

תרגיל 8 - מתמטיקה דיסקרטית

- (1) א) סדרו את המספרים מ-1 עד 12 כך שאין סדרה מונוטונית עולה באורך 5 ואין סדרה מונוטונית יורדת באורך 4.
 ב) הכלילו את סעיף א' והראו שניתן לסדר nm מספרים שונים כך שלא תהיה סדרה מונוטונית עולה באורך $n+1$ ולא תהיה סדרה מונוטונית יורדת באורך $m+1$. שימו לב שבעצם הוכחתם פה שהחסם במשפט ארדש-סקרש הוא הדוק.
 ג) הראו שבסידור של סעיף ב' יש m סדרות מונוטוניות עולות באורך n ו- n סדרות מונוטוניות יורדות באורך m כך שכל סדרה עולה וכל סדרה יורדת נחתכות בדיוק באיבר אחד.
- (2) בכל הסעיפים הבאים עדיף לתת תשובה בעזרת מקדמים בינומיים בלי לחשב אותם.
 א) כמה פתרונות בשלמים אי-שליליים יש למשוואה $\sum_{i=1}^5 x_i = 15$?
 ב) כמה פתרונות בשלמים יש למשוואה $\sum_{i=1}^5 x_i = 30$ תחת האילוצים $x_i \geq i$ לכל $1 \leq i \leq 5$? מה הקשר לסעיף א'?
 ג) כמה פתרונות בשלמים יש למשוואה $\sum_{i=1}^5 x_i = 30$ תחת האילוצים $3i \geq x_i \geq i$ לכל $1 \leq i \leq 5$?
- (3) הראו שאם a_1, \dots, a_m הם מספרים ממשיים שהממוצע שלהם x אזי קיים $1 \leq i \leq m$ כך ש- $a_i \geq x$ וקיים $1 \leq j \leq m$ כך ש- $a_j \leq x$.
- (4) מהו מספר הפונקציות $f: \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, m\}$ שהן על? הפרידו בין $n > m$, $n = m$, $n < m$.
- (5) א) הוכיחו שמתקיים $D_n = \sum_{i=0}^n (-1)^i \frac{n!}{i!}$ כאשר D_n הוגדר בשאלה 1 בתרגיל .
 ב) בונס: מצאו ביטוי מתאים עבור מספר האפשרויות $D_{n,k}$ בהן בדיוק k מתוך n הסקוטים חזרו הביתה עם המעיל הנכון. תוכלו לבדוק את תשובתכם ע"י העובדה ש- $D_{n,0}$ הוא המספר מהסעיף הקודם ו- $D_{n,n} = 1$ (למה?).
- (6) הוכיחו שלכל סדרה של $nmk+1$ מספרים ממשיים (לאו דוקא שונים) יש סדרה מונוטונית עולה ממש באורך n או סדרה מונוטונית יורדת ממש באורך m או סדרה קבועה באורך k .