תרגיל מס.1

עפיף חלומה 302323001

26 בנובמבר 2009

1 שאלה מס.1

$$
\begin{aligned}
p_1 &= \sum_{i=0}^{d_1} a_i n^i \\
p_2 &= \sum_{i=0}^{d_2} b_i n^i
\end{aligned}
$$

1.1 צ"ל $p_1(n) = \Theta(p_2(n)) \Leftrightarrow d_1 = d_2$

1.1.1 צ"ל $p_1(n) = \Theta(p_2(n)) \Leftarrow d_1 = d_2$

נסמן $d_1 = d_2 = d$ אזי

$$
\begin{aligned}
p_1 &= a_d n^d + \ldots + a_0 \\
p_2 &= b_d n^d + \ldots + b_0
\end{aligned}
$$

ממשפט שלמדנו בקורס מבני נתונים יודעים כי אם $\lim_{n\to\infty} \frac{p_1(n)}{p_2(n)} = c \neq 0$ מתקיים כי $p_1 = \Theta(p_2)$. ממשפט אחר שלמדנו בקורס אינפי יודעים כי במקרה זה $\lim_{n\to\infty} \frac{p_1(n)}{p_2(n)} = \frac{a_d}{b_d}$. מכיוון ש $a_d > 0$ ו $b_d > 0$ מתקיים $\frac{a_d}{b_d} > 0$. אזי מתקיימים תנאי המשפט הראשון אזי הוכחנו $p_1(n) = \Theta(p_2(n)) \Leftarrow d_1 = d_2$. אני לא אצטט ההוכחה של המשפטים האלה ואשאיר את זה כתרגיל בית לבודק התרגילים למצא אותם[1].

1.1.2 צ"ל $p_1(n) = \Theta(p_2(n)) \Rightarrow d_1 = d_2$

נניח בשלילה כי $d_1 \neq d_2$. לצורך ההוכחה נניח (בלי הגבלת הכלליות) כי $d_1 < d_2$ ($d_1 > d_2$) אזי מתקיים כי $\lim_{n\to\infty} \frac{p_1}{p_2} = 0$ ($\lim_{n\to\infty} \frac{p_1}{p_2} = \infty$) אזי לפי משפט שלמדנו בקורס מבני נתונים מתקיים כי $p_1 = \mathcal{O}(p_2)$ אבל $p_1 \neq \Omega(p_2)$ ($p_1 = \Omega(p_2)$ אבל $p_1 \neq \mathcal{O}(p_2)$) בסתירה לנתון כי $p_1(n) = \Theta(p_2(n))$

1.1.3 סיום הוכחה

מ 1.1 ו 1.2 נובעת ההוכחה של 1

[1] האמת שאני מרגיש כי אין צורך לפתור תרגיל זה בכלל. כל מי שעבר בקורס מבני נתונים מקיר את הפתרון לשאלות האלה. אזי התרגיל כולו הופך לבזבוז זמן לסטודנטים ולא מלמד משהוא חדש.

1.2 $p_1(n) = o(p_2(n)) \Leftrightarrow d_1 < d_2$

1.2.1 $p_1(n) = o(p_2(n)) \Leftarrow d_1 < d_2$

אם $d_1 < d_2$ אזי מתקיים $\lim_{n\to\infty} \frac{p_1}{p_2} = 0$ אזי $p_1(n) = o(p_2(n))$

2 שאלה מס.2

סידור מגדול לקטן, שמאלה לימין:

$$n! > n^{\log\log n} > \log(n!) > n^{1/3} > \log^2(n),$$

$n!$ יותר גול מ$n^{\log\log n}$ כי $n!$ זה דומה הרבה ל n^n, ו $n^{\log n}$ נראה לי מסדר גודל של a^n.

מכיוון ש $n!$ יותר גדולה מ a^n ברור כי $\log(n!)$ יותר גדולה מפונקציה ליניארית, אזי היא יותר גדולה מ $n^{1/3}$ ו $\log^2(n)$ ויותר קטנה מאשר פונקציה אקספוננטיאלית.
מכיוון ש $\log n < \sqrt{n}$ ולא רק בקשר ליניארי או ריבועי אזי ברור כי $n^{1/3} > \log^2(n)$

3 שאלה מס.3

3.1 פסודו קוד

לחןעיפטם 1 $\frac{2}{3}$-merge-sort

```
merge_sort(arr,start,end) {
–if start == end: return
–weirdmid = 2/3 · (end − start) + start
–merge_sort(arr,start,weirdmid)
–merge_sort(arr,weirdmid+1,end)
–mege(arr,start,weirdmid,weirdmid+1,end)
–return
}
```

הערה: אני מניח העברת מערך by-reference ופונקציית merge שמקבלת את המקומות של שתי חלקי המערך ויודעת למזג אותם בלי בעיות.

3.2 ניתוח זמן ריצה

האלגוריתם ירוץ בזמן של $\Theta(n\log n)$. זה בגלל שהוא יותר מהר מאלגורתיתם – $\frac{1}{3} - \frac{1}{3}$ merge-sort$-\frac{1}{3}$שפועל בזמן $(n\log n)$ × והוא יותר מהר מאלגוריתם merge-sort$-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}$ שרץ בזמן $\Theta(n\log n)$ לכן לפי משפט הסנדוויץ'[2] זמן הריצה של האלגוריתם – $\frac{2}{3} - \frac{1}{3}$ merge-sort הוא $\Theta(n\log n)$

4 שאלה מס.4

נתון כי $f(n) = \Theta(g(n))$ כלומר קיים c_1 כך שעבור $n > n_1$ מתקיים $f(n) < c_1 \cdot g(n)$
וגם קיים c_n כך שעבור $n > n_2$ מתקיים $f(n) > c_2 \cdot g(n)$

[2] משפט שמרצה החד"ה בטכניון אוהבים הרבה

4.1 $\log(f(n)) = \Theta(\log(g(n)))$

4.1.1 $\log(f(n)) = \mathcal{O}(\log(g(n)))$

צריך למצא c ו n_0 כך ש עבור $n > n_0$ מתקיים $\log(f(n)) < c\log(g(n))$. יודעים כי עבור n_1, c_1 מתקיים $f(n) < c_1 \cdot g(n)$ אזי

$$\begin{aligned}
\log(f(n)) &< \log(g(n)) < c\log(c_1 \cdot f(n)) \\
\log(f(n)) &< c\log(c_1 f(n)) \\
\log(f(n)) &< c\log(c_1) + c\log(f(n)) \\
0 &< c\log(c_1) + (c-1)\log(f(n)) \\
k &< c'\log(f(n)) \\
\frac{k}{\log(f(n))} &< c'
\end{aligned}$$

בוחרים את n כך ש $f(n)$ מינימאלי בתחום (n_1, ∞) ואז אין בעיה בבחירה של c' כזה ואת לחשב את c. משל.

4.1.2 $\log(f(n)) = \Omega(\log(g(n)))$

צריך למצא c ו n_0 כך ש עבור $n > n_0$ מתקיים $\log(f(n)) > c\log(g(n))$. יודעים כי עבור n_2, c_2 מתקיים $f(n) > c_2 \cdot g(n)$ אזי

$$\begin{aligned}
\log(f(n)) &> \log(g(n)) < c\log(c_2 \cdot f(n)) \\
\log(f(n)) &> c\log(c_2 f(n)) \\
\log(f(n)) &> c\log(c_2) + c\log(f(n)) \\
0 &> c\log(c_2) + (c-1)\log(f(n)) \\
k &> c'\log(f(n)) \\
\frac{k}{\log(f(n))} &> c'
\end{aligned}$$

בוחרים את n כך ש $f(n)$ מקסימאלי בתחום (n_2, ∞) ואז אין בעיה בבחירה של c' ואחר כך לחשב את c. משל.

4.2 $2^{f(x)} = \Theta\left(2^{g(x)}\right)$

דוגמה נגדית $f(x) = 3x, g(x) = 2x$ אזי מתקבל $2^{f(x)} = 2^{3x} = 8^x$ ו $2^{g(x)} = 2^{2x} = 4^x$. יודעים כי פונקציות אלה לא מקיימות תנאי Θ.

5 שאלה מס.5

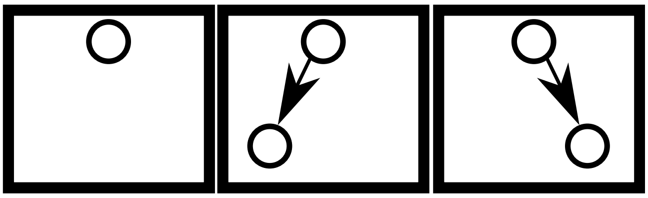
5.1 $\sum_{v\in V} d(v) = 2|E|$

לכל $e \in E$ קיימים שתי קודקודים v_1, v_2. לכן מהיות הצלע e בגרף עלתה דרגת הקודקודים v_1, v_2 באחד. כלומר כל צלע טורמת שתי דרגות בגרף. אזי אזי אם מחברים את דרגות כל הקודקודים בגרף מקבלים $2|E|$. משל.[3]

[3] האמת שזה די ברור ולא נראלי כמשהוא שצריך הוכחה.

5.2 כל עץ כולל לפחות עלה אחד

Computation error: Cannot be proven because statement is incorrect.
דוגמה לעצים שאין בהם שתי אלים:



איור 1: דוגמאות לעצים בעלי עלה אחד

6 שאלה מס.6

נתון כי לכל $e \in E$ הגרף $(V, E \setminus \{e\})$[4] הוא עץ. צ"ל כי הגרף $G = (V, E)$ הוא מעגל פשוט.

הגרף G לא יכול להכיל יותר ממעגל אחד, כי במקרה זה הסרת צלע אחת כלשהיא תשאיר מעגל. אזי יש בגרף לא יותר ממעגל אחד.

הגרך G לא יכול לא להכיל מעגלים כי במקרה זה הסרת צלע כלשהיא מייצרת גרף לא קשיר. אזי יש בגרף לא פחות ממעגל אחד.

הגרף G לא יכול להכיל עלים כי במקרה זה הסרת הצלע של העלה משאירה מעגל.

[4] כתיב מתמטי נכון