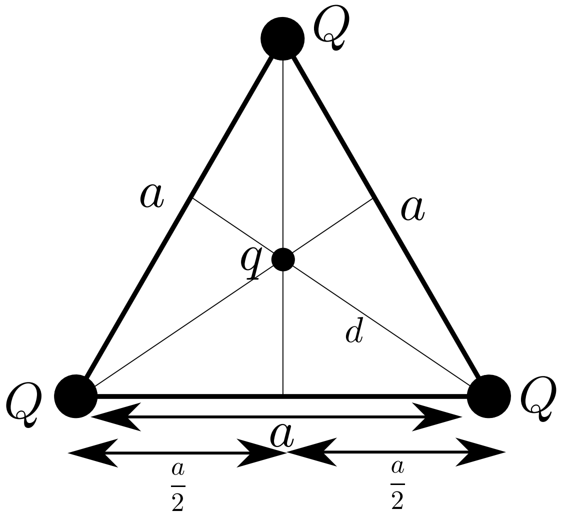
תרגיל מס.1

עפיף חלומה 302323001

18 במרץ 2009

1 שאלה 1

1.1 א



איור 1: תרגיל 1

נתחיל בניתוח גיאומטרי לבעיה:

במשולש שווה צלעות כל הצלעות הם 60°. אמצע המשולש הוא המקום שבו נחתכים האנכים. האנכים מחצים את הזוויות ומחלקים הצלע לחציים.

אזי מקבלים שהמרחק בין כל קודקוד לאמצע הוא:

$$\begin{aligned}\cos(30^\circ) &= \frac{a/2}{d} \\ d &= \frac{a}{2\cos(30^\circ)} \\ &= \frac{a}{\sqrt{3}}\end{aligned}$$

סיימנו את החלק הגיאומטרי אזי עוברים לפיזיקה

הבעייה היא סימטרית אזי אם מטען אחד ימצא בשיווי משקל כולם גם כן יהיו בשיווי משקל.

$$\begin{aligned} F &= F_1+F_2+F_q \\ &= \frac{kQ^2}{a^2}\hat{x}+\frac{kQ^2}{a^2}\left(\cos\left(60^\circ\right)\hat{x}-\sin\left(60^\circ\right)\hat{y}\right)+\frac{kQq}{\left(a/4\right)^2} \end{aligned}$$

לכבל שיווי משקל צריכים $F=0$:

$$\begin{aligned} F &= 0 \\ \frac{kQ^2}{a^2}\hat{x}+\frac{kQ^2}{a^2}\left(\cos\left(60^\circ\right)\hat{x}-\sin\left(60^\circ\right)\hat{y}\right)+\frac{kQq}{\left(a/\sqrt{3}\right)^2}\left(\cos\left(30^\circ\right)\hat{x}-\sin\left(30^\circ\right)\hat{y}\right) &= 0 \\ \frac{kQ^2}{a^2}\hat{x}+\frac{kQ^2}{a^2}\left(\cos\left(60^\circ\right)\hat{x}-\sin\left(60^\circ\right)\hat{y}\right)+\frac{kQq}{\left(\frac{a^2}{3}\right)}\left(\cos\left(30^\circ\right)\hat{x}-\sin\left(30^\circ\right)\hat{y}\right) &= 0 \\ kQ^2\hat{x}+kQ^2\left(\cos\left(60^\circ\right)\hat{x}-\sin\left(60^\circ\right)\hat{y}\right)+3kQq\left(\cos\left(30^\circ\right)\hat{x}-\sin\left(30^\circ\right)\hat{y}\right) &= 0 \\ 1\hat{x}+\cos\left(60^\circ\right)\hat{x}-\sin\left(60^\circ\right)\hat{y}+3\frac{q}{Q}\left(\cos\left(30^\circ\right)\hat{x}-\sin\left(30^\circ\right)\hat{y}\right) &= 0 \\ 1\hat{x}+\frac{1}{2}\hat{x}-\frac{\sqrt{3}}{2}\hat{y}+3\frac{q}{Q}\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\hat{x}-\frac{1}{2}\hat{y}\right) &= 0 \\ \left(\frac{3}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}\frac{q}{Q},-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}\frac{q}{Q}\right) &= (0,0) \\ q &= -\frac{Q}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

1.2 ב

רואים מסימטריה כי רק הכוח בכיוון $\vec{d}$ לא מתאפס.

$$\begin{aligned} F &= \frac{kQq}{\left(\frac{a}{\sqrt{3}}-d\right)^2}\left(-\hat{y}\right)+2\cdot\frac{kQq}{\left(\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{\sqrt{3}}+d\right)^2\right)^{3/2}}\left(\frac{a}{\sqrt{3}}+d\right)\hat{y} \\ &= 2\cdot\frac{kQ\frac{Q}{\sqrt{3}}}{\left(\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{\sqrt{3}}+d\right)^2\right)^{3/2}}\left(\frac{a}{\sqrt{3}}+d\right)-\frac{kQ\frac{Q}{\sqrt{3}}}{\left(\frac{a}{\sqrt{3}}-d\right)^2} \\ &= \frac{kQ^2}{\sqrt{3}}\left(\frac{2\left(\frac{a}{\sqrt{3}}+d\right)}{\left(\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{\sqrt{3}}+d\right)^2\right)^{3/2}}-\frac{1}{\left(\frac{a}{\sqrt{3}}-d\right)^2}\right) \end{aligned}$$

1.3 ג

אני לא רואה את הכיוון של $\vec{F}$ אזי אציב $d=\frac{a}{2\sqrt{3}}$ ונראה מה נקבל:

$$\begin{aligned} F &= \frac{3a}{\sqrt{3}a^3}-\frac{12}{a^2} \\ &= -\frac{12\sqrt{3}\left|a\right|^3-3a^3}{\sqrt{3}\,a^2\left|a\right|^3} \end{aligned}$$

הכח פועל באותו כיוון של $\vec{D}$ אזי המערכת היא לא יציבה.

2 שאלה 2

$$\begin{aligned} L &= 2\hbar \\ m\vec{v}\times\vec{R} &= 2\hbar \\ m\overbrace{v\cdot R}^{\vec{v}\perp\vec{R}} &= 2\hbar \\ v\cdot R &= \frac{2\hbar}{m} \\ R &= \frac{2\hbar}{mv} \end{aligned}$$

משיווי משקל במערכת המסתובבת עם האלקטרון נובע

$$\begin{aligned} \sum F &= 0 \\ F_{Colon}+\frac{mv^2}{R} &= 0 \\ \frac{ke\left(-e\right)}{R^2}+\frac{mv^2}{R} &= 0 \\ \frac{ke^2}{R^2} &= \frac{mv^2}{R} \\ \frac{ke^2}{m} &= v^2R \\ \frac{ke^2}{m} &= v^2\frac{2\hbar}{mv} \\ ke^2 &= 2v\hbar \\ v &= \frac{ke^2}{2\hbar} \end{aligned}$$

מציבים ומקבלים

$$R = \frac{2\hbar}{mv}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{2\hbar}{m\left(\frac{ke^2}{2\hbar}\right)} \\
&= \frac{4\hbar^2}{mke^2}
\end{aligned}
$$

3 שאלה 3

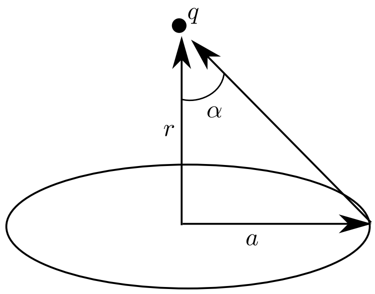
לכל מטען במעגל יש אלקטרון שנמצא בדיוק מקביל לו ביחס לציר z לכן הרכיבים המישוריים xy מתאפסים והרכיבים בציר z מתאפסים.

$$
\begin{aligned}
E &= \sum_{i=1}^{8} E_{Q_i} \\
&= \sum_{i=1}^{8} k\frac{Q}{r_i^2}\hat{r}_i \\
&= \sum_{i=1}^{8} \frac{kQ}{\|r_i\|^3}\vec{r}_i \\
&= \sum_{i=1}^{8} \frac{kQ}{\left(a^2+z^2\right)^{3/2}} z\hat{z} \\
&= \frac{8kQ}{\left(a^2+z^2\right)^{3/2}} z\hat{z}
\end{aligned}
$$

3.1 ב

$$
\begin{aligned}
E &= \sum_{i=1}^{n} E_{Q_i} \\
&= \frac{Nk\frac{Q}{N}}{\left(a^2+z^2\right)^{3/2}} z\hat{z} \\
&= \frac{kQ}{\left(a^2+z^2\right)^{3/2}} z\hat{z}
\end{aligned}
$$

3.2 ג



איור 2: טבעת טעונה במטען Q

מטען Q על טבעת $\Leftarrow$ צפיפות $\lambda = \frac{Q}{2\pi a}$

$$
\begin{aligned}
E &= \int\limits_0^{2\pi} \frac{k\overbrace{\lambda r \partial\theta}^{q}}{\left(a^2+r^2\right)^{3/2}} a\hat{z} \\
&= \frac{2\pi k\lambda a r}{\left(a^2+r^2\right)^{3/2}}\hat{z} \\
&= \frac{krQ}{\left(a^2+r^2\right)^{3/2}}\hat{z}
\end{aligned}
$$

4 שאלה 4

גליל אינסופי זה הוא אוסף אינסופי של טילים אינסופיים.
ניתן לראות כי השדה בכיוון $\hat{y}$ מתאפס כי הבעיה סימטרית לציר y כלומר לכל מטען שנמצא ב$+y$ יש מטען שווה לו ב$-y$

$$
\begin{aligned}
\vec{E} &= \int\limits_0^{2\pi} \frac{2k\lambda}{\sqrt{\left(R-a\cos(\theta)\right)^2+\left(a\sin(\theta)\right)^2}} \cdot \frac{R-a\cos(\theta)}{\sqrt{\left(R-a\cos(\theta)\right)^2+\left(a\sin(\theta)\right)^2}}\partial\theta \\
&= 2k\lambda\int\limits_0^{2\pi} \frac{R-a\cos(\theta)}{\sqrt{R^2-2aR\cos(\theta)+a^2\cos^2(\theta)+\left(a\sin(\theta)\right)^2}}\partial\theta \\
&= 2k\lambda\int\limits_0^{2\pi} \frac{R-a\cos(\theta)}{\sqrt{R^2+a^2-2aR\cos(\theta)}}\partial\theta \\
&= 2k\lambda\int\limits_0^{2\pi} \frac{1-\frac{a}{R}\cos(\theta)}{\sqrt{1+\frac{a^2}{R^2}-\frac{2a}{R}\cos(\theta)}}\partial\theta \\
&= 4\pi k\lambda
\end{aligned}
$$