תרגיל מס.7

עפיף חלומה 302323001

16 בדצמבר 2009

1 שאלה 1

1.1 א

בונים רשת שקודקודיה הם $\{s,t\} \cup \{r\}_i \cup \{c\}_i$ כאשר r_i הוא השורה הi במטריצה, ו c_i הוא העמודה ה i במטריצה M.

הצלעות של המטריצה יהיו $E = \{(s,r_i)\}_{r\in[0,\deg M]} \cup \{(r_i,c_j)\}_{r\in[0,\deg M]} \cup \{(c_i,t)\}_{r\in[0,\deg M]}$ כאשר הקיבול של כל הצלעות הוא 1. והצלע (r_i,c_j) קיימת אם"ם $a_{ij} \neq 0$.

כל זרימה בעלת זאם $\deg M$ תקבע לנו התאמה חד חד ערכית ועל בין שורות המטריצה לעמודות המטריצה, מכיוון שההתאמה חד חד ערכית ועל ניתן לבצע החלפה בשורות כך שהאחדים שבחרנו יהיו באלכסון. עבור כל צלע (r_i,c_j) במטריצה נחליף את העמודה בj בעמודה הi.

אם הזרימה המקסימאלית היא יותר קטנה מ $\deg M$ אזי החתך המינימאלי הוא בצלעות (r_i,c_j) והיא קטנה מ $\deg M$. כלומר לא קיימת התאמה חד חד ערכית ועל בין שורות לעמודות כך שהחיתוך מכיל אחד, כלומר אי אפשר לבצע החלפות כדי לקבל מטריצה אלכסונית

לכן ניתן לבנות מטריצה אלכסונית אם"ם מקבלים זרימה של $\deg M$.

1.2 ב

בונים רשת שקודקודיה הם $\{s,t\} \cup \{r\}_i \cup \{c\}_i$ כאשר r_i הוא השורה הi במטריצה, ו c_i הוא העמודה ה i במטריצה M.

הצלעות של המטריצה יהיו $E = \{(s,r_i)\}_{r\in[0,\deg M]} \cup \{(r_i,c_j)\}_{r\in[0,\deg M]} \cup \{(c_i,t)\}_{r\in[0,\deg M]}$ כאשר הקיבול של כל הצלעות הוא 1. והצלע (r_i,c_j) קיימת אם"ם $a_{ij} \neq 0$.

הזרימה המקסימאלית בגרף הזה היא $\deg M$, זה מתקבל בגלל שאם נסתכל אל הצלעות בכל תחום לבד זה ברור שהם מסתכמים ל$\deg M$(או יותר בצלעות (r_i,c_i)) זה נובע מזה שסכום כל שורה ועמודה הוא 1. מה שעשינו זה להגדיל את הקיבול של הצלעות (r_i,c_i) אזי זה בהחלט עדיין $\deg M$.

כל זרימה בעלת זאם $\deg M$ תקבע לנו התאמה חד חד ערכית ועל בין שורות המטריצה לעמודות המטריצה שהם לא אפס, לכן זה הוא האלכסון המוכלל שאנחנו מחפסים.

2 שאלה 2

נמספר את הקודקודים באופן אקראי. כך שיהיו לנו קודקודים $v_i, i \in \{1 \ldots n\}$. נבנה קבוצה x כך שהיא מכילה את הצלע $(v_i,v_j) \in E$ אם"ם $i < j$.

נבנה את הקבוצה x' כך שהיא מכילה את הצלע $(v_i,v_j) \in E$ אם"ם $j < i$.

נסמן הקבוצה $y=\begin{cases} x & |x|>|x'| \\ x' & |x'|>|x| \end{cases}$.

יודעים שפתרון האופטימאלי הוא יותר קטן מ$|E|$. בפתרון שלנו כל צלע נספרת פעם אחת או בכיוון x או ב x', אזי מקבלים מקרה גרוע ביותר כאשר $|x|=|x'|=\frac{1}{2}|E|$, שבמקרה הזה $C=\frac{OPT}{\frac{1}{2}|E|}\leq\frac{|E|}{\frac{1}{2}|E|}=2$. משל.

3 שאלה 3

נוכיח שעבור מכונות זההות מתקיים $g(o)\leq\left(1.5-\frac{1}{2k}\right)g(opt)$:

אלג': מסדר את המשימות בסדר כלשהו. נתחיל עם k מכונות ריקות וכאשר נגיע למשימה ה i משבץ אותה במכונה שמסיימת ראשונה אחרי השיבוץ של $i-1$ הראשונות.

טענה: אם נסמן את הפתרון של האלג' ב O את $q(o)\leq\left(2-\frac{1}{k}\right)q(opt)$

הוכחה: נשיג חסמים על $q(opt)$:

לכל i: $q(opt)\geq t_i$

$q(opt)\geq\frac{\sum_{i=1}^{n}t_i}{k}$

נניח שזמן הסיום ב OPT הם $f_1^{opt},\ldots,f_k^{opt}$ אזי $q(opt)=\max_{1\leq i\leq k}f_j^{opt}\geq\frac{\sum_{j=1}^{k}f_k^{opt}}{k}=\frac{\sum_{i=1}^{n}t_i}{k}$

נגיד משהוא חיובי על אלג' שלנו: נסמן ב i את המשימה המסיימת אחרונה. נניח שלמכונה עליה היא הושמה, הושמו קודם משימות במשך כולל T. $g(o)=T+t_i$.

נסמן את זמני הסיום אחרי $i-1$ משימות ב $f_1,\ldots,f_k$ אז $T=\min_{1\leq j\leq k}f_j$ (מאופן פעולת האלג') לכן $T=\min_{1\leq j\leq k}f_j\leq\frac{\sum_{j=1}^{k}f_j}{k}=\frac{\sum_{j=1}^{i-1}t_j}{k}$

לכן

$$\begin{aligned}
g(o) &= T+t_i\leq\frac{\sum_{i=1}^{i}t_i}{k}+t_i\\
&= \frac{\sum_{j=1}^{i}t_j}{k}+\left(1-\frac{1}{k}\right)t_i\\
&\leq \frac{\sum_{i=1}^{n}t_i}{k}+\left(1-\frac{1}{k}\right)t_i\\
&\overbrace{\leq}^{\substack{g(opt)\geq t_i\\ g(opt)\geq\frac{\sum_{i=1}^{n}t_i}{k}}} \left(2-\frac{1}{k}\right)g(opt)
\end{aligned}$$

שיפור: נסדר את המשימות בסדר יורד (הארוכות לפני הקצרות) של אורכים ואז נפעיל את האלגוריתם הקודם

טענה: במקרה זה $g(o)\leq\left(1.5-\frac{1}{2k}\right)g(opt)$

נסצן ב i את המשימה שהסתיימה אחרונה. אם $i\leq k$ אז $g(o)=t_i=g(opt)$ (מקרה קל)

רחרת כל פתרון חייב לשבץ לפחות 2 משימות מ $t_1,\ldots,t_i$ על לפחות אחת המעונות, לכן $g(opt)\geq 2t_i$.

וע"פ טענה קודמת קיימת $g\left(opt\right)\geq\frac{\sum_{i=1}^{n}t_{i}}{k}$

$$\begin{aligned}
g\left(o\right) & = & T+t_{i}\leq\frac{\sum_{i=1}^{i}t_{i}}{k}+t_{i}\\
 & = & \frac{\sum_{j=1}^{i}t_{j}}{k}+\left(1-\frac{1}{k}\right)t_{i}\\
 & \leq & \overbrace{\frac{\sum_{i=1}^{n}t_{i}}{k}}^{\leq g\left(opt\right)}+\overbrace{\left(1-\frac{1}{k}\right)t_{i}}^{\leq\frac{g\left(opt\right)}{2}}\\
 & \leq & \left(1.5-\frac{1}{k}\right)g\left(opt\right)
\end{aligned}$$

סיום: צריך להעביר את הפתרון הזה לבעיה של שתי סוגי המכונות, אז ניתן להראות כי הפתרון האופטימאלי $g'\left(opt\right)$ יהיה יותר גרוע מאשר $g\left(opt\right)$. מכיוון שיש מכונות שעושות את העבודה ב $\frac{1}{2}$ הזמן של המכונה הרגילה אז זמן הסיום המקסימאלי גדל פי 2 לכן

$$\begin{aligned}
g'\left(o\right) & = & 2\cdot\left(1.5-\frac{1}{k}\right)g\left(opt\right)\\
 & = & \left(3-\frac{2}{k}\right)g\left(opt\right)\\
 & \leq & 3g\left(opt\right)
\end{aligned}$$

משל.

4 שאלה 4

אם יש $k\left(k-1\right)$ מסימות באורך 1 ומסימה אחת באורך k, הפתרון האופטימאלי זה לתת המסימה הארוכה למכונה אחת ולפזר את שאר המסימות על שאר המכונות באופן אחיד(מקבלים אורך מקסימאלי k)

הפתרון שלנו יחלק את המסימות הקצרות על המכונות ואז יוסיף את המסימה הארוכה, אזי נקבל אורך מקסימאלי של $2k-1$ לכן $\frac{2k-1}{k}=2-\frac{1}{k}$
משל