תרגיל מס.4

עפיף חלומה 302323001

13 באפריל 2010

1 שאלה 1

1.1 א

$$\begin{aligned} ad - bc &= 0 \\ ad &= bc \\ a &= \frac{bc}{d} \end{aligned}$$

אזי

$$\begin{aligned} \frac{az+b}{cz+d} &= \frac{\frac{bc}{d}z+b}{cz+d} \\ &= \frac{b\left(\frac{c}{d}z+1\right)}{cz+d} \\ &= \frac{\frac{b}{d}\left(cz+d\right)}{cz+d} \\ &= \frac{b}{d} \end{aligned}$$

פונקציה קבועה בעחת נקודת אי רציפות סליקה ב $c = -\frac{d}{c}$.

1.2 ב

נניח בשלילה כי העתקה $ad - bc \neq 0$, $w = \frac{az+b}{cz+d}$ מעבירה את $z_1 \neq z_2$ לאותה נקודה אזי

$$
\begin{aligned}
\frac{az_1+b}{cz_1+d} &= \frac{az_2+b}{cz_2+d}\\
(az_1+b)(cz_2+d) &= (az_2+b)(cz_1+d)\\
acz_1z_2+adz_1+bcz_2+bd &= acz_1z_2+bcz_1+adz_2+bd\\
adz_1+bcz_2 &= bcz_1+adz_2\\
ad(z_1-z_2)+bc(z_2-z_1) &= 0\\
ad(z_1-z_2)-bc(z_1-z_2) &= 0\\
(z_1-z_2)\underbrace{(ad-bc)}_{\neq 0} &= 0\\
z_1-z_2 &= 0\\
z_1 &= z_2
\end{aligned}
$$

בסתירה להנחה ש $z_1 \neq z_2$.
אזי הטרנספורמציה היא חד חד ערכית

1.3 ג

מנוסחת היחס הכפול:

$$\frac{\alpha-\gamma}{\beta-\gamma}\cdot\frac{\beta-z}{\alpha-z}=\frac{\alpha'-\gamma'}{\beta'-\gamma'}\cdot\frac{\beta'-f(z)}{\alpha'-f(z)}$$

כאשר $\alpha',\beta',\gamma',\alpha,\beta,\gamma$ נתונים אז $f(z)$ נקבעת ביחידות לכל z שנציב ע"י פתרון המשוואה הנוצרת.

2 שאלה 2

$$
\begin{aligned}
\frac{az+b}{cz+d} &= z\\
az+b &= cz^2+dz\\
-cz^2+z(a-d)+b &= 0
\end{aligned}
$$

אם $c=0$

$$
\begin{aligned}
z(a-d)+b &= 0\\
z &= -\frac{b}{a-d}
\end{aligned}
$$

אם $c\neq 0$

$$
\begin{aligned}
z^2 + z\frac{d-a}{c} - \frac{b}{c} &= 0 \\
z &= \frac{-\left(\frac{d-a}{c}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{d-a}{c}\right)^2 - 4\cdot\left(-\frac{b}{c}\right)}}{2}
\end{aligned}
$$

3 שאלה 3

3.1 א

בונים העתקה המעתיקה

$$
\begin{aligned}
1 &\to a \\
i &\to b \\
-1 &\to \infty
\end{aligned}
$$

כך ש $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

אזי

$$
\begin{aligned}
\frac{z-\alpha}{z-\gamma}\cdot\frac{\beta-\gamma}{\beta-\alpha} &= \frac{w-\alpha'}{w-\gamma'}\cdot\frac{\beta'-\gamma'}{\beta'-\alpha'} \\
\frac{z-1}{z+1}\cdot\frac{i+1}{i-1} &= \lim_{C\to\infty}\frac{w-a}{w-C}\cdot\frac{b-C}{b-a} \\
\frac{z-1}{z+1}\cdot\frac{i+1}{i-1} &= \lim_{C\to\infty}\frac{w-a}{C\left(\frac{w}{C}-1\right)}\cdot\frac{C\left(\frac{b}{C}-1\right)}{b-a} \\
\frac{z-1}{z+1}\cdot\frac{i+1}{i-1} &= \lim_{C\to\infty}\frac{w-a}{\frac{w}{C}-1}\cdot\frac{\frac{b}{C}-1}{b-a} \\
\frac{z-1}{z+1}\cdot\frac{i+1}{i-1} &= \frac{w-a}{b-a} \\
\frac{-iz+i}{z+1} &= \frac{w-a}{b-a} \\
\frac{-iz\left(b-a\right)+i\left(b-a\right)}{z+1} &= w-a \\
\frac{-iz\left(b-a\right)+i\left(b-a\right)+a\left(z+1\right)}{z+1} &= w \\
\frac{-iz\left(b-a\right)+i\left(b-a\right)+az+a}{z+1} &= w \\
w &= \frac{z\left(ia-ib+a\right)+i\left(b-a\right)+a}{z+1}
\end{aligned}
$$

3.2 ב

$$\begin{aligned} 1 &\to e^{i\theta_1} \\ i &\to e^{i\theta_2} \\ -1 &\to e^{i\theta_3} \end{aligned}$$

כך ש $0 \le \theta_1 < \theta_2 < \theta_3 < 2\pi$

$$\begin{aligned}
\frac{z-\alpha}{z-\gamma} \cdot \frac{\beta-\gamma}{\beta-\alpha} &= \frac{w-\alpha'}{w-\gamma'} \cdot \frac{\beta'-\gamma'}{\beta'-\alpha'} \\
\frac{z-1}{z+1} \cdot \frac{i+1}{i-1} &= \frac{w-e^{i\theta_1}}{w-e^{i\theta_3}} \cdot \frac{e^{i\theta_2}-e^{i\theta_3}}{e^{i\theta_2}-e^{i\theta_1}} \\
\frac{-iz+i}{z+1} &= \frac{w-e^{i\theta_1}}{w-e^{i\theta_3}} \cdot \frac{e^{i\theta_2}-e^{i\theta_3}}{e^{i\theta_2}-e^{i\theta_1}} \\
\frac{-iz+i}{z+1} \cdot \frac{e^{i\theta_2}-e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}-e^{i\theta_3}} &= \frac{w-e^{i\theta_1}}{w-e^{i\theta_3}} \\
\frac{-iz+i}{z+1} \cdot \frac{e^{i\theta_2}-e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}-e^{i\theta_3}} \left(w-e^{i\theta_3}\right) &= w-e^{i\theta_1} \\
\begin{array}{r} w\frac{-iz+i}{z+1} \cdot \frac{e^{i\theta_2}-e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}-e^{i\theta_3}} + \\ -\frac{-iz+i}{z+1} \cdot \frac{e^{i\theta_2}-e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}-e^{i\theta_3}} e^{i\theta_3} \end{array} &= w-e^{i\theta_1} \\
w\left(\frac{-iz+i}{z+1} \cdot \frac{e^{i\theta_2}-e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}-e^{i\theta_3}} - 1\right) &= \frac{-iz+i}{z+1} \cdot \frac{e^{i\theta_2}-e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}-e^{i\theta_3}} e^{i\theta_3} - e^{i\theta_1} \\
w &= \frac{\left(\frac{-iz+i}{z+1} \cdot \frac{\overbrace{e^{i\theta_2}-e^{i\theta_1}}^{k}}{e^{i\theta_2}-e^{i\theta_3}} e^{i\theta_3} - e^{i\theta_1}\right)}{\left(\frac{-iz+i}{z+1} \cdot \frac{e^{i\theta_2}-e^{i\theta_1}}{\underbrace{e^{i\theta_2}-e^{i\theta_3}}_{k}} - 1\right)} \\
&= \frac{(i-zi)\, k e^{i\theta_3} - i e^{i\theta_1} (z+1)}{(i-zi)\, k - z - 1} \\
&= \frac{z\left(-ike^{i\theta_3} - e^{i\theta_1}\right) + ike^{i\theta_3} - e^{i\theta_1}}{z\,(-ik-1) - 1 + ik}
\end{aligned}$$

4 שאלה 4

4.1 א

$$\begin{aligned} 1 &\to 0 \\ i &\to 1 \\ \infty &\to 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{z-\alpha}{z-\gamma}\cdot\frac{\beta-\gamma}{\beta-\alpha} &= \frac{w-\alpha'}{w-\gamma'}\cdot\frac{\beta'-\gamma'}{\beta'-\alpha'} \\
\lim_{C\to\infty}\frac{z-1}{z-C}\cdot\frac{i-C}{i-1} &= \frac{w}{w-2}\cdot\frac{1-2}{1} \\
\lim_{C\to\infty}\frac{z-1}{C\left(\frac{z}{C}-1\right)}\cdot\frac{C\left(\frac{i}{C}-1\right)}{i-1} &= -\frac{w}{w-2} \\
\lim_{C\to\infty}\frac{z-1}{\frac{z}{C}-1}\frac{\frac{i}{C}-1}{i-1} &= -\frac{w}{w-2} \\
-\frac{z-1}{i-1} &= \frac{w}{w-2} \\
-\frac{z-1}{i-1}(w-2) &= w \\
2\frac{z-1}{i-1}-w\frac{z-1}{i-1}-w &= 0 \\
w\left(\frac{z-1}{i-1}+1\right) &= 2\frac{z-1}{i-1} \\
w\left(\frac{z-2+i}{i-1}\right) &= \frac{2z-2}{i-1} \\
w &= \frac{2z-2}{i-1}\frac{i-1}{z-2+i} \\
&= \frac{2z-2}{z-2+i}
\end{aligned}$$

4.2 ב

$$\begin{aligned} 1 &\to \infty \\ i &\to 0 \\ \infty &\to 1 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{z-\alpha}{z-\gamma}\cdot\frac{\beta-\gamma}{\beta-\alpha} &= \frac{w-\alpha'}{w-\gamma'}\cdot\frac{\beta'-\gamma'}{\beta'-\alpha'}\\
\lim_{C\to\infty}\frac{z-1}{z-C}\cdot\frac{i-C}{i-1} &= \lim_{B\to\infty}\frac{w-B}{w-1}\cdot\frac{0-1}{-B}\\
\lim_{C\to\infty}\frac{z-1}{C\left(\frac{z}{C}-1\right)}\cdot\frac{C\left(\frac{i}{C}-1\right)}{i-1} &= \lim_{B\to\infty}\frac{B\left(\frac{w}{B}-1\right)}{w-1}\cdot\frac{-1}{-B}\\
\lim_{C\to\infty}\frac{z-1}{\frac{z}{C}-1}\,\frac{\frac{i}{C}-1}{i-1} &= \lim_{B\to\infty}\frac{\left(\frac{w}{B}-1\right)}{w-1}\cdot\frac{-1}{-1}\\
\lim_{C\to\infty}\frac{z-1}{\frac{z}{C}-1}\,\frac{\frac{i}{C}-1}{i-1} &= \frac{(0-1)}{w-1}\cdot\frac{-1}{-1}\\
\frac{z-1}{i-1} &= \frac{-1}{w-1}\\
\frac{z-1}{i-1}(w-1) &= -1\\
w &= \frac{\frac{z-1}{i-1}-1}{\frac{z-1}{i-1}}\\
w &= \frac{z-1-i+1}{i-1}\,\frac{i-1}{z-1}\\
w &= \frac{z-i}{z-1}
\end{aligned}
$$

4.3 ג

$$
\begin{aligned}
1 &\to -i\\
i &\to i\\
\infty &\to 1
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
\frac{z-\alpha}{z-\gamma}\cdot\frac{\beta-\gamma}{\beta-\alpha} &= \frac{w+i}{w-1}\cdot\frac{i-1}{i+i}\\
\lim_{C\to\infty}\frac{z-1}{z-C}\cdot\frac{i-C}{i-1} &= \frac{w+i}{w-1}\cdot\frac{i-1}{i+i}\\
\lim_{C\to\infty}\frac{z-1}{C\left(\frac{z}{C}-1\right)}\cdot\frac{C\left(\frac{i}{C}-1\right)}{i-1} &= \frac{w+i}{w-1}\cdot\frac{i-1}{i+i}\\
\lim_{C\to\infty}\frac{z-1}{\frac{z}{C}-1}\frac{\frac{i}{C}-1}{i-1} &= \frac{w+i}{w-1}\cdot(i+1)\\
\lim_{C\to\infty}\frac{z-1}{\frac{z}{C}-1}\frac{\frac{i}{C}-1}{i-1} &= \frac{w+i}{w-1}\cdot(i+1)\\
\frac{z-1}{i-1} &= \frac{w+i}{w-1}\cdot(i+1)\\
z-1 &= \frac{-2w-2i}{w-1}\\
w &= \frac{-2w-2i}{w-1}+1\\
&= \frac{-2w-2i+w-1}{w-1}\\
&= \frac{-w-1-2i}{w-1}
\end{aligned}$$

5 שאלה 5

5.1 א

$w(z)=z, w'(z)=1$ ההעתקה $w(z)=z$ מקיימת את זה, והיא העתקת מוביוס.

5.2 ב

הפתרון הוא מהצורה $w=e^{i\theta}\frac{z-\alpha}{\alpha z-1}$ שזה מעביר מעגל היחידה לעצו. נקבע $\theta=0$ ונפתור:

$$\begin{aligned}
w'(z) &= \frac{(\overline{\alpha}z-1)-(z-\alpha)\overline{\alpha}}{(\overline{\alpha}z-1)^2}\\
w'(0) &= \frac{-1+|\alpha|^2}{1}\\
w'(0) &= 0\\
|\alpha| &= \sqrt{\frac{3}{2}}\\
w &= \frac{z-\sqrt{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\frac{3}{2}}z-1}
\end{aligned}$$

5.3 ג

5.4 ד

6 שאלה 6

6.1 $\Im(z) > 0, |z| < 1, w = \frac{iz+i}{-z+1}$

החיתוך של של שני הגבולות של התחומים היא בנקודות $1, -1$ אזי נבדוק לאיפה הטרנספורמציה מעבירה את "המעגל" $-1, 0, 1$ ואת המעגל $1, i, -1$

$$\begin{aligned} w(1) &= \infty \\ w(-1) &= 0 \\ w(i) &= -1 \\ w(0) &= i \end{aligned}$$

אזי מקבלים שני הגבולות $y = 0, x = 0$ והתחום המתקבל הוא התחום $\Im(z) > 0, \Re(z) < 0$

6.2 $\Im(z) > 0, \Re(z) > 0, w = \frac{z+1-i}{z+1+i}$

שני התחומים נפגשים ב $0, \infty$ אזי נראה איך עוברים הישרים $0, 1, \infty$ ו $0, i, \infty$

$$\begin{aligned} 0, 1, \infty &\Rightarrow w(0), w(1), w(\infty) \\ &\Rightarrow -i, \frac{3}{5} - \frac{4}{5}i, 1 \\ 0, i, \infty &\Rightarrow w(0), w(1), w(\infty) \\ & \quad -i, 0.2 - 0.4i, 1 \end{aligned}$$

רואים כי $0, 1, \infty$ עובר למעגל $x^2 + y^2 = 1$ והישר $0, i, \infty$ עובר ל $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 1$

אז התחום הוא

$$\left(x^2 + y^2 < 1\right) \cap \left((x-1)^2 + (y+1)^2 < 1\right)$$