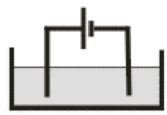
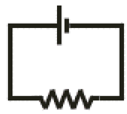
<u>פרק 1: מעגלים מקובצים וחוקי קירכהוף.</u>

קיימים שני סוגי מעגלים: מקובצים (lumped circuits) ומפולגים (distributed circuits).
אנו נעסוק רק במעגלים מקובצים כיוון שהם פשוטים יותר לניתוח ובעזרתם ניתן לחקור גם מעגלים מפולגים.

<u>אלמנט מקובץ:</u> אלמנט בעל גודל זניח, או ליתר דיוק גודל נקודתי. לדוגמא: נגדים, קבלים, סלילים, מקורות, שנאים.
לאלמנט מקובץ שתיים או יותר יציאות. עבור אלמנט עם שתי יציאות, הזרם הזורם באלמנט והמתח עליו הם חד משמעיים, כלומר חוקי קירכהוף (שנלמד בפירוט בהמשך הפרק) חלים עליהם.

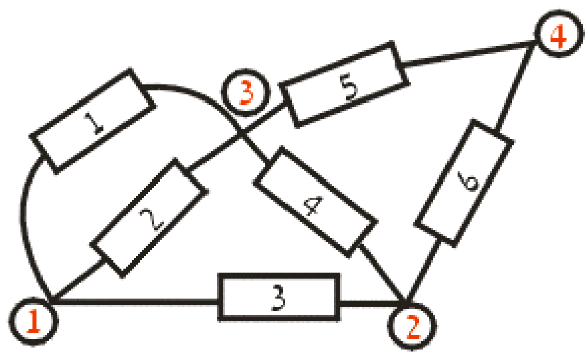
<u>אלמנט לא מקובץ:</u> כל אלמנט מעשי הוא אלמנט לא מקובץ, כיוון שיש לו גודל סופי. חוקי קירכהוף אינם חלים עליהם.
דוגמא:


יהפוך למודל המקובץ

הבא:

<u>מעגל מקובץ:</u> מעגל המורכב מרכיבים מקובצים.

<u>הגדרות:</u> יציאות האלמנט המקובץ נקראות ענפים (Branches), הצטלבויות הענפים נקראות צמתים (nodes).

בדוגמא שלהלן מתוארת שיטת הסימון.
הענפים מסומנים במספרים: 1,2,3,4
והצמתים במספרים עם עיגול.

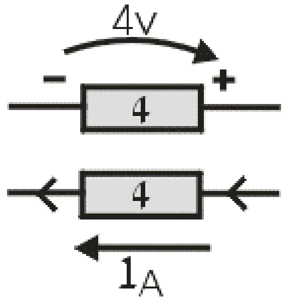


<u>אנליזה של מעגל:</u> דרך כל ענף עובר זרם ועל כל ענף יש מפל מתח. המידע על המעגל הוא מושלם אם ידועים כל הזרמים והמתחים על כל הענפים בכל רגע נתון.

<u>כיווני יחוס:</u> כדי לציין את הזרמים והמתחים דרושים כיווני יחוס. למשל: כשנמצא שהמתח על ענף 4 הוא 4 volt והזרם 1 Amper, יש לתת כיוון למתח ולזרם. זאת נעשה ע"י:

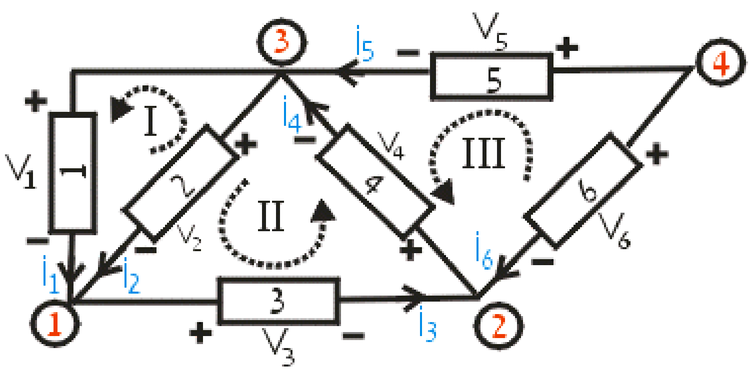
עבור מתח - קביעת סימנים + ו -

עבור זרם קביעת כיוון



למעשה ניתן לקבוע את כיווני הזרם והמתח באופן שרירותי, אבל מקובל לסמן שהזרם זורם מ: + ל: - באלמנט רגיל ולהפך באלמנט שהוא מקור.
במידה ופעלנו לפי ההסכמה הזאת נאמר שהמתח והזרם <u>מתואמים</u>.

כדי להמחיש זאת בואו נסמן את המעגל שבדוגמא:



<u>הספקים</u>: סיבה טובה לעבוד בתאום היא לטובת חישוב ההספק המסופק לענף/מהענף הנדון: כאשר המתח והזרם מתואמים, ההספק שווה בדיוק ל $V*I$.
סימן ההספק: עבור מקורות, הספק <u>המסופק</u> ע"י המקור הוא חיובי. עבור שאר האלמנטים, הספק <u>שנצרך</u> ע"י האלמנט הוא חיובי.
נאמר שרכיב <u>מספק</u> הספק אם כיוון הזרם והמתח עליו זהים, <u>וצורך</u> הספק אם כיוון הזרם דרכו מנוגד לכיוון המתח עליו.
לדוגמא: בנגד תמיד נקבל $V*I>0$ (הוא תמיד צורך הספק) ואילו במקור, קבל וסליל נקבל: $V*I>0$ או $V*I<0$ (הם יכולים גם לספק וגם לצרוך הספק).

כעת נראה מהם החוקים הבסיסיים המתקיימים במעגל מקובץ.

<u>חוק הזרמים של קירכהוף:</u> KCL   Kirchhof s Current Law

ידוע גם בשם חוק הצמתים.

עבור כל מעגל מקובץ, בכל צומת ובכל זמן הסכום האלגברי של כל זרמי הענפים היוצאים מהצומת - הוא אפס.

נחזור למעגל שבדוגמא לעיל:
ניתן לרשום את ארבעת המשוואות הבאות המתייחסות לכל אחד מהצמתים לפי מספרם:

$$\left.\begin{array}{ll} 1) & i_3 - i_1 - i_2 = 0 \\ 2) & i_4 - i_3 - i_6 = 0 \\ 3) & i_1 + i_2 - i_4 - i_5 = 0 \\ 4) & i_5 + i_6 = 0 \end{array}\right\} \text{בכל זמן } t$$

נשים לב כי משוואה אחת תלויה. במקרה זה:

$$-(1)-(3) \Rightarrow \quad i_4 - i_3 + i_5 = 0$$

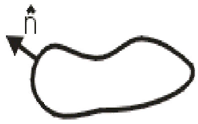
$$(2) \Rightarrow \quad i_4 - i_3 - i_6 = 0$$

$$-(1)-(3)-(2) \Rightarrow \quad i_5 + i_6 = 0 \Rightarrow (4)$$

ולכן משוואה (4) היא המשוואה התלויה.

הוכחת החוק נעשית תוך שימוש בחוק שמור המטען בנקודות הצומת: $\nabla J = -\dfrac{\partial \rho}{\partial t}$, כאשר J הוא שטף הזרם,

ρ הוא המטען וברור כי ρ הוא קבוע, כלומר $\dfrac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ בצמתים.



או בניסוח האינטגרלי: $\oiint \bar{J} \cdot dn = -\dfrac{d\rho}{dt}$ (נובע ממשוואות מקסוול).

חוק המתחים של קירכהוף: Kirchhof s Voltage Law KVL

ידוע גם בשם חוק העניבות.

<u>הגדרה</u>: **עניבה (חוג)** היא כל מסלול סגור במעגל (Loop).

עבור כל מעגל מקובץ, בכל עניבה ובכל זמן הסכום האלגברי של כל מתחי הענפים הוא אפס.

החוק נובע מחוק שימור האנרגיה משום שהשדה החשמלי בתוך המעגל הוא שדה <u>משמר</u>.
בדוגמא שלנו: ראשית נקבע את כיוון העניבות באופן שרירותי (ראה שרטוט המעגל). לאחר מכן רושמים משוואה עבור כל עניבה לפי מספרה:

1) $V_1 - V_2 = 0$

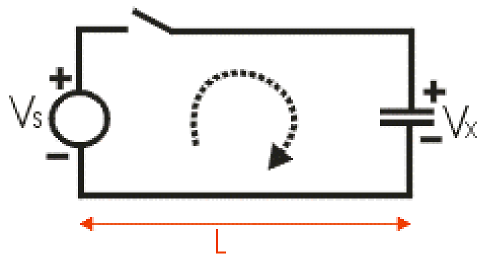
2) $V_2 + V_3 + V_4 = 0$

3) $V_5 - V_6 = 0$

ניתן כמובן לקבוע עניבות נוספות אך כל המשוואות הנוספות יהיו תלויות, כלומר ניתן לרשום רק 3 משוואות בלתי תלויות במקרה זה.

כמה נעלמים יש בבעיה זו? 6 זרמים ו- 6 מתחים. סה"כ 12 נעלמים.
כמה משוואות? מ- KCL קיבלנו 4 משוואות (אבל אחת מהן תלויה!)
מ- KVL קיבלנו עוד 3 משוואות ב"ת.
את שאר המשוואות נשיג מהמשוואות האופייניות המקשרות בין המתח לזרם בענף.

תנאי הכרחי לקיום החוקים:
ניקח את המעגל הפשוט הבא:



מיד בסגירת המתג, הקבל עדיין לא מרגיש את המתח ולכן חוק המתחים <u>אינו</u> מתקיים. ננסח זאת מספרית: לפי חוק המתחים:

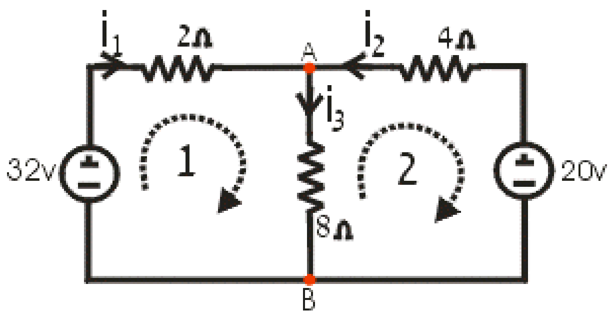
$$V_x - V_s = 0 \quad \Rightarrow \quad V_x = V_s$$

אבל זה לא נכון בזמן $t = 0+$.

עבור $t \ll \dfrac{L}{c}$ כאשר c = מהירות האור, כמובן שאין בעיה (הרי מהירות התפשטות המתח ודאי קטנה/שווה למהירות האור) וחוק המתחים מתקיים. נסמן זמן זה ב: t=T.

אם ניקח L=3m $\quad T \gg \dfrac{L}{c} = \dfrac{3}{3 \cdot 10^8} = 10^{-8}_{\text{sec}}$ $\Leftarrow$, כלומר מעל 10 nsec ניתן להניח כי מתקיימים חוקי קירכהוף.
נציין שבמתקן אלקטרוני העובד בתדר של 250MHz, זמני המיתוג הינם 4 nsec.

<u>דוגמא לסיכום חוקי קירכהוף</u>:



נתבונן במעגל הבא:

נרצה למצוא את כל הזרמים במעגל.

פתרון:

KCL

$$\Sigma i_a = 0 \quad \Rightarrow \quad i_1 + i_2 - i_3 = 0$$

$$\Sigma i_b = 0 \quad \Rightarrow \quad -i_1 - i_2 + i_3 = 0$$

KVL

(1) $$-32 + 2i_1 + 8i_3 = 0$$

(2) $$-4i_2 - 8i_3 + 20 = 0$$

(1) + (2) $$-12 + 2i_1 - 4i_2 = 0$$

((1)+(2))*2 = (3) $$-24 + 4i_1 - 8i_2 = 0$$

נציב: $i_3 = i_1 + i_2$ במשוואה (1) ונקבל:

(4) $$-32 + 10i_1 + 8i_2 = 0$$

נחבר את (3) + (4) ונקבל:

$$-56 + 14i_1 = 0$$

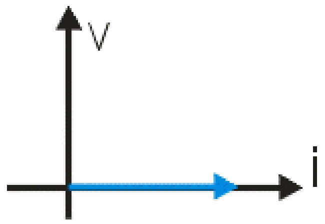
$$\Rightarrow \boxed{i_1 = 4_A \qquad i_2 = -1_A \qquad i_3 = 3_A}$$

פרק 2: רכיבי המעגל

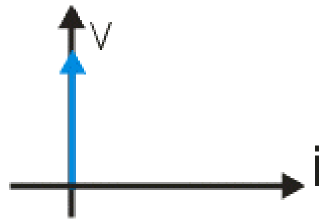
נגדים Resistors

נגד הנו אלמנט המקיים קשר מהצורה $V=V(i)$.
הקשר הרגעי של המתח והזרם קובעים את המתח בכל רגע ורגע. קשר זה נקרא האופיין של הנגד.
שני אופיינים נפוצים הם הבאים:

מעגל מקוצר:
אין עליו מתח וכל הזרם
עובר דרכו.

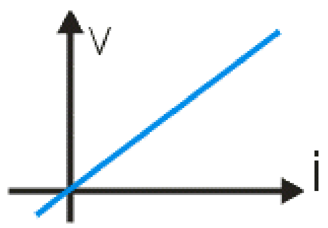


מעגל מנותק:
כל המתח נופל עליו
ולא עובר דרכו זרם.



<u>נגד ליניארי</u>: זהו נגד שעבורו הפונקציה $V(i)$ ליניארית ובלתי משתנה בזמן.
במקרה זה הקשר נקרא **חוק אוהם** (Ohm Law):

$$\boxed{V(t)=R\cdot i(t)}$$



או באופן שקול: $i(t)=GV(t)$
כאשר: R - התנגדות, G - מוליכות, ומתקיים:

$$G=\frac{1}{R}$$

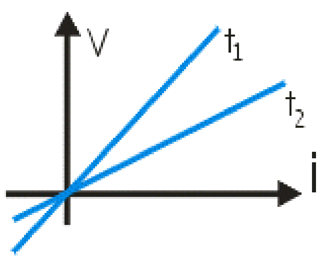
הסימון לנגד ליניארי:

ביחידות MKS, התנגדות נמדדת באוהם ומסומנת ב - Ω .

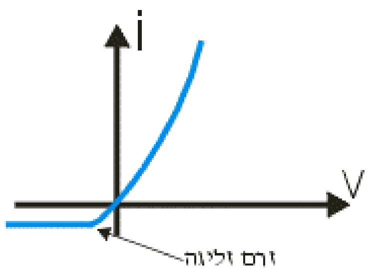
ניתן לדבר גם על נגד ליניארי שהתנגדותו תלויה בזמן:

$$V(t)=R(t)\cdot i(t)$$

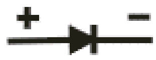
והאופיין שלו יהיה שונה בזמנים שונים:



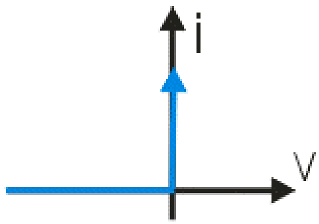
<u>נגד לא ליניארי</u>:
נגד שבו הפונקציה $V(i)$ אינה ליניארית.
לדוגמה: דיודה - $i=i(v)$. האופיין שלה הוא הבא:



סימון:



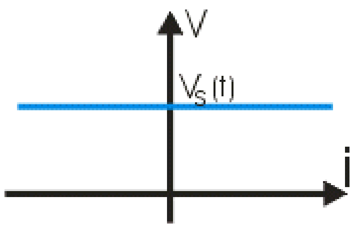
בדיודה אידיאלית:
אין זרם כל עוד המתח עליה
שלילי, וכאשר המתח עליה חיובי
היא מתנהגת כמעגל מקוצר.



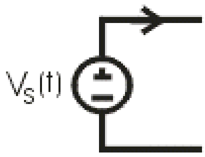
מקורות בלתי תלויים

<u>מקור מתח אידיאלי</u> הינו התקן שהמתח בין הדקיו $V_s(t)$ אינו תלוי בזרם הזורם דרכו. עבור $V_s(t)=V_s$ המקור מכונה מקור מתח קבוע.

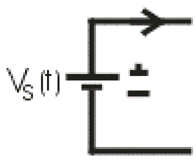
האופיין של מקור מתח כזה הוא:



סימונו של מקור המתח האידיאלי הוא:



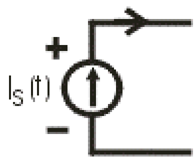
או



כפי שהוזכר קודם, מוסכם לסמן במקורות את הזרם מ: - ל: +
כך שהמכפלה $V \cdot I$ תתן את ההספק המסופק ע"י המקור.

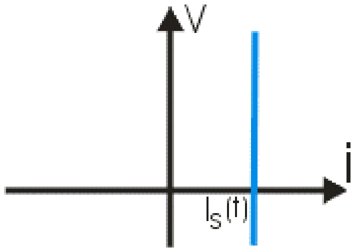
<u>מקור זרם אידיאלי</u> הינו התקן שהזרם הזורם דרכו $I_s(t)$ אינו תלוי במתח עליו.

סימונו:



עבור $I_s(t)=I_s$ המקור מכונה מקור זרם קבוע.

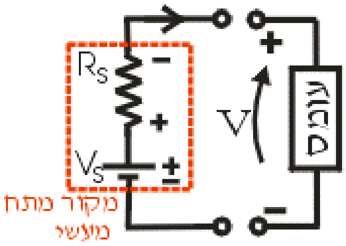
האופיין של מקור זרם כזה הוא:



<u>מקורות מעשיים</u>

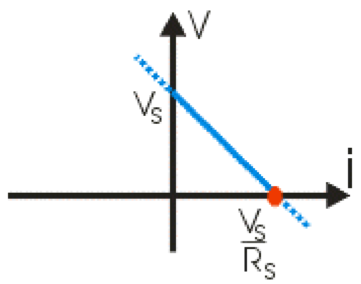
רוב המקורות המעשיים אינם אידיאליים. למזלנו, ניתן למדל את רוב המקורות ע״י מקור אידיאלי ועוד התנגדות פנימית שנסמנה R_s .

עבור מקור מתח מעשי:



נרשום KVL:

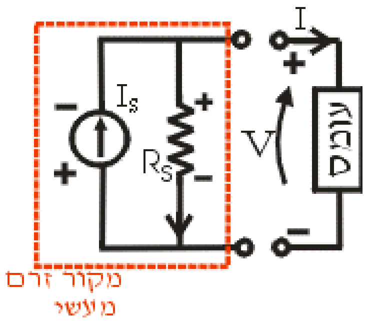
$$V + iR_s - V_s = 0$$
$$\Downarrow$$
$$(1) \quad V = V_s - iR_s$$



מהגרף האחרון ניתן לראות, כי כאשר המתח V או הזרם I הם שליליים (ראה אזור המקווקו בגרף), העומס הוא עומס אקטיבי והוא מספק הספק במעגל.

עבור מקור זרם מעשי:

נרשום KCL:



$$i = I_s - \frac{V}{R_s}$$
$$\Downarrow$$
$$iR_s = I_s R_s - V$$
$$\Downarrow$$
$$V = I_s R_s - iR_s$$

(2)

אנו רואים שמשוואות (1) ו- (2) הן זהות כאשר $V_s = I_s R_s$. לכן אנו מסיקים ששני המעגלים הם <u>אקוויוולנטים</u>.

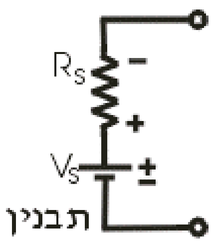
כלומר אם נתון מקור מתח מעשי V_s עם נגד R_s בטור, ניתן לתרגמו למקור זרם $I_s = \frac{V_s}{R_s}$ עם נגד R_s במקביל ולהפך.

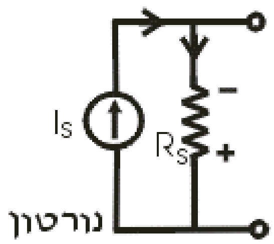
להצגה עם מקור המתח קוראים הצגת (אקוויוולנט) תבנין (Thevenin).

להצגה עם מקור הזרם קוראים הצגת (אקוויוולנט) נורטון (Norton).

בפרק 3 נדון בהרחבה בהצגות אילו ושימושן.

נסכם: מקור מעשי יכול להירשם בשתי צורות אקוויוולנטיות (בחירת צורת ההצגה תעשה לפי נוחות המשתמש):



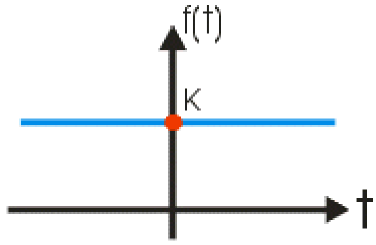


$$I_s = \frac{V_s}{R_s}$$

<u>נציין מספר צורות גל נפוצות</u>:

1. פונקציה קבועה   Constant

עבור כל t : f(t)=k



2. פונקציה סינוסואידלית

$f(t) = A\cos(wt + \varphi)$

סימונים:

A   אמפליטודה, משרעת.

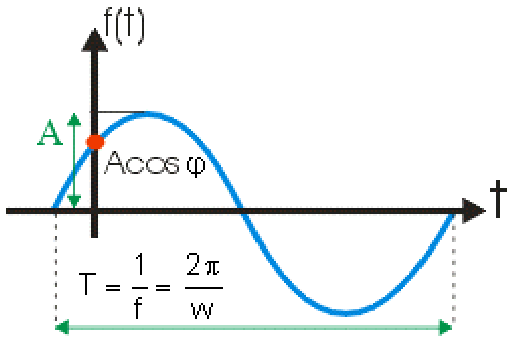
w   תדירות זוויתית $\left(\frac{\text{רדיאן}}{\text{שניה}}\right)$

f   תדירות (Hz).

מתקיים: $w = 2\pi f$.

φ - פזה (נהוג להגביל: $-\pi < \varphi \le \pi$)

$T = \frac{1}{f}$ - זמן מחזור.



את שלושת הגדלים A, w, φ מוצאים מתוך הציור (ראה סימונים על הגרף).

<u>הערה</u>: ל- φ יש שני פתרונות הנבדלים בסימנם. איך נקבע את הסימן של φ ?

לפי סימן הנגזרת הראשונה, משום ש: $\frac{df(t)}{dt}\Big|(t=0) = -A\sin\varphi$.

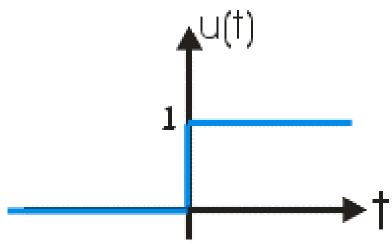
לכן:

אם f עולה אז $f' > 0$ ולכן $\sin\varphi < 0$ $\Leftarrow$ $\varphi < 0$, כלומר בתחום $(-\pi,0)$.

אם f יורדת אז $f' < 0$ ולכן $\sin\varphi > 0$ $\Leftarrow$ $\varphi > 0$, כלומר בתחום $(0,\pi)$.

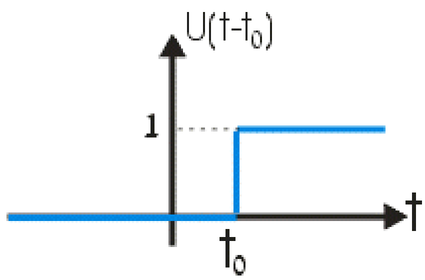
3. פונקציית מדרגה (step)

$$f(t) = u(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ \text{אי רציפות} & t=0 \\ 1 & t>0 \end{cases}$$

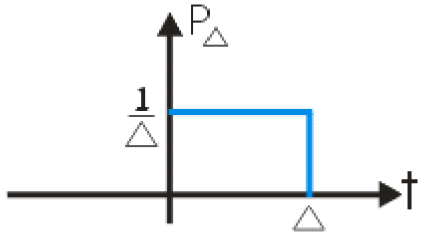


עבור t=0 נהוג לקבוע ערך 0, 0.5 או 1.

פונקצית מדרגה עם השהייה של t_0 , $u(t-t_0)$, נראית כך:



4. פונקצית הפולס (Pulse)



$$f(t)=P_\Delta(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ \frac{1}{\Delta} & 0<t<\Delta\\ 0 & t>\Delta\end{cases}$$

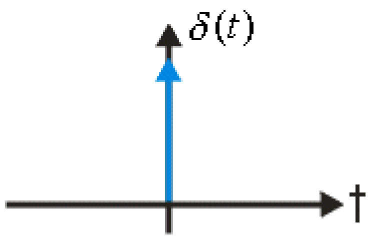
הקשר בין פולס לפונקצית מדרגה:

$$P_\Delta(t)=\frac{u(t)-u(t-\Delta)}{\Delta}$$

5. פונקצית ההלם (δ function, impulse, the Dirac delta)

למעשה זו אינה פונקציה, אלא גבול שאליו שואפת משפחה של פונקציות.

ההגדרה:



$$\mathrm{f(t)}=\delta(t)=\begin{cases}\infty & t=0\\ 0 & t\neq 0\end{cases}$$

כאשר עבור כל a>0 : $\int_{-a}^{a}\delta(t)dt=1$

דוגמא כיצד לקבל $\delta(t)$: $\delta(t)=\lim_{\Delta\to 0}P_\Delta(t+\Delta/2)$

משום שלפי הגדרת $P_\Delta(t)$ מתקיים עבור כל $\Delta>0$: $\int_{-\Delta/2}^{\Delta/2}P_\Delta(t+\Delta/2)dt=1$

נציין מספר תכונות מעניינות של פונקצית ההלם:

1) הקשר בין הלם לפונקצית מדרגה: $u(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(t')dt'$ ולכן $\frac{du(t)}{dt}=\delta(t)$.

2) תכונת הדגימה: עבור כל a>0 מתקיים השוויון: $\int_{-a}^{a}f(t)\delta(t)dt=f(0)$

הוכחה: $\int_{-a}^{a}f(t)\delta(t)dt=\lim_{\Delta\to 0}\int_{-a}^{a}f(t)p_\Delta(t+\Delta/2)dt=\lim_{\Delta\to 0}\int_{-\Delta/2}^{\Delta/2}f(t)\cdot\frac{1}{\Delta}dt=f(0)\cdot\frac{\Delta}{\Delta}=f(0)$

3) ניתן להגדיר פונקצית הלם מוזזת $\delta(t-t_0)$ לפי:

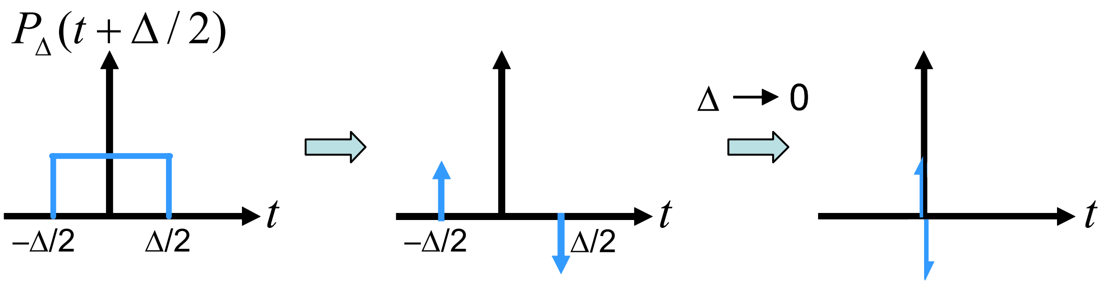
$$\begin{cases}\infty & t=t_0\\ 0 & t\neq t_0\end{cases}$$

וכן: $\int_{t_0-a}^{t_0+a}\delta(t-t_0)dt=1$

4) ניתן לדגום פונקציה בכל זמן ע"י: $\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\delta(t-t_0)dt=f(t_0)$ (בהמשך לתכונת הדגימה).

6. פונקצית הדובלט (Doublet)

זוהי הנגזרת של פונקצית ההלם:
$$\delta(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta'(t')dt' \quad , \quad \delta'(t)=\frac{d\delta(t)}{dt}$$

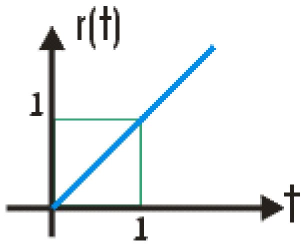


שימוש לדובלט יהיה עבור דגימת הנגזרת:
$$\int_{-a}^{a}\delta'(t)f(t)dt=f(t)\delta(t)\Big|_{-a}^{a}-\int_{-a}^{a}f'(t)\delta(t)dt=f(a)\underbrace{\delta(a)}_{0}-f(-a)\underbrace{\delta(-a)}_{0}-f'(0)=-f'(0)$$

בשוויון הראשון השתמשנו באינטגרציה בחלקים: $\int_{a_1}^{a_2}uv'=uv\Big|_{a_1}^{a_2}-\int_{a_1}^{a_2}vu'$ כאשר הצבנו:
$u=f(t),v=\delta(t)$. בשוויון השני השתמשנו בתכונת הדגימה.

ניתן להכליל ולהוכיח:
$$\int_{-a}^{a}\delta^{(n)}(t)f(t)dt=(-1)^n f^{(n)}(0)$$

7. פונקצית הרמפה (ramp)



$$f(t)=r(t)=tu(t)=\int_{-\infty}^{t}u(t')dt'$$

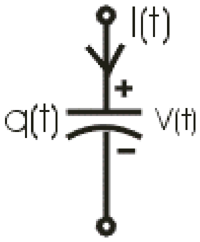
וכן: $u(t)=\frac{dr(t)}{dt}$.

מתוך הפונקציות שלעיל והקשרים ביניהם, מקבלים את הסדרה הבאה: $\delta'(t)\leftrightarrow\delta(t)\leftrightarrow u(t)\leftrightarrow r(t)$, כאשר המעברים בין הפונקציות הם ע״י גזירה או אינטגרציה.

קבלים Capacitors

הגדרה: קבל הינו רכיב בו המתח בין הדקיו קובע את המטען עליו: $q = q(v)$.

הסימון עבור קבל:

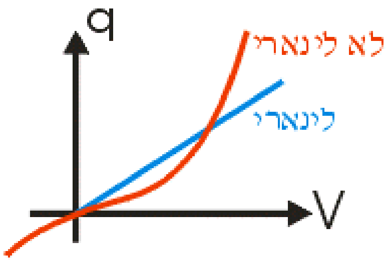


קבל יכול להיות בעל קיבול משתנה או קבוע בזמן.

$q(t)$ הוא המטען בזמן t על הלוח אליו מוביל

חץ הייחוס של הזרם $i(t)$. לכן ניתן לרשום:

$$i(t) = \frac{dq}{dt}$$



<u>קבל ליניארי:</u> קבל עבורו הפונקציה $q(v)$ היא ליניארית:

$q(t) = Cv(t)$ ולכן מתקיים עבורו:

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = C\frac{dv}{dt} = \frac{1}{s}\frac{dv}{dt}$$

כאשר: C קיבוליות, s - אלסטיות, ומתקיים: $s = \frac{1}{c}$, $C = \frac{dq}{dv}$.

עבור קבל ליניארי, הקשר החשוב ביותר שנשתמש בו במשך כל הקורס הוא:

$$\boxed{i(t) = C\frac{dv}{dt}}$$

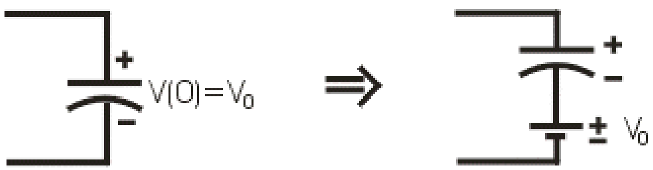
לכן צורת הגל של הזרם $i(t)$ נקבעת חד ערכית ע״י צורת הגל של המתח. כלומר אם נתון $v(t)$ ניתן לחשב את $i(t)$ באופן חד-ערכי.

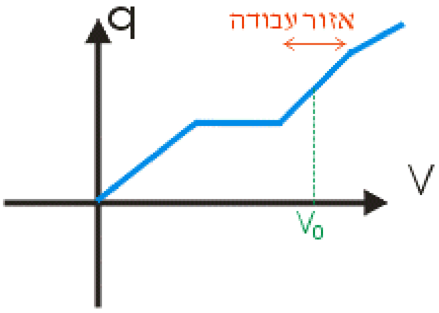
הקשר ההפוך:

$$v(t) = v(0) + \frac{1}{c}\int_0^t i(t')dt'$$

כאן הקשר הוא לא חד ערכי, יש לדעת את $i(t)$ וכן את $v(0)$ כדי לחשב את $v(t)$. מכאן נובע שלקבלים יש תכונת זיכרון.

ניתן לבטא את תנאי ההתחלה
בעזרת מקור מתח תוך הנחת
תנאי התחלה מאופסים על הקבל:





<u>קבל לא ליניארי:</u>

קבל עבורו הפונקציה $q(v)$ היא לא לינארית. מקובל במקרה זה להגדיר נקודת עבודה: נקודה שסביבה הפונקציה היא ליניארית בקירוב (בדוגמא שלפנינו זו הנקודה V_0). נבחן שינויי מתח קטנים מאוד (V_1) באותו אזור, שנקרא אזור העבודה.

באזור זה מתקיים הקירוב הבא:

$$q(v)=q(v_0+v_1)\cong q(v_0)+\frac{dq}{dv}(v_0)\cdot v_1$$

קטן v1   פיתוח טיילור   קבוע

$$i(t)=\frac{dq}{dt}=\frac{dq}{dv}(v_0)\cdot\frac{dv_1}{dt}=C(v_0)\frac{dv_1}{dt}$$

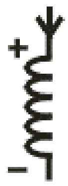
קבוע

<u>משרנים inductors</u>

השטף המגנטי בתוך סליל (נמדד ביחידות ובר), נסמנו ϕ, נקבע חד ערכית ע"י הזרם:

$$\phi=\phi(i)=Li$$

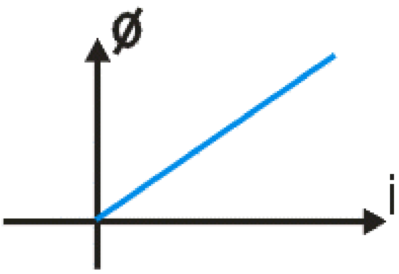
כאשר: L השראות ביחידות $\frac{\text{ובר}}{\text{אמפר}}$.



הסימון עבור סליל הוא:

לפי חוק פאראדיי תמיד מתקיים: $V=\frac{d\phi}{dt}$.

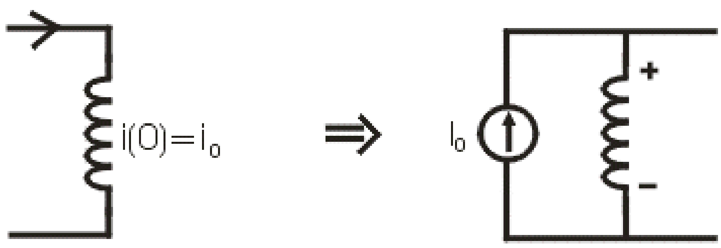
<u>משרן ליניארי:</u>



אם L קבוע אז לפי חוק פאראדיי ניתן לרשום: $\boxed{V=L\frac{di}{dt}}$

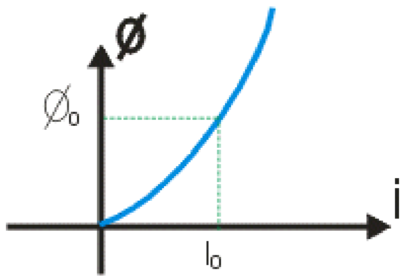
או בצורה אינטגרלית: $i=i(0)+\frac{1}{L}\int_0^t v(t')dt'$

כלומר צורת הגל של המתח היא פונקציה חד ערכית של הזרם אך לא להפך. לכן, בדומה לקבלים גם למשרנים יש זיכרון: לא מספיק לדעת את המתח, אלא חייבים לדעת גם את $i(0)$ בכדי לקבוע את הזרם בכל רגע.
ניתן לבטא את תנאי ההתחלה בעזרת מקור זרם תוך הנחת תנאי התחלה מאופסים על הסליל:



<u>משרן לא לינארי</u> :

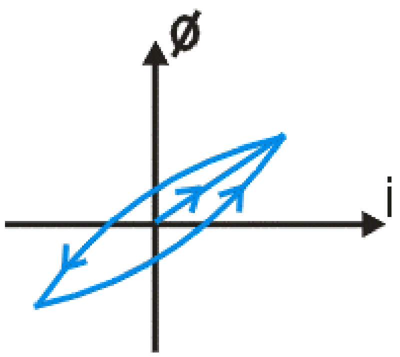
משרן עבורו הפונקציה $\phi(i)$ היא לא לינארית. גם כאן נגדיר נקודת עבודה (הנקודה I_0) ונבחן שינויי זרם קטנים מאוד באזור העבודה. באזור זה מתקיים הקירוב הבא :



$$\phi(i)=\phi(i_0+i_1)=\phi(i_0)+\frac{d\phi}{di}(i_0)i_1$$

$$v(t)=\frac{d\phi}{dt}=\frac{d\phi}{di}(i_0)\cdot\frac{di_1}{dt}=L(i_0)\cdot\frac{di_1}{dt}$$

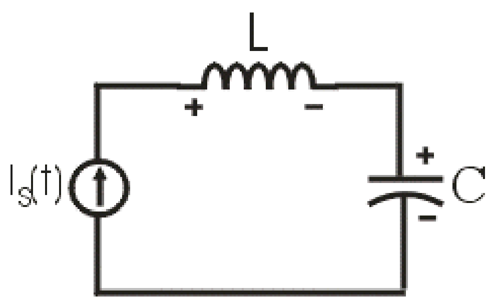
כאשר שלבי הפיתוח זהים למקרה של הקבל.



הערה : במשרנים רבים יש תופעה נוספת שנקראת היסטרזיס.
השטף המגנטי לפעמים הוא לא חד ערכי עם שינויי הזרם, כפי שניתן לראות בציור שלפנינו.
למרות שתופעה זו היוותה אבן בסיס לזיכרונות מחשב מספר רב של שנים, אנו לא נדון בה בקורס שלנו.

<u>דוגמא</u> :

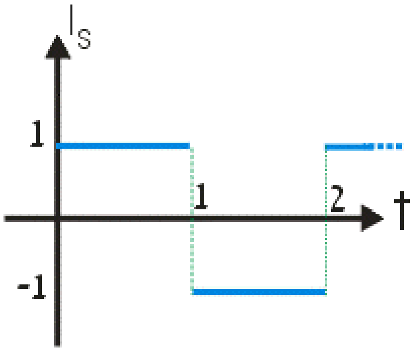
מצא את v_L (המתח על הסליל) ואת v_C (המתח על הקבל) כאשר ידוע כי ב- t=0 היה המתח על הקבל v_0.



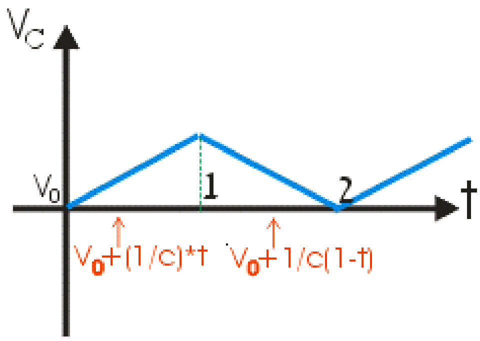
נזכר בקשרים הבאים :

$$v_L=L\frac{di_s(t)}{dt} \qquad v_C=v_0+\frac{1}{C}\int_0^t i_s(t)dt$$

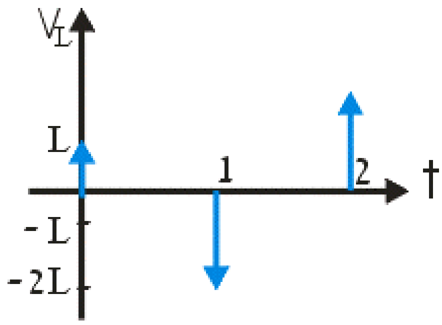
כמו כן נתון הזרם בכל רגע בגרף הבא :



פתרון:
נמצא את המתח על הקבל ע"י אינטגרציה:



נמצא את המתח על הסליל ע"י גזירה:



הערה: גובהה של פונקצית ה - δ בראשית הוא רק L כי אנו מניחים ת"ה אפס.

הספק ואנרגיה

עבור כל רכיב

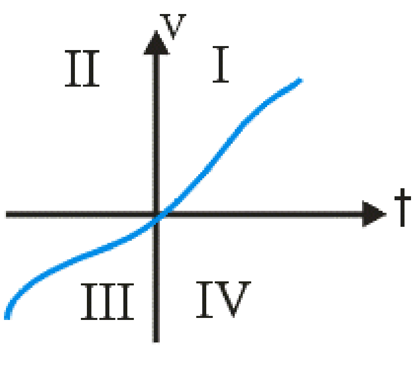
ההספק הרגעי המסופק לרכיב הוא: $P(t) = v(t) \cdot i(t)$.

האנרגיה הנצרכת ע"י הרכיב החל מזמן t_0 מוגדרת ע"י: $W = \int_{t_0}^{t} P(t')dt' = \int_{t_0}^{t} v(t') \cdot i(t')dt'$

עבור נגד:

אם האופיין נמצא ברביעים I ו- III הרי ש- $v \cdot i \geq 0$
ולכן לנגד מסופק הספק חיובי,

כלומר הנגד צורך אנרגיה ולכן ייקרא נגד פסיבי.
אחרת הנגד נקרא אקטיבי.



עבור נגד ליניארי: $P = v \cdot i = i^2 \cdot R = \frac{v^2}{R}$

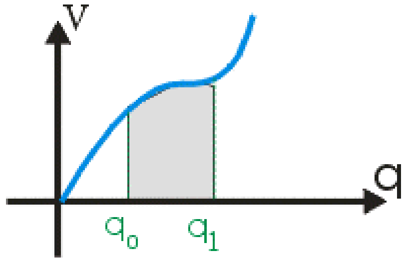
$$W = \int_{t_0}^{t} Ri^2 dt = \int_{t_0}^{t} \frac{v^2}{R} dt$$

עבור קבל:

$$i=\frac{dq}{dt} \qquad\qquad W=\int_{t_0}^{t} v(t')i(t')dt'=\int_{q_0}^{q} v(q')dq'$$

$$t'\rightarrow q'$$
$$i(t')dt'=dq'$$

כלומר האנרגיה הנצרכת ע״י קבל היא השטח מתחת לאופיין שלו:



זכור: קבל אינו מבזבז אנרגיה אלא אוגר או פורק אותה:

נסמן q_0 - מטען התחלתי, q_1 - מטען סופי.

אם $q_f > q_i$ אזי התבצעה טעינה (אגירת אנרגיה).

אם $q_f < q_i$ אזי התבצעה פריקה (מסירת אנרגיה).

עבור קבל לינארי: $V=\frac{1}{C}q$ (משום שהאינטגרל על הזרם תמיד נותן לנו את המטען), ולכן האנרגיה האצורה בקבל היא: $\varepsilon=\int_0^q v(q')dq'=\int_0^q\frac{1}{C}q'dq'=\frac{1}{2C}\cdot q^2=\frac{1}{2}\cdot CV^2$

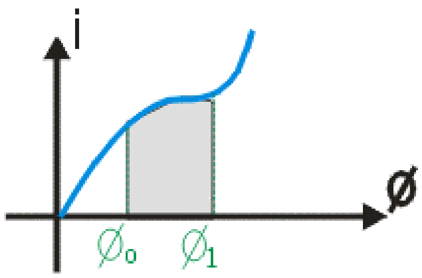
זוהי האנרגיה הדרושה להביא את הקבל ממצב פרוק למצב טעינה נתון.

<u>עבור סליל:</u>

$$V=\frac{d\phi}{dt}\ , \qquad W=\int_{t_0}^{t} v(t')\cdot i(t')dt'=\int_{\phi_0}^{\phi} i(\phi')d\phi'$$

$$t'\rightarrow\phi'$$
$$v(t')\cdot dt'=d\phi'$$

ניתן לראות שהאנרגיה הנצרכת ע״י סליל היא השטח מתחת לאופיין שלו.



כמו בקבל גם הסליל אינו צורך אנרגיה.

נסמן ϕ_i - שטף התחלתי, ϕ_f - שטף סופי.

אם $\phi_f > \phi_i$ אזי נאגרה אנרגיה.

אם $\phi_i > \phi_f$ אזי סופקה אנרגיה.

עבור סליל לינארי:

אם L קבוע בזמן אז: $d\phi = Ldi \qquad \Rightarrow \qquad i=\frac{\phi}{L}$

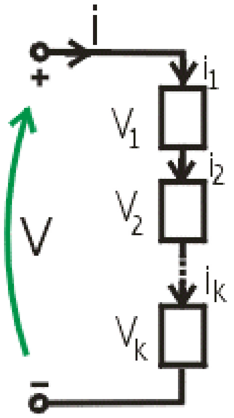
והאנרגיה בסליל היא:

$$\varepsilon=\int_0^{\phi} i(t')v(t')dt'=\int_0^{\phi} i(t')L\frac{di}{dt'}dt'=L\int_0^{\phi} i(t')di=L\int_0^{\phi}\frac{\phi'}{L}\frac{d\phi'}{L}=\frac{1}{L}\int_0^{\phi}\phi'd\phi'=\frac{1}{L}\frac{\phi^2}{2}=\frac{(Li)^2}{2L}=\frac{1}{2}Li^2$$

$i(t')$ $\qquad$ di

פרק 3: מעגלים פשוטים   חיבורים מקביליים וטוריים

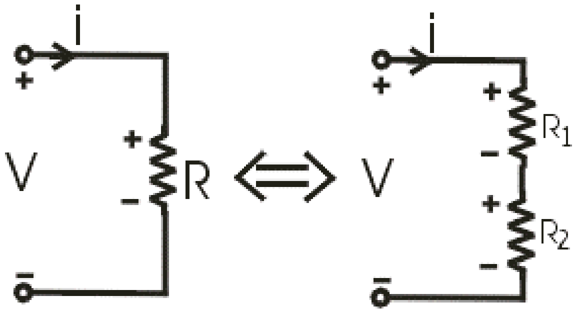
חיבורים טוריים



באופן כללי:

$$i = i_1 = i_2 = ... = i_k$$
$$v = v_1 + v_2 + ... + v_k$$

נגדים:



$$(*) \begin{cases} i = i_1 = i_2 \\ v - v_1 - v_2 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad v = v_1 + v_2$$

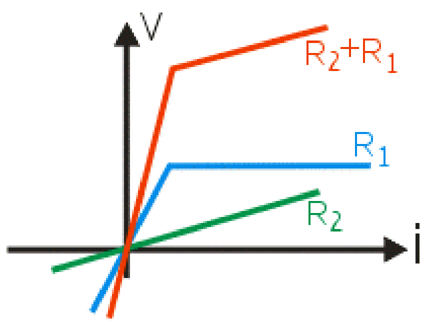
עבור נגדים ליניאריים:
נרצה להחליף את שני הנגדים המחוברים בטור לנגד אחד שקול.
על הנגד השקול ייפול מתח V ויזרום זרם I, לכן:

$$R = \frac{V}{i} = \frac{V_1 + V_2}{i} = \frac{V_1}{i} + \frac{V_2}{i} = \frac{V_1}{i_1} + \frac{V_2}{i_2} = R_1 + R_2 \quad \rightarrow \text{הנגד האקוויוולנטי}$$

הראינו, אם כן, ש: $R = R_1 + R_2$. ניתן להכליל גם ליותר מ- 2 נגדים: $R = R_1 + R_2 + ...$ וכן למקרה התלוי בזמן
$R(t) = R_1(t) + R_2(t) + ...$
נסכם ונאמר שבאופן כללי ההתנגדות השקולה לחיבור טורי של נגדים היא סכום ההתנגדויות:

$$\boxed{R = \sum_k R_k}$$

אם הנגדים אינם ליניאריים ויש להם אופיין $v(i)$, איך נחשב התנגדות שקולה?
נניח שנתונים שני אופייניים $v_1(i_1)$ ו- $v_2(i_2)$. המשוואות המסומנות ב- * עדיין מתקיימות ולכן ניתן לחבר את האופייניים:



באופן אנליטי: אם $v_1 = f_1(i_1)$, $v_2 = f_2(i_2)$

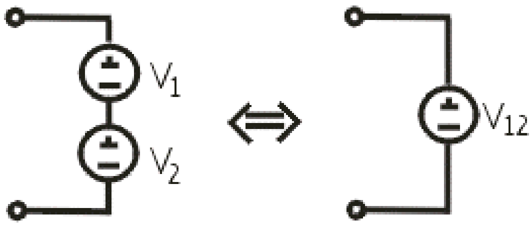
אזי: $v_{1+2} = f_1(i) + f_2(i)$

<u>מקורות מתח</u>:

מתקיימת השקילות: $v_{12}=v_1+v_2$

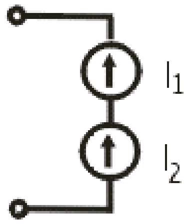
וניתן להכליל: $\boxed{V=\sum_n V_n}$

עבור חיבור מספר כלשהו של מקורות מתח בטור.

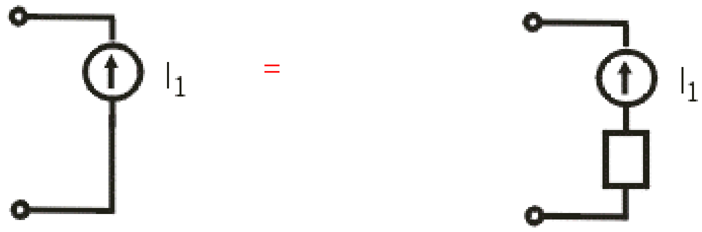


<u>מקורות זרם</u>:
עבור מקורות זרם בטור:

מבחינה פיזיקלית, מצב זה יתכן רק אם $i_1=i_2$.
כלומר, באופן כללי לא מחברים מקורות זרם בטור.

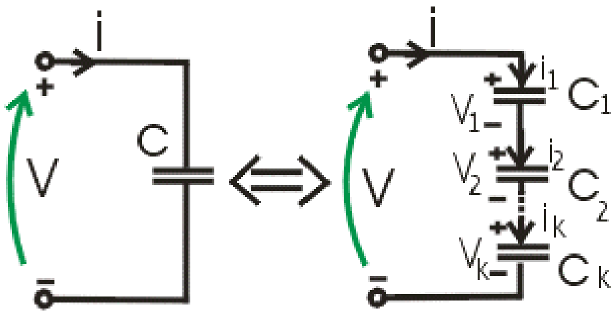


מקור זרם המחובר בטור לאלמנט אחר שקול למקור זרם בלבד:



<u>קבלים</u>:

$$\begin{cases} v=v_1+v_2 \\ i=i_1=i_2 \end{cases}$$



ידוע כי על הקבל ה-k-י:
$$v_k(t)=v_k(0)+\frac{1}{C_k}\int_0^t i_k(t')dt'$$

ולכן
$$v(t)=\sum_k v_k=\sum_k v_k(0)+\sum_k\frac{1}{C_k}\int_0^t i_k(t')dt'=v(0)+\left(\sum_k\frac{1}{Ck}\right)\cdot\int_0^t i_k(t')dt'$$

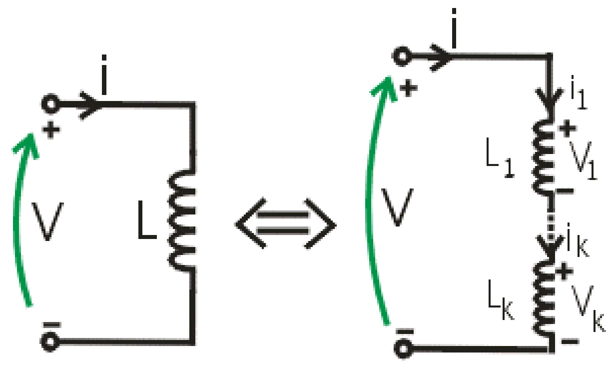
נובע מכך:
$$\boxed{\begin{gathered} v(0)=\sum_k v_k(0) \\ 1/C=\sum_k\frac{1}{Ck}\quad,\quad S=\sum_S S_k \end{gathered}}$$

<u>סלילים</u>:

עבור סלילים ליניאריים:

$$v_k = L_k \frac{di_k}{dt} \qquad i = i_1 = i_2 = \ldots = i_k$$

$$v = \sum_k V_k = \sum_k L_k \frac{di_k}{dt} = \left(\sum_k L_k\right)\frac{di}{dt}$$



נובע מכך:

$$\boxed{\begin{gathered} L = \Sigma L_k \\ i(0) = i_k(0) \end{gathered}}$$

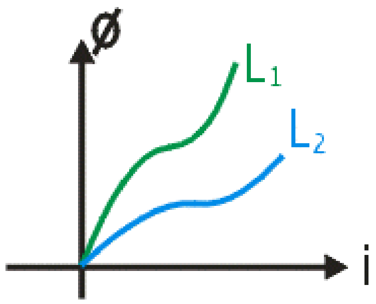
עבור המקרה של סלילים לא ליניאריים הנתונים ע"י אופיין הזרם-שטף שלהם:

נזכור כי המתח הוא הנגזרת של השטף התלוי בזרם.

לכן:

$$V = \sum_k V_k = \sum_k \frac{d}{dt}\phi_k(i_k) = \frac{d}{dt}\sum_k \phi_k(i) = \frac{d}{dt}\phi(i)$$

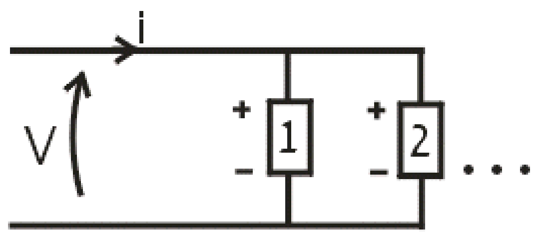
$$\phi(i) = \sum_k \phi_k(i)$$



כלומר יש לחבר את השטפים בכדי לקבל את השטף השקול דרך כל הסלילים.

חיבורים מקבילים:

באופן כללי:



$$i = i_1 + i_2 + \ldots$$
$$v = v_1 = v_2 = \ldots$$

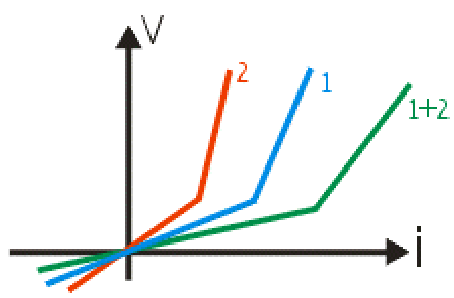
<u>נגדים</u>:

כאמור מתקיים הקשר בין הזרמים:

$$i = \Sigma i_k$$

בנגדים ליניאריים:

$$i_k = G_k V_k = \frac{V_k}{R_k} = \frac{V}{R_k}$$



לכן:

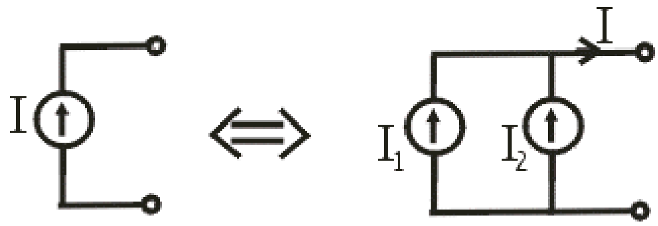
$$G = \Sigma G_k$$

או באופן שקול:

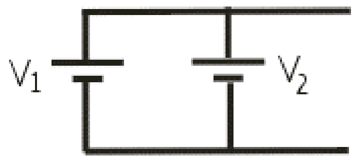
$$\boxed{\frac{1}{R} = \Sigma \frac{1}{R_k}}$$

<u>מקורות זרם</u> :

$i = i_1 + i_2$



<u>מקורות מתח</u> :
עבור מקורות מתח במקביל :



מבחינה פיזיקלית, מצב
זה יתכן רק אם $v_1 = v_2$.
כלומר, באופן כללי לא מחברים
מקורות מתח במקביל.

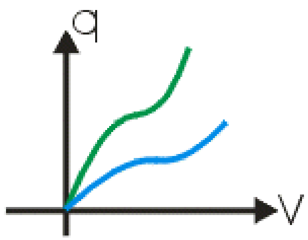
<u>קבלים</u> :

בקבלים מתקיים הקשר : $i_k = C_k \frac{dv_k}{dt}$

שוב נציב בסכום הזרמים ונקבל : $i = \Sigma i_k = \sum_k C_k \left(\frac{dv_k}{dt}\right) = \sum_k C_k \left(\frac{dv}{dt}\right) = \left(\frac{dv}{dt}\right) \sum_k C_k$

לכן עבור הקבל השקול מתקיים :

$$\boxed{\begin{gathered} C = \Sigma C_k \\ v(0) = v_1(0) = \dots v_k(0) \end{gathered}}$$



בקבל לא לינארי :

$$i = \sum_k i_k = \sum_k \frac{dq_k}{dt} = \frac{d\Sigma q_k}{dt} = \frac{dq}{dt}$$

כלומר גם במקרה זה נבצע חיבור אנכי של המטענים.

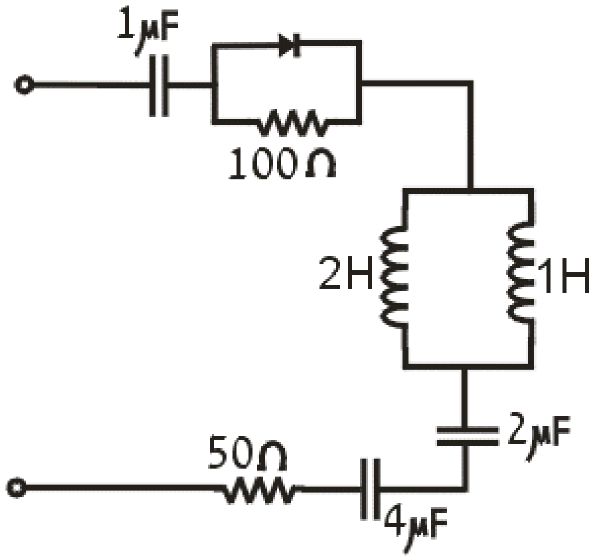
<u>סלילים</u> :

בסלילים מתקיים הקשר : $i_k = i_k(0) + \frac{1}{L_k} \int_0^t v_k(t') dt'$

ולכן : $i = \Sigma i_k = \Sigma i_k(0) + \sum_k \frac{1}{L_k} \int_0^t v_k(t') dt = \Sigma i_k(0) + \int_0^t v_k(t') dt \left(\sum_k \frac{1}{L_k}\right)$

נובע מכך שהסליל השקול יקיים :

$$\boxed{\begin{gathered} \frac{1}{L} = \sum_k \frac{1}{L_k} \\ i(0) = \Sigma i_k(0) \end{gathered}}$$



<u>דוגמא</u>: פשט את המעגל הבא:

פתרון:
תחילה נמצא את הקבל השקול לשלושת הקבלים במעגל. מכיוון שהקבלים מחוברים בטור: $\frac{1}{C}=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{7}{4}$

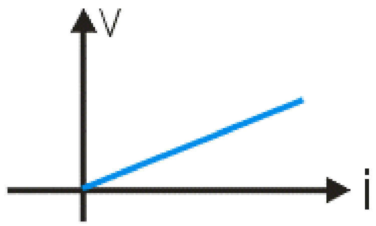
וקיבלנו את הקבל השקול: $C=\frac{4}{7}\ \mu F$

כעת, נמצא את הסליל השקול לשני הסלילים שבמעגל. הסלילים מחוברים במקביל: $\frac{1}{L}=\frac{1}{2}+\frac{1}{1}=\frac{3}{2}$

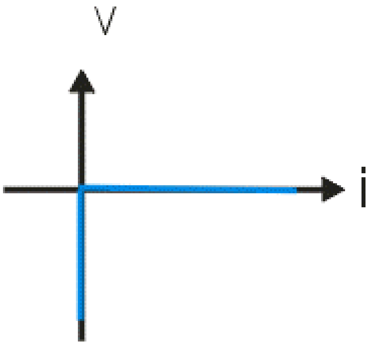
ולכן הסליל השקול הוא: $L=\frac{2}{3}\ \mathrm{H}$

נעבור לפשט את חיבור הדיודה ושני הנגדים:

תזכורת:

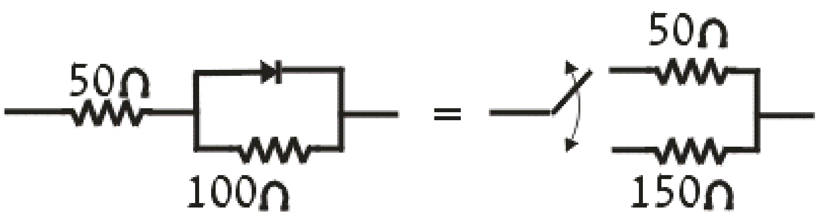


דיודה

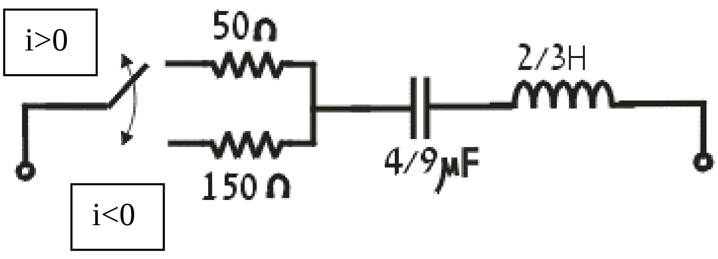


דיודה אידיאלית

ישנם שני מצבים אפשריים לפעולת הדיודה: כאשר הזרם עליה חיובי הדיודה היא קצר (בהנחה שהיא אידיאלית) ולכן היא מקצרת את הנגד $100\ \Omega$, כלומר לא זורם עליו זרם. כאשר הזרם שלילי, הדיודה היא נתק ולכן הזרם לא יכול לזרום דרכה. אז נקבל חיבור רגיל של שני נגדים בטור שנותן נגד שקול של $150\ \Omega$:



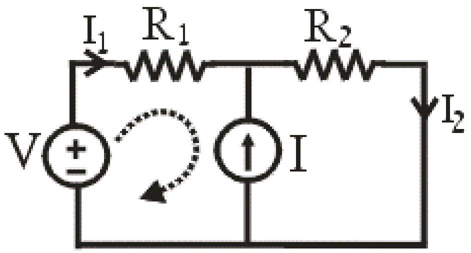
לכן המעגל המפושט הוא:



עקרון הסופר-פוזיציה:

כאשר יש קשר ליניארי בין ערור ותוצאותיו, השפעת מספר ערורים הפועלים יחד הינה שווה לסכום כל ערור הפועל לחוד כאשר שאר מקורות המתח מקוצרים ומקורות הזרם מנותקים.

דוגמא:

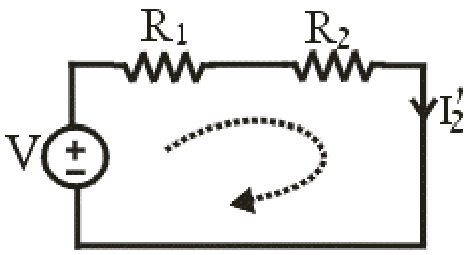


ניתן לראות ישירות מהמעגל (לפי חוקי קירכהוף) שמתקיים:

$$v = (I_2 - I)R_1 + I_2 R_2$$

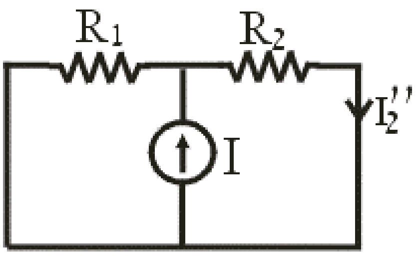
$$\Downarrow$$

$$I_2 = \frac{V}{R_1 + R_2} + I\frac{R_1}{R_1 + R_2} = I_2' + I_2''$$



נפתור לפי עקרון הסופר-פוזיציה:
תחילה נבחן את השפעת מקור המתח.
לכן ננתק את מקור הזרם ונקבל:

$$I_2' = \frac{V}{R_1 + R_2}$$



כעת נבחן את השפעת מקור הזרם.
לכן נקצר את מקור המתח ונקבל:

$$I_2'' = I \cdot \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} \cdot \frac{1}{R_2} = I \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

וכמובן שקיבלנו את אותה תוצאה בשתי השיטות.
<u>נשים לב</u>: עבור הספקים עקרון הסופר-פוזיציה לא פועל.
נתבונן למשל על ההספק על הנגד R_2:

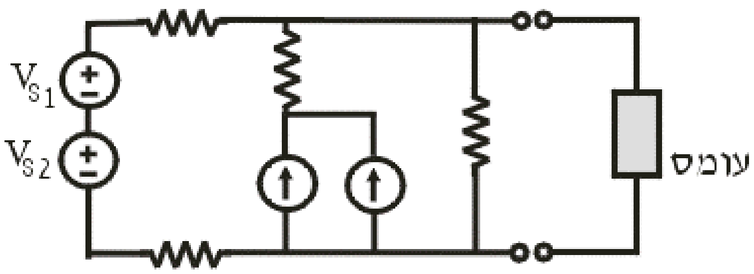
מהמעגל הראשון של השפעת מקור המתח נקבל: $P_v = \left(\frac{V}{R_1 + R_2}\right)^2 R_2$

מהמעגל השני של השפעת מקור הזרם נקבל: $P_i = I^2\left(\frac{R_1}{R_1 + R_2}\right)^2 R_2$

ורואים כי $P_i + P_v \neq P_T = \left(\frac{V}{R_1 + R_2} + I\frac{R_1}{R_1 + R_2}\right)^2 R_2$

כלומר עקרון הסופר-פוזיציה עובד בזרמים ומתחים אך <u>**לא**</u> בהספקים.

הסבר לעקרון הסופר-פוזיציה:
נניח שהמערכת הנתונה
בדוגמה שלפנינו היא <u>ליניארית</u>.

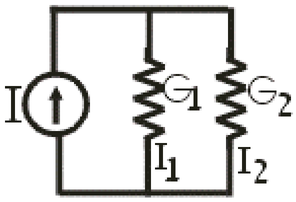


כדי לטפל בענף מקורות המתח, מנתקים את מקורות הזרם.
מוצאים את השפעת V_{s1} על העומס ואת השפעת V_{s2}, ומחברים. על העומס נקבל קשר מתח-זרם ליניארי כלשהו שכן כל תגובה היא ליניארית וחיבור תגובות ליניאריות גם הוא ליניארי.
כנ״ל לגבי מקורות הזרם בקיצור מקורות המתח. כלומר: עקרון הסופר פוזיציה הינו למעשה חיבור אופני התגובה הליניאריים כתוצאה מהמקורות השונים.
התגובה הכללית היא סופר-פוזיציה של כל ארבעת התגובות.

בנקודה זו נציין שתי שיטות נוספות שיעזרו לנו בפישוט מעגלים:

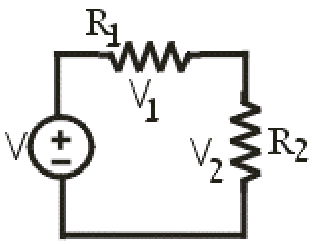
<u>מחלק זרם:</u>

$$I_1 = I\cdot\frac{G_1}{G_1+G_2} = I\cdot\frac{R_2}{R_1+R_2}$$



<u>מחלק מתח:</u>

$$V_1 = V\cdot\frac{R_1}{R_1+R_2}$$



<u>משפט תבנין עבור רשתות אקטיביות - Thevenin s Theorem</u>

עבור עומס ספציפי, ניתן להמיר רשת של אלמנטים ליניאריים ומקורות בחיבור טורי של מקור אידיאלי V_T בטור עם נגד R_T, כאשר V_T הוא מתח הנתק על האלמנט ו - R_T הוא היחס בין V_T לזרם הקצר.

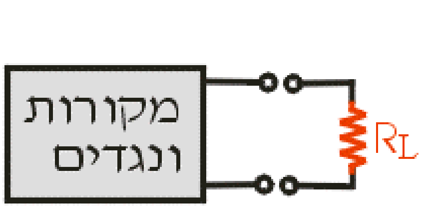
כלומר, כדי למצוא את V_T ננתק את העומס מהמעגל ונחשב את המתח על ההדקים של העומס. כדי למצוא את R_T נקצר את העומס, נחשב מהו הזרם שעובר דרכו, נחלק את R_T ונמיר את הרשת במקור המתח עם ההתנגדות:

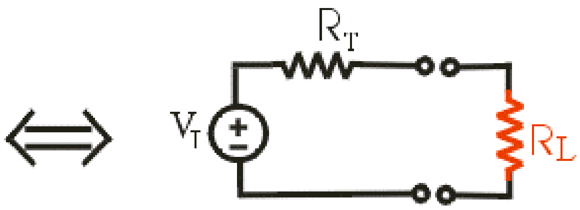
open curcuit

$$v_T = v_{oc}$$

$$R_T = \frac{v_T}{I_{sc}}$$

short circuit

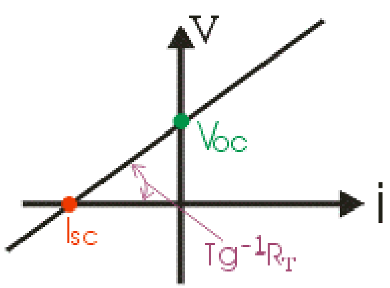




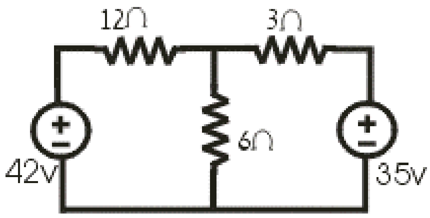
שקול תבנין

מעגל מקורי

הסבר: סכום השפעת מקורות הוא סכום קשרים ליניאריים וגם הוא ליניארי. קשר זה הוא גרף ליניארי כללי שעלינו למצוא את הפרמטרים שלו. לכן תמיד ניתן לתאר את המקרה הכללי ביותר ע״י מקור יחיד אשר עבורו מתקבל אותו קשר ליניארי:



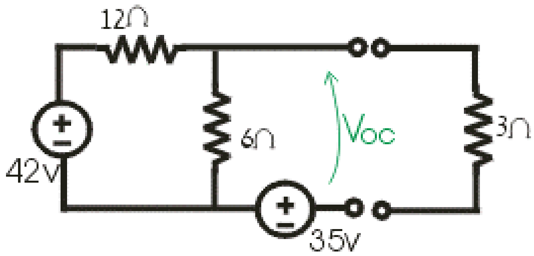
<u>דוגמא:</u>
נתונה הרשת הבאה:
עבור המעגל הנתון, מצא רשת אקוויוולנטית
לפי תבנין, עבור הנגד 3Ω.



פתרון:
תחילה נמצא את מתח הנתק:

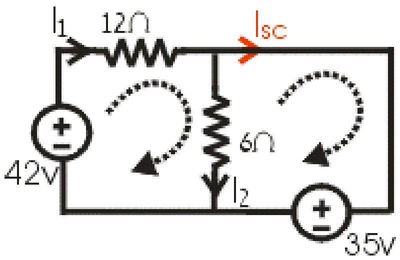
$$V_T = V_{oc} = 42 \cdot \frac{6}{6+12} - 35 = 14 - 35 = -21_v$$

ע״י מחלק מתח



כעת נמצא את זרם הקצר:
מהחוג השמאלי: $12I_1 + 6I_2 = 42$
מהחוג הימני: $-6I_2 = -35 \quad \Rightarrow \quad I_2 = \frac{35}{6}$
נציב במשוואה העליונה ונקבל:

$$I_1 = \frac{42 - \frac{6 \cdot 35}{6}}{12} = \frac{7}{12}$$

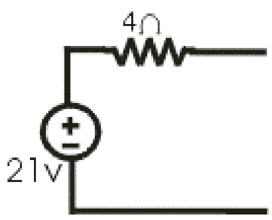


לפי חוק קירכהוף עבור הזרמים בצומת: $I_{sc} = I_1 - I_2 = \frac{7}{12} - \frac{70}{12} = -\frac{63}{12} = -\frac{21}{4}$

לבסוף נחלץ את ההתנגדות:

$$R_T = \frac{-21}{-\frac{21}{4}} = 4\Omega$$

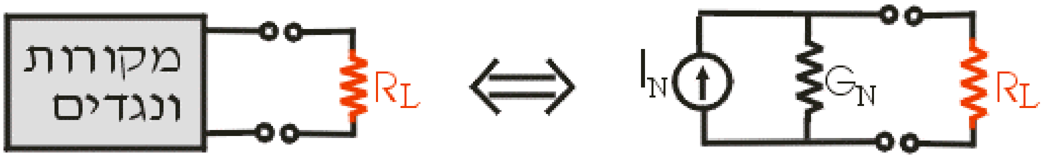
ולכן המעגל השקול לפי תבנין (ללא ציור העומס של 3Ω) הוא:



הערה: עבור רשתות נגדים פשוטות ניתן למצוא את R_T ע״י מציאת ההתנגדות שרואים לתוך הרשת כאשר מקצרים את כל מקורות המתח ומנתקים את מקורות הזרם. בדוגמא שלנו נקבל: $6\Omega \| 12\Omega = 4\Omega$

משפט נורטון עבור רשתות אקטיביות - Norton s theorem

עבור עומס ספציפי ברשת של אלמנטים ליניאריים ומקורות, ניתן להמיר את הרשת בחיבור מקבילי של מקור זרם אידיאלי I_N ומוליכות G_N, כאשר I_N הוא זרם הקצר על האלמנט ו - G_N הוא היחס בין זרם הקצר למתח הנתק.



$$I_N = I_{sc}$$
$$G_N = {I_N}/{V_{oc}}$$

מעגל מקורי

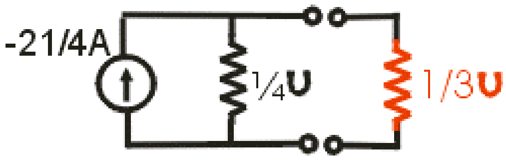
שקול נורטון

כלומר, כדי למצוא את I_N נקצר את האלמנט ונחשב את הזרם דרכו. כדי למצוא את G_N ננתק את האלמנט מהמעגל, נמצא את המתח על הדקיו ונחלץ את המוליכות לפי היחס ביניהם. אז נוכל להמיר את הרשת בחיבור המקבילי של מקור הזרם עם המוליכות.

נחזור לדוגמא הקודמת:

מצאנו קודם ש: $V_{oc} = -21_v$, $I_{sc} = -\frac{21}{4}_A$ לכן: $G_N = \frac{-\frac{21}{4}}{-21} = \frac{1}{4} mho$

ולכן המעגל השקול לפי נורטון (כולל העומס) הוא:



בדיקה: הבה נשווה את הזרם דרך העומס I_L.

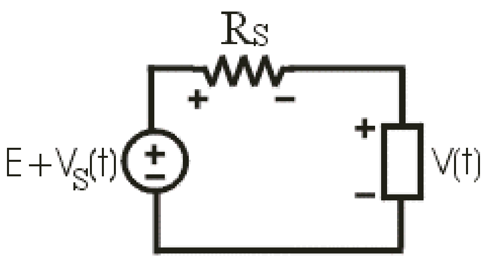
בתבנין: $I_L = \frac{-21}{7} = -3_A$.

בנורטון: $I_L = \frac{-21}{4} \cdot \frac{1}{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}} \cdot \frac{1}{3} = -\frac{21}{4} \cdot \frac{1}{\frac{7}{12}} \cdot \frac{1}{3} = -3_A$

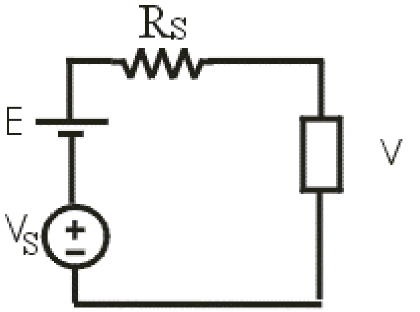
<u>מסקנה</u>: כפי שראינו קודם, כל מקור מתח V עם נגד טורי R ניתן להחלפה עם מקור זרם בגודל $I = \frac{V}{R}$ עם אותו נגד R בחיבור מקבילי.

רכיבים לא ליניאריים:

רכיבים עבורם הקשר בין הזרם למתח עליהם אינו קשר ליניארי.
נתבונן למשל במעגל הבא, שאופיין הזרם-מתח שלו מובא בהמשך:



עבור שינויי מתח קטנים (V_S) סביב נקודת מתח קבועה (E), כלומר עבור $E >> V_S$, ניתן לבצע את ה"מתכון" הבא (שנקרא קירוב לאותות קטנים):



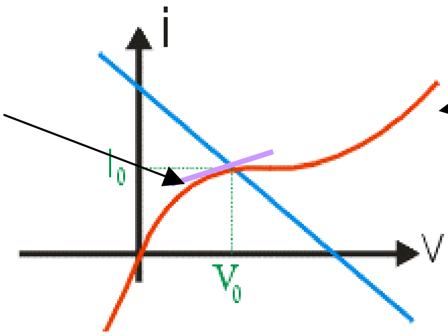
$$\begin{cases} i = g(v) & (1) \\ E + V_S = iR_S + V & (2) \end{cases}$$

כאשר משוואה (1) היא הקשר הלא לינארי על האלמנט, ומשוואה (2) היא חוק kvl בחוג היחיד במעגל.
העיקרון הוא: באותות קטנים נקרב את האופיין הלא לינארי לאופיין לינארי, אך בכל אזור באופיין הקירוב יהיה שונה.
כעת נראה את שלבי הפתרון:

<u>שלב א'</u> מציאת נקודת העבודה: מניחים שאין שינויי מתח, כלומר: $V_S = 0$.

$$\begin{cases} I_0 = g(V_0) \\ E = I_0 R_S + V_0 \end{cases} \Rightarrow \quad I_0 \ , \ V_0$$

מחלצים מתוך שתי המשוואות את המתח והזרם על האלמנט הלא לינארי בנקודת העבודה:
ממשוואה 2 עבור $V_S = 0$ נובע כי $i = \frac{E - V}{R_S}$. זהו הישר הכחול בגרף הבא.
לכן הפתרון של (1)+(2) הוא נקודת החיתוך בין הישרים.
זוהי נקודת העבודה שלנו ונשתמש בה בהמשך חישובינו לקירוב האופיין הלא לינארי.



קירוב האופיין לאותות קטנים

אופיין האלמנט

<u>שלב ב'</u> כעת ניקח בחשבון את השפעת שינויי המתח. שינויים קטנים במתח המקור V_S גורמים לשינויים קטנים במתח של האלמנט, נסמנם V_1, ושינויים קטנים בזרם על האלמנט, נסמנם I_1:

נתבונן באיזור נקודת העבודה: $I_o + I_1(t)$, $V_0 + V_1(t)$ ונקרב את האופיין באופן הבא:

$$I_0 + i_1 = g(V_0 + V_1) \approx g(V_0) + V_1 \frac{\partial g(V)}{\partial V}\Big|(v = v_0)$$

לפי קירוב טיילור

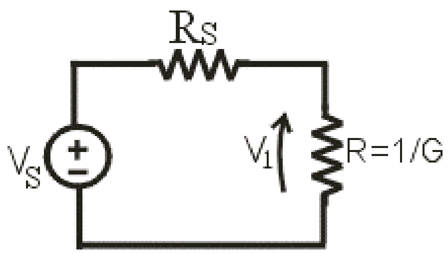
ומכיוון ש: $I_0 = g(V_0)$

אז: $$i_1 = V_1 \frac{\partial g}{\partial V}\Big|(v = v_0) = GV_1 \quad \Rightarrow \quad G = \frac{\partial g}{\partial V}\Big|(v = v_0) = \frac{1}{R}$$

כעת נקרב את האלמנט שלנו לנגד לינארי שערכו R.

חשוב לציין: הקירוב נכון רק לנקודת העבודה V_0 שמצאנו.

שלב ג' - נחליף את האלמנט בנגד שמצאנו, ונפתור את המעגל למציאת v_1, i_1:



$$\Leftarrow \quad V_1 = V_s \cdot \frac{R}{R_s + R} \quad , \quad i_1 = \frac{v_s}{R_s + R}$$

יש לשים לב ש- R יכול להיות שלילי.
שוב נציין שהקירוב תקף אך ורק בנקודת העבודה V_0, I_0 .
לפתרון האות הקטן נוסיף עתה את נקודת העבודה.

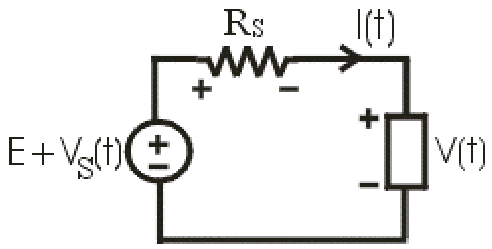
לסיכום: א - פותרים עבור E בלבד ומוצאים נקודת עבודה $I_0(E)$, $V_0(E)$.

ב מחשבים את השיפוע: $\frac{1}{R} = \frac{\partial g}{\partial V}\Big|(v = v_0)$

ג מחליפים את האלמנט הלא לינארי בנגד R ומוצאים את v_1, i_1.

ד - מחברים את תוצאות א', ג' לקבלת הפיתרון הכללי: $I(t) = I_0 + I_1(t)$, $V(t) = V_0 + V_1(t)$

דוגמא:
נתון:

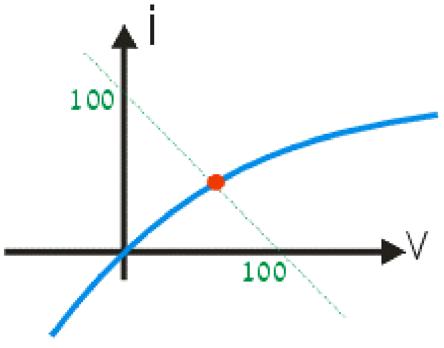


$E = 100\text{volt} \quad , \quad v_s(t) = \sin(2\pi t)\text{volt}$

$R_S = 1\Omega$

נתון גם אופיין האלמנט:

$$i(v) = 100\left(1 - e^{-\frac{V}{100}}\right) = g(v)$$



צ"ל: v(t), i(t) = ?
פתרון:
א - עבור המעגל, בכל רגע ורגע מתקיים:

$$(1) \quad i(t) = g(v(t))$$

$$(2) \quad E + V_S(t) = i(t) \cdot R_S + V(t)$$

מציאת נקודת העבודה:

כאמור, אנו מניחים $V_S = 0$

$$\left.\begin{array}{l}(1)\quad I_0 = 100\left(1-e^{-\frac{V_0}{100}}\right)\\ (2)\quad 100 = I_0\cdot 1 + V_0\end{array}\right\} \Rightarrow \quad 100 - V_0 = 100\left(1-e^{-\frac{V_0}{100}}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$v_0 = 100e^{-\frac{V_0}{100}}$$

נפתור את המשוואה ע"י הוצאת ln משני הצדדים ונקבל:

$$\boxed{\begin{array}{l}V_0 = 56.7volt\\ \Downarrow\\ I_0 = 43.3A\end{array}}$$

כאשר הצבנו חזרה את v_0 שהתקבל במשוואה (1) כדי למצוא את i_0.

ב - נתבונן בשינויים קטנים במתח המקור, כלומר מניחים $V_S(t) << E$ (והנחה זו מתקיימת במקרה זה כי לפי הנתונים: $|Vs(t)|<1<<100=E$).

התגובה הכללית תהיה כאמור: $V_0 + V_1(t) \quad , \quad I_0 + I_1(t)$

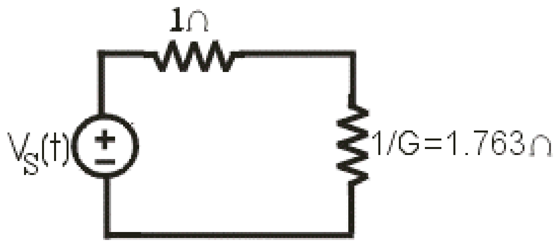
$$I_0 + I_1 = g(v_0 + v_1) \approx g(v_0) + v_1\cdot\frac{\partial g(v)}{\partial v}$$

בדוגמה שלנו: $\frac{\partial g(v)}{\partial v} = e^{-\frac{V}{100}} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial g(v)}{\partial v}\Big|_{v=v_0} = e^{-\frac{V_0}{100}} = 0.5672 = G$

הצבת v_0

ולכן: $i_1(t) = v_1(t)\cdot G$

ג - מעגל התמורה לאות קטן:



$$\Leftarrow \quad v_1 = v_s\cdot\frac{\frac{1}{G}}{R_S + \frac{1}{G}} = 0.6381V_S(t)$$

הצבת G

$$i_1 = \frac{V_S}{R_S + \frac{1}{G}} = 0.3619V_S(t)$$

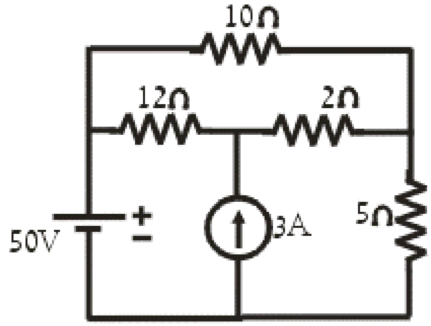
ד - לכן התוצאה הסופית:

$$v(t) = v_0 + v_1(t) = 56.7 + 0.6381\cdot\sin(2\pi t)$$
$$i(t) = I_0 + I_1(t) = 43.3 + 0.3619\cdot\sin(2\pi t)$$

דוגמאות לסיום הפרק:

דוגמא 1:

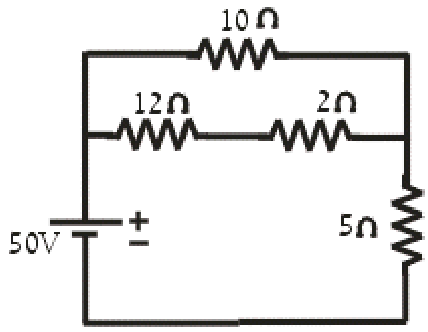
חשב את הזרם על הנגד 2Ω.



פתרון:

נשתמש בעקרון הסופר-פוזיציה:

תחילה, ננתק את מקור הזרם ונחשב את תרומת מקור הזרם:

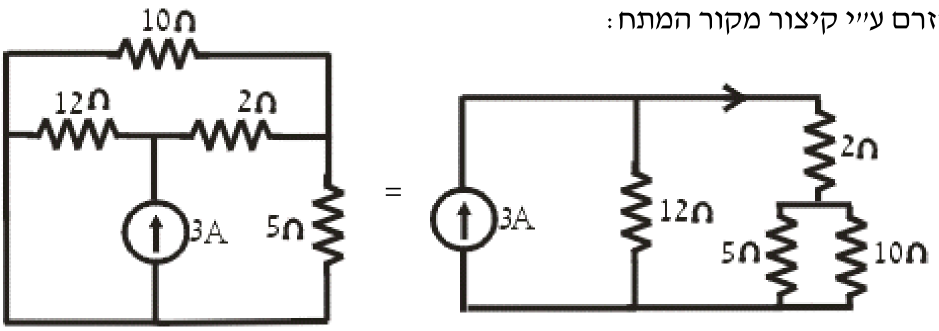


$$i_v = \frac{50}{5+10\|14}\cdot\frac{\frac{1}{14}}{\frac{1}{10}+\frac{1}{14}} = \frac{50}{5+\frac{140}{24}}\cdot\frac{10}{24} = \frac{500}{260}A$$

הנגד השקול לארבעת הנגדים

מחלק זרם

כעת נעבור לחשב את תרומת מקור הזרם ע"י קיצור מקור המתח:



$$i_A = 3\cdot\frac{12}{12+(2+10\|50)} = \frac{54}{26}A$$

מחלק זרם

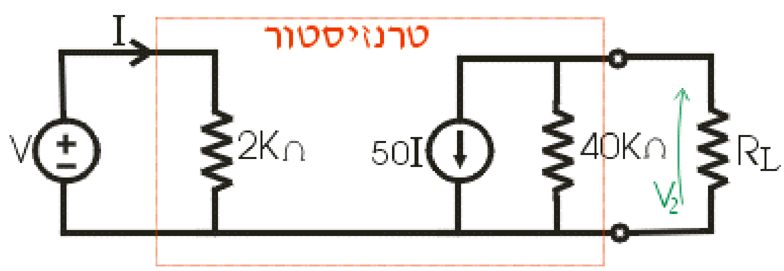
והתגובה הכללית היא הסכום:

$$I = i_v + i_A = 4_A$$

דוגמא 2:

בהינתן המעגל שבציור,

מצא את $\frac{V_2}{V}$ עבור $R_L = 3k\Omega$:



פתרון:

מהחוג השמאלי של המעגל רואים ש: $I = \frac{V}{2_{k\Omega}}$.

המשוואה המתארת את החוג הימני של המעגל:

$$V_2 = (-50I)\cdot 40k \| 3k = -(I50)\frac{1}{\frac{1}{40}+\frac{1}{3}} = -(I50)\cdot\frac{40\cdot 3}{43}$$

נציב את I ונקבל:

$$\frac{V_2}{V} = \frac{-\frac{V\cdot 50}{2k}\cdot\frac{40\cdot 3}{43}}{V} = -\frac{120\cdot 50}{2\cdot 43} = -\frac{3000}{43}$$

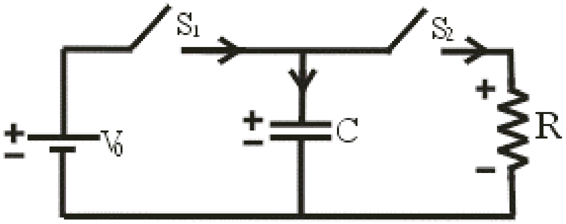
כלומר, יש כאן הגברת מתח הכניסה V פי $\frac{3000}{43}$.

פרק 4: מעגלים מסדר ראשון

מעגלים מסדר ראשון הם מעגלים שתגובתם ניתנת לתיאור ע"י משוואה דיפרנציאלית מסדר ראשון.
כדי לפתור את המד"ר המתאימה למעגל, אנו נוקטים בגישה של הפרדת תנאי התחלה (פתרון ZIR) ובעיית המקורות (פתרון ZSR). בהמשך נסביר את משמעות השמות וההפרדה.

פתרון ה- ZIR

נמחיש את הפתרון ע"י שתי דוגמאות נפוצות של מעגלים מסדר ראשון:



מעגל RC

תחילה המתג S_1 סגור ולכן הקבל נטען ל- $V_C = V_0$, כלומר: $V_C(t=0) = V_0$.

כעת נניח ש- S_1 נפתח ו- S_2 נסגר בו זמנית ברגע $t=0$.

עבור כל $t \geq 0$ מתקיימים חוקי קירכהוף:

$$\text{KVL} \rightarrow \quad V_C(t) = V_R(t)$$
$$\text{KCL} \rightarrow \quad i_C(t) + i_R(t) = 0$$

וכמובן שמתקיימים קשרי המתח-זרם הרגילים על כל אלמנט:

על הנגד: $V_R = i_R R$

ועל הקבל: $i_C = C\frac{dV_C}{dt}$

$$V_C(0) = V_0$$

נציב ונקבל:

$$i_C(t) = C\frac{dV_C(t)}{dt} = -i_R(t) = -\frac{V_R(t)}{R} = -\frac{V_C(t)}{R}$$

$$\Rightarrow \quad C\frac{dV_C(t)}{dt} = -\frac{V_C(t)}{R}$$

ולכן:

$$RC\frac{dV_C(t)}{dt} + V_C(t) = 0 \quad , \quad V_C(0) = V_0$$

וזוהי המשוואה הדיפרנציאלית המתארת את תגובת המעגל.

פתרון המשוואה:

תחילה, נניח פתרון מהצורה הבאה: $V_C(t) = Ae^{Bt}$

נציב את תנאי ההתחלה בפתרון ונקבל: $A = V_0$,

כלומר: $V_C(t) = V_0 e^{Bt}$.

כעת נציב פתרון זה במשוואה ונקבל:

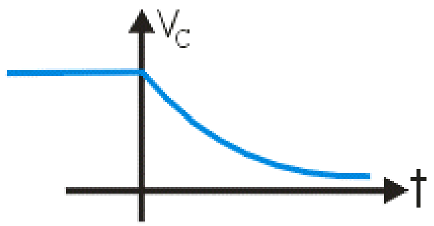
$$RC\frac{d\left[V_0 e^{Bt}\right]}{dt} + V_0 e^{Bt} = 0$$

נגזור ואז נציב t=0:

$$RCV_0 B + V_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad B = -\frac{1}{RC}$$

לכן סה"כ הפתרון הוא:

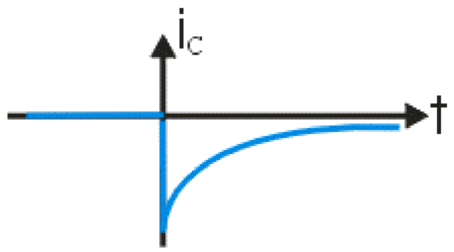
$$V_C(t)=V_0e^{-\frac{t}{RC}}$$



רואים שהמתח רציף אך בזרם יש קפיצה:

לפני זמן t=0 הזרם הוא אפס, כי המתח קבוע, ולאחר זמן t=0 מתקיים:

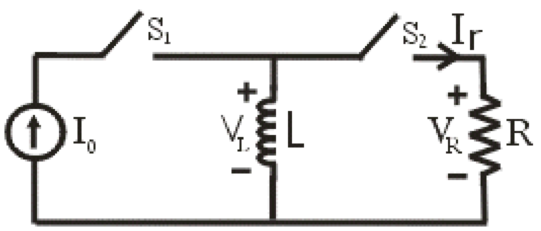
$$i_C(t)=C\frac{dV_C(t)}{dt}=C\frac{d\left[V_0e^{-\frac{t}{RC}}\right]}{dt}=-C\frac{V_0}{RC}e^{-\frac{t}{RC}}=-\frac{V_0}{R}e^{-\frac{t}{RC}}$$



הגודל RC נקרא "קבוע הזמן של המעגל", והמימד שלו הוא שניות: $RC=\frac{V}{A}\cdot\frac{Cb}{V}=\frac{Cb}{A}=\frac{Cb}{Cb/sec}=sec$

כאמור, הבעיה שלעיל מכונה Zero Input Response או בקיצור: ZIR . בבעיות אלו אין עירור חיצוני (כגון מקור מתח או זרם) המשפיע על המעגל (או שמניחים שהוא מאופס), אך ישנם תנאי התחלה (כמו המתח ההתחלתי על הקבל בדוגמה שלעיל) שגורמים לפעולת המעגל.

<u>מעגל RL</u>



המתג S_1 סגור עד $t=0$. ברגע $t=0$ המתג S_1

נפתח ו - S_2 נסגר בו-זמנית.

ברור לכן כי $I_L(t=0)=I_0$.

לפי KVL החל מרגע t=0 מתקיים:

$$L\frac{di_L}{dt}-V_R=0$$

ולפי KCL:

$$i_r=-i_L$$

נציב את הקשר:

$$V_R=Ri_r=-Ri_L$$

ונקבל: $L\frac{di_L}{dt}+i_LR=0$ כאשר נזכור ש: $I_L(t=0)=I_0$,

וזוהי המשוואה הדיפרנציאלית המתארת את תגובת המעגל.

פתרון המשוואה הדיפרנציאלית:

תחילה, נניח פתרון מהצורה הבאה: $I_L(t)=Ae^{Bt}$

נציב את תנאי ההתחלה בפתרון ונקבל: $A=I_0$, כלומר: $I_L(t)=I_0e^{Bt}$.

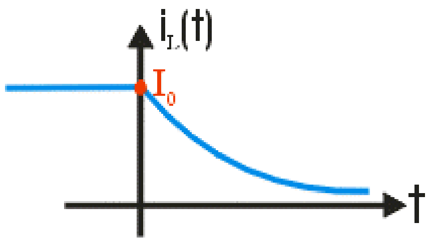
לחישוב B נציב במשוואה את מה שקיבלנו:

$$L\frac{d\left[I_0e^{Bt}\right]}{dt}+RI_0e^{Bt}=0$$

$$LI_0Be^{Bt}+RI_0e^{Bt}=0$$
$$(LB+R)e^{Bt}=0$$
$$LB+R=0 \quad \Rightarrow \quad B=-\frac{R}{L}$$

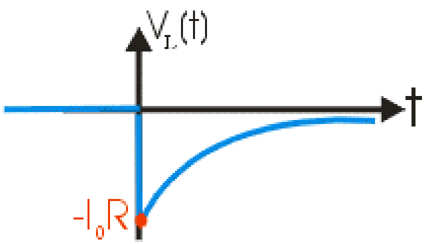
ולכן הפתרון הוא:

$$i_L(t)=I_0e^{-\frac{R}{L}t}$$



ועבור המתח נקבל:

$$V_L(t)=-L\cdot I_0\cdot\frac{R}{L}e^{-\frac{R}{L}(t)}=-I_0Re^{-\frac{R}{L}t}$$

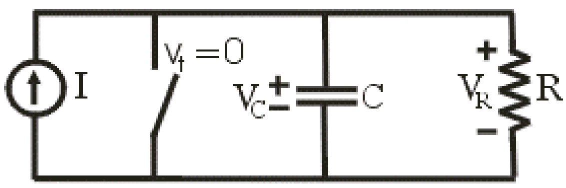


שתי הדוגמאות לעיל היו עבור מעגלים ללא מקורות (מקורות אפס) אך עם תנאי התחלה.

נסכם: **ZIR היא תגובה לתנאי ההתחלה כאשר אין עירור חיצוני במעגל.**

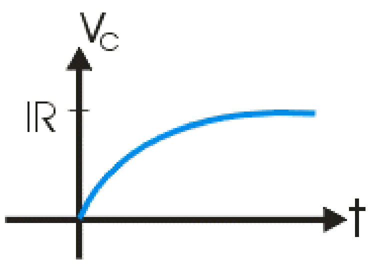
כעת נעבור למקרה ה Zero State Response ZSR.
זהו המקרה המשלים בו תנאי ההתחלה הינם אפס (או שמניחים שהם מאופסים) אך קיים עירור במעגל.

פתרון ה- ZSR



נתבונן במעגל הבא:
ב - $t=0$ המתג נפתח. נתון: $V_C(0)=0$.
עבור הזמן t>0, נקבל מתוך KVL: $V_c=V_R=V$
ומתוך KCL: $C\frac{dv}{dt}+\frac{V}{R}=I$

יש לפתור משוואה דיפרנציאלית זו עם תנאי התחלה $V(t=0)=0$.
לפני שנפתור פורמלית את הבעיה, ננסה להבין את הפתרון באופן אינטואיטיבי:
כיוון שהמתח על קבל הוא רציף: $V_c(0^-)=V_C(0^+)$, אז עבור t=0+ נקבל: $V(0^+)=0$, כלומר: המתח על הקבל חייב להישאר אפס גם ברגע הראשון לאחר פתיחת המתג, ולפיכך הקבל הוא קצר ולכן כל הזרם עובר דרכו:
$C\frac{dv}{dt}\Big|(t=0^+)=I$.
עבור $t\to\infty$ (המצב העמיד של המעגל), כל הזרם יזרום דרך הנגד,
מכיוון שהקבל נהיה נתק: $\frac{dV_C}{dt}=0$,
ולכן $\frac{V(t\to\infty)}{R}=I \quad \Leftarrow \quad V(t\to\infty)=IR$
על כן, מידיעת האסימפטוטות ב- $t=0$ ו- $t\to\infty$, ניתן לתאר באופן סכמתי את המתח V_C:



כעת נעבור לפתרון הפורמלי:
הפתרון הכולל של משוואה מהסוג הזה הוא:

$$V = V_n + V_p$$

פתרון כולל
פתרון משוואה הומוגנית
פתרון פרטי התלוי במבוא

את הפתרון הזה, תמיד נכפיל בפונקצית מדרגה $u(t)$, שכן העירור החל לפעול רק בזמן $t = 0$ ולפני זה ת"ה הם אפס, לכן התגובה כולה היא תמיד אפס עבור $t < 0$. אם העירור הוא עירור מוזז לזמן $t = t_0$, אז נכפיל בהתאם ב - $u(t - t_0)$.

נפרט מהם שני סוגי הפתרונות: פתרון המשוואה ההומוגנית הוא פתרון המד"ר שקיבלנו, כאשר מאפסים את צד ימין של המשוואה: $C\frac{dV_n}{dt} + \frac{V_n}{R} = 0$. פתרון זה נועד לאלץ ת"ה אפס. גם כאן מנחשים פתרון אקספוננציאלי K_1e^{Bt} ופותרים כמו במקרה ה- ZIR, אך נישאר עדיין עם הקבוע K_1 שייקבע רק בהמשך. נקבל: $V_h = K_1e^{Bt}$, $B = -\frac{1}{RC}$.

הפתרון הפרטי הוא פתרון המד"ר: $C\frac{dV_p}{dt} + \frac{V_p}{R} = I$. כדי לפתור משוואה זו, ננחש לרוב פתרון שהוא מצורת העירור: מכיוון שבמקרה זה הזרם I הוא קבוע, אנו ננחש פתרון שגם הוא קבוע: $V_p = A$. מהצבת הפתרון במד"ר נקבל: $0 + \frac{A}{R} = I$ (כי נגזרת של קבוע היא אפס), ולכן נסיק שהפתרון הפרטי הוא: $V_p = RI$.

נשים לב שמכיוון שמתקיים: $\frac{dV}{dt} = \frac{dV_p}{dt} + \frac{dV_n}{dt}$, אז סכום שתי המשוואות שלעיל נותן בדיוק את המשוואה המקורית שהיינו צריכים לפתור, ואשר עבורה מתקיימים ת"ה אפס.

סה"כ קיבלנו:

$$\begin{cases} V_n = K_1e^{-\frac{t}{RC}} \\ V_p = RI \end{cases} \quad \text{עבור } t>0$$

לכן נסכם את הפתרונות ונציב את תנאי ההתחלה באפס:

$$V(t) = K_1e^{-\frac{t}{RC}} + RI = IR\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)u(t)$$

$$V(0) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$K_1 = -IR$$

וזהו פתרון ה-ZSR הכולל.

כעת נחזור על הדוגמא הקודמת עם מקור זרם שאינו קבוע: $I_S(t) = I_0\cos(wt)$

המשוואה הדיפרנציאלית תשתנה בהתאם: $C\frac{dv}{dt} + \frac{V}{R} = I_0\cos(wt)$.

ניגש למצוא את הפתרון הפרטי.

מכיוון שהעירור הוא סינוסואידלי, נניח פתרון פרטי מהצורה: $V_P = A\cos(wt + \phi_1)$.

נציב את הפתרון במשוואה:

$$-CAw\sin(wt+\phi_1)+\frac{A}{R}\cos(wt+\phi_1)=I_0\cos wt$$

$$-CAw[\sin(wt)\cos\phi_1+\cos(wt)\sin\phi_1]+\frac{A}{R}[\cos(wt)\cos\phi_1-\sin(wt)\sin\phi_1]=I_0\cos wt$$

נסדר מחדש:

$$\left[-CAw\cos\phi_1-\frac{A}{R}\sin\phi_1\right]\sin wt-\left[ACw\sin\phi_1-\frac{A}{R}\cos\phi_1\right]\cos wt=I_0\cos wt$$

נשווה מקדמים ל- $\sin(wt)$ ו- $\cos(wt)$ ונקבל:

$$\text{I)}\quad -CAw\cos\phi_1-\frac{A}{R}\sin\phi_1=0$$

$$\text{II)}\quad -CAw\sin\phi_1+\frac{A}{R}\cos\phi_1=I_0$$

ממשוואה I מקבלים $tg(\phi_1)=-wRC$.

נציב ב II $\sin\phi_1=-wRC\cos\phi_1$ ונקבל:

$$\left[-CAw(-wRC)+\frac{A}{R}\right]\cos\phi_1=I_0$$

$$A\left[w^2C^2R+\frac{1}{R}\right]\cos\phi_1=I_0$$

$$A=\frac{I_0}{\left(w^2C^2R+\frac{1}{R}\right)\cos\phi_1}$$

לכן הפתרון הפרטי הוא: $V_p=\frac{I_0}{\left(w^2C^2R+\frac{1}{R}\right)\cos\phi_1}\cos(wt+\phi_1)$.

הפתרון ההומוגני זהה לפתרון ההומוגני של הדוגמה הקודמת: מכיוון שמאפסים את אגף ימין של המד"ר מקבלים את אותה משוואה הומוגנית: $C\frac{dV_n}{dt}+\frac{V_n}{R}=0$.

הפתרון הכללי הוא פתרון פרטי ועוד פתרון הומוגני: $V=A\cos(wt+\phi_1)+Ke^{-\frac{t}{RC}}$, כאשר את A כבר מצאנו.

לבסוף נדרוש שיתקיימו תנאי ההתחלה $V(t=0)=0$, כלומר:

$$V(t=0)=A\cos\phi_1+K=0\quad\Rightarrow\quad K=-A\cos\phi_1$$

ותגובת ה-ZSR הכללית היא: $V=A\cos(wt+\phi_1)-A\cos\phi_1 e^{-\frac{t}{RC}}$.

נסכם: **ZSR היא תגובה לעירור כאשר כל הרכיבים הם במצב אפס בזמן $t=0^-$.**

<u>פתרון בעיית ZSR ללא ניחוש:</u>

עבור מבוא כללי: $A\frac{dx}{dt}+Bx=F(t)$, נניח פתרון פרטי: $x(t)=y(t)e^{-\frac{B}{A}t}$.

נציב במד"ר ונקבל: $$-A\cdot\frac{B}{A}y(t)e^{-\frac{B}{A}t}+A\frac{dy}{dt}e^{-\frac{B}{A}t}+By(t)e^{-\frac{B}{A}t}=F(t)$$

$$A\frac{dy}{dt}e^{-\frac{B}{A}t}=F(t)$$

$$y(t)=y(0)+\int_0^t\frac{1}{A}F(t')e^{\frac{B}{A}t'}dt' \quad\Leftarrow\quad \frac{dy}{dt}=\frac{1}{A}F(t)e^{\frac{B}{A}t}$$

לכן הפתרון הפרטי הוא:

$$x(t)=y(0)e^{-\frac{B}{A}t}+\frac{1}{A}e^{-\frac{B}{A}t}\int_0^t F(t')e^{\frac{B}{A}t'}dt'$$

ופתרון ה - ZSR הכולל הוא:

$$x(t)=\left[\underbrace{x(0)e^{-\frac{B}{A}t}}_{\text{פתרון הומוגני}}+\frac{1}{A}e^{-\frac{B}{A}t}\underbrace{\int_0^t F(t')e^{\frac{B}{A}t'}dt'}_{\text{פתרון פרטי}}\right]u(t)$$

כאשר $x(0)$ הינו מקדם הכולל את $y(0)$.

תגובה כוללת

התגובה הכוללת של מעגל כללי היא הסכום: פתרון ZIR + פתרון ZSR.

נחזור לדוגמא של מעגל RC עם מקור הזרם הקבוע. ראינו שפתרון ה-ZSR הוא: $V_C=IR\left(1-e^{-\frac{t}{RC}}\right)u(t)$,

ופתרון ה-ZIR הוא: $V_C=V_0e^{-\frac{t}{RC}}$. לכן נסכם את התגובה הכוללת: $V(t)=\underbrace{V_0e^{-\frac{t}{RC}}}_{\text{חולף}}+\underbrace{IR}_{\text{עמיד}}\underbrace{\left(1-e^{-\frac{t}{RC}}\right)}_{\text{חולף}}u(t)$.

ניתן להסתכל על הפתרון גם כסכום של פתרון חולף ופתרון עמיד:

משום שהאקספוננטים דועכים עם הזמן ($t\to\infty$).
יש לשים לב שלפתרון העמיד תורם העירור בלבד. לפתרון החולף תורמים גם העירור וגם המצב ההתחלתי.

נלמד כעת מספר מושגים הנוגעים למעגלים חשמליים לינאריים, שישמשו אותנו בהמשך.

לינאריות של התגובה למצב אפס:

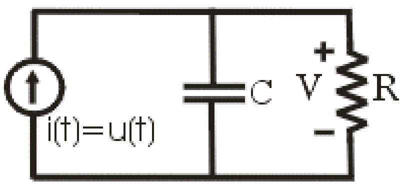
לינאריות של התגובה למצב אפס (ZSR), פירושה קשר לינארי בין מוצא המעגל לכניסת המעגל (המבוא). נגדיר קשר לינארי: אם נסמן: $y=H[x]$, כאשר x היא הכניסה (מבוא) ו- y היא תגובת המערכת (מוצא) בתנאי ההתחלה אפס, אז המערכת היא לינארית אם יתקיימו שני התנאים הבאים:

$$H[ax]=aH[x]$$
$$H[x_1+x_2]=H[x_1]+H[x_2]$$

אי תלות בזמן Time invariance של התגובה למצב אפס:

בהנחה שהמקור מופעל ברגע מסוים ($t=0$ למשל) אנו מקבלים תגובה מסוימת. עבור מקור דומה המופעל ברגע $t=\tau$, נקבל את אותה תגובה מוזזת ב - τ.

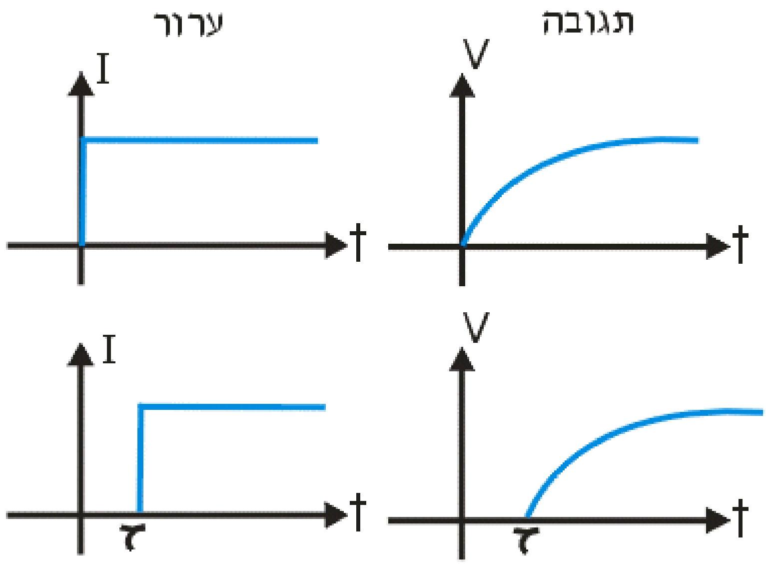
לדוגמא המעגל הבא:



נניח שנתון: $i(t)=I\cdot u(t)$
(כלומר מקור קבוע החל מרגע אפס).

ראינו כי פתרון ה- ZSR הוא: $V(t)=IRu(t)\left[1-e^{-\frac{t}{RC}}\right]$

נדגים את משמעות אי התלות בזמן ע"י הגרפים הבאים:



פולס הוא חיסור מדרגה מוזזת ממדרגה המתחילה בראשית הצירים, לכן גם התגובה תורכב מחיסור תגובה מוזזת מתגובה בראשית הצירים

כאמור, הזזה בזמן של הכניסה גורמת לאותה הזזה בזמן ביציאה.

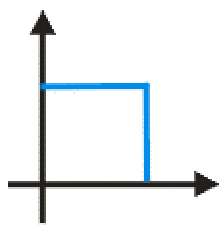
<u>הוכחה</u>: עבור המקרה המוזז התגובה תהיה $y(t)$ ולכן מתקיימת המד"ר $C\frac{dy(t)}{dt}+\frac{y(t)}{R}=I\cdot u(t-\tau)$.

נציב: $t=t-\tau$, $dt=dt$ ונקבל: $C\frac{dy(t+\tau)}{dt}+\frac{y(t+\tau)}{R}=I\cdot u(t)$. אך ידוע לנו ש: $C\frac{dv(t)}{dt}+\frac{v(t)}{R}=I\cdot u(t)$

נותן את התגובה $v(t)$ ולכן המקרה המוזז ייתן את התגובה:

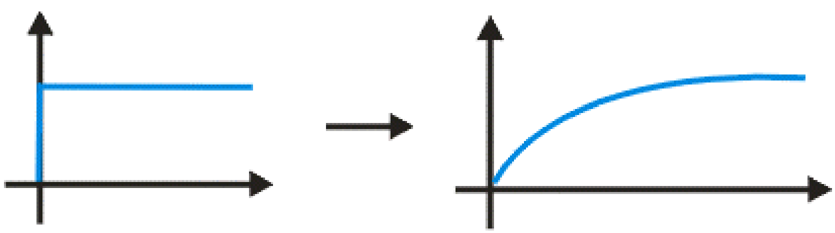
$$y(t-\tau)=v(t)\quad\Rightarrow\quad y(t)=v(t-\tau)\quad\Rightarrow\quad y(t)=v(t-\tau)$$

<u>דוגמא</u>: מה תהיה התגובה עבור העירור הבא:



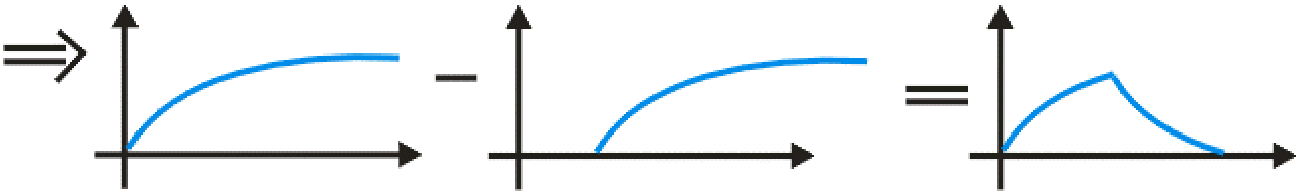
תוך שימוש בעקרון הסופר פוזיציה ועקרון אי התלות בזמן ניתן לרשום:

ידועה לנו התגובה למדרגה:



נוכל לפרק פולס לחיסור מדרגה מוזזת ממדרגה בראשית הזמן:

ולכן גם לחסר את שתי התגובות למדרגות כדי לקבל את התגובה לפולס:

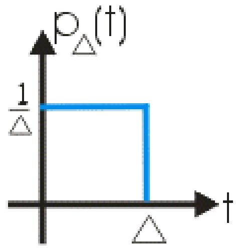


<u>תגובת הלם Impulse response</u>

למדנו את התגובה לפונקצית מדרגה. לגבי עירור שהוא הלם: $\delta(t)=\lim_{\Delta\to\infty}P_\Delta(t)$

כאשר נזכיר את פונקצית הפולס:

$$P_\Delta(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ \frac{1}{\Delta} & \Delta>t\geq 0\\ 0 & t>0\end{cases}$$



ניתן לרשום $P_\Delta(t)=\frac{1}{\Delta}(u(t)-u(t-\Delta))$.

נקרא לתגובת המדרגה $S(t)$. בגלל הליניאריות והאי תלות בזמן התגובה ל- P_Δ תהיה:

$h_\Delta(t)=\frac{1}{\Delta}(S(t)-S(t-\Delta))$. ולכן התגובה להלם היא: $h(t)=\lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}(S(t)-S(t-\Delta))=\frac{ds}{dt}$

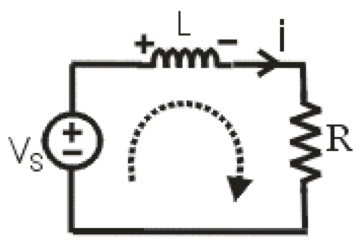
מכאן קיבלנו שהתגובה להלם (ZSR) היא הנגזרת של תגובת המדרגה (ZSR).

הערה: תגובת ההלם של מעגל מסומנת ב- $h(t)$.

<u>דוגמאות לפתרונות ZSR:</u>

<u>דוגמא 1:</u>

נתבונן במעגל הבא וננסה למצוא את תגובת הזרם למקור המתח בתנאי התחלה אפס (ZSR):



מתוך KVL עבור הלולאה נקבל: $L\frac{di}{dt}+iR=V_S(t)$.

עבור העירור: $V_S(t)=u(t)$

וכן: $i\left(t=0^-\right)=0$

נקבל את המד"ר: $\frac{di}{dt}+\frac{R}{L}i=\frac{1}{L}u(t)$ עם ת"ה אפס.

פתרון פרטי: מכיוון שהעירור מתחיל בזמן $t=0$, והחל מזמן זה העירור נשאר קבוע, ננחש פתרון פרטי קבוע

ונציב: $i_p=A \Rightarrow \frac{dA}{dt}+\frac{AR}{L}=\frac{1}{L} \Rightarrow \frac{AR}{L}=\frac{1}{L} \Rightarrow A=\frac{1}{R} \Rightarrow i_p=\frac{1}{R}$

פתרון הומוגני: שוב ננחש פתרון מהצורה: $i_H=Ae^{Bt}$ ונציב אותו במד"ר: $\frac{di}{dt}+\frac{R}{L}i=0$ ונקבל:

$i_H=Ae^{-\frac{R}{L}t}$. מתנאי הגבול $i(t=0)=0$ מקבלים: $A=-\frac{1}{R}$ ולכן סה"כ: $i_H=-\frac{1}{R}e^{-\frac{R}{L}t}$.

הערה: הנחנו כאן הנחה סמויה ש- $i(t)$ פונקציה רציפה ולכן אם: $i\left(t=0^-\right)=0$ אז גם: $i(t=0)=0$. הנחה זו אכן מתקיימת במקרה זה. בהמשך נראה מתי הנחה זו לא מתקיימת.

אם כך, תגובת ה-ZSR הכוללת למדרגה היא: $i(t)=S(t)=\frac{1}{R}\left(1-e^{-\frac{R}{L}t}\right)u(t)$

כזכור, תגובת ההלם היא הנגזרת של התגובה למדרגה:

$$h(t)=\frac{ds}{dt}=\frac{1}{R}\left[\frac{R}{L}e^{-\frac{R}{L}t}\right]u(t)+\underbrace{\frac{1}{R}\left[1-e^{-\frac{R}{L}t}\right]\delta(t)}=\frac{1}{R}\cdot\frac{R}{L}e^{-\frac{R}{L}t}u(t)=\frac{1}{L}e^{-\frac{R}{L}t}u(t)$$

כל האיבר הזה מתאפס:
ה- δ היא אפס בכל הזמנים פרט ל- $t=0$.
אם נציב זמן זה, המקדם שלפני ה- δ יתאפס.
לכן בכל הזמנים האיבר הוא אפס.

נתבונן בפתרון שמצאנו ונבחין כי צורתו דומה לפתרון משוואה הומוגנית מסדר ראשון. תופעה זו צפויה מראש שכן המד"ר אותה פתרנו הינה הומוגנית עבור $t>0$, כי בזמנים אלו הפונקציה $\delta(t)$ שווה זהותית לאפס. פונקצית ההלם, אם כן, גורמת רק ל-'עדכון' של תנאי ההתחלה.

ננסה כעת לפתור בצורה ישירה את המד"ר $\frac{dh}{dt}+\frac{R}{L}h=\frac{1}{L}\delta(t)$, לא ע"י שימוש במעבר דרך פונקצית המדרגה.

בעיה זו הינה בעיית ZSR. לפיכך נתון כי $h(t=0^-)=0$ ועל כן: $h(t<0)=0$.

מתוך התבוננות במד"ר, ניתן להבחין כי $h(t)$ מכילה אי רציפות מסדר ראשון (קפיצה סופית) בראשית, כך שהנגזרת שלה מכילה הלם. $h(t)$ אינה יכולה להכיל קפיצה אינסופית בראשית (הלם או נגזרותיה), כיוון שאז המד"ר לא תתקיים (אגף ימין היה צריך להכיל גם נגזרות של הלם).

עבור הזמנים $t>0$, כאמור המשוואה היא הומוגנית: $\frac{dh}{dt}+\frac{R}{L}h=0$. לכן הופעתה של פונקצית ההלם בזמן $t=0$, רק תשנה לנו את תנאי התחלה לת"ה חדש בזמן $t=0^+$.

אם כן נסיק כי: $h(t)=i_h(t)u(t)$, כאשר $i_h(t)$ הינה פתרון של המשוואה ההומוגנית המתאימה. כל שנותר לעשות הוא למצוא מהם תנאי ההתחלה בזמן $t=0^+$ שנוצרו ע"י ההלם, ולפתור את המשוואה ההומוגנית.

על מנת למצוא את ת"ה $h(t=o^+)$, נבצע אינטגרציה מזמן $t=0^-$ ועד לזמן $t=0^+$ על המד"ר:

$$\int_{0^-}^{0^+}h'(t)dt+\frac{R}{L}\int_{0^-}^{0^+}h(t)dt=\frac{1}{L}\int_{0^-}^{0^+}\delta(t)dt$$

כדי לפתור את המשוואה הזו, נזכור ש - $h(t)$ מכילה קפיצה סופית בלבד בראשית ועל כן האינטגרל על פניה בתחום אינפיטיסימלי הינו אפס. בנוסף מתקיים: $\int_{0^-}^{0^+}\delta(t)dt=1$. לכן נקבל: $h(0^+)-h(0^-)+\frac{R}{L}0=\frac{1}{L}1$.

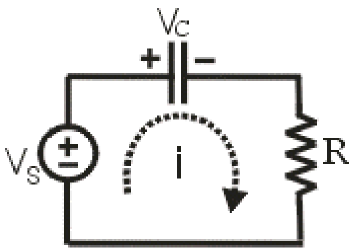
אמרנו כבר ש - $h(0^-)=0$, כי זהו פתרון ZSR, ולכן סה"כ: $h(0^+)=\frac{1}{L}$, וזהו ת"ה החדש שחיפשנו.

כעת, אם נפתור את המד"ר: $\frac{dh}{dt}+\frac{R}{L}h=0$; $h(0^+)=\frac{1}{L}$, נקבל: $h(t)=\frac{1}{L}e^{-\frac{R}{L}t}u(t)$. כמובן שהגענו לאותו פתרון בשתי הדרכים.

<u>לסיכום:</u> במד"ר בה מופיעה פונקצית הלם באגף ימין ניתן להסיק כי השפעתה הינה שינוי של ת"ה מזמן $t=0^-$ (בו הם אפס) לזמן $t=0^+$ ופתרון המד"ר עבור t>0 יהיה זהה לפתרון המשוואה ההומוגנית עם ת"ה החדש.

<u>דוגמא 2:</u>

נמצא את תגובת הזרם (ZSR) לעירור מדרגה בתנאי התחלה אפס במעגל הבא, וגם את תגובת ההלם:



נרשום את הקשרים הבאים:

$$V_C=V(0)+\frac{1}{C}\int_0^t idt \qquad i=i_c=i_r=C\frac{dV_C}{dt}$$

מתוך KVL נקבל:

$$V_s(t)=V_C+V_R$$

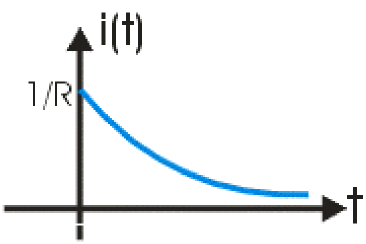
$$V_S(t)=V(0)+\frac{1}{C}\int_0^t idt+iR$$

נתון עירור מדרגה: $V_S(t)=u(t)$, ות"ה $V(0)=0$ (כי אנו מחפשים פתרון ZSR).

נרשום את המשוואה מחדש במונחי המטען במקום הזרם. מתקיים: $i=\frac{dq}{dt}$, ולכן מהצבה במשוואה נקבל:

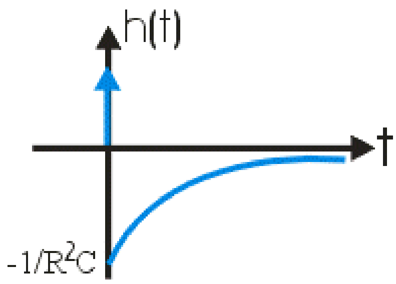
$$u(t)=\frac{1}{C}q+R\frac{dq}{dt}$$

באופן שקול:
$$\begin{cases}\frac{dq}{dt}+\frac{1}{RC}q=\frac{1}{R}u(t)\\ q(0)=0\end{cases}$$



הפתרון הוא: $q(t)=C\left(1-e^{-\frac{t}{RC}}\right)u(t)$ ומכאן נגזור:

$$i(t)=\frac{dq(t)}{dt}=\frac{1}{R}e^{-\frac{t}{RC}}u(t)$$



$$\Downarrow$$

$$h(t)=\frac{di(t)}{dt}=-\frac{1}{R^2C}e^{-\frac{t}{RC}}u(t)+\frac{1}{R}\delta(t)$$

גישת פתרון שונה לדוגמא זו:

$$\frac{1}{C}\int_0^t i\,dt+V(0)+iR=V_S(t)$$

נבצע גזירה $\frac{d}{dt}$ של כל אברי המשוואה: $\quad \frac{1}{C}i+i'R=V_S'(t) \quad$ (*)

תחילה נפתור בעיית ZSR (עם ת"ה 0) עבור מקור מדרגה $u(t)$ כלומר:

$$(**)\quad \begin{cases}\frac{1}{C}i_1+i_1'R=u(t)\\ i_1(0)=0\end{cases}$$

נשים לב שלמרות שנתון $V_S(t)=u(t)$ ולפי המשוואה (*) היינו צריכים להציב: $V_S'(t)=u'(t)=\delta(t)$, בכל זאת הצבנו $u(t)$ ב (**). נפתור קונפליקט זה ע"י גזירת הפתרון ל-(**).

כפי שכבר ראינו, הפתרון למשוואה (**) הוא: $i_1(t)=C\left(1-e^{-\frac{t}{RC}}\right)u(t)$.

אבל כאמור כעת עלינו לגזור על מנת לקבל את הפתרון האמיתי:

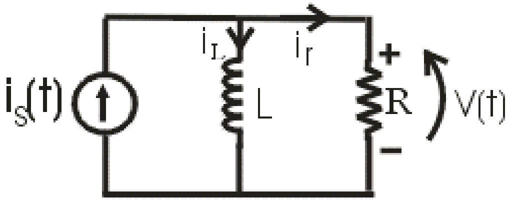
$$i(t)=i_1'(t)=\frac{1}{R}e^{-\frac{t}{RC}}u(t)+C(1-e^{-\frac{t}{RC}})\delta(t)=\frac{1}{R}e^{-\frac{t}{RC}}u(t)$$

ולכן: $h(t)=i'(t)=-\frac{1}{R^2C}e^{-\frac{t}{RC}}u(t)+\frac{1}{R}\delta(t)$, כפי שהתקבל גם בדרך הפתרון הראשונה.

Lecture 5 27.11.06

<u>דוגמא 3</u>:

במעגל הבא, מצא את המתח $V(t)$:



פתרון:

$$L\frac{di_L}{dt}=i_rR$$
$$i_L(t)+i_r(t)=i_s(t)$$
$$\Downarrow$$
$$i_L(t)+\frac{L}{R}\frac{di_L}{dt}=i_s(t)$$

עבור העירור: $i_s(t)=u(t)\cdot I_S$, $i_L(0)=0$ נקבל: $i_L(t)+\frac{L}{R}\frac{di_L}{dt}=u(t)\cdot I_s$.

הפתרון המתקבל הוא: $i_L(t)=\left(1-e^{-\frac{R}{L}t}\right)u(t)\cdot I_S \quad \Leftarrow \quad i_r(t)=e^{-\frac{R}{L}t}u(t)\cdot I_S$

ולכן המתח הוא: $V(t)=L\frac{di_L}{dt}=Re^{-\frac{R}{L}t}u(t)\cdot I_S$.

בואו נראה את התפלגות ההספק בכל רגע ורגע:

ההספק המסופק ע"י המקור: $P_S(t)=V(t)\cdot i_s(t)=[I_su(t)]\cdot\left[Re^{-\frac{R}{L}t}I_su(t)\right]=R\cdot I_S^2\cdot e^{-\frac{R}{L}t}u(t)$

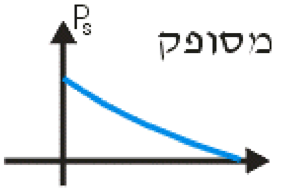
ההספק הנאגר ע"י הסליל:

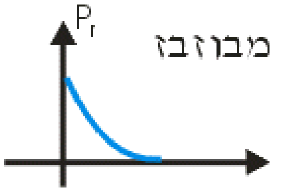
$$P_L(t)=V(t)\cdot i_L(t)=RI_S{}^2e^{-\frac{R}{L}t}\cdot\left(1-e^{-\frac{R}{L}t}\right)u(t)$$

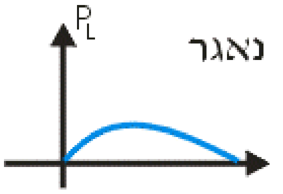
וההספק המתבזבז על הנגד:

$$P_r(t)=V(t)\cdot i_r(t)=RI_S{}^2e^{-2\frac{R}{L}t}u(t)$$

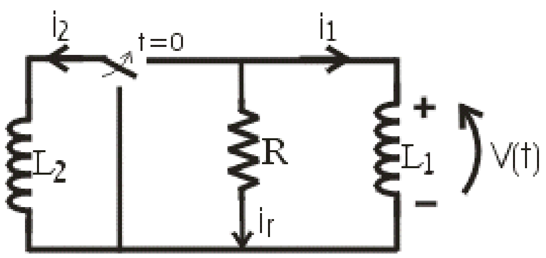
התפלגות ההספק באופן גרפי:







כלומר, ניתן לראות שסכום ההספק המבוזבז וההספק הנאגר שווה בדיוק להספק המסופק למעגל.



<u>דוגמא 4</u>:

ZIR מצא את $V(t)$ במעגל הנתון.

$i_1(0)=0$

$i_2(0)=I_0$

פתרון: מתוך KCL:

$$i_1+i_2+i_r=0$$

$$V_r=V_1=V_2=V$$

$$i_1=i_1(0)+\frac{1}{L_1}\int Vdt$$

$$i_2=i_2(0)+\frac{1}{L_2}\int Vdt$$

נציב במשוואה הראשונה:

$$i_1(0)+\frac{1}{L_1}\int Vdt+i_2(0)+\frac{1}{L_2}\int Vdt+\frac{V}{R}=0$$

$$i_1(0)+i_2(0)+\left(\frac{1}{L_1}+\frac{1}{L_2}\right)\int Vdt+\frac{V}{R}=0$$

נגזור $\frac{d}{dt}$ ונקבל:
$$\left(\frac{1}{L_1}+\frac{1}{L_2}\right)V+\frac{V'}{R}=0$$
$$V+\frac{1}{R\left(\frac{1}{L_1}+\frac{1}{L_2}\right)}V'=0$$

שימו לב שעבור משוואות הומוגניות, תמיד נעדיף להביא את המד"ר לצורה שבה המקדם של הנגזרת הגבוהה ביותר הוא 1. באופן זה נוכל לדעת מיידית את המקדם בחזקה של האקספוננט:
$$y'+By=0 \Rightarrow y(t)=Ae^{-\frac{1}{B}t}$$

בחזרה למקרה שלנו, מאותם שיקולים:
$$V(t)=V_0e^{-R\left(\frac{1}{L_1}+\frac{1}{L_2}\right)t}$$

נמצא את הקבוע V_0:
$$i_R(t)=\frac{V(t)}{R}=\frac{V_0e^{-R\left(\frac{1}{L_1}+\frac{1}{L_2}\right)t}}{R}$$

מתקיים תמיד:
$$i_1(t)+i_R(t)+i_2(t)=0$$

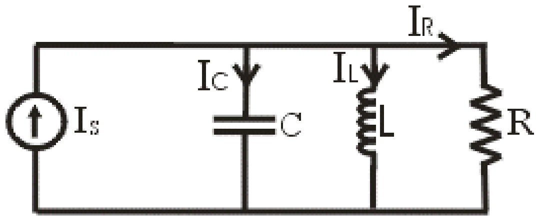
נתון כי ב $t=0$ מתקיים: $i_1(0)=0$; $i_2(0)=I_0$ ולכן נציב:
$$i_1(t=0)+i_R(t=0)+i_2(t=0)=0 \Rightarrow 0+i_R(t=0)+I_0=0 \Rightarrow$$
$$i_R(t=0)=-I_0 \Rightarrow \frac{V_0}{R}=-I_0 \Rightarrow V_0=-I_0R$$

כלומר סה"כ המתח הוא:
$$V(t)=-I_0\,Re^{-R\left(\frac{1}{L_1}+\frac{1}{L_2}\right)t}$$

פרק 5: מעגלים מסדר שני

מעגלים מסדר שני הם מעגלים שתגובתם ניתנת לתיאור ע"י משוואה דיפרנציאלית מסדר שני.
כמו במעגלים מסדר ראשון, נפריד את הפתרון לשני חלקים: פתרון ZIR ופתרון ZSR.

נתבונן במעגל הבא:



$$\text{KVL:}\qquad V = V_C = V_L = V_r$$

$$\text{KCL:}\qquad i_S = i_C + i_L + i_r$$

נרשום את הקשרים הבאים:

$$i_C = C\frac{dV_C}{dt} \qquad i_L = i_L(0) + \frac{1}{L}\int_0^t V_L dt' \qquad i_r = \frac{V_r}{R}$$

ונציב במשוואת הזרמים:
$$C\frac{dV}{dt} + i_L(0) + \frac{1}{L}\int_0^t V dt + \frac{V}{R} = i_S$$

פתרון ה - ZIR

נתחיל בפתרון ה - ZIR. עבורו העירור הוא אפס, כלומר: $i_S = 0$. לכן המד"ר שצריך לפתור היא:

$$C\frac{dV}{dt} + i_L(0) + \frac{1}{L}\int_0^t V dt + \frac{V}{R} = 0$$

או המד"ר הבאה שמתקבלת מגזירת המד"ר שלעיל ויותר נוחה לנו מבחינת ההצגה:

$$C\frac{d^2V}{dt^2} + \frac{1}{R}\frac{dV}{dt} + \frac{1}{L}V = 0$$

$$LCV'' + \frac{L}{R}V' + V = 0$$

וכאמור קיבלנו משוואה דיפרנציאלית מסדר שני המתארת את תגובת המתח במעגל.
אפשרות אחרת היא לרשום משוואה המתארת את תגובת הזרם i_L:

נרשום את הקשרים הבאים:
$$i_r = \frac{V}{r} = \frac{L}{R}\frac{di_L}{dt} \qquad\qquad i_C = C\frac{dV}{dt} = CL\frac{d^2 i_L}{dt^2}$$

$$V = L\frac{di_L}{dt}$$

וכעת נציב אותם במשוואת הזרמים ונאפס את המקור:
$$CLi_L'' + \frac{L}{R}i_L' + i_L = i_S = 0$$

נתונים גם שני תנאי התחלה:
$$i_L(0) = I_0 \qquad ; \qquad L\left.\frac{di_L}{dt}\right|_{t=0} = V(0) = V_0.$$

אם כן, קיבלנו את המשוואה הדיפרנציאלית מסדר שני: $I_L'' + \frac{1}{RC}i_L' + \frac{1}{LC}i_L = 0$, בנוסף לת"ה הרשומים מעלה.
כאשר המד"ר מוצגת בצורה זו שבה מקדם הנגזרת השנייה של הפונקציה הוא 1, נהוג להגדיר: 2α - מקדם הנגזרת הראשונה, w_0^2 - מקדם הפונקציה עצמה.

ל- w_0 קוראים תדר התהודה של המעגל, ובמקרה שלנו: $w_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

ל- α קוראים קבוע הדעיכה של המעגל, ובמקרה שלנו: $\alpha = \frac{1}{2RC}$.

בהמשך נדון במשמעות שני הגדלים הנ"ל.

תוך שימוש בהגדרה שלעיל נקבל: $i_L'' + 2\alpha i_L' + {w_0}^2 i_L = 0$

כמו בפתרון מעגלים מסדר ראשון, נציב לניסיון את הפתרון $i_L = Ae^{st}$:

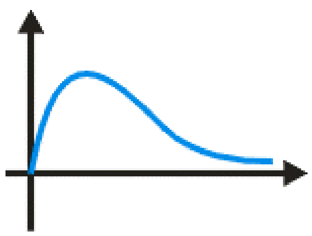
ונקבל: $\left(S^2 + 2\alpha S + {w_0}^2\right)Ae^{St} = 0$

$$\boxed{S^2 + 2\alpha S + {w_0}^2 = 0}$$

וזוהי המשוואה האופיינית של המעגל.

למשוואה זו שני פתרונות אפשריים: $S_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - {w_0}^2}$

בהנחה ש: $0 \le L,R,C$ ישנן 3 אפשרויות לאופי הפתרון:



א. $\alpha > w_0 \;\leftarrow\; S_1, S_2$ הם שני שורשים ממשיים ושליליים.

הפתרון הוא: $i_L(t) = A_1 e^{S_1 t} + A_2 e^{S_2 t}$

פתרון זה נקרא פתרון בריסון יתר.
משמאל מוצגת התנהגות הפתרון כפונקציה של הזמן.
ריסון היתר מתייחס לעובדה כי הפתרון דועך בצורה מונוטונית.

ב. $\alpha = w_0 \;\leftarrow\; S_1 = S_2 = -\alpha$ והפתרון הוא:

$$i_L(t) = (A_1 + A_2 t)e^{-\alpha t}$$

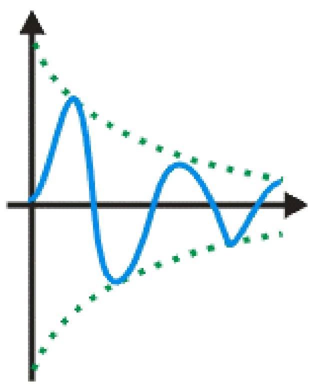
פתרון זה נקרא פתרון בריסון קריטי.
התנהגותו בזמן דומה לזו של ריסון היתר.

ג. $\alpha < w_0 \;\leftarrow\; S_1, S_2$ הם שורשים מרוכבים צמודים:

$$S_1 = -\alpha + jw_d$$
$$S_2 = -\alpha - jw_d$$

כאשר סימנו: $w_d = \sqrt{{w_0}^2 - \alpha^2}$

הפתרון במקרה זה הוא:



$$\begin{aligned}
i_L(t) &= A_1 \exp[(-\alpha + jw_d)t] + A_2 \exp[(-\alpha - jw_d)t] = \\
&= \exp[-\alpha t](A_1 \exp[jw_d t] + A_2 \exp[-jw_d t]) = \\
&= \exp[-\alpha t]((A_1 + A_2)\cos w_d t + j(A_1 - A_2)\sin w_d t) = \\
&= \exp[-\alpha t](B \cdot \cos w_d t + C \cdot \sin w_d t) = \\
&= K \cdot \exp[-\alpha t]\cos(w_d t + \phi)
\end{aligned}$$

המקדמים A_1, A_2 קומפלקסים
ובעקבות ת.ה. ממשיים מתקבל
גם פתרון ממשי.

פתרון זה נקרא <u>פתרון בתת ריסון</u>. התנהגותו בזמן מוצגת משמאל.
ההתנדנדויות המופיעות בגרף קשורות בעובדה שאנו תת ריסון.

<u>הכנסת תנאי התחלה</u>

כאמור ישנם שני תנאי התחלה $i_L(0)=I_0$ $\quad L\frac{di_L}{dt}\Big|_{t=0}=V_0(0)=V_0$

הבעיה כעת היא מציאת A_1, A_2 מתוך I_0 ו- V_0.

א. עבור ריסון יתר:

$$i_L(t)=A_1e^{S_1t}+A_2e^{S_2t}$$

ת"ה ראשון:

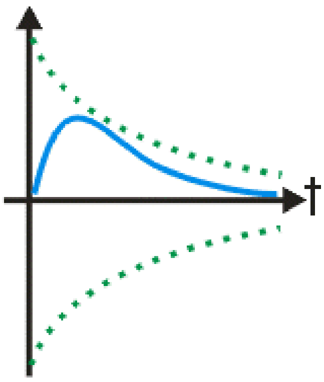
נציב t=0 : $\quad$ I) $\quad A_1+A_2=I_0$

ת"ה שני:

$$V(0)=L\frac{di_L}{dt}\Big|_{t=0}=LA_1S_1e^{S_1t}\Big|_{t=0}+LA_2S_2e^{S_2t}\Big|_{t=0}$$

נשווה ל- V_0 : $\quad$ II) $\quad V_0=LS_1A_1+LS_2A_2$

פתרון מערכת המשוואות I+II מוביל ל $\quad A_2=\frac{I_0LS_1-V_0}{L(S_1-S_2)}\ ;\ A_1=\frac{V_0-LS_2I_0}{L(S_1-S_2)}$

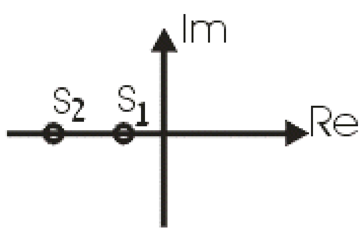


נציב את המקדמים לקבלת הפתרון עבור i_L :

$$i_L(t)=\frac{-I_0}{S_1-S_2}\left(S_2e^{S_1t}-S_1e^{S_2t}\right)+\frac{V_0}{L(S_1-S_2)}\left(e^{S_1t}-e^{S_2t}\right)$$

שרטוט הפתרון כפונקציה של הזמן מוראה משמאל:

נהוג לציין את מיקום השורשים במישור המרוכב בו ציר x הינו החלק הממשי
וציר y הינו החלק המדומה של השורש.
עבור ריסון יתר, מיקום שורשי המשוואה האופיינית על פני המישור המרוכב:



ב. עבור ריסון קריטי: $\quad i_L(t)=(A_1+A_2t)e^{-\alpha t}$

$$S_1=S_2=-\alpha$$

ת"ה ראשון:

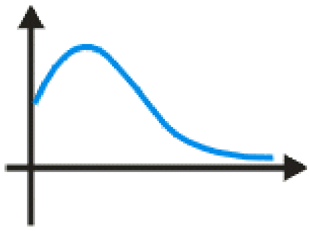
$$\text{I)}\quad I_0 = A_1$$

ת"ה שני:

$$\text{II)}\quad \frac{Ldi_L}{dt}\bigg|_{t=0} = LA_2e^{-\alpha t}\bigg|_{t=0} + L(-\alpha)(A_1 + A_2t)e^{-\alpha t}\bigg|_{t=0} = L(A_2 - \alpha A_1) = V_0$$

פתרון מערכת המשוואות I+II מוביל למקדמים הבאים:

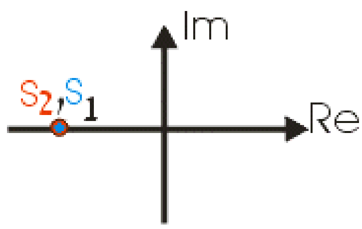
$$\begin{cases} A_1 = I_0 \\ A_2 = \dfrac{V_0}{L} + \alpha I_0 \end{cases}$$



נציב את המקדמים בפתרון:

$$i_L(t) = \left(I_0 + \left(\frac{V_0}{L} + \alpha I_0\right)t\right)e^{-\alpha t}$$

מיקום שורשי המשוואה האופיינית על פני המישור המרוכב:



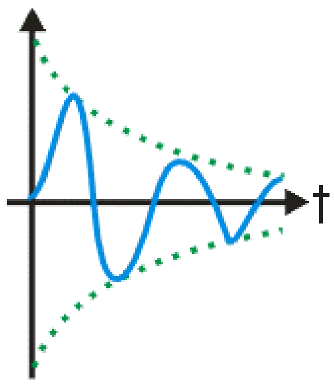
ג. עבור תת ריסון:

$$i_L(t) = A_1e^{S_1t} + A_2e^{S_2t}$$

$$S_{1,2} = -\alpha \pm iw_d$$

$$\Downarrow$$

$$S_2 - S_1 = +2jw_d$$



ת"ה ראשון:

$$\text{I)}\quad A_1 + A_2 = I_0$$

ת"ה שני:

$$\text{II)}\quad \frac{Ldi_L}{dt}\bigg|_{t=0} = L(-\alpha + jw_d)A_1 + L(-\alpha - jw_d)A_2 = V_0$$

פתרון מערכת המשוואות I+II מוביל למקדמים הבאים:

$$\begin{cases} A_1 = \dfrac{I_0L(\alpha + jw_d) + V_0}{2Ljw_d} \\ A_2 = \dfrac{I_0L(-\alpha + jw_d) - V_0}{2Ljw_d} \end{cases}$$

נציב את המקדמים בפתרון:

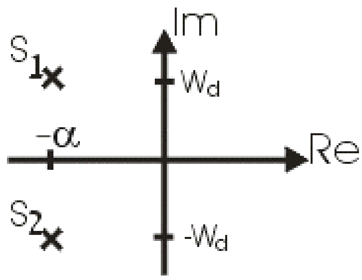
$$i_L(t)=\frac{I_0L(\alpha+jw_d)+V_0}{2Ljw_d}\exp[(-\alpha+jw_d)t]+\frac{I_0L(-\alpha+jw_d)-V_0}{2Ljw_d}\exp[(-\alpha-jw_d)t]=$$

$$=-\frac{I_0}{2jw_d}e^{-\alpha t}\left((-\alpha-jw_d)e^{jw_dt}-(-\alpha+jw_d)^{-jw_dt}\right)+\frac{V_0}{2jLw_d}e^{-\alpha t}\left(e^{jw_d}-e^{-jw_dt}\right)=$$

$$=\frac{I_0}{w_d}e^{-\alpha t}\left(\alpha\sin(w_dt)+w_d\cos(w_dt)\right)+\frac{V_0}{Lw_d}e^{-\alpha t}\sin w_dt$$

כאשר בשוויון האחרון השתמשנו בזהויות: $\sin x=\frac{e^{jx}-e^{-jx}}{2j}$, $\cos x=\frac{e^{jx}+e^{-jx}}{2}$.

מיקום שורשי המשוואה האופיינית על פני המישור המרוכב:



<u>מקדם איכות:</u>

נחזור להצגה הבאה של המד"ר: $i_L''+2\alpha i_L'+w_0^2i_L=0$.

נהוג לסמן: $Q=\frac{w_0}{2\alpha}$. הגורם Q נקרא <u>מקדם האיכות</u> של המערכת.

ניתן לרשום את פתרונות המד"ר בעזרת Q:
$$S_{1,2}=w_0\left(-\frac{1}{2Q}\pm\sqrt{\frac{1}{4Q^2}-1}\right)$$

צריך לשים לב ש: $0\le Q\le\infty$.

עבור $Q<\frac{1}{2}$ אנו בריסון יתר.

עבור $Q=\frac{1}{2}$ אנו בריסון קריטי.

עבור $Q>\frac{1}{2}$ אנו בתת ריסון.

עבור המקרה של תת ריסון $\left(Q>\frac{1}{2}\right)$ ניתן לתת את המשמעות הפיזיקלית הבאה:

תחת הקירוב: $w_d \approx w_0$ $\left[\ 1 << Q \ \Rightarrow\ 2\alpha << w_0 \ \Rightarrow\ w_d = \sqrt{{w_0}^2 - \alpha^2} \approx w_0 \ \right]$ מתקיים:

w_0 נותן מידע על תדר התנדנדות המערכת (הקו הכחול בציור של מקרה ג' בעמוד הקודם), ו- α נותן מידע על קצב דעיכת המעטפת (הקו הירוק בציור של מקרה ג' בעמוד הקודם).

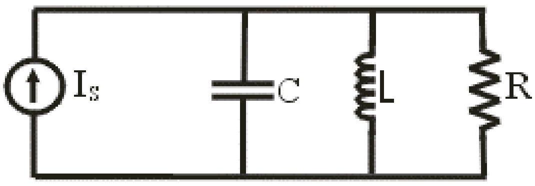
לכן במקרה זה:

$$Q = \frac{w_0}{2\alpha} = \frac{\text{תדר התנדנדות}}{\text{קצב דעיכה}} = \frac{\text{זמן דעיכה}}{\text{זמן מחזור}}$$

פתרון ה - ZSR

נעבור כעת לפתרון ה ZSR, כאשר הכניסה למעגל היא כניסת מדרגה: $i_s(t) = u(t)$.

ניזכר שוב במעגל אותו אנו פותרים:



כרגיל בתגובת ZSR, המצב ההתחלתי הוא אפס:

$$i_L(0^-) = 0 \ ; \qquad V(0^-) = L\frac{di_L}{dt}(t = 0^-) = 0$$

והמשוואה הדיפרנציאלית היא:

$$LC\frac{d^2 i_L(t)}{dt^2} + \frac{L}{R}\frac{di_L(t)}{dt} + i_L(t) = i_S = u(t)$$

הפתרון הוא סכום של פתרון פרטי ופתרון המשוואה ההומוגנית: $i_L = i_h + i_p$.

הפתרון הפרטי (לאחר ניחוש קבוע והצבה במד"ר) עבור t>0: $i_p = 1$.

הפתרון ההומוגני - ראינו קודם שמתקיים: $i_h = A_1 e^{S_1 t} + A_2 e^{S_2 t} = Ae^{-\alpha t}\cos(w_d t + \phi)$

עבור ריסון יתר   עבור תת ריסון

לכן פתרון ה ZSR הכולל הוא סכום שני הפתרונות: $i_L = \left(A_1 e^{S_1 t} + A_2 e^{S_2 t} + 1\right)u(t)$.

כעת נשתמש בתנאי ההתחלה כדי למצוא את המקדמים:

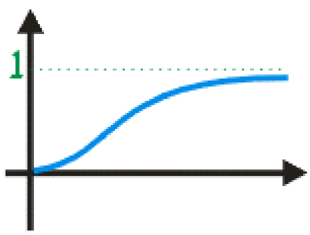
עבור התנאי $i_L(0^-) = 0$ נקבל: $A_1 + A_2 + 1 = 0$.

עבור התנאי $V(0^-) = 0$ נקבל: $A_1 S_1 + A_2 S_2 = 0$.

מפתרון שתי המשוואות נקבל: $A_1 = \frac{S_2}{S_1 - S_2} \ ; \quad A_2 = \frac{-S_1}{S_1 - S_2}$.

נציב חזרה את המקדמים בפתרון:

$$i_L(t) = \left[\frac{1}{S_1 - S_2}\left(S_2 e^{S_1 t} - S_1 e^{S_2 t}\right) + 1\right]u(t)$$



וזהו הפתרון עבור ריסון יתר.

השורשים במקרה של תת ריסון הם: $S_{1,2}=-\alpha\pm jw_d$ ולכן הפתרון הוא:

$$i_L(t)=\left\{\frac{e^{-\alpha t}}{2jw_d}\left[(-\alpha-jw_d)e^{jw_d t}-(-\alpha+jw_d)e^{-jw_d t}\right]+1\right\}u(t)$$

$$i_L(t)=\left\{\frac{e^{-\alpha t}}{2jw_d}\left[-\alpha 2j\sin(w_d t)-(jw_d)2\cos(w_d t)\right]+1\right\}u(t)$$

$$i_L(t)=\left\{-\frac{e^{-\alpha t}}{w_d}\left[w_d\cos(w_d t)+\alpha\sin(w_d t)\right]+1\right\}u(t)$$

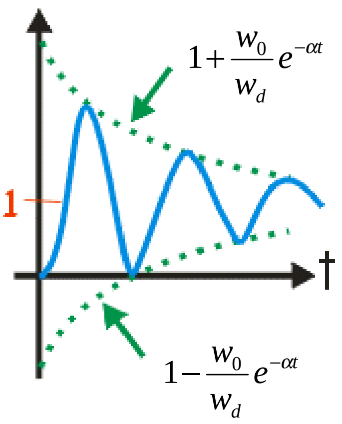
בכדי לשרטט את הפתרון בצורה נוחה יותר, נגדיר φ המקיים:

$$\cos\varphi=\frac{w_d}{\sqrt{w_d^{\,2}+\alpha^2}}=\frac{w_d}{w_0}\quad\Rightarrow\quad=\frac{\alpha}{w_0}\ \ \sin\varphi=\frac{\alpha}{\sqrt{w_d^{\,2}+\alpha^2}}$$

ניעזר בזהות: $\cos\varphi\cdot\cos(w_d t)+\sin\varphi\cdot\sin(w_d t)=\cos(w_d t-\varphi)$

ואז נקבל לפי ההגדרה:

$$i_L(t)=\left[-\frac{w_0}{w_d}e^{-\alpha t}\cos(w_d t-\varphi)+1\right]u(t)$$



מצאנו, אם כן, את תגובת ה ZSR של הזרם עבור כניסת מדרגה.
כעת נרצה לדעת מהי תגובת המתח על הקבל עבור אותה כניסה.

עבור ריסון יתר:

$$V_C(t)=L\frac{di_L}{dt}=L\frac{d}{dt}\left\{\left[\frac{1}{S_1-S_2}\left(S_2e^{S_1 t}-S_1e^{S_2 t}\right)+1\right]u(t)\right\}=$$

$$=L\left\{\frac{S_2S_1}{S_1-S_2}\left(e^{S_1 t}-e^{S_2 t}\right)u(t)+\left[\frac{S_2-S_1}{S_1-S_2}+1\right]\delta(t)\right\}=$$

$$=L\left\{\frac{S_2S_1}{S_1-S_2}\left(e^{S_1 t}-e^{S_2 t}\right)u(t)+[0]\delta(t)\right\}=$$

$$=L\frac{S_2S_1}{S_1-S_2}\left(e^{S_1 t}-e^{S_2 t}\right)u(t)$$

עבור תת ריסון:

נציב:
$$S_{1,2}=-\alpha\pm jw_d \quad , \quad W_d=\sqrt{W_0^{\ 2}-\alpha^2}$$
$$S_1S_2=\alpha^2+w_d^{\ 2}=\alpha^2+w_0^{\ 2}-\alpha^2=w_0^{\ 2} \quad , \quad S_1-S_2=+2jw_d$$

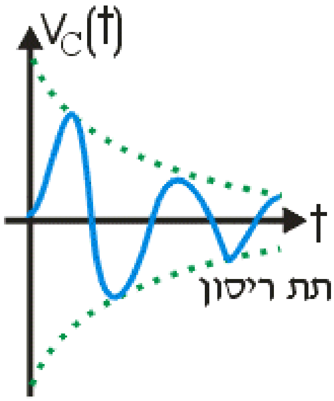
ונקבל:
$$V_C(t)=L\frac{w_0^{\ 2}}{(+2jw_d)}e^{-\alpha t}\left(e^{jw_dt}-e^{-jw_dt}\right)=L\frac{w_0^{\ 2}}{w_d}e^{-\alpha t}\sin(w_dt)u(t)$$

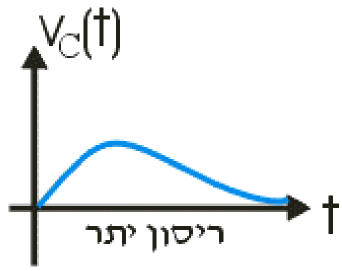
נבדוק האם אותה תוצאה מתקבלת כאשר גוזרים ישירות את התוצאה שהתקבלה עבור הזרם במקרה של תת ריסון:

$$i_L(t)=\left[-\frac{w_0}{w_d}e^{-\alpha t}\cos(w_dt-\varphi)+1\right]u(t)$$

$$V_C(t)=L\frac{di_L}{dt}=L\frac{w_0}{w_d}\left[\alpha e^{-\alpha t}\cos(w_dt-\varphi)+w_de^{-\alpha t}\sin(w_dt-\varphi)\right]u(t)$$
$$=L\frac{w_0}{w_d}\left[w_0\sin\varphi\cdot e^{-\alpha t}\cos(w_dt-\varphi)+w_0\cos\varphi\cdot e^{-\alpha t}\sin(w_dt-\varphi)\right]u(t)=$$
$$=L\frac{w_0^{\ 2}}{w_d}e^{-\alpha t}\sin(w_dt)$$

עבור המתח, קיבלנו בסופו של דבר את צורות הגל הבאות. הן דומות לצורות הזרם, מכיוון שגם הפתרון האנליטי של המתח נראה באותה צורה כמו הפתרון עבור הזרם:





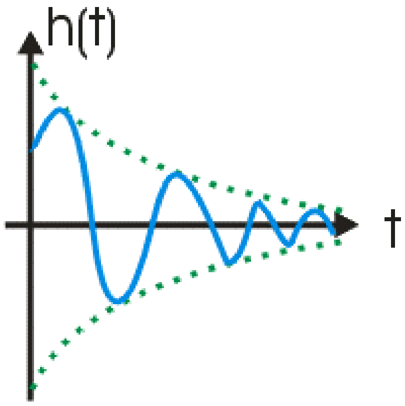
נעבור למציאת תגובת ההלם עבור המתח $V_C(t)$:

עבור ריסון יתר תגובת המדרגה היא:
$$V_C(t)=L\frac{S_1S_2}{S_1-S_2}\left(e^{S_1t}-e^{S_2t}\right)u(t)$$

נגזור את התגובה למדרגה כדי למצוא את התגובה להלם:
$$h(t)=L\frac{S_1S_2}{S_1-S_2}\left(S_1e^{S_1t}-S_2e^{S_2t}\right)u(t)$$

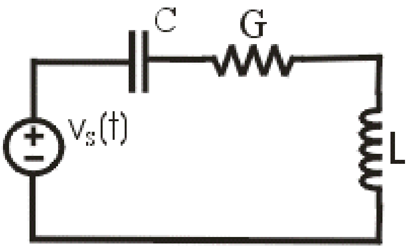
עבור תת ריסון תגובת המדרגה היא:
$$V_C(t)=L\frac{w_0^{\ 2}}{w_d}e^{-\alpha t}\sin(w_dt)u(t)$$

שוב נגזור את התגובה למדרגה כדי למצוא את התגובה להלם:
$$h(t)=L\frac{w_0^{\ 2}}{w_d}\left[-\alpha\sin w_dt+w_d\cos(w_dt)\right]e^{-\alpha t}u(t)=L\frac{w_0^{\ 3}}{w_d}\cos(w_dt+\varphi)e^{-\alpha t}u(t)$$



כאשר בשוויון השני השתמשנו בהגדרת φ שהוזכרה מעלה.

<u>מעגל RLC טורי מול מקבילי   עקרון הדואליות</u>



נתבונן במעגל הטורי הבא:

$$\text{KVL} \qquad V_S = V_G + V_C + V_L$$
$$\text{KCL} \qquad i_G = i_C = i_L$$

$$i_C = C\frac{dV_C}{dt} \qquad i_L = I_0 + \frac{1}{L}\int V_L dt \qquad i_G = GV_G$$

נזכיר ש: $G = \frac{1}{R}$ היא מוליכות.

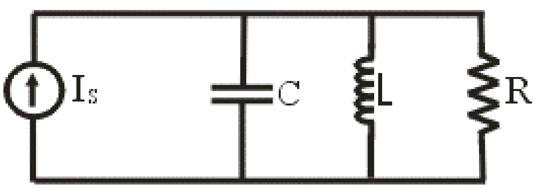
בהינתן V_C מתקיים:

$$V_G = \frac{i}{G} = \frac{C}{G}\frac{dV_C}{dt} \quad ; \quad V_L = L\frac{di}{dt} = LC\frac{d^2V_C}{dt^2}$$

נרשום משוואה עבור V_C לפי KVL:

$$LC\frac{d^2V_C}{dt^2} + \frac{C}{G}\frac{dV_C}{dt} + V_C = V_S \ ; \quad \left.\frac{CdV_0}{dt}\right|_{t=0} = I_0, \quad V_C(0) = V_0$$

כזכור עבור מעגל RLC מקבילי קיבלנו:



$$CL\frac{d^2I_L}{dt^2} + \frac{L}{R}\frac{dI_C}{dt} + i_L = i_S(t) \qquad i_L(0) = I_0 \quad ; \quad \left.\frac{Ldi_L}{dt}\right|_{t=0} = V_0$$

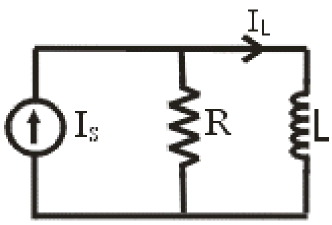
ניתן לראות כי הן המשוואות והן תנאי ההתחלה זהים במבנה שלהם. לכן תוך שימוש בדואליות הבאה ניתן לנתח מעגל אחד מתוך השני:

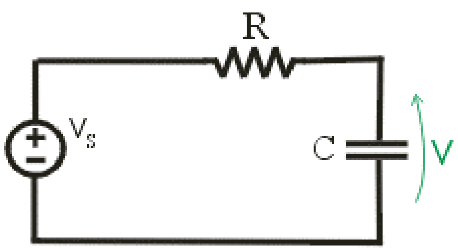
מקבילי	טורי
מתח	זרם
מקור מתח	מקור זרם
L	C
R	$G=\frac{1}{R}$
KVL	KCL
צומת	עניבה (חוג)
נתק	קצר

במילים אחרות: מתח על קבל $\leftrightarrow$ זרם על סליל.
ניתן לראות שאם ניקח את הפתרון עבור המעגל המקבילי ונחליף בו את הגורמים המתאימים לפי הטבלה, נקבל בדיוק את הפתרון למעגל הטורי שהתקבל ע"י חישוב.

דוגמאות נוספות לדואליות:

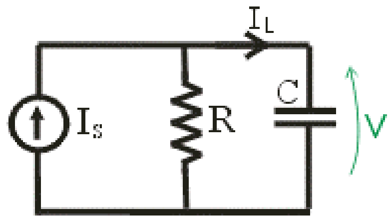
.1



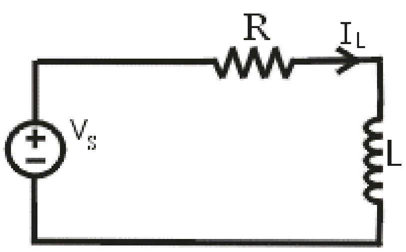


$$\frac{V}{dt}+V=V_S$$

.2

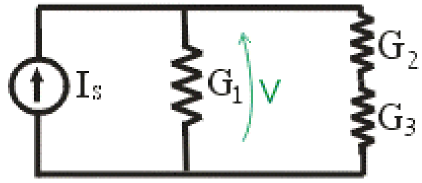


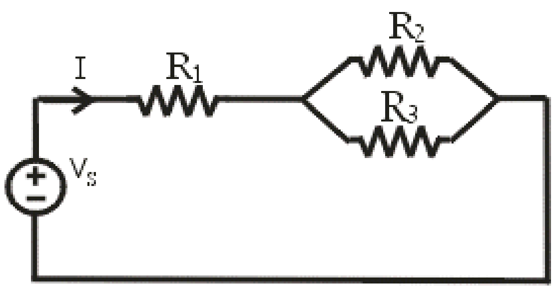
$$\frac{V_C}{R}+C\frac{dV}{dt}=I_S$$



$$Ri_L+L\frac{di_L}{dt}=V_S$$

.3



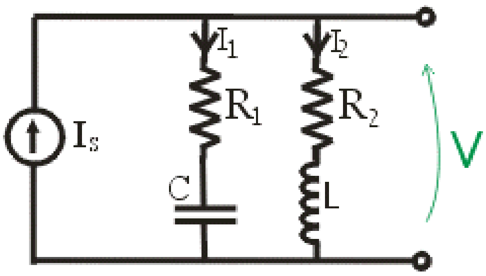


$$V=I_S\cdot\frac{1}{G_1+\dfrac{G_2G_3}{G_2+G_3}}=$$

$$=I_S\cdot\frac{G_2+G_3}{G_1G_2+G_1G_3+G_2G_3}$$

$$I=\frac{V_S}{R_1+\dfrac{R_2R_3}{R_2+R_3}}=V_S\cdot\frac{R_2+R_3}{R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3}$$

<u>דוגמא לפתרון ZSR של מעגל מסדר שני:</u>



מהו המתח V כתגובה לכניסת מדרגה?
תנאי ההתחלה הם אפס:

$$i_2(0)=0\ ;\ \frac{di_2(t)}{dt}\Big|(t=0)=0$$

פתרון:
נתחיל במציאת המד"ר עבור הזרם:

מתקיים: $i_S=i_1+i_2$

המתח על הענף השמאלי: $V=i_1R_1+V_0+\frac{1}{C}\int i_1dt'$

המתח על הענף הימני: $V=i_2R_2+L\frac{di_2}{dt}$

לכן מתקיים השוויון: $i_2R_2+L\frac{di_2}{dt}=i_1R_1+V_0+\frac{1}{C}\int i_1dt'$

נגזור את השוויון: $R_2\frac{di_2}{dt}+L\frac{d^2i_2}{dt^2}=R_1\frac{di_1}{dt}+\frac{1}{C}i_1$

נציב: $i_1=i_S-i_2$

נקבל: $L\frac{d^2i_2}{dt^2}+(R_1+R_2)\frac{di_2}{dt}+\frac{1}{C}i_2=R_1\frac{di_S}{dt}+\frac{i_S}{C}$

נציב: $i_S=u(t)$ ונקבל את המד"ר:

$$\boxed{Li_2''+(R_1+R_2)i_2'+\frac{1}{C}i_2=R_1\delta(t)+\frac{1}{C}u(t)}$$

פתרון ישיר למד"ר זו עלול להיות מורכב. מטעמי נוחות, אנו נפתור ראשית עבור אגף ימין הבא: $\frac{1}{C}u(t)$.

המד"ר שתתקבל: $Li_2''+(R_1+R_2)i_2'+\frac{1}{C}i_2=\frac{1}{C}u(t)$

$$i_2'' + \frac{1}{L}(R_1 + R_2)i_2' + \frac{1}{LC}i_2 = \frac{1}{LC}u(t)$$

לפי ההגדרה: $\alpha = \frac{R_1 + R_2}{2L}$ $\qquad w_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

נתחיל במקרה של תת ריסון וריסון יתר.
הפתרון ההומוגני:

שורשי המשוואה ההומוגנית הם: $S_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - w_0^{\,2}}$ ולכן: $i_h = k_1 e^{S_1 t} + k_2 e^{S_2 t}$

הפתרון הפרטי: $i_p = 1$.

לכן סה"כ הפתרון הוא: $i_2 = 1 + k_1 e^{S_1 t} + k_2 e^{S_2 t}$.

נציב ת.ה. אפס: $k_1 + k_2 + 1 = 0$

$$\left.\frac{di_2}{dt}\right|_0 = k_1 S_1 + k_2 S_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad k_2 = -\frac{S_1}{S_2}k_1$$

$$k_1\left(1 - \frac{S_1}{S_2}\right) + 1 = 0$$

$$k_1 = \frac{1}{\frac{S_1}{S_2} - 1} = \frac{S_2}{S_1 - S_2}$$

$$k_2 = \frac{S_1}{S_2 - S_1}$$

נציב את המקדמים: $i_2 = 1 + \frac{S_2 e^{S_1 t}}{S_1 - S_2} + \frac{S_1 e^{S_2 t}}{S_2 - S_1}$

באופן כללי, פתרנו את המשוואה $Ly'' + (R_1 + R_2)\,y' + \frac{1}{C}y = \frac{1}{C}u(t)$, אבל רצינו לפתור את המשוואה: $Lx'' + (R_1 + R_2)\,x' + \frac{1}{C}x = R_1\delta(t) + \frac{1}{C}u(t)$.

מכיוון שהקשר בין אגף ימין של שתי המשוואות הוא:

$$R_1\delta(t) + \frac{1}{C}u(t) = R_1\frac{d\left[C\frac{1}{C}u(t)\right]}{dt} + \frac{1}{C}u(t) = R_1 C\frac{d\left[\frac{1}{C}u(t)\right]}{dt} + \frac{1}{C}u(t)$$

אז מתקיים: $x(t) = R_1 C\frac{dy(t)}{dt} + y(t)$ (כאשר $y(t)$ הוא הפתרון לעירור $\frac{1}{C}u(t)$, ו- $x(t)$ הוא הפתרון לעירור $R_1\delta(t) + \frac{1}{C}u(t)$).

באותו אופן, כדי להגיע לפתרון עבור אגף ימין המקורי, נבצע את אותן פעולות על i_2 שמצאנו:

$$I_2 = i_2 + R_1 C\frac{di_2}{dt} = 1 + \frac{S_2 e^{S_1 t}}{S_1 - S_2} + \frac{S_1 e^{S_2 t}}{S_2 - S_1} + R_1 C\frac{d}{dt}\left[1 + \frac{S_2 e^{S_1 t}}{S_1 - S_2} + \frac{S_1 e^{S_2 t}}{S_2 - S_1}\right] =$$

$$=\left[1+e^{S_1t}\left(\frac{S_2}{S_1-S_2}+\frac{S_1S_2R_1C}{S_1-S_2}\right)+e^{S_2t}\left(\frac{S_1}{S_2-S_1}+\frac{S_1S_2R_1C}{S_2-S_1}\right)\right]u(t)$$

נציב: $S_1S_2=\alpha^2-\left(\alpha^2-w_0{}^2\right)=w_0{}^2=\frac{1}{LC}$

נקבל: $I_2=1+e^{S_1t}\cdot\frac{1}{S_1-S_2}\left[S_2+\frac{R_1C}{LC}\right]+e^{S_2t}\cdot\frac{1}{S_2-S_1}\left[S_1+\frac{R_1C}{LC}\right]u(t)=$

$$=\left[1+e^{S_1t}\cdot\frac{1}{S_1-S_2}\left[S_2+\frac{R_1}{L}\right]+e^{S_2t}\cdot\frac{1}{S_2-S_1}\left[S_1+\frac{R_1}{L}\right]\right]u(t)$$

מצאנו, אם כן, את תגובת הזרם לכניסת מדרגה אבל רצינו למצוא את תגובת המתח. לכן נציב את הפתרון עבור i_2 כדי לקבל את V:

$$V=\frac{LdI_2}{dt}+I_2R_2$$

נחזור על הפתרון עבור המקרה של ריסון קריטי:

$$i_2=k_1e^{St}+k_2te^{St}+1\quad,\quad S=-\alpha=-\frac{R_1+R_2}{2C}$$

$$i_2(0)=0\quad\Rightarrow\quad k_1=-1$$

$$i_2'(0)=0\quad\Rightarrow\quad k_1Se^{St}+k_2e^{St}+k_2Ste^{St}\Big|_0=k_1S+k_2=0\quad\Rightarrow\quad k_2=S$$

ולכן תגובת הזרם (עבור אגף ימין $\frac{1}{C}u(t)$) הינה:

$$i_2=1-e^{St}+Ste^{St}$$

והתגובה הכללית:

$$I_2=i_2+R_1C\frac{di_2}{dt}=1-e^{St}+Ste^{St}+R_1C\left[-Se^{St}+S^2te^{St}+Se^{St}\right]=1-e^{St}+te^{St}\left[S+S^2R_1C\right]$$

$$I_2=\left[1-e^{St}+te^{St}\left(S+S^2R_1C\right)\right]u(t)$$

בריסון קריטי מתקיים:

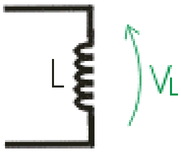
$$S^2=\underset{\downarrow}{\overset{w_0{}^2}{\ }}\ \ \underset{\downarrow}{\overset{\alpha^2}{\ }}$$

$$S^2=\alpha^2=w_0{}^2\quad\Rightarrow\quad S^2=\frac{l}{LC}=\left(\frac{R_1+R_2}{2L}\right)^2$$

ולכן נציב את S^2:

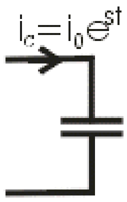
$$I=\left\{1-e^{+St}+te^{St}\left[S+\frac{1}{LC}R_1C\right]\right\}u(t)=\left\{1-e^{+St}+te^{St}\left[S+\frac{R_1}{L}\right]\right\}u(t)$$

תגובה למבוא אקספוננציאלי



נתון זרם: $i_L = i_0 e^{St}$ העובר דרך סליל.

המתח עליו: $V_L = L\dfrac{di_L}{dt} = LSi_0 e^{St} = LSi_L$



נתון זרם $i_C = i_0 e^{St}$ העובר דרך קבל.

המתח עליו: $V_C = V_0 + \dfrac{1}{C}\int_0^t i_C(t')dt' = V_0 + \dfrac{1}{SC}\left(i_0 e^{St} - i_0\right)$

עבור: $V_0 = \dfrac{i_0}{SC}$ מקבלים: $V_C = \dfrac{1}{SC} i_C$.

מהתוצאות לעיל ניתן לראות כי עבור סליל וקבל ליניאריים שאינם תלויים בזמן, קיים קשר <u>ליניארי</u> קבוע בין המתח והזרם, כאשר העירור תלוי בזמן באופן אקספוננציאלי ותנאי ההתחלה מתאימים.

מקדמים ליניאריים אלו נקראים **impedance** (אימפדנס) או בעברית עכבה:

העכבה של קבל: $Z_C(S) = \dfrac{1}{SC}$

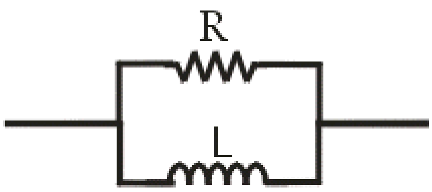
העכבה של סליל: $Z_L(S) = LS$

מתקיים: $V = Z(s)\cdot I$.

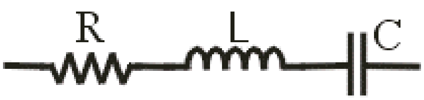
אנו רואים שהקשרים זהים לאלה של נגד: $V = R\cdot I$ ונוכל להתייחס לעכבה כאל <u>ההתנגדות</u> של האלמנט.

מגדירים גם **admittance** (אדמיטנס): $Y(S) = \dfrac{1}{Z(S)}$. ניתן להבין מההגדרה שניתן להתייחס לאדמינטס כאל <u>המוליכות</u> של האלמנט.

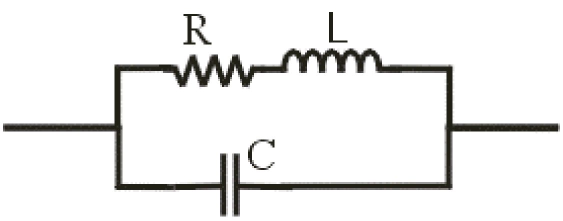
אדמיטנסים ואימפדנסים מקיימים את כל חוקי החיבור של הנגד:



$$Y = \frac{1}{R} + \frac{1}{LS}$$



$$Z = R + LS + \frac{1}{CS}$$



$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{1}{R + LS} + SC$$

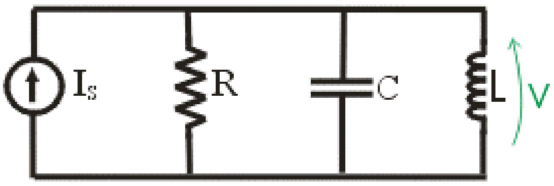
<u>הכללה:</u>

נתונה רשת של רכיבים ליניאריים בלתי תלויים בזמן. נניח פונקצית מבוא אקספוננציאלית: $a(t)=a_0e^{St}$.
אזי בתנאי התחלה מתאימים יהיה <u>קשר ליניארי</u> בין התגובה למבוא.
כלומר, אם $a(t)$ היא פונקצית המבוא, ו - $b(t)$ היא פונקצית המוצא (התגובה), אז יתקיים:

$$b(t)=H(S)\cdot a(t)$$

$H(S)$ מכונה <u>פונקצית הרשת</u>.

<u>דוגמא:</u> מצא את $H(S)$ עבור $i_L(t)$.



נתונה כניסה אקספוננציאלית:

$$I_S=I_0e^{St}$$

פתרון:
נמצא את האדמיטנס השקול:

$$Y=\frac{1}{R}+SC+\frac{1}{LS}$$

$$V=\frac{I_S}{Y}\quad\Rightarrow\quad i_L=V\cdot\frac{1}{LS}=\frac{\frac{1}{LS}}{G+SC+\frac{1}{LS}}I_S$$

כאשר $G=\frac{1}{R}$,

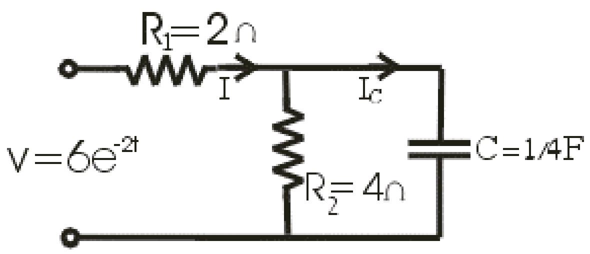
ולכן:

$$H(S)=\frac{I_S}{i_L}=\frac{\frac{1}{LS}}{G+SC+\frac{1}{LS}}=\frac{1}{LGS+S^2LC+1}$$

כלומר: $i_L(t)=I_0\cdot e^{St}\cdot H(S)$.

יש לשים לב שזהו פתרון פרטי בלבד. בכדי לקבל את תגובת ה - ZSR המלאה, צריך למצוא את הפתרון ההומוגני שיקיים את תנאי ההתחלה של תגובת ה ZSR, ולחבר.

<u>דוגמא:</u>



מצא את i_C כאשר:

$$V=6e^{-2t}\quad;\quad S=-2$$

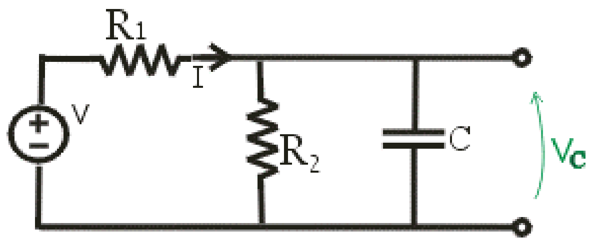
פתרון:
נמצא את אימפדנס הכניסה של המעגל:

$$Z=R_1+\frac{R_2\cdot\frac{1}{SC}}{R_2+\frac{1}{SC}}=R_1+\frac{R_2}{1+SCR_2}=2+\frac{4}{1-2\cdot\frac{1}{4}\cdot4}=2-4=-2$$

לכן:
$$i(t)=\frac{V}{Z}=\frac{6e^{2t}}{-2}=-3e^{-2t}$$

$$i_C(t)=i(t)\cdot\frac{R_2}{R_2+\frac{1}{SC}}=-3e^{-2t}\cdot\frac{4}{4-\frac{4}{2}}=-6e^{-2t}$$

נשים לב שגם כאן זהו רק הפתרון הפרטי.



הפתרון המלא:

$$i_C=C\frac{dV_C}{dt}\qquad i_{R_2}=\frac{V_C}{R_2}$$

$$V(t)=R_1\left(C\frac{dV_C}{dt}+\frac{V_C}{R_2}\right)+V_C$$

$$R_1CV_C'+\left(1+\frac{R_1}{R_2}\right)V_C=V(t)$$

כאמור מתקיים: $V_C(0)=0\qquad V(t)=6e^{-2t}$

פתרון הומוגני: המשוואה היא: $V_C'+\frac{1+\frac{R_1}{R_2}}{R_1C}V_C=0$

$$(V_C)_h=A\cdot\exp\left\{-\frac{\left(1+\frac{R_1}{R_2}\right)}{R_1C}t\right\}\ \Rightarrow\ (V_C)_h=A\cdot\exp\left\{-\frac{1+\frac{2}{4}}{2\cdot\frac{1}{4}}t\right\}\ \Rightarrow\ (V_C)_h=Ae^{-3t}$$

פתרון פרטי:

ננסה את הפתרון הפרטי הבא: $(V_C)_p=Be^{-2t}$ ע"י הצבתו במד"ר:

$$\left[R_1C(-2)+\left(1+\frac{R_1}{R_2}\right)\right]Be^{-2t}=6e^{-2t}$$

$$B=\frac{6}{1+\frac{R_1}{R_2}-2R_1C}=12$$

לכן: $(V_C)_p=12e^{-2t}$. כעת נסכם את הפתרונות:

$$V_C(t)=(V_C)_h+(V_C)_p=Ae^{-3t}+12e^{-2t}$$

נציב ת"ה: $V_C(0)=0\ \Rightarrow\ A=-12\ \Rightarrow\ V_C(t)=12e^{-2t}-12e^{-3t}$

וכדי לקבל את הזרם על הקבל מתוך המתח נגזור ונכפיל בקיבוליות:

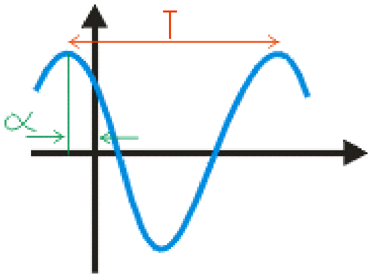
$$i_C(t)=C\frac{dV_C}{dt}=\frac{1}{4}\left[-24e^{-2t}+36e^{-3t}\right]=-6e^{-2t}+9e^{-3t}$$

וזהו הפתרון המלא.

ניתן לראות שהחלק הפרטי בפתרון המלא זהה לחלוטין לזה שנמצא קודם בשיטה המקוצרת.

מתחים וזרמים סינוסואידליים

מתח וזרם חילופין הם שמות נרדפים למתח וזרם סינוסואידליים.



באופן כללי, פונקציה סינוסואידלית היא: $a = A\cos(wt+\alpha)$

כאשר:

a - הערך הרגעי של הפונקציה

A - הערך המקסימלי שהפונקציה מקבלת

w - תדירות מעגלית

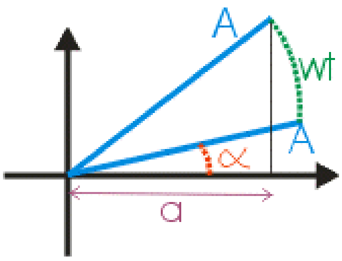
α - פאזת (מופע) האות

שני גדלים נוספים הם:

T הזמן שלוקח לפונקציה להשלים מחזור אחד $[sec]$

f מסי המחזורים שעוברת הפונקציה בשנייה אחת $[Hz]$

ומתקיימים הקשרים: $T=\frac{1}{f}$ $\quad f=\frac{w}{2\pi}$

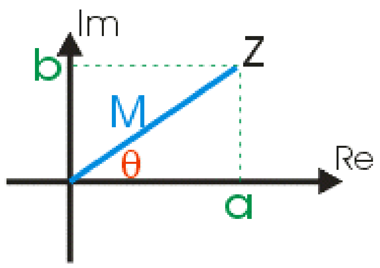


ניתן לפרש את משמעות הגדלים גם כך:

אם יש רדיוס באורך A שנע בתדר מעגלי w נגד כיוון השעון, אזי ההיטל על הציר האופקי בכל רגע נותן את a.

אם ננסה לחבר ולכפול פונקציות סינוסואידליות בהצגה זו, צפויה לנו עבודה מייגעת. לצורך זה נלמד כעת הצגה שונה לפונקציות אילו.

<u>תזכורת: מספרים מרוכבים</u>



Z הוא מספר מרוכב: $j=\sqrt{-1}\ ;\ Z=a+jb=Me^{j\theta}$

כאשר: a הוא החלק הממשי ו b הוא החלק המדומה.

במישור המרוכב הציר האופקי ממשי, והציר הניצב מדומה (ראה ציור).

הקשר בין שתי ההצגות השונות של Z הוא הבא:

$$M=\sqrt{a^2+b^2} \qquad \theta=tg^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$$

אם ניתן לרדיוס M לנוע בתדירות מעגלית w: $Z=Me^{j(wt+\theta)}$ נקבל שהחלק הממשי של Z הוא בדיוק כמו הסיגנל הסינוסואידלי: $a=\text{Real}\{Z\}=M\cos(wt+\theta)$

בחזרה למתח חילופין:

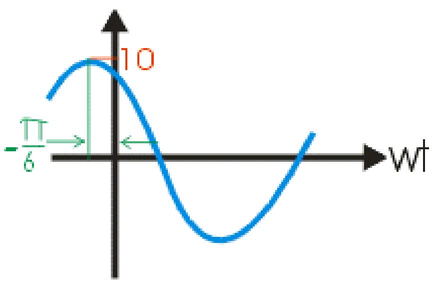
את המתח הסינוסואידלי $V(t)=V\cos(wt+\alpha)$ ניתן לרישום כ: $V(t)=\text{Re}\{Ve^{j(wt+\alpha)}\}$

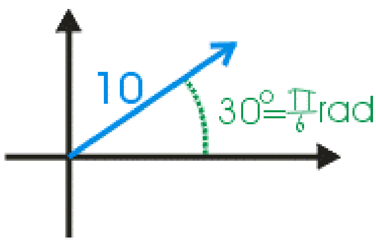
הגודל $Ve^{j\alpha}$ נקרא **פאזור**, ונהוג לסמנו ב- $\tilde{V}$, ואז: $V(t)=\text{Re}\{\tilde{V}e^{jwt}\}$.

הפאזור נוח בעיקר לביצוע ארבעת פעולות החשבון הבסיסיות במספרים מרוכבים.

<u>דוגמא:</u>

$$i=10\cos\left(wt+\frac{\pi}{6}\right)=\text{Re}\left\{10e^{j\frac{\pi}{6}}e^{jwt}\right\}$$

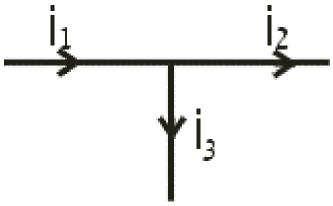




הערה: אם נתונה פונקצית sin ורוצים להפוך אותה ל cos לצורך ההצגה הפאזורית:

$$i = 20\sin\left(wt + \frac{\pi}{6}\right) = 20\cos\left(wt + \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2}\right) = 20\cos\left(wt - \frac{\pi}{3}\right) = \mathrm{Re}\left\{20e^{-j\frac{1}{3}}e^{jwt}\right\}$$

<u>דוגמא</u>:



נתון: $i_2 = 2\cos\left(wt - \frac{\pi}{2}\right)$ $\quad\quad$ $\tilde{I}_1 = 3 - 4j$

ורוצים למצוא את i_3.

פתרון: $i_3 = i_1 - i_2$

הפאזור $\rightarrow$ $\tilde{I}_2 = 2e^{-j\frac{\pi}{2}} = 0 - 2j$

$\tilde{I}_3 = \tilde{I}_1 - \tilde{I}_2 = (3-4j) - (0-2j) = 3 - 2j = \sqrt{9+4} \cdot tg^{-1}\left(\frac{-2}{3}\right) = 3.6\angle -33.7^\circ$

מהפאזור של i_3 אנו יודעים את i_3: $\quad i_3(t) = 3.6\cos\left(wt - 33.7^\circ\right)$

<u>דוגמא</u>:

מצא את המכפלה $V = Z \cdot I$ עבור $Z = 7.07\angle -45^\circ$, $I = 10\angle 90^\circ$.

פתרון:

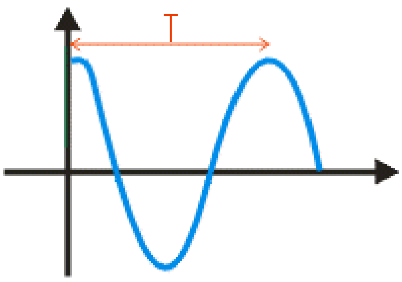
$I = 0 + 10j$, $Z = 5 - 5j$ $\Leftarrow$ $V = Z \cdot I = (5-5j)(0+10j) = 50 + 50j = 70.7\angle 45$

כפל של שני פאזורים באופן כללי: $\quad V_1\angle\alpha \quad , \quad V_2\angle\beta$

$$V_3\angle\gamma = V_1\angle\alpha \cdot V_2\angle\beta = V_1V_2\angle\alpha + \beta$$

לכן יכולנו גם לחשב ישירות V: $V = 10 \cdot 7.07\angle 90 - 45 = 70.7\angle 45$.

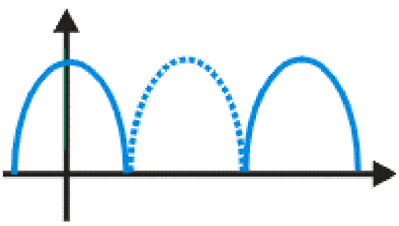
<u>ערך ממוצע</u> של פונקציה סינוסואידלית:



$$I_{av} = \frac{1}{T}\int_0^T i\,dt = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} i(t')dt' = 0$$

(אינטגרל על סינוס על פני מחזור שלם הוא תמיד אפס.)

עבור מתח מיושר (ערך מוחלט על גל הסינוס):



$$I_{av} = \frac{1}{T/2}\int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} A\cos(wt)dt = \frac{2A}{T}\frac{\sin wt}{w}\Bigg|_{-T/4}^{T/4}$$

נשתמש בעובדה ש: $\quad w = \frac{2\pi}{T}$

ונקבל:
$$I_{av}=\frac{2A}{T\cdot\frac{2\pi}{T}}\cdot 2\sin\left(\frac{2\pi}{T}\frac{T}{4}\right)=\frac{2A}{\pi}\sin\frac{\pi}{2}=0.636A$$

כלומר: הערך הממוצע עבור מתח מיושר הוא 0.636 הערך המקסימלי של הגל הסינוסואידלי.

<u>ערך אפקטיבי</u> קשור ביכולת העברת האנרגיה של הגל.

$$Pav=P=\frac{1}{T}\int_0^T p(t)dt=\frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)Rdt=I_{eff}{}^2R$$

כאשר:
$$I_{eff}=I_{RMS}=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)dt}$$

עבור גל סינוסואידלי:

$$I^2{}_{eff}=\frac{1}{T}\int A^2\cos^2(wt)dt=\frac{A^2}{2T}\int(1+\cos(2wt))dt=\frac{A^2}{2T}\left[T+\frac{\sin 2wt}{2w}\Big|_0^T\right]=\frac{A^2}{2}$$

$$I_{RMS}=\frac{\sqrt{2}}{2}A=0.707A$$

כלומר: הערך האפקטיבי של אות סינוסואידלי הוא הערך המקסימלי של האות, מחולק בשורש 2.

<u>הרחבה למושג האימפדנס (עכבה)</u>

נרחיב את מושג האימפדנס גם לאותות סינוסואידליים.

עבור נגד מתקיים:

$$i=I_0e^{jwt}\quad,\quad V=i\cdot R=RI_0e^{jwt}\quad\Rightarrow\quad\frac{V}{I}=R$$

עבור אות סינוסואידלי ($i=I_0e^{jwt}$) נרצה למצוא קשר ליניארי דומה עבור סליל: $V_L=Z_Li_L$, כך ש - Z_L יוגדר כעכבת הסליל.

בסליל מתקיים הקשר:
$$V_L=L\frac{di}{dt}=(jwL)I_0e^{jwt}$$

ומכיוון ש: $V_L=Z_Li$ נקבל מתוך השוואה: $Z_L=jwL$.

באופן דומה, עבור קבל:

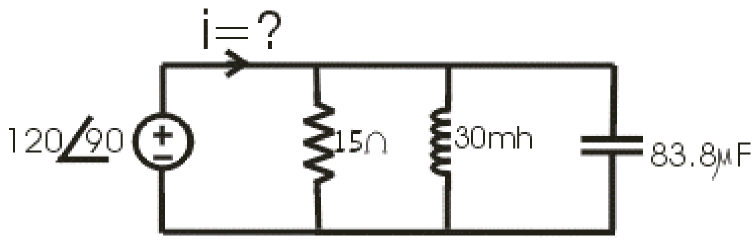
אם המתח הוא:
$$V=V_0e^{jwt}$$

וכאמור בקבל מתקיים הקשר:
$$i_C=C\frac{dV}{dt}=CjwV_0e^{jwt}$$

אזי עכבת הקבל היא:
$$Z_C=\frac{1}{jwc}$$

<u>דוגמא</u>:

נתון המעגל הבא עם ערכי האלמנטים מצוינים עליו:



כמו כן נתון:
$$V=120\angle 90_{volt}\ ;\ w=1000\frac{rad}{sec}$$

ורוצים למצוא את הזרם I.

פתרון:

$$\text{mho } Y_R = \frac{1}{R} = 0.0677$$

$$\text{mho } Y_C = jwc = j \cdot 1000 \cdot 83.3 \cdot 10^{-6} = j \cdot 0.0833$$

$$\text{mho } Y_L = \frac{1}{jwL} = j \cdot \frac{-1}{1000 \cdot 0.03} = -j \cdot 0.0333$$

$$Y_{in} = Y_L + Y_C + Y_R = 0.0667 + j0.0833 - j0.0333 = (0.0677 + j0.5) = 0.0833\angle 37^\circ$$

$$I = Y_{in} \cdot V = (0.0833\angle 37^\circ)(120\angle 90^\circ) = 10\angle 127^\circ$$

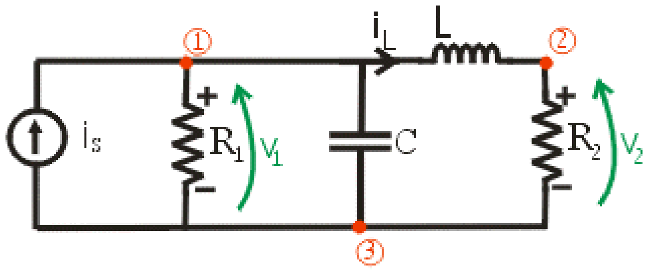
I הוא הפאזור, לכן האות $i(t)$ הוא: $i(t) = 10\cos(1000t + 127^o)$

פרק 6: מערכות ליניאריות קבועות בזמן

מערכות ליניאריות קבועות בזמן (Linear Time Invariant), הן מערכות שכל רכיביהן הם אלמנטים ליניאריים בלתי משתנים בזמן, כלומר: הקשר בין מתח לזרם על כל הרכיבים הוא ליניארי וקבוע.

חוקי קירכהוף, שיטות מתחי הצמתים וזרמי החוגים

בבעיה הבאה נסכם את מה שלמדנו ואת השיטות שהוצגו בתרגולי הכיתה בנושא שלעיל. נשים לב לשלבי הפתרון החוזרים ברוב המקרים. נשתמש בשיטות אלו לצורך מציאת המד"ר המתארת את המעגל הנתון לנו.



נתונן במעגל הבא:

נתונים ת"ה: $I_L(t=0)=I_0$

$V_C(t=0)=V_0$

צ"ל: מהו המתח על R_2?

פתרון:

<u>ניתוח לפי שיטת מתחי צמתים:</u>

מגדירים צומת יחוס ומחפשים את
המתח של כל צומת נמדד ביחס לצומת הייחוס.
במקרה שלנו צומת מס' 3 היא צומת הייחוס.
כמה נעלמים יש בבעיה שלנו?

עקרונית יש שמונה: ארבעה אלמנטים (C, L, R_1, R_2) שעל כל אחד מהם המתח והזרם הם נעלמים.
מכיוון שהקשר בין המתח לזרם על כל אלמנט ידוע, הבעיה מצטמצמת לארבעה נעלמים, נניח ארבעת המתחים.
שנים מהמתחים הם שווים (המתח על R_1 זהה למתח על C), ואת המתח על L ניתן למצוא מהפרש המתחים: $V_L=V_C-V_{R_2}$. לכן אנו נותרים עם שני משתנים, המתח על R_1 והמתח על R_2. נסמנם V_2, V_1, בהתאם.

נרשום שתי משוואות KCL בלתי תלויות:

$$\text{I)}\quad I_{R_1}+I_C+I_L=I_S \;\Rightarrow\; \frac{V_1}{R_1}+C\frac{dV_1}{dt}+I_0+\frac{1}{L}\int_0^t (V_1-V_2)dt=i_S(t)$$

$$\text{II)}\quad I_L=I_{R_2} \;\Rightarrow\; -I_0-\frac{1}{L}\int_0^t (V_1-V_2)dt+\frac{V_2}{R_2}=0$$

$$\text{I + II)}\quad C\frac{dV_1}{dt}+\frac{V_1}{R_1}+\frac{V_2}{R_2}=i_S(t)$$

נגזור את משוואה II:

$$-\frac{V_1}{L}+\frac{V_2}{L}+\frac{1}{R_2}\frac{dV_2}{dt}=0 \;\Rightarrow\; V_1=V_2+\frac{L}{R_2}\cdot\frac{dV_2}{dt}$$

נציב תוצאה זו ב I + II:

$$C\frac{dV_2}{dt}+\frac{CL}{R_2}\frac{d^2V_2}{dt^2}+\frac{V_2}{R_1}+\frac{L}{R_1R_2}\frac{dV_2}{dt}+\frac{V_2}{R_2}=i_S(t)$$

$$LCV_2''+\left(R_2C+\frac{L}{R_1}\right)V_2'+\left(1+\frac{R_2}{R_1}\right)V_2=R_2i_S(t)$$

נמצא ת.ה. ממשוואה II: $V_2(t=0)=I_0R_2$ ללא גזירה $\rightarrow$

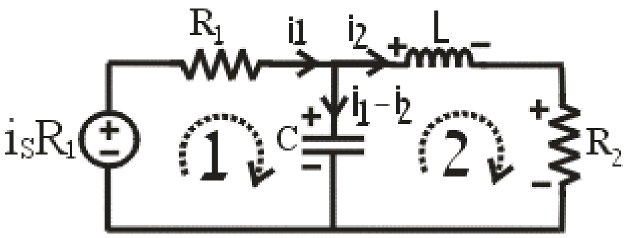
$$\left.\frac{dV_2}{dt}\right|_0=\left.\frac{R_2}{L}(V_1-V_2)\right|_{t=0}\underset{\uparrow}{=}\frac{R_2}{L}(V_0-I_0R_2)$$ עם גזירה $\rightarrow$

$$V_1(0)=V_0$$

קיבלנו לבסוף מד״ר מסדר שני עבור V_2, עם שני ת״ה המתאימים.

<u>כעת ננתח את הבעיה ניתוח לפי שיטת זרמי חוגים:</u>

לצורך זה נעביר את המעגל שבבעיה לצורת תבנין:



נרשום משוואה עבור כל חוג:

עבור חוג 1: $$R_1i_1+V_0+\frac{1}{C}\int_0^t(i_1-i_2)dt=i_S(t)R_1 \qquad \text{I)}$$

עבור חוג 2: $$-V_0-\frac{1}{C}\int_0^t(i_1-i_2)dt+L\frac{di_2}{dt}+R_2I_2=0 \qquad \text{II)}$$

נתון כי: $i_2(0)=I_0$

נחבר משוואות:

$$R_1i_1+L\frac{di_2}{dt}+R_2i_2=i_S(t)R_1 \quad\rightarrow\quad i_1=-\frac{L}{R_1}\frac{di_2}{dt}-\frac{R_2}{R_1}i_2+i_S(t)$$

נגזור את משוואה II: $$\frac{1}{C}(i_2-i_1)+Li_2''+R_2i_2'=0$$

נציב את i_1 שקיבלנו: $$LCi_2''+\left(R_2C+\frac{L}{R_1}\right)i_2'+\left(1+\frac{R_2}{R_1}\right)i_2=i_S(t)$$

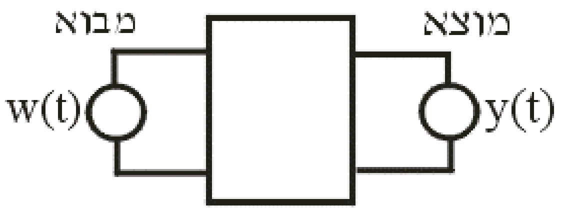
ת.ה. ממשוואה II:

$$\left.\frac{di_2}{dt}\right|_{t=0}=\left.\frac{V_0}{L}-\frac{R_2}{L}I_2\right|_{t=0}\underset{\uparrow}{=}\frac{V_0}{L}-\frac{R_2}{L}I_0$$

$$i_2(0)=I_0$$

במקרה זה נצטרך תחילה לפתור מד״ר מסדר שני עבור הזרם, ובאמצעותו למצוא את המתח.

הכללה - מציאת תגובה עבור מעגלים מסדר גבוה



במקרה של מערכת LTI (Linear Time Invariant), הקשר הכללי ביותר בין המבוא w(t) למוצא y(t) הוא:

$$y^{(n)}(t)+a_1y^{(n-1)}(t)+\dots+a_ny=$$
$$b_0w^{(m)}+b_1w^{(m-1)}+\dots+b_mw$$

כאשר: $n>m$.

<u>פתרון ה - ZIR :</u>

מאפסים את המבוא: w=0 ומקבלים משוואה הומוגנית.

אז הפתרון הוא: $y=\sum_{i=1}^{n}k_ie^{S_it}$, כאשר S_i הם הפתרונות של המשוואה האופיינית:

$S^n+a_1S^{n-1}+a_2S^{n-2}+\dots+a_{n-1}S+a_n=0$.

אם הפתרון S_j הוא פתרון מריבוי k, אז האיברים שהוא תורם לסכימה שלעיל הם:

$$y=\dots+a_{j1}e^{S_jt}+a_{j2}te^{S_jt}+\dots+a_{jk}t^{k-1}e^{S_jt}+\dots$$

בכל מקרה יש לרשום n תנאי התחלה: $y(0),y^{(1)}(0),\dots,y^{(n-1)}(0)$ כדי למצוא את n המקדמים $k_1,\dots,k_n$.

<u>פתרון ה - ZSR :</u>

להלן מוצעת שיטת פתרון כללית אשר לקראת סוף הפרק יתברר ההגיון העומד מאחוריה.

תחילה, אנו נדרשים למצוא את תגובת ההלם של המעגל. כלומר, פותרים עבור כניסת הלם: $w(t)=\delta(t)$.

<u>מציאת תגובת ZSR לפונקצית הלם:</u>

עבור t>0 הפתרון הוא בעל אותו מבנה כמו פתרון ה - ZIR (שהרי עבור $t>0$ מתקיים $\delta(t)=0$):

$$y(t)=(\sum_{i=1}^{n}k_ie^{S_it})u(t)$$

כיצד נמצא את המקדמים k_i?

נציב את הפתרון $y(t)=\left(\sum_t k_ie^{S_it}\right)u(t)$ באגף שמאל של המשוואה, ובאגף ימין נציב: $w(t)=\delta(t)$.

נכנס איברים המכילים δ',δ (פונקצית הלם ונגזרותיה) ונשווה מקדמים של האיברים המתאימים בצד ימין ושמאל.

<u>דוגמא 1:</u>

נתונה המד"ר: $y''+4y'+3y=2w+w'$ המתארת מעגל.

צ"ל: את תגובת ההלם של המעגל.

פתרון:

כדי למצוא את תגובת ההלם, נפתור את המשוואה האופיינית: $S^2+4S+3=0$ ונקבל: $S_1=-3 \quad S_2=-1$.

לכן:
$$y(t)=\left(k_1e^{-3t}+k_2e^{-t}\right)u(t)$$
$$y'(t)=\left(-3k_1e^{-3t}-k_2e^{-t}\right)u(t)+\left(k_1+k_2\right)\delta(t)$$

$$y''(t)=\left(9k_1e^{-3t}+k_2e^{-t}\right)u(t)-\left(3k_1+k_2\right)\delta(t)+\left(k_1+k_2\right)\delta'(t)$$

לאחר הצבה במשוואה ופישוט נקבל:

$$-\left(3k_1+k_2\right)\delta(t)+\left(k_1+k_2\right)\delta'(t)+4\left(k_1+k_2\right)\delta(t)=2\delta(t)+\delta'(t)$$
$$\left(k_1+3k_2\right)\delta(t)+\left(k_1+k_2\right)\delta'(t)=2\delta(t)+\delta'(t)$$

כעת נשווה את המקדמים:

$$\left.\begin{aligned}k_1+k_2&=1\\k_1+3k_2&=2\end{aligned}\right\}\Rightarrow\boxed{k_2=\frac{1}{2}\ ,\ k_1=\frac{1}{2}}$$

לכן סה"כ קיבלנו שהתגובה להלם היא: $y(t)=h(t)=\frac{1}{2}\left(e^{-t}+e^{-3t}\right)u(t)$.

בכדי להשתכנע בנכונות הפתרון ניתן להציב את $y(t)$ במד"ר ולוודא קבלת שוויון כאשר: $w(t)=\delta(t)$.

<u>דוגמא 2:</u>

מצא את תגובת ההלם של המעגל המתואר ע"י: $y''+2y'+y=w'+2w$

פתרון: משוואה אופיינית: $S^2+2S+1=0 \Rightarrow S_{1,2}=-1$

$$y=\left(A+Bt\right)e^{-t}u(t)$$
$$y'=Be^{-t}u(t)-\left(A+Bt\right)e^{-t}u(t)+A\delta(t)$$
$$y''=-Be^{-t}u(t)-Be^{-t}u(t)+\left(A+Bt\right)e^{-t}u(t)+\left(B-A\right)\delta(t)+A\delta'(t)$$

נציב את הפתרון ונגזרותיו במשוואה:

$$y''+2y'+y=2A\delta(t)+\left(B-A\right)\delta(t)+A\delta'(t)=\delta'(t)+2\delta(t)$$

$$\left.\begin{aligned}2A+B-A&=2\\A&=1\end{aligned}\right\}\Rightarrow\boxed{A=1\quad ,\quad B=1}$$

לכן במקרה זה תגובת ההלם היא: $y=\left(1+t\right)e^{-t}u(t)$.

<u>דוגמא 3:</u>

הבעיה זהה לדוגמאות הקודמות, אך הפעם המד"ר היא: $y'+2y=w''+3w'+3w$.

פתרון:

מקרה זה הוא שונה מהמקרה הכללי שהצגנו, משום שהנגזרת הכי גבוהה באגף ימין היא גדולה יותר מהנגזרת באגף שמאל. לכן לא מספיק לנחש פתרון מהצורה: $y(t)=(\sum_{i=1}^{n}k_ie^{S_it})u(t)$, משום שכאשר נציב באגף ימין $w(t)=\delta(t)$ נקבל נגזרת <u>שניה</u> של פונקצית הלם, ואילו באגף שמאל נקבל עד נגזרת אפס בלבד (פונקצית ההלם עצמה).

לכן ננחש פתרון כללי יותר: $y=Ae^{-2t}u(t)+B\delta(t)+C\delta'(t)$,

כאשר את המעריך בחזקה של האקספוננט נמצא כרגיל ע"י פתירת המשוואה האופיינית. נקווה שאכן נצליח להשוות מקדמים.

נציב את הפתרון במד"ר:

$$-2Ae^{-2t}u(t)+A\delta(t)+B\delta'(t)+C\delta''(t)+2Ae^{-2t}u(t)+2B\delta(t)+2C\delta'(t)=\delta''(t)+3\delta'(t)+3\delta(t)$$

$$(A+2B)\delta(t)+(B+2C)\delta'(t)+C\delta''(t)=3\delta(t)+3\delta'(t)+\delta''(t)$$

נשווה מקדמים:

$$\left.\begin{matrix} C=1 \\ B+2C=3 \\ A+2B=3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \boxed{B=1 \quad , A=1 \quad ,C=1}$$

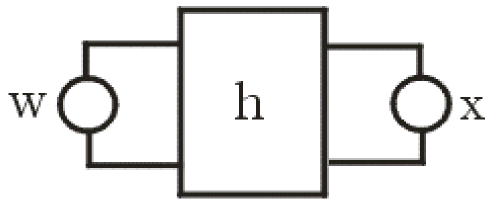
לכן סה"כ קיבלנו את תגובת ההלם: $y=e^{-2t}u(t)+\delta(t)+\delta'(t)$.

<u>מציאת תגובת ZSR לכניסה כלשהי:</u>

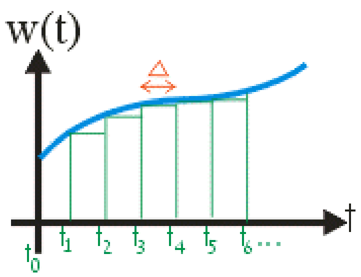
נחזור כעת לפתרון ה - ZSR הכללי.

מציאת תגובת ZSR למבוא כל שהוא, לאחר שמצאנו את תגובת ההלם $h(t)$:

מניחים מעגל ליניארי בלתי תלוי בזמן ומצב התחלתי אפס.



עבור כניסה $w(t)$, אנו מקרבים את הכניסה בעזרת פונקציות פולס באופן הבא:



$$w(t)\cong\sum_{i=0}^{n-1}w(t_i)\cdot P_\Delta(t-t_i)\cdot\Delta$$

כאשר מוגדר:

$$P_\Delta(t-t_i)=\begin{cases} 0 & t<t_i \\ \frac{1}{\Delta} & t_i<t<t_i+\Delta \\ 0 & t>t_i+\Delta \end{cases}$$

ומגדירים גם את התגובה לכניסת פולס בודדת: $h_\Delta(t)$.

בגלל אי התלות בזמן, התגובה לפולס מוזז, $p_\Delta(t-t_i)$, היא: $h_\Delta(t-t_i)$.

בגלל הלינאריות של רכיבי המערכת נקבל שהתגובה הכללית היא:

$$x(t)\cong\sum_{i=0}^{n-1}w(t_i)\cdot h_\Delta(t-t_i)\cdot\Delta$$

עבור $\Delta\to 0$, כל פולס שואף לפונקצית הלם: $P_\Delta(t-t_i)\to\delta(t-t')$

ולכן גם כל תגובה לפולס שואפת לתגובה להלם: $h_\Delta(t-t_i)\to h(t-t')$

וסה"כ כשמשאיפים: $\Delta\to 0$, $t_n\to t'$ מקבלים:

$$\boxed{x(t)=\int_{t_0}^{t_n}w(t')h(t-t')dt'}$$

זוהי פעולת ה**קונבולוציה** המסומנת: $x(t)=w(t)*h(t)$

נסיק שאם ידועה תגובת ההלם של המעגל הליניארי, ניתן בעזרתה לחשב תגובה לכל מבוא אחר:

נבצע את פעולת הקונבולוציה בין תגובת ההלם למבוא המבוקש.

נלמד מספר תכונות של פעולת הקונבולוציה:

א. סימטרייה:
$$x(t)=\int_0^t w(t')h(t-t')dt' = -\int_t^0 w(t-t'')h(t'')dt'' = \int_0^t w(t-t'')h(t'')dt''$$

$$t''=t-t'$$
$$dt''=-dt'$$

ולכן: $w*h=w*h$.

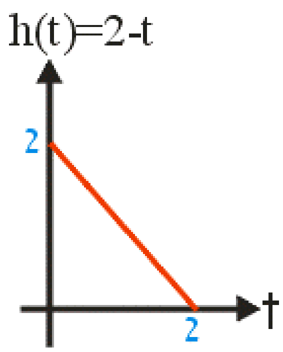
ב. $w*(h_1+h_2)=w*h_1+w*h_2$

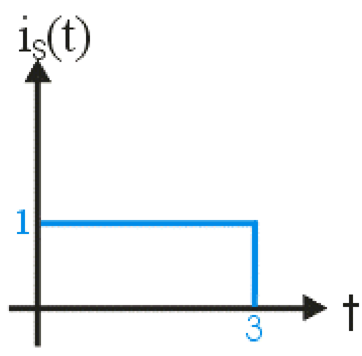
ג. כזכור, $w(t)=\int \delta(t')w(t-t')dt'$ לכן נשים לב ש: $w=w*\delta$.

<u>קונבולוציה גרפית</u>

בבעיות של פתרון מעגלים חשמליים, ברוב המקרים האותות מוגבלים בזמן ולכן לעיתים נוח לבצע את פעולת הקונבולוציה באופן גרפי, ללא צורך בחישובים.
נלמד את אופן הפעולה בדוגמה הבאה:

נתונות שתי פונקציות: $h(t), i_S(t)$ ונרצה לבצע ביניהן קונבולוציה.

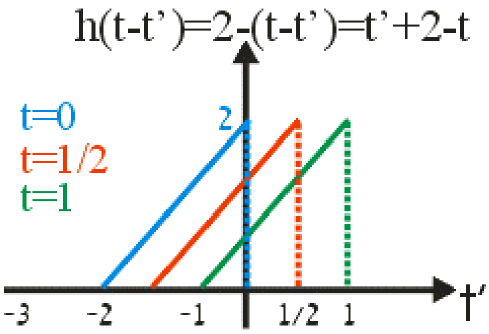




נסמן את תוצאת הקונבולוציה ב - $V(t)$.

לפי הגדרת הקונבולוציה: $V(t)=\int_0^t i_S(t')h(t-t')dt'$.

נצייר את $h(t-t')$ על ציר t':

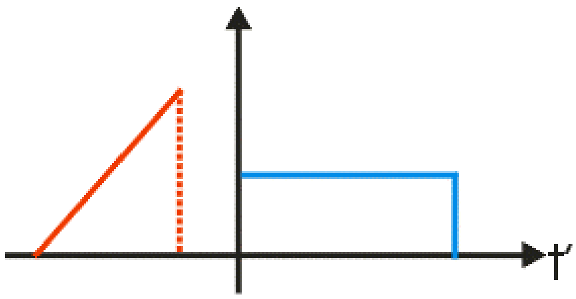


הסבר:

$h(-t')$ הוא תמונת ראי של $h(t)$ לעומת הציר האנכי.

$h(t-t')$ הוא אותה תמונת ראי מוזזת ימינה ב t.

הפתרון יתחלק למספר תחומים:

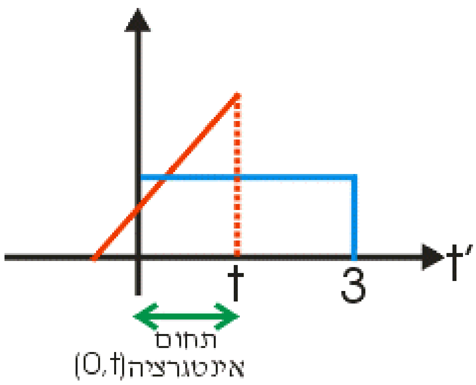


עבור $t<0$

בתחום זה אין חפיפה בין השטחים, כלומר אין תחום בו תוצאת האינטגרל שונה מאפס (כפי שניתן לראות מהציור). לכן:

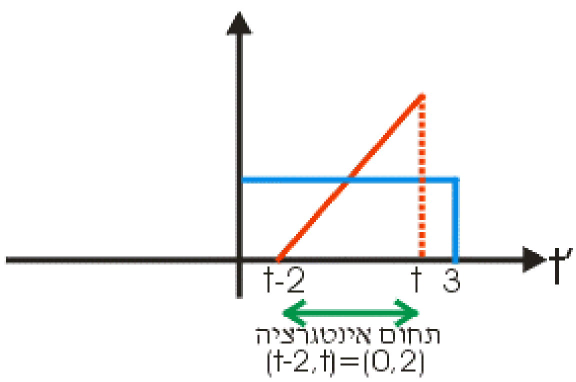
$$V(t)=\int i_S(t')h(t-t')dt'=0$$

עבור $0<t<2$



בתחום זה ישנה חפיפה מסוימת והיא מהווה את תחום האינטגרציה: $V(t)=\int_0^t (t'-t+2)dt'$

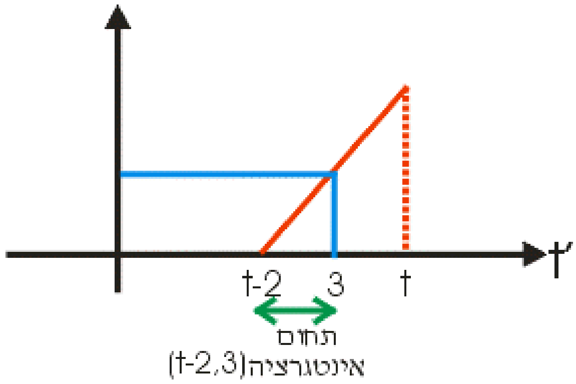
עבור $2<t<3$



בתחום זה כל הבסיס של המשולש נמצא בחפיפה עם המלבן. אורך הבסיס של המשולש הוא 2, וגובה המלבן הוא 1,

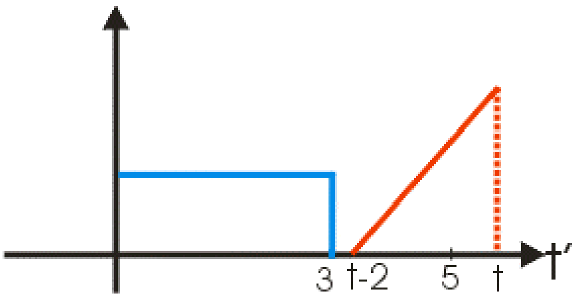
לכן: $V(t)=\int_{t-2}^{t}(t'-t+2)dt'=\int_{0}^{2}(t'-t+2)dt'$

<u>עבור 3<t<5</u>



גם בתחום זה ישנה חפיפה מסוימת שמהווה את תחום האינטגרציה: $V(t)=\int_{t-2}^{3}(t'-t+2)dt'$

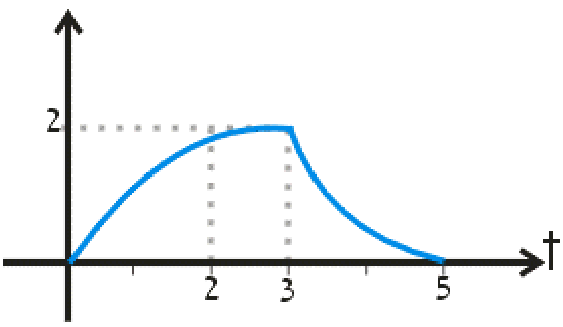
<u>עבור 5<t</u>



בתחום זה אין חפיפה בין השטחים, כלומר אין תחום אינטגרציה (כפי שניתן לראות מהציור). לכן שוב:

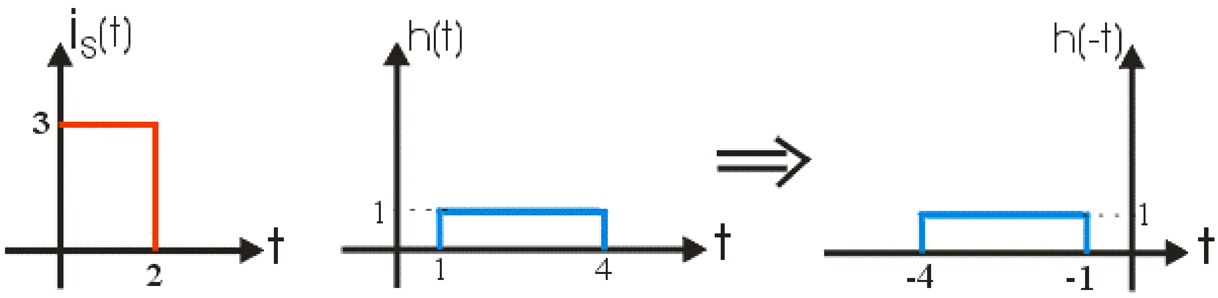
$V(t)=\int i_S(t')h(t-t')dt'=0$

תוצאת הקונבולוציה:

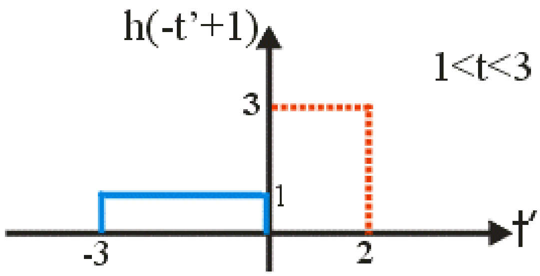


<u>דוגמא נוספת:</u>

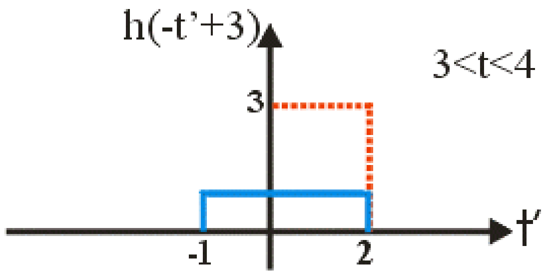
נרצה לבצע את הקונבולוציה הבאה: $g(t)=\int_0^t i_S(t')h(t-t')dt'$, כאשר נתונות הפונקציות:



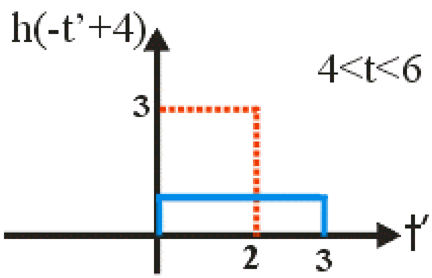
פתרון: כמו בדוגמא הקודמת, נפריד לתחומים:



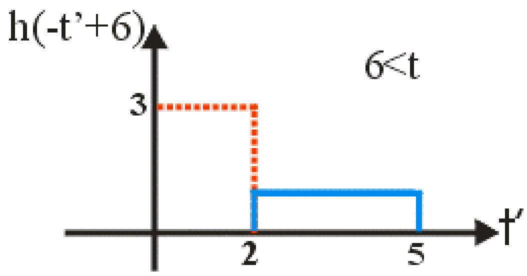
$$g(t)=\int_0^{t-1} i_S(t')h(t-t')dt'=\int_0^{t-1}(3\cdot 1)dt'=3t-3$$



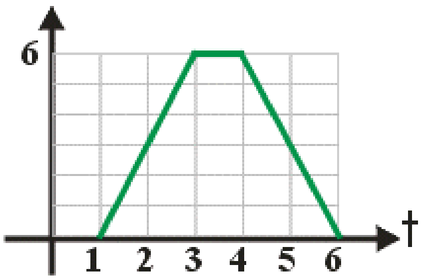
$$g(t)=\int_0^{2} i_S(t')h(t-t')dt'=\int_0^{2}(3\cdot 1)dt'=6$$



$$g(t)=\int_{t-4}^{2} i_S(t')h(t-t')dt'=\int_{t-4}^{2}(3\cdot 1)dt'=6-3(t-4)=18-3t$$



בתחום זה אין חפיפה. נצייר את הפתרון שקיבלנו:



<u>דוגמא אחרונה בנושא הקונבולוציה הגרפית:</u>

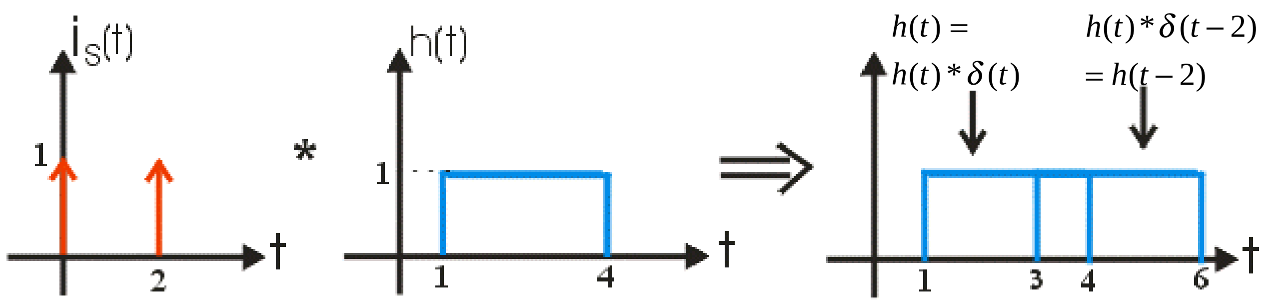
נרצה לבצע קונבולוציה בין פונקציה מלבנית h(t) ובין פונקציה המורכבת משני הלמים.

תחילה תזכורת מחוק הדגימה:

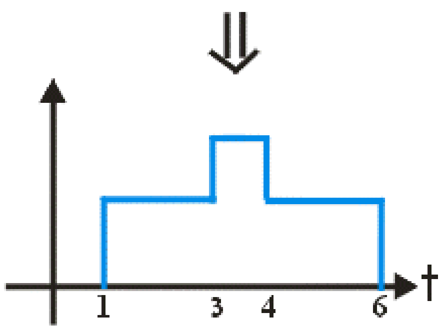
$$\int \delta(t')h(t-t')dt'=h(t)$$

$$\int \delta(t'-t_0)h(t-t')dt'=h(t-t_0)$$

כעת נבצע את הקונבולוציה של h(t) עם שני הלמים:



לאחר החיבור נקבל:



<u>הערה לגבי תכונת הדגימה של נגזרת של פונקצית הלם</u> :

$$\delta'(t)=\frac{d\delta}{dt}=\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\frac{\delta(t+\varepsilon)-\delta(t)}{\varepsilon}\right\}$$

לכן :

$$f(t)\delta'(t)=\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\frac{f(-\varepsilon)\delta(t+\varepsilon)-f(0)\delta(t)}{\varepsilon}\right\}=$$

הוספנו   החסרנו

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\frac{f(0)\delta(t+\varepsilon)-f(0)\delta(t)}{\varepsilon}-\frac{f(0)\delta(t+\varepsilon)-f(-\varepsilon)\delta(t+\varepsilon)}{\varepsilon}\right\}=$$

$$=f(0)\delta'(t)-\underset{\varepsilon\to 0}{\delta(t+\varepsilon)}\,f'(0)=f(0)\delta'(t)-f'(0)\delta(t)$$

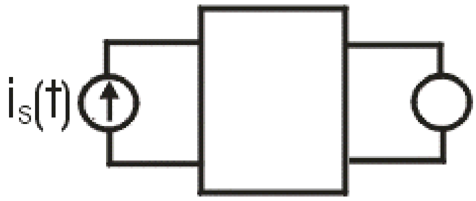
אם כן, ראינו שעבור פונקצית הלם מתקיימים הקשרים הבאים :

$$f(t)\delta(t)=f(0)\delta(t)$$
$$f(t)\delta'(t)=f(0)\delta'(t)-f'(0)\delta(t)$$
$$f'(t)\delta(t)+f(t)\delta'(t)=f(0)\delta'(t)$$

פרק 7: תגובה במצב סינוסי עמיד

במערכות רבות נרצה לנתח את התגובה לעירור רק לאחר זמן רב, ובכך לנטרל את השפעתם של גורמים חולפים במערכת (כמו המצב ההתחלתי). מצב זה נקרא **המצב העמיד** של המערכת.
בפרק זה נתמקד בתגובה של מערכות במצב העמיד לעירור סינוסואידלי.
מלבד היותם של האותות הסינוסואידליים נפוצים מאוד במערכות חשמליות, ישנה סיבה נוספת להתמקדות בהם: כל עירור שהוא ניתן לפרק לסכום של פונקציות סינוסואידליות (בעזרת התמרת פורייה שאותה תלמדו בהמשך). לפי משפט הסופר פוזיציה, כדי למצוא תגובה לעירור נוכל לפרקו לעירורים סינוסואידליים, למצוא את התגובה לכל אחד מתת-העירורים, ולחבר את התגובות.

ניזכר (מפרק 2) שגל סינוסי הוא גל בעל תדירות מעגלית קבועה w. הגל הוא פונקציה של הזמן:



$$f(t) = A\cos(wt + \varphi)$$

לצורך המשך הפרק ניזכר גם במושג הפאזור:

$$A_m \cos(wt+\varphi) = \mathrm{Re}\left[A_m e^{j(wt+\varphi)}\right] = \mathrm{Re}\left[\widetilde{A}e^{jwt}\right]$$

הגודל הבא נקרא פאזור: $\widetilde{A} = A_m e^{j\phi}$.

לדוגמא: $A_m \sin(wt+\varphi) = A_m \cos\left(wt + \varphi - \frac{\pi}{2}\right)$

במקרה זה הפאזור הוא: $\widetilde{A} = A_m e^{j\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)}$.

<u>משפט עיקרי:</u>
סכום אלגברי של מספר פונקציות סינוסיאודליות בעלות אותה תדירות w וסכום כלשהו של נגזרותיהן מכל סדר שהוא, הוא בעצמו גם פונקציה סינוסיאודלית בעלת אותו תדר w.

<u>משפטי עזר:</u>

Lemma 1:

$$\mathrm{Re}[Z_1(t) + Z_2(t)] = \mathrm{Re}[Z_1(t)] + \mathrm{Re}[Z_2(t)]$$
$$\mathrm{Re}[\alpha Z_1(t)] = \alpha \mathrm{Re}[Z_1(t)]$$

Lemma 2:

אם: $\mathrm{Re}\left[\widetilde{B}e^{jwt}\right] = \frac{d}{dt}\mathrm{Re}\left[\widetilde{A}e^{jwt}\right]$

אז: $\widetilde{B} = jw\widetilde{A}$

תוך שימוש ב: $\frac{d}{dt}\mathrm{Re}\left[\widetilde{A}e^{jwt}\right] = \mathrm{Re}\left[\frac{d}{dt}\widetilde{A}e^{jwt}\right] = \mathrm{Re}\left[jw\widetilde{A}e^{jwt}\right]$ ובלמה 3.

Lemma 3:

$$\forall t : \mathrm{Re}\left[\widetilde{A}e^{jwt}\right] = \mathrm{Re}\left[\widetilde{B}e^{jwt}\right] \quad \Leftrightarrow \quad \widetilde{A} = \widetilde{B}$$

הערה: יש לשים לב שאם: $\mathrm{Re}\left[\tilde{A}\right]=\mathrm{Re}\left[\tilde{B}\right]$ זה לא אומר בהכרח ש: $\tilde{A}=\tilde{B}$.

<u>הוכחת המשפט העקרי:</u>

נסמן את האותות הסינוסואידליים הבאים בהצגתם הפאזורית:

$$x(t)=\mathrm{Re}\left[\tilde{A}e^{jwt}\right]$$
$$y(t)=\mathrm{Re}\left[\tilde{B}e^{jwt}\right]$$
$$z(t)=\mathrm{Re}\left[\tilde{C}e^{jwt}\right]$$

כל האותות הם בעלי אותה תדירות w.
נסכם שניים מהאותות ונגזרת ראשונה של האות השלישי:

$$x(t)+y(t)+\frac{dZ(t)}{dt}=\mathrm{Re}\left[\tilde{A}e^{jwt}\right]+\mathrm{Re}\left[\tilde{B}e^{jwt}\right]+\frac{d}{dt}\mathrm{Re}\left[\tilde{C}e^{jwt}\right]$$

לפי למה 2:
$$=\mathrm{Re}\left[\tilde{A}e^{jwt}\right]+\mathrm{Re}\left[\tilde{B}e^{jwt}\right]+\mathrm{Re}\left[jw\tilde{C}e^{jwt}\right]$$

ע"י שימוש בלמה 1:
$$=\mathrm{Re}\left[\left(\tilde{A}+\tilde{B}+jwC\right)e^{jwt}\right]=\mathrm{Re}\left[\tilde{S}e^{jwt}\right]$$

ע"י שימוש בלמה 3:
$$\tilde{S}=S_m e^{j\varphi_S}=\tilde{A}+\tilde{B}+jw\tilde{C}$$

נכתוב כל פאזור בקואורדינטות קרטזיות:

$$\tilde{A}=A_r+jA_i$$
$$\tilde{B}=B_r+jB_i$$
$$\tilde{C}=C_r+jC_i$$

ונקבל:

$$S_r=A_r+B_r-wC_i \quad \rightarrow \quad \text{חלקים ממשיים}$$
$$S_i=A_i+B_i+wC_r \quad \rightarrow \quad \text{חלקים מדומים}$$

כעת נביע את $\tilde{S}=S_m e^{j\varphi_S}$ בקואורדינטות פולאריות:

$$S_m=\sqrt{\left(A_r+B_r-wC_i\right)^2+\left(A_i+B_i+wC_r\right)^2}$$

$$\varphi_S=tg^{-1}\left(\frac{A_i+B_i+wC_r}{A_r+B_r-wC_i}\right)$$

סה"כ מהחיבור הנ"ל קיבלנו שוב אות סינוסואידלי עם פאזור $\tilde{S}$ ותדירות w.
ניתן להרחיב את המשפט לכל מספר סכומים ולכל דרגה של נגזרת.

<u>שימוש ברישום הפאזורי למשוואות דיפרנציאליות:</u>

נתונה המד"ר: $a_0x^{(n)}+a_1x^{(n-1)}+a_2x^{(n-2)}+\ldots+a_{n-1}x^{(1)}+a_nx=A_m\cos(wt+\varphi)$

כאשר: $x^{(n)}=\frac{d^nx}{dt^n}$, ואנו רוצים למצוא לה פתרון פרטי.

נסמן: $\tilde{A} = A_m e^{j\varphi}\ ,\ \tilde{X} = X_m e^{j\psi}$

וננסה את הפתרון הפרטי הבא שהוא מצורת העירור באגף ימין: $x(t) = \mathrm{Re}\left[\tilde{X}e^{jwt}\right]$

נציב במד"ר: $a_0 \dfrac{d^n \mathrm{Re}\left(\tilde{X}e^{jwt}\right)}{dt^n} + \ldots + a_n \mathrm{Re}\left(\tilde{X}e^{jwt}\right) = \mathrm{Re}\left(\tilde{A}e^{jwt}\right)$

מלמה 2: $\dfrac{d^n}{dt^n}\mathrm{Re}\left(a_0\tilde{X}e^{jwt}\right) = \mathrm{Re}\left[a_0 (jw)^n \tilde{X}e^{jwt}\right]$

מלמה 1: $\mathrm{Re}\left\{\left[a_0 (jw)^n + a_{n-1}(jw)^{n-1} + \ldots + a_{n-1}(jw) + a_n\right]\tilde{X}e^{jwt}\right\} = \mathrm{Re}\left[\tilde{A}e^{jwt}\right]$

ומתקבל מלמה 3: $\tilde{X} = \dfrac{\tilde{A}}{a_0 (jw)^n + \ldots + a_{n-1}jw + a_n}$

$$X_m = \sqrt{\mathrm{Re}^2(\tilde{X}) + \mathrm{Im}^2(\tilde{X})} = \frac{A_m}{\sqrt{\left(a_n - a_{n-2}w^2 + a_{n-4}w^4 + \ldots\right)^2 + \left(a_{n-1}w - a_{n-3}w^3 + \ldots\right)^2}}$$

$$\Psi = \angle\tilde{X} = \varphi - tg^{-1}\frac{a_{n-1}w - a_{n-3}w^3 + a_{n-5}w^5 + \ldots}{a_n - a_{n-2}w^2 + a_{n-4}w^4 + \ldots}$$

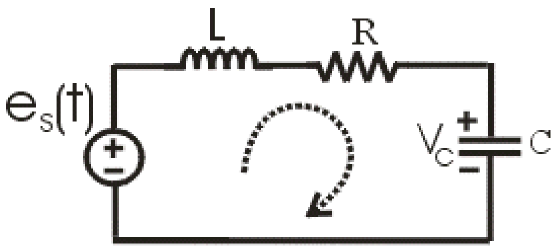
<u>הערה חשובה:</u>

גישת פתרון זו נכונה עבור כל w מלבד ערכי w המהווים פתרון הומוגני למשוואה, שכן אז היינו מקבלים אפס במכנה של $\tilde{X}$ (אותה w מאפסת את הפולינום האופייני של המד"ר).

עבור אותם ערכי w יש לנסות כפתרון אפשרי את הפונקציה: $t\tilde{X}e^{jwt}$, משום שאז w הוא פתרון מרובה (גם פתרון פרטי וגם פתרון הומוגני).

אם במשוואה יש ערור שמכיל פולינום אז נקבל: $\tilde{X} = \dfrac{\tilde{A}\left[b_0 (jw)^m + b_1 (jw)^{m-1} + \ldots + b_m\right]}{a_0 (jw)^n + a_1 (jw)^{n-1} + \ldots + a_n}$

<u>דוגמא:</u>



$$i = C\frac{dV_C}{dt}$$

$$LC\frac{d^2V_C}{dt^2} + RC\frac{dV_C}{dt} + V_C = e_S(t) = E_m\cos(wt + \varphi)$$

העירור הוא: $e_S(t) = \mathrm{Re}\left\{\tilde{E}e^{jwt}\right\}$

ולכן ננחש את הפתרון: $V_C = \mathrm{Re}\left\{\tilde{V}e^{jwt}\right\}$

ונקבל לפי השיטה שלעיל: $\tilde{V} = \dfrac{\tilde{E}}{LC\left(-w^2\right) + RCjw + 1}$

$$V_m = \frac{E_m}{\sqrt{(1 - LCw)^2 + (wRC)^2}}\quad ,\quad \Psi = \varphi - tg^{-1}\frac{wRC}{1 - w^2LC}$$

כעת נפתור עבור הנתונים: $L = \dfrac{1}{2}\ ,\ R = \dfrac{3}{2}\ ,\ C=1\ ,\ e_S(t) = \cos(2t)u(t)$

$V_C\left(0^-\right) = 1_V \qquad i\left(0^-\right) = 2_{Am}$

נרצה למצוא את מתח הקבל בכל רגע.

פתרון הומוגני: $V_h(t)=k_1e^{S_1t}+k_2e^{S_2t}$

כאשר S_1,S_2 הם פתרונות המשוואה ההומוגנית:

$$LCS^2+RCS+1=0$$

$$\frac{1}{2}S^2+\frac{3}{2}S+1=0$$

$$S^2+3S+2=0 \quad\Rightarrow\quad S_1=-1,\ S_2=-2$$

פתרון פרטי: $V_p(t)=\mathrm{Re}\left[\tilde{V}^{j2t}\right]$

נשים לב שמהעירור הנתון מקבלים: $E_m=1,\varphi=0$.

נציב בפתרון:

מעלות רדיאנים

$$\tilde{V}=\left.\frac{1}{\frac{1}{2}\left(-w^2\right)+\frac{3}{2}jw+1}\right|_{w=2}=\frac{1}{1-2+3j}=\frac{1}{-1+3j}=\frac{1}{3.16e^{j108.4}}=0.316e^{-j108.4}=0.316e^{-j1.89}$$

הפתרון הכללי: $V_C(t)=V_h(t)+V_p(t)$

עבור t>0 $\quad V_C(t)=k_1e^{-t}+k_2e^{-2t}+0.316\cos(2t-1.89)$

למציאת המקדמים נציב ת"ה ראשון ב - t=0: $\quad V_C(t)=k_1+k_2-0.1=1v$

נציב ת"ה שני ב - t=0:

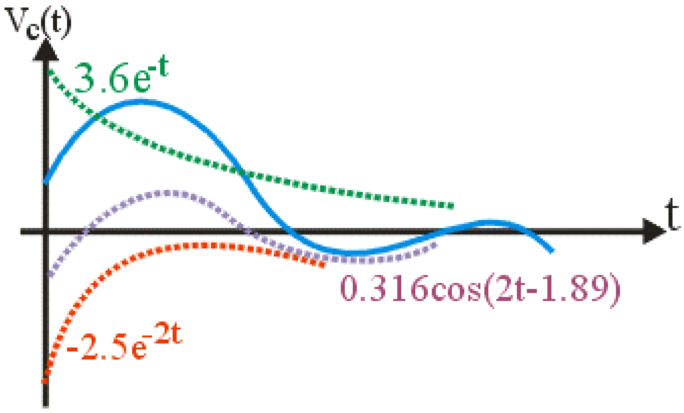
$$i(0)=C\left.\frac{dV_C}{dt}\right|_{t=0}=\left.\frac{dV_C}{dt}\right|_{t=0}=\left.-k_1e^{-t}-2k_2e^{-t}-0.632\sin(2+-1.89)\right|_{t=0}=$$

$$=-k_1-2k_2-0.632\sin(-1.89)=-k_1-2k_2+0.6=2$$

לכן:

$$\left.\begin{array}{r}k_1+k_2=1.1\\-k_1-2k_2=1.4\end{array}\right\}\quad\Rightarrow\quad\begin{array}{l}k_2=-2.5\\k_1=3.6\end{array}$$

ומצאנו אם כן את הפתרון הכולל: $\quad V_C(t)=3.6e^{-t}-2.5e^{-2t}+3.16\cos(2t-1.89)$



מה היו צריכים להיות תנאי ההתחלה כדי שלא יהיה מצב מעבר אלא רק מצב סינוסי יציב?

כלומר מתי: $k_1=k_2=0$?

$$V_C(t)=0.316\cos(2t-1.89)$$
$$V_C(0)=0.316\cos(-1.89)=-0.1v$$
$$i(0)=C\frac{dV_C(t)}{dt}\bigg|_{t=0}=-0.316\cdot 2\sin(-1.89)=0.6$$

Am

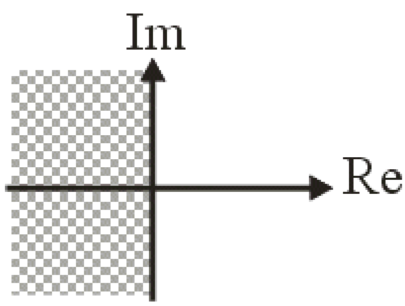
<u>התגובה היציבה של האות הסינוסי</u>

נתון לנו מעגל עם עירור סינוסואידלי, ונרצה לדעת את התגובה הכוללת <u>במצב העמיד</u>, כלומר כאשר : $t\to\infty$.
ראינו שבמקרה הכללי התגובה הכוללת היא :

$$y(t)=y_h(t)+y_p(t)=k_1e^{S_1t}+k_2e^{S_2t}+...+k_me^{S_mt}+A_m\cos(wt+\psi)$$

כעת, אם כל השורשים S_k הם ממשיים שליליים או שהחלק הממשי שלהם שלילי :

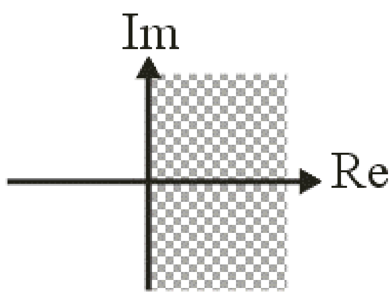
$$\mathrm{Re}[S_k]<0$$



אז כשנשאף ל- $t\to\infty$ נקבל דעיכה של כל האקספוננטים : $\lim\limits_{t\to\infty}y(t)=A_m\cos(wt+\psi)$
מערכת כזו נקראת מערכת יציבה אסימפטוטית. במערכת כזו תגובת ה ZIR שואפת ל 0 עבור $t\to\infty$.

אם לפחות אחד השורשים הוא חיובי וממשי או שהחלק הממשי שלו חיובי :

$$\mathrm{Re}[S_k]>0$$



אז אומרים שהמערכת אינה יציבה.

מה המצב עבור שורשים מדומים? כלומר עבור שורשים המקיימים : $\mathrm{Re}[S_k]=0$?
נניח כי התדר במבוא הוא : $w\neq w_0$.
עבור שורשים פשוטים, למשל : $S_{1,2}=\pm jw_0 \quad\Leftarrow\quad S^2=-w_0^{\ 2}$
נקבל פתרון : $y_h=k_1e^{jw_0t}+k_2e^{-jw_0t}=k\cos(w_0t+\varphi)$ ופתרון זה על סף חוסר היציבות.

עבור שורשים כפולים נקבל פתרון: $y_h(t)=(k_1+k_2t)e^{jw_0t}$

רואים כי המערכת אינה יציבה: $y_h\to\infty$ עבור $t\to\infty$.

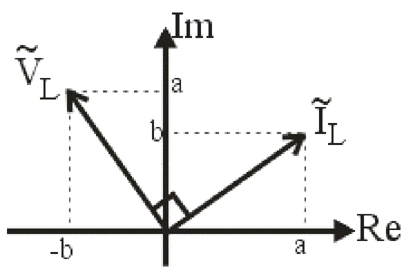
<u>מושג האימפדנס (עכבה) בזרם או מתח חילופין</u>

ראינו בפרק 5 שהעכבה של סליל היא: $\tilde{V}_L=jwL\tilde{I}_L=Z_L\tilde{I}_L$

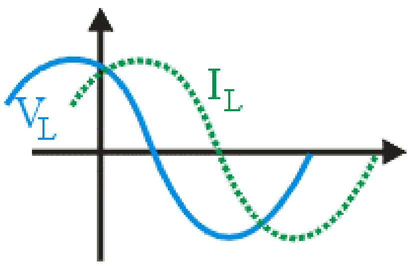
והעכבה של קבל היא: $\tilde{V}_C=\frac{1}{jwC}\tilde{I}_C=Z_C\tilde{I}_C$

כעת נניח שהזרם הפאזורי בסליל הוא: $\tilde{I}_L=a+jb$. אז לפי הקשר שלעיל נקבל: $\tilde{V}_L=jwL(a+jb)=wL(ja-b)$

כלומר: הפאזור של המתח מוזז ב- 90 מעלות יחסית לפאזור של הזרם באופן הבא:



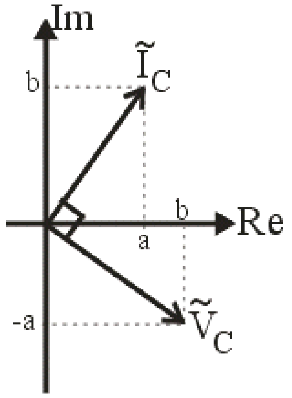
ולכן עבור סליל המתח מקדים את הזרם:



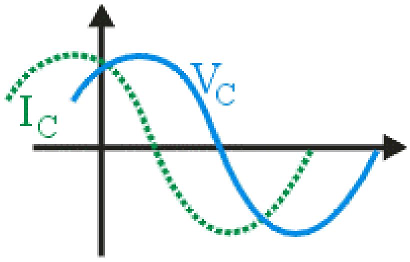
באופן דומה, נניח שהזרם הפאזורי בקבל הוא: $\tilde{I}_C=a+jb$. אז לפי הקשר שלעיל נקבל:

$$\tilde{V}_C=\frac{1}{jwC}(a+jb)=\frac{1}{wC}(b-ja)$$

כלומר: הפאזור של המתח מוזז ב- (90-) מעלות יחסית לפאזור של הזרם באופן הבא:



ולכן עבור קבל הזרם מקדים את המתח:



<u>מצב מתמיד של מעגלים פשוטים בערור סינוסי</u>

חוקי קירכהוף נכונים בכל רגע ורגע לכן ניתן לרשום אותם ע"י פאזורים:

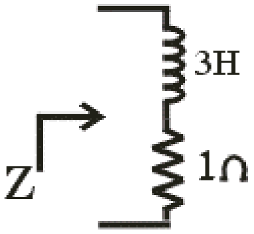
$$\Sigma v = 0 \quad \Rightarrow \quad \Sigma\tilde{V} = 0$$
$$\Sigma i = 0 \quad \Rightarrow \quad \Sigma\tilde{I} = 0$$

שכן מלמה 1:
$$\sum_n V_n = \sum_n \mathrm{Re}\left(\tilde{V}_n e^{jwt}\right) = \mathrm{Re}\left[\left(\sum \tilde{V}_n\right) e^{jwt}\right] = 0$$

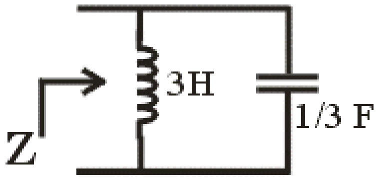
לכן ניתן ליישם את כל חוקי החיבור של נגדים לגבי האימפדנסים המרוכבים כאשר מדובר בעירור סינוסואידלי.

<u>דוגמאות</u>

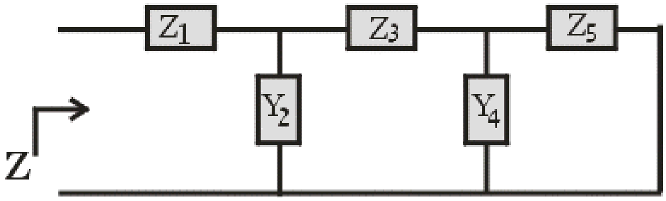
1) $Z = 1 + jw3$



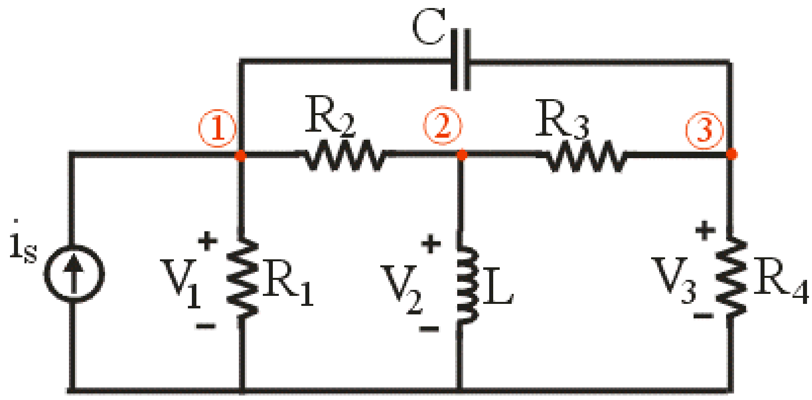
2) $$Z = \frac{(jw3)\cdot\frac{1}{jw\frac{1}{3}}}{jw3 + \frac{1}{jw\frac{1}{3}}} = \frac{jw3}{1-w^2}$$



3)
$$Z = Z_1 + \cfrac{1}{y_2 + \cfrac{1}{Z_3 + \cfrac{1}{y_4 + \cfrac{1}{Z_5}}}}$$



4) דוגמא לאנליזת רשת: נרצה למצוא את המתח על R_4.



פתרון: נרשום את משוואות הזרמים

עבור שלושת הצמתים המסומנים:

צומת 1
$$\frac{\tilde{V}_1}{R_1} + \frac{\tilde{V}_1 - \tilde{V}_2}{R_2} + \frac{\tilde{V}_1 - \tilde{V}_3}{\frac{1}{jwC}} = \tilde{I}_S$$

צומת 2
$$\frac{\tilde{V}_2 - \tilde{V}_1}{R_2} + \frac{\tilde{V}_2}{jwL} + \frac{\tilde{V}_2 - \tilde{V}_3}{R_3} = 0$$

צומת 3
$$\frac{\tilde{V}_3 - \tilde{V}_2}{R_3} + \frac{\tilde{V}_3}{R_4} + \frac{\tilde{V}_3 - \tilde{V}_1}{\frac{1}{jwC}} = 0$$

$$\left.\begin{aligned}
&\tilde{V}_1\left[\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + jwC\right] - \tilde{V}_2 \cdot \frac{1}{R_2} - \tilde{V}_3 \cdot jwC = \tilde{I}_S \\
&\tilde{V}_1\left(-\frac{1}{R_2}\right) + \tilde{V}_2\left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{jwL}\right) + \tilde{V}_3 \cdot \left(-\frac{1}{R_3}\right) = 0 \\
&\tilde{V}_1(-jwC) + \tilde{V}_2 \cdot \left(-\frac{1}{R_3}\right) + \tilde{V}_3\left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + jwC\right) = 0
\end{aligned}\right\}$$

נציב את הנתונים הבאים: w=2 L=2H C=2F $R_4 = 2\Omega$ $R_1 = R_2 = R_3 = 1\Omega$

$$i_S(t) = 10\cos\left(2t + \frac{\pi}{6}\right)$$

כדי לחלץ את $\tilde{V}_3$ מתוך מערכת המשוואות הליניאריות, נשתמש בכלל קרמר:

$$\tilde{V}_3 = \frac{\begin{vmatrix} 2+4j & -1 & I_S \\ -1 & 2+\frac{1}{4j} & 0 \\ -j4 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2+j4 & -1 & -j4 \\ -1 & 2+\frac{1}{j4} & -1 \\ -j4 & -1 & 3/2+j4 \end{vmatrix}} = \frac{2+j\cdot 8}{6+j11.25}\tilde{I}_S$$

ולכן: $\tilde{V}_3 = \dfrac{8.24\angle 1.32}{12.75\angle 1.08}\cdot 10\angle 0.524 = 6.46\angle 0.764$

<u>הערה</u>:

כדי להגיע למתח הרגעי מתוך הפאזור, ניעזר בקשר הבא:

$$V(t) = \mathrm{Re}\left[\tilde{V}e^{jwt}\right] = \mathrm{Re}\left[(V_R + jV_i)e^{jwt}\right] = \mathrm{Re}\left[V_m e^{j\varphi}e^{jwt}\right] = V_m\cos(wt+\varphi)$$

כאשר:

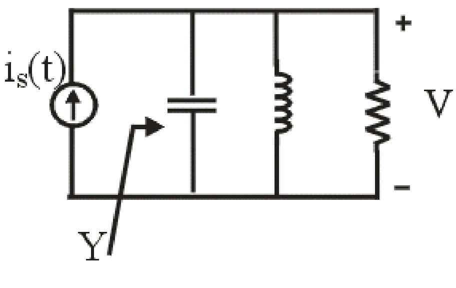
$$\tilde{V} = V_R + jV_i$$

$$V_m = \left|\tilde{V}\right| = \sqrt{V_R^{\,2} + V_i^2}$$

$$\varphi = tg^{-1}\frac{V_i}{V_R}$$

<u>מעגלי תהודה</u>

נתבונן במעגל התהודה המקבילי הבא:



$$Y = jwC + G + \frac{1}{jwL} = G + j\left(wC - \frac{1}{wL}\right)$$

נסמן:

$B(w)$ תהיה הפונקציה הבאה של התדר:

$$Y(jw) = G + jB(w) \;\Rightarrow\; B(w) = wC - \frac{1}{wL}$$

ואז: $\mathrm{Re}\left[Y(jw)\right] = G$

$$\mathrm{Im}[Y(jw)] = B(w)$$

מצב תהודה (resonance) במעגל יוגדר כמצב שבו המתח שיספק מקור סינוסי חיצוני למעגל השקול והזרם שייכנס למעגל השקול, יהיו באותה פאזה. נובע מזה שההתנגדות השקולה של המעגל (ולכן גם המוליכות השקולה) היא ממשית.

ברוב המעגלים הפשוטים דרישה זו מביאה את המוליכות Y למינימום ובהתאם את ההתנגדות Z למקסימום.

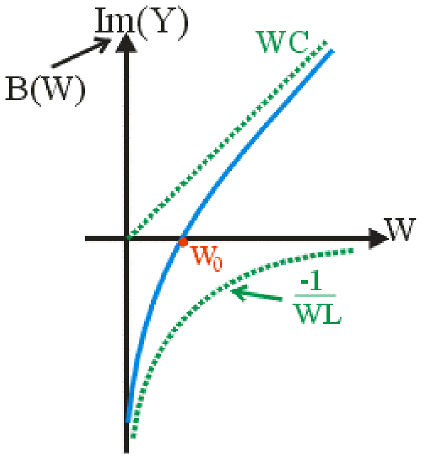
נחזור לדוגמה שלנו:

מתי האדמיננס Y מקבל מינימום? כאשר החלק המדומה שלו מתאפס:

$$\mathrm{Im}[Y(jw)] = 0 \quad \Rightarrow \quad w = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

לתדר זה קוראים **תדר התהודה** של המעגל, ונהוג לסמנו ב - w_0.

בתדר זה B(w) מתאפס, כפי שניתן לראות מהגרף הבא:



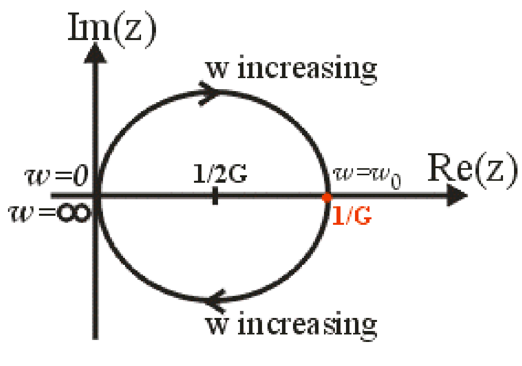
מתוך הגרף ניתן לראות גם שכאשר: $w \to 0$ אז: $B \to -\infty$,
וכאשר: $w \to \infty$ אז: $B \to +\infty$.

אפשר לחשב גם את האימפדנס:

$$Z(jw) = \frac{1}{Y(jw)} = \frac{1}{G + jB(w)} = \frac{G}{G^2 + B^2(w)} + j\frac{-B(w)}{G^2 + B^2(w)}$$

נשרטט את Z על המשור המורכב:

מתקבל המעגל הבא:



נסביר מדוע זהו המעגל המתקבל.

נוסחת המעגל המשורטט להלן (בעל רדיוס $\frac{1}{2G}$) היא הבאה :

$$\left(\mathrm{Re}(Z)-\frac{1}{2G}\right)^2+\left(\mathrm{Im}(Z)\right)^2=\left(\frac{1}{2G}\right)^2=\frac{1}{4G^2}$$

נבדוק האם היא מתאימה לערכי Z שקיבלנו בחישוב האימפדנס, כלומר האם מתקיים השוויון הבא :

$$\left(\frac{G}{G^2+B^2}-\frac{1}{2G}\right)^2+\frac{B^2}{\left(G^2+B^2\right)^2}=\frac{1}{4G^2}$$

נפתח את הריבועים של אגף שמאל:

$$\frac{G^2}{\left(G^2+B^2\right)^2}-\frac{1}{\left(G^2+B^2\right)}+\frac{1}{4G^2}+\frac{B^2}{\left(G^2+B^2\right)^2}=\frac{G^2+B^2}{\left(G^2+B^2\right)^2}-\frac{1}{\left(G^2+B^2\right)}+\frac{1}{4G^2}=\frac{1}{4G^2}$$

ולכן השוויון אכן מתקיים, כלומר המעגל המשורטט אכן מתאר את Z.

משמעות התהודה יכולה להיות ברורה יותר מתוך התבוננות בגרף של Z במישור המרוכב :
גודל העכבה, $|Z(jw)|$, כפונקציה של התדר w מתחיל באפס עבור $w=0$, עולה מונוטונית עד לנקודה $w=w_0$ שבה, הוא מקבל את ערכו המקסימלי. בתהודה $Z(jw_0)$ נקרא התנגדות טהורה משום שמבחינה פיזיקלית, כל הזרם במעגל יעבור רק דרך הנגד. עבור $w>w_0$ גודל העכבה יורד מונוטונית עד לאפס כאשר $w\to\infty$.

כעת נפתור את מעגל התהודה עצמו :

ברישום פאזורי : $\tilde{I}_L=\frac{1}{jwL}\tilde{V}\quad,\quad \tilde{I}_C=jwC\tilde{V}\quad,\quad \tilde{I}_R=G\tilde{V}\quad,\quad \tilde{I}_R+\tilde{I}_C+\tilde{I}_L=\tilde{I}_S$

ניקח למשל את הנתונים הבאים : $\tilde{I}_S=1\angle 0^\circ\quad,\quad w=1\quad\Rightarrow\quad \tilde{I}_S=\cos(t)$

$$R=1\Omega\qquad C=1F\qquad L=\frac{1}{4}H$$

פתרון :

$$\tilde{Y}(j\cdot 1)=G+j\left(wC-\frac{1}{wL}\right)\Bigg|_{w=1}=1+j\left(1-\frac{1}{1/4}\right)=1-j\cdot 3=\sqrt{10}\angle -71.6^\circ$$

$$\tilde{Z}(j\cdot 1)=\frac{1}{\tilde{Y}(j\cdot 1)}=\frac{1}{\sqrt{10}}\angle +71.6^\circ$$

$$\tilde{V}=\tilde{Z}\cdot\tilde{I}_S=\frac{1}{\sqrt{10}}\angle 71.6\cdot 1\angle 0=\frac{1}{\sqrt{10}}\angle 71.6$$

$$\tilde{I}_R=\frac{\tilde{V}}{R}=\frac{1}{\sqrt{10}}\angle 71.6$$

$$\tilde{I}_L=\frac{\tilde{V}}{jwL}=\frac{1}{\sqrt{10}\cdot\frac{1}{4}}\cdot\angle 71.6^\circ-90^\circ=\frac{4}{\sqrt{10}}\angle -18.4^\circ$$

$$\tilde{I}_C = \tilde{V}\cdot jwC = \frac{1}{\sqrt{10}}\angle 71.6^o + 90^o = \frac{1}{\sqrt{10}}\angle 161.6^o$$

תדר התהודה של המעגל הוא: $w_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 2$

לכן נחשב כעת את הגדלים בתדר התהודה - w_0 :

$$\tilde{I}_S = 1\angle 0^o \quad , w=2$$
$$Y(j\cdot 2) = G + j\cdot 0 = G = 1mho$$
$$Z(j\cdot 2) = \frac{1}{Y(j\cdot 2)} = 1\Omega$$
$$\tilde{V} = Z\cdot \tilde{I}_S = 1\angle 0^o \quad \Rightarrow \quad \tilde{I}_R = \frac{\tilde{V}}{R} = 1\angle 0^o \quad \Rightarrow \quad I_R = I_S$$
$$Z_L = jw\cdot\frac{1}{4} = j\cdot\frac{1}{2} \quad , \quad I_L = \frac{\tilde{V}}{jwL} = \frac{1}{1/2}\angle 0^o - 90^o = 2\angle -90^\circ$$
$$\tilde{I}_C = jwC\cdot\tilde{V} = 1\angle 90^o \cdot 2\angle 0^o = 2\angle 90^o$$

רואים ש - $\tilde{I}_C = -\tilde{I}_L$. זה אופייני למצב תהודה: הקבל והסליל משחקים "פינג פונג" (מוסרים ומקבלים את אותו זרם ביניהם) והנגד מבזבז הספק מקסימלי (כזכור Y מינימלי).

<u>פונקצית המערכת - "network function</u>

פונקצית המערכת היא מנת פאזור המוצא לפאזור המבוא (פאזור הכניסה).
נהוג לסמנה ב - $H(jw)$, כי לרוב היא תלויה בתדירות w.
אם, לדוגמה, מתעניינים ביציאה בזרם הנגד אז פונקצית המערכת תהיה:

$$H(jw) = \frac{\tilde{I}_R}{\tilde{I}_S} = \frac{GV}{\tilde{I}_S} = GZ(jw) = \frac{G}{G + j\left(wC - \frac{1}{wL}\right)} = \frac{1}{1 + jR\left(wC - \frac{1}{wL}\right)}$$

כדי למצוא באופן מעשי את פונקצית המערכת, יש למדוד את היציאה , בדוגמה שלנו $I_R(wt)$, עבור כל תדר ומתוך $I_R(wt)$ מוצאים את הפאזור $\tilde{I}_R(jw)$ ע"י מדידת הפרש המופע והאמפליטודה של $I_R(wt)$. נחלק בפאזור הכניסה ונקבל את פונקצית המערכת המבוקשת.

נשים לב שבתהודה מתקיים: $\tilde{I}_C = -\tilde{I}_L$, והסיבה היא:

$$\tilde{I}_C = \tilde{V}_S\cdot jw_0C = \tilde{V}_S\cdot j\frac{1}{\sqrt{LC}}C = \tilde{V}_S\cdot j\sqrt{\frac{C}{L}}$$
$$\tilde{I}_L = \tilde{V}_S\cdot\frac{1}{jw_0L} = \tilde{V}_S\cdot\frac{\sqrt{LC}}{jL} = -\tilde{V}_S\cdot j\sqrt{\frac{C}{L}}$$

ולכן: $\tilde{I}_S = \tilde{I}_C + \tilde{I}_L + \tilde{I}_R = \tilde{I}_R$, ומכאן נובע שבמקרה שלנו: $H(jw) = \frac{\tilde{I}_R}{\tilde{I}_S} = 1$.

מקדם האיכות

נהוג במעגלים עם עירור סינוסואידלי הנמצאים בתהודה לאפיין את המעגל לפי 'מקדם האיכות':

$$Q=\left|\frac{\tilde{I}_L}{\tilde{I}_S}\right|=\left|\frac{\tilde{I}_C}{\tilde{I}_S}\right|$$

כלומר:
$$Q=\frac{\left|\tilde{I}_L\right|}{\left|\tilde{I}_S\right|}=\frac{\left|\frac{V}{jw_0L}\right|}{\left|\frac{V}{R}\right|}=\frac{R}{w_0L},$$

כאשר נזכור ש: $w_0=\sqrt{\frac{1}{LC}}$ ולכן: $Q=\frac{R}{L\sqrt{\frac{1}{LC}}}=R\sqrt{\frac{C}{L}}$.

וכעת אפשר לכתוב את פונקצית המערכת בצורה הבאה:

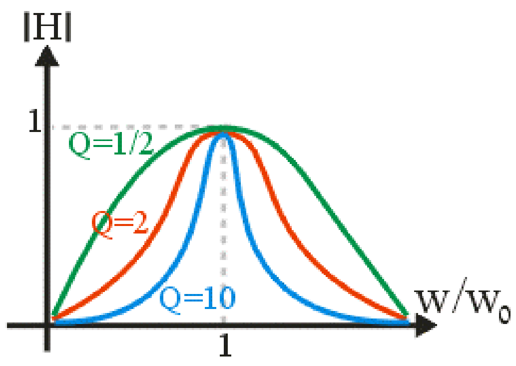
$$H(jw)=\frac{1}{1+jR\left(wC-\frac{1}{wL}\right)}=\frac{1}{1+jQw_0L(wC-\frac{1}{wL})}=\frac{1}{1+jQ\left(\frac{w}{w_0}-\frac{w_0}{w}\right)}$$

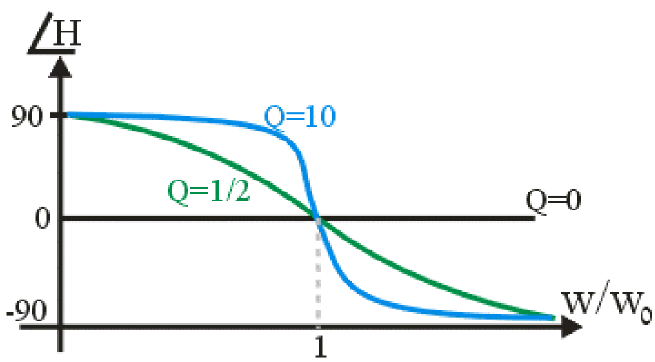
כלומר Q ו - w_0 מאפיינים באופן חד ערכי את פונקצית הרשת H.

נחשב גם את הגודל והזווית של פונקצית המערכת כתלות ב - Q ו - w_0 :

$$\left|H(jw)\right|=\frac{1}{\sqrt{1+Q^2\left(\frac{w}{w_0}-\frac{w_0}{w}\right)^2}}\qquad \angle H(jw)=0-tg^{-1}\left[Q\left(\frac{w}{w_0}-\frac{w_0}{w}\right)\right]=-tg^{-1}\left[Q\left(\frac{w}{w_0}-\frac{w_0}{w}\right)\right]$$

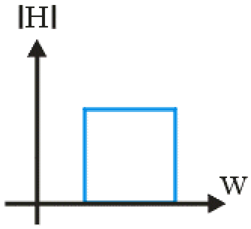
הגרף של H נקרא תגובת התדר של המערכת, ובעצם מורכב משני גרפים:



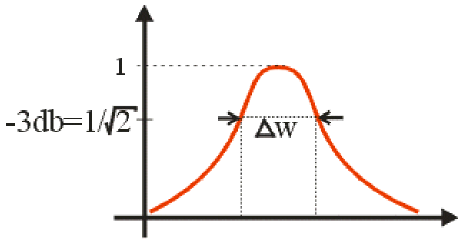


לפי הגדרת פונקצית המערכת, אם $H(jw)=1$ אז פאזור היציאה זהה לפאזור הכניסה.
אם $H(jw)=0$ אז פאזור היציאה הוא אפס. במקרה של מעגל התהודה שאנו מנתחים, $H(jw)=1$ בתדר התהודה ו - $H(jw)=0$ בתדרים $w \to 0, w \to \infty$. לכן אומרים שמעגל זה מעביר תדרים שבאזור תדר התהודה כמעט בשלמותם ואינו מעביר תדרים נמוכים / גבוהים. למעגל בעל התכונות האלה קוראים **bandpass filter**.

למסנן bandpass filter אידיאלי יש פונקצית מערכת כזו:



כלומר, יש לו טווח תדרים מוגדר (שנקרא רוחב הפס של המסנן) שמחוץ לו הוא ממש <u>מאפס</u> את הכניסה.
אבל במקרה שלנו המצב הוא פחות אידיאלי:



אנו בכל זאת נרצה להגדיר טווח תדרים מקורב למסנן הלא-אידיאלי.
נגדיר את רוחב הפס ע״י הגדרת נקודות 3dB-. לפי הגדרה זו, קצות רוחב הפס הם הנקודות שבהן $|H(jw)|$ הוא $\frac{1}{\sqrt{2}}$ מערכו המקסימלי של הפילטר. נקודות אלו נקראות נקודות **3- dB**.
הגדרה זו קשורה בסקלת מדידה לוגריתמית: $dB = 20 \cdot \log\left(\left|\frac{H(jw)}{H_{max}}\right|\right)$.

איך נמצא את נקודות ה 3-dB? ראינו שערכו המקסימלי של הפילטר הוא 1 (בתדר התהודה). לכן נפתור את השוויון הבא:

$$|H(jw)| = \frac{1}{\sqrt{1+Q^2\left(\frac{w}{w_0}-\frac{w_0}{w}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \quad Q^2\left(\frac{w}{w_0}-\frac{w_0}{w}\right)^2 = 1$$

$$\frac{w}{w_0}-\frac{w_0}{w}=\pm\frac{1}{Q}\ \Rightarrow\ \left(\frac{w}{w_0}\right)^2\pm\frac{1}{Q}\frac{w}{w_0}-1=0$$

$$\frac{w}{w_0}=\pm\frac{1}{2Q}\pm\sqrt{1+\frac{1}{4Q^2}}$$

עבור: $\frac{w}{w_0}>0$ נקבל: $\frac{w}{w_0}=\pm\frac{1}{2Q}+\sqrt{1+\frac{1}{4Q^2}}$

עבור $Q>>1$ ניתן להשתמש בקירוב הבא: $\sqrt{1+x}=1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\dots$

ולכן נקבל: $\frac{w}{w_0}=\pm\frac{1}{2Q}+\left(1+\frac{1}{8Q^2}-\dots\right)\cong 1\pm\frac{1}{2Q}+\frac{1}{8Q^2}$

והפתרונות הם: $w_2=w_0\left(1+\frac{1}{2Q}+\frac{1}{8Q^2}\right)\qquad w_1=w_0\left(1-\frac{1}{2Q}+\frac{1}{8Q^2}\right)$

אלו הן שתי הנקודות שתוחמות את רוחב הפס של המסנן (ראה הגרף שלעיל),

ורוחב הפס שהתקבל הוא: $\Delta w=w_2-w_1=\frac{w_0}{Q}\quad\Rightarrow\quad \Delta f=\frac{\Delta w}{2\pi}=\frac{w_0}{2\pi Q}[Hz]$

התדר w_1 (וכמובן גם w_2) נקרא "**תדר הקיטעון**" ולעיתים גם "**תדר הברך**".

עבור מעגל RLC טורי ומעגל RLC מקבילי ה- Q שהגדרנו כאן מתלכד עם מקדם האיכות Q שהגדרנו בפרק 5:

נבדוק לגבי RLC מקבילי. קיבלנו בפרק 5 שהמד"ר המתארת את המעגל היא: $I_L''+\frac{1}{RC}i_L'+\frac{1}{LC}i_L=0$

וסימנו: $\frac{1}{LC}=w_0{}^2\quad,\quad\frac{1}{RC}=2\alpha$.

בדיקה: $\frac{w_0}{2\alpha}=\frac{w_0{}^2}{2\alpha w_0}=\frac{1}{2\alpha CLw_0}=\frac{R}{w_0L}=Q$,

כאשר השתמשנו ב: $R=\frac{RC}{C}=\frac{1}{2\alpha C}$ בשוויון השני ו: $w_0{}^2=\frac{1}{LC}$ בשוויון השלישי.

אכן ניתן לראות שהגענו למקדם האיכות האמור.

ניתן גם להגדיר את רוחב הפס כתלות ב - α:

$$\Delta f=\frac{\frac{w_0}{Q}}{2\pi}=\frac{2\alpha}{2\pi}=\frac{\alpha}{\pi}\quad\Rightarrow\quad\Delta w=2\pi\Delta f=2\alpha$$

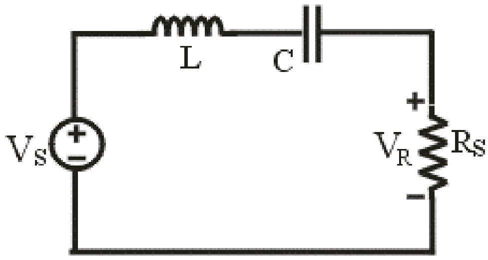
ובמקרה של תת ריסון (נזכיר שזהו המקרה עבור: $\alpha<w_0$ או $Q>\frac{1}{2}$) ניתן גם לקשר בין w_d ל - Q:

$$w_d = \sqrt{w_0^{\,2} - \alpha^2} = w_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$$

$$\alpha = \frac{w_0}{2Q}$$

נסכם את שני מעגלי התהודה הנפוצים :

מעגל RLC טורי :



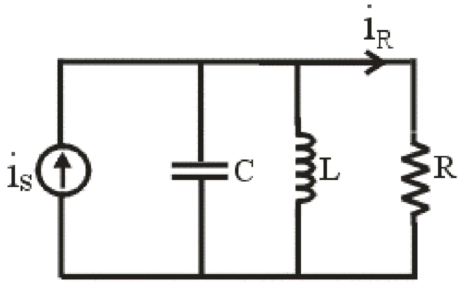
$$Q=\frac{w_0}{2\alpha}=\frac{w_0L}{R}=\frac{\sqrt{L/C}}{R}$$

$$\alpha=\frac{R}{2L}$$

$$H(jw)=\frac{V_R}{V_S}$$

$$Z(jw)=\frac{V_S}{I}=\frac{V_SR}{V_R}=\frac{R}{H(jw)}$$

מעגל RLC מקבילי :



$$Q=\frac{w_0}{2\alpha}=w_0CR=\frac{R}{w_0L}=\frac{R}{\sqrt{L/C}}$$

$$\alpha=\frac{1}{2RC}$$

$$H(jw)=\frac{I_R}{I_S}$$

$$Y(jw)=\frac{I_S}{V}=\frac{1}{RH(jw)}$$

עבור שני המעגלים :

$$Q=\frac{w_0}{2\alpha}$$

$$w_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$H(jw)=\frac{1}{1+jQ\left(\frac{w}{w_0}-\frac{w_0}{w}\right)}$$

$$w_1=w_0\left(1-\frac{1}{2Q}+\frac{1}{8Q^2}\right)\qquad w_2=w_0\left(1+\frac{1}{2Q}+\frac{1}{8Q^2}\right)$$

$$\Delta W=\frac{w_0}{Q}=2\alpha$$

<u>הספק במצב סינוסי עמיד</u>

הספק רגעי: $P(t) = V(t) \cdot i(t)$

אנרגיה: $W = \int_{t_1}^{t_2} P(t)dt$

נחזור לרישום הפאזורי: $\tilde{V} = V_m \angle \varphi_v$, $V(t) = \mathrm{Re}\left[\tilde{V} e^{jwt}\right]$

$\tilde{I} = I_m \angle \varphi_i$, $i(t) = \mathrm{Re}\left[\tilde{I}\, e^{jwt}\right]$

נרשום את ההספק מחדש, הפעם עבור אותות סינוסואידליים:

$$V(t) \cdot i(t) = V_m \cdot I_m \cos(wt + \varphi_v)\cos(wt + \varphi_i) = \frac{1}{2} V_m \cdot I_m \cos(\varphi_v - \varphi_i) + \frac{1}{2} V_m \cdot I_m \cos(2wt + \varphi_v + \varphi_i)$$

נגדיר הספק ממוצע למחזור:

$$P_{av} = \frac{1}{T}\int_0^T p(t')dt'$$

מכיוון שהביטוי הראשון הוא קבוע בזמן, והביטוי השני הוא סינוסואידלי ויתאפס באינטגרציה ע"פ מחזור שלם, נקבל:

$$P_{av} = \frac{1}{2} V_m \cdot I_m \cos(\varphi_v - \varphi_i)$$

P_{av} הינו ממוצע למחזור והוא תלוי ב - $\varphi_v - \varphi_i$. אם $\varphi_v - \varphi_i = \frac{\pi}{2}$ אזי $P_{av} = 0$, כלומר אין הספק ממוצע.

נגדיר:
$$\tilde{P} = \frac{1}{2}\tilde{V}\tilde{I}^* = \frac{1}{2}\left|\tilde{V}\right|\left|\tilde{I}\right| e^{j(\varphi_v - \varphi_i)}$$

ואז:
$$P_{av} = \mathrm{Re}\left[\tilde{P}\right] = \frac{1}{2}\left|\tilde{V}\right|\left|\tilde{I}\right|\cos(\varphi_v - \varphi_i)$$

$$P_{av} = \frac{1}{2}\left|\tilde{I}\right|^2 \mathrm{Re}[Z] = \frac{1}{2}\left|\tilde{V}\right|^2 \mathrm{Re}[Y]$$

תכונת הסיכום של הספק ממוצע:

אם זרם או מתח מעוררים בתדירויות שונות:

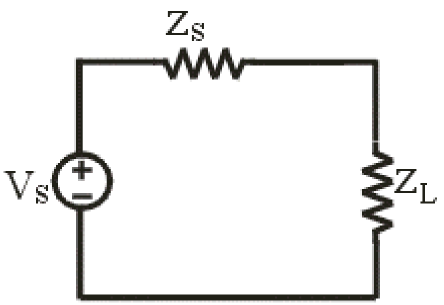
$$i(t) = I_1 \cos(w_1 t + \varphi_1) + I_2 (w_2 t + \varphi_2)$$
$$V(t) = V_1 \cos(w_1 t + \theta_1) + V_2 \cos(w_2 t + \theta_2)$$

אז ההספק הוא:

$$P(t) = \frac{1}{2} V_1 I_1 \cos(\varphi_1 - \theta_1) + \frac{1}{2} V_2 I_2 \cos(\varphi_2 - \theta_2) + \frac{1}{2} V_1 I_1 \cos(2w_1 t + \theta_1 + \varphi_1) + \frac{1}{2} V_2 I_2 \cos(2w_2 t + \theta_2 + \varphi_2) +$$
$$+ \frac{1}{2} I_1 V_2 \cos((w_1 - w_2)t + \varphi_1 - \theta_2) + \frac{1}{2} I_1 V_2 \cos((w_1 + w_2)t + \varphi_1 + \theta_2) + \frac{1}{2} I_2 V_1 \cos((w_2 - w_1)t + \varphi_2 - \theta_1) +$$
$$+ \frac{1}{2} I_2 V_1 \cos((w_1 + w_2)t + \varphi_2 + \theta_1)$$

ניתן לראות שההספק הרגעי איננו הסכום של שני ההספקים הרגעיים הנובעים משני הזרמים I_1, I_2, אבל לגבי ההספק הממוצע זה כן מתקיים: כאשר נבצע ממוצע של $p(t)$ על פני מחזור שלם, כל האיברים המכילים cos עם תלות זמנית יתאפסו ונישאר רק עם שני האיברים הראשונים. כלומר:

$$P_{av} = \frac{1}{2} V_1 I_1 \cos(\varphi_1 - \theta_1) + \frac{1}{2} V_2 I_2 \cos(\varphi_2 - \theta_2) = P_{av1} + P_{av2}$$



<u>העברת הספק אופטימלית:</u>

נתבונן במעגל הבא:

ההספק הממוצע על Z_L: $P_{av} = \frac{1}{2}\left|\tilde{I}\right|^2 \mathrm{Re}\left[Z_L\right]$

נציב: $\tilde{I} = \dfrac{\tilde{V}_S}{Z_S + Z_L}$

ונקבל:

$$P_{av} = \frac{1}{2}\left|\tilde{V}_S\right|^2 \frac{\mathrm{Re}\left[Z_L\right]}{\left|\cancel{Z_S} + Z_L\right|^2} = \frac{1}{2}\left|\tilde{V}_S\right|^2 \frac{R_L}{\left(R_L + R_S\right)^2 + \left(X_L + X_S\right)^2}$$

$$Z_L = R_L + jX_L$$
$$Z_S = R_S + jX_S$$

עבור $X_L = -X_S$ מקבלים: $P_{av} = \dfrac{1}{2}\left|\tilde{V}_S\right|^2 \dfrac{R_L}{\left(R_L + R_S\right)^2}$

כדי למצוא את ההספק המקסימלי לפי R_L נגזור ונשווה לאפס:

$$\frac{\partial P_{av}}{\partial R_L} = 0$$

$$\frac{\left(R_L + R_S\right)^2 - 2R_L\left(R_L + R_S\right)}{\left(R_L + R_S\right)^4} = 0$$

$$R_L = R_S$$

ואז ההספק המקסימלי הוא: $\left(P_{av}\right)_{max} = \dfrac{1}{8}\left|\tilde{V}_S\right|^2 \cdot \dfrac{1}{R_S}$

כאשר: $Z_L = Z_S{}^*$ כלומר, $R_L = R_S$ ו - $X_L = -X_S$.

ההספק הנמסר ע"י המקור במקרה זה הוא:

$$\left(P_{av}\right)_{source} = \mathrm{Re}\left\{\frac{1}{2}\left|V_S\right|^2 \frac{1}{Z_C + Z_S}\right\} = \frac{1}{2}\left|\tilde{V}_S\right|^2 \frac{1}{R_L + R_S} = \frac{1}{2}\frac{\left|\tilde{V}_S\right|^2}{2R_S} = \frac{\left|\tilde{V}_S\right|^2}{4R_S}$$

לכן הניצול של ההספק של Z_L ביחס להספק המסופק ע"י המקור הוא: $\eta = 50\%$.

<u>תאור אנרגטי של פקטור Q בתהודה</u>

בתהודה מתקיים: $Q=\frac{w_0}{2\alpha}=w_0CR=w_0\cdot\frac{\frac{1}{2}C\left|\tilde{V}\right|^2}{\frac{1}{2}G\left|\tilde{V}\right|^2}$ (במעגל RLC מקבילי).

נוכיח ש - $\frac{1}{2}C\left|\tilde{V}\right|^2$ הוא האנרגיה האגורה בקבל + סליל בתהודה:

$$\frac{1}{2}CV_C{}^2+\frac{1}{2}Li_L{}^2=\frac{1}{2}C\left[\mathrm{Re}\left\{\tilde{V}e^{jw_0t}\right\}\right]^2+\frac{1}{2}L\left[\mathrm{Re}\left\{\frac{\tilde{V}e^{jw_0t}}{jw_0L}\right\}\right]^2=$$

$$=\frac{1}{2}C\left[\left|\tilde{V}\right|\cos(w_0t+\varphi)\right]^2+\frac{1}{2}L\left[\frac{\left|\tilde{V}\right|}{w_0L}\sin(w_0t+\varphi-\frac{\pi}{2})\right]^2=$$

$$=\frac{1}{2}C\left|\tilde{V}\right|^2\cos^2(w_0t+\varphi)+\frac{1}{2}L\frac{\left|\tilde{V}\right|^2}{(w_0L)^2}\sin^2(w_0t+\varphi)\underset{w_0{}^2=\frac{1}{LC}}{=}\frac{1}{2}C\left|\tilde{V}\right|^2$$

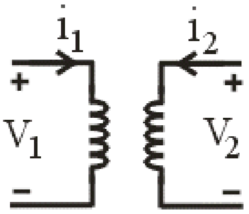
ולכן בתהודה ניתן לפרש את Q באופן הבא:

$$Q=w_0\cdot\frac{\text{אנרגיה אגורה}}{\text{הספק ממוצע שמתבזבז בנגד}}=2\pi\frac{\text{אנרגיה אגורה}}{\text{אנרגיה מבוזבזת במחזור יחיד}}$$

פרק 8 : אלמנטים מצומדים

בניגוד לקבלים, סלילים, נגדים ומקורות רגילים ישנם אלמנטים שהתנהגותם קשורה במתרחש בענפים אחרים של המעגל. אלמנטים אלו מכונים **אלמנטים מצומדים**.
אנו נדון בשני מקרים : סלילים ומקורות. אולם אם ניזכר כי מקור לא אידיאלי הינו בעל התנגדות פנימית, הרי שהטיפול במקורות מבוקרים כולל גם נגדים מצומדים.

סלילים מצומדים



סלילים מצומדים הם שני סלילים שקבועים בקירבה פיסית (עם או בלי ליבה מגנטית משותפת) :

הצימוד מתבטא בכך שהשטף שכל אחד מהסלילים יוצר משפיע גם על חברו ולכן תלוי גם בזרם של הסליל השני, ולא רק בזרם של עצמו :

$$\phi_1(t) = L_{11}i_1(t) + M_{12}i_2(t)$$
$$\phi_2(t) = M_{21}i_1(t) + L_{22}i_2(t)$$

מינוחים : L_{11}, L_{22} - השראות עצמית, self inductance.
$M_{12},\ M_{21}$ השראות הדדית, mutual inductance.
ברוב המקרים $M = M_{12} = M_{21}$, כלומר ההשפעה ההדדית של הסלילים אחד על השני היא זהה.
הגורם M יכול להיות חיובי או שלילי לפי כיוון הליפוף וההצבה של הסלילים אחד ביחס לשני.

המתח על הסלילים : $V_2 = M\frac{di_1}{dt} + L_{22}\frac{di_2}{dt}$ $\qquad$ $V_1 = L_{11}\frac{di_1}{dt} + M\frac{di_2}{dt}$

או בפאזורים : $\tilde V_2 = jwM\tilde I_1 + jwL_{22}\tilde I_2$ $\qquad$ $\tilde V_1 = jwL_{11}\tilde I_1 + jwM\tilde I_2$

האנרגיה האגורה בסלילים המצומדים :

$$\varepsilon(i_1,i_2) = \int_0^t V_1(t')i_1(t')dt' + \int_0^t V_2(t')i_2(t')dt' =$$

$$= \int_0^t \left[L_{11}\frac{di_1}{dt'}\cdot i_1 + M\left(i_1\frac{di_2}{dt'} + i_2\frac{di_2}{dt'}\right) + L_{12}\frac{di_2}{dt'}\cdot i_2\right]dt' = \frac{1}{2}L_{11}i_1^{\,2}(t) + Mi_1(t)i_2(t) + \frac{1}{2}L_{22}i_1^{\,2}(t) =$$

$$\frac{d(i_1^{\,2})}{2dt'} \qquad \frac{d(i_1\cdot i_2)}{dt'}$$

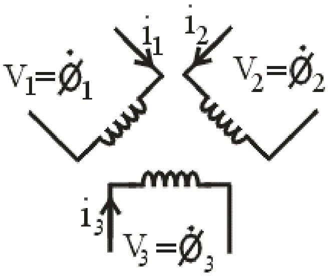
$$= \varepsilon(i_1,0) + Mi_1i_2 + \varepsilon(i_2,0)$$

כלומר, האנרגיה האצורה בסלילים המצומדים היא סכום האנרגיות האצורות בכל אחד מהסלילים, וגורם נוסף שהוא מכפלת הזרמים והפקטור M.
לפיכך M יכול להגדיל או להקטין את האנרגיה האגורה.

נהוג לסמן : $K = \frac{|M|}{\sqrt{L_{11}L_{22}}}$ בתור **מקדם הצימוד**.

במקרה שיש הרבה סלילים שמצומדים ביניהם :

$$\begin{aligned}\phi_1 &= L_{11}i_1 + L_{12}i_2 + L_{13}i_3 + \ldots\\ \phi_2 &= L_{21}i_1 + L_{22}i_2 + L_{23}i_3 + \ldots\\ &\vdots\end{aligned}$$



למשל במקרה של שלושה סלילים :

נגדיר : $\bar{\bar{L}} = \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13}\\ L_{21} & L_{21} & L_{23}\\ L_{31} & L_{31} & L_{33}\end{pmatrix}$ מטריצת ההשראות,

ואז ברישום מטריציאלי ניתן לרשום : $\bar{\phi} = \bar{\bar{L}}\,\bar{I}$, כאשר $\bar{I}$ הוא וקטור הזרמים.

ניתן גם לרשום : $\bar{I} = \bar{\bar{L}}^{-1}\bar{\phi} = \bar{\bar{\Gamma}}\bar{\phi}$.

ל - Γ קוראים מטריצת ההשראות ההפוכה reciprocal inductance matrix.

נתבונן במקרה הדו-ממדי :

$$\begin{aligned} i_1 &= \Gamma_{11}\phi_1 + \Gamma_{12}\phi_2\\ i_2 &= \Gamma_{21}\phi_1 + \Gamma_{22}\phi_2\end{aligned}$$

כאשר מתוך הקשר הבא :

$$\begin{bmatrix}\Gamma_{11} & \Gamma_{12}\\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22}\end{bmatrix} = \frac{\begin{bmatrix} L_{22} & -L_{12}\\ -L_{21} & L_{11}\end{bmatrix}}{\left|\bar{\bar{L}}\right|} = \Gamma = L^{-1}$$

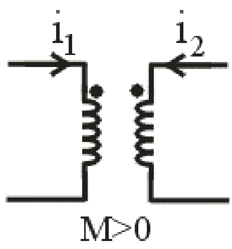
נמצא את איברי מטריצת ההשראות ההפוכה : $\Gamma_{12} = \frac{-L_{12}}{\left|\bar{\bar{L}}\right|}$, $\Gamma_{22} = \frac{L_{11}}{\left|\bar{\bar{L}}\right|}$, $\Gamma_{11} = \frac{L_{22}}{\left|\bar{\bar{L}}\right|}$.

עבור זרמים סינוסואידליים נוכל לרשום :

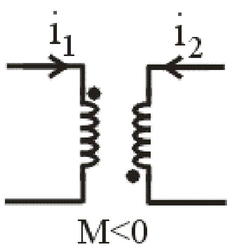
$$\begin{aligned}\tilde{I}_1 &= \frac{\Gamma_{11}}{jw}\tilde{V}_1 + \frac{\Gamma_{12}}{jw}\tilde{V}_2 + \ldots\\ \tilde{I}_2 &= \frac{\Gamma_{21}}{jw}\tilde{V}_1 + \frac{\Gamma_{22}}{jw}\tilde{V}_2 + \ldots\\ &\vdots\end{aligned}$$

או ברישום מטריציאלי : $\bar{\tilde{I}} = \bar{\bar{\Gamma}}\cdot\frac{1}{jw}\cdot\bar{\tilde{V}}$.

אמרנו ש-M יכול להיות חיובי או שלילי. כיצד, אם כן, נזהה את סימונו של M מתוך התבוננות במעגל?
ע״י ציור של נקודה : אם שני הזרמים נכנסים או יוצאים מהצד עם הנקודה אז M חיובי, אחרת M שלילי :



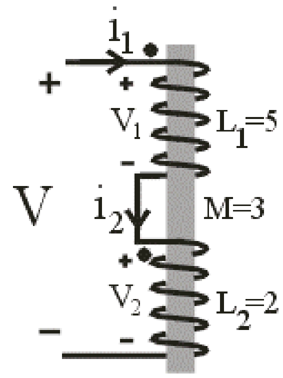
M>0



M<0

חיבורים מקביליים וטוריים של סלילים מצומדים:

חיבור טורי:



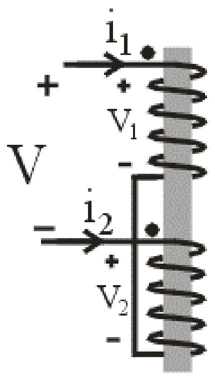
$$i_1 = i_2 = i$$
$$\phi_1 = L_1 i_1 + M i_2 = 8i$$
$$\phi_2 = M i_1 + L_2 i_2 = 5i$$

בחיבור טורי מתקיים: $V = V_1 + V_2$ אז:

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{d\phi_1}{dt} + \frac{d\phi_2}{dt} \quad \Rightarrow \quad \phi = \phi_1 + \phi_2 \quad \Rightarrow \quad \phi = 13i$$

ונוכל למצוא את המוליכות השקולה של החיבור המקבילי: $L_{total} = \frac{\phi}{i} = 13$.

חיבור טורי הפוך:



$$i = i_1 = -i_2$$
$$V = V_1 - V_2 \quad \Rightarrow \quad \phi = \phi_1 - \phi_2$$
$$\phi_1 = 5i_1 + 3i_2 = 5i_1 - 3i_1 = 2i_1$$
$$\phi_2 = 2i_2 + 3i_1 = -2i_1 + 3i_1 = i_1$$
$$\phi = 2i_1 - i_1 = i_1 = i$$

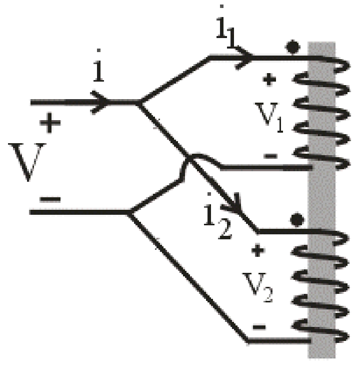
$$L_{total} = \frac{\phi}{i} = 1$$

נסכם את צורת החיבור הטורי:

$$L_{total} = L_{11} + L_{22} \pm 2|M|$$

כאשר סימן המחובר האחרון תלוי בסוג החיבור, כאמור לעיל.

חיבור מקבילי:



כמו קודם, מטריצת ההשראות היא: $L = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

ולכן מטריצת ההשראות ההפוכה היא: $\Gamma = L^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$

$$i_1 = \Gamma_{11}\phi_1 + \Gamma_{12}\phi_2 = 2\phi_1 - 3\phi_2$$
$$i_2 = \Gamma_{21}\phi_1 + \Gamma_{22}\phi_2 = -3\phi_1 + 5\phi_2$$
$$V = V_1 = V_2 \quad \Rightarrow \quad \phi_1 = \phi_2$$

$$i_1 = 2\phi_1 - 3\phi_1 = -\phi_1 = -\phi$$
$$i_2 = -3\phi_1 + 5\phi_1 = 2\phi_1 = 2\phi$$
$$i = i_1 + i_2 = 2\phi - \phi = \phi$$

$$L_{total} = \frac{\phi}{i} = 1$$

ישנו, כמובן, גם חיבור מקבילי הפוך (בדומה למקרה הטורי).
נסכם את צורת החיבור המקבילי:

$$\Gamma = \Gamma_{11} + \Gamma_{22} \pm 2|\Gamma_{12}|$$

כאשר סימן המחובר האחרון תלוי בסוג החיבור.

שנאי אידיאלי Ideal transformer

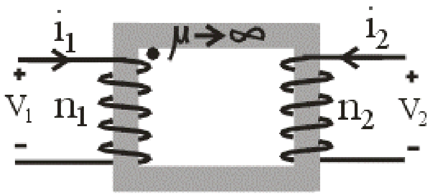
שנאי אידיאלי הוא התקן המקיים:

1. אין בזבוז אנרגיה.

2. אין דליפת שטף מגנטי מהליבה. זה מוביל לעובדה ש - $K = \frac{|M|}{\sqrt{L_{11}L_{12}}} = 1$ (יוכח בהמשך) ומצב זה נקרא **צימוד מלא**.

3. ההשראות העצמית של כל ענף היא גדולה מאוד.

תנאים אלו מושגים תוך שימוש בליבה בעלת חדירות מגנטית (magnetic permeability) ששואפת לאינסוף: $\mu \to \infty$.
במצב זה, כל כריכה בליפוף 1 מצומדת במלואה לכל כריכה בליפוף 2.



אם נסמן:
ϕ - השטף המגנטי דרך ליפוף יחיד של הסליל על הליבה,
n_1 - מספר הליפופים על גליל 1,
n_2 - מספר הליפופים על גליל 2,
ϕ_1 - השטף המגנטי דרך גליל 1,
ϕ_2 - השטף המגנטי דרך גליל 2,

אז נקבל: $\phi_1 = n_1\phi$
$\phi_2 = n_2\phi$

מכיוון ש: $V_1 = \frac{d\phi_1}{dt} = n_1\frac{d\phi}{dt}$, $V_2 = \frac{d\phi_2}{dt} = n_2\frac{d\phi}{dt}$
מסיקים את היחס בין המתחים:

$$\boxed{\frac{V_1(t)}{V_2(t)} = \frac{n_1}{n_2}}$$

אמרנו שבשנאי אין איבוד אנרגיה, לכן מתקיים בו חוק שמור האנרגיה.
הספק נכנס בליפוף 1 - $i_1(t)V_1(t)$,

הספק נכנס בליפוף 2 - $i_2(t)V_2(t)$,

ולכן צריך להתקיים: $i_1(t)V_2(t)+i_2(t)V_2(t)=0$

מכאן נובע היחס בין הזרמים:

$$\boxed{\frac{i_1(t)}{i_2(t)}=-\frac{n_2}{n_1}}$$

כעת נוכל להוכיח שתחת התנאים שמתקיימים בשנאי אידיאלי, מקדם הצימוד שווה ל - 1:

$$\varepsilon(i_1,i_2)=\frac{1}{2}L_{11}i_1^{\,2}+Mi_1i_2+\frac{1}{2}L_{22}i_2^{\,2}=$$

$$=\frac{1}{2}\left[L_{11}i_1^{\,2}+2\sqrt{L_{11}L_{22}}\,i_1i_2+L_{22}i_2^{\,2}\right]+\left[\frac{M}{\sqrt{L_{11}L_{22}}}-1\right]\sqrt{L_{11}L_{22}}\,i_1i_2=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\sqrt{L_{11}}\,i_1+\sqrt{L_{22}}\,i_2\right]^2+(K-1)\sqrt{L_{11}L_{12}}\,i_1i_2$$

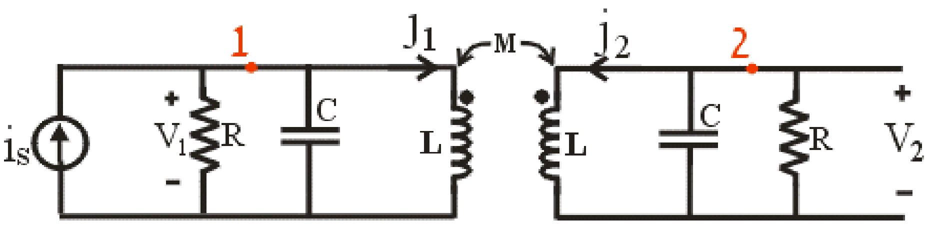
דורשים $\varepsilon=0$, לכן:

1 - $\sqrt{L_{11}}\,i_1+\sqrt{L_{22}}\,i_2=0 \quad\Rightarrow\quad \frac{\sqrt{L_{11}}}{\sqrt{L_{22}}}=-\frac{i_2}{i_1} \quad\Rightarrow\quad \frac{L_{11}}{L_{22}}=\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2$

2 - $K-1=0 \quad\Rightarrow\quad K=\frac{M}{\sqrt{L_{11}L_{22}}}=1$

<u>מעגל מכוון כפול</u>

מעגל מכוון כפול הוא הצמדה של שני מעגלי תהודה זהים:



מטריצת ההשראות היא: $\begin{pmatrix} L & M \\ M & L \end{pmatrix}=L\begin{pmatrix} 1 & K \\ K & 1 \end{pmatrix}$

מטריצת ההשראות ההפוכה היא: $\Gamma=L^{-1}=\frac{1}{(1-K^2)L^2}\begin{pmatrix} 1 & -k \\ -k & 1 \end{pmatrix}$

כמו כן, מכיוון ש: $L_{11}=L_{22}=L$ אז: $K=\frac{M}{\sqrt{L\cdot L}}=\frac{M}{L}$.

אנו מעונינים במצב הסינוסי העמיד של המעגל:

נרצה למצוא את פונקצית המערכת:

$$\tilde{H}(jw) = \frac{\tilde{V}_2}{\tilde{I}_S}$$

פתרון:

$$\tilde{V}_1 = jwL\,\tilde{I}_1 + jwM\,\tilde{I}_2$$
$$\tilde{V}_2 = jwM\,\tilde{I}_1 + jwL\,\tilde{I}_2$$

נרשום את זוג המשוואות בצורה מטריציאלית:

$$[\tilde{V}] = \begin{pmatrix} jwL & jwM \\ jwM & jwL \end{pmatrix} [\tilde{I}]$$

לפי כלל קרמר:

$$[\tilde{I}] = \frac{\begin{pmatrix} jwL & -jwM \\ -jwM & jwL \end{pmatrix}}{-w^2\left(L^2 - M^2\right)} \cdot [\tilde{V}] = \frac{\begin{pmatrix} 1 & -k \\ -k & 1 \end{pmatrix}}{jwL\left(1-k^2\right)} \cdot [\tilde{V}]$$

כלומר:

$$\tilde{I}_1 = \frac{1}{jwL(1-k^2)}(\tilde{V}_1 - k\cdot\tilde{V}_2)$$
$$\tilde{I}_2 = \frac{1}{jwL(1-k^2)}(-k\cdot\tilde{V}_1 + \tilde{V}_2)$$

נרשום משוואת זרמים עבור צומת 1:

$$\tilde{I}_{R1} + \tilde{I}_{C1} + \tilde{I}_1 = \tilde{I}_S$$

$$\frac{\tilde{V}_1}{R} + jwC\tilde{V}_1 + \frac{1}{jwL(1-k^2)}(\tilde{V}_1 - k\tilde{V}_2) = \tilde{I}_S$$

$$\text{(A)} \qquad \left[\frac{1}{R} + jwC + \frac{1}{jwL\left(1-K^2\right)}\right]\tilde{V}_1 - \frac{K}{jwL\left(1-K^2\right)}\tilde{V}_2 = \tilde{I}_S$$

כנ"ל עבור צומת 2:

$$\tilde{I}_{R1} + \tilde{I}_{C2} + \tilde{I}_2 = 0$$

$$\left(jwC + \frac{1}{R}\right)\tilde{V}_2 + \frac{-K\tilde{V}_1 + \tilde{V}_2}{jwL\left(1-K^2\right)} = 0$$

$$\text{(B)} \qquad \frac{-K}{jwL\left(1-K^2\right)}\tilde{V}_1 + \left[\frac{1}{R} + jwC + \frac{1}{jwC\left(1-K^2\right)}\right]\tilde{V}_2 = 0$$

נחבר את המשוואות:

$$\text{(A) + (B)} \qquad \left[\frac{1}{R} + jw + \frac{1}{jwL\left(1-K^2\right)}\right]\left(\tilde{V}_1 + \tilde{V}_2\right) - \frac{K}{jwL\left(1-K^2\right)}\left(\tilde{V}_1 + \tilde{V}_2\right) = \tilde{I}_S$$

נפשט ונחלק ב- 2 את שני הצדדים:

$$(1)\qquad \left[\frac{1}{R}+jwC+\frac{1}{jwL(1+K)}\right]\left(\frac{\tilde{V}_1+\tilde{V}_2}{2}\right)=\frac{\tilde{I}_S}{2}$$

כעת נחסר את המשוואות:

$$(A)\quad (B)\qquad \left[\frac{1}{R}+jwC+\frac{1}{jwL(1-K^2)}\right](\tilde{V}_1-\tilde{V}_2)+\frac{K}{jwL(1-K^2)}(\tilde{V}_1-\tilde{V}_2)=\tilde{I}_S$$

נפשט ונחלק ב- 2 את שני הצדדים:

$$(2)\qquad \left[\frac{1}{R}+jwC+\frac{1}{jwL(1-k)}\right]\frac{(\tilde{V}_1-\tilde{V}_2)}{2}=\frac{\tilde{I}_S}{2}$$

נציב ב - (1), (2) את הסימונים הבאים:

$$\tilde{V}^+=\frac{\tilde{V}_1+\tilde{V}_2}{2}\quad,\quad {w_+}^2=\frac{1}{LC(1+k)}\quad,\quad Q_+=w_+CR$$

$$\tilde{V}^-=\frac{\tilde{V}_1-\tilde{V}_2}{2}\quad,\quad {w_-}^2=\frac{1}{LC(1-k)}\quad,\quad Q_-=w_-CR$$

$$(w_+<w_-)$$

ונקבל את המשוואות הבאות:

$$(1)\qquad \tilde{V}^+=\frac{1}{2}\tilde{I}_S R\frac{1}{1+jQ_+\left(\frac{w}{w_+}-\frac{w_+}{w}\right)}$$

$$(2)\qquad \tilde{V}^-=\frac{1}{2}\tilde{I}_S R\frac{1}{1+jQ_-\left(\frac{w}{w_-}-\frac{w_-}{w}\right)}$$

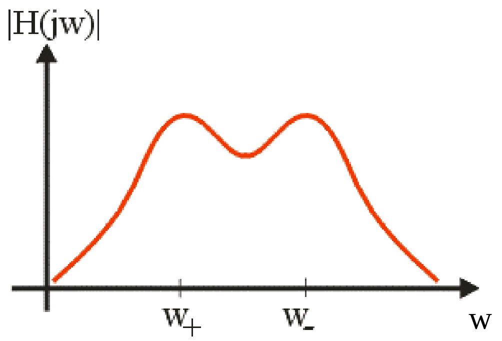
רואים ששתי המשוואות (1) , (2) תואמות בצורתן מעגל תהודה מסדר שני (פרק 7). זה מסתדר עם העובדה שהגדרנו מעגל מכוון כפול בתור הצמדה של שני מעגלי תהודה זהים.

מתח המוצא הוא: $\tilde{V}_2=\tilde{V}^+-\tilde{V}^-$

לכן אנו יכולים למצוא את פונקצית המערכת של מעגל מכוון כפול:

$$\frac{\tilde{V}_2}{\tilde{I}_S}=H(jw)=\frac{1}{2}R\left[\frac{1}{1+jQ_+\left(\frac{w}{w_+}-\frac{w_+}{w}\right)}-\frac{1}{1+jQ_-\left(\frac{w}{w_-}-\frac{w_-}{w}\right)}\right]$$

הגרף שלה הוא הבא:

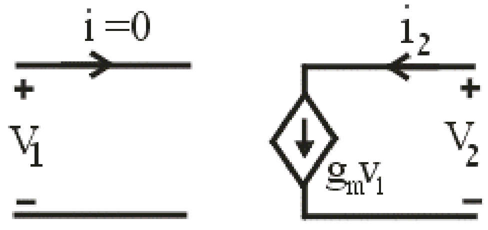


המעגל הנ"ל מאפשר לשלוט על מיקומם של w_+, w_- ע"י מקדם הצימוד וכך לקבל פונקצית תמסורת בה רוחב תחום התדרים המועברים נשלט. כמובן שלעיתים זו תכונה נחוצה ושימושית, למשל במקלטים, במגברים וכו'.

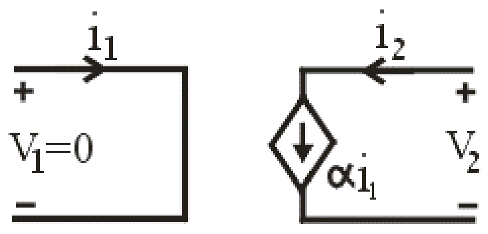
מקורות מבוקרים

בהגדרתו, מקור מבוקר הוא אלמנט בעל שני ענפים, כאשר ענף 2 הוא מקור מתח או זרם וענף 1 הוא רכיב כלשהו (ייתכן גם קצר או נתק).
צורת הגל של המקור בענף 2 היא פונקציה של הזרם בענף 1.
כלומר, המקור בענף 2 מבוקר ע"י הזרם או המתח על ענף 1.

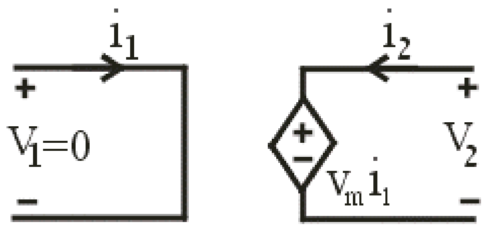
ישנם ארבעה סוגים של מקורות מבוקרים:
מקור זרם מבוקר מתח - כאשר ענף 2 הוא מקור זרם התלוי במתח על פני ענף 1,
מקור זרם מבוקר זרם - כאשר ענף 2 הוא מקור זרם התלוי בזרם על פני ענף 1,
מקור מתח מבוקר זרם - כאשר ענף 2 הוא מקור מתח התלוי בזרם על פני ענף 1,
מקור מתח מבוקר מתח - כאשר ענף 2 הוא מקור מתח התלוי במתח על פני ענף 1.



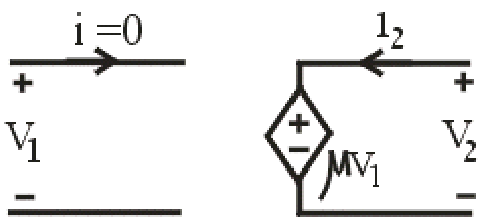
מקור זרם מבוקר מתח



מקור זרם מבוקר זרם



מקור מתח מבוקר זרם

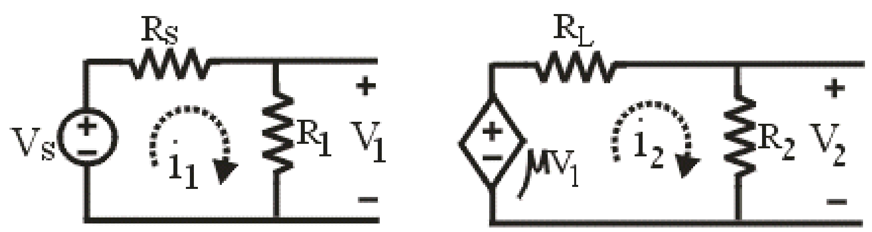


מקור מתח מבוקר מתח

אם α, g_m, μ, v_m הם קבועים בזמן (ראה ציור) הרי שהמקורות הם בלתי תלויים בזמן.
מקורות מבוקרים משמשים לבניית מודלים של רכיבים אלקטרוניים.

דוגמא למקור מתח מבוקר מתח:

מודל של טרנזיסטור FET :



משוואות המתחים בחוגים:

$$(R_1+R_S)i_1=V_S$$
$$(R_2+R_L)i_2=\mu V_1$$

מהן נובע:

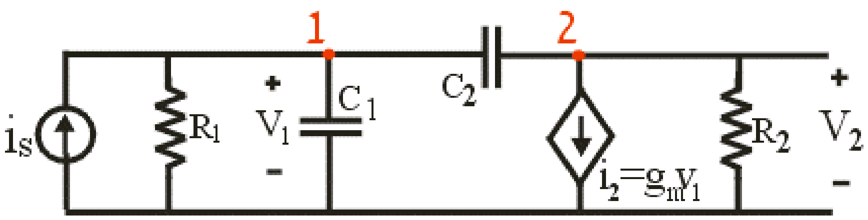
$$i_2(R_2+R_L)=\mu V_1=\mu i_1 R_1=\mu\frac{R_1}{R_1+R_S}V_S$$
$$i_2=\frac{\mu R_1 V_S}{(R_1+R_S)(R_2+R_L)}$$

$$V_2=i_2R_2=\frac{\mu R_1 R_2 V_S}{(R_1+R_S)(R_2+R_L)}$$

אם נבחר את R_L באופן מותאם ניתן לקבל $V_2>V_S$, כלומר היינו מקבלים מגבר מתח: מכניסים מתח מסוים בכניסה, וביציאה של המעגל מקבלים מתח גבוה יותר.

דוגמא למקור זרם מבוקר מתח:

מודל של טרנזיסטור בתדירויות גבוהות:



משוואות הזרמים בצמתים המסומנים:

$$(1)\qquad \frac{V_1}{R_1}+C_1\frac{dV_1}{dt}+C_2\frac{d(V_1-V_2)}{dt}=I_S$$

$$(2)\qquad C_2\frac{d(V_2-V_1)}{dt}+\frac{V_2}{R_2}=-i_2$$
$$\Downarrow$$
$$(3)\qquad C_2\frac{d(V_2-V_1)}{dt}+\frac{V_2}{R_2}+g_mV_1=0$$

$$(1)+(3)\qquad \frac{V_1}{R_1}+C_1\frac{dV_1}{dt}+\frac{V_2}{R_2}+g_mV_1=I_S$$

ע״י גזירת שני הצדדים:

$$\frac{dV_2}{dt}=-R_2\left[\frac{dV_1}{dt}\left(g_m+\frac{1}{R_1}\right)+C_1\frac{d^2V_1}{dt^2}-\frac{dI_S}{dt}\right]$$

נציב במשוואה (1):

$$\frac{V_1}{R_1}+C_1\frac{dV_1}{dt}+C_2\frac{dV_1}{dt}+C_2R_2\left(g_m+\frac{1}{R_1}\right)\frac{dV_1}{dt}+C_2C_1R_2\frac{d^2V_1}{dt^2}-C_2R_2\frac{dI_S}{dt}=I_S$$

נחלק במקדם של הנגזרת הגבוהה ביותר:

$$\frac{d^2V_1}{dt^2}+\left(\frac{g_m+\frac{1}{R_1}}{C_1}+\frac{1}{C_2R_2}+\frac{1}{C_1R_2}\right)\frac{dV_1}{dt}+\frac{1}{C_1C_2R_1R_2}V_1=\frac{1}{C_1}\frac{dI_S}{dt}+\frac{1}{C_1C_2R_2}I_S \qquad (4)$$

נתונים ת״ה:

$$V_1(0)=V_1$$
$$V_2(0)=V_2$$

ממשוואה (3) + (1) נקבל את ת״ה על הנגזרת:

$$\left.\frac{dV_1}{dt}\right|_{t=0}=\frac{1}{C_1}\left[I_S(0)-g_mV_1(0)-\frac{V_2(0)}{R_2}-\frac{V_1(0)}{R_1}\right]=$$
$$=\frac{1}{C_1}\left[i_S(0)-g_mV_1-\frac{V_1}{R_1}-\frac{V_2}{R_2}\right]$$

וכעת הגענו למד״ר מסדר שני עם שני ת״ה שנוכל לפתור.

אם I_S הוא עירור סינוסי אז ניתן לרשום:

$$\tilde{V}_1\left(\frac{1}{R_1}+jwC_1+jwC_2\right)-\tilde{V}_2jwC_2=\tilde{I}_S \qquad (1)$$

$$-\tilde{V}_1jwC_1+\tilde{V}_2\left(\frac{1}{R_2}+jwC_2\right)=-g_m\tilde{V}_1 \qquad (2)$$

נרשום את שתי המשוואות יחד בצורה מטריציאלית:

$$\begin{bmatrix}\frac{1}{R_1}+jwC_1+jwC_2 & -jwC_2\\ -jwC_2+g_m & \frac{1}{R_2}+jwC_2\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{V}_1\\ \tilde{V}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\tilde{I}_S\\ 0\end{pmatrix}$$

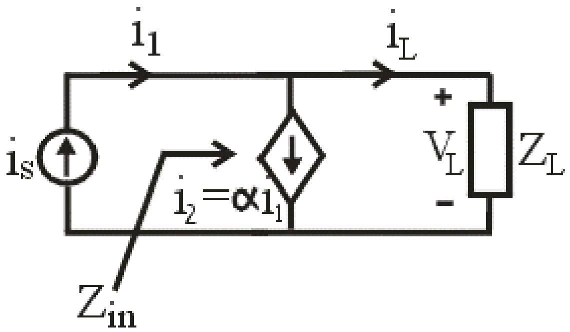
פתרון שתי המשוואות נותן:

$$\tilde{V}_1=\frac{\tilde{I}_S\left(\frac{1}{R_2}+jwC_2\right)}{\left[\frac{1}{R_1}+jw(C_1+C_2)\right]\left[\frac{1}{R_2}+jwC_2\right]+jwC_2(g_m-jwC_2)}=$$

$$=\frac{\tilde{I}_S\left(\frac{1}{R_2}+jwC_2\right)}{\frac{1}{R_1R_2}+jw\left(\frac{C_1+C_2}{R_2}+\frac{C_2}{R_1}+C_2g_m\right)-w^2C_1C_2}$$

דוגמא נוספת :

מקור זרם מבוקר זרם :



נתון המעגל שבציור במצב סינוסי עמיד.
מצא את Zin - אימפדנס הכניסה,
כתלות ב - Z_L.

פתרון :
משוואת הזרמים :

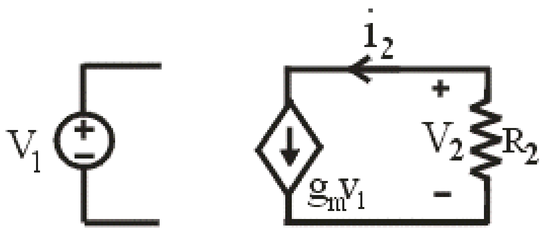
$$I_L=I_1-I_2=I_1(1-\alpha)$$

$$Z_L=\frac{V_L}{I_L}$$

$$Zin=\frac{V}{I_S}=\frac{V_L}{I_1}=\frac{V_L}{I_L}(1-\alpha)=Z_L(1-\alpha)$$

אם למשל $\alpha=2$, נקבל : $Zin=-Z_L$. כלומר עומס בעל התנגדות שלילית!

<u>הספקים :</u>
תכונה נוספת של מקורות מבוקרים היא הבאה :
מקור מבוקר מהווה אלמנט אקטיבי, כלומר הוא מקור הספק.
נתבונן לדוגמא במקור המבוקר הבא :



ההספק הרגעי הנכנס להתקן הוא :

$$P(t)=i_2(t)V_2(t)=-i_2^{\,2}(t)R_2$$

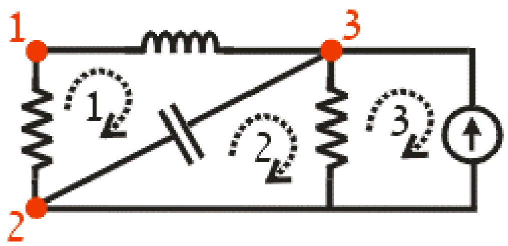
מכאן רואים, שההספק הרגעי הנכנס להתקן הוא תמיד שלילי. כלומר : בהתקן אין צריכת אנרגיה, להפך : המקור המבוקר מספק לנגד R_2 אנרגיה בכל כמות שצריך. מספיק שנכוון כרצוננו את מתח הכניסה V_1.

פרק 9 : תורת הרשתות

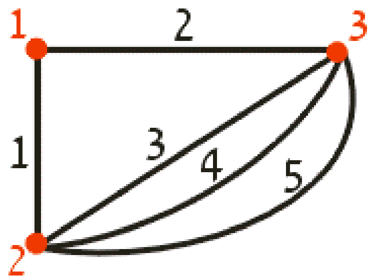
עד כה עסקנו בעיקר במעגלים פשוטים יחסית, עם מספר קטן של אלמנטים בכל מעגל, שניתנים לתיאור ע״י משוואות דיפרנציאליות עד סדר שני.
במציאות ישנם מעגלים מורכבים יותר, שכוללים עשרות אלמנטים, ונרצה גישה מערכתית שתעזור לנו לנתח גם מעגלים כאלו.
תורת הרשתות היא כלי שנלמד לצורך זה ונעסוק בו בפרקים הבאים.
לפי תורה זו נייצג מעגל חשמלי ע״י גרף ונבצע עליו ניתוח מתמטי שפתרונו יהיה מקביל לפתרון המעגל החשמלי.

מונחי יסוד :

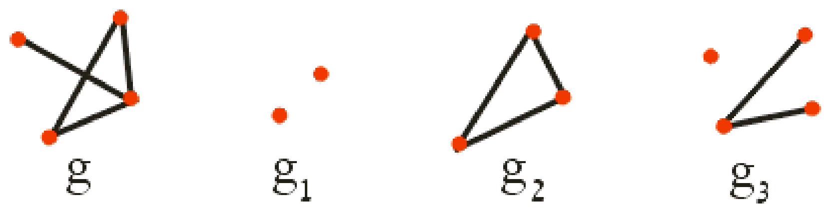
גרף : קבוצה של צמתים המקושרים ע״י ענפים :



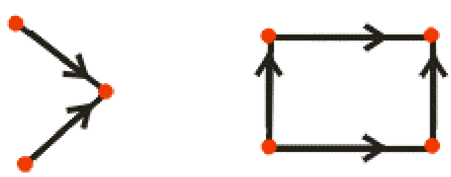
כל ענף מסתיים בצומת :



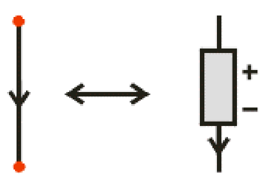
תת גרף : נתון גרף g. g_1 הוא תת גרף של g אם ורק אם כל צומת וכל ענף של g_1 שייכים ל g.
לדוגמא גרף g ותת הגרפים שלו g_1, g_2, g_3 :



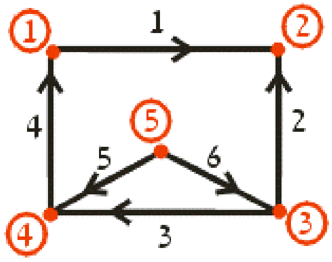
גרף מכוון : גרף שבו לכל ענף מיוחס גם כיוון :



בחשמל אם עובדים בשיטה מתואמת, מכיוון הענפים ניתן להסיק את כיוון הזרם והמתח :



<u>מטריצת הפגיעה</u> :
ניתן לייצג גרף בעזרת מטריצה. מטריצה זו נקראת מטריצת הפגיעה.
לדוגמא, נניח שנתון לנו הגרף הבא :



מטריצת הפגיעה (או מטריצה ה״צמתים - ענפים״) של הגרף היא הבאה :

ענפים (k)

צמתים (i)

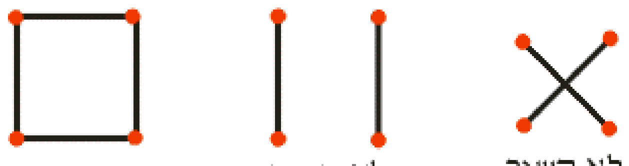
$$\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = [A]_{ik} \end{array}$$

כאשר החוקיות היא :

$$(A)_{ik} = a_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{אם ענף } k \text{ יוצא מצומת } i \text{ ,} \\ 1- & \text{אם ענף } k \text{ נכנס לצומת } i \text{ ,} \\ 0 & \text{אם ענף } k \text{ לא פוגע בצומת } i \text{,} \end{cases}$$

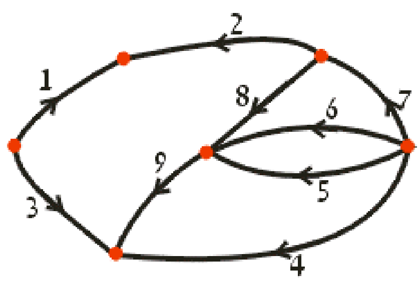
מטריצה זו מייצגת את הגרף בשלמותו, באופן חד חד ערכי. אפשר לשמור אותה בזיכרון המחשב.

<u>גרף קשור</u> : גרף בו כל שני צמתים קשורים ביניהם ע״י מסלול אחד לפחות.



<u>קבוצת חיתוך בגרף קשור</u> :
קבוצת ענפים בתוך גרף קשור המקיימת את התנאים הבאים :
א. אם נסיר את ענפי הקבוצה, הגרף הקשור ייהפך לגרף לא קשור.
ב. הסרת כל ענפי הקבוצה מלבד אחד מהם, עדיין משאירה את הגרף קשור.

דוגמא :



קבוצות חיתוך אפשריות בגרף זה:
(2,3)   (2,4,9)   (4,5,6,7)   (1,8,7)   ועוד.

מחוק גאוס ניתן להכליל את חוק KCL:

סכום כל הזרמים העוברים דרך כל <u>קבוצת חיתוך</u> שווה לאפס.

ואז נקבל את הקשרים הבאים בין הזרמים במעגל שמייצג הגרף:

$$i_2 - i_3 = 0$$
$$i_7 - i_6 + i_5 + i_4 = 0$$
$$i_2 + i_8 - i_7 = 0$$
$$i_7 + i_9 + i_4 = 0$$

ניתן לראות כי אם אחד הגרפים המבודדים ע"י קבוצת החיתוך הוא צומת בודדת, מקבלים חזרה את חוק הזרמים KCL בצורה המוכרת שלו.

<u>חוג</u>:
נתון גרף g. תת גרף בתוכו נקרא חוג אם:
א. הוא קשור.
ב. כל צומת בו משותפת לשני ענפים בלבד.

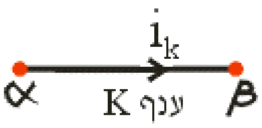
זה הזמן להיזכר בחוק המתחים של קירכהוף KVL: סכום המתחים על כל הענפים של חוג כלשהו שווה לאפס.

<u>משפט Tellegen</u>

נתון גרף מכוון בעל b ענפים שבו הזרמים מקיימים את KCL והחוגים מקיימים את KVL.
אזי מתקיים: $\sum_{k=1}^{b} V_K i_K = 0$.

<u>הוכחה</u>

נסמן את הצמתים באותיות יווניות:



נסמן מתח יחיד ביחס לצומת ייחוס e_α, ולפי KVL מפל המתח בכל ענף יהיה: $V_K = e_\alpha - e_\beta$.

נסמן: $i_K = i_{\alpha\beta}$, כאשר: $i_{\alpha\beta} = 0$ אם אין ענף בין α ל- β,

ונקבל: $\sum_{k=1}^{b} V_K i_K = \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n}(e_\alpha - e_\beta) i_{\alpha\beta}$

כאשר n הוא מספר הצמתים בגרף. שים לב שכל ענף נמנה פעמיים ($i_{\alpha\beta} = i_{\beta\alpha}$) ולכן יש $\frac{1}{2}$ לפני הסכימה.

נפשט את הביטוי שקיבלנו ע"י הפרדה לשני סכומים:

$$\sum_{k=1}^{b} V_k i_k = \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{n} e_\alpha \sum_{\beta=1}^{n} i_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\sum_{\beta=1}^{n} e_\beta \sum_{\alpha=1}^{n} i_{\alpha\beta}$$

עבור β קבוע, $\sum_{\alpha=1}^{n} i_{\alpha\beta}$ הוא סכום הזרמים הנכנסים לצומת β,

ובאותו אופן עבור α קבוע, $\sum_{\beta=1}^{n} i_{\alpha\beta}$ הוא סכום הזרמים היוצאים מצומת α.

מחוק KCL נובע לכן ש: $\sum_{\alpha=1}^{n} i_{\alpha\beta} = \sum_{\beta=1}^{n} i_{\alpha\beta} = 0$.

נציב חזרה: $\sum_{k=1}^{b} V_k i_k = \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{n} e_\alpha \cdot 0 - \frac{1}{2}\sum_{\beta=1}^{n} e_\beta \cdot 0 = 0$.

לכן הוכחנו את המשפט.

מסקנה:

מקיום KCL ו KVL נובע חוק שימור האנרגיה:

אם נסמן: $V_K \cdot i_K$ - הספק שנצרך ע"י אלמנטים פסיביים,

$V_m \cdot i_m$ - הספק שמסופק ע"י מקורות,

נקבל:

$$\sum_m V_m i_m + \sum_K V_K i_K = 0 \quad \Rightarrow \quad -\sum_m V_m i_m = \sum_K V_K i_K$$

המשפט היסודי של תורת הגרפים

(נושא זה מופיע בספר הלימוד בפרק 11)

מוטיבציה:

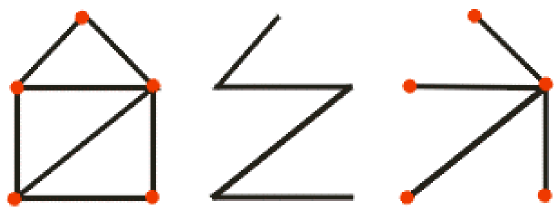
ידוע שכאשר מבצעים אנליזה לפי צמתים אזי אם נלקחים בחשבון $n-1$ מתוך n צמתים, מקבלים $n-1$ משוואות בלתי תלויות. כנ"ל לגבי עניבות. נניח שרוצים לרשום משוואה נוספת, כיצד נדע לבחור חוג או צומת כאלו שנקבל עבורם משוואה בלתי תלויה בשאר?

עץ:

נתון גרף קשור G ובתוכו תת גרף T. T הוא עץ של G אם מתקיימים התנאים הבאים:

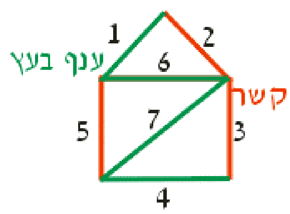
1) T הנו גרף קשור.
2) T מקשר את כל הצמתים של g.
3) ל T אין חוגים.

לדוגמא: שני הגרפים בצד ימין הם עצים של הגרף השמאלי:



אם נתון גרף G ועץ T בתוכו, אזי ענפי הגרף מתחלקים לשני סוגים:

1) אם $T \ni K$ נקרא לו ענף בעץ.
2) אם $T \not\ni K$ נקרא לו קשר.



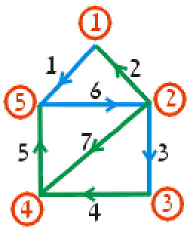
<u>המשפט היסודי של תורת הגרפים</u>

נתון גרף g בעל n צמתים ו b ענפים. יהי T עץ בתוך g. אזי:
א. ישנו מסלול אחד בלבד דרך T המקשר בין שתי צמתים.
ב. מספר הענפים ב T הוא n-1 ומספר הקשרים הוא $b-(n-1)$.
ג. לכל קשר הנוצר ע"י T אפשר לייחס חוג אחד ויחיד המכיל רק את הקשר וענפי העץ. חוג זה נקרא חוג יסודי והוא נוצר ע"י הקשר וענפי T.
ד. לכל ענף ב T אפשר לייחס קבוצת חיתוך אחת ויחידה הכוללת רק ענף עץ יחיד (הוא עצמו). קבוצה זו נקראת קבוצת חיתוך יסודית.
ה. הפעלת KCL על קבוצת חיתוך יסודית נותנת $n-1$ משוואות בלתי תלויות.
ו. הפעלת KVL על החוגים היסודיים נותנת $b-n+1$ משוואות בלתי תלויות.

<u>הבהרות ודוגמאות</u>

א. אם היו שני מסלולים דרך T לקשר בין שתי צמתים, ניתן היה ליצור מהם עניבה בניגוד להגדרת העץ T.

ב. ניתן להראות שבעץ בעל n צמתים תמיד יהיו בדיוק n-1 ענפים. לא נביא כאן את ההוכחה.
כמובן שהקשרים הם שאר הענפים ולכן מספרם הוא מספר כל ענפי הגרף פחות מספר ענפי העץ.
בדוגמא שלפנינו:
מספר הענפים בעץ: $n-1$ $(2,4,5,7)$
מספר הקשרים: $b-n+1$ $(1,3,6)$



ג. נניח שהצמתים משני צדי הקשר הם j,k. מכיוון שהעץ כולל את כל צמתי הגרף, הוא כולל גם את j,k. לכן יש רק דרך אחת להגיע מ-j ל-k בתוך העץ (לפי סעיף א של המשפט). אם נוסיף למסלול זה את הקשר, נסגור חוג מעגלי.
כיוון שיש רק דרך <u>אחת</u> להגיע מצומת לצומת דרך העץ הרי שהחוג נקבע באופן <u>חד ערכי</u> ולכן הוא יחיד.
חוגים יסודיים בדוגמא:
נסמן ב = את הקשר:
$(\underline{1},2,7,5)$ $(\underline{6},5,7)$ $(\underline{3},4,7)$

ד. לא נוכיח סעיף זה. ניתן דוגמא:
קבוצות חיתוך יסודיות:
נסמן ב = את הענף בעץ:
$(\underline{2},1)$ $(\underline{7},1,6,3)$ $(\underline{5},6,1)$ $(\underline{4},3)$

ה. כל קבוצת חיתוך מסעיף קודם נותנת משוואת KCL אחת שהיא בלתי תלויה בשאר. מספר קבוצות החיתוך הוא כמספר ענפי העץ, כלומר $n-1$, ולכן סה"כ מקבלים $n-1$ משוואות KCL ב"ת.
מדוע כל קבוצת חיתוך נותנת משוואה שאינה תלויה באחרות? כי בכל משוואה ישנו נעלם אחד שמופיע רק בה (ענף העץ שמופיע רק בקבוצת החיתוך הזו).

ו. באופן דומה, כל קשר יוצר חוג יסודי שנותן משוואת KVL אחת שבה מופיע נעלם ב"ת (הקשר עצמו). לכן יש משוואות KVL ב"ת שמספרן כמספר החוגים היסודיים, כלומר כמספר הקשרים: $b-n+1$.

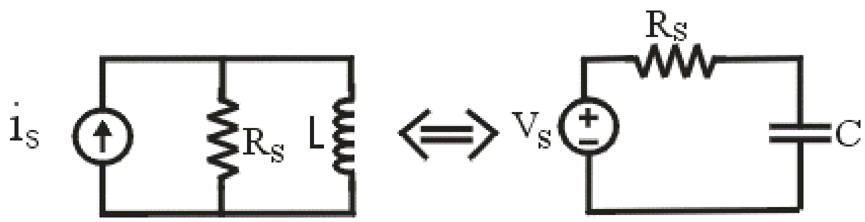
בחזרה למוטיבציה - מציאת כל הנעלמים בגרף: אם ניקח את כל המשוואות שהזכרנו בסעיפים ה, ו, נקבל בדיוק b משוואות ב"ת כך שנוכל למצוא את כל הנעלמים.

<u>דואליות</u>
(נושא זה מופיע בספר הלימוד בפרק 10)

כזכור, בפרק 5 הראינו שקיימת דואליות בין מעגל RLC טורי למעגל RLC מקבילי, אם משתמשים בהחלפות הבאות:

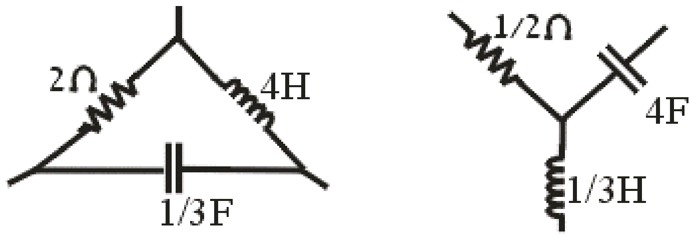
זרם $\Leftrightarrow$ מתח
R $\Leftrightarrow$ G
C $\Leftrightarrow$ L
עניבה $\Leftrightarrow$ צומת

ניתן להשתמש בעיקרון זה על מעגל כלשהו, ולקבל מעגל דואלי שלעיתים קל יותר לנתח.
לדוגמה, המעגלים הבאים הם דואליים:



אלגוריתם לבניית מעגל דואלי:
1. מציינים נקודה במרכז כל עניבה, כולל העניבה החיצונית. סה״כ מקבלים $b-n+2$ נקודות.
2. מקשרים נקודות בתוך עניבות סמוכות דרך הענפים המשותפים ויוצרים ע״י כך את ענפי המעגל הדואלי.
3. בכל ענף דואלי שהתקבל מציבים אלמנטים דואליים עם הערכים המתאימים.

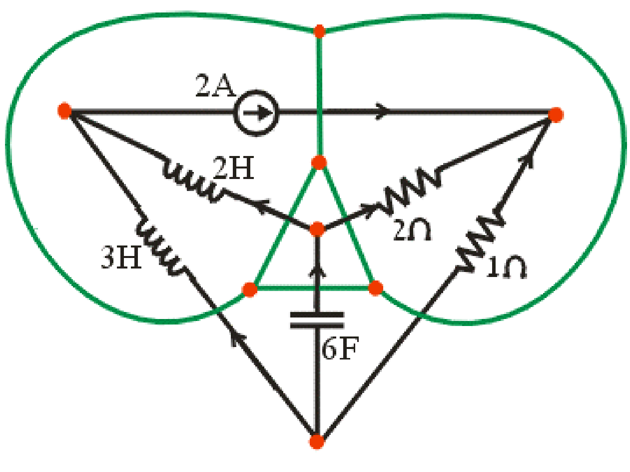
לדוגמה:



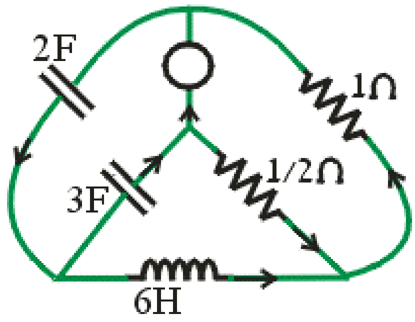
כיוונים:
אנו נקבע את כיווני הענף הדואלי באופן הבא:
כיוון הזרם יוצא מהצומת במעגל המקורי $\leftrightarrow$ כיוון מתח עם כיוון השעון בענף השקול
כיוון הזרם לתוך הצומת במעגל המקורי $\leftrightarrow$ כיוון המתח נגד כיוון השעון בענף השקול

מכיוון שראינו שניתן לייצג מעגל ע״י גרף, אז ניתן כמובן ליצור גרפים דואליים:

הגרף הנתון:



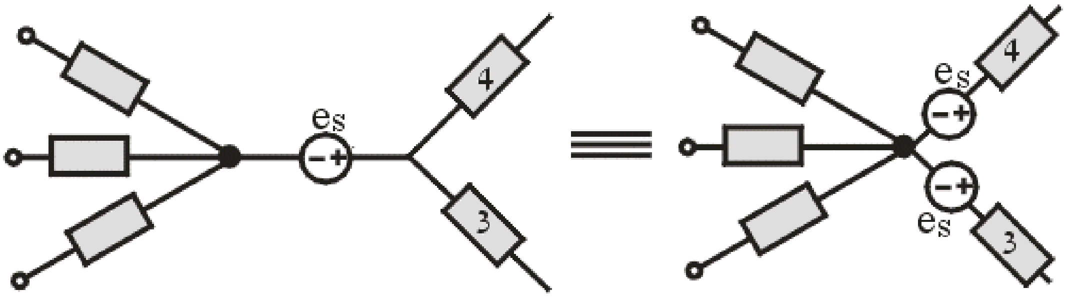
הגרף הדואלי:



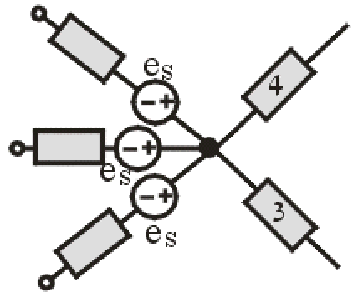
פרק 10 : ניתוח מעגלים לפי צמתים ועניבות

בפרק זה נלמד שתי שיטות ניתוח למעגלים המיוצגים ע״י גרפים.
כדי להשתמש בשיטות אלו, נרצה להביא את המעגל למבנה אחיד שלא יהיו בו ענפים עם מקורות בלבד. נרצה לקבל ענפים שתמיד מחובר אליהם נגד בטור (במקרה של מקור מתח) או נגד במקביל (במקרה של מקור זרם). ניתן להשיג זאת ע״י תהליך הנקרא **התמרת מקורות**.
נדגים את ההתמרה בשתי הדוגמאות הבאות :

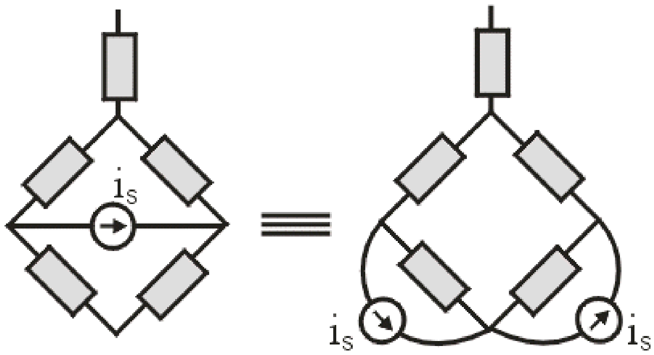
עבור מקורות מתח בענף בודד :



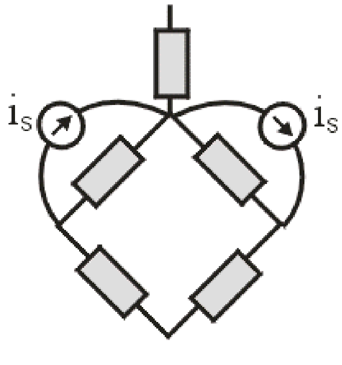
או :



עבור מקורות זרם בענף בודד :



או :



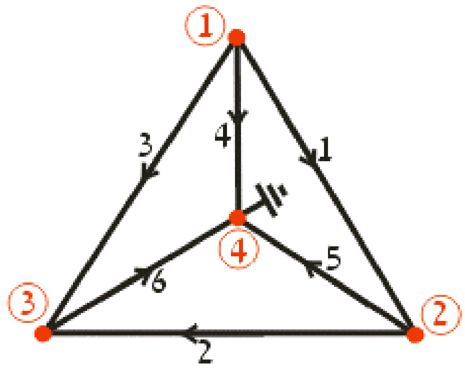
ניתוח שיטתי של מעגלים לפי צמתים

משפט: נתון מעגל קשור בעל n צמתים ו b ענפים. אזי:

א. משוואות KCL המופעלות על כל הצמתים מהוות מערכת של n משוואות התלויות ליניארית.

ב. אם נסיר צומת אחת מהמערכת נקבל $n-1$ משוואות בלתי תלויות.

<u>הוכחה</u>: נוכיח על מקרה פרטי:



נכתוב את משוואות KCL על הצמתים:

$$(1)\quad i_1 + i_3 + i_4 = 0$$
$$(2)\quad -i_1 + i_2 + i_5 = 0$$
$$(3)\quad -i_2 - i_3 + i_6 = 0$$
$$(4)\quad -i_4 - i_5 - i_6 = 0$$

משוואות אלו מהוות את המערכת הבאה:

$$\begin{matrix}(1)\\(2)\\(3)\\(4)\end{matrix}\qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \\ i_6 \end{pmatrix} = 0$$

ונסמן:
$$\underline{\underline{A}} \cdot \underline{j} = 0$$

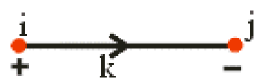
ניתן לראות שהשורות של המטריצה A תלויות ליניארית שכן חיבור כל השורות נותן 0. לעומת זאת הסרת שורה אחת תגרום לפחות לעמודה אחת להכיל רק $+1$ או רק -1.

ניתן להוכיח שבמקרה זה השורות הן בלתי תלויות, ובכך הוכחנו את המשפט במקרה הפרטי.

כאמור, השורה שהוסרה מתייחסת לצומת מסוימת. אותה צומת מוגדרת כצומת יחוס ושאר מתחי הצמתים הם יחסיים אליה: e_1, e_2, e_3.

כיצד e_i יבטא את מתח הענף?

אם יש ענף כגון:



אזי: $V_K = e_i - e_j$.

אם j הוא צומת הייחוס אז $V_K = e_i$,

אם i הוא צומת הייחוס אז $V_K = -e_j$.

בכל מקרה, מתחי הענפים $\{V_K\}$ ניתנים לביטוי בעזרת קומבינציה ליניארית של $\{e_i\}$.

המטריצה $\underline{A}$ לאחר הסרת צומת הייחוס, נקראת מטריצת הפגיעה המצומצמת.

בדוגמה שלנו צומת הייחוס שנבחרה היא צומת 4, לכן מטריצת הפגיעה המצומצמת היא:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ניתן להביע את מתחי הענפים $\{V_K\}$ כפונקציה של $\{e_i\}$ באופן הבא:

$$\begin{matrix} V_1 = e_1 - e_2 \\ V_2 = e_2 - e_3 \\ V_3 = e_1 - e_3 \\ V_4 = e_1 \\ V_5 = e_2 \\ V_6 = e_3 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \\ V_6 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix}$$

נזכר בהגדרת המטריצה המשוחלפת (transposed): $\left(A^T\right)_{ij} = A_{ij}$

ולכן: $\underline{V} = \underline{\underline{A}}^T \cdot \underline{e} \quad \Leftrightarrow \quad$ KVL

מימדים: $b\times 1 \quad b\times(n-1) \quad (n-1)\times 1$

KCL $\quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{A}} \cdot \underline{j} = 0$

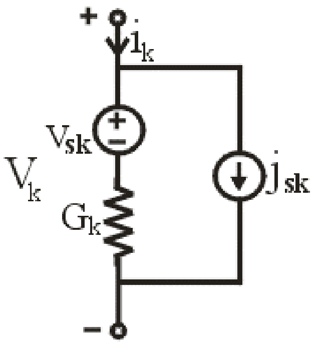
במאמר מוסגר נציין שעתה ניתן להראות בכתב מטריציאלי את הוכחת משפט Tellegen:

$$\sum V_K i_K = \underline{V}^T \cdot \underline{j} = \left(\underline{\underline{A}}^T \underline{e}\right)^T \underline{j} = \left(\underline{e}^T \underline{\underline{A}}\right)\underline{j} = \underline{e}^T\left(\underline{\underline{A}}\,\underline{j}\right) = 0$$

0 מתוך מה שראינו לעיל.

כעת יש להכניס את המשוואות האופייניות לענפים השונים:

אנו נשתמש במבנה ענף הכללי ביותר המכיל מקור מתח, מקור זרם ונגד. המתח על פני הענף הוא V_K והזרם דרכו הוא i_K. אנו מחפשים קשר בין V_K ל- i_K.



מתוך ציור הענף הכללי נכתוב את הקשר הבא:

$$i_K = \left(V_K - V_{SK}\right)G_K + j_{SK} = G_K V_K - V_{SK} G_K + j_{SK}$$

או באופן שקול:

$$V_K = V_{SK} + R_K\left(i_K - j_{SK}\right)$$

כעת נכתוב סט של b משוואות לא הומוגניות (אחת עבור כל ענף) המקשרות בין i_K ו- V_K.

נקבל את מערכת המשוואות הבאה:

$$\underline{j} = \underline{\underline{G}}\,\underline{V} - \underline{\underline{G}}\,\underline{V}_S + \underline{j}_S \qquad (*)$$

כאשר G היא מטריצת הולכת הענפים:

$$\underline{\underline{G}} = \begin{bmatrix} G_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & G_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & G_b \end{bmatrix}$$

הוקטור $\underline{j}$ הוא וקטור הזרמים: $\underline{j}=\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \vdots \\ i_b \end{bmatrix}$, הוקטור $\underline{V}=\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_b \end{bmatrix}$ הוא וקטור המתחים, הוקטור $\underline{j}_S$ הוא וקטור מקורות הזרם והוקטור $\underline{V}_S$ הוא וקטור מקורות המתח.

כעת נכפיל את (*) ב - $\underline{\underline{A}}$ משני הצדדים:

$$\underline{\underline{A}}\underline{j}=\underline{\underline{A}}\underline{\underline{G}}\underline{V}-\underline{\underline{A}}\underline{\underline{G}}\underline{V}_S+\underline{\underline{A}}\underline{j}_S$$

אבל מכיוון ש: $\underline{\underline{A}}\cdot\underline{j}=0$

אז: $\underline{\underline{A}}\underline{\underline{G}}\underline{V}-\underline{\underline{A}}\underline{\underline{G}}\underline{V}_S+\underline{\underline{A}}\underline{j}_S=0$

נציב: $\underline{V}=\underline{\underline{A}}^T\underline{e}$

ונקבל: $\underline{\underline{A}}\underline{\underline{G}}\underline{\underline{A}}^T\underline{e}=\underline{\underline{A}}\underline{\underline{G}}\underline{V}_S-\underline{\underline{A}}\underline{j}_S$

נסמן: $\underline{\underline{Y}}_n=\underline{\underline{A}}\underline{\underline{G}}\underline{\underline{A}}^T$ כמטריצת הולכת הצמתים (מטריצה nxn) וכן: $\underline{i}_S=\underline{\underline{A}}\underline{\underline{G}}\underline{V}_S-\underline{\underline{A}}\underline{j}_S$

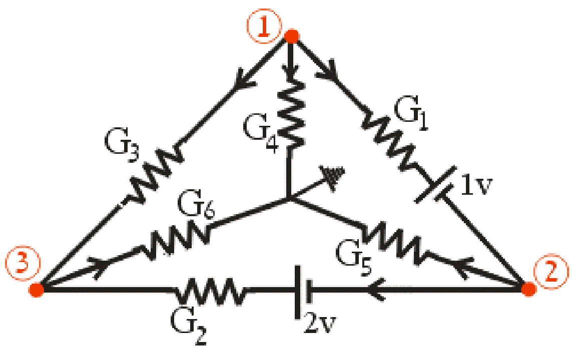
ונקבל את מערכת המשוואות:

$$\boxed{\underline{\underline{Y}}_n\underline{e}=\underline{i}_S}$$

מכאן נוכל למצוא את $\{e_i\}$ ולכן גם את כל המתחים והזרמים.

<u>דוגמא:</u>

נתון המעגל הבא:



$$G_1=1\text{mho}$$
$$G_2=2\text{mho}$$
$$G_3=3\text{mho}$$
$$G_4=4\text{mho}$$
$$G_5=5\text{mho}$$
$$G_6=6\text{mho}$$

נרצה למצוא את כל המתחים והזרמים במעגל.

פתרון:

תחילה נרשום את מטריצת הפגיעה המצומצמת:

$$\underline{\underline{A}}=\begin{array}{c}(1)\\(2)\\(3)\end{array}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

מטריצת הולכת הענפים:

$$\underline{\underline{G}}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

וקטור מקורות המתח (אין מקורות זרם במעגל):

$$V_S=\begin{bmatrix}1\\-2\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{AG}}=\begin{bmatrix}1&0&1&1&0&0\\-1&1&0&0&1&0\\0&-1&-1&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0\\0&2&0&0&0&0\\0&0&3&0&0&0\\0&0&0&4&0&0\\0&0&0&0&5&0\\0&0&0&0&0&6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&3&4&0&0\\-1&2&0&0&5&0\\0&-2&-3&0&0&6\end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{Y_n}}=\underline{\underline{AGA}}^T=\begin{bmatrix}1&0&3&4&0&0\\-1&2&0&0&5&0\\0&-2&-3&0&0&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\1&0&-1\\1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+3+4&-1&-3\\-1&1+2+5&-2\\-3&-2&2+3+6\end{bmatrix}$$

$$\underline{i_S}=\underline{\underline{AG}}\underline{V_S}=\begin{bmatrix}1&0&3&4&0&0\\-1&2&0&0&5&0\\0&-2&-3&0&0&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-2\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\-1-4\\4\end{bmatrix}$$

לכן מערכת המשוואות שיש לפתור היא:

$$\underline{\underline{Y_n}}\cdot\underline{e}=\underline{i_S}\iff\begin{bmatrix}8&-1&-3\\-1&8&-2\\-3&-2&11\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e_1\\e_2\\e_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\-5\\4\end{bmatrix}$$

ומהפתרון נקבל את $\underline{e}$.

את המתחים והזרמים במעגל, $\underline{V}$ ו- $\underline{J}$, נקבל ע"י:

$$\underline{V}=\underline{\underline{A}}^T\underline{e}$$
$$\underline{J}=\underline{\underline{G}}\underline{V}-\underline{\underline{G}}\underline{V_S}+\underline{J_S}$$

<u>סיכום שלבי הפתרון</u>:

1. מתוך הגרף המכוון מתקבלת המטריצה $\underline{\underline{A}}$ $\left((n-1)\times b\right)$
2. מתוך האלמנטים השונים מקבלים מטריצה אלכסונית $\underline{\underline{G}}$ $(b\times b)$ וכן וקטורי מקורות $\underline{V_S}$ $(b\times 1)$, $\underline{J_S}$ $(b\times 1)$
3. א. מחשבים את מטריצת הולכת הצמתים: $\underline{\underline{Y_n}}=\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{G}}\,\underline{\underline{A}}^T$

   ב. מחשבים את וקטור המקורות: $\underline{i_S}=\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{G}}\,\underline{V_S}-\underline{\underline{A}}\,\underline{J_S}$

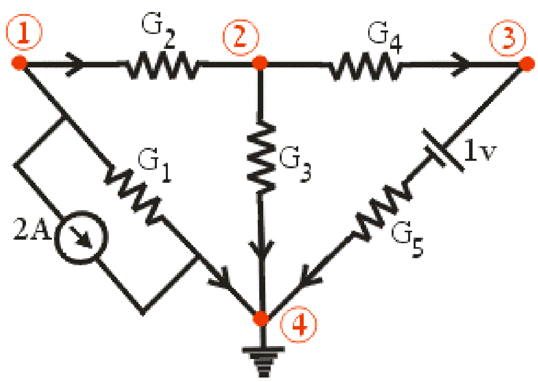
   ג. פותרים את מערכת המשוואות: $\underline{\underline{Y_n}}\,\underline{e}=\underline{i_S}$, כאשר הנעלמים הם איברי הוקטור $\underline{e}$.

   ד. מוצאים את $\underline{V}$ ע"י: $\underline{V}=\underline{\underline{A}}^T\underline{e}$

   ואת $\underline{j}$ ע"י: $\underline{j}=\underline{\underline{G}}\,\underline{V}-\underline{\underline{G}}\,\underline{V_S}+\underline{J_S}$

<u>דוגמא נוספת</u>:

נתון המעגל הבא:



$$G_1=2\text{mho}$$
$$G_2=1\text{mho}$$
$$G_3=3\text{mho}$$
$$G_4=1\text{mho}$$
$$G_5=1\text{mho}$$

גם כאן, נרצה למצוא את כל המתחים והזרמים במעגל בעזרת ניתוח לפי צמתים.

פתרון:

תחילה נמצא מתוך המעגל את מטריצת הפגיעה, וקטורי המקורות ומטריצת הולכת הענפים:

$$\underline{V_S}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\1\end{bmatrix}\qquad \underline{J_S}=\begin{bmatrix}2\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}\qquad \underline{\underline{A}}=\begin{array}{c}(1)\\(2)\\(3)\end{array}\begin{bmatrix}1&1&0&0&0\\0&-1&1&1&0\\0&0&0&-1&1\end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{G}}=\begin{bmatrix}2&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&3&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}$$

כעת נחשב את מטריצת הולכת הצמתים :

$$\underline{\underline{Y_n}} = \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{G}}\,\underline{\underline{A}}^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

נחשב את וקטור המקורות :

$$i_s = \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{G}}\,\underline{V_s} - \underline{\underline{A}}\,\underline{j_s} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

והמשוואה שיש לפתור היא :

$$\underline{\underline{Y_n}} \cdot \underline{e} = \underline{i_S} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

התוצאה היא :

$$\underline{e} = \underline{\underline{Y_n}}^{-1} \underline{i_S} = \frac{1}{25} \begin{bmatrix} -17 \\ -1 \\ 12 \end{bmatrix}$$

ומתוך הוקטור $\underline{e}$ נחלץ את המתחים והזרמים :

$$\underline{J} = \underline{\underline{G}}\,\underline{V} + \underline{J_S} = \frac{1}{25} \begin{bmatrix} 16 \\ -16 \\ -3 \\ -13 \\ -13 \end{bmatrix} \quad , \quad \underline{V} = \underline{\underline{A}}^T e = \frac{1}{25} \begin{bmatrix} -17 \\ -16 \\ -1 \\ -13 \\ 12 \end{bmatrix} \quad ,$$

כעת נדון במעגלים במצב סינוסי עמיד.
מה מהניתוח השיטתי משתנה במעגל הנמצא במצב סינוסי עמיד?
המטריצה $\underline{\underline{A}}$ אינה משתנה,

המטריצה $\underline{\underline{G}}$ עוברת למטריצה $\underline{\underline{Y_b}}$ המכילה את האדמיטנסים של האלמנטים השונים,

$\underline{V_S},\underline{J_S}$ הם וקטורי מקורות פאזורים,

$\underline{V},\underline{J},\underline{E}$ גם הם פאזורים.

באופן דומה לפיתוח הקודם, יתקיים :

$$\underline{\underline{Y_n}}\,\underline{E} = I_S$$

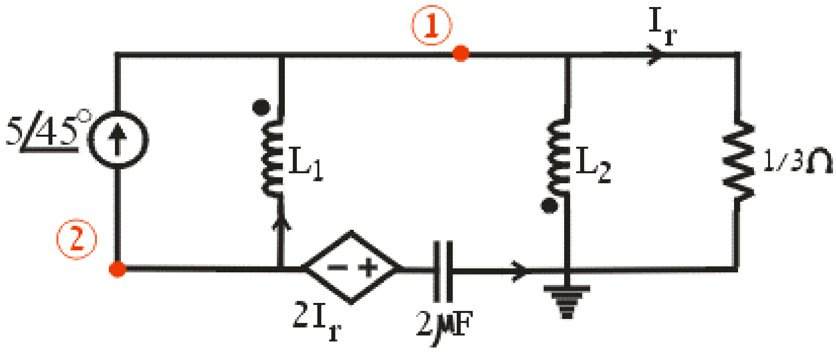
$$\underline{V} = \underline{\underline{A}}^T\underline{E}$$

$$\underline{J} = \underline{\underline{Y_b}}\,\underline{V} + \underline{J_S} - \underline{\underline{Y_b}}\,\underline{V_S}$$

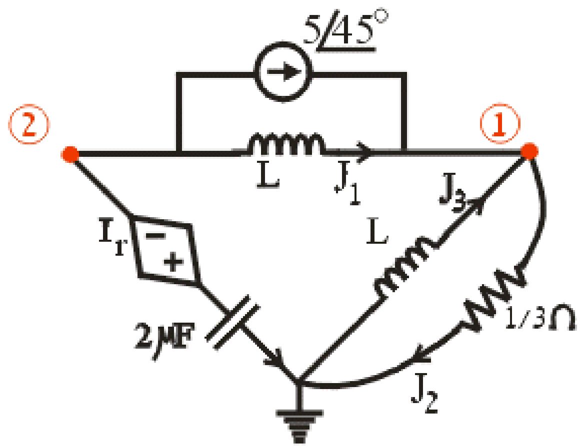
<u>דוגמא :</u>

נתון המעגל הבא, כולל מטריצת ההשראות.
נבצע עליו את הניתוח עבור מצב סינוסי עמיד.

$$\underline{\underline{L}} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$



נרשום את המטריצה מתוך המעגל :



$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{J_S} = \begin{pmatrix} 5\angle 45^\circ \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

מטריצת ההשראות ההפוכה :

$$\underline{\underline{\Gamma}} = \underline{\underline{L}}^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

זרמי הסלילים :

$$\underline{V_L} = jw\underline{\underline{L}} \cdot \underline{J_L}$$

$$\underline{J_L} = \underline{\underline{\Gamma}}\,\underline{V_L} \cdot \frac{1}{jw}$$

לכן :

$$J_1 = j_{L1} + j_S = \frac{5}{jw}V_1 + \frac{2}{jw}V_2 + j_S$$

$$J_2 = j_{L2} = \frac{2}{jw}V_1 + \frac{1}{jw}V_2$$

בענף 3 יש רק את הנגד שערכו $\frac{1}{3}\Omega$:

$$J_3 = 3V_3$$

בענף 4 יש קבל שערכו $2_{\mu F}$ וסכום של שני מתחים :

$$J_4 = 2jw(V_4 + 2J_3) = 2jwV_4 + \overset{2\cdot 2\cdot 3}{12}jwV_3$$

מקור המתח המבוקר ע"י הזרם על הנגד

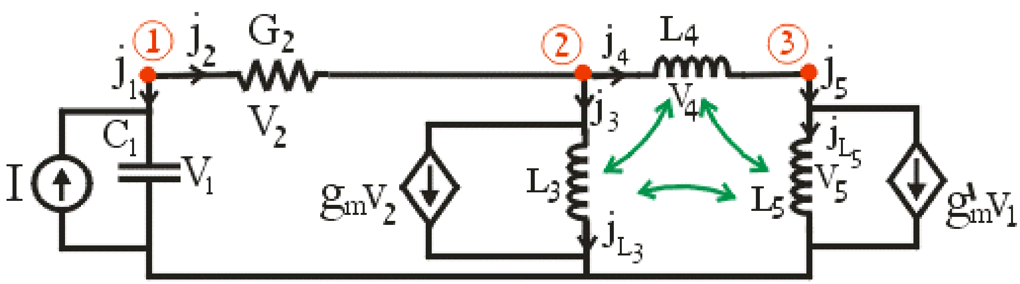
סה"כ מקבלים את מטריצת האדמיטנסים הבאה :

$$\underline{\underline{Y_b}} = \begin{bmatrix} \frac{5}{jw} & \frac{2}{jw} & 0 & 0 \\ \frac{2}{jw} & \frac{1}{jw} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 12jw & 2jw \end{bmatrix}$$

ומכאן ממשיכים כמו קודם.

<u>דוגמא נוספת :</u>

נתון המעגל הבא במצב סינוסי עמיד :



ונתונה מטריצת ההשראות של שלושת הסלילים :

$$L = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 5/3 & -4/3 \\ 1 & -4/3 & 5/3 \end{bmatrix}$$

ראשית נמצא את מטריצת הפגישה :

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & -1 & 1\end{bmatrix}$$

עכשיו נמצא את מטריצת האדמיטנסים :

בענף 1,2 :

$$j_1 = jwC_1V_1 - I$$
$$j_2 = G_2V_2$$

בשאר הענפים יש סלילים, עבורם :

$$\underline{V_L} = jw\underline{\underline{L}}\cdot\underline{J_L}$$

כלומר :

$$\underbrace{\begin{bmatrix}V_3\\ V_4\\ V_5\end{bmatrix}}_{\underline{V_L}} = jw\underbrace{\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & 5/3 & -4/3\\ 1 & -4/3 & 5/3\end{bmatrix}}_{\underline{\underline{L}}}\underbrace{\begin{bmatrix}j_{L3}\\ j_4\\ j_{L5}\end{bmatrix}}_{\underline{J_L}} \quad\Rightarrow\quad \begin{bmatrix}j_{L3}\\ j_4\\ j_{L5}\end{bmatrix}\frac{1}{jw}\begin{bmatrix}3 & 1 & -1\\ 1 & 2 & 1\\ -1 & 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}V_3\\ V_4\\ V_5\end{bmatrix}$$

בהתחשב במקורות המבוקרים מקבלים :

$$j_3 = g_mV_2 + \frac{3}{jw}V_3 + \frac{1}{jw}V_4 - \frac{1}{jw}V_5$$
$$j_4 = \frac{1}{jw}V_3 + \frac{2}{jw}V_4 + \frac{1}{jw}V_5$$
$$j_5 = g'_mV_1 - \frac{1}{jw}V_3 + \frac{1}{jw}V_4 + \frac{2}{jw}V_5$$

לכן מקבלים סה"כ את מטריצת האדמיטנסים :

$$Y_b = \begin{bmatrix}jwC_1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & G_2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & g_m & \frac{3}{jw} & \frac{1}{jw} & -\frac{1}{jw}\\ 0 & 0 & \frac{1}{jw} & \frac{2}{jw} & \frac{1}{jw}\\ g'_m & 0 & -\frac{1}{jw} & \frac{1}{jw} & \frac{2}{jw}\end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{Y_n}} = \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{Y_b}}\,\underline{\underline{A}}^T = \begin{bmatrix} jwG_1 + G_2 & -G_2 & 0 \\ -G_2 + g_m & G_2 - g_m + \frac{7}{jw} & -\frac{3}{jw} \\ g'_m & -\frac{3}{jw} & \frac{2}{jw} \end{bmatrix}$$

$$\underline{V_S} = 0 \quad , \quad \underline{I_S} = \begin{bmatrix} -I \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \underline{i_S} = \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{G}}\,\underline{V_S} - \underline{\underline{A}}\,\underline{J_S} = \begin{bmatrix} I \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

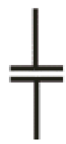
והמשוואה היא כרגיל: $\underline{\underline{Y_n}}\underline{E} = \underline{i_S}$ כאשר מצאנו כבר את $\underline{\underline{Y_n}}, \underline{i_S}$.

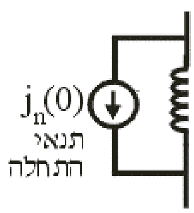
משוואות אינטגרודיפרנציאליות integrodifferential Equations

נרצה להכניס בתוך המטריצה $\underline{\underline{G}}$ את האופרטורים של הגזירה והאינטגרציה.

נשתמש לצורך זה בסימון: $D = \frac{d}{dt}$ $\quad D^{-1} = \frac{1}{D} = \int_0^t dt'$.

אם ענף n הוא נגד:  אז: $j_n = Y_n V_n$

אם הוא קבל:  אז: $j_n = C_n \frac{dV_n}{dt} = C_n \cdot DV_n$

אם הוא סליל: 

אז:

$$j_n = j_n(0) + \frac{1}{L_n}\int_0^t V_n(t')dt' =$$
$$= j_n(0) + \frac{1}{L_n}\cdot\frac{1}{D}V_K$$

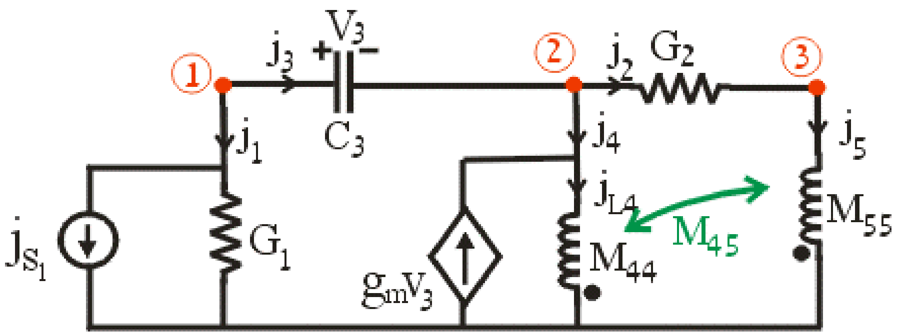
נכנס כאילו היה מקור זרם בלתי תלוי אל
וקטור המקורות $\underline{j_S}$.

נשים לב כי לפי הסימון שלנו: $D \cdot D^{-1} f = \frac{d}{dt}\left[\int_0^t f(t')dt'\right] = f(t)$

$$D^{-1}\cdot Df=\int_0^t f'(t')dt'=f(t')\Big|_0^t=f(t)-f(0)$$

$$D^mD^n=D^{m+n}$$

דוגמא לשימוש בסימון האופרטורים :



מטריצת הפגישה :

$$A=\begin{bmatrix}1&0&1&0&0\\0&1&-1&1&0\\0&-1&0&0&1\end{bmatrix}$$

מטריצת האדמיטנסים :

$$\underline{\underline{G}}=\begin{bmatrix}G_1&0&0&0&0\\0&G_2&0&0&0\\0&0&G_3D&0&0\\0&0&-g_m&\Gamma_{44}D^{-1}&\Gamma_{45}D^{-1}\\0&0&0&\Gamma_{45}D^{-1}&\Gamma_{55}D^{-1}\end{bmatrix}$$

$$Y_n=\underline{\underline{AGA^T}}=\begin{bmatrix}G_1+C_3D&-C_3D&0\\-C_3D-g_m&C_2+C_3D+g_m+\Gamma_{44}D^{-1}&-G_2+\Gamma_{43}D^{-1}\\0&-G_2+\Gamma_{45}D^{-1}&G_2+\Gamma_{55}D^{-1}\end{bmatrix}$$

ויש לפתור את סט המשוואות :

$$\underline{\underline{Y_n}}(D)\cdot\underline{E}=\underline{i_S}$$

לא נראה כאן איך למצוא את וקטור המקורות $\underline{i_S}$.

ניתוח שיטתי של מעגלים לפי עניבות

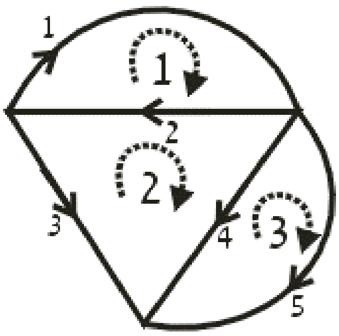
השיטה השניה לניתוח שיטתי של מעגלים המיוצגים ע״י גרפים היא ניתוח לפי עניבות, שמקבילה לניתוח לפי צמתים.
אם נתונות L עניבות בגרף (ללא העניבה החיצונית) אז משוואות KVL המופעלות על עניבות אלו מהוות מערכת משוואות בלתי תלויה.
כמובן שעל מנת לרשות KVL חייבים ראשית לתת כיוון לעניבות.
בדומה למטריצת הפגישה בניתוח לפי צמתים, את מטריצת פגישת העניבות (שמסמנים ב - M) נרשום כך :

אם ענף k שייך לעניבה i וכיווניהם מתלכדים אז: $M_{ik}=1$

אם ענף k שייך לעניבה i וכיווניהם מנוגדים אז: $M_{ik}=-1$

אם ענף k אינו שייך לעניבה i אז: $M_{ik}=0$

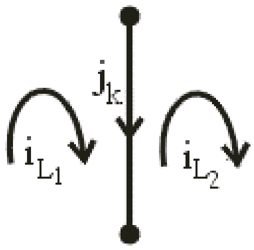
במעגל לדוגמה שלפנינו:



$$\begin{array}{c} \\ \underline{\underline{M}}= \end{array}\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$
- מטריצת פגישת העניבות

כאשר העמודות הן הענפים והשורות הן העניבות.

כעת ניתן להציג את חוק KVL כך: $\underline{\underline{M}}\cdot\underline{V}=0$.



מגדירים i_L כזרם בעניבה L, לכן הזרם בענף K יהיה:

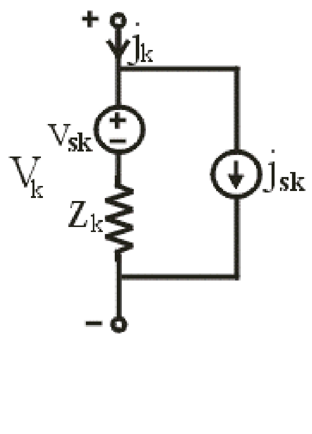
$$j_K = i_{L1} - i_{L2}$$

ולכן ניתן להציג את חוק KCL כך: $\underline{J}=\underline{\underline{M}}^T\underline{i}$.

בדוגמא שלנו:

$$\underline{J}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\underline{i}$$

גם כאן נניח מבנה כללי לענף באופן הבא:



נכניס את וקטורי המקורות לפתרון:

$$\underline{V}=\underline{\underline{Z}}_b\underline{j}+\underline{V}_S-\underline{\underline{Z}}_b\underline{j}_S$$

נכפיל בצד שמאל ב M ונקבל:

$$\underline{\underline{M}}\underline{V}=\underline{\underline{M}}\underline{\underline{Z}}_b\underline{j}-\underline{\underline{M}}\underline{\underline{Z}}_b\underline{j}_b+\underline{\underline{M}}\underline{V}_S$$

אבל: $\underline{\underline{M}}\underline{V}=0$ ולכן:

$$\left(\underline{\underline{M}}\underline{\underline{Z}}_b\underline{j}\right)=\underline{\underline{M}}\underline{\underline{Z}}_b\underline{j}_b-\underline{\underline{M}}\underline{V}_S$$

$$\left(\underline{\underline{M}}\,\underline{\underline{Z}}_b\underline{\underline{M}}^T\underline{I}\right)=\underline{\underline{M}}\,\underline{\underline{Z}}_b\underline{j}_b-\underline{\underline{M}}\,\underline{V}_S$$

נציב: $\underline{j}=\underline{\underline{M}}^T\underline{I}$ ונקבל:

נגדיר:

$$\underline{\underline{Z}}_m=\underline{\underline{M}}\,\underline{\underline{Z}}_b\underline{\underline{M}}^T \qquad \underline{E}_S=\underline{\underline{M}}\,\underline{\underline{Z}}_b\underline{J}_S-\underline{\underline{M}}\,\underline{V}_S$$

ואז נקבל:

$$\boxed{\underline{\underline{Z}}_m\cdot\underline{I}=\underline{E}_S}$$

כלומר, סט משוואות שבהם איברי הוקטור $\underline{I}$ הם נעלמים.
מתוכו נוכל כמובן למצוא את כל הזרמים והמתחים של המעגל.

<u>סיכום שלבי הפתרון:</u>

א' חישוב מטריצת האימפדנסים של הענפים: $\underline{\underline{Z}}_b$ וממנה את: $\underline{\underline{Z}}_M=\underline{\underline{M}}\,\underline{\underline{Z}}_b\underline{\underline{M}}^T$

ב מחשבים את וקטור המקורות: $\underline{E}_S=\underline{\underline{M}}\,\underline{\underline{Z}}_b\underline{J}_S-\underline{\underline{M}}\,\underline{V}_S$

ג פותרים את המשוואות $\underline{\underline{Z}}_m\underline{I}=\underline{E}_S$ ומוצאים את $\underline{I}$ (זרמי החוגים).

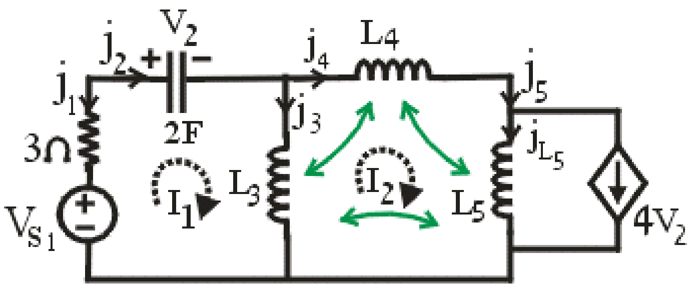
ד' - מוצאים את המתחים והזרמים ע"י:

$\underline{J}=\underline{\underline{M}}^T\underline{I}$ $\rightarrow$ זרמי הענפים

$\underline{V}=\underline{\underline{Z}}_b\underline{I}-\underline{\underline{Z}}_b\underline{j}_S+\underline{V}_S$ $\rightarrow$ מתחי ענפים

<u>דוגמא:</u>

נתון המעגל הבא במצב סינוסי עמיד:



כמו כן נתונה מטריצת ההשראות:

$$L=\begin{bmatrix}3 & 1 & -1\\ 1 & 4 & 2\\ -1 & 2 & 5\end{bmatrix}$$

נרצה למצוא את המתחים והזרמים במעגל.

תחילה נמצא את מטריצת הפגישה עבור שתי העניבות:

$$M=\begin{array}{c}(1)\\(2)\end{array}\begin{bmatrix}-1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

עבור הסלילים מתקיים:
$$\begin{bmatrix} V_3 \\ V_4 \\ V_5 \end{bmatrix} = jw \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j_3 \\ j_4 \\ j_{L5} \end{bmatrix}$$

$$j_{L5} = j_5 - 4V_2 = j_5 - \frac{2}{jw} j_2 \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} V_3 \\ V_4 \\ V_5 \end{bmatrix} = jw \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j_3 \\ j_4 \\ j_5 - \frac{2}{jw} j_2 \end{bmatrix}$$

לכן:
$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2jw} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3jw & jw & -jw \\ 0 & -4 & jw & 4jw & 2jw \\ 0 & -10 & -jw & 2jw & 5jw \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \\ j_3 \\ j_4 \\ j_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V_{S1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

זוהי מטריצת האימפדנסים $\underline{\underline{Z_b}}$. ממנה נחשב את:
$$Z_m = \underline{\underline{M}}\,\underline{\underline{Z_b}}\,\underline{\underline{M}}^T = \begin{bmatrix} 5 + 3jw + \frac{2}{jw} & -3jw \\ -16 - 3jw & 16jw \end{bmatrix}$$

נחשב את וקטור המקורות:
$$E_S = \underline{\underline{M}}\,\underline{\underline{Z_b}}\,\underline{j_S} - \underline{\underline{M}}\,\underline{V_S} = -\underline{\underline{M}}\,\underline{V_S} = \begin{bmatrix} V_{S1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

ולכן יש לפתור את:
$$\underline{\underline{Z_m}} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{S1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

כדי למצוא את זרמי החוגים I_1, I_2 ומתוכם למצוא את כל הזרמים והמתחים.

סיכום שיטת צמתים ושיטת חוגים לניתוח מעגלים

	חוגים	צמתים
משתני המערכת:	זרמי חוגים - $\underline{I}$	מתחי צמתים - $\underline{e}$
עובדות בסיסיות:		
KCL:	$\underline{j} = \underline{\underline{M}}^T \underline{I}$	$\underline{\underline{A}}\,\underline{j} = 0$

KVL:	$\underline{\underline{M}}\,\underline{I}=0$	$\underline{V}=\underline{\underline{A}}^T\,\underline{e}$
משוואות ענפים:	$\underline{V}=\underline{\underline{Z_b}}\,\underline{j}+\underline{V_S}-\underline{\underline{Z_b}}\,\underline{j_S}$	$\underline{j}=\underset{\underset{\underline{\underline{Y_b}}}{\uparrow}}{\underline{\underline{G}}}\,\underline{V}+\underline{j_S}-\underline{\underline{G}}\,\underline{V_S}$
מטריצות התנגדות/מוליכות:	$\underline{\underline{Z_m}}=\underline{\underline{M}}\,\underline{\underline{R}}\,\underline{\underline{M}}^T$	$\underline{\underline{Y_n}}=\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{G}}\,\underline{\underline{A}}^T$
וקטור מקורות:	$\underline{e_S}=\underline{\underline{M}}\,\underline{\underline{R}}\,\underline{j_S}-\underline{\underline{M}}\,\underline{V_S}$	$\underline{i_S}=\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{G}}\,\underline{V_S}-\underline{\underline{A}}\,\underline{j_S}$
משוואות מערכת:	$\underline{\underline{Z_m}}\,\underline{I}=\underline{e_S}$	$\underline{\underline{Y_n}}\,\underline{e}=\underline{i_S}$