תרגיל מס.2

עפיף חלומה 302323001

12 בנובמבר 2009

1 שאלה 1

1.1 א

1.1.1 ציור ראשון

$$2u(t) - 2r(t-1) + 2r(t-2) + u(t-3) - u(t-4) + \delta(t-4)$$

1.1.2 ציור שני

$$r(t+2) - r(t) - 3r(t-2) + 3r(t-3) + 2r(r-4) - 2r(t-4.5)$$

1.2 ב

2 שאלה 2

2.1 א

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\,\delta(t-\tau)\,d\tau &= \int_{\infty}^{-\infty} f(t-x)\,\delta(x)\,(-dx) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(t-x)\,\delta(x)\,dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)\,\delta(\tau)\,d\tau
\end{aligned}$$

2.2 ב

לפי הגדרה של $u(t)$ מתקיים כי עבור $a>0$ $u(at+b) = u\left(t+\frac{b}{a}\right)$ ועבור $a<0$ מתקיים $u\left(t+\frac{b}{a}\right) = 1-u(at+b)$ כמו כן $\delta(t) = \frac{\partial u(t)}{\partial t}$.

$$\delta\left(t+\frac{b}{a}\right) = \frac{\partial u\left(t+\frac{b}{a}\right)}{d\left(t+\frac{b}{a}\right)}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\partial u\left(t+\frac{b}{a}\right)}{\partial t} \\
&= \frac{\partial u\left(t+\frac{b}{a}\right)}{\partial\left(t+\frac{b}{a}\right)} \cdot \frac{d\left(t+\frac{b}{a}\right)}{\partial t} \\
&= \delta\left(t+\frac{b}{a}\right) \cdot 1
\end{aligned}$$

עבור $a > 0$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u\left(t+\frac{b}{a}\right)}{\partial t} &= \frac{\partial u\left(at+b\right)}{\partial t} \\
&= \frac{\partial u\left(at+b\right)}{\partial\left(at+b\right)} \cdot \frac{\partial\left(at+b\right)}{\partial t} \\
&= \delta\left(at+b\right) \cdot a \\
&= \delta\left(at+b\right) \cdot |a|
\end{aligned}$$

עבור $a > 0$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u\left(t+\frac{b}{a}\right)}{\partial t} &= \frac{\partial\left(1-u\left(at+b\right)\right)}{\partial t} \\
&= \frac{-\partial u\left(at+b\right)}{\partial\left(at+b\right)} \cdot \frac{\partial\left(at+b\right)}{\partial t} \\
&= -\delta\left(at+b\right) \cdot a \\
&= \delta\left(at+b\right) \cdot |a|
\end{aligned}$$

אזי

$$\delta\left(at+b\right) = \frac{1}{|a|}\delta\left(t+\frac{b}{a}\right)$$

2.3 ב

לפי ההגדרה של δ מתקיים $\int_{-\infty}^{\infty} \delta\left(t-t_0\right) f\left(t\right) dt$, נשתמש בהחלפת משתנים ונקבל:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \delta\left(at+b\right) f\left(t\right) dt &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta\left(\tau\right) f\left(\frac{\tau}{a}-\frac{b}{a}\right) \frac{d\tau}{|a|} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \delta\left(t\right) f\left(-\frac{b}{a}\right) \frac{d\tau}{|a|} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \delta\left(\tau+\frac{b}{a}\right) f\left(\tau\right) \frac{d\tau}{|a|}
\end{aligned}$$

2.4 ג

נוכיח באינדוקציה
עבור $n=1$:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\delta'(t)\,dt &= \underbrace{f(t)\,\delta(t)}_{0}|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(n)}(t)\,f'(t)\,dt \\ &= -(-1)^n + f^{(n+1)}(0) \\ &= (-1)^{n+1} f^{(n+1)}(0)\end{aligned}$$

3 שאלה 3

$$\begin{aligned}P &= \frac{V_{R_{10}}^2}{R} \\ V_{R_{10}} &= \sqrt{PR} \\ &= \sqrt{10\cdot 10} \\ &= 10V\end{aligned}$$

אזי

$$\begin{aligned}I_5 &= \frac{10}{5} = 2A \\ I_{10} &= \frac{10}{10}\end{aligned}$$

אזי יש סך הכל $3A$ במעגל. המתח על הנגד המשתנה מתקבל על ידי:

$$\begin{aligned}E &= V_{R_{10,5}} + V_R \\ V_R &= 70-10\end{aligned}$$

אזי לפי חוק אום

$$R = \frac{V_R}{I} = \frac{60}{3} = 20\Omega$$

4 שאלה 4

מכיוון שיודעים הזרם במעגל נחשב את ההספק דרך מחלק מתח:

$$\begin{aligned} P &= I_{10}^2 \cdot 10 \\ &= \left(3 \cdot \frac{5}{10+5}\right)^2 \cdot 10 = 10W \end{aligned}$$

5 שאלה 5

$$\begin{aligned} V_r &= IR = 12i(t) \\ V_L &= L\frac{\partial i}{\partial t} = 2\frac{\partial i}{\partial t} \\ V_c &= \frac{1}{C}\int i(t)\,dt = 20\int_0^t i(t')\,dt' \end{aligned}$$

5.1 א

$$\begin{aligned} i(t) &= 0.4\sin\left(2t - \frac{\pi}{r}\right)u(t) \\ V_R &= 4.8\sin\left(2t - \frac{\pi}{4}\right)u(t) \\ V_c &= 4\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(2t - \frac{\pi}{4}\right)\right]u(t) \\ V_L &= 0.8\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\delta(t) + 1.6\cos\left(2t - \frac{\pi}{4}\right)u(t) \end{aligned}$$

$$P = IV_R = 1.92\sin^2\left(2t - \frac{\pi}{4}\right)u(t)$$

$$\begin{aligned} P_L &= iV_L \\ &= 0.4\sin\left(2t - \frac{\pi}{4}\right)\left[-0.4\sqrt{2}\delta(t) + 1.6\cos\left(2t - \frac{\pi}{4}\right)u(t)\right] \end{aligned}$$

5.2 ב

$$\begin{aligned} i(t) &= e^{-\frac{4t}{4}}u(t) \\ V_R &= 12e^{-\frac{3t}{4}}u(t) \\ V_L &= \frac{3}{2}e^{-\frac{3t}{4}} + 2\delta(t) \\ V_c &= 20\int_0^t e^{-\frac{3t'}{4}}\,dt' \\ &= \frac{80}{3}\left(1 - e^{-\frac{3t}{4}}\right)u(t) \end{aligned}$$

5.3 ג