תורת ההסתבאות

עפיף חלומה

19 באוקטובר 2009

תוכן עניינים

פרק 1

פרטים טכניים

שם מתרגל: ronprtz@math.huji.ac.il
ניתן להוריד את הזרגילים מ www.math.huji.ac.il/~ronprtz
שעת קבלה: בתאום(עדיף יום א')
ניתן להוריד ההרצאות של רז קופרמן

1.1 מרצה:

נעם ברגר
משרד: 310
רמייל: berger@math.huji.ac.il
שעת קבלה: יום א 16:30 - 17:30
ציון: 90% בחינה, 10% תרגיל
חובה להגיש 80% מהתרגילים.

1.2 ספרים:

1. A first course in probability S.Ross
2. An introduction to probability theory and applications W.Feller
3. Weighing the odds D.williams
4. Lecture notes in probability R.Kupferman נגיש באתר של רז קופרמן באוני-ברסיטה העברית

פרק 2

תרגול מס.1

לא נלמד כלום היום כי עדיין לא היתה הרצאה אזי נשחק משחקים ובעתיד נלמד איך לפתור אותם.

בעיה ממתמטיקה דיסקרטית.

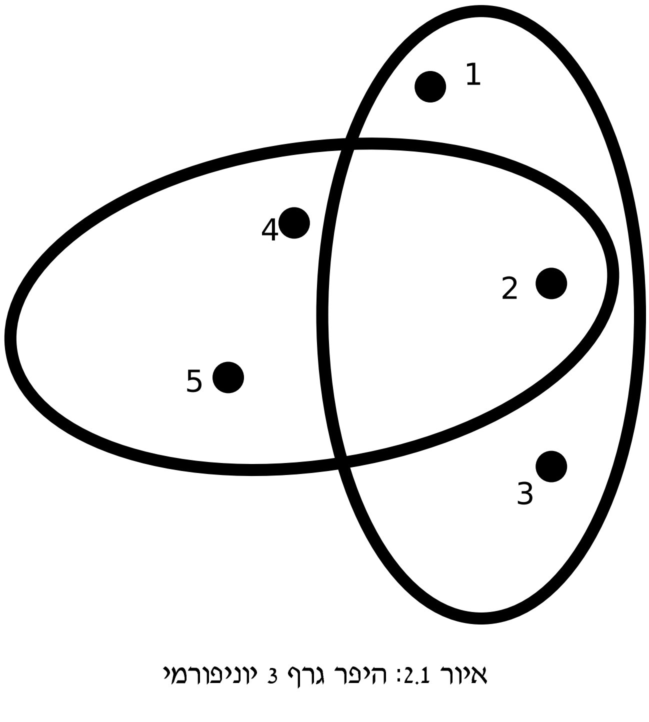
יש מושג של hyper-graph:

$H = (V, E)$ ו $E \subseteq P(V)$

כלומר בגרף הצלעות לא רק מחברות שתי קודקודי, אלה הוא קבוצה(לא ממוינת) של קודקודים.

היפר-גרף 2 צביע הוא $\exists f : V \to \{1, 2\}$ כך ש $\forall a \in E : f(E) = \{1, 2\}$

היפר-גרף הוא r יוניפורמי אם בכל צלע יש r קודקודים.



איור 2.1: היפר גרף 3 יוניפורמי

משפט: מספר הצלעות בהיפר-גרף r יוניפורמי שאינו 2 צביע $\leq 2^{r-1}$

שאלה: סדרה באורך n בנויה מ 0 ו 1, האם ניתן לכתוב אותה באופן שכל תת סדרה באורך k תופיע לא יותר מפעם אחת?

פתרון: $2^k = n$ קיימת סדרה(קל), $2^k < \sqrt{n}$ קיימת סדרה(דרוש הוכחה)

פרק 3

הרצאה מס.1

הגדרה: מרחב הסתברות הוא שלשה $(\Omega,\mathcal{F},\mathcal{P})$ כאשר:

1. Ω הוא קבוצה מאחב המדגם
2. $\mathcal{F}$ היא אוסף של תת קבוצות של Ω שמקיימת מספר תכונות שיפרטו להלן. "אוסף המאורעות"
3. $\mathcal{P}:\mathcal{F}\to[0,1]$ שמקיימת מספר תכונות שיפרטו בהמשך. "פונקצית ההסתבר-ות"

3.1 תכונות $\mathcal{F}$

1. $\emptyset\in\mathcal{F}$, $\Omega\in\mathcal{F}$
2. אם $A\in\mathcal{F}$ אזי $A^c=\Omega\setminus A\in\mathcal{F}$
3. אם $A_1,A_2,A_3\dots\in\mathcal{F}$ אזי $\cup_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathcal{F}$

אוסף שמקיים דרישות אלה נקרא σ-אלגברה

3.2 תכונות $\mathcal{P}$

1. $\mathcal{P}(\emptyset)=0$, $\mathcal{P}(\Omega)=1$
2. אם $A_1,A_2,A_3\dots$(אוסף בן מניה) זרות אז $\mathcal{P}\left(\cup_{n=1}^{\infty}A_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\mathcal{P}\left(A_n\right)$

הערה: ברוב המקרים שנדון בהם $|\Omega|<\infty$ ו $|\mathcal{F}|=2^{|\Omega|}$

תרגיל: הראו כי $\mathcal{F}=2^{\Omega}$ הוא σ-אלגברה כלומר מקיים את התכונות 1 ו 3.

דוגמה: הטלת קוביה. אזי $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$. $\mathcal{F}=2^{\Omega}$

דוגמה למאורעות:

1. יצא 3. בשפה הפורמאלית: $\{3\}$
2. יצא מספר זוגי. בשפה פורמאלית: $\{2,4,6\}$
3. לא יצא כלום. $\emptyset$

4. יצא מספר כלשהוא. $\{1,2,3,4,5,6\}$

לכל מאורע A ההסתברות היא $\mathcal{P}\left(A\right)=\frac{|A|}{6}$

דוגמה יותר מסובכת: מטילים שתי קוביות.
מרחב המדגם: $\Omega=\{(i,j):1\leq i\leq6,1\leq j\leq6\}$
אוסף המאורעות: $\mathcal{F}=2^{\Omega}$
$\mathcal{P}\left(A\right)=\frac{|A|}{36}$
מה הוא המאורע שיצא דאבל? $D=\{\left(1,1\right),\left(2,2\right),\left(3,3\right),\left(4,4\right),\left(5,5\right),\left(6,6\right)\}$
מה הסיכוי לקבל דאבל? $\mathcal{P}\left(D\right)=\frac{|D|}{36}=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$

הגדרה: התפלגות אחידה: יהי Ω מרחב מדגם סופי, ההתפלגות האחידה של Ω היא מרחב הדוגמה $\left(\Omega,\mathcal{F},\mathcal{P}\right)$ כאשר $\mathcal{F}=2^{\Omega}$ ולכל $A\in\mathcal{F}$ מתקיים $\mathcal{P}\left(A\right)=\frac{|A|}{\Omega}$

פרק 4

הרצאה מס.2

דוגמה: אם רוצים לבחור נקודה אקראית בקטע $[0,1]$. מה ההסתברות לבחור נקודה ב$[a,b]$?

פתרון:

מרחב ההסתבאות: $\Omega=[0,1]$

אוסף המאורעות: $\mathcal{F}=\sigma$ (הקטעים) ה σ-אלגברה המינימאלית המכילה את כל הקטעים

פונקצית ההסתברות: $\mathcal{P}([a,b])=b-a$

משפט: קיימת הרחבה יחידה של $\mathcal{P}$ ח $\mathcal{F}$, כלומר קיימת פונקציה יחידה $\mathcal{P}:\mathcal{F}\to[0,1]$ שגם מקיים את הדרישות מהשיעור הקודם וגם מקיים שלכל קטע $[a,b]$ מתקיים $\mathcal{P}([a,b])=b-a$

תהי $x_0\in[0,1]$ מה $\mathcal{P}(\{x_0\})$?

לכל ε $\{x_0\}\subseteq[x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon]$ נוכיח כי $\mathcal{P}(A)\le\mathcal{P}(B)\Leftarrow A\subseteq B$. לכן $\mathcal{P}(\{x_0\})\le\mathcal{P}([x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon])=2\varepsilon$ כלומר $\mathcal{P}(\{x_0\})<2\varepsilon$ לכל ε ומכן $\mathcal{P}(\{x_0\})=0$

דוגמה: נטיל מטבע הוגן. אם יצא עץ נבחר נקודה אחידה בקטע $[0,2/3]$. אם יצא אחד נבחר נקודה אחידה בקטע $[2/3,1]$

$\mathcal{F}=\sigma$ (הקטעים), $\Omega=[0,1]$ אבל מה היא $\mathcal{P}$?

יהי $[a,b]$ קטע $0\le a<b\le b<1$

אם $b\le 2/3$ אז $\mathcal{P}([a,b])=1/2\cdot\frac{b-a}{2/3}$

אם $a\ge 2/3$ אז $\mathcal{P}([a,b])=1/2\cdot\frac{b-a}{1/3}$

אם $a<2/3<b$ אז $\mathcal{P}([a,b])=\mathcal{P}([a,2/3])+P([2/3,b])$

נקרא לדוגמה הראשונה $\mathcal{P}_1$, נקרא לדוגמה השניה $\mathcal{P}_2$, לכל $x_0\in\Omega$, $\mathcal{P}_1(\{x_0\})=\mathcal{P}_2(\{x_0\})=0$ עם זאת $\mathcal{P}_1\neq\mathcal{P}_2$

דוגמה: הערך בכל נקודה לא קובע את פונקצית ההסתברות

סימון: (נובע מעצלנות) לנקודה $x_0\in\Omega$ נסמן $\mathcal{P}(x_0)$ במקום $\mathcal{P}(\{x_0\})$

תרגיל: אם Ω מרחב סופי אז אז הערכים $(\mathcal{P}(x):x\in\Omega)$ קובעים את $\mathcal{P}$

4.1 אלגברה ואינפי של מרחב הסתברות

כזכור $\mathcal{F}$ מקיימת את התכונות הבאיות:

1. $\Omega \in \mathcal{F}$,$\emptyset \in \mathcal{F}$
2. $A^c \in \mathcal{F} \Leftarrow A \in \mathcal{F}$
3. אם $A_1, A_2 \dots \in \mathcal{F}$ אזי $\cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$

4.1.1 עובדות

1. אם $A_1 \in \mathcal{F}$ ו $A_2 \in \mathcal{F}$ אז $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{F}$ (נבחר $A_n = \emptyset : 3 \leq n \leq \infty$ ומפעילים תכונה 3)
2. אם $A_1, A_2 \dots \in \mathcal{F}$ אז $\cap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$. נגדיר $B_n = A_n^c$ לכל n. אם $B_n \in \mathcal{F}$ ומכאן $\cup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{F}$ ומכאן $\left(\cup_{n=1}^{\infty} B_n\right)^c \in \mathcal{F}$. מחוקי דה-מורגן: $\left(\cup_{n=1} B_n\right)^c = \left(\cup_{n=1} A_n^c\right) = \cap_{n=1}^{\infty} A_n$
3. אם $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ אז $\mathcal{P}(A_1 \cup A_2) = \mathcal{P}(A_1) + \mathcal{P}(A_2)$. אם $A \subseteq B$ אז $\mathcal{P}(A) \leq \mathcal{P}(B)$ אז $B = A \cup (B \setminus A)$ איחוד זר. ולכן $\mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A) + \mathcal{P}(B \setminus A)$ כזכור $\mathcal{P}$ מקבלת ערכים אי שליליים לכן $\mathcal{P}(B) \geq \mathcal{P}(A)$

4.1.2 אינפי של מרחב הסתברות

תהי $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה של קבוצות.

הגדרה: $\lim_{n\to\infty} \sup A_n = \cap_{k=1}^{\infty} \cup_{n=k}^{\infty} A_n$
$\lim_{n\to\infty} \inf A_n = \cup_{k=1}^{\infty} \cap_{n=k}^{\infty} A_n$

משפט:

1. אם $A_n \in \mathcal{F}$ לכל n אז $\limsup A_n \in \mathcal{F}$
2. אם $A_n \in \mathcal{F}$ לכל n אז $\lim_{n\to\infty} \inf A_n \in \mathcal{F}$
3. $\lim_{n\to\infty} \inf A_n \leq \lim_{n\to\infty} A_n$

הוכחה:

1. לכל k $c_k = \cup_{n=k}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$ מתכומות $\mathcal{F}$. ואז $\lim_{n\to\infty} \sup A_n = \cap_{k=1}^{\infty} c_k \in \mathcal{F}$ כי החיתוך הוא חיתוך בן מיניה
2. אותו דבר
3. יהי $x \in \lim_{n\to\infty} \inf A_n$ אנו רוצים להראות כי $x \in \lim_{n\to\infty} \sup A_n$. $x \in \cup_{k=1}^{\infty} B_k$ כאשר $B_k = \cap_{n=k}^{\infty} A_n$ ומכאן קיים k כך ש $x \in B_k$. כלומר קיים k כך ש $x \in \cap_{n=k}^{\infty} A_n$ כלומר ריים k כך שלכל $n > k$, $x \in A_n$. לכן לכל j קיים $n > j$ כך ש $x \in A_n$. לכן לכל j, $x \in \cup_{n=j}^{\infty} A_n$ כלומר $x \in \cap_{j=1}^{\infty} \left[\cup_{n=j}^{\infty} A_n\right]$. כלומר $x \in \lim_{n\to\infty} \sup A_n$

הגדרה: תהי $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$סדרת קבוצות. אם $\lim_{n\to\infty} \inf A_n = \lim_{n\to\infty} \sup A_n$ אז נאמר שהסדרה $\{A_n\}$ מתכנסת ונסמן $\lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} \inf A_n$

4.2 שתה הגדרות חילופיות לinf ו sup

נניח ש $A_n \subseteq \Omega$ לכל n. לכל $A \subseteq \Omega$ נתאים את הפונקציה המציינת $\chi_A : \Omega \to \{0,1\}$. $\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$.

נסמן $\bar{A} = \limsup A_n$ ו $\underline{\mathrm{A}} = \liminf A$ אז לכל $x \in \Omega$

$\chi_{\bar{A}}(x) = \limsup \chi_{a_n}(x)$

$\chi_{\underline{\mathrm{A}}} = \liminf \chi_{A_n}(x)$

הוכחה תרגיל.

$\limsup A_n$ הוא קבוצה כל הxים שמופיעים באינסוף מעברי בגדרת $\{a_n\}$

$\liminf A_n$ היא קב' כל הxים שמופיעים בכל אברי הסדרה $\{A_n\}$פרט (אולי) למספר סופי.

4.3 נחזור להסתברות

משפט תהי $\{A_n\}$ סדרה עולה של מאורעות כלומר לכל n, $A_n \subseteq A_{n+1}$ ו $A_n \in \mathcal{F}$ לכל n. אז $\mathcal{P}\left(\cup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mathcal{P}(A_n)$

הוכחה: נגדיר סדרה $\{B_n\}$: $B_1 = A_1$ ו $B_n = A_n \setminus A_{n-1}$ עבור $n > 1$

$B_n \in \mathcal{F}$ לכל n מדוע $B_1 = A_1 \in \mathcal{F}$

עבור $n = 1$ $B_n = A_n \cap \left(A_{n-1}^c\right) \in \mathcal{F}$.

B_nהם מאורעות זרים ולכל k $A_k = \cup_{n=1}^{k} B_n$ ו $\cup_{n=1}^{\infty} A_n = \cup_{n=1}^{\infty} B_n$

עכשיו: $\mathcal{P}\left(\cup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mathcal{P}\left(\cup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{P}(B_n) = \lim_{k=\infty} \sum_{n=1}^{k} \mathcal{P}(B_n) = \lim_{k\to\infty} \mathcal{P}\left(\cup_{n=1}^{k} B_n\right) = \lim_{k\to\infty} \mathcal{P}(A_k)$

משפט: אם $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה יורדת של מאורעות אז $\mathcal{P}\left(\cap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mathcal{P}(A_n)$

(ההוכחה תרגיל לסטודנט)