תרגיל מס.7

13 במאי 2009

שם התלמיד	עפיף חלומה
מס' ת"ז	302323001
שם המתרגל	מר מתן פרזמה
קבוצת תרגול	
יום ג'	שעה $10:00-11:45$

טבלה 1: טבלת מידע אישי

חלק I
רציפות במידה שווה

1 שאלה 1

נתון כי f, g רציפות במידה שווה אזי:

1. לכל $0<\varepsilon_f$ קיים $\delta_f>0$ כך שעבור כל x_1, x_2 אם מתקיים $|x_1-x_2|<\delta_f$ אזי $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon_f$
2. לכל $0<\varepsilon_g$ קיים $\delta_g>0$ כך שעבור כל x_1, x_2 אם מתקיים $|x_1-x_2|<\delta_g$ אזי $|g(x_1)-g(x_2)|<\varepsilon_f$

צריך להוכיח כי עבור הפונקציה $t(x)=f(x)\cdot g(x)$ מתקיים כי לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שעבור כל x_1, x_2 אם מתקיים $|x_1-x_2|<\delta$ אזי גם $|t(x_1)-t(x_2)|<\varepsilon$ כלומר $|f(x_1)g(x_1)-f(x_2)g(x_2)|<\varepsilon$

מתכונה אחד יודעים כי אם $|x_1-x_2|<\delta_g$ אזי מתקיים $|g(x_1)-g(x_2)|<\varepsilon_g$.
כלומר $-\varepsilon_g<g(x_1)-g(x_2)<\varepsilon_g$.
כלומר מתקיים ש $g(x_1)<g(x_2)+\varepsilon_g$ ו $g(x_1)>g(x_2)-\varepsilon_g$. אזי אם נוכיח כי

$$\begin{aligned}
|f(x_1)g(x_1)-f(x_2)g(x_2)|<|f(x_1)g(x_1)-f(x_2)(g(x_1)\pm\varepsilon_g)| &< \varepsilon \\
|f(x_1)g(x_1)-f(x_2)g(x_1)\mp\varepsilon_g f(x_2)| &< \varepsilon
\end{aligned}$$

באותו דרך משתמשים בידע שלנו עבור f אזי אם $\delta<\min(\delta_g,\delta_f)$ מתקיים

$$\begin{aligned}
|f(x_1)g(x_1)-(f(x_1)\pm\varepsilon_f)g(x_1)\mp\varepsilon_g f(x_2)| &< \varepsilon \\
|f(x_1)g(x_1)-(f(x_1)\pm\varepsilon_f)g(x_1)\mp\varepsilon_g(f(x_1)\pm\varepsilon_f)| &< \varepsilon \\
|f(x_1)g(x_1)-f(x_1)g(x_1)\mp g(x_1)\varepsilon_f\mp\varepsilon_g f(x_1)| &< \varepsilon \\
|\mp g(x_1)\varepsilon_f\mp\varepsilon_g f(x_1)| &< \varepsilon
\end{aligned}$$

מכיוון כי $\varepsilon_f, \varepsilon_g$ קטנים כריצונינו תמיד אפשר לבחור אותם כך שהביטוי יהיה יותר קטן מε. משל.

2 שאלה 2

נתון כי f, g רציפות במידה שווה אזי:

1. לכל $\varepsilon_f > 0$ קיים $\delta_f > 0$ כך שעבור כל x_1, x_2 אם מתקיים $|x_1 - x_2| < \delta_f$ אזי $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon_f$
2. לכל $\varepsilon_g > 0$ קיים $\delta_g > 0$ כך שעבור כל x_1, x_2 אם מתקיים $|x_1 - x_2| < \delta_g$ אזי $|g(x_1) - g(x_2)| < \varepsilon_f$

רוצים להוכיח כי עבור כל ε קיים δ כך שאם $|x_! - x_2| < \delta$ אזי $|(g\circ f)(x_1) - (g\circ f)(x_2)| <$ ε. נתבונן בפונקציה $g(x)$ שעבורה מתקיים שאם $|x_1 - x_2| < \delta_g$ אזי $|g(x_1) - g(x_2) < \varepsilon_g|$ אזי במקרה שלנו נרצה כי $|f(x_1) - f(x_2)| < \delta_g$. מובטח לנו כי קיים δ_f כזה שמבטיח לנו את זה. משל.

3 שאלה 3

צ"ל כי קיים ε כך שלכל δ קיימים x_1, x_2 שמקיימים $|x_1 - x_2| < \delta$ גורר $|f(x_1) - f(x_2)| >$ ε

בוחרים $\varepsilon = 0.5$. נבחר $\delta = \frac{1}{n}$ כך ש $n \in \mathbb{N}$. אזי צריך למצא x_1, x_2 כך שאם $|x_1 - x_2| < \delta$ אזי $|f(x_1) - f(x_2)| > \varepsilon$.

רוצים $|x_1 - x_2| < \frac{1}{n}$ אזי נבחר $x_1 = \frac{1}{\pi/2 + 100\cdot 2\pi n}$ ו $x_2 = \frac{1}{\frac{3\pi}{2} + 100\cdot 2\pi n}$ אזי מתקבל כי $|f(x_1) - f(x_2)| = 2$. משל.

4 שאלה 4

עבור $0 \le \alpha \le 1$ כי עבור ערכים אילו הערכים של הפונקציה לא מתרחקים אחד מהשני יותר מהר מאשר הxים

לא ביקשתם הוכחה. זו היא תשובה מלאה לשאלה ששאלתם.

5 שאלה 5

חלק II
גבולות במובן הרחב

6 שאלה 1

נתן כי $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ אזי לכל m קיים $\delta > 0$ כך ש $|x - a| < \delta$ אזי $f(x) > m$.

רוצים להוכיח כי אם $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ אזי $\lim_{x\to a} g(x) = 0$.

כלומר צריך להוכיח כי עבור כל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta_0 > 0$ כך שאם $|x-a| < \delta_0$ מתקיים $|g(x) - 0| < \varepsilon$

יודעים כי יכולים לקבל m כלשהוא אם $|x-a| < \delta$ אזי נבחר $m = \frac{2}{\varepsilon}$. אזי מקבלים

$$\begin{aligned}
|g(x) - 0| &\overset{?}{<} \varepsilon \\
|g(x)| &\overset{?}{<} \varepsilon \\
\left|\frac{1}{f(x)}\right| &\overset{?}{<} \varepsilon \\
\left|\frac{1}{f(x)}\right| < \left|\frac{1}{m}\right| &\overset{?}{<} \varepsilon \\
\left|\frac{1}{\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)}\right| &\overset{?}{<} \varepsilon \\
\left|\frac{\varepsilon}{2}\right| &\overset{?}{<} \varepsilon \\
\frac{\varepsilon}{2} &\overset{\checkmark}{<} \varepsilon
\end{aligned}$$

7 שאלה 2

7.1 א

$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty, \lim_{x\to a} g(x) = -\infty$

רוצים להוכיח כי $\lim_{x\to a} f(x) \cdot g(x) = \infty$ כלומר כי לכל M קיים $\delta > 0$ כך ש $|x-a| < \delta$ גורר $f(x) \cdot g(x) > M$.

יודעים כי לכל m_1 קיים δ_1 כך שלכל $|x-a| < \delta_1$ מתקיים $f(x) < m_1$

יודעים כי לכל m_2 קיים δ_2 כך שלכל $|x-a| < \delta_2$ מתקיים $g(x) < m_2$

אזי בפרט קיימים $m_1 = m_2 = -\sqrt{M}$ אזי אם $\delta < \min(\delta_1, \delta_2)$ מתקיים כי $f(x)\, g(x) < \left(-\sqrt{M}\right)\left(-\sqrt{M}\right) \le M$

7.2 ב

נתון כי $\lim_{x\to a} f(x) = k < 0, \lim_{x\to a} g(x) = -\infty$. צריך להוכיח כי $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ כלומר צריך להוריח כי לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שאם $|x-a| < \delta$ אזי $\left|\frac{f(x)}{g(x)} - 0\right| < \varepsilon$.

יודעים כי לכל $\varepsilon_f > 0$ קיים $\delta_f > 0$ כך שאם $|x-a| < \delta_f$ אזי $|f(x) - k| < \varepsilon_f$

יודעים כי לכל m_g קיים $\delta_g > 0$ כך שאם $|x-a| < \delta_g$ אזי $f(x) < m_g$

אזי בוחרים $\varepsilon_f = \frac{k}{2}$ ו $m_g = 2k \cdot \frac{1}{\varepsilon}$. ובוחרים $\delta = \min(\delta_f, \delta_g)$ אזי מתקיים כי

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(x)}{g(x)}-0\right| &\overset{?}{<} \varepsilon\\ \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| &\overset{?}{<} \varepsilon\\ \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \le \left|\frac{1.5k}{\left(2k\cdot\frac{1}{\varepsilon}\right)}\right| &\overset{?}{<} \varepsilon\\ \left|\frac{3}{4}\varepsilon\right| &\overset{\checkmark}{<} \varepsilon\end{aligned}$$

חלק III
גזירות

8 שאלה 1

8.1 $f(x)=\sqrt[3]{x}, x_0=1$

$f(x)$ מוגדרת בסביבה של 1 אזי רוצים למצא את הגבול $f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0)-f(x_0+h)}{h}$

$$\begin{aligned}f'(1) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(1)-f(1+h)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[3]{1}-\sqrt[3]{1+h}}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1-\sqrt[3]{1+h}}{h}\end{aligned}$$

8.2 $f(x)=xD(x), x_0=0$

$f(x)$ מוגדרת בסביבה של 0 אזי רוצים למצא את הגבול $f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0)-f(x_0+h)}{h}$

$$\begin{aligned}f'(0) &= \lim_{h\to 0}\frac{0\cdot D(0)-h\cdot D(h)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{-h\cdot D(h)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}D(h)\\ &= D(0)\\ &= 1\end{aligned}$$

8.3 $f(x)=x^2D(x)\,,x_0\neq 0$

$$\begin{aligned}
f'(x_0) &= \lim_{h\to 0}\frac{x_0^2D(x_0)-(x_0+h)^2D(x_0+h)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{x_0^2D(x_0)-\left(x_0^2+2hx_0+h^2\right)D(x_0+h)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{x_0^2\left(D(x_0)-D(x_0+h)\right)}{h}-\frac{\left(2hx_0+h^2\right)D(x_0+h)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{x_0^2\left(D(x_0)-D(x_0+h)\right)}{h}-\frac{(2x_0+h)D(x_0+h)}{h}
\end{aligned}$$

חלק ראשון לא שואף לערך מסויים כי x_0+h יכול להיות גם רציונאלי וגם אי רציונאלי. אותו דבר עם הצד השני.

9 שאלה 2

9.1 א

9.2 ב

הנגזרת היא השינוי בקטע אינפיתיסימאלי. לכן ניתן לכתוב אותה בשתי הצורות הבאות:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x)-f(x+h)}{h}\\
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x-h)-f(x)}{h}
\end{aligned}$$

אזי מחברים את שתי הביויים

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{f'(x)+f'(x)}{2}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(x-h)-f(x)+f(x)-f(x+h)}{2h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(x-h)-f(x+h)}{2h}
\end{aligned}$$

10 שאלה 3

10.1 $f(x)=\lfloor x\rfloor+\lfloor -x\rfloor$

אפשר לכתוב הפונקציה הזו באופן הבא:

$$f(x)=\begin{cases}0 & x\in\mathbb{Z}\\ -1 & \text{אחרת}\end{cases}$$

אזי הנגזרת מוגדרת עבור $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$ להיות 0.

$f(x) = |x-a| + |x+a|$ **10.2**

אחרי פירוק למקרים מקבלים

$$f(x) = \begin{cases} -2x & -a > x \\ 2a & -a \le x \le a \\ 2x & x > a \end{cases}$$

מקבלים פונקציה לא גזירה ב$\pm a$ והנגזרת היא

$$f'(x) = \begin{cases} -2 & -a > x \\ 0 & -a < x < a \\ 2 & x > a \end{cases}$$

$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \in \mathbb{Q} \\ -x^2 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ **10.3**

הגבול $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ לא קיים באף נקודה חוץ מ $x=0$ כי תמיד אפשר למצא $x+h \notin \mathbb{Q}$ אם $x \in \mathbb{Q}$ ולהפך.
בנקודה $x=0$ מקבלים $f'(0)=0$ (טריוויאלי כי שתי הפונקציות יש להם אותו שיפוע בנקודה זו)

11 שאלה 4

הטענה הכונה.
$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{|x|} = 1$ פירושו

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)}{-x} &= 1 \\ \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x} &= 1 \end{aligned}$$

אם המכנה שואף לאפס והמכנה לא שואף לאפס אז הגבול של שפונקציס בנקודה זו הוא ∞. אזי הפונקציה f צריכה לקיים $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$. נניח בשלילה כי f גזירה, אזי אפשר להפעיל משפט לאופיטאל:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)}{-x} &= 1 \\ \lim_{x\to 0^-} \frac{f'(x)}{-1} &= 1 \\ \lim_{x\to 0^-} f'(0) &= -1 \end{aligned}$$

ומצד שני

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x} &= 1 \\
\lim_{x\to 0^+} \frac{f'(x)}{1} &= 1 \\
\lim_{x\to 0^+} f'(x) &= 1
\end{aligned}
$$

אזי לא קיים $f'(0)$ בסתירה להנחת השלילה שלנו.