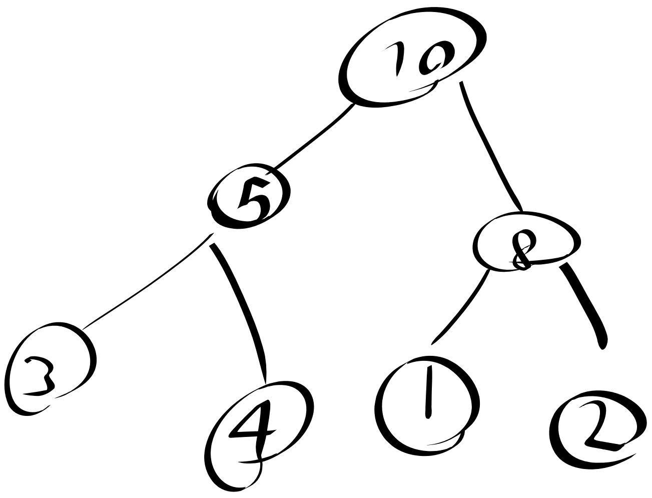
תרגיל מס.5

עפיף חלומה 302323001

15 במרץ 2010

1 שאלה 2



איור 1: ערימה שעבורה האלגוריתם לא עובד

2 שאלה 3

הגדרה: עץ כמעט שלם הוא עץ שממלא את כל הרמות שלו פרט אולי לרמה האחרונה שהוא ממלה משמאלה

כלומר צריך להוכיח כי:

- בתת עץ יש לכל היותר רמה אחת לא מלאה
- הרמה הזו מלאה משמאל.

אם קודקוד נמצא ברמה i בתוך עץ בעל עומק n אז הרמה של תתעץ זה היא $n-i$. נתון כי לכל היותר יש רמה אחת לא מלאה אזי $n-1$ רמות מלאות. אז מקבלים כי בתתעץ יש $n-i-1$ רמות מלאות כלומר הרמה אחרונה היא לא מלאה.

רואים כי תת העצ מלא משמאלה כי פעולת קיבול תת עץ לא מערבבת את הבנים של העץ.

3 שאלה 4

רוצים להראות כי סכום הקודקודים בעץ עד רמה $n-1$ שווה למספר העלים פלוס אחד. כלומר $\sum_{i=0}^{n-1} 2^i = 2^n - 1$

נוכיח באינדוקציה עבור n אורך העץ.

בדיקה עבור $n = 1$:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{1-1} 2^i &\overset{?}{=} 2^n - 1 \\ 2^0 &\overset{?}{=} 2^1 - 1 \\ 1 &\overset{\checkmark}{=} 1 \end{aligned}$$

הנחת האינדוקציה: נניח כי זה מתקיים עבור $n = k$ ונוכיח עבור $n = k+1$

הוכחה עבור $n+1$:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{k} 2^i &\overset{?}{=} 2^{k+1} - 1 \\ \sum_{i=0}^{k-1} 2^i + 2^k &\overset{?}{=} 2^{k+1} - 1 \\ 2^k - 1 + 2^k &\overset{?}{=} 2^{k+1} - 1 \\ 2^{k+1} - 1 &\overset{\checkmark}{=} 2^{k+1} - 1 \end{aligned}$$

4 שאלה 5

המינימאלי זה כאשר יש רק איבר אחד ברמה התחתית ביותר. לפי ההוכחה הקודמת:

$$\sum_{i=0}^{k} 2^i = 2^{k+1} - 1$$

אזי עבור עצ בעומק $n-1$ יש

$$2^n - 1$$

אבל אנחנו רוצים עץ בעומק n אז מוסיפים עוד איבר ומקבלים

$$2^n$$

מספר קודקודים בעץ שלם באורך n הוא

$$2^{n+1}-1$$

5 שאלה 6

יודעים כי בכל רמה יש 2^i קודקודים.
אז בעץ בעל עומק d יש בדיוק $\sum_{i=0}^{d} 2^i$ קודקודים. מהוכחה הקודמת יודעים כי

$$\sum_{i=0}^{d} 2^i = 2^{d+1}-1$$

אזי אם מספר הקודקודים הוא n מקבלים

$$\begin{aligned}
2^{d+1}-1 &= n \\
2^{d+1} &= n-1 \\
d+1 &= \log(n-1) \\
d &= \log(n-1)+1 \\
&= \log(2n-2) \\
&< \log(2n)
\end{aligned}$$

6 שאלה 7

Undefined variable: n

אי אפשר לפתור שאלה אם יש בה ערכים לא מוגדרים.

7 שאלה 8

מגדירים כי שני איברים הם חברים אם השוונו ביניהם.
בתחילה יש לנו n קבוצות של חברים(כל איבר חבר רק עם עצמו)
מבצעים השוואה באופן יעיל כלומר אם מבצעים השוואה בין שתי קבוצות חברים עושים ההשוואה בין שתי האיברים המינימאליים בקבוצה וכך מקבלים האיבר המינימאלי הבא.
בכל פעם עושים השוואה מספר הקבוצות קטן ב 1. אזי אחרי שמשווים בין כל הקבוצות מקבלים $n-1$ השוואות.