תרגיל מס.1

עפיף חלומה 302323001

11 באפריל 2010

1 שאלה 1

1.1 א

נתון כי $f_1 \dots f_n$ תלויים ליניארית, לכן קיימים $a_1 \dots a_n$ כך ש $\sum_{i=1}^{n} a_i f_i = 0$, לכן בהכרח מתקיים

$$\begin{aligned} f_n &= -\sum_{i=1}^{n-1} \frac{a_i}{a_n} f_i \\ f'_n &= -\sum_{i=1}^{n-1} \frac{a_i}{a_n} f'_i \\ \vdots & \quad \vdots \quad \vdots \\ f_n^{(n)} &= -\sum_{i=1}^{n-1} \frac{a_i}{a_n} f_i^{(n)} \end{aligned}$$

לכן ה Wronskian הוא

$$W(f_1 \dots f_n) = \begin{vmatrix} f_1 & \dots & f_{n-1} & -\sum_{i=1}^{n-1} \frac{a_i}{a_n} f_i \\ f'_1 & \ddots & f'_{n-1} & -\sum_{i=1}^{n-1} \frac{a_i}{a_n} f'_i \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ f_1^{(n)} & \dots & f_{n-1}^{(n)} & -\sum_{i=1}^{n-1} \frac{a_i}{a_n} f_i^{(n)} \end{vmatrix}$$

הוכחנו בקורס אלגברה ליניארית שאם עמודה מסויימת היא קומבינציה ליניארית של העמודות האחרות הדיטירמיננטה שווה לאפס. רואים שעמודה ה n היא קומבינציה ליניארית של שאר העמודות. אם v_i היא העמודה הi בדיטרמיננטה אזי $v_n = -\sum_{i=1}^{n-1} \frac{a_i}{a_n} v_i$. לכן $W(f_1 \dots f_n) = 0$

1.2 ב

$$\begin{aligned} f_1 &= x^3 \\ f_2 &= \left|x^3\right| \\ f_1' &= 3x^2 \\ f_2' &= \begin{cases} 3x^2 & x \geq 0 \\ -3x^2 & x < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

אזי הורנסקיאן הוא

$$\begin{aligned} W\left(f_1, f_2\right) &= \begin{vmatrix} f_1 & f_2 \\ f_1' & f_2' \end{vmatrix} \\ x \geq 0: W\left(f_1, f_2\right) &= \begin{vmatrix} x^3 & x^3 \\ 3x^3 & 3x^2 \end{vmatrix} = 0 \\ x < 0: W\left(f_1, f_2\right) &= \begin{vmatrix} x^3 & -x^3 \\ 3x^3 & -3x^2 \end{vmatrix} = 0 \\ \forall t: W\left(f_1, f_2\right) &= 0 \end{aligned}$$

אבל $x^3, \left|x^3\right|$ בלתי תלויות ליניראיות(קל לראות שאין פרמטרים α_1, α_2 שמאפסים $a_1 x^3 + \alpha_2 \left|x^3\right|$ לכל x)

1.3 ג

$$\begin{aligned} W\left(e^{\lambda_1 t} \ldots e^{\lambda_n t}\right) &= \begin{matrix} e^{\lambda_1 t} & \ldots & e^{\lambda_n t} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^n e^{\lambda_1 t} & \ldots & \lambda_n^n e^{\lambda_n t} \end{matrix} \\ W\left(e^{\lambda_1 t} \ldots e^{\lambda_n t}\right)(t=0) &= \begin{matrix} 1 & \ldots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^n & \ldots & \lambda_n^n \end{matrix} \\ &= \prod_{i \neq j} \left(\lambda_i - \lambda_j\right) \end{aligned}$$

יודעים שלא קיים $\lambda_i = \lambda_j$ עבור $i \neq j$, לכן הורונסקיאן לא מתאפס באפס, לכן הוא לא מתאפס בכל התחום. אם הורנסקיאן לא מתאפס בכל התחום אז הפונקציות בלתי תלויות ליניארית.

1.4 ד

נניח בשלילה כי $\left\{t^i e^{\lambda t}\right\}_{i=0}^n$ הם פונקציות תלויות ליניארית, אזי קיימים $\alpha_0 \ldots \alpha_n$ לא כולם אפס כך ש

$$
\begin{aligned}
a_0e^{\lambda t}+a_1te^{\lambda t}+\dots+a_nt^ne^{\lambda t} &= 0\\
e^{\lambda t}\left(a_0+a_1t+\dots+a_nt^n\right) &= 0\\
a_0+a_1t+\dots+a_nt^n &= 0
\end{aligned}
$$

אבל הפונקציות $1,t,t^2\dots t^n$ הם בלתי תלויות ליניארית, לכן זה מתקיים רק עבור $\forall i:\alpha_i=0$, בסתירה לזה ש $\left\{t^ie^{\lambda t}\right\}_{i=0}^n$ תלויות ליניארית.

2 שאלה 2

2.1 א

$$
\begin{aligned}
y(t) &= c\cdot e^{(\sigma+i\omega)t}+\overline{c}e^{(\sigma-i\omega)t}\\
&= e^{\sigma t}\left(c\cdot e^{i\omega t}+\overline{c}e^{-i\omega t}\right)\\
&= e^{\sigma t}\left((a+ib)e^{i\omega t}+(a-ib)e^{-i\omega t}\right)\\
&= e^{\sigma t}\left(ae^{i\omega t}+ibe^{i\omega t}+ae^{-i\omega t}-ibe^{-i\omega t}\right)\\
&= e^{\sigma t}\begin{pmatrix}a(\cos(\omega t)+i\sin(\omega t))+ib(\cos(\omega t)+i\sin(\omega t))+\\ +a(\cos(\omega t)-i\sin(\omega t))-ib(\cos(\omega t)-i\sin(\omega t))\end{pmatrix}\\
&= e^{\sigma t}\left(2a\cos(\omega t)-2b\sin(\omega t)\right)
\end{aligned}
$$

יודעים כי עבור כל קבועים α_1,α_2 קיימים קבועים r,φ כך ש $a_1\cos(\omega t)+a_2\sin(\omega t)=r\cos(\omega t+\varphi)$. אזי

$$
\begin{aligned}
y(t) &= e^{\sigma t}\left(\underbrace{(2a)}_{\alpha_1}\cos(\omega t)+\underbrace{(-2b)}_{\alpha_2}\sin(\omega t)\right)\\
&= e^{\sigma t}\cdot 2r\cdot\cos(\omega t+\varphi)
\end{aligned}
$$

2.2 ב

$$
\begin{aligned}
y(t) &= e^{\sigma t}2r\cos(\omega t+\theta)\\
&= e^{\sigma t}\left(2r\left[\cos(\omega t)\cos(\theta)-\sin(\omega t)\sin(\theta)\right]\right)\\
&= e^{\sigma t}\left(\underbrace{(2r\cos(\theta))}_{a}\cos\left(\underbrace{\omega t}_{\phi(t)}\right)+\underbrace{2r(-\sin(\theta))}_{b}\sin\left(\underbrace{\omega t}_{\phi(t)}\right)\right)
\end{aligned}
$$

3 שאלה 3

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 y}{\partial t}+4\frac{\partial y}{\partial t}+4y &= 0\\
r^2+4r+4 &= 0\\
(r+2)^2 &= 0\\
r_1 &= -2\\
r_2 &= -2
\end{aligned}$$

לכן הפתרון הוא:

$$y(t)=Ae^{-2t}+Bte^{-2t}$$

מציבים תנאי התחלה

$$\begin{aligned}
y(t=0) &= 3\\
Ae^{-2\cdot 0}+B\cdot 0\cdot e^{-2\cdot 0} &= 3\\
A &= 3\\
\frac{\partial y}{\partial t}_{t=0} &= -4\\
-2Ae^{-2\cdot 0}+Be^{-2\cdot 0}-2Be^{-2\cdot 0}\cdot 0 &= -4\\
-2A+B &= -4\\
B &= 2A-4\\
B &= 2
\end{aligned}$$

4 שאלה 4

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+5\frac{\partial y}{\partial t}+6y=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+7\frac{\partial u}{\partial t}+11u$$

נפתור ZIR:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+5\frac{\partial y}{\partial t}+6y &= 0\\
r^2+5r+6 &= 0\\
r_1 &= -3\\
r_2 &= -2
\end{aligned}$$

לכן פתרון

$$y = Ae^{-3t} + Be^{-2t}$$

נפתור ZSR:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + 5\frac{\partial y}{\partial t} + 6y = \delta(t)$$

זה שקול לפתור את ZIR בתנאי התחלה $y(0) = 0, y'(0) = 1$

$$\begin{aligned} A + B &= 0 \\ -3A - 2B &= 1 \\ A &= -1 \\ B &= 1 \end{aligned}$$

כלומר התגובה ל δ היא $y(t) = e^{-2t} - e^{-3t}$ ולכן התגובה ל $\delta''(t) + \delta'(t) + 11\delta(t)$ היא

$$\begin{aligned} y(t) &= \begin{array}{c} 11\left(e^{-2t} - e^{-3t}\right)u(t) + 7\left(-2e^{-2t} + 3e^{-3t}\right)u(t) + \\ +7\delta(t)\left(e^{-3t} - e^{-3t}\right) + \left(3e^{-2t} - 9e^{-3t}\right)u(t) + \\ +\delta(t)\left(-2e^{-2t} + e^{-3t} - 2e^{-2t} + 3e^{-3t}\right) + \delta'(t)\left(e^{-2t} - e^{-3t}\right) \end{array} \\ &= \left(e^{-3t} + e^{-2t}\right)u(t) + \delta(t)\cdot 2 \end{aligned}$$