אלגוריתמים

עפיף חלומה

26 בנובמבר 2009

תוכן עניינים

פרק 1

פרטים טכניים

תרגילי בית מהווים 15% מהציון. ההגשה לתא.
כל תלמיד יעבור 3 ראיונות שבהם יהיו שאלות על התרגילים שהוגשו.
אתר הקורס: www.cs.huji.ac.il/~algo
ספר:
Algorithms by Dosgapta, Vazirani, Papadimitioa

פרק 2

הרצאה מס.1

2.1 אלגוריתם חמדני Greedy Algorithms

הרעיון הוא פשוט לעשות הפעולה שנראת היותר משתעמת בשלב זה ולא להתחקם ולחשוב על שלבים עתידיים.

דוגמה: בעיה זו באה מתחום בעיות תזמון Scheduling
יש לנו פרק זמן נתון ויש מסימות שרוצים לבצע. לכל מסימה יש זמן התחלה a_i וזמן סיום b_i. מכיוון שאין ביכולתינו לבצע יותר ממסימה אחת הינו רוצים לבצע כמה שיותר מסימות.

לחןעיפטם 1.2 אלגוריתם חמדן למיין מסימות
התחל מהמסימה בעחת זמן הסיום המוקדם ביותר. כלומר בעלת b_i מינימאלי. בצע מסימה i, פסול כל מסימה אחרת שמתנגשת בה והמשך באותו אופן

טענה: האלגוריתם הנ"ל מבצע את המספר המירבי האפשרי של מסימות

טענת עזר: יהיו $i_1, \ldots, i_k$ האינדקסים של המסימות שאותן יבצע האלגוריתם החמדן ויהיו $j_1, \ldots, j_m$ המשימות שמבצע אלגוריתם אחר. הקטעים בהם אנחנו מטפלים הם אם כן $[a_{i_1}, b_{i_1}], [a_{i_2}, b_{i_2}] \ldots$ והמסימות שהאלגוריתם האחר מטפל הם $[a_{j_1}, b_{j_1}], [a_{j_2}, b_{j_2}] \ldots$.

טענתנו: לכל אינדקס $r \leq k$ מתקיים $b_{i_r} \leq b_{j_r}$ (במלים אחרות החמדן מסים את המסימות שלו בזמן לא יותר מאשר האלגוריתם האחר מסים המסימה הrית שלו)
את הטענה הזו אנו נוכיח באינדוקציה על r. הבסיס הוא $r = 1$ כי ב$r = 1$ אנחנו בודקים בדיוק את הטענה.
עכשיו נראה שטענת העזר גוררת שהאלגוריתם החמדן מבצע את המס' המירבי של משימות כלומר $l \geq m$ לם זה נשתמש בטענת העזר ל$r = k$
נניח בשלילה כי $m > k$ ע"פ טענת העזר זמן הסיום של האלג' החמדן קטן או שווה לזמן שבו האלג האחר סיים את מסימותיו הk.

2.2 הרצאה מס.2

2.2.1 בית תזמון חדשה

חהנהח בי"ס יש צורך לארגן חדרים לפעילויות הוראה. כל פעילות היא קטע בזמן אי אפשר לקיים שתי פעיליות בו זמנית באותו החדר. רוצים למזער את מס' החדרים שיש

להוראה.

אינטואיציה: אם יש איזשהוא רגע שבו מתקיימים d פעיליות נצרכך לפחות d חדרים.

טענה: יהיה d^* המס' המירבי של פעיליות הוראה המתקיימות בו זמנית אז ניתן לשכן ב d^* חדרים יתר על כן, ניתן למצא השמה של שיעורים לחדרים ע"י אלג' חמדן.

האלגוריתם: נעבור על הקטעים(של השיעורים) משמאל לימינה ע"פ שעת ההתחלה שלהם כל שיעור נפנה לחדר הפנוי הראשון.

הוכחת הטענה: ברור שנדרשים לפחות d^* חדרים ע"מ לשכן אתהשעורים נראה שהאלכג' החמדן אכן נותן לנו .... כזה. נעבור על הקטעים כסדרה ונביט במשרה הראשונה שבו אנו נכשל, זהו המצב הראשון הבו כל החדרים $1 \ldots d^*$ תפוסים ויש לנו שיעור נוסף שצריך לצרף.

2.2.2 בעיה cache

יש לנו זיכרון cache(בעברית זכרון מטמון) המכיל נאמר k יחידות זכרון "דפים" ואנו נזדקקים במהלך ריצה של המחשב ליחידות שחלקן נמצא כרגע במטמון ומפעם לפעם גם לדף שנמצא בזיכרון איטי יותר וגדול יותר.

כל פנייה לדף יכולה להיות קליעה(כלומר הדף הרצוי נמצא במטמון) או "החטאה" miss במצב כזה אנחנו מסלקים איזשהו דף מן המטמון ומכניסים במקומו את הדף המבוקש(מהמטמון)

הבעייה: יש לנו זכרון שמכיל k דפים ומאוכלס בתחילה על ידי הדפים $x_1 \ldots x_k$ בהמשך תהיינה דרישות לדפים מתוך הקבוצה $P = p_1 \ldots p_n$ כאשר $x_1 \ldots x_k \in P$.
כאשר מכיע דרישה לדף $p \in P$ שאינו נמצא כרגע בזיכרון המטמון עלינו להכניס את p ולהוציא דף אחר(החטאה).

המטרה הוא למזער המספר הכולל של חטאות.

נניח כי במטמון נמצאים הדפים abce והקריאות לדפים יהיה בסדר הבא(משמאל לימין)dabfeabc

האלגוריתם החמדן: נקרא Furthest Into The Future שבו אנו נסלק מהמטמון אותו הדף שנדרש שוב בעתיד הרחוק ביותר.

השינויים במטמון יהיו באופן הבא:

$$\begin{array}{ccc} abce & , & dabfeabc \\ abde & , & abfeabc \\ abfe & , & c \end{array}$$

משפט FF: לכל $k < n$ ולכל סדרה של דרישות דפים לאלג' FF יהיה מספר מזערי של החטאות.

הערה: באופן עקרוני אנחנו מתירים לאלגוריתם גם לבצע פעולת סליקה של דף שאינו דרוש כרגע. אלגוריתם שאיננו עושה צעדים כאלה יקרא אלגוריתם מצומצם.

מסקנה אינטואיטיבית: האלגוריתם הטוב ביותר הוא אלגוריתם מצומצם, כי האלג' הלא מצומצם הכניס ברגע מסויים בדף שאינו נדרש לתוך זכרון המטמון. נבנה אלג' אחר A' שמבצעת אותן פעולות כמו A לפרט שהוא לא עושה את הפעולה הלא דרושה הזו, אז A' יותר טוב מ A אזי A לא הטוב ביותר.

טענה: יהיה S אלג מצומצם שפעולותיו מזדהות עם אלה של FF עד זמן j. אזי אלג' S' המתלכד עד FF לפתחות עד זמן $j+1$ ורואים כי $\mathrm{cost}\left(S'\right) \leq \mathrm{cost}\left(S\right)$

הוכחה: נמשיך ונראה ש S וכם FF ביחד אם גם בזמן $j+1$ הם זהים.

פרק 3

תרגול מס.?

3.1 קוד האופמן

הבעיה: נתון א"ב $A=\{a_1,\ldots,a_n\}$ לכל אות ב A נתונה התדירות שלה $f\left(a_i\right)$ כך ש $\sum_{i=1}^{n} f\left(a_i\right)=1$. נרצה לקודד טקסט שתדירויותייו נתונות ע"י f ע"י קוד בינארי $C:A\rightarrow\{0,1\}$ כך ש $L=\sum_{i=1}^{n} f\left(a_i\right) l\left(c\left(a_i\right)\right)$ יהיה מינימאלי (L נקרא אורך הקידוד הממוצע)

דרישות על c:

1. דרישה מינימאלית היא ש c יהיה חד חד ערכי
2. הרחבה של c לרציפים של אותיות מ A כלומר: $c':A^*\rightarrow\{0,1\}^*$, $c'\left(\alpha_1,\alpha_2,\ldots\alpha_n\right)=c\left(\alpha_1\right)c\left(\alpha_2\right)\ldots c\left(\alpha_n\right)$ תהיה חד חד ערגית(כלומר לא יהיה $c\left(0\right)='0', c\left(1\right)=00$)

הגדרה: קוד c יקרא חסר רישא אם לכל שתי מילות קוד $\omega_1,\omega_2\in\mathrm{Image}\left(c\right)$ מתקיים ש ω_1 איננו רישא של ω_2 כלומר קיים $\beta\in\{0,1\}^*$ כך ש $\omega_2=\omega_1\beta$

טענה: קוד חסר רישא ניתן לפענות יחיד.

עצי קודוד: הם ייצוג לקודים חסרי רישא. לקוד נתון נתאים עץ בינארי שעליו יתאימו למילות הקוד שלו. כאשר הבן השמאלי של קודקוד מסויים יקבל על ידי שרשור 0 והבן הימני על ידי שרשור 1

רעיון: נקודד אותיות יותר נדירות ע"י מילים ארוכות ואותיות נפוצות ע"י מילים קצר-ות.

3.1.1 קידוד האופמאן

1. נמצא את האותיות ב A שמופיעות הכי מעט x,y
2. נאחד אותן לאות אחת z בעלת תדירות $f\left(z\right)=f\left(x\right)+f\left(y\right)$
3. נגדיר א"ב $A'=\left(A\setminus\{x,y\}\cup\{z\}\right)$ ונריץ שוב את קוד האופמן על A'

טענה: בעץ אופטימאלי קודקוד יש לו שני בנים או אפס.

הוכחה: נניח בשלילה יש קודקוד v עם בן אחד. אז נבנה T' עץ המתקבל מחיבור ישיר של בנו של v לאביו. עץ זה מקצר את אורך הקידוד של חלק מהאותיות מבלי להאריך את של האחרות שלומר T' טוב מ T. בסתירה לזה כי T אידיאלי.

טענה 1: קיים עץ אופטימאלי שבו x,y(האותיות הנדירות ביותר) הם אחים ברמה התחתונה בעץ.

הוכחה: יהי T עץ אופטימאלי לפי הטענה הקודמת יש לו שני קודקודים אחים ברמה התחתונה. נסמנם z_1, z_2. נבנה עץ T' שבו נחליף את x ב z_1 ונראה ש T' אופטימאלי.

$$
\begin{aligned}
L(T) - L(T') &= \sum_{i=1}^{n} f(a_i) \underbrace{d_T(a_i)}_{\text{עומק}} - \sum_{i=1}^{n} f(a_i) d_{T'}(a_i) \\
&= f(x) d_T(x) + f(z_1) d_T(z_1) - f(x) d_{T'}(x) - f(z_1) d_{T'} \\
&= f(x) d_T(x) + f(z_1) d_T(z_1) - f(x) d_T(z_1) - f(z_1) d_T(x) \\
&= \overbrace{(f(x) - f(z_1))}^{\leq 0} \overbrace{(d_T(x) - d_T(z_1))}^{\leq 0} \geq 0
\end{aligned}
$$

אפשר להחליף את $d_{T'}$ ב d_T כי T ו T' זהים עבור $A \setminus \{x, z_1\}$

שתי החלקים הם קטנים מאפס כי הקודקוד נמצא ברמה התחתונה ביותר, וכי יש לו תדירות מינימאלית.

טענה 2: (הוכחת נכונות האלג') בהינתן A, f נגדיר $A' = (A \setminus \{x,y\}) \cup \{z\}$ כאשר x, y הם האותיות המינימאליות ב A ו $f(z) = f(x) + f(y)$. אם T' הוא אופטימאלי עבור A' אז T המתקבל מ-T' ע"י החלפת העלה של z בעץ של $\{x,y\}$ אופטימאלי עבור A

הוכחה:

$$
\begin{aligned}
L(T) &= \sum_{a \in A' \setminus \{z\}} f(a) d_T(a) + f(x) \underbrace{d_T(x)}_{d_{T'}(z)+1} + f(y) \underbrace{d_T(y)}_{d_{T'}(z)+1} \\
&= \sum_{a \in A' \setminus \{z\}} f(a) d_t(a) + \underbrace{f(x) d_{T'}(z) + f(y) d_{T'}(z)}_{d_{T'}(z) f(z)} + f(x) + f(y) \\
&= L(T') + f(x) + f(y)
\end{aligned}
$$

יהי P עץ אופטימאלי עבור A כך ש x, y עלי P בו ברמה התחתונה ביותר(קיים לפי טענות קודמות) יהי P' עץ המתקבל מ P ע"י הלעפת תת העץ של $\{x,y\}$ העלה z אז מאופטימאליות T' נקבל:

$$
\begin{aligned}
L(T') &\leq L(P') \\
L(P) &= L(P') + f(x) + f(y)
\end{aligned}
$$

ועל כן

$$
\begin{aligned}
L(t) &= L(T') \\
&\leq L(P') + f(x) + f(y) \\
&= L(P)
\end{aligned}
$$

ולכן מאופטימאליות P סיימנו.

פרק 4

אי שוויון Kraft

טענה: אם $l_1 \dots l_n$ הם אורכי מילות קוד של קוד חסרי רישא אז $\sum 2^{-l} \leq 1$

הוכחה: נניח $l_1 \geq l_2 \geq \dots \geq l_n$ נתבונן בעץ המתאים לקוד ונשלים אותו לעץ שלם בעומק l_1. לעץ המלא יש 2^{l_1} עלים כל עלה העץ המקורי ברמה l_i תורם $2^{l_1-l_i}$ עלים לרמה התחתונה לכן

$$\sum_{i=1}^{n} 2^{l_1-l_i} \leq 2^{l_i}$$

משל.

טענה: אם $l_1 \dots l_n$ טבעיים כך ש $\sum 2^{-l_i} \leq 1$ אז קיים קוד חסר רישא שאלה אורכי מילות הקוד שלו.

פרק 5

הרצאה מס.?

המשך הוכחת אופטימאליות של FF
ניח S אלגוריתם כלשהוא לפתרון הבעיה ונומר שהוא מתלקד עם FF עד זמן j.
אזי יש אלג' S' לפתרון הבעיה שמקיים שתי תנאים:

1. מתלקד עם FF $j+1$ זמן
2. המחיר של S' לא עולה על המחיר של S.

תזכורת: נזכיר כי ראינו כי די לנו לדון במקרה ש S אלג' מצומצם כלומר הוא לעולם אינו מסלק דף אלה כשיש צורך. ראינו גם שכל אלג' שאינו מצומצם ניתן למצא אלג' אחר מצומצם שמחירו אינו גבוה יותר.

בניית S': אם S מתלכד עם FF גם בצעד ה$j+1$ אזי ניקח $S=S'$.
אחרת:
(הרעיון) עד הצעד ה j $S = S'$ בצעד ה $j+1$ הוא עושה כמה ש FF עושה. S' ינסה "לישר קו" עם S מהר ככל האפשר.
לפי ההנחה בצעד $j+1$ S דרש את f ו FFדרש את e אבל $e \neq f$
הם ימשיכו ביחד עד שיקרא אחד הדברים הבאים:

1. נדרש דף f, $e \neq g$ וS מסלק את e לטובתו. S' יסלק את f לטובת g ומכאן ייצר מצב $S' = S$
2. הדף f נדרש: S יסלק לטובתו את e ואת S' אינו עושה דבר מכאן $S' = S$.
3. נדרש f, S מסלק את $e \neq e'$ לטובת f. S' מחליף את e' ב e

מההגדרה של FF נובע כי הזמן הראשון שהו f נדרש קודם לזמן הראשון שבו e נדרש.

פרק 6

הרצאה מס.?

6.1 האלג' החמדן לעץ פורש מינימאלי.

הקלט: גרף $G = (V, E)$ ופונקצית משקל $w : E \to \mathbb{R}^+$

הפלט הרצוי: עץ פורש ב G בעל משקל כולל מזערי(המשקל על עץ T מוגדר כ $\forall e \in T : \sum w(e)$)

הערה: בעית העץ הפורש המינימאלי והמקסימאלי שקולות בעצם.

מדוע: בכל עץ פורש בגרף עם n קודקודים יש $n - 1$ צלעות לכן אם נחליף בכך צלע e את המשקל $w(e)$ במשקל $w'(e) = M - w(e)$ כך ש M גדול מספיק.

האלג החמדן: בכל צעד צרף את הצלע בעלת המשקל המירבי כך שבידך עדיין יער.

ההקשר הרחב ביותר: יש קב' בסיס E ומשפחה $\mathcal{F}$ של תת קבוצות של E. (בדוגמה הקודמת $\mathcal{F}$ אוסף כל היערות ב G)

נניח ש $\mathcal{F}$ תורשתית זאות אומרת סגורה למעבר לתת קבוצה $\Leftrightarrow$ סגורה להשמטת איברים

ז"א $A \in \mathcal{F}$ אזי $B \subseteq A \Leftarrow B \in \mathcal{F}$

כמו כן יש פ' משקל $w : E \to \mathbb{R}^+$ ואנו רוצים לפתור הבעיה הבאה: "מצא $A \in \mathcal{F}$ כך ש $\forall e \in A : \sum w(e)$ מקסימאלי

6.1.1 עוד דוגמה

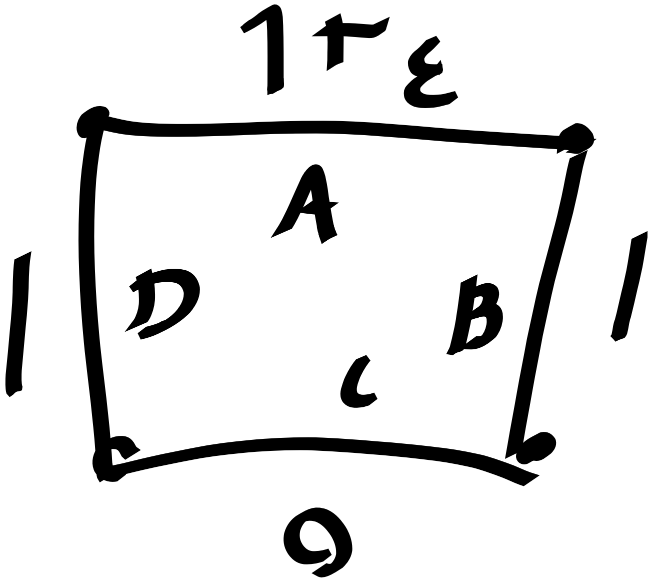
יהיה G גרף, זיווג(matching) ב G זהו אוסף צלעות ללא קודקודים משותפים ביניהם.
בעיית הזיווג הממושקל המקסימאלי:

קלט: גרף $G = (V, E)$ ופ' $w : E \to \mathbb{R}^+$

פלט: מצא זיווג M ב G בעל משקל מירבי ז"א $\forall e \in M : \sum w(e)$ מקסימאלי.

6.2 האלגוריתם החמדן לבעיה

נתחיל מ $S = \emptyset$. בכל צעד צרף ל S איבר e כך ש: $S \cup \{e\} \in \mathcal{F}$ ו $w(e)$ מקסימאלי התמאי זה.



איור 6.1: בעית מיזווג מקסימאלי שהאלג' החמדן נכשל בה

ההאצה של האלג החמדן תהיה באופן הבא:

1. $S=\emptyset$
2. $S=\{A\}$
3. $S=\{A,C\}$

אבל רואים כי הבחירה בנכונה היר $S=\{B,C\}$

קל לראות שהדוגמה שבנינו זה עתה ניתנת להכללה:

נניח שיש ב $\mathcal{F}$ שתי קבוצות $A,B\in\mathcal{F}$ כך ש $|B|>|A|$ ואין אף איבר $e\in B\setminus A$ כך שגם $A\cup\{e\}\in\mathcal{F}$

נראה שאם יש ב $\mathcal{F}$ שתי קב' A,B כנ"ל אזי האלג החמדן ייכשל על $\mathcal{F}$

המשקלות: על איבר $a\in A$: $w\left(a\right)=1+\varepsilon$

על איבר $e\in B\setminus A$: $w\left(e\right)=1$

על כל איבר אחר ב E: $w\left(e\right)=0$

מה יעשה האלג החמדן:

יצרף בזה אחר זה את האיברים שבA עד שיגיע ל $S=A$(כי אלו האיברים הגדדים ביותר). הוא יעצר כי אין איבר ב B שניתן לצאף ל A ולהישאר ב . המשקל המתשבל: $|A|\left(1+\varepsilon\right)$.

יש גם האופציה לבחור ב $B\in\mathcal{F}$ במקרה זה המשקל שנקבל הוא $\le|B|$אם $|A|\left(1+\varepsilon\right)<|B|$* האלג החמדן לא מוצא את הפתרון הטוב ביותר. היות שע"פ ההנחה $|A|<|B|$ יש $\varepsilon>0$ שבשבילו * תקף.

משפט: תהיה $\mathcal{F}$ משפחה תורשתית של תת-קב' של הקב' E. האלג החמדן יצליח למצא $S\in\mathcal{F}$ בעלת משקל מירבי לכל $w:E\rightarrow\mathbb{R}^{+}\Leftrightarrow$ לכל $A,B\in\mathcal{F}$ כך ש $e\in B\setminus A$ כך ש $A\cup\{e\}\in\mathcal{F}$

6.3 מטרואידים

תהיה $\mathcal{F}$ משפחה תורשתית של תת קב' של הקבוצה E אומר ש $\mathcal{F}$ מקיימת את תכונת ההחלפה אם לכל שתי קבוצות $A, B \in \mathcal{F}$ כך ש $|A| < |B|$ יש $e \in B \setminus A$ כך שגם $A \cup \{e\} \in \mathcal{F}$

הגדרה: משפחה תורשתית של קבוצות $\mathcal{F}$ המקיימת את תכונת ההחלפה נקראת אוסף הקבוצות הבלתי תלויות של מטרואידים

משפט: תהיה $\mathcal{F}$ משפחה תורשתית של קב' האלג' החמדן מוצא את $A \in \mathcal{F}$ בעלת משקל מירבי לכל פ' משקל $w \Leftrightarrow \mathcal{F}$היא אוסף הקב' הבלתי של מטרואידים.

דוגמה: יהיב E אוסף סופי של ווקטורים במרחב ווקטורי כלשהוא. $\mathcal{F} \ni A$כך ש $E \supseteq A \Leftrightarrow A$ בלתי תלוייה חיניארית. נסים לב ש $\mathcal{F}$היא אוסף הקב' הבלתי תלויות של מטרואידים.

תורשתית: אם S ב"ת, $W \subseteq S$ אז כם W בת"ל

תכונת ההחלפה: אם $A, B \in \mathcal{F}$ (ז"א שתיהן בת"ל) $|A| < |B|$ אזי $\dim(B) > \dim(A)$ ולכן יש $x \in B \setminus A$ כך שכם $A \cup \{x\}$ בת"ל.

משפט: יהיה $G = (V, E)$ כרף ותהיה $\mathcal{F}$ אוסף כל ב $S \subseteq E$ שהן יער כם $\mathcal{F}$ היא אוסף הקב' הב"ת של מטרואיד

פירוש הטענה: יהיה $G = (V, E)$ גרף קשיר(אפשר גם לא קשיר) ויהיו $A, B \subseteq E$ שהן יערות. $|A| < |B|$ אזי יש $e \in B \setminus A$ כך שגם $A \cup \{e\}$ יער

נסמן: u_i מספר הקודקודים ברכיב הקשירות ה i של היער (V, A) ו $\sum u_i = n$

הוכחה: נסמן ב n את מס' הקודקודים ב G ונסמן ב k את מס' הצלעות ב A, $|A| = k$.
מנפר רכיבי הקשירות ביער היא $n - k$.
צלע ב B פסולה מלהצטרף ל $A \Leftrightarrow$ שני קדקדיה הם באותו רכיב קשירות של (V, A) ז"א מטרתנו להראות שיש ב B צלע הקשורה בין שני רכיבים שונים של (V, A).
מס' הצלעות של B ששני קדקודיהן ב R_i הורא$\leq u_i - 1 = |R_i| - 1$
לכן נפשלו $\leq k = n - (n-k) = \sum u_i - (n-k) = \sum_{i=1}^{n-k} (u_i - 1)$ מן הצלעות שב B.
אבל $k = |A| < |B|$ ולכן הותרה ב V לפחות צלע אחת מותרת.

6.4 תכנון דינאמי Dynamic Programming

6.4.1 כפל ארוך של מטריצות

אם מכפילים מטריצות $A_{r \times S} \times B_{S \times t} = C_{r \times t}$ פעולת הכפל עולה $\mathcal{O}(r \times s \times t)$ נניח שרוצים להכפיל $A_1, A_2, \ldots A_n$ כש A_iהיא מטריצה $\alpha_{i-1} \times \alpha_i$

פרק 7

תרגול מס.?

7.1 מטרואידים

כל מטרואיד מוגדר על ידי זוג (S,I) כאשר S העולם שלנו(קבוצה סופית בדרך כלל) ו $I \subseteq 2^S$[1] הקבוצות הבלתי תלויות[2]. כאשר (S,I) מקיימים:

1. תורשתיות: אם $B \in I$ ו $A \subseteq B$ אזי $A \in I$
2. תכונת ההחלפה: אם $A, B \in Z$ כך ש $|A| < |B|$ אזי קיים איבר $b \in B$ כך ש $b \notin A$ ו $A \cup \{B\} \in I$

דוגמה: M היא מטריצה מעל שדה כלשהוא בגודל $k \times n$ כך ש $k < n$. עבור M נגדיר מטרואיד:

- S קבוצת העמודות של M.
- I, $T \in I$ אם"ם איברי T הם בלתי תלויים ליניארית[3].

רוצים להוכיח כי זה מטרואיד

טענה: (S,I) הוא מטרואיד

הוכחה:

תורשתיות: אם קבוצה A היא בלתי תלויה ליניארית אזי לכל $x \in A$ גם $A \setminus \{x\}$ בלתי תלויה ליניארית.

תכונת ההחלפה: נניח כי $B, A \in I$ כך ש $|A| < |B|$. אזי $\dim(\mathrm{span}(B)) = |B|$ ו $\dim(\mathrm{span}(A)) = |A|$[4] נניח בשלילה שלא קיים איבר $b \in B, b \notin A$ כך ש $A \cup \{b\} \in I$ אזי כל $b \in B \setminus A$ נמצא ב $\mathrm{span}(A)$ ככן $\mathrm{span}(B) \subseteq \mathrm{span}(A)$. בסתירה ליחס בין המימדים של $\mathrm{span}(A)$ ו $\mathrm{span}(B)$
משל.

דוגמא: $S = \{1,2,3,4,5\}, I = \{\{1,2\},\{1\},\{2\},\{3\},\emptyset\}$. זה לא מטרואיד כי אם $A = \{1,2\}, B = \{3\}$ אזי $\{1,3\} \notin I, \{2,3\} \notin I$, אם $\{2,3\} \in I$ אז זה היה מטרואיד.

[1] הסימון 2^S פירושו $\{T | T \subseteq S\}$
[2] גם אפשר לקרא להם המלפפונים, אין כשר כרגע
[3] פה כבר יש משמעות לשם הזה.
[4] מכיוון כי האיברים ב A והאיברים בB בלתי תלויים ליניארית

דוגמא: S כלשהוא, $I = 2^S$. מטרואיד.

דוגמא: S כלשהוא $I = \{T | T \subseteq S, |T| \leq k\}$ גם מטרואיד.

7.1.1 למה למדנו את זה?

נתונה לנו פונקצית משקל חיובית על איברי S, $f : S \to \mathbb{R}^+$ אנו מעונינים למצא קבוצה בלתי תלויה $T \in I$ שמשקלה מקסימאלי.

משפט: האלג' החמדני עובד במטרואיד

האלג' החמדני: נסדר את איברי S ע"כ משקלם, מהכבד לקל. נעבור על איברי S לפי סדר זה ונוסיף כל איבר ל T אם"ם הוא לא הופך את T לקבוצה תלויה(כלומר $T \notin I$)

אלגוריתם 7.1 Greedy(S,I,f)

Greedy(S,I,f)
–$T \leftarrow \emptyset$
–for $\forall s \in S$ (by order of f)
—-if($T \cup \{s\} \in I$) $T \leftarrow T \cup \{s\}$

7.2 Unit Time Task Scheduling

נתונה קבוצת מסימות $1 \ldots n$ כל משימה מתבצעת ביחידת זמן 1. לכל מסימה יש deadline d_i אם המסימה מתבצעת אחרי הדידלין נשלם כנס f_i רוצים שיבוץ שבו התשלום מינימאלי.

	1	2	3	4	5
d_i	3	2	1	2	3
f_i	5	10	5	1	15

טבלה 7.1: דוגמה לערכים d_i, f_i

אנחנו מחפשים סדר מטרואיד נתון קבוצה.

הגדרה: עבור סידור מסויים המשימות שבוצעו בזמן יקרא המקדימות והיתר המאחרות.

טענה: נניח שכל המשימות המקדימות מבצעות לפני המאוחרות

הוכחה: נניח שיש מאחרת שמוצעת לפני מקדימה נחליף ביניהן והכנסות לא ישתנו.

טענה: אפשר להניח שהמסימות המקדימות מבוצעות לפי סדר הדדלין שלהן

הוכחה: אחרת נחליף.

מסקנה: בעיה שקולה: למקסם את סכום הקנסות של המשימות שבוצעו בזמן.

מטרואיד:

- S קבוצת המסימות
- I קבוצה A תקרא בלתי תלויה אס"ם ניתן לשים את כל איברי A בזמן

הוכחה:

- תורשתיות: טריוויאלי
- תכונת ההחלפה: הגדרה: $N_t\left(A\right)$ מס המשימות ב A שהדדלין שלהן הוא עד t כלומר $N_t\left(A\right)=\left\{i\in A|t_i\leq t\right\}$

טענה: $A\in I$ אס"ם לכל t מתקיים $N_t\left(A\right)\leq t$

הוכחה: כיוון ראשון:
אם קיים סידור ללא איחורים אזי לכל זמן t מספר המסימות שיתבצעו הוא לכל היותר t, מספר המסימות הרצוי לבצע בוא $N_t\left(A\right)$ לכן $N_t\left(A\right)\leq t$
כיוון שני:
נסדר את איברי A בסדר עולה ע"פ d_i נניח בשלילה שאין סידור חוקי, בזמן t כשננסה לשבץ את מסימס i, $d_i<t$, $d_i\leq t-1$ לתיח כן שיבצנו $t-1$ משימות הדדלין שלהן $d_j\leq d_i\leq t-1$ לכן $N_{t-1}\left(A\right)=t$ בסתירה

פרק 8

הרצאה מס.?

תזכורת: תהיה E קבוצה סופית אומרים ש I הוא אוסף הקבוצות הבלתי תלויות של מטרואיד עם קבוצת בסיס E אם I היא משפחה תורשתית(ז"א $A \in I$, $A \subseteq A$ גורר $B \in I$) המקיימת את תכונת ההחלפה.

$A, B \in I$, $|B| > |A|$ אז יש $x \in B \setminus A$ כך שגם $A \cup \{x\} \in I$

ראינו אם F משפחה תורשתית של קב' אשר איננה מקיימת את תנאי ההחלפה אז יש מערכת משקלות w על E המכשילה את האלג' החמדן כשהוא מנסה למצא קבוצה ב I בעלת משקל מירבי.

אמרנו למרות זאת, שאם תנאי ההחלפה מתקיים ז"א I היא משפחה הקבוצות הבלתי תלויים של מטרואיד אז האלג' החמדן יצליח לכל מערכת משקלות.

הגדרה: בסיס הוא קב' בלתי תלוייה בעלת גודל מקסימאלי(אינה מוכלת בקבוצה בלתי תלוייה אחרת) זה הוא האנלוג של עץ פורש ובאלגברה ליניארית זה בסיס של מרחב ווקטורי

הגדרה: C מעגל אם: קב' תלוייה(איננה ב I) שהיא מינימאלית בתנאי שזה ז"א אם $B \subsetneq C$ אז $B \in I$

הגדרה: חתך: קבוצה שיש לה חיתוך לא רק עם כל בסיס והיא מינימאלית בתנאי זה

8.1 תכנון דינאמי

הכפלה יעילה של סידרת מטריצות

הנחות: כפל מטריצה $A_{\alpha\times\beta}B_{\beta\times\gamma}$ מחירו $\alpha\beta\gamma$ פעולות

הבעיה: נתונות לנו n מטריצות $A_1 \ldots A_n$ כך ש A_i היא מטריצה $\alpha_{i-1} \times \alpha_i$. לכן ניתן לבצע את הכפל $A_iA_2 \ldots A_n$ היות שכפל מטריצות היא פעולה רסוציאטיבית תוצאת הכפל תהיה לכל הסגור חוקי נבחר בו. המליר לא דווקא שווה. רוצים למצא המסגור הזול ביותר.

דוגמה: כאשר המטריצות הם $A_1 \Rightarrow \alpha_0\alpha_1, A_2 \Rightarrow \alpha_1\alpha_2, A_3 \Rightarrow \alpha_2\alpha_3$ המחירים הם:

Operation	$\Rightarrow$	Price
$(A_1A_2)\,A_3$		$\alpha_0\alpha_1\alpha_2+\alpha_0\alpha_2\alpha_3$
$A_1\,(A_2A_3)$		$\alpha_0\alpha_1\alpha_3+\alpha_1\alpha_2\alpha_3$

הזכרנו כבר שמספר המסגורים המותרים הוא מספר קטלן הגדל מעריכית[1] עם n.
יש הרבה מסגורים שבהם נמצאים הסוגריים במקום מסויים אזי:

1. יש מושג מוגדק היטב של תת בעיה
2. כל תת בעיה כזו עלינו לפתור בפני עצמה באופן אופטימאלי
3. פתרונות גלובאליים שומים עשויים להזגקק לפתרונה של אותה תת בעיה

רעיון מרכזי: לזהות תת בעיות כאלה, לרשום את פתרונותים, לבנות מהן פתרון גלובאלי אופטימאלי.
בעצר אנחנו נחשוב לא רק את המכפלה $A_1\ldots A_n$ אלא את כל המכפלות $A_k\ldots A_l$כדכ $k<l$ ונחשב כ"א מהביטויים בצורה האופטימאלית.
נגדיר לכל $k\leq l$ אז c_{kl} להיות המחיר המזערי לחישוב המעפלה $A_k\ldots A_l$. בסך הכל יש $\binom{n}{2}$ זוגים. הגודל שבו התעניינו איננו אלא C_{1n}
נבנה מערך דו מימדי שבמקום הk,l שלו נרצה לרשום C_{kl}. $C_{kk}=0$, $C_{k,k+1}=\alpha_{k-1}\alpha_k+\alpha_k\alpha_{k+1}$
ע"מ לחשב את C_{kl} אנחנו נעבור על כל הדרכים האפשריים שבהן יכולה להיות פעולת העפל האחרונה בחישור אופטימאלי של $A_k\ldots A_l$ נאמר שזה קורה הזמן t
לכן $C_{kl}=\min_t\left(C_{kt}+c_{t+1,l}+\alpha_{k-1}\alpha_t\alpha_l\right)$

[1]אקספוננציאלית

פרק 9

הרצאה מס.?

הבעיה: שרשרת של כפלי מטריצות.

נזכיר יש לנו n מטריצות $A_1 \dots A_n$ כשהמימדים של A_i הם $\alpha_{i-1} \times \alpha_i$ אנו מניחים שהכפלת מטריצות $(r \times r)$ ב $(p \times q)$ שולה pqr בגלל החל האסוציאטיבי יש מבחר גדול(מעריכי ב n) של מסגורים אפשריים ומחפשים את המססגור שייתן מליר מזערי לפעולת הכפל.

1. יש מושג טבעי של תת בעייה במערכת שלפנינו $A_k \dots A_l$

2. בפתרון כלל אופטימאלי התת בעיות נפתרות באופן אופטימאלי אף הן

3. "מלמטה למעלה", "מן הפרט אל הכלל" ניתן לצרף יחד פתרונות של תת בעיות ולקבל פתרון של הבעייה הכוללת.

4. לא מנסה למצא ישירות פתרון כולל אופטימאלי. אלה אותם לפתרון כולל אופטימאלי

מגדירים c_{kl} כמחיר המזערי של החישוב $A_k \dots A_l$. אתחול: $c_{kk} = 0$, $c_{k,k+1} = \alpha_{k-1}\alpha_k\alpha_{k+1}$

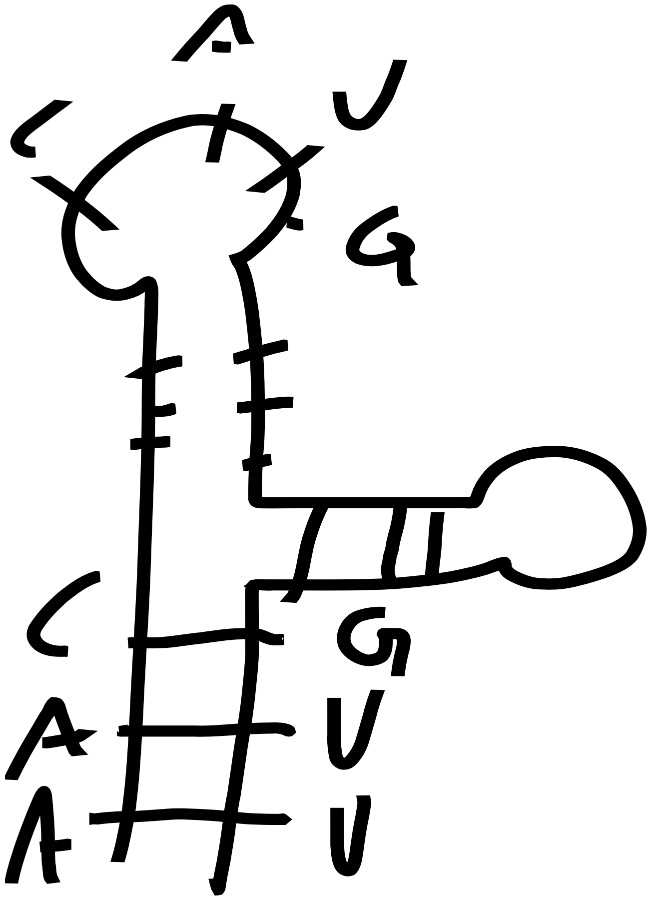
הגדרה: $c_{kl} = \min_{k \le t \le l-1} \left(c_{kt} + c_{t+1,l} + \alpha_{k-1}\alpha_t\alpha_l \right)$.

בעיה בביואינפורמטיקה: המבנה השניוני של מולקולט RNA:

על מולקולה של RNA ניתו לחשוב כמולה בא"ב ACGU לאותיות האלה קוראים בסיסים, בגלל התכונות הכימיות של הבסיסים הם עשויים ליצא ביניהם קשרים ע"פ הכלל $C - G$ ו $A - U$ קשר זה מקטין את האנרגיה הפוטנציאלית. והמולקולה נוטה ללהתארגן בצורה שממזערת את האנרגיה הזו.

הבעיה: נתון רצף באותיות A, C, G, U מצא את זיווגהבסיסים בעל האנרגיה המזער-ית.

1. מידת הגמישות של המולקולה מוגבלת ולכן על מנת ששני בסיסים יזווגו עליהם להיות במחכחך ≤ 4 בסידרה.



איור 9.1: מולקולת RNA

2. אין "פסאודו קשרש" אזי. נניח $i_1 < i_2 < i_3 < i_4$ לא ייתכן שזווגו הבסיסים במקומות i_1, i_3 וכן במקומות i_2, i_4

איור 9.2: קשרים

איך ניגשים לפתרון הבעייה: המקום לנסות ולמצא בבת אחת את זיווג הבסיסים האופטימאלי אנחנו נחשב שת הפתרון לתת בעיות המתאימות לתתת קטעים של סידרת RNA. דהיינו נגדיר $OPT\,(i,j)$ זוהי האנרגיה המזערית האפשרית בזיווג בסיסים של הקטע ממקום ה RNA המנתון ממקום i עד למקום j.

9.1 נחזור לבעיה של מטריצות

מהי הסיבוכיות של האלגוריתם למציאת הדרך האופטימאלי לכפל שרשרת של מטר-יצות?

אנחנו ממלאים חצי מטריצה של ערכים אזי $\frac{n^2}{2}$, כל חישוב של c_{kl} מחירו n ובסך הכל זה $\frac{n^3}{2}$ אזי $\mathcal{O}\left(n^3\right)$

9.2 רימוזום עוד פעם

נתון רצף באותיות A,C,G,U רוצים לזווג כמה שיותר זוגות ע"פ הכללים הבאים:

1. $C-G, A-U$ (לכל היותר בן זוג אחד)
2. אין "קשת" קצרה מ 4
3. אין הצטלבויות

נקרא בשם $OPT\left(i,j\right)$ לערך המיטבי המתאים לקטע בסידרה הנתונה המתחיל במ-קום ה i ומסתיים במקום ה j

בהנחב כי $l>k$ אזי:

$$OPT\left(k,l\right)=\max\begin{pmatrix}OPT\left(k,l-1\right)\\1+\max\left(OPT\left(k,t-1\right)+OPT\left(t+1,l-1\right)\right)\end{pmatrix}$$

בעיה: נתון לנו שתי מילים $x_1\dots x_n$, $y_1\dots y_n$ בא"ב Σ כך ש $|\Sigma|=20$ כמו כן נתון לנו (פעם ולתמיד) טבלה a_{ij} המספקת הערכה למידת השוני בין האות ה i ב Σ לאות ה j ב Σ.

בדרך כלל מחפסים התאמה לא דווקה מלאה בין האותיות $\dots x_1x_s$ ל y_2,y_2 תוך מתן אפשריות כם ל "דילוג"

דרישות:

1. התאמה צריכה להיות ללא הצלבות
2. על התאמה בין האות σ_i המופיעה ב x לאות σ_j ב y "נשלם מחיר" של a_{ij}, כמובן $a_{ii}=0$
3. השמתה אות ב x או אות ב y שאינן מזווגות אנחנו משלמים מחיר של Δ

המטרה למצא ההתאמה הזולה ביותר

התאמה ניתנת לתיאור חד ערכי ע"י מהלך היוצא מ $(1,1)$ בטבלה ומגיע לקואור-דינטת ה (m,n) וכל צעד נע שמאלה ימינה או באלכסון.

האינטרפרטציה:

$\rightarrow$ דילוע על אות ב x

$\uparrow$ דלוג על אות ב y

$\nearrow$ התאמה מאות ב x לאות ב y

כרגיל בתכנות דינאמי אנו רוצים לבטא את c_{ij} באמצעות cים קודמים $C_{i,j}=\min\left(c_{i,j-1}+\Delta,c_{i-1,j}+\Delta,c_{i-1,j-1}+a_{x_iy_j}\right)$

פרק 10

תרגול מס.?

10.1 Bellman-Ford

בעיה: נתון גרף מכוון $G=(V,E)$ ו $\omega : E \to \mathbb{R}$ נתון קודקוד מסויים $s \in V$ ונרצה למצא את המסלולים הקלים היותר ממנו לכל קודקוד אחר ב V(משקל של מסלול הוא סכום משקלי הצלעות שלו) אם לא קיים מסלול כללי נגדיר את המקחק להיות ∞ ואם יש מעגלים שליליים נפלוט "לא מוגדר".

טענה: אם ב G אין מעגלים שליליים אז אורך(בצלעות) כל המסלול המינימליים הוא קטן שווה ל $|V|-1$

הוכחה: נניח P מסלול אופטימאלי בין s ל u. אם אורך P גדול שווה ל $|V|$ אז הוא מכיל מעגל. מכוון שאין מעגלים שליליים ניתן להסיר אותו מ P ולקבל מסלול קל יותר. בסתירה לאופטימאליות.

אוסף הבעיות שהאלגוריתם הזה פותר: לכל $v \in V$ נגדיר את $A\left[v,l\right]$ להיות משקל המסלול הקל ביותר באורך קטן שווה ל i $(0 \leq i \leq |v|-1)$

נשים לב שאם אין מעגלים שליליים אז $\left\{A\left[v,|v|-1\right]\right\}_{v\in V}$ הם משקלים המסלו-לים הרצויים.

טענה: אם P מסלול קל ביותר u,v אז אם P עובר ב w אז $P=(P_1,w,P_2)$ כאשר P_1 ו P_2 הם המסלולים הקלים ביותר בין u,w ו w,v.

הוכחה: נניח ש P_1 לא אופטימאלי בין u ל w אז קיים P_1' קל ממנו בין u ל w ואז נתבונן ב $P=P_1'\omega P_2$ אז $\omega\left(P'\right)=\omega\left(P_1\right)=\omega\left(P_1'\right)+\omega\left(P_2\right)<\omega\left(P_1\right)+\omega\left(P_2\right)=P$.

אזי הנוסחה הריקורסיבית היא:

$$A\left[u,i\right]=\min\left(A\left[i,i-1\right],\min_{v\in T(u)}A\left[v,i-1\right]+\omega\left(v,u\right)\right)$$

הנוסחה נכונה מכיוון שאם P אופטימאלי באורך i בין s לu או שו ש P האורך $i-1$ ואז $A\left[u,i\right]=A\left[u,i-1\right]$ אחרת נבוננן בu שלפני u ב P אם נסיר את (v,u) מ-P נקבל אופטימאלי בין s ל v באורך קטן שווה ל $i-1$ ולכן $A\left[u,i\right]=A\left[v,i-1\right]+\omega\left(v,u\right)$

ניתן לשחזר את המסלול האופטימאלי בין s לכל $u\in V$ ע"י ידיעת מהו הקודקוד הרודם ל u במסלול הקל ביותר באורך $|v|-1$. זאת מכיוון שהמדלול האופטימאלי בין

S ל u מורכב ממסלול אופטימאלי בין s לאותו קודקוד קודם (v) בין כל המסלולים בכל האורכים משורש לצלע (v,u). מכיוון שהמסלול הקל ביותר ללא מגבלת אורך מזדהה עם המסלול הקצר ביותר הקטן שווה ל $|v|-1$, ניתן לבנות את המסלול בין s ל u כאמור לעיל

טענה: ב G אין מעגלים שליליים אם ורק אם $A\left[u,|v|\right]=A\left[i,|v|-1\right]$ לכל $u\in V$

הוכחה: נובע מהטענה בתחילת השיעור.

10.2 בעיה אחרת

הבעיה: נתון גרף מכוון $G=(V,E)$ ופונק' $\omega:E\rightarrow\mathbb{R}$ נרצה לחשב את משקל המסלול הקל ביותר בין כל זוג קודקודים או לפלוט "יש מעגלים שליליים"

אוסף תתי-הבעיות: נגדיר $A\left[u,v,i\right]$ להיות משקל המסלול הקל ביותר בין u לv באורך $\geq i$.

$$A\left[u,v,i\right]=\min_{x\in V}\left\{A\left[u,x,i-1\right]+\omega\left(x,v\right)\right\}$$

אבל זה בערך זה כמו להפעיל את Bellman Ford על כל הקודקודים.
ניתן להשתמש במקומו בנוסחה זו:

$$A\left[u,v,i\right]=\min_{x\in V}\left\{A\left[u,x,\frac{i}{2}\right]+A\left[x,v,\frac{i}{2}\right]\right\}$$

כאשר מתחיחים ב $A\left[u,v,1\right]=\begin{cases}0 & u=v\\ \omega\left(u,v\right) & \left(u,v\right)\in E\\ \infty & else\end{cases}$

הוכחת נכונות: נתבונן במסלול הקל ביותר בין u ל v(P) באורך $\geq i$. נניח ש x הוא הקודקוד האמצעי בו, אז אם $P=P_1xP_2$ אז P_1 אופטימאלי בין מליולים בין u לx באורך $\geq\frac{i}{2}$ ו P_2 אופטימאלי בין מסלולים בין x ל v באורך $\geq\frac{i}{2}$. (הוכחנו קודם את זה)

האלגוריתם: חשב את $A\left[\cdot,\cdot,1\right]$(נתון) באמצעות $A\left[\cdot,\cdot,1\right]$ ניתן לחשב את $A\left[\cdot,\cdot,2\right]$ ממנו $A\left[\cdot,\cdot,4\right]$ ועד $A\left[\cdot,\cdot,2^s\right]$כך ש $|v|-1\leq 2^s$.

הערב: ניתן לבדוק קיום מעגלים שליליים כמו מקודם.

ז"ר: חישוב $A\left[\cdot,\cdot,2i\right]$ מתוך $A\left[\cdot,\cdot,i\right]$ לוקח $O\left(|V|\right)$ לכל $(u,v)\in V^2$ ולכן סה"ך יש $S=O\left(\log|V|\right)$ איטרציות ולכן ז"ר $O\left(|V|^3\log|V|\right)$

פרק 11

הרצאה מס.?

11.1 בעיית הזרימה ברשת

הקלט: רשת, כלומר גרף מכוון יחד עם שני קודקודים מצוינים $s \neq t \in V$ כאשר s נקרא המקור ו t הבור וכן פ' קיבול $C : E \to \mathbb{R}^+$
מניחים שדרגת הכניסה של S היא 0 ושדרגת היציאה של t היא אפס.

זרימה: זו פ' $f : E \to \mathbb{R}^+$ המשיימת:

1. בכל צלע e מתקיים $c(e) \geq f(e) \geq 0$
2. לכל $v \neq s, t$ מתקיים $\sum_{in} f(e) = \sum_{out} f(e)$

שטף של זרימה $v(f) = \sum_{outgoing} f(e)$

הפלט: זרימה מותרת f בעלת זרימה מירבי
זו בעית אופטימיזציה. יש איזשהוא תחום D(קבוצה) ופונקציה $g : D \to \mathbb{R}$ הבעייה למצא $\max_{x \in D} g(x)$

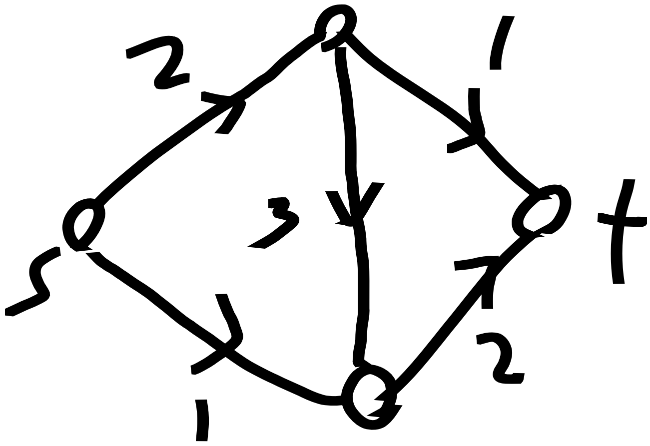
$$D = \{f(e_1), \ldots, f(e_n) | e_i \in E\}$$

רוצים למקסם את הביטוי $\sum f(e)$ עבור e יוצא מs

בעיה: נתונה רשת ונתון מספר חיובי k, האם יש זרימה בעלת שטף $\geq k$? אם מצאנו פתרון אז קל לאמת שהוא עומד בדרישות

חתך: חלוקה של v ל $v = A\dot{\cup}B$ כך ש $t \in B, s \in B$ נקראת חתך
הקיבול של החתך הוא מוגדר $C(A, B) = \sum_{e \in A \to B} c(e)$
לכל חתך C וכל זרימה f מתקיים $v(f) \leq c(A, B)$

משפט: ההשטף והחתך max flow min cut:
השטף המירבי של זרימה מסוימת שווה לקיבול המזערי של חתך ברשת.



איור 11.1: רשת

פרק 12

הרצאה מס.?

12.1 בעיית הזרימה ברשת

רשת: גרף מכוון $G=(V,E)$ שיש בו קודקוד $s\in V$ (מקור) וקודקוד $t\in V$ (בור) וכן פ' קיבול $C:E\to\mathbb{R}^{+}$. לצורך הדיון היום נניח כי C מקבלת רק ערכים שלימים.
כמו כן נניח שאין צלעות נכנסות לתוך s ואין צלעות יוצאות מ t.
זרימה ברשת הנ"ל $f:E\to\mathbb{R}^{+}$ המקיימת

1. לכל $v\neq s,t$ מתקיים $\sum_{\text{incoming e}}f(e)=\sum_{\text{outgoing e}}f(e)$(היוצא שווה לנכנס)
2. $\forall e:c(e)\geq f(e)\geq 0$
3. השטף של f מוגדר כי $v(f)=\sum f(e)$
4. הבעייה בהינתן הרשת למצא זרימה בעלת שטף מירבי.

בהינתן רשת Gוזרימה f אנו מגדירים את הרשת השאורית G_f עדלקמן זו רשת זרימה עם קב' קודקודים V מקור s ובור t.
קב' הצלעות של G_f היא איחוד של שני קבוצות: נסמן $\overleftarrow{e}$ הצלע ההפודה של e.

$$\{\vec{e}|\vec{e}\in E,f(e)<c(e)\}$$
$$\{\overleftarrow{e}|\vec{e}\in E,f(e)\geq 0\}$$

במקרה השני $c(\overleftarrow{e})$ בגרף הוא $f(e)$

12.2 הסכמה של Ford-Fulkerson

על מנת לפתור את בעית הזרימה ברשת G

1. צא מהזרימה $f\equiv 0$
2. בנה את הרשת השיורית G_f
3. מצא בה מסילה מכוונת מ S לt, P
4. הזרם על Pאת הערך המירבי האפשרי ב P

5. עדכן את f
6. חזור ל 2

טענה: (ההוכחה תבוא בהמשך) אם f זרימה ברשת G ואם אין ב G_f מסילה מכוונת מ s ל t אזי יש ב G אתך (A,B) כך ש $v(f)=c(A,B)$ ובפרט f אופטימאלי והחתך (A,B) מינימאלי.

תהיה f זרימה בG ו $A\subseteq V$ אז נסמן ב $f^{out}(A)$ את $\sum_{\text{outgoing e}} f(e)$

טענה: תהיה G רשת ו f זרימה בה, תהיה (A,B) חתך ברשת(ז"א $s\in A, t\in B, V=A\dot{\cup}B$) אזי $v(f)=f^{out}(A)=f^{in}(A)$

הוכחה: היות ש $v(f)=f^{out}(s)$ והיות ש $0=f^{out}(s)$ ניתן לרשום $v(f)=f^{out}(s)=f^{in}(s)$ מכיוון ש $f^{out}-f^{in}(s)=0$ לכל $v\neq s,t$

$$v(f)=f^{out}(s)-f^{in}(s)+\sum_{a\in A\setminus S}\left(f^{out}(a)-f^{in}(a)\right)=\sum\left(f^{out}(a)-f^{in}(a)\right)=f^{out}(A)-f^{in}(a)$$

מסקנה: נביט בטענה הנ"ל כש $A=V\setminus\{t\}$

$$\begin{aligned} v(f) &= f^{out}(A)=f^{in}(\{t\}) \\ f^{in}(A) &= 0 \end{aligned}$$

מסקנה: לכל זרימה f מתקיים גם $v(f)=f^{in}(t)$

הגדרה: אם (A,B) הוא חתך ברשת G אז מגדירים $c(A,B)=\sum_{e\in(A\to B)} c(e)$

מסקנה: לכל זרימה f ב G ולכלחתך (A,B) מתקיים $v(f)\leq c(A,B)$

הוכחה:

$$v(f)=f^{out}(a)-f^{in}(A)\leq f^{out}(A)=\sum_{r\in A\to B} f(e)<\sum_{e\in A\to B} c(e)=c(A,B)$$

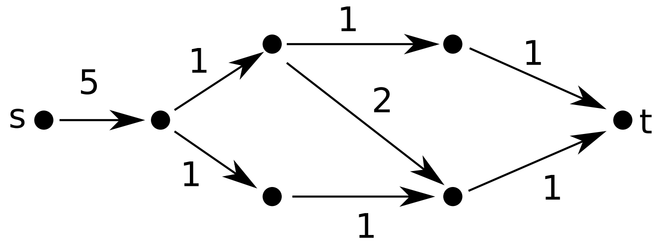
משפט: תהיה f זרימה ברשת G ונניח כי ברשת השיורית G_f אין מסילה מכוונת מ s לt.אז יש חתך (A^*,B^*) כך שהשטף של f שווה לקיבול החתך הזה, בפרט f היא בעלת שטף מירבי, ו (A^*,B^*) היא בעלת קיבול מזערי.

הגדרה: נגדיר כ A^* את קבוצת כל הקודקודים בV שניתן להגיע אליהם במסילה מעוונת מ S ברשת השיורית G_f

פרק 13

תרגול מס.?

13.1 רשתות זרימה



איור 13.1: רשת זרימה

הגדרה: רשת זרימה $G(V,E,c,s,t)$ כך ש (V,E) גרף מכוון. $s,t\in V$(מקור ובור) ,
$c:E\to\mathbb{R}^+$ לפעמים מגדירים$c(u,v)=0$ עבור $(u,v)\notin E$
מרחב הפתרונות האפשריים כן מכיל ב"זרימות" שהן $f:V^2\to\mathbb{R}$ המקיימת:

$$\begin{aligned}
\forall u,v\in V:\ f(u,v) &= -f(v,u)\\
f(u,v) &\le c(u,v)\\
\forall v\neq s,t\sum_{u\in V} f(u,v) &= 0
\end{aligned}$$

הבעיה: מצא את ה f כך ש $|f|=\sum_{u\in V} f(s,u)$ הוא מקסימאלי

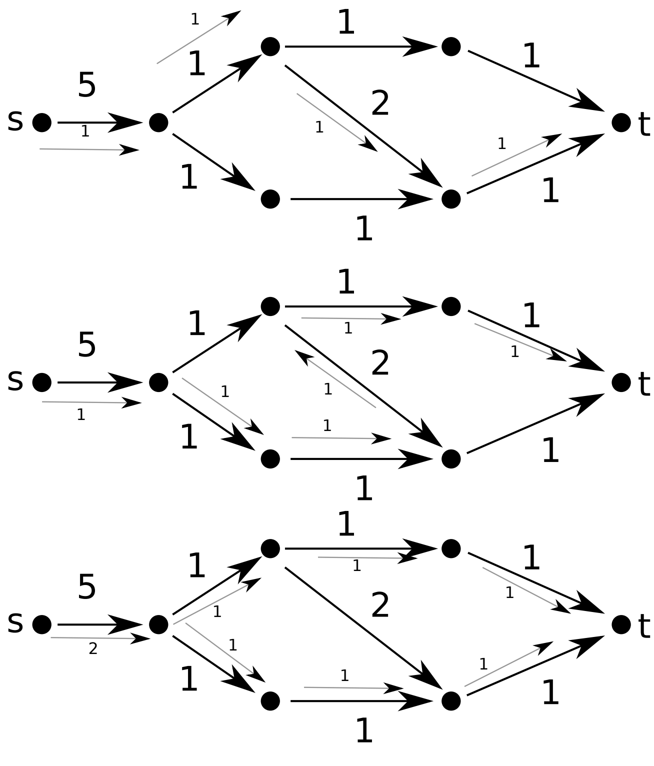
הגדרה: חתך ברשת זרימה הוא (S,T) כך ש $V=S\dot{\cup}T$ ו $s\in S$, $t\in T$.
הקיבול של חתך הוא $c(S,T)=\sum_{u\in S,v\in T}c(u,v)$ והזרימה $f(S,T)=\sum_{u\in s,v\in T}f(u,v)$
רואים מאילוצי הקיבול כי לכל $f(S,T)$ מתקיים $f(S,T)\le c(S,T)$
מוכיחים כי לכל חתך $f(S,T)=|f|$
לכן לכל f ולכל (S,T) מתקיים $|f|<c(S,T)$לכן אם נמצא f ו (S,T) כך ש $|f|c(S,T)$ אז f מקסימאלי ו (S,T) בעל קבולת מינימאלית
משפט השטף והחתך מראה שתמיד ניתן למצר f שממצב חתך מסויים הרשת

הגדרה: אם G רשת זרימה ו f זרימה נגדיר את הרשת השיורית G_f להיות: $V_f = V$, $E_f = \{(u,v) : f(u,v) \leq c(u,v)\}$ ו $c_f(u,v) = c(u,v) - f(u,v)$, s,t נשארים זהים[1]

אלגוריתם FF:

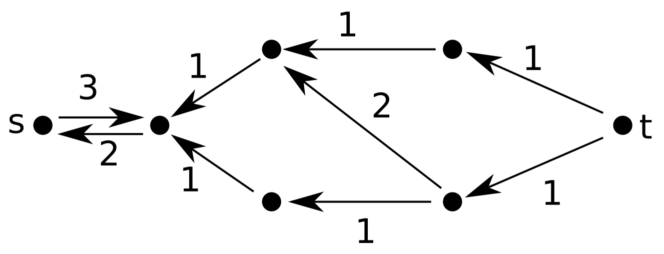
1. $f \equiv 0$
2. כך עוד קיימת מסילת הרחבה P
   (א) צור זריה g שמזרימה על P זרימה השווה למימימום בקיבולת על P ב G_f והוסף את g ל f.
3. החזר את f

נשים לב שאם f מקסימאלית אז (S,T) כן ש $\{$כך שניתן להגיע ל u מ$s\}= S$ הוא מינימאלית זה נותן גם דרך אלגוריתמית למצא חתך מינימאלי



איור 13.2: הרצת האלג על הרשת

[1] סים לב כי $E_f \not\subseteq E$ כי יתכן שמתווספות צלעות בעלות זרימה שלילית



איור 13.3: מצב הרשת הקיורית אחרי 2

13.2 דוגמה

נתונה לגה:

	מספר נצחונוצ
גליל עלון	20
מכבי ת"א	21
הפועל ת"א	20
הפועל י-ם	22

משחקים צפויים:
הפ' י-ם - הפ ת"א
הפ' י-ם - מכבי ת"א
הפ' תא - מכבי ת"א
הפ' תא - כליל עליון
מכבי ת"א - גליל עליון

הבעיה: נתונה S קבוצת קב' לכל אחת נתונה מס' הנצחונות עד כה $\{\omega_x\}_{x\in S}$ בין כל זוג קבוצות נתון מס' המשחקים הצפוי ביניהם $\{g_{xy}\}_{x,y\in S}$ (אין חשיבות בסדר בין x,y) נתונה $z\in S$ נרצה לדעת האם לz יש סיכוי לנצח(תיקו במקום הראשון נחשב נצחון)

הבעיה שקולה לשלה האם ניתן לקבוע את תוצאות המשחקים בין x ל y ששונים מ z כך שקבוצה אחת לא תנצח יותר מ $w_z+\sum_{x\in S} g_{xz}$

נגדיר רשת זרימה $v=\{s,t\}\cup\{u_{xy}:x,y\in S\setminus\{z\}\}\cup\{v_x:x\in S\setminus\{z\}\}$ ו $E=$ $\{(s,u_{x,y}):x,y\in S\setminus\{z\}\}\cup(u_{xy},v_x),(u_{x,y},v_x:x,y\in S\setminus\{z\})\cup\{(u_x,t):x\in S\setminus\{z\}\}$ וקובעים:

$$\begin{aligned} c\left(S,u_{xy}\right) &= g_{xy} \\ C\left(u_{xy},v_x\right) &= \infty \\ c\left(v_x,s\right) &= m-\omega_x \end{aligned}$$

נרצה להוכיח של z יש סיכוי לנצח אמ"מ הזרימה מקסימלית הרשת שווה ל $g^*=\sum_{x,y\neq z} g_{xy}$. את זה אפשר לבדוק באמצעות אלג' למציאת זרימה מקסימלית

טענה: אם קיימת השמה חלקית ל k משחקים כך שבסוס z מובילה אז קיימת זרימה השלמים עם שטף k ברשת

אם קיימת זרימה בשלמים בשטף k אז יש השמה חלקית ל k משחקים שבסופם z מובילה

הוכחה: נניח השמה ל צצל משחקים. נגדיר (מספר המשחקים בין x לy מתוך k) $= f\left(S,u_{xy}\right)$, (מספר הנצחונות של x על y)= $f\left(u_{xy},v_x\right)$, (מס' הנצחונות של x ב k משחקים)= $f\left(x_x,t\right)$

קל לראות שמתקיים שימור חומר לגבי אילוצי קיבול מכיוון ש z מובילה מתקיים שלכל x -

$$\omega_x f\left(v_x,t\right)\le m\Rightarrow f\left(v_x,t\right)\le c\left(v_x,t\right)$$

כמו כן $|f|=\sum_{x,y\neq z} f\left(S,u_{xy}\right)=k$

נתונה זרימה בשלמים f אז נקבע תוצאות של $k=|f|$ משחקים ע"י קביעת $f\left(s,u_{xy}\right)$ משחקים בין x,y מתוכם $f\left(u_{xy},v_x\right)$, x מנצחת ו $f\left(u_{xy},v_y\right)$

$$\text{ס"ה המשחקים החדשים שמנצחת}=\lambda=\sum_y f\left(u_{xy},v_x\right)=f\left(v_x,t\right)\le c\left(v_x,t\right)=m-\omega_x$$

$$\omega_x+\lambda\le m$$

מהטענה ניתן להסיק שקיימת זרימה בשלמים בשטף g^* אמ"מ 'יימת השמה לכל המשחקים כך ש z מובילה בסופם.

נשתמש במשפט הזרימה השלמה שרומר שהרשת שהב כל הקיבולות שלמות קיימת זרימה מקסימלית בשלמים.

מהשטף נובע שקיימת זרימה מקסימלית בשטף g^* אמ"מ קיימת השמה לכל המשח-קים שבסום z מובילה.

פרק 14

הרצאה מס.?

תזכורת: אם G רשת ו f זרימה ואם G_f הרשת השיורית המתאימה אז אלג FF אומר:

1. מצא ב G_fמסילה P מ s ל t חשה את ערך צוור הבקבוק של P "הזרם a על P במובן הבא:
   (א) על כל עץ קדמית $\bar{e} \in E \cap P$ החלף את $f(e)$ ב $f(e) + a$
   (ב) על כך צלע אחרת $\bar{e} \in \overline{E} \cap P$ החלך את $f(e)$ ב $f(e) - a$
   (ג) על כך צדע אחרת השאר את f בעינה
2. עדכן את G_f
3. עצור כאשר ב G_f אין מסילה מכוונת מ s ל t

אחת ממטרותינו הקרובות היא להראות כי אלג' FF עוצר אז בידינו זרימה אופטימלית וזאת מפני שמתקבל גם חתך שקיבולו שווה לשטף $v(f)$
ראינו את המסקנה הבאה:
לכל חתך (A, B) ברשת ולכל זרימה הב f מתקיים $v(f) \le C(A, B)$
הוכח: $v(f) = f^{out}(A) - f^{in}(A) \le f^{out}(A) = \sum_{e:A\to B} f(e) \le \sum_{e:A\to B} c(e) =$ $c(A, B)$.
פירוש האי שוויון הוא:

1. לכל צלע $e: B \to A$ מתקיים $f(e) = 0$
2. לכל צלע $e: A \to B$ מתקיים $f(e) = c(e)$

משפט: תהיה f זרימה ברשת G ונניח שב G_f אין מסילה מכוונת מ s ל t אז יש חתך (A^*, B^*) ב G כך ש $v(f) = c(A^*, B^*)$ בפרט ל f שטף מירבי ול (A^*, B^*) קיבול מזערי.

הוכחה: נגדיר את A^* כקבוצת כל הקדקדים vב V כך שב G_f יש מסילה מכוונת מ s ל v.
$B^* = V \setminus A^*$
ראשית (A^*, B^*) הוא חתך כי $s \in A^*$ ואילו $t \notin A^*$ ולכן $t \in B^*$ ע"מ להוכיח את טענתנו יש שני תנאים שעלינו לכבד:

1. עלינו לוודא שיש $e: B^* \to A^*$

(א) ע"פ הגדרת הרשת השיורית אילו היה $x=f(e)>0$ הייתה צלע מכוונת ב G_f מ v ל u שקיבולה x. נזכור שיש מסילה מכוונת ב G_f מ v ל u שקיבולה x. נזכור שיש מסחלה מכוונת מ s ל v ב G_f (זו הסיבה שבגללה $v\in A^*$) אם כן יש גם מסילה מכוונת מ s ל v(הולכים מ s ל v ממשיכת בצלע) בניגוד לכך ש $u\notin A^*$

2. יש הראות שכל צלע $e:A^*\to B^*$ רוויה ז"א $f(e)=c(e)$

(א) אחרת אם $y=c(e)-f(e)$, $y>0$ היינו מוצאים בגרף G_f צלע מכוונת מ v ל u בקיבול y שוב עמרום יש מסילה מכוונת מ sל v וניתן להאך אותה ולהגיע גם ל u אך כי ע"פ ההנחה $u\notin A^*$

מסקנות:

1. כאשר אלג FF עוצר יש בידינו זרימה אופטימלית

2. כאשר ברשת G כל הריבולים שלמים:

(א) אלגוריתם FF פותר את בעיית הזרימה בזמן $O(mC)$ כאשר m מספא הצלעות ו C סגום כל הקיבולים.

(ב) כאשר ברשת G כל הקיבולים שלמים אז יש זרימה אופטימאלית שכל ערכיה הם שלמים (ואלג' FF ימצא זרימה כזו)

3. משפט השטף והחתך[1]: לכל רשת זרימה $G(V,E,s,t,c)$ השטף המירבי האפשרי ב G שווה לקיבול המזערי של חתך ברשת.

עוד מילה על רשת עם קיבולים לא שלמים:
הטיפול שהצגנו במקרה של קיבולים שלמים פותר גם את המקרה של רציונלים(מכפילים את כל הקיבולים במכנה המשותף)

---

[1] Max Flow Min Cut

פרק 15

הרצאה מס.?

שני מימושים יעילים של סכימת Ford-Fulkerson

1. אלגוריתם דירוג scaling
2. אלגוריתם Edwards-Karp

אבל לא נגדיר אותם כנראה

15.1 תכנון ליניארי

רק סיכום כך שתדעו על מה מדובר

אמרנו שבעיית אופתימיזציה זו שאלה מהסוג הבא: נתונה קב' כלשהיא D ופונקציה ממשית $f : D \to \mathbb{R}$ מחפשת את $\max_{x \in D} f(x)$.

האם ל D מסויימות "פשוטות", ϕ "פשוטה" יש לנו דרך לפתור את הבעייה.

אם $D \subseteq \mathbb{R}^n$ המוגדרת ע"י אוסף של משוואות ליניאריות ואי שויונים ליניאריים ובנוסף ϕ היא פ' ליניארית אז בעיית האופטימיזציה נקראת בעיית תכנון ליניארית $LP \Rightarrow$ Linear Programming ולבעייה זו יש אלג' יעיל.

בעיית הזרימה ברשת היא מקרה פרטי של בעיית התכנות הליניארי. כן $D \subseteq \mathbb{R}^m$ כאשר m הוא מספר הצלעות ברשת. לכל קואורדינטה $1 \ldots m$ מצמידים צלע ואז רושמים $(f(e_1) \ldots f(e_m))$ אזי D הוא אוסף כל הזרימות המותרות.

שימו לב ש D אכן מוגדרת ע"י אוסף של משוואות ואי שויונים ליניאריים:

$$\begin{aligned}
\forall j : c(e_j) &\geq f(e_j) \geq 0 \\
\forall i : \sum_{e_i \to v} f(e_i) - \sum_{v \to e_i} f(e_j) &= 0
\end{aligned}$$

אזי במקרה הזה $\phi = \nu$

איך ידענו בבעית הזרימה שזרימה מסויימת היא אופטימלית? מצאנו חתך שבעזרתו הוכחנו זאת(מצאנו אחתך בעל קיבול שווה לזרימה)

לכל תוכנית ליניארית אפשר לבנות תוכנית ליניארית אחרת(הדואלית) המקור-ית כך שהפתרון המינימאלי של התוכנית הדואלית שווה לפתרון המקסימאלי של התוכנית המקורית, אז אם יכולים לפתור אחת יודעים ערך של המקסימאלי/מינימאלי של הבעיה האחרת.

15.2 אלג מדורג לבעיית הזרימה

זה אלג בעל סיבוכיות זמן ריצה $\mathcal{O}\left(m^2 \log c\right)$ כאשר m הוא מס' הצלעות ו c הוא סכום הקיבוליות.
אלג' מסוג FF ובעצם נראה שהוא מבצע פחות או שווה $O\left(m \log c\right)$ איטרציות ומחיר כל איטרציה $O\left(m\right)$

הרעיון: למצא ב G_f מסילה מ s ל t שערך צוור הבקבוק שלה "גדול". אם זו מטרתנו עלינו להימנע מצלעות ב G_f שקיבולן קטן.
מאיצד גיסה, אסור לנו להציב רף גדול מדי כי בזה אנו עלולים לגרום לכך שלא תהיה כלל מסילה $f \to S$ ב G_f. אנו נציב הרף בגובה שהוא חזקה של 2.

סימון: אם Δ הוא מספר חיובי נסמן ב $G_f\left(\Delta\right)$ את הקשט המתקבלת מ G_f ע"י מחיקת כל צלע שקיבולה קטן מ Δ.

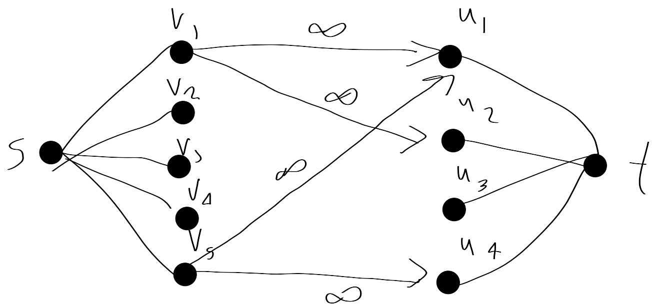
תיאור האלג: נתחיל מ $\Delta_0 = \max\left\{2^k\right\}$ כאשר יש צלע היוצאת מ S_N וקיבולה גדול שווה ל 2^k. נצא מ $f \equiv 0$.

האיטרציה: מצא מסילות ב $G_f\left(\Delta\right)$ ועדכן את f כל עוד יש ב $G_f\left(\Delta\right)$ מסילה מ S ל t.
הקטן את Δ ל $\Delta/2$ וחזור לאיטרציה. עצור ב $\Delta = 1$

פרק 16

תרגול מס.?

פתרון: נבנה רשת זרימה שבה כל פתרון חוקי(כלומר B, J שעומדים באילוצים) מתר-יל לחתך ברשת ונראה שבחתך המינימאלי מתאים לפתרון חוקי מקסימאלי.



איור 16.1: רשת שלנו

נבנה רשת באופן הבא:

$$\begin{aligned} V &= \{s,t\} \cup \{u_j\}_{j\in A} \\ E &= \{(s,v_j)\}_{j\in I} \cup \{u_j,t\}_{j\in I} \end{aligned}$$

ומוסיפים ל E עוד את הקבוצה (v_j, u_k) כך ש המשקיע ה j דרש את השחקן ה k.

$$\begin{aligned} C(s,v_j) &= m_i \\ C(u_j,t) &= p_j \\ C(v_j,u_k) &= \infty \end{aligned}$$

נבנה התאמה עבור חתך (S,T) ברשת נתאים לו $I \subseteq J, A \subseteq V$ ע"י $B = S \cap$ $\{u_j\}_{j\in A}$, $I = S \cap \{v_j\}_{j\in I}$

טענה: חתח מתאים לפתרון חוקי אמ"מ הקיבוליות שלו סופית.

הוכחה: נביט בחתך (S,T):

$$\begin{aligned} C\left(S,T\right) &= \sum_{(i.v)\in T} c\left(u,v\right) \\ &= \sum_{j\in B} c\left(u_j,t\right) + \sum_{j\in I\setminus J} c\left(s,v_j\right) + \sum_{\substack{(v_j,u_i)\in E \\ j\in J, k\notin B}} c\left(v_j,u_k\right) \end{aligned}$$

זאת מכיוון שאם נעבור על הצלעות שעוברות בין s ל t נגלה שהם עשויים להיות צלעות משלושה סוגים:

1. בין s למשקיעים שלא נבחרו
2. בין משקיעים שנבחרו לשחקנים שהם נבחרו
3. בין שחקנים שנבחרו ל t

רואים שהצלע מסוג 2 קיימת אם"ם הפתרון לא חוקי.
צלעות מסוג 2 לא מופעות כי החתך סופי:

$$\begin{aligned} &= \sum_{j\in B} P_j - \sum_{j\in I\setminus J} m_j \\ &= \sum_{j\in I} m_j - \left(\sum_{j\in J} m_j 0 \sum_{j\in B}\right) \sum_{j\in B} P_j \end{aligned}$$

16.1 משפט Dilworth

הגדרה: קבוצה סגורה חלקית(בסדר חזק) היא קבוצה S שמוגדר עליה יחס בינארי שמסמנים ב $<$ המקיים:

1. לכל $a\in S$ מתקיים $\neg a<a$(לא קטן מעצמו)
2. לכל $a,b\in S$ אם $a>b$ אזי $\neg b>a$
3. עבור $a,b,c\in S$ מתקיים שאם $a>b, b>c$ אזי $a>c$

הגדרה: שרשרת בקס"ח היא סדרה $\langle a_1,a_2,a_3\ldots a_n\rangle$כך שלכל i מתקיים $a_i<a_{i+1}$

הגדרה: אנטי שרשרת בקס"ח היא $A\subseteq S$ שלכל $x,y\in A$ מתקיים $\neg x<y$

הגדרה: פירוק לשרשראות של קס"ח $(S,<)$ הוא אוסף של שרשראות $\{c_1,c_2,\ldots c_n\}$ כך שכך איבר ב S מופיע בדיוק בשרשרת אחת.

משפט: מספר השרשראות ההמינימאלי הדרוש לגסות קס"ח n_c= גודל האנטי שרשרת המקסימאלי n_a

הוכחה: $n_a \le n_c$ מכיוון שכל שרשרת יכולה להיחתך עם כל אנטי שרשרת לכל היותר באיבר אחד ולכן דרושות לפחות כגודל האנטי שרשרת המקסימלית שדרושות לחסות את

$n_a \ge n_c$ ניעזר במשפט הבא:

משפט hall המורחב: בגרף דו צדדי $(L \cup R, E)$ גודל הזיווג המקסימאלי שווה ל $|L| - \max_{x \subseteq L} \{|x| - |\Gamma(x)|\}$ כאשר $\Gamma(x)$ הוא קבוצת השכנים של x.

נבנה התאמה בין זיווגים בגרף דו צדדי מסויים לפרוקים לרשתות.

בהינתן קס"ח $(S, <)$ נניח $S = \{1, 2 \ldots n\}$ נבנה גרף $L = \{x_1 \ldots x_n\}$, $R = \{y_1 \ldots y_n\}$ ו $E = \{(x_i, y_i) : j > i\}$

טענה: עבור כל זיווג באורך l ניתן להתאים פירוק לשרשראות בגודל $n - l$ וליפך עבור פירוק בגודל l ניתן להתאים זיווג בגודל $n - l$

הוכחה: עבור זיווג בגודל l ניתן לבנות פירוק ע"י שנתחיל מפירוק שבו כל איבר הוא בנפרד ונחבר אותו ע"פ צלעות הזיווג. מספר בהשרשראות יורד באחד עם כל צלע שמוסיפים וסה"כ לכן יש $n - l$ שרשראות בסוף.

עבור פירוק בגודל l ניתן לבנות זיווג ע"י שניקח את הצלע (x_i, y_i) עבור כל i, j שהופיעו אחד אחרי השני באחת השרשראות, הזיווג יהיה בגודל $= \sum_{i=1}^{k} (|c_i| - 1)$ $n - k$

מהטענה נובע שזיווג מקסימאלי מתאים לפירוק מינימאלי ולכן גודלו הוא $n - n_c$ ולכן ממשפט Hall המורחב:

$$
\begin{aligned}
n - n_c &= n - \max_{x \subseteq L} \{|x| - |\Gamma(x)|\} \\
n_c &= \max_{x \subseteq L} \{|x| - |\Gamma(x)|\} \le n_A
\end{aligned}
$$

נראה שעבור $x \subseteq L$ מתקיים $n_A \ge |x| - |\Gamma(x)|$

פרק 17

הרצאה מס.?

17.1 אלגוריתם מדורג לזרימה ברשת

תזכורת: G רשת f זרימה בה וΔ טבעי אז מגדירים את $G_f(\Delta)$ כרשת המתקבלת מהרשת השיורית G_f ע"י מחיקת כל צלע שקיבולה קטן מ Δ

מאתחלים Δ כך שהוא יהיה המקסימום של 2^k כך ש קיימת צלע מ s שקיבולה גדול מ 2^k.

איטרציה: כאשר לא נשארות מסילות מחלקים את Δ ב 2 וחוזרים על התהליך

טענה: האלג מתבצע ב $\mathcal{O}(m \log c)$ איטרציות ולכן זמן הריצה הכולל שלו הוא $\mathcal{O}(m^2 \log c)$ (זה זמן ריצה פולינומי)

משפט: אלגוריתם EK פותר את בעית הזרימה בזמן $\mathcal{O}(m^2 n)$ כאשר m מספר הקודקודים ו n מספר הצלעות.

המשפט ינבע אם נוכל להראות שמס' האיטרציות של EK היא

זה נובע משתי הטענות הבאות

1. המרחק ב G_f מ s ל t אינו יורד אף פעם במהלך האיצה של האלג

נאמר שברגע מסוים מיצינו את הצלע e אם הזרמנו בה $c(e)$ או שהורדנו הזרימה ב e ל 0

2. בין שני מיצויים עוקבים של אותה הצלע המרחק ב G_f מ s ל t גדל ממש

מסקנה: לEK יש $O(mn)$ איטרציות, המרחק מ s ל t ב G_f עשוי לגדול לכל היותר מ 1 ל n. אחת ל m צעדים לכל היותר אנו ממצים צלע ולכן מדי m צעדים המרחק הנ"ל גדל ממש.

17.2 $P = ?NP$

יש אוסף של אלפי בעיות אופטימיזתיה שאין לנו אלג' פולינומי ךפתורן וידוע לנו $e \in H$ שכולן ניתנות לפתורן בזמן פולינומי(כנראה לא...) או שאף אחת אינה ניתנת לפתרון יעיל

הבעיה הראשונה מסוג זה היא בעית הכיסוי הקודקודי Vertex Cover

הקלט: גרף $G = (V, E)$

הפלט: קב' קטנה ביותר $S \subseteq V$ כך שלכל צלע $e = (x, y)$ בגרף, או ש S $x \in S$ או $y \in S$ או שניהם