פתרון תרגיל 8

1. $Vs = 4\cdot\cos(\omega t+\alpha)$

א.

נרשום משוואת KVL עבור החוג השמאלי והחוג החיצוני:

$$\hat{V}s = (\hat{I}_1+\hat{I}_2)\cdot R_1 + X_{L1}\cdot\hat{I}_1 + X_M\cdot\hat{I}_2$$

$$\hat{V}s = (\hat{I}_1+\hat{I}_2)\cdot R_1 + X_C\cdot\hat{I}_2 + X_{L2}\cdot\hat{I}_2 + X_M\cdot\hat{I}_1$$

נציב ערכים:

$$\hat{V}s = (\hat{I}_1+\hat{I}_2)\cdot 1 + 3j\cdot\hat{I}_1 + j\cdot\hat{I}_2$$

$$\hat{V}s = (\hat{I}_1+\hat{I}_2)\cdot 1 + -2j\cdot\hat{I}_2 + 5j\cdot\hat{I}_2 + j\cdot\hat{I}_1$$

נחסר בין המשוואות:

$$0 = 2j\hat{I}_1 - 2j\cdot\hat{I}_2$$

$$\hat{I}_1 = \hat{I}_2 \quad \Rightarrow \hat{I}_1 = \hat{I}_2 = \frac{\hat{V}s}{2+4j} = \frac{4e^{j\alpha}}{\sqrt{2^2+4^2}\cdot e^{j63.43^0}} = 0.89\cdot e^{j\alpha-64.43^0}$$

ב.

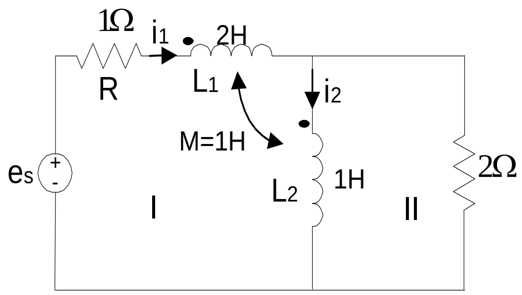
$$P_{av} = 0.5\cdot V_m\cdot I_m\cdot\cos(\angle V - \angle I)$$

$$V_m = 4[v] \quad I_m = 2\cdot 0.89[A] = 1.78[A] \quad \cos(\angle V-\angle I) = \cos(\alpha-(\alpha-64.43^0)) = \cos(64.43^0) = 0.43$$

$$P_{av} = 0.5\cdot V_m\cdot I_m\cdot\cos(\angle V - \angle I) = 1.56[watt]$$

נשים לב, כי התוצאה לא תלוייה ב α. משום שהפרש המופע בין המתח לזרם קבוע (64.3 מעלות), ותלוי אך ורק בנתוני המעגל.
באופן כללי נשאף שהפרש זה יהיה קטן יותר כדי ש P.F יהיה מקסימלי = 1.

.2



$e_S(t) = \cos(2t + 30^o)$

מאחר שאנו דנים במצב סינוסי עמיד, נעבור לפאזורים: $E_s = 1\angle 30^o \quad ; \quad \omega = 2\dfrac{rad}{\sec}$

נכתוב את משוואות החוגים על-פי KVL:

$$E_S - RI_1 - (j\omega L_1 I_1 + j\omega M I_2) - (j\omega M I_1 + j\omega L_2 I_2) = 0$$

$\Downarrow$

$$I)\ E_S - 1\cdot I_1 - (j\omega\cdot 2\cdot I_1 + j\omega\cdot 1\cdot I_2) - (j\omega\cdot 1\cdot I_1 + j\omega\cdot 1\cdot I_2) = 0$$

$$II)\ j\omega\cdot 1\cdot I_1 + j\omega\cdot 1\cdot I_2 - 2(I_1 - I_2) = 0$$

נחלץ את I_2 ממשוואה (II:

$$I_1(j\omega - 2) = -I_2(j\omega + 2)$$

$$I_2 = \frac{2 - j\omega}{2 + j\omega} I_1$$

ונציב במשוואה (I:

$$I)\ E_S = I_1(1 + j\omega\cdot 2 + j\omega\cdot 1) + I_2(j\omega\cdot 1 + j\omega\cdot 1)$$

$$E_S = I_1(1 + j\omega\cdot 3 + j\omega\cdot 2\cdot\frac{2 - j\omega}{2 + j\omega}) =$$

$$= I_1\frac{2 + j\omega + j\omega\cdot 6 - 3\omega^2 + j\omega\cdot 4 + 2\omega^2}{j\omega + 2} = I_1\frac{2 - \omega^2 + j\omega\cdot 11}{j\omega + 2}$$

נחלץ את I_1 ונציב ω=2:

$$I_1 = E_s\frac{2 + j\omega}{2 - \omega^2 + j\omega\cdot 11} = 1\angle 30^o\frac{2 + j\cdot 2}{-2 + j\cdot 22} =$$

$$= 1\angle 30^o\frac{\sqrt{4+4}\angle tg^{-1}1}{\sqrt{4+484}\angle(180^o - tg^{-1}11)} =$$

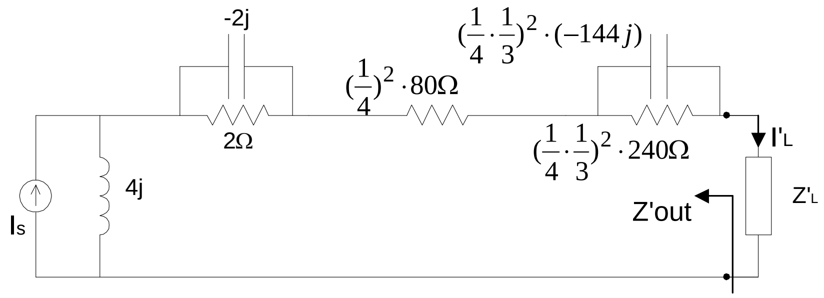
$$= \sqrt{\frac{8}{492}}\angle 30^o + 45^o - 95.2^o = 0.13\angle -20.2^o$$

$$i_1(t) = 0.13\cos(\omega t - 20.2^o)$$

$$I_2 = I_1\frac{2 - j\omega}{2 + j\omega} = I_1\frac{2 - j\cdot 2}{2 + j\cdot 2} = 0.13\angle -20.2^o\frac{\sqrt{4+4}\angle -45^o}{\sqrt{4+4}\angle 45^o} = 0.13\angle -110.2^o$$

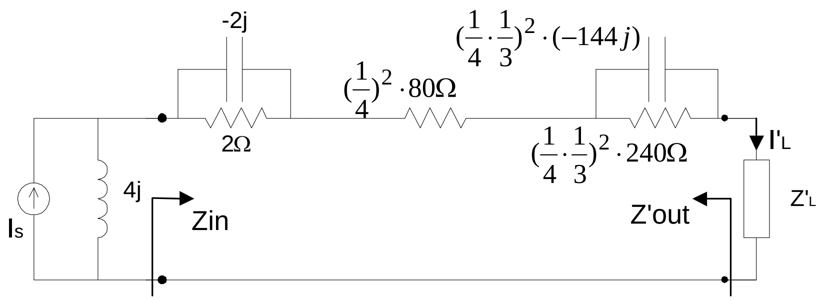
$$i_2(t) = 0.13\cos(\omega t - 110.2^o)$$

3. נשקף את המעגלים הימני והאמצעי למעגל השמאלי:



הערה: נסמן את הגדלים, שהשתנו כתוצאה מהשיקוף, ב-'.

א. התנאי להספק מרבי על Z'L הוא: Z'L=Z'*out. Z'out הוא עכבת המוצא, ש"רואה" העומס. לשם חישובו ננתק את מקור הזרם:



$$Z'_{out} = 4j + (2 \parallel -2j) + 80(\frac{1}{4})^2 + [240(\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3})^2] \parallel [-144j(\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3})^2] =$$

$$= 4j + \frac{2(-2j)}{2-2j} + 5 + \frac{5/3(-j)}{5/3-j} = 4j + 1 - j + 5 + 0.44 - 0.73j =$$

$$= (6.44 + 2.27j)\Omega$$

$$Z'_L = Z'^*_{out} = (6.44 - 2.27j)\Omega$$

לקבלת Z_L נשקף את Z'_L בחזרה למעגל הימני:

$$Z_L = (4\cdot 3)^2 Z'_L = 144(6.44 - 2.27j) = (927 + 329j)\Omega$$

ב. נמצא את ההספק על Z'_L במעגל המשוקף:

$$P_{L,avg} = \frac{1}{2}|I'_L|^2 \operatorname{Re}\{Z'_L\}$$

נמצא את I'L על-פי מחלק זרם:

$$I'_L = I_S \frac{4j}{Z'_{out} + Z'_L} = 40\sqrt{2}\,\frac{4j}{12.88} = 17.56j[A]$$

$$P_{L,avg} = \frac{1}{2}\cdot 17.56^2 \cdot 6.44 = 993[W]$$

<u>הערה</u>: אין צורך לחזור מהשיקוף ולחשב את ההספק במעגל המקורי, שכן אם נעשה זאת, נקבל:

$$I_L = \frac{I'_L}{4\cdot 3} = \quad ; \quad Z_L = (4\cdot 3)^2 Z'_L$$

$$P_{L,avg} = \frac{1}{2}|I_L|^2 \operatorname{Re}\{Z_L\} = \frac{1}{2}\frac{|I'_L|^2}{(4\cdot 3)^2}(4\cdot 3)^2 \operatorname{Re}\{Z'_L\} = \frac{1}{2}|I'_L|^2 \operatorname{Re}\{Z'_L\}$$

כפי שקיבלנו מתוך המעגל המשוקף. זה הגיוני, היות ובניגוד לזרם או מתח, המשתנים במעבר דרך השנאי, ההספק עובר ללא שינוי (צימוד מלא).

ג. Zin מורכב מהרכיבים, שמרכיבים את Z'out, שחישבנו בסעיף א', למעט הסליל של 4j ובתוספת Z'_L.
נשקף אתZ_L הנדרש, כלומר 576Ω, למעגל השמאלי:

$$Z'_L = \left(\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}\right)^2 \cdot Z_L = \frac{576}{144} = 4\Omega$$

$$Z_{in} = Z'_{out} - 4j + Z'_L = 6.44 + 2.27j - 4j + 4 = (10.44 - 1.73j)\Omega$$

.4

$$P_{L,avg} = \frac{1}{2}|I|^2 R$$

$$\Rightarrow |I| = \sqrt{\frac{2P_{L,avg}}{R}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 12.5}{20}} = 1.118A$$

מהשוואת המתח על שני הסלילים המחוברים במקביל:

$$V_1 = I_2 \cdot j \cdot 17 + I_1 j\omega M = I_1 \cdot j \cdot 20 + I_2 j\omega M$$

$$\Rightarrow I_2 = I_1 \frac{20-\omega M}{17-\omega M}$$

$$KCL: I = I_1 + I_2 = I_1 + I_1 \frac{20-\omega M}{17-\omega M} = I_1 \frac{17-\omega M + 20-\omega M}{17-\omega M} = \frac{37-2\omega M}{17-\omega M}$$

$$\Rightarrow I_1 = I \frac{17-\omega M}{37-2\omega M}$$

$$\Rightarrow I_2 = I_1 \frac{20-\omega M}{17-\omega M} = I \frac{17-\omega M}{37-2\omega M} \frac{20-\omega M}{17-\omega M} = I \frac{20-\omega M}{37-2\omega M}$$

$$KVL: 25 = V_1 + V_R = I_1 \cdot j \cdot 20 + I_2 j\omega M + IR =$$

$$= I \frac{17-\omega M}{37-2\omega M} j \cdot 20 + I \frac{7-\omega M}{37-2\omega M} j\omega M + IR$$

$$25 = I(\frac{340j - 20j\omega M + 20j\omega M - j(\omega M)^2}{37-2\omega M} + R)$$

נעביר המשוואה לערכים מוחלטים:

$$25 = |I| \sqrt{[\frac{340-(\omega M)^2}{37-2\omega M}]^2 + R^2}$$

נעלה בריבוע, נעביר אגפים ונציב: $|I|=1.18A$; $R=20\Omega$:

$$\frac{625}{1.4} - 400 = \left[\frac{340-(M\omega)^2}{37-2M\omega}\right]^2$$

$$6.81 = \frac{340-(M\omega)^2}{37-2M\omega}$$

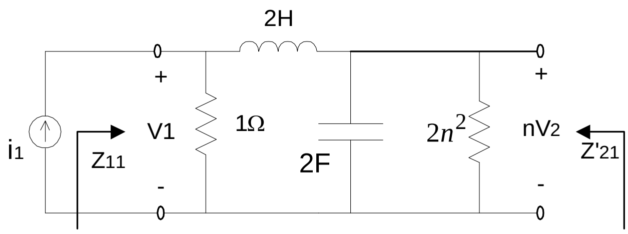
$$252 - 13.5M\omega = 340 - (M\omega)^2$$

$$(M\omega)^2 - 13.6M\omega - 87 = 0$$

$$M\omega_{1,2} = 18.34\Omega, \cancel{-5.1\Omega}$$

$$k = \frac{M\omega}{\sqrt{\omega L_1 \omega L_2}} = 0.994$$

5. א. נשקף המעגל המשני לראשוני:



קל לראות, כי Z_{11} הוא עכבת המבוא של המעגל.

$$Z_{11} = 1 \| (j\omega\cdot 2 + \frac{1}{j\omega\cdot 2} \| 2n^2) = 1 \| (j\omega\cdot 2 + \frac{\frac{2n^2}{j\omega\cdot 2}}{2n^2 + \frac{1}{j\omega\cdot 2}}) =$$

$$= 1 \| (j\omega\cdot 2 + \frac{2n^2}{j\omega\cdot 4n^2 + 1}) = 1 \| \frac{-\omega^2\cdot 8n^2 + j\omega\cdot 2 + 2n^2}{1 + j\omega\cdot 4n^2} =$$

$$= \frac{1\cdot\frac{2n^2 - \omega^2\cdot 8n^2 + j\omega\cdot 2}{1 + j\omega\cdot 4n^2}}{1 + \frac{2n^2 - \omega^2\cdot 8n^2 + j\omega\cdot 2}{1 + j\omega\cdot 4n^2}} = \frac{2n^2 - \omega^2\cdot 8n^2 + j\omega\cdot 2}{1 + j\omega\cdot 4n^2 + 2n^2 - \omega^2\cdot 8n^2 + j\omega\cdot 2} =$$

$$= \frac{2n^2 - \omega^2\cdot 8n^2 + j\omega\cdot 2}{1 + 2n^2 - \omega^2\cdot 8n^2 + j\omega\cdot(2 + 4n^2)}$$

נסמן את עכבת המוצא של המעגל המשוקף ב-Z'21:

$$Z'_{21} = \frac{nV_2}{I_1} = 2n^2 \| \frac{1}{j\omega\cdot 2} + j\omega\cdot 2 + 1 = \frac{\frac{2n^2}{j\omega\cdot 2}}{2n^2 + \frac{1}{j\omega\cdot 2}} + j\omega\cdot 2 + 1 =$$

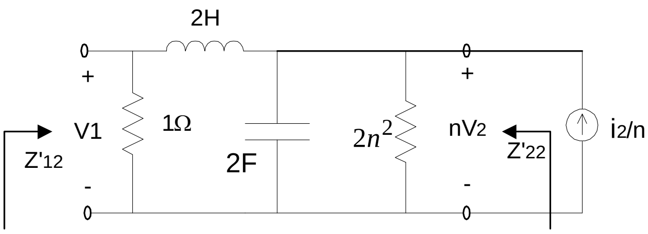
$$= \frac{2n^2}{j\omega\cdot 4n^2 + 1} + j\omega\cdot 2 + 1 = \frac{2n^2 - \omega^2\cdot 8n^2 + j\omega\cdot 4n^2 + 1}{j\omega\cdot 4n^2 + 1} =$$

$$= \frac{1 + 2n^2 - \omega^2\cdot 8n^2 + j\omega\cdot 4n^2}{1 + j\omega\cdot 4n^2}$$

$$Z_{21} = \frac{V_2}{I_1} = \frac{Z'_{21}}{n} = \frac{1/n + 2n - \omega^2\cdot 8n + j\omega\cdot 4n}{1 + j\omega\cdot 4n^2}$$

שימו לב, שבמקרה זה היחס בין Z'21 ל-Z21 אינו n^2, אלא n, שכן אין מדובר ביחס בין מתח לזרם על אותו אלמנט, הנמצא בצד זה או אחר של השנאי, אלא ביחס בין מתח במשני לזרם בראשוני. כשמדובר באותו אלמנט, המתח מוכפל פי n והזרם מחולק פי n, ולכן העכבה גדלה פי n^2. במקרה שלנו המתח מוכפל פי n, אך הזרם אינו משתנה.

ב. מאחר שחישבנו כבר בסעיף א' עכבות המבוא והמוצא בשיקוף למעגל הראשוני, נמשיך וניעזר באותו שיקוף גם בסעיף זה. נשים לב, שיש לשנות את ערכו של מקור הזרם בהתאם:



הפעם נסמן את עכבות המוצא והמבוא כדלקמן:

$$Z'_{22} = \frac{nV_2}{I_2/n} = n^2\frac{V_2}{I_2} = n^2 Z_{22}$$

$$Z'_{12} = \frac{V_1}{I_2/n} = n\frac{V_1}{I_2} = nZ_{12}$$

עכבות המבוא והמוצא אינן תלויות במקור, ולכן נותרו כשהיו בסעיף א', כלומר:

$$Z'_{22} = Z'_{21}$$
$$Z'_{12} = Z_{11}$$

אם-כן:

$$Z_{22} = \frac{Z'_{22}}{n^2} = \frac{Z'_{21}}{n^2} = \frac{nZ_{21}}{n^2} = \frac{Z_{21}}{n} = \frac{1/n^2 + 2 - \omega^2\cdot 8 + j\omega\cdot 4}{1 + j\omega\cdot 4n^2}$$

$$Z_{12} = \frac{Z'_{12}}{n} = \frac{Z_{11}}{n} = \frac{2n - \omega^2\cdot 8n + j\omega\cdot 2/n}{1 + 2n^2 - \omega^2\cdot 8n^2 + j\omega\cdot(2+4n^2)}$$

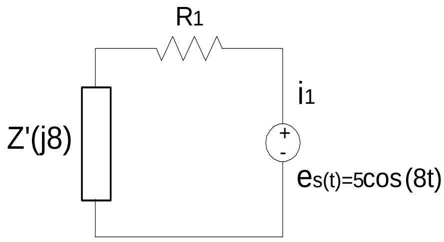
6. א.

$$Z(j\omega)_{\omega=8} = \frac{1}{j\omega C + \frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L}} = \frac{1}{j\cdot 8\cdot 52.1\cdot 10^{-3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{j\cdot 8\cdot 3}} = \frac{24j}{-10+12j+1} =$$

$$= \frac{24j}{-9+12j} = \frac{8j}{-3+4j} = \frac{8j(-3-4j)}{(-3+4j)(-3-4j)} = \frac{32-24j}{3^2+4^2} = \frac{32-24j}{25} =$$

$$= (1.28 - 0.96j)\Omega$$

ב. נשקף את Z(j8), שמצאנו בסעיף א', לצד הראשוני של השנאי (צד המקור). נקבל:



$$Z'(j\cdot 8)=Z(j\cdot 8)\cdot 5^2=32-24j\ [\Omega]$$

$$e_s=5\cos(8t)\quad\Rightarrow\quad \hat{E}_s=5\angle 0^o\ [V]$$

$$\hat{I}_1=\frac{\hat{E}_s}{Z'(j\cdot 8)+R_1}=\frac{5}{32-24j+4}=\frac{5}{36-24j}=\frac{5(36+24j)}{(36-24j)(36+24j)}=$$

$$=\frac{180=120j}{1872}=0.096+0.064j=\sqrt{0.096^2+0.064^2}\angle tg^{-1}\frac{0.064}{0.096}=0.11\angle 33.7^o\ [A]$$

$$i_1(t)=0.42\cos(\omega t+33.7^o)$$

ג. נסמן:

$$Z_L=R_1+Z_n$$

התנאי לקבלת הספק מרבי על Z_L הוא:

$$Z_L=Z'^*(j\cdot 8)=32+24j=R_1+Z_n$$

$$\Downarrow$$

$$R_1=32\Omega$$

$$Z_n=24j=j\omega L=j\cdot 8L$$

$$\Downarrow$$

$$L=3H$$

כלומר, הספק מרבי יתקבל על העומס המתואר להלן: