תורת ההסתבאות

עפיף חלומה

3 במרץ 2010

תוכן עניינים

פרק 1

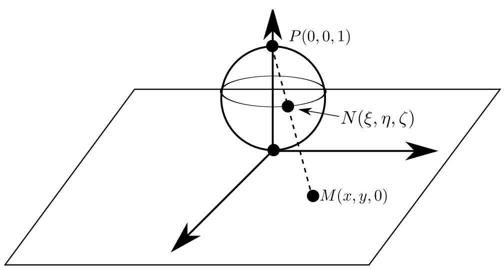
הרצאה מס.1

1.1 השלכה סטירוגרפית

זה להשליך מישור מורכב על כדור של רימן.

כדור רימן זה כדור בעל רדיוס $\frac{1}{2}$ שמרכזו נמצא ב $\left(0,0,\frac{1}{2}\right)$

עושים את זה על ידי להגיר קו בין הנק' M שאותה רוצים להשליך אל אנקודה P שהיא ראש הכדור שלנו. נקודת החיתוך של הקו עם המעגל היא התמונה של M ונסמן אותה ב N כלומר $M \to N$.



איור 1.1: קדור רימן

מתמטיקה:

$$
\begin{array}{rcl}
M\left(x,y\right) & \to & N\left(\xi,\eta,\zeta\right)\\
\overrightarrow{PN} & \parallel & \overrightarrow{PM}\\
\left(\xi,\eta,\zeta-1\right) & \parallel & \left\{x,y,0-1\right\}
\end{array}
$$

אזי

$$
\frac{x}{\xi}=\frac{y}{\eta}=\frac{1}{-\zeta+1}
$$

אז אם רוצים למצא $(x,y)\rightarrow(\xi,\eta,\zeta)$ אזי $(\xi-0)^2+(\eta-0)^2+\left(\zeta-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$ מפשטים ומקבלים $\frac{1}{4}=\xi^2+\eta^2+\zeta^2-z+\frac{1}{4}$ אזי קיבלנו משוואה $\xi^2+\nu^2=\zeta(1-\zeta)$.

$$\begin{aligned}\xi &= x(1-\zeta)\\ \eta &= y(1-y)\end{aligned}$$

אזי

$$\begin{aligned}\xi^2+\eta^2 &= x^2(1-\zeta)^2+y^2(1-\zeta)^2\\ \xi^2+\eta^2 &= (1-\zeta)^2\left(x^2+y^2\right)\\ \zeta(1-\zeta) &= (1-\zeta)^2\left(x^2+y^2\right)\\ \zeta &= (1-\zeta)\left(x^2+y^2\right)\end{aligned}$$

אזי קיבלנו

$$x^2+y^2=\frac{\zeta}{1-\zeta}$$

אבל אנחנו רוצים טרנספורמציה הפוכה אזי

$$\begin{aligned}x^2+y^2-\zeta\left(x^2+y^2\right) &= \zeta\\ \zeta\left(1+x^2+y^2\right) &= x^2+y^2\\ \zeta &= \frac{x^2+y^2}{1+x^2+y^2}\end{aligned}$$

אזי קיבלנו טרנספורמציה:

$$\begin{aligned}\zeta &= \frac{x^2+y^2}{1+x^2+y^2}\\ \xi &= x(1-\zeta)\\ \eta &= y(1-\zeta)\end{aligned}$$

אבל $1-\zeta=1-\frac{x^2+y^2}{1+x^2+y^2}=\frac{1}{1+x^2+y^2}$ אזי

$$\begin{aligned}\zeta &= \frac{x^2+y^2}{1+x^2+y^2}\\ \xi &= \frac{x}{1+x^2+y^2}\\ \eta &= \frac{y}{1+x^2+y^2}\end{aligned}$$

משפט: השלכה סטירוגרפית מעבירה כל מעגל במישור לאזשהוא מעגל על כדור של רימן ולהפך, כל מעגל על הכדור של רימן עובר בהשלכה סטירוגרפית למעגל על מישור.

הוכחה: נתון מעגל במישור x,y. אם $z = x+iy$ אזי המעגל הוא $(x-a_1)^2 + (y-a_2)^2 = R^2$. המשוואה מכללית של המעגל גם נראת בצורה הזו $A\left(x^2+y^2\right) + Bx + Cy + D = 0$.

אנחנו נשתמש בנוסחאוז האלה בשביל ההוכחה

$$\begin{aligned}
\zeta &= \frac{x^2+y^2}{1+x^2+y^2}\\
\xi &= \frac{x}{1+x^2+y^2}\\
\eta &= \frac{y}{1+x^2+y^2}\\
x^2+y^2 &= \frac{\zeta}{1-\zeta}
\end{aligned}$$

אזי מציבים:

$$\begin{aligned}
A\frac{\zeta}{1-\zeta} + B\frac{\xi}{1-\zeta} + C\frac{\eta}{1-\zeta} + D &= 0\\
A\zeta + B\xi + C\eta + D - D\zeta &= 0\\
(A-D)\,\zeta + B\xi + C\eta + D &= 0
\end{aligned}$$

אזי (ξ,η,ζ) שייכים למישור וגם הם שייכים לכדור. כלומר חיתוך בין מישור וכדור כלומר מעגל.

$$A'\zeta + B'\xi + C'\eta + D' = 0$$

כדי שבעמבר הפוך נקבל מעגל רימן צריך לכתוב את המשוואה בצורה הבאה

$$(A''-D')\,\zeta + B'\xi + C'\eta + D' = 0$$

אז אם מציבים $(\xi,\eta,\zeta) \to (x,y)$ נקבל מעגל במישור (x,y)

יש בעיה אחת בנוסחאות המעבר האלה: אם המעגל על כדור רימן חותך את P אז המקודה הזו תעבור לאינסוף. זה לא סותר את המשפט שמעגל עובר למעגל כי מעגל עם נקודה באינסוף הוא קו(קו ישר זה מעגל עם רדיוס אינסוף)

1.2 תחום פתול וסגור

אם יש תחום G והספה שלו היא ∂G. נסמן נקודה $Z = x+iy \in G$ אזי אם כל הנקודות בתחום $|Z-a| < \varepsilon$ הם נמצאות בתוך G אזי קוראים לנקודה Z נקודה פנימית, אם עבור כל ε שנבחר $|Z-a| < \varepsilon$ מכיל נקודות מחוץ לתחום אזי היא נקראת נקודת שפה.

1.3 גבולות

$$
\begin{aligned}
a &= a' + ia'' \\
Z_n &= x_n + iy_n
\end{aligned}
$$

אומרים $\lim_{n\to\infty} Z_n = a$ אם"ם לכל $0 < \varepsilon$ קיים N כך ש $N < n$ מתקיים $|Z_n - a| < \varepsilon$

1.4 פונקציות

$$w = f(z)$$

למשל הפונק' $w = \frac{1}{z}$ מעבירה מהפנים של מעגל לחוץ שלו.
לפעמים קל להפריד את החלקים הממשיים והמדומים של המשתנים $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{x-iy}{x^2+y^2}$

1.5 גבול של פונק'

$\lim_{z\to a} f(z) = A$ אם"ם $\forall\varepsilon : 0$ קיים $0 < \delta$ כך שכאשר $\delta < |z-a|$ מתקיים $|f(z) - A| < \varepsilon$

1.6 רציפות

פונק' היא רציפה אם"ם החלק הממשי והחלק המדומה שלה ממשיים.
אבל לא תמיד צריך לעבור לחלק ממשי ומדומה

פרק 2

הרצאה מס.2

$y=f(z)$ רציפה בנק z. זה אומר שהיא מוגדרת שם ו $\lim_{\Delta z}\Delta f=0$ כאשר $\Delta f=f(z+\Delta z)-f(z)$. אפשר לחלק את הפונק' לחלק ממשי ומדומה $\omega=f(z)=u(x,y)+i(x,y)$

נגדיר: נגזרת היא $f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta\omega}{\Delta z}$.

אם $f'(z)$ קיים בנק' z אזי $\omega=f(z)$ גזירה בנק' z

$f(z)$ מונוגינית בנק' z אם $f'(z)$ קיים

$f(z)$ אנליטית בנק' z אם קיימת סביבה של נק' z: נגזרת קיימת בכל נק' בסביבה

דוגמה: פונק' מונוגנית ולא אנליטית:

$$\begin{aligned}
f(z) &= z\Re(z)\\
\Delta f &= f(z+\Delta z)-f(z)\\
&= (z+\Delta z)\Re(z+\Delta z)-z\Re(z)\\
\lim\frac{\Delta f}{\Delta z} &= \lim_{\Delta z\to 0}\frac{(z+\Delta z)\Re(z+\Delta z)-z\Re(z)}{\Delta z}\\
&= \lim_{\Delta z\to 0}\left[z\frac{\Re(z+\Delta z)-\Re z}{\Delta z}+\Re(z+\Delta z)\right]\\
&= z\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Re(\Delta z)}{\Delta z}+\Re(z)\\
&= z\cdot\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\Delta x}{\Delta x+i\Delta y}+\Re(z)
\end{aligned}$$

$f'(0)$ קיימת אבל בכל נק' אחרת הנגזרת לא קיימת

2.1 תנאים הכרחיים לפריקות של פונק': תנאי קושי רימן

נניח ש $f'(z)$ קיימת אזי קיים $\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta z}$ נניח שיש לפונק חלק ממשי וחלק מדומה $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ אזי $\Delta f=\Delta u+i\Delta v$.

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta u+i\Delta v}{\Delta x+i\Delta y}$$

קיים בכל הכיוונים $\begin{matrix}\Delta y \to 0\\ \Delta x \to 0\end{matrix}$ בפרט $\Delta y = 0, \Delta x \to 0$ אזי $f'(z) = \lim_{\begin{matrix}\Delta y = 0\\ \Delta x \to 0\end{matrix}} \frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x}$

אזי $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$.

$f'(z) = \lim_{\begin{matrix}\Delta x = 0\\ \Delta y \to 0\end{matrix}} \frac{\Delta u + i\Delta v}{i\Delta y} = -i\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}$

אזי תנאי קושי רימן הם:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y}\\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial v}{\partial x}\end{aligned}$$

תנאי קושי רימן הכרחיים אבל לא מספיקים לאנליטיות של פונק'

2.2 תנאים מספיקים

1. אם עבור פונק $w = f(z)$ מתקיימים תנאי קושי רימן
2. נגזרות חלקיות רציפות בסביבה של נק' z אז $f(z)$ אנליטית ב z