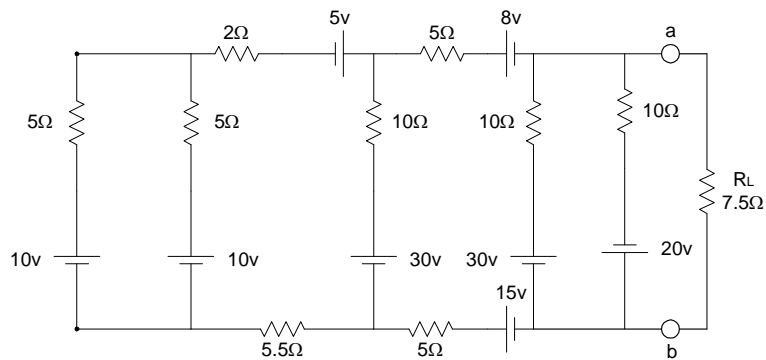


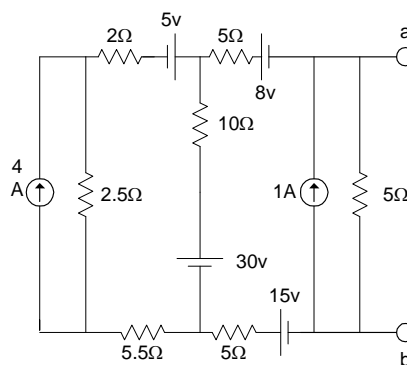
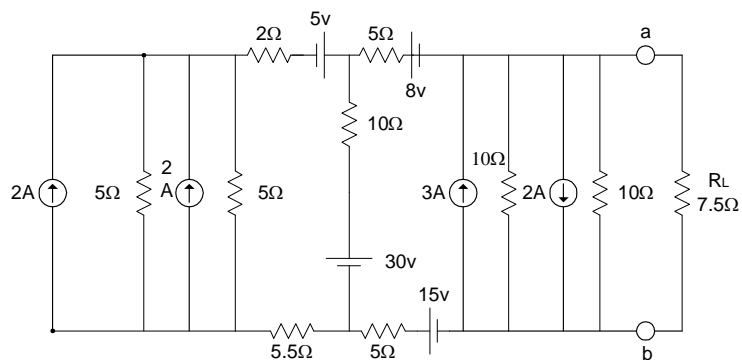
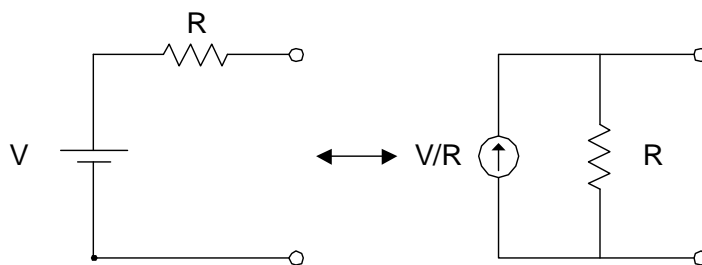


פתרון תרגיל 3

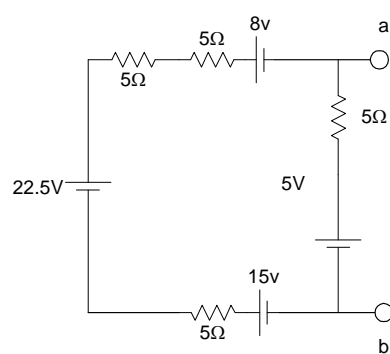
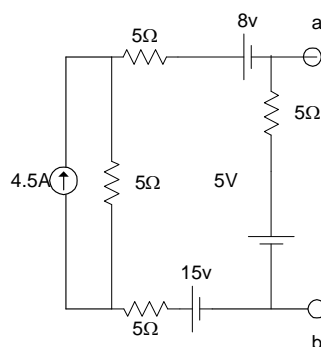
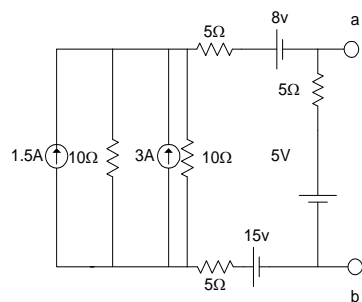
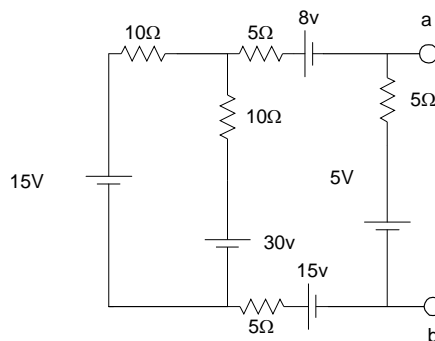
1.



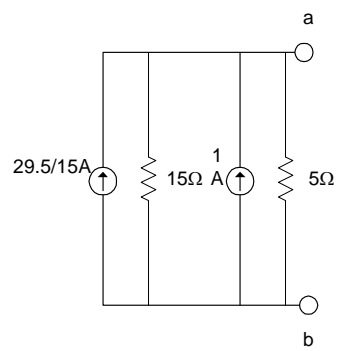
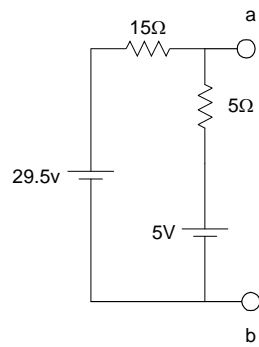
א. ניעזר בהתמרת נורטון/תבנית:



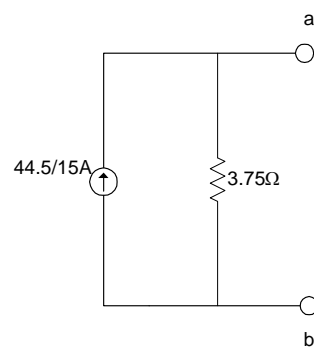
מבוא להנדסת חשמל - הפקולטה להנדסה, פתרון תרגיל 3



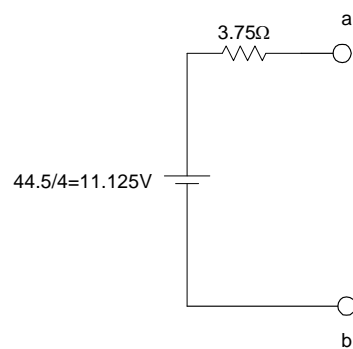
מבוא להנדסת חשמל - הפקולטה להנדסה, פתרון תרגיל 3



שקול נורטון:



שקול תבנית:

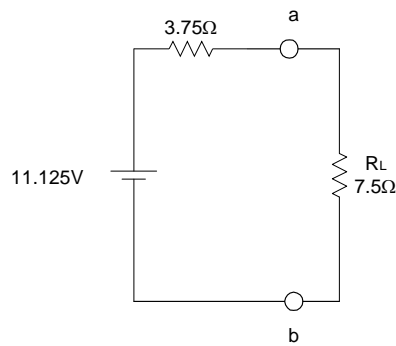


מבוא להנדסת חשמל - הפקולטה להנדסה, פתרון תרגיל 3

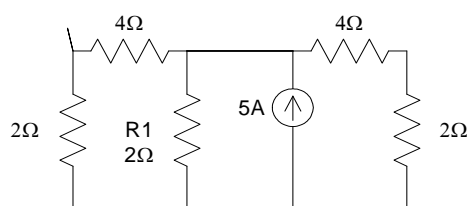


ב. נפתור באמצעות שקול תבנין:

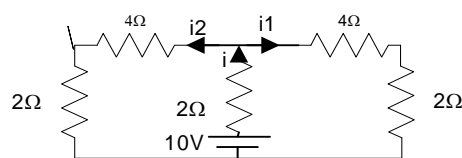
$$V_L = \frac{7.5}{7.5 + 3.75} \cdot 11.125 = 7.417V \quad I_L = \frac{V_L}{R_L} = 0.989A$$



2. א.



נמיר מקור הזרם והנגד R1 לפי תבנין:



המעגל הוא סימטרי ביחס לענף האמצעי. לכן הזרם יתפצל שווה בין שני הענפים הנוספים. לכן:

$$i1 = i2 = \frac{i}{2}$$

מבוא להנדסת חשמל - הפקולטה להנדסה, פתרון תרגיל 3

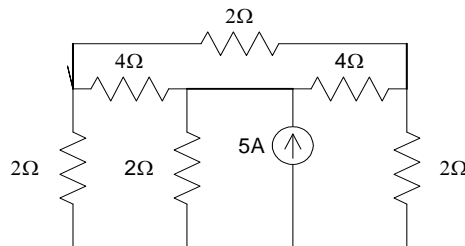
KVL על אחד החוגים הקטנים:

$$10 - 2i - 4 \cdot \frac{i}{2} - 2 \cdot \frac{i}{2} = 0 \Rightarrow i = 2A \Rightarrow i_1 = i_2 = 1A$$

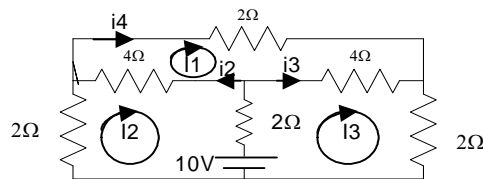
נמצא זרם דרך נגד R2 במעגל המקורי. על-פי KCL לצומת העליון (חיבור של מקור זרם):

$$KCL \Rightarrow i_{R1} = 5 - i_1 - i_2 = 5 - 2 \cdot 1 = 3A$$

ב. המעגל עדיין סימטרי ביחס למקור זרם עם נגד במקביל. לכן משיקולי סימטריה התוצאה לא תשתנה. נוכיח זאת בשיטת זרמי חוגים.



גם כאן ניעזר בהתמרת תבנית.



נכתוב את משוואות החוגים:

$$\begin{pmatrix} 2+4+4 & -4 & -4 \\ -4 & 4+2+2 & -2 \\ -4 & -2 & 4+2+2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I1 \\ I2 \\ I3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -10 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 10 & -4 & -4 \\ -4 & 8 & -2 \\ -4 & -2 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I1 \\ I2 \\ I3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -10 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$I1 = \frac{\det \begin{pmatrix} 0 & -4 & -4 \\ -10 & 8 & -2 \\ 10 & -2 & 8 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} 10 & -4 & -4 \\ -4 & 8 & -2 \\ -4 & -2 & 8 \end{pmatrix}} = 0$$

$$i4 = I1 = 0$$

כפי שהיסקנו קודם משיקולי סימטריה.

מבוא להנדסת חשמל - הפקולטה להנדסה, פתרון תרגיל 3

הסבר סימטריה: המתח בשתי הפינות העליונות של המעגל זהה. לכן אין זרם בין שתי הנקודות ללא תלות ברכיב הפסיבי שנמצא ביניהן.

שאר הזרמים:

$$I_2 = \frac{\det \begin{pmatrix} 10 & 0 & -4 \\ -4 & -10 & -2 \\ -4 & 10 & 8 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} 10 & -4 & -4 \\ -4 & 8 & -2 \\ -4 & -2 & 8 \end{pmatrix}} = -1A \quad I_3 = \frac{\det \begin{pmatrix} 10 & -4 & 0 \\ -4 & 8 & -10 \\ -4 & -2 & 10 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} 10 & -4 & -4 \\ -4 & 8 & -2 \\ -4 & -2 & 8 \end{pmatrix}} = 1A$$

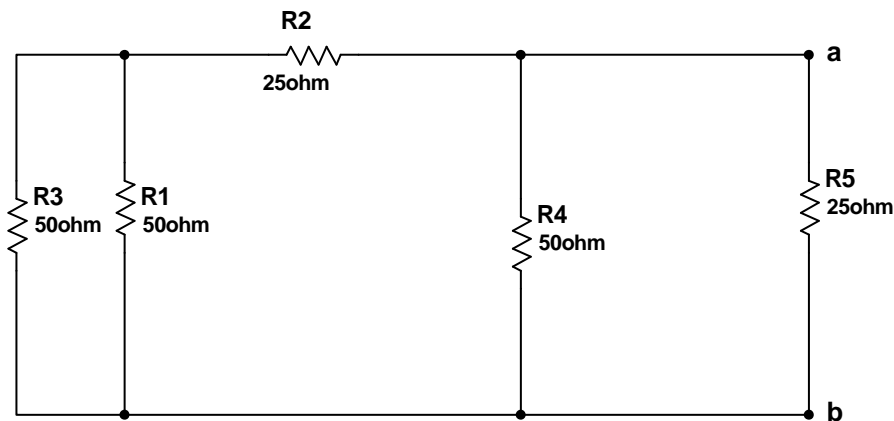
$$i_2 = I_1 - I_2 = 1A$$

$$i_3 = I_3 - I_1 = 1A$$

$$KCL \Rightarrow i_{R1} = 5 - I_2 - I_3 = 5 - 2 \cdot 1 = 3A$$

(3)

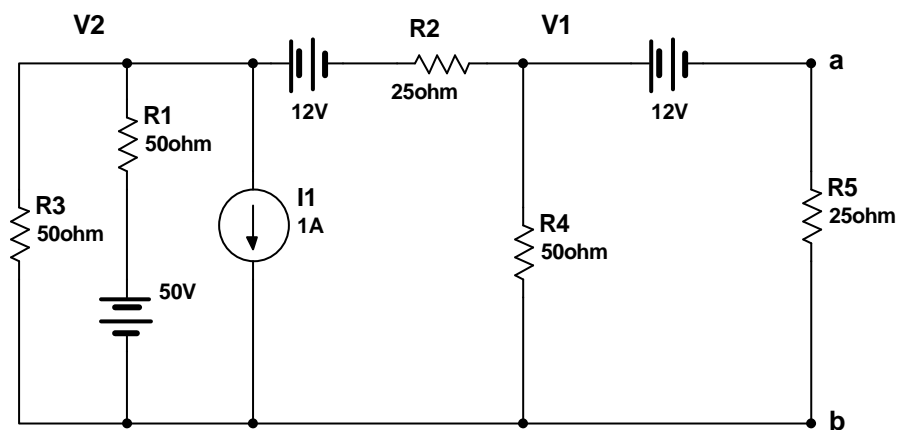
א) במעגל הנתון בין הנקודות A ו-B מחובר עומס כלשהו שאינו משורטט. בכדי למצוא שקול נורטון/תבנית יש למצוא את R_{th} ואת V_{th} או I_n . מציאת R_{th} ע"י איפוס מקורות (קיצור מקורות מתח וניתוק מקורות זרם) וחישוב ההתנגדות השקולה בין הנקודות A ו-B המתקבלת מהמעגל הבא:



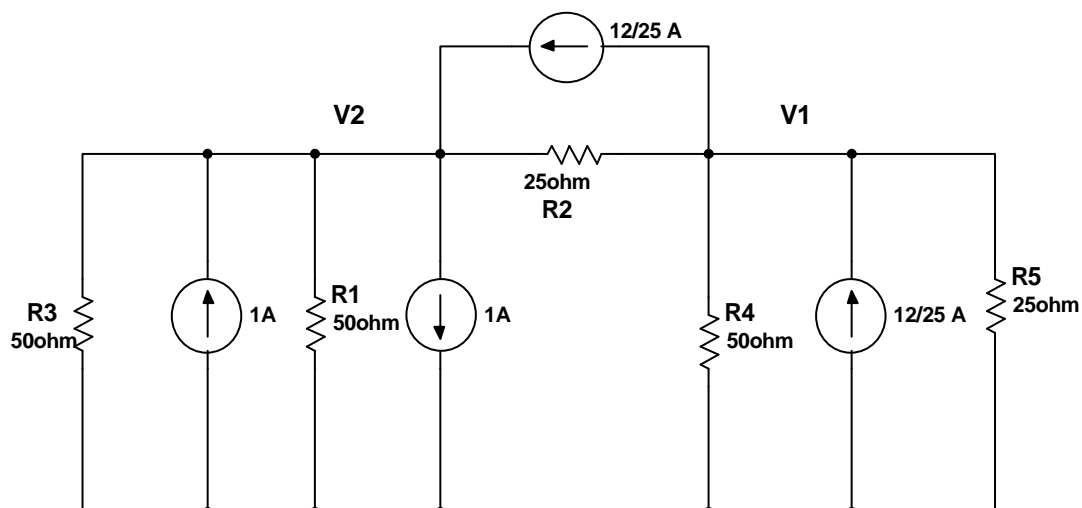
$$R_{th} = (R1 \parallel R3 + R2) \parallel R4 \parallel R5 = 12.5\Omega$$

נבחר למצוא את שקול תבנית (ממנו לאחר מכן שקול נורטון הוא מייד). המתח בנקודה A יחסית לנקודה B הוא מתח הנתק במעגל תבנית (V o.c) נמצא את השקול המבוקש ע"י פתרון במעגל בשיטת מתחי צמתים. נסמן במעגל המקורי שני צמתים V1 ו-V2 כמסומן בשרטוט הבא. יש לשים לב לעובדה ש-Vo.c אינו V1!

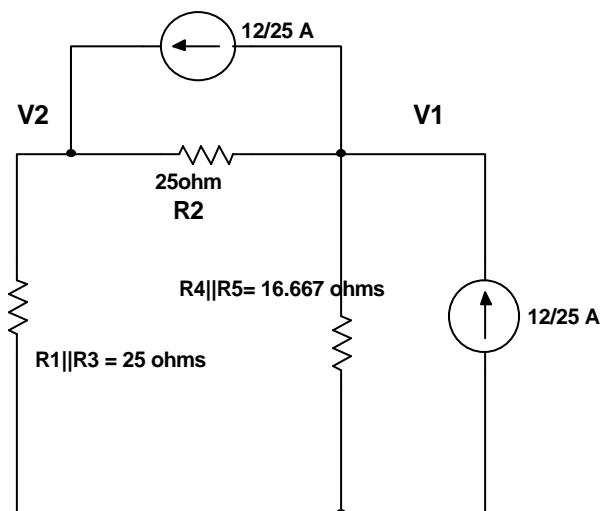
מבוא להנדסת חשמל - הפקולטה להנדסה, פתרון תרגיל 3



לאחר מציאת V_1 ימצא V_{th} ע"י $V_{th} = V_1 - 12$. המעגל המתאים לפתרון בשיטת מתחי צמתיים נתון בשרטוט הבא:



לאחר הפשטת המעגל הנ"ל יתקבל המעגל הבא:



והפתרון באמצעות המשוואות הבאות: (KCL בצמתיים V_1 ו- V_2)



מבוא להנדסת חשמל - הפקולטה להנדסה, פתרון תרגיל 3



□

$$\text{KCL (V1)} \quad \frac{V1 - V2}{25} + \frac{12}{25} + \frac{V1}{16.667} = \frac{12}{25}$$

$$\text{KCL (V2)} \quad \frac{V2}{25} = \frac{12}{25} + \frac{V1 - V2}{25}$$

מפתרון המשוואות יתקבלו הערכים:

$$V1 = 3V$$

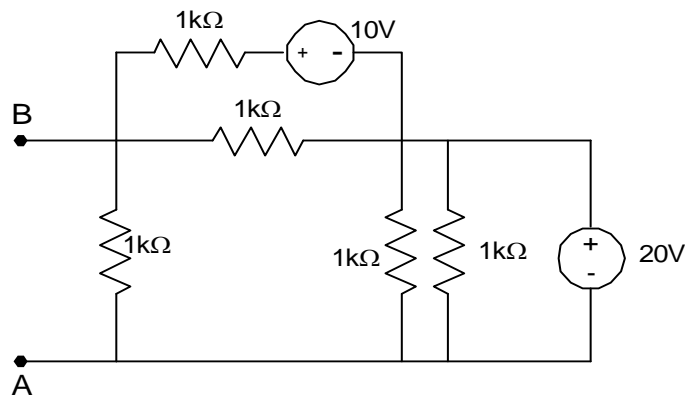
$$V2 = 7.5V$$

במעגל המקורי $V_a = V1 - 12V = 3 - 12 = -9V$ ולכן שקול תבנית הוא : $V_{th} = -9V$, $R_{th} = 12.5$ יחושב ע"פ $I_n = V_{th}/R_{th} = -0.72A$

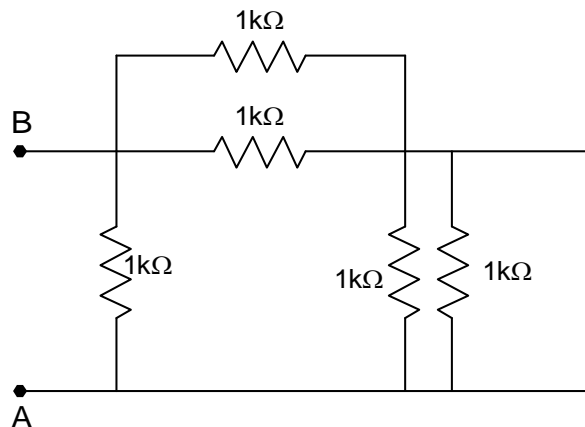
(ב) במידה ומחברים נגד עומס R_L בין נקודות A ו-B המתח עליו מחושב ע"פ מחלק המתח הבא:

$$\square V_{RL} = V_{th} \cdot \frac{R_L}{R_L + R_{th}} = -9 \cdot \frac{12.5}{12.5 + 12.5} = -4.5V$$

(4). נשרטט המעגל מחדש בצורה ברורה יותר:



א. לשם מציאת R_T נקצר המקורות:



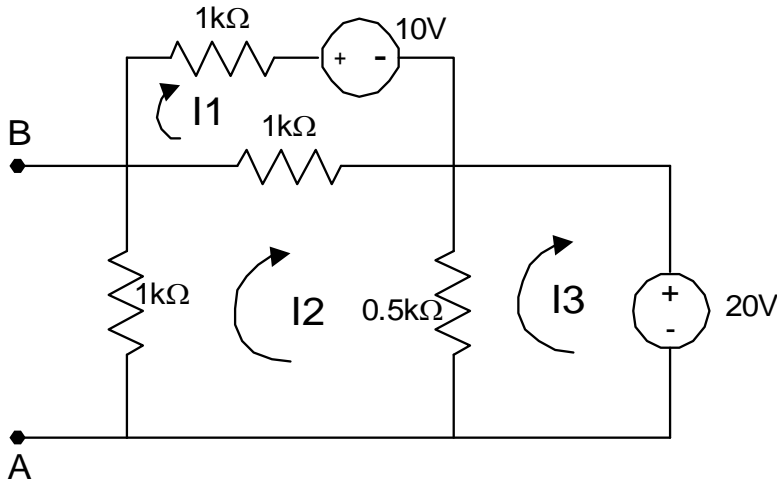
מבוא להנדסת חשמל - הפקולטה להנדסה, פתרון תרגיל 3



שניים מהנגדים במקביל לקצר ולכן אינם משפיעים, ונותר:

$$R_T = \frac{1}{3} k\Omega$$

ב. לפי המעגל שלהלן נפתור בשיטת זרמי חוגים



$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2.5 & -0.5 \\ 0 & -0.5 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I1 \\ I2 \\ I3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ -20 \end{pmatrix}$$

$$I1 = \frac{\det \begin{pmatrix} -10 & -1 & 0 \\ 0 & 2.5 & -0.5 \\ -20 & -0.5 & 0.5 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2.5 & -0.5 \\ 0 & -0.5 & 0.5 \end{pmatrix}} = \frac{-10(1.25 - 0.25) + 1(-10)}{2(1.25 - 0.25) + 1(-0.5)} = \frac{-10 - 10}{2 - 0.5} = -\frac{40}{3} \text{ mA}$$

$$I2 = \frac{\det \begin{pmatrix} 2 & -10 & 0 \\ -1 & 0 & -0.5 \\ 0 & -20 & 0.5 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2.5 & -0.5 \\ 0 & -0.5 & 0.5 \end{pmatrix}} = \frac{2(-10) + 10(-0.5)}{1.5} = \frac{-25}{1.5} = -\frac{50}{3} \text{ mA}$$

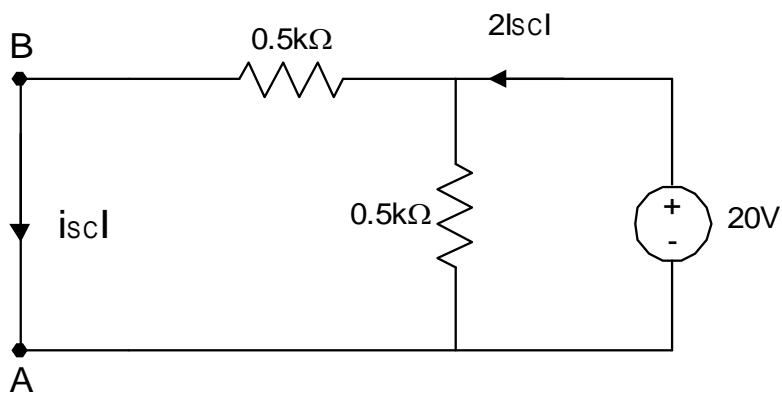
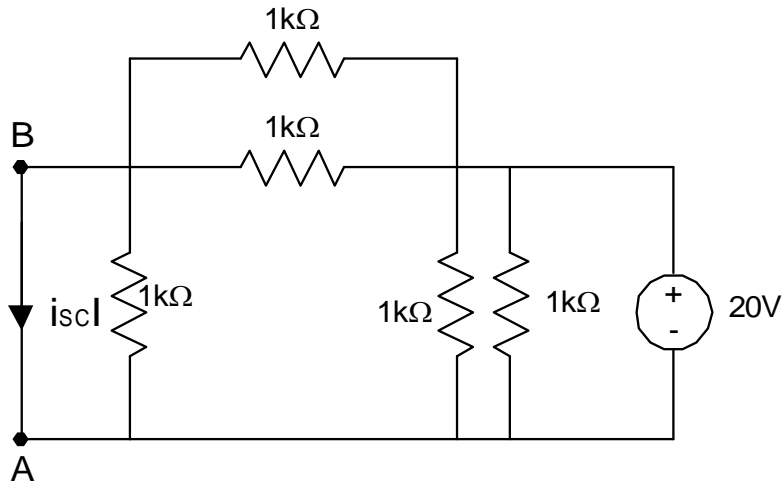
$$I3 = \frac{\det \begin{pmatrix} 2 & -1 & -10 \\ -1 & 2.5 & 0 \\ 0 & -0.5 & -20 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2.5 & -0.5 \\ 0 & -0.5 & 0.5 \end{pmatrix}} = \frac{2(-50) + 1(20) - 10(0.5)}{1.5} = \frac{-100 + 20 - 5}{1.5} = -\frac{170}{3} \text{ mA}$$

$$V_{B\delta} = V_{oc} = -1k \cdot I2 = \frac{50}{3} \text{ V}$$



ומתקבל:

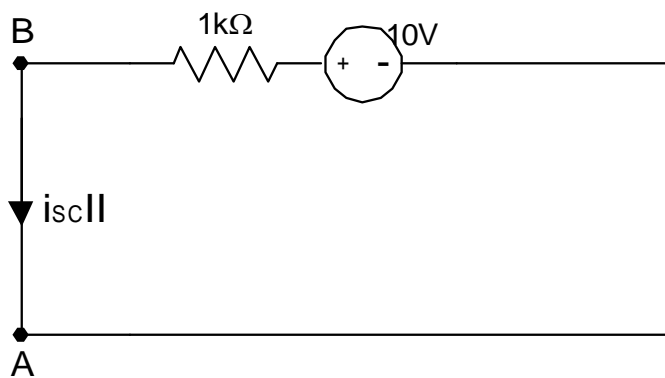
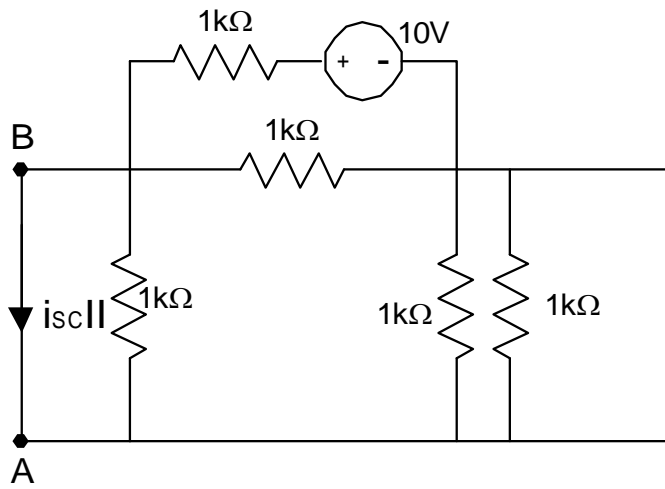
ג. נציב קצר בעומס.
I. נקצר את המקור של 10V.



$$i_{sc} I = 0.5 \cdot 2i_{sc} I = 0.5 \cdot \frac{20}{0.25k} = 40mA$$

מבוא להנדסת חשמל - הפקולטה להנדסה, פתרון תרגיל 3

II. נקצר את המקור של 20V:

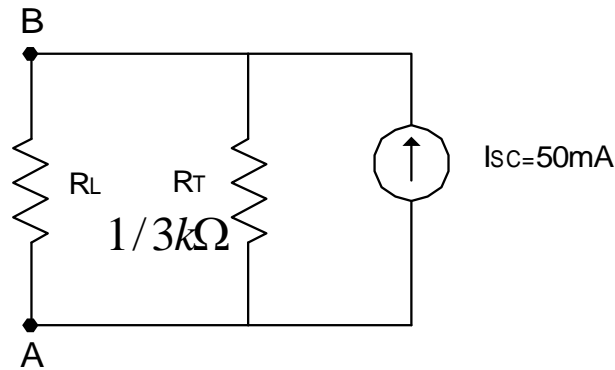


$$i_{scII} = 10/1k = 10mA$$

$$i_{sc} = i_{scI} + i_{scII} = 50mA$$

מבוא להנדסת חשמל - הפקולטה להנדסה, פתרון תרגיל 3

ד. המעגל השקול, בתוספת נגד העומס:
□
□



$$I_L = \frac{R_T}{R_T + R_L} I_{sc}$$

$$P_L = I_L^2 R_L = I_{sc}^2 \frac{R_T^2 R_L}{(R_T + R_L)^2}$$

$$\frac{dP_L}{dR_L} = I_{sc}^2 \left[\frac{R_T^2}{(R_T + R_L)^2} + \frac{-2R_T^2 R_L}{(R_T + R_L)^3} \right] = \frac{R_T^3 + R_T^2 R_L - 2R_T^2 R_L}{(R_T + R_L)^3} =$$

$$= \frac{R_T^3 - R_T^2 R_L}{(R_T + R_L)^3} = \frac{R_T^2 (R_T - R_L)}{(R_T + R_L)^3} = 0$$

↓

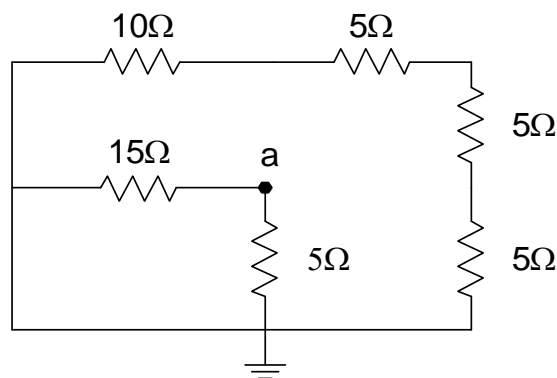
$$R_L = R_T = 1/3k\Omega$$

$$P_{L,max} = I_L^2 R_L = \left(\frac{50 \cdot 10^{-3}}{2} \right)^2 \cdot 1/3 \cdot 10^3 = 208.3mW$$

הזרם בעומס:

בדיוק כמו שראינו בתרגול מספר 1.

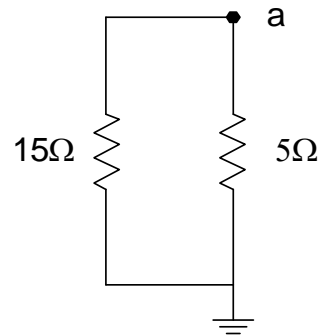
(5) למציאת R_T ננתק מקורות הזרם ונקצר מקורות המתח:



מבוא להנדסת חשמל - הפקולטה להנדסה, פתרון תרגיל 3

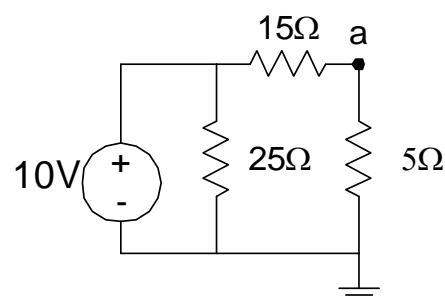
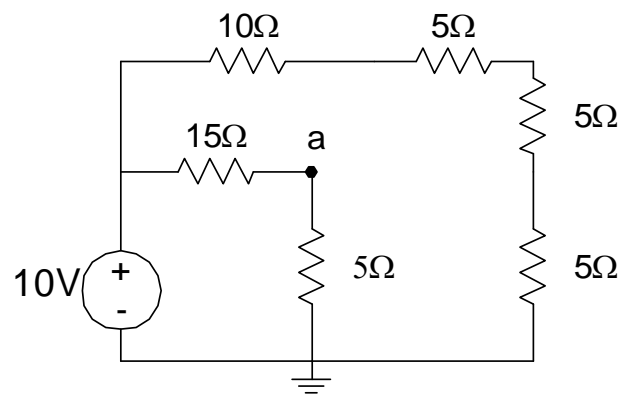


כל הנגדים בענף החיצוני במקביל לקצר, ונותר:



$$R_T = 5 \parallel 15 = 15/4\Omega$$

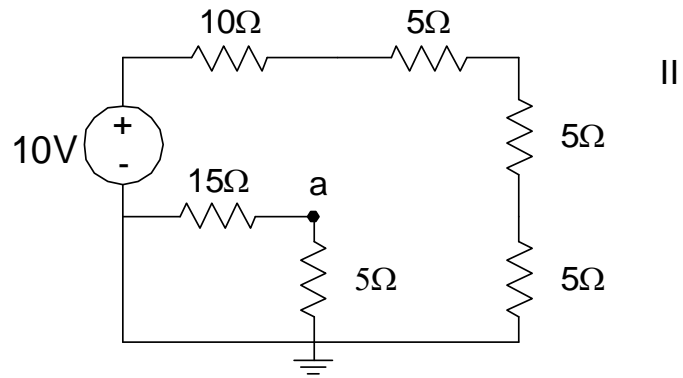
נמצא את V_{OC} באמצעות סופרפוזיציה של המקורות:



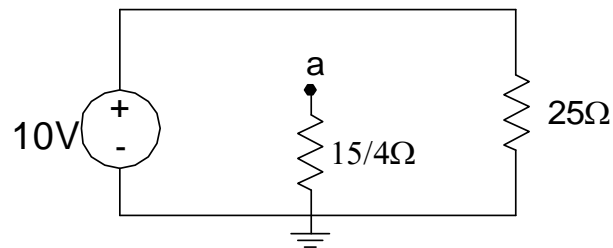
I

$$V_{at} = \frac{5}{15+5} \cdot 10 = 2.5V$$

מבוא להנדסת חשמל - הפקולטה להנדסה, פתרון תרגיל 3

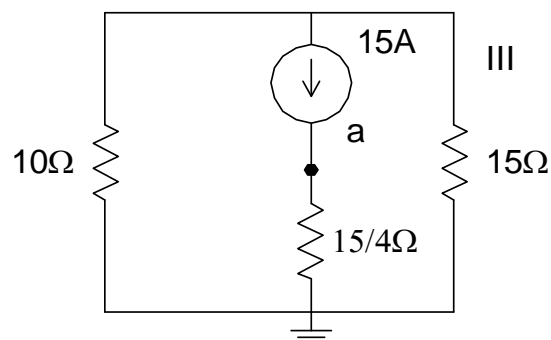
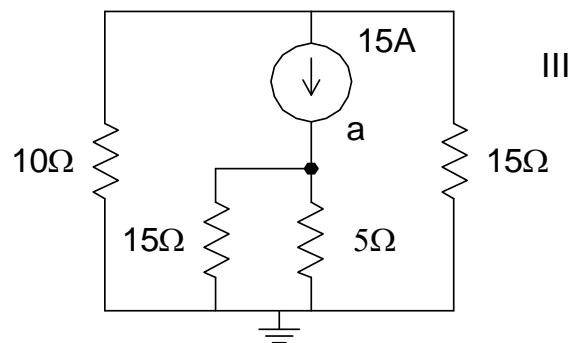


II

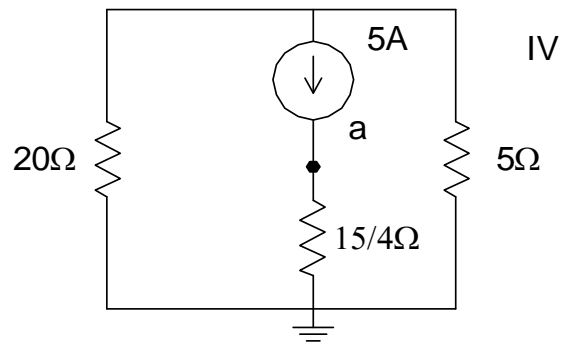


הנקודה a "באוויר", כלומר, בנגד של 15/4 לא זורם זרם, ולכן:

$$V_{all} = 0$$



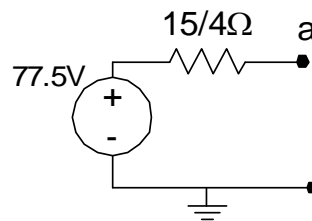
$$V_{all} = 15 \cdot \frac{15}{4} = \frac{225}{4} V$$



$$V_{aIV} = 5 \cdot \frac{15}{4} = \frac{75}{4} V$$

$$V_{OC} = V_{al} + V_{all} + V_{aIV} = 2.5 + 0 + \frac{225}{4} + \frac{75}{4} = 77.5V$$

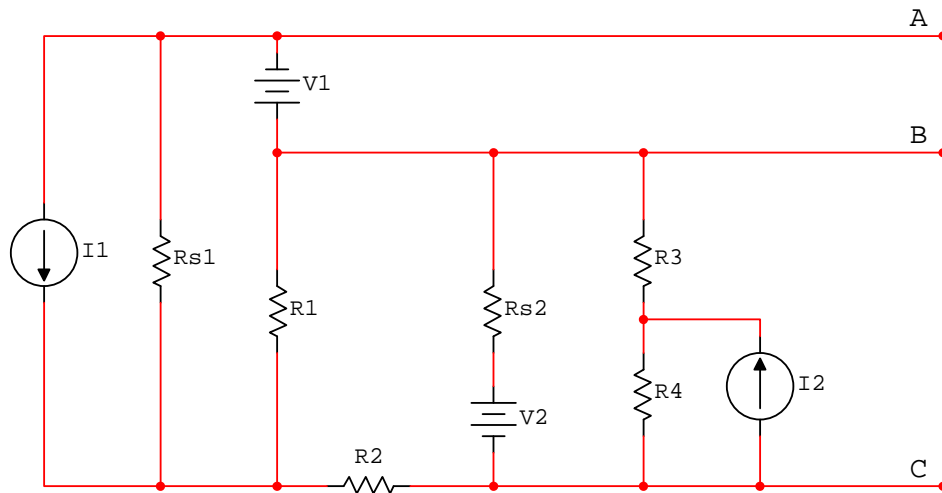
שקול תבנית:



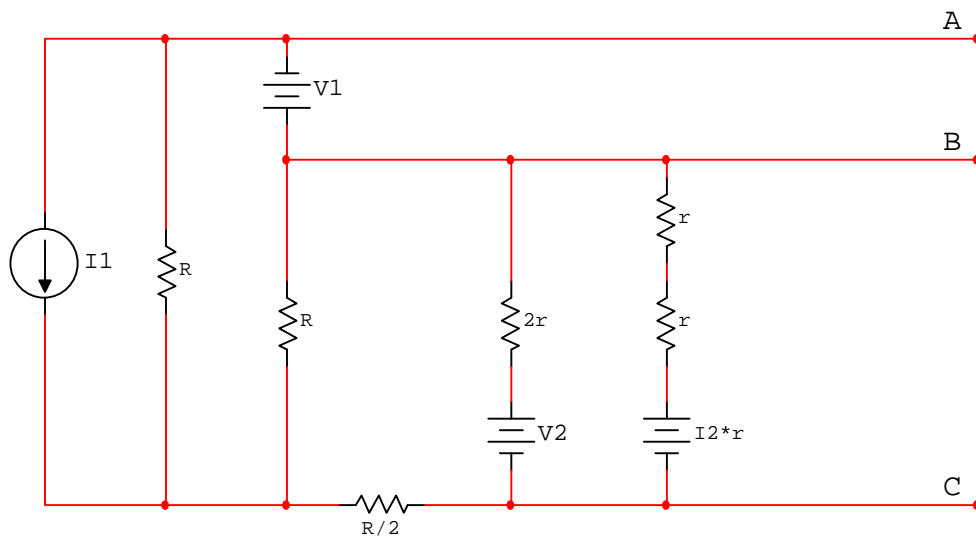
(6)

תחילה נביא את המעגל לצורה קריאה יותר. מקורות מעשיים מיוצגים ע"י מקור אידיאלי ונגד

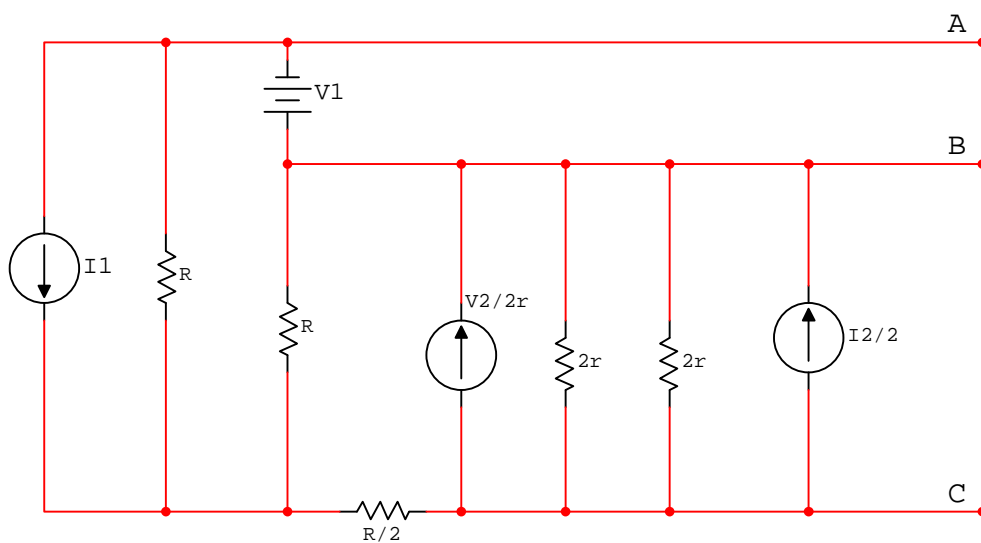
מבוא להנדסת חשמל - הפקולטה להנדסה, פתרון תרגיל 3



נחליף את מקור הזרם I_2 ונגד R_4 במקור מתח לפי תבנית



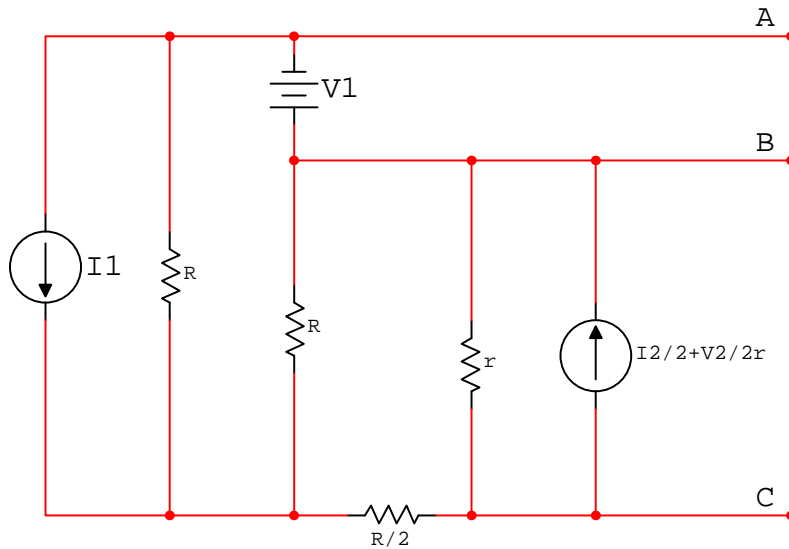
נחבר שני נגדים בטור ונחליף את שני מקורות המתח למקורות זרם לפי נורטון.



נסכם זרמים ונעשה נגד שקול מהשניים במקביל



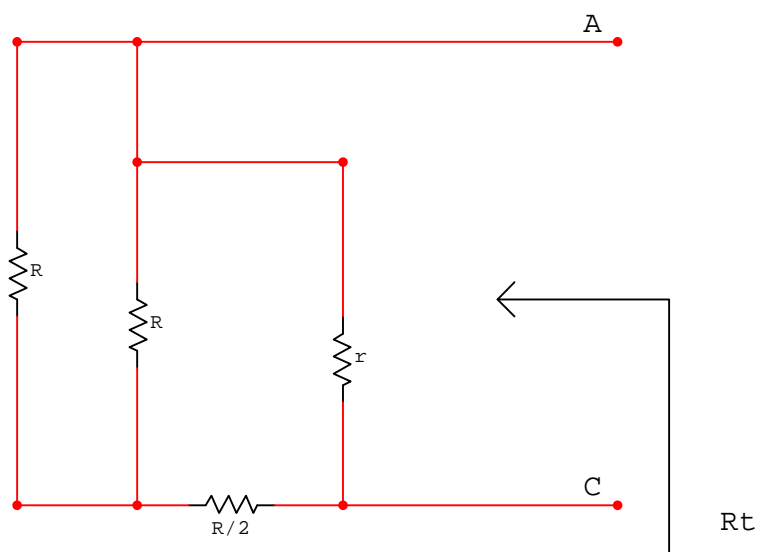
מבוא להנדסת חשמל - הפקולטה להנדסה, פתרון תרגיל 3



עכשיו אפשר להתחיל לעבוד

הדרך הקלה יותר לפתור את השאלה הזאת היא ע"י שיקולי נורטון/ תבנין למקורות. לצורך תרגול נפתור את המעגל בשיטת סופרפוזיציה של מקורות.

א) נמצא את ההתנגדות השקולה בין A ל-C. לשם כך נאפס מקורות (מקורות מתח נקצר, מקורות זרם ננתק)



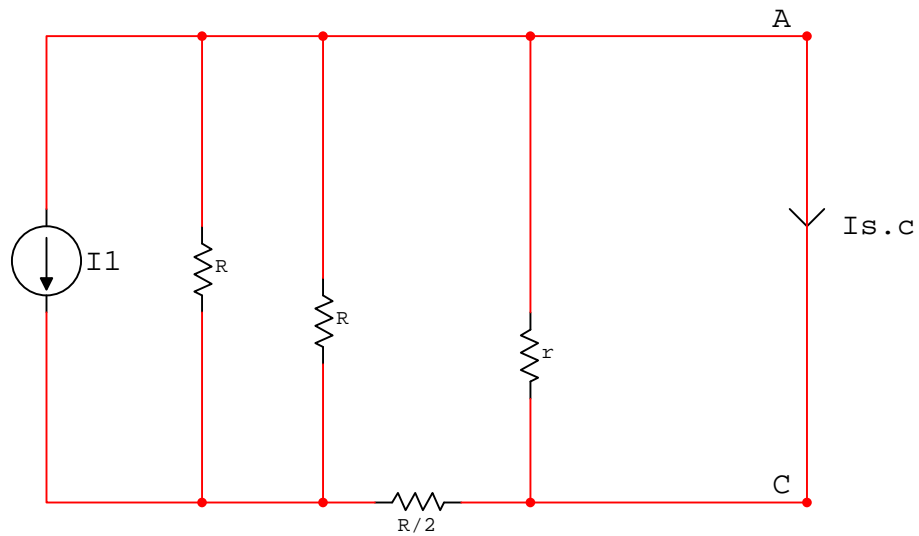
$$R_t = (R \parallel R + R/2) \parallel r = R \parallel r = \frac{R \cdot r}{R + r}$$

כעת נמצא את זרם הקצר ע"י סופרפוזיצית מקורות

מבוא להנדסת חשמל - הפקולטה להנדסה, פתרון תרגיל 3



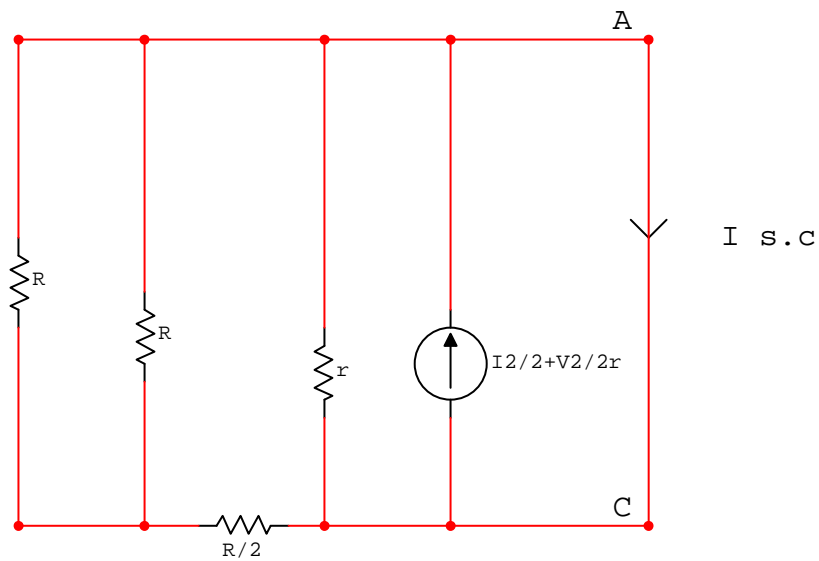
תחילה נשאיר רק את I_1 . מתקבל המעגל הבא:



הזרם מתחלק שווה בין נגד של $R/2$ ושני נגדים R במקביל (גם $R/2$). לכן זרם הקצר כתוצאה ממקור I_1 הוא:

$$I_{s.c.1} = -\frac{I_1}{2}$$

כעת נשאיר רק את מקור הזרם השני

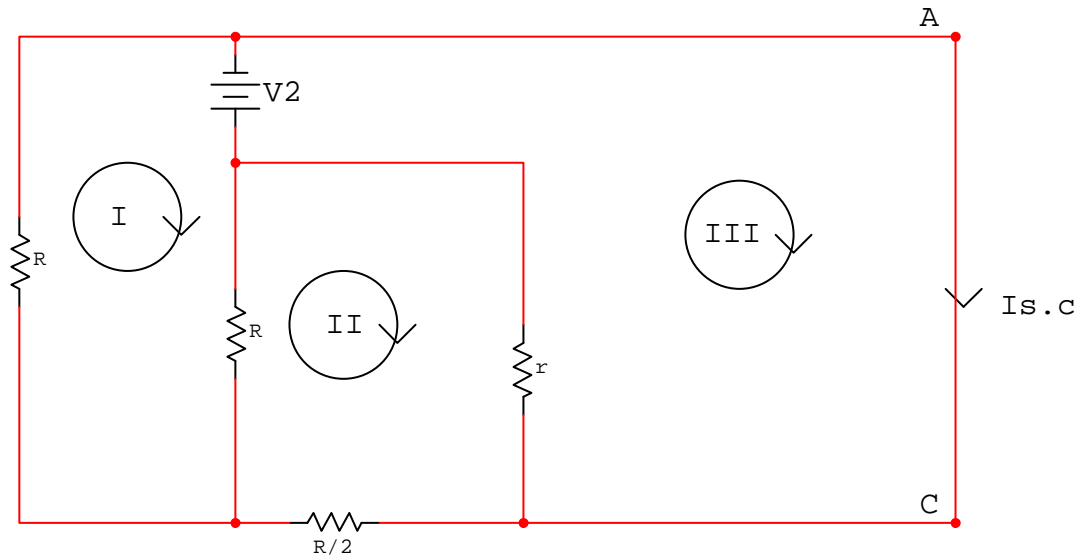


$$I_{s.c.2} = \frac{I_2}{2} + \frac{V_2}{2r}$$



מבוא להנדסת חשמל - הפקולטה להנדסה, פתרון תרגיל 3

עכשיו נשאיר רק את מקור V1. נפתור בשיטת זרמי חוגים



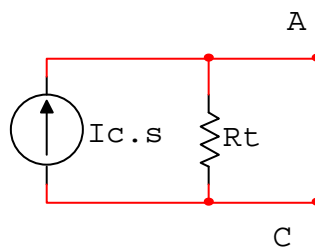
נבנה את משוואות זרמי החוגים כפי שנלמד בתרגול 2

$$\begin{bmatrix} R+R & -R & 0 \\ -R & 3/2R+r & -r \\ 0 & -r & r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 \\ 0 \\ -V_1 \end{bmatrix} \Rightarrow I_2 = -\frac{V_1}{2R} \quad I_3 = I_{s.c.3} = -\frac{V_1}{r} \left(1 + \frac{r}{2R}\right)$$

כעת קיבלנו את זרם הקצר, שהוא סכום תרומות הזרם של כל מקור:

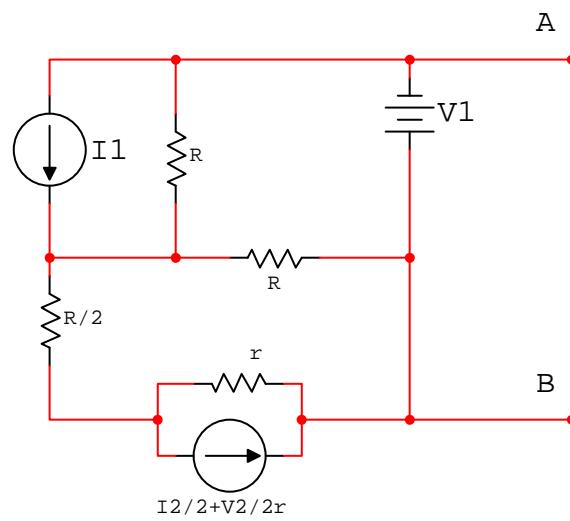
$$\begin{aligned} I_{s.c} &= I_{s.c1} + I_{s.c2} + I_{s.c3} = -\frac{I_1}{2} + \frac{I_2}{2} + \frac{V_2}{2r} - \frac{V_1}{r} \left(1 + \frac{r}{2R}\right) = \\ &= -\frac{I_1}{2} + \frac{I_2}{2} + \frac{I_2 \cdot r}{2r} - \frac{I_1 \cdot R}{r} \left(1 + \frac{r}{2R}\right) = I_2 - I_1 \left(1 + \frac{R}{r}\right) \end{aligned}$$

נבנה מעגל נורתון שקול:

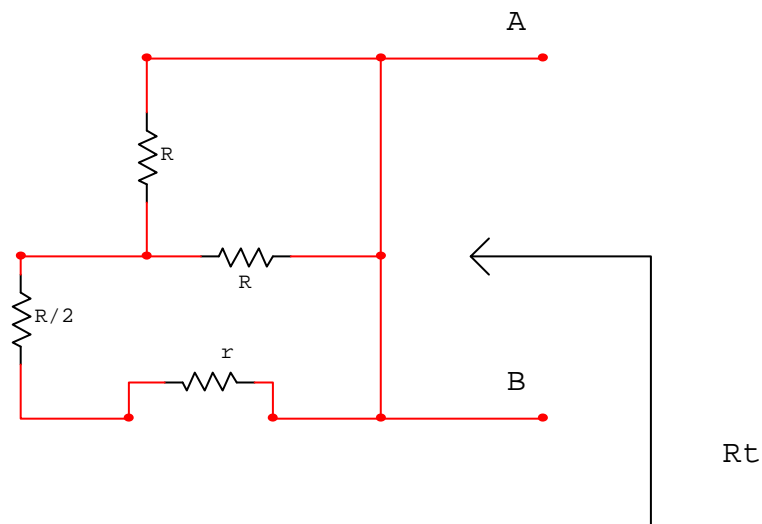


מבוא להנדסת חשמל - הפקולטה להנדסה, פתרון תרגיל 3

□
□
(ב) נצייר מעגל בין הדקים A ו-B:



□
נמצא התנגדות תבנית ע"י איפוס מקורות



רואים כי קיים קצר בין הנקודות A ו-B. לכן $R_t=0$

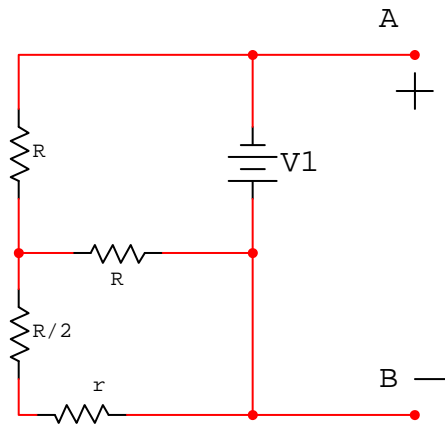
נמצא את מתח הנתק ע"י סופרפוזיצית מקורות

תרומת שני מקורות זרם היא אפס. למה?

כי כאשר נקצר את מקור המתח יתקבל קצר בין A ל-B. ואנו כבר יודעים כי מפל מתח על הקצר הוא אפס לכן

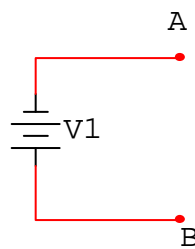
$$V_{o.c.1} = V_{o.c.2} = 0$$

נמצא את תרומת מקור המתח:

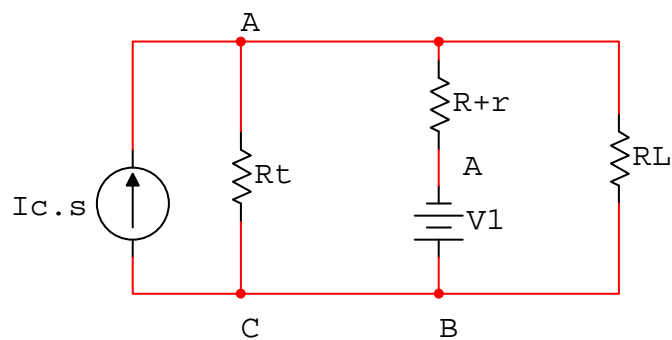


מיד מקבלים $V_{o.c.3} = -V_1$ (כיוונים הפוכים)

נוכל לצייר מעגל תבנית שקול:

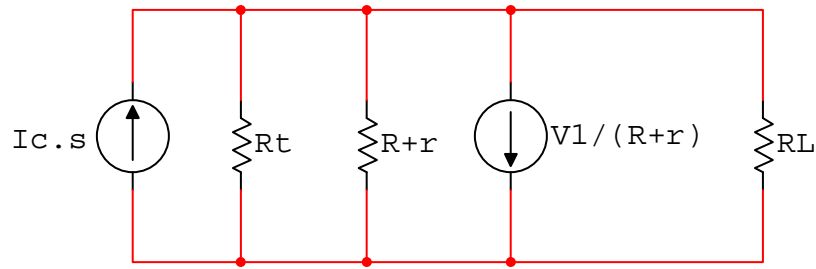


(ג) ניתן להשתמש במעגלים השקולים שפיתחנו קודם



נחליף מקור מתח ונגד טורי למקור זרם לפי נורטון:

מבוא להנדסת חשמל - הפקולטה להנדסה, פתרון תרגיל 3

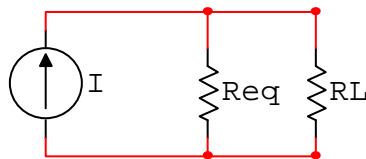


נחבר מקורות זרם ונגדים במקביל:

$$I = I_2 - I_1 \left(1 + \frac{R}{r} \right) - \frac{V_1}{R+r} = I_2 - I_1 \left(1 + \frac{R}{r} \right) - \frac{I_1 R}{R+r} = I_2 - I_1 \left(\frac{r+R}{r} + \frac{R}{r+R} \right) =$$

$$= I_2 - I_1 \left(\frac{r \cdot R + (R+r)^2}{r(r+R)} \right)$$

$$R_{eq} = R_t \parallel (R+r) = \frac{R \cdot r}{R+r} \parallel (R+r) = \frac{\frac{R \cdot r}{R+r} (R+r)}{\frac{R \cdot r}{R+r} + R+r} = \frac{R \cdot r (R+r)}{r \cdot R + (R+r)^2}$$



$$P = I_L^2 R_L = \left(I \frac{R_{eq}}{R_{eq} + R_L} \right)^2 \cdot R_L = \left\{ \left[I_2 - I_1 \left(\frac{r \cdot R + (R+r)^2}{r(r+R)} \right) \right] \frac{\frac{R \cdot r (R+r)}{r \cdot R + (R+r)^2}}{\frac{R \cdot r (R+r)}{r \cdot R + (R+r)^2} + R_L} \right\}^2 R_L =$$

$$= \left\{ \left[I_2 - I_1 \left(\frac{r \cdot R + (R+r)^2}{r(r+R)} \right) \right] \frac{R \cdot r (R+r)}{R \cdot r (R+r) + R_L (r \cdot R + (R+r)^2)} \right\}^2 R_L$$

פתרו את השאלה גם ע"י שיקולי נורטון/ תבנית – זה יהיה תרגול מצויין