תרגיל מס.5

30 באפריל 2009

שם התלמיד	עפיף חלומה
מס' ת"ז	302323001
שם המתרגל	מר מתן פרזמה
קבוצת תרגול	
יום ג'	שעה $10:00-11:45$

טבלה 1: טבלת מידע אישי

חלק I
גבולות

1 שאלה 1

$$f(x)=\lfloor x\rfloor$$

אזי רוצים להוכיח כי הגבול $\lim_{x\to a^-} f(x)=a-1$ ו $\lim_{x\to a^+} f(x)=a$ במספרים השלמים ו $\lim_{x\to a} f(x)=\lfloor a\rfloor$ אחרת

מכיוון מדברים על $\lim_{x\to a^\pm}$ אני מניח שלא רוצים שנוכיח את האחרון

1.1 $\lim_{x\to a^-} f(x)=a-1$

צריך להוכיח כי לכל $\varepsilon>0$ קיים δ כך שאם $-\delta<x-a<0$ אזי $|f(x)-(a-1)|<\varepsilon$

נניח כי $\delta=1$ אזי צ"ל כי אם $-1<x-a<0$ אזי $|f(x)-(a-1)|<\varepsilon$. אם a מספר שלם אז $-1<x-a<0$ פירושו ש $a-1<x<a$ כלומר $\lfloor x\rfloor=a-1$ אזי $|f(x)-(a-1)|=|(a-1)-(a-1)|=0<\varepsilon$

1.2 $\lim_{x\to a^+} f(x)=a$

צריך להוכיח כי לכל $\varepsilon>0$ קיים δ כך שאם $0<x-a<\delta$ אזי $|f(x)-(a-1)|<\varepsilon$

נניח כי $\delta=1$ אזי צ"ל כי אם $0<x-a<1$ אזי $|f(x)-(a)|<\varepsilon$. אם a מספר שלם אז $0<x-a<1$ פירושו ש $a<x<a+1$ כלומר $\lfloor x\rfloor=a$ אזי $|f(x)-(a)|=|(a)-(a)|=0<\varepsilon$

חלק II
רציפות

2 שאלה 2

2.1 אם f רציפה את $|f|$ רציפה

מחלקים ל3 מקרים:

1. $f(x) > 0$

מרציפות נובע כי $\forall \lim_{x\to a}|f(x)| = f(a)$. אם $f(x) > 0$ אזי $|f(x)| = f(x)$ אזי הגבול הוא אותו גבול אזי היא רציפה לכל a

2. $f(x) < 0$

מרציפות נובע כי $\forall \lim_{x\to a}|f(x)| = f(a)$. אם $f(x) < 0$ אזי $|f(x)| = -f(x)$ מאריטמתיקה של גבולות נובע כי גם ל $-1\cdot f(x)$ קיים גבול וכי זה $-f(a)$. אזי הגבול הוא אותו גבול אזי היא רציפה לכל a

3. $f(x) = 0$

צריך להוכיח כי עבור כל a כך ש $f(x) = 0$ מתקיים $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ במקרה זה. יודעים כבר כי $f(x)$ רציפה, בפרט היא רציפה ב0 אזי לכל ε קיים δ כך ש $-\delta < x-a < \delta$ מתקיים $|f(x)-0| < \varepsilon$. רוצים להראות כי גם $|f(x)|$ מקיים תכונה זו. אבל $||f(x)|-0| = |f(x)|$ וכבר יודעים כי זה קטן מ ε. משל.

2.2 f,g רציפות אזי גם $\max(f,g)$ ו $\min(f,g)$ רציפות

משתמשים בהגדרה של $\max, \min$

$$\begin{aligned}\min(f,g) &= \frac{f+g-|f-g|}{2}\\ \max(f,g) &= \frac{f+g+|f-g|}{2}\end{aligned}$$

אז מאריכמטיקה של גבולות(וההוכחה כי אם $f(x)$ רציפה אז גם $|f(x)|$ רציף) נובע כי גם זה רציף.

3 שאלה 3

3.1 א

$$f(x) = \begin{cases} h(x) & x \geq a \\ g(x) & x \leq a \end{cases}$$

אם $x > a$ או $x < a$ נובע מיד כי $f(x)$ רציפה(מרציפות של $h(x), g(x)$)

אם $x = a$ אז צריך להוכיח כי לכל ε קיים δ כך ש $0 < |x-a| < \delta$ גורר $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. מרציפות של $h(x)$ נובע לε הזה קיים גם δ_h שמקיים $|x-a| < \delta_h$ גורר $|h(x) - h(a)| < \varepsilon$. מרציפות של $g(x)$ נובע לε הזה קיים גם δ_g שמקיים $|x-a| < \delta_g$ גורר $|g(x) - g(a)| < \varepsilon$.

אזי אפשר להגדיר $\delta_f = \min\left(\delta_g, \delta_h\right)$ אז זה יקיים את התנאי כי $\left|f\left(x\right) - f\left(a\right)\right| <$ ε (נובע מההגדר של f)

3.2 ב

$$f\left(x\right) = \begin{cases} h\left(x\right) & x \in [a, b] \\ g\left(x\right) & x \in [b, c] \end{cases}$$

אם $x > a$ או $x < a$ נובע מיד כי $f\left(x\right)$ רציפה(מרציפות של $h\left(x\right), g\left(x\right)$)

אם $x = a$ אז צריך להוכיח כי לכל ε קיים δ כך ש $0 < |x - a| < \delta$ גורר $\left|f\left(x\right) - f\left(a\right)\right| < \varepsilon$. מרציפות של $h\left(x\right)$ נובע לε הזה קיים גם δ_h שמקיים $|x - a| < \delta_h$ גורר $\left|h\left(x\right) - h\left(a\right)\right| < \varepsilon$. מרציפות של $g\left(x\right)$ נובע לε הזה קיים גם δ_g שמקיים $|x - a| < \delta_g$ גורר $\left|g\left(x\right) - g\left(a\right)\right| < \varepsilon$.

אזי אפשר להגדיר $\delta_f = \min\left(\delta_g, \delta_h\right)$ אז זה יקיים את התנאי כי $\left|f\left(x\right) - f\left(a\right)\right| <$ ε (נובע מההגדר של f)

חלק III
שאלות נוספות

נניח כי f רציפה ב-$[a, b]$ וכי $f\left(x\right) \in \mathbb{Q}$ עבור כל $x \in [a, b]$. נניח כי הפונקציה מקבלת שתי ערכים שונים בתחום זה עבור $x, y \in [a, b]$, $f\left(x\right) = a$ ו- $f\left(y\right) = b$. ידוע לנו כי לפי משפט ערך הביניים קיים $a < c < b$, כך ש- עבור $w \in [a, b]$ ממתקיים $f\left(w\right) = c$, ובגלל צפיפות האי-רציונליים ב-$\mathbb{R}$, בהכרח בתוך $[a, b]$ קיים מספר אי-רציונלי, ולכן $f\left(w\right)$ יכול להיות אי רציונלי, דבר זה סותר את ההנחה כי $f\left(x\right) \in \mathbb{Q}$ עבור כל $x \in [a, b]$. במידה והפונקציה $f\left(x\right)$ תהיה פונקציה קבועה ורציונלית אזי ההנחה תתקיים תמיד. ז"א האפיון הכי מדויק לפונקציה זו, הוא שפונקציה זו הינה פונקציה קבועה ורציונלית עבור כל $x \in [a, b]$.

4 שאלה 1

5 שאלה 2

5.1 א

נגדיר פונקציה חדשה $t\left(x\right) = f\left(x\right) - g\left(x\right)$ אזי $t\left(a\right) < 0$ ו $t\left(b\right) > 0$ לפי משפט ערך הביניים קימת נקודה c שנמצאת בין a וb שמקיימת $t\left(c\right) = 0$ אבל $t\left(c\right) =$ $f\left(c\right) - g\left(c\right) = 0 \Rightarrow f\left(c\right) = g\left(c\right)$. משל.

5.2 ב

נגדיר $x\left(t\right)$ המרחק של הזבוב מתל-אביב ו $y\left(t\right)$ המרחק של הדבורה מתל אביב.

נגדיר $f\left(x\right) = x\left(t\right) - y\left(t\right)$. מכיוון שזבוב עדיין לא הגיע בשעה $10 : 00$ מחר אז $f\left(24 : 00 + 10 : 00\right) > 0$ ובשעה $16 : 00$ המ הגיעו אזי $f\left(24 : 00 + 16 : 00\right) < 0$. אזי קיים $f\left(c\right) = 0$ אזי $x\left(c\right) = y\left(c\right)$

חלק IV
גבולות מוכללים

6 שאלה 1

6.1 א

$\lim_{x\to a^+} f(x) = \infty$

הגדרה א': תהי פונקציה f מוגדרת בסביבה מנוקבת של a, f שואפת לאינסוף כאשר x שואף ל-a מימין אמ"מ מתקיים:

$$\forall M > 0 \ \exists \delta > 0 \ , 0 < x - a < \delta \Rightarrow f(x) > M$$

$\lim_{x\to a^-} f(x) = \infty$

הגדרה ב': תהי פונקציה f מוגדרת בסביבה מנוקבת של a, f שואפת לאינסוף כאשר x שואף ל-a משמאל אמ"מ מתקיים:

$$\forall M > 0 \ \exists \delta > 0 \ , -\delta < x - a < 0 \Rightarrow f(x) > M$$

6.2 ב

$$\lim_{x\to 3^+} \frac{x^3+2x+1}{x-3} = \infty$$

צריך למצא $\delta = \delta(M)$ כך שאם $0 < x - 3 < \delta$ מתקיים $\frac{x^3+2x+1}{x-3} > M$.
נבחר את $\delta = \max\left(\frac{1}{M}, 1\right)$ אזי אם $M \geq 1$ אז $\delta = 1$ אזי $x \geq 4$ אזי 73

$$\frac{x^3+2x+1}{x-3} = \frac{4^3+2\cdot 4+1}{4-3} = 73 > 1$$

אם $M > 1$ אזי $\delta = \frac{1}{M}$ואז $3 < x < 3 + \frac{1}{M}$ אזי

$$\begin{aligned}
\frac{x^3+2x+1}{x-3} &\overset{?}{>} M \\
\frac{\left(3+\frac{1}{M}\right)^3 + 2\left(3+\frac{1}{M}\right)+1}{\left(3+\frac{1}{M}\right)-3} &\overset{?}{>} M \\
\frac{\frac{39}{M}+\frac{11}{M^2}+\frac{1}{M^3}+46}{\left(3+\frac{1}{M}\right)-3} &\overset{?}{>} M \\
\frac{\frac{39}{M}+\frac{11}{M^2}+\frac{1}{M^3}+46}{\frac{1}{M}} > \frac{46}{\frac{1}{M}} &\overset{?}{>} M \\
46\cdot M &\overset{\checkmark}{>} M
\end{aligned}$$

6.3 ג

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+2x} - x = ?$$

נשים לב כי:

$$\sqrt{x^2+2x} - x = \frac{(x^2+2x) - x^2}{\sqrt{x^2+2x} + x}$$

$$= \frac{2x}{\sqrt{x^2+2x}+x} = \frac{2}{\frac{1}{x}\left(\sqrt{x^2+2x}+x\right)} = \frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1}$$

כעת יש למצוא מהו הגבול של $\frac{2}{x}$ כאשר $x \to \infty$, מאריתמטיקה של גבולות:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2}{x} = 0$$

לכן מכאן ניתן לראות כי:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1} = \frac{2}{\sqrt{1+0}+1} = \frac{2}{1+1} = 1$$

מ.ש.ל.