<u>מבוא להנדסת חשמל - פתרון תרגיל 2</u>

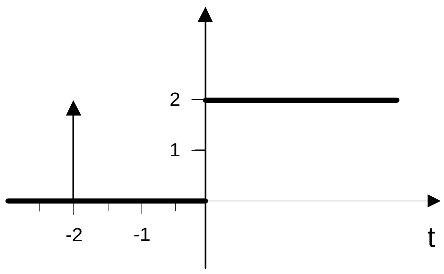
1) א)

$$\text{I)}\quad 2u(t)-2r(t-1)+2r(t-2)+u(t-3)-u(t-4)+\delta(t-4)$$

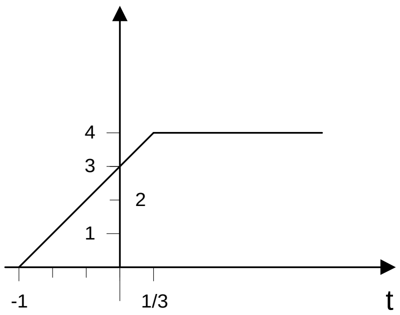
$$\text{II)}\quad \mathrm{r(t+2)-r(t)-3r(t-2)+3r(t-3)+2r(t-4)-2r(t-4.5)}$$

ב) הערה: בשרטוט הראשון הגובה של המדרגה צריך להיות 1 ולא 2...

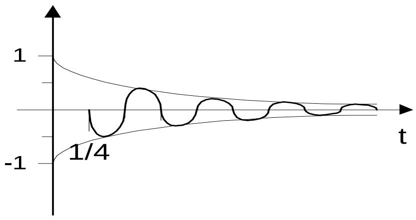
1)



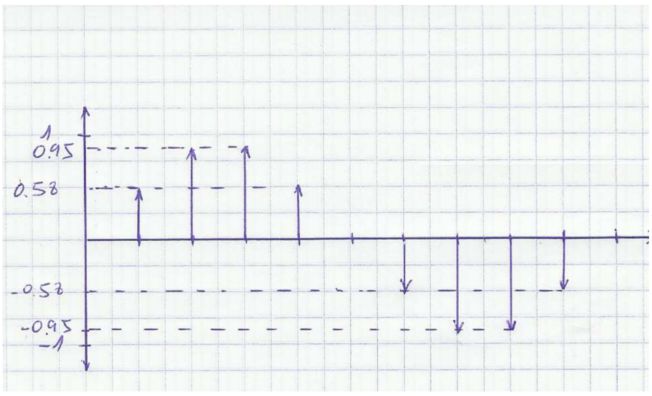
2)



3)



4)



2) א)

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)d\tau \underset{x=t-\tau}{=} \int_{\infty}^{-\infty} f(t-x)\delta(x)(-dx) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-x)\delta(x)dx \underset{x=\tau}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)\delta(\tau)d\tau$$

<u>מש"ל</u>

ב) על-פי הגדרת u(t):   a>0   u(t+b/a)=u(at+b)

$$u(t+b/a)=1-u(at+b) \qquad a<0$$

כמו-כן:

$$\delta(\tau)=\frac{du(\tau)}{d\tau}$$

$$\tau = t+\frac{b}{a} \Rightarrow \delta(t+\frac{b}{a}) = \frac{du(t+\frac{b}{a})}{d(t+\frac{b}{a})}$$

$$\tau = at+b \Rightarrow \delta(at+b)=\frac{du(at+b)}{d(at+b)}$$

$$\frac{du(t+\frac{b}{a})}{dt}=\frac{du(t+\frac{b}{a})}{d(t+\frac{b}{a})}\bullet\frac{d(t+\frac{b}{a})}{dt}=\delta(t+\frac{b}{a})\bullet 1$$

$$a>0 \Rightarrow = \frac{du(t+\frac{b}{a})}{dt}=\frac{du(at+b)}{dt}=\frac{du(at+b)}{d(at+b)}\bullet\frac{d(at+b)}{dt}=\delta(at+b)\bullet a \underset{a=|a|}{=} \delta(at+b)\bullet|a|$$

$$a<0 \Rightarrow = \frac{du(t+\frac{b}{a})}{dt}=\frac{d[1-u(at+b)}{dt}]=\frac{-du(at+b)}{d(at+b)}\bullet\frac{d(at+b)}{dt}=-\delta(at+b)\bullet a \underset{a=-|a|}{=} \delta(at+b)\bullet|a|$$

$$\Rightarrow \delta(at+b)=\frac{1}{|a|}\delta(t+\frac{b}{a})$$

*** הערה: שימו לב שאפשר להוכיח בעוד דרך והיא לפי הגדרה.**

מהגדרה של פונקצית דלתא היא: $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)f(t)dt = f(t_0)$ **, כאשר במקרה דנן**

מדובר בהחלפת משתנים פשוטה ובסוף השוואת אינטגרנדים:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(at+b)f(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty}\delta(\tau)f(\frac{\tau}{a}-\frac{b}{a})\frac{d\tau}{|a|} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\delta(\tau)f(-\frac{b}{a})\frac{d\tau}{|a|} = \int_{-\infty}^{\infty}\delta\left(\tau+\frac{b}{a}\right)f(\tau)\frac{d\tau}{|a|}$$

במקרה הכללי של פונקציה כלשהי בתוך הדלתא יש להיעזר בפיתוח לטור טיילור (מה הנוסחה כשהארגומנט של פונקצית דלתא היא פונקציה כלשהי?).

ג) ההוכחה באינדוקציה. ראשית נוכיח ל- $n=1$:

אינטגרציה בחלקים:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta'(t)dt = \underbrace{f(t)\delta(t)}_{=0}\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)f'(t)dt = -f'(0)$$

אם נתון:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta^{(n)}(t)dt = (-1)^n f^{(n)}(0)$$

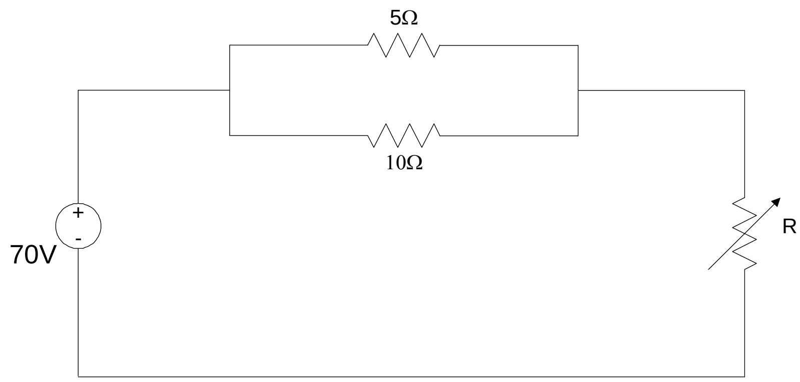
אזי:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta^{(n+1)}(t)dt = \underbrace{f(t)\delta^{(n)}(t)|_{-\infty}^{\infty}}_{=0} - \int_{-\infty}^{\infty}\delta^{(n)}(t)f'(t)dt = -(-1)^n f^{(n+1)}(0)$$

$$= (-1)^{n+1} f^{(n+1)}(0)$$

<u>מש"ל</u>

3)



תחילה נמצא את המתח על נגד Ω 10 לפי דרישת הספק:

$$P = \frac{V^2}{R} \Rightarrow V_{10} = \sqrt{P \cdot R} = \sqrt{10 \cdot 10} = 10V$$

כעת נמצא את הזרם בשני הנגדים במקביל:

$$I_5 = \frac{10}{5} = 2A$$

$$I_{10} = \frac{10}{10} = 1A$$

לכן דרך הנגד המתכוונן זורם זרם של $3A$. המתח שנופל עליו ניתן למצוא לפי KVL בחוג הגדול.

$$V_R = 70 - 10 = 60V$$

$$R = \frac{V_R}{I} = \frac{60}{3} = 20\Omega$$

4) מאחר ומקור הזרם הינו אידיאלי הוא מורים תמיד $3A$ ללא תלות בערך הנגד R. ההספק על הנגד 10אוהם יקבע ע"י מחלק הזרם

$$P = I_2^2 * 10 = (3 * \frac{5}{10+5})^2 * 10 = 10W$$

5) המתחים על הרכיבים מחושבים לפי הנוסחאות הבאות:

$$V_R = iR = 12i(t); \qquad v_L = L\frac{di}{dt} = 2\frac{di}{dt}; \qquad V_C = \frac{1}{C}\int i(t)dt = 20\int_0^t i(t')dt'$$

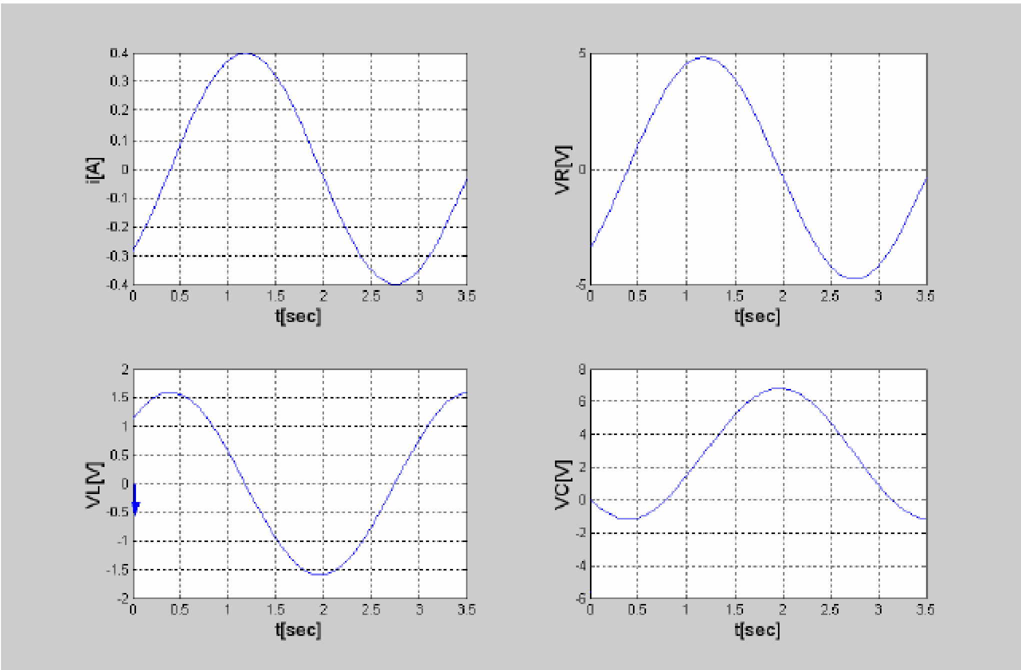
א)

$$i(t) = 0.4\sin(2t - \frac{\pi}{4})u(t)$$

$$V_R = 4.8\sin(2t - \frac{\pi}{4})u(t)$$

$$V_c = 4[\cos(\frac{\pi}{4}) - \cos(2t - \frac{\pi}{4})]u(t)$$

$$V_L = 0.8\sin(-\frac{\pi}{4})\delta(t) + 1.6\cos(2t - \frac{\pi}{4})u(t)$$

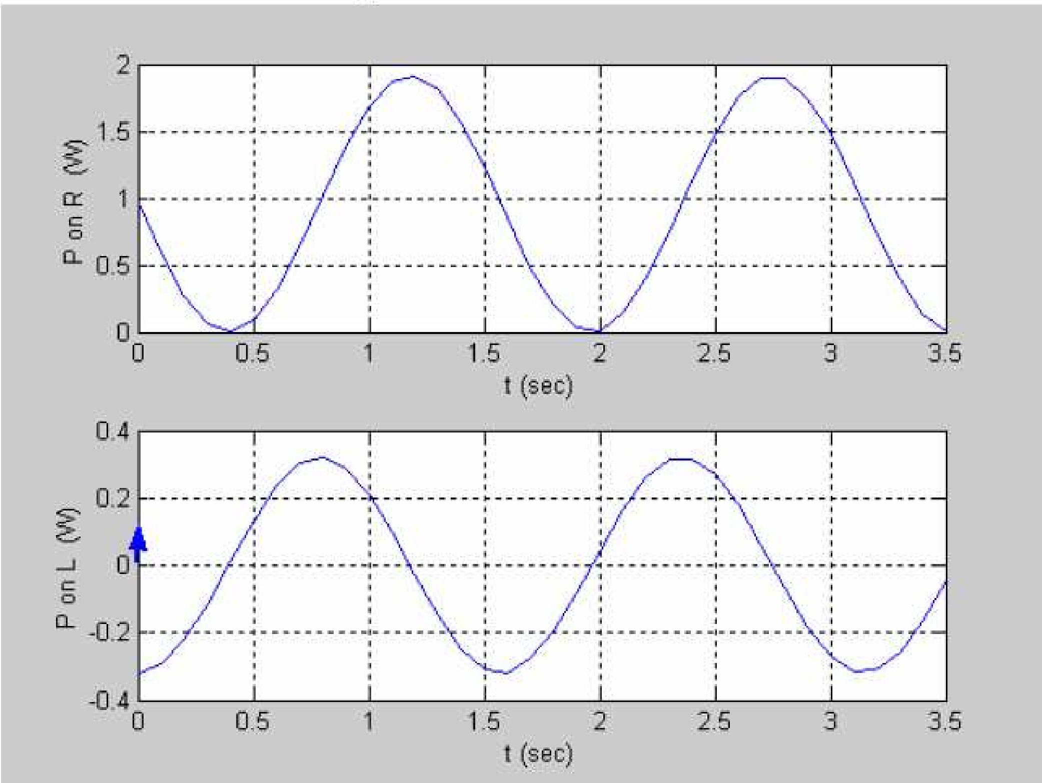


$$P = iV_R = 1.92\sin^2(2t - \frac{\pi}{4})u(t)$$

$$P_L = iV_L = 0.4\sin(2t-\frac{\pi}{4})[-0.4\sqrt{2}\delta(t)+1.6\cos(2t-\frac{\pi}{4})u(t)] =$$

$$= -0.16\sqrt{2}\sin(2t-\frac{\pi}{4})\delta(t)+0.64\sin(2t-\frac{\pi}{4})\cos(2t-\frac{\pi}{4})u(t) =$$

$$= 0.16\delta(t)+0.32\sin(4t-\frac{\pi}{2})u(t) = 0.16\delta(t)-0.32\cos(4t)u(t)$$



נשים לב כי ההספק על הנגד תמיד חיובי, כלומר הנגד תמיד צורך הספק. לעומת זאת הסליל בחלק מהמחזור צורך הספק ובחלק מהמחזור מוסר הספק.

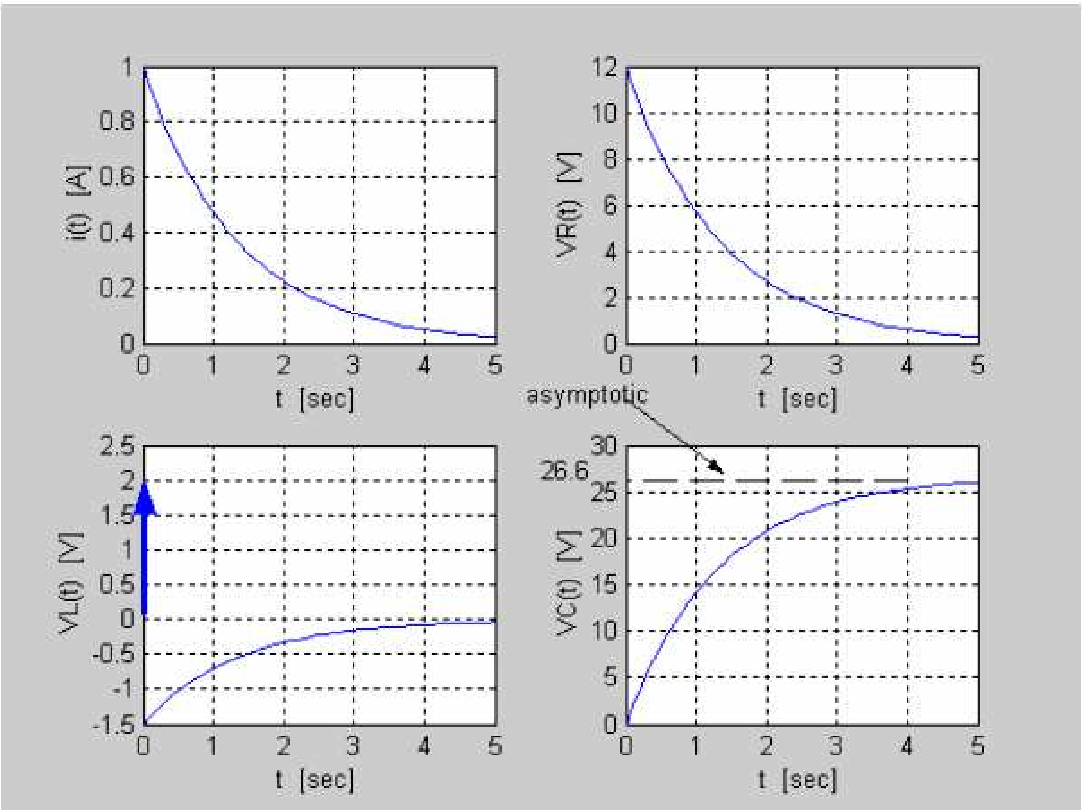
ב)

$$i(t) = e^{-3t/4}u(t)$$

$$v_R = 12e^{-3t/4}u(t)$$

$$v_L = -\frac{3}{2}e^{-3t/4}u(t)+2\delta(t)$$

$$v_C = 20\int_0^t e^{-3t'/4}dt' = \frac{80}{3}(1-e^{-3t/4})u(t)$$

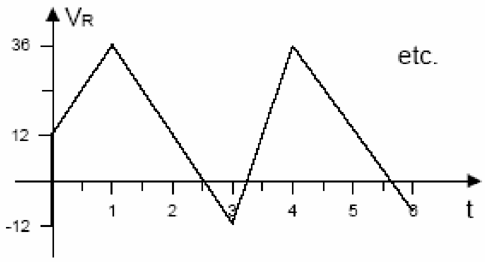


ג) נרשום את הפונקציה בצורה מתמטית:

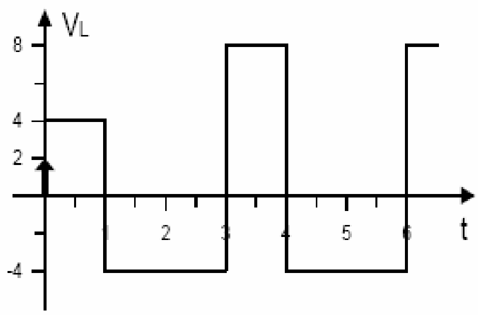
$$i(t) = u(t) + 2r(t) - 4r(t-1) + 6r(t-3) - 6r(t-4) + 6r(t-6)...$$

המתח על הנגד:

$$V_R = 12[u(t) + 2r(t) - 4r(t-1) + 6r(t-3) - 6r(t-4) + 6r(t-6)...]$$



$$V_L = 2\delta(t) + 4u(t) - 8u(t-1) + 12(t-3) - 12(t-4) + 12(t-6)...$$



$\underline{V_C(t)}$:

נחלק לפי תחומים:

$0 < t < 1$

$$i(t) = 2t + 1$$

$$V_C = 20\int_0^t (1 + 2t')dt' = 20(t' + t'^2)\Big|_0^t = 20t^2 + 20t$$

$1 < t < 3$

$$i(t) = -2t + 5$$

$$V_C = V_C(1) + 20\int_1^t -2t' + 5dt' = 40 + 20[-t^2 + 5t + 1 - 5] = -20t^2 + 100t - 40$$

$3 < t < 4$

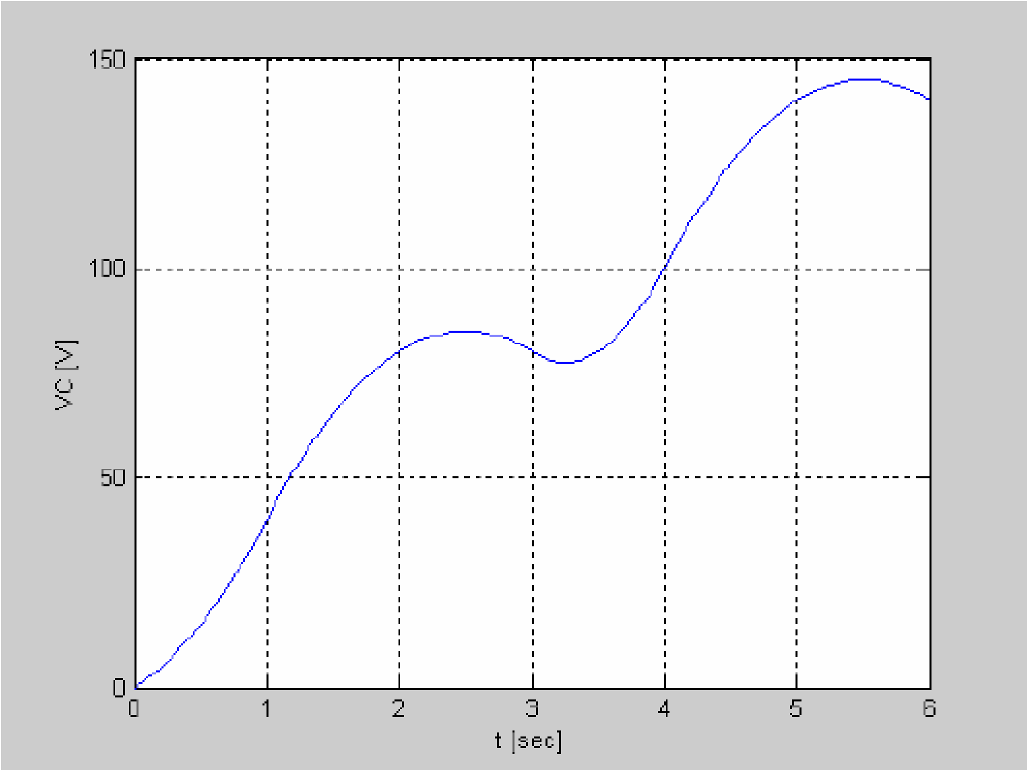
$$i(t) = 4t - 13$$

$$V_C = V_C(3) + 20\int_3^t 4t' - 13dt' = 80 + 20[2t^2 - 13t - 18 + 39] = 40t^2 - 260t + 500$$

$4 < t < 6$

$$i = -2t + 11$$

$$V_C = V_C(4) + 20\int_4^t 3 - 2(t' - 4)dt' = 100 + 20(-t^2 + 11t + 16 - 44) = -460 + 220t - 20t^2$$



נשים לב לכך, שהקבל נטען, כשהזרם חיובי ונפרק, כשהזרם שלילי.

ד)

$0 < t < 2$

$i(t) = 4A$

$V_R = 48V$

$V_L = L\dfrac{di}{dt} = 0(\text{straight line})$

$V_C(t) = 20\int_0^t i(t')dt' = 20 \cdot 4t = 80t$

$2 < t < 4$

$i = 4 - 2(t-2) = -2t + 8$

$V_R = -24t + 96$

$V_L = L\dfrac{di}{dt} = -4V$

$V_C = V_C(2) + 20\int_2^t -2t' + 8dt' = 160 + 20[-t^2 + 8t - 4 - 16] = -20t^2 + 160t - 80$

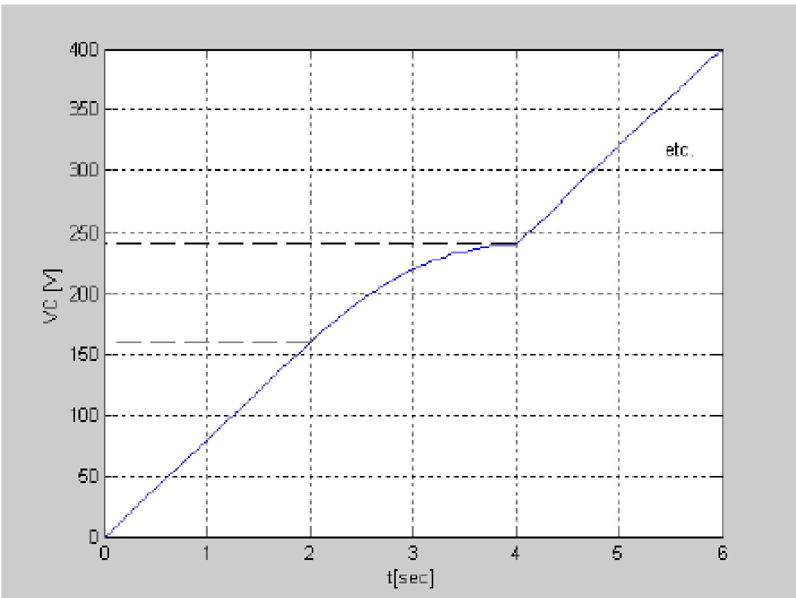
$4 < t < 6$

$i = 4A$

$V_R = 48V$

$V_L = L\dfrac{di}{dt} = 0$

$V_C = V_C(4) + 20\int_4^t 4dt' = 240 + 20[4t - 16] = 80t - 80$



6)

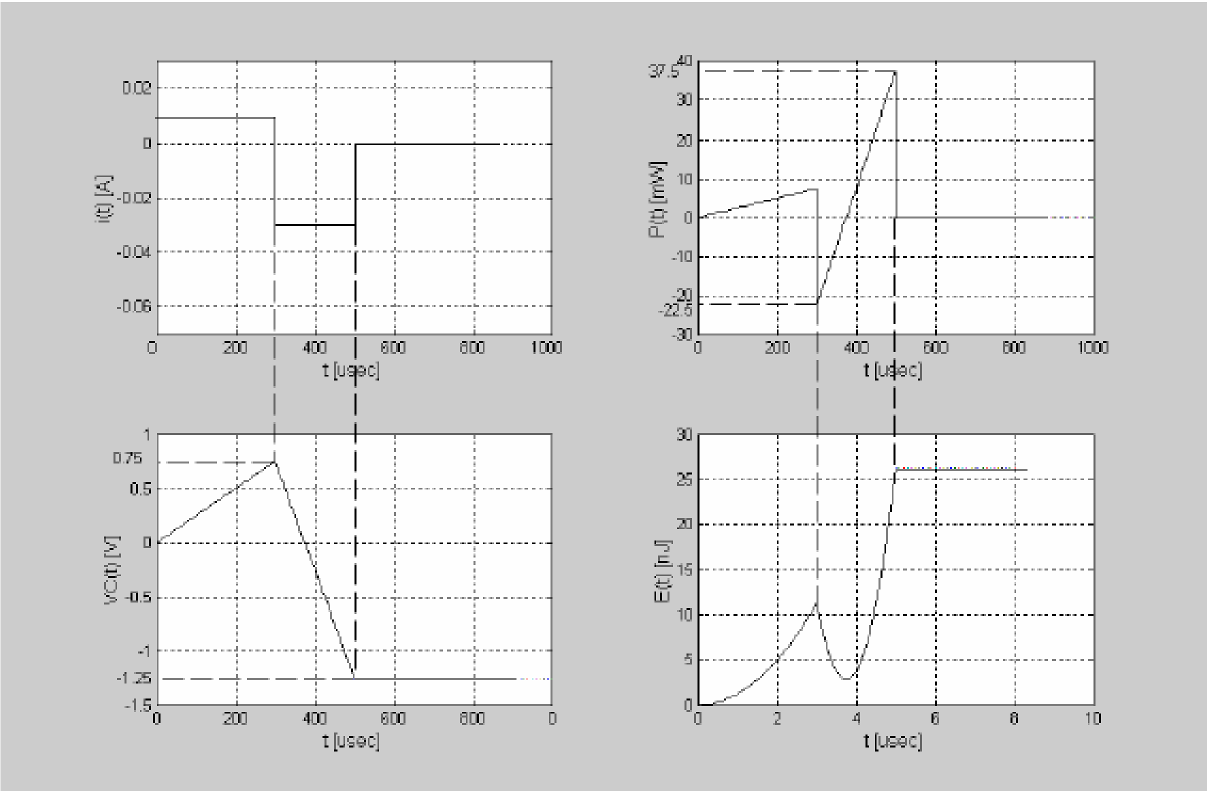
א)

$$i(t)=10^{-2}[u(t)-4u(t-300)+3u(t-500)]$$

$$Vc(t)=\frac{1}{C}\int_0^t i(t')dt'=\frac{10^{-2}}{4^{-6}}\int_0^t [u(t')-4u(t'-300)+3u(t'-500)]dt'=$$
$$2500\left(r(t)-4r(t-300)+3r(t-500)\right)$$

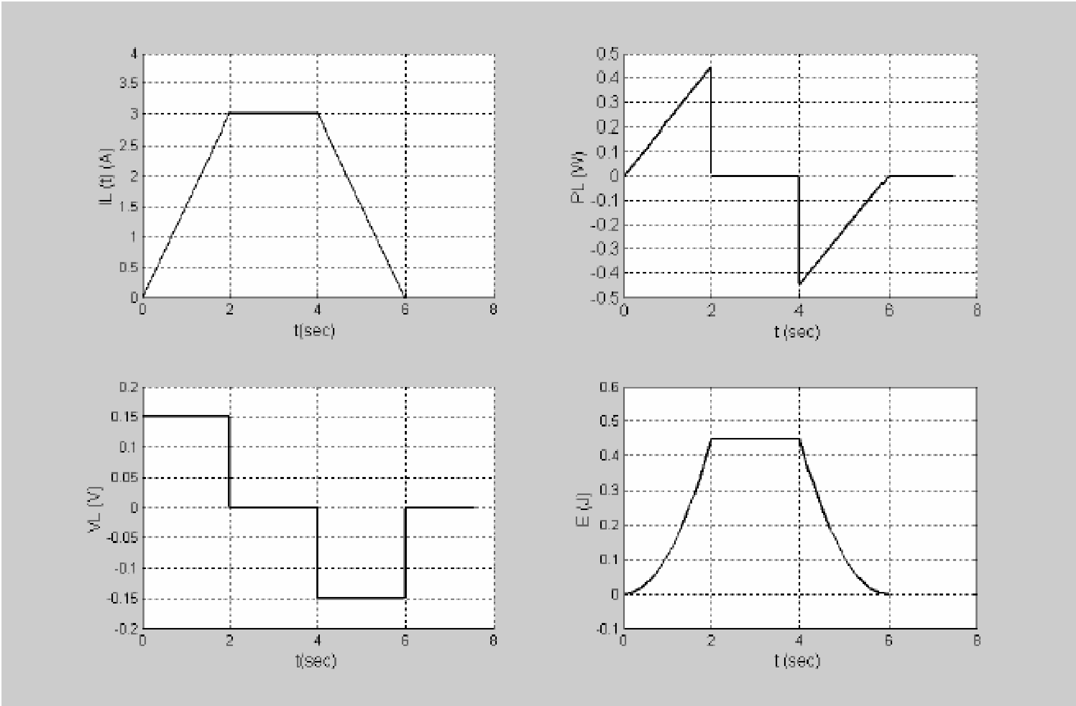
יחידות: ל-$r(t)$ **יש יחידות של** V/sec. **אבל אנו מציבים זמן ב-**μsec. **לכן עד** $t=300\ \mu sec$ **מגיעים רק עד** $0.75V$.

$$P(t) = V(t) \cdot i(t)$$
$$E(t) = \int_0^t P(t')dt'$$



ב)

$$i_L(t) = \frac{3}{2}\left[r(t) - r(t-2) - r(t-4) + r(t-6)\right]$$
$$V_L(t) = L\frac{di}{dt} = 10^{-2} \cdot \frac{3}{2}\left[u(t) - u(t-2) - u(t-4) + u(t-6)\right]$$
$$P(t) = V(t) \cdot i(t)$$
$$E(t) = \int_0^t P(t')dt'$$



IL (t) (A)
t(sec)
PL (W)
t (sec)
vL (V)
t(sec)
E (J)
t (sec)