מבא להנדסת חשמל

עפיף חלומה

25 בנובמבר 2009

תוכן עניינים

פרק 1

פרטים טכנים

20% תרגילים ו 80% מבחן
שעת קבלה של מרצה לא מוגדרת. לתאם דרך ulevy@cc.huji.ac.i.il
יש אתר לקורס שנכנסים אליו דרך owl
מתרגל זמני: igoykhmam@gmail.com

1.1 מתרגל

גלעד לרמן
בניין ברגמן חדר 301(אפשר להגיש תרגילים פו)
מייל tirgulee@gmail.com
20% 8 תרגילים.

פרק 2

הרצאה מס.1

2.1 טיפול במעגל חשמלי

- הכרה הנדסית של חוקי הפיזיקה בנושא חשמל
- בחירת כלים מתמטים נכונים
- הפשטת הבעיה
- תרגום הבעיה למשוואות
- פתרון המשוואות

נשתמש בקורס זה ביחידות mks

2.2 אלמנט מקובץ lumped

אלמנט בעל גודל זניח. עלל אלמנט כזה חלים חוכי קירכוף.
לעומת זה יש אלמנט מפולג distributed כל אלמנט מעשי הוא מפולג, אבל נזניח את זה.

2.3 הגדרות בסיסיות

יציאות של האלמנט המקובץ נקראים ענפים[1]
הצטלבויות של ענפים נקראות צמתים

2.4 כיווני יחוס

זרם הולך מ + ל - באלמנט וזרם הולך מ - ל + במקור.

2.5 זרם ומתח

זרם: הזרם דרך שטח חתך A מוגדר על ידי כמות המטען העוברת דרך שטח החתך ליחידת זמן. $I = \frac{\partial Q}{\partial t}$ ביחידת אמפר $[A]$

[1] Branches

מתח: הפרש מתחים בין שתי נקודות קובע את יכולת העברת האנרגיה של מטען.

$$V=\frac{\overbrace{\partial W}^{\text{אנרגיה}}}{\partial Q}$$

הספק: קצב מעבר אנרגיה המועברת ליחידת זמן $P=\frac{\partial W}{\partial t}=\frac{\partial W}{\partial q}\cdot\frac{\partial q}{\partial t}=V\cdot I$

2.6 רכיבים בסיסיים

נגד: מתנגד למעבר זרם על ידי יצירת מפל מתח. עבור נגד ליניארי מתקיים חטק אוהם $v\left(t\right)=R\cdot i\left(t\right)$. מסמנים נגד באות R וההתנגדות ביחידת אוהם $[\Omega]$. לפעמים מדברים גם על מוליכות $G=\frac{1}{R}$

קבל: קבל הוא רכיב בו המתח בין הדקיו קובע את המטען עליו. $q=q\left(v\right)$. קבל ליניארי עבורו הפונקציה $q\left(v\right)$ ליניארית . c הוא הקיבול ומודדים אותו ב יחידת פרד $[F]$ $i=\frac{\partial q}{\partial t}=\frac{\partial\left(cv\right)}{\partial t}=c\frac{\partial v}{\partial t}$ לכן $v=v\left(0\right)+\frac{1}{c}\int_0^t i\left(t\right)dt$

משרן(סליל)[2]: ϕ השטף המגנטי נקבע חד ערכית על ידי הזרם דרך הסליל: $\phi=\phi\left(i\right)=L\cdot i$ לכן $V=\frac{\partial\phi}{\partial t}=\frac{\partial\left(Li\right)}{\partial t}\Rightarrow V=L\frac{\partial i}{\partial t}$ ולכן $i=i\left(0\right)+\frac{1}{L}\int_0^t v\left(t'\right)dt'$

2.7 הספקים ואנרגיות של רכיבים

הספק רגעי שנצרך ע"י אלמנט הוא $P\left(t\right)=V\left(t\right)\cdot i\left(t\right)$ אזי $w=\int_{t_0}^t P\left(t'\right)dt'$ מזמן t_0 עד t

2.7.1 נגד

עבור נגד ליניארי מתקיים $P\left(t\right)=V\cdot i=R\cdot i^2=i^2R=\frac{V^2}{R}$

2.7.2 קבל

עבור קבל: $w=\int_{t_0}^t V\left(t'\right)i\left(t'\right)dt'=\int_{q_0}^q V\left(q\right)dq'$. יודעים כי $v=\frac{1}{c}q$ אזי $\varepsilon=\int_0^q\frac{1}{c}q'dq'=\frac{1}{2c}q^2$ אזי $\varepsilon=\frac{1}{2}cv^2$

2.7.3 סליל

עבור סליל $w=\int_{t_0}^t v\left(t'\right)i\left(t'\right)dt'=\int_{\phi_0}^{\phi}i\left(\phi\right)d\phi$ יודעים כי $i=\frac{\phi}{L}\Rightarrow d\phi=Ldi$ אזי $\varepsilon=L\int_0^i i'di'=L\int_0^{\phi}\frac{\phi'}{L}\cdot\frac{d\phi'}{L}=\frac{1}{2L}\phi^2$

2.8 שיקול מיכני

2.8.1 של נגד

כח חיכוך עם אוויר: $f=D\cdot\underbrace{u}_{\text{מהירות}}$

[2] inductor

$$
\begin{aligned}
w &= \int_0^x f dx \\
&= \int_0^t du \cdot u dt \\
&= \int_0^t D u^2 dt \Leftrightarrow R \cdot i^2
\end{aligned}
$$

2.8.2 של סליל

$$
\begin{aligned}
w &= \int_0^x f dx \\
& \int_0^t M \frac{du'}{dt'} u dt' \\
& \int_0^u M u' du' \\
&= \frac{1}{2} M u^2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} L i^2
\end{aligned}
$$

2.8.3 של קבל

נניח קבל בעל קבוע קפיץ k או מקדם דחיסות $S = \frac{1}{k}$.

$$f = kx = \frac{1}{s} x \Rightarrow x = sf$$

אזי:

$$
\begin{aligned}
w &= \int_0^x f dx \\
&= \int_0^x f d\left(fs\right) \\
&= \int_0^f s f df \\
&= \frac{1}{2} s f^2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} c v^2
\end{aligned}
$$

2.9 מקורות

2.9.1 מקור מתח אידיאלי

התקן שהמתח בין הדקיו אינו תלוי בזרם.

2.9.2 מקור זרם

אתקן זרם שהזרם הזורם דרגו אינו דלוי במתח הנופל עליו.
אפשר להחליף מקור מתח במקור זרם ולהפך בקלות.

2.10 חוקי קירכוף

חוק הזרמים של קירכוף KCL עבור כל מעגל בכל זמן נתון הסכום האלגברי של זרם הענפים היוצאים מצומת כלשהיא הוא אפס.

2.10.1 ענף

הוא מחבר בין שני צמתים

פרק 3

תרגול מס.1

3.1 חוק קירכוף למתחים ולזרמים

חוק הזרמים אומר שכל המטען שנכנס לצומת גם יוצא מהצומת.
חוק המתח אומר כי סכום המתחים בלולאה הוא אפס.

פרק 4

הרצאה מס.?

4.1 אותות Signals

4.1.1 מדרגה Unit Step

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$

4.1.2 פולס Pulse

$$P_s(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{1}{\Delta} & 0 < t < \Delta \\ 0 & t > \Delta \end{cases}$$

ניתן לבנות פולס משתי מדרגות

$$P_s(t) = \frac{u(t) - u(t-\Delta)}{\Delta}$$

4.1.3 הלם Impulse

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & t \neq 0 \\ \infty & t = 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(t)\, dt = 1$$

קיים קשר בין פונקצית δ לפונקצית מדרגה:

$$\begin{aligned} \delta(t) &= \frac{\partial u(t)}{\partial t} \\ u(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau)\, d\tau \end{aligned}$$

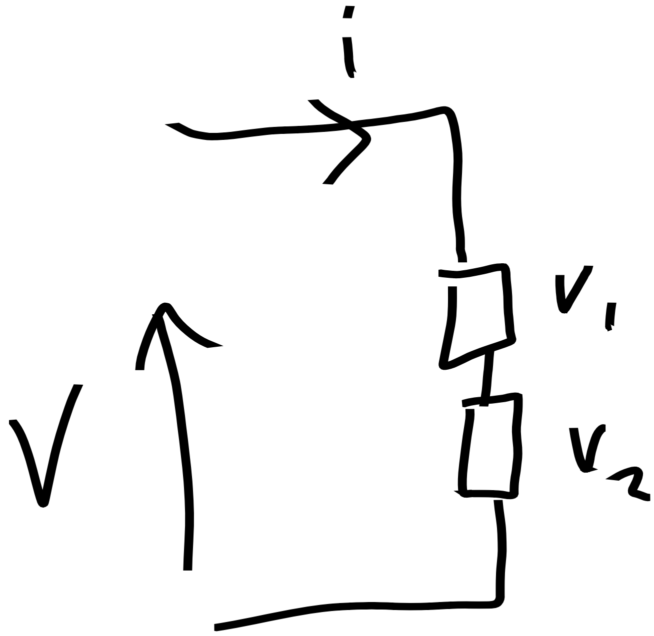
4.1.4 Ramp

$$r(t) = \begin{cases} t & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

פרק 5

הרצאה מס.?

5.1 חיבורים טוריים ומקבילים



איור 5.1: חיבור של שתי רכיבים בטור

5.1.1 נגדים

$$
\begin{aligned}
i &= i_1 = i_2 \\
v &= v_1 + v_2 \\
R &= \frac{v}{i} \\
&= \frac{v_1}{i} + \frac{v_2}{i} \\
&= \frac{v_1}{i_1} + \frac{v_2}{i_2} \\
&= R \\
R &= \sum_{n=1}^{N} R_n
\end{aligned}
$$

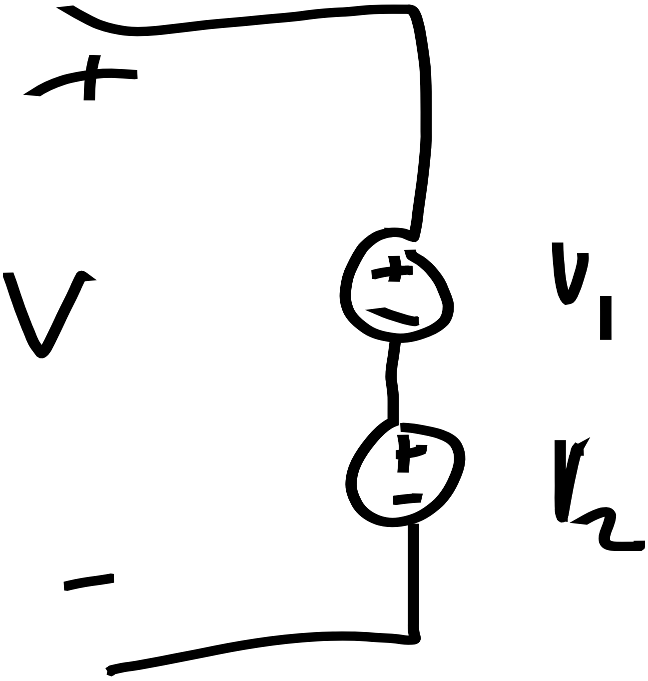
5.1.2 קבלים

$$
\begin{aligned}
V_n(t) &= V_0(0) + \frac{1}{c_n}\int_0^t i_n(t')\,dt' \\
V(t) &= \sum_n V_n(t) \\
&= \sum_n V_n(0) + \sum_n \frac{1}{c_n}\int_0^t i_n(t')\,dt' \\
&= V(0) + \left[\int_0^t i(t')\,dt\right]\sum_n \frac{1}{c_n} \\
\frac{1}{c} &= \sum_n \frac{1}{c_n} \\
V(0) &= \sum V_n(0)
\end{aligned}
$$

5.1.3 סלילים

$$
\begin{aligned}
V_n &= L_n \frac{\partial i_n}{\partial t} \\
V &= \sum_n V_n - \sum_n L_n \frac{\partial i_n}{\partial t} \\
&= \frac{\partial i}{\partial t}\sum_n L_n \\
L &= \sum_n L_n
\end{aligned}
$$

5.2 מקורות מתח בטור



איור 5.2: מקורות זרם בטור

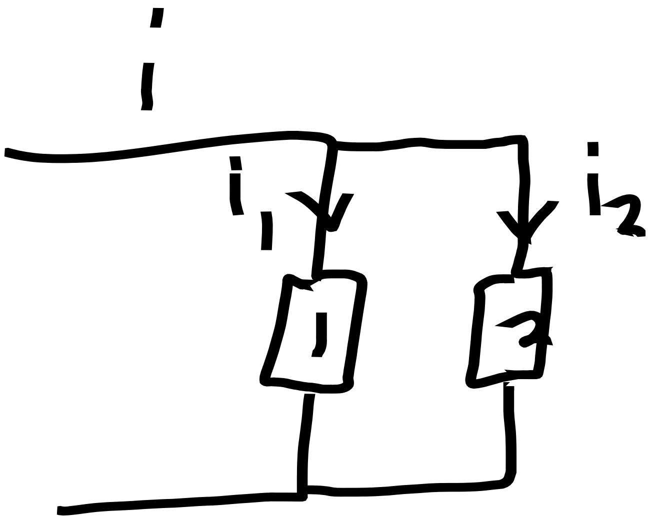
$$V = V_1 V_2$$

במקרה של מקור מתח הכיוונים משנים.

5.3 מקורות זרם בטור

אי אפשר לעשות דבר כזה אלה אם כן $I_1 = I_2$ שבמקרה הזה לא משנה שיש שתי מקורות זרם.

5.4 חיבור מקבילי של רכיבים



איור 5.3: חיבור מקבילי של רכיבים

5.4.1 נגדים

$$
\begin{aligned}
i_n &= \frac{V_n}{R_n} = \frac{V}{R_n} \\
i &= \sum_n i_n \\
&= \sum_n \frac{V_n}{R_n} \\
&= V \sum_n \frac{1}{R_n} \\
\frac{V}{R} &= V \sum \frac{1}{R_n} \\
\frac{1}{R} &= \sum \frac{1}{R_n}
\end{aligned}
$$

מקרה פרטי:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{R} &= \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \\
\frac{1}{R} &= \frac{R_2 + R_1}{R_1 R_2} \\
R &= \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}
\end{aligned}
$$

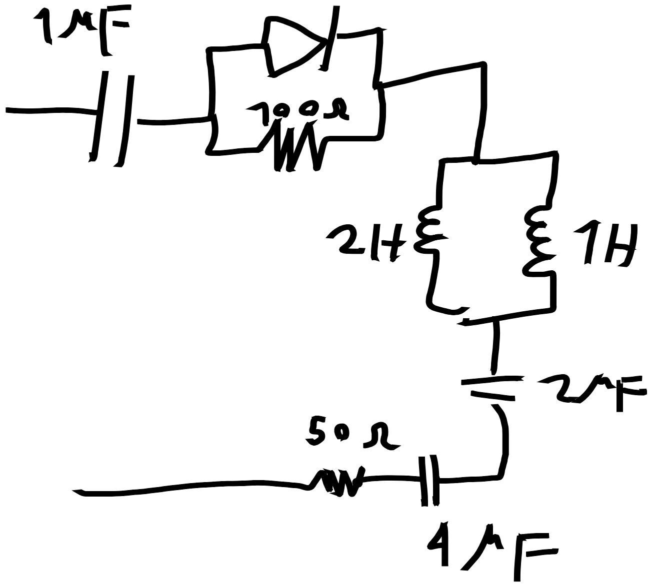
5.4.2 קבלים

$$
\begin{aligned}
i_n &= c_n \frac{\partial v_n}{\partial t} = c_n \frac{\partial V}{\partial t} \\
i &= \sum_n c_n \frac{\partial V_n}{\partial t} \\
&= \frac{\partial V}{\partial t} \sum_n c_n \\
C &= \sum_n c_n
\end{aligned}
$$

5.4.3 סלילים

$$
\begin{aligned}
i_n &= i_n(0) + \frac{1}{L_n} \sum_0^t v_n(t')\, dt' \\
i &= \sum_n i_n \\
&= \sum_n i_n(0) + \sum_n \frac{1}{L_n} \int_0^t V_n(t)\, dt \\
&= i(0) + \left[\int_0^t v(t')\, dt' \right] \sum_n \frac{1}{L_n} \\
\frac{1}{L} &= \sum_n \frac{1}{L_n}
\end{aligned}
$$

5.5 תרגיל



איור 5.4: מעגל פשוט

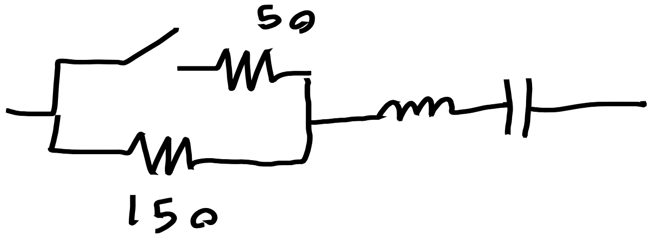
במעגל הזה שלושת הקבלים בטור אזי $\frac{1}{C}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}+\frac{1}{C_3}$

הסלילים מחוברים במקביל אזי $\frac{1}{L}=\frac{1}{L_1}+\frac{1}{L_2}$

הדיודה כבר לא מקירים אז מגדירים אותה:

אם הזרם על הדיודה הוא חיובי אז הדיודה בקצר. אם הזרם הוא שלילי אז הדיודה בנתג.

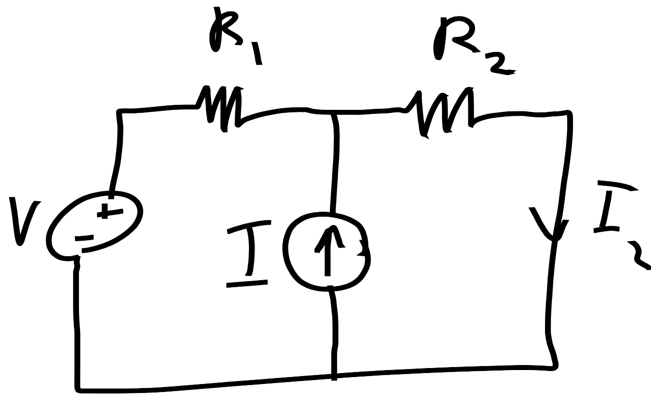
אזי:



איור 5.5: פתרון

5.6 סופר פוזיציה

כאשר יש קשר ליניארי בין עירור לתוצאה, השפעת מספר עירורים הפועלים שווה לסכום השפעות של כל אחד מהעירורים הפועלים.



איור 5.6: מעגל עם שתי מקורות

פתרון רגיל:

$$\begin{aligned} I_2 &= ? \\ V &= \left(I_2 - I\right) R_1 + I_2 R_2 \\ I_2 &= \frac{V}{R_1 + R_2} + I \frac{R_1}{R_1 + R_2} \end{aligned}$$

פתרון בסופר פוזיציה:
פותרים ראשית את מקור המתח, אזי מנתקים את הענף של מקור הזרם

$$I_2^V = \frac{V}{R_1 + R_L}$$

עכשיו מקצרים את מקור המתח ומקבלים:

$$I_2^A = \frac{I}{R_1 + R_2} R_1$$

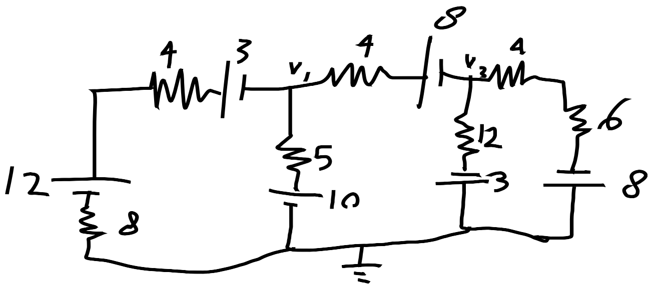
העיכרון הזה עובד טוב במקרה זרם ומתח כי הם ליניארים, אבל זה לא עובד במקרה של הספק כי זה לא ליניארי($I^2 R$):

$$\begin{aligned} P_V &= \left(\frac{V}{R_1 + R_2}\right)^2 R_2 \\ P_I &= \left(\frac{R_1}{R_1 + R_2}\right)^2 R_2 \\ P_T &\neq P_V + P_I \end{aligned}$$

פרק 6

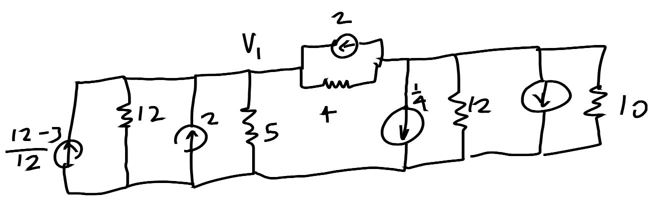
תרגול מס.?

6.1 שיטת מתח הצמתים



איור 6.1: מעגל דוגמה

רוצים להפוך את זה למעגל עם מקורות זרם:



איור 6.2:

$$
\begin{aligned}
-\frac{V_1}{12}-\frac{V_1}{5}-\frac{V_1-V_2}{4}+\frac{3}{4}+2+2 &= 0 \\
-\frac{V_2}{12}-\frac{V_2}{10}+\frac{V_1-V_2}{4}-2-\frac{1}{4}-0.8 &= 0
\end{aligned}
$$

נפתור:

$$
\begin{aligned}
V_1\left(-\frac{1}{12}-\frac{1}{5}-\frac{1}{4}\right)+V_2\frac{1}{4} &= -\left(\frac{3}{4}+2+2\right)\\
V_1\left(\frac{1}{4}\right)+V_2\left(-\frac{1}{12}-\frac{1}{10}-\frac{1}{4}\right) &= \left(2+\frac{1}{4}+0.8\right)
\end{aligned}
$$

נרשום את זה כמטריצה $R\cdot I=V$ אבל בצורה אחרת $G\cdot V=I$ כאשר G זה מוליכיות

$$
\begin{pmatrix} \frac{1}{12}+\frac{1}{5}+\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{12}+\frac{1}{10}+\frac{1}{4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4}+2+2 \\ -\left(2+\frac{1}{4}+0.8\right) \end{pmatrix}
$$

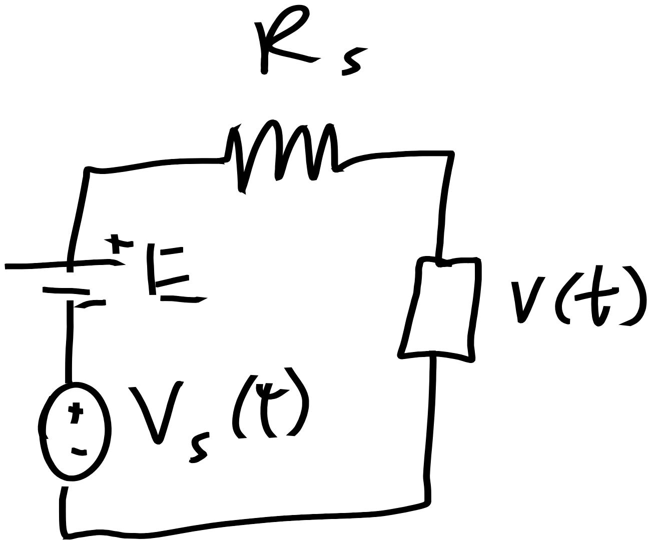
מקבלים:

$$
\begin{aligned}
V_2 &= -2.6V\\
V_1 &= 7.68V
\end{aligned}
$$

פרק 7

הרצאה מס.?

7.1 טיפול באלמנטים לא ליניארית



איור 7.1: מעגל עם אלמנט לא ליניארי ומקור משתנהבזמן

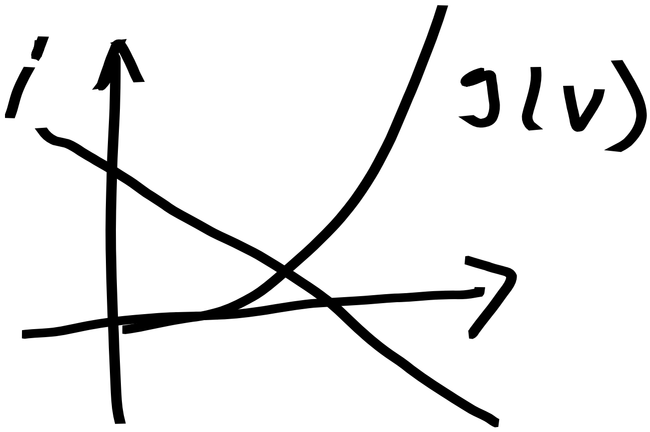
נתון כי

1. $v_s \ll E$
2. $i = g(v)$
3. $E + v_s = iR_s + v(t)$

נמצא נקודת עבודה בלי להתיחס לv_s
אזי פותרים:

$$\begin{aligned} I_0 &= g(V_0) \\ E &= I_0 R_s + V_0 \end{aligned}$$

נצייר גרף של $I(v)=\frac{E-v}{R_s}$



איור 7.2: גרף מתח זרם של i ו $g(v)$

ניקח עכשיו בחשבון ההשפעה של השינויים הקטנים במתח המקור. לשינויים קטנים במתח על האלמנט(נסמן את השינוי כ V_1) יהיו שינויים קטנים בזרם דרך האלמנט(נסמן ב I_1). סה"כ המתח על האלמנט V_0+V_1 וזרם דרך האלמנט I_0+I_1

$$\begin{aligned} I &= g(v) \\ I_0+I_1 &= g(v_0+v_1) \\ &= g(v_0)+\frac{\partial g}{\partial v}|_{v_0}\cdot v_1 \\ I_1 &= \frac{\partial g}{\partial V}|_{v_0}\cdot v_1 \end{aligned}$$

לסיכום:

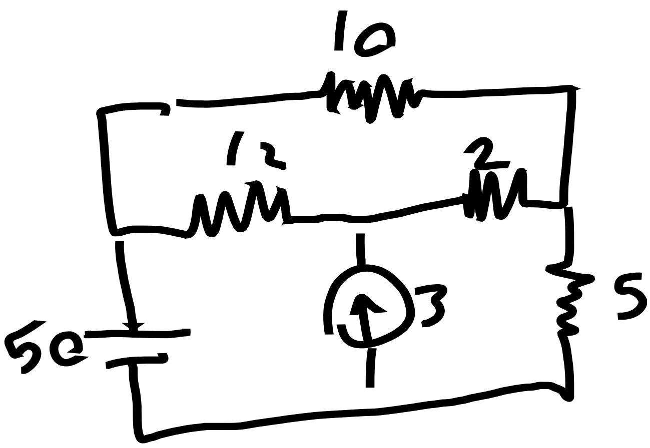
1. פותרים את המעגל עבור מקור E ומוצאים נק' עבודה I_0, V_0
2. מוצאים את השיפוע בנקודת העבודה $\frac{1}{R}=\frac{\partial g}{\partial v}|_{v_0}$
3. מחשבים את V_1, I_1 כתוצאה מv_s כאשר מחליפים את האלמנט הלא ליניארי בנגד ליניארי
4. מחבים 1,3 ומקבלים פתרון כללי

דוגמה: נתון $E=100V, v_s=\sin(2\pi t), R_s=1\Omega$ והאופיין של האלמנט הוא $g(v)=100\left(1-e^{-\frac{v}{100}}\right)$

פתרון: נרודת עבודה:

$$\begin{aligned}
i(t) &= g(v(t)) \\
E + v_s(t) &= i(t)\,R_s + v(t) \\
I_0 &= 100\left(1 - e^{-\frac{v}{100}}\right) \\
100 &= I_0 \cdot 1 + V_0 \\
100 - V_0 &= I_0 = 100\left(1 - e^{-\frac{v_0}{100}}\right) \\
v_0 &= 100e^{-\frac{v}{100}} \\
v_0 &= 56.7V \\
I_0 &= 43.3A
\end{aligned}$$

7.2 דוגמת סיכום



איור 7.3: מעגל

פותרים דרך סופר פוזיציה:
מנתקים את מקור הזרם

$$i_v = \frac{50}{(14 \parallel 10) + 5} = \frac{10}{10 + 14} = \frac{50}{26}$$

נשתמש במחלק זרם $I_1 = I\frac{R_2}{R_1 + R_2}$ בשביל לקבל הזרם בענף
כרגע נקצר את מקור המתח ונחזיר את מקור הזרם. אזי אפשר להמיר את מקור הזרם ונגד ה 12Ω למרור מתח.

פרק 8

תרגול מס.4

8.1 מעגלים מסדר ראשון

עקרונות הפתרון

1. רושמים משוואות KVL ו KCL ומקבלים משד"פ
2. פותרים מתמטית: פתרון פרטי + פתרון הומוגיני. פיזיקלית: ZIR: תגובה לתנאי התחלה בלבד ללא עירור.

   לכל משוואה מהצורה $y' + \frac{1}{\tau}y = 0$ עבור תנאי התחלה $y(0) = k$ אזי $y_{ZIR} = ke^{-\frac{t}{\tau}}$
3. פתרון ZSR: תגובה לעירור עם תנאי התחלה אפס.
4. $y' = \frac{1}{\tau}y = f(t)$ עם תנאי התחלה $y(0) = 0$. קיים $y_{zsr} = y_p + y_h$. y_h דומה ל y_{ZIR}(מקדם אחר) והפתרון הפרטי דומה לפונקצית העירור.

   (א) עבור $\sin(\omega t)$ מקבלים $y_p = A\sin(\omega t + \varphi)$ עבור at מקבלים $y_p = bt + c$

   $y_{ZSR} = \left(y_p + Ne^{-\frac{t}{\tau}}\right)u(t)$ ת.ה. $y_p(0) + N = 0$

תכונות ליניאריות קיימות רק עבור ZSR: אם ניתן $f(t) \to g(t)$

1. סופר פוזיציה: $\sum f_n(t) \to \sum g_n(t)$
2. הזזה בזמן $f(t - t_0) \to g(t - t_0)$
3. גזירה $f'(t) \to g'(t)$
4. אינטגרציה $\int fdt \to \int gdt$
5. לכל אופרטור ליניארי $G[af_1(t) + bf_2(t)] = aG(f_1) + bG(f_2)$

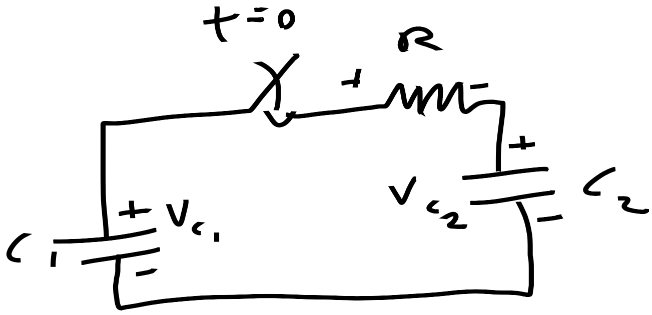
פרט לעירור הלב ונגזרותיו מתקיים: $V_c(0^-) = V_C(0^+)$ ו $u_C(0^-) = I_c(0^+)$

יש לכפול פתרון ZSR ב$u(t)$ לפני החיבור ל ZIR

אם ידוע הפתרון עבור כניסת מדרגה $y_u = y^u_{zdr} + y^u_{zdr}$ אזי הפתרון עבור הלם יהיה $y_f = (y^u_{ZSR})' + y^u_{ZIR}$

היחידות של RC: $\frac{L}{R}, \sqrt{LC}$ הם $second$

8.2 דוגמאות



איור 8.1: שתי קבלים ונגד

נרשום KVL:

$$
\begin{aligned}
V_{C_2}+V_R-V_{C_1} &= 0\\
\frac{1}{c_2}\int_{-\infty}^{t} idt+iR-\frac{i}{c_1}\int_{-\infty}^{t}-idt &= 0\\
\left(\frac{1}{c_1}+\frac{1}{c_2}\right)\int idt+iR &= 0\\
\frac{\partial i}{\partial t}+\frac{1}{R}\left(\frac{1}{c_1}+\frac{1}{c_2}\right)i &= 0\\
\frac{\partial i}{\partial t}+\frac{1}{\tau}i &= 0
\end{aligned}
$$

כאשר $\tau=\frac{RC}{2}$.
מציאת תנאי התחלה:

$$
\begin{aligned}
V_{C_2}+R\cdot i\left(0^+\right)-V_{c_1}\left(0^+\right) &= 0\\
i\left(0^+\right) &= \frac{V_{C_1}\left(0^+\right)-V_{C_2}\left(0^+\right)}{R}\\
&= \frac{V_{C_1}\left(0^-\right)-V_{C_2}\left(0^-\right)}{R}\\
&= \frac{V_0-0}{R}\\
&= \frac{V_0}{R}
\end{aligned}
$$

זה נכון בגלל רציפות מתח בקבל

$$
\begin{aligned}
i\left(t\right) &= \frac{V_0}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}\\
&= \frac{V_0}{R}e^{-\frac{2t}{RC}}
\end{aligned}
$$

מתחי קבלים:

$$\begin{aligned} V_{c_1}(t) &= V_0 + \frac{1}{c_1}\int -i(t)\,dt \\ &= V_0 + \frac{V_0}{RC}\int_0^t e^{-\frac{2t}{RC}}\,dt \\ &= \frac{V_0}{2} + \frac{V_0}{2}e^{-\frac{2t}{RC}} \end{aligned}$$

אנרגיה:

$$\begin{aligned} P_R(t) &= i^2(t)\cdot R = \frac{V_0^2}{R}e^{-\frac{4t}{RC}} \\ E_R(t) &= \int_0^t P(t)\,dt \\ &= \frac{CV_0^2}{4}\left(1-e^{-\frac{4t}{RC}}\right) \\ E_R(\infty) &= \frac{CV_0^2}{4} \\ E_{C_1}(\infty) &= E_{C_2}(\infty) \\ &= \frac{1}{2}C\left(\frac{V_0}{2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{8}CV_0^2 \end{aligned}$$

$$E_{tot} = 2\frac{1}{8}CV_0^2 + \frac{1}{4}CV_0^2 = \frac{1}{2}CV_0^2$$

$i(t<0)=0$
נכתוב הפונק' בצורה מתמטית:

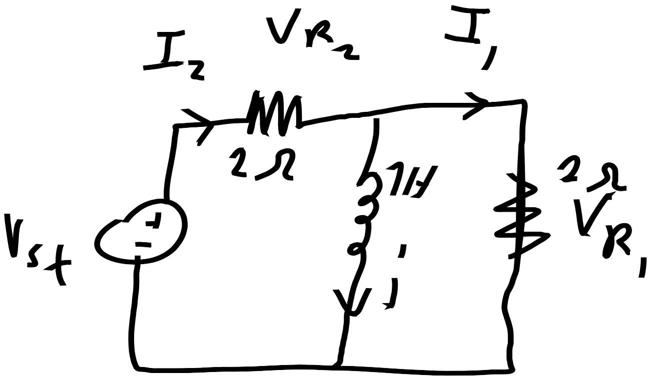
$$i(t) = u(t) + 2r(t) - 4r(t-1) + 6r(r-3) - 6r(t-4) + 6r(t-6) - \ldots$$

אזי המתח על הנגד:

$$V_r = 12\cdot[u(t) + 2r(t) - 4r(t-1) + 6r(t-3) - 6r(t-4) + 6r(t-6)\ldots]$$

מתח על סליל:

$$V_L = 2\delta(t) + 4u(t) - 8u(t-1) + 12(t-3) - 12(t-4) + 12(t-6)\ldots$$



איור 8.2: לא יודע

תנאי התחלה:

$$\begin{aligned} i\left(0^{+}\right) &= 1A \\ V_s\left(t\right) &= 10\sin\left(2t\right)u\left(t\right) \end{aligned}$$

נרשום KVL:

$$\begin{aligned} V_s &= V_L + V_{R_2} = L\frac{\partial i}{\partial t} + i_2 R_2 \\ &= L\frac{\partial i}{\partial t} + R_2 i + \frac{R_2}{R_1}V_L \\ &= L\frac{\partial i}{\partial t} + R_2 i + \frac{R_2}{R_1}L\frac{\partial i}{\partial t} \end{aligned}$$

אזי

$$i' + i = \frac{V_s}{2} = 5\sin\left(2t\right)u\left(t\right)$$

:ZIR

$$\begin{aligned} i' + i &= 0 \\ i\left(0^{+}\right) &= 1 \\ \Rightarrow i_{ZIR} &= e^{-t} \end{aligned}$$

:ZSR

$$\begin{aligned} i'+i &= 5\sin(2t)\,u(t) \\ i\left(0^{+}\right) &= 0 \\ \Rightarrow i_{ZSR} &= \left[i_p+ke^{-t}\right]u(t) \\ i_p &= a\sin(2t+\varphi)=A\sin(2t)+B\cos(2t) \end{aligned}$$

נציב במשד"פ:

$$\begin{aligned} i_{ZSR} &= \left[A\sin(2t)+B\cos(2t)+ke^{-r}\right]u(t) \\ \left[2A\cos(2t)-2B\sin 2t-ke^{-t}\right]u(t) & \\ +\left[A\sin(2t)+B\cos(2t)+ke^{-t}\right]\delta(t) &= 5\sin(2t)\cdot u(t) \\ +\left[A\sin(2t)+B\cos(2t)+ke^{-t}\right]u(t) & \end{aligned}$$

מקדמים δ:

$$\begin{aligned} A\sin 2t+B\cos 2t+ke^{-t}|_{t=0} &= 0 \\ B+k &= 0 \end{aligned}$$

מקדמי : $u(t)$

cos:

$$2A+B=0$$

sin:

$$-2B+A=5$$

נפתור ונקבל:

$$\begin{aligned} A &= 1 \\ B &= -2 \\ k &= 2 \end{aligned}$$

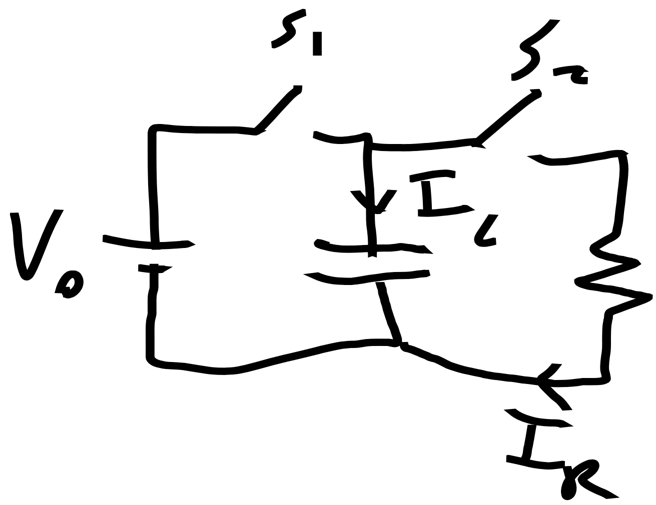
אזי

$$i_{ZSR}=\left[\sin(2t)-2\cos(2t)+2e^{-t}\right]u(t)$$

פרק 9

הרצאה מס.?

מה זה מעגל של סדר ראשון? זה מעגל שהתגובה שלהם ניתנת לתיאור על ידי משוואה דיפרנציאלית מסדר ראשון



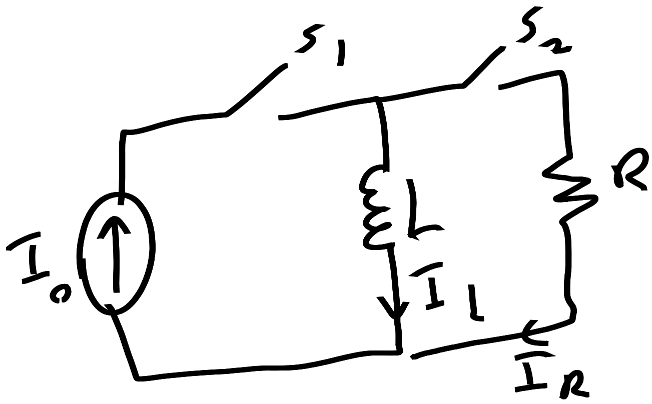
איור 9.1: מעגל נגד קבל

ב $t < 0$ המתח על הקבל הוא V_0, ב $t = 0$ פותחים את S_1 וסוגרים את S_2, כעת יש לנו מעגל של קבל ושל נגד עם תנאי התחלה $V_c\left(0^-\right) = V_0$

$$
\begin{aligned}
V_c &= V_R \\
i_c &= -i_R \\
i_c &= c\frac{\partial V_c}{\partial t} \\
i_R &= \frac{V_R}{R} = \frac{V_c}{R} = -c\frac{\partial V_c}{\partial t} \\
V_c' + \frac{1}{RC}V_c &= 0 \\
V_C\left(0\right) &= V_0 \\
V &= ke^{\beta t}
\end{aligned}
$$

נציב הפתרון במשוואה ונקבל:

$$
\begin{aligned}
\left(v_0 e^{\beta t}\right)' + \frac{1}{RC}v_0 e^{\beta t} &= 0 \\
\beta V_0 + \frac{v_0}{RC} &= 0 \\
\beta &= -\frac{1}{RC}
\end{aligned}
$$



איור 9.2: מעגל סליל נגד

$$
\begin{aligned}
V_R &= V_L \\
V_L &= L\frac{\partial I_L}{\partial t} \\
&= -L\frac{\partial I_R}{\partial t} \\
&= -\frac{L}{R}\frac{\partial V_R}{\partial t} \\
&= -\frac{L}{R}\frac{\partial V_L}{\partial t}
\end{aligned}
$$

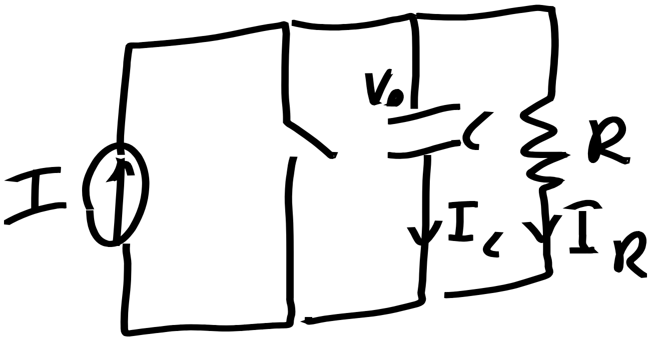
אבל המתח הוא לא רציף על סליל, אזי אי אפשר להשתמש במשוואה זו לפתור

$$\begin{aligned} V_L &= L\frac{\partial I_L}{\partial t} = I_R \cdot R = -i_L \cdot R \\ \frac{\partial I_L}{\partial t} + \frac{R}{L} I_L &= 0 \\ I_L\left(0^-\right) &= 0 \end{aligned}$$

אזי הפתרון הוא

$$I_L = I_0 e^{-t\frac{R}{L}}$$

9.1 בעית ZSR



איור 9.3: מעגל יותר מסובך

כותבים משוואות KVL:

$$\begin{aligned} V_c &= V_R = V \\ I &= I_c + I_R \\ &= c\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{V}{R} \end{aligned}$$

אזי המשוואות הם:

$$\begin{aligned} V' + \frac{1}{RC} V &= \frac{1}{C} I \\ V(0) &= 0 \end{aligned}$$

יודעים כי ב $t=0$ כל הזרם נמצא על הקבל: $I = C\frac{\partial V}{\partial t} = I_C$. ב $t=\infty$ הקבל יהיה טעון אזי כל הזרם על הנגד
פתרון של מד"ר לא הומוגינית $V = V_H + V_P$
ידועים את הפתרון ההומוגיני: $V = ke^{-\frac{t}{RC}}$
את הפתרון הפרטי מנחשים אותו, הוא יראה בערך כמו החלק הלא הומוגיני של המשוואה: $V_p = A$

$$\begin{aligned} V_p' + \frac{1}{RC}V_P &= \frac{I}{C} \\ A &= IR \end{aligned}$$

מסיגים את k של הפתרון ההומוגיני על ידי הצבת הפתרון(כולו) בתנאי ההתחלה:

$$\begin{aligned} V_p(0) + V_H(0) &= 0 \\ k &= -IR \\ V &= IR\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) \end{aligned}$$

נחזור על אותה בעיה עם מקור זרם המשתנה בזמן

$$I(t) = I_0 \cos(\omega t)$$

צורת הפתרון ההומוגיני לא משתנה $V_H = k_2 e^{-\frac{t}{RC}}$ הפתרון ההומוגיני יהיה מה-צורה $V_p = \gamma \cos(\omega t + \phi)$

$$\begin{aligned} V' + \frac{1}{RC}V &= I_0 \cos \omega t \\ V_P &= A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) \\ (A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t))' + \frac{1}{RC}(A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)) &= I_0 \cos \omega t \\ \left(B\omega + \frac{A}{RC}\right)\cos(\omega t) + \left(\frac{B}{RC} - A\omega\right)\sin(\omega t) &= I_0 \cos \omega t \\ A &= \frac{B}{RC\omega} \\ B\omega + \frac{A}{RC} &= \frac{I_0}{C} \\ B &= \frac{I_0 R^2 C\omega}{1 + (RC\omega)^2} \\ A &= \frac{I_0 R}{1 + (RC\omega)^2} \end{aligned}$$

אזי

$$V_p = \frac{I_0 R}{1 + (RC\omega)^2}\cos(\omega t) + \frac{I_0 R^2 C\omega}{1 + (RC\omega)^2}\sin(\omega t)$$

מציבים בתנאי התחלה ומקבלים:

$$k_2 = -\frac{I_0 R}{1 + (RC\omega)^2}$$

אזי הפתרון הוא:

$$V_{ZSR} = \left[-\frac{I_0 R}{1 + (RC\omega)^2} e^{-\frac{t}{RC}} + \frac{I_0 R}{1 + (RC\omega)^2} \cos(\omega t) + \frac{I_0 R^2 C\omega}{1 + (RC\omega)^2} \sin(\omega t) \right] u(t)$$

9.2 ליניאריות של תגובת ZSR

עבור מעגלים חשמליים בעלי ליניאריים יש קשר ליניארי בין העירור(המבוא) לבין המוצא, כלומר תגובת ZSR היא ליניארית לכן ניתן להשתמש בסופר פוזיציה. אם נסמן $y = H(x)$ כאשר x כניסה y תגובת המערכת (המוצא) אזי המערכת ליניארית אם מתקיים$H(ax) = aH(x), H(x_1 + x_2) = H(x_1) + H(x_2)$

אי תלות בזמן של ZSR.

עבור מקור מופעל ברגע מסויים למשל $t = 0$ מתקבלות תגובה מסויימת. עבור אותו מקור המופעל בזמן אחר $t = \tau$ נקבל אותה תגובה אבל מוזזת בזמן(למשל מוזזת ב τ)

פרק 10

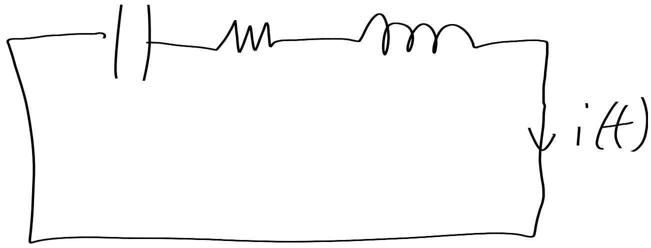
תרגול מס.?

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+2\alpha\frac{\partial y}{\partial t}+\omega_0^2 y=f\left(t\right)$$

עם תנאי התחלה $y\left(0\right)=y_0$ ו $\dot{y}\left(0\right)=0$
כאשר α קבוע הריסון ו ω_0 היא התדירות האופינית
נגדיר גורם האיכות $Q=\frac{\omega_0}{2a}$
הפתרון:

$$y=y_{zsr}+y_{zir}=\left(y_p+y_{h_0}\right)u\left(t\right)+y_{h_2}$$

כאשר y_p דומה לעירור $y_h=e^{st}$
אם מציבים את זה מקבלים המשוואה האופינית של המעגל
.....
מקרה ראשון: 2 שורשים ממשיים ושליליים
$Q<\frac{1}{2},\alpha>\omega_0$
$y_h=Ae^{s_1 t}+Be^{s_2 t}$
זה נקרא ריסון יתר, אין תנודות במעגל זה.
מקרה שני: 2 שורשים ממשיים שליליים וזהים
$\alpha=\omega_0,Q=\frac{1}{2}$
$s_1=s_2=-\alpha t$
$y_h=Ae^{s_1 t}+Ate^{s_1 t}$
זה נקרא ריסון קריטי
מקרה שלישי: שני שורשים מורכבים
$a<\omega_0,Q>\frac{1}{2}$ מקבלים $\omega_d=\sqrt{\omega_0^2-\alpha^2}$, $s_{1,2}=-\alpha\pm i\omega_d$
$y_h=e^{-\alpha t}\left(A\sin\left(\omega_d t\right)+B\cos\left(\omega_d t\right)\right)=ke^{-\alpha t}\cos\left(\omega_d t+\varphi\right)$
כלומר תנודות דועכות, זה נקרא תת-ריסון. התנודות הם בעלות זמן מחזור $T=\frac{2\pi}{\omega_d}$
מצב רביעי: 2 שורשים דמיוניים טהורים
$Q\to\infty,\alpha\to 0$
$S_{1,2}=\pm i\omega_0$
$y_h=A\sin\left(\omega_0 t\right)+B\cos\left(\omega_0 t\right)=k\cos\left(\omega_0 t+\varphi\right)$



איור 10.1: מעגל

דרישה: $Q=\frac{1}{2}$. **נתון:** $c=\frac{1}{3}f, \omega_0=12\frac{rad}{sec}$ **ותנאי התחלה:** $V_c\left(0^-\right)=-1V, i\left(0^-\right)=2A$

המשוואה הכללית:

$$y''+2\alpha y'+\omega_0^2 y=f\left(t\right)$$

נפתור דרך kvl:

$$\begin{aligned}
V_c+V_R+V_L &= 0\\
V_C\left(0^-\right)+\frac{1}{c}\int idt+iR+L\frac{\partial i}{\partial t} &= 0\\
i''+\frac{R}{L}i'+\frac{1}{LC}i &= 0\\
2\alpha &= \frac{R}{L}\\
\omega_0 &= \frac{1}{LC}\\
\Rightarrow L &= \frac{1}{\omega_0^2 c}=\frac{1}{48}H
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q &= \frac{1}{2}=\frac{\omega_0}{2\alpha}\\
\Rightarrow \alpha &= \omega_0=12\\
R &= 2\alpha L\\
&= \frac{1}{2}\Omega
\end{aligned}$$

אזי

$$i''=24i'+144i=0$$

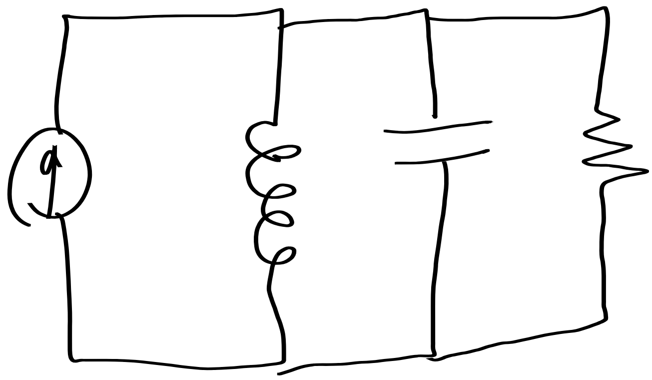
נפתור הפולינום האופייני:

$$
\begin{aligned}
P(s) &= s^2+24+144=0 \\
S_{1,2} &= -12
\end{aligned}
$$

אזי הפתרון:

$$i_{ZIR}=Ae^{-12t}+Bte^{-12t}$$

עוד שאלה



איור 10.2:

רוצים לקבל את תגובת הזרם למדרגה. אזי מעננין אותנו ZSR(כי ZIR לא תלוי במקורות)

נתון: $L=20mH, R=0.125\Omega, c=0.5F$

$$
\begin{aligned}
KCL: i_s &= i_L+i_c+i_R \\
i_s &= \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t}V(t)\,dt+C\frac{dV}{dt}+\frac{V}{R} \\
\frac{1}{c}i_s' &= v''+16v'+\frac{1}{LC}v
\end{aligned}
$$

אזי:

$$
\begin{aligned}
v''+16v'+100v &= 2\delta(t) \\
v(0) &= v'(0)=0
\end{aligned}
$$

יש שתי דרכים לפתור את זה: או שפותרים עבור מדרגה וגוזרים או שעושים אינט-גרל ופותרים

$$\begin{aligned}\int_{0^-}^{0^+} v'' + 16\int_{0^-}^{0^+} + 100\int_{0^-}^{0^+} v &= 2\int_{0^-}^{0^+} \delta(t)\\ \left[v'\left(0^+\right) - v'\left(0^-\right)\right] + 16\left[v\left(0^+\right) - v\left(0^-\right)\right] + 0 &= 2\\ v'\left(0^+\right) + 16v\left(0^+\right) &= 2\end{aligned}$$

עושים שיקולי איזון אי רציפות ומקבלים $v(0^+) = 0, v^{'}(0^+) = 2$

$$\begin{aligned}P(s) &= S^2 + 16s + 100 = 0\\ s &= -8 \pm 6j\\ v &= e^{-8t}\left(A\cos(6t) + B\sin(6t)\right)u(t)\\ v(0) &\Rightarrow A = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}v'\left(0^+\right) &= \frac{\partial}{\partial t}\left[e^{-8t}B\sin(6t)\cdot u(t)\right]\\ &= B\left[-8e^{-8t}\sin(6t)u(t) + 6e^{-8t}\cos(6t)\right]u(t) + 0\delta(t)\\ 6B &= 2\\ B &= \frac{1}{3}\\ V_{ZSR} &= \frac{1}{3}e^{-8t}\sin(6t)u(t)\end{aligned}$$

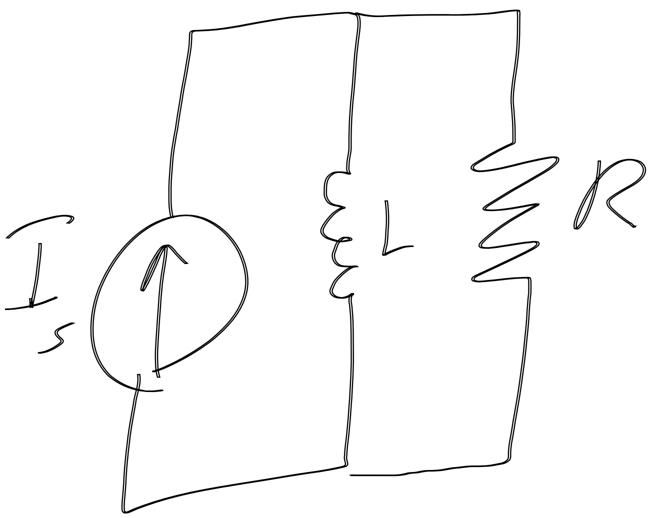
תגובת הלם:

$$v'' + 16v' + 100v = 2i_s' = 2\delta'(t)$$

מכיוון ש $u'(t) = \delta(t)$ נגזור הפתרון שהיה לנו ומקבלים את הפתרון של זה.

פרק 11

הרצאה מס.?



איור 11.1: מעגל

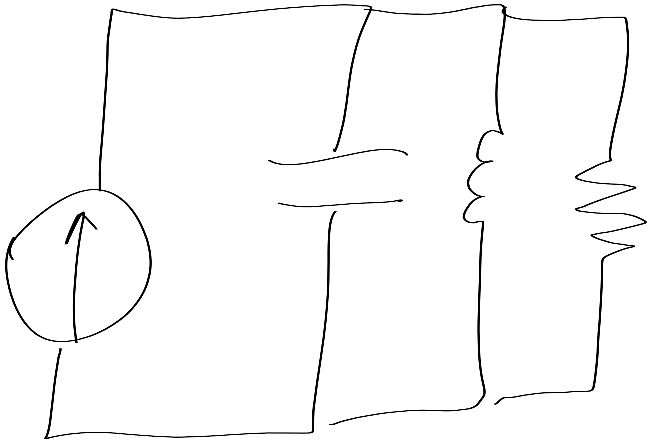
מצא $v\left(t\right)$ עבור $I_s\left(t\right)=I_su\left(t\right)$
משוואות KVL:

$$
\begin{aligned}
Li_L' &= i_RR\\
i_s &= i_R+i_L\\
i_L\left(t\right)+\frac{L}{R}i_L' &= I_su\left(t\right)\\
i_L'+\frac{R}{L}i_L &= \frac{R}{L}I_su\left(t\right)\\
i_L\left(t\right) &= I_s\left(1-e^{-\frac{R}{L}t}\right)u\left(t\right)\\
v_L\left(t\right) &= Li_L'\\
&= Re^{-\frac{R}{L}t}I_su\left(t\right)
\end{aligned}
$$

11.1 מעגל מסדר שני

הוא מעגל שהתגובה שלו(גם מתח וגם זרם) ניתן לניתוח על ידי מד"ר מסר שני.

11.1.1 מעגל RLC מקבילי



איור 11.2: RLC מקבילי

מתח: $V_R = V_C = V_L = V$
זרם: $I_s = i_r + i_c + Ll$
קשרי מתח זרם:

$$\begin{aligned} I_R &= \frac{V_R}{R} \\ I_L &= i_L(0) + \frac{1}{L}\int_0^t V_L(t')\,dt' \\ I_c &= C \cdot V_c' \end{aligned}$$

מציבים:

$$\begin{aligned} CV_C' + i_L(0) + \frac{1}{L}\int_0^t V\,dt + \frac{V}{R} &= I_s \\ V'' + \frac{1}{RC}V' + \frac{1}{LC}V &= \frac{1}{C}i_s' \end{aligned}$$

כדי לפתור את זה צריכים שתי תנאי התחלה. לפעמים לא יהיה נתון לנו שני תנאים אבל אפשר להסיק את התנאי השני מרציפות המתח או הזרם.

פרק 12

תרגול מה.?

12.1 שיטת S למציאת מד"ר

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{y\left(t\right)\right\} &= y\left(s\right)=\int_{-\infty}^{\infty}y\left(t\right)e^{-st}dt \\
\mathcal{L}\left(\frac{\partial y\left(t\right)}{\partial y}\right) &= s\cdot y\left(s\right) \\
\mathcal{L}\left(\int y\left(t\right)dt\right) &= \frac{1}{s}y\left(s\right)
\end{aligned}$$

	מישוא t	מישור s
נגד	$V=i\left(t\right)R$	$V\left(s\right)=i\left(s\right)\cdot R$
קבל	$V=\frac{1}{C}\int i\left(t\right)dt$	$V=\frac{1}{CS}I\left(s\right)$
סליל	$V=L\frac{\partial i(t)}{\partial t}$	$V\left(s\right)=LsI\left(s\right)$

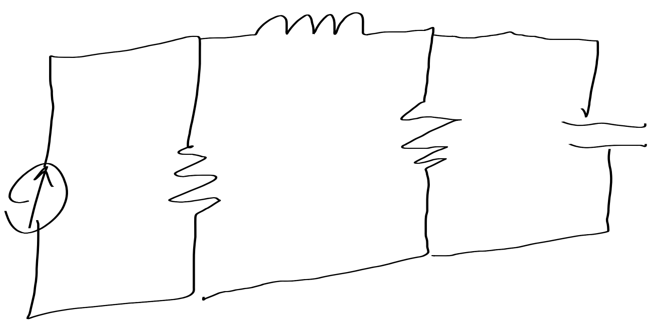
טבלה 12.1: קשר בין מישוא s ומישור t

במישור S המתח הוא תמיד פונק ליניארית של הזרם.

איור 12.1: דוגמה למעגל

$$\begin{aligned}
L &= 2H \\
C &= 3F \\
R_1 &= 2\Omega \\
E_2 &= 4\Omega \\
V_c\left(0^-\right) &= 8V \\
i_c\left(0^-\right) &= 3A
\end{aligned}$$

צריכים להעביר המעגל למקור זרם אזי:



איור 12.2: זרם

$$\begin{aligned}
G\cdot V &= I\\
\begin{pmatrix} \frac{1}{R_1}+\frac{1}{LS} & -\frac{1}{LS}\\ -\frac{1}{LS} & \frac{1}{R_2}+cs+\frac{1}{LS}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} v_1\left(s\right)\\ v_2\left(s\right)\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}\frac{V_s(s)}{R_1}\\ 0\end{pmatrix}\\
V_c &= V_2\\
&= \frac{{}^{V_S}\!\big/_{R_1 SL}}{\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{sL}\right)\left(\frac{1}{R_2}+\frac{1}{Ls}+sC\right)-\frac{1}{s^2L^2}}
\end{aligned}$$

את פותרים:

$$\begin{aligned}
V_c\left(s\right) &= \frac{V_s\left(s\right)}{\frac{sL}{E_2}+1+\frac{R_1}{R_2}+\frac{R_1}{Ls}+s^2CL+SCR-\frac{R_1}{Ls}}\\
&= \frac{{}^{V_s(s)}\!\big/_{CL}}{s^2+\left(\frac{1}{R_2C}+\frac{R_1}{L}\right)s+\frac{1}{LC}\left(1+\frac{R_1}{R_2}\right)}\\
&= s^2+\left(\frac{1}{R_2C}+\frac{R_1}{L}\right)s+\frac{1}{LC}\left(1+\frac{R_1}{R_2}\right)V_c\left(s\right)=\frac{1}{LC}V_s\left(s\right)
\end{aligned}$$

אזי

$$V_c''\left(t\right)+\left(\frac{1}{R_2C}+\frac{R_1}{L}\right)V_c'\left(t\right)+\frac{1}{LC}\left(1+\frac{R_1}{R_2}\right)V_c\left(t\right)=\frac{1}{LC}V_s\left(t\right)$$

פותרים:

$$\begin{aligned}
V_c''+\frac{13}{12}V_c'+\frac{1}{4}V_C &= \frac{1}{6}V_s\\
\omega_0 &= \frac{1}{2}\\
2\alpha &= \frac{13}{12}\\
Q &= \frac{\omega_0}{2\alpha}=\frac{6}{3}<\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

אנחנו בתחום של ריסון יתר.
מציאת תנאי ההתחלה

$$\begin{aligned}
I_L\left(0^-\right) &= \frac{V_c\left(0^-\right)}{R_2}+CV_C'\left(0^-\right)\\
V_c'\left(0^-\right) &= \frac{i_L\left(0^-\right)-{}^{V_c}\!\big/_{R_2}}{C}\\
V_c'\left(0^-\right) &= \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

:ZIR

$$\begin{aligned}
P(s) &= s^2+\frac{13}{12}s+\frac{1}{4}=0\\
S_{1,2} &= -\frac{1}{3},-\frac{3}{4}\\
V_c^{ZIR} &= Ae^{-\frac{1}{3}t}+Be^{-\frac{3}{4}t}\\
A+B &= 8\\
\frac{1}{3}A-\frac{3}{4}B &= \frac{1}{3}\\
\Rightarrow V_C^{ZIR} &= 15.2e^{-\frac{t}{3}}-7.2e^{-\frac{-t}{4}}
\end{aligned}$$

:ZSR

$$\begin{aligned}
V_c''+\frac{13}{12}V_c'+\frac{1}{4}V_c &= \overbrace{\frac{1}{6}}^{\frac{1}{LC}V_s}(1+2t)\,u(t)\\
V_p &= a+bt\\
V_C^{ZSR} &= (V_p+V_h)\,u(t)\\
&= \left[a+bt+Ae^{-\frac{t}{3}}+Be^{-\frac{3t}{4}}\right]u(t)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{13}{12}b+\frac{1}{4}a+\frac{1}{4}bt &= \frac{1}{c}(1+2t)\\
\Rightarrow a &= -5\frac{1}{9}\\
b &= \frac{4}{3}\\
V_c^{ZSR} &= \left(-5\frac{1}{9}+\frac{3}{4}t+Ae^{-\frac{t}{3}}+Be^{-\frac{3t}{4}}\right)u(t)\\
V_C\left(0^+\right):\ -5\frac{1}{9}+A+B &= 0\\
V_C'\left(0^+\right):\ \frac{4}{3}-\frac{1}{3}A-\frac{3}{4}B &= 0\\
A &= 6\\
B &= -\frac{8}{9}
\end{aligned}$$

אזי

$$\begin{aligned}
V_c^{ZSR}(t) &= \left[-5\frac{1}{9}+\frac{4}{3}t+6e^{-\frac{t}{3}}-\frac{8}{9}e^{-\frac{3t}{4}}\right]u(t)\\
V_c(t) &= V_C^{ZIR}+V_C^{ZSR}
\end{aligned}$$

12.2 פתרון מעגל מסדר שלישי

$$
\begin{aligned}
V_c''' + 4V_c''' + 6V_c'' + 4V_C &= 0 \\
s^3 + 4^2 + 6s + 4 &= 0 \\
S_{1,2} &= -2 \\
S_{2,3} &= -1 \pm j \\
V_c &= Ae^{-2t} + e^{-t}\left[B\sin(t) + C\cos(t)\right]
\end{aligned}
$$