תרגיל מס.6

עפיף חלומה 302323001

7 בינואר 2010

1 שאלה 1

נרשום משוואות KVL על החוג הימני והשמאלי:

$$
\begin{aligned}
V_s &= (I_1+I_2)\,R_1 + I_1X_{L_1} + I_2X_M \\
4\angle\alpha &= (I_1+I_2)\,10 + I_16j + I_25j \\
V_s &= (I_1+I_2)\,10 + I_2X_c + I_2L_2 + I_1L_1 \\
4\angle\alpha &= (I_1+I_2)\,10 + -3jI_2 + 5jI_2 + I_15j
\end{aligned}
$$

מחסרים שתי המשוואות:

$$
\begin{aligned}
4\angle\alpha &= (I_1+I_2)\,10 + I_16j + I_25j \\
4\angle\alpha &= (I_1+I_2)\,10 + -3jI_2 + 5jI_2 + I_15j \\
0 &= I_16j + I_25j - (-3jI_2 + 5jI_2 + I_15j) \\
0 &= I_16j + I_25j + 3jI_2 - 5jI_2 - I_15j \\
0 &= I_16j - I_15j + I_25j + 3jI_2 - 5jI_2 \\
0 &= I_1j + 3jI_2 \\
I_1 &= -3I_2
\end{aligned}
$$

נציב ונקבל:

$$
\begin{aligned}
4\angle\alpha &= (I_1+I_2)\,10 + I_16j + I_25j \\
4\angle\alpha &= 10I_1 + 6jI_1 + 10I_2 + 5jI_2 \\
4\angle\alpha &= I_1\,(10+6j) + I_2\,(10+5j) \\
4\angle\alpha &= -3I_2\,(10+6j) + I_2\,(10+5j) \\
4\angle\alpha &= I_2\,(-30-18j) + I_2\,(10+5j) \\
4\angle\alpha &= I_2\,(-20-13j) \\
I_2 &= \frac{4\angle\alpha}{(-20-13j)} \\
&= \frac{4\angle\alpha}{23.85\angle 213.02} \\
&= 0.1677\angle(\alpha-213.02) \\
I_1 &= -0.5031\angle(\alpha-213.02)
\end{aligned}
$$

אזי קיבלנו

$$\begin{aligned} I_1 &= -0.5031\cos(\omega t+\alpha-213.02^\circ) \\ I_2 &= 0.1677\cos(\omega t+\alpha-213.02^\circ) \end{aligned}$$

1.1 ב

על נגד $\angle I = \angle V$ לכן זה בכלל לא תלוי ב α אזי

$$\begin{aligned} P_{av_R} &= \frac{1}{2}\left|I_R\right|^2 R\overbrace{\cos(\angle V-\angle I)}^{1} \\ &= \frac{1}{2}\left|-3I_2+I_2\right|^2 R \\ &= \frac{1}{2}\left|-0.5031\angle(\alpha-213.02)+0.1677\angle(\alpha-213.02)\right|^2 R \\ &= \frac{1}{2}\left|-0.5031\angle(\alpha-213.02)+0.1677\angle(\alpha-213.02)\right|^2 R \\ &= \frac{1}{2}\left|-0.335\right|^2\cdot 10 \\ &= 0.56W \end{aligned}$$

2 שאלה 2

נרשום KVL

$$\begin{aligned} e_s &= 2I_1+X_{2H}I_1+X_{1H}I_2+X_{1H}I_2+I_1X_{1H} \\ &= 2I_1+8jI_1+4jI_2+4I_2+4I_1 \\ &= I_1(2+12j)+i_2(8j) \\ 0 &= 4jI_2+4jI_1-(I_1-I_2)\cdot 1 \\ 0 &= 4jI_2+4jI_1-I_1+I_2 \\ 0 &= (4j-1)I_1+(4j+1)I_2 \\ (4j-1)I_1 &= -(4j+1)I_2 \\ I_1 &= -\frac{(4j+1)}{(4j-1)}I_2 \end{aligned}$$

נציב במשוואה הראשונה:

$$
\begin{aligned}
e_s &= (2+12j)\,I_1 - \frac{8j\,(rj-1)\,I_1}{4j+1} \\
e_s &= \frac{[(2+12j)\,(4j+1) - 8j\,(4j-1)]\,I_1}{4j+1} \\
I_1 &= \frac{4j+1}{[(2+12j)\,(4j+1) - 8j\,(4j-1)]} I_1 \\
&= \frac{(4j+1)\,e_s}{(8j+2-48+12j+32+8j)} \\
&= \frac{(4j+1)\,e_s}{28j-14} \\
&= \frac{\sqrt{17}\angle 75.96 \cdot 1\angle 45^\circ}{31.3\angle 116.56^\circ} \\
&= 0.13\angle 4.4^\circ \\
I_1 &= 0.13\cos\left(4t+4.4^\circ\right) \\
I_2 &= \frac{1-4j}{4j+1} I_1 \\
&= \frac{1-4j}{4j+1} \cdot \frac{(4j+1)\,e_s}{28j-14} \\
&= \left(\frac{-9+2i}{70}\right) e_s \\
&= (0.05\angle -12.5) \cdot 1\angle 45^\circ \\
&= 0.05\angle 32.5^\circ \\
&= 0.05\cos\left(4t+32.5^\circ\right)
\end{aligned}
$$

3 שאלה 3

3.1 א

נעביר אלמנטים ממעגל I למעגל II
נחשב $Z = -144 \parallel 240$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{Z} &= \frac{1}{240} - \frac{1}{144j} \\
\frac{1}{Z} &= \frac{144j-240}{34560j} \\
Z &= \frac{34560j}{144j-240} \\
&= \frac{34560j\,(-144j-240)}{(144j-240)\,(-144j-240)} \\
&= \frac{1080}{17} - \frac{1800}{17} i
\end{aligned}
$$

האלמנטים יעברו למעגל II לפי הנוסחה:

$$\begin{aligned} Z_{II} &= \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \cdot Z = \left(\frac{1}{3}\right)^2 Z = 7.05 - 11.76i \\ Z_{L_{II}} &= \frac{1}{9} Z_L \end{aligned}$$

עכשיו נעביר את האלמנטים למעגל הראשון:

$$\begin{aligned} Z_{L_{III}} &= \left(\frac{1}{4}\right)^2 Z_{L_{II}} \\ Z_{III} &= \left(\frac{1}{4}\right)^2 (80 + Z_{II}) \\ &= \frac{1}{16}(87.05 - 11.76j) \\ &= 5.44 - 0.73j \end{aligned}$$

נאחד את הקבל והנגד:

$$\begin{aligned} Z_{C\|R} &= \frac{-4j}{2-2j} \\ &= \frac{-4j(2+2j)}{8} \\ &= \frac{-8j+8}{8} \\ &= -j+1 \end{aligned}$$

נחבר עם האלמנטים שהעברנו:

$$\begin{aligned} Z_{III+C\|R} &= Z_{III} + Z_{C\|R} \\ &= 5.44 - 0.73j - j + 1 \\ &= 6.44 - 1.73j \end{aligned}$$

נעביר למקור מתח בשביל לקבל מעגל טורי אזי $V_s = i_s \cdot 4j = 160\sqrt{2}j$
עכשיו אנחנו סוף סוף מחשבים שקור האימפידנסים:

$$\begin{aligned} Z_{TOTAL} &= 4j + Z_{III+C\|R} \\ &= 6.44 + 2.07j \end{aligned}$$

ראינו שהספק ממוצע מקסימאלי על Z_L מתקבל כרשר $Z_L = Z_{in}^*$ כלומר נדרוש
$\underbrace{\left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2}_{144} Z_L = 6.44 - 2.27j$ אזי

$$Z_L = 927.36 - 326.88j$$

3.2 ב

נשתמש בנוסחה $P_{av} = \frac{1}{2}|I|^2\Re(Z_L)$ (כי במקרה של הספק מקסימאלי $\cos(\angle V - \angle I) = 1$

$$P_{av} = \frac{1}{2}|I|^2\Re(Z_L) = \frac{1}{2}\cdot 6.44\cdot\left|\frac{4\cdot 40\sqrt{2}j}{2\cdot 6.44}\right|^2 = 993.78W$$

3.3 ג

נשתמש במעגל האחרון שמצאנו לפיני המעבר לשקול תבינין (מקור זרם, מקביל לו סליל, מקביל להם $Z_{III+C\|R} + \frac{1}{144}Z_L$)

$$\begin{aligned}
Z_{in} &= Z_{III+C\|R} + Z_L \\
Z_{III+C\|R} &= 6.44 - 1.73j \\
Z_L &= \frac{576}{144} = 3.97 \\
Z_{in} &= 6.44 + 3.97 - 173j \\
&= 10.44 - 1.73j
\end{aligned}$$

4 שאלה 4

התון כי $P_L = P_R = 30W$ רוצים למצא k.

יודעים שעל הנגד אין הפרש פאזה בין מתח לזרם לכן $\cos(\angle V - \angle I) = 1$ ומכאן

$$\begin{aligned}
30 &= \frac{1}{2}R|I|^2 \\
I &= \sqrt{\frac{60}{R}} = \sqrt{\frac{60}{5}} = \sqrt{12}
\end{aligned}$$

מהיות שני הסלילים מחוברים במקביל מתקיים:

$$\begin{aligned}
V_1 &= 20jI_1 + kj\omega I_2 \\
&= 17jI_2 + jk\omega I_1
\end{aligned}$$

מ KCL יודעים כי $I = I_1 + I_2$ לכן

$$
\begin{aligned}
20jI_1 + j\omega k\left(I - I_1\right) &= 17\left(I - I_1\right) + jk\omega I_1 \\
\left(20j - j\omega k\right)I_1 + j\omega kI &= 17jI + I_1\left(j\omega k - 17j\right) \\
I_1\left(20j - j\omega k - j\omega k + 17j\right) &= 17jI - j\omega kI \\
I_1\left(37j - 2j\omega k\right) &= \left(17j - j\omega k\right)I \\
I_1 &= \frac{\left(17 - \omega k\right)j}{\left(37 - 2\omega k\right)j}I \\
&= \frac{17 - \omega k}{37 - 2\omega k}I \\
I_2 &= I - I_1 \\
&= \frac{37 - 2\omega k - 17 + \omega k}{37 - 2\omega k}I \\
I_2 &= \frac{20 - \omega k - 17 + \omega k}{37 - 2\omega k}I \\
&= \frac{20 - \omega k}{37 - 2\omega k}I
\end{aligned}
$$

מ KVL מתקיים

$$
\begin{aligned}
V &= V_1 + V_R \\
V &= IR + 20jI_1 + j\omega jI_2 \\
V &= 5I + \frac{20j\left(17 - \omega k\right)}{37 - 2\omega k}I + \frac{k\omega j\left(20 - \omega k\right)}{37 - 2\omega k}I \\
V &= \left(5 + \frac{20j\left(17 - \omega k\right) + k\omega j\left(20 - \omega k\right)}{37 - 2\omega k}\right)I \\
V &= \left(5 + \frac{340 - \left(k\omega\right)^2}{37 - 2\omega k}j\right)I
\end{aligned}
$$

קיבלנו שני פאזורים שווים אזי גם הגודל שלהם שווה

$$
\begin{aligned}
25 &= \sqrt{25 + \left[\frac{340 - \left(k\omega\right)^2}{37 - 2\omega k}\right]^2} \\
27.08 &= \left[\frac{340 - \left(k\omega\right)^2}{37 - 2\omega k}\right] \\
5.2\left(37 - 2\omega k\right) &= 340 - \left(k\omega\right)^2 \\
\left(k\omega\right)^2 - 10.4\left(k\omega\right) - 147.6 &= 0 \\
\left(k\omega\right)_{1,2} &= \frac{10.4 \pm \sqrt{10.4^2 + 4 \cdot 1 \cdot 147.6}}{2} \\
&= \frac{10.4 \pm 26.43}{2} \\
&= \begin{cases} 18.1 & \checkmark \\ -8.015 & \times \end{cases}
\end{aligned}
$$

$$\kappa = \frac{|M|}{\sqrt{L_1 L_2}} = \frac{\left(\frac{18.41}{\omega}\right)}{\sqrt{\frac{17}{\omega}\cdot\frac{20}{\omega}}} = 0.998$$

5 שאלה 5

$$\begin{aligned} Z_{11}(j\omega) &= \frac{V_1}{I_1} \\ Z_{21}(j\omega) &= \frac{V_2}{I_1} \end{aligned}$$

נעביר את הנגד למעגל הראשון ע"י $R_{new} = \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 R_{old}$
כדי למצא את Z_{11} נמצא מעגל שקול כדי לחשב את i_1
נחבר את הנגד והקבל המקביליים ביחד:

$$Z_2 = \frac{\left(\frac{2n^2}{2j\omega}\right)}{\left(2n^2 + \frac{j}{2\omega}\right)} = \frac{2n^2}{4j\omega n^2 + 1}$$

כרגע נחבר גם הנגד השני 1Ω שנמצא במקביל ל Z_2 והסליל:

$$\begin{aligned} Z_3 &= 1 \parallel (2\omega j + Z_2) \\ Z_{11} &= \frac{Z_3 i_1}{i_1} \\ &= Z_3 \\ &= \frac{2\omega j + \frac{2n^2}{4j\omega n+1}}{1 + 2\omega j + \frac{2n^2}{4j\omega n+1}} \\ &= \frac{2\omega j\left(1 + 4j\omega n^2\right) + 2n^2}{1 + 4j\omega n^2 + 2\omega j\left(1 + 4j\omega n^2\right) + 2n^2} \\ Z_{11} &= \frac{2\omega j - 8\omega^2 n^2 + 2n^2}{1 + 4j\omega n^2 + 2\omega j\left(1 + 4j\omega n^2\right) + 2n^2} \end{aligned}$$

נתבונן במעגל המשוקף
ניתן לראות כי העכבה השקולה בין הנקודות a, b מקיימת $Z_{ab} = \frac{nV_2}{I_1}$ לכן כדי
למצא את היחס הנ"ל ננתק את מקור הזרם ונקבל עכבה שקולה:

$$
\begin{aligned}
Z_{ab} &= (1+2j\omega) \parallel \frac{1}{2j\omega} \parallel 2n^2 \\
&= (1+2j\omega) \parallel \left(\frac{\frac{2n^2}{2j\omega}}{2n^2+\frac{i}{2\omega}}\right) \\
&= (1+2j\omega) \parallel \left(\frac{n^2}{2n^2 j\omega+\frac{1}{2}}\right) \\
&= (1+2j\omega) \parallel \left(\frac{2n^2}{4n^2 j\omega+1}\right) \\
&= \frac{\left(\frac{(1+2j\omega)2n^2}{4n^2 j\omega+1}\right)}{(1+2j\omega)+\frac{2n^2}{4n^2 j\omega+1}} \\
&= \frac{(1+2j\omega)\,2n^2}{(1+2j\omega)\left(1+4n^2 j\omega\right)+2n^2} \\
&= \frac{2n^2+4n2\omega j}{1+4n^2 j\omega+2j\omega-8n^2\omega^2+2n^2}
\end{aligned}
$$

היחס הנדרש הוא $Z_{21}=\frac{V_2}{I_1}$ לכן נחלק את Z_{ab} ב n:

$$
Z_{21}=\frac{Z_{ab}}{n}=\frac{2n+4n\omega j}{2n^2+2j\omega+1+4n^2 j\omega-8n^2\omega^2}
$$

5.1 ב

$$
\begin{aligned}
Z_{12} &= \frac{V_1}{I_2} \\
Z_{22} &= \frac{V_2}{I_2}
\end{aligned}
$$

נשקף הרכיבים למעגל הראשי ונקבל $I=\frac{i_2}{n}, R_1=2n^2, V_2'=nV_2$

$$
Z_{V_1}=\frac{nV_1}{I_2}
$$

נחשב עכבת המעגל בין הנקודות של V_1(ע"י ניתוק מקור הזרם)

$$
Z_{V_1}=\frac{nV_1}{I_2}=1 \parallel \left(2\omega j+\left(\frac{1}{2\omega j} \parallel 2n^2\right)\right)
$$

חישבנו בסעיף הקודם

$$Z_{V_1} = \frac{2\omega j - 8\omega^2 n^2 + 2n^2}{1 + 4n^2\omega j + 2\omega j - 8\omega^2 n^2 + 2n^2}$$

אנו מחפשים $Z_{12} = \frac{V_1}{i_2}$ לכן

$$Z_{12} = \frac{Z_{V_1}}{n} = \frac{\frac{2\omega j}{n} - 8\omega^2 n + 2n}{1 + 4n^2\omega j + 2\omega j - 8\omega^2 n^2 + 2n^2}$$

כעת נתבונן בין ההדקים nV_2 במעגל השקול

$$Z_{nV_2} = \frac{nV_2}{\left(\frac{I_2}{n}\right)} = n^2 \frac{V_2}{I_2}$$

לכן נותר למצא את עכבת המעגל בין הדקי nV_2

$$Z_{nV_2} = \left(2n^2 \parallel \frac{1}{2\omega j} \parallel (1 + 2\omega j)\right)$$

ובדומה למה שחושב בסעיף הקודם

$$Z_{nV_2} = \frac{2n^2 + 4n^2\omega j}{1 + 4n^2 j\omega + 2j\omega - 8n^2\omega^2 + 2n^2}$$

ולכן $Z_{22} = \frac{V_2}{I_1}$ המקיים

$$Z_{22} = \frac{V_2}{I_1} = \frac{Z_{nV_2}}{n^2} = \frac{2 + 4\omega j}{1 + 4n^2 j\omega + 2j\omega - 8n^2\omega^2 + 2n^2}$$

6 שאלה 6

6.1 א

כאשר aa' ו bb' אינם מחוברים $Z(j\omega)$ הוא פשוט חיבור במקביל של שלושת הרכיבים:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{Z(j\omega)} &= \frac{1}{R}+j\omega C+\frac{1}{j\omega L}\\
&= \frac{j\omega L-\omega^2 RCL+R}{j\omega LR}\\
Z(j\omega) &= \frac{j\omega LR}{j\omega L-\omega^2 RCL+R}\\
&= \frac{8\cdot 3\cdot 4j}{j8\cdot 3-8^2\cdot 4\cdot 3\cdot 52.1\cdot 10^{-3}+4}\\
&= \frac{96j}{24j-40+4}\\
&= \frac{-24j}{9-6j}\cdot\frac{(9+6j)}{(9+6j)}\\
&= \frac{144-216j}{9^2+6^2}=1.23-1.84j
\end{aligned}
$$

6.2 ב

נחבר את aa' ו bb' ונקבל מעגל עם רכיב מצומד עם עכבה $Z(j\omega)$ בחלק הימני
נעביר $Z(8j)$ למעגל הראשון ע"י הנוסחה Z_0 $Z' = \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2$ כלומר $Z' = 5^2 Z_L =$
$30-46.1j$

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \frac{e_s}{Z'+2}\\
&= \frac{5\angle 0}{32-46.1j}\\
&= \frac{5\angle 0}{56.11\angle 55.23^\circ}\\
&= 0.089\angle -55.23^\circ
\end{aligned}
$$

לכן

$$i_1(t)=0.089\cos(8t+55.23^\circ)$$

6.3 ג

הספק מקסימאלי מתקבל כאשר $Z_L = Z_s^*$ במקרה שלנו זה כאשר $Z_L = Z'^*$ כלומר
$Z_L = 30+46.1j = R_1+n$
לכן $R_1 = 30$, $n = 46.1j$ כלומר n הוא סליל עם השראות $\frac{46.1j}{8j} = 5.67H$