# תרגיל מס.6

7 במאי 2009

| | |
|---|---|
| שם התלמיד | עפיף חלומה |
| מס' ת"ז | 302323001 |
| שם המתרגל | מר מתן פרזמה |
| קבוצת תרגול | |
| יום ג' | שעה $10:00-11:45$ |

טבלה 1: טבלת מידע אישי

## 1 שאלה 1

### 1.1 א

נגדיר $g(x) = f(x) - f\left(x+\frac{1}{2}\right)$. $g$ היא פונקציה רציפה כי לפי אריטמטיקה של גבולות אם $f(x)$ ו $f\left(x+\frac{1}{2}\right)$ פונקציות רציפות אז גם $f(x) - f\left(x+\frac{1}{2}\right)$ רציפה.
נניח בשלילה כי $g$ לא מתאפסת בתחום $[0, 1/2]$. נתבונן ב

$$\begin{aligned} g(0) &= f(0) - f(1/2) \\ g(1/2) &= f(1/2) - f(1) \\ &= f(1/2) - f(0) \\ &= -(f(0) - f(1/2)) \\ &= -g(0) \end{aligned}$$

אם $g(1/2) \neq 0$ אזי אם $g(1/2)$ חיובי אז $g(0)$ שלילי ולהפך. משתמשים במשפט ערך הביניים ומקבלים כי קיים $c \in [0, 1/2]$ שמקיים $g(c) = 0$ אזי $f(c) - f\left(c+\frac{1}{2}\right) = 0$ אזי $f(c) = f\left(c+\frac{1}{2}\right)$
ואם $g(1/2) = 0$ אזי $f(1/2) - f(1) = 0$ אזי $f(1/2) = f(1)$.

## 2 שאלה 2

נניח בשלילה כי $f(x) \neq \sqrt{1-x^2}$ וגם $f(x) \neq \sqrt{1-x^2}$ בתחום $[-1, 1]$ אזי:

$$\begin{aligned} (f(x))^2 &\neq \left(\pm\sqrt{1-x^2}\right)^2 \\ (f(x))^2 &\neq 1-x^2 \\ (f(x))^2 + x^2 &\neq 1 \end{aligned}$$

בשלילה לנתון

# 3 שאלה 3

לכל $\lambda$ כך ש $0<\lambda<M$ בוחרים $c$ כך ש $\lambda<c<M$(לפי צפיפות של מספרים ממשיים קיים $c$ כזה). $f$ היא רציפה ו$M=\sup_{[a,b]}f$ אזי קיים $a<t<b$ כך ש $f(t)=c$. אזי כבר יודעים כי קיימים לפונקציה שני ערכים

$$\begin{array}{ccccc} \lambda & < & f(t) & < & M \\ & f(a) & < & \lambda & \end{array}$$

אז לפי משפט ערך הביניים קיים $a<x_1<t$ כך ש $f(x_1)=\lambda$.
מצד שני גם יודעים כי

$$\begin{array}{ccccc} \lambda & < & f(t) & < & M \\ & f(b) & < & \lambda & \end{array}$$

אזי לפי משפט ערך הביניים קיים $t<x_2<b$ כך ש $f(x_2)=\lambda$.
מתחום ההגדרה של $x_1$ ו $x_2$ רואים כי $x_1\neq x_2$. אזי

$$\forall\lambda\in[a,b]\,\exists(x_1,x_2):f(x_1)=f(x_2)=\lambda$$

# 4 שאלה 4

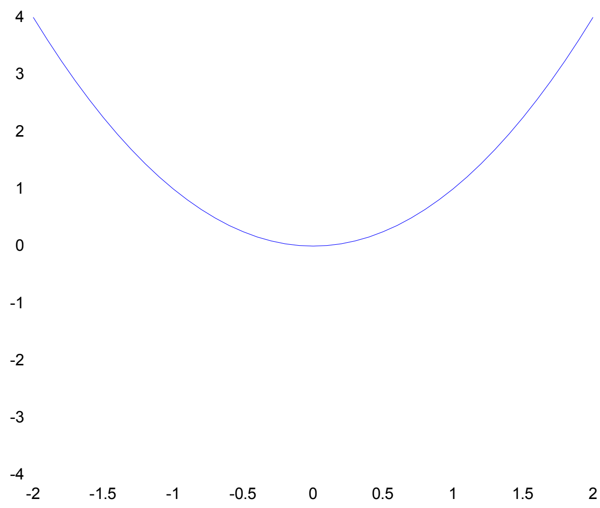
## 4.1 א

זה לא יתכן.
$f(x)>0$ לכל $x\in[a,b]$ אזי לפי משפט ווירשטראוס $f(x)$ מקבלת מינימום בתחום. נסמן $A=\min_{[a,b]}f(x)$. $A>0$ כי $f(x)\underset{[a,b]}{>}0$. אזי קיים $\varepsilon=\frac{A}{2}<A$ שמקיים $\forall z:\varepsilon<f(z)$

## 4.2 ב

באופן כללי זה לא מתקיים. דוגמה נגדית לזה היא $f(x)=c$.
אבל קיימים מקרים פרטיים לדוגמה:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 \\ x_0 &= 0 \end{aligned}$$




איור 1: $f(x)$

עבור כל $x \neq x_0$ מתקיים $f(x) > f(x_0)$

# 5 שאלה 8

## 5.1 א

לא נכון. $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ לא מקבל מקסימום אבל $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$

## 5.2 ב

נניח בשלילה כי ל $c \in \mathbb{R}$ לא קיים $f(x_0) = c$.

לפי ההגדרה של $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ יודעים כי לכל $M$ קיים $x_0$ כך שלכל $x > x_0$ מתקיים $f(x) > x_0$. אזי בפרט קיים $t$ כך ש $f(t) > c$.

לפי ההגדרה של $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ יודעים כי לכל $M$ קיים $x_0$ כך שלכל $x < x_0$ מתקיים $f(x) < x_0$. אזי בפרט קיים $p$ כך ש $f(p) < c$.

אזי $f$ רציפה ו $f(p) < c < f(t)$ אזי קיים $x_0$ כך ש $p < x_0 < t$ כך ש $f(x_0) = c$ בסתירה להנחת השלילה שלנו.

## 5.3 ג

זה לא נכון. דוגמה: $f(x) = x^2$

$f$ היא רציפה אזי לפי משפט קנטור $f$ רציפה במידה שווה בקטע סגור $f \in [a, b]$ כלשהוא, בפרט $[n, n+1]$

אבל $f$ לא רציפה במידה שווה כי אם בוחרים $\varepsilon_0 = 2$ אזי עבור כל $\delta > 0$ מתקיים שאם $|x_1 - x_2| < \delta$ אז $|f(x_1) - f(x_2)| \geq \varepsilon_0$

נסמן $\delta = \frac{1}{n}$ עבור $n \in (0, \infty)$(שזה כל $\delta > 0$) ונסמן $x_1 = n$ ו $x_2 = n + \frac{1}{n}$. אזי

$$\begin{aligned}
\left| n^2 - \left(n^2 + \frac{1}{n}\right)^2 \right| &\overset{?}{\geq} \varepsilon_0 \\
\left| n^2 - n^2 - \frac{2n}{n} - \frac{1}{n^2} \right| &\overset{?}{\geq} \varepsilon_0 \\
2 + \frac{1}{n^2} &\geq 2
\end{aligned}$$

משל.

# 6 שאלה 9

## 6.1 א

זה נכון כי אם $f, g$ רציפות במידה שווה אז קיימים $\delta_f, \delta_g$ שמקיימים את הגדרת רציפות במידה שווה. אזי במקרה של $\alpha f + \beta g$ נגדיר $\delta = \min\left(\alpha\delta_f, \beta\delta_g\right)$. ומתקיימת ההגדרה של רציפות במידה שווה.

## 6.2 ב

זה לא נכון. דוגמה נגדית: $f = x, g = x$ אזי $f \cdot g = x^2$ שזו אינה פונקציה רציפה במידה שווה.