גלים

עפיף חלומה

16 בנובמבר 2009

תוכן עניינים

פרק 1

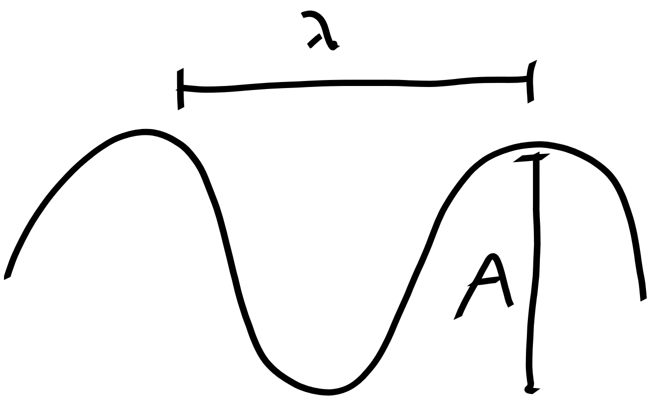
פרטים טכניים

שם מרצה: יוסי פלטיאל 0507215184 paltiel@cc.huji.ac.il
שם מתרגל: איתי 0523846183
מייל של המתרגל: itai.hayut@mail.huji.ac.il
אתר הקורס: http://physics.bgu.ac.il/~hayuti/waves

פרק 2

הרצאה מס.1

בקורס זה נדבר על גלים. יודעים כי לכל חלקיק בסיסי יש אופן של גל.



איור 2.1: גל פשוט

λ הוא אורך הגל.

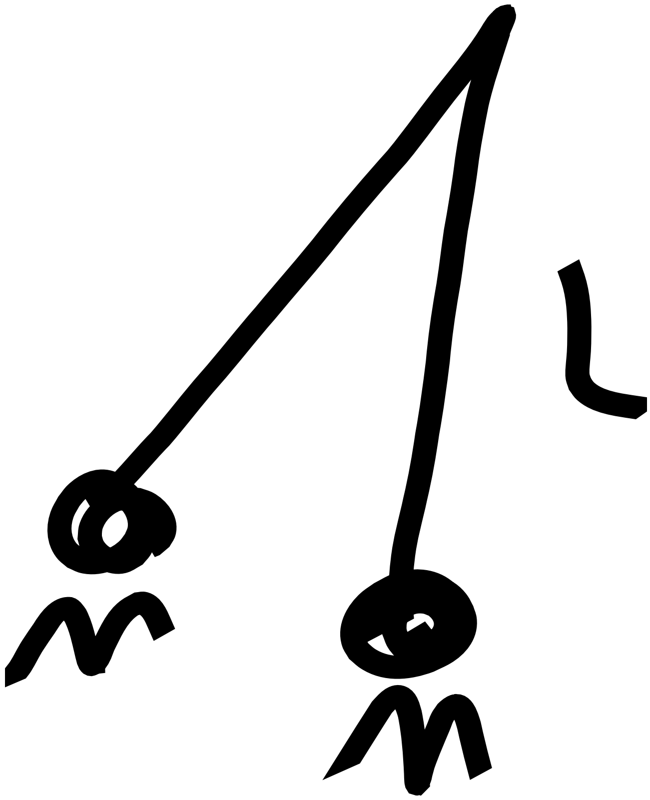
$f = \frac{1}{T}$ הוא התדירות

$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$ התירות הזוויתית

$k = \frac{2\pi}{\lambda}$ מספר הגל

$v = \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T}$ מהירות התקדמות הגל

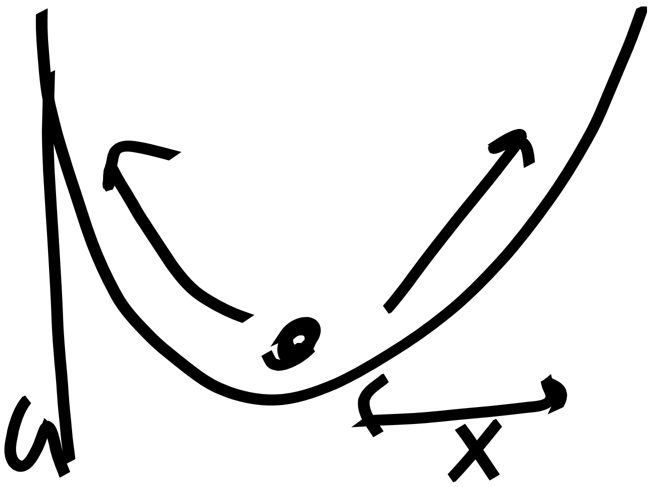
בטבע יש להו ערימות של גלים, אז מה שרוצים לדעת זה מהירות התקדמות הערימה כולה: $v_g = \frac{d\omega}{dk}$



איור 2.2: מתולטלת

דוגמה:

$$
\begin{aligned}
m\ddot{x} &= -mg\sin\theta \\
m\ddot{x} + mg\sin\theta &= 0 \\
m\underbrace{L\sin\theta}_{x\approxeq L\sin\theta} + mg\underbrace{\sin\theta}_{\sin\theta\approxeq\theta} &= 0 \\
\ddot{\theta} + \underbrace{\frac{g}{L}}_{\omega^2}\theta &= 0 \\
\theta &= A\cos\left(\omega t+\varphi\right) + B\sin\left(\omega t+\varphi\right)
\end{aligned}
$$



איור 2.3: כוח מחזיר קבוע(כמו קפיץ) $F = kx$

$$
\begin{aligned}
E &= kE + PE \\
PE &= \int_0^x kx = \frac{1}{2}kx^2 \\
E &= \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 \\
E &= 0 \\
E_k &= \frac{1}{2}ma^2\omega^2\cos(\omega t + \varphi) \\
x &= a\sin(\omega t + \varphi)
\end{aligned}
$$

משוואת אוסלטור הרמוני:

$$
\frac{d^2\psi(t)}{dt^2} = -c\psi(t)
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2\psi_1}{dt^2} &= -c\psi_1 + \alpha\psi_1^2 + \beta\psi_1^3 + \gamma\psi_1^4 + \dots \\
\frac{d^2\psi_2}{dt^2} &= -c\psi_2 + \alpha\psi_2^2 + \beta\psi_2^3 + \gamma\psi_2^4 + \dots
\end{aligned}
$$

אם $\psi = \psi_1 + \psi_2$ אזי

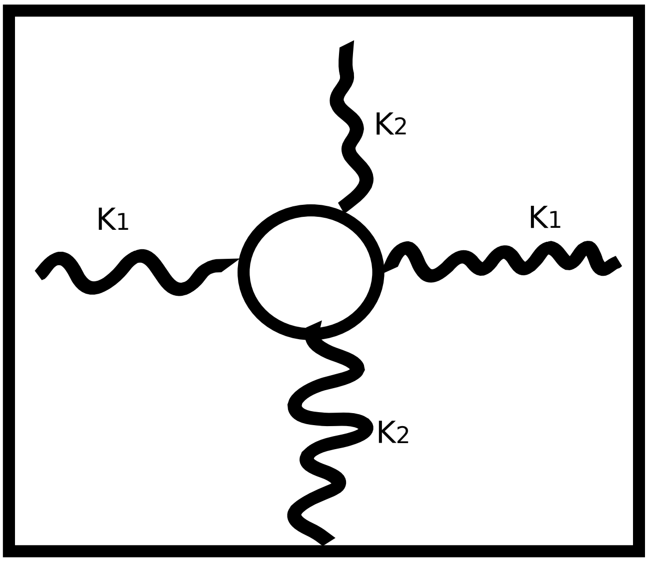
$$
\frac{d^2\psi}{dt^2} = \frac{d^2(\psi_1 + \psi_2)}{dt^2} = c(\psi_1 + \psi_2) + \alpha\left(\psi_1^2 + \psi_2^2\right) + \dots
$$

מה שזה מציר זה שבמשוואות ליניאריות חיבור פתרונות הוא כן פתרון, אבל במש-וואות לא ליניאריות זה לא מתקיים.

במשוואה ליניארית קיים עיקרון הסופרפוזיציה אם $\psi_1(t)$ פתרון ו $\psi_2(t)$ פתרון אזי גם $a\psi_1(t)+b\psi_2(t)$ גם פתרון

אם $\psi=A\sin(\omega t)+B\cos(\omega t)$ אזי אפשר לכתוב

$$
\begin{aligned}
A &= R\cos(\phi)\\
B &= R\sin(\phi)\\
R &= \sqrt{A^2+B^2}\\
\psi &= R\cos(\phi)\sin(\omega t)+R\sin(\phi)\cos(\omega t)\\
\psi &= R\cos(\omega t+\varphi)\\
\psi &= Ae^{i\omega t}+Be^{i\omega t}
\end{aligned}
$$



איור 2.4: כדור מוחזק אל יד 4 קפיצים

פרק 3

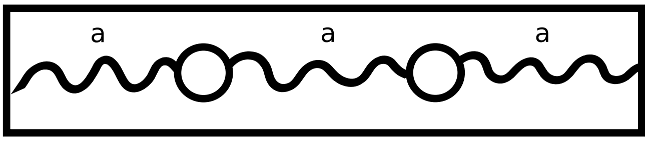
הרצאה מס.2

אם יש לנו מערכת של שתי משוואות:

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= -a_{11}x - a_{12}y \\ \ddot{y} &= -a_{21}x - a_{22}y \\ \begin{pmatrix}\ddot{x}\\ \ddot{y}\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\end{aligned}$$

מציבים $x = A\cos(\omega t + \varphi)$ ו $y = B\cos(\omega t + \varphi)$ ומקבלים שתי תדרים ω_1, ω_2 שפותרים את המערכת אזי

$$\begin{aligned}x &= A_1\cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2\cos(\omega_2 t + \varphi_2) \\ y &= B_1\cos(\omega_1 t + \varphi_3) + B_2\cos(\omega_2 t + \varphi_4)\end{aligned}$$



איור 3.1: בעיה חדשה

T_0 המתיחות ההתחלתית. x התנועה בציר y.
אם מתחילים ממצב הסימטרי ששני המסות נמצאות מעל ציר שיווי המשקל

$$m\ddot{x} = T_0\sin\theta \approxeq T_0\frac{x}{a}$$

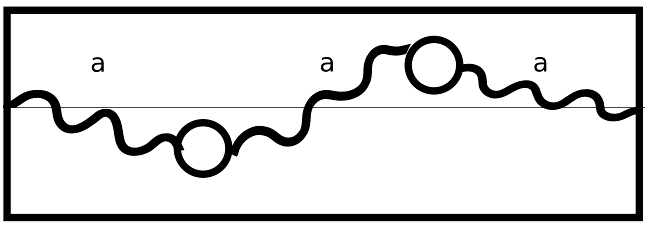
$$
\begin{aligned}
L^2 &= x^2 + a^2 \\
&= x^2\left(1+\frac{x^2}{a^2}\right) \\
L &= \sqrt{x^2\left(1+\frac{x^2}{a^2}\right)} \\
&= x^2\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}} \\
&\approx a\left(1+\frac{1}{2}\frac{x^2}{a^2}\right) \\
&\approx a
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F &= T\cdot\frac{x}{L} \\
T &= T_0\cdot\frac{L}{a} \\
F &\approx T_0\frac{x}{a}
\end{aligned}
$$

אזי לפי חוק ניוטון:

$$
\begin{aligned}
M\ddot{x} &= -T_0\frac{x}{a} \\
M\ddot{x} + T_0\frac{x}{a} &= 0 \\
\ddot{x} + \underbrace{\frac{T_0}{aM}}_{\omega^2}x &= 0
\end{aligned}
$$

אם מתחילים במצב האנטי סמטרי, כלומר אחד מהכדורים נמצא למעלה ואחד למתה



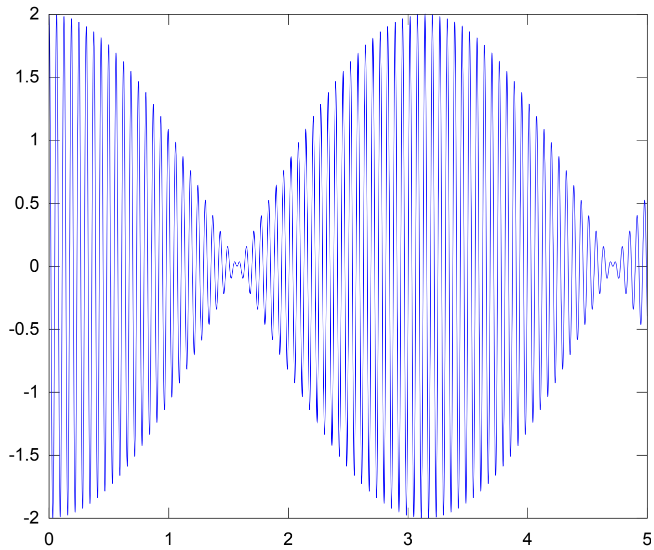
איור 3.2: מצב אנטי סימטרי

אז הקפיץ בין שניהם יהיה מתוח פי שניים מהקפיצים בצדדים אז מקבלים

$$\begin{aligned}
F_1 &= -T_0\frac{x}{a} \\
F_2 &= -T_0\frac{2x}{a} \\
F_t &= F_1+F_2=-T_0\frac{3x}{a} \\
\omega^2 &= \frac{3T_0}{Ma}
\end{aligned}$$

3.1 חיבור תדרים

$$\begin{aligned}
\psi_1 &= A\cos\omega_1 t \\
\psi_2 &= A\cos\omega_2 t \\
\psi_1+\psi_2 &= A\left(\cos\left(\omega_1 t\right)+\cos\left(\omega_2 t\right)\right) \\
&= 2A\left(\cos\left[\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)t\right]\cdot\cos\left[\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}\right)t\right]\right)
\end{aligned}$$



איור 3.3: שתי גלים מחוברים $\cos\left(100t\right)+\cos\left(102t\right)$

3.2 נחזור לתנודות

$$\begin{aligned}
\frac{x}{A} &= \sin\left(\omega t\right)\cos\phi_1+\cos\left(\omega t\right)\sin\phi_1 \\
\frac{y}{B} &= \sin\left(\omega t\right)\cos\phi_2+\cos\left(\omega t\right)\sin\phi_2
\end{aligned}$$

אחרי להכפיל המששואה הראשונה ב $\sin\phi_1$ והמשוואה השניה ב $\sin\phi_2$

$$\left(\frac{x}{A}\right)^2 + \left(\frac{y}{B}\right)^2 - \frac{2xy}{AB}\cos\left(\phi_1 - \phi_2\right) = \sin^2\left(\phi_2 - \phi_1\right)$$

נניח שהפרש הפזה הוא ${}^{\pi}/_{2}$ אזי

$$\left(\frac{x}{A}\right)^2 + \left(\frac{y}{B}\right)^2 = 1$$

כלומר זה ינוע בכיוון מעגלי

פרק 4

תרגול מס.1

4.1 טורי פוריה

כל פונקציה חלקה מספיק[1] קיים לה טור פוריה כלומר טור של פונקציות מחזוריות כמו $\sin, \cos$. פונקציה בעלת מחזוריות של $2L$ או שמוגדרת ב $[-L, L]$ אפשר לייצג באופן הבא:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right] \\ a_0 &= \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x)\, dx \\ a_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \\ b_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \end{aligned}$$

למשל הפונק' HeavySide:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & L > x \geq 0 \\ 0 & 0 > x \geq -L \end{cases}$$

נמצא את המקדמים:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{L} \int_{0}^{L} dx = L \\ a_n &= \frac{1}{L} \int_{0}^{L} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{\sin(n\pi)}{n\pi} = 0 \\ b_n &= \frac{1}{L} \int_{0}^{L} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{\cos(n\pi)}{n\pi} = \frac{1}{n\pi}\left((-1)^n - 1\right) \\ &= \begin{cases} \frac{-2}{n\pi} & n \text{ is odd} \\ 0 & n \text{ is even} \end{cases} \end{aligned}$$

[1] בדרך כלל זה אומר שהפונקציה אינטגרבילית.

לכן

$$f(x)=\frac{1}{2}+\sum_{n=1,3,5..}^{\infty}\frac{-2}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

ברור כי לא נשתמש באינסוף איברים, אבל מספר האיברים הוא רמת הדיוק

4.2 הקבוע e

$$\begin{aligned}
e^{ikx} &= \cos(kx)+i\sin(kx)\\
\cos(kx) &= \frac{e^{ikx}+e^{-ikx}}{2}\\
\sin(kx) &= \frac{e^{ikx}-e^{-ikx}}{2i}
\end{aligned}$$

4.3 כתיבת טור פוריה באמצעות e

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{\frac{in\pi x}{L}}\\
c_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\,e^{-\frac{in\pi x}{L}}
\end{aligned}$$

לנוחיות נגדיר $k_n=\frac{\pi n}{L}$ אזי $f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{ik_n x}$
$c_n\rightarrow\mathcal{F}(k)$

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{\infty}^{\infty}\mathcal{F}(k)\,e^{ikx}dk\\
\mathcal{F}(x) &= \int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,e^{-ikx}
\end{aligned}$$

את $\mathcal{F}(x)$ נקרא טרנספורם פורייה, את $f(x)$ נקרא טרנספורם פורייה הפוך.
כתיב אחר לזה הוא:

$$\mathcal{F}(k)\rightarrow\sqrt{2\pi}\mathcal{F}(k)$$

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\infty}^{\infty}\mathcal{F}(k)\,e^{ikx}dk\\
\mathcal{F}(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,e^{-ikx}dx
\end{aligned}$$

אפשר גם להגיע לטרנספורם פורריה דרך טוכ פורייה על ידי השאפת $L \to \infty$

דוגמה: לחשב התמרת פורייה של $f\left(x\right)=\cos\left(k_0 x\right)$. בפונקציה זו יש תדרות אחת שזו k_0 אז זה מה שנקבל.

$$\begin{aligned}
f\left(x\right) &= \frac{e^{ik_0x}+e^{-ik_0x}}{2}\\
\mathcal{F}\left(k\right) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{ik_0x}+e^{-ik_0x}\right)e^{-ikx}dx\\
\mathcal{F}\left(k\right) &= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\left[\int_{-\infty}^{\infty}e^{i(k_0-k)x}dx+\int_{\infty}^{\infty}e^{-i(k+k_0)x}dx\right]
\end{aligned}$$

נסמן $I=\int_{-\infty}^{\infty}e^{ia}$ אזי אם $a=0$ מקבלים $I=\infty$
אם $a\neq 0$

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{\infty}e^{iax}dx+\int_0^{\infty}e^{-iax}dx\\
&= \frac{e^{iax}}{ia}|_0^{\infty}-\frac{e^{-iax}}{ia}|_0^{\infty}
\end{aligned}$$

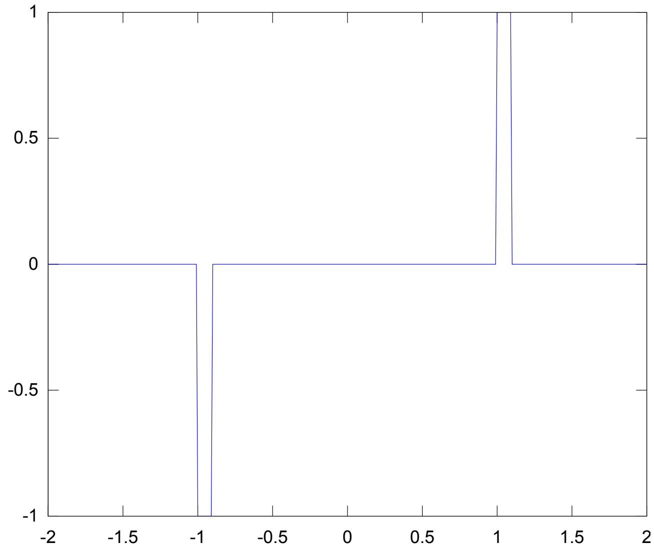
$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^{iax}}{ia}=\lim_{x\to\infty}\frac{d}{da}\frac{\overbrace{e^{iax}}^{\text{חסום}}}{ix}\cdot\frac{1}{ia}=0$$

אזי

$$I=\begin{cases}\infty & a=0\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}=\delta\left(a\right)$$

נחזור לאינטגרל שלנו:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\left(k\right) &= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\left[\int_{-\infty}^{\infty}e^{i(k_0-k)x}dx+\int_{\infty}^{\infty}e^{-i(k+k_0)x}dx\right]\\
&= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\left[\delta\left(k-k_0\right)+\delta\left(k+k_0\right)\right]
\end{aligned}$$



איור 4.1: $\mathcal{F}\left(k\right)$

טרנספורם פורייה הוא טרנספורמציה ליניארית, אזי מתקיימים כל חוקי הטרנס-פורם הליניארי.

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\left(\alpha f_{1}\left(x\right)+\beta f_{2}\left(x\right)\right) &= \alpha\mathcal{F}\left(f_{1}\left(x\right)\right)+\beta\mathcal{F}\left(f_{2}\left(x\right)\right)\\
\mathcal{F}\left(e^{-ik_{0}x}f\left(x\right)\right)\left(k\right) &= \mathcal{F}\left(f\left(x\right)\right)\left(k+k_{0}\right)\\
\mathcal{F}\left(\frac{d}{dx}f\left(x\right)\right)\left(k\right) &= ik\mathcal{F}\left(f\left(x\right)\right)
\end{aligned}$$

4.3.1 משפט פרסבל Parseval

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty}\left|f\left(t\right)\right|^{2}dt &= \int_{-\infty}^{\infty}\left|\mathcal{F}\left(\omega\right)\right|^{2}d\omega\\
\int_{-\infty}^{\infty}\left|f\left(x\right)\right|^{2}dx &= \int_{-\infty}^{\infty}\left|\mathcal{F}\left(k\right)\right|^{2}dk
\end{aligned}$$

4.3.2 קונבולוציה

$$\left(f*g\right)\left(t\right)=\int_{-\infty}^{\infty}f\left(t-t\right)g\left(t\right)$$

4.3.3 משפט הקונבולוציה

$$\mathcal{F}\left(f*g\right)=\sqrt{2\pi}\mathcal{F}\left(f\right)\cdot\mathcal{F}\left(g\right)$$

אם $h=\cos\left(k_0x\right)$ ו $g=e^{-ax^2}$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\left(g\right) &= G\left(k\right)=\frac{1}{\sqrt{2a}}e^{-\frac{k^2}{4a}}\\
\mathcal{F}\left(h\right) &= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\left[\delta\left(k-k_0\right)-\delta\left(k+k_0\right)\right]\\
\mathcal{F}\left(h*g\right) &= \sqrt{2\pi}\mathcal{F}\left(h\right)\mathcal{F}\left(g\right)\\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2a}}\left[e^{-\frac{k^2}{4a}}\delta\left(k-k_0\right)-e^{-\frac{k^2}{4a}}\delta\left(k+k_0\right)\right]\\
&= \begin{cases}\frac{1}{2\sqrt{2a}}e^{-\frac{k_0^2}{4a}} & k=k_0\\ -\frac{1}{2\sqrt{2a}}e^{-\frac{k_0^2}{4a}} & k=-k_o\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}
\end{aligned}$$

4.4 העברה בין משתנים דרך טרנספורם פורייה

$$\begin{array}{ccc}
\overbrace{x}^{\text{מיקום}} & \rightarrow & \overbrace{k}^{\text{תנע}}\\
\overbrace{t}^{\text{זמן}} & \rightarrow & \overbrace{\omega}^{\text{תדירות}}
\end{array}$$

פרק 5

הרצאה מס.4

5.1 משוואת הגלים

5.1.1 מערכת עם הרבה דרגות חופש

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 r}{\partial t^2} &= \hat{a}\vec{r} \\
\vec{r} &= \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix} \\
\hat{a} &= \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

אם יש n חלקיקים תלויים בקפיצים, והם ינועו רק בכיוון אחד אזי מקבלים:

$$m\frac{\partial^2 y_n}{dt^2} = K\left(y_{n+1} - y_n\right) - K\left(y_n - y_{n+1}\right)$$

ננחש פתרון:

$$\begin{aligned}
y_n &= Ae^{i(ky-\omega t)} \\
k &= \frac{2\pi}{\lambda} \\
\omega &= \frac{2\pi}{T}
\end{aligned}$$

נציב את הניחוש במשוואה ונראה מה נקבל:

$$
\begin{aligned}
m\ddot{y}_n(t) &= -K\left(2y_n - y_{n+1} - y_{n-1}\right) \\
-m\omega^2 y_n &= -K\left(y_n - y_{n+1} - y_{n-1}\right) \\
\omega^2 &= \frac{K}{m}\left(2 - e^{ika} - e^{-ika}\right) \\
\omega^2 &= \frac{K}{m}\left(2 - 2\cos(ka)\right) \\
\omega^2 &= \frac{4K}{m}\left(\frac{ka}{2}\right)
\end{aligned}
$$

לזה קוראים דיספירזיה

פרק 6

הרצאה מס.?

בשיעור הקודם קיבלנו:

$$\omega^2 = \frac{4k}{m}\sin^2\left(\frac{ka}{2}\right)$$

אזי ראינו כי

$$y'' = \frac{1}{v^2}\ddot{y}$$

ננחש פתרון:

$$y = A\cos\left(\omega t + ky\right)$$

אזי מקבלים:

$$\begin{aligned} k^2 &= \frac{1}{v^2}\omega^2 \\ v &= \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T} \end{aligned}$$

מציגים גל כמשוואה:

$$\psi\left(x,y,z,t\right) = \psi_x\left(x,y,z,t\right)\hat{x} + \psi_y\left(x,y,z,t\right)\hat{y} + \psi_z\left(x,y,z,t\right)\hat{z}$$

נניח שמניחים גיתרה בכיוון $\hat{z}$ אזי:

$$\psi\left(z,t\right) = \psi_x\left(z,t\right)\hat{x} + \psi_y\left(z,t\right)\hat{y} + \psi_z\left(z,t\right)\hat{z}$$

הנחות:

1. נזניח את התנודות האורכיות - מיתר קשיח.
2. נבחר קיטוב ליניארי בכיוון $\hat{x}$

אזי הכח על חלקיק בגל הוא:

$$F_x = T_2 \sin(\theta_2) - T_1 \sin(\theta_1)$$

אחרי כל מיני אלגברה וקירובים מקבלים:

$$\frac{\partial^2 \psi(z,t)}{\partial t^2} = \frac{T_0}{\rho_0} \cdot \frac{\partial^2 \psi(z,t)}{\partial z}$$

איזה משפחה של פונקציות פותרת לנו משוואת הגלים הזו?

$$\psi(z,t) = A(z) \cos(\omega t + \varphi)$$

מציבים ומקבלים

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 A(z)}{\partial z^2} &= -\omega^2 \frac{1}{v^2} A(z) \\ \frac{\partial^2 A(z)}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{v^2} A(z) &= 0 \end{aligned}$$

וזה פורס את מרחב התנודות.

$$A(z) = B \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} z\right) + D \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} z\right)$$

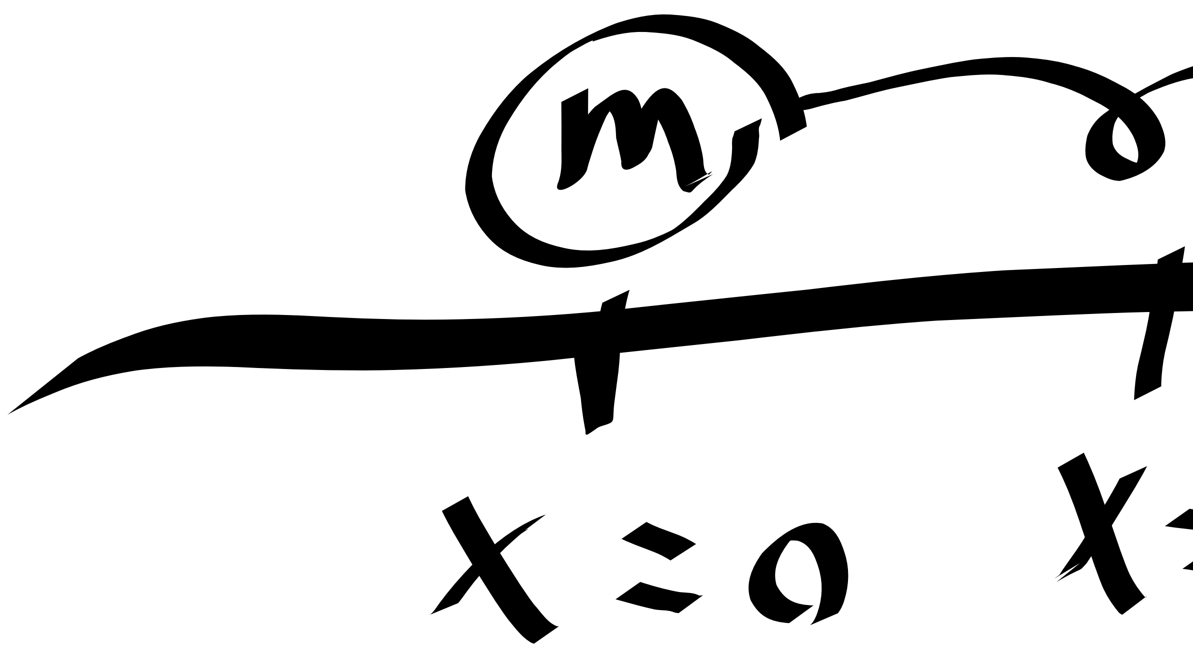
אזי מקבלים:

$$\psi(z,t) = A \cos(\omega t + kz + \varphi)$$

פרק 7

תרגול מה.?

מותכים מסה על קפיץ עד ל $x = x_0$ ועוזבים אותה ממנוחה



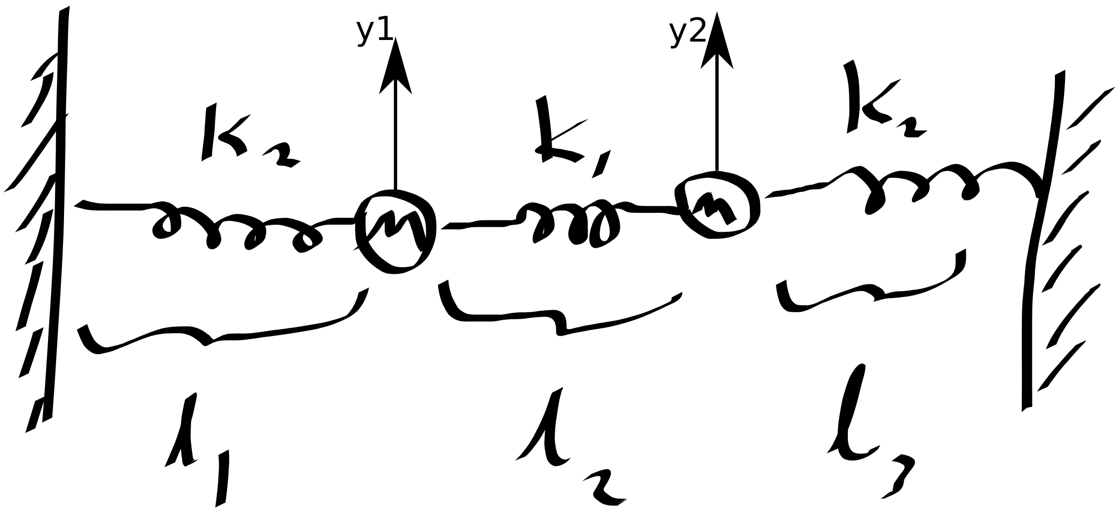
איור 7.1: בעיה פשוטה

$$\begin{aligned}
F &= ma\\
-kx &= ma\\
m\ddot{x} &= -kx\\
x\left(t\right) &= Ae^{i\omega t}+Be^{-i\omega t}\\
&= Ae^{i\left(\omega t+\varphi\right)}
\end{aligned}$$

תנאי ההתחלה שלנו היה כי $x\left(0\right)=x_0$ ו כי $\dot{x}\left(0\right)=0$ אזי נציב ונקבל

$$\begin{aligned}
A+B &= x_0\\
i\omega A-i\omega B &= 0\\
A=b &= \frac{x}{2}
\end{aligned}$$

בעיה יותר קשה:



איור 7.2: שתי מסות עם שלושה קפיצים

נניח כי $\theta \ll 1$ אזי $F \approxeq F_x$ ו כי $c \approxeq l_1$

$$\begin{aligned}
F_x &= -k_2 l_1\\
F_y &\approxeq -\underbrace{k_2 l_1}_{F}\underbrace{\frac{y_1}{l_1}}_{\sin\theta}\\
&= k_2 y_1
\end{aligned}$$

אם עושים אותו תהליך עם הקפיץ הימני על המסה השמאלית מקבלים:

$$F_2 = -k_1\left(y_1 - y_2\right)$$

לכן אם עושים התהליך על שתי המסות מקבלים

$$\begin{aligned} M\ddot{y}_1 &= -k_2 y_1 - k_1\left(y_1 - y_2\right) \\ M\ddot{y}_2 &= -k_2 y_2 - k_1\left(y_2 - y_1\right) \end{aligned}$$

רואים כי יש קשר בין שתי המשוואות. אזי נרשום המשוואות בצורה הבאה:

$$\begin{aligned} \ddot{y}_1 &= \frac{k_1}{M} y_2 - \frac{k_1 + k_2}{M} y_1 \\ \ddot{y}_2 &= \frac{k_1}{M} y_1 - \frac{k_1 + k_2}{M} y_2 \end{aligned}$$

אזי נרשום בצורה מטריציונית:

$$\begin{pmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{k_1+k_2}{M} & \frac{k_1}{M} \\ \frac{k_1}{M} & -\frac{k_1+k_2}{M} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

נלכסן את המטריצה:

$$\begin{aligned} \left(A - I\lambda\right)\vec{v} &= 0 \\ \det\left|A - I\lambda\right| &= 0 \\ \begin{vmatrix} -\frac{k_1+k_2}{M} & \frac{k_1}{M} \\ \frac{k_1}{M} & -\frac{k_1+k_2}{M} \end{vmatrix} &= 0 \\ \left(\frac{k_1 + k_2}{M} + \lambda\right)^2 - \left(\frac{k_1}{M}\right)^2 &= 0 \\ \lambda_1 &= \frac{-k_2}{M} \\ \lambda_2 &= -\frac{2k_1 + k_2}{M} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{v} &= (a, b) \\ \begin{pmatrix} -\frac{k_1+k_2}{M} - \lambda & \frac{k_1}{M} \\ \frac{k_1}{M} & -\frac{k_1+k_2}{M} - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} &= 0 \end{aligned}$$

עבור $\lambda = \lambda_1$ אזי $a = b$ ומקבלים $\bar{v}_1 = (1, 1)$
עבור $\lambda = \lambda_2$ אזי $a = -b$ ומקבלים $\vec{v}_2 = (1, -1)$
יודעים כי הווקטורים העצמיים הם העמודות של מטריצת המעבר:

$$\begin{aligned} S^{-1}AS &= \tilde{A} \\ S &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ Sy &= SAy \\ S\ddot{y} &= SAS^{-1}Sy \\ S\ddot{y} &= \tilde{A}Sy \\ \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \\ z_1 &= y_1 + y_2 \\ z_2 &= y_1 - y_2 \end{aligned}$$

כלומר קיבלנו משוואות $\ddot{z}_1 = -\tilde{\lambda}_1 z_1, \ddot{z}_2 = -\tilde{\lambda}_2 z_2$

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{z}} &= \tilde{A}\vec{z} \\ &= -\begin{pmatrix} \tilde{\lambda}_1 & 0 \\ 0 & \tilde{\lambda}_2 \end{pmatrix}\vec{z} \\ z_1 &= A_1 e^{i\sqrt{\tilde{\lambda}_1}\cdot t} + B_1 e^{-i\sqrt{\tilde{\lambda}_1}\cdot t} \\ z_2 &= A_2 e^{i\sqrt{\tilde{\lambda}_1}\cdot t} + B_2 e^{-i\sqrt{\tilde{\lambda}_1}\cdot t} \end{aligned}$$

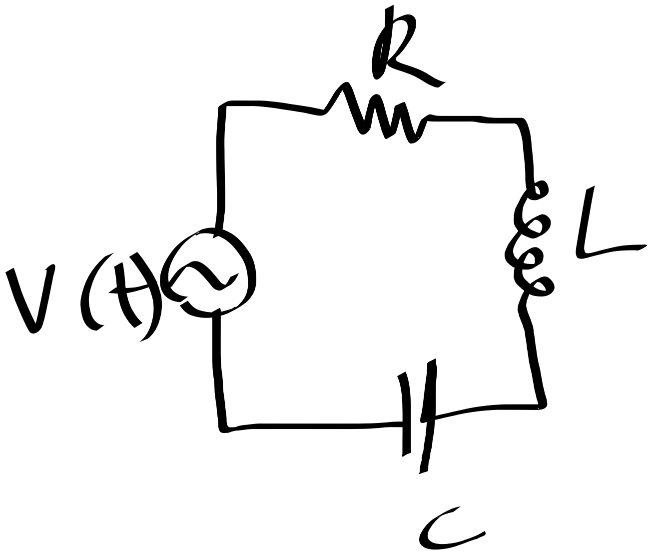
חוזרים למשוואה המקורית

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{z_1 + z_2}{2} \\ y_2 &= \frac{z_1 - z_2}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \pm\sqrt{\tilde{\lambda}_1} &= \pm\omega_1 = \pm\sqrt{\frac{k_2}{M}} \\ \pm\sqrt{\tilde{\lambda}_2} &= \pm\omega_2 = \pm\sqrt{\frac{2k_1 + k_2}{M}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{1}{2}\left[\left(A_1 e^{i\omega_1 t} + B_1 e^{-i\omega_1 t}\right) + \left(A_2 e^{i\omega_2 t} + B_2 e^{-i\omega_2 t}\right)\right] \\ y_2 &= \frac{1}{2}\left[(\dots) - (\dots)\right] \end{aligned}$$

7.1 הקשר בין זה למעגלים חשמליים



איור 7.3: מעגל RLC

$$\begin{aligned}
v(t) &= \frac{q}{c} + RI + L\dot{I} \\
\dot{v} &= \frac{I}{c} + R\dot{I} + L\ddot{I}
\end{aligned}$$

מנחשים פתרון:

$$I(t) = I_0 e^{i(\omega t+\varphi)}$$

מציבים:

$$\begin{aligned}
i\omega v(t) &= \frac{I(t)}{L} + i\omega RI(t) - \omega^2 LI(t) \\
I(t) &= \frac{i\omega V(t)}{\frac{1}{L} - \omega^2 L + i\omega R} \\
I_0 e^{i(\omega t+\varphi)} &= \frac{i\omega}{\frac{1}{L} - \omega^2 L + i\omega R} V_0 e^{i\omega t} \\
|I_0| &= \frac{\omega V_0}{\sqrt{\left(\frac{1}{L} - \omega^2 L\right)^2 + \omega^2 R^2}}
\end{aligned}$$

נגיר $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ אזי

$$|I_0| = \frac{\frac{\omega}{L} V_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2) + \frac{R^2}{L^2}\omega^2}}$$

מקפלים פעמון ממורכז ב ω_0.

פרק 8

הרצאה מס.?

בפעם שעברה קיבלנו:

$$\psi\left(z,t\right)=\cos\left(\omega t+\varphi\right)\left[A\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}z\right)+B\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}z\right)\right]$$

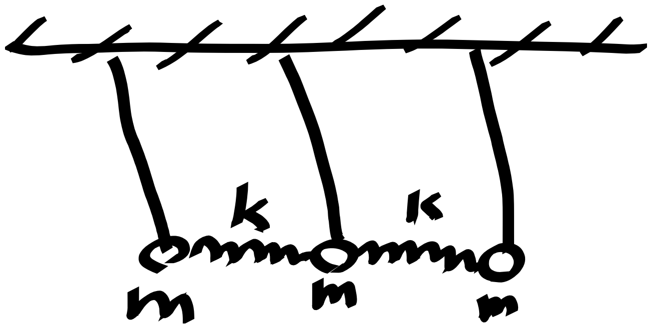
$$\begin{aligned}\frac{\partial^{2}A\left(z\right)}{\partial z^{2}}+\frac{\omega^{2}}{v^{2}}A\left(z\right) &= 0\\ \omega &= \frac{2\pi}{T}\\ v &= \frac{\omega}{k}\\ k &= \frac{2\pi}{\lambda}\end{aligned}$$

אזי אם נציב במשוואה הראשונה:

$$\frac{\partial^{2}A}{\partial z^{2}}+k^{2}A=0$$

8.1 מומנטים מצומדות

אינסוף מטוטלות מחוברות בקפיצים



איור 8.1: אינסוף מטוטלות

נניח לרגע כי $g=0$ אזי מפתרון בעיות קודמות מקבלים:

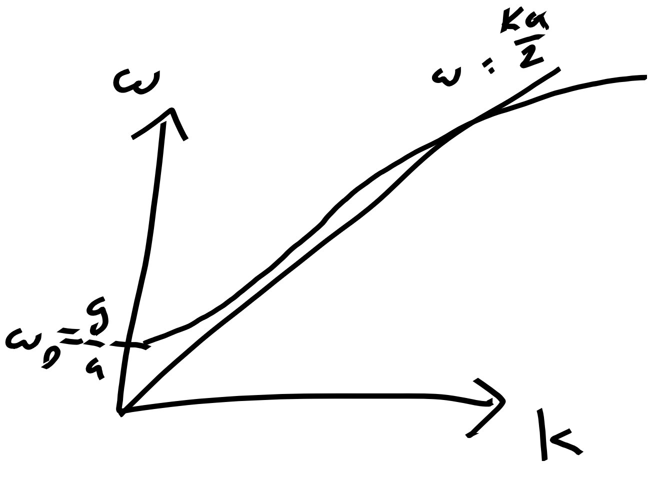
$$\omega^2 = 4\frac{K}{m}\sin^2\left(\frac{ka}{2}\right)$$

את זה קיבלנו ממשואה הזו:

$$\frac{\partial^2\psi_n}{\partial t} = -\frac{g}{k}\psi_n + \frac{K}{m}\left(\frac{\psi_{n+1}-\psi_n}{a}\right) - \frac{K}{m}\left(\frac{\psi_n-\psi_{n-1}}{a}\right)$$

אם נחזיר את g כלומר יש מתיחות בחוט אזי:

$$\omega^2 = \frac{g}{e} + \frac{4K}{m}\sin^2\left(\frac{ka}{2}\right)$$



איור 8.2: $\omega\left(k\right)$

8.2 פלסמה

אם מניעים פלסמה בסדה חשמלי קבוע(למשל בקבל)

$$\begin{aligned}
\omega^2(k) &= \omega_p^2 + c^2k^2 \\
E_x &= -4\pi\frac{Q}{A} \\
m_e\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} &= eE
\end{aligned}$$

N צפיפות אלקטרונים

$$\begin{aligned}
Q &= NAex \\
x &= \frac{Q}{NAe} \\
m_e\frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} &= -4\pi Ne^2 Q
\end{aligned}$$

8.3 אוסצילטור מאולץ

$$\begin{aligned}
m\ddot{x} + r\dot{x} + sx &= F_0 e^{i\omega t} \\
x &= e^{\frac{rt}{2m}} e^{i\left(\frac{s}{m} - \frac{r^2}{4m^2}\right)^{\frac{1}{2}} t} \\
x &= Ae^{i\omega t} \\
-m\omega^2 + r\omega + s &= 0
\end{aligned}$$

ננחש פתרון:

$$\begin{aligned}
x &= Ae^{i\omega t} \\
\dot{x} &= i\omega Ae^{i\omega t} = i\omega x \\
\ddot{x} &= -\omega^2 Ae^{i\omega t} = -\omega^2 x
\end{aligned}$$

נציב ונקבל:

$$\begin{aligned}
A &= \frac{F_0}{i\omega r + (S - \omega^2 m)} \\
&= \frac{-iF_0}{\omega\left(r + i\left(\omega m - \frac{s}{\omega}\right)\right)} \\
x &= \frac{-iF_0 e^{i\omega t}}{\omega\left(r + i\left(\omega m - \frac{s}{\omega}\right)\right)} \\
&= \frac{iF_0 e^{i\omega t - \phi}}{\omega z_m} \\
z_m &= \left[r^2 + \left(\omega m - \frac{S}{\omega}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

דוגמה:

$$\begin{aligned}
m\ddot{x} m\Gamma\dot{x} + m\omega_0^2 x &= F_0 \cos\omega t \\
A(t) &= \frac{-iF_0}{\omega r - i\left(S + \omega^2 m\right)} \\
&= \frac{-iF_0}{m\Gamma\omega + im\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)} \\
&= \frac{iF_0}{m} \frac{\left[-\Gamma\omega + i\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)\right]}{\Gamma^2\omega^2 + \left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2} \\
A_{al} &= \frac{F_0}{m} \frac{\Gamma\omega}{\Gamma^2\omega^2 + \left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2} \\
A_{el} &= \frac{-F_0}{m} \frac{\omega_0 - \omega^2}{\Gamma^2\omega^2 + \left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2}
\end{aligned}$$

פרק 9

תרגול מס.?

9.1 משוואת הגלים

$$\frac{\partial^2 \psi(x,y)}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \psi(x,y)}{\partial x^2}$$

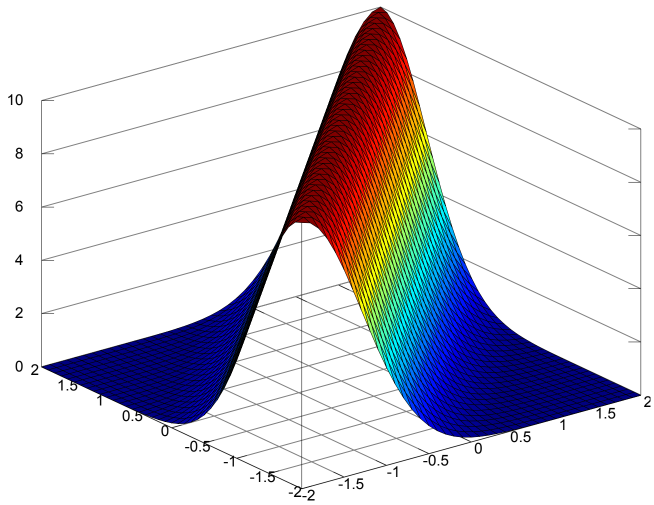
רוצים להוכיח שכל פונקציה מהצורה $z = x \pm vt$ פותר את המשוואה הזו.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \psi(z)}{\partial t} &= \frac{\partial \psi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t} = \pm \frac{\partial \psi}{\partial z} \\
\frac{\partial^2 \psi(z)}{\partial t^2} &= v^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \\
\frac{\partial \psi}{\partial x} &= \frac{\partial \psi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial z}
\end{aligned}$$

נציב ונקבל

$$v^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = v^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}$$

נניח כי $\psi = y = A^{-(x-vt)^2}$(גאוסיאן) וננים כי $v = 1^{m}/_{sec}$:



איור 9.1: גל בצורת גאוסיאן

נניח שאפשר להפריד את $\psi(x,t)$:

$$\begin{aligned}
\psi(x,t) &= A(x)T(t) \\
\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} &= v^2\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} \\
A\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} &= v^2 T\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} \\
\frac{1}{A}\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} &= \frac{1}{v^2 T}\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} \Rightarrow = const
\end{aligned}$$

רוצים

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} &= -k^2 A \\
A &\sim e^{ikx}
\end{aligned}$$

אבל $T\sim e^{\pm i\omega t}$ אזי

$$\psi(x,y)\sim e^{i(kx\pm\omega t)}$$

פרק 10

הרצאה מס.?

$$
\begin{aligned}
-\infty < z < 0: \frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2} &= \frac{T_0}{\rho_1}\frac{\partial^2 y_1}{\partial z^2} \\
0 < z < \infty: \frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2} &= \frac{T_0}{\rho_2}\frac{\partial^2 y}{\partial z}
\end{aligned}
$$

אזי יש שתי פתרונות:

$$
\begin{aligned}
-\infty < z < 0: y_1(z,t) &= A_1 \cos(k_1 z - \omega t) \\
0 < z < \infty: y_!(z,t) &= A_2 \cos(k_2 z - \omega t)
\end{aligned}
$$

ודורשים רציפות של y_1 ועוד רציפות ב $\frac{\partial y_1}{\partial z}$
אז אפ נפתור את מערכת המשוואות נקבל כי $A_1 = A_2, k_1 = k_2$ שזה מתקיים רק אם $\rho_1 = \rho_2$ וזה לא מה שרצינו. אזי חסר לנו משהו

$$
\begin{aligned}
-\infty < z < 0: y_1(z,t) &= A_1 \cos(\omega t - k_1 z) + B_1 \cos(\omega t + k_1 z + \varphi_1) \\
0 < z < \infty: y(z,t) &= A_2 \cos(\omega t - k_2 z + \varphi_2)
\end{aligned}
$$

שזה גל שמתקדם בכיוון ההפוך

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2} &= \frac{T_0}{\rho_1}\frac{\partial^2 y_1}{\partial z^2} \\
\frac{T_0}{\rho} &= v^2 \\
k &= \frac{2\pi}{\lambda}
\end{aligned}
$$

אזי רוצים לראות אם הניחוש הזה עובד:

$$
\begin{aligned}
z<0: \frac{\partial y_1}{\partial z} &= -\left[-k_1 A_1\left(\sin \omega t-k_1 z\right)+k_1 B_1 \sin \left(\omega t+k_1 z+\varphi\right)\right] \\
z>0: \frac{\partial y_1}{\partial z} &= -\left[-k_2 A_2 \sin \left(\omega t-k_2 z+\varphi\right)\right]
\end{aligned}
$$

משווים עבור $z=0$:

$$
\begin{aligned}
A_2 \cos \left(\omega t+\varphi_2\right) &= A_1 \cos (\omega t)+B_1 \cos (\omega t+\varphi) \\
-A_2 k_2 \sin \left(\omega t+\varphi_2\right) &= -k_1 A_1 \sin (\omega t)+k_1 B_1 \sin \left(\omega t+\varphi_1\right)
\end{aligned}
$$

מקבלים:

$$
\begin{aligned}
\varphi_2 &= 0 \\
\varphi_1 &= \pi \\
A_1-B_1 &= A_1 \\
-k_1 A_1-k_1 B_1 &= -A_2 k_2 \\
B_1 &= \frac{k_2-k_1}{k_1+k_2} A_1
\end{aligned}
$$

נכתוב את הביטוי האחרון בצורות שונות(זהות):

$$
\begin{aligned}
B_1 &= \frac{\frac{\omega}{v_2}-\frac{\omega}{v_1}}{\frac{\omega}{v_2}-\frac{\omega}{v_1}} A_1=\frac{v_1-v_2}{v_1+v_2} A_1 \\
B_1 &= \frac{\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho_1}}-\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho_2}}}{\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho_1}}+\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho_2}}} A_1 \\
B_1 &= A_1 \frac{\sqrt{\tau_0 \rho_2}-\sqrt{\tau_0 \rho_1}}{\sqrt{\tau_0 \rho_2}+\sqrt{\tau_0 \rho_1}}=\frac{z_2-z_1}{z_2+z_1} A_1
\end{aligned}
$$

נגדיר החזרה R להיות

$$
\begin{aligned}
R &= \frac{B_1}{A_1} \\
&= \frac{k_2-k_1}{k_2+k_1} \\
&= \frac{\sqrt{\tau_0 \rho_2}-\sqrt{\tau_0 \rho_1}}{\sqrt{\tau_0 \rho_2+\tau_0 \rho_1}} \\
&= \frac{z_2-z_1}{z_2+z}
\end{aligned}
$$

נגדיר העברה:

$$
\begin{aligned}
T &= \frac{A_2}{A_1} \\
&= \frac{2k_1}{k_2 + k_1} \\
&= \frac{2z_1}{z_2 + z_1}
\end{aligned}
$$

$$A_1 - B_1 = A_2 \Rightarrow T + R = 1$$

פרק 11

הרצאה מס.?

$$
\begin{aligned}
T+R &= 1 \\
T &= \frac{A_2}{A_1}=\frac{2z_1}{z_1+z_2} \\
R &= \frac{B_1}{A_1}=\frac{z_2-z_1}{z_1+z_2}
\end{aligned}
$$

מה קורה באור?

$$
\begin{aligned}
k &= \frac{2\pi}{\lambda} \\
\lambda &= \frac{c}{n\nu}
\end{aligned}
$$

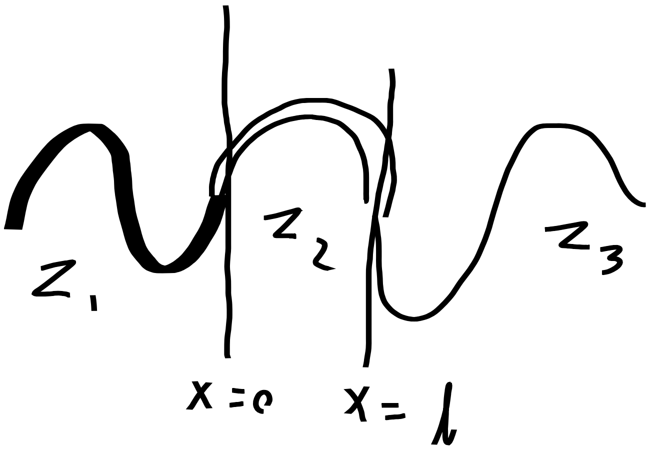
כאשר n הוא מקדם השבירה, ν הוא תדירות. $k\sim n$

$$
\begin{aligned}
R &= \frac{n_2-n_1}{n_1+n_2} \\
T &= \frac{2n_1}{n_1+n_2}
\end{aligned}
$$

כאשר $n_1=1$ ו $n_2=1.5$ אזי $R=\frac{1}{5}$ כלומר איבדנו $\left(\frac{1}{5}\right)^2=4\%$ מהאנרגיה כאשר הגל עבר מn_1 ל n_2, אם n_2 זה חלון, אזי מאבדים עוד פעם 4% כאשר הגל אוזר לאוויר

11.1 אנרגיה

$$
\begin{aligned}
E\cdot\nu &= \frac{1}{2}\rho\omega^2A^2\nu=\frac{1}{2}z\omega^2A^2 \\
Energy\,(R) &\sim \frac{B_1}{A_1}=\frac{(z_1-z_2)^2}{(z_1+z_2)^2} \\
Energy\,(T) &\sim \frac{4z_1z_2}{(z_1+z_2)^2}
\end{aligned}
$$



איור 11.1: גל עובר בין שתי חומרים דרך חומר מתאים

לכל קטע מותאמים $\rho_1\nu_1,\rho_2\nu_2,\rho_3\nu_3$ וגלי אור: $y_1=A_1e^{i(\omega t-k_1x)},y_2=A_2e^{i(\omega t-k_2x)},y_3=$ $A_3e^{i(\omega t-k_3x)}$ ושתי גלים מוחזרים $y_r=B_1e^{i(\omega t+k_1x)},y_r=B_2e^{i(\omega t+k_2x)}$

רוצים שהאנרגיה שעוברת תהיה 100% אזי $T=\frac{z_3A_3^2}{z_1A_1^2}=1$

יש שתי נקודות שבהם דורשים רציפות של מקום ושל נגזרת: $x=0,x=l$

עבור $x=0$:

$$\begin{aligned} A_1+B_1 &= A_2+B_2 \\ z_1\left(A_1-B_1\right) &= z_2\left(A_2-B_2\right) \end{aligned}$$

עבור $x=l$

$$A_2e^{-k_2l}+B_2e^{ik_2l}=A_3$$

$$z_2\left(A_2e^{-ik_2l}-B_2e^{-ik_2l}\right)=z_3A_3$$

פותרים(לבד בבית) ומוצאים כי:

$$\left(\frac{A_3}{A_1}\right)^2=\frac{4r_{13}^2}{\left(r_{13}+1\right)^2\cos^2\left(k_2l\right)+\left(r_{12}+r_{23}\right)^2\sin^2\left(k_2l\right)}$$

11.2 גלים עומדים

אם יש גל שנע בין שתי משטחים קשיחים אחד ב $x=0$ והשני $x=l$

$$
\begin{aligned}
y &= ae^{i(\omega t-kx)}+be^{i(\omega tkx)} \\
|a| &= |b|
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
0 &= ae^{i\omega t}+be^{i\omega t} \\
a &= -b
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y &= ae^{i\omega t}\left(e^{-ikx}+^{ikx}\right) \\
&= -2iae^{i\omega t}\sin\left(kx\right)
\end{aligned}
$$

11.3 חבורות

$$
\begin{aligned}
y &= A\cos\omega_1 t+A\cos\omega_2 t \\
&= 2A\cos\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t\right)\cos\left(\frac{\omega 1-\omega 2}{2}t\right)
\end{aligned}
$$