תרגיל מס.5

עפיף חלומה 302323001

16 בדצמבר 2009

1 שאלה 1

נרחיב את הרשת הנתונה ב s,t ומוסיפים צלעות $(s,l)_{l\in L}$ ו $(r,t)_{r\in R}$. הקיבולים של כל הצלעות ברשת היא 1.

נגדיר חתך ברשת הזו בצורה הבאה: $A=\{s\}\cup X\cup\Gamma(X)$ כך ש $X\subset L$, ו $B=V\setminus A$.

נחשב את קיבולת החתך שהגדרנו:

$$\begin{array}{ccccccc} C(A,B) & = & C(\vec{e}|\{s\}\to\{L/X\}) & + & C(\vec{e}|X\to R\setminus\Gamma(x)) & + & C(\vec{e}|\Gamma(X)\to\{t\}) \\ & = & |L|-|X| & + & 0 & + & |\Gamma(x)| \end{array}$$

קיבלנו שהחתך הוא בעל קיבולת $C(A,B)=|L|-(|X|-\Gamma(X))$. הזרימה המקסימאלית מתקבלת כאשר הקיבול הוא מינימאלי. כדי לקבל קיבול מינימאלי צריכים $|X|-\Gamma(X)$ מקסימאלי, לכן הזיווג המקסימאלי מוגדר על ידי $|L|-\max_{X\subseteq L}(|X|-\Gamma(X))$

2 שאלה 2

2.1 א

עבור גרף G שהקיבול של כל צלע הוא 1 קיימת זרימה מקסימאלית d אם"ם הקיבול של החתך המינימאלי הוא d, כלומר קיימים d מסלולים זרים שמחברים את s,t. אם לא קיימת זרימה כזו זה אומר שברשת השיורית שלנו התנתקק s מ t אחרי הזרמת x מסלולים כך ש $x<d$. מפני שהמסלולים האלה הם בלתי תלויים מקבלים שהיה אפשר להוריד פשוט צלע אחד מכל מסלול ולהגיע לאותה תוצאה(צריך להתחקם בבחירה במקרה שיש מסלולים לא זרים, אבל תמיד ניתן למצא צלע משותפת לכל קבוצה של מסלולים לא זרים כי היא קייםמת לפי ההגדרה של מסלולים לא זרים)

2.2 ב

מפצלים כל צלע v_i לשתי צלעות $v_{i_{in}},v_{i_{out}}$ ומחברים ביניהם בצלע בעלת קיבול 1.

ואז לפי ההוכחה של א מתקבל את ב.

3 שאלה 3

נגדיר גרף זרימה באופן הבא: קודקודים הגרף יהיו המשימה ועוד s,t.

E_1: צלעות אשר מחוברות בין פרויקט לבין דרישת קדם שלו. (u,v) כאשר v היא דרישת הקדם. הקיבול הוא ∞

E_2: קודקודים אשר מסמנים פרויקט שתועלתו חיובית, יחובר ל s(בצלע (s,x_j)) וקיבול הצלע היא p_j.

E_3: קודקודים אשר מסמנים פרויקט שתועלתו חיובית, יחובר ל s(בצלע (x_k,t)) וקיבול הצלע היא $-p_j$ או $|p_j|$.

טענת עזר: קבוצת מסימות ניתנת לבצוע(כלומר כל דרישות הקדם בוצעו) אם"ם החתך של $\{s\}$ עם הקבוצה הזו הוא סופי.

הוכחה: אם החתך סופי אז אין אף צלע אינסופית מ S ל T, כלומר כלומר אין אף דרישת קדם שלא בוצעה. הכיוון השני: אם החתך אינו סופי אזי יש צלע אינסופית(סכום סופי של צלעות סופיות הוא עדיין סופי) ז"א שיש דרישת קדם שלא בוצעה.

טענת עזר: אם נבחר סט של משימות A הניתנות לביצוע ונבנה חתך עם s, קיבולת החתך תהיה סופית ותהיה שווה ל $c-\sum_{\text{cut}} p_i$ עבור c קבוע כלשהוא

הוכחה: רק צלעות ב E_2 ו E_3 ישתתפו בחתך הזה אזי הקיבול של החתך $(\{s\}\cup A, V\setminus\{s\}\setminus A)$ היא

$$\begin{aligned}
\sum_{u\in V\setminus\{s\}\setminus A} c(s,u)+\sum_{u\in A} c(u,t) &= \sum_{u\notin A,p_u>0} p_u+\sum_{u\in A,p_u<0} p_u \\
&= \sum_{u\in A,p_u>0} p_u-\sum_{u\in A,p_u>0} - \sum_{u\in A,p_u<0} p_u \\
&= \underbrace{\sum_{u\in P,p_u>0} p_u}_{C}-\sum_{u\in A} p_u
\end{aligned}$$

משל.

סוים התרגיל: מכיוון שתמיד יש חתכים ב G בעלי קיבול סופי, לפי טענת העזר הראשונה מקבלים כי החתך המינימאלי הוא סופי ולכן מתאים לקבוצת מסימות שניתנת לבחור. לפי טענת העזר השניה מסיקים כי החתך המינימאלי מתאים לקבוצה שממזערת את $C-\sum_{u\in A} p_u$ ולכן ממקסמת $\sum_{u\in A} p_u$.

לכן האלג' הבא יפתור את הבעיה: תבנה גרף G, תמצא זרימה מקסימאלית, תמצא חתך מינימאלי (S,T), תדפיס את $S\setminus\{s\}$.

4 שאלה 4

4.1 א

נגדיר רשת $G=(V,E)$ כך ש $V=\{s,t\}\cup\{S_i\}_{i\in\{1\dots k\}}\cup\{g_j\}_{j\in\{1\dots n\}}$ והצלעות:

- (s,S_i) בעלת קיבול $|S_i|$
- (g_i,t) בעלת קיבול c_j
- (S_i,g_j) רק אם המדריך g_j מדבר את השפה j, בעלות קיבולת ∞.

אם הזרימה המקסימאלית שווה למספר הטוריסתים אז אפשר לחלק אותם באופן הרצוי, אם לא אז לא.

4.2 ב

נבנה גרף כך שעבור כל צומת j_i חוץ מהצומת שבה נמצא החנות קיימוים שני קודקוד-ים: $v_{i_{in}}, v_{i_{out}}$

קיימת צלע בין v_{in_i} ל v_{out_j} אם קיים רחוב שאפשר לנסוע בו מהצומת ב i ל j, הקיבול הוא ∞

לכל v_{in_i}, v_{out_i} קיימת צלע מin ל out והקיבולת שלה הוא המחיר שעולה לסים פרסומת בצומת הזו

קיימת צלע בין s ל v_{in_i} אם אפשר לכנס לעיר מהצומת ה i הקיבול הוא ∞

קיימת צלע בין v_{out_i} ל t אם שפר להגיע מהצומת ה i לחנות הקיבול הוא ∞

הזרימה המקסימאלית מגדירה חתך מינימאלי, לפרסם בחתכים האלה זה הדרך האכי יעילה.