תרגיל מס.7

3 ביוני 2009

שם התלמיד	עפיף חלומה
מס' ת"ז	302323001
שם המתרגל	מר מתן פרזמה
קבוצת תרגול	
יום ג'	שעה $10:00-11:45$

טבלה 1: טבלת מידע אישי

1 שאלה 1

1.1 א

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^n x^n$$
$$R_{n_{cauchy}} = (n+1)\frac{1}{(1+c)^{n+1}}(x-c)^n \cdot x$$
$$R_{n_{lagrange}} = \frac{1}{(1+c)^{n+1}} x^{n+1}$$

1.2 ב

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{x^n}{i!}$$
$$R_{n_{cauchy}} = \frac{0.5\left(e^c + (-1)^n e^{-c}\right)}{n!}(x-c)^n \cdot x$$
$$R_{n_{Lagrange}} = \frac{0.5\left(e^c + (-1)^n e^{-c}\right)}{(n+1)!} x^{n+1}$$

1.3 ג

$$p_n(x) = 9 + 21(x-1) + 23(x-1)^2 + 13(x-1)^3 + 4(x-1)^4 + (x-1)^5$$
$$R_{n_{cauchy}} = 0$$
$$R_{n_{lagrange}} = 0$$

1.4 ד

$$p_n(x) = x^6 - 12x^5 + 69x^4 - 124x^3 - 160x + 85$$
$$R_{n_{cauchy}} = 0$$
$$R_{n_{lagrange}} = 0$$

2 שאלה 3

2.1 א

רוצים כי השארית תהיה קטנה מ 0.01 אזי

$$\begin{aligned} R_n &< 0.01 \\ \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} &< 0.01 \\ \frac{e^c}{(n+1)!}(0.5)^{n+1} &< 0.01 \\ \frac{e^c}{(n+1)!}(0.5)^{n+1} < \frac{3^{0.5}}{(n+1)!}\cdot 0.5^{n+1} &< 0.01 \end{aligned}$$

עבור $n=3$ מקבלים $R_n < 0.0045$
אזי

$$\begin{aligned} e^{0.5} &= 1+0.5+\frac{0.5^2}{2}+\frac{0.5^3}{6} \\ &= 1.645 \end{aligned}$$

2.2 ב

$$\begin{aligned} R_n &< 0.01 \\ \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} &< 0.01 \\ \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} < \frac{1}{(n+1)!}\cdot 0.5^{n+1} &< 0.01 \end{aligned}$$

עבור $n=3$ מקבלים $R_n < 0.002$ אזי

$$\begin{aligned} \cos(0.5) &= 1-\frac{0.5^2}{2} \\ &= 0.875 \end{aligned}$$

3 שאלה 4

3.1 ב

עבור $g(x)=f(2x)$ מתקיים $g^{(n)}(x)=2^n f(2x)$ אזי אם

$$P_{g_n} = \sum 2^k a_n \cdot x^k$$

3.2 ג

$$P_n = 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

4 שאלה 5

פולינום טילור של $g(x)$ סביב x_0 הוא:

$$P_{n_{g(x)}} = \sum_{i=0}^{n} \frac{g^{(i)}(x_0)}{i!} \cdot (x - x_0)^i$$

אזי אם $g = f'$ מקבלים

$$\begin{aligned} P_{n-1_{f'(x)}} &= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f^{(i+1)}(x_0)}{i!} \cdot (x - x_0)^i \\ P_{n_{f(x)}} &= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f^{i}(x_0)}{i!} \cdot (x - x_0)^i \end{aligned}$$

רואים כי אם $P_{n_{f(x)}} = \sum a_i (x - x_0)^n$ אזי

$$P_{n-1_{f'(x)}} = \sum_{i=0}^{n} a_{i+1} \cdot (i+1) \cdot (x - x_0)^i$$

5 שאלה 6

5.1 א

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - 1 + \frac{x^2}{2}}{x^4} &= \lim_{x\to 0} \frac{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + O\left(x^5\right) - 1 + \frac{x^2}{2}}{x^4} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^4}{24} + O\left(x^5\right)}{x^4} \\ &= \frac{1}{24} \end{aligned}$$

5.2 ב

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)\sin(x)-x}{x^4} &= \lim_{x\to 0}\frac{x-\frac{2}{3}x^3+O\left(x^4\right)-x}{x^4}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{2}{3}x^3+O\left(x^4\right)}{x^4}\\ &= -\frac{2}{3}\end{aligned}$$

5.3 ג

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^x-1\right)^2}{\ln(1+x)+\frac{x^2}{2}} &= \lim_{x\to 0}\frac{\left(1+x+O\left(x^2\right)-1\right)^2}{x-\frac{x^2}{2}+O\left(x^3\right)+\frac{x^2}{2}}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\left(x+O\left(x^2\right)\right)^2}{x+O\left(x^3\right)}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{x^2+O\left(x^3\right)}{x+O\left(x^3\right)}\\ &= 0\end{aligned}$$

5.4 ד

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2(x)\left(e^x-1\right)\cos(x)}{\cos(x)-1} &= \lim_{x\to 0}\frac{\left(x+O\left(x^3\right)\right)^2\left(1+x+O\left(x^2\right)\right)\left(1+O\left(x^2\right)\right)}{1-\frac{x^2}{2}+O\left(x^4\right)-1}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\left(x^2+O\left(x^4\right)\right)\left(1+x+O\left(x^2\right)\right)}{\frac{x^2}{2}}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{x^2+x^3+O\left(x^4\right)}{\frac{x^2}{2}}\\ &= 2\end{aligned}$$

6 שאלה 8

זה לא נכון עבור הפונקציה $f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$ והפונקציה $g(x)=\begin{cases}2e^{-\frac{1}{x^2}} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$ עבור שתי הפונקציות פולינום טילור שווה ל0 לכל n אבל הפונקציות לא שוות.