תרגיל מס.1

עפיף חלומה 302323001

9 בדצמבר 2009

1 שאלה 1

$$
\begin{aligned}
Y &= \frac{1}{1+X} \\
E\left(x\right) &= \sum_{i=0}^{\infty} P\left(x=i\right) i \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \binom{n}{i} p^{i}\left(1-p\right)^{n-i} \\
&= np \\
E\left(x\right) &= \sum_{i=0}^{\infty} P\left(x=i\right) \frac{1}{1+i} \\
&= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} p^{i}\left(1-p\right)^{n-i} \frac{1}{1+i} \\
&= \sum_{i=0}^{n} \frac{n!}{i!\left(n-i\right)!} p^{i}\left(1-p\right)^{n-i} \cdot \frac{1}{1+i} \\
&= \sum_{i=0}^{n} \frac{n!}{\left(1+i\right)!\left(n-i\right)!} p^{i}\left(1-p\right)^{n-i} \\
&= \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} \frac{\left(n+1\right)!}{\left(1+i\right)!\left(n+1-i-1\right)!} \cdot p^{i}\left(1-o\right)^{n+1-i+1} \\
&= \frac{1}{1+np} \sum_{i=0}^{n+1} \overbrace{\binom{n+1}{i}\left(1-p\right)^{n+1}}^{1} - \left(1-p\right)^{n+1} \\
&= \frac{1-\left(1-p\right)^{n+1}}{\left(n+1\right)p}
\end{aligned}
$$

2 שאלה 2

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} P\left(win|N=n\right)\cdot P\left(N=k\right) &= \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^{k}}{k!}\cdot\frac{l}{k+1}\\
&= \frac{1}{\lambda}\sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^{k+1}}{(n+1)!}\\
&= \frac{1}{\lambda}\sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^{k}}{k!}\\
&= \frac{1}{\lambda}\left[\left(\sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^{k}}{k!}\right)-e^{-\lambda}\right]\\
&= \frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda}
\end{aligned}
$$

3 שאלה 3

ההסתברות לראש מטבע א' P_1

ההסתברות לראש מטבע ב' P_2

X מס' הראשים כאשר בוחרים מטבע באקראי ומוטולים אותו פעמיים

Y מס' הראשים כאשר בוחרים מטבע באקראי ומוטילים אותו פעם אחת אחר כך בוחרים שוב מטבע באקראי ומוטילים אותו פעם אחת.

3.1 א

המשתנה X:

$$
\begin{aligned}
P\left(x=0\right) &= \frac{1}{2}q_1^2+\frac{1}{2}q_2^2\\
P\left(x=1\right) &= \frac{1}{2}p_1q_1\cdot 2+\frac{1}{2}p_2q_2\cdot 2\\
&= p_1q_1+p_2q_2\\
P\left(x=2\right) &= \frac{1}{2}p_1^2+\frac{1}{2}p_2^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E\left(x\right) &= \sum_{x=0}^{2} xp\left(X=x\right)\\
&= \begin{array}{c} 0\cdot\left(\frac{1}{2}q_1^2+\frac{1}{2}q_2^2\right)+\\ 1\cdot\left(p_1q_1+p_2q_2\right)+\\ 2\cdot\left(\frac{1}{2}p_1^2+\frac{1}{2}p_2^2\right)\end{array}\\
&= p_1q_1+p_2q_2+p_1^2+p_2^2\\
&= p_1\underbrace{\left(q_1+p_1\right)}_{1}+p_2\underbrace{\left(q_2+p_2\right)}_{1}\\
&= p_1+p_2
\end{aligned}
$$

המשתנה Y:
אפשר לחשוב על זה כמו $Y\sim\mathrm{Bin}\left(2,\frac{p_1+p_2}{2}\right)$:

$$E\left(Y\right)=n\cdot p=2\left(\frac{p_1+p_2}{2}\right)=p_1+p_2$$

3.2 ב

$$\begin{aligned}
\mathrm{var}\left(Y\right) &= np\left(1-p\right)=\left(p_1+p_2\right)\left(1-\frac{p_1+p_2}{2}\right)\\
&= p_1+p_2-\frac{\left(p_1+p_2\right)^2}{2}\\
\mathrm{var}\left(X\right) &= E\left(x^2\right)-E\left(x\right)^2=p_1q_1+p_2q_2+4\left(\frac{1}{2}p_1^2+\frac{1}{2}p_2^2\right)-\left(p_1+p_2\right)^2\\
&= p_1q_1-p_2q_2+2p_1^2+2p_2^2-p_1^2-2p_1p_2-p_2^2\\
&= p_1q_1+p_2q_2+p_1^2+p_2^2-2p_1p_2\\
&= p_1\left(q_1+p_1\right)+p_2\left(q_2+p_2\right)-2p_1p_2\\
&= p_1+p_2-2p_1p_2
\end{aligned}$$

צריך לבדוק $2p_1p_2\leqslant\frac{\left(p_1+p_2\right)^2}{2}$:

$$\begin{aligned}
2p_1p_2 &\leqslant \frac{\left(p_1+p_2\right)^2}{2}\\
4p_1p_2 &\leqslant p_1^2+p_2^2+2p_1p_2\\
0 &\leqslant p_1^2+p_2^2-2p_1p_2\\
0 &\leqslant \left(p_1-p_2\right)^2
\end{aligned}$$

אזי אם $0<\left(p_1-p_2\right)^2$ מקיים $\mathrm{var}\left(x\right)>\mathrm{var}\left(y\right)$

4 שאלה 5

הוכחנו שמתקיים

$$P\left(y=k|k>0\right)=\frac{\left(\frac{e^{-\lambda}\cdot\lambda^k}{k!}\right)}{1-e^{-\lambda}}$$

נחפש את התוחלת

$$
\begin{aligned}
E\left(Y\right) &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{e^{-\lambda}\cdot\lambda^{k}}{k!}\right)}{1-e^{-\lambda}}\cdot k\\
&= \frac{1}{1-e^{-\lambda}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{-\lambda}\cdot\lambda^{k}}{\left(k-1\right)!}\\
&= \frac{\lambda}{1-e^{-\lambda}}\cdot\underbrace{\sum_{j=0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda}\lambda^{j}}{j!}}_{1}\\
&= \frac{\lambda}{1-e^{-\lambda}}
\end{aligned}
$$

נחשב את $E\left(Y^{2}\right)$:

$$
\begin{aligned}
E\left(Y^{2}\right) &= \sum_{k=0}^{\infty}k^{2}P\left(Y=k\right)\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}k^{2}\frac{\left(\frac{e^{-\lambda}\cdot\lambda^{k}}{k!}\right)}{1-e^{-\lambda}}\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\left(k\left(k-1\right)+k\right)\frac{\left(\frac{e^{-\lambda}\cdot\lambda^{k}}{k!}\right)}{1-e^{-\lambda}}\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}k\left(k-1\right)\frac{\left(\frac{e^{-\lambda}\cdot\lambda^{k}}{k!}\right)}{1-e^{-\lambda}}+\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty}k\frac{\left(\frac{e^{-\lambda}\cdot\lambda^{k}}{k!}\right)}{1-e^{-\lambda}}}_{E(Y)}\\
&= \frac{1}{1-e^{-\lambda}}\underbrace{\sum_{k=2}^{\infty}\frac{e^{-\lambda}\cdot\lambda^{k}}{\left(k-2\right)!}}_{1}+E\left(Y\right)\\
&= \frac{\lambda^{2}}{1-e^{-\lambda}}+\frac{\lambda}{1-e^{-\lambda}}\\
&= \frac{\lambda^{2}+\lambda}{1-e^{-\lambda}}
\end{aligned}
$$

$$
\mathrm{var}\left(Y\right)=\frac{\lambda}{1-e^{-\lambda}}
$$