7 | 0.04 | 0.28 | 3.83 | 14.6689 | 0.5868 | 2.1891 |
| 合計 | 1.00 | 3.17 | | | 3.0611 | |

題解：期望值 $E(X) = \sum_{i=1}^{N} x_i \times f(x_i) = \mu = 3.17$

變異數 $Var(X) = \sigma^2 = \sum_{i=1}^{N}(x_i - \mu)^2 \times f(x_i) = 3.0611$

標準(偏)差 $\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \mu)^2 \times f(x_i)} = \sqrt{3.0611} = 1.7496$

$$x_i = 0.0000 \rightarrow z_i = \frac{x_i - \mu}{\sigma} = \frac{x_i - E(X)}{\sigma} = \frac{0.0000 - 3.17}{1.7496} = -1.8118$$

隨機變數 $X$ 特定變量 $x_i$ 經過標準化後的 $z_i$-值，其以機率函數 $f(x_i)$加權之平均值(期望值)等於 0。

$$E(Z) = E\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma} \times [E(X) - \mu] = 0$$

| $x_i$ | $f(x_i)$ | $x_i \times f(x_i)$ | $x_i - \mu$ | $(x_i - \mu)^2$ | $(x_i - \mu)^2 \times f(x_i)$ | $\frac{x_i - \mu}{\sigma}$ | $\frac{x_i - \mu}{\sigma} \times f(x_i)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0.10 | 0.00 | -2 | 4 | 0.40 | -1.75 | -0.175 |
| 1 | 0.25 | 0.25 | -1 | 1 | 0.25 | -0.88 | -0.220 |
| 2 | 0.30 | 0.60 | 0 | 0 | 0.00 | 0.00 | 0.000 |
| 3 | 0.25 | 0.75 | 1 | 1 | 0.25 | 0.88 | 0.220 |
| 4 | 0.10 | 0.40 | 2 | 4 | 0.40 | 1.75 | 0.175 |
| 5 | 0.00 | 0.00 | 3 | 9 | 0.00 | 2.63 | 0.000 |
| 合計 | 1.00 | 2.00 | | | 1.30 | 2.63 | 0.000 |

隨機變數 $X$ 特定變量 $x_i$ 經過標準化後的 $z_i$-值，其**變異數**等於 **1**。

$$Var(Z) = V\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma^2} \times V(X - \mu) = \frac{1}{\sigma^2} \times [V(X) - V(\mu)] = \frac{1}{\sigma^2} \times (\sigma^2 - 0) = 1$$

| $x_i$ | $f(x_i)$ | $x_i \times f(x_i)$ | $x_i - \mu$ | $(x_i - \mu)^2$ | $(x_i - \mu)^2 \times f(x_i)$ | $\frac{x_i - \mu}{\sigma}$ | $\left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)^2$ | $\left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)^2 \times f(x_i)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0.10 | 0.00 | -2 | 4 | 0.40 | -1.75 | 3.063 | 0.306 |
| 1 | 0.25 | 0.25 | -1 | 1 | 0.25 | -0.88 | 0.774 | 0.194 |
| 2 | 0.30 | 0.60 | 0 | 0 | 0.00 | 0.00 | 0.000 | 0.000 |
| 3 | 0.25 | 0.75 | 1 | 1 | 0.25 | 0.88 | 0.774 | 0.194 |
| 4 | 0.10 | 0.40 | 2 | 4 | 0.40 | 1.75 | 3.063 | 0.306 |
| 5 | 0.00 | 0.00 | 3 | 9 | 0.00 | 2.63 | 6.917 | 0.000 |
| 合計 | 1.00 | 2.00 | | | 1.30 | 2.63 | | 1.000 |

## 5.3 二元間斷隨機變數

2 個間斷隨機變數的關係與其發生機率。

## 5.3 二項分布

當每次隨機實驗僅有兩種可能的結果，若為成功或失敗時，重複 $n$ 次獨立隨機實驗，每次隨機實驗成功機率皆為 $p$，成功機率 $P$(成功) = $p$，另失敗機率 $P$(失敗) = 1 – $p$ = $q$，此所有隨機實驗結果之組成分布，即稱為**二項分布**、**二項機率分布**或**二項分配**(Binomial probability distribution)，此分布中二項隨機變數 $X$ 表示 $n$ 次隨機實驗中成功次數。

二項(式)隨機實驗的特徵

a.二項式隨機實驗包括有 $n$ 次相同的實驗。

b.每次實驗都有兩種可能的結果，兩種結果為**互斥**，一般常以成功(S)與失敗(F)代表(丟銅板實驗正面與反面亦可)。

c.成功機率為 $p$，失敗機率為 $q$ = 1 – $p$。在每次實驗中**成功機率** $p$ 皆相同，同理，在每次實驗中**失敗機率** $q$ 亦相同。成功與失敗機率不會隨隨機實驗次數 $n$ 而改變，即為穩定性假設(stationary assumption)。

d.每一次實驗皆是隨機與獨立。

滿足 b、c 和 d 特徵的實驗稱為**白努力程序**或**白努力實驗**(Bernoulli process or Bernoulli trial)。符合 a、b、c 和 d 特徵的實驗稱為**二項(式)隨機實驗**。

將白努力實驗(Bernoulli trial)連續與固定執行 $n$ 次，每次實驗皆具有獨立的(independent)，相同地(identically)皆來自相同成功機率 $p$ 之實驗，將前述條件獲得的分布稱為**獨立同分布**(independent identically distribution, *i.i.d.*)。

二項族群可得兩種分布：(1)樣本平均值分布。(2)樣本合計分布。樣本合計之分布一般稱為**二項分布**(binomial distribution)，一般使用 B($n$, $p$)、b($n$,$p$)或 Binomial($n$, $p$)符號表示。因其可由二項定理公式推論而得，故名為二項分布。

二項族群正面機率 $p$ 代表成功率，而反向機率 $q$ = 1 – $p$ 代表失敗率，在 $n$ 個(次)獨立事件(隨機實驗)發生 $x$ 次成功，由二項定理，各種可能事件發生(隨機實驗)機率。可以透過二項式$(q + p)^n$的展開式獲得。

$$(q+p)^n = [(1-p)+p]^n = \sum_{x=0}^{n}\binom{n}{x}\times p^x\times(1-p)^{n-x} = q^n + \binom{n}{1}\times q^{n-1}\times p + \binom{n}{2}\times q^{n-2}\times p^2 + \ldots + \binom{n}{x}\times q^{n-x}\times p^x + \ldots + p^n = 1$$

$n$ 次失敗 0 次成功機率 + ($n$ - 1)次失敗 1 次成功機率 + ($n$ - 2)次失敗 2 次成功機率 + … + ($n$ - $x$)次失敗 $x$ 次成功機率 + … + 1 次失敗($n$ – 1)次成功機率 + 0 次失敗 $n$ 次成功機率 = 1

式中$\binom{n}{x} = \frac{n!}{x!\times(n-x)!} = C_x^n = {}_nC_x$：為組合數(count of combination)，各項發生機率為$\binom{n}{x}\times q^{n-x}\times p^x$，全部機率為 1。

$n! = n\times(n-1)\times(n-2)\times(n-3)\times\ldots\times 3\times 2\times 1$。$n$ 階乘(factorial)：為所有小於或等於 $n$ 的正整數之乘積。

0! = 1 定義。

**二項機率函數**(Binominal probability function)和**二項機率分布**(binomial probability distribution)

在 $n$ 次獨立事件(隨機實驗)中，成功機率為 $p$，失敗機率為 $q$ = 1 – $p$，發生 $x$ 次成功機率(質量)函數為：

$$f(x) = \binom{n}{x}\times p^x\times q^{n-x} = \binom{n}{x}\times p^x\times(1-p)^{n-x} = C_x^n\times p^x\times(1-p)^{n-x}$$

$$= x\text{ 次成功機率函數} = \binom{\text{實驗次數}}{\text{成功次數}}\times \text{成功機率}^{\text{成功次數}}\times\text{失敗機率}^{\text{失敗次數}}$$，其中 $x$ = 0, 1, 2, 3,…, $n$

$f(x)$ = 0，當 $x$ = otherwise

式中$\binom{n}{x} = \frac{n!}{x!\times(n-x)!} = C_x^n$為組合數(count of combination)，此組合數特稱為 Binomial coefficient。

$n$!階層 Excel 函數

利用 Excel 軟體中插入(I)→函數(F)…→在插入函數對話方塊中選取類別(C): **數學與三角函數**，選取函數(N): **FACT**→確定。在函數引數對話視窗中，Number 方塊輸入：階層數。確定。即會在原先選定的儲存格中出現階層的數值，等於 1 × 2 × 3 ×…× number。FACT(number)。

範例 5.6 新乳癌治療藥品的治癒率達 60 %(無效率為 40 %)。今實驗 5 位病人，若治癒率可靠，分別治癒 0、1、2、3、4、5 人機率為多少？(機率答案有效位數四捨五入取到小數點後第 4 位)

題解：治癒機率 $p$ = 0.6，失敗機率 $q = 1 - p = 1 - 0.6 = 0.4$，實驗次數 $n$ = 5，假設隨機變數 $X$ 代表治癒人數。

$$f(x=0) = \binom{n}{x} \times p^x \times q^{n-x} = \frac{n!}{x! \times (n-x)!} \times p^x \times q^{n-x} = \frac{5!}{0! \times 5!} \times 0.6^0 \times 0.4^5 = 0.4^5 = 0.0102$$

$$f(x=1) = \frac{5!}{1! \times 4!} \times 0.6^1 \times 0.4^4 = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{1 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} \times 0.6 \times 0.4^4 = 5 \times 0.6 \times 0.4^4 = 0.0768$$

$$f(x=2) = \frac{5!}{2! \times 3!} \times 0.6^2 \times 0.4^3 = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1 \times 3 \times 2 \times 1} \times 0.6^2 \times 0.4^3 = 10 \times 0.6^2 \times 0.4^3 = 0.2304$$

$$f(x=3) = \frac{5!}{3! \times 2!} \times 0.6^3 \times 0.4^2 = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{3 \times 2 \times 1 \times 2 \times 1} \times 0.6^3 \times 0.4^2 = 10 \times 0.6^3 \times 0.4^2 = 0.3456$$

$$f(x=4) = \frac{5!}{4! \times 1!} \times 0.6^4 \times 0.4^1 = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 1} \times 0.6^4 \times 0.4^1 = 5 \times 0.6^4 \times 0.4^1 = 0.2592$$

$$f(x=5) = \frac{5!}{5! \times 0!} \times 0.6^5 \times 0.4^0 = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 1} \times 0.6^5 \times 0.4^0 = 1 \times 0.6^5 \times 0.4^0 = 0.0778$$

(亦可使用 Excel 軟體 BINOM.DIST 函數查詢獲得)

| $x_i$ | $f(x_i)$ |
|---|---|
| 0 | 0.0102 |
| 1 | 0.0768 |
| 2 | 0.2304 |
| 3 | 0.3456 |
| 4 | 0.2592 |
| 5 | 0.0778 |
| 合計 | 1.0000 |

答案：治癒 0 人機率 0.0102，治癒 1 人機率 0.0768，治癒 2 人機率 0.2304，治癒 3 人機率 0.3456，治癒 4 人機率 0.2592，治癒 5 人機率 0.0778

二項分布成功機率 Excel 函數

利用 Excel 2010 軟體中公式→函數程式庫中其他函數→統計(S)→選取 **BINOM.DIST**。在函數引數對話視窗中，Number_s 方塊輸入：實驗成功次數 $x$；Trials 方塊中輸入：獨立實驗次數 $n$；Probability_s 方塊中輸入：每一次實驗的成功機率 $p$；Cumulative 方塊中輸入：TRUE 為採用累加分布函數、FALSE 採用機率密度函數。確定。即會在原先選定的儲存格中出現成功機率。BINOM.DIST(number_s,trials,probability_s,cumulative)。

利用 Excel 2007 軟體中插入(I)→函數(F)…→在插入函數對話方塊中選取類別(C): **統計**，選取函數(N): **BINOMDIST**→確定。在函數引數對話視窗中，Number_s 方塊輸入：實驗成功次數 $x$；Trials 方塊中輸入：獨立實驗次數 $n$；Probability_s 方塊中輸入：每一次實驗的成功機率 $p$；Cumulative 方塊中輸入：TRUE 為採用累加分布函數、FALSE 採用機率密度函數。確定。即會在原先選定的儲存格中出現成功機率。BINOMDIST(number_s,trials,probability_s,cumulative)。

範例 5.7 高雄旗津欲興建跨港纜車，原經過市政府委託民間機構進行高雄市民意調查，宣稱居民贊成百分比 72 % (反對為 28 %)。今隨機訪談 6 位高雄市民，若原先的民意調查可靠，分別有 0、1、2、3、4、5、6 人贊成機率為多少？(機率答案有效位數四捨五入取到小數點後第 4 位)

題解：贊成機率 $p$ = 0.72；反對機率 $q$ = 0.28；樣本數量 $n$ = 6，假設隨機變數 $X$ 代表贊成人數。

$f(x=0)=\binom{n}{x}\times p^x\times q^{n-x}=\frac{n!}{x!\times(n-x)!}\times p^x\times q^{n-x}=\frac{6!}{0!\times 6!}\times 0.72^0\times 0.28^6=0.28^6=0.0005$

$f(x=1)=\frac{6!}{1!\times 5!}\times 0.72^1\times 0.28^5=\frac{6\times5\times4\times3\times2\times1}{1\times5\times4\times3\times2\times1}\times 0.72\times 0.28^5=6\times 0.72\times 0.28^5=0.0074$

$f(x=2)=\frac{6!}{2!\times 4!}\times 0.72^2\times 0.28^4=\frac{6\times5\times4\times3\times2\times1}{2\times1\times4\times3\times2\times1}\times 0.72^2\times 0.28^4=15\times 0.72^2\times 0.28^4=0.0478$

$f(x=3)=\frac{6!}{3!\times 3!}\times 0.72^3\times 0.28^3=\frac{6\times5\times4\times3\times2\times1}{3\times2\times1\times3\times2\times1}\times 0.72^3\times 0.28^3=20\times 0.72^3\times 0.28^3=0.1639$

$f(x=4)=\frac{6!}{4!\times 2!}\times 0.72^4\times 0.28^2=\frac{6\times5\times4\times3\times2\times1}{4\times3\times2\times1\times2\times1}\times 0.72^4\times 0.28^2=15\times 0.72^4\times 0.28^2=0.3160$

$f(x=5)=\frac{6!}{5!\times 1!}\times 0.72^5\times 0.28^1=\frac{6\times5\times4\times3\times2\times1}{5\times4\times3\times2\times1\times1}\times 0.72^5\times 0.28^1=6\times 0.72^5\times 0.28^1=0.3251$

$f(x=6)=\frac{6!}{6!\times 0!}\times 0.72^6\times 0.28^0=\frac{6\times5\times4\times3\times2\times1}{6\times5\times4\times3\times2\times1\times1}\times 0.72^6\times 0.28^0=1\times 0.72^6\times 0.28^0=0.1393$(亦可使用 Excel 軟體 BINOM.DIST 函數查詢獲得)

| $x_i$ | $f(x_i)$ |
|---|---|
| 0 | 0.0005 |
| 1 | 0.0074 |
| 2 | 0.0478 |
| 3 | 0.1639 |
| 4 | 0.3160 |
| 5 | 0.3251 |
| 6 | 0.1393 |
| 合計 | 1.0000 |

答案：0 人贊成機率 0.0005，1 人贊成機率 0.0074，2 人贊成機率 0.0478，3 人贊成機率 0.1639，4 人贊成機率 0.3160，5 人贊成機率 0.3251，6 人贊成機率 0.1393

練習 5.7 高雄旗津欲興建跨港纜車，原經過市政府委託民間機構進行高雄市民意調查，宣稱居民贊成百分比 82 % (反對為 18 %)。今隨機訪談 5 位高雄市民，若原先的民意調查可靠，分別有 0、1、2、3、4、5 人贊成機率為多少？(機率答案有效位數四捨五入取到小數點後第 4 位)

題解：贊成機率 $p=0.82$，反對機率 $q=0.18$，樣本數量 $n=5$，假設隨機變數 $X$ 代表贊成人數

$f(x=0)=\binom{n}{x}\times p^x\times q^{n-x}=\frac{n!}{x!\times(n-x)!}\times p^x\times q^{n-x}=\frac{5!}{0!\times 5!}\times 0.82^0\times 0.18^5=0.18^5=0.0002$

$f(x=1)=\frac{5!}{1!\times 4!}\times 0.82^1\times 0.18^4=\frac{5\times4\times3\times2\times1}{1\times4\times3\times2\times1}\times 0.82\times 0.18^4=5\times 0.82\times 0.18^4=0.0043$

$f(x=2)=\frac{5!}{2!\times 3!}\times 0.82^2\times 0.18^3=\frac{5\times4\times3\times2\times1}{2\times1\times3\times2\times1}\times 0.82^2\times 0.18^3=10\times 0.82^2\times 0.18^3=0.0392$

$f(x=3)=\frac{5!}{3!\times 2!}\times 0.82^3\times 0.18^2=\frac{5\times4\times3\times2\times1}{3\times2\times1\times2\times1}\times 0.18^2\times 0.82^3=10\times 0.82^3\times 0.18^2=0.1786$

$f(x=4)=\frac{5!}{4!\times 1!}\times 0.82^4\times 0.18^1=\frac{5\times4\times3\times2\times1}{4\times3\times2\times1\times1}\times 0.82^4\times 0.18^1=5\times 0.82^4\times 0.18^1=0.4069$

$f(x=5)=\frac{5!}{5!\times 0!}\times 0.82^5\times 0.18^0=\frac{5\times4\times3\times2\times1}{5\times4\times3\times2\times1\times1}\times 0.82^5\times 0.18^0=1\times 0.82^5\times 0.18^0=0.3707$

答案：$f(0)=0.0002$；$f(1)=0.0043$；$f(2)=0.0392$；$f(3)=0.1786$；$f(4)=0.4069$；$f(5)=0.3707$

練習 5.8 高雄純純餐廳舉行消費抽獎活動，每位消費者皆可以參加抽獎活動，每位消費者抽獎後皆會將抽獎卷回復原狀後，又放入抽獎箱中以供下一位消費者抽獎，每位消費者抽中獎品機率為 0.34，每位消費者抽獎皆相互獨立，3 位消費者一起前來用餐，請估算 3 位至少一位抽中獎品機率？(機率答案有效位數四捨五入取到小數點後第 4 位)

題解：隨機變數 $X\sim B(n=3, p=0.34)$代表三位消費者抽中次數

3 位至少一位抽中獎品機率 $P(X\geq 1)=1-P(x=0)=1-(1-0.34)^3=0.7125$

答案：$P(X\geq 1)=0.7125$

範例 5.8 兩個獨立變數 $X_1$ 和 $X_2$ 皆屬於二項分布，$X_1\sim B(3,\frac{1}{3})$與 $X_2\sim B(4,\frac{1}{4})$，試計算 $P(x_1=x_2)$。(機率答案有效位數四捨五入取到小數點後第 4 位)

題解：$P(x_1 = x_2) = P(x_1 = 0) \times P(x_2 = 0) + P(x_1 = 1) \times P(x_2 = 1) + P(x_1 = 2) \times P(x_2 = 2) + P(x_1 = 3) \times P(x_2 = 3) = \binom{3}{0} \times \left(\frac{1}{3}\right)^0 \times \left(\frac{2}{3}\right)^3 \times \binom{4}{0} \times \left(\frac{1}{4}\right)^0 \times \left(\frac{3}{4}\right)^4 + \binom{3}{1} \times \left(\frac{1}{3}\right)^1 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \binom{4}{1} \times \left(\frac{1}{4}\right)^1 \times \left(\frac{3}{4}\right)^3 + \binom{3}{2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^1 \times \binom{4}{2} \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \binom{3}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^0 \times \binom{4}{3} \times \left(\frac{1}{4}\right)^3 \times \left(\frac{3}{4}\right)^1 = 1 \times 1 \times \left(\frac{2}{3}\right)^3 \times 1 \times 1 \times \left(\frac{3}{4}\right)^4 + 3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^1 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times 4 \times \left(\frac{1}{4}\right)^1 \times \left(\frac{3}{4}\right)^3 + 3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^1 \times 6 \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^2 + 1 \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times 1 \times 4 \times \left(\frac{1}{4}\right)^3 \times \left(\frac{3}{4}\right)^1 = 0.09375 + 0.1875 + 0.046875 + 0.001736 = 0.3299$

答案：$P(x_1 = x_2) = 0.3299$

範例 5.9　小牛和小花從觀光系畢業，開始尋找工作，若小牛每一天找到工作機率為 $p_1$，而小花每一天找到工作機率 $p_2$。兩人找工作皆完全相互獨立，不同天之間也相互獨立。設小牛找到工作的天數為 $X$，小花找到工作的天數為 $Y$。請推算(A)$X$ 與 $Y$ 的聯合機率分布；(B)$X = Y$ 機率；(C)在 $X \leq Y$ 的條件下，$X$ 機率分布。

題解：

(A)$f(x) =$

答案：

## 二項(式)機率分布的期望值與變異數

在 $n$ 次獨立事件(隨機實驗)中，成功機率為 $p$，失敗機率為 $q = 1 - p$，發生 $x$ 次成功的期望值 $E(X)$為：

$$E(X) = \mu = n \times p = \text{隨機實驗次數} \times \text{成功機率}$$

推導證明：$E(X) = \sum_{k=0}^{n} k \times f(x = k) = \sum_{k=0}^{n} k \times \binom{n}{k} \times p^k \times (1-p)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} k \times \frac{n!}{k! \times (n-k)!} \times p^k \times (1-p)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} k \times \frac{n \times [(n-1)!]}{k \times [(k-1)!] \times (n-k)!} \times p^k \times (1-p)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \cancel{k} \times \frac{n \times [(n-1)!]}{\cancel{k} \times [(k-1)!] \times (n-k)!} \times p^k \times (1-p)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n \times [(n-1)!]}{(k-1)! \times (n-k)!} \times p^k \times (1-p)^{n-k} = n \times \sum_{k=0}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)! \times (n-k)!} \times p^k \times (1-p)^{n-k} = n \times \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)! \times (n-k)!} \times p^k \times (1-p)^{n-k} = n \times p \times \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)! \times [(n-1)-(k-1)]!} \times p^{k-1} \times (1-p)^{(n-1)-(k-1)} = n \times p \times \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} \times p^{k-1} \times (1-p)^{(n-1)-(k-1)} = n \times p \times [p + (1-p)]^{n-1} = n \times p$

**變異數** $Var(X)$為

$$Var(X) = \sigma^2 = n \times p \times q = n \times p \times (1-p) = \text{隨機實驗次數} \times \text{成功機率} \times \text{失敗機率}$$

推導證明：$Var(X) = E\{[x - E(x)]^2\} = E\{x^2 - 2 \times x \times E(x) + [E(x)]^2\} = E(x^2) - 2 \times E(x) \times E(x) + [E(x)]^2 = E(x^2) - 2 \times [E(x)]^2 + [E(x)]^2 = E(x^2) - [E(x)]^2 = \sum_{k=0}^{n} k^2 \times f(x = k) - [E(x)]^2 = \sum_{k=0}^{n} k^2 \times \binom{n}{k} \times p^k \times (1-p)^{n-k} - [E(x)]^2 = \sum_{k=0}^{n} k \times k \times \frac{n \times [(n-1)!]}{k \times [(k-1)!] \times [(n-1)-(k-1)]!} \times p \times p^{k-1} \times (1-p)^{[(n-1)-(k-1)]} - [E(x)]^2 = \sum_{k=0}^{n} k \times \cancel{k} \times \frac{n \times [(n-1)!]}{\cancel{k} \times [(k-1)!] \times [(n-1)-(k-1)]!} \times p \times p^{k-1} \times (1-p)^{[(n-1)-(k-1)]} - [E(x)]^2 = \sum_{k=0}^{n} k \times \frac{n \times [(n-1)!]}{(k-1)! \times [(n-1)-(k-1)]!} \times p \times p^{k-1} \times (1-p)^{[(n-1)-(k-1)]} - [E(x)]^2 = k \times n \times p \times \sum_{k=0}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)! \times [(n-1)-(k-1)]!} \times p^{k-1} \times (1-p)^{[(n-1)-(k-1)]} - [E(x)]^2 = k \times n \times p \times \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)! \times [(n-1)-(k-1)]!} \times p^{k-1} \times (1-p)^{[(n-1)-(k-1)]} - [E(x)]^2 = k \times n \times p \times [p + (1-p)]^{n-1} - [n \times p]^2 =$

**標準(偏)差** $\sigma$ 為

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{n \times p \times q} = \sqrt{n \times p \times (1-p)} = \sqrt{\text{隨機實驗次數} \times \text{成功機率} \times \text{失敗機率}}$$

**偏態係數** $\beta_1$ 為【選擇教材】

$$\beta_1 = \frac{q-p}{\sqrt{n \times p \times q}}$$

**峰態係數** $\beta_2$ 為【選擇教材】

$$\beta_2 = 3 + \frac{1-6\times p\times q}{n\times p\times q}$$

**動差母函數**(moment generating function, m.g.f.) $m(x, t)$為【選擇教材】

$$m(x, t) = (p\times e^t + q)^n$$

範例 5.10 隨機變數 $X$ 屬於二項機率分布，$X$~B$(n, p)$，其平均值(mean) = 5，標準(偏)差(standard deviation) = 2。請估算 $P(x = 4)$？(答案有效位數四捨五入取到小數點後第 4 位)

題解：期望值 $E(X) = n \times p = 5$

變異數 $Var(X) = n \times p \times (1 - p) = 5 \times (1 - p) = 2^2 = 4 \;\rightarrow\; 1 - p = \frac{4}{5} = 0.8 \;\rightarrow\; 1 - 0.8 = 0.2 = p$

成功機率 $p = 0.2 \;\rightarrow\; n \times p = 5 \;\rightarrow\; n \times 0.2 = 5 \;\rightarrow\; n = \frac{5}{0.2} = 25 \;\rightarrow\;$ 隨機實驗次數 $n = 25$

$$P(x = 4) = \binom{n}{x} \times p^x \times (1 - p)^{n-x} = \binom{25}{4} \times 0.2^4 \times (1 - 0.2)^{21} = 0.1867$$

答案：$P(x = 4) = 0.1867$

範例 5.11 隨機變數 $X$ 屬於二項機率分布，$X$~B$(n, p)$，其平均值(mean) = 22.2，變異數(variance) = 13.986。請估算 $P(x = 21)$？(答案有效位數四捨五入取到小數點後第 4 位)

題解：期望值 $E(X) = n \times p = 22.2$

變異數 $Var(X) = n \times p \times (1 - p) = 22.2 \times (1 - p) = 13.986 \;\rightarrow\; 1 - p = \frac{13.986}{22.2} = 0.63 \;\rightarrow\; 1 - 0.63 = 0.37 = p$

獲得 $p = 0.37 \;\rightarrow\; n \times p = 22.2 \;\rightarrow\; n \times 0.37 = 22.2 \;\rightarrow\; n = \frac{22.2}{0.37} = 60 \;\rightarrow\;$ 隨機實驗次數 $n = 60$

$$P(x = 21) = \binom{n}{x} \times p^x \times (1 - p)^{n-x} = \binom{60}{21} \times 0.37^{21} \times (1 - 0.37)^{60-21} = 0.1020$$

答案：$P(x = 21) = 0.1020$

範例 5.12 前次統計學小考有 12 題選擇題，每題答案皆有 6 個選項，單選題，只有一個正確答案存在。若小華答案全部皆用猜測，設隨機變數 $X$ 為答對的題數。(A)請寫出 $X$ 之分布名稱及機率質量函數；(B)計算小華至多猜對 2 題機率；(C)計算 $X$ 的期望值 $E(X)$；(D)計算 $X$ 的變異數 $V(X)$。(機率答案有效位數四捨五入取到小數點後第 4 位)

題解：隨機變數 $X$~B$(12, \frac{1}{6})$代表答對題目數量，隨機變數 $X$ 服從 $n = 12$ 次隨機實驗，成功機率 $p = \frac{1}{6} = 0.16667$，失敗機率 $q = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6} = 0.833333$ 的二次分布。

隨機變數 $X$ 機率質量函數 $f(x) = \binom{12}{x} \times \left(\frac{1}{6}\right)^x \times \left(\frac{5}{6}\right)^{12-x}$，$x = 0, 1, 2, 3,\ldots, 12$；$f(x) = 0$，$x =$ otherwise

至多猜對 2 題機率 $P(X \le 2) = \binom{12}{0} \times \left(\frac{1}{6}\right)^0 \times \left(\frac{5}{6}\right)^{12} + \binom{12}{1} \times \left(\frac{1}{6}\right)^1 \times \left(\frac{5}{6}\right)^{12-1} + \binom{12}{2} \times \left(\frac{1}{6}\right)^2 \times \left(\frac{5}{6}\right)^{12-2} = \frac{12!}{0!\times 12!} \times \left(\frac{1}{6}\right)^0 \times \left(\frac{5}{6}\right)^{12} + \frac{12!}{1!\times 11!} \times \left(\frac{1}{6}\right)^1 \times \left(\frac{5}{6}\right)^{11} + \frac{12!}{2!\times 10!} \times \left(\frac{1}{6}\right)^2 \times \left(\frac{5}{6}\right)^{10} = 1 \times \left(\frac{1}{6}\right)^0 \times \left(\frac{5}{6}\right)^{12} + 12 \times \left(\frac{1}{6}\right)^1 \times \left(\frac{5}{6}\right)^{11} + 66 \times \left(\frac{1}{6}\right)^2 \times \left(\frac{5}{6}\right)^{10} = 0.112157 + 0.269176 + 0.296094 = 0.6774$

$$\text{期望值 } E(X) = n \times p = 12 \times \frac{1}{6} = 2$$

$$\text{變異數 } Var(X) = n \times p \times (1 - p) = 12 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = 1.66667$$

答案：(A)二項分布，隨機變數 $X$ 機率質量函數 $f(x) = \binom{12}{x} \times \left(\frac{1}{6}\right)^x \times \left(\frac{5}{6}\right)^{12-x}$，$x = 0, 1, 2, 3,\ldots, 12$ 與 $f(x) = 0$，$x =$ otherwise；(B)$P(X \le 2) = 0.6774$；(C)期望值 $E(X) = 2.0000$；(D)變異數 $Var(X) = 1.6667$

練習 5.9 前次統計學小考有 12 題選擇題，每題答案皆有 4 個選項，單選題，只有一個正確答案存在。若小華答案全部皆用猜測，設隨機變數 $X$ 為答對的題數。請計算(A)猜對 6 或 7 題機率。(答案有效位數四捨五入取到小數點後第 4 位)

題解：隨機變數 $X$~B$(12, \frac{1}{4})$，隨機變數 $X$ 服從 $n = 12$ 次隨機實驗，成功機率 $p = \frac{1}{4} = 0.2500$，失敗機率 $q = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = 0.7500$ 的二次分布

隨機變數 $X$ 機率質量函數 $f(x) = \binom{12}{x} \times \left(\frac{1}{4}\right)^x \times \left(\frac{3}{4}\right)^{12-x}$，其中 $x = 0, 1, 2, 3,\ldots, 12$。$f(x) = 0$，當 $x$ = otherwise

猜對 6 或 7 題機率 $P(x = 6) + P(x = 7) = \binom{12}{6} \times \left(\frac{1}{4}\right)^6 \times \left(\frac{3}{4}\right)^6 + \binom{12}{7} \times \left(\frac{1}{4}\right)^7 \times \left(\frac{3}{4}\right)^5 = \frac{12!}{6!\times 6!} \times \left(\frac{1}{4}\right)^6 \times \left(\frac{3}{4}\right)^6 + \frac{12!}{7!\times 5!} \times \left(\frac{1}{4}\right)^7 \times \left(\frac{3}{4}\right)^5 = 924 \times \left(\frac{1}{4}\right)^6 \times \left(\frac{3}{4}\right)^6 + 792 \times \left(\frac{1}{4}\right)^7 \times \left(\frac{3}{4}\right)^5 = 0.040149 + 0.011471 = 0.0516$

答案：(A) $P(x = 6) + P(x = 7) = 0.0516$

練習 5.10　有一台咖啡機一天內發生故障機率為 0.05，若該咖啡機工作三天沒有發生故障的情況下，可以創造出 3000 元的利潤，若在三天內發生一次故障時，仍然可以創造出 1500 元的利潤，若三天內發生兩天故障，無法製作咖啡飲料時，會損失 1800 元，若三天皆發生故障，無法製作咖啡飲料時，會損失 5000 元，請計算三天中平均利潤(單位：元)。(答案有效位數取到個位數)

題解：故障機率 $p = 0.05$，正常運轉機率 $q = 0.95$，觀察實驗天數 $n = 3$，假設隨機變數 $X$ 代表三天內發生故障次數。

$$x\text{ 次故障機率函數} = \binom{\text{實驗次數}}{\text{故障次數}} \times \text{故障機率}^{\text{故障次數}} \times \text{正常機率}^{\text{正常次數}}$$

$f(x = 0) = \binom{3}{0} \times 0.05^0 \times 0.95^3 = 1 \times 1 \times 0.95^3 = 0.857375$　賺 3000 元

$f(x = 1) = \binom{3}{1} \times 0.05^1 \times 0.95^2 = 3 \times 0.05 \times 0.95^2 = 0.135375$　賺 1500 元

$f(x = 2) = \binom{3}{2} \times 0.05^2 \times 0.95^1 = 3 \times 0.05^2 \times 0.95 = 0.007125$　虧 1800 元

$f(x = 3) = \binom{3}{3} \times 0.05^3 \times 0.95^0 = 1 \times 0.05^3 \times 1 = 0.00125$　虧 5000 元

盈餘 = $f(x = 0) \times 3000$ 元 + $f(x = 1) \times 1500$ 元 – $f(x = 2) \times 1800$ 元 – $f(x = 3) \times 5000$ 元 = $0.857375 \times 3000$ 元 + $0.135375 \times 1500$ 元 – $0.007125 \times 1800$ 元 – $0.00125 \times 5000$ 元 = 2761.7 元

答案：盈餘 2762 元

**累積分布函數(Cumulative distribution function, cdf, c.d.f. or CDF)**

分立隨機變數 $X$，設 $F_x(t) = P(X \le t)$，$F_x(t)$為隨機變數 $X$ 的累積分布函數(cumulative distribution function)。二項機率分布的累積分布函數如下，其數值可以透過查二項分布累計機率表獲得。

$$F_x(t) = P(X \le t) = \sum_{x=0}^{t} \binom{n}{x} \times p^x \times q^{n-x} = \sum_{0\text{ 次成功}}^{t\text{ 次成功}} \binom{\text{實驗次數}}{\text{成功次數}} \times \text{成功機率}^{\text{成功次數}} \times \text{失敗機率}^{\text{失敗次數}}$$

範例 5.13　新子宮頸癌治療藥品的治癒率達 90 % (無效率為 10 %)。(A)今實驗 20 位病人，若治癒率可靠，應有多少病人治癒？(B)最多有 15 位病人治癒機率？(機率答案有效位數四捨五入取到小數點後第 4 位)

題解：假設隨機變數 $X$ 代表治癒人數

(A)由二項分布期望值 $E(X) = n \times p = 20 \times 0.9 = 18$ 人

(B)最多 15 人治癒機率可利用二項分布累計機率公式

$$P(X \le t = 15) = \sum_{x=0}^{t=15} f(x) = \sum_{x=0}^{t=15} \binom{20}{x} \times (0.90)^x \times (0.10)^{20-x}$$

從二項分布累計機率表，查樣本數量(人數)$n = 20$，治癒機率 $p = 0.90$，治癒最高數量(人數)$t = 15$，最多有 15 人治癒機率 $P(X \le 15) = 0.0432$(亦可使用 Excel 軟體 BINOM.DIST 函數查詢獲得)。

答案：(A)18 人；(B)機率 0.0432

範例 5.14　高雄欲興建海上主題樂園之民意調查，若設 80 %居民贊成，20 %居民反對，今獨立隨機訪問 15 位居民，請估算(A)8 人(含)以上贊成機率？(B)有 10 至 14 人(含)贊成機率？(答案有效位數四捨五入取到小數點後第 4 位)

題解：假設隨機變數 $X$ 代表贊成人數

(A) 8 人(含)以上贊成機率 $P(X \geq 8) = 1 - P(X \leq 7)$

從二項分布累計機率表，抽樣樣本數量 $n = 15$，最高贊成數量 $t = 7$，贊成機率 $p = 0.80$，最多有 7 人贊成機率 $P(X \leq 7) = 0.0042$(亦可使用 Excel 軟體 BINOM.DIST 函數查詢獲得)。

$$P(X \geq 8) = 1 - P(X \leq 7) = 1 - 0.0042 = 0.9958$$

(B) 10 至 14 人(含)贊成機率 $P(10 \leq X \leq 14) = P(X \leq 14) - P(X \leq 9) = 0.9648 - 0.0611 = 0.9037$

答案：(A)機率 0.9958；(B)機率 0.9037

練習 5.11　高雄旗津欲興建跨港纜車，原經過市政府委託民間機構進行高雄市民意調查，宣稱居民贊成百分比 72 % (反對為 28 %)。今隨機訪談 16 位高雄市民，若原先的民意調查可靠，試分別估算(A)7 人(含)以上贊成機率？(B)7 到 10 人(含)贊成機率？(C)5 人(含)以下贊成機率？(答案有效位數四捨五入取到小數點後第 4 位)

題解：假設隨機變數 $X$ 代表贊成人數

(A) $P(X \geq 7) = 1 - P(X \leq 6)$

從二項分布累計機率表，樣本數量(人數)$n = 16$，最多贊成人數 $t = 6$，贊成比例 $p = 0.70$，最多 6 人贊成機率 $P(X \leq 6) = 0.0071$(亦可使用 Excel 軟體 BINOM.DIST 函數查詢獲得)。

從二項分布累計機率表，樣本數量(人數) $n = 16$，最多贊成人數 $t = 6$，贊成比例 $p = 0.75$，最多 6 人贊成機率 $P(X \leq 6) = 0.0016$(亦可使用 Excel 軟體 BINOM.DIST 函數查詢獲得)。

假設贊成百分比與 $P(X \leq 6)$機率兩者呈現比例關係，可以透過內插法，計算在贊成比例 $p = 0.72$ 時，最多 6 人贊成機率 $P(X \leq 6)$

| $p$ | 0.70 | 0.72 | 0.75 |
|---|---|---|---|
| $P(X \leq 6)$ | 0.0071 | $x$ | 0.0016 |

$$\frac{0.75-0.70}{0.0016-0.0071} = \frac{0.75-0.72}{0.0016-x} \rightarrow x = 0.0049$$

從二項分布累計機率表，樣本數量(人數)$n = 16$，最多贊成人數 $t = 6$，贊成比例 $p = 0.72$，最多 6 人贊成機率 $P(X \leq 6) = 0.0041$(由 Execl 函數 BINOMDIST 算出與內插法算出的結果差距很小，皆在誤差範圍內)

$$P(X \geq 7) = 1 - P(X \leq 6) = 1 - 0.0041 = 0.9959$$

(B) $P(7 \leq X \leq 10) = P(X \leq 10) - P(X \leq 6) = 0.2761 - 0.0041$(使用 Excel 軟體 BINOM.DIST 函數查詢獲得) = 0.2720

(C) $P(X \leq 5) = 0.0008$(亦可使用 Excel 軟體 BINOM.DIST 函數查詢獲得)

答案：(A)機率 0.9959；(B)機率 0.2720；(C)機率 0.0008

練習 5.12　純純餐廳提供消費者訂位服務，該餐廳有 12 個座位，依據以往的紀錄顯示，消費者訂位後會來用餐消費的比率為 70 %，若今天晚餐該餐廳接受 15 位消費者訂位，超額訂位。試估算(A)今天晚餐已訂位的消費者，來到餐廳卻沒有座位機率？(B)今天晚餐已訂位消費者來用餐不到 50 %機率？(答案有效位數四捨五入取到小數點後第 4 位)

題解：訂位後實際前來用餐消費比率 $p = 0.70$，訂位後未實際前來用餐消費比率 $q = 0.30$，接受訂位消費者數量 $n = 15$，假設實際前來的用餐人數標示為 $X$ 變數。

(A)今天晚餐已訂位的 15 位消費者中，來到餐廳卻沒有座位，即是運算此 15 位消費者中，超過 12 個座位人數前來用餐機率：

$P(X \ge 13) = \binom{15}{13} \times 0.7^{13} \times 0.3^{2} + \binom{15}{14} \times 0.7^{14} \times 0.3^{1} + \binom{15}{15} \times 0.7^{15} \times 0.3^{0} = \frac{15!}{13! \times 2!} \times 0.7^{13} \times 0.3^{2} + \frac{15!}{14! \times 1!} \times 0.7^{14} \times 0.3^{1} + \frac{15!}{15! \times 0!} \times 0.7^{15} \times 0.3^{0} = 0.091560 + 0.03052 + 0.004748 = 0.1268$

$P(X \ge 13) = 1 - P(X \le 12) = 1 - 0.8732$(使用 Excel 軟體 BINOM.DIST 函數查詢獲得) = 0.1268　亦可查二項分布機率累計機率表獲得

(B)今天晚餐已訂位消費者來用餐不到 50 %，即在 15 位訂位消費者中，15 × 50 % = 7.5 位，最多有 7 位前來用餐機率：

$P(X \le 7) = \binom{15}{7} \times 0.7^{7} \times 0.3^{8} + \binom{15}{6} \times 0.7^{6} \times 0.3^{9} + \binom{15}{5} \times 0.7^{5} \times 0.3^{10} + \binom{15}{4} \times 0.7^{4} \times 0.3^{11} + \binom{15}{3} \times 0.7^{3} \times 0.3^{12} + \binom{15}{2} \times 0.7^{2} \times 0.3^{13} + \binom{15}{1} \times 0.7^{1} \times 0.3^{14} + \binom{15}{0} \times 0.7^{0} \times 0.3^{15} = 0.0500$ (使用 Excel 軟體 BINOM.DIST 函數查詢獲得或亦可查二項分布機率累計機率表獲得)

答案：(A)機率 0.1268；(B)機率 0.0500

練習 5.13　如如餐廳提供消費者抽獎活動，抽中獎品機率 0.30，現今餐廳內有 19 位消費者。試估算(A)最多 3 位消費者，抽中獎品機率；(B)剛好有 5 位消費者抽中獎品機率；(C)抽中獎品的消費者期望人數。(機率答案有效位數四捨五入取到小數點後第 4 位；期望人數有效位數四捨五入取到小數點後第 1 位，單位：人)

題解：設隨機變數 $X$ 代表消費者抽中獎品人數，$x$~B(19,0.30)。抽中獎品機率 $p$ = 0.30，沒有抽中機率 $q = 1 - p = 1 - 0.30 = 0.70$。

(A)最多 3 位消費者，抽中獎品機率 $P(X \le 3) = \sum_{x=0}^{t} \binom{n}{x} \times p^{x} \times q^{n-x} = \sum_{x=0}^{3} \binom{19}{x} \times 0.30^{x} \times (1 - 0.30)^{19-x} = 0.1332$ 查表獲得(亦可使用 Excel 軟體 BINOM.DIST 函數查詢獲得)

(B)剛好有 5 位消費者抽中獎品機率 $P(x = 5) = \binom{n}{x} \times p^{x} \times q^{n-x} = \binom{19}{5} \times 0.30^{5} \times 0.70^{14} = 0.1916$(使用 Excel 軟體 BINOM.DIST 函數查詢獲得)

(C)抽中獎品的消費者期望人數 $E(X) = n \times p = 19 \times 0.3 = 5.7$ 人

答案：(A) $P(X \le 3) = 0.1332$；(B) $P(x = 5) = 0.1916$；(C) $E(X) = 5.7$ 人

練習 5.14　昨天統計學考試有 20 題選擇題，每題有 4 個答案，題目為單選題，僅有一個答案是正確者。若小花學生沒有唸書答案全部皆用猜的，假設隨機變數 $X$ 為其答對題目的題數。(A)請寫出 $X$ 分布的類型及其機率函數；(B)請估算最多猜對 4 題機率；(C)隨機變數 $X$ 的期望值和變異數。(機率答案有效位數四捨五入取到小數點後第 4 位)

題解：每題有 4 個答案，題目為單選題，僅有一個答案是正確者，隨機填答，每題答對機率 $p = \frac{1}{4} = 0.25$；每題答錯機率 $q = 1 - p = 1 - 0.25 = 0.75$。設隨機變數 $X$ 為答對題目的數量，$X$~B(20,0.25)。

(A)隨機變數 $X$ 屬於二項分布，$X$~B(20,0.25)

$$\text{機率函數 } f(x) = \binom{20}{x} \times 0.25^{x} \times 0.75^{20-x}$$

(B)最多猜對 4 題機率

$n = 20$，$t = 4$，$p = 0.25$ 從二項分布累計機率表 $P(X \le 4) = 0.4148$(亦可使用 Excel 軟體 BINOM.DIST 函數查詢獲得)

(C)隨機變數 $X$ 的期望值和變異數

$$\text{期望值 } E(X) = n \times p = 20 \times 0.25 = 5$$

變異數 $Var(X) = n \times p \times q = 20 \times 0.25 \times 0.75 = 3.75$

答案：(A)二項分布，$x$~B(20,0.25)，機率函數 $f(x) = \binom{20}{x} \times 0.25^{x} \times 0.75^{20-x}$；(B) $P(X \le 4) = 0.4148$；(C) $E(X) = 5$；$Var(X) = 3.75$

練習 5.15 某地區消費者保護單位調查宣稱有 25 %奶粉受到三聚氰胺污染，若調查屬實，在該地區市場隨機抽取 8 罐奶粉，其中至少有 2 罐受到三聚氰胺污染機率。(答案有效位數四捨五入取到小數點後第 4 位)

題解：設隨機變數 $X$ 為隨機抽樣 8 罐奶粉中受到污染奶粉的罐數，$X$~B(8,0.25)，至少有 2 罐受到汙染，即有可能是 2、3、4、5、6、7 和 8 罐受到汙染的狀況。

$P(X \ge 2) = 1 - P(X \le 1) = 1 - \sum_{x=0}^{1} \binom{8}{x} \times 0.25^{x} \times 0.75^{8-x} = 1 - 0.3671$(查二項分布累計機率表，亦可使用 Excel 軟體 BINOM.DIST 函數查詢獲得) = 0.6329

答案：機率 0.6329

練習 5.16 設隨機變數 $X$~B($n$, $p$)，已知 $\mu_x = 6$ 與$\sigma_x^2 = 3.6$，則 $P(X > 2)$機率？(A) $1 - \sum_{x=0}^{1} \binom{15}{x} \times 0.4^{x} \times 0.6^{15-x}$；(B) $\sum_{x=2}^{15} \binom{15}{x} \times 0.6^{x} \times 0.4^{15-x}$；(C) $\sum_{x=3}^{15} \binom{15}{x} \times 0.6^{x} \times 0.4^{15-x}$；(D) $1 - \sum_{x=0}^{2} \binom{15}{x} \times 0.4^{x} \times 0.6^{15-x}$。(機率答案有效位數四捨五入取到小數點後第 4 位)

題解：設隨機變數 $X$~B($n$, $p$)，二項分數機率函數 $f(x) = \binom{n}{x} \times p^{x} \times q^{n-x}$，$x = 0, 1, 2, 3,\ldots, n$

題目告知期望值 $E(X) = \mu_x = \mu = n \times p = 6$

變異數$\sigma_x^2 = Var(X) = \sigma^2 = n \times p \times q = n \times p \times (1 - p) = 3.6 = 6 \times (1 - p) \rightarrow 1 - p = 0.6 \rightarrow p = 0.4 \rightarrow n \times p = 6 \rightarrow n = 15$

納入參數後的二項分數機率函數 $f(x) = \binom{15}{x} \times 0.4^{x} \times 0.6^{n-x}$，$x = 0, 1, 2, 3,\ldots, n$

$P(X > 2) = P(x = 3) + P(x = 4) + P(x = 5) + \ldots + P(x = 15) = \sum_{x=3}^{15} \binom{15}{x} \times 0.4^{x} \times 0.6^{n-x}$

$P(X > 2) = 1 - P(x = 0) + P(x = 1) + P(x = 2) = 1 - \sum_{x=0}^{2} \binom{15}{x} \times 0.4^{x} \times 0.6^{n-x}$

答案：【$P(X > 2) = 1 - \sum_{x=0}^{2} \binom{15}{x} \times 0.4^{x} \times 0.6^{n-x}$】選項正確

練習 5.17 投擲一個公平的骰子兩次，請計算最少有一次為四點機率。(答案有效位數四捨五入取到小數點後第 4 位)

題解：投擲一個公平的骰子出現四點機率 $p = \frac{1}{6}$，非四點機率 $q = \frac{5}{6}$，投擲次數 $n = 2$，假設隨機變數 $X$ 代表投擲出現 4 點次數。

在 $n$ 次獨立事件(隨機實驗)中，成功機率為 $p$，失敗機率為 $q = 1 - p$，發生 $x$ 次成功機率(質量)函數為：$f(x) = \binom{n}{x} \times p^{x} \times q^{n-x}$

$f(X \ge 1) = f(x = 1) + f(x = 2) = \binom{2}{1} \times \left(\frac{1}{6}\right)^{1} \times \left(\frac{5}{6}\right)^{1} + \binom{2}{2} \times \left(\frac{1}{6}\right)^{2} \times \left(\frac{5}{6}\right)^{0} = 2 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} + 1 \times \frac{1}{36} \times 1 = \frac{10}{36} + \frac{1}{36} = \frac{11}{36} = 0.3056$

$f(X \ge 1) = 1 - f(X \le 0) = 1 - 0.6944$(查二項分布累計機率表，亦可使用 Excel 軟體 BINOM.DIST 函數查詢獲得) = 0.3056

答案：最少有一次為四點機率 $P(X \ge 1) = 0.3056$

範例 5.15 投擲一枚公平的銅板 5 次，請計算最少有 2 次為正面機率。(答案有效位數四捨五入取到小數點後第 4 位)

題解：公平銅板正面機率 $p = 0.5$，反面機率 $q = 1 - p = 1 - 0.5 = 0.5$，投擲次數 $n = 5$，假設隨機變數 $X$ 代表投擲正面的出現次數。

在 $n$ 次獨立事件(隨機實驗)中，成功機率為 $p$，失敗機率為 $q = 1 - p$，發生 $x$ 次成功機率(質量)函數為：$f(x) = \binom{n}{x} \times p^x \times q^{n-x}$。

最少有 2 次為正面機率 $f(X \geq 2) = f(x = 2) + f(x = 3) + f(x = 4) + f(x = 5) = 1 - f(0) - f(1) = 1 - \binom{5}{0} \times 0.5^0 \times 0.5^{5-0} - \binom{5}{1} \times 0.5^1 \times 0.5^{5-1} = 1 - 1 \times 1 \times 0.03125 - 5 \times 0.5 \times 0.0625 = 1 - 0.03125 - 0.15625 = 0.8125$

最少有 2 次為正面機率 $f(X \geq 2) = 1 - f(X \leq 1) = 1 - 0.1875$(查二項分布累計機率表，亦可使用 Excel 軟體 BINOM.DIST 函數查詢獲得) $= 0.8125$

答案：最少有 2 次為正面機率 $P(X \geq 2) = 0.8125$

練習 5.18　若新生兒的男女比例為 0.55：0.45，到醫院隨機選取 5 位新生兒，請計算最少有 2 位為男性機率。(答案有效位數四捨五入取到小數點後第 4 位)

題解：男性機率 $p = 0.55$，女性機率 $q = 0.45$，選取新生兒數 $n = 5$。假設隨機變數 $X$ 代表男性的數量。

在 $n$ 次獨立事件(隨機實驗)中，成功機率為 $p$，失敗機率為 $q = 1 - p$，發生 $x$ 次成功機率(質量)函數為：$f(x) = \binom{n}{x} \times p^x \times q^{n-x}$。

最少有 2 位為男性機率 $f(X \geq 2) = f(x = 2) + f(x = 3) + f(x = 4) + f(x = 5) = 1 - f(x = 0) - f(x = 1) = 1 - \binom{5}{0} \times 0.55^0 \times 0.45^{5-0} - \binom{5}{1} \times 0.55^1 \times 0.45^{5-1} = 1 - 1 \times 1 \times 0.01845 - 5 \times 0.55 \times 0.04100 = 1 - 0.01845 - 0.112767 = 0.8688$

最少有 2 位為男性機率 $f(X \geq 2) = 1 - f(X \leq 1) = 1 - 0.1312$(查二項分布累計機率表，亦可使用 Excel 軟體 BINOM.DIST 函數查詢獲得) $= 0.8688$

答案：最少有 2 位為男性機率 $P(X \geq 2) = 0.8688$

## 5.3.1 點二項分布

在二項分布中，若隨機實驗僅有一次 $n = 1$ 時，特稱為點二項分布(point binomial distribution)或白努力分布(Bernoulli distribution)。屬於二項分布中的特例。使用 $Ber(p)$符號表示。

在 1 次獨立事件(隨機實驗)中，成功機率為 $p$，失敗機率為 $q = 1 - p$，發生 $x$ 次**成功機率**(質量)函數為：

$$f(x) = \binom{1}{x} \times p^x \times q^{1-x} = \binom{1}{x} \times p^x \times (1-p)^{1-x} = p^x \times q^{1-x} = \text{成功機率}^{\text{成功次數}} \times \text{失敗機率}^{\text{失敗次數}}\text{，其中 } x = 0, 1$$

$$f(x) = 0\text{，當 } x = \text{otherwise}$$

式中$\binom{n}{x} = \frac{n!}{x! \times (n-x)!} = C_x^n$為組合數(count of combination)

**期望值** $E(X)$為：

$$E(X) = \mu = p$$

**變異數** $Var(X)$為

$$Var(X) = \sigma^2 = p \times q = p \times (1 - p)$$

**標準(偏)差** σ 為

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{p \times q} = \sqrt{p \times (1-p)}$$

範例 5.16　純純咖啡飲料店中，員工小五製作咖啡飲品的失敗(不良)率為 0.08，現今從其製作的咖啡飲料中隨機抽出一個成品，設隨機變數 $x = 0$ 表咖啡飲品為製作成功，$x = 1$ 表咖啡飲品製作失敗，請詮釋隨機變數 $X$ 機率分布？平均值和變異數？(機率答案有效位數四捨五入取到小數點後第 4 位)

題解：因隨機變數 $X$ 僅有 0 與 1 兩個數值，隨機抽出一個成品 $n = 1$，故隨機變數 $X$ 屬於點二項分布

$$f(x) = p^x \times q^{1-x} = 0.08^x \times 0.92^{1-x}，x = 0, 1；f(x) = 0，x = \text{otherwise}$$

$$期望值\ E(X) = \mu = n \times p = 1 \times p = 1 \times 0.08 = 0.0800$$

$$變異數\ Var(X) = \sigma^2 = n \times p \times q = 1 \times 0.08 \times 0.92 = 0.0736$$

答案：機率函數 $f(x) = p^x \times q^{1-x} = 0.08^x \times 0.92^{1-x}$，$x = 0, 1$ 與 $f(x) = 0$，$x$ = otherwise；期望值 $E(X) = 0.0800$；變異數 $Var(X) = 0.0736$

### 5.3.2 三項分布【選擇教材】

透過二項分布可以推展到多項分布的情況，若在隨機實驗中可能出現的結果不只有兩種(二項分布)，而是有 3 種不同的結果，該隨機實驗稱為三項隨機實驗(trinomial random experiment)。

假設在多項隨機實驗中，有 $k$ 種可能結果，其出現機率分別為 $p_1$、$p_2$ 和 $p_3$，在 3 次的實驗中，$x_1$、$x_2$ 和 $x_3$ 依序為各種可能結果出現次數，三項機率分布(Trinomial distribution)機率(質量)函數為：

$$f(x_1, x_2, x_3) = \frac{n!}{x_1! \times x_2! \times x_3!} \times p_1^{x_1} \times p_2^{x_2} \times p_3^{x_3}，其中\ x_1, x_2, x_3 = 0, 1, \ldots, n$$

$$f(x_1, x_2, x_3) = 0，當\ x_1, x_2, x_3 = \text{otherwise}$$

式中 $x_1 + x_2 + x_3 = n$　　$p_1 + p_2 + p_3 = 1$

期望值

$E(x_i) = n \times p_i$

變異數

$V(x_i) = n \times p_i \times (1 - p_i)$

共變數

$Cov(x_i, x_j) = -n \times p_i \times p_j$，其中 $i \neq j$

### 5.3.3 多項機率分布【選擇教材】

透過二項分布可以推展到多項分布的情況，若在隨機實驗中可能出現的結果不只有兩種(二項分布)，而是有 $k$ 種不同的結果，該隨機實驗稱為多項隨機實驗(multinomial random experiment)。

假設在多項隨機實驗中，有 $k$ 種可能結果，其出現機率分別為 $p_1$、$p_2$、$p_3$、…、$p_k$，在 $n$ 次的實驗中，$x_1$、$x_2$、$x_3$、…、$x_k$ 依序為各種可能結果出現次數，多項機率分布或多項分布(Multinomial distribution)機率(質量)函數為：

$$f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k) = \frac{n!}{x_1! \times x_2! \times x_3! \times \ldots \times x_k!} \times p_1^{x_1} \times p_2^{x_2} \times p_3^{x_3} \times \ldots \times p_k^{x_k}，其中\ x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k = 0, 1, \ldots, n$$

$$f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k) = 0，當\ x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k = \text{otherwise}$$

式中 $x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_k = n$，　　$p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_k = 1$

期望值

$E(x_i) = n \times p_i$

變異數

$V(x_i) = n \times p_i \times (1 - p_i)$

共變數

$Cov(x_i, x_j) = -n \times p_i \times p_j$，$i \neq j$

範例 5.17　9？(機率答案有效位數四捨五入取到小數點後第 4 位)

題解：

答案：

## 5.4 負二項分布

白努力實驗中成功事件機率 $p$，負二項分布提供 $r$ 次成功和「$x$ 次失敗」機率，其中最後一次實驗屬於成功。亦可表示為在白努力程序(Bernoulli process)第 $r$ 次成功前，會遭遇失敗 $X$ 次數機率分布，其中每次實驗成功機率 $p$。此白努力程序屬於分立時間程序(discrete time process)，實驗成功和失敗次數皆為整數(integers)。

開始實驗起第 $r$ 次成功($r > 0$)之前，有 $X$ 次失敗實驗，此 $X$ 之分布特稱為負二項分布(Negative binomial distribution)或反面二項分布，一般使用 NB($r$, $p$)符號表示。若 $r$ 為整數(integer-valued parameter)時，此種負二項分布又稱為巴斯卡分布(Pascal distribution)。

若重複的投擲錢幣，計算出現正面(成功)次數。設定必須達到兩次($r$ = 2)的錢幣是屬於正面，即可推導出負二項實驗。負二項隨機變數(negative binomial random variable)即是必須達到兩次正面錢幣需投擲次數 $X$。需投擲次數 $X$ 會介在 2 和無窮多次之間的整數(integer value)。

| 需投擲次數 $x$ | 機率 $p$ |
|---|---|
| 2 | 0.2500 |
| 3 | 0.2500 |
| 4 | 0.1875 |
| 5 | 0.1250 |
| 6 | 0.0781 |
| 7 或以上 | 0.1094 |

在 $r$+$X$ 實驗中，有 $r$ 成功和 $X$ 次失敗與第 $r$+$X$ 次實驗是成功機率。

**負二項分布機率質量函數或機率密度函數(Probability mass function** or **probability density function)**

$$\boldsymbol{f(x)} = \binom{\boldsymbol{r+x-1}}{\boldsymbol{r-1}} \times \boldsymbol{p^r} \times \boldsymbol{q^x} = \binom{r+x-1}{x} \times p^r \times q^x = C_x^{r+x-1} \times p^r \times q^x = C_x^{r+x-1} \times p^r \times (1-p)^x$$

$$r\text{ 成功和 }x\text{ 次失敗與第 }r+x\text{ 次實驗是成功機率} = \binom{\text{實驗次數}-1}{\text{成功次數}-1} \times \text{成功機率}^{\text{成功次數}} \times \text{失敗機率}^{\text{失敗次數}} =$$

$$\binom{\text{實驗次數}-1}{\text{失敗次數}} \times \text{成功機率}^{\text{成功次數}} \times \text{失敗機率}^{\text{失敗次數}}$$

其中 $x$ = 0, 1, 2, …

$$C_i^n = \binom{n}{i} = \frac{n!}{i!\times(n-i)!} = \frac{P_i^n}{i!} = C_{n\ i}$$

$$\binom{r+x-1}{r-1} = \frac{(r+x-1)!}{(r-1)!\times[(r+x-1)-(r-1)]!} = \frac{(r+x-1)!}{(r-1)!\times[(\cancel{r}+x-\cancel{1})-(\cancel{r}-\cancel{1})]!} = \frac{(r+x-1)!}{(r-1)!\times x!} = \frac{(r+x-1)!}{x!\times(r-1)!} = \binom{r+x-1}{x} =$$

$$\frac{(r+x-1)!}{x!\times[(r+x-1)-x]!} = \frac{(r+x-1)!}{x!\times[(r\cancel{+x}-1)\cancel{-x}]!} = \frac{(r+x-1)!}{x!\times(r-1)!}$$

$f(x)$ = $P$(前 $r$+$x$-1 次的隨機實驗中有 $r$-1 次成功)∩$P$(第 $r$+$x$ 次隨機實驗為成功) = $P$(前 $r$+$x$-1 次的隨機實驗中有 $r$-1 次成功) × $P$(第 $r$+$x$ 次隨機實驗為成功) [因每次隨機實驗都是相互獨立] = $\binom{r+x-1}{r-1} \times p^{r-1} \times q^x \times p = \binom{r+x-1}{r-1} \times p^r \times q^x$

負二項分布的期望值與變異數

$$期望值\ E(X) = \mu = \frac{r\times q}{p} = \frac{r\times(1-p)}{p}$$
$$變異數\ V(X) = \sigma^2 = \frac{r\times q}{p^2} = \frac{r\times(1-p)}{p^2}$$

範例 5.18　經監理站估算購買銀色系列汽車機率 0.7，試估算某大樓第 10 個住戶購買汽車為第 6 輛為銀色機率。(答案有效位數四捨五入取到小數點後第 4 位)

題解：非銀色汽車數量 $x = 4$，銀色汽車數量 $r = 6$，購買銀色汽車機率 $p = 0.7$。「第 10 個住戶購買汽車為第 6 輛為銀色」詮釋符合負二項分布的特徵。

依據負二項分布機率質量函數 $f(x = 4) = C_{r-1}^{r+x-1} \times p^r \times (1-p)^x = C_{6-1}^{6+4-1} \times 0.7^6 \times 0.3^4 = \frac{9!}{5!\times 4!} \times 0.7^6 \times 0.3^4 = \frac{9\times 8\times 7\times 6\times 5!}{5!\times 4\times 3\times 2\times 1} \times 0.7^6 \times 0.3^4 = \frac{9\times 8\times 7\times 6\times \cancel{5!}}{\cancel{5!}\times 4\times 3\times 2\times 1} \times 0.7^6 \times 0.3^4 = \frac{9\times \cancel{8}\times 7\times 6}{\cancel{4}\times 3\times \cancel{2}\times 1} \times 0.7^6 \times 0.3^4 = \frac{9\times 7\times 6}{3} \times 0.7^6 \times 0.3^4 = 126 \times 0.7^6 \times 0.3^4 = 0.1201$(使用 Excel 軟體 NEGBINOM.DIST 函數查詢獲得)

答案：第 10 個住戶購買汽車為第六輛為銀色機率 0.1201

期望值 $E(X) = \mu = \frac{r\times q}{p} = \frac{r\times(1-p)}{p} = \frac{6\times 0.3}{0.7} = 2.5714$

變異數 $V(X) = \sigma^2 = \frac{r\times q}{p^2} = \frac{r\times(1-p)}{p^2} = \frac{6\times 0.3}{0.7^2} = 3.6735$

練習 5.19　小如是本系籃球隊隊員，平常練習時投籃命中機率 0.70，而且穩定性很高。某次練習中，在第 5 球投擲，亦是第 3 球投入機率？(答案有效位數四捨五入取到小數點後第 4 位)

題解：未投入球數 $x = 2$，投入球數 $r = 3$，投籃命中機率 $p = 0.70$；投籃未命中機率 $q = 1 - p = 1 - 0.70 = 0.30$。「第 5 球投擲，亦是第 3 球投入」詮釋符合負二項分布的特徵。

依據負二項分布機率質量函數 $f(x = 2) = C_x^{r+x-1} \times p^r \times (1-p)^x = C_2^{3+2-1} \times 0.70^3 \times 0.30^2 = \frac{4!}{2!\times 2!} \times 0.70^3 \times 0.30^2 = 6 \times 0.343 \times 0.09 = 0.1852$

$r$ 成功和 $x$ 次失敗與第 $r+x$ 次實驗是成功機率 $= \binom{實驗次數-1}{成功次數-1} \times 成功機率^{成功次數} \times 失敗機率^{失敗次數} = \binom{5-1}{3-1} \times 0.70^3 \times 0.30^2 = 0.1852$

答案：機率 0.1852

練習 5.20　同時投擲兩個公平的骰子，求在第 8 次投擲且第 2 次點數和為 7 機率。(答案有效位數四捨五入取到小數點後第 4 位)

題解：擲一對骰子點數和為 7，其樣本空間 S = {(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)}，機率為 $p = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} = 0.1667$。兩個骰子點數和為 7 次數 $r = 2$，兩個骰子點數和非 7 次數 $x = 6$，兩個骰子點數和為 7 機率 $p = 0.1667$。「第 8 次投擲且第 2 次點數和為 7」詮釋符合負二項分布的特徵。

依據負二項分布機率函數 $f(x = 6) = C_x^{r+x-1} \times p^r \times (1-p)^x = C_6^{2+6-1} \times 0.1667^2 \times (1 - 0.1667)^6 = \frac{7!}{6!\times 1!} \times 0.1667^2 \times (1 - 0.1667)^6 = 0.0651$

$r$ 成功和 $x$ 次失敗與第 $r+x$ 次實驗是成功機率 $= \binom{實驗次數-1}{成功次數-1} \times 成功機率^{成功次數} \times 失敗機率^{失敗次數} = \binom{8-1}{2-1} \times 0.1667^2 \times (1 - 0.1667)^6 = 0.0651$

答案：機率 0.0651

練習 5.21　同時投擲兩個公平的骰子，求在第 9 次投擲且第 3 次點數和為 8 機率。(機率答案有效位數四捨五入取到小數點後第 4 位)

題解：擲一對骰子點數和為 8 機率{(2,6), (3,5), (4,4), (5,3), (6,2)}為$\frac{5}{36}$ = 0.1389。點數和為 8 次數 $r$ = 3，點數和不為 8 次數 $x$ = 6，擲一對骰子點數和為 8 機率 $p$ = 0.1389。「第 9 次投擲且第 3 次點數和為 8」詮釋符合負二項分布的特徵。

依據負二項分布機率函數 $f(x = 6) = C_x^{r+x-1} \times p^r \times (1-p)^x = C_6^{3+6-1} \times 0.1389^3 \times (1-0.1389)^6 = 0.0306$

$r$ 成功和 $x$ 次失敗與第 $r+x$ 次實驗是成功機率 = $\binom{\text{實驗次數}-1}{\text{成功次數}-1} \times$ 成功機率$^{\text{成功次數}}$ × 失敗機率$^{\text{失敗次數}}$ = $\binom{9-1}{3-1} \times 0.1389^3 \times (1 - 0.1389)^6 = 0.0306$

答案：機率 0.0306

## 5.5 幾何分布

幾何分布(geometric distribution)屬於負二項分布(negative binomial distribution)的特例。在 $X + 1$ 次負二項實驗中，設成功機率為 $p$，若成功次數 $r = 1$，失敗 $X$ 次，此負二項分布即屬於幾何分布(geometric distribution)，一般使用 G($p$)或 Geo($p$)符號表示。即第 1 次成功機率函數(probability mass function)為

$g(x) = f(x) = p \times q^x = p \times (1-p)^x$ = 第 1 次成功機率函數 = 成功機率 × 失敗機率$^{\text{失敗次數}}$，其中 $x$ = 1, 2, 3, …

幾何分布的期望值與變異數：

$$\text{期望值 } E(X) = \mu = \frac{q}{p} = \frac{1-p}{p}$$
$$\text{變異數 } V(X) = \sigma^2 = \frac{q}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}$$

**幾何分布**的**累積分布函數**(cumulative distribution function, CDF)

$$P(X \geq t) = \sum_{x=t}^{\infty} p \times (1-p)^{x-1} = p \times \sum_{x=t}^{\infty} (1-p)^{x-1} = p \times \frac{(1-p)^{t-1}}{p} = (1-p)^{t-1}$$

範例 5.19 小如是本系籃球隊隊員，平常練習時投籃命中機率 0.70，而且穩定性很高。某次練習中，在第 5 球投擲，亦是第 1 球投入機率？(答案有效位數四捨五入取到小數點後第 5 位)

題解：未投入球數 $x$ = 4，投入球數 $r$ = 1，命中機率 $p$ = 0.7。「第 5 球投擲，亦是第 1 球投入」詮釋符合幾何分布的特徵。

利用負二項分布估算機率 $f(x = 4) = C_x^{r+x-1} \times p^r \times (1-p)^x = C_4^{1+4-1} \times 0.7^1 \times 0.3^4 = \frac{4!}{4! \times 0!} \times 0.7^1 \times 0.3^4 = 1 \times 0.7 \times 0.0081 = 0.00567$

利用幾何分布估算機率 $f(x = 4) = p \times q^x = 0.7 \times 0.3^4 = 0.7 \times 0.0081 = 0.00567$

答案：機率 0.00567

練習 5.22 投擲 2 個公平的骰子，求在擲第 9 次且第 1 次點數和為 6 機率。(答案有效位數四捨五入取到小數點後第 4 位)

題解：擲一對公平骰子點數和為 6，樣本空間 S = {(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)}，數和為 6 機率為 $p = \frac{5}{36}$ = 0.1389。「擲第 9 次且第 1 次點數和為 6」詮釋符合幾何分布的特徵。

擲一對骰子點數和非 6 次數 $x$ = 8，擲一對骰子點數和為 6 次數 $r$ = 1，擲一對骰子點數和為 6 機率 $p$ = 0.1389。

利用幾何分布估算機率 $f(x = 8) = p \times q^x = 0.1389 \times (1 - 0.1389)^8 = 0.0420$

答案：機率 0.0420

練習 5.23 投擲 2 個公平的骰子，求在擲第 5 次且第 1 次點數和為 5 機率。(答案有效位數四捨五入取到小數點後第 4 位)

題解：擲 2 個公平的骰子點數和為 5 機率{(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)}為 $p = \frac{4}{36} = 0.1111$。「擲第 5 次且第 1 次點數和為 5」詮釋符合幾何分布的特徵。

擲 2 個骰子點數和非 5 次數 $x = 4$，擲 2 個骰子點數和 5 次數 $r = 1$，擲 2 個骰子點數和為 5 機率 $p = 0.1111$

$f(x = 4) = p \times q^x = 0.1111 \times (1 - 0.1111)^4 = 0.0694$

答案：機率 0.0694

練習 5.24 純純餐廳提供消費者摸彩活動，以提高消費情境中樂趣成分，假設摸中獎品機率為 0.05。(A)請計算平均需要有幾個消費者，才有可能抽中獎品；(B)請估算要 5 位消費者以上(包括 5 位)才會抽中一個獎品機率；(C)請估算要 10 位消費者以下(包括 10 位)才會抽中一個獎品機率。(機率答案有效位數四捨五入取到小數點後第 4 位)

題解：設隨機變數 $X$ 為第一個抽中獎品的消費者，所需要的消費者數量

$p = 0.05$

$E(X) = 1/p = 1/0.05 = 20$

$P(X \geq 5) = (1 - 0.05)^{5-1} = 0.95^4 = 0.8145$

$P(X \leq 10) = 1 - P(X \geq 11) = 1 - (1 - 0.05)^{11-1} = 1 - 0.95^{10} = 0.4013$

答案：(A) $E(X) = 20$ 位；(B) $P(X \geq 5) = 0.8145$；(C) $P(X \leq 10) = 0.4013$

## 5.6 超幾何分布

超幾何機率分布與二項機率分布主要的差異是在超幾何機率分布中，各實驗之間並不獨立，成功機率會隨實驗進行次數而改變。

在超幾何(機率)分布(Hypergeometric probability distribution)中，若在 $N$ 個基本單位的母體中有 $r$ 個成功個數，即會有 $N - r$ 個失敗個數。從前數母體中抽取 $n$ 個隨機樣本，樣本中有 $X$ 個成功個數，$n - X$ 個失敗個數。

在超幾何機率分布中抽取的樣本，不再放回原先的母體中，供下次抽取。故在超幾何機率分布的抽樣過程中，係從母體 $r$ 個成功個數抽出 $X$ 個成功個數；同理，亦從母體 $N - r$ 個失敗個數抽出 $n - X$ 個失敗個數。超幾何分布一般使用 Hypergeometric($N$, $r$, $n$)、HG($x$, $r$, $N$)或 $Hyper(N,r;n)$符號代表。

| | 母體 | 樣本 |
|---|---|---|
| 數量 | $N$ | $n$ |
| 成功數量 | $r$ | $x$ |
| 失敗數量 | $N - r$ | $n - x$ |

超幾何機率函數(hypergeometric probability function)：統計 $n$ 個隨機樣本中，有 $X$ 個成功個數機率 $f(x)$。

$$f(x) = \frac{C_x^r \times C_{n-x}^{N-r}}{C_n^N} = \frac{\binom{r}{x} \times \binom{N-r}{n-x}}{\binom{N}{n}} = x\text{ 個成功機率} = \frac{\binom{\text{母體成功數量}}{\text{樣本成功數量}} \times \binom{\text{母體失敗數量}}{\text{樣本失敗數量}}}{\binom{\text{母體數量}}{\text{樣本數量}}} = \frac{n\text{ 個隨機樣本中，有 }x\text{ 個成功的組合數}}{\text{全部可能的抽樣組合數}}，0 \leq x \leq r$$

其中 $f(x) = n$ 個隨機樣本中，有 $x$ 個成功個數機率

$n$ = 隨機樣本中基本單位數量　　$N$ = 母體中基本單位數量　　$r$ = 母體中成功的個數

$C_i^n = \binom{n}{i} = \frac{n!}{i!\times(n-i)!} = \frac{P_i^n}{i!} = C_{n\ i}$

範例 5.20 如如餐廳中有 5 位廚師，3 位有吸煙，2 位沒有吸煙，今該餐廳欲隨機抽取 2 位廚師，送往顧問公司進行廚房安全衛生訓練，(A)隨機抽選到 2 位皆有吸煙廚師機率？(B)隨機抽選到 2 位皆沒有吸煙廚師機率？(答案有效位數四捨五入取到小數點後第 4 位)

題解：隨機抽出廚師數量 $n = 2$，全部廚師數量 $N = 5$，全部廚師中吸菸數量 $r = 3$ 吸煙者。

隨機抽出 2 位廚師中有吸菸數量 $x = 2$ 機率 $f(x = 2) = \frac{C_x^r\times C_{n-x}^{N-r}}{C_n^N} = \frac{\binom{r}{x}\times\binom{N-r}{n-x}}{\binom{N}{n}} = \frac{C_2^3\times C_{2-2}^{5-3}}{C_2^5} = \frac{\binom{3}{2}\times\binom{5-3}{2-2}}{\binom{5}{2}} = \frac{\left(\frac{3!}{2!\times1!}\right)\times\left(\frac{2!}{0!\times2!}\right)}{\frac{5!}{2!\times3!}} =$

$\frac{\left(\frac{3\times2\times1}{2\times1\times1}\right)\times\left(\frac{2\times1}{2\times1\times1}\right)}{\frac{5\times4\times3\times2\times1}{2\times1\times3\times2\times1}} = \frac{\left(\frac{3\times\cancel{2\times1}}{\cancel{2\times1}\times1}\right)\times\left(\frac{\cancel{2\times1}}{\cancel{2\times1}\times1}\right)}{\frac{5\times4\times\cancel{3\times2\times1}}{2\times1\times\cancel{3\times2\times1}}} = \frac{3\times1}{10} = 0.3000$

隨機抽出 2 位廚師中有吸菸數量 $x = 0$ 機率 $f(x = 0) = \frac{C_x^r\times C_{n-x}^{N-r}}{C_n^N} = \frac{\binom{r}{x}\times\binom{N-r}{n-x}}{\binom{N}{n}} = \frac{C_0^3\times C_{2-0}^{5-3}}{C_2^5} = \frac{\binom{3}{0}\times\binom{5-3}{2-0}}{\binom{5}{2}} = \frac{\left(\frac{3!}{0!\times3!}\right)\times\left(\frac{2!}{2!\times0!}\right)}{\frac{5!}{2!\times3!}}$

$= \frac{\left(\frac{3\times2\times1}{1\times3\times2\times1}\right)\times\left(\frac{2\times1}{2\times1\times1}\right)}{\frac{5\times4\times3\times2\times1}{2\times1\times3\times2\times1}} = \frac{\left(\frac{\cancel{3\times2\times1}}{1\times\cancel{3\times2\times1}}\right)\times\left(\frac{\cancel{2\times1}}{\cancel{2\times1}\times1}\right)}{\frac{5\times4\times\cancel{3\times2\times1}}{2\times1\times\cancel{3\times2\times1}}} = \frac{1\times1}{10} = 0.1000$

答案：(A)機率 0.3000；(B)機率 0.1000

範例 5.21 小麥餐廳人事經理欲聘用 4 位新進員工，徵求現有員工推薦，一共收到 10 位應徵者的資料，其中 6 位女性，4 位男性。若人事經理採用隨機聘用時，(A)選到 4 位皆是女性機率？(B)選到 1 位男性和 3 位女性機率？(C)選到 2 位男性和 2 位女性機率？(答案有效位數四捨五入取到小數點後第 4 位)

題解：欲聘用人數 $n = 4$，應徵者數量 $N = 10$，應徵者女性數量 $r = 6$。

選到女性的數量 $x = 4$ 機率 $f(x = 4) = \frac{C_x^r\times C_{n-x}^{N-r}}{C_n^N} = \frac{\binom{r}{x}\times\binom{N-r}{n-x}}{\binom{N}{n}} = \frac{C_4^6\times C_{4-4}^{10-6}}{C_4^{10}} = \frac{\binom{6}{4}\times\binom{10-6}{4-4}}{\binom{10}{4}} = \frac{\left(\frac{6!}{4!\times2!}\right)\times\left(\frac{4!}{0!\times4!}\right)}{\frac{10!}{4!\times6!}} =$

$\frac{\left(\frac{6\times5\times4\times3\times2\times1}{4\times3\times2\times1\times2\times1}\right)\times\left(\frac{4\times3\times2\times1}{1\times4\times3\times2\times1}\right)}{\frac{10\times9\times8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}{4\times3\times2\times1\times6\times5\times4\times3\times2\times1}} = \frac{\left(\frac{6\times5\times\cancel{4\times3\times2\times1}}{\cancel{4\times3\times2\times1}\times2\times1}\right)\times\left(\frac{\cancel{4\times3\times2\times1}}{1\times\cancel{4\times3\times2\times1}}\right)}{\frac{10\times9\times\cancel{8}\times7\times\cancel{6\times5\times4\times3\times2\times1}}{\cancel{4}\times3\times\cancel{2}\times1\times\cancel{6\times5\times4\times3\times2\times1}}} = \frac{15\times1}{210} = 0.0714$

選到女性的數量 $x = 3$ 機率 $f(x = 3) = \frac{C_x^r\times C_{n-x}^{N-r}}{C_n^N} = \frac{\binom{r}{x}\times\binom{N-r}{n-x}}{\binom{N}{n}} = \frac{C_3^6\times C_{4-3}^{10-6}}{C_4^{10}} = \frac{\binom{6}{3}\times\binom{10-6}{4-3}}{\binom{10}{4}} = \frac{\left(\frac{6!}{3!\times3!}\right)\times\left(\frac{4!}{1!\times3!}\right)}{\frac{10!}{4!\times6!}} =$

$\frac{\left(\frac{6\times5\times4\times3\times2\times1}{3\times2\times1\times3\times2\times1}\right)\times\left(\frac{4\times3\times2\times1}{1\times3\times2\times1}\right)}{\frac{10\times9\times8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}{4\times3\times2\times1\times6\times5\times4\times3\times2\times1}} = \frac{20\times4}{210} = 0.3810$

選到女性的數量 $x = 2$ 機率 $f(x = 2) = \frac{C_x^r\times C_{n-x}^{N-r}}{C_n^N} = \frac{\binom{r}{x}\times\binom{N-r}{n-x}}{\binom{N}{n}} = \frac{C_2^6\times C_{4-2}^{10-6}}{C_4^{10}} = \frac{\binom{6}{2}\times\binom{10-6}{4-2}}{\binom{10}{4}} = \frac{\left(\frac{6!}{2!\times4!}\right)\times\left(\frac{4!}{2!\times2!}\right)}{\frac{10!}{4!\times6!}} =$

$\frac{\left(\frac{6\times5\times4\times3\times2\times1}{2\times1\times4\times3\times2\times1}\right)\times\left(\frac{4\times3\times2\times1}{2\times1\times2\times1}\right)}{\frac{10\times9\times8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}{4\times3\times2\times1\times6\times5\times4\times3\times2\times1}} = \frac{15\times6}{210} = 0.4286$

答案：(A)機率 0.0714；(B)機率 0.3810；(C)機率 0.4286

練習 5.25 玟玟餐廳人事經理欲聘用 5 位新進員工，徵求現有員工推薦，一共收到 12 位應徵者的資料，其中 10 位女性，2 位男性。若人事經理採用隨機聘用時，(A)選到 5 位皆是女性機率？(B)選到 1 位男性和 4 位女性機率？(C)選到 2 位男性和 3 位女性機率？(答案有效位數四捨五入取到小數點後第 4 位)

題解：母體基本單位總數量(應徵人數)$N = 12$，樣本數量(欲聘人數)$n = 5$，母體中女生數量 $r = 10$，隨機變數 $X$ 代表聘用者為女生的數量，超幾何函數 $f(x) = \frac{\binom{r}{x}\times\binom{N-r}{n-x}}{\binom{N}{n}} = \frac{\binom{10}{x}\times\binom{12-10}{5-x}}{\binom{12}{5}}$。

(A)選到 5 位皆是女性機率 $f(x = 5) = \frac{\binom{10}{5}\times\binom{12-10}{5-5}}{\binom{12}{5}} = 0.3182$(使用 Excel 軟體 HYPGEOM.DIST 函數查詢獲得)

(B)選到 1 位男性和 4 位女性機率 $f(x=4)=\frac{\binom{10}{4}\times\binom{12-10}{5-4}}{\binom{12}{5}}$ = 0.5303(使用 Excel 軟體 HYPGEOM.DIST 函數查詢獲得)

(C)選到 2 位男性和 3 位女性機率 $f(x=3)=\frac{\binom{10}{3}\times\binom{12-10}{5-3}}{\binom{12}{5}}$ = 0.1515(使用 Excel 軟體 HYPGEOM.DIST 函數查詢獲得)

答案：(A)機率 0.3182；(B)機率 0.5303；(C)機率 0.1515

練習 5.26　深水大學餐旅系學生四年級男生 12 位，女生 25 位，欲舉行國宴需派遣 6 位學生當公差，隨機抽籤決定人選，試估算(A)選到 6 位皆是女性機率？(B)選到 1 位男性和 5 位女性機率？(C)選到 2 位男性和 4 位女性機率？(答案有效位數四捨五入取到小數點後第 4 位)

題解：母體基本單位總數量 $N=37$，樣本數量 $n=6$，母體中女生數量 $r=25$，選出為女生的數量 $x$，超幾何機率函數 $f(x)=\frac{\binom{r}{x}\times\binom{N-r}{n-x}}{\binom{N}{n}}=\frac{\binom{25}{x}\times\binom{37-25}{6-x}}{\binom{37}{6}}$。

(A)選到 6 位皆是女性機率 $f(x=6)=\frac{\binom{25}{6}\times\binom{37-25}{6-6}}{\binom{37}{6}}$ = 0.0762(使用 Excel 軟體 HYPGEOM.DIST 函數查詢獲得)

(B)選到 1 位男性和 5 位女性機率 $f(x=5)=\frac{\binom{25}{5}\times\binom{37-25}{6-5}}{\binom{37}{6}}$ = 0.2742(使用 Excel 軟體 HYPGEOM.DIST 函數查詢獲得)

(C)選到 2 位男性和 4 位女性機率 $f(x=4)=\frac{\binom{25}{4}\times\binom{37-25}{6-4}}{\binom{37}{6}}$ = 0.3591(使用 Excel 軟體 HYPGEOM.DIST 函數查詢獲得)

答案：(A)機率 0.0762；(B)機率 0.2742；(C)機率 0.3591

練習 5.27　奇遇銀行欲發行彩券，其設計為 12 個號碼選 5 個號碼，試估算(A)簽中頭獎(5 個號碼皆對者)機率？(B)簽中貳獎(4 個號碼對者)機率？(C)簽中參獎(3 個號碼對者)機率？(D)簽中肆獎(2 個號碼對者)機率？(機率答案有效位數四捨五入取到小數點後第 4 位)

題解：母體基本單位總數量 $N=12$，樣本數量 $n=5$，母體中成功的個數 $r=5$，隨機變數 $X$ 代表號碼答對的數量，超幾何函數 $f(x)=\frac{\binom{r}{x}\times\binom{N-r}{n-x}}{\binom{N}{n}}$。

(A)簽中頭獎(5 個號碼皆對者)機率 $f(x=5)=\frac{\binom{5}{5}\times\binom{7}{0}}{\binom{12}{5}}$ = 0.0013(使用 Excel 軟體 HYPGEOM.DIST 函數查詢獲得)

(B)簽中貳獎(4 個號碼對者)機率 $f(x=4)=\frac{\binom{5}{4}\times\binom{7}{1}}{\binom{12}{5}}$ = 0.0442(使用 Excel 軟體 HYPGEOM.DIST 函數查詢獲得)

(C)簽中參獎(3 個號碼對者)機率 $f(x=3)=\frac{\binom{5}{3}\times\binom{7}{2}}{\binom{12}{5}}$ = 0.2652(使用 Excel 軟體 HYPGEOM.DIST 函數查詢獲得)

(D)簽中肆獎(2 個號碼對者)機率 $f(x=2)=\frac{\binom{5}{2}\times\binom{7}{3}}{\binom{12}{5}}$ = 0.4419(使用 Excel 軟體 HYPGEOM.DIST 函數查詢獲得)

答案：(A)機率 0.0013；(B)機率 0.0442；(C)機率 0.2652；(D)機率 0.4419

練習 5.28　黑喔麵包店貨架上有 20 個麵包(未包裝)，未標示生產日期，其中有一個過期麵包，若顧客選購麵包時，採用隨機選購。小黑去購買時，貨架上只剩 5 個麵包，請計算小黑購買到過期麵包機率？

題解：母體基本單位總數量(麵包數量)$N = 20$，樣本數量(麵包數量)$n = 5$，母體中過期麵包數量 $r = 1$，抽中為過期麵包的數量 $x = 1$，樣本 5 個麵包中有過期麵包機率 = 超幾何函數 $f(x) = \frac{\binom{r}{x}\times\binom{N-r}{n-x}}{\binom{N}{n}} = \frac{\binom{1}{1}\times\binom{20-1}{5-1}}{\binom{20}{5}}$

$$= \frac{\binom{1}{1}\times\binom{19}{4}}{\binom{20}{5}} = \frac{\left(\frac{1!}{1!\times0!}\right)\times\left(\frac{19!}{4!\times15!}\right)}{\left(\frac{20!}{5!\times15!}\right)} = \frac{\left(\frac{1!}{1!\times0!}\right)\times\left(\frac{19!}{4!\times15!}\right)}{\left(\frac{20\times19!}{5\times4!\times15!}\right)} = \frac{\left(\frac{1!}{1!\times0!}\right)\times\left(\frac{\cancel{19!}}{\cancel{4!}\times\cancel{15!}}\right)}{\left(\frac{20\times\cancel{19!}}{5\times\cancel{4!}\times\cancel{15!}}\right)} = \frac{5}{20}$$

購買一個麵包是過期麵包機率 = 剩下五個麵包中有過期麵包機率 $\times \frac{1}{5} = \frac{5}{20} \times \frac{1}{5} = 0.05 = \frac{1}{20}$。故，前後購買者購買到過期麵包機率是相等。

答案：0.05

範例 5.22 20 人中四種血型的分布為 A 型 7 人、B 型 4 人、AB 型 1 人及 O 型 8 人。以取出不放回的方法隨機抽出 5 個人中恰有 2 個 O 型人的抽法有幾種？

題解：

全部人數 $N = 20$ 個人，全部人數中 O 型人數 $r = 8$，全部人數中非 O 型人數 $N - r = 20 - 8 = 12$，樣本人數 $n = 5$，假設隨機變數 $X$ 代表在樣本中 O 型人數，$x = 2$。在樣本中非 O 型人數 $n - x = 5 - 2 = 3$。

隨機抽出 $n = 5$ 個人中恰有 $x = 2$ 個 O 型抽法的組合數 $= \binom{r}{x} \times \binom{N-r}{n-x} = \binom{r=8}{x=2} \times \binom{N-r=20-8}{n-x=5-2} = \binom{8}{2} \times \binom{12}{3} = 28 \times 220 = 6160$

答案：隨機抽出 $n = 5$ 個人中恰有 $x = 2$ 個 O 型抽法的組合數 = 6160 組

## 三項分布超幾何機率函數

| 符號說明 | 母體 | 樣本 |
|---|---|---|
| 基本單位數量 | $N$ | $n$ |
| 第一種結果數量 | $X_1$ | $x_1$ |
| 第二種結果數量 | $X_2$ | $x_2$ |
| 第三種結果數量 | $X_3$ | $x_3$ |

三項分布超幾何機率函數(hypergeometric probability function)：統計 $n$ 個隨機樣本中，第一種結果有 $x_1$ 個、第二種結果有 $x_2$ 個與第三種結果有 $x_3$ 個機率。

$$f(x_1, x_2, x_3) = \frac{C_{x_1}^{X_1}\times C_{x_2}^{X_2}\times C_{x_3}^{X_3}}{C_n^N} = \frac{\binom{X_1}{x_1}\times\binom{X_2}{x_2}\times\binom{X_3}{x_3}}{\binom{N}{n}} = \frac{\binom{\text{母體第一種結果數量}}{\text{樣本第一種結果數量}}\times\binom{\text{母體第二種結果數量}}{\text{樣本第二種結果數量}}\times\binom{\text{母體第三種結果數量}}{\text{樣本第三種結果數量}}}{\binom{\text{母體數量}}{\text{樣本數量}}}$$，式中 $0 \le x_1, x_2 \text{ or } x_3 \le n$

其中 $f(x_1, x_2, x_3) = n$ 個隨機樣本中，第一種結果有 $x_1$ 個、第二種結果有 $x_2$ 個與第三種結果有 $x_3$ 個機率。

$n = x_1 + x_2 + x_3$ 隨機樣本基本單位數量　　　　$N = X_1 + X_2 + X_3$ 母體基本單位數量

$C_i^n = \binom{n}{i} = \frac{n!}{i!\times(n-i)!} = \frac{P_i^n}{i!} = {}_nC_i$

範例 5.23 小蝦蛋糕店將彩色緞帶隨機放置於一個盒子中，現共有 25 條橘色、32 條紫色和 19 條粉紅色。小 P 店員欲包裝客人購買的蛋糕，隨機從盒子中抽出 1 條，但是消費者不喜歡，小 P 將此緞帶置於一旁，再隨機抽取 1 條緞帶。請估算(A)抽出 2 條緞帶皆是橘色機率；(B)若第 1 條緞帶是紫色，第 2 條緞帶是橘色機率。(答案有效位數四捨五入取到小數點後第 4 位)

題解：

(A) $P$(2 條橘色緞帶機率) = $\frac{\binom{25}{2}\times\binom{32}{0}\times\binom{19}{0}}{\binom{76}{2}} = \frac{\frac{25!}{2!\times23!}\times\frac{32!}{0!\times32!}\times\frac{19!}{0!\times19!}}{\frac{76!}{2!\times74!}} = \frac{25\times24}{76\times75} = \frac{300}{2850} = 0.1053$ = $P$(第 1 條抽中橘色緞帶∩第 2 條抽中橘色緞帶) = $P$(第 1 條抽中橘色緞帶) × $P$(第 2 條抽中橘色緞帶|第 1 條抽中橘色緞帶) = $\frac{25}{25+32+19}\times\frac{25-1}{(25-1)+32+19} = \frac{25}{76}\times\frac{24}{75}$

(B) $P$(第 1 條橘色) + $P$(第 1 條紫色) + $P$(第 1 條粉紅色) = 1.0000 屬於分割集合，同理，$P$(第 2 條橘色) + $P$(第 2 條紫色) + $P$(第 2 條粉紅色) = 1.0000 亦屬於分割集合

$P$(第 2 條橘色|第 1 條紫色) = $\frac{25}{25+(32-1)+19} = \frac{25}{75} = 0.3333$

答案：(A)$P$(2 條橘色緞帶機率) = 0.1053；(B)$P$(第 2 條橘色|第 1 條紫色) = 0.3333

練習 5.29 若有一個摸彩箱，摸彩箱有 6 個白球、5 個紅球和 4 個黑球，若從此摸彩箱中同時抽出 3 個球，抽出球後不放回去摸彩箱，請估算(A)抽出 3 個球皆是白球機率；(B)抽出 2 個白球和 1 個紅球機率；(C)至少有 1 個白球機率。(答案有效位數四捨五入取到小數點後第 4 位)

題解：抽出球後不放回去摸彩箱情況，屬於超幾何機率分布

(A) $P$(3 個白球) = $\frac{\binom{6}{3}\times\binom{5}{0}\times\binom{4}{0}}{\binom{15}{3}} = \frac{\frac{6!}{3!\times3!}\times\frac{5!}{0!\times5!}\times\frac{4!}{0!\times4!}}{\frac{15!}{3!\times12!}} = \frac{20}{455} = 0.043956$

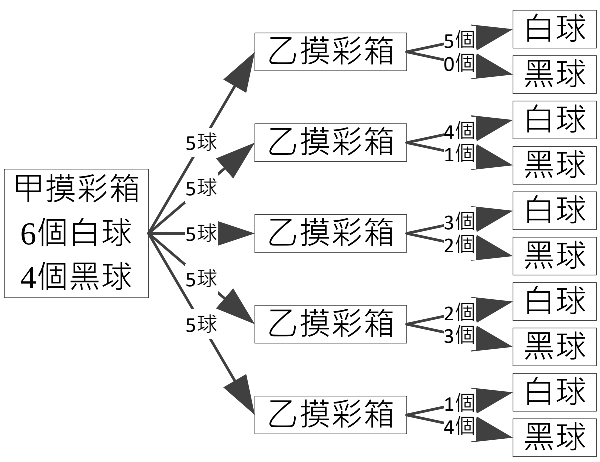
(B) $P$(2 個白球和 1 個紅球) = $\frac{\binom{6}{2}\times\binom{5}{1}\times\binom{4}{0}}{\binom{15}{3}} = \frac{\frac{6!}{2!\times4!}\times\frac{5!}{1!\times4!}\times\frac{4!}{0!\times4!}}{\frac{15!}{3!\times12!}} = \frac{75}{455} = 0.1648$

(C) $P$(至少 1 個白球) = 1 – $P$(沒有白球) = $1-\frac{\binom{6}{0}\times\binom{5+4}{3}}{\binom{15}{3}} = 1-\frac{\frac{6!}{0!\times6!}\times\frac{9!}{3!\times6!}}{\frac{15!}{3!\times12!}} = 1-\frac{84}{455} = 1-0.1846 = 0.8154$

答案：(A) 0.0440；(B) 0.1648；(C) 0.8154

範例 5.24 若有兩個摸彩箱，甲摸彩箱有 6 個白球和 4 個黑球，以抽出不放回的方式，從甲摸彩箱隨機抽出 5 球，放入原本空的乙摸彩箱中，再從乙摸彩箱中隨機抽取 1 個球，請估算(A)抽出者為黑球機率；(B)若已知抽出為黑球，計算原先由甲摸彩箱抽出放入乙摸彩箱中 5 球，有 2 球白色與 3 球黑球機率。(答案有效位數四捨五入取到小數點後第 4 位)

題解：假設 E 為抽出黑球的事件；F 為由甲摸彩箱抽出放入乙摸彩箱中 5 球，有 2 球白色與 3 球黑球之事件。




(A)運用超幾何機率分布分別運算各種乙摸彩箱組合的發生機率，再算出各種以摸彩箱組合會抽出黑球機率，全部加起來，就是最後抽出者是黑球機率。$P$(最後黑球) = $P$(E) = $\frac{\binom{4}{0}\times\binom{6}{5}}{\binom{10}{5}}\times\frac{0}{5}+\frac{\binom{4}{1}\times\binom{6}{4}}{\binom{10}{5}}\times\frac{1}{5}+\frac{\binom{4}{2}\times\binom{6}{3}}{\binom{10}{5}}\times\frac{2}{5}+\frac{\binom{4}{3}\times\binom{6}{2}}{\binom{10}{5}}\times\frac{3}{5}+\frac{\binom{4}{4}\times\binom{6}{1}}{\binom{10}{5}}\times\frac{4}{5} = 0.4000$

(B) $P$(2 球白色與 3 球黑球|最後黑球) = $P(\text{F}|\text{E}) = \frac{P(\text{F}\cap\text{E})}{P(\text{E})} = \frac{P(\text{F})\times P(\text{E}|\text{F})}{P(\text{E})} = \frac{\frac{\binom{4}{3}\times\binom{6}{2}}{\binom{10}{5}}\times\frac{3}{5}}{0.4} = \frac{5}{14} = 0.3571$

答案：(A) 0.4000；(B) 0.3571

練習 5.30 若有三個摸彩箱，甲摸彩箱有 3 個白球和 3 個黑球，乙摸彩箱有 2 個白球和 4 個黑球，丙摸彩箱有 5 個白球和 3 個黑球，請估算(A)由每一個摸彩箱皆隨機抽出兩球，皆為 1 個白球和 1 個黑球機率；(B)丟擲一個均質錢幣三次，若三次皆為正面，從甲摸彩箱隨機抽出兩球；若三次皆為反面，從乙摸彩箱隨機抽出兩球；若非上述前況者，從丙摸彩箱隨機抽出兩球，計算抽出的兩球，1 個白球和 1 個黑球機率；(C)延續前一小題，若抽出為 1 個白球和 1 個黑球，其來自丙摸彩箱機率。(答案有效位數四捨五入取到小數點後第 4 位)

題解：

(A) $P$(E) = 甲摸彩箱抽出 1 個白球和 1 個黑球機率×乙摸彩箱抽出 1 個白球和 1 個黑球機率×丙摸彩箱抽出 1 個白球和 1 個黑球機率= $\frac{\binom{3}{1}\times\binom{3}{1}}{\binom{6}{2}} \times \frac{\binom{2}{1}\times\binom{4}{1}}{\binom{6}{2}} \times \frac{\binom{5}{1}\times\binom{3}{1}}{\binom{8}{2}} = \frac{\frac{3!}{1!\times2!}\times\frac{3!}{1!\times2!}}{\frac{6!}{2!\times4!}} \times \frac{\frac{2!}{1!\times1!}\times\frac{4!}{1!\times3!}}{\frac{6!}{2!\times4!}} \times \frac{\frac{5!}{1!\times5!}\times\frac{3!}{1!\times2!}}{\frac{8!}{2!\times6!}} = \frac{9}{15} \times \frac{8}{15} \times \frac{15}{28} = \frac{6}{35} =$ 0.1714

(B)假設 E 為抽出 1 個白球和 1 個黑球的事件；丟擲一個均質錢幣三次，若三次皆為正面機率$\frac{1}{8}$甲摸彩箱，若三次皆為反面機率$\frac{1}{8}$乙摸彩箱，剩下機率$\frac{6}{8}$丙摸彩箱

$P$(E) = $P$(E∩甲摸彩箱) + $P$(E∩乙摸彩箱) + $P$(E∩丙摸彩箱) = $P$(甲摸彩箱) × $P$(E|甲摸彩箱) + $P$(乙摸彩箱) × $P$(E|乙摸彩箱) + $P$(丙摸彩箱) × $P$(E|丙摸彩箱) = $\frac{1}{8} \times \frac{\binom{3}{1}\times\binom{3}{1}}{\binom{6}{2}} + \frac{1}{8} \times \frac{\binom{2}{1}\times\binom{4}{1}}{\binom{6}{2}} + \frac{6}{8} \times \frac{\binom{5}{1}\times\binom{3}{1}}{\binom{8}{2}} =$ 0.5435

(C) $P$(丙摸彩箱|E) = $\frac{P(\text{丙摸彩箱}\cap\text{E})}{P(\text{E})} = \frac{P(\text{丙摸彩箱})\times P(\text{E}|\text{丙摸彩箱})}{P(\text{E})} = \frac{\frac{6}{8}\times\frac{\binom{5}{1}\times\binom{3}{1}}{\binom{8}{2}}}{0.5435} = 0.7393$

答案：(A) 0.1714；(B) 0.5435；(C) 0.7393

**超幾何機率分布的期望值與變異數**

若母體基本單位數量 $N$ 中有成功次數 $r$，在 $n$ 次獨立事件(隨機實驗)中，發生 $x$ 次成功的**期望值** $E(X)$ 為：

$$E(X) = \frac{n\times r}{N} = \text{隨機實驗次數} \times \frac{\text{母體中成功次數}}{\text{母體基本單位數量}} = \text{隨機實驗次數} \times \text{母體中成功次數的比率}$$

**變異數** $Var(X)$為

$$Var(X) = \sigma^2 = n \times \frac{r}{N} \times \frac{N-r}{N} \times \frac{N-n}{N-1} = \text{隨機實驗次數} \times \frac{\text{母體中成功次數}}{\text{母體基本單位數量}} \times \frac{\text{母體中失敗次數}}{\text{母體基本單位數量}} \times \frac{\text{母體基本單位數量}-\text{隨機實驗次數}}{\text{母體基本單位數量}-1}$$

$$= \text{隨機實驗次數} \times \text{母體中成功次數的比率} \times \text{母體中失敗次數的比率} \times \frac{\text{母體基本單位數量}-\text{隨機實驗次數}}{\text{母體基本單位數量}-1}$$

**標準(偏)差** σ 為

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{n \times \frac{r}{N} \times \frac{N-r}{N} \times \frac{N-n}{N-1}}$$

式中：$\frac{N-n}{N-1}$為有限母體校正因子或有限母體修正項(finite population correction, f.p.c. or F.P.C.)

超幾何分布(Hypergeometric distribution)機率 Excel 函數

利用 Excel 2010 軟體中公式→函數程式庫中其他函數→統計(S)→選取 **HYPGEOM.DIST**。在函數引數對話視窗中，Sample_s 方塊輸入：樣本中成功的個數 $x$；Number_sample 方塊中輸入：樣本大小 $n$；

Population_s 方塊中輸入：母體成功的個數；Number_pop 方塊輸入：母體的大小 $N$；Cumulative 方塊中輸入：TRUE 為採用累加分布函數、FALSE 採用機率密度函數。確定。即會在原先選定的儲存格中出現超幾何分布機率(Hypergeometric distribution probability)。HYPGEOMDIST(Sample_s,Number_sample,Population_s,Number_pop,Cumulative)。

利用 Excel 2007 軟體中插入(I)→函數(F)…→在插入函數對話方塊中選取類別(C): **統計**，選取函數(N): **HYPGEOMDIST**→確定。在函數引數對話視窗中，Sample_s 方塊輸入：樣本中成功的個數 $x$；Number_sample 方塊中輸入：樣本大小 $n$；Population_s 方塊中輸入：母體成功的個數；Number_pop 方塊輸入：母體的大小 $N$。確定。即會在原先選定的儲存格中出現超幾何分布機率(Hypergeometric distribution probability)。HYPGEOMDIST(Sample_s,Number_sample,Population_s,Number_pop)。

範例 5.25　若在摸彩箱中放置 5 個紅色球、3 個白色球，今從摸彩箱中抽出 4 個球，球經抽出後不再放回原摸彩箱，以 $X$ 表示抽出紅色球的數量，試評估(A)隨機變數 $X$ 是屬於何種分布？；(B)$X$ 機率函數？；(C)$P(2 \le X \le 4)$；(D)期望值 $E(X)$；(E)變異數 $V(X)$(答案有效位數四捨五入取到小數點後第 4 位)

題解：

(A)依據「抽出後不再放回」陳述，推測為【超幾何分布】

(B)隨機變數 $X$ 表示抽出紅色球的數量，其機率函數 $f(x) = \frac{C_x^r \times C_{n-x}^{N-r}}{C_n^N} = \frac{\binom{r}{x}\times\binom{N-r}{n-x}}{\binom{N}{n}} = \frac{\binom{5}{x}\times\binom{8-5}{4-x}}{\binom{8}{4}}$

樣本數量 $n = 4$，母體數量 $N = 8$，母體紅色球數量 $r = 5$

(C)$P(2 \le X \le 4) = f(x = 2) + f(x = 3) + f(x = 4) = 0.4286 + 0.4286 + 0.0714 = 0.9286$

抽出紅色球的數量 $x = 4$ 機率 $f(x = 4) = \frac{C_x^r \times C_{n-x}^{N-r}}{C_n^N} = \frac{\binom{r}{x}\times\binom{N-r}{n-x}}{\binom{N}{n}} = \frac{C_4^5 \times C_{4-4}^{8-5}}{C_4^8} = \frac{\binom{5}{4}\times\binom{3}{0}}{\binom{8}{4}} = \frac{\left(\frac{5!}{4!\times1!}\right)\times\left(\frac{3!}{0!\times3!}\right)}{\left(\frac{8!}{4!\times4!}\right)} = \frac{\left(\frac{5\times4\times3\times2\times1}{4\times3\times2\times1\times1}\right)\times\left(\frac{3\times2\times1}{1\times3\times2\times1}\right)}{\left(\frac{8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}{4\times3\times2\times1\times4\times3\times2\times1}\right)} = \frac{5\times1}{70} = 0.0714$

抽出紅色球的數量 $x = 3$ 機率 $f(x = 3) = \frac{C_x^r \times C_{n-x}^{N-r}}{C_n^N} = \frac{\binom{r}{x}\times\binom{N-r}{n-x}}{\binom{N}{n}} = \frac{C_3^5 \times C_{4-3}^{8-5}}{C_4^8} = \frac{\binom{5}{3}\times\binom{3}{1}}{\binom{8}{4}} = \frac{\left(\frac{5!}{3!\times2!}\right)\times\left(\frac{3!}{1!\times2!}\right)}{\left(\frac{8!}{4!\times4!}\right)} = \frac{\left(\frac{5\times4\times3\times2\times1}{3\times2\times1\times2\times1}\right)\times\left(\frac{3\times2\times1}{1\times2\times1}\right)}{\left(\frac{8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}{4\times3\times2\times1\times4\times3\times2\times1}\right)} = \frac{10\times3}{70} = 0.4286$

抽出紅色球的數量 $x = 2$ 機率 $f(x = 2) = \frac{C_x^r \times C_{n-x}^{N-r}}{C_n^N} = \frac{\binom{r}{x}\times\binom{N-r}{n-x}}{\binom{N}{n}} = \frac{C_2^5 \times C_{4-2}^{8-5}}{C_4^8} = \frac{\binom{5}{2}\times\binom{3}{2}}{\binom{8}{4}} = \frac{\left(\frac{5!}{2!\times3!}\right)\times\left(\frac{3!}{2!\times1!}\right)}{\left(\frac{8!}{4!\times4!}\right)} = \frac{\left(\frac{5\times4\times3\times2\times1}{2\times1\times3\times2\times1}\right)\times\left(\frac{3\times2\times1}{2\times1\times1}\right)}{\left(\frac{8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}{4\times3\times2\times1\times4\times3\times2\times1}\right)} = \frac{10\times3}{70} = 0.4286$

(D)期望值 $E(X) = \frac{n\times r}{N} = \frac{4\times5}{8} = 2.5000$

(E)變異數 $V(X) = \sigma^2 = n \times \frac{r}{N} \times \frac{N-r}{N} \times \frac{N-n}{N-1} = 4 \times \frac{5}{8} \times \frac{8-5}{8} \times \frac{8-4}{8-1} = 4 \times \frac{5}{8} \times \frac{3}{8} \times \frac{4}{7} = 0.5357$

答案：(A)超幾何分布；(B) $f(x) = \frac{\binom{5}{x}\times\binom{8-5}{4-x}}{\binom{8}{4}}$；(C)機率 0.9286；(D)$E(X) = 2.5000$；(E)V($X$) = 0.5357

## 5.7 卜瓦松分布

在連續單位時間、連續單位面積或連續單位空間內 $n$ 個事件中所發生成功次數 $x$ 很少，發生成功的平均次數 $\mu$(在時間區間 t 內發生 $\lambda$ 次數成功，$\mu = \frac{\lambda}{t}$)，陳述每一種成功次數 $X$ 發生機率分布。1837 年法國數學家卜瓦松(Simeon Denis Poisson)提出此種分布情況。卜瓦松分布(Poisson distribution)適合應用於陳述單位時間內特定隨機事件發生次數之機率分布，例如：特定時間內發生服務失誤次數、速食餐廳櫃台點等

候點餐人數、公車站牌等候公車人數、櫃檯員工接到客訴次數、高鐵發生誤點次數等。為了更符合布瓦松分布的特性，可以調整單位時間的長度。

單位時間或空間相當於二項分布之樣本大小 $n$，當二項分布之樣本數量 $n$ 很大($n$ > 100)，而成功機率 $p$ 很低($p < 0.05$)，此分布即接近卜瓦松分布，故**卜瓦松分布**屬於二項分布的特例。

隨機變數 $X$ 屬於間斷隨機變數中**卜瓦松分布**，一般使用 $X \sim P(\mu)$或 $X \sim P(\lambda)$符號表示。隨機變數 $X$ 可能的變量(數值)包含所有非負的整數 $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$。

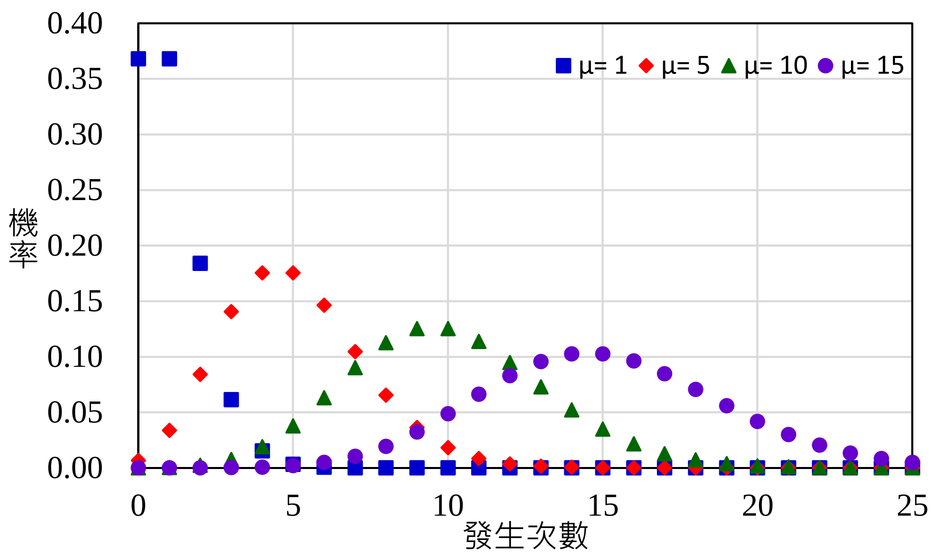



圖 5-2 卜瓦松機率分布

**卜瓦松分布**隨機實驗的**特徵**

a.在 A 單位時間或空間內發生特定事件機率與 B 單位時間或空間內發生相同事件機率皆**相等**。

b.在 A 單位時間或空間內發生特定事件與 B 單位時間或空間內發生相同事件為**隨機獨立**。任何兩個單位時間或空間內發生特定事件互**不相干**。

c.在單位時間或空間內發生兩次或兩次以上相同事件機率非常低，幾乎為 0。

d.在一定(特定)時間或空間內發生特定事件的期望值(母體平均值)與時間或空間的大小成正比。

卜瓦松機率函數(Poisson distribution function)

設在 $n$ 次事件(樣本大小)中成功次數為隨機變數以 $X$ 代表之，變量 $x = 0, 1, 2, \ldots$，其平均值($\mu$ 或 $\lambda$)或期望值設為 $\mu = n \times p$ 成功次數，隨機變數 $X$ 之機率分布公式稱為卜瓦松公式(Poisson formula)。

$$f(x) = P_x = P(x) = e^{-\mu} \times \frac{\mu^x}{x!} = e^{-\text{期望值}} \times \frac{\text{期望值}^{\text{成功次數}}}{\text{成功次數}!}$$

其中 $e$ = 2.71828183 自然對數、自然數(常數)

$x! = x \times (x-1) \times (x-2) \times (x-3) \times \ldots \times 1$。$x$ 階乘(factorial)：為所有小於或等於 $x$ 的正整數之乘積。

$\mu$：卜瓦松分布的平均值

自然對數 Excel 函數

利用 Excel 軟體中插入(I)→函數(F)…→在插入函數對話方塊中選取類別(C): **數學與三角函數**，選取函數(N): **EXP**→確定。在函數引數對話視窗中，Number 方塊輸入：e 的乘方值。確定。即會在原先選定的儲存格中出現自然對數的乘方值，等於 $e^{\text{number}} = 2.17828183^{\text{number}}$。EXP(number)。

卜瓦松分布累積機率

在卜瓦松分布中欲累積核算從 0 次成功機率一直到 $t$ 次成功機率，即為累積機率 $F_x(t) = P(X \le t)$。

$$F_x(t) = P(X \le t) = \sum_{x=0}^{t}\left(e^{-\mu} \times \frac{\mu^x}{x!}\right) = \sum_{0\text{ 次成功}}^{t\text{ 次成功}}\left(e^{-\text{期望值}} \times \frac{\text{期望值}^{\text{成功次數}}}{\text{成功次數!}}\right)$$

範例 5.26　奇遇餐廳會計小玟工作超過 15 年，該餐廳每天客人皆超過 200 人次，經過長期統計調查發現，平均一天有 3 個客人結帳金額算錯，若結帳金額算錯人次的分布方式屬於卜瓦松分布，試估算一天最多有四個客人結帳金額算錯機率為多少？(答案有效位數四捨五入取到小數點後第 4 位)

題解：平均值 $\mu = 3$ 次錯誤/天，設隨機變數 $X$ 為結帳金額發生錯誤人次(次數)。

一天內沒有發生結帳金額錯誤機率 $f(x=0) = e^{-\mu} \times \frac{\mu^x}{x!} = e^{-3} \times \frac{3^0}{0!} = 0.0498 \times 1 = 0.0498$

一天內發生 1 次結帳金額錯誤機率 $f(x=1) = e^{-\mu} \times \frac{\mu^x}{x!} = e^{-3} \times \frac{3^1}{1!} = 0.0498 \times \frac{3}{1} = 0.1494$

一天內發生 2 次結帳金額錯誤機率 $f(x=2) = e^{-\mu} \times \frac{\mu^x}{x!} = e^{-3} \times \frac{3^2}{2!} = 0.0498 \times \frac{9}{2} = 0.2241$

一天內發生 3 次結帳金額錯誤機率 $f(x=3) = e^{-\mu} \times \frac{\mu^x}{x!} = e^{-3} \times \frac{3^3}{3!} = 0.0498 \times \frac{27}{6} = 0.2241$

一天內發生 4 次結帳金額錯誤機率 $f(x=4) = e^{-\mu} \times \frac{\mu^x}{x!} = e^{-3} \times \frac{3^4}{4!} = 0.0498 \times \frac{81}{24} = 0.1681$

| 次數 $x$ | 機率 $f(x)$ |
|---|---|
| 0 | 0.0498 |
| 1 | 0.1494 |
| 2 | 0.2241 |
| 3 | 0.2241 |
| 4 | 0.1681 |
| 合計 | 0.8153 |

$f(X \le 4) = 0.8153$　亦可透過**卜瓦松分布**累積機率表查詢獲得或使用 Excel 軟體 POISSON.DIST 函數運算獲得。

答案：機率 0.8155

範例 5.27　純純餐廳經營超過 15 年，該餐廳每天客人皆超過 200 人次，經過長期統計調查發現，平均一個月有 20 個客人抱怨服務缺失，若服務缺失人次的分布屬於**卜瓦松分布**，試估算一個月最多有 15 個客人抱怨服務缺失機率為多少？(答案有效位數四捨五入取到小數點後第 4 位)

題解：平均值 $\mu = 20$ 次抱怨/月，假設隨機變數 $X$ 代表每個月客人抱怨服務缺失的人次。

一個月有 0 個客人抱怨服務缺失機率 $f(x=0) = e^{-\mu} \times \frac{\mu^x}{x!} = e^{-20} \times \frac{20^0}{0!} = 2.0612 \times 10^{-9}$

一個月有 1 個客人抱怨服務缺失機率 $f(x=1) = e^{-\mu} \times \frac{\mu^x}{x!} = e^{-20} \times \frac{20^1}{1!} = 4.1223 \times 10^{-8}$

一個月有 2 個客人抱怨服務缺失機率 $f(x=2) = e^{-\mu} \times \frac{\mu^x}{x!} = e^{-20} \times \frac{20^2}{2!} = 4.1223 \times 10^{-7}$

一個月有 3 個客人抱怨服務缺失機率 $f(x=3) = e^{-\mu} \times \frac{\mu^x}{x!} = e^{-20} \times \frac{20^3}{3!} = 2.7482 \times 10^{-6}$

一個月有 4 個客人抱怨服務缺失機率 $f(x=4) = e^{-\mu} \times \frac{\mu^x}{x!} = e^{-20} \times \frac{20^4}{4!} = 1.3741 \times 10^{-5}$

一個月有 5 個客人抱怨服務缺失機率 $f(x=5) = e^{-\mu} \times \frac{\mu^x}{x!} = e^{-20} \times \frac{20^5}{5!} = 5.4964 \times 10^{-5}$

一個月有 6 個客人抱怨服務缺失機率 $f(x=6) = e^{-\mu} \times \frac{\mu^x}{x!} = e^{-20} \times \frac{20^6}{6!} = 1.8321 \times 10^{-4}$

一個月有 7 個客人抱怨服務缺失機率 $f(x=7) = e^{-\mu} \times \frac{\mu^x}{x!} = e^{-20} \times \frac{20^7}{7!} = 5.2347 \times 10^{-4}$

一個月有 8 個客人抱怨服務缺失機率 $f(x=8) = e^{-\mu} \times \frac{\mu^x}{x!} = e^{-20} \times \frac{20^8}{8!} = 1.3087 \times 10^{-3}$

一個月有 9 個客人抱怨服務缺失機率 $f(x=8) = e^{-\mu} \times \frac{\mu^x}{x!} = e^{-20} \times \frac{20^9}{9!} = 2.9082 \times 10^{-3}$

一個月有 10 個客人抱怨服務缺失機率 $f(x=10) = e^{-\mu} \times \frac{\mu^x}{x!} = e^{-20} \times \frac{20^{10}}{10!} = 5.8163 \times 10^{-3}$

一個月有 11 個客人抱怨服務缺失機率 $f(x = 11) = e^{-\mu} \times \frac{\mu^x}{x!} = e^{-20} \times \frac{20^{11}}{11!} = 0.0106$

一個月有 12 個客人抱怨服務缺失機率 $f(x = 12) = e^{-\mu} \times \frac{\mu^x}{x!} = e^{-20} \times \frac{20^{12}}{12!} = 0.0176$

一個月有 13 個客人抱怨服務缺失機率 $f(x = 13) = e^{-\mu} \times \frac{\mu^x}{x!} = e^{-20} \times \frac{20^{13}}{13!} = 0.0271$

一個月有 14 個客人抱怨服務缺失機率 $f(x = 14) = e^{-\mu} \times \frac{\mu^x}{x!} = e^{-20} \times \frac{20^{14}}{14!} = 0.0387$

一個月有 15 個客人抱怨服務缺失機率 $f(x = 15) = e^{-\mu} \times \frac{\mu^x}{x!} = e^{-20} \times \frac{20^{15}}{15!} = 0.0516$

一個月最多有 15 個客人抱怨服務缺失機率 $f(X \le 15) = 0.1565$(查**卜瓦松分布**累積機率表或使用 Excel 軟體 POISSON.DIST 函數運算)

答案：機率 0.1565

練習 5.31 高雄小港機場飛機起降次數在一個小時內屬於**卜瓦松分布**，平均一個小時有 $\mu = 1.5$ 個航班起降。試估算(A)未來 1 個小時內，沒有飛機起降機率？(B)未來 1 個小時內，剛好有 2 個航班起降機率？(C)未來 1 個小時內，至少有 1 個航班起降機率？(D)未來 3 個小時內，沒有飛機起降機率？(E)未來 3 個小時內，有 1~4 個航班起降機率？(機率答案有效位數四捨五入取到小數點後第 4 位)

題解：每小時平均值 $\mu = 1.5 \frac{\text{次航班起降}}{\text{小時}}$，假設隨機變數 $X$ 代表未來 1 個小時內，飛機起降次數。時間單位：1 小時。

(A)未來 1 個小時內，沒有飛機起降機率 $f(x = 0) = e^{-\mu} \times \frac{\mu^x}{x!} = e^{-1.5} \times \frac{1.5^0}{0!} = 0.2231 \times 1 = 0.2231$

(B)未來 1 個小時內，剛好有 2 個航班起降機率 $f(x = 2) = e^{-1.5} \times \frac{1.5^2}{2!} = 0.2231 \times 1.125 = 0.2510$

(C)未來 1 個小時內，至少有 1 個航班起降機率 $f(X \ge 1) = 1 - f(x = 0) = 1 - 0.2231 = 0.7769$

每 3 小時平均值 $\mu = 1.5 \times 3 = 4.5 \frac{\text{次航班起降}}{\text{3 小時}}$，假設隨機變數 $X$ 代表未來 3 個小時內，飛機起降次數。時間單位：3 小時。

(D)未來 3 個小時內，沒有飛機起降機率 $f(x = 0) = e^{-\mu} \times \frac{\mu^x}{x!} = e^{-4.5} \times \frac{4.5^0}{0!} = 0.0111 \times 1 = 0.0111$

(E)未來 3 個小時內，有 1~4 個航班起降機率 $f(1 \le X \le 4) = f(X \le 4) - f(X \le 0) = 0.5321 - 0.0111$(查**卜瓦松分布**累積機率表或使用 Excel 軟體 POISSON.DIST 函數運算) = 0.5210

答案：(A)0.2231；(B)0.2510；(C)0.7769；(D)0.0111；(E)0.5210

練習 5.32 玟心飯店訂房組的訂房專線電話，平均 1 小時有 2 通訂房或詢問電話，接到電話次數分布屬於**卜瓦松分布**。試估算(A)未來一個小時內，沒有接到電話機率？(B)未來一個小時內，最多接到 3 通電話機率？(C)未來 3 個小時內，沒有接到電話機率？(D)未來 3 個小時內，接到 1~4 通電話機率？(答案有效位數四捨五入取到小數點後第 4 位)

題解：單位時間內電話通數 $\mu = 2\frac{\text{通電話}}{\text{小時}}$，假設隨機變數 $X$ 代表未來 1 小時內接到電話的通數

(A)卜瓦松分布平均值 $\mu = 2\frac{\text{通電話}}{\text{小時}}$，未來一個小時內，沒有接到電話機率 $f(x = 0) = e^{-\mu} \times \frac{\mu^x}{x!} = e^{-2} \times \frac{2^0}{0!} = 0.1353 \times 1 = 0.1353$

(B)未來一個小時內，最多接到 3 通電話機率 $f(X \le 3) = 0.8571$(查卜瓦松分布累積機率表或使用 Excel 軟體 POISSON.DIST 函數運算)

(C)卜瓦松分布平均值 $\mu = 6\frac{\text{通電話}}{\text{3 小時}}$，假設隨機變數 $X$ 代表未來 3 小時內接到電話的通數(時間單位：3 小時)。

未來 3 個小時內，沒有接到電話機率 $f(x = 0) = e^{-\mu} \times \frac{\mu^x}{x!} = e^{-6} \times \frac{6^0}{0!} = 0.0025 \times 1 = 0.0025$

(D)卜瓦松分布平均值 $\mu = 6\frac{\text{通電話}}{3\text{ 小時}}$，假設隨機變數 $X$ 代表未來 3 小時內接到電話的通數(時間單位：3 小時)。

未來 3 個小時內，接到 1~4 通電話機率 $f(1 \le X \le 4) = f(X \le 4) - f(X \le 0) = 0.2851 - 0.0025$(查卜瓦松分布累積機率表或使用 Excel 軟體 POISSON.DIST 函數運算) = 0.2826

答案：(A)機率 0.1353；(B)機率 0.8571；(C)機率 0.0025；(D)機率 0.2826

練習 5.33　玫心飯店訂房組的訂房專線電話，平均 1 小時有 20 通訂房或詢問電話，接到電話次數分布屬於卜瓦松分布。試估算(A)未來 1 分鐘內，沒有接到電話機率？(B)未來 1 分鐘內，最多接到 3 通電話機率？(C)未來 3 分鐘內，沒有接到電話機率？(D)未來 3 分鐘內，接到 1~4 通電話機率？(答案有效位數四捨五入取到小數點後第 4 位)

題解：單位時間內電話通數 $\mu = 20\frac{\text{通電話}}{\text{小時}} = 20\frac{\text{通電話}}{\cancel{\text{小時}}} \times \frac{1\ \cancel{\text{小時}}}{60\text{ 分鐘}} = 0.3333\frac{\text{通電話}}{\text{分鐘}}$，假設隨機變數 $X$ 代表未來 1 分鐘內接到電話的通數

(A)布瓦松分布平均值 $\mu = 0.3333\frac{\text{通電話}}{\text{分鐘}}$，$f(x = 0) = e^{-\mu} \times \frac{\mu^x}{x!} = e^{-0.3333} \times \frac{0.3333^0}{0!} = 0.7165$

(B)未來 1 分鐘內，最多接到 3 通電話機率 $f(X \le 3) = 0.9996$(查 Poisson distribution 累積機率表，內差法或使用 Excel 軟體 POISSON.DIST 函數運算)

(C)布瓦松分布平均值 $\mu = 0.3333\frac{\text{通電話}}{\text{分鐘}} \times 3\text{ 分鐘} = 1.0000\frac{\text{通電話}}{3\text{ 分鐘}}$，假設隨機變數 $X$ 代表未來 3 分鐘內接到電話的通數，$f(0) = e^{-\mu} \times \frac{\mu^x}{x!} = e^{-1} \times \frac{1^0}{0!} = 0.3679$

(D)未來 3 分鐘內，接到 1~4 通電話機率 $f(1 \le X \le 4) = f(X \le 4) - f(X \le 0) = 0.9963 - 0.3679$(查 Poisson distribution 累積機率表或使用 Excel 軟體 POISSON.DIST 函數運算) = 0.6284

答案：(A)機率 0.7165；(B)機率 0.9996；(C)機率 0.3679；(D)機率 0.6284

練習 5.34　高速公路交流道旁，小琪速食餐廳提供快速購餐車道服務，單位時間進入購餐車道的車輛數量屬於卜瓦松分布，平均 19 分鐘有一輛車子進入購餐車道。試估算(A)未來一個小時內，沒有車輛進入機率？(B)未來一個小時內，至少有 3 輛車輛進入機率？(答案有效位數四捨五入取到小數點後第 4 位)

題解：卜瓦松分布平均值 $\mu = \frac{1\text{ 輛車}}{19\ \cancel{\text{分鐘}}} \times \frac{60\ \cancel{\text{分鐘}}}{1\text{ 小時}} = \frac{60}{19} \times \frac{\text{輛車}}{\text{小時}} = 3.1579\frac{\text{輛車}}{\text{小時}}$，假設隨機變數 $X$ 代表未來 1 小時內進入購餐車道的車輛數。時間單位統一轉換為 1 小時。

(A)未來一個小時內，沒有車輛進入機率 $f(x = 0) = e^{-\mu} \times \frac{\mu^x}{x!} = e^{-3.1579} \times \frac{3.1579^0}{0!} = 0.0425 \times 1 = 0.0425$(亦可使用 Excel 軟體 POISSON.DIST 函數查詢獲得)

(B)未來一個小時內，至少有 3 輛車輛進入機率 $f(X \ge 3) = 1 - f(X \le 2) = 1 - 0.3888$(查卜瓦松分布累積機率表或使用 Excel 軟體 POISSON.DIST 函數運算) = 0.6112

答案：(A)機率 0.0425；(B)機率 0.6112

**卜瓦松分布機率分布的期望值與變異數**

在 $n$ 次獨立事件(隨機實驗)中，隨機變數 $X$ 分布的平均值為 $\mu$，發生 $x$ 次成功的**期望值** $E(X)$為：

$$E(X) = \mu$$

**變異數** $Var(X)$為

$$Var(X) = \sigma^2 = \mu$$

**標準(偏)差** σ 為

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\mu}$$

**卜瓦松分布和二項分布(binomial distribution)的相關性**

當成功機率 $p \le 0.05$ 與實驗次數(樣本大小)$n \ge 20$ 時，**卜瓦松分布**和**二項分布**兩者機率差異很小，可以利用**卜瓦松分布**機率取代**二項分布**機率，以方便計算事件發生機率。

範例 5.28　新子宮頸癌治療藥品的治癒率僅達 5 %(無效率為 95 %)。今實驗 20 位病人，最多有 1 位病人治癒機率為多少？(答案有效位數四捨五入取到小數點後第 4 位)

題解：假設隨機變數 $X$ 代表可以治癒病人人數，由二項分布期望值 $E(X) = \mu = n \times p = 20 \times 0.05 = 1$ 人

最多 1 人治癒機率可利用二項分布累計機率公式

$$P(X \le 1) = \sum_{x=0}^{1} f(x) = \sum_{x=0}^{1} \binom{20}{x} \times (0.05)^x \times (0.95)^{20-x}$$

查二項分布累計機率表或使用 Excel 軟體 BINOM.DIST 函數運算：實驗次數 $n = 20$，治癒機率 $p = 0.05$，最多治癒人數 $x = 1$，最多 1 位治癒機率 $P(X \le 1) = 0.7358$

查卜瓦松分布累積機率表或使用 Excel 軟體 POISSON.DIST 函數運算：平均值 $\mu = 1$，最多 1 位治癒機率 $f(X \le 1) = 0.7358$

答案：機率 0.7358

Poisson distribution 機率 Excel 函數

利用 Excel 2010 軟體中公式→函數程式庫中其他函數→統計(S)→選取 **POISSON.DIST**。在函數引數對話視窗中，X 方塊輸入：事件出現次數 $x$；Mean 方塊中輸入：期望值、母體平均值 $\mu$； Cumulative 方塊中輸入：TRUE 為採用累加分布函數、FALSE 採用機率密度函數。確定。即會在原先選定的儲存格中出現卜瓦松分布機率。POISSON.DIST(X,Mean,Cumulative)。

利用 Excel 2007 軟體中插入(I)→函數(F)…→在插入函數對話方塊中選取類別(C): **統計**，選取函數(N): **POISSON**→確定。在函數引數對話視窗中，X 方塊輸入：事件出現次數 $x$；Mean 方塊中輸入：期望值、母體平均值 $\mu$； Cumulative 方塊中輸入：TRUE 為採用累加分布函數、FALSE 採用機率密度函數。確定。即會在原先選定的儲存格中出現卜瓦松機率。POISSON(x,mean,cumulative)。

練習 5.35　高雄旗津欲興建跨港纜車，原經過市政府委託民間機構進行高雄市民意調查，宣稱居民贊成機率 0.02 (反對率 0.98)。今隨機訪談 200 位高雄市民，若原先的民意調查可靠，試分別利用**卜瓦松分布**和**二項分布**估算 0、1、2、3、4、5、6、7、8、9 人贊成機率？(答案有效位數四捨五入取到小數點後第 4 位)

題解：假設隨機變數 $X$ 代表贊成人數

**卜瓦松分布**　$\mu = n \times p = 200 \times 0.02 = 4$

$f(x = 0) = e^{-\mu} \times \frac{\mu^x}{x!} = e^{-4} \times \frac{4^0}{0!} = 0.0183 \times 1 = 0.0183$　　$f(x = 1) = e^{-4} \times \frac{4^1}{1!} = 0.0183 \times \frac{4}{1} = 0.0733$

$f(x = 2) = e^{-4} \times \frac{4^2}{2!} = 0.0183 \times \frac{16}{2} = 0.1465$　　$f(x = 3) = e^{-4} \times \frac{4^3}{3!} = 0.0183 \times \frac{64}{6} = 0.1954$

$f(x = 4) = e^{-4} \times \frac{4^4}{4!} = 0.0183 \times \frac{256}{24} = 0.1954$　　$f(x = 5) = e^{-4} \times \frac{4^5}{5!} = 0.0183 \times \frac{1024}{120} = 0.1563$

$f(x = 6) = e^{-4} \times \frac{4^6}{6!} = 0.0183 \times \frac{4096}{720} = 0.1042$　　$f(x = 7) = e^{-4} \times \frac{4^7}{7!} = 0.0183 \times \frac{16384}{5040} = 0.0595$

$f(x = 8) = e^{-4} \times \frac{4^8}{8!} = 0.0183 \times \frac{65536}{40320} = 0.0298$　　$f(x = 9) = e^{-4} \times \frac{4^9}{9!} = 0.0183 \times \frac{262144}{362880} = 0.0132$

二項分布：樣本數量 $n = 200$，贊成機率 $p = 0.02$，反對機率 $q = 0.98$

$f(x = 0) = \binom{n}{x} \times p^x \times q^{n-x} = \binom{200}{0} \times 0.02^0 \times 0.98^{200} = 0.0176$

$f(x = 1) = \binom{n}{x} \times p^x \times q^{n-x} = \binom{200}{1} \times 0.02^1 \times 0.98^{199} = 0.0718$

$f(x = 2) = \binom{n}{x} \times p^x \times q^{n-x} = \binom{200}{2} \times 0.02^2 \times 0.98^{198} = 0.1458$

$f(x = 3) = \binom{n}{x} \times p^x \times q^{n-x} = \binom{200}{3} \times 0.02^3 \times 0.98^{197} = 0.1963$

$f(x = 4) = \binom{n}{x} \times p^x \times q^{n-x} = \binom{200}{4} \times 0.02^4 \times 0.98^{196} = 0.1973$

$f(x = 5) = \binom{n}{x} \times p^x \times q^{n-x} = \binom{200}{5} \times 0.02^5 \times 0.98^{195} = 0.1579$

$f(x = 6) = \binom{n}{x} \times q^{n-x} \times p^x = \binom{200}{6} \times 0.02^6 \times 0.98^{194} = 0.1047$

$f(x = 7) = \binom{n}{x} \times p^x \times q^{n-x} = \binom{200}{7} \times 0.02^7 \times 0.98^{193} = 0.0592$

$f(x = 8) = \binom{n}{x} \times p^x \times q^{n-x} = \binom{200}{8} \times 0.02^8 \times 0.98^{192} = 0.0292$

$f(x = 9) = \binom{n}{x} \times p^x \times q^{n-x} = \binom{200}{9} \times 0.02^9 \times 0.98^{191} = 0.0127$

| | 卜瓦松分布 | 二項分布 |
|---|---|---|
| $f(0)$ | 0.0183 | 0.0176 |
| $f(1)$ | 0.0733 | 0.0718 |
| $f(2)$ | 0.1465 | 0.1458 |
| $f(3)$ | 0.1954 | 0.1963 |
| $f(4)$ | 0.1954 | 0.1973 |
| $f(5)$ | 0.1563 | 0.1579 |
| $f(6)$ | 0.1042 | 0.1047 |
| $f(7)$ | 0.0595 | 0.0592 |
| $f(8)$ | 0.0298 | 0.0292 |
| $f(9)$ | 0.0132 | 0.0127 |

答案：**卜瓦松分布** $f(0) = 0.0183$；$f(1) = 0.0733$；$f(2) = 0.1465$；$f(3) = 0.1954$；$f(4) = 0.1954$；$f(5) = 0.1563$；$f(6) = 0.1042$；$f(7) = 0.0595$；$f(8) = 0.0298$；$f(9) = 0.0132$。二項分布 $f(0) = 0.0176$；$f(1) = 0.0718$；$f(2) = 0.1458$；$f(3) = 0.1963$；$f(4) = 0.1973$；$f(5) = 0.1579$；$f(6) = 0.1047$；$f(7) = 0.0592$；$f(8) = 0.0292$；$f(9) = 0.0127$

練習 5.36　若將 200 顆粉圓放入一大桶奶茶中攪拌，後分裝製作成 20 杯珍珠奶茶，平均一杯珍珠奶茶有 10 顆粉圓。分別利用**卜瓦松分布**和**二項分布**估算(A)珍珠奶茶中有 5 顆粉圓機率；(B)珍珠奶茶中沒有粉圓機率；(C)珍珠奶茶中有 10 顆粉圓機率；(D)珍珠奶茶中有 7-9 顆粉圓機率。(答案有效位數四捨五入取到小數點後第 4 位)

題解：假設隨機變數 $X$ 代表珍珠奶茶中粉圓的顆數，平均值 $\mu = 10$ 顆/杯

(A) **卜瓦松分布** $f(x = 5) = e^{-\mu} \times \frac{\mu^x}{x!} = e^{-10} \times \frac{10^5}{5!} = 0.0378$

(B) **卜瓦松分布** $f(x = 0) = e^{-\mu} \times \frac{\mu^x}{x!} = e^{-10} \times \frac{10^0}{0!} = 0.0000$

(C) **卜瓦松分布** $f(x = 10) = e^{-\mu} \times \frac{\mu^x}{x!} = e^{-10} \times \frac{10^{10}}{10!} = 0.1251$

(D) **卜瓦松分布**累積機率表或利用 Excel 軟體 POISSON.DIST 函數運算 $f(7 \le X \le 9) = f(X \le 9) - f(X \le 6) = 0.4579 - 0.1301 = 0.3278$

答案：(A)機率 0.0378；(B)機率 0.0000；(C)機率 0.1251；(D)機率 0.3278

練習 5.37　假設鑽探一口井會發現石油之機率為 0.3，而且每次鑽探之結果互為「獨立」。今欲鑽探少於 10 次就會發現 3 口石油井機率。這個問題中的隨機變數具有什麼機率分布？(A)二項分布；(B)負二項分布；(C)超幾何分布；(D)布阿松分布。(2007 初等考試統計學大意)

練習 5.38　一養豬場中體重超過 100 公斤的豬隻佔有 1/3，求算隨機抓取 10 隻豬，會發現 5 隻超過 100 公斤機率。這個問題中的隨機變數具有什麼機率分布？(A)二項分布；(B)負二項分布；(C)超幾何分布；(D)布阿松分布。(2007 初等考試統計學大意)

練習 5.39　甲乙二人比賽乒乓球，採五戰三勝制(亦即任何人累積勝了三局即停止比賽)。假設每場比賽互為獨立且每場比賽甲勝乙之機率為 0.6。今欲求算甲勝出之機率。這個問題中的隨機變數具有什麼機率分布？(A)二項分布；(B)負二項分布；(C)超幾何分布；(D)布阿松分布。(2007 初等考試統計學大意)

練習 5.40　一個生產線產品的不良率為 0.5。假設產品之間互為獨立。令 $X$ 表示發現第二個不良品所需的檢驗數。下列何者正確：①E($X$)=4；②Var($X$) = 4。(A)①與②都正確；(B)僅①正確；(C)僅②正確；(D)①與②都不正確。(2007 初等考試統計學大意)

練習 5.41　某連鎖速食餐廳購餐車道每一小時來車數具有 7 部車的卜瓦松分布(Poisson distribution)，則每兩部車到達的間隔時間機率分布屬於(A)卜瓦松分布；(B)二項分布；(C)常態分布；(D)指數分布。(2009 初等考試統計學大意)

練習 5.42　設有一個二項實驗，實驗次數 $n$ = 100，成功機率 $p$ = 0.5。求成功次數恰好為 55 次的近似機率：(A)0.0000；(B)0.0484；(C)0.0157；(D)0.3413。(2009 初等考試統計學大意) B

| 間斷機率分布 | 機率分布 | 平均值 $\mu$ | 變異數 $\sigma^2$ |
|---|---|---|---|
| 二項分布 | $\binom{n}{x} \times p^x \times q^{n-x}$ | $n \times p$ | $n \times p \times q$ |
| 點二項分布 | $p^x \times q^{1-x}$ | $p$ | $p \times q$ |
| 負二項分布 | $\binom{r+x-1}{r-1} \times p^r \times q^x$ | $\frac{r \times q}{p}$ | $\frac{r \times q}{p^2}$ |
| 幾何分布 | $p \times q^x$ | $\frac{q}{p}$ | $\frac{1-p}{p^2}$ |
| 超幾何分布 | $\frac{\binom{r}{x} \times \binom{N-r}{n-x}}{\binom{N}{n}}$ | $\frac{n \times r}{N}$ | $n \times \frac{r}{N} \times \frac{N-r}{N} \times \frac{N-n}{N-1}$ |
| 卜瓦松分布 | $e^{-\mu} \times \frac{\mu^x}{x!}$ | $M$ | $\mu$ |

範例 5.29　已知隨機變數 X 與 Y 的聯合機率分布如下列公式。請計算(A)m 值；(B)X 及 Y 的邊際機率分布；(C)條件期望值 $E$[Y|X=1]；(D)Z = X + Y 機率分布；(E)W = min(X, Y)機率分布。

$P$(X, Y) = m×(X + Y²)，其中 X = 1, 2, 3；Y = -1, 1, 2

題解：

(A)

| Y \ X | 1 | 2 | 3 | $f$(Y) |
|---|---|---|---|---|
| -1 | 2m | 3m | 4m | 9m |
| 1 | 2m | 3m | 4m | 9m |
| 2 | 5m | 6m | 7m | 18m |
| $f$(X) | 9m | 12m | 15m | 36m |

36m = 1　　　m = $\frac{1}{36}$ = 0.0278

(B) $f(X) = \sum_{y_i=-1}^{2} f(XY) = \sum_{y_i=-1}^{2} \frac{1}{36} \times (X+Y^2) = \frac{1}{36} \times [X + (-1)^2] + \frac{1}{36} \times [X + (1)^2] + \frac{1}{36} \times [X + (2)^2] = \frac{1}{36} \times (X + 6) = \frac{X+1}{6}$,　X = 1, 2, 3

$f(Y) = \sum_{x_i=1}^{3} f(XY) = \sum_{x_i=1}^{3} \frac{1}{36} \times (X+Y^2) = \frac{1}{36} \times (1 + Y^2) + \frac{1}{36} \times (2 + Y^2) + \frac{1}{36} \times (3 + Y^2) = \frac{1}{36} \times (6 + Y^2) = \frac{Y^2+1}{6}$,
Y = -1, 1, 2

(C) $f(Y|X = 1) = \frac{1}{36} \times (1 + Y^2)$,　Y = -1, 1, 2

條件期望值 $E[Y|X=1] = \sum_{y_i=-1}^{2} Y_i \times f(Y|X=1) = -1 \times \frac{1}{36} \times [1 + (-1)^2] + 1 \times \frac{1}{36} \times (1 + 1^2) + 2 \times \frac{1}{36} \times (1 + 2^2) = \frac{10}{36}$
= 0.27778

(D) Z = X + Y

| Z | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f$(Z) | $\frac{2}{36}$ | $\frac{3}{36}$ | $\frac{6}{36}$ | $\frac{8}{36}$ | $\frac{10}{36}$ | $\frac{7}{36}$ |

(E)W = min(X, Y)

| W | -1 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $f$(W) | $\frac{9}{36}$ | $\frac{14}{36}$ | $\frac{13}{36}$ |

範例 5.30　為了調查天天社區中全部 10 對夫妻支出分布，其前一個月支出金額如下所示：(單位：新台幣百元)

| 夫支出 | 55 | 50 | 55 | 60 | 60 | 55 | 50 | 50 | 60 | 60 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 妻支出 | 60 | 60 | 55 | 55 | 50 | 60 | 60 | 55 | 50 | 50 |

請依據該樣本資訊，計算下列狀況

(1)製作夫妻支出的聯合機率分布(Joint probability distribution)表與邊際機率分布(Marginal probability distribution)

(2)分別計算夫妻支出的期望值(Expected value)

(3)計算夫妻支出的共變數(Covariance)

(4)分別計算夫妻支出的變方(Variance)

(5)計算夫妻支出的相關係數(Correlation coefficient)

題解：

(1)

| 夫X / 妻Y | 50 | 55 | 60 | $y$邊際機率$f(y_i)$ |
|---|---|---|---|---|
| 50 | 0/10 | 0/10 | 3/10 | 0.30 |
| 55 | 1/10 | 1/10 | 1/10 | 0.30 |
| 60 | 2/10 | 2/20 | 0/10 | 0.40 |
| $x$邊際機率$f(x_i)$ | 0.30 | 0.30 | 0.40 | 1.00 |

(2)夫支出期望值 $E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \times f(x_i)$ = 50 × 0.30 + 55 × 0.30 + 60 × 0.40 = 55.5 百元；妻支出期望值 $E(y) = \sum_{i=1}^{n} y_i \times f(y_i)$ = 50 × 0.30 + 55 × 0.30 + 60 × 0.40 = 55.5 百元

(3)夫妻支出的共變數(Covariance) = $Cov(x, y) = \sigma_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^{N}[(x_i-\mu_x)\times(y_i-\mu_y)]}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{N}[x_i\times y_i-x_i\times\mu_y-\mu_x\times y_i+\mu_x\times\mu_y]}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{N}x_i\times y_i}{N} - \frac{\sum_{i=1}^{N}x_i\times\mu_y}{N} - \frac{\sum_{i=1}^{N}\mu_x\times y_i}{N} + \frac{\sum_{i=1}^{N}\mu_x\times\mu_y}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{N}x_i\times y_i}{N} - \mu_x\times\mu_y - \mu_x\times\mu_y + \frac{N\times\mu_x\times\mu_y}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{N}x_i\times y_i}{N} - \mu_x\times\mu_y - \mu_x\times\mu_y + \mu_x\times\mu_y = \frac{\sum_{i=1}^{N}x_i\times y_i}{N} - \mu_x\times\mu_y = E(X\times Y) - E(X)\times E(Y) = \sum_{i=1}^{n_x}\sum_{j=1}^{n_y} x_i \times y_j \times f(x_i y_j) - E(X)\times E(Y) = 50\times50\times\frac{0}{10} + 50\times55\times\frac{1}{10} + 50\times60\times\frac{2}{10} + 55\times50\times\frac{0}{10} + 55\times55\times\frac{1}{10} + 55\times60\times\frac{2}{10} + 60\times50\times\frac{3}{10} + 60\times55\times\frac{1}{10} + 60\times60\times\frac{0}{10} - 55.5\times55.5$ = 3067.5 – 3080.25 = -12.75 百元 $^2$

(4)夫支出的變方(Variance) = $V(X) = \sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 \times f(x_i) = \sum_{i=1}^{n}[x_i - E(X)]^2 \times f(x_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \times f(x_i) - [E(X)]^2 = 50^2 \times 0.30 + 55^2 \times 0.30 + 60^2 \times 0.40 - 55.5^2$ = 3097.5 – 3080.25 = 17.25 百元 $^2$

妻支出的變方(Variance) = $V(Y) = \sum_{i=1}^{n}(y_i-\mu)^2 \times f(y_i) = \sum_{i=1}^{n}[y_i - E(Y)]^2 \times f(y_i) = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \times f(y_i) - [E(Y)]^2 = 50^2 \times 0.30 + 55^2 \times 0.30 + 60^2 \times 0.40 - 88.3^2$ = 3097.5 – 3080.25 = 17.25 百元 $^2$

(5)夫妻支出的相關係數(Correlation coefficient) $\rho_{xy} = \frac{Cov(x,y)}{\sigma_x\times\sigma_y} = \frac{-12.75}{\sqrt{17.25}\times\sqrt{17.25}}$ = -0.7391

答案：(1)夫妻支出的聯合機率分布表與邊際機率分布如上述表格；(2)夫支出期望值 $E(X)$ = 55.5百元，妻支出期望值 $E(Y)$ = 55.5百元；(3)夫妻支出的共變數(Covariance) = -12.75百元$^2$；(4)夫支出的變方(Variance) = 17.25百元$^2$，妻支出的變方(Variance) = 17.25百元$^2$；(5)夫妻支出的相關係數(Correlation coefficient) $\rho_{xy}$ = -0.7391

**範例 5.31** 假設間斷隨機變數 $X$ 與 $Y$ 的「聯合機率函數」(Joint probability function)為

| | $f_{X,Y}(x,y)$ | $x$ 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|
| y | 0 | 0 | 1/3 | 0 |
| | 1 | 1/3 | 0 | 1/3 |

請計算 $2X-1$ 與 $3Y+2$ 之「共變異數」(Covariance) Cov(2$X$-1, 3$Y$+2)？

題解：

| | $f_{X,Y}(x,y)$ | $x$ 0 | 1 | 2 | $y$邊際機率$f(y_i)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| y | 0 | 0 | 1/3 | 0 | 1/3 |
| | 1 | 1/3 | 0 | 1/3 | 2/3 |
| $x$邊際機率$f(x_i)$ | | 1/3 | 1/3 | 1/3 | 1.00 |

期望值 $E(X)=\sum_{i=1}^{n}x_i\times f(x_i)=0\times\frac{1}{3}+1\times\frac{1}{3}+2\times\frac{1}{3}=1.00$

期望值 $E(Y)=\sum_{i=1}^{n}y_i\times f(y_i)=0\times\frac{1}{3}+1\times\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$

$E(A=2X-1)=2E(X)-1=2\mu_x-1$

$E(B=3Y+2)=3E(Y)+2=3\mu_y+2$

共變數(Covariance)$_{X,Y}=Cov(X,Y)=\frac{\sum_{i=1}^{N}\left[(x_i-\mu_x)\times(y_i-\mu_y)\right]}{N}$

共變數(Covariance)$_{A=2X-1,B=3Y+2}=Cov(A=2X-1,\ B=3Y+2)=\frac{\sum_{i=1}^{N}\left[(2x_i-1-(2\mu_x-1))\times(3y_i+2-(3\mu_y+2))\right]}{N}=\frac{\sum_{i=1}^{N}\left[(2x_i\cancel{-1}-(2\mu_x\cancel{-1}))\times(3y_i\cancel{+2}-(3\mu_y\cancel{+2}))\right]}{N}=\frac{\sum_{i=1}^{N}\left[2(x_i-\mu_x)\times3(y_i-\mu_y)\right]}{N}=6\times\frac{\sum_{i=1}^{N}\left[(x_i-\mu_x)\times(y_i-\mu_y)\right]}{N}=6\times\frac{\sum_{i=1}^{N}\left[x_i\times y_i-x_i\times\mu_y-\mu_x\times y_i+\mu_x\times\mu_y\right]}{N}=6\times\{\frac{\sum_{i=1}^{N}x_i\times y_i}{N}-\frac{\sum_{i=1}^{N}x_i\times\mu_y}{N}-\frac{\sum_{i=1}^{N}\mu_x\times y_i}{N}+\frac{\sum_{i=1}^{N}\mu_x\times\mu_y}{N}\}=6\times\{\frac{\sum_{i=1}^{N}x_i\times y_i}{N}-\mu_x\times\mu_y-\mu_x\times\mu_y+\frac{N\times\mu_x\times\mu_y}{N}\}=6\times\{\frac{\sum_{i=1}^{N}x_i\times y_i}{N}-\mu_x\times\mu_y-\mu_x\times\mu_y+\mu_x\times\mu_y\}=6\times\{\frac{\sum_{i=1}^{N}x_i\times y_i}{N}-\mu_x\times\mu_y\}=6\times\{E(x\times y)-E(x)\times E(y)\}=6\times\{\sum_{i=1}^{n_x}\sum_{j=1}^{n_y}x_i\times y_j\times f(x_iy_j)-E(x)\times E(y)\}=6\times\{0\times0\times0+0\times1\times\frac{1}{3}+1\times0\times\frac{1}{3}+1\times1\times0+2\times0\times0+2\times1\times\frac{1}{3}-1.00\times\frac{2}{3}\}=6\times\{\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\}=6\times0=0$

答案：$2X-1$ 與 $3Y+2$ 之「共變異數」(Covariance) Cov(2$X$-1, 3$Y$+2) = 0

**範例 5.32** 隨機變數 $X$ 和 $Y$ 的聯合機率分布為 $f(x,y)=0.25$，其中$(x,y)\in\{(0,0),(1,1),(1,-1),(2,0)\}$。請計算 $X$ 和 $Y$ 的相關係數？

題解：

| $y_i$ \ $x_i$ | 0 | 1 | 2 | y邊際機率$f(y_i)$ |
|---|---|---|---|---|
| -1 | 0 | 0.25 | 0 | 0.25 |
| 0 | 0.25 | 0 | 0.25 | 0.50 |
| 1 | 0 | 0.25 | 0 | 0.25 |
| $x$邊際機率$f(x_i)$ | 0.25 | 0.50 | 0.25 | 1.00 |

$E(X)=\sum_{i=1}^{n}x_i\times f(x_i)=0\times0.25+1\times0.50+2\times0.25=1$

$E(Y)=\sum_{i=1}^{n}y_i\times f(y_i)=-1\times0.25+0\times0.50+1\times0.25=0$

$Cov(x,y)=\sigma_{xy}=\frac{\sum_{i=1}^{N}[(x_i-\mu_x)\times(y_i-\mu_y)]}{N}=\frac{\sum_{i=1}^{N}[x_i\times y_i-x_i\times\mu_y-\mu_x\times y_i+\mu_x\times\mu_y]}{N}=\frac{\sum_{i=1}^{N}x_i\times y_i}{N}-\frac{\sum_{i=1}^{N}x_i\times\mu_y}{N}-\frac{\sum_{i=1}^{N}\mu_x\times y_i}{N}+\frac{\sum_{i=1}^{N}\mu_x\times\mu_y}{N}=\frac{\sum_{i=1}^{N}x_i\times y_i}{N}-\mu_x\times\mu_y-\mu_x\times\mu_y+\frac{N\times\mu_x\times\mu_y}{N}=\frac{\sum_{i=1}^{N}x_i\times y_i}{N}-\mu_x\times\mu_y-\mu_x\times\mu_y+\mu_x\times\mu_y=\frac{\sum_{i=1}^{N}x_i\times y_i}{N}-\mu_x\times\mu_y=E(x\times y)-E(x)\times E(y)=\sum_{i=1}^{n_x}\sum_{j=1}^{n_y}x_i\times y_j\times f(x_iy_j)-E(x)\times E(y)=0\times(-1)\times0+0\times0\times0.25+0\times1\times0+1\times(-1)\times0.25+1\times0\times0+1\times1\times0.25+2\times(-1)\times0+2\times0\times0.25+2\times1\times0-1\times0=0-0=0$

$V(X)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\times f(x_i)=\sum_{i=1}^{n}[x_i-E(X)]^2\times f(x_i)=\sum_{i=1}^{n}x_i^2\times f(x_i)-[E(X)]^2=0^2\times0.25+1^2\times0.50+2^2\times0.25-1^2=1.5-1=0.5$

$V(Y) = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \mu)^2 \times f(y_i) = \sum_{i=1}^{n}[y_i - E(Y)]^2 \times f(y_i) = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \times f(y_i) - [E(Y)]^2 = -1^2 \times 0.25 + 0^2 \times 0.50 + 1^2 \times 0.25 - 0^2 = 0.5 - 0 = 0.5$

$\rho_{xy} = \frac{Cov(x,y)}{\sigma_x \times \sigma_y} = \frac{0}{\sqrt{0.5} \times \sqrt{0.5}} = 0$

答案：相關係數 = 0.0000

多維超幾何分布(multivariate hypergeometric distribution)

表 5-1 不同間斷機率分布比較

| 間斷分布 | 已知數值 | 運算 |
|---|---|---|
| 二項分布 | 成功機率/失敗機率<br>樣本數量 | $f(X = x_0)$<br>$f(X \geq x_0)$<br>$f(X \leq x_0)$<br>$f(x_1 \leq X \leq x_2)$ |
| 點二項分布 | 成功機率/失敗機率<br>樣本數量 = 1 | $f(x = 0)$<br>$f(x = 1)$ |
| 負二項分布 | 成功機率/失敗機率 | $r$ 成功和 $X$ 次失敗與第 $X+r$ 次實驗成功機率 |
| 幾何分布 | 成功機率/失敗機率 | 1 成功和 $X$ 次失敗與第 $X+1$ 次實驗成功機率 |
| 超幾何分布 | 母體總數量、母體成功數量/母體失敗數量 | 樣本數量 $n$，樣本成功數量 $X$，樣本失敗數量 $n-X$ 機率 |
| 卜瓦松分布 | 平均值 | 成功次數 $X$ 發生機率 |

## 討論議題

1.師生在非同步教學討論議題：間斷機率分布辨識

如何辨識各種間斷機率分布，論述學習歷程中自己歸納出來的辨識方式。透過數位教材、線上同步課程、練習與平常考的學習歷程，您如何有系統的辨識負二項分布、幾何分布、超幾何分布和卜瓦松分布，請具體的陳述辨識各種間斷機率分布的關鍵或要點。

第一回合請於 D+3 日晚上 12 點以前從「議題討論」區【張貼】標題：「間斷機率分布辨識」，本文：透過學習間斷機率分布的課程內容，同學學會的各種間斷機率分布，請嘗試使用自己的邏輯，歸納出如何辨識負二項分布、幾何分布、超幾何分布和卜瓦松分布的要領。請詳細論述(20 個字以上)。

待有 30 篇第一回合【張貼】回應後或第一回合【張貼】時間結束後，請同學再次檢視所有同學的回應內容。第二回合【張貼】標題：「最佳詮釋」，本文：哪一位同學詮釋得最好，並具體說明理由(10 個字以上)。希望可以達到集思廣益的目的，蒐集各位同學的辨識邏輯，分享學習，分享歸納整理的方式，期望可以具體提升同學的學習效益。第二回合【張貼】截止時間就是本議題在平台上的關閉時間。

## 重點整理

Excel 函數彙整

| Excel 函數 | 統計功能 | 輸入資料 | 輸出資料 |
|---|---|---|---|
| BINOM.DIST | 二項分布 | 實驗成功次數，實驗次數，成功機率，累積與否 | 機率 |
| BINOMDIST | 二項分布 | 實驗成功次數，實驗次數，成功機率，累積與否 | 機率 |
| NEGBINOM.DIST | 負二項分布 | 失敗次數，成功次數，成功機率，累積與否 | 機率 |

| Excel 函數 | 統計功能 | 輸入資料 | 輸出資料 |
|---|---|---|---|
| NEGBINOMDIST | 負二項分布 | 失敗次數，成功次數，成功機率 | 機率(非累計) |
| HYPGEOM.DIST | 超幾何分布 | 樣本中成功次數，樣本數量，母體成功次數，母體數量，累積與否 | 機率 |
| HYPGEOMDIST | 超幾何分布 | 樣本中成功次數，樣本數量，母體成功次數，母體數量 | 機率(非累計) |
| POISSON.DIST | 卜瓦松分布 | 事件出現次數，平均值，累積與否 | 機率 |
| POISSON | 卜瓦松分布 | 事件出現次數，平均值，累積與否 | 機率 |

隨機變數(random variable)

利用樣本空間 $S$ 為定義領域的實數(real number)函數。

分立變值(Discrete variate)

隨機變數的數值可以有限個數值(Nominal scale)或無限個順序數值(Ordinal scale)。一般數值是由記點(counting)獲得。

間斷隨機變數的期望值

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \times f(x_i) = \mu$$

期望值的性質

加上一個常數 $E(X) + c = E(X + c)$，c 屬於常數(constant)

乘以一個常數 $c \times E(X) = E(c \times X)$，c 屬於常數(constant)

兩個隨機變數相加 $E(X) + E(Y) = E(X + Y)$，$Y$ 屬於另一個隨機變數

間斷隨機變數的變異數

$$Var(X) = \sigma^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2 \times f(x_i) = \sum_{i=1}^{n}[x_i - E(x)]^2 \times f(x_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \times f(x_i) - [E(x)]^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \times f(x_i) - \mu^2$$

標準(偏)差(standard deviation) σ

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2 \times f(x_i)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}[x_i - E(x)]^2 \times f(x_i)}$$

間斷隨機變數的標準化

$$z_i = \frac{x_i - \mu}{\sigma} = \frac{x_i - E(X)}{\sigma}$$

二項族群正面機率 $p$ 代表成功率，而反向機率 $q = 1 - p$ 代表失敗率，在 $n$ 個(次)獨立事件(隨機實驗)發生 $x$ 次成功，由二項定理，各事件發生(隨機實驗)機率。

$$(q + p)^n = q^n + \binom{n}{1} \times q^{n-1} \times p + \binom{n}{2} \times q^{n-2} \times p^2 + \ldots + \binom{n}{x} \times q^{n-x} \times p^x + \ldots + p^n = 1$$

二項機率函數(Binominal probability function)、二項機率分布(binomial probability distribution)

$$f(x) = \binom{n}{x} \times p^x \times q^{n-x} = \binom{n}{x} \times p^x \times (1-p)^{n-x} = C_x^n \times p^x \times (1-p)^{n-x}$$

$$= \text{成功機率函數} = \binom{\text{實驗次數}}{\text{成功次數}} \times \text{成功機率}^{\text{成功次數}} \times \text{失敗機率}^{\text{失敗次數}}\text{，其中 } x = 0, 1, 2, 3, \ldots, n$$

$$f(x) = 0\text{，當 } x = \text{otherwise}$$

二項(式)機率分布的期望值與變異數

在 $n$ 次獨立事件(隨機實驗)中，成功機率為 $p$，失敗機率為 $q = 1 - p$，發生 $x$ 次成功的期望值 $E(X)$為：

$$E(X) = \mu = n \times p = \text{隨機實驗次數} \times \text{成功機率}$$

**變異數** $Var(X)$為

$$Var(X) = \sigma^2 = n \times p \times q = n \times p \times (1 - p) = \text{隨機實驗次數} \times \text{成功機率} \times \text{失敗機率}$$

**標準(偏)差** σ 為

$$\sigma = \sqrt{n \times p \times q} = \sqrt{n \times p \times (1-p)} = \sqrt{\text{隨機實驗次數} \times \text{成功機率} \times \text{失敗機率}}$$

間斷隨機變數的標準化

$$z_i = \frac{x_i - \mu}{\sigma} = \frac{x_i - E(X)}{\sigma}$$

累積分布函數(Cumulative distribution function, cdf, c.d.f. or CDF)

$$F_x(t) = P(X \le t) = \sum_{x=0}^{t} \binom{n}{x} \times p^x \times q^{n-x} = \sum_{0\text{ 次成功}}^{t\text{ 次成功}} \binom{\text{實驗次數}}{\text{成功次數}} \times \text{成功機率}^{\text{成功次數}} \times \text{失敗機率}^{\text{失敗次數}}$$

點二項分布

$$f(x) = \binom{1}{x} \times p^x \times q^{1-x} = \binom{1}{x} \times p^x \times (1-p)^{1-x} = p^x \times q^{1-x} = \text{成功機率}^{\text{成功次數}} \times \text{失敗機率}^{\text{失敗次數}}\text{，其中 } x = 0, 1$$

$$f(x) = 0\text{，當 } x = \text{otherwise}$$

**期望值** $E(X)$為：

$$E(X) = \mu = p$$

**變異數** $Var(X)$為

$$Var(X) = \sigma^2 = p \times q = p \times (1-p)$$

**標準(偏)差** σ 為

$$\sigma = \sqrt{p \times q} = \sqrt{p \times (1-p)}$$

三項分布(Trinomial distribution)

$$f(x_1, x_2, x_3) = \frac{n!}{x_1! \times x_2! \times x_3!} \times p_1^{x_1} \times p_2^{x_2} \times p_3^{x_3}\text{，其中 } x_1, x_2, x_3 = 0, 1, \ldots, n$$

$$f(x_1, x_2, x_3) = 0\text{，當 } x_1, x_2, x_3 = \text{otherwise}$$

期望值

$E(x_i) = n \times p_i$

變異數

$V(x_i) = n \times p_i \times (1 - p_i)$

負二項分布機率質量函數或機率密度函數 Probability mass function or probability density function:

$$f(x) = \binom{r+x-1}{r-1} \times p^r \times q^x = \binom{r+x-1}{x} \times p^r \times q^x = C_x^{r+x-1} \times p^r \times q^x = C_x^{r+x-1} \times p^r \times (1-p)^x$$

$$r\text{ 成功和 } x\text{ 次}\textbf{失敗}\text{與第 } x+r\text{ 次實驗是成功機率} = \binom{\text{實驗次數}-1}{\text{成功次數}-1} \times \text{成功機率}^{\text{成功次數}} \times \text{失敗機率}^{\text{失敗次數}}$$

負二項分布的期望值與變異數：

$$E(X) = \mu = \frac{r \times q}{p} = \frac{r \times (1-p)}{p}$$

$$V(X) = \sigma^2 = \frac{r \times q}{p^2} = \frac{r \times (1-p)}{p^2}$$

幾何分布(Geometric distribution)

$$g(x) = f(x) = p \times q^x = p \times (1-p)^x = \text{第 1 次成功機率函數} = \text{成功機率} \times \text{失敗機率}^{\text{失敗次數}}\text{，其中 } x = 1, 2, 3, \ldots$$

幾何分布的期望值與變異數：

$$\text{期望值 } E(X) = \mu = \frac{1}{p}$$

$$\text{變異數 } V(X) = \sigma^2 = \frac{q}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}$$

**超幾何機率函數**(hypergeometric probability function)：統計 $n$ 個隨機樣本中，有 $x$ 個成功個數機率。

$$f(x) = \frac{C_x^r \times C_{n-x}^{N-r}}{C_n^N} = \frac{\binom{r}{x} \times \binom{N-r}{n-x}}{\binom{N}{n}} = x\text{ 個成功機率} = \frac{\binom{\text{母體成功數量}}{\text{樣本成功數量}} \times \binom{\text{母體失敗數量}}{\text{樣本失敗數量}}}{\binom{\text{母體數量}}{\text{樣本數量}}}\text{，其中 } 0 \le x \le r$$

三項分布超幾何機率函數(hypergeometric probability function)：統計 $n$ 個隨機樣本中，第一種結果有 $x_1$ 個、第一種結果有 $x_2$ 個與第一種結果有 $x_3$ 個機率。

$f(x_1, x_2, x_3) = \frac{C_{x_1}^{X_1} \times C_{x_2}^{X_2} \times C_{x_3}^{X_3}}{C_n^N} = \frac{\binom{X_1}{x_1} \times \binom{X_2}{x_2} \times \binom{X_3}{x_3}}{\binom{N}{n}} = \frac{\binom{母體第一種結果數量}{樣本第一種結果數量} \times \binom{母體第二種結果數量}{樣本第二種結果數量} \times \binom{母體第三種結果數量}{樣本第三種結果數量}}{\binom{母體數量}{樣本數量}}$，其中 $0 \le x_1, x_2 \text{ or } x_3 \le n$

**Hypergeometric distribution 機率分布的期望值與變異數**

若母體數 $N$ 中有成功次數 $r$，在 $n$ 次獨立事件(隨機實驗)中，發生 $x$ 次成功的**期望值** $E(X)$為：

$$E(X) = \frac{n \times r}{N} = 隨機實驗次數 \times \frac{母體中成功次數}{母體基本單位數量} = 隨機實驗次數 \times 母體中成功次數的比率$$

**變異數** $Var(X)$為

$$Var(X) = \sigma^2 = n \times \frac{r}{N} \times \frac{N-r}{N} \times \frac{N-n}{N-1} = 隨機實驗次數 \times \frac{母體中成功次數}{母體基本單位數量} \times \frac{母體中失敗次數}{母體基本單位數量} \times \frac{母體基本單位數量 - 隨機實驗次數}{母體基本單位數量 - 1}$$

$$= 隨機實驗次數 \times 母體中成功次數的比率 \times 母體中失敗次數的比率 \times \frac{母體基本單位數量 - 隨機實驗次數}{母體基本單位數量 - 1}$$

**標準(偏)差** $\sigma$ 為

$$\sigma = \sqrt{\mu} = \sqrt{n \times \frac{r}{N} \times \frac{N-r}{N} \times \frac{N-n}{N-1}}$$

**卜瓦松機率函數**

$$f(x) = P_x = P(x) = e^{-\mu} \times \frac{\mu^x}{x!} = e^{-期望值} \times \frac{期望值^{成功次數}}{成功次數!}$$

卜瓦松分布累積機率

$$F_x(t) = P(X \le t) = \sum_{x=0}^{t} \left(e^{-\mu} \times \frac{\mu^x}{x!}\right) = \sum_{0\ 次成功}^{t\ 次成功} \left(e^{-期望值} \times \frac{期望值^{成功次數}}{成功次數!}\right)$$

卜瓦松分布機率分布的期望值與變異數

在 $n$ 次獨立事件(隨機實驗)中，隨機變數 $X$ 分布的平均值為 $\mu$，發生 $x$ 次成功的**期望值** $E(X)$為：

$$E(X) = \mu$$

**變異數** $Var(X)$為

$$Var(X) = \sigma^2 = \mu$$

**標準(偏)差** $\sigma$ 為

$$\sigma = \sqrt{\mu}$$