תרגיל מס.1

עפיף חלומה 302323001

27 באוקטובר 2009

1 שאלה מס.1

$$f(x)=\begin{cases}1+\frac{1}{a}x & x<0\\ 1-\frac{1}{a}x & x\geq 0\end{cases}$$

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)+b_n\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right]\\
a_0 &= \frac{1}{a}\int_{-a}^{a}f(x)\,dx\\
&= \frac{1}{a}\left(\int_{-a}^{0}\left(1+\frac{1}{a}x\right)dx+\int_{0}^{a}\left(1-\frac{1}{a}x\right)dx\right)\\
&= \frac{1}{a}\left(\left[x+\frac{1}{2a}x^2\right]_{-a}^{0}+\left[x-\frac{1}{2a}x^2\right]_{0}^{a}\right)\\
&= \frac{1}{a}\left(a-\frac{1}{2a}a^2+a-\frac{1}{2a}a^2\right)\\
&= \frac{1}{a}(2a-a)\\
&= 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{a}\int_{-a}^{a}f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right)dx\\
&= \frac{1}{a}\left(\int_{-a}^{0}\left(1+\frac{1}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right)dx+\int_{0}^{a}\left(1-\frac{1}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\right)\\
&= \frac{1}{a}\left(-\frac{a\cos(\pi n)-a}{\pi^2n^2}-\frac{a\cos(\pi n-a)}{\pi^2n^2}\right)\\
&= -\frac{2\cos(\pi n)-2}{\pi^2n^2}\\
&= \begin{cases}\frac{4}{\pi^2n^2} & n\text{ is even}\\ 0 & n\text{ is odd}\end{cases}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{a}\int_{-a}^{a} f\left(x\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)dx \\
&= \frac{1}{a}\left(\int_{-a}^{0}\left(1+\frac{1}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)dx+\int_{0}^{a}\left(1-\frac{1}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\right) \\
&= \frac{1}{a}\left(\frac{a\sin\left(\pi n\right)-\pi an}{\pi^2 n^2}-\frac{a\sin\left(\pi n\right)-\pi an}{\pi^2 n^2}\right) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f\left(x\right) &= \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)+b_n\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{2\cos\left(\pi n\right)-2}{\pi^2 n^2}\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)
\end{aligned}
$$

2 שאלה 2

$$
f\left(x\right)=\begin{cases} b & -{}^{a}\!/_{2}<x<{}^{a}\!/_{2} \\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}\left(k\right) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f\left(x\right)e^{-ikx} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-a/2}^{a/2} be^{-ikx} \\
&= \frac{b}{\sqrt{2\pi}}\int_{-a/2}^{a/2}\left(\cos\left(-kx\right)+i\sin\left(-kx\right)\right)dx \\
&= \frac{b}{\sqrt{2\pi}}\left[-\frac{\sin\left(kx\right)}{k}-i\frac{\cos\left(kx\right)}{k}\right]_{-a/2}^{a/2} \\
&= \frac{b}{\sqrt{2\pi}}\left[\left(-\frac{\sin\left(-k\frac{a}{2}\right)}{k}-i\frac{\cos\left(-k\frac{a}{2}\right)}{k}\right)-\left(-\frac{\sin\left(k\frac{a}{2}\right)}{k}-i\frac{\cos\left(k\frac{a}{2}\right)}{k}\right)\right] \\
&= \frac{b}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{2\sin\left(\frac{ka}{2}\right)}{k}\right] \\
&= \frac{\sqrt{2}\cdot b}{k\sqrt{\pi}}\sin\left(\frac{ka}{2}\right)
\end{aligned}
$$

3 שאלה 3

$$f(x) = e^{ax^2}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-ikx} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ax^2} e^{-ikx} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ax^2 - ikx} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\sqrt{\pi} e^{-\frac{-k^2}{4a}}}{\sqrt{a}}
\end{aligned}$$

פתרון האינטגרל המפורש נמצא בכל מקום באינטרנת. אני לא יכול לפתור את זה בעצמי, ואני לא רואה שיש צורך להעתיק הפתרון, אז סמתי תשובה סופית אחרי האינטגרל.