חשבון אינפיניטסימאלי למהנדסים

עפיף חלומה

16 באוקטובר 2009

תוכן עניינים

1 הרצאה מס.1 7
1.1 שדה 7
1.2 שדה סדור 10
1.2.1 ערך מוחלט 12

2 הרצאה מס.2 15
2.1 שלמות 16

3 תרגול מס.1 19

4 הרצאה מס.3 23
4.1 חזקות עם מעריכים רציונאליים 25

5 הרצאה מס.??? 27

6 הרצאה מס.? 29
6.1 חזקות עם מערכים רציונאליים 29
6.2 פונקציות 30
6.2.1 מה זה פומקציה? 30

7 תרגול מס.3 33
7.1 צפיפות הרציונאליים 33
7.2 אקסיומת השלימות 33
7.3 פונקציות 34
7.3.1 פולינומים 34
7.3.2 שויון של פונקציות 34
7.3.3 פונק' רציונליות 34
7.4 פעולות על פונקציות 35
7.5 תכונות של פונקציות 35

8 הרצאה מס.? 37
8.1 פונקציות 37
8.2 תכונות גרף 37
8.2.1 חד חד ערכיות 37
8.2.2 על 37
8.3 גבול של פונקציה בנקודה 37

9 הרצאה מס.?? 39
9.1 הערות 41

10 תרגול מס.?? 43

11 הרצאה מס.?? 45
11.1 רציפות 45
11.1.1 משפט ערך הביניים 45

12 הרצאה מס.?? 47

13 הרצאה מס.? 49

14 תרגול מס.? 51
14.1 נקודת השבת של Brower 51

15 הרצאה מס.? 53

16 הרצאה מס.? 55
16.1 נגזרות 55

17 תרגול מס.? 57
17.1 משפט ווירשטראוס 57

18 הרצאה מס.? 59

19 הרצאה מס.? 61

20 הרצאה מס.? 63
20.1 משפט הערך הממוצע(של קושי) 63
20.2 משפט לופיטאל $L'H\hat{o}pital$ 63

21 האצאה מס.? ----- 65
21.1 פונקציות טריגונומטריות 66

22 תרגול מס.? 69

23 הרצאה מס.? 71
23.1 קשרים אלגברים של $\cos, \sin$ 71
23.2 אקספוננטים ולוגריתמים 72

24 הרצאה מס.? 75
24.1 שיטות אינטגרציה 75
24.1.1 אינטגרציה בחלקים 75
24.1.2 אינטגרל של נגזרת פנימית 75

25 תרגול מס.? 77

26 הרצאה מס.? 79
26.1 סדרות 79
26.2 גבול של סדרה 80
26.3 אריכמטיקה של גבולות 81
26.4 סדרות ופונקציות 81

27 הרצאה מס.? 83
27.1 קריטריון קושי 83

28 הרצאה מס.? 85
28.1 טורים 86

29 הרצאה מס.? 89
29.1 טורים מוקרים 90

30 הרצאה מס.? 91
30.1 התכנסות בהחלט ובתנאי 91

31 תרגול מס.? 93
31.1 תתי סדרות 93

32 הרצאה מס.? 95

פרק 1

הרצאה מס.1

הקורס על היסודות של החשבון הדיפרנציאלי והאינטגרלי של פונקציות של משתנה אחד.
המספרים הממשיים הם שדה סדור שלם. בהמשך נגדיר מה הם שלושת התכונות האילו.

1.1 שדה

שדה הוא קבוצה, נסמן אותה ב $\mathbb{F}$, שמקימת התכונות הבאות:

1. על קבוצה מוגדרות שתי פעולות בינאריות: כפל וחיבור כך ש

$$\forall a,b \in \mathbb{F} : \begin{cases} a+b \in \mathbb{F} \\ a \cdot b \in \mathbb{F} \end{cases}$$

2. חוק הקיבוץ(דיסטריבוטיביות):

$$(a+b)+c = a+(b+c)$$

מחוק פשוט זה מקבלים את כל הזהיות הללו:

$$\begin{aligned} a+b+c+d &= (a+b)+c+d \\ &= a+(b+c)+d \\ &= a+b+(c+d) \\ &= (a+b)+(c+d) \\ &= ((a+b)+c)+d \\ &= a+((b+c)+d) \\ &= a+(b+(c+d)) \end{aligned}$$

3. קיים איבר ניוטרלי $0 \in \mathbb{F}$ כך ש

$$\forall a \in \mathbb{F} : 0 + a = a + 0 = a$$

4. לכל $(a \neq 0) \in \mathbb{F}$ קיים איבר ניגדי $b \in \mathbb{F}$ כך ש

$$a + b = b + a = 0$$

מכיוון שהאיבר הזה ייחיד נסמן אותו ב $(-a)$
הערה: קבוצה שמקיימת את שלושת התכונות הנ"ל נקראת חבורה.
טענה:

$$\forall a, b, c \in \mathbb{F} : a + b = a + c \Rightarrow b = c$$

הוכחה:

$$\begin{aligned} a + b &= a + c \\ (-a) + (a + b) &= (-a) + (a + c) \\ ((-a) + a) + b &= ((-a) + a) + c \\ 0 + b &= 0 + c \\ b &= c \end{aligned}$$

טענה:

$$a + b = a \Rightarrow b = 0$$

הוכחה:

$$\begin{aligned} a + b &= a \\ a + b &= a + 0 \\ (-a) + a + b &= (-a) + a + 0 \\ b &= 0 \end{aligned}$$

הערה: סימון מקוצר $-a = (-a)$

5. חוק חילוף:

$$\forall a, b \in \mathbb{F} : a + b = b + a$$

טענה:

$$a - b \Rightarrow b - a$$

הוכחה:

$$\begin{aligned} a - b &\stackrel{?}{=} b - a \\ a + (-b) &\stackrel{?}{=} b + (-a) \\ a + a + (-b) &\stackrel{?}{=} a + b + (-a) \\ a + a + (-b) &\stackrel{?}{=} b + a + (-a) \\ a + a + (-b) + b &\stackrel{?}{=} b + 0 + b \\ a + a &\stackrel{?}{=} b + b \end{aligned}$$

הערה: לא יכולים להתקדם משלב זה

6. אסוציאטיביות של כפל

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot d)$$

7. קיום איבר ניטרלי כפלי שמסמנים $1 \in \mathbb{F}$

$$\forall a \in \mathbb{F} : a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$$

8. לכל איבר $(a \neq 0) \in \mathbb{F}$ קיים איבר נגדי לכפל שנסמן a^{-1}

טענה: אם $a \neq 0$ אזי

$$a \cdot b = a \cdot c \Rightarrow a = c$$

הוכחה:

$$\begin{aligned} a\cdot b &= a\cdot c\\ a^{-1}\cdot a\cdot b &= a^{-1}\cdot a\cdot c\\ 1\cdot b &= 1\cdot c\\ b &= c \end{aligned}$$

9. חילוף לכפל: $a\cdot b=b\cdot a$.
10. חוק הפלוג: $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$.

$$\begin{aligned} a-b &= b-a\\ a+a &= b+b\\ 1\cdot a+1\cdot b &= 1\cdot b+1\cdot b\\ (1+1)\cdot a &= (1+1)\cdot b \end{aligned}$$

אבל עוד פעם לא יכולים להתקדם כי אולי $(1+1)=0$

אפשר לקחד דוגמה לשדה $\mathbb{F}=\{e,f\}$ אזי נכתוב את לוח החיבור ולוח הכפל שלהם

$+$	e	f
e	e	f
f	f	e

$\cdot$	e	f
e	e	f
f	f	e

טבלה 1.1: טבלת חיבור וכפל של $\mathbb{F}=\{e,f\}$

אזי אם $e=0, f=1$ אזי $1=-1$ ו $1\cdot 0=0\cdot 1$ אבל $1+1=0$

1.2 שדה סדור

השדה $\mathbb{F}$ הוא סגור אם קיימת תת קבוצה $P\subset\mathbb{F}$ כך ש:

1. $a,b\in P\Rightarrow a+b\in P$
2. $a,b\in P\Rightarrow a\cdot b\in P$
3. טריכוטומיה לכל $a\in\mathbb{F}$ מתקיימת אחת ורק אחת מהאפשרויות הבאות:
   (א) $a\in P$
   (ב) $a^{-1}\in P$
   (ג) $a=0$

מסמנים:

$$\begin{aligned} a>0 &\quad\Rightarrow\quad a\in P\\ a<b &\quad\Rightarrow\quad a-b\in P\\ a=b \text{ או } a<b &\quad\Rightarrow\quad a\le b\\ a=b \text{ או } a>b &\quad\Rightarrow\quad a\ge b \end{aligned}$$

טענה:
לכל $a,b\in\mathbb{F}$ מתקיימת אחת ורק אחת משלושת האפשרויות הבאות:

1. $a<b$
2. $a>b$
3. $a=b$

הוכחה:
מה צריך להוכיח בדיוק?

1. $(b-a)\in P$
2. $-(b-a)=a-b\in P$
3. $a-b=0$

כלומר מתבקש להוכיח כי $a-b$ מקיים את הטריכוטומיה.
טענה:

$$a<b\Rightarrow a+c<b+c$$

נתון:

$$b-a\quad\in\quad P$$

צריך להוכיח:

$$\underbrace{(b+c)-(a+c)}_{b-a}\in P$$

טענה:

$$a<c,a<b\Rightarrow a<c$$
טרנזיטיביות של אי שוויון

נתון:

$$\begin{aligned} b-a &\in P \\ c-b &\in P \end{aligned}$$

צריך להוכיח:

$$\underbrace{c-a}_{(c-b)+(b-a)} \in P$$

טענה:
אם $a<0, b<0 \Rightarrow a\cdot b>0$
הוכחה:
נתון:

$$\left.\begin{aligned} -a &\in P \\ -b &\in P \end{aligned}\right\} \underbrace{\Rightarrow}_{\text{סגירות לכפל}} \underbrace{(-a)\cdot(-b)}_{a\cdot b} \in P$$

הערה: אנחנו מניחים כי $(-a)\cdot(-b)=(-1)\cdot a\cdot(-1)\cdot b=ab$ אבל זה דורש הוכחה ונוכיח אותו בתרגול.
מסקנה:
אם $a\neq 0$ אז $a^2=a\cdot a>0$
אם $a>0$ אזי $a\cdot a>0$
אם $a<0$ אזי $a\cdot a>0$
טענה: $1>0$
הוכחה:
נתון $1\neq 0$ אזי

$$\begin{aligned} 1^2 &> 0 \\ 1 &> 0 \end{aligned}$$

1.2.1 ערך מוחלט

$\mathbb{F}$שדה סדור, אזי מגדירים הערך המוחלט. לכל $a\in\mathbb{F}$ מגדירים $|a|=\begin{cases} a & a\geq 0 \\ -a & a<0 \end{cases}$

משפט: אי שוויון המשולש:לכל $a,b\in\mathbb{F}$

$$|a+b|\leq|a|+|b|$$

כדי להוכיח את זה מסתכלים בכל המקרים:

$$\begin{array}{llll} (1) & a \geq 0 & , & b \geq 0 \\ (2) & a \geq 0 & , & b < 0 \\ (3) & a < 0 & , & b \geq 0 \\ (4) & a < 0 & , & b < 0 \end{array}$$

במקרה 1:

$$a + b > 0 \Rightarrow |a + b| = a + b = |a| + |b|$$

במקרה 4: $a + b < 0 \Rightarrow |a + b| = -(a + b) = (-a) + (-b) = |a| + |b|$

במקרה 2: $b \leq 0, a \geq 0$ אזי יש שתי מקרים:

1. $a + b \geq 0$

$$|a + b| = a + (-b) \leq |a| + |b|$$

2. $a + b < 0$

$$|a + b| = -(a + b) = (-a) + (-b) \underbrace{\leq}_{(-a)<a} a + (-b) = |a| + |b|$$

מסקנות

1. אם נחליף את b ב $(-b)$ אזי $|a - b| \leq |a| + |b|$
2. $|a + b + c| \leq |a| + |b| + |c|$ כלומר $|\sum_i a_i| \leq \sum_i |a_i|$ (את זה כל להוכיח באינדוקציה)
3. אי משולש המשולש ההפוך: $\left||a| - |b|\right| \leq |a + b|$

$$|a + c| \leq |a| + |c|$$

נציב $c = b - a$:

$$|b| \leq |a| + |b - a|$$

נציב $a = -a$

$$\begin{aligned} |b| &< |a|+|b+a| \\ |b|-|a| &< |b+a| \end{aligned}$$

אזי קיבלנו אי שוויון המשולש השלם:

$$\Big||a|-|b|\Big| \leq |a+b| \leq |a|+|b|$$

פרק 2

הרצאה מס.2

הגדרה:
יהא $\mathbb{F}$ שדה סדור. קבוצה $A \subset \mathbb{F}$ נקראת חסומה מלעיל (Upper Bounded) אם קיים $M \in \mathbb{F}$ כך ש $\forall a \in A : M \geq a$. או $(\exists M \in \mathbb{F})\,(\forall a \in A)\,(a \leq M)$
A נקראת חסומה מלרע(Lower bounded) אם קיים $m \in \mathbb{F}$ כך ש $m \leq a$ לכל $a \in A$.
A נקראת חסומה אם היא חסומה מלעיל ומלרע.
למה: $A \subset \mathbb{F}$ חסומה אם"ם $(\exists M \in \mathbb{F})\,(\forall a \in A)\,(|a| \leq M)$
הוכחה: נניח כי A קבוצה חסומה לכן היא חסומה מלעל אזי $(\exists M_1)\,(\forall a \in A)\,(a < M_1)$ וגם חסומה מלרע לכן $(\exists M_2)\,(\forall a \in A)\,(a \geq M_2)$ אבל לכתוב $a \geq M_2$ זה לפי אקסיומות סדר שווה ל $(-a) \leq (-M_2)$.
ניקרא $M = \max(M_1, -M_2)$ נובע מזה כי $(\forall a \in A)\,(a \leq M_1 \leq M)$ וגם $(\forall a \in A)\,((-a) \leq -M_2 \leq M)$ אזי $(\forall a \in A)\,(|a| \leq M)$
לא נוכיח את הכיוון השני כי זה קל.
סימונים: אם $a < b$ אזי

- $[a, b] = \{x \in \mathbb{F} : a \leq x \leq b\}$ קטע סגור
- $(a, b) = \{x \in \mathbb{F} : a < x < b\}$ קטע פתוח
- $(a, b] = \{x \in \mathbb{F} : a < x \leq b\}$ קטע חצי סגור או חצי פתוח
- $[a, \infty) = \{x \in \mathbb{F} : x \geq a\}$ קרן
- $(a, \infty) = \{x \in \mathbb{F} : x > a\}$
- $(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{F} : x \leq a\}$

טענה: לא קיים אבר ב $\mathbb{N}$ שהוא חסם מלעל ל$\mathbb{N}$
הוכחה: נניח בדרך השלילה שקיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש $n \geq k$ לכל $k \in \mathbb{N}$. אבל $n+1 \in \mathbb{N}$ הוא גם טבעי וגדול מ n. סתירה.
האם גם נכון שלא קיים $r \in \mathbb{Q}$ כך ש $n \leq r$ לכל $n \in \mathbb{N}$? התשובה: לא ניתן להוכית.
אקסיומת השדה הארכימדי[1]: קבוצת הטבעיים אנה חסומה מלעל
מסקמה: לכל $(\epsilon > 0) \in \mathbb{F}$ קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש $0 < \frac{1}{n} < \epsilon$
הוכחה: על פי אקסיומת השדה הארכימדי קיים $n \in \mathbb{F}$ כך ש$n > \frac{1}{\epsilon} \Rightarrow \frac{1}{n} < \epsilon$
טענה: לכל $x, y > 0$ קיים $n \in \mathbb{F}$ טבעי כך ש $nx > y$
הוכחה: מהמסקנה נובע שקיים n טבעי כך ש $\frac{1}{n} < \frac{x}{y} \Rightarrow y < nx$

[1]אקסיומה זו זמנית. נוכיח בהמשך

2.1 שלמות

טענה: לא קיים $r \in \mathbb{Q}$ רציונאלי כך ש $r^2 = 2$

הוכחה: נניח בשלילה שקיים $r = \frac{a}{b}$ כאשר $a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$ כך ש $r^2 = \frac{a^2}{b^2} = 2$. נניח ש $\frac{a}{b}$ שבר מצומצם. $a^2 = 2b^2$ אזי a זוגי אזי $\exists k \in \mathbb{N}$ כך ש $a = 2k$

$$\begin{aligned} 4k^2 &= \left(2k^2\right) = 2b^2 \\ 2k^2 &= b^2 \end{aligned}$$

אזי b זוגי אזי לa, b מחלק משותף. סתירה

אזי צריכים להוסיף מספרים. אז נוסים $\sqrt{2}$ אל $\mathbb{F}$ אבל אי אפשר לעצור בזה, צריך להוסיף $n \cdot \sqrt{2}$ (כאשר $n \in \mathbb{Q}$) וצריך להוסיף לזה עוד מספר. אזי אנחנו מוסיפים $\mathbb{Q} \cup \left\{q + r\sqrt{2} : q, r \in \mathbb{Q}\right\}$

נחזור ל $\mathbb{F} = \mathbb{Q}$ אזי האם הקבוצה $[5, 19)$ האם A לסומה מלעל?

תשובה: כן 20 חסם מלעיל(וגם 24)

הגדרה: A קבוצה בשדה. M יקרא חסם עליון[2] של A

1. M חסם מלעל
2. אם M' גם כן חסם מלעל אז $M' \geq M$

הגדרה: A קבוצה בשדה. M יקרא חסם תחתון[3] של A אם

1. M חסם מלרע
2. אם M' גם כן חסם מלרע אז $M' \leq M$

טענה: $A \subseteq \mathbb{F}$ Mחסם עליון של A אם"ם:

1. M חסם מלעל
2. לכל $\epsilon > 0$ קיים $a \in A$ כך ש $a > M - \epsilon$

הוכחה: נתון $m = \sup A$ צ"ל Mחסם מלעל $(\forall \epsilon > 0)\,(\exists a \in A)\,(a > M - \epsilon)$. נניח בשלילה $(\exists \epsilon > 0)\,(\forall a \in A)\,(a \leq M - \epsilon)$ אזי $M - \epsilon$ חסם מלעל של A. אבל $M > M - \epsilon$ אזי M אינו חסם עליון. סתירה.

נתון M חסם מלעל על A וגם $(\forall \epsilon > 0)\,(\exists a \in A)\,(a > M - \epsilon)$ צריך להוכיח M חסם עליון.

נניח בשלילה כי M אינו חסם עליון אזי $(\exists M' < M)\,(\forall a \in A)\,(a \leq M')$ אזי $(\forall a \in A)\left(a \leq M - \underbrace{(M - M')}_{>0}\right)$

בסתורה לכך ש $(\exists a \in A)\,(a > M - (M - M'))$

[2] באנגלית Least upper bound, Supermum ומסמנים אותו $\sup A$

[3] באנגלית Greatest lower bound, Infimum ומסמנים אותו $\inf A$

הגדרה: $A \subseteq \mathbb{F}$ איבר M יקרא המקסימום[4] של A אם:

1. $M \in A$
2. M חסם מלעל

איבר m יקרא המינימום של A[5] אם:

1. $m \in A$
2. m חסם מלרע

דוגמה: הקבוצה $[5,19)$

- חסומה מלעל(על ידי 100 למשל)
- יש לה חסם עליון(19)
- אין לה מקסימום
- חסומה מלרע על ידי 2- למשל
- יש לה חסם תחתון 5
- יש מינימום 5

טענה: אם לA יש מקסימום אז יש לה חסם עליון ומתקיים $\sup A = \max A$

הוכחה: יהי $M = \max A$. צ"ל M חסומה מלעל אזי צ"ל כי לכל $\epsilon > 0$ קיים $a \in A$ כך ש $a > M - \epsilon$. $M \in A$ אזי M מקיים את זה לכל ϵ.משל[6].

נגדיר: $\mathbb{F} = \mathbb{Q}, A = \left\{r \in \mathbb{Q} : r \geq 0, r^2 < 2\right\}$

טענה: A חסומה מלעל

הוכחה: כל $r \in A$ מקיים $r^2 < 2 < 2^2$ אזי $r < 2$. משל.

אקסיומת השלמות: שדה סדור ייקרא שלם אם לכל קבוצה לא ריקה וחסומה מלעל קיים חסם עליון

טענה: אין לA חסם עליון(ב $\mathbb{Q}$)

---

[4] מסומן $\max A$

[5] מסומן $\min A$

[6] מרצים טוענים כי פירושה של "משל" הוא "מה שרצינו להוכיח" אבל סטודנטים טוענים כי פירושה הוא "מזל שהצלחנו להוכיח"

פרק 3

תרגול מס.1

מתן פרזמה prezma@math.huji.ac.il

טענה: יהי $\mathbb{F}$ שדה סדור אז לכל $x,y\in\mathbb{F}$ מתקיים $(-x)\,y=x\,(-y)=-\,(xy)$

הוכחה:

$$\begin{aligned}(-x)\,y+xy &= (-x+x)\,y\\ &= 0\cdot y\end{aligned}$$

מסקנה: ההפכי של xy הוא $(-x)\,y$ שזה שווה ל $-\,(xy)$

טענה: אם $x<0<y$ אז $xy<0$

הוכחה:

$$\begin{aligned}x<0 &\Rightarrow -x>0\\ &\Rightarrow -xy=(-xy)>0\\ &\Rightarrow xy<0\end{aligned}$$

מסקנה: אם $x,y<0$ אז $xy>0$

הוכחה: $x<0\Rightarrow -x>0, y<0\Rightarrow -y>0$
לכל $a\in\mathbb{F}$ מתקיים $-\,(-a)=a$ לכן $xy=yx=-\,(-yx)=-y\,(-x)=(-y)\,(-x)>0$

מסקנה 3: לכל $(x\neq 0)\in\mathbb{F}$ מתקיים $x^2>0$

דוגמה:

$$\mathbb{C}=\left\{a+ib|a,b\in\mathbb{R},i^2=-1\right\}$$

שאלה: האם קיימת קבוצת חיוביים $P \subset \mathbb{C}$ שלגביה הפעולות $+, \cdot$ ב $\mathbb{C}$ משרות על $\mathbb{C}$ מבנה של שדה סדור?

תשובה: לא קיימת קבוצה $P \subset \mathbb{C}$ העונה על תנאי השאלה.

הוכחה: נניח בשלילה כי יש P כזו אז $0 < 1^2 = 1 \cdot 1 = 1$ כלומר $1 \in P$ אזי $-1 \notin P$ (לפי טריכוטומיה) אבל $i^2 = -1 \notin P$ בסתירה למסקנה 3

טענה: לכל רציונל $q \in \mathbb{Q}$ מתקיים $q^2 \neq 2$

הוכחה: נניח בשלילה שקיים $q \in \mathbb{Q}$ כנ"ל אז $q = \frac{m}{n}, m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$. אזי נרשום את m, n כגורמים ראשוניים: $m = p_1^{r_1} \cdot \cdots \cdot p_k^{r_k}, n = p_1'^{r_1'} \cdot \cdots \cdot p_{k'}'^{r_{k'}'}$ אזי אפשר לצמצם גורמים משותפים מהשבר $\frac{m}{n}$ ומקבלים m', n' ללא מחלק משותף (ללא ראשוני משותף בהצגתם) אזי $q = \frac{m'}{n'}$.

$\frac{(m')^2}{(n')^2} = 2 \Rightarrow m' = 2n'$ אזי 2 מחלק את $(m')^2$ אזי הוא מחלק גם את m'

טענה: אם 2 מחלק m^2 אזי 2 מחלק את m

הוכחה: 2 ראשוני אזי לכל $n \in \mathbb{N}$, $n^2 \neq 2$ אשר $2|m^2$ את בפירוק של m^2 למכפלת ראשוניים מופיע $p_i = 2$ עבור i כלשהוא עם $r_i \geq 2$ $(m = p_1^{r_1} \cdots p_k^{r_k}, m^2 = p_1^{2r_1} \cdots p_k^{2r_k})$ אזי $4|m^2$

אזי $\frac{(m')^2}{2} = (n')^2$. הוכחנו כי $4|(m')$ אזי $2|\frac{(m')^2}{2}$ אזי $2|(n')^2$ אזי גם $2|m'$ וגם $2|n'$ בסתירה לזה שאין גורמים משותפים.

טענה: לכל מספר $r \in \mathbb{N}$ שאינו ריבוע של מספר שלם. אזי לא קיים $q \in \mathbb{Q}$ כך ש $q^2 = r$ (כלומר $\sqrt{r} \notin \mathbb{Q}$)

סימון: A קבוצה ו $z \in A$ אזי נומר כי $A \leq z$ אם A הוא חסם עליון של A

סימון: יהי $A, B \in \mathbb{F}$ קבוצות לא ריקות. נאמר כי A גדולה מ B (סימון $B \leq A$) אם לכל $a \in A$ ולכל $b \in B$ מתקיים $b \leq a$

אקסיומת השלמות: אם $u, v \in F$ קבוצות לא ריקות $v \leq u$ אז קיים $z \in \mathbb{F}$ כך ש $v \leq z \leq u$

הנחה: $\mathbb{R}$ מקיים אקסיומת השלמות

משפט החסם העליון: לכל קב' $\mathbb{R} \supseteq (A \neq \emptyset)$ וחסומה מלעיל

הערה: $\mathbb{Q}$ שדה סדור שאינו מקיים אקסיומת השלמות

הערה: יתכן כי $\sup A \notin A$

דוגמא: $A = \{a_1, \ldots, a_n\} \subseteq \mathbb{F}$ כאשר $\mathbb{F}$ שדה סדור (A קבוצה סופית) אזי $\sup A = \max A = \max(a_1, \ldots, a_n)$ ו $\inf A = \min A = \min(a_1, \ldots, a_n)$

דוגמה: $A = [0, 1]$

הגדרה: לכל $a,b\in\mathbb{R}$ נסמן $[a,b]\equiv\{x\in\mathbb{R}|a\le x\le b\}$
A חסומה מלעיל ע"י 1(לפי הגדרה)
1 חסם עליון כי אם z חסם עליון של A הרי ש $a\le z$ לכל $a\in A$ ובפרט $1\le z$

דוגמה: $A=(0,1)$

סימון: $(a,b)\equiv\{x\in\mathbb{R}|a<x<b\}$
1 חסם עליון של A לפי הגדרה.
אם z חסם מלעיל של A אז לפי ההגדרה $a\le z$ לכל $a\in A$

טענה: יהי $(A\neq\emptyset)\in\mathbb{R}$ קבוצה חסומה מלעיל. חסם עליון z של A הוא חסם עליון אם"ם עלכל $\epsilon>0$ קיים $a\in A$ כך ש $z-\epsilon<a$

בהנחת הטענה נוכל לראות כי $\sup(0,1)=1$. יהי $\epsilon>0$. $1-\epsilon<0$ ולכן $1-\epsilon<$ $1-\frac{\epsilon}{2}\in(0,1)$.

הוכחה:

כיוון ראשון: נניח z חסם עליון. ונניח השלילה שקיים $\epsilon>0$ כך שלכל $a\in A$ מתקיים $z-\epsilon\ge a$ סתירה לבחירת z($a\le z-\epsilon<z$)

כיוון שני: נניח לכל $\epsilon>0$ קיים $a\in A$ כך ש $z-\epsilon<a$. יהי z' חסם מלעיל ונניח בשלילה ש $z'<z$. נבחר $\epsilon=z-z'$ אז לפי ההנחה קיים $a\in A$ כך ש $z-\epsilon<a$ אבל $z'=z-(z-z')=z-\epsilon$ כלומר $z'<a$ בסתירה לבחירת z'

הגדרה: עבור קבוצות לא ריקות $A,B\in\mathbb{R}$ נגדיר $A+B\equiv\{a+b|a\in A,b\in B\}$

דוגמה: $A=\left\{\frac{1}{2},1\right\},B=[0,1]$ אזי $A+B=\left[\frac{1}{2},2\right]$

טענה: אם A,B קבוצות סדורות חסומות מלעיל אזי גם $A+B$חסומה מלעיל.

הוכחה: יהי $x\in(A+B)$ אזי יש קיימים $a\in A,b\in B$ כך ש $x=a+b$ אבל $a\le\sup A$ ו $b\le\sup B$ אזי $x=a+b\le\sup A+\sup B$ אזי $A+B$ חסומה מלעיל.
אזי קיים $\sup(A+B)$

טענה: עבור קבוצה לא ריקה $A,B\subseteq\mathbb{R}$ וחסומות מלעיל אזי $\sup A+\sup B=\sup(A+B)$(בפרט $A+B$ חסומה מלעיל)

הוכחה: עלינו להראות כי $\sup A+\sup B$ מקיים הקריטריון לחסם עליון עבור הקבוצה $A+B$

יהי $\epsilon>0$ נסמן $\epsilon'={}^{\epsilon}/_{2}>0$, $\sup A$ ו $\sup B$ מקיימים את הקריטריון לsup עבור ϵ' לכן קיימים $a\in A$, $b\in B$ כך ש $\sup A-\epsilon'<a$ ו $\sup B-\epsilon'<b$. לכן אם ניקח

$x=a+b\in A+B$ יתקיים $x=a+b<\sup A+\sup B-\overbrace{2\epsilon'}^{\epsilon}$

פרק 4

הרצאה מס.3

טענה: לכל קבוצה ב $\mathbb{F}$ בעלת מספר סופי של איברים קיים מינימום ומקסימום

הוכחה: באינדוקציה על איברי הקבוצה

קיים שדה סדור(ארכימידי) ובו קבוצה חסומה מלעל שאין לה חסם עליון

טענה: $\mathbb{F} = \mathbb{Q}$ אזי $A = \left\{r \in \mathbb{Q} : r^2 < 2\right\}$ אזי לA לא קיים חסם עליון[1]

הוכחה: נניח בשלילה כי קיים $\sup A$ כלומר $(\forall r \in A)\,(r \leq \sup A)$ וגם כל חסם מלעל אחר הוא גדול ממנו או $(\forall \epsilon > 0)\,(\exists r \in A)\,(r > \sup A - \epsilon)$. אחת משלוש:

1. $(\sup A)^2 = 2$

   את זה כבר פסלנו בשיעור שעבר כי הוכחנו כי לא קיים $r \in \mathbb{Q}$ כך ש $r^2 = 2$.

2. $(\sup A)^2 < 2$

   נשים לב כי בהכרח $1 \leq \sup A \leq 2$. $\mathbb{N}$ קבוצה לא חסומה ולכן מובטח לנו כי $\exists n \in \mathbb{N}$ כך ש $n > \frac{1}{\sup A}$ וגם $n > \frac{6}{2-(\sup A)^2}$. אז נסתכל על $\sup A + \frac{1}{n}$ ונוכיח כי זה איבר ב A.

$$
\begin{aligned}
\left(\sup A + \frac{1}{n}\right)^2 &= (\sup A)^2 + \frac{2}{n}\sup A + \frac{1}{n^2} \\
&\underbrace{<}_{n>\frac{1}{\sup A}} (\sup A)^2 + \frac{2}{n}\sup A + \frac{1}{n}\sup A \\
&\leq (\sup A)^2 + \frac{6}{n} \\
&\underbrace{<}_{n>\frac{6}{2-(\sup A)^2}} (\sup A)^2 + \frac{6\left(2-(\sup A)^2\right)}{6} \\
&= 2
\end{aligned}
$$

[1] ברור שאים $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ אז היה קיים $\sup A$.

3. $(\sup A)^2 > 2$

נניח ש $(\sup A)^2 > 2$ שוב ננצל העובדה כי $\mathbb{N}$ לא חסומה נבחר $n \in \mathbb{N}$ כך ש $n > \frac{2\sup A}{(\sup A)^2 - 2}$ אזי נראה כי $\left(\sup A - \frac{1}{n}\right)^2$ הוא סופרמום.

$$\begin{aligned}
\left(\sup A - \frac{1}{n}\right)^2 &= (\sup A)^2 - \frac{2}{n}\sup A + \frac{1}{n^2} \\
&> (\sup A)^2 - \frac{2}{n}\sup A \\
&> (\sup A)^2 - \frac{2\sup A}{\left(\frac{2\sup A}{(\sup A)^2-2}\right)} \\
&= (\sup A)^2 - \frac{2\sup A}{2\sup A}\left((\sup A)^2 - 2\right) \\
&= 2
\end{aligned}$$

אזי הראנו כי אין חסם עליון ל A.

הגדרה: יהי $\mathbb{F}$ שדה סדור. $\mathbb{F}$ יקרא שלם[2] אם לכל קבוצה לא ריקה וחסומה מלעל קיים חסם עליון.

משמע הוכחנו כי $\mathbb{Q}$ הוא לא שדה שלם.

טענה: בשדה שלם לכל קבוצה חסומה מלרע קיים חסם תחתון.

הוכחה: נתון $(\exists m \in \mathbb{F})\,(\forall a \in A)\,(m \leq a)$. נגדיר $B = \{-a : a \in A\}$ אזי $(\exists m \in \mathbb{F})\,(\forall a \in A)\,((-m \geq -a))$ כלומר B חסומה מלעל ע"י $(-m)$. קיים לB חסם עליון M. $(\forall b \in B)\,(M \geq b)$ ו $(\forall \epsilon > 0)\,(\exists b \in B)\,(b > M - \epsilon)$ זה כמו לאומר כי $(\forall a \in A)\,(M \geq (-a))$ ו $(\forall \epsilon > 0)\,(\exists a \in A)\,((-a) > M - \epsilon)$ אם נעביר סימן מינוס לצד השני מקבלים $(\forall a \in A)\,((-M) \leq a)$ ו $(\forall \epsilon > 0)\,(\exists a \in A)\,(a < (-M) + \epsilon)$

טענה: A, B שני קבוצות לא ריקות בשדה סדור שלם $\mathbb{R}$. נתון לכל $a \in A, b \in B, a \leq b$ אז קיים M כך ש $a \leq M \leq b$ לכל b, a

הוכחה: הקבוצה A חסומה מלעל לכן נקח $b \in B$ מהנתון $(\forall a \in A)\,(a < b)$. מאקסיומת השלמות נובע שקיים לA חסם עליון. נסמן $M = \sup A$

נראה ש M חסם מלרע של B

נניח בדרך השלילה שאין זר כך. כלומר קיים $b \in B, b < M$. מהיות M חסם עליון של A נובע שקיים $a \in A, a > b$ בסתירה לכך ש $a \leq b$ לכך ש $a \leq b$ לכל $a \in A, b \in B$.

משפט: שדה הממשיים מקיים את תכונות הארכימידיות(הטבעיים קבוצה לא חסומה מלעל)

הוכחה: נניח בשלילה שקיים $a \in \mathbb{R}$ כך ש $a \leq n$ לכל $n \in \mathbb{N}$ מאקסיומת השלמות נובע שקיים ל$\mathbb{N}$ סופרמום נסמן $M = \sup \mathbb{N}$. אזי $\forall n \in \mathbb{N} : n \leq M$ אבל $\forall n \in \mathbb{N}, (n+1) \in \mathbb{N}$ אזי $\forall n \in \mathbb{N}, n+1 \leq M$ אזי $\forall n \in \mathbb{N}, n \leq n \leq M-1$ אזי $M-1$ חסם מלעל של $\mathbb{N}$ בשלילה לזה ש M הוא החסם העליון.

---

[2] באנגלית Complete

משפט: המספרים הרציונאליים "צפופים" בממשיים. כמובן ש: $(\forall x, y \in \mathbb{R}, x < y)\,(\exists r \in \mathbb{Q})\,(x < r < y)$

הוכחה: $\mathbb{Z}$ אינה חסומה מלעל אזי $\exists m \in \mathbb{Z} : m < x$. נבחר $n \in \mathbb{N}$ כך ש $\frac{1}{n} < y - x$. הוכחנו כי קיים k טבעי כך ש $m + \frac{k}{n} > x$. נתבונן במספרים הרציונאליים $m + \frac{j}{n}, 1 \leq k \leq k$. קיים $j \leq k$ כך ש $m + \frac{j}{n} > x$ אבל $m + \frac{j-1}{n} \leq x$. אזי $m + \frac{j}{n}$ הוא הראשון שעבר את x. נסמן $z = m + \frac{j}{n}$. אזי $z > x$ אבל $z - \frac{1}{n} \leq x$ אזי $z \leq x + \frac{1}{n} < \overbrace{x + (y - x)}^{y}$.

4.1 חזקות עם מעריכים רציונאליים

הגדרנו כבר $x^n, x \in \mathbb{N}$ להיות $x^1 = x, x^{k+1} = x \cdot x^k$. ונגדיר $x^n, x \in \mathbb{Z}$ על ידי $x^0 = 1, x^{-n} = \frac{1}{x^n} = (x^n)^{-1}$

טענה: לכל $x, y \neq 0, m, n \in \mathbb{Z}$

1. $x^m x^n = x^{m+n}$
2. $(x^m)^n = x^{nm}$
3. $x^n y^n = (xy)^n$
4. $0 < \alpha < \beta, n > 0$ אזי $\beta^n > \alpha^n$
5. $0 < \alpha < \beta, n < 0$ אזי $\beta^n < \alpha^n$
6. $\alpha > 1, n > m$ אזי $a^n > \alpha^m$
7. $mga < 1, n > m$ אזי $a^n < \alpha^m$

לא נוכיח את זה כי זה היה בעבודת בית שלכם[3]

[3] פירושו של זה "אני יודע להוכיח, אבל לא רוצה לבזבז זמן עליכם"

פרק 5

הרצאה מס.???

נוכיח ש $x \geq y^n$: נניח השלילה $x > y^n$

נגדיר $\epsilon = \min\left(1, \frac{x-y^n}{nx}\right)$ אזי $\epsilon \leq 1 \wedge \epsilon \leq \frac{x-y^n}{nx}$ אזי

$$\begin{array}{rcl} nx\epsilon & < & x - y^n \\ y^n & < & (1-\epsilon n)\, x \leq (1-\epsilon)^n\, x \\ y^n & < & (1-\epsilon)^n\, x \\ \left(\dfrac{y}{1-\epsilon}\right)^n & < & x \end{array}$$

מסקנה y אינו יכול להיות $\sup S$

נוכיח ש $x \leq y^n$: נניח בשלילה ש$x < y^n$. נגדיר $0 < \epsilon < \min\left(1, \frac{y^n-x}{ny^n}\right)$ נובע מזה

$$\begin{array}{rcl} ny^n\epsilon & < & y^n - x \\ x & < & (1-n\epsilon)\, y^n \leq (1-\epsilon)^n\, y^n \\ x & < & (1-\epsilon)^n\, y^n \\ x & < & ([1-\epsilon]\, y)^n \end{array}$$

נובע כי $y\,(1-\epsilon)$ הוא חסם מלעל של S ו $y\,(1-\epsilon) < y$ אזי y אינו חסם עליון

טענה: $a/b = c/d \Rightarrow x^{a/b} = x^{c/d}$

הוכחה:

$$
\begin{aligned}
\left(x^{a/b}\right)^{bd} &= \left(\left(\left(\left(x^{a}\right)\right)^{1/b}\right)^{b}\right)^{d} \\
&= \left(x^{a}\right)^{d} \\
&= x^{ad} \\
&= x^{bc} \\
&= \left(x^{c}\right)^{b} \\
&= \left(\left(\left(x^{c}\right)^{1/d}\right)^{d}\right)^{b} \\
&= \left(\left(x^{c/d}\right)^{d}\right)^{b} \\
&= \left(x^{c/d}\right)^{bd}
\end{aligned}
$$

פרק 6

הרצאה מס.?

6.1 חזקות עם מערכים רציונאליים

לכל $x>0, m\in\mathbb{N}$ מגדירים $x^{\frac{1}{n}}=\sup\{z\in\mathbb{R}:z^n<x\}$ אזי אם $r={}^m/_n$ אזי $x^r=(x^m)^{1/n}$

טענה: $x,y>0, r,s\in\mathbb{Q}$ אזי

1. $x^r x^s = x^{r+s}$
2. $(x^r)^s = x^{(r\cdot s)}$
3. $x^r y^r = (xy)^r$
4. $x>0, x>y \Rightarrow x^r>y^r$
5. $x<0, x>y \Rightarrow x^r<y^r$
6. $x>1, r>s \Rightarrow x^r>x^s$
7. $x<1, x>s \Rightarrow x^r<x^s$

הוכחת 1: $r={}^a/_b, S={}^c/_d$ אזי $r+s=\frac{ad+bc}{bd}$ אזי צריך להוכיח כי

$$\underbrace{\sup\left\{z>0:z^b<x^a\right\}}_{x^r}\cdot\underbrace{\sup\left\{z>0,z^d<x^c\right\}}_{x^s}=\sup\left\{z>0:z^{bd}<x^{ad+bc}\right\}$$

אזי מוכיחים:

$$\begin{aligned}
\left(x^r x^s\right)^{bd} &= \left(x^r\right)^{bd}\left(x^s\right)^{bd} \\
&= \left(\left(\left(x^a\right)^{\frac{1}{b}}\right)^b\right)^d \left(\left(\left(x^c\right)^{\frac{1}{f}}\right)^d\right)^b \\
&= \left(x^a\right)^d \cdot \left(x^c\right)^b \\
&= x^{ad} \cdot x^{cb} \\
&= x^{ad+cb} \\
&= x^{\frac{ad+bc}{bd}bd} \\
&= \left(\left(x^{ad+bd}\right)^{\frac{1}{bd}}\right)^{bd} \\
&= \left(x^{\frac{ad+bc}{bd}}\right)^{bd} \\
&= \left(x^{\frac{a}{b}+\frac{c}{d}}\right)^{bd} \\
&= \left(x^{r+s}\right)^{bd}
\end{aligned}$$

משל

הוכחת 4: $x > y, r > 0, r = \frac{a}{b}, 0 < a, b$ **אזי צ"ל** $x^r > y^r$ **כלומר** $(x^a)^{\frac{1}{b}} > (y^a)^{\frac{1}{b}}$.
מחוקי החזקות השלמות $x > y \Rightarrow x^a > y^a$
על מנת להוכיח את סעיף 4 מספיק להוכיח ש $x > y$, $b \in \mathbb{N}$ גורר $x^{\frac{1}{b}} > y^{\frac{1}{b}}$
נניח דרך השלילה ש $x^{\frac{1}{b}} \le y^{\frac{1}{b}}$. מחוקי החזקות במערך שלם $\Rightarrow \left(x^{\frac{1}{b}}\right)^b \le \left(y^{\frac{1}{b}}\right)^b$
$x \le y$ בסתירה

6.2 פונקציות

6.2.1 מה זה פומקציה?

פונקציה היא מבחינתנו מכונה שנותנים לה מספר ממשי ומחזירה מספר ממשי. אם נותנים לה a אז היא <u>תמיד</u> תחזיר b

פונקציה מורכבת מ3 חלקים:

1. קבוצת הקלט, התחום[1]
2. קבוצת הפלט, טווח[2]
3. העתקה, "חוק" שקובע מהוא הפלט לכל קלט

סימונים: פונקציות מסמנין באותיות(לטיניות או ויווניות).

$$\begin{aligned}
f : \underbrace{A}_{\text{קלט}} \quad &\rightarrow \quad \underbrace{B}_{\text{פלט}} \\
f \quad (x) = &\quad 6x
\end{aligned}$$

[1] באנגלית Domain
[2] באנגלית Range

סימון אחר לחוק הוא $f : x \mapsto 6x$
העלאה בריבוע: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (מותר גם $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$, אבל לא מותר $f : \mathbb{R} \to$ ($[4, 5)$ $f(x) = x^2$

הגדרה: אם $f : A \to B$ אזי התמונה של A היא $\text{Image}(f) = \{y \in B : \exists x \in A, y = f(x)\}$

הגדרה: פונקציה נקראת חד-חד ערכית אם $(\forall y \in B)(\exists! x \in A) : (y = f(x))$

הגדרה: פונקציה $f : A \to B$ נקראת על[3] B אם $B = \text{Image}(f)$ או $(\forall y \in B)(\exists x \in A) :$ $(y = f(x))$

דוגמה לפונקציה: פונקציה המעתיקה את כל הממשיים $w \neq \pm 1$ ל $\left(\frac{w^3+3w+5}{w^2-1}\right)$ אזי
כותבים $g : \mathbb{R} \setminus \{1, -1\} \to \mathbb{R}$
$g(t) = \frac{w^3+3w+5}{w^2-1}$

פונקציה חשובה: פונקצית דרכלי Dirichlet[4]

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \{0, 1\} \\ f(x) &= \begin{cases} 0 & x \notin \mathbb{Q} \\ 1 & x \in \mathbb{Q} \end{cases} \end{aligned}$$

עוד דוגמה לפונקציה:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{N} \\ f(x) &= \begin{cases} \text{מספר הופעת הספרה 7 ביצוג העשרוני} & x < 10 \\ 16 & x \geq 10 \end{cases} \end{aligned}$$

עוד דוגמה: לכל $n \in \mathbb{N}$ נגדיר פונקציה

$$\begin{aligned} f_n : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ f_n(x) &= x^n \end{aligned}$$

בפרט f_1 נקראת פונקצית הזהות(ID)

הרכבת פונקציות היא הסוציאטיביות: $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$ אפשר לראות בכלות על ידי כתיבת זה באופן יותר מפורט

---

[3] Onto

[4] כנראה היה צרפתי לכן לא מבטים את ה t בסוף

פרק 7

תרגול מס.3

7.1 צפיפות הרציונאליים

לכל $(a,b)\subseteq\mathbb{R}$ מתקיים ש $(a,b)\cap\mathbb{Q}=\emptyset$ (לכל $a,b\in\mathbb{R}$ יש $q\in\mathbb{Q}$ כך ש $a<q<b$)

דוגמה: $A=\{x|x\in\mathbb{Q},q<0\}$. A היא חסומה מלעל אבל היא לא חסומה מלרע: יהי $x\in A$ אז $-x>0$ אזי קיים $n\in\mathbb{N}$ כך ש $n\geq -x$ (ארכימידיות) אזי $-n\leq x$ נראה $\sup A\, 0$ יהי $\epsilon>0$ אזי $0-\epsilon<0$. $(-\epsilon,0)\cap\mathbb{Q}\neq\emptyset$ אזי יש $q\in\mathbb{Q}$ כך ש $-\epsilon<q<0$ אזי $q\in A$ משל.

7.2 אקסיומת השלימות

דוגמה: $p(x)=x^5-x-1$ נגדיר: $L=\{x\in\mathbb{R}|p(x\leq 0)\}$ נראה כי קיים $z\in\mathbb{R}$ כך ש $p(z)=0$.

L חסומה מלעיל ע"י 1 (לכל $x\geq 1$ $p(x)\geq 1^5+1-1=1$)

נראה $z=\sup L$ מקיים את $p(z)=0$. נניח בשלילה $p(z)\neq 0$ (יודעים כי $0<z\leq 1$) אז מחלקים למקרים:

1. $p(z)>0$ יהי $0<r<z$ אזי

$$\begin{aligned} p(z-r) &= (z-r)^5+(z-r)-1 \\ &= z^5\left(1-\frac{r}{z}\right)^5+(z-r)-1 \end{aligned}$$

אזי משתמשים באי שוויון ברנולי שאומר כי לכל $\alpha>-1$ ו n טבעי $(1+\alpha)^n<1+n\alpha$

$$\begin{aligned} z^5\left(1-\frac{r}{z}\right)^5+(z-r)-1 &> z^5\left(1-5\frac{r}{z}\right)+(z-r)-1 \\ &= z^5-5rz^4+z-r-1 \\ &= p(z)-r\left(5z^4+1\right) \end{aligned}$$

אם $r<p(z)\left(5z^4+1\right)^{-1}$ אז $\alpha>0\Rightarrow p(z-r)>0$ אזי $z-r$ חסם מלעל ל L. סתירה לזה ש z חסם מלעל.

2. $0 < p(z)$ יהי $0 < r < z$ אזי

(א)

$$\begin{aligned} p(z+r) &= (z+r)^5 + (z+r) - 1 \\ &\geq z^5 + 5z^4 r + z + r - 1 \\ &= p(z) + r\left(5z^4+1\right) \\ &\geq p(z) + 6r \end{aligned}$$

(ב) ניקח $r < \frac{1}{6}|p(z)|$

7.3 פונקציות

סימון: $(A, B \neq \emptyset) \subseteq \mathbb{R}$ אזי $f : A \to B$ - f פונקציה מAלB כלומר לכל $a \in A$ קיים ויחיד $b \in B$ המקיים $f(a) = b$

7.3.1 פולינומים

$$f(x) = \sum_{n=0}^{k} a_n x^n$$

דרגת הפולינום היא k המקסימאלי כך ש $a_k \neq 0$
לדוכמה:

$$p(x) = c \Rightarrow \deg p = 0$$

הערה: זה נכון אם $c \neq 0$. אם $c = 0$ אומרים $\deg p = -\infty$

7.3.2 שוויון של פונקציות

שתי פונקציות שוות אם

1. התחום אותו תחום
2. הטווח אותו טווח
3. $\forall a \in A : f(a) = g(a)$

דוגמה לפונקציות לא שוות:

$$\begin{matrix} f : [0,\infty) \to [0,\infty) \\ f : x \mapsto \sqrt{x} \end{matrix} \neq \begin{matrix} r : [0,\infty) \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sqrt{x} \end{matrix}$$

7.3.3 פונק' רציונליות

פונקציה שעבורה קיימים פולינומים $p(x), q(x)$ כך ש $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$
תחום f הוא כל $x \in \mathbb{R}$ כך ש $q(x) \neq 0$

7.4 פעולות על פונקציות

אם $A, B \subseteq \mathbb{R}$ אזי נניח $f : A \to B, g : A \to B'$ נגדיר פונקציה שתסומן $f + g$ כך ש $f(g) : A \to (B + B')$ המוגדרת על ידי $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ אז נגדיר גם $f \cdot g : A \to (B \cdot B')$ על ידי $(f \cdot g)(x) - f(x) \cdot g(x)$

הרכבה: $(f \circ g)(x) = f(g(x))$

7.5 תכונות של פונקציות

הגדרה: תהי $f : A \to B$ f תקרא חח"ע אם לכל $a \neq a' \in A$ מתקיים $f(a) \neq f(a')$

טענה: תהי $f : X \to Y$ $(X, Y \subseteq \mathbb{R})$. f היא חח"ע אם"ם לכל $A \subseteq \mathbb{R}$ ולכל 2 פונק $g, h : A \to X$ המקיימות $f \circ g = f \circ h$ מתקיים $g = h$(כלומר f ניתן לצמצום משמאל)

הוכחה בכיוון ראשון: נניח f חח"ע ותהיינה $A \subseteq \mathbb{R}, g, h : A \to X$ כך ש $f \circ g = f \circ h$ צ"ל כי $g = h$.
$\forall a \in A$ מתקיים $(f \circ g)(a) = (f \circ h)(a)$ אזי $f(g(a)) = f(h(a))$ מחד חד ערכיות של f נובע כי $g(a) = h(a)$

הוכחה בכיוון שני: נניח כי לכל $A \subseteq \mathbb{R}$ ו $g, h : A \to X$ כך ש $f \circ g = f \circ h$ מתקיים $g = h$
נניח בשלילה ש f לא חח"ע אז קיימין $x, y \in X$ $x \neq y$ כך ש $f(x) = f(y)$ ניקח $g : X \to X, g(t) = t\ ,\ A = X$
נגדיר $h : X \to X$ ע"י

$$h(t) = \begin{cases} t & t \neq x, y \\ y & t = x \\ x & t = y \end{cases}$$

אז לכל $t \in X$ מתקיים $f(g(t)) = g(h(t))$ אזי $f \circ g = f \circ g$ אבל $g \neq h$ בסתירה לנתון.

פרק 8

הרצאה מס.?

8.1 פונקציות

אם $A, B \subseteq \mathbb{R}$ אזי המכפלה הקרטזית $A \times B$ שווה $A \times B = \{(x, y) \,| x \in A, y \in B\}$
לכן אם $f : A \to B$ אזי $\mathrm{Graph}\,(f) \subseteq A \times B$

הגדרה: $\mathrm{Graph}\,(x) = \{(x, y) \,| x \in A, y = f\,(x)\}$

8.2 תכונות גרף

אם $(x, y) \in \mathrm{Graph}\,(f)$ ו $(x, \psi) \in \mathrm{Graph}\,(f)$ אזי $x = \psi$(כלומר לכל מקור יש תמונה אחת ויחידה)

8.2.1 חד חד ערכיות

אם $(x, y) \in \mathrm{Graph}\,(f)$ ו $(\vartheta, y) \in \mathrm{Graph}\,(f)$ אזי $x = \vartheta$

8.2.2 על

לכל $y \in B$ קיים $x \in A$ כך ש $(x, y) \in \mathrm{Graph}\,(f)$

8.3 גבול של פונקציה בנקודה

נגדיר מה זה:

$$\lim_{x \to a} f\,(x) = l$$

הגדרה: סביבה של $x \in \mathbb{R}$ הוא קטע פתוח (a, b) שמכיל את x.

הגדרה: סביבה מנוקבת של x היא קבוצה $(a, b) \setminus \{x\}$ כך ש $a < x < b$

הגדרה: נקודה $a \in A \subseteq \mathbb{R}$ תקרא נקודה פנימית לA אם קיימת לה סביבה שמוכלת בA

דוגמה: $1/2 \in [0, 1)$ נקודה פנימית. 0 לא נקודה פנימית. 1 אפילו לא בקבוצה.

טענה: $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ אזי ל$\mathbb{Q}$ אין נקודה פנימית.

הוכחה: אם $r \in \mathbb{Q}$ אזי יש לr סביבה מוכלת ב $\mathbb{Q}$ אזי קיים קטע $r \in (a,b) \subseteq \mathbb{Q}$ בסתירה לזה שלכל קטע יש נקודות אי רציונליות
גם ל$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ אין נקודות פנימיות

אז סוף סוף נוכל להגדיר את הגבול שכתבנו למעלה

הגדרה לא פורמלית: נאמר שהפונקציה f שואפת ל l כאשר x שואף ל a אם ניתן להגדיר ל $f(x)$ להיות קרובה לl כרצוננו על ידי כך ש x תהיה מספיק קרובה ל a[1]

דוגמה לא פורמאלית: אם $f:\mathbb{R}\to R, f:x\mapsto 3x$ אזי נראה כי $\lim_{x\to 5} f(x)=15$
נניח שרוצים

$$\begin{aligned} |f(x)-15| &< \frac{1}{100} \\ -\frac{1}{100} < 3x-15 &< \frac{1}{100} \\ -\frac{1}{300} < x-5 &< \frac{1}{300} \\ |x-5| &< \frac{1}{300} \end{aligned}$$

כלומר אם x לא מרוחק מ5 יותר מ $\frac{1}{300}$ אז $f(x)$ לא יהיה מרוחק מ 15 יותר מ $\frac{1}{100}$

הגדרה: $f:A\to B$ ו $a\in A$ נקודה פנימית של A נאמר ש $\lim_{x\to a} f(x)=l$ אם לכל $\epsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך ש $0<|x-a|<\delta$ גורר לזה כי $|f(x)-l|<\epsilon$

דוגמה: $f:x\mapsto x^2$ נראה כי $\lim_{x\to 3} f(x)=9$
צ"ל שלכל $\epsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך ש $0<|x-3|<\delta \Rightarrow \left|x^2-9\right|<\epsilon$

$$\begin{aligned} \left|x^2-9\right| &< \epsilon \\ |x-3|\,|x+3| &< \epsilon \\ |x-3| &< \frac{\epsilon}{|x+3|} \end{aligned}$$

בואו נדרוש ש $|x-3|<1$ אזי $2<x<4$ ו $|x+3|<7$ אזי $\left|x^2-9\right|<7|x-3|$
ואם גם נדרוש $|x-3|<\frac{\epsilon}{7}$ אזי $\left|x^2-9\right|<7\cdot\frac{\epsilon}{7}$
הראנו שלכל $\epsilon>0$ קיים $\min\left(1,\frac{\epsilon}{7}\right)=\delta>0$ כך ש $0<|x-3|<\delta$ גורר $\left|x^2-9\right|<\epsilon$

---

[1] לא כולל את הנקודה a!

פרק 9

הרצאה מס.??

למה:

1. $|(x+y)-(x_0+y_0)|<\varepsilon \Leftarrow |x-x_0|<\frac{\varepsilon}{2}, |y-y_0|<\frac{\varepsilon}{2}$
2. $|xy-x_0y_0|<\varepsilon \Leftarrow |x-x_0|<\min\left(1,\frac{\varepsilon}{2(|y_0|+1)}\right), |y-y_0|<\min\left(1,\frac{\varepsilon}{2(|x_0|+1)}\right)$
3. אם $y_0 \neq 0$ ו $|y-y_0|<\min\left(\frac{|y|}{2},\frac{\varepsilon y_0^2}{2}\right)$ אזי $\left|\frac{1}{y}-\frac{1}{y_0}\right|<\varepsilon$

הוכחה:

$$\begin{aligned}
|y_0| &= |y+(y_0-y)| \\
|y_0| &\leq |y|+|y_0+y| \\
|y_0| &\leq |y|+\frac{|y_0|}{2} \\
|y| &> \frac{|y_0|}{2}>0 \\
\left|\frac{1}{y}-\frac{1}{y_0}\right| &= \frac{y-y_0}{|y|\,|y_0|} \\
&< \frac{|y-y_0|}{\frac{|y_0|}{2}\,|y_0|} \\
&< \frac{\varepsilon\frac{|y_0|^2}{2}}{|y_0|\,|y_0|}=\varepsilon
\end{aligned}$$

משפט: אם $f,g:A\to R$, $\lim_{x\to a}f(x)=l, \lim_{x\to a}g(x)=m$ אזי

1. $\lim_{x\to a}(f+g)(x)=l+m$

הוכחה: מהנתון על הגבולות של f ו g אז נובע כי לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta_1>0$ כך ש $0<|x-a|<\delta_1 \Rightarrow |f(x)-l|<\frac{\varepsilon}{2}$

וגם קיים $\delta_2>0$ כך ש $0<|x-a|<\delta_2 \Rightarrow |g(x)-m|<\frac{\varepsilon}{2}$

נבחר $\delta=\min\left(\delta_1,\delta_2\right)$ אזי מסעיף 1 של הלמה נובע כי $\left|\underbrace{\left(f\left(x\right)-g\left(x\right)\right)}_{\left(f+g\right)\left(x\right)}-\left(l+m\right)\right|<\epsilon$

2. $\lim_{x\to a}\left(f\cdot g\right)\left(x\right)=l\cdot m$

הוכחה: מהנתון על הגבולות של f,g נובע שלכל $\epsilon>0$ קיים $\delta_1>0$ כך ש $0<\left|x-1\right|<\delta_1$ גורר $\left|f\left(x\right)-l\right|<\min\left(1,\frac{\varepsilon}{2(|m|+1)}\right)$

וגם קיים $\delta_2>0$ כך ש $0<\left|x-a\right|<\delta_2$ גורר $\left|g\left(x\right)-m\right|<\min\left(1,\frac{\epsilon}{2(|l|+1)}\right)$

נבחר $\delta=\min\left(\delta_1,\delta_2\right)$ אז $0<\left|x-a\right|<\delta$ גורר כי $\left|f\left(x\right)-l\right|<\min\left(1,\frac{\varepsilon}{2(|m|+1)}\right)$ ו $\left|g\left(x\right)-m\right|<\min\left(1,\frac{\epsilon}{2(|l|+1)}\right)$

אזי מסעיף 2 מהלמה נובע כי $\left|\underbrace{f\left(x\right)\cdot g\left(x\right)}_{\left(f\cdot g\right)\left(x\right)}-l\cdot m\right|<\varepsilon$

3. אם $l\neq0$ אזי $\lim_{x\to a}\left(\frac{1}{f}\right)\left(x\right)=\frac{1}{l}$

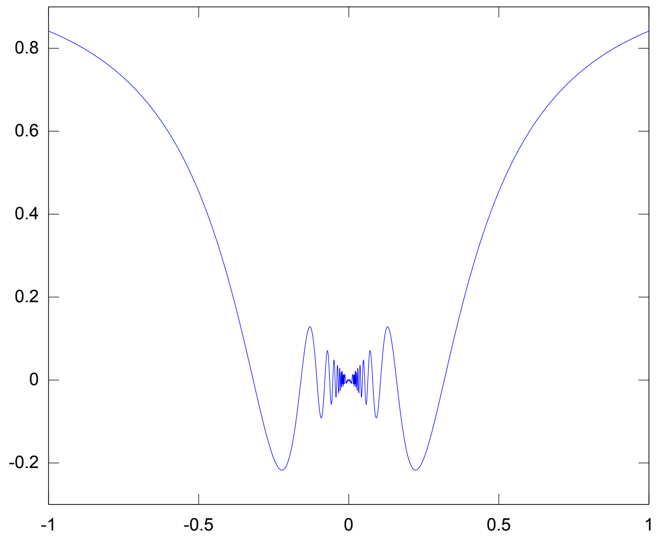
מהנתון על הגבול של f נובע כי לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך ש $0<\left|x-a\right|<\delta$ גורר $\left|f\left(x\right)-l\right|<\min\left(\frac{|l|}{2},\frac{|l|^2}{2}\right)$

אזי מסעיף 3 של הלמה נובע ש $\left|\frac{1}{f(x)}-\frac{1}{l}\right|<\varepsilon$

הערה: אם קיים $\lim_{x\to a}\left(f+g\right)\left(x\right)$ אז לא בהכרח יש ל f וg גבול ב a. דוגמה לזה $f\left(x\right)=1+\frac{1}{x},g\left(x\right)=1-\frac{1}{x}$

הגדרה: $f:A\to B$, $a\in A$ נקודה פנימית. נאמר כי f רציפה בנקודה a אם הגבול של f ב a קיים וכי $\lim_{x\to a}f\left(x\right)=f\left(a\right)$

דוגמה: $f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$ ו $f:x\mapsto x\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right)$



איור 9.1: $f(x) = x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

$\lim_{x\to 0} f(x) = 0$
אזי הפונקציה:

$$\begin{aligned} f:\mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ f(x) &= \begin{cases} x=0 & 0 \\ x\neq 0 & x\sin(x) \end{cases} \end{aligned}$$

רציפה לכל $x \in \mathbb{R}$

דוגמה: הוכחנו $f : x \mapsto x^2$ מקיימת $\lim_{x\to 3} f(x) = 9$ ומכיוון ש $f(3) = 9$ אז f רציפה.

דוגמה: $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ הוכחנו שלכל $a \neq 0$ מתקיים $\lim_{x\to a} f(x) = \frac{1}{a}$ אזי f רציפה בכל נקודה חוץ מאפס.

9.1 הערות

נאמר שהגבול מימין של f ב a הוא l אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך ש $a < x < a + \delta$ גורר $|f(x) - l| < \varepsilon$ ומסמנים $\lim_{x'\to a^+} f(x) = f(a)$
נאמר ש f רציפה מימין בנקודה a אם: $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$

משפט: $a \in A$ נקודה פנימית. אם f ו g רציפות ב a אזי $f+g, f\cdot g$ רציפות ב a אם בנוסף $g(a) \neq 0$ אז $\frac{1}{f(x)}$ רציפה ב a

הוכחה: נתון $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ ו $\lim_{x\to a} g(x) = g(a)$ ממשפט האריתמטיקה של הגבולות $\lim_{x\to a}(f+g)(x) = f(a) + g(a) = (f+g)(a)$

מסקנה: $f(x) = \frac{x^3+7x^5}{1+x^2}$ אציפה בכל נקודה $a \in \mathbb{R}$

שאלה: האם $f\left(x\right)=\sin\left(x^{2}\right)$ רציפה?

משפט: $f:A\rightarrow B,g:B\rightarrow C$ אם a נקודה פנימית של A, $f\left(a\right)$ נקודה פנימית של B אם f רציפה ב a ו g רציפה ב $f\left(A\right)$אז $g\circ f$ רציפה ב a

הוכחה: מהרציפות של g נובע שלכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta_{1}>0$ כך ש $\left|y-f\left(a\right)\right|<\delta_{1}$ גוררת $\left|g\left(y\right)-g\left(f\left(a\right)\right)\right|<\varepsilon$. מהרציפות של f נובע שקיים $\delta>0$ כך ש $\left|x-a\right|<\delta$ גורר $\left|f\left(x\right)-f\left(a\right)\right|<\delta_{1}$

אזי $\left|g\left(f\left(x\right)\right)-g\left(f\left(a\right)\right)\right|<\varepsilon$ כלומר $\lim_{x\rightarrow a}\left(g\circ f\right)\left(x\right)=\left(g\circ f\right)\left(a\right)$

פרק 10

תרגול מס.??

הגדרה: נאמר כי הפונקציה f מוגדרת בסביבת $x_0 \in \mathbb{R}$ אם קיים קטע פתוח מוכלל($I = (a,b), a < b, (a,b) \in (\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\})$) כך ש f מוגדרת ב $I \setminus \{x_0\}$

נאמר שהגבול של f ב x_0 הוא $y \in \mathbb{R}$ אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שלכל $x \in I \setminus \{x_0\}$ המקיים $|x - x_0| < \delta$ מתקיים $|f(x) - y| < \varepsilon$

הגדרה: נניח $x_0 \in \mathbb{R}$ אז f מוגדרת בקטע (x_0, b) כאשר $b > x_0$. נאמר שהגבול של f מימין בx_0 הוא y אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שאם $|x - x_0| < \delta$ וגם $x \in (x_0, b)$ מתקיים $|f(x) - y| < \varepsilon$ ונסמן את זה ב $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = y$

פרק 11

הרצאה מס.??

אתר הבית של המרצה: www.math.huji.ac.il/~razk

11.1 רציפות

הגדרנו רציפות בנקודה וראינו כי הפונרציה $f(x)=\begin{cases} x & x\in\mathbb{Q} \\ 0 & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$ רציפה באפס ורק שם.

נשפט: אם f רציפה בנקודה a ו $0<f(a)$ אז קיימת סביבה של a שבה $0<f(x)$

הערה: אם f רציפה מימין ב a ו $0<f(a)$ אז קיימת בסביבה $[a,a+\delta)$ שבה f חיובית.

11.1.1 משפט ערך הביניים

אם f רציפה על קטע $[a,b]$ ומתקיים $f(a)<0, f(b)>0$ אז קיימת נקודה $a<c<b$ כך ש $f(c)=0$

הערה: המשפט תקף גם אם $f(a)>0$ ו $f(b)<0$

מסקנה: אם f רציפה על $[a,b]$ ו $f(a)<\alpha<f(b)$ אזי קיימת נקודה $a<c<b$ כך ש $f(c)=\alpha$

הוכחה: נפעיל את משפט ערך הביניים עבור $f-\alpha$

אז עכשיו נוכיח המשפט שהצגנו בתחילת השיעור: אם f רציפה בנקודה a ו $0<f(a)$ אז קיימת סביבה של a שבה $0<f(x)$

הוכחה: נגדיר קבוצה: $A=\{x\in[a,b]:f(y)<0,\forall y\in[a,x]\}$ (כל הנקודות ש f מקבלת ערכים שליליים עבור נקודות משמאלה) הקבוצה a היא לא ריקה(היא מכילה a) מהמשפט הקודם נובע שקיימת $\delta>0$ כך ש $a+\delta\in A$. $b\notin A$ מהמשפט הקודם נובע שקיימת $\delta_2>0$ כך ש $b-\delta_2\notin A$.

בפרט A קבוצה לא ריקה וחסומה מלעל. מאכסיומת השלמות נובע שיש לה חסם עליון בקטע (a,b) נסמן $\sup A=c$.

נוכיח כי $f(c)=0$: נשתמש בטריכוטומיה ונפסול את האפשרות $f(c)<0$ ו $f(c)>0$

נניח תחלה ש $f(c)>0$ (ולכן אינו שייך לA) מהמשפט הקודם נובע שקיים $\delta>0$ כך ש $f(c-\delta)>0$ אזי $c-\delta$ לסם מלעל של A בסתירה לזה כי $c=\sup A$

מסקנה: $f(c)\leq 0$

נניח עתה ש $f(c)<0$ מכיוון ש c חסם עליון של A נובע שכל $c>x$ מוכל ב A כלומר $\forall x\leq c: f(x)<0$

מהמשפט הקודם קיים $\delta>0$ כך ש $c-\delta\leq x\leq c+\delta$ $f(x)<0$ אזי $\forall x\leq c+\delta:$ $c+\delta\in A$ אזי $c+\delta\in A$ אזי c אינו חסם עליון.

למה: $f:A\to B$ ו a נקודה פנימית של A אם f רציפה ב a אז קיימת סדרה של a שהב f חסומה מלעל.

הוכחה: מהרציפות של f ב a נובע קיום סביבה $(a-\delta,a+\delta)$ כך ש $f(a)-1<$ $f(x)<f(a)+1$ לכל $a-\delta<x<a+\delta$

משפט: $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ אם f קציפה על $[a,b]$ אז f לסומה מלעל על קטע זה

הוכחה: נגדיר קבוצה $A=\{a\leq x\leq b: f$ חסומה על הקטע $[a,x]\}$. A מכילה את a ולכן לא ריקה. A לסומה על ידי b

מאקסיומת השלמות נובע כי לA יש חסם עליון. מסמן $c=\sup A$ נוכיח כי $b=c$ ידוע כי לכל נקודה x קטנה מ c מתקיימת f חסומה על $[a,x]$

נראה ש $c\in A$

קיימת $\delta>0$ כך ש f חסומה על $[c-\delta,c]$...

משפט: פונקציה רציפה על קטע סגור מקבלת בו מקסמום(ומנימום)

פרק 12

הרצאה מס.??

משפט: עיקרון המקסיום: אם f רציפה על קטע סגור $[a,b]$ אז קיימת $a\leq c\leq b$ כך ש $\forall x\in[a,b]$ מתקיים $f(x)\geq f(x)$

הוכחה: נתבונן ב $\mathrm{Image}(f)=\{f(x):a\leq x\leq b\}$ המשפט הקודם קוהע שזו קבוצה חסומה מלעיל זו גם קבוצה לא ריקה שכן היא מכילה $f(a)$

לכן ל$\mathrm{Image}(f)$ יש חסם עליון נסמן $\alpha=\sup\mathrm{Image}(f)$ צ"ל כי קיימת נקודה $a\leq c\leq b$ כך ש $f(c)=\alpha$

נניח בשלילה ש $f(x)<\alpha$ לכל x.

נגדיר פונקציה $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ $g(x)=\frac{1}{\alpha-f(x)}$

g מוגדרת היטב מפני שהמכנה לא מתאפס(על פי הנחת המשפט על אריכמטיקה של רציפות נובע ש g רציפה על קטע $[a,b]$

מכיוון ש $\alpha=\sup\mathrm{Image}(f)$ הרי שלכל $M>0$ קיים $a\leq x\leq b$ כך ש $\alpha-\frac{1}{M}<f(x)\leq\alpha$ עבור x הנ"ל

$$g(x)=\frac{1}{\alpha-f(x)}>\frac{1}{\alpha-\left(\alpha-\frac{1}{M}\right)}=M$$

לכן התמונה אינה חסומה מלעיל בסתירה למשפט הקודם.

טענה: יהי $n\in\mathbb{N}$ אי זוגי

נתבונן בפונקציה:

$$f(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$$

כאשר $a_0,a_1,\ldots a_{n-1}$ מספרים ממשיים

אזי קיימת נקודה $c\in\mathbb{R}$ כך ש $f(c)=0$ (לכל פולינום ממעלה אי זוגית קיים לפחות שורש אחד)

הוכחה:

הרעיון: להוכיח ש קיים $M > 0$ כך ש $x > M \Rightarrow f(x) > 0$ ו $x < -M \Rightarrow f(x) < 0$ ומכיוון ש f רציפה על קטע $-M, M$ נובע שקיים $c \in [-M, M]$ כך ש $f(c) = 0$

$$f(x) = x^n \left[1 + \frac{a_{n-1}}{x} + \cdots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n}\right]$$

נניח כי $x > 0$ אזי

$$f(x) \geq x^n \left[1 - \frac{|a_{n-1}|}{x} - \cdots - \frac{|a_1|}{x^{n-1}} - \frac{|a_0|}{x^n}\right]$$

נדרוש $x > 1$

$$f(x) \geq x^n \left[1 - \frac{|a_{n-1}|}{x} - \cdots - \frac{|a_1|}{x} - \frac{|a_0|}{x}\right]$$

אם נדרוש $x > \frac{1}{2n|a_k|}$ לכל k אזי

$$f(x) \geq x^n \left\{1 - \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n} \cdots \frac{1}{2n}\right\} \geq \frac{1}{2} x^n > 0$$

מסקנה: נבחר $M = \max(1, 2n|a_0|, 2n|a_{n-1}|)$
אם $x < -M$ אזי

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^n \left[1 + \frac{a_{n-1}}{x} + \cdots + \frac{a_0}{x^n}\right] \\
&\leq x^n \left[1 - \frac{|a_{n-1}|}{|x|} - \cdots - \frac{|a_0|}{|x|}\right] \\
&\leq x^n \left[1 - \frac{|a_{n-1}|}{|x|} - \cdots - \frac{|a_0|}{|x|}\right] \\
&\leq x^n \frac{1}{2} < 0
\end{aligned}$$

פרק 13

הרצאה מס.?

הגדרה: תהא $f:A\rightarrow B$. תהא $a\in A$ נקודה פנימית. נאמר שהגבול של f ב a הוא אינסוף ונסמן $\lim_{x\rightarrow a}f\left(x\right)=\infty$ אם לכל M קיים $\delta>0$ כך ש $0<\left|x-a\right|<\delta$ אזי $f\left(x\right)>M$

תהא $f:A\rightarrow B$. תהא $a\in A$ נקודה פנימית. נאמר שהגבול של f ב a הוא מינוס אינסוף ונסמן $\lim_{x\rightarrow a}f\left(x\right)=-\infty$ אם לכל M קיים $\delta>0$ כך ש $0<\left|x-a\right|<\delta$ אזי $f\left(x\right)<M$

דוגמה:

$$\begin{aligned}f:x & \mapsto\begin{cases}\frac{1}{\left|x-3\right|} & x\neq3\\ 17 & x=3\end{cases}\\ f:\mathbb{R} & \rightarrow\mathbb{R}\end{aligned}$$

נראה ש $\lim_{x\rightarrow3}=\infty$ בהתן M נבחר $\delta=\frac{1}{\left|M\right|}$ אז $\delta>\left|x-3\right|>0$ כלומר $0<\left|x-3\right|<\frac{1}{\left|M\right|}$ אזי $\frac{1}{\left|x-3\right|}>M$ כי $f\left(x\right)>\left|M\right|\geq M$

הגדרה: נאמר כי $\lim_{x\rightarrow\infty}f\left(x\right)=l$ אם לכל $\varepsilon>0$ קיים M כך ש $x>M$ גורר $\left|f\left(x\right)-l\right|<\varepsilon$

הגדרה: פונקציה נקראת מונוטונית עולה אם $x<y$ גורר $f\left(x\right)<f\left(y\right)$ והיא נקראת מונוטונית עולה אם $x<y$ גורר $f\left(x\right)<f\left(y\right)$

משפט: אם $f:\left[a,b\right]\rightarrow B$ רציפה חד חד ערכית ועל את היא מונוטונית.

משפט: אם $f:\left[a,b\right]\rightarrow\mathbb{R}$ רציפה וחד חד ערכית עולה (אפשר גם יורדת) אז $f^{-1}:\left[f\left(a\right),f\left(b\right)\right]\rightarrow\left[a,b\right]$ רציפה.

פרק 14

תרגול מס.?

14.1 נקודת השבת של Brower

אם $f:[0,1]\to[0,1]$ רציפה אז קיימת $x_0\in[0,1]$ כך ש $f(x_0)=x_0$

הוכחה: נניח בשלילה שלכל $x\in[0,1]$ מתקיים $f(x)\neq x$ אז נגדיר $g(x)=\frac{1}{f(x)-x}$ כך ש $g:[0,1]\to\mathbb{R}$ .g רציפה מאריטמטיקה של פונקציות רציפות. יודעים כי $f(0)\neq 0$ ו $f(1)\neq 1$ אזי $f(1)<1$. אזי $g(0)=\frac{1}{f(0)}>0$ ו $g(1)=\frac{1}{f(1)-1}<0$.
על ידי משפט ערך הביניים עבור g קיימת $x_0\in[0,1]$ כך ש $g(x_0)=0=\frac{1}{f(x_0)-x_0}$.
סתירה.

פרק 15

הרצאה מס.?

הגדרה: $f:A\to B$ נקראת רציפה במידה שווה אם לכל $x\in A$ ולכל $\epsilon>0$ קיים $\delta=\delta(\epsilon)$ כך ש $|y-x|<\delta, y\in A\Rightarrow|f(x)-f(y)|<\epsilon$

הערה: $f_n(x)$ סדרה של פונקציות רציפות על $[0,1]$ אומרים ש $f_n(x)$ חסומה במידה שווה(על n) אם קיים קבוע M כך ש $f_n(x)<M$ לכל n

דוגמה: $f_n(x)=n$ לא לא חסומה במידה שווה, אבל $f_n(x)=\sin(nx)$ היא כן

משפט: אם $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ רציפה אז היא רציסה במידה שווה(פונקציה רציפה בקטע סגור היא רציפה במידה שווה)

הוכחה: מה צריך להוכיח?
צ"ל שלכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>>0$ כך ש ε $|x-y|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(y)|<\varepsilon$
בהנתן ε נאמר ש f היא ε טובה על $[a,b]$ אם קיים $\delta>0$ כך ש $\Rightarrow$ $x,y\in[a,b], |x-y<\delta|$ $\varepsilon>|f(x)-f(y)|$ כלומר צ"לש f היא ε טובה על $[a,b]$ לכל $\varepsilon>0$

טענת עזר: אם f היא ε טובה על $[a,b]$ וגם ε טובה על $[b,c]$ אז f היא ε טובה על $[a,c]$

הוכחה: נגדיר $A=\{x\in[a,b]\}$ כך ש f היא ε טובה על $[a,x]$. A אינה ריקה כי $a\in A$. A לסומה מלעל על ידי b. מאקסיומת השלמות קיים $\sup A$. נסמן $\alpha=\sup A$
ידוע כי f רציפה ב gA כלומר קיים $\delta_0>0$ כך ש $|x-\alpha|<\delta_0$ אז $|f(x)-f(\alpha)|<\frac{\varepsilon}{2}$ אז f היא ε טובה על הקטע $[a,b]\cap[a-\delta_0,\alpha+\delta]$ כי אם $y\in(\alpha-\delta_0,\alpha+\delta_0)$ אזי $|f(x)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{2}$, $|f(y)-f(x)|<\frac{\epsilon}{2}$ אזי $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$ ובהכרח f היא ε טובה על $\left[\alpha-\frac{\delta_0}{2},\alpha+\frac{\delta_0}{2}\right]$ וגם f היא ε טובה על $\left[a,\alpha-\frac{\delta_0}{2}\right]$ אזי מכל זה נובע ש f היא ε טובה על $\left[a,\alpha+\frac{\delta_0}{2}\right]$

פרק 16

הרצאה מס.?

הגדרנו גבול לפונקציה $\lim_{x\to a} f(x)$. $f : A \to B$. $a \in A$ נקודה פנימית $\lim_{x\to a} f(x)$. מגדירים $g(x) = f(x+a)$. תחום ההגדרה $\{x : x + a \in A\}$. 0 נקודה פנימית של תחום ההגדרה של g אזי $\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to a} f(x)$

הוכחה: נניח ש $\lim_{x\to a} f(x) = l$ כלומר לכל $\epsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך ש $0 < |x-a| < \delta$ גורר $|f(x) - l| < \varepsilon$. נגדיר $y = x - a$: $|f(y+a) - l| < \varepsilon$ כלומר $|g(y) - l| < \varepsilon$ כלומר $\lim_{z\to 0} g(z) = l$.

סימון: אפשר לסמן $\lim_{x\to 0} f(x+a) = l$ בצורה $f \circ (x \mapsto x + a) = l$

16.1 נגזרות

ההגדרה של נגזרת נובעת מהצורך להגדיר קצב השינוי.

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

סימון של Leibniz: הוא $\frac{df}{dx}(a)$

דוגמה: $f : x \mapsto c$. נחשב הנגזרת בנקודה a. אזי $g : h \mapsto \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{c-c}{h} = \begin{cases} 0 & h \neq 0 \\ \text{Undefined} & h = 0 \end{cases}$ אזי $\lim_{h\to 0} g(h) = 0$

דוגמה: $f : x \mapsto x^2$ נחשב $f'(a)$:

$$\begin{aligned} g : h &\mapsto \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \\ &= \frac{(a+h)^2 - a^2}{h} \\ &= \frac{a^2 + 2ah + h^2 - a^2}{h} \\ &= 2a + h \\ \lim_{h\to 0} g(h) &= 2a \end{aligned}$$

כלומר $f'(a) = 2a$ מכיוון שזה נכון לכל a.

פרק 17

תרגול מס.?

17.1 משפט ווירשטראוס

דוגמה: $f\overbrace{[a,b]}^{I}\to\mathbb{R}$ רציפה $\forall x\in I, f(x)>0$ ו $g(x)=\frac{1}{f(x)}$ חסומה מלרע על ידי 0.

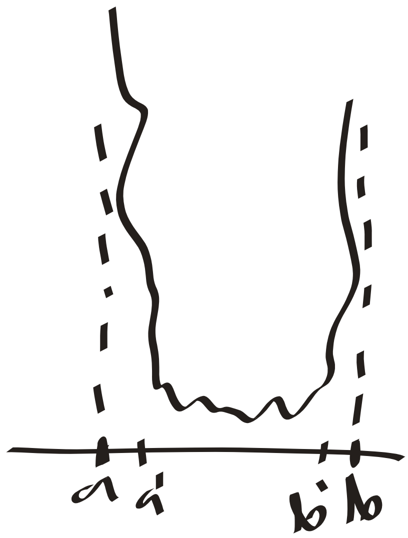
נראה בשתי שיטות שונות כי g חסומה מלעיל

שיטה א: מאריטמטיקה של פונקציות רציפות ומזה ש $\forall x\in I, f(x)\neq 0$ אז g רציפה ב I

ממשפט ווירשטראוס הראשון, מפני שg רציפה בקטע סגור g חסומה ובפרט חסומה מלעיל.

שיטה ב: f רציפה ב I ולכן ממשפט ווירשטראוס השני מקבלת מינימום גלובאלי.
כלומר קיים $x_0\in I$ כך שלכל $x\in I$ מתקיים $f(x)\geq f(x_0)$ אבל $0<m=f(x_0)$
לכן לכל $x\in I$ מתקיים $f(x)\geq m>0$

דוגמה: $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ רציפה ו $\lim_{x\to a^+}f(x)=\infty$ ו $\lim_{x\to b^-}f(x)=\infty$ אז נוכיח כי ל f יש מינימום גלובאלי



איור 17.1: דוגמה ל צf

ניקח $x_0 \in I$ ($I = (a,b)$) ו $y_0 = f(x_0)$. לכל M קיים δ כך ש $a < x < a + \delta$ גורר $f(x) > M$.

בפרט אם ניקח $M = y_0$ ונקטין את δ כך ש $x_0 < \overbrace{a+\delta}^{c}$ אז לכל x כך ש $a < x < c$ גורר $f(x) > y_0$

$\lim_{x\to b^-} f(x) = \infty$ כלומר לכל M' קיים δ' כך שאם $b - \delta' < x < b$ אז $f(x) > M'$.

ניקח $m' = y_0$, נקטין את δ' כך ש $x_0 < b - \delta'$ ו $d = b - \delta'$ לכל x, $d < x < b$, $f(x) > y_0$

f ב $[c,d]$ פונקציה בקטע סגור אז היא מקבלת מינימום בx_1. $m = f(x_1)$

דוגמה 3: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ רציפה. $\exists x \in \mathbb{R}, f(x) > 0$. $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ ו $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$. רוצים להוכיח כי f מקבלת מקסימום

תהי x_0 כך ש $y_0 = f(x_0) > 0$. ניקח $\varepsilon = y_0$

תהי b כך שעבור $x > b$ מקיים $|f(x)| < \varepsilon$

תהי a כך שעבור $x < a$ מקיים $|f(x)| < \varepsilon$

f ב $[a,b]$ חסומה אזי הוא מקבל מקסימום בקטע הזה. אפשר לראות השמקסימום הזה הוא המקסימום עבור כל $\mathbb{R}$

פרק 18

הרצאה מס.?

משפט: יהי g פונקציה הגזירה בנקודה $a\in\mathbb{R}$ נניח בנוסף כי $g\left(a\right)\neq0$ אז $\frac{1}{g(x)}$ גזירה ב a ומתקיים $\left(\frac{1}{g(x)}\right)'\left(a\right)=-\frac{g'(x)}{g^{2}(x)}$

הוכחה:

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to0}\frac{\frac{1}{g(a+h)}-\frac{1}{g(a)}}{h} & = \lim_{h\to0}\frac{1}{h}\left(\frac{1}{g\left(a+h\right)}-\frac{1}{g\left(a\right)}\right)\\
 & = \lim_{h\to0}\frac{1}{h}\left(\frac{g\left(a\right)-g\left(a+h\right)}{g\left(a+h\right)g\left(a\right)}\right)\\
 & = -\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\cdot\frac{g\left(a+h\right)-g\left(a\right)}{g\left(a+h\right)g\left(a\right)}\\
 & = -\lim_{h\to0}\underbrace{\frac{1}{g\left(a+h\right)g\left(a\right)}}_{\frac{1}{g^{2}(a)}}\cdot\underbrace{\frac{g\left(a+h\right)-g\left(a\right)}{h}}_{g'(a)}
\end{aligned}$$

מהיות g גזירה ב a מתקיים

$$\lim_{h\to0}\frac{g\left(a+h\right)-g\left(a\right)}{h}=g'\left(a\right)$$

ומכיוון ש g רציפה $\lim_{h\to0}g\left(a+h\right)=g\left(a\right)$

משפט: תהיינה f,g פונקציות גזירות בנק' $a\in\mathbb{R}$ נניח בנוסף כי $g\left(a\right)\neq0$ אזי $\frac{f}{g}$ עזירה ב a ומתקיים

$$\left(\frac{f}{g}\right)'\left(a\right)=\frac{f'\left(a\right)g\left(a\right)-g'\left(a\right)f\left(a\right)}{g^{2}\left(a\right)}$$

הערה: על מנת שהפונקציה $\frac{f}{g}$ זהיה גזירה בנק' a יש לדרוש כי $\frac{f(x)}{g(x)}$ מוגדרת בסביבה של a.

נשים לב כי מהיות g גזירה ב a, g רציפה ב a מהיות $g(a) \neq 0$ מטעבה שלמדנו קיימת סביבה של a שעבורה $g(x) \neq 0$ לכל x בסביבה זו ולכן $\frac{f(x)}{g(x)}$ מוגדרת בסביבה זו(כי המכנה $\neq 0$)

הוכחה: ממשפט הקודם $\frac{1}{g}$ גזירה ב a ו $\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = -\frac{g'(a)}{g^2(a)}$ ולכן $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)'(a)$ אזי לפי נגזרת של מכפלה

$$\begin{aligned}
\left(\frac{f}{g}\right)'(a) &= f'(a)\frac{1}{g(a)} + f(a)\left(\frac{1}{g}\right)'(a) \\
&= f'(a)\frac{1}{g(a)} - f(a)\frac{g'(a)}{g^2(a)} \\
&= \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}
\end{aligned}$$

פרק 19

הרצאה מס.?

הגדרה $f: A \to B$
$a \in A$(לא דוקא נקודה פנימית) נקראת נקודת מקסימום של f אם $f(a) \geq f(x)$
לכל $x \in A$

- הוכחנו כי לפונקציה רציפה בקטע סגור נקראת מקסימום
- $f: (0,1) \to \mathbb{R}, f: x \mapsto x^2$ ל f אין נקודת מקסימום ב $(0,1)$
- יתכן כי ל f יש יותר מנקודת מקסימום אחת.(דוגמה קיצונית: פונקציה קבועה)

משפט: אם $a \in A$ היא נקודת מקסימום של f ב A ו f גזירה ב a אז $f'(a) = 0$

הערות:

1. התנאי כי f גזירה הוא הכרחי
2. זהוא משפט חד קיווני, $f'(a)$ לא גוררת כי a נק' מקסימום

משפט Rolle: תהי $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ כך ש f רציפה ב $[a,b]$ וגזירה ב (a,b) וגם $f(a) = f(b)$ אזי קיימת נקודה בתוך $c \in (a,b)$ כך ש $f'(c) = 0$

פרק 20

הרצאה מס.?

20.1 משפט הערך הממוצע(של קושי)

יהו $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ רציפות ב $[a,b]$ וגזירות ב (a,b) אז קיים $a<c<b$ כך ש
$f'(c)[g(b)-g(a)]=g'(c)[f(b)-f(a)]$

הוכחה: נגדיר $h(x)=f(x)[g(b)-g(a)]+g(x)[f(b)-f(a)]$
מארכמיטיקה של רציפות וגזירות h רציפה ב $[a,b]$ וגזירה ב (a,b)
בקצוות הקטע

$$\begin{aligned} h(a) &= f(a)[g(b)-g(a)]-g(a)[f(b)-f(a)] \\ &= f(a)g(b)-g(a)f(b) \\ f(b) &= f(b)[g(b)-g(a)]-g(b)[f(b)-f(a)] \\ &= -f(b)g(a)+g(b)f(a) \end{aligned}$$

משמע $h(a)=h(b)$ ממשפט רול קיימת נקודה $a<c<b$ שבה $h'(c)=0$ אזי

$$f'(c)[g(b)-g(a)]-g'(c)[f(b)-f(a)]=0$$

משל.

20.2 משפט לופיטאל $L'H\hat{o}pital$

f,g מקימות:

1. $\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}g(x)=0$ כלומר בפרט מוגדרות הסביבה מנוקבת של a
2. הגבול $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ קיים (כלומר בפרט f וg גזירות בסביבה של a וg' אינה מתאפסת בסביבה של a)

אז: $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

הוכחה: נתון של f ו g קיים גבול ה a מכיוון שלעולם לא נשתמש בערכים של f, g בנקודה a. לא תהיה הגבלת כלליות אם נניח ש g, f רציפות ב a ולכן $f(a) = g(a) = 0$
נניח ש $g'(x)$ אנה מתאפסת בסביבה מנוקבת של a אזי גם g לא מתאפסת בסביבה מנוקבת של a. $g' \neq 0$
שכן אם היה שאם $a \neq x$ הו $g(x) = 0$ אז היה $x < c_x < a$ שבו $g'(x) = \frac{g(x)-g(0)}{x} = 0$ בסתירה
ממשפט קושי קיימת נקודה $a < c_x < x$ בינתיים מסתכל על סביבה ימנית)

$$\frac{f'(c_x)}{f'(c_x)} = \frac{f(x)-0}{f(x)-0}$$

נשאף את x לa ימן

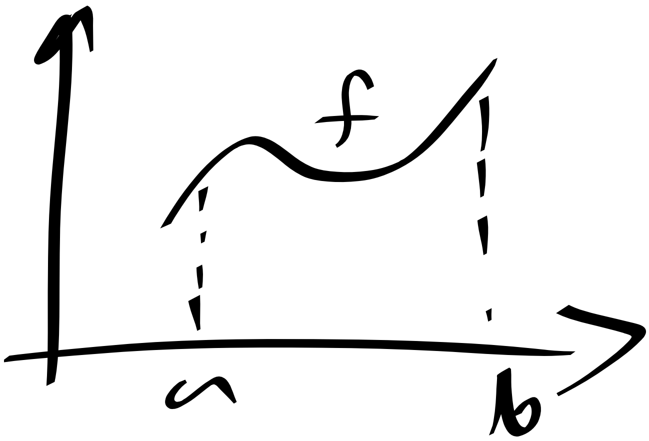
$$\begin{aligned}\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}\\ &= \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}\end{aligned}$$

נחזור על זה משמאל

$$\lim_{x\to a^-}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(a)}{g'(a)}$$

פרק 21

האצאה מס.? -----



איור 21.1: אינטגרל

$$L\left(f,P\right)\leq\int_{a}^{b}f\leq U\left(f,P\right)$$

המשפט היסודי אומר כי אם $F'=f$ אזי $\int_{a}^{b}f=F\left(b\right)-F\left(a\right)=F|_{a}^{b}$

דוגמה:

$$f:x\mapsto e^{-x^{2}}$$

לא קיימת "פונקציה אלמנטרית" F המקיימת $F'=f$
האם אפשר לחשב את האינטגרל $\int_{2}^{3}e^{-x^{2}}$ בקירוב יותר טוב מ 10^{-6}?
לכל ε קיימת חלוקה P כך ש $U\left(f,P\right)-L\left(f,P\right)\leq\varepsilon$
יודעים כי $L\left(f,P\right)\leq\int_{a}^{b}f\leq U\left(f,P\right)$ אזי ההפרש בין כל אחד מהצדדים לבין האינטגרל יותר קטן מε.
נתבונן בקטע $[x_{i-1},x_{i}]$, לכל $x_{i-1}\leq t_{i}\leq x_{i}$ מתקיים $m_{i}\leq f\left(t_{i}\right)\leq M_{i}$ אזי $L\left(f,P\right)\leq\sum_{i=1}^{n}f\left(t_{i}\right)\left(x_{i}-x_{i-1}\right)<U\left(f,P\right)$

הגדרה: קוטר של חלוקה P הוא $\mathrm{diam}P = \max_{i=1,n}(x_i - x_{i-1})$

משפט: תהיא f אינטגרבילית על $[a,b]$ לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך ש $\left|\sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_1) - \int f\right| < \varepsilon$ לכל חלוקה P המקיימת $\mathrm{diam}P < \delta$ ולכל בחירה של נקודות t_i.

הוכחה: מספיק להוכיח כי לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך ש לכל P כך ש $\mathrm{diam}P < \delta$ אזי $|U(f,P) - L(f,P)| < \varepsilon$

21.1 פונקציות טריגונומטריות

רוצים להגדיר $\sin, \cos$

הגדרה: $\varphi = \sqrt{1-x^2}$

הגדרה: $\pi = 2\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}dx$ [1]

נרצה גם להגדיר את השטח של חלק ממעגל:

הגדרה: $A(x) = \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + \int_x^1 \varphi = -\int_1^x \varphi$

מה יודעים על $A(x)$

$$\begin{aligned}
A'(x) &= \frac{\sqrt{1-x^2}}{2} + \frac{x(-2x)}{2\cdot 2\sqrt{1-x^2}} - \varphi(x) \\
&= \frac{\sqrt{1-x^2}}{2} - \frac{x^2}{2\sqrt{1-x^2}} - \sqrt{1-x^2} \\
&= \dots \\
&= -\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}
\end{aligned}$$

הגדרה: לכל $0 < x < \pi$ נגדיר $\cos x = A^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)$ וגם $\sin x = \sqrt{1-\cos^2 x}$וגם $\tan = \frac{\sin x}{\cos x}$

משפט:

$$\begin{aligned}
\sin' &= \cos \\
\cos' &= -\sin
\end{aligned}$$

הוכחה מכלל השרשרת נגזרת של פונקציה רציפה: $\cos' x = \frac{1}{2}\left(A^{-1}\right)'\left(\frac{x}{2}\right)$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\left(A^{-1}\right)'\left(\frac{x}{2}\right) &= \frac{1}{2}\frac{1}{A'\left(A^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)\right)} \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{-\frac{1}{2\sqrt{1-\left(A^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2}}} \\
&= -\sqrt{1-(\cos x)^2} = -\sin(x)
\end{aligned}$$

[1] הפונקציה מגדירה חצי מעגל ואז כופלים ב2 לקבל שטח מעגל היחידה $\pi \cdot 1^2 = \pi$

$$\begin{aligned}\sin(x) &= \sqrt{1-\cos^2 x}\\ \sin'(x) &= \frac{-2\cos x\,(-\sin(x))}{2\sqrt{1-\cos^2 x}}\\ &= \cos x\end{aligned}$$

מה יודעים?

$$\begin{matrix}\cos(\pi) = A^{-1}\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1\\ \cos(0) = A^{-1}(0) = 1\end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix}\sin(\pi) = 0\\ \sin(0) = 0\end{matrix}$$

עבור $0 < x < \pi$
$\sin$ פונקציה חיובית
$\cos$ פונקציה יורדת

פרק 22

תרגול מס.?

יהי $I=[a,b]$ בקטע סגור

1. חלוקה P של I היא $\{x_0,\dots,x_n\}$ כך ש $x_i<x_{i+1}$ ל $i=0,1\dots n-1$. $x_0=a,x_n=b$

2. אם P,P' חלוקות של I נאמר ש P' העדנה של P אם $P\subseteq P'$

3. (דרבו) עבור $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ נסמן: $U(f,P)=\sum_{i=1}^{n}M_i(x_i-x_{i-1})$ כאשר $M_i=\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]}\{f(x)\}$ נסמן גם $L(f,P)=\sum_{i=1}^{n}m_i(x_i-x_{i-1})$ כאשר $m_i=\inf_{x\in[x_{i-1},x]}\{f(x)\}$

$\mathcal{U}(f,P)=\{U(f,P)\,|I$ חלוקה של $P\}$, $\mathcal{L}(f,P)=\{L(f,P)\,|I$ חלוקה של $P\}$. נגדיר:

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx \overset{def}{=} \inf\mathcal{U}(f)$$
$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \overset{def}{=} \sup\mathcal{L}(f)$$

4. (דרבו) f אינטגרבילית ב $[a,b]$ כאשר $\overline{\int_a^b}f=\underline{\int_a^b}f$

דוגמה: אילו פונק' $f\,[a,b]\to\mathbb{R}$ חסומות מקיימות $\mathcal{L}(f,P)=\mathcal{U}(f,P)$ לכל חלוקה P? אם f כזות ניקח חלוקה טריוויאלית $P=\{a,b\}$ אז $U=\sup_{x\in[a,b]}f(x)\cdot(b-a)$ $L=\inf_{x\in[a,b]}f(x)\cdot(b-a)$. לפי הנתון $m=M$ אזי $\{f(x)\,|x\in[a,b]\}$ קבוצה בעחת איבר אחד אזי f קבועה.

דוגמה: נניח g,h אינטגרביליות ב $[a,b]$, $g(x)\le h(x)$ לכל $x\in[a,b]$ נטען ש $\int_a^b g(x)\,dx\le\int_a^b h(x)\,dx$.

פתרון: נגדיר $f=h-g$ אזי $f(x)\ge 0$ לכל $x\in[a,b]$. ראינו כי $0\le m(b-a)\le$ $\int_a^b f(x)\,dx\le M(b-a)$. כאשר $M=\sup f(x)$ ו $m=\inf f(x)$. אזי $0\le\int_a^b f=$ $\int_a^b h-\int_a^b g$. משל.

פרק 23

הרצאה מס.?

נרצה להרחיב את הגדרת הפונקציות הטריגונומטריות:

$\pi < x \leq 2\pi$:

$\sin(x) = -\sin(2\pi - x)$

$\cos(x) = \cos(2\pi - x)$

ומגדירים כי לכל $k \in \mathbb{Z}$ מתקיים $\sin(x) = \sin(x + 2\pi k)$ ו $\cos(x) = \cos(x + 2\pi k)$

אפשר לוודא כי הקשרים $\sin' = \cos, \cos' = -\sin$ עבור ההרכבות שעסינו אבל זה קל.

23.1 קשרים אלגברים של $\cos, \sin$

נרצה להוכיח כי

- $\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$
- $\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$

למה: אם f גזירה פעמיים ומקיימת $f'' + f = 0$ וגם $f(0) = f'(0) = 0$ אזי $f = 0$

הוכחה:

$$\begin{aligned} f'' + f &= 0 \\ 2f'(f'' + f) &= 0 \\ \left((f')^2 + f^2\right)' &= 0 \\ (f')^2 + f^2 &= c \end{aligned}$$

מזה ש $f(0) = f'(0) = 0$ נובע כי $c = 0$

$$\begin{aligned} (f')^2 + f^2 &= 0 \\ f &= 0 \end{aligned}$$

כי סכום שני ביטויים אי שליליים שווה לאפס גורר ששני הביטויים הם 0.

משפט: אם f גזירה פעמיים ומקיימת $f''+f=0$, $f(0)=a, f'(0)=b$ אז $f=a\cos+b\sin$

הוכחה: נתבונן ב $g=f-a\cos-b\sin$ אזי

$$\begin{aligned} g'' &= f''-a\cos''-b\sin'' \\ &= -f+a\cos+b\sin \\ &= -g \end{aligned}$$

כלומר $g+g''=0$ ו $g(0)=0, g'(0)=0$ ומהלמה $g=0$

$$\begin{aligned} 0 &= f-a\cos-b\sin \\ f &= a\cos+b\sin \end{aligned}$$

משפט: עבור כל $x,y\in\mathbb{R}$ מתקיים $\sin(x+y)=\sin(x)\cos(y)+\cos(x)\sin(y)$

הוכחה: נקבע את y אזי

$$\begin{aligned} \varphi : x &\mapsto \sin(x+y) \\ \varphi' : x &\mapsto \cos(x+y) \\ \varphi' : x &\mapsto -\sin(x+y) \end{aligned}$$

אזי

$$\begin{aligned} \varphi''+\varphi &= 0 \\ \varphi(0) &= \sin(y)=a \\ \varphi(0) &= \cos(y)=b \end{aligned}$$

מהמשפט הקודם:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \sin(y)\cos(x)+\cos(y)\sin(x) \\ \sin(x+y) &= \sin(y)\cos(x)+\cos(y)\sin(x) \end{aligned}$$

23.2 אקספוננטים ולוגריתמים

נרצה להגדיר $x\in\mathbb{R} : 10^x$ וגם את הפונקציה ההופכית $\log_{10}$.
עבור $n\in\mathbb{N}$ יש הגדרה אינדוקטיבית ל 10^n
ויודעים כי לכל $m,n\in\mathbb{N}$ מתקיים $10^m\cdot 10^n=10^{m+n}$
ניתן להרחיב את 10^xלארגומנטים שלמים תוך שימור על התכונה הקודמת אם $10^{-n}=\frac{1}{10^n}, 10^0=0$
$10^{1/n}\cdot 10^{1/n}\cdot 10^{1/n}\cdots 10^{1/n}=10^1=10$ אזי $10^{1/n}=\sqrt[n]{10}$.

נגדיר: $f(x)=10^x$
אזי $f(x+y)=f(x)f(y)$

שאלה: האם קיימת פונקציה f גזירה המקיימת את התנאים?

הגדרה: $\log(x)=\int_1^x\frac{dt}{t}$. יודעים כי $\log'(x)=\frac{1}{x}$ ו $\log(1)=0$

משפט: לכל $0<y,x$ מתקיים $\log(x\cdot y)=\log(x)+\log(y)$

הוכחה: נתבונן ב

$$\begin{aligned}\varphi:x &\mapsto \log(xy)\\ \varphi':x &\mapsto \frac{1}{xy}\cdot y=\frac{1}{x}\\ \varphi' &= \log'\end{aligned}$$

אזי

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \log(x)+c\\ \varphi(1) &= \log(y)=c\\ \varphi(x) &= \log(x)+\log(y)\end{aligned}$$

מסקנה: לכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים $\log(x^n)=n\log(x)$

הוכחה: באינדוקציה על n[1]
מכיוון כי $\log'(x)=\frac{1}{x}>0$ אזי $\log$ מונוטונית עולה אזי יש לה פונקציה הופכית גזירה.

טענה: $\mathrm{Image}(\log)=\mathbb{R}$

הוכחה: $\log(2^n)=n\log(2)$ וזה מחסה את כל התחום של $\mathbb{R}$

הגדרה: $\exp:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ כך ש $\exp=\log^{-1}$

משפט: $\exp'=\exp$

הוכחה:

$$\begin{aligned}\exp'(x) &= \left(\log^{-1}\right)'(x)\\ &= \frac{1}{\log'\left(\log^{-1}(x)\right)}\\ &= \frac{1}{\left(\frac{1}{\log^{-1}(x)}\right)}\\ &= \log^{-1}(x)\\ &= \exp(x)\end{aligned}$$

[1] זה קל, תעשה לבד!

משפט: $\exp(x+y)=\exp(x)\exp(y)$

הוכחה: נגדיר $\exp(x)=t, \exp(y)=s$ אזי $x=\log(t), y=\log(s)$.

$$\begin{aligned} x+y &= \log(t)+\log(s) \\ &= \log(ts) \\ ts &= \exp(x+y) \end{aligned}$$

הגדרה: $\exp(1)=e$, $e=\log^{-1}(1)$ אזי $1=\log(e)=\int_1^e \frac{dt}{t}$

פרק 24

הרצאה מס.?

24.1 שיטות אינטגרציה

24.1.1 אינטגרציה בחלקים

תהיינה $u,v:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציות רציפות וגזירות ברציפות בקטע $[a,b]$ אזי:

$$\int_a^b u'v = uv|_a^b - \int_a^b uv'$$

כאשר $uv|_a^b = u(b)\,v(b) - u(a)\,v(a)$.

הוכחה: מתקיים כי $(uv)' = u'v + uv'$ אזי בקצת מסחקים אלגבריים זה יפתר.

תזכורת: נוסחת ניוטון-לייבניץ
יהי f פונקציה גזירה ברציפות ב $[a,b]$ אזי $\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a) = f|_a^b$

24.1.2 אינטגרל של נגזרת פנימית

תהי f,g פונקציות גזירות ברציפות, $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f:[a,b]\to\mathbb{R}$ אזי

$$\int_a^b g(f)\,f' = \int_{f(a)}^{f(b)} g$$

פרק 25

תרגול מס.?

המשפט היסודי של חדו"א: תהי f אינטגרבילית ב $[a,b]$, $c\in[a,b]$ ונגדיר $F(x)=\int_c^x f$ אם f רציפה ב $t_0\in[a,b]$ אז F גזירה ב t_0 ו $F'(t_0)=f(t_0)$

מסקנה: הנוסחה הסודית: f רציפה ב $[a,b]$, $g:[a,b]\to\mathbb{R}$, $f=g'$ אז $\int_a^b=g(b)-g(a)$

דוגמה 1:

$$R(x)=\begin{cases}0 & x\notin\mathbb{Q}\\ \frac{1}{q} & x=\frac{p}{q}\end{cases}$$

כאשר $\frac{p}{q}$ הוא שבר מצומצם

R אינטגרבילית בכל קטע $[a,b]$ ו $\int_a^b=0$

את זה יהיה להוכיח בתרגיל. אנחנו פשוט נסתמך על זה.

לכן אם נבחר $a\in\mathbb{R}$ ונגדיר $F(x)=\int_a^x f=0$

אם $x\in\mathbb{Q}$ אז $R(x)\neq0$ ובפרט $F'(x)\neq R(x)$

דוגמה 2:

$$f(x)=\begin{cases}\cos\left(\frac{1}{x}\right) & x\neq0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

נגדיר $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$ ונגדיר $g(x)=\begin{cases}2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) & x\neq0\\ 0 & x=0\end{cases}$ ו $G(x)=\int_0^x g(t)\,dt$.

g רציפה לכל $\mathbb{R}$ ולכן G גזירה בכל $\mathbb{R}$

$$
\begin{aligned}
H(x) &= G(x) - F(x) \\
H(x) &= \int_a^x g(t) - f(t)\,dt \\
&= \int_a^x 2t\sin\left(\frac{1}{t}\right) - \cos\left(\frac{1}{t}\right)dt \\
&= \int_a^x \left(t^2\sin\left(\frac{1}{t}\right)\right)' dt \\
& t^2\sin\left(\frac{1}{t}\right)
\end{aligned}
$$

פרק 26

הרצאה מס.?

יש למשפט היסודי של חדו"א גרסה יותר חזקה:

אם f אינטגרבילית(ולא בהכרח רציפה) אזי F מקיימת $F' = f$ אז $\int_a^b f = F|_a^b$

26.1 סדרות

כל הסדרות שנתעסק בהם הם סדרות אינסופית

הגדרה: אוסף בן מניה סדור של מספרים ממשיים למשל $a_1, a_2, a_3 \ldots$ כאשר $a_i \in \mathbb{R}$
לכל מספר טבעי n מותאם מספר ממשי a_n

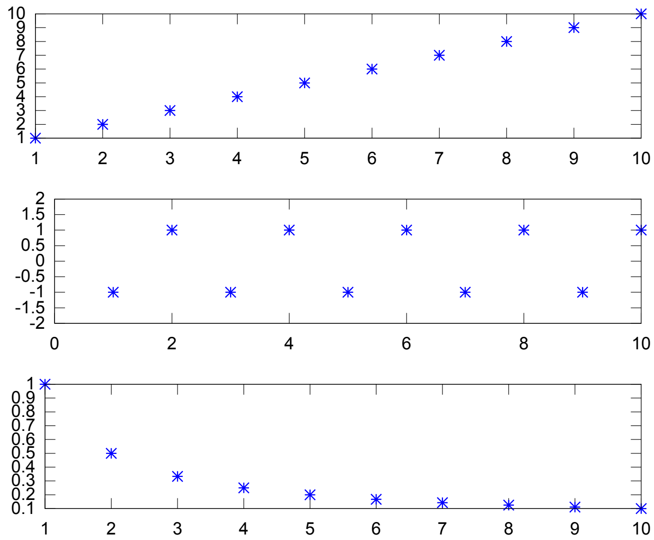
הגדרה יותר מתמטית: סדרה היא פונקציה $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$

הערות:

1. $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ אזי במקום לכתוב $a(4)$ נהוג לכתוב a_4
2. מוקבל לסמן a_n או $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ כתחליף לסימון $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$
3. כמו שבפונקציות אנו אמורים לפעמים הפונקציה x^2 כם אומרים הסדרה $\frac{1}{n}$
   הפונקציה $x^2 \Leftrightarrow x \mapsto x^2$
   הסדרה $\frac{1}{n} \Leftrightarrow n \mapsto \frac{1}{n}$

דוגמאות:

1. $a_n = n$
2. $b_n = (-1)^n$
3. $c_n = \frac{1}{n}$



איור 26.1: הצגה גרפית של הסדרות

26.2 גבול של סדרה

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = l$$

הגדרה: סדרה a_n מתכנסת למספר ממשי l מסומן $\lim_{n\to\infty} a_n = l$ אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $N \in \mathbb{N}$ כך ש $|a_n - l| < \varepsilon$ לכל $n > N$

הגדרה: סדרה נקראת מתכנסת[1] אם היא מתכנסת לאיזשהו מספר ממשי. אחרת היא נקראת מתבדרת[2]

דוגמא:

$$a_n = \frac{1}{n}$$

טענה: $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

צ"ל שלכל $\varepsilon > 0$ קיים $N \in \mathbb{N}$ כך ש $|a_n| < \varepsilon$ לכל $n > N$

בהנתן $\varepsilon > 0$ ניקח $N = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil$(לכומר $\frac{1}{N} < \varepsilon$)

$$a_n = \frac{1}{n} < \frac{1}{N} \leq \varepsilon$$

משל.

[1] Convergent
[2] Divergent

דוגמה:

$$a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

זה עוזר להכפיל ב"צמוד" של זה:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} < \frac{1}{2\sqrt{n}} \end{aligned}$$

בהנתן $\varepsilon > 0$ נבחר $N \in \mathbb{N}$ כך ש $\frac{1}{2\sqrt{N}} < \varepsilon$ ואז לכל $n > N$ $|a_n - 0| = a_n <$ $\frac{1}{2\sqrt{n}} < \frac{1}{2\sqrt{N}} < \varepsilon$

דוגמא:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{3n^2+7n^2+1}{4n^3-8n+63} \\ \lim_{n\to\infty} a_n &\stackrel{?}{=} \frac{3}{4} \end{aligned}$$

אפשר לחלק מונה ומכנה ב n^3:

$$a_n = \frac{3+\frac{7}{n}+\frac{1}{n^3}}{4-\frac{8}{n^2}+\frac{63}{n^3}}$$

אז המונה הוא סכום של 3 סדרות. אחת קבועה ושתי האחרות שואפות ל0 אבל אין משפט שאומר משהוא על סכום הגבול של סדרות:

26.3 אריכמטיקה של גבולות

אם a_n, b_n סדרות מתכנסות אז

1. $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$
2. $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = (\lim_{n\to\infty} a_n)\cdot(\lim_{n\to\infty} b_n)$
3. אם $\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$ אז $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}$

26.4 סדרות ופונקציות

בהינתן סדרה a_n מיתן להגדיר

$$\begin{aligned} f:(0,\infty) &\to \mathbb{R} \\ f(x) &= a_n + (a_{n+1}-a_n)(x-n) \end{aligned}$$

עבור $n \leq x \leq n+1$

טענה: $\lim_{x\to\infty} f(x) = l$ אם ורק אם $\lim_{x\to\infty} f(x) = l$

הוכחה: אם $\lim_{x\to\infty} f(x) = l$
אז לכל $0 < \varepsilon$ קיים $M > 1$ כך ש $\varepsilon > |f(x) - l|$ לכל $M < x$ בפרט לכל $\lceil M \rceil < n \in \mathbb{N}$

$$\left|\underbrace{f(n)}_{a_n} - l\right| < \varepsilon$$

ומכאן ש $l = \lim_{n\to\infty} a_n$: נניח עתה ש $l = \lim a_n$ לכל $n \le x \le n+1$ מתקיים $f(x)$ נמצאת בין a_n ו a_{n+1} לכל $\varepsilon > 0$ קיים $N \in \mathbb{N}$ כך ש $\varepsilon > |a_n - l|$ לכל $n > N$
לכל $x > N$ מתקיים $|f(x) - l| \le \max\{|f(\lceil x \rceil) - l|, |f(\lfloor x \rfloor) - l|\} < \varepsilon$
משל

משפט: תהיא f מוגדרת על סביבה מנוקבת של נקודה c ומתקיים $\lim_{x\to c} f(x) = l$
תהא a_n סדרה המקבלת ערכים בתחום ההגדרה של f כך ש $c \ne a_n$ לכל n וגם $\lim_{n\to\infty} a_n = c$ אז $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = l$ ולהפך אם $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = l$ לכל סדרה a_n כנ"ל אז $\lim_{x\to c} f(x) = l$

פרק 27

הרצאה מס.?

משפט בולצנור-ויירשטראס: לכל סדרה חסומה קיימת תת-סדרה מתכנסת

הוכחה: הוכחנו:

1. שלכל סדרה קיימת תת-סדרה מונוטונית במובן חלש
2. סדרה מונוטונית וחסומה מתכנסת

אז נובע כי לכל סדרה קיימת תת סדרה מתכנסת

27.1 קריטריון קושי

סדרה (a_n)

הגדרה: נאמר שהסדרה היא סדרת קושי רם לכל $0 < \varepsilon$ קיים $N \in \mathbb{N}$ כך ש $|a_n - a_m| < \varepsilon$ לכל $N < n, m$

משפט: סדרה מתכנסת אם ורק אם היא סדרת קושי

הוכחה: נניח כי a_n מתכנסת ל a נוכיח כי היא סדרת קושי. מאי שוויון המשולש:

$$|a_n - a_m| \leq |a_n - a| + |a_m - a|$$

ויודעיים כי $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ ו $|a_m - a| < \frac{\varepsilon}{2}$. משל

פרק 28

הרצאה מס.?

הגדרה: סדרה (a_n) נקראת סדרת קושי[1] אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים N כך ש $|a_n - a_m| < \varepsilon$ לכל $n, m > N$

הערה: דרך נוספת לסמן שסדרה היא סדרת קושי $\lim_{n,m\to\infty} |a_n - a_m| = 0$[2]
כלומר: תנאי קושי $\Leftrightarrow$ התכנסות

הוכחה: הוכח בשיעור שעבר כי התכנסות גוררת תנאי קושי. נשאר להוכיח הכיוון השני.
שלבי ההוכחה:

1. נוכיח שהסדרה חסומה
2. נסתמך על משפט בולצנו ויירשטרס לטעון כי קיימת ל (a_n) תת סדרה מתכנסת(נקרא לגבול שלה a)
3. נראה כי a הוא הגבול של הסדרה כולה

מהלך ההוכחה:

1. מהנתון כי (a_n) סדרת קושי נובע כי קיים N כך ש $|a_n - a_m| < 1$ לכל $N < m, n$ בפרט אם ניקח $m = N + 1$ אז $|a_n - a_{N+1}| < 1$ לכל $n > N$ אזי $a_{N+1} - 1 < a_n < a_{N+1} + 1$ לכל $n > N$ אזי (a_n) סדרה חסומה
2. ממשפט בולצנו ויירשטרס קימת תת סדרה a_{n_k}(כאשר n_k זו סדרה מסוימת) כך ש $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a$
3. צ"ל $\lim_{n\to\infty} a_n = a$

(א) לכל $n, k \in \mathbb{N}$ מתקיים $|a_n - a| = |a_n - a_{n_k} + a_{n_k} - a| \le |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a|$

(ב) בהינתן $\varepsilon > 0$ קיים $N \in \mathbb{N}$ כך ש $|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2}$ כדכ $N < n, m$ קיים $k \in \mathbb{N}$ כך ש $|a_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ לכל $k > K$

(ג) יהא k מספיק גדול כך שהוא גדול מk וכם $N < n_k$ ולכל $N < n$ מתקיים $|a_n - a| \le \underbrace{|a_n - a_{n_k}|}_{\varepsilon/2} + \underbrace{|a_{n_k} - a|}_{\varepsilon/2} < \varepsilon$. משל

---

[1] או מקיימת תנאי קושי
[2] אבל אנחנו עדיין לא הגדרנו מה זה גבול עם שני אינדקסים

הערה: הוכחנו כי בעולם המספרים הממשיים(שדות סדורים ושלמים) כל סדרת קושי מתכנסת.

28.1 טורים

יש סדרה (a_n) סכום שלו הוא

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

נגדיר את סדרת הסכומים החלקיים של a_n:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

הגדרה: נאמר שסדרה היא סכימה[3] אם סדרת הסכומים החלקיים מתכנסים ונסמן:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

במקרה והסדרה a_n סכימה נאמר שהטור של a_n מתכנס אחרת נאמר שהוא מתב-דר

הדוגמה: הסדרה ההנדסית $a_n = q^n$ אם $0 < q < 1$ אזי

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} q^k \\ &= q\frac{1-q^n}{1-q} \\ \lim_{n\to\infty} S_n &= \frac{q}{1-q} \end{aligned}$$

אזי ניתן לסמן $-1 < q < 1 : \sum_{n=1}^{\infty} q^n = \frac{q}{1-q}$

דוגמא: לטור $\frac{1}{n}$ קוראים טור הרמוני.

$$1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}_{>\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}_{>\frac{1}{2}} + \frac{1}{9}$$

הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ מתבדר

---

[3] Summable

משפט: תהינה $(a_n), (b_n)$ סדרות סכמות אז

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n) &= \sum_{n=1}^{\infty}a_n+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\\ \sum_{n=1}^{\infty}(ca_n) &= c\sum_{n=1}^{\infty}a_n\end{aligned}$$

משפט: תהא a_n סדרה. אז היא סכימה אם ורק אם לכל $0 < \varepsilon$ קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $m, n > 0$ מתקיים $|a_{n+1} + a_{n+2} \cdots + a_m| < \varepsilon$

מסקנה: אם סדרה סכימה אז היא שואפת לאפס

משפט: סדרה אי שלילית היא סכימה אם ורק אם סדרת הסכומים החלקיים חסומה.

הוכחה: עבור איברים אי שליליים סדרת הסכומים החלקיים מונוטונית. הוכחנו כי כל סדרה מונוטונית וחסומה מתכנסת

פרק 29

הרצאה מס.?

משפט: תהינה (a_n), (b_n) סדרות חיוביות כך ש

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=c\neq 0$$

אזי $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס אם"ם $\sum_{n=1}^{\infty}$ מתכנס

מסקנה: אם $a_n\neq 0$ ו $\lim_{n\to\infty}a_n=a>0$ אזי $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}=\frac{1}{a}$

משפט: מבחן המנה
תהי a_n סדרה חיובית כך ש $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=r$ קיים אזי

1. אם $r<1$ אז הטור $\sum^{\infty}a_n$ מתכנס
2. אם $r>1$ אז הטור $\sum^{\infty}a_n$ מתבדר
3. אם $r=1$ אז לא ניתן לגבוע על ידי משפט זה

הוכחה: נניח $r<1$ אזי קיים N כך שלכל $n>N$ מתקיים $0<\frac{a_{n+1}}{a_n}<S<1$ כך ש $0<S<1$
הפרט $a_{N+1}<Sa_N$, $a_{N+2}<Sa_{N+1}<Sa_N$ כלומר $a_{N+k}<S^ka_N$. אזי מחלקים את הטור לחלקים:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}a_k &= \sum_{k=1}^{N}a_k+\sum_{k=N+1}^{n}a_k\\ &\le \sum_{k=1}^{N}a_k+a_N\underbrace{\sum_{k=N+1}^{n}S^k}_{\text{טור הנסדי מתכנס}}\end{aligned}$$

הסכומים החלקיים של הטור מתכנסים[1] לכן הטור מתכנס

[1] כי $0<S<1$

29.1 טורים מוקרים

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ מתכנס
$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ מתבדר
מה לגבי $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ עבור $p>0$?

הגדרה:

$$\int_a^{\infty} f=\lim_{x\to\infty}\int_a^x f$$

השפט: מבחן האינטגרל
תהא f פונקציה מונוטונית יורדת על $[1,\infty)$ ונגדיר $a_n=f(n)$ אז $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ קיים אם ורק אם $\int_1^{\infty}f$ קיים

דוגמה: נתבונן ב $f(x)=\frac{1}{x^p}$ אז

$$\int_1^x\frac{1}{x^p}=\begin{cases}\frac{1}{1-p}\left[\frac{1}{x^{p-1}}-1\right] & p\neq 1\\ \log(x) & p=1\end{cases}$$

אזי $\int_1^{\infty}f$ קיים רק עבור $p>1$ אזי $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ קיים אם"ם $p>1$

פרק 30

הרצאה מס.?

30.1 התכנסות בהחלט ובתנאי

הגדרה: תהי (a_n) סדרה נאמר שהטור שלה מתכנס בהחלט אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ מתכנס. טור מתכנס אך אינו מתכנס בהחלט נקרא מתכנס בתנאי.

דוגמה:

$$a_n = \left\{1, -\frac{1}{2}, +\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, +\frac{1}{5} \dots\right\}$$
$$a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

משפט רימן: בטור תנאי לכל $\alpha \in \mathbb{R}$ קיים "סידור מחדש" של הטור שמתכנס ל α (לא נוכיח את זה)

משפט: התכנסות בהחלט $\Leftarrow$ התכנסות.

הוכחה: ידוע ש $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ קיים. מקריטריון קושי לכל $\varepsilon > 0$ קיים N כך ש $|a_{n+1}|+\cdots+|a_m| < \varepsilon$
אבל $|a_{n+1}+\cdots+a_m| \leq |a_{n+1}|+\cdots+|a_m| < \varepsilon$
אזי a_n מקיים את קריטריון קושי להתכנסות טורים

משפט: טור $\sum a_n$ מתכנס בהחלט אם"ם שני הטורים המתקבלים מהערכים החיוביים ומהערכים השליליים מתכנסים.

$$a_n^+ = \begin{cases} a_n & a_n > 0 \\ 0 & a_n < 0 \end{cases}$$
$$a_n^- = \begin{cases} a_n & a_n < 0 \\ 0 & a_n > 0 \end{cases}$$

נשים לב

$$
\begin{aligned}
a_n &= a_n^+ + a_n^- \\
|a_n| &= a_n^+ - a_n^- \\
a_n^+ &= \frac{1}{2}\left(a_n + |a_n|\right) \\
a_n^- &= \frac{1}{2}\left(a_n - |a_n|\right)
\end{aligned}
$$

המשפט נובע מאריכמטיקה של טורים

פרק 31

תרגול מס.?

31.1 תתי סדרות

תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה, $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ סדרה עולה ממש של הטבעיים נגדיר $b_k = a_{n_k}$ אז $(b_k)_{k=1}^{\infty}$ תת סדרה של $(a_n)_{n=1}^{\infty}$

דוגמה: $a_n = -1, 0, 1, -1, 0, 1 \ldots$ תהי $n_k = 1, 2, 4, 5, 7, 8, 10 \ldots$ כלומר $n_1 = 1$ ו $n_{k+1} = n_k + 1 + \frac{1+(-1)^k}{2}$. אם $b_k = a_{n_k}$ אזי

$$b_k = -1, 0, -1, 0, -1, 0 \ldots$$

טענה: תהי $(n_k)_{n=1}^{\infty}$ סדרה של טבעיים עולה ממש אז $\forall k : n_k \geq k$

משפט: משפט הירושה
סדרה (a_n) מתכנסת ל L אם ורק אם כל תת-סדרה מתכנסת ל L

הוכחה: אם כל תת-סדרה מתכנסת אז גם (a_n) מתכנסת כי כל סדרה היא תת-סדרה של עצמו $n_k = k$...

משפט: f מוגדרת בסביב מנוקבת של x_0 נסמן אותה ב u אז $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ אם"ם לכל סדרה a_n ב u המתכנסת ל x_0 מתקיים $\lim_{x \to \infty} f(a_n) = L$

פרק 32

הרצאה מס.?

משפט: טוכ מתכנס בהחלט אס"ם שני הטורים המתקבלים מהאיברים החיוביים והשליליים של הסדרה מתכנסים.

משפט: תהי (a_n) סדרה אי שלילית יורדת(במובן החלש, כלומר $\leq$) וגם $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ אזי הטר $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ מתכנס