תרגיל מס.7

עפיף חלומה, 302323001

22 בדצמבר 2009

$$\begin{aligned} F_{spring} &= -kx \\ F_{friction} &= -\beta v \\ F_{ext} &= A\cos(\omega_1 t) + B\sin(\omega_2 t) \end{aligned}$$

אזי

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -kx - \beta\dot{x} + A\cos(\omega_1 t) + B\sin(\omega_2 t) \\ \ddot{x} + \frac{\beta}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x &= \frac{A}{m}\cos(\omega_1 t) + \frac{B}{m}\sin(\omega_2 t) \end{aligned}$$

נפתור משוואה הומוגינית:

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \frac{\beta}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x &= 0 \\ r^2 + \frac{\beta}{m}r + \frac{k}{m} &= 0 \\ r_{1,2} &= \frac{-\frac{\beta}{m} \pm \sqrt{\frac{\beta^2}{m^2} - 4\cdot\frac{k}{m}}}{2} \\ &= \frac{-2\frac{\beta}{2m} \pm \sqrt{4\frac{\beta^2}{4m^2} - 4\frac{k}{m}}}{2} \\ &= -\frac{\beta}{2m} \pm \sqrt{\frac{\beta^2}{4m^2} - \frac{k}{m}} \end{aligned}$$

אנחנו אמורים להניח ריסון חלש אזי $\frac{\beta^2}{4m^2} < \frac{k}{m}$ אזי אנחנו מקבלים מזה מספרים מורכבים

$$r_{1,2} = -\frac{\beta}{2m} \pm i\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\beta^2}{4m^2}}$$

נסמן $\omega^* = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\beta^2}{4m^2}}$ אזי

$$r_{1,2} = -\frac{\beta}{2m} \pm i\omega^*$$

אזי הפתרון של המשוואה ההומוגינית הוא

$$\begin{aligned} x(t) &= Je^{t\left(-\frac{\beta}{2m}+i\sqrt{\frac{k}{m}-\frac{\beta^2}{4m^2}}\right)} + Ke^{t\left(-\frac{\beta}{2m}-i\sqrt{\frac{k}{m}-\frac{\beta^2}{4m^2}}\right)} \\ &= e^{-\frac{\beta}{2m}t}\left(Je^{ti\sqrt{\frac{k}{m}-\frac{\beta^2}{4m^2}}} + Ke^{t\left(-i\sqrt{\frac{k}{m}-\frac{\beta^2}{4m^2}}\right)}\right) \\ &= e^{-\frac{\beta}{2m}t}\left(J\sin\left(t\sqrt{\frac{k}{m}-\frac{\beta^2}{4m^2}}\right) + K\cos\left(t\sqrt{\frac{k}{m}-\frac{\beta^2}{4m^2}}\right)\right) \end{aligned}$$

אזי נמצא את הפתרון הפרטי של המשוואה

$$\ddot{x} + \frac{\beta}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{A}{m}\cos(\omega_1 t) + \frac{B}{m}\sin(\omega_2 t)$$

ננחש פתרון $x = L\cos(\omega_1 t + \delta) + N\cos(\omega_2 t + \phi)$ אזי

$$\begin{array}{c} -L\omega_1^2\cos(\omega_1 t+\delta) - N\omega_2^2\cos(\omega_2 t+\phi) + \\ \frac{\beta}{m}\left(-L\omega_1\sin(\omega_1 t+\delta) - N\omega_2\sin(\omega_2 t+\phi)\right) + \\ \frac{k}{m}\left(L\cos(\omega_1 t+\delta) + N\cos(\omega_2 t+\phi)\right) \end{array} = \frac{A}{m}\cos(\omega_1 t) + \frac{B}{m}\cos\left(\frac{\pi}{2} - \omega_2 t\right)$$

אזי אפשר להפריד לשני משוואות: איברים תלויים בω_1 ואיברים תלויים בω_2, ומקבלים אותו פתרון שקיבלנו בכיתה שזה

$$\begin{aligned} -L\omega_1^2\cos(\omega_1 t+\delta) + \frac{\beta}{m}L\omega_1\sin(\omega_1 t+\delta) + \frac{k}{m}L\cos(\omega_1 t+\delta) &= \frac{A}{m}\cos(\omega_1 t) \\ -L\omega_1^2\cos(\omega_1 t) + \frac{\beta}{m}L\omega_1\sin(\omega_1 t) + \frac{k}{m}L\cos(\omega_1 t) &= \frac{A}{m}\cos(\omega_1 t+\delta) \\ \frac{k}{m}L\cos(\omega_1 t) - L\omega_1^2\cos(\omega_1 t) + \frac{\beta}{m}L\omega_1\sin(\omega_1 t) &= \frac{A}{m}\cos(\omega_1 t+\delta) \\ L\left(\left(\frac{k}{m} - \omega_1^2\right)\cos(\omega_1 t) + \frac{\beta}{m}\omega_1\sin(\omega_1 t)\right) &= \frac{A}{m}\cos(\omega_1 t+\delta) \end{aligned}$$

אזי מקבלים כי

$$\begin{aligned}L &= \frac{\frac{A}{m}}{\sqrt{\left(\frac{k}{m}-\omega_1^2\right)^2+\left(\frac{\beta}{m}\omega_1\right)^2}}\\ \tan\delta &= \frac{\left(\frac{\beta}{m}\omega_1\right)}{\left(\frac{k}{m}-\omega_1^2\right)}\end{aligned}$$

עבור המשוואה של ω_2 מקבלים

$$\begin{aligned}N &= \frac{\frac{B}{m}}{\sqrt{\left(\frac{k}{m}-\omega_2^2\right)^2+\left(\frac{\beta}{m}\omega_2\right)^2}}\\ \tan\left(\frac{\pi}{2}+\phi\right) &= \frac{\left(\frac{\beta}{m}\omega_2\right)}{\left(\frac{k}{m}-\omega_2^2\right)}\end{aligned}$$

הפתרון השלם הוא:

$$x(t) = \begin{array}{c} e^{-\frac{\beta}{2m}t}\left(J\sin\left(t\sqrt{\frac{k}{m}-\frac{\beta^2}{4m^2}}\right)+K\cos\left(t\sqrt{\frac{k}{m}-\frac{\beta^2}{4m^2}}\right)\right)+ \\ \frac{\frac{A}{m}}{\sqrt{\left(\frac{k}{m}-\omega_1^2\right)^2+\left(\frac{\beta}{m}\omega_1\right)^2}}\cos\left(\omega_1 t+\frac{\left(\frac{\beta}{m}\omega_1\right)}{\left(\frac{k}{m}-\omega_1^2\right)}\right)+ \\ \frac{\frac{B}{m}}{\sqrt{\left(\frac{k}{m}-\omega_2^2\right)^2+\left(\frac{\beta}{m}\omega_2\right)^2}}\cos\left(\omega_2 t+\frac{\left(\frac{\beta}{m}\omega_2\right)}{\left(\frac{k}{m}-\omega_2^2\right)}\right)\end{array}$$

1. אם הגוף מתחיל את תנועתו מנקודת $x=0$ אזי

$$\begin{aligned}x(0) &= \begin{array}{l} k+ \\ \frac{\frac{A}{m}}{\sqrt{\left(\frac{k}{m}-\omega_1^2\right)^2+\left(\frac{\beta}{m}\omega_1\right)^2}}\cos\left(\frac{\left(\frac{\beta}{m}\omega_1\right)}{\left(\frac{k}{m}-\omega_1^2\right)}\right)+ \\ \frac{\frac{B}{m}}{\sqrt{\left(\frac{k}{m}-\omega_2^2\right)^2+\left(\frac{\beta}{m}\omega_2\right)^2}}\cos\left(\frac{\left(\frac{\beta}{m}\omega_2\right)}{\left(\frac{k}{m}-\omega_2^2\right)}\right)\end{array}\\ k &= \frac{-\frac{A}{m}}{\sqrt{\left(\frac{k}{m}-\omega_1^2\right)^2+\left(\frac{\beta}{m}\omega_1\right)^2}}\cos\left(\frac{\left(\frac{\beta}{m}\omega_1\right)}{\left(\frac{k}{m}-\omega_1^2\right)}\right)-\frac{\frac{B}{m}}{\sqrt{\left(\frac{k}{m}-\omega_2^2\right)^2+\left(\frac{\beta}{m}\omega_2\right)^2}}\cos\left(\frac{\left(\frac{\beta}{m}\omega_2\right)}{\left(\frac{k}{m}-\omega_2^2\right)}\right)\end{aligned}$$

לכן

$$x(t) = \begin{array}{c} e^{-\frac{\beta}{2m}t}\cdot J\sin\left(t\sqrt{\frac{k}{m}-\frac{\beta^2}{4m^2}}\right)+ \\ \frac{\frac{A}{m}}{\sqrt{\left(\frac{k}{m}-\omega_1^2\right)^2+\left(\frac{\beta}{m}\omega_1\right)^2}}\cos\left(\omega_1 t+\frac{\left(\frac{\beta}{m}\omega_1\right)}{\left(\frac{k}{m}-\omega_1^2\right)}\right)+ \\ \frac{\frac{B}{m}}{\sqrt{\left(\frac{k}{m}-\omega_2^2\right)^2+\left(\frac{\beta}{m}\omega_2\right)^2}}\cos\left(\omega_2 t+\frac{\left(\frac{\beta}{m}\omega_2\right)}{\left(\frac{k}{m}-\omega_2^2\right)}\right) \end{array}$$

אם הגוף מתחיל ממירות אפס אזי

$$\begin{aligned} v(t) &= \begin{array}{c} -\frac{\beta}{2m}e^{-\frac{\beta}{2m}t}\cdot J\sin\left(t\sqrt{\frac{k}{m}-\frac{\beta^2}{4m^2}}\right)+e^{-\frac{\beta}{2m}t}\cdot J\sqrt{\frac{k}{m}-\frac{\beta^2}{4m^2}}\cos\left(t\sqrt{\frac{k}{m}-\frac{\beta^2}{4m^2}}\right)+ \\ \frac{\frac{A}{m}}{\sqrt{\left(\frac{k}{m}-\omega_1^2\right)^2+\left(\frac{\beta}{m}\omega_1\right)^2}}\omega_1\sin\left(\omega_1 t+\frac{\left(\frac{\beta}{m}\omega_1\right)}{\left(\frac{k}{m}-\omega_1^2\right)}\right)+ \\ \frac{\frac{B}{m}}{\sqrt{\left(\frac{k}{m}-\omega_2^2\right)^2+\left(\frac{\beta}{m}\omega_2\right)^2}}\omega_1\sin\left(\omega_2 t+\frac{\left(\frac{\beta}{m}\omega_2\right)}{\left(\frac{k}{m}-\omega_2^2\right)}\right) \end{array} \\ 0 &= \begin{array}{c} -\frac{\beta}{2m}\cdot 1\cdot J\cdot 0+1\cdot J\sqrt{\frac{k}{m}-\frac{\beta^2}{4m^2}}\cdot 1+ \\ \frac{\frac{A}{m}}{\sqrt{\left(\frac{k}{m}-\omega_1^2\right)^2+\left(\frac{\beta}{m}\omega_1\right)^2}}\omega_1\cdot 0+ \\ \frac{\frac{B}{m}}{\sqrt{\left(\frac{k}{m}-\omega_2^2\right)^2+\left(\frac{\beta}{m}\omega_2\right)^2}}\omega_1\cdot 0 \end{array} \\ 0 &= J\sqrt{\frac{k}{m}-\frac{\beta^2}{4m^2}} \\ J &= 0 \end{aligned}$$

2. כבר רואים(אחרי שפתרנו סעיף קודם) כי אם $v(0)=0$ אזי $J=0$.

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \begin{array}{c} e^{-\frac{\beta}{2m}t}\cdot K\cos\left(t\sqrt{\frac{k}{m}-\frac{\beta^2}{4m^2}}\right)+ \\ \frac{\frac{A}{m}}{\sqrt{\left(\frac{k}{m}-\omega_1^2\right)^2+\left(\frac{\beta}{m}\omega_1\right)^2}}\cos\left(\omega_1 t+\frac{\left(\frac{\beta}{m}\omega_1\right)}{\left(\frac{k}{m}-\omega_1^2\right)}\right)+ \\ \frac{\frac{B}{m}}{\sqrt{\left(\frac{k}{m}-\omega_2^2\right)^2+\left(\frac{\beta}{m}\omega_2\right)^2}}\cos\left(\omega_2 t+\frac{\left(\frac{\beta}{m}\omega_2\right)}{\left(\frac{k}{m}-\omega_2^2\right)}\right) \end{array} \\
x(t=0) &= x_0 \\
\begin{array}{c} K+ \\ \frac{\frac{A}{m}}{\sqrt{\left(\frac{k}{m}-\omega_1^2\right)^2+\left(\frac{\beta}{m}\omega_1\right)^2}}\cos\left(\frac{\left(\frac{\beta}{m}\omega_1\right)}{\left(\frac{k}{m}-\omega_1^2\right)}\right)+ \\ \frac{\frac{B}{m}}{\sqrt{\left(\frac{k}{m}-\omega_2^2\right)^2+\left(\frac{\beta}{m}\omega_2\right)^2}}\cos\left(\frac{\left(\frac{\beta}{m}\omega_2\right)}{\left(\frac{k}{m}-\omega_2^2\right)}\right) \end{array} &= x_0 \\
k &= \begin{array}{c} x_0- \\ \frac{\frac{A}{m}}{\sqrt{\left(\frac{k}{m}-\omega_1^2\right)^2+\left(\frac{\beta}{m}\omega_1\right)^2}}\cos\left(\frac{\left(\frac{\beta}{m}\omega_1\right)}{\left(\frac{k}{m}-\omega_1^2\right)}\right)- \\ \frac{\frac{B}{m}}{\sqrt{\left(\frac{k}{m}-\omega_2^2\right)^2+\left(\frac{\beta}{m}\omega_2\right)^2}}\cos\left(\frac{\left(\frac{\beta}{m}\omega_2\right)}{\left(\frac{k}{m}-\omega_2^2\right)}\right) \end{array}
\end{aligned}
$$

3. כן כי ההבדל בין שתי התשובות זה K,J שהם מוכפלים ב $e^{-\alpha t}$ שזה שואף לאפס.

4. נקבל עוד איברים לא דועכים בסוף

5. צריכים לצייר

$$
\begin{array}{c} -\frac{\beta}{2m}e^{-\frac{\beta}{2m}t}\left(\text{something}\right) \\ \frac{\frac{A}{m}}{\sqrt{\left(\frac{k}{m}-\omega_1^2\right)^2+\left(\frac{\beta}{m}\omega_1\right)^2}}\cos\left(\frac{\left(\frac{\beta}{m}\omega_1\right)}{\left(\frac{k}{m}-\omega_1^2\right)}\right)+ \\ \frac{\frac{B}{m}}{\sqrt{\left(\frac{k}{m}-\omega_2^2\right)^2+\left(\frac{\beta}{m}\omega_2\right)^2}}\cos\left(\frac{\left(\frac{\beta}{m}\omega_2\right)}{\left(\frac{k}{m}-\omega_2^2\right)}\right) \end{array}
$$

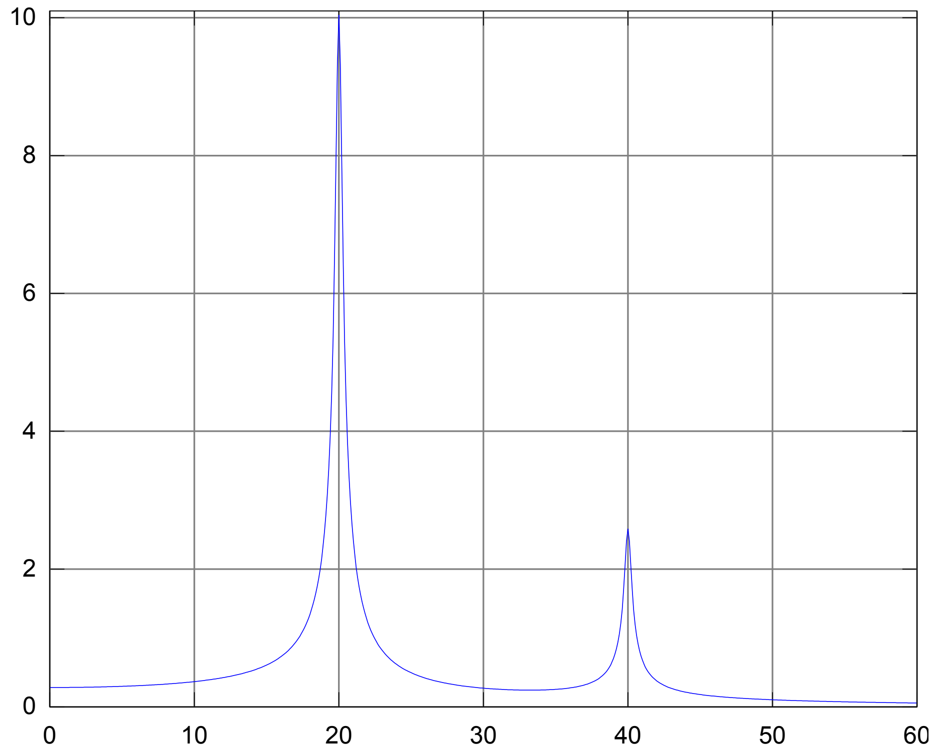
אחרי זמן רב האיבר הראשון מתאפס. נציר את האמפליטודה המקסימאלית שמתקבלת בזמן מסויים t' שבו $\cos\left(\frac{\left(\frac{\beta}{m}\omega_1\right)}{\left(\frac{k}{m}-\omega_1^2\right)}\right)=\cos\left(\frac{\left(\frac{\beta}{m}\omega_2\right)}{\left(\frac{k}{m}-\omega_2^2\right)}\right)$ אזי רוצים לצציר

$$
A=\frac{\frac{A}{m}}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega_1^2\right)^2+\left(\frac{\beta}{m}\omega_1\right)^2}}+\frac{\frac{B}{m}}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega_2^2\right)^2+\left(\frac{\beta}{m}\omega_2\right)^2}}
$$

אם מציבים ערכים באופן הבא:

$$A=\frac{100}{\sqrt{\left(\omega_0^2-20^2\right)^2+10^2}}+\frac{50}{\sqrt{\left(\omega_0^2-40^2\right)+20^2}}$$

מקבלים את הצורה הזו:



6. זה לדעתי נכון? לדעתי זה יתפוצץ! האמת שנראה לי שכל פומקציה מחזורית אפשר לבנות אותה כהרכבה של $A_i\cos\left(\omega_i t+\varphi_i\right)$ אזי הפתרון שלנו תקף