תרגיל מס.1

עפיף חלומה 302323001

17 במרץ 2010

1 שאלה 1

1.1 א

$$f\left(z\right)=ax+by+i\left(cx+dy\right)$$

משפט: תנאי קושי רימן מספיקים אם הנגזרות החלקיות חלקיות של u,v(כאשר $f\left(z\right)=u\left(x,y\right)+iv\left(x,y\right)$) רציפות בסביבת הנק' $\left(x,y\right)$.

$$\begin{aligned} u &= ax+by \\ v &= cx+dy \end{aligned}$$

תנאי קושי רימן:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{ax+by}{\partial x} &\stackrel{?}{=} \frac{cx+dy}{\partial y} \\ a &= d \\ \frac{ax+by}{\partial y} &= -\frac{cx+dy}{\partial y} \\ b &= -d \end{aligned}$$

רואים כי הנגזרות החלקיות רציפות(קבועים) אזי תנאי בשביל שפונק' תהיה אנליטית בכל המישור הם: $a=d,b=-d$

1.2 ב

$$f\left(z\right)=\cos\left(x\right)\cdot\left(a\cdot\cosh\left(y\right)+b\sinh\left(y\right)\right)+i\left(c\cdot\cosh\left(y\right)+d\cdot\sinh\left(y\right)\right)$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= -\sin(x)\left(a\cdot\cosh(y)+b\sinh(y)\right)\\
\frac{\partial u}{\partial y} &= \cos(x)\cdot\left(a\sinh(y)+b\cosh(y)\right)\\
\frac{\partial v}{\partial x} &= c\cdot\sinh(y)+d\cdot\cosh(y)\\
\frac{\partial v}{\partial y} &= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y}\\
-\sin(x)\left(a\cdot\cosh(y)+b\sinh(y)\right) &= 0\\
a=b &= 0\\
\frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial v}{\partial x}\\
\cos(x)\cdot\left(a\sinh(y)+b\cosh(y)\right) &= -\left(c\cdot\sinh(y)+d\cdot\cosh(y)\right)\\
a=b=c=d &= 0
\end{aligned}
$$

קיבלנו שבשביל כל זה שיהיה אנליטי צריכים שזה יהיה אפס.

2 שאלה 2

$$f=\sqrt{xy}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x}|_{(0,0)} &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{|0\cdot 0|}-\sqrt{|0\cdot\Delta x|}}{\Delta x}=0\\
\frac{\partial u}{\partial y}|_{(0,0)} &= \lim_{\Delta y\to 0}\frac{\sqrt{|0\cdot 0|}-\sqrt{|0\cdot\Delta y|}}{\Delta y}=0\\
\frac{\partial v}{\partial x} &= 0\\
\frac{\partial v}{y} &= 0
\end{aligned}
$$

תנאי קושי רימן מתקיימים.
נבדוק דיפרנציאביליות

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f\left(z=x+ix\right)}{\partial x}|_{(0,0)} &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{\Delta x\cdot\Delta x}-\sqrt{0\cdot 0}}{\Delta x+i\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x\left(\Delta x+i\Delta x\right)}{2\Delta x^{2}}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(1+i\right)}{2}\\
&= \frac{1+i}{2}
\end{aligned}
$$

שזה שונה מאפס שקיבלנו קודם.

3 שאלה 3

3.1 א

$$
\begin{aligned}
w &= f\left(z\right)\\
\lim_{\Delta z\to 0}\left(\Re\left(\frac{\Delta w}{\Delta z}\right)\right) &= L\\
\lim_{\Delta z\to 0}\Re\left(\frac{f\left(z+\Delta z\right)-f\left(z\right)}{\Delta z}\right) &= L\\
\lim_{\Delta z\to 0}\Re\left(\frac{u\left(z+\Delta z\right)+iv\left(z+\Delta z\right)-u\left(z\right)-iv\left(z\right)}{\Delta z}\right) &= L\\
\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\Re\left(\frac{\left(u\left(z+\Delta z\right)+iv\left(z+\Delta z\right)-u\left(z\right)-iv\left(z\right)\right)\left(\Delta x+i\Delta y\right)}{\Delta x^{2}+\Delta y^{2}}\right) &= L\\
\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\Re\left(\frac{\begin{array}{c}\Delta x\cdot u\left(z+\Delta z\right)+\Delta x\cdot iv\left(z+\Delta z\right)-\Delta x\cdot u\left(z\right)-\Delta x\cdot iv\left(z\right)+\\ +i\Delta y\cdot u\left(z+\Delta z\right)-\Delta yv\left(z+\Delta z\right)-i\Delta y\cdot u\left(z\right)+\Delta yv\left(z\right)\end{array}}{\Delta x^{2}+\Delta y^{2}}\right) &= L\\
\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\Delta x\cdot u\left(z+\Delta z\right)-\Delta x\cdot u\left(z\right)-\Delta yv\left(z+\Delta z\right)+\Delta yv\left(z\right)}{\Delta x^{2}+\Delta y^{2}} &= L\\
\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\Delta x\cdot u\left(z+\Delta z\right)-\Delta x\cdot u\left(z\right)-\Delta yv\left(z+\Delta z\right)+\Delta yv\left(z\right)}{\Delta x^{2}+\Delta y^{2}} &= L
\end{aligned}
$$

מכיוון שהגבול קיים נחשב מקרה פרטי של הגבול הזה כאשר $x\to 0, y=0$

$$
\begin{aligned}
\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y = 0}} \frac{x \cdot u\left(z+\Delta z\right) - x \cdot u\left(z\right)}{\Delta x^{2}} &= L \\
\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y = 0}} \frac{u\left(z+\Delta z\right) - u\left(z\right)}{\Delta x} &= L \\
u_x &= L
\end{aligned}
$$

אותו דבר עבור $x \to 0, y = 0$

$$
\begin{aligned}
\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y = 0}} \frac{-\Delta y v\left(z+\Delta z\right) + \Delta y v\left(z\right)}{\Delta y^{2}} &= L \\
\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y = 0}} \frac{-v\left(z+\Delta z\right) + v\left(z\right)}{\Delta y} &= L \\
v_y &= L
\end{aligned}
$$

ב 3.2

$$
\begin{aligned}
w &= f(z) \\
\lim_{\Delta z\to 0}\left(\Im\left(\frac{\Delta w}{\Delta z}\right)\right) &= L \\
\lim_{\Delta z\to 0}\Im\left(\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}\right) &= L \\
\lim_{\Delta z\to 0}\Im\left(\frac{u(z+\Delta z)+iv(z+\Delta z)-u(z)-iv(z)}{\Delta z}\right) &= L \\
\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\Im\left(\frac{(u(z+\Delta z)+iv(z+\Delta z)-u(z)-iv(z))(\Delta x+i\Delta y)}{\Delta x^2+\Delta y^2}\right) &= L \\
\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\Im\left(\frac{\begin{array}{c}\Delta x\cdot u(z+\Delta z)+\Delta x\cdot iv(z+\Delta z)-\Delta x\cdot u(z)-\Delta x\cdot iv(z)+\\ +i\Delta y\cdot u(z+\Delta z)-\Delta yv(z+\Delta z)-i\Delta y\cdot u(z)+\Delta yv(z)\end{array}}{\Delta x^2+\Delta y^2}\right) &= L \\
\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\Delta x\cdot iv(z+\Delta z)-\Delta x\cdot iv(z)+i\Delta y\cdot u(z+\Delta z)-i\Delta y\cdot u(z)}{\Delta x^2+\Delta y^2} &= L \\
\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\Delta x\cdot u(z+\Delta z)-\Delta x\cdot u(z)-\Delta yv(z+\Delta z)+\Delta yv(z)}{\Delta x^2+\Delta y^2} &= L
\end{aligned}
$$

עבור $\Delta x\to 0,\Delta y=0$

$$
\begin{aligned}
\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y=0}}\frac{\Delta x\cdot u(z+\Delta z)-\Delta x\cdot u(z)-\Delta yv(z+\Delta z)+\Delta yv(z)}{\Delta x^2+\Delta y^2} &= L \\
\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y=0}}\frac{u(z+\Delta z)-u(z)}{\Delta x} &= L \\
u_x &= L
\end{aligned}
$$

עבור $\Delta x=0,\Delta y\to 0$

$$\lim_{\substack{\Delta x = 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\Delta x \cdot u(z+\Delta z) - \Delta x \cdot u(z) - \Delta y v(z+\Delta z) + \Delta y v(z)}{\Delta x^2 + \Delta y^2} = L$$

$$\lim_{\substack{\Delta x = 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{v(z) - v(z+\Delta z)}{\Delta y} = L$$

$$\lim_{\substack{\Delta x = 0 \\ \Delta y \to 0}} -\frac{v(z+\Delta z) - v(z)}{\Delta y} = L$$

$$v_y = -L$$

4 שאלה 4

4.1 א

נתון כי $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 (u^2)}{\partial x^2} &\stackrel{?}{=} -\frac{\partial^2 (u^2)}{\partial y^2} \\
\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial (u^2)}{\partial x} &\stackrel{?}{=} -\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial (u^2)}{\partial y} \\
\frac{\partial}{\partial x}\left(2u \cdot \frac{\partial u}{\partial x}\right) &\stackrel{?}{=} -\frac{\partial}{\partial y}\left(2u\frac{\partial u}{\partial y}\right) \\
\left(2\frac{\partial u}{\partial x}\right) \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + 2u \cdot \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} &\stackrel{?}{=} -\left(2\frac{\partial u}{\partial y}\right)\frac{\partial u}{\partial y} - 2u\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y} \\
2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &\stackrel{?}{=} -2\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 - 2u\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\
2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2u\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &\stackrel{?}{=} -2\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 - 2u\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\
2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 - 2u\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + 2u\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &\stackrel{?}{=} 0 \\
2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 - 2u\underbrace{\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)}_{0} &\stackrel{?}{=} 0 \\
2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 &\stackrel{?}{=} 0
\end{aligned}$$

לא היא לא הרצונית עבור כך פונקציה אלה רק עבור פונקציות שעבורם $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$ וגם $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$

4.2 ב

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f(u)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f(u)}{\partial y^2} &\stackrel{?}{=} 0\\
\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f(u)}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f(u)}{\partial y} &\stackrel{?}{=} 0\\
\frac{\partial}{\partial x}\left(f'(u)\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(f'(u)\cdot\frac{\partial u}{\partial y}\right) &\stackrel{?}{=} 0\\
\left(\left(f''(u)\cdot\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right)+\left(f'(u)\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\right)+\left(\left(f''(u)\cdot\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right)+\left(f'(u)\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\right) &\stackrel{?}{=} 0\\
\left(f''(u)\cdot\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right)+\left(f'(u)\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)+\left(f''(u)\cdot\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right)+\left(f'(u)\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) &\stackrel{?}{=} 0\\
\left(f'(u)\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)+\left(f'(u)\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+\left(f''(u)\cdot\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right)+\left(f''(u)\cdot\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right) &\stackrel{?}{=} 0\\
(f'(u))\left(\underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}_{0}\right)+(f''(u))\cdot\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right) &\stackrel{?}{=} 0\\
f''(u)\cdot\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right) &\stackrel{?}{=} 0
\end{aligned}
$$

או ש $f''(u(x,y))$ הוא זהותית אפס או ש $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2=\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2=0$
מכיוון שאנחנו רוצים את זה עבור כל u אז בהכרח $\forall x,y: f''(u(x,y))=0$

4.3 ג

4.3.1 $f=z^2$

אזי

$$
\begin{aligned}
|f(z)| &= \left|z^2\right| = x^2+y^2\\
\frac{\partial^2|f(z)|}{\partial x^2}+\frac{\partial^2|f(z)|}{\partial y^2} &= 4
\end{aligned}
$$

4.3.2 $\arg f$ הרמונית בתחום שבו $\arg(x)$ רציפה

נסמן $z=e^{x+iy}$ $\arg\left(e^{x+iy}\right)=\arg\left(e^xe^{iy}\right)$ זה נכון כי $\arg(f(z))=\Im(\ln(f(z)))$.
ואז $\arg(z)=y$ אבל y זה $\Im(\ln(z))=\Im\left(\ln\left(e^{x+iy}\right)\right)=\Im(z)=y$.

זה נכון כי $\arg(f(z))=\Im(\ln(f(z)))$ ומכיוון ש $\ln$ ו f אנליטיות אז גם הרבתם $\ln\circ f$ אנליטית ובנוסף החלק המדומה של פונק' אנליטית הוא הרמוני. לכן $\arg f$ הוא הרמוני.

4.3.3 $\ln|f(z)|$

באופן דומה $\ln|f(z)| = \Re|\ln(f(z))|$ כי $e^{x+iy} = e^x$.
ובהכללה שעשינו קודם לפונק' שהנימוק של ההרכבה של פונק' אנליטיות אנליטית

5 שאלה 5

5.1 א

$$\begin{aligned}
v &= e^x \sin(y) \\
\frac{\partial v}{\partial x} &= e^x \sin(y) \\
\frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{\partial u}{\partial y} \\
\frac{\partial u}{\partial y} &= -e^x \sin(y) \\
u &= e^x \cos(y) + c(x) \\
\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y} \\
e^x \cos(y) + c'(x) &= e^x \cos(x) \\
c'(x) &= 0 \\
c(x) &= c \\
u &= e^x \cos(x) + c \\
f(x+iy) &= e^x \cos(x) + c + ie^x \sin(y)
\end{aligned}$$

5.2 ב

$$\begin{aligned}
u_x &= v_y = \frac{2y}{x^2+y^2} - 2x \\
u &= -\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) + 2xy + c(y) \\
-u_y &= v_x = \frac{2x}{x^2+y^2} - 2x \\
u &= 2\tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right) + 2xy + c(y) \\
&= -2\tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right) + 2xy + c(y) + \frac{\pi}{2} \\
u &= 2\tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right) + 2xy + c \\
f(z) &= 2\tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right) + 2xy + c + i\left(\ln\left(x^2+y^2\right) - x^2 + y^2\right)
\end{aligned}$$

5.3 ג

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial u^2}{\partial y^2}=x^2e^{xy}+e^{xy}y^2=\left|z^2\right|e^{xy}\neq 0$$

אזי e^{xy} לא הרמונית אזי היא אינה החלק הממשי של פונק' הרמונית.