פתרון תרגיל 4

1) א. חישוב V(t) בזמן t=0 .

מאחר והמפסק S היה סגור זמן ממושך - דיו לסיום כל תופעות המעבר - המעגל במצב DC יציב. במצב זה הזרם דרך הקבל הוא אפס בגלל :

$$i_c = C\frac{dVc}{dt} = 0$$

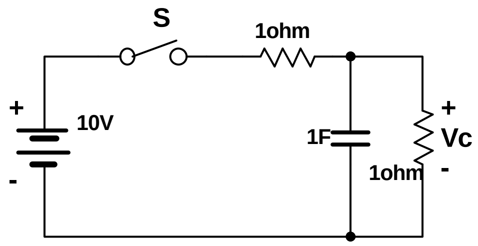
ולכן המתח ע"ג הקבל בזמן t=0 מחושב ע"פ מחלק המתח הבא:

$$Vc(t=0) = 10\frac{1}{1+1} = 5V$$

ב. מאחר ואין עירור חיצוני תמיד מתקיימת רציפות מתח ע"ג קבל לכן:

$$Vc(0^-) = Vc(0^+) = 5V$$

לצורך מציאת V(t) עבור t>0 נשרטט את המעגל המתאים לאחר פתיחת המתג S ונפתור את החוג היחיד :



$$KVL_{CCW} \Rightarrow V_R - V_C = 0$$

$$i_c = -C\frac{dV_c}{dt}$$

$$RC\frac{dV_C}{dt} + V_C = 0$$

המשוואה ההומוגנית לאחר הצבת ערכי המעגל ות.ה נתונה ע"י:

$$\frac{dV_C}{dt} + V_C = 0 \qquad V_c(t=0^-) = 5V$$

פתרונה הכללי נתון ע"י:

$$V_{ZIR}(t) = Ke^{-t}$$

ערכו של K יקבע ע"י קיום ת.ה בזמן $t=0^+$ והפתרון נתון ע"י:

$$5 = K*1 \Rightarrow K = 5$$

$$V_{ZIR}(t) = 5e^{-t} \qquad t>0$$

ג. האנרגיה האגורה בקבל בעת פתיחת במתג S נתונה ע"י:

$$E_c(0) = \frac{1}{2}CV_c^2 = 12.5Joul$$

האנרגיה ש"התבזבזה" ע"ג הנגד המחובר במקביל לקבל עד לזמן t כלשהוא נתונה ע"י:

$$E_R(t) = \int_0^t \frac{V_R^2(t')}{R}dt' = \int_0^t (5e^{-t'})^2 dt' = -12.5e^{-2t} + 12.5 = 12.5[1-e^{-2t}]Joul$$

האנרגיה שנותרה בקבל עד לאותו זמן t נתונה ע"י:

$$E_c(t) = E_c(0) + \int_0^t i_c(t')V_c(t')dt' = E_c(0) + \int_0^t 5e^{-t'}(-5e^{-t'})dt' = 12.5 + 12/5e^{-2t'}\Big|_0^t =$$
$$= 12.5 + 12.5e^{-2t} - 12.5 = 12.5e^{-2t}\ Joul$$

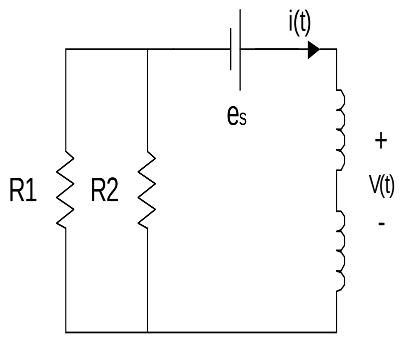
סכום האנרגיות זו ש"התבזבזה" בנגד וזו שנותרה בקבל עד זמן t נתון ע"י:

$$12.5(1-e^{-2t}) + 12.5e^{-2t} = 12.5 Joul$$

וניתן לראות את קיומו של חוק שימור האנרגיה משום שסכום זה שווה לערך האנרגיה הראשונית של הקבל.

ד. אם הנגד המקביל לקבל ברגע פתיחת המתג S הוא אינסופי הרי שלא יזרום כלל זרם דרך הקבל והמתח עליו ישאר 5V לנצח.

2)



נסמן:

$$L = L_1 + L_2;\ R = \frac{R_1R_2}{R_1+R_2}$$

$$KVL \Rightarrow L\frac{di}{dt} + Ri = e_S = \delta(t);\ i(0^-) = 0$$

ניתן להמיר את ZSR לעירור ההלם ב-ZIR עם תנאי התחלה חדשים ב-+0.

נבצע אינטגרציה מ--0עד +0 למציאת תנאי ההתחלה החדשים:

$$L\int_{0^-}^{0^+}\frac{di}{dt}dt + R\int_{0^-}^{0^+} idt = \int_{0^-}^{0^+}\delta(t)dt$$

i היא פונקציה חסומה (זרם סופי), ולכן האינטגרל עליו בפרק זמן אפסי הוא אפס. אם כן:

$$\mathrm{L}[\mathrm{i}(0^+) - \mathrm{i}(0^-)] = 1$$

$$\mathrm{i}(0^+) = \frac{1}{\mathrm{L}}$$

כעת עלינו לפתור את הבעיה הבאה:

$$L\frac{di}{dt} + Ri = 0$$

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = 0$$

$$i(0^+) = \frac{1}{L}$$

שפתרונה:

$$i(t) = h(t) = \frac{1}{L}e^{-\frac{R}{L}t}u(t)$$

3. א.

$$i = C\frac{dv_C}{dt}$$

$$KVL \Rightarrow RC\frac{dv_C}{dt} + v_C = e_S$$

$$\frac{dv_C}{dt} + \frac{1}{RC}v_C = \frac{1}{RC}e_S$$

נסמן: $a = 500\frac{1}{\sec}; b = 2\pi \bullet 10^3 \frac{rad}{\sec}$

ובהצבת הנתונים:

$$\frac{dv_C}{dt} + av_C = 30a\cos(bt); v_C(0) = 1V$$

נפתור תחילה ZIR :

$$\frac{dv_C}{dt} + av_C = 0;\ v_C(0) = 1V$$

הפתרון ההומוגני:

$$V_c(t) = 1 \cdot \exp(-at)$$

כעת נפתור ZSR :

$$\frac{dv_C}{dt} + av_C = 30a\cos(bt); v_C(0) = 0V$$

והפתרונות - ההומוגני והפרטי- הם:

$$v_h = Ke^{-at}$$

$$v_p = A\sin(bt) + B\cos(bt)$$

נציב Vp במשוואה:

$$(\frac{d}{dt} + a)v_p = 30a\cos(bt)$$

$$(Ab + Ba)\cos(bt) + (Aa - Bb)\sin(bt) = 30a\cos(bt)$$

$$Ab + Ba = 30a$$

$$Aa - Bb = 0$$

$$A = \frac{Bb}{a}$$

$$\frac{Bb}{a}b + Ba = 30a$$

$$B(\frac{b^2}{a} + a) = 30a$$

$$B = \frac{30a^2}{a^2 + b^2}; A = \frac{30ab}{a^2 + b^2}$$

והפתרון המלא:

$$v_C = v_h + v_p = \left[Ke^{-at} + \frac{30a}{a^2+b^2}[a\cos(bt) + b\sin(bt)] \right] u(t)$$

$$v_C(0^+) = 0 = K + \frac{30a^2}{a^2+b^2}$$

$$v_C = \left[(-\frac{30a^2}{a^2+b^2})e^{-at} + \frac{30a}{a^2+b^2}[a\cos(bt) + b\sin(bt)] \right] u(t) + e^{-at}$$

$$i(t) = C\frac{dv_C}{dt} =$$

$$= 10^{-6}\{\left[-a(-\frac{30a^2}{a^2+b^2})e^{-at} + \frac{30a}{a^2+b^2}[b^2\cos(bt) - ab\cdot\sin(bt)] \right] u(t) + 0\cdot\delta(t)\} - ae^{-at} =$$

$$= 10^{-6}\left[94.39e^{-500t} + 1.49\cdot 10^4\cos(2\pi \bullet 10^3 t) - 1.18\cdot 10^3\sin(2\pi \bullet 10^3 t) \right] u(t) - 500e^{-500t}$$

ב. במקרה זה:

$$v_C(0) = 0 = K + \frac{30a}{a^2+b^2}(a\cos\Phi + b\sin\Phi)$$

$$v_C = \left\{ [-\frac{30a}{a^2+b^2}(a\cos\Phi + b\sin\Phi)]e^{-at} + \frac{30a}{a^2+b^2}[a\cos(bt+\Phi) + b\sin(bt+\Phi)] \right\} u(t) + e^{-at}$$

נדרוש התאפסות המקדם של האקספוננט לכל $t > 0$:

$$1 - \frac{30a}{a^2+b^2}(a\cos\Phi + b\sin\Phi) = 0$$

$$\left(a\cos\Phi + b\sin\Phi\right) = \frac{a^2+b^2}{30a}$$

$$\left(a\sqrt{1-\sin^2\Phi} + b\sin\Phi\right) = \frac{a^2+b^2}{30a}$$

$$a\sqrt{1-\sin^2\Phi} = \frac{a^2+b^2}{30a} - b\sin\Phi$$

נעלה בריבוע את שני האגפים:

$$a^2\left(1-\sin^2\Phi\right) = \left(\frac{a^2+b^2}{30a} - b\sin\Phi\right)^2$$

נגדיר $x = \sin\Phi$ ונפתור משוואה ריבועית ב x, ונקבל: $\Phi = 20.2^0$

4. נתונה לנו התגובה למדרגה: $v_u(t) = 2(1-e^{-t})u(t)$

העירור הנתון בגרף הוא קומבינציה של מדרגות:

$$-u(t)+3u(t-4)-2u(t-5)$$

המערכת לינארית וקבועה בזמן, ועל-כן:

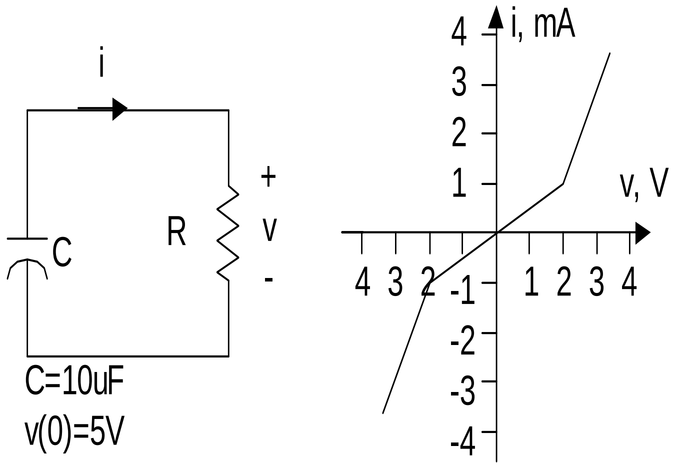
$$v(t)=-v_u(t)+3v_u(t-4)-2v_u(t-5)=$$
$$=-2(1-e^{-t})u(t)+6(1-e^{4-t})u(t-4)-4(1-e^{5-t})u(t-5)$$

התוספת עבור כניסת הלם ב- t=7 הינה נגזרת של כניסת המדרגה בזמן t=7 :

$$2e^{7-t}u(t-7)+2(1-e^{7-t})\delta(t-7)$$

v2(t)=

.5



מכיוון שת"ה הם v(0)=5V, נתייחס תחילה למקרה שבו $|v|>2$. על-פי הגרף:

$$v=500i+1.5$$

(זוהי משוואת האופיין).

ומשוואת המעגל היא:

$$v=500(-C\frac{dv}{dt})+1.5$$

$$v=-5\bullet 10^{-3}\frac{dv}{dt}+1.5$$

ובהצבת נתוני הרכיבים ות"ה:

$$\frac{dv}{dt}+200v=300$$
$$v(0)=5V$$

חלק ה ZIR :

$$\frac{dv}{dt}+200v=0$$
$$v(0)=5V$$

פתרון הומוגני:

$$v(t)=5\cdot e^{-200t}$$

חלק ה ZSR :

$$\frac{dv}{dt}+200v=300$$
$$v(0)=5V$$

הפתרון:

$$v(t)=\left(A+Be^{-200t}\right)u(t)$$

נציב את הפתרון הפרטי בלבד במד"ר ונקבל: $A=1.5$ לכן:

$$v(t)=\left(1.5+Be^{-200t}\right)u(t)$$

נציב ת"ה אפס ונקבל: $B=-1.5$. לכן:

$$v(t)=\left(1.5-1.5e^{-200t}\right)u(t)$$

והפתרון הכללי:

$$v(t)=\left(1.5-1.5e^{-200t}\right)u(t)+5e^{-200t}$$

זוהי פונקציה מונוטונית יורדת. ברגע t‘ דועך המתח ל-2V:

$$v(t')=1.5+3.5e^{-200t'}=2$$
$$e^{-200t'}=\frac{0.5}{3.5}$$
$$t'=-\frac{\ln\frac{0.5}{3.5}}{200}=9.7m\sec$$

כאשר $|v|<2$ האופיין הוא:

$$R=\frac{v}{i}=2k\Omega$$
$$v+RC\frac{dv}{dt}=0$$
$$\frac{dv}{dt}+50v=0$$
$$v(t')=2V$$

והפתרון:

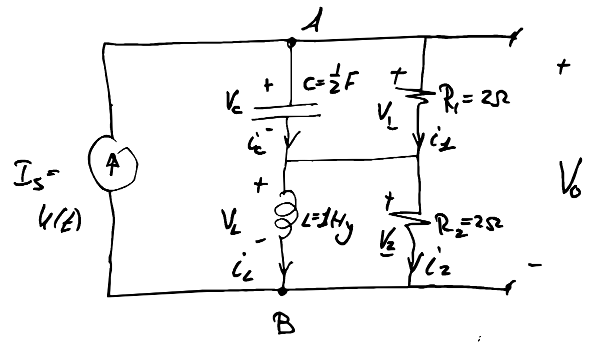
$$v(t)=Ae^{-50t}$$
$$v(t')=2=Ae^{-50t'}$$
$$A=2e^{50t'}$$
$$v(t)=2e^{-50(t-t')}$$

גם כעת הפונקציה מונוטונית יורדת, ולכן מכאן והלאה $|v|<2$ כל הזמן.

לסיכום:

$$v(t) = 1.5 + 3.5e^{-200t};0 \le t \le t'$$
$$v(t) = 2e^{-50(t-t')};t \ge t'$$

.6



$i_L(0^-)=2\,Amper$

$V_c(0^-)=1\,Volt$

$V_0(t)=?$

פתרון!

KVL: $V_0=V_1+V_2$

KVL: $V_2=V_L$

KVL: $V_1=V_c$

משוואות הרכיבים הם:

$i_1=\frac{V_1}{R_1}=\frac{V_c}{R_1}$ $\qquad i_c=C\frac{dV_c}{dt}$

$i_2=\frac{V_2}{R_2}=\frac{V_L}{R_2}$ $\qquad V_L=L\frac{di_L}{dt}$

KCL בצומת A: $\quad I_s=i_c+i_1 \quad (1)$

KCL בצומת B: $\quad I_s=i_L+i_2 \quad (2)$

מ-(1):

$$I_s=i_c+i_1=C\frac{dV_c}{dt}+\frac{V_c}{R_1} \Rightarrow \frac{dV_c}{dt}+\frac{1}{R_1C}V_c=\frac{1}{C}I_c$$

$$\frac{dV_c}{dt}+V_c=2u(t) \quad ; \quad V_c(0^-)=1\,Volt$$

נפתור בנפרד את:

נפתור:

$$V_c^{ZIR}=Ae^{-t} \quad ; \quad V_c(0^-)=1\,Volt$$

$$\Rightarrow A=1 \Rightarrow \underline{\underline{V_c^{ZIR}(t)=e^{-t}}}$$

אין מקור אימפולסיבי:

$$V_c^{ZSR}=(A+Be^{-t})u(t) \quad ; \quad V_c^{ZSR}(0^-)=0=V_c^{ZSR}(0^+)$$

נציב במד"ר:

$$-Be^{-t}u(t)+(A+Be^{-t})\delta(t)+(A+Be^{-t})u(t)=2u(t)$$

נשווה שני אגפים:

$$A+B=0 \quad ; \quad A=2 \Rightarrow B=-2$$

$$\underline{\underline{V_c^{ZSR}=2(1-e^{-t})u(t)}}$$

$$V_c(t)=V_c^{ZIR}+V_c^{ZSR}=e^{-t}+2(1-e^{-t})u(t)$$

ש׳ 2

$$I_S = i_L + i_2 = i_L + \frac{V_L}{R_2} = i_L + \frac{1}{R_2} L \frac{di_L}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{di_L}{dt} + \frac{R_2}{L} i_L = \frac{R_2}{L} I_S$$

נציב בערכים!

$$\begin{cases} \frac{di_L}{dt} + 2i_L = 2u(t) \\ i_L(0^-) = 2\text{Amper} \end{cases}$$

לפי ZIR

$$i_L^{ZIR} = A e^{-2t} \quad ; \quad i_L(0^-) = i_L(0^+) = 2\text{Amper}$$

$$\Rightarrow A = 2 \qquad \Rightarrow \qquad i_L^{ZIR} = 2e^{-2t}$$

לא יהיה מעבר $\delta(t)$

$$i_L^{ZSR} = (A + Be^{-2t})u(t) \quad ; \quad i_L^{ZSR}(0^-) = 0 = i_L^{ZSR}(0^+)$$

נציב במד״ר!

$$-2\cancel{Be^{-2t}}u(t) + (A+B)\delta(t) + 2(A + \cancel{Be^{-2t}})u(t) = 2u(t)$$

נשווה שני אגפים!

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ 2A = 2 \end{cases} \Rightarrow A = 1 \quad ; \quad B = -1$$

$$i_L^{ZSR} = (1 - e^{-2t})u(t)$$

$$i_L = i_L^{ZSR} + i_L^{ZIR} = 2e^{-2t} + (1 - e^{-2t})u(t)$$

$$V_L = L\frac{di_L}{dt} = -4e^{-2t} + 2e^{-2t}u(t) + \cancel{(1 - e^{-2t})\delta(t)} = -4e^{-2t} + 2e^{-t}u(t)$$

$$V_0(t) = \underbrace{V_L(t)}_{V_2} + \underbrace{V_c(t)}_{V_1} = -4e^{-2t} + 2e^{-t}u(t) + e^{-t} + 2(1 - e^{-t})u(t)$$