תרגיל 1

עפיף חלומה, 302323001

26 בנובמבר 2009

1 שאלה 1

הוכחנו בכיתה שאם מתקימים n פעולות הוראה בו זמנית אזי צריכים לפחות n חדרי לימוד.

אותו דבר בשאלה הזו רק ש"חדר לימוד" במקרה שלנו זה צבע.

הוכחה שזה נכון:

נניח כי לאיזה שהוא קודקוד יש יותר מ A(מספר הצבעים) שכנים אזי יש בו לפחות $A+1$ שכנים, בסתירה להגדרה של A שזה המספר המקסימאלי של שכנים לקודקוד.

2 שאלה 2

יודעים כי קוד הופמאן הוא הקידוד האופטימאלי, אזי מוכיחים פשוט שלכל קידוד הופמאן מתקבל כי האורך הממוצע של הקידוד יותר גדול מה H =Entropy:

נסמן אורך מילה λ_i וממוצע אורך מילות ב $\overline{\lambda}$, אזי:

$$\begin{aligned} H-\overline{\lambda} &= \sum_{i=0}^{N}\left(\log\left(\frac{1}{p_i}\right)-\lambda_i\right)p_i \\ &= \sum_{i=1}^{N}\left(\log\left(\frac{2^{-\lambda_i}}{p_i}\right)p_i\right) \end{aligned}$$

משתמשים באי שוויון ינסן:

$$\begin{aligned} &\leq \log\left(\sum_{i=1}^{N}\frac{2^{-\lambda_i}}{p_i}p_i\right) \\ &= \log\left(\sum_{i=1}^{N}2^{-\lambda_i}\right) \end{aligned}$$

לפי אי שוויון קרפת:

$$\begin{aligned} \log\left(\sum_{i=1}^{N}2^{-\lambda_i}\right) &\leq \log(1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

משל.

3 שאלה 3

לכל גרף חסר מעגלים קיים קודקוד $D(v)=0$

לחןעיפטם 1 אלגוריתם לפתרון הבעיה

```
function find_if_acyclic(V,E,D) {
if(|V| == 0) return "Can create acyclic graph";
– for ∀v ∈ V:
—-if D(v) == 0:
——D' = D
——E' = E
——for ∀w ∈ V:
———D'(w) = D(v) − 1
———E' = E' \ (v, w)
——V' = V \ {v}
——return find_if_acyclic(V', E', D')
Return "Cannot create acyclic graph"
}
```

4 שאלה 4

נסמן $k=2^n-1$

אם ממירים את זה לבסיס בינארי רואים כי:

$$\frac{1_b}{A},\frac{10_b}{A},\frac{100_b}{A},\frac{1000_b}{A}\dots$$

רואים כי האיבר $f_{i+2}>f_i+f_{i+1}$ בבניה של קוד הופמאן אזי הגרף יראה כזה:

5 שאלה 5

נגדיר עבור חפץ i את $r_i=\frac{price_i}{weight_i}$. האלגוריתם יבחר את החפץ בעל r_i מקסימאלי עד שמתמאלא. אם התיק כמעט מלא ואין מקום לחפץ הבא אז לוקחים כמה שאפשר ממנו והורחים.

ההוכחה של תרגיל זה היא בדיוק אותה הוכחה של תרגיל 6 רק בלי המתמטיקה המסובכת, אז אני אדלג על זה(אתם רואים שאני מבין הרעיון מתרגיל 6 אז למה לכתוב יותר מדי?)

6 שאלה 6

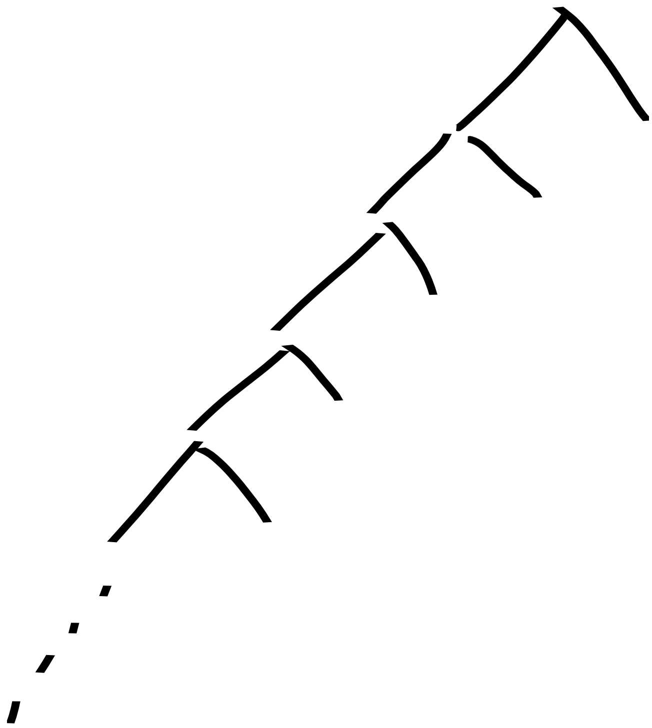
נגדיר סידור Ξ_{FF} כסידור המסימות כך ש $\Xi_{FF}(1)<\Xi_{FF}(2)<\cdots<\Xi_{FF}(n)$, כאשר $\Xi_{FF}(i)$ הוא הזמן שלוקח למסימה i להתבצע.

יהי Ξ_0 סידור אחר כלשהוא.

נגדיר t_v^S כך ש $\Xi_x\left(t_v^S\right)=\Xi_{FF}(v)$

נגדיר סידור Ξ_i להיות מתלכד עם הסידור Ξ_{i-1} חוץ מזה שהחלפנו את האיברים באינדקסים i,t_i^{i-1}(כלומר Ξ_i ו Ξ_{FF} מתלכדים עד למקום הi)

נסמן $Avg(\Xi_x)$ זמן הסיום ההמוצע של המסימות לפי סידור Ξ_x, ונראה כי $Avg(\Xi_i)\le Avg(\Xi_{i-1})$.



איור 1: עץ האופמאן להסתברויות 2^{-i}

צ"ל: $Avg\left(\Xi_i\right) \leq Avg\left(\Xi_{i-1}\right)$

$$\begin{aligned}
Avg\left(\Xi_i\right) &\overset{?}{\leq} Avg\left(\Xi_{i-1}\right) \\
\frac{\sum_{k=0}^{n-1}(n-k)\,\Xi_i(k)}{n} &\overset{?}{\leq} \frac{\sum_{i=0}^{n-1}(n-k)\,\Xi_{i-1}(k)}{n} \\
\sum_{k=0}^{n-1}(n-k)\,\Xi_i(k) &\overset{?}{\leq} \sum_{i=0}^{n-1}(n-k)\,\Xi_{i-1}(k) \\
(n-i)\,\Xi_i(i)+\left(n-t_i^{i-1}\right)\Xi_i\left(t_i^{i-1}\right) &\overset{?}{\leq} (n-i)\,\Xi_{i-1}(i)+\left(n-t_i^{i-1}\right)\Xi_{i-1}\left(t_i^{i-1}\right) \\
(n-i)\,\Xi_i(i)+\left(n-t_i^{i-1}\right)\Xi_i\left(t_i^{i-1}\right) &\overset{?}{\leq} (n-i)\,\Xi_i\left(t_i^{i-1}\right)+\left(n-t_i^{i-1}\right)\Xi_i(i) \\
\underbrace{(n-i)}_{o}a+\underbrace{\left(n-x_i^{s_{i-1}}\right)}_{u}b &\overset{?}{\leq} (n-i)\,b+\left(n-x_i^{s_{i-1}}\right)a \\
oa+ub &\overset{?}{\leq} ob+ua \\
0 &\overset{?}{\leq} ob+ua-oa-ub \\
0 &\overset{?}{\leq} o\underbrace{(b-a)}_{>0}+u\,(a-b) \\
0 &\overset{?}{\leq} \underbrace{o-u}_{o\geq u}
\end{aligned}$$

אזי הוכחנו כי כל פעם שמתקרבים לFF אנחנו נהיה יותר יעילעם מאשר כל הא-פשרויות שלא מתקרבות, אזי $S_n = FF$ אזי FF הוא יותר יעיל מכל האפטסיוט האחרות. משל.