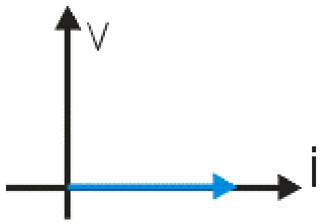
פרק 2: רכיבי המעגל

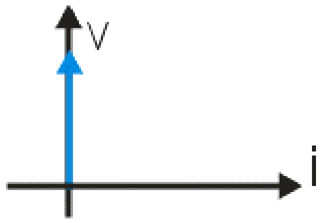
נגדים Resistors

נגד הנו אלמנט המקיים קשר מהצורה V=V(i).
הקשר הרגעי של המתח והזרם קובעים את המתח בכל רגע ורגע. קשר זה נקרא האופיין של הנגד.
שני אופיינים נפוצים הם הבאים:

מעגל מקוצר:
אין עליו מתח וכל הזרם
עובר דרכו.

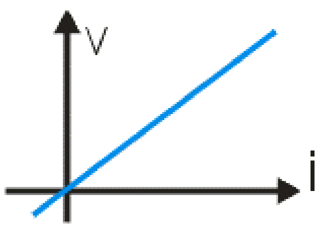


מעגל מנותק:
כל המתח נופל עליו
ולא עובר דרכו זרם.



<u>נגד ליניארי</u>: זהו נגד שעבורו הפונקציה $V(i)$ ליניארית ובלתי משתנה בזמן.
במקרה זה הקשר נקרא **חוק אוהם** (Ohm Law):

$$\boxed{V(t)=R\cdot i(t)}$$



או באופן שקול: $i(t)=GV(t)$
כאשר: R - התנגדות, G - מוליכות, ומתקיים:

$$G=\frac{1}{R}$$

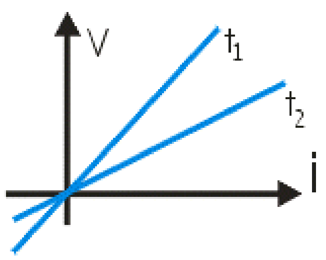
הסימון לנגד ליניארי:

ביחידות MKS , התנגדות נמדדת באוהם ומסומנת ב - Ω .

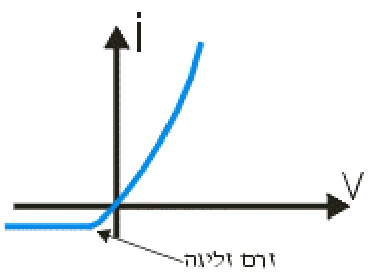
ניתן לדבר גם על נגד ליניארי שהתנגדותו תלויה בזמן:

$$V(t)=R(t)\cdot i(t)$$

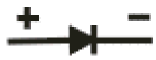
והאופיין שלו יהיה שונה בזמנים שונים:



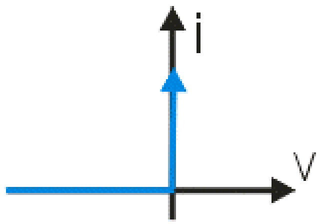
<u>נגד לא ליניארי</u>:
נגד שבו הפונקציה $V(i)$ אינה ליניארית.
לדוגמה: דיודה - i = i(v) . האופיין שלה הוא הבא:



סימון:



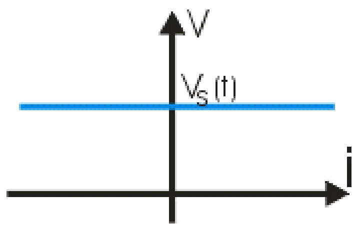
בדיודה אידיאלית:
אין זרם כל עוד המתח עליה שלילי, וכאשר המתח עליה חיובי היא מתנהגת כמעגל מקוצר.



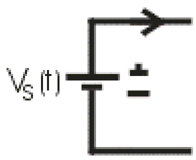
מקורות בלתי תלויים

<u>מקור מתח אידיאלי</u> הינו התקן שהמתח בין הדקיו $V_s(t)$ אינו תלוי בזרם הזורם דרכו. עבור $V_s(t)=V_s$ המקור מכונה מקור מתח קבוע.

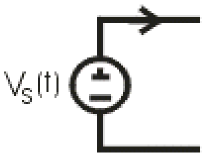
האופיין של מקור מתח כזה הוא:



סימונו של מקור המתח האידיאלי הוא:



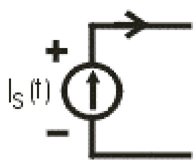
או



כפי שהוזכר קודם, מוסכם לסמן במקורות את הזרם מ: - ל: + כך שהמכפלה $V \cdot I$ תתן את ההספק המסופק ע״י המקור.

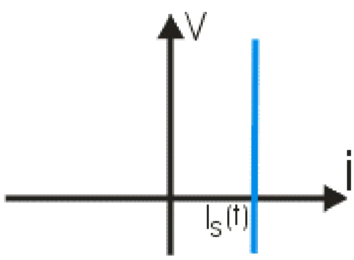
<u>מקור זרם אידיאלי</u> הינו התקן שהזרם הזורם דרכו $I_s(t)$ אינו תלוי במתח עליו.

סימונו:



עבור $I_s(t)=I_s$ המקור מכונה מקור זרם קבוע.

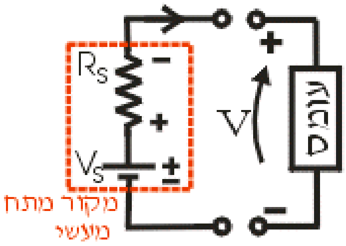
האופיין של מקור זרם כזה הוא:



<u>מקורות מעשיים</u>

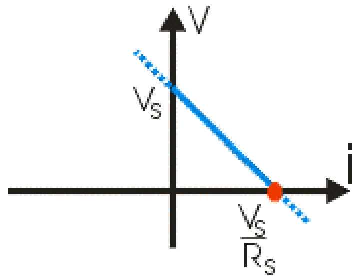
רוב המקורות המעשיים אינם אידיאליים. למזלנו, ניתן למדל את רוב המקורות ע״י מקור אידיאלי ועוד התנגדות פנימית שנסמנה R_s .

עבור מקור מתח מעשי:



נרשום KVL:

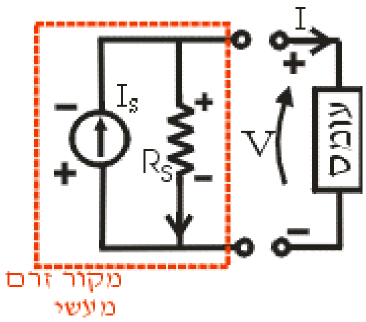
$$V + iR_s - V_s = 0$$
$$\Downarrow$$
(1) $$V = V_s - iR_s$$



מהגרף האחרון ניתן לראות, כי כאשר המתח V או הזרם I הם שליליים (ראה אזור המקווקו בגרף), העומס הוא עומס אקטיבי והוא מספק הספק במעגל.

עבור מקור זרם מעשי:

נרשום KCL:



$$i = I_s - \frac{V}{R_s}$$
$$\Downarrow$$
$$iR_s = I_sR_s - V$$
$$\Downarrow$$
(2) $$V = I_sR_s - iR_s$$

אנו רואים שמשוואות (1) ו- (2) הן זהות כאשר $V_s = I_sR_s$. לכן אנו מסיקים ששני המעגלים הם <u>אקוויוולנטים</u>.

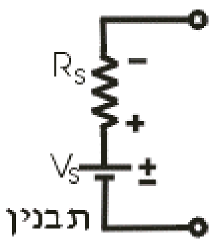
כלומר אם נתון מקור מתח מעשי V_s עם נגד R_s בטור, ניתן לתרגמו למקור זרם $I_s = \dfrac{V_s}{R_s}$ עם נגד R_s במקביל ולהפך.

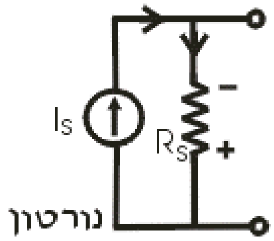
להצגה עם מקור המתח קוראים הצגת (אקוויוולנט) תבנין (Thevenin).

להצגה עם מקור הזרם קוראים הצגת (אקוויוולנט) נורטון (Norton).

בפרק 3 נדון בהרחבה בהצגות אילו ושימושן.

נסכם: מקור מעשי יכול להירשם בשתי צורות אקויוולנטיות (בחירת צורת ההצגה תעשה לפי נוחות המשתמש):



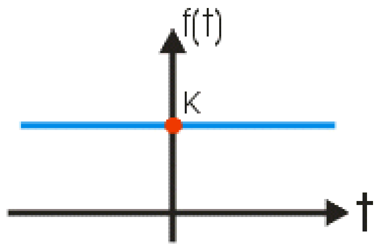


$$I_s = \frac{V_s}{R_s}$$

<u>נציין מספר צורות גל נפוצות</u>:

1. פונקציה קבועה   Constant

עבור כל t : f(t)=k



2. פונקציה סינוסואידלית

$f(t)=A\cos(wt+\varphi)$

סימונים:

A   אמפליטודה, משרעת.

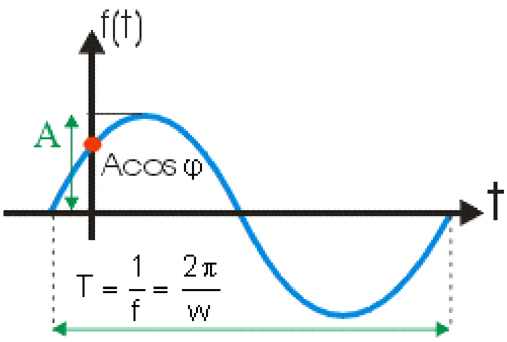
w   תדירות זוויתית $\left(\frac{\text{רדיאן}}{\text{שניה}}\right)$

f   תדירות (Hz).

מתקיים: $w=2\pi f$.

φ - פזה (נהוג להגביל: $-\pi<\varphi\le\pi$)

$T=\frac{1}{f}$ - זמן מחזור.



את שלושת הגדלים A, w, φ מוצאים מתוך הציור (ראה סימונים על הגרף).

<u>הערה</u>: ל - φ יש שני פתרונות הנבדלים בסימנם. איך נקבע את הסימן של φ ?

לפי סימן הנגזרת הראשונה, משום ש: $\frac{df(t)}{dt}\Big|(t=0)=-A\sin\varphi$.

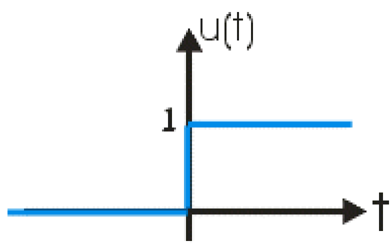
לכן:

אם f עולה אז $f'>0$ ולכן $\sin\varphi<0$ $\Leftarrow$ $\varphi<0$, כלומר בתחום $(-\pi,0)$.

אם f יורדת אז $f'<0$ ולכן $\sin\varphi>0$ $\Leftarrow$ $\varphi>0$, כלומר בתחום $(0,\pi)$.

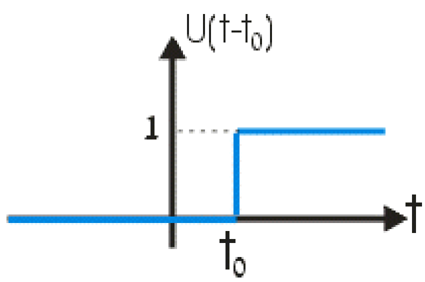
3. פונקציה מדרגה (step)

$$f(t)=u(t)=\begin{cases} 0 & t<0 \\ \text{אי רציפות} & t=0 \\ 1 & t>0 \end{cases}$$

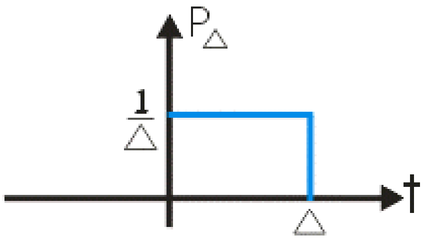


עבור t=0 נהוג לקבוע ערך 0, 0.5 או 1.

פונקצית מדרגה עם השהייה של t_0 , $u(t-t_0)$, נראית כך:



4. פונקצית הפולס (Pulse)



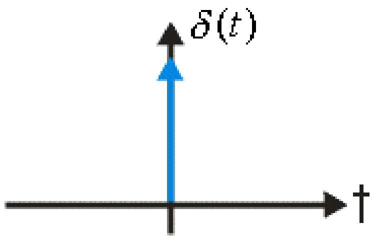
$$f(t)=P_\Delta(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ \frac{1}{\Delta} & 0<t<\Delta\\ 0 & t>\Delta\end{cases}$$

הקשר בין פולס לפונקצית מדרגה:

$$P_\Delta(t)=\frac{u(t)-u(t-\Delta)}{\Delta}$$

5. פונקצית ההלם (δ function, impulse, the Dirac delta)

למעשה זו אינה פונקציה, אלא גבול שאליו שואפת משפחה של פונקציות.
ההגדרה:



$$f(t)=\delta(t)=\begin{cases}\infty & t=0\\ 0 & t\neq 0\end{cases}$$

כאשר עבור כל a>0 : $\int_{-a}^{a}\delta(t)dt=1$

דוגמא כיצד לקבל $\delta(t)$: $\delta(t)=\lim_{\Delta\to 0}P_\Delta(t)$

משום שלפי הגדרת $P_\Delta(t)$ מתקיים עבור כל $\Delta>0$: $\int_{-\frac{1}{\Delta}}^{\frac{1}{\Delta}}P_\Delta(t)dt\ =1$

נציין מספר תכונות מעניינות של פונקצית ההלם:

1) הקשר בין הלם לפונקצית מדרגה: $u(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(t')dt'$ ולכן $\frac{du(t)}{dt}=\delta(t)$.

2) תכונת הדגימה: עבור כל a>0 מתקיים השוויון: $\int_{-a}^{a}f(t)\delta(t)dt=f(0)$

הוכחה: $\int_{-a}^{a}f(t)\delta(t)dt=\lim_{\Delta\to 0}\int_{-a}^{a}f(t)p_\Delta(t)dt=\lim_{\Delta\to 0}\int_{0}^{\Delta}f(t)\cdot\frac{1}{\Delta}dt=f(0)\cdot\frac{\Delta}{\Delta}=f(0)$

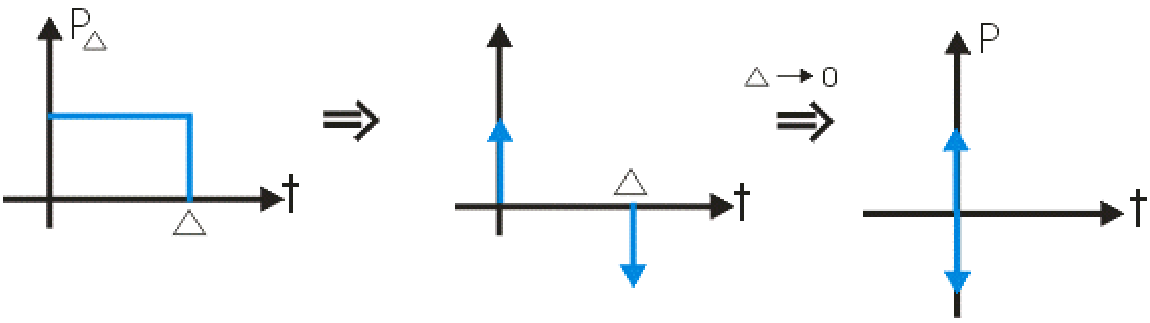
3) ניתן להגדיר פונקצית הלם מוזזת $\delta(t-t_0)$ לפי: $\begin{cases}\infty & t=t_0\\ 0 & t\neq t_0\end{cases}$

וכן: $$\int_{t_0-a}^{t_0+a}\delta(t-t_0)dt = 1$$

4) ניתן לדגום פונקציה בכל זמן ע"י: $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-t_0)dt = f(t_0)$ (בהמשך לתכונת הדגימה).

6. פונקצית הדובלט (Doublet)

זוהי הנגזרת של פונקצית ההלם: $$\delta(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta'(t')dt' \quad , \quad \delta'(t)=\frac{d\delta(t)}{dt}$$



שימוש לדובלט יהיה עבור דגימת הנגזרת:

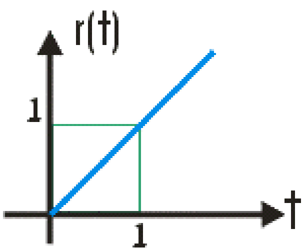
$$\int_{-a}^{a}\delta'(t)f(t)dt = f(t)\delta(t)\Big|_{-a}^{a} - \int_{-a}^{a}f'(t)\delta(t)dt = f(a)\underbrace{\cancel{\delta(a)}}_{0} - f(-a)\underbrace{\cancel{\delta(-a)}}_{0} - f'(0) = -f'(0)$$

בשוויון הראשון השתמשנו באינטגרציה בחלקים: $\int_{a_1}^{a_2} uv' = uv\Big|_{a_1}^{a_2} - \int_{a_1}^{a_2} vu'$ כאשר הצבנו: $u=f(t), v=\delta(t)$

. בשוויון השני השתמשנו בתכונת הדגימה.

ניתן להכליל ולהוכיח: $$\int_{-a}^{a}\delta^{(n)}(t)f(t)dt = (-1)^n f^{(n)}(0)$$

7. פונקצית הרמפה (ramp)



$$f(t)=r(t)=tu(t)=\int_{-\infty}^{t}u(t')dt'$$

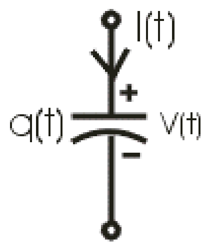
וכן: $u(t)=\frac{dr(t)}{dt}$.

מתוך הפונקציות שלעיל והקשרים ביניהם, מקבלים את הסדרה הבאה: $r(t)\leftrightarrow u(t)\leftrightarrow \delta(t)\leftrightarrow \delta'(t)$, כאשר המעברים בין הפונקציות הם ע"י גזירה או אינטגרציה.

קבלים Capacitors

הגדרה: קבל הינו רכיב בו המתח בין הדקיו קובע את המטען עליו: $q = q(v)$.

הסימון עבור קבל:

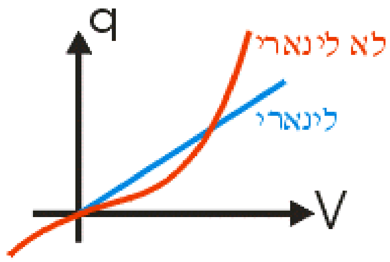


קבל יכול להיות בעל קיבול משתנה או קבוע בזמן.

$q(t)$ הוא המטען בזמן t על הלוח אליו מוביל

חץ הייחוס של הזרם $i(t)$. לכן ניתן לרשום:

$$i(t) = \frac{dq}{dt}$$



<u>קבל ליניארי:</u> קבל עבורו הפונקציה $q(v)$ היא ליניארית:

$q(t) = Cv(t)$ ולכן מתקיים עבורו:

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = C\frac{dv}{dt} = \frac{1}{s}\frac{dv}{dt}$$

כאשר: C קיבוליות, s - אלסטיות, ומתקיים: $s = \frac{1}{c}$, $C = \frac{dq}{dv}$.

עבור קבל ליניארי, הקשר החשוב ביותר שנשתמש בו במשך כל הקורס הוא:

$$\boxed{i(t) = C\frac{dv}{dt}}$$

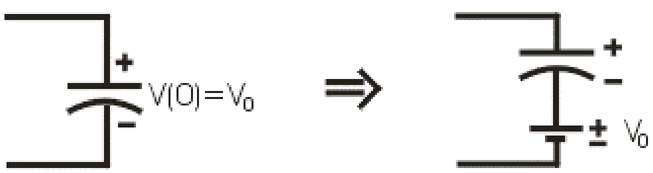
לכן צורת הגל של הזרם $i(t)$ נקבעת חד ערכית ע"י צורת הגל של המתח. כלומר אם נתון $v(t)$ ניתן לחשב את $i(t)$ באופן חד-ערכי.

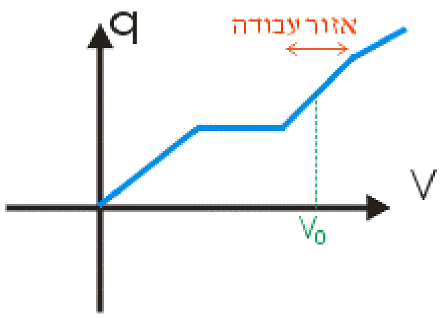
הקשר ההפוך:

$$v(t) = v(0) + \frac{1}{c}\int_0^t i(t')dt'$$

כאן הקשר הוא לא חד ערכי, יש לדעת את $i(t)$ וכן את $v(0)$ כדי לחשב את $v(t)$. מכאן נובע שלקבלים יש תכונת זיכרון.

ניתן לבטא את תנאי ההתחלה
בעזרת מקור מתח תוך הנחת
תנאי התחלה מאופסים על הקבל:





קבל לא ליניארי:

קבל עבור הפונקציה $q(v)$ היא לא לינארית. מקובל במקרה זה להגדיר נקודת עבודה: נקודה שסביבה הפונקציה היא ליניארית בקירוב (בדוגמא שלפנינו זו הנקודה V_0). נבחן שינויי מתח קטנים מאוד (V_1) באותו אזור, שנקרא אזור העבודה.

באזור זה מתקיים הקירוב הבא:

$$q(v)=q(v_0+v_1)\cong q(v_0)+\frac{dq}{dv}(v_0)\cdot v_1$$

קבוע   פיתוח טיילור   v1 קטן

$$i(t)=\frac{dq}{dt}=\frac{dq}{dv}(v_0)\cdot\frac{dv_1}{dt}=C(v_0)\frac{dv_1}{dt}$$

קבוע

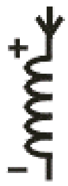
משרנים inductors

השטף המגנטי בתוך סליל (נמדד ביחידות ובר), נסמנו ϕ, נקבע חד ערכית ע"י הזרם:

$$\phi=\phi(i)=Li$$

כאשר: L השראות ביחידות $\frac{\text{ובר}}{\text{אמפר}}$.

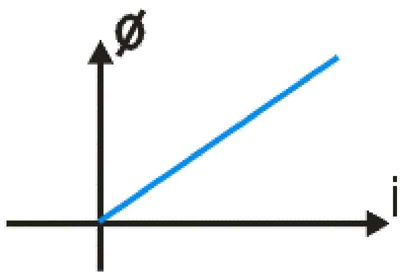
הסימון עבור סליל הוא:



לפי חוק פארדיי תמיד מתקיים: $V=\frac{d\phi}{dt}$.

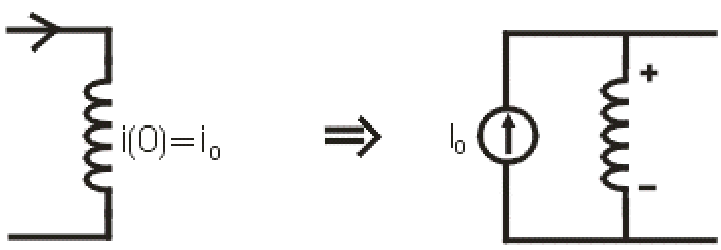
משרן ליניארי:

אם L קבוע אז לפי חוק פארדיי ניתן לרשום: $\boxed{V=L\frac{di}{dt}}$



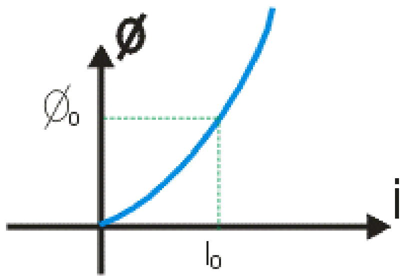
או בצורה אינטגרלית: $i=i(0)+\frac{1}{L}\int_0^t v(t')dt'$

כלומר צורת הגל של המתח היא פונקציה חד ערכית של הזרם אך לא להפך. לכן, בדומה לקבלים גם למשרנים יש זיכרון: לא מספיק לדעת את המתח, אלא חייבים לדעת גם את $i(0)$ בכדי לקבוע את הזרם בכל רגע.
ניתן לבטא את תנאי ההתחלה בעזרת מקור זרם תוך הנחת תנאי התחלה מאופסים על הסליל:



<u>משרן לא לינארי</u> :

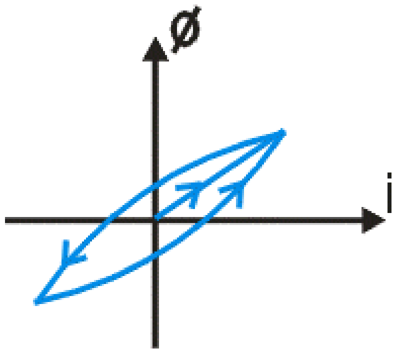
משרן עבורו הפונקציה $\phi(i)$ היא לא לינארית. גם כאן נגדיר נקודת עבודה (הנקודה I_0) ונבחן שינויי זרם קטנים מאוד באזור העבודה. באזור זה מתקיים הקירוב הבא :



$$\phi(i)=\phi(i_0+i_1)=\phi(i_0)+\frac{d\phi}{di}(i_0)i_1$$

$$v(t)=\frac{d\phi}{dt}=\frac{d\phi}{di}(i_0)\cdot\frac{di_1}{dt}=L(i_0)\cdot\frac{di_1}{dt}$$

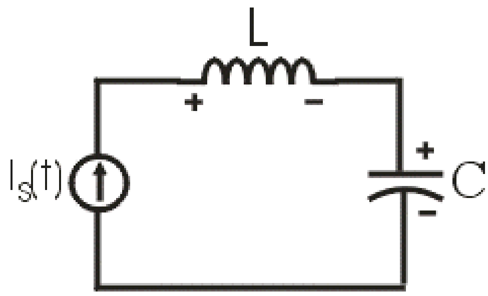
כאשר שלבי הפיתוח זהים למקרה של הקבל.



הערה : במשרנים רבים יש תופעה נוספת שנקראת היסטרזיס. השטף המגנטי לפעמים הוא לא חד ערכי עם שינויי הזרם, כפי שניתן לראות בציור שלפנינו.
למרות שתופעה זו היוותה אבן בסיס לזיכרונות מחשב מספר רב של שנים, אנו לא נדון בה בקורס שלנו.

<u>דוגמא</u> :

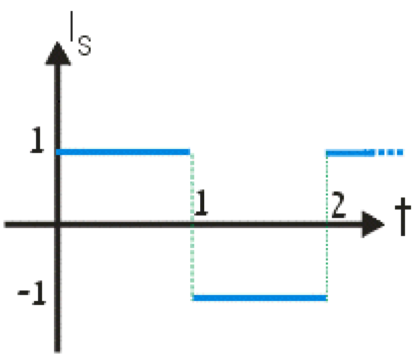
מצא את v_L (המתח על הסליל) ואת v_C (המתח על הקבל) כאשר ידוע כי ב- $t=0$ היה המתח על הקבל v_0.



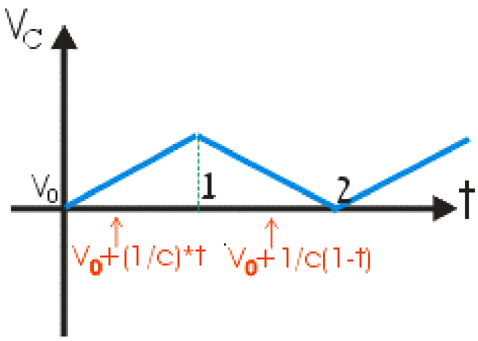
נזכר בקשרים הבאים :

$$v_L=L\frac{di_s(t)}{dt} \qquad v_C=v_0+\frac{1}{C}\int_0^t i_s(t)dt$$

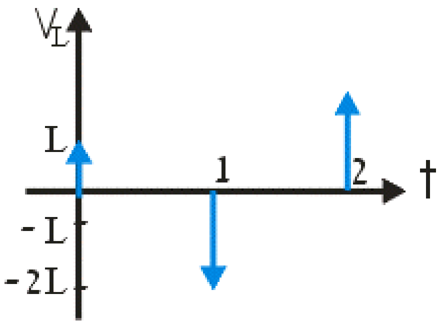
כמו כן נתון הזרם בכל רגע בגרף הבא :



פתרון:
נמצא את המתח על הקבל ע"י אינטגרציה:



נמצא את המתח על הסליל ע"י גזירה:



הערה: גובהה של פונקצית ה - δ בראשית הוא רק L כי אנו מניחים ת"ה אפס.

הספק ואנרגיה

עבור כל רכיב

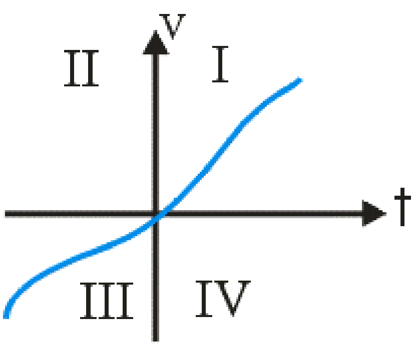
ההספק הרגעי המסופק לרכיב הוא: $P(t)=v(t)\cdot i(t)$.

האנרגיה הנצרכת ע"י הרכיב החל מזמן t_0 מוגדרת ע"י: $W=\int_{t_0}^{t}P(t')dt'=\int_{t_0}^{t}v(t')\cdot i(t')dt'$

עבור נגד:

אם האופיין נמצא ברביעים I ו- III הרי ש- $v\cdot i\geq 0$
ולכן לנגד מסופק הספק חיובי,

כלומר הנגד צורך אנרגיה ולכן ייקרא נגד פסיבי.
אחרת הנגד נקרא אקטיבי.



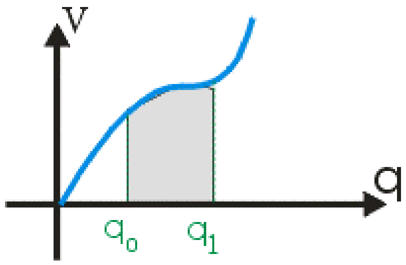
עבור נגד ליניארי: $P=v\cdot i=i^2\cdot R=\dfrac{v^2}{R}$

$$W=\int_{t_0}^{t}Ri^2dt=\int_{t_0}^{t}\frac{v^2}{R}dt$$

עבור קבל:

$$W=\int_{t_0}^{t} v(t')i(t')dt'=\int_{q_0}^{q} v(q')dq' \qquad i=\frac{dq}{dt}$$

$$t'\to q'$$
$$i(t')dt'=dq'$$



כלומר האנרגיה הנצרכת ע"י קבל היא השטח מתחת לאופיין שלו:

זכור: קבל אינו מבזבז אנרגיה אלא אוגר או פורק אותה:

נסמן q_0 - מטען התחלתי, q_1 - מטען סופי.

אם $q_f>q_i$ אזי התבצעה טעינה (אגירת אנרגיה).

אם $q_f<q_i$ אזי התבצעה פריקה (מסירת אנרגיה).

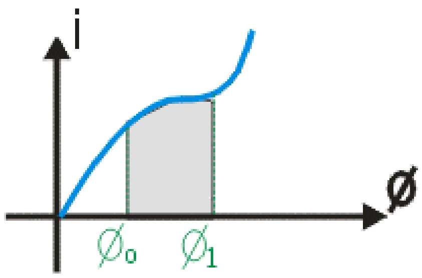
עבור קבל ליניארי: $V=\frac{1}{c}q$ (משום שהאינטגרל על הזרם תמיד נותן לנו את המטען), ולכן האנרגיה האצורה בקבל היא: $\varepsilon=\int_0^q v(q')dq'=\int_0^q\frac{1}{C}q'dq'=\frac{1}{2C}\cdot q^2=\frac{1}{2}\cdot CV^2$

זוהי האנרגיה הדרושה להביא את הקבל ממצב פרוק למצב טעינה נתון.

<u>עבור סליל:</u>

$$W=\int_{t_0}^{t} v(t')\cdot i(t')dt'=\int_{\phi_0}^{\phi} i(\phi')d\phi' \quad , \quad V=\frac{d\phi}{dt}$$

$$t'\to\phi'$$
$$v(t')\cdot dt'=d\phi'$$



ניתן לראות שהאנרגיה הנצרכת ע"י סליל היא השטח מתחת לאופיין שלו.

כמו בקבל גם הסליל אינו צורך אנרגיה.

נסמן ϕ_i - שטף התחלתי, ϕ_f - שטף סופי.

אם $\phi_f>\phi_i$ אזי נאגרה אנרגיה.

אם $\phi_i>\phi_f$ אזי סופקה אנרגיה.

עבור סליל ליניארי:

אם L קבוע בזמן אז: $d\phi=Ldi \quad\Rightarrow\quad i=\frac{\phi}{L}$

והאנרגיה בסליל היא:

$$\varepsilon=\int_0^\phi i(t')v(t')dt'=\int_0^\phi i(t')L\frac{di}{dt'}dt'=L\int_0^\phi i(t')di=L\int_0^\phi\frac{\phi'}{L}\frac{d\phi'}{L}=\frac{1}{L}\int_0^\phi\phi'd\phi'=\frac{1}{L}\frac{\phi^2}{2}=\frac{(Li)^2}{2L}=\frac{1}{2}Li^2$$

$i(t')$ $\quad$ di