מתמטיקה שימושית

עפיף חלומה

16 בנובמבר 2009

תוכן עניינים

פרק 1

תרגול מס.1

שעות קבלה: כנדה עליון

1.1 פולינומים

פולינום הוא:

$$f\left(x\right)=a_{n}x^{n}+a_{n-1}+x^{n-1}+\cdots+a_{2}x^{2}+a_{1}x+a_{0}$$

דרגה של פולינום מוגדרת כn הגדול ביותר כך ש a_n לא אפס.
דוגמה:

$$f\left(x\right)=5x^{2}+3x-8$$

זה פולינום מדרגה 2 לכן כותבים $\deg f=2$
אם המקדמים שלימים והדרגה היא אי זוגית אז יש פתרון מצורה $\frac{k}{l}$ כך ש $\frac{k}{a_n}$ ו $\frac{l}{a_0}$
קיבלנו את המשואה

$$\begin{aligned}f\left(x\right) & = & \left(x+3\right)\left(x+5\right)\left(2x-1\right)\\ & = & 2\left(x+3\right)\left(x+5\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)\end{aligned}$$

רואים את השורשים בקלות.
דוגמה אחרת:

$$f\left(x\right)=x^{4}-3x^{2}-4$$

משתמשים בשיטת ההצבה $x^2=t$ לכן

$$\begin{aligned}f\left(x\right) & = & x^{4}-3x^{2}-4\\ & = & t^{2}-3t-4\end{aligned}$$

זה כל לפתור:

$$\begin{aligned} f(x) &= (t-4)(t+1) \\ &= \left(x^2-4\right)\left(x^2+1\right) \\ &= (x+2)(x-2)\left(x^2+1\right) \end{aligned}$$

אם מצטרכים עוד שאלות פתורות תפנו למתרגל.

1.2 טריגינומטריה

$$t = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\cos^2 x} &= 1+\tan^2 x \\ \frac{1}{\cos^2 \frac{\theta}{2}} &= 1+\tan^2 \frac{\theta}{2} \\ \cos^2 \frac{\theta}{2} &= \frac{1}{1+t^2} \\ \cos \frac{\theta}{2} &= \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \end{aligned}$$

זהות אחרת

$$\begin{aligned} \cos^2\theta + \sin^2\theta &= 1 \\ \sin^2 \frac{\theta}{2} &= 1-\cos\frac{\theta}{2} \\ &= 1-\frac{1}{1+t^2} \\ \sin\frac{\theta}{2} &= \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin(2x) &= 2\sin(x)\cos(x) \\ \sin\theta &= 2\frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \\ &= \text{something missing here. fill in} \end{aligned}$$

זיהויות זיהויות זיהויות:

$$t = \tan\theta$$

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$$

$$\sin\theta = \frac{t}{\sqrt{q+t^2}}$$

זה הוא

1.3 גל סינוס כללי

$$\underbrace{A}_{Amplitude} \sin\left(\underbrace{\omega}_{Frequency} t + \underbrace{\phi}_{Phase}\right)$$

כל פונקציה מצורה $a\sin(\omega t) + b\sin(wt)$ אפשר להעביר לצורה שהזכרנו.
דוגמה:

$$3\sin(\omega t) + 4\cos(\omega t)$$

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{a^2+b^2} \\ &= \sqrt{3^2+4^2} \\ &= 5 \end{aligned}$$

$$= 5\left(\frac{3}{5}\sin(\omega t) + \frac{4}{5}\cos(\omega t)\right)$$

עשינו את זה כי $\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1$ כלומר נמצאת ϕ כך ש $\cos\phi = \frac{3}{5}$ ו $\sin\phi = \frac{4}{5}$

$$5\left(\cos\phi\sin(\omega t) + \sin\phi\cos(\omega t)\right)$$

משתמשים בזהות $\cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha+\beta)$ וזה יעבור איכשהוא לצורה $\sin(\omega t + \phi)$

1.4 קבוצות

$$\{5,4,3,1\} \qquad \{\text{monky, duck, cow}\}$$

אין קשר לסדר לכן $\{4,2,3\} = \{2,3,4\}$
קבוצה ריקה נרשמת $\emptyset = \{\}$
אם A קבוצה אז $x \in A$ פירושה כי x הוא איבר ב A. נאמר $x \notin A$ אם x אינו איבר ב A
קבוצות מוגדרות מראש:

- $\emptyset$ - קבוצה ריקה
- $\mathbb{N}$ - אוסף המספרים הטבעיים $\{1,2,3,4\dots\}$
- $\mathbb{Z}$ - אוסף המספרים השלמים $\{\dots-2,-1,0,1,2\dots\}$
- $\mathbb{Q}$ - אוסף המספרים הרציונלים $\{\frac{m}{n}|m\in\mathbb{Z},n\in\mathbb{N}\}$
- $\mathbb{R}$- אוסף המספרים הממשיים(כמעט כל המספרים שמכירים, מכילה דברים כמו π וe)

הגדרה: נאמר כי $A\subset B$ אם כל איבר ב A נמצא בB
$A\cap B$ הוא החיתוך בין שתי הקבוצות(כל האיברים הנמצאים בשתי הקבוצות)
$A\cup B$ הוא האיחוד בין שני הקבוצות(כל האיברים שנמצאים לפחות באחת הקבוצות)
$A\setminus B$ הוא כל האיברים ב A שלא נמצא בB

1.5 פונקציות הפיכות

פונקציה היא משהוא שאם $x=y$ אז $f(x)=f(y)$. כלומר אי אפשר שיהיה יותר מערך אחד לפונקציה באותו מקום.

פונקציה היא חד חד ערכית אם מתקיים ש$f(x)=f(y)$ אז בהכרח $x=y$.

תחום וטווח: $f:A\to B$ נאמר שf על אם לכל איבר בB יש מקור בA. כלומר אם $y\in B$ אז קיים $x\in A$ כך ש $f(x)=y$. הערה: אפשר תמיד להגדיר פונקציה להיות על אם משנים את יטווח.

1.6 כפל וסכם מקוצר

$$\sum_{i=1}^{10} i=1+2+3+4+5+6+7+8+9+10$$

$$\prod_{i=1}^{10} i=1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10$$

פשוט לא?

1.7 דיטירמיננטה

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=a\cdot d-b\cdot c$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=a_1\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}-a_2\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix}+a_3\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

דוגמה:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \end{vmatrix}=3\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}-1\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}+4\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$$

תכונות של דיטרמיננטה:

- אם מחליפים שתי שורות או שתי עמודות אז הדיטמיננטה משנה סימן(מוכפלת ב-1).
- אם שורה או עמודה היא אפס אז הדירמיננטה אפס.
- אם שורה היא כפולה של שורה אחרת(או עמודה של עמודה) אז הדיטרמיננטה היא אפס.

פרק 2

הרצאה מס.1

2.1 נקודות

נלמד עכשיו על גיאומטריה ב $\mathbb{R}^n$, רשית יש לנו ווקטורים. כדי להגדיר ווקור צריכים להכדיר נקודה n מימדית.

$$R^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad x_i \in \mathbb{R}^n, i \in \{1, 2, 3 \dots n\} \right\}$$

למשל נקודה תלת מימדית נראת כמו $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

סוף סוף נגיע לווקטןרים: תהי $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ ו $P = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ וקטור בין שני הנקודות הוא $\vec{p} = P - O = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

כמה סימונים פשוטים:
נקודות: $A, B, P, Q \dots$
מרחק בין שני נקודות: AB
שני קווים מקביליים: $AB \parallel CD$
שני קווים מאונכים זה לזה: $AB \perp CD$
האורך ב$\mathbb{R}^n$ בין שתי נקודות הוא $AB = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + \cdots + (a_n - b_n)^2}$

2.2 וקטורים ב$\mathbb{R}^n$

וקטור זה דבר בעל אורך וקיון. אם יודעים את שתי הקצוות של וקטור אז מקירים את הווקטיר. לכן קיים וקטור $\vec{AB}$. וכל מה הגדרנו על חצים עובד גם בוקטורים.

לכל וקטור $\vec{AB}$קיימת נקודה P כך ש $\vec{OP}=\vec{AB}$ לכן אומרים ש $\vec{OP}$. נסמן כעת $\vec{OP}=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

במקרה כללי $A=\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ ו $B=\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ אז $\vec{AB}=\begin{pmatrix} b_1-a_1 \\ \vdots \\ b_n-a_n \end{pmatrix}$.

אומרים ש$\vec{OP}$ הוא וקטור המקום של הנקודה P. אולי נראה יותר כל להשתמש בנקודות כעת אבל בעתיד נראה שכדי להשתמש בוקטורים.

מה זה גודל של וקטור? אם יש לנו וקטיר $\vec{AB}=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ אז רוצים שהגודל שלו יהיה הורך של הקטע AB. אז מסמנים הגודל ב $\left|\left|\vec{AB}\right|\right|=\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}$. דוגמה: נגדיר קבוצה $\left\{v\in\mathbb{R}^2 \mid ||v||=2\right\}$.

סימנים של וקטורים:

$$\begin{aligned} \underline{0} &= \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \\ \vec{r} &= \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

יש וקטורים עם קובע. אילו הווקטרים שהגודל שלהם הוא אחד: $||\hat{r}||=1$.

יש עוד סימונים לווקטורי יחידה ספציפיים:

$$\underbrace{\hat{e_1}}_{\hat{i}}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\underbrace{\hat{e_2}}_{\hat{j}}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\underbrace{\hat{e_3}}_{\hat{k}}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

הגדרות:

סכום:

$$\begin{aligned} \vec{x}+\vec{y} &= \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1+y_2 \\ \vdots \\ x_n+y_n \end{pmatrix} \\ \vec{y}+\vec{x} &= \vec{x}+\vec{y} \\ \vec{x}+(\vec{y}+\vec{z}) &= (\vec{x}+\vec{y})+\vec{z} \end{aligned}$$

הפרש:

$$\vec{x}-\vec{y}=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1-y_2 \\ \vdots \\ x_n-y_n \end{pmatrix}$$

מכפלה בסקלר:

$$\lambda\cdot\vec{x}=\lambda\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda\cdot x_n\\ \vdots\\ \lambda\cdot x_n\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}||\lambda\vec{x}|| &= \sqrt{(\lambda x_1)^2+\cdots+(\lambda x_n)^2}\\ &= \sqrt{\lambda^2\left(x_1^2+\cdots+(x_n)^2\right)}\\ &= |\lambda|\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}\\ &= |\lambda|\,||\vec{x}||\end{aligned}$$

תכונות חשובות:

$$\begin{aligned}\lambda\left(\alpha\vec{x}\right) &= \left(\lambda\alpha\right)\vec{x}\\ \lambda\left(\vec{x}+\vec{y}\right) &= \lambda\vec{x}+\lambda\vec{y}\end{aligned}$$

וקטור היחידה בכיון $\vec{a}$ מתקבל על ידי $\frac{\vec{a}}{||\vec{a}||}=\vec{a}\cdot\frac{1}{||\vec{a}||}$.

וקטור היחידה בזוית θ הוא $\hat{a}=\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}$

2.3 משואה של קו ישר

אם נתונות שתי נקודות אז:

$$\vec{r}=\vec{a}+t\cdot\left(\vec{b}-\vec{a}\right)$$

או אם נתונה נקודה אחת($\vec{a}$) עם קיוון($\hat{e}$)

$$\vec{r}=\vec{a}+t\cdot\hat{e}$$

פרק 3

הרצאה מס.2

3.1 מכפלה פנימית

יהי $\vec{a},\vec{b}\in R^2$ אזי המכפלה הפנינית $\vec{a}\cdot\vec{b}=\sum_{i=0}^{n}a_ib_i$. עוד סימונים למכפלה הוקטורית $\left\langle \vec{a}\mid\vec{b}\right\rangle$ ו $\left\langle \vec{a},\vec{b}\right\rangle$.
דוגמאות:

$$\left(\begin{array}{c}1\\2\end{array}\right)\cdot\left(\begin{array}{c}3\\4\end{array}\right)=1\cdot3+2\cdot4=11$$

משמעות:
בהינתן שני וקטורים אז אפשר לחשב המכפלה הסקלרית באופן הזה: $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\left|\vec{b}\right|\cos\theta$.
תכונות:

1. $\vec{b}\cdot\vec{a}=\vec{a}\cdot\vec{b}$ כי $\sum_{i=0}^{n}a_ib_i=\sum_{i=0}^{n}b_ia_i$.
2. $\vec{a}\cdot\vec{0}=0$
3. $\vec{a}\cdot\left(\lambda\vec{b}\right)=\lambda\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)$
4. $\vec{a}\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\left(\vec{a}\vec{b}\right)+\vec{a}\vec{c}$
5. $\vec{a}\cdot\vec{a}=\sum_{i=0}^{n}a_i^2=|a|^2$

עם הזהויות האילו יכולים להוכיח המשפט שכתבנו:

$$\begin{aligned}
AB^2 &= \left|\vec{b}-\vec{a}\right|^2\\
&= \left(\vec{b}-\vec{a}\right)\cdot\left(\vec{b}-\vec{a}\right)\\
&= \vec{b}\vec{b}-\vec{b}\vec{a}-\vec{a}\vec{b}+\vec{a}\vec{a}\\
&= OB^2-2\vec{a}\vec{b}+OA^2\\
AB^2 &= OA^2+OB^2-2\vec{a}\vec{b}\\
AB^2 &= OA^2+OB^2-2OA\cdot OB\cdot\cos\alpha
\end{aligned}$$

משתמשים במשפט הקוסינוס בשלב האחרון.

דוגמה: מצא את הזווית בין שני הוקטורים $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ ו $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}
\vec{a}\cdot\vec{b} &= |a|\cdot|b|\cos\theta\\
\cos\theta &= \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|a|\cdot|b|}\\
&= \frac{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right|}\\
&= \frac{1+2}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}}\\
\cos\theta &= \frac{3}{\sqrt{10}}
\end{aligned}$$

אני לא רוצה לדעת מה זה

3.2 משוואה וקטורית של מישור ב $\mathbb{R}^3$

אורך של ההטלה של $\vec{a}$ בכיוון של $\vec{b}$ היא $\frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta}{|\vec{b}|} = |\vec{a}|\cos\theta$

מישור מאונך ל $\vec{n}$ הוא $\{\vec{r} \mid \vec{r}\cdot\vec{n}=0\}$ כלומר מישור שעובר ב 0 עם נורמאל $\vec{n}$. זה בגלל $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ פירושו או שהזווית 90 או שאחד מהווקטורים אפס.

מישור מאונך ל$\vec{n}$ שעובר ב $\vec{a}$: $\{\vec{r} \mid (\vec{r}-\vec{a})\perp\vec{n}\} = \{\vec{r} \mid (\vec{r}-\vec{a})\cdot\vec{n}=0\} = \{\vec{r} \mid \vec{r}\vec{n}=\vec{a}\vec{n}\}$

דוגמה:

מישור שעובר דרך $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ ומאונך ל $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}
\vec{r}\cdot\vec{n} &= \vec{a}\vec{n}\\
\vec{r}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\\
x+y+z &= 1+2+3\\
x+y+z &= 6
\end{aligned}$$

עוד דוגמה:

$$\begin{aligned}
6x+2y+3z &= 14\\
\vec{r}\cdot\begin{pmatrix}6\\2\\3\end{pmatrix} &= \underbrace{14}_{\vec{a}\vec{n}}
\end{aligned}$$

צריך למצא מרחק של 0 מהמישור(הטלה של $\vec{r}$ על $\vec{n}$)

$$\frac{\vec{r}\cdot\vec{n}}{|\vec{n}|}=\frac{\overbrace{14}^{\vec{a}\vec{n}=\vec{r}\vec{n}}}{|\vec{n}|}=2$$

3.2.1 דטרמיננטה דו מימדי

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad-bc$$

זה הוא שטח המלבנית(בערך מוחלט) שנוצר על ידי $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ ו $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$.
אם מחליפים את הסדר אז משתנה הסימן

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} &= -\begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix} \\ &= -\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} \end{aligned}$$

3.3 מכפלה וקטורית

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2b_3-a_3b_2 \\ a_3b_1-a_1b_3 \\ a_1b_2-a_2b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \\ a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \\ a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

תכונות:

- $\vec{a}\times\vec{0}=\vec{0}$
- $\vec{b}\times\vec{a}=-\vec{a}\times\vec{a}$
- $(\lambda\vec{a})\times\vec{b}=\lambda\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)$
- $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\times c=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$
- $\begin{cases} \left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{b}=\vec{0} \\ \left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{b}=\vec{0} \end{cases}$

הוכחה של המשואה האחרונה:

$$\begin{aligned}\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{a} &= \begin{pmatrix} a_2b_3-a_3b_2 \\ a_3b_1-a_1b_3 \\ a_1b_2-a_2b_1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \\ &= \left(a_2b_3-a_3b_2\right)a_1+\left(a_3b_1-a_1b_3\right)a_2+\left(a_1b_2-a_2b_1\right)a_3 \\ &= 0\end{aligned}$$

לכן $\vec{a}\times\vec{b}\perp\vec{a}$ וגם $\vec{a}\times\vec{b}\perp\vec{b}$
הגודל של $a\times b$ הוא

$$|a\times b|=|a|\,|b|\sin\theta$$

הוכחה:

$$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|^2+\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)^2=|\vec{a}|^2\cdot\left|\vec{b}\right|^2$$

אחרי ההוכחה יודעים כי

$$\begin{aligned}|a\times b|^2 &= |a|^2\,|b|^2-(ab)^2 \\ &= |a|^2\,|b|^2-\left(|a|\,|b|\cos\theta\right)^2 \\ &= |a|^2\,|b|-|a|\,|b|\cos^2\theta \\ &= |a|^2\,|b|^2\left(1-\cos^2\theta\right) \\ &= |a|^2\,|b|^2\sin\theta\end{aligned}$$

זה הוא שטח של מקבילית על בסיס $\vec{a},\vec{b}$

פרק 4

תרגול מס.2

4.1 שאלות מפרק 0

פתרון שאלה 21

א. $\sin\left(\sin^{-1}\left(\frac{1}{7}\right)\right)=\frac{1}{7}$ $\sin\left(\sin^{-1}(x)\right)=x$

$$\begin{aligned}
\sin\left(\underbrace{\cos^{-1}\left(-\frac{1}{3}\right)}_{\alpha}\right) &= ?\\
\cos x &= \sqrt{1-\sin^2 x}\\
\sqrt{1-\cos^2\alpha} &= \sqrt{1-\cos^2\left(\cos\left(-\frac{1}{3}\right)\right)}\\
&= \sqrt{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^2}
\end{aligned}$$

23.ג. רוצים לרשום אז הפרבולה $y=\frac{x^2}{2}+x-3$ בצורת $y=a\left(x-x_0\right)^2+y_0$.

$$\begin{aligned}
y &= \frac{x^2}{2}+x-3\\
&= \frac{1}{2}\left(x^2+2x+6\right)\\
& \frac{1}{2}\left(x^2+2x+1-1+6\right)\\
& \frac{1}{2}\left((x-1)^2-7\right)\\
& \frac{1}{2}(x-1)^2-\frac{7}{2}
\end{aligned}$$

4.2 פרק 1

הגדרת וקטור לפי פיזיקיים זה חץ במרחב(יש לו גודל וקיוון אבל אין מיקום) לפי מתמטקיים זה חיה מסוג $\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_i \in \mathbb{R} \right\}$. מגדירים פעולות על וקטורים:

מכפלה פנימית(מכפלה סקלרית): $\vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{i=0}^{n} a_i b_i$

מכפלה וקטורית: מוגדרת רק ב $\mathbb{R}^3$ אם $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$, $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ אז $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{matrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{matrix}$

תכונות המכפלה הווקטורית: $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$, $(\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times \left(\lambda \vec{b} \right) = \lambda \left(\vec{a} \times \vec{b} \right)$

הווקטור $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ אפשר לכתוב $\vec{a} = a_1 \hat{i} + a_2 \hat{j} + a_3 \hat{k}$. פשט את הביטויים הבאים:

$$\begin{aligned} \left(\vec{a} \times \hat{j} \right) \times \hat{k} &= \left(\left(a_1 \hat{i} + a_2 \hat{j} + a_3 \hat{k} \right) \times \hat{j} \right) \times \hat{k} \\ &= \left(a_1 \hat{i} \times \hat{j} + a_2 \hat{j} \times \hat{j} + a_3 \hat{k} \times \hat{j} \right) \times \hat{k} \\ &= \left(a_1 \hat{k} - a_3 \hat{i} \right) \times \hat{k} \\ &= a_1 \hat{k} \times \hat{k} - a_3 \hat{i} \times \hat{k} \\ &= a_3 \hat{j} \end{aligned}$$

מה הצורה המתקבלת מהמשואות:

$$\begin{aligned} x &= t + 7 \\ y &= 3 - 2t \\ z &= t \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t+7 \\ 3-2t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

זה קו ישר

$$\begin{aligned} x &= 3 \sin t + 2 \\ y &= \sin t + 1 \\ z &= 1 - 4 \sin t \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \sin t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

פרק 5

הרצאה מס.3

5.1 מכפלה וקטורית

מסמנים $\vec{a}\times\vec{b}$ הווקטור הנוצר יש לו תכונות הבאות $\vec{a}\times\vec{b} \perp \vec{a}\times\vec{b}, \vec{b} \perp \vec{a}$וגם $\left|\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|\right| = \sin\angle(\vec{a},\vec{b}) \left|\left|\vec{b}\right|\right| ||\vec{a}||$. דרך יותר מתמטית לחשב את זה: $\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$. הפעולה הזו היא ליניארית $\vec{a}\times\left(\vec{b}+\vec{c}\right) = \vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$, $\vec{a}\times\left(\lambda\vec{b}\right) = \lambda\vec{a}\times\vec{b}$ אבל $\vec{a}\times\vec{b} = \vec{b}\times\vec{a}$.

5.2 מכפלה סקלרית מעורבת

נניח $\vec{a},\vec{b},\vec{c}\in\mathbb{R}^3$ אזי

$$\begin{aligned}
\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c} &= \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} c_1 - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} c_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} c_3 \\
&= \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

מסמנים את הפעולה הזו $\left[\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right] = \vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)$. תכונה חשובה של פעולה זו $\left[\vec{a},\vec{c},\vec{b}\right] = -\left[\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right]$ אזי $\left[\vec{c},\vec{a},\vec{b}\right] = -\left[\vec{a},\vec{c},\vec{b}\right] = \left[\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right]$ אבל מה המשמעות של פעולה זו?

$$= \left(\text{area of makbilon on } \vec{a},\vec{b}\right) \cdot \underbrace{||\vec{c}||\cos\angle\left(\vec{a}\times\vec{b},\vec{c}\right)}_{\substack{\text{height of makbilon on} \\ \text{a,b,conbasea,b}}}$$

מתי זה אפס? $\left[\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right]=0$ אם"ם $\begin{vmatrix}a & b & c\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a\\ b\\ c\end{vmatrix}=0$ אזי $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ הם במישור.

5.3 מכפלה וקטורית משולשת

$$\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\neq\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\vec{c}$$

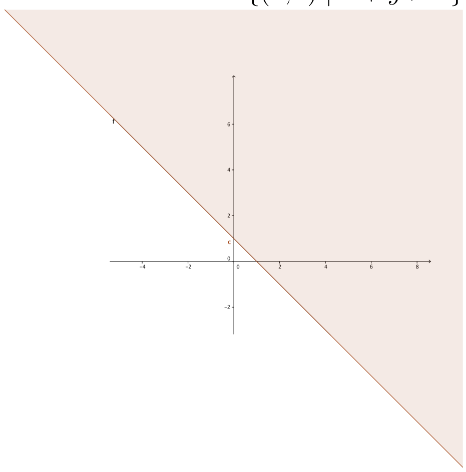
כי $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\vec{c}$ מקביל למישור $\vec{a},\vec{b}$ ו$\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)$ מקביל למישור $\vec{b},\vec{c}$.

5.4 פרק 2: מערכות קואורדינטות וצורות הנדסיות פשוטות

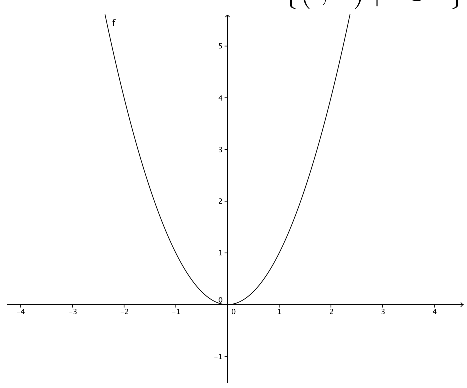
אפשר להגדיר צורה גיאוצטרית לפי תנאי(משוואה) או לפי פרמוטציה(paramotrisation).

דוגמה:

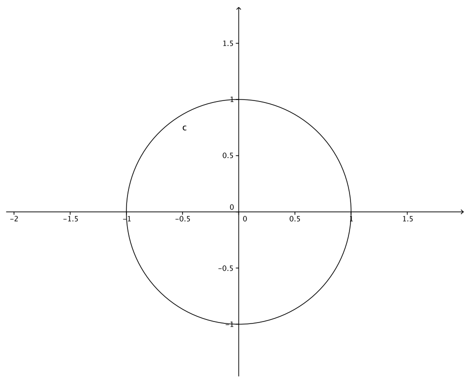
$$\{(a,b)\mid x+y>1\}$$



$$\left\{\left(t,t^2\right)\mid t\in\mathbb{R}\right\}$$



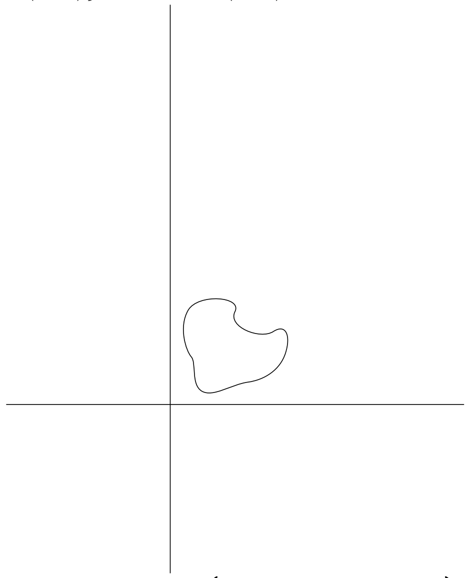
$$x^2+y^2=1$$



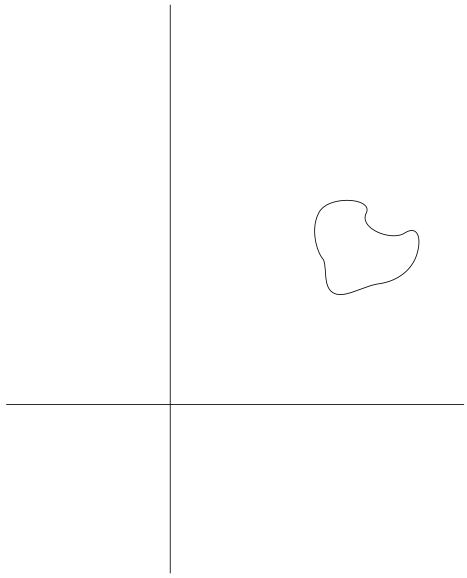
5.4.1 פעולות על צורות

הזזה ב $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$: $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+a\\y+b\end{pmatrix}$.

דוגמה: יש תנאי $T(x,y)$ כותבים $\{(x,y)\mid T(x,y)\}$



$$\left\{(x',y')\mid \begin{array}{r}x'=x+a\\ y'=y+b\\ T(x,y)\end{array}\right\}$$



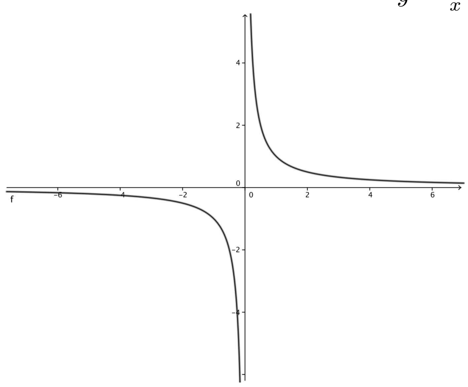
עוד דוגמה:
$T(x,y) \Rightarrow x^2+y^2=1$ אזי כדי לקבל מעגל שמרכזו $(2,3)$ צריכים להזיז את זה ב $\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ ומקבלים $T(x-2,y-3) \Rightarrow (x-2)^2+(y-3)^2=1$
מתיכה
פי a בכיוון x ופי b בכיוון y

$$\begin{aligned} x' &= ax \\ y' &= by \end{aligned}$$

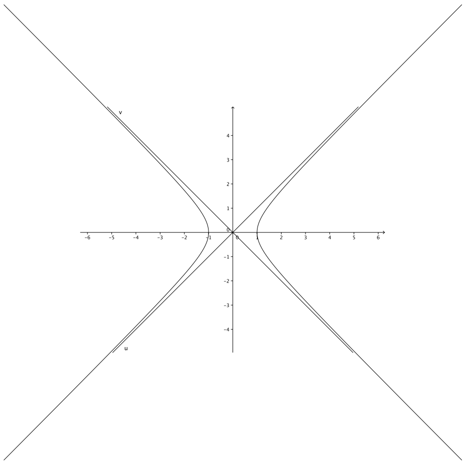
אזי $\left\{(x',y') \mid T\left(\frac{x'}{a},\frac{y'}{b}\right)\right\} = \left\{(x',y') \mid \begin{matrix} x'=ax \\ y'=by \\ T(x,y)\end{matrix}\right\} \Rightarrow \{(x,y) \mid T(x,y)\}$ דוג-מה: $(\cos\theta,\sin\theta) \Rightarrow (a\cos\theta, b\sin\theta)$ זאת אליפסה.

5.4.2 היפרבולה

הגענו לאליפסה, אבל איך מגיעים להיפרבולה?
$y=\frac{1}{x}$



איור 5.1: ר^2-ש^2=1 קיפט בפיסנפופף



רוצים להגיע ל$y=\frac{1}{\left(\frac{y}{c}\right)}$ $xy=c\Rightarrow\frac{y}{c}=\frac{1}{x}\Leftrightarrow$ אזי צריכים למתוך בc באחד הכיוונים

$$x^2-y^2=c$$

רוצים לסבב את זה $\frac{\pi}{4}=90^\circ$ אזי כותבים את המשואה במשתנים $u=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(x+y\right),v=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(y-x\right)$ ומקבלים $uv=\frac{1}{2}\left(x+y\right)\left(y-x\right)=\frac{1}{2}\left(y^2-x^2\right)=-\frac{c}{2}$ אזי $uv=-\frac{c}{2}\Leftrightarrow x^2-y^2=c$

אזי יכולים להגיע ל$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ דרך מתיכה בa בכיוון x וb בכיוון y אזי עכשיו האסימפטוטות יהיו $\frac{y}{b}=\pm\frac{x}{a}$

דוגמה:

$$\begin{aligned}x^2-2y^2+2x-4y&=1\\(x+1)^2-2\left(y+1\right)^2&=0\\x+1&=\pm\sqrt{2}\left(y+1\right)\end{aligned}$$

כלומר זה שתי קווים.

פרק 6

הרצאה מס.4

6.1 קואורדינטות קוטביות Polar Coordinates

$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta$$

r הוא המרחק מהרשית, θ הוא הזווית. לכן טרנספורמציה הפוכה

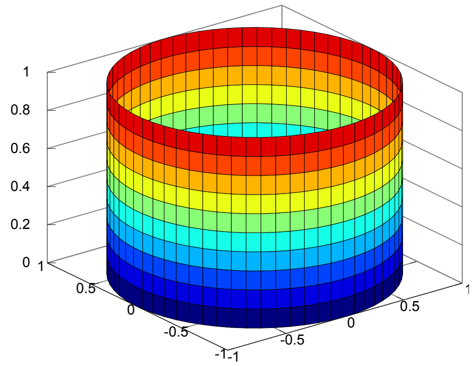
$$\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$
$$r = \sqrt{x^2+y^2}$$

אבל $(r,\theta+2\pi k)$ הוא אותה נקודה אז מגדירים $0 \le \theta \le 2\pi k$. בעיה אחרת היא כי $\arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ נותן $0 \le \theta \le \pi$ אז צריך לבדוק הקואורדינטות ולהוסיף π אם צריך.
לקבל (r,θ) יחיד צריך לסים תנאים על θ למשל $0 \le \theta \le 2\pi$ או $-\pi \le \theta \le \pi$.
זאת אומרת כי עברנו ממישור (x,y) ל(r,θ) כלומר $A\left(\sqrt{3},1\right)$ עוברת ל $A\left(2,\frac{\pi}{6}\right)$ ו$B\left(\sqrt{3},-1\right)$ עובר ל$\left(2,\frac{11\pi}{6}\right)$.
אם r קבוע אז במישור של (r,θ) נקבל קו ישר אבל ב(x,y) נקבל מעגל.
אם θ קבוע אז במישור של (r,θ) נקבל קו ישר וגם ב(x,y) נקבל קו ישר.
קו מאונך ב (r,θ) מיצר ספירלה ב (x,y).
דוגמה:
אם נתון מעגל במישור (x,y) עם מרכז $\left(\frac{a}{2},0\right)$ איך כותבים את זה ב (r,θ)

$$\begin{aligned}
\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2 &= \left(\frac{a}{2}\right)^2 \\
\left(r\cos\theta-\frac{a}{2}\right)^2+(r\sin\theta)^2 &= \left(\frac{a}{2}\right)^2 \\
r^2\cos\theta-ar\cos\theta+\frac{a^2}{4}+r^2\cos^2\theta &= \frac{a^2}{4} \\
r^2-ar\cos\theta &= 0 \\
a\cos\theta &= r
\end{aligned}$$

אם אנחנו ב$\mathbb{R}^3$ אז יש שתי קואורדינטות כמו הקוטביות: גליליות וכדוריות.

6.2 קואורדינטות גליליות



משתמשים בקואורדינטות (ρ, θ, z) כך ש $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ ו $\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ ו $z =$ z(לפעמים מציינים (r, θ, z)). הטרנספורמציה ההפוכה היא:

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos\theta \\ y &= \rho \sin\theta \\ z &= z \end{aligned}$$

אם z קבוע מקבלים מישור
אם θ קבוע מקבלים חצי מישור.
אם r קבוע מקבלים גליל.
חרוט
הוא (ρ, θ, z) כך ש $\rho = z \cdot \tan\alpha$
אם $z = \rho^2 \Rightarrow \rho = \pm\sqrt{z}$ מקבלים פרבולואיד.
בגלל שיש לנו 3 משתנים נוכל לדבר על משטחים(גופים תלת מימדיים)
דוגמה:

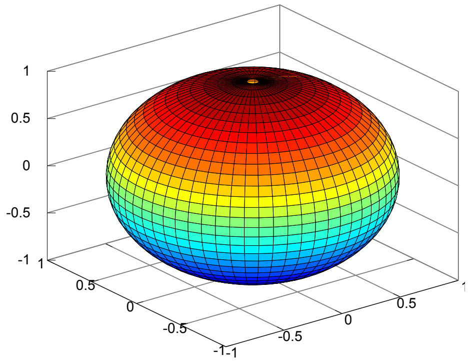
$$\begin{aligned} \rho &= a \\ \theta &= t \\ z &= bt \end{aligned}$$

a, b קבועים, t משתנה. מה מקבלים? $\rho = a$ אזי יש גליל ברדיוס a, z, θ עולים ביחד אז מסילת בורג שהפרש הגובה בו $2\pi b$.

דוגמה:

$$\begin{aligned} (x, y, z) &\Rightarrow (\rho, \theta, z) \\ (-2, 2, 3) &\Rightarrow \left(2\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4}, 3\right) \end{aligned}$$

6.3 קואורדינטות כדוריות

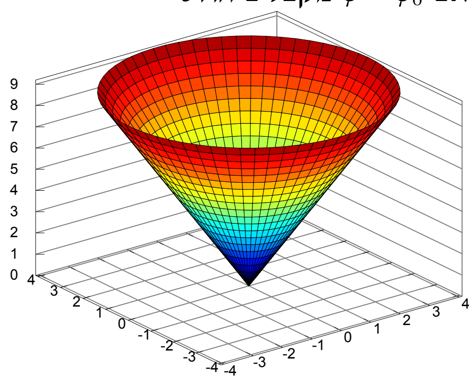


בכדור הארץ משתמשים בכו אורך וקו רוחב.

$$(x,y,z)\Rightarrow(r,\theta,\varphi)$$

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \theta &= \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \\ \varphi &= \arccos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) \end{aligned}$$

כך ש $r>0, 0\le\theta<2\pi, -\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}$
אם $r=r_0$ מקבלים כדור בעל r_0
אם $\theta=\theta_0$ מקבלים חצי מישור
אם $\varphi=\varphi_0$ מקבלים חרוט



טרנפורמציה הפוכה:

$$\begin{aligned} x &= r\sin\varphi\cos\theta \\ y &= r\sin\varphi\sin\theta \\ z &= r\cos\varphi \end{aligned}$$

דוגמה:

$$\begin{aligned}(x,y,z) &\Rightarrow (\rho,\theta,\varphi)\\ (2,2,3) &\Rightarrow \left(\sqrt{4+4+9},\frac{3\pi}{4},\arccos\left(\frac{3}{\sqrt{17}}\right)\right)\\ &\Rightarrow \left(\sqrt{17},\frac{3\pi}{4},\arccos\left(\frac{3}{\sqrt{17}}\right)\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\rho,\theta,\varphi) &\Rightarrow (x,y,z)\\ \left(1,\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right) &\Rightarrow (1\sin\varphi\cos\theta,1\sin\varphi\cos\theta,1\cos)\end{aligned}$$

פרק 7

תרגול מס.3

תר'1 ש' 23

מצא נוסחה למרחק בין הנק $\vec{x}$ למישור $\vec{r}\cdot\vec{n}=c$ ב $\mathbb{R}^3$:

$$\frac{(\vec{x}-\vec{r})\cdot\vec{n}}{|\vec{n}|}$$

תר' 1 ש' 35

מצא את המרחק בין $A=(1,1,1)$לקו הישר l שעובר בנקודה $B=(2,4,3)$ ובכיוון $\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$

$$l:\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}t+\begin{pmatrix}2\\4\\3\end{pmatrix}$$

נמצא ווקטור מאונך ל $\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$. $\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\perp\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$.

דרך 1:

$$d=|AB|\sin\theta$$

דרך 2:

$$\left|\begin{pmatrix}2+t\\4+t\\3-t\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right|=\sqrt{(1+t)^2+(3+t)^2+(2-t)^2}$$

ומחפסים את המינימום של ביטוי זה

שאלה 27' ו'

$$\begin{aligned} x &= \cos\theta + 2\sin\theta + 3 \\ y &= 2\cos\theta - 2\sin\theta + 4 \\ z &= 2\cos\theta + \sin\theta + 5 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + \cos\theta \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \sin\theta \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

זה מעגל ב $\mathbb{R}^3$

7.1 צורות

ישר:

$$y = ax + b$$

פרבולה:

$$y = ax^2 + bx + c$$

מעגל:

$$(x-a)^2 + (y-a)^2 = r^2$$

אליפסה:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

היפרבולה:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

הזזה:
במקום שהמרכז יהיה ב$(0,0)$ רוצים שהוא יהיה (c,d). דוגמה על אליפסה:

$$\left(\frac{x-c}{a}\right)^2 + \left(\frac{y-d}{b}\right)^2 = 1$$

מתיכה:

$$\begin{aligned} x &\to \frac{x}{c} \\ y &\to \frac{y}{d} \end{aligned}$$

שרטט שתי הצורות הבאות:

$$\begin{aligned} x^2+\frac{y^2}{4} &= 1 \\ x^2+\left(\frac{y}{2}\right)^2 &= 1 \end{aligned}$$

אליפסה

$$\begin{aligned} x^2+2y^2-4x-6y+3 &= 0 \\ (x-2)^2-4+2\left(y+\frac{3}{2}\right)^2-4.5+3 &= 0 \\ (x-2)^2+\frac{1}{2}\left(y+\frac{3}{2}\right)^2 &= 5.5 \\ \left(\frac{x-2}{\sqrt{5.5}}\right)+\left(\frac{y+1.5}{\sqrt{\frac{5.5}{2}}}\right) &= 1 \end{aligned}$$

תרגילים:

מצא משוואה פרמטרית לצורות בשאלה:

$$\left(\frac{x}{1}\right)^2+\left(\frac{y}{2}\right)^2=1 \Rightarrow \begin{pmatrix} x=\cos t \\ y=\sin t \end{pmatrix} \underset{\text{Scaling}}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} x=\cos t \\ y=2\sin t \end{pmatrix}$$

$$\left(\frac{x-2}{\sqrt{5.5}}\right)^2+\left(\frac{y-1.5}{\sqrt{\frac{5.5}{2}}}\right)^2=1 \Rightarrow \begin{pmatrix} x=\cos t \\ y=\sin t \end{pmatrix} \underset{\text{Scaling}}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} x=\sqrt{5.5}\cos t+2 \\ y=\sqrt{\frac{5.5}{2}}\sin t+1.5 \end{pmatrix}$$

אם רוצים לעשות פרמטריזציה של היפרבולה מתחילים עם $x=\cosh(t), y=\sinh(t)$ כי $\cosh^2(t)-\sinh^2(t)=1$

תרגיל:

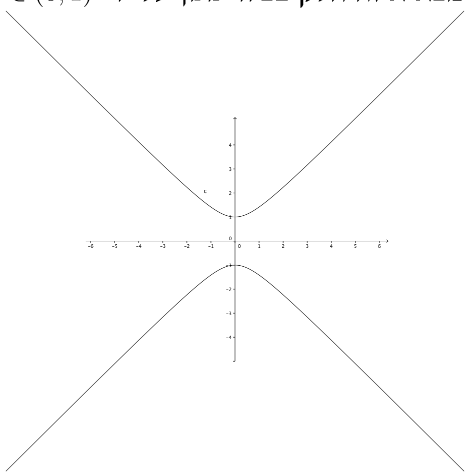
בדכו כי

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{2}\right) \\ y &= \frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right) \\ t &\in \mathbb{R}\setminus\{0\} \end{aligned}$$

פרמטריזציה למשוואת ההיפרבולה

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)\right)^2-\left(\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)\right) &= 1\\
\frac{1}{4}\left(t^2+2+\frac{1}{t^2}\right)-\frac{1}{4}\left(t^2-2+\frac{1}{t^2}\right) &= 1
\end{aligned}$$

מצא איזה חלק בציור נתון על ידי $t \in (0,1)$



כאשר t כטן מאוד, למשל $t = 10^{-12}$ מקבלים כי $x \approx -y$.
כאשר $t > \frac{1}{5}$ מקבלים $y > 0$ ו $x > 0$

7.2 קואורדינטות

הקואורדינטות האכי פשוטות שמשתמשים בהם הם קואורדינטות קרטזיות.

7.2.1 הפולרות

$$\begin{aligned}
r &\geq 0\\
0 &\leq \theta \leq 2\pi
\end{aligned}$$

נוסחאות לעבור בין המערכות

$$\begin{array}{c} r=\sqrt{x^2+y^2}\\ \tan\theta=\frac{y}{x}\end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{array}$$

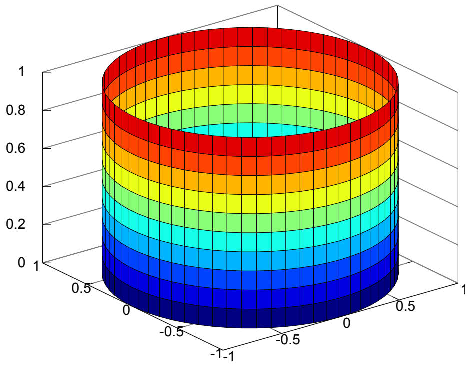
מצאו משוואה בקואורדינטות קוטביות:

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2-\left(\frac{y}{4}\right)^2=1$$

מציבים $r\cos\theta$ ו $r\sin\theta$:

$$\begin{aligned}\left(\frac{r\cos\theta}{2}\right)^2-\left(\frac{r\sin\theta}{4}\right)^2 &= 1\\ 4r^2\cos^2\theta-r^2\sin^2\theta &= 16\end{aligned}$$

7.2.2 גליליות



$$\begin{array}{cc} x=r\cos\theta & r=\sqrt{x^2+y^2}\\ y=r\sin\theta \Rightarrow & \tan\frac{y}{x}\\ z=z & z=z\end{array}$$

7.2.3 כדוריות

$$\begin{array}{c} r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\\ \tan\theta=\frac{y}{x}\\ \tan\varphi=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}\end{array}$$

פרק 8

הרצאה מס.5

8.1 פרק 3: מספרים מורכבים

מה הפתרונות שמקבלים במשוואה $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$. אפשר לקבל שלושה פתרונות(ממשים) ממשוואה זו אבל בכל מקרה מקבלים מזה לפחות פתרון אחד.

אפשר להתבונן גם במוואה $Ax^2 + bx + c = 0$ שיש לה $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ אז אין לה פתרונות.

אבל משפט במטמטיקה אומר כי לכל פולינום ממעלה n יש בדיוק n פתרונות. הפתרונות האלה לא בהכרח ממשיים, הם יכולים להיות פתרונות מורכבים.

$$i^2 = -1$$

הגדרה: מספר מורכב הוא $z = a + bi$ כך ש $a, b \in \mathbb{R}$. הסדה שכולל מספרים כמו z הוא $\mathbb{C}$.

אומרים כי a הוא החלק הממשי של z או Real Part. ומסמנים $a = R(z) = Re(z)$.

אומרים כי b הוא החלק המדומה של z או imaginatry part. ומסמנים $b = I(z) = Im(z)$.

מסמנים

$$\mathbb{C} = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

פעולות

סכום: $(a + ib) + (c + id) = (a + c) + (b + d)\, i$

כפל: $(a + ib) \cdot (c + id) = ac + iad + ibc + i^2bd = ac + adi + bci - 1 \cdot bd$

צמוד: $\overline{(a + bi)} = (a - bi)$

כפל בסקלר: $r \cdot (a + bi) = (r + 0 \cdot i)\,(a + bi) = ra + rbi$

תכונות של מספרים מורכבים

$$(z+2)+w'=z+(w+w')$$

$$(z+w)\,w'=zw'+ww'$$

$$zw=zw',z\neq 0\Rightarrow w=w'$$

המספרים המורכבים חיים במישור(שתי דרגות חופש)
מבחיהת ציור הסכום של שני מספרים מורכבים בדיוק כמו הסכום של שני וקטור-ים.

$$\begin{aligned}\overline{z+w} &= \overline{z}+\overline{w}\\ \overline{z\cdot w} &= \overline{z}\cdot\overline{w}\end{aligned}$$

8.2 מספרים מורכבים בקואורדינטות קוטביות

אפשר לכתוב מספרים מורכבים בקואורדינטות קוטביות

$$\begin{aligned}|z|=r &= \sqrt{x^2+y^2}\\ \arg(z)=\theta &= \arctan\left(\frac{y}{x}\right)+k\pi\end{aligned}$$

דוגמה:
מה הגודל והזווית של $-2+2i$?

$$\begin{aligned}|z| &= \sqrt{2^2+2^2}=\sqrt{8}\\ \arg(z) &= \arctan\left(\frac{2}{-2}\right)+\pi=\frac{3}{4}\pi\end{aligned}$$

מה נותו הכפל של z ב $\overline{z}$?

$$\begin{aligned}z\cdot\overline{z} &= (x+iy)\,(x-iy)\\ &= x^2+y^2\\ &= |z|\end{aligned}$$

איך עובד החילוק במספר ממשי?

$$\frac{1+2i}{2}=\frac{1}{2}+i$$

אבל לחלק במספר מורכב זה יותר קשה:

$$\frac{z}{w}=\frac{z\cdot\overline{w}}{w\cdot\overline{w}}=\frac{z\cdot\overline{w}}{|w|}$$

ואפשר לבדוק כי הפתרון הזה הוא הפתרון היחיד של משוואה זו.
מה עם חזקה?

$$z^{n}=\underbrace{z\cdot z\cdots z}_{n}$$

$$z^{-n}=\frac{1}{z^{n}}$$

דוגמה:

$$\begin{aligned}(1+i)^{2} &= (1+i)(1+i)\\ &= 2i\\ (1+i)^{4} &= -4\\ \sqrt{-4} &= (1+i)\end{aligned}$$

$$i^{n}=\begin{cases}n=0+4k & i\\ n=1+4k & -1\\ n=2+4k & -i\\ n=3+4k & 1\end{cases}$$

כתיב מקוצר של $z=r\cos\theta+i\sin\theta$ הוא $r\cdot\mathrm{cis}\theta$

$$\begin{aligned}\mathrm{cis}\theta\cdot\mathrm{cis}\varphi &= (\cos\theta+i\sin\theta)(\cos\varphi+i\sin\varphi)\\ &= \vdots\\ &= \mathrm{cis}(\theta+\varphi)\end{aligned}$$

תכונות שלcis

$$
\begin{aligned}
\operatorname{cis}(\theta+2\pi) &= \operatorname{cis}(\theta) \\
\operatorname{cis}(\theta+\pi) &= \cos(\theta+\pi)+i\sin(\theta+\pi) \\
&= -\cos(\theta)+-i\sin(\theta) \\
& -\operatorname{cis}(\theta)
\end{aligned}
$$

הגדרה של חזקה של מספר מורכב:

$$
\begin{aligned}
e^{a+ib} &= e^{a}e^{ib} \\
&= e^{a}(\cos b+i\sin b)
\end{aligned}
$$

אזי תמיד נכתוב $\operatorname{cis}\theta = e^{i\theta}$.
יותר כל לעבוד עם מכפלות בצורה הפולרית.

$$
\begin{aligned}
z &= re^{i\theta} \\
z^{n} &= r^{n}e^{i\theta\cdot n}
\end{aligned}
$$

מה הוא הלוגריתם של מספר מרוכב?

$$e^{w}=z\Rightarrow w=\ln z$$

אזי

$$
\begin{aligned}
e^{a+ib} &= e^{a}(\cos b+i\sin b)=z \\
\Rightarrow e^{w} &= |z|, b=\arg w
\end{aligned}
$$

אזי

$$\ln z = ln|z|+i\arg\theta$$

אזי

$$e^{2\pi i}=e^{0}$$

אזי $\ln z$ מוגדרת עד כדי 2π.

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\left(e^{ix}+e^{-ix}\right) &= \cos x \\
\frac{1}{2}\left(e^{ix}-e^{-ix}\right) &= \sin x
\end{aligned}
$$

פרק 9

הרצאה מס.6

דוגמה:

$$\begin{aligned}
\sin^4 x &= \left[\frac{1}{2i}\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)\right]^4 \\
&= \frac{1}{16}\left(\left(e^{ix}\right)^4+4\left(e^{ix}\right)^3\left(e^{-ix}\right)+6\left(e^{ix}\right)^2\left(e^{-ix}\right)^2+4\left(e^{ix}\right)^3\left(e^{-x}\right)+\left(e^{-ix}\right)^4\right) \\
&= \frac{1}{16}\left(e^{4ix}-4e^{2ix}+6-4e^{-2ix}+e^{-4ix}\right) \\
&= \frac{1}{16}\left(\left(e^{4ix}+e^{-4ix}\right)-4\left(e^{2ix}+e^{-2ix}\right)+6\right) \\
&= \frac{1}{16}\left(\cos\left(4x\right)-\frac{1}{2}\sin\left(2x\right)+\frac{3}{8}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cos\left(5x\right) &= Re\left(e^{5ix}\right) \\
&= Re\left(\left(e^{ix}\right)^5\right) \\
&= Re\left(\left(\cos x+i\sin x\right)^5\right) \\
&= Re\left(\cos^5 x+5\cos^4\cdot i\sin x-10i\cos^3 x\sin^3 x-10i\cos^2 x\sin^3 x+5\cos x\sin^4 x+\sin^5 x\right) \\
&= \cos^5 x-10\cos^3 x\sin^2 x+5\cos x\sin^4 x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a\cos\omega t+b\sin\omega t &= R\left(\left(a+ib\right)\left(\cos\omega t-i\sin\omega t\right)\right) \\
A &= \sqrt{a^2+b^2} \\
\phi &= \arg\left(a+ib\right) \\
&= R\left(Ae^{i\phi}\cdot e^{-\omega t}\right) \\
&= R\left(Ae^{-i(\omega t+\phi)}\right) \\
&= A\cos\left(\omega t+\phi\right)
\end{aligned}$$

אמרנו שאנחנו רוצים מספרים מורכבים כך שלכל פולינום ממעלה n יהיו n פתר-ונות.

$$\begin{aligned} p_n(x) &= x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_x \cdot x + a_0 \\ &= (x-\alpha)(p_{n-1}(x)) \\ & \Downarrow \\ & (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n) \end{aligned}$$

אם השורשים של $p_n(x)=0$ הם $x_1, x_2 \ldots x_n$ אזי אפשר לכתוב

$$p_n(x) = \prod_{k=n}^{k} (x-x_k)^{e_i}$$

e_i הוא הריבוי של השורש, כלומר כמה פעמים השורש פותר המשוואה.
דוגמה:

$$\begin{aligned} x^4 - 1 &= \left(x^2-1\right)\left(x^2+1\right) \\ &= (x-1)(x+1)(x+i)(x-i) \end{aligned}$$

השורשים הם $1, -1, i, -i$ כולם בריבוי של 1.

$$\begin{aligned} x^4 + 2x^2 + 1 &= \left(x^2+1\right)^2 \\ &= [(x+i)(x-i)]^2 \end{aligned}$$

השורשים הם $i, -i$ בריבוי של 2.

9.1 פירוק של פולינומים

$$\begin{aligned} p(x) &= x^3 - 3x^2 + 2 \\ &= (x-1)\left(x^2+2x-2\right) \\ & (x-1)\left((x-1)^2-3\right) \\ & (x-1)\left(x-1-\sqrt{5}\right)\left(x-1+\sqrt{5}\right) \end{aligned}$$

אפשר לעשות אותו דבר במספרים מורכבים.

9.2 שורשים

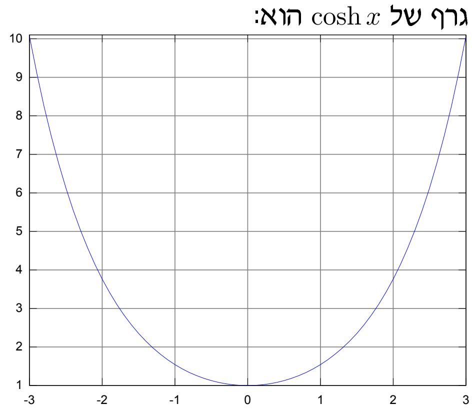
$$\begin{aligned}\sqrt[n]{z} &= \sqrt[n]{Ae^{i\theta}}\\ &= Ae^{\frac{i\theta+2\pi k}{n}}\end{aligned}$$

9.3 פונקציות של משתנה אחד

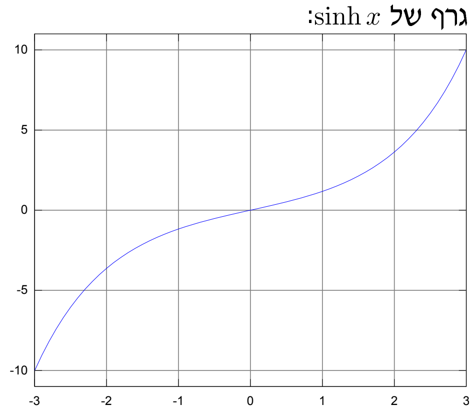
9.3.1 פונקציות היפרבוליות

$$\begin{aligned}\sinh x &= \frac{1}{2}\left(e^{x}-e^{-x}\right)\\ \cosh x &= \frac{1}{2}\left(e^{x}+e^{-x}\right)\\ \tanh x &= \frac{\sinh x}{\cosh x}\\ &= \frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}\end{aligned}$$

גרף של $\cosh x$ הוא:



גרף של $\sinh x$:



$$\begin{aligned}
\cosh^2\theta - \sinh^2\theta &= 1 \\
\frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) - \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right) & \\
\frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-x} - \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}e^{-x} &= \\
\ldots \quad .. \quad \ldots &
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x &= \cosh t \\
y &= \sinh t \\
x^2 + y^2 &= 1
\end{aligned}$$

זה הצד הימיני של ההיפרבולה, כי $\cosh t \geq 1$.

$$\begin{aligned}
\cos(x) &= \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right) \\
&= \cosh(ix) \\
\sin(x) &= \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right) \\
&= \frac{1}{i}\sinh(ix)
\end{aligned}$$

פונקציות אחרות:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sech}(x) &= \frac{1}{\cosh x} \\
\operatorname{csch}(x) &= \frac{1}{\sinh x} \\
\operatorname{corh}(x) &= \frac{1}{\tanh x}
\end{aligned}$$

מתקיים:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sech}^2 x &= 1 - \tanh^2 x \\
\cosh(x+y) &= \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y \\
\sinh(x+y) &= \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y
\end{aligned}$$

רוצים למצא את $\cosh^{-1}$:

$$
\begin{aligned}
\cosh u &= x \\
\frac{1}{2}\left(e^u + e^{-u}\right) &= x \\
e^u + e^{-u} &= 2x \\
e^{2u} + 1 &= 2xe^u \\
e^{2u} - 2xe^u + 1 &= 0 \\
e^u &= \frac{2x \pm \sqrt{4x^2 - 4}}{2} \\
&= x \pm \sqrt{x^2 - 1} \\
u &= \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)
\end{aligned}
$$

בחרנו את השורש של משהוא חיובי ו $x \geq 1$
רוצים נוסחה גם לx $\sinh^{-1}$

$$
\begin{aligned}
\sinh u &= x \\
\frac{1}{2}\left(e^u - e^{-u}\right) &= x \\
e^u - e^{-u} &= 2x \\
e^{2u} - 1 &= 2xe^u \\
e^{2u} - 2xe^u - 1 &= 0 \\
e^u &= \frac{2x \pm \sqrt{4x^2 + 4}}{2} \\
&= x \pm \sqrt{x^2 + 1}
\end{aligned}
$$

פרק 10

תרגול מס.3

10.1 מספרים מורכבים ופונקציות היפרבוליות

$$z = a + ib$$

חיבור:

$$\begin{aligned} z_1 &= a_1 + ib_1 \\ z_2 &= a_2 + ib_2 \\ z_1 + z_2 &= a_1 + a_2 + i\left(b_1 + b_2\right) \end{aligned}$$

מספר צמוד של $z = a + ib$ הוא $\overline{z} = a - ib$ ודתמיד מתקיים $z \cdot \overline{z} = |z|^2$
המגניטודה היא $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$
אפשר לכתוב המספר כ$z = a + ib = re^{i\theta}$

10.2 פונקציות היפרבוליות

$$\begin{aligned} \sin(x) &= \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \\ \cos(x) &= \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sinh(x) &= \frac{e^{x} - e^{-x}}{2} \\ \cosh(x) &= \frac{e^{x} + e^{-x}}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sinh(ix) &= i\sin(x) \\
\cosh(ix) &= \cos(x)
\end{aligned}$$

אז רוצים למצוא את $\tanh^{-1}(x) = u$ כלומר

$$\begin{aligned}
x &= \tanh(u) \\
x &= \frac{e^{u}-e^{-u}}{e^{u}+e^{-u}} \\
x\left(e^{u}+e^{-u}\right) &= e^{u}-e^{-u} \\
xe^{u}+e^{u} &= -xe^{-u}-e^{-u} \\
(x-1)\,e^{u} &= (-1-x)\,e^{-u} \\
e^{2u} &= \frac{-1-x}{x-1} \\
e^{2u} &= \frac{1+x}{1-x} \\
2u &= \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \\
u &= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)
\end{aligned}$$

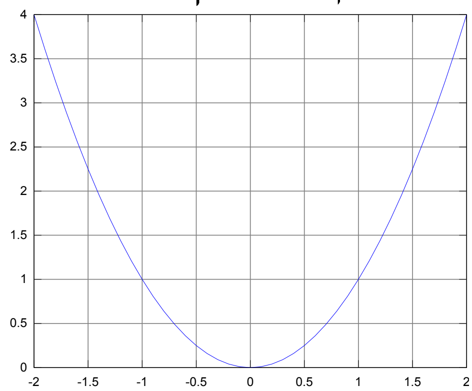
פרק 11

הרצאה מס.7

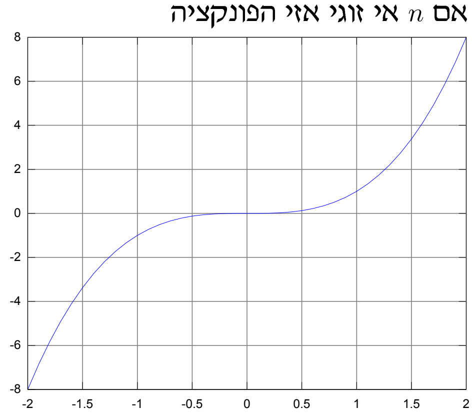
11.1 פונקציות חזקה

$x \to x^\alpha$

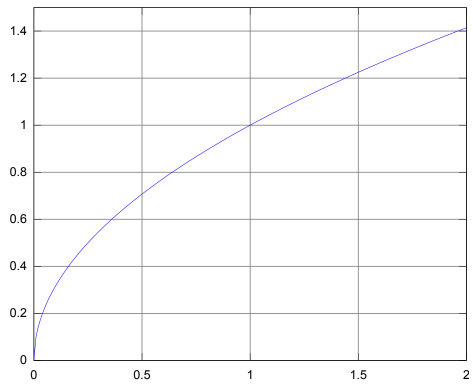
אם $a \in \mathbb{N}$ זוגי אזי הפונקציה נראת כמו



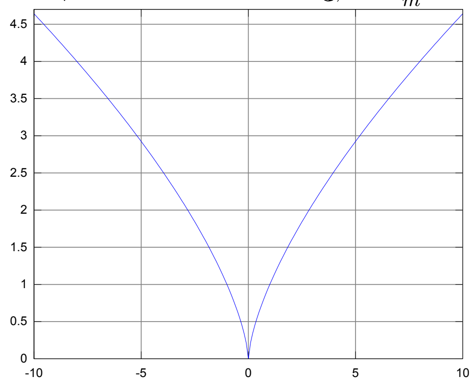
אם n אי זוגי אזי הפונקציה



אם מחפסים פונקציה הפיכה של x^n בעל n זוגי צריכים לקחת חצי מישור

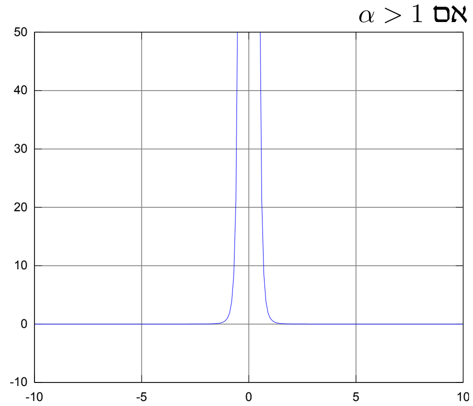


אם $\alpha = \frac{n}{m}, \alpha \in \mathbb{Q}$ אם n זוגי אזי $x^{\alpha} = x^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{x^n}$ מוגדרת ב $[0, \inf) \to [0, \inf)$



אם $\alpha = \frac{n}{m}, \alpha \in \mathbb{Q}$ אם n אי-זוגי אזי x^{α} מוגדרת לכל x

אם $\alpha > 1$



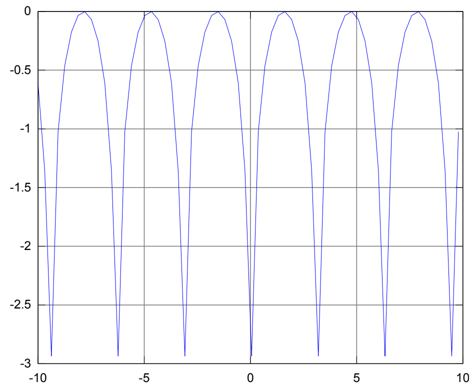
11.2 הרכבה של פונקציות

הגדרה: אם f, g שתי פונקציות אזי $f \circ g$ היא הרכבה של f, g: $(f \circ g)(x) = f(g(x))$

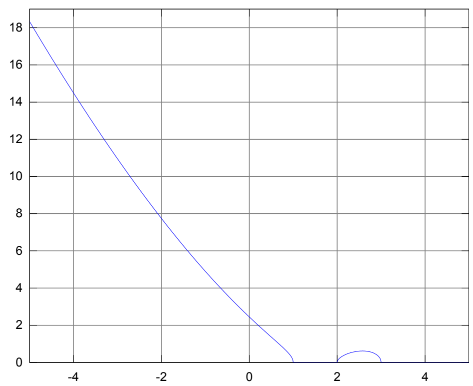
דוגמאות:

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln x \\ g(x) &= x + 1 \\ (f \circ g)(x) &= \ln(x+1) \\ (g \circ f)(x) &= \ln(x) + 1 \end{aligned}$$

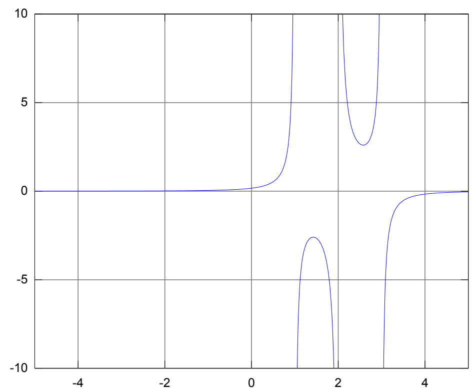
$$(g \circ f)(x) = \ln(\sin(x))$$



$$f(x) = \sqrt{(x-1)(x-2)(3-x)}$$



$$f(x) = \frac{1}{(x-1)(x-2)(3-x)}$$



11.3 רציפות

נניח שכ פונקציה $\mathbb{R} \to X$ אומרים כי f רציפה בנקודה $a \in X$ אם לכל שינוי מספיק קטן של המקור x בסביבת a השינוי בתמונת הפונקציה $|f(a+x) - f(a)|$ יהיה קטן כריצונינו.

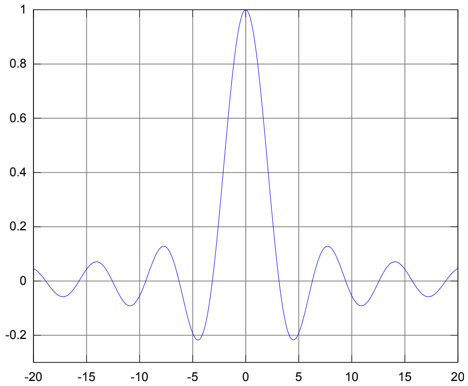
אומרים כי f רציפה אם f רציפה בכל נקודות הגדרתה.

דוגמה $f(x) = \frac{1}{x}$ היא רציפה בכל תחום הגדרתה $\{\mathbb{R} \setminus \{0\}\}$

$\sin x, \cos x, \tan x, e^x, \ln x, |x|, x^n, \cosh x, \sinh x, \tanh x, \frac{1}{x}$ הם רציפות בכל תחום ההגדרה שלהם.

דוגמה:

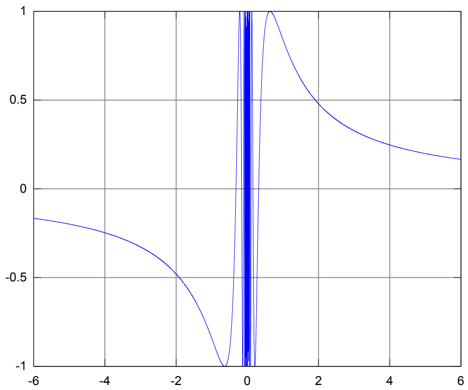
$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$



זה רציף כי כאשר $x \to 0$ אזי $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{x}{x} = 1$

אבל:

$$f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$



אי אפשר להגדיר את הנקודה $x = 0$ כי בשינוי קטן כלשהוא מקבלים שינוי גדול.

משפט ערך הביניים: אם f רציפה ו$f(x_1) = y_1$ וגם $f(x_2) = y_2$ אזי קיים $x_1 < x < x_2$ כך ש $f(x) = y$ ו $y_1 < y < y_2$

"A countenious function contains all intermediate values"

משפט: f פונקציה רציפה וחסומה ב $[a,b]$ אזי קיימים $a < x_1, x_2 < b$ כך ש

$$\begin{aligned} f\left(x_1\right) &= \max_{[a,b]} f \\ f\left(x_2\right) &= \min_{[a,b]} f \end{aligned}$$

פרק 12

הרצאה מס.8

12.1 פרק 5: נגזרות ואינטגרלים

שתויות שכבר למדנו בכורסים אחרים.

פרק 13

הרצאה מס.9

13.1 נגזרות

$$f^{'}(x) \propto \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

כלל השרשרת:

$$(f \circ g)^{'} = \left(f^{'} \circ g\right) \cdot g^{'}$$

$f^{'}(x)$	$f(x)$
ax^{a-1}	x^a
e^x	e^x
$\frac{1}{x}$	$\ln x$
$\cos(x)$	$\sin(x)$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x)$
$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos(x)$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$
$\sinh(x)$	$\cosh(x)$
$\cosh(x)$	$\sinh(x)$
$\frac{1}{\cosh^2 x}$	$\tanh(x)$

למצא $\frac{\partial}{\partial x}\arcsin(x)$

$$\begin{aligned} y &= \arcsin(x) \\ x &= \sin yx \\ \frac{\partial x}{\partial y} &= \cos(y) \\ \frac{\partial y}{\partial x} &= \frac{1}{\cos y} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x &= \sin\theta = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\\
\arcsin x &= \theta\\
\arccos x &= \frac{\pi}{2}-\theta\\
\arcsin(x)+\arccos x &= \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

מה זה נגזרת של $\tan x$?

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{f}{g}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\cdot\frac{1}{g(x)} &= -\frac{1}{(g(x))^2}g'(x)\\
\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(f(x)\cdot\frac{1}{g(x)}\right)\\
&= f'(x)\frac{1}{g(x)}+f(x)\cdot\frac{-g'(x)}{(g(x))^2}\\
&= \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{(g(x))^2}
\end{aligned}$$

לכן

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\frac{\sin x}{\cos x} &= \frac{\cos x\cdot\cos x-\sin x(-\sin x)}{(\cos(x))^2}\\
&= \frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}\\
&= \frac{1}{\cos^2 x}
\end{aligned}$$

13.1.1 נגזרת של $\sinh(x)$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}(\sinh(x)) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}\left(e^x-e^{-x}\right)\right)\\
&= \left(\frac{1}{2}\left(e^x+e^x\right)\right)\\
&= \cosh(x)
\end{aligned}$$

דוגמאות:

$$
\begin{aligned}
x^x &= e^{x\ln x} \\
\frac{\partial}{\partial x}x^x &= e^{x\ln x}\left(\ln x + x\frac{1}{x}\right) \\
& (1+\ln x)\, e^{x\ln x}
\end{aligned}
$$

13.1.2 מציאת $\frac{\partial}{\partial x}\left(\cosh^{-1}x\right)$

$$
\begin{aligned}
y &= \cosh^{-1}x \\
\cosh y &= x \\
\frac{\partial x}{\partial y} &= \sinh y \\
\frac{\partial y}{\partial x} &= \frac{1}{\sinh y} \\
&= \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}
\end{aligned}
$$

השתמשנו בזהות $\cosh^2 x - \sinh^2 = 1$
דרך אחרת:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\cosh^{-1}x &= \frac{\partial}{\partial x}\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\ln\left(x+\left(x^2-1\right)^{\frac{1}{2}}\right) \\
&= \frac{1}{x+\left(x^2-1\right)^{\frac{1}{2}}}\cdot\left(1+\frac{1}{2}\left(x^2-1\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2x\right) \\
&= \frac{1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}}{x+\left(x^2-1\right)^{\frac{1}{2}}} \\
&= \frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{x+\sqrt{x^2-1}} \\
&= \frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{\sqrt{x^2-1}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}+1\right)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}
\end{aligned}
$$

13.1.3 נגזרת a^x

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}a^x &= \frac{\partial}{\partial x}\left(e^{x\ln a}\right)\\ &= e^{x\ln a}\ln a\\ &= a^x\ln a\end{aligned}$$

13.2 נגזרת של פונקציות סתומות Implicit Functions

דוגמה:

$$xy^3+x^3y=10$$

לא יכולים לגזור את זה אלה סביב נקודה כי יתכן כי ל-x יהיה יותר מ-y. אז מה הוא השיפוע סביב $(x,y)=(1,2)$?

$$\begin{aligned}xy^3+x^3y &= 10\\ \frac{\partial}{\partial x}\left(xy^3+x^3y\right) &= \frac{\partial}{\partial x}10\\ \underbrace{y^3+3y^2y^{'}}_{\frac{\partial}{\partial x}(xy^3)}+\underbrace{2x^2y+x^3y^{'}}_{\frac{\partial}{\partial x}(x^3y)} &= 0\end{aligned}$$

מציבים $(1,2)$ אזי

$$\begin{aligned}8+12y^{'}+6+y^{'} &= 0\\ 13y^{'}+14 &= 0\\ y^{'} &= -\frac{14}{13}\end{aligned}$$

13.3 קירובים ליניאריים

מצא קירוב של $\arctan(1.05)$

$$\begin{aligned}f(x) &= \arctan(x)\\ f^{'}(x) &= \frac{1}{1+x^2}\\ f(1) &= \frac{\pi}{4}\\ f^{'}(1) &= \frac{1}{2}\\ f(1.05) &\approx f(1)+f^{'}(1)\cdot(1.05-1)\\ &\approx \frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}(0.05)\end{aligned}$$

13.4 דיפרנציאל

אם $x, y, z \dots$ משתנים כך שאם נתון אחד מהם נוכל לחשב את האחרים: $y = f(x), z = g(y) \Rightarrow g = t(x)$
דוגמה:

$$\begin{aligned} y &= x^2 \\ z &= \arctan y \end{aligned}$$

בסביבה של $\begin{pmatrix} x = 1 \\ y = 1 \\ z = \frac{\pi}{4} \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial x} &= 2x \\ \partial y &= 2x\partial x \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{1}{1+y^2} \\ \partial z &= \frac{1}{1+y^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z &= \arctan\left(x^2\right) \\ \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{1}{1+x^4} \cdot 2x \\ \partial z &= \frac{2x}{1+x^4}\partial x \end{aligned}$$

זה הוא כלל השרשרת:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x}$$

13.5 משפט הערך הממוצע

אם נתונה פונקציה בשתי נקודות $f(a) = j, f(b) = k$ אזי השיפוע הממוצע הוא $\frac{k-j}{b-a}$, וקיימת נקודה $a \le x \le b$ כך ש $f^{'}(x) = \frac{k-j}{b-a}$

פרק 14

הרצאה מס.10 - טורי Taylor

14.1 נגזרת מסדרים גבוהים

מסמנים

$$\frac{\partial^n f(x)}{\partial x^n} \equiv f^{(n)}(x)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial t} &= \dot{f}\\ \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} &= \ddot{f}\end{aligned}$$

דוגמאות:

$$\begin{aligned}f(x) &= x^3+2x+1\\ f^{'}(x) &= 3x^2+2\\ f^{''}(x) &= 6x\\ f^{'''}(x) &= 6\\ f^{''''}(x) &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f(x) &= x^2\sin x\\ f^{'}(x) &= 2x\sin x+x^2\cos x\\ f^{''}(x) &= 2\sin x+2x\cos x+2x\cos x-x^2\sin x\\ &= 2\sin x+4x\cos x-x^2\sin x\\ f^{'''}(x) &= \ldots\end{aligned}$$

אפשר לחשב את זה דרך נוסחת לייבניתס

14.2 נוסחת Laibnitz

$$\begin{aligned}(f\cdot g)^{(n)} &= \frac{\partial^n}{\partial x^n}(f\cdot g)\\ &= \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}f^{(i)}g^{(n-i)}\end{aligned}$$

בעזרת זה נוכל לכתוב צורה כללית של $\frac{\partial^n}{\partial x^n}\left(x^2\sin x\right)$:

$$\begin{aligned}x^2 &= f\\ \sin x &= g\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f^{'}(x) &= 2x\\ f^{''}(x) &= 2\\ f^{(n\geq 3)}(x) &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^n}{\partial x^n}\left(x^2\sin x\right) &= f\cdot g^{(n)}+\binom{n}{1}f^{'}g^{(n-1)}+\binom{n}{2}f^{''}g^{(n-2)}\\ &= x^2(\sin x)^{(n)}+\binom{n}{1}2x(\sin x)^{(n-1)}+\binom{n}{2}2(\sin x)^{(n-2)}\end{aligned}$$

במקרה של $\sin x$ שזה פומ/ציה תלויה רק בשארית החילוק בארבע לכן אם למשל $n=4m+3$

$$\begin{aligned}f^{(4m+3)}(x) &= x^2g^{(4m+3)}+(4m+3)\cdot 2x(\sin x)^{(4m+2)}+(4m+3)(4m+2)g^{(4m+1)}\\ &= x^2(-\cos x)+2(4m+3)x(-\sin x)+(4m+3)(4m+2)(\cos x)\end{aligned}$$

14.3 נוסחת McLoren

נניח כי f פולינום ממעלה n אזי $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ אז כל לגזור אותו ומקבלים

$$\begin{aligned}f(x) &= a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0\\ f^{'}(x) &= a_1+2a_2x+\cdots+na_nx^{n-1}\\ f^{''}(x) &= 2a_2+\cdots+n(n-1)x^{n-2}\end{aligned}$$

אזי מקבלים

$$
\begin{aligned}
f(0) &= a_0 \\
f^{'}(0) &= a_1 \\
f^{'''}(0) &= 2a_2 \\
\vdots &= \vdots \\
f^{(n)}(0) &= n!a_n
\end{aligned}
$$

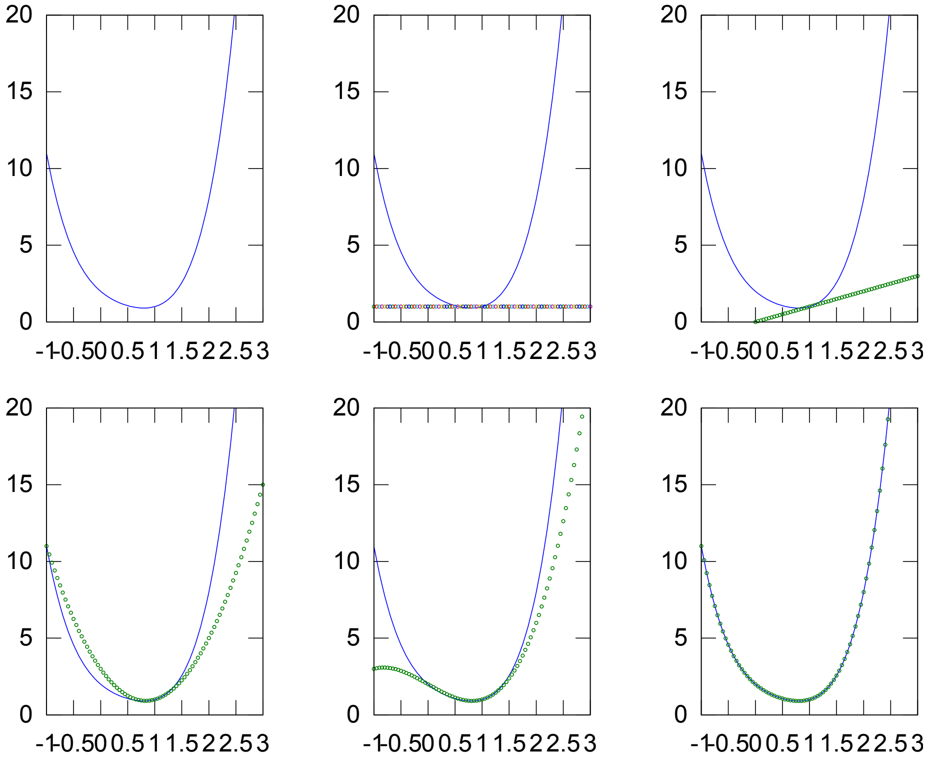
אז אפשר לכתוה

$$
\begin{aligned}
f(0) &= a_0 \\
f^{'}(0) &= a_1 \\
\frac{f^{'''}(0)}{2} &= a_2 \\
\vdots &= \vdots \\
\frac{f^{(n)}(0)}{n!} &= a_n
\end{aligned}
$$

אזי

$$
\begin{aligned}
f(x) &= f(0) + f^{'}(0)\,x + \frac{f^{''}(x)}{2}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}x^n \\
&= \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(0)}{i!}x^i
\end{aligned}
$$

זאת נוסחת מקלורן McLoren לפולינומים. דוגמה עבור $x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 3x + 2$



14.4 נוסחת Taylor סביב $x = a$

f פולינום ממעלה n אזי נגדיר $g(x) = f(x+a)$ אזי יש נוסחת מקלורן ל-g:

$$\begin{aligned} g(x) &= \sum_{i=0}^{n} \frac{g^{(i)}(0)}{i!} x^i \\ &= \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{i!} (x-a)^i \\ & f(a) + f^{'}(a)(x-a) + \frac{f^{''}(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \end{aligned}$$

זאת נוסחת טילור לפולינומים.
אבל אם f הוא פונקציה כלשהיא אזי

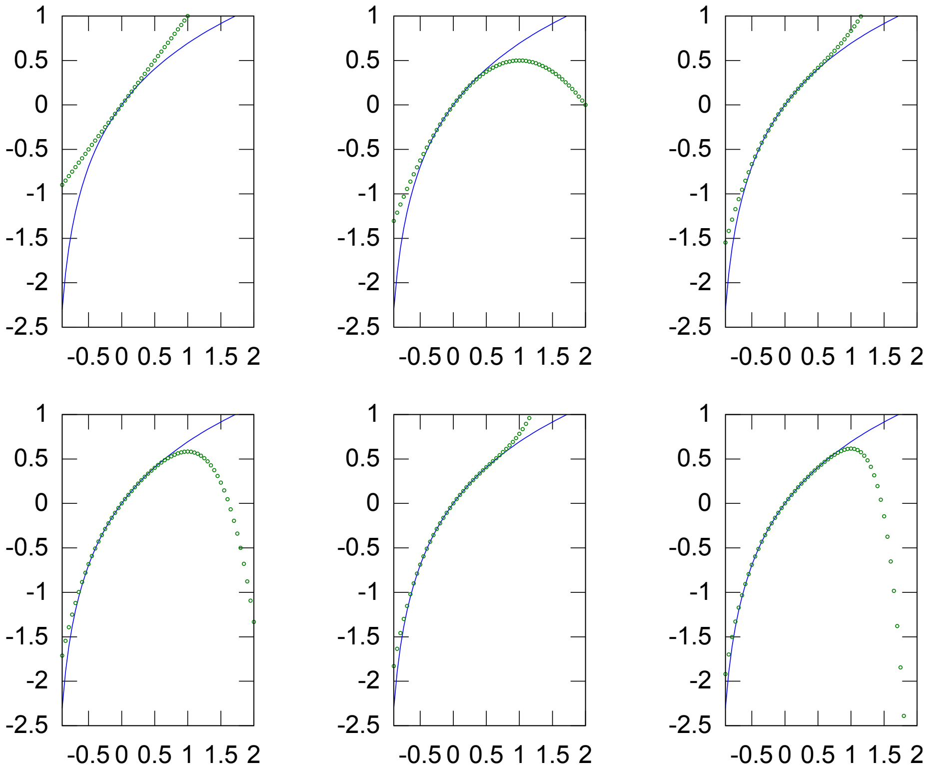
$$P_n^f(x) \equiv \sum_{r=0}^{n} \frac{f^{(r)}(a)}{r!}(x-a)^r + R_n$$

דוגמה:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \ln(1+x) \\
f'(x) &= \frac{1}{1+x} \\
f''(x) &= -\frac{1}{(x+1)^2} \\
f''(x) &= \frac{2}{(x+1)^3} \\
f'''(x) &= \frac{6}{(x+1)^4}
\end{aligned}
$$

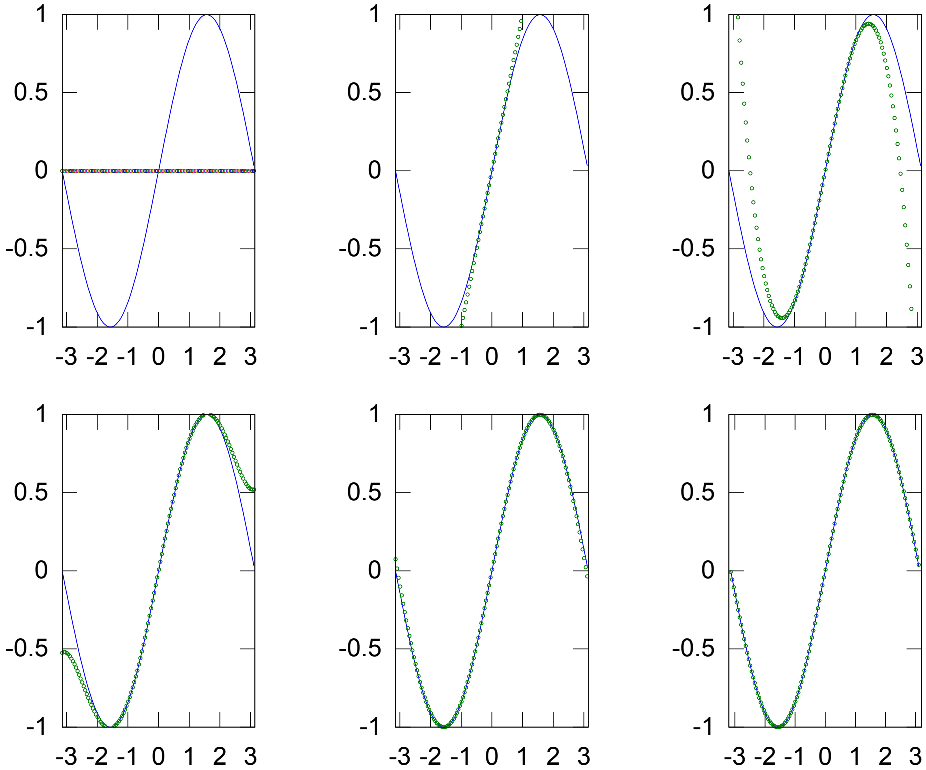
לכן הפיתוח סביב $a=0$ יתן לנו

$$f_r^p = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \pm \frac{x^r}{r}$$



דוגמה:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sin x \\
f_r^P &= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + \frac{x^9}{362880} + \cdots
\end{aligned}
$$



14.5 שלוש שאלות על פולינומי Taylor

1. לנקודה מסוימת x האם המספרים $P_n^f(x)$ מתקרבים למספר מסוים?
2. אם כן האם המספר הוא $f(x)$?
3. לנקודה x ומספר n מסוים באיזה דיוק המספר $P_n^f(x)$ נותן קירוב ל$f(x)$?

לא יכולים להוכיח את זה במקרה הכללי(תלמדו אינפי) אבל לטורים מסוימים אפשר.

פרק 15

תרגול מס.4

15.1 שאלות מפרק קודם

$$
\begin{aligned}
2\cos\omega t+5\sin\omega t &= A\cos\omega t+\varphi\\
\sqrt{29}\left(\frac{2}{\sqrt{29}}\cos\omega t+\frac{5}{\sqrt{29}}\sin\omega t\right) &= A\cos\omega t+\varphi\\
\sqrt{29}\left(\cos\varphi\cos\omega t+\sin\varphi\sin\omega t\right) &= A\cos\omega t+\varphi\\
\sqrt{29}\cos\left(\omega t+\varphi\right) &= A\cos\left(\omega t+\varphi\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\cosh^{-1}2 &= \ln\left(x+\sqrt{x+1}\right)\\
&= \ln\left(2+\sqrt{3}\right)
\end{aligned}
$$

טוב לזכור

$$
\begin{aligned}
csc\left(x\right) &= \frac{1}{\sin\left(x\right)}\\
sec\left(x\right) &= \frac{1}{\cos\left(x\right)}
\end{aligned}
$$

שאלה

$$
\begin{aligned}
\cot^{2}\left(ix\right)+1 &= \csc^{2}\left(ix\right)\\
\left(\frac{\cos ix}{\sin ix}\right)^{2}+1 &= \left(\frac{1}{\sin ix}\right)^{2}\\
\left(\frac{\cosh x}{i\sinh x}\right)^{2}+1 &= \left(\frac{1}{\sinh x}\right)^{2}\\
-\frac{\cosh^{2}x}{\sinh^{2}x}+1 &= \frac{1}{\sinh^{2}x}
\end{aligned}
$$

15.2 פונקציות

האם $(-2)^{\pi}$ מוגדר? $f(x)=x^{y}$ אם y הוא מספר אי רציונאלי אזי זה מוגדר רק לy חיובי. $2^{\pi}=e^{\pi\ln 2}$.

מצאו לפונקציות הבאות תחום ההגדרה, התחום שבו הם הפיכות, סרטטו אותם ומצאו את ההפוכה:

$$f(x)=x^{\frac{3}{4}}$$

מוגדר ב$x>0$.
הראת בערך כמו $\sqrt{x}$
הפיכה בכל התחום ההגדרה $[0,\inf]$
הפונקציה ההפוכה היא $f^{-1}(x)=x^{\frac{4}{3}}$

$$f(x)=\log_{2}x$$

נראת כמו $\ln x$
הפיכה בכל התחום $[0,\inf]$
הפונקציה ההפיכב ביא $f^{-1}(x)=2^{x}$

15.3 רציפות

משפט ערך הביניים אם $a,b\in R$ ו$a<b$ ו$f(a)=x,f(b)=y$ אזי $x<w<y$ אזי קיים c כך ש$a\le c\le b$ ו $f(c)=w$

משפט וירשטאוס: רס $f(x)$ פונקציה רציפה וחסומה אזי יש היא מסיגה את חסמיה(יש לה מינימום ומקסימום)

15.4 נגזרות

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

פרק 16

תרגול מס.5

16.1 נגזרות חשובות

$$
\begin{aligned}
\left(x^n\right)' &= nx^{n-1} \\
\left(e^x\right)' &= e^x \\
\left(\ln x\right)' &= \frac{1}{x} \\
\left(\sin x\right)' &= \cos x \\
\left(\cos x\right)' &= -\sin x \\
\left(\tan x\right)' &= \frac{1}{\cos^2 x} \\
\left(a^x\right)' &= a^x \ln a \\
\left(\cosh x\right)' &= \sinh x \\
\sinh x &= \cosh x
\end{aligned}
$$

דוגמה: חשבו את הנגזרות הבאות:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt[7]{2x+\ln x}\right) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(2x+\ln x\right)^{\frac{1}{7}} \\
&= \frac{1}{7}\left(2x+\ln x\right)^{-\frac{6}{7}} \cdot \left(2+\frac{1}{x}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}
$$

$$
\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{\ln^2\left(7x^2+3x-5\right)}\right) = \frac{1 \cdot \ln^2\left(7x^2+3x-5\right) - x \cdot 2 \cdot \ln\left(7x^2+3x-5\right)\frac{1}{7x^2+3x-5} \cdot (14x+3)}{\ln^4\left(7x^2+3x-5\right)}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\left(x^{x^x}\right) &= \frac{\partial}{\partial x}e^{\ln x\cdot x^x}\\
&= e^{\ln x\cdot x^x}\cdot\left(\ln x\cdot x^x\right)^{'}\\
&= e^{\ln x\cdot x^x}\left(\frac{1}{x}\cdot x^x+\ln x\cdot\left(x^x\right)^{'}\right)\\
&= e^{\ln x\cdot x^x}\left(\frac{1}{x}\cdot x^x+\ln x\cdot\left(e^{\ln x\cdot x}\right)^{'}\right)\\
&= e^{\ln x\cdot x^x}\left(\frac{1}{x}\cdot x^x+\ln x\cdot e^{\ln x\cdot x}\left(\ln x\cdot x\right)^{'}\right)\\
&= e^{\ln x\cdot x^x}\left(\frac{1}{x}\cdot x^x+\ln x\cdot e^{\ln x\cdot x}\cdot\left(\ln x+1\right)\right)\\
&= x^{x^x}\left(x^{x-1}\ln x\cdot x^x\cdot\left(\ln x+1\right)\right)
\end{aligned}
$$

16.2 איך לזכור נגזרות של פונקציות הפוכות

$$
\begin{aligned}
y &= \sin^{-1}x\\
x &= \sin y\\
\frac{\partial}{\partial y}x &= \frac{\partial}{\partial y}\sin y\\
\frac{\partial x}{\partial y} &= \cos x\\
\frac{1}{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)} &= \frac{1}{\cos y}\\
&= \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}\\
&= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}
\end{aligned}
$$

16.3 נגזרת של פונקציה סתומה

$$\cos\left(xy\right)-y=x$$

חשב את $\frac{\partial y}{\partial x}$ בנקודה $(1,0)$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\left(\cos\left(xy\right)-y\right) &= \frac{\partial x}{\partial x}\\ -\sin\left(xy\right)\cdot\left(y+xy^{'}\right)-y^{'} &= 1\\ y^{'} &= 0\end{aligned}$$

16.4 קירוב ליניארי

$$\begin{aligned}f\left(x\right) &\approx P\left(a\right)\\ &= f\left(a\right)+f^{'}\left(a\right)\cdot\left(x-a\right)\end{aligned}$$

למשל הקירוב הליניארי של $\ln x$ בסביבת $x=1$ הוא

$$P\left(x\right)=0+1\left(x-1\right)=x-1$$

16.5 נוסחת ליבניץ

$$\left(f\cdot g\right)^{(n)}=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(i)}g^{(n-i)}$$

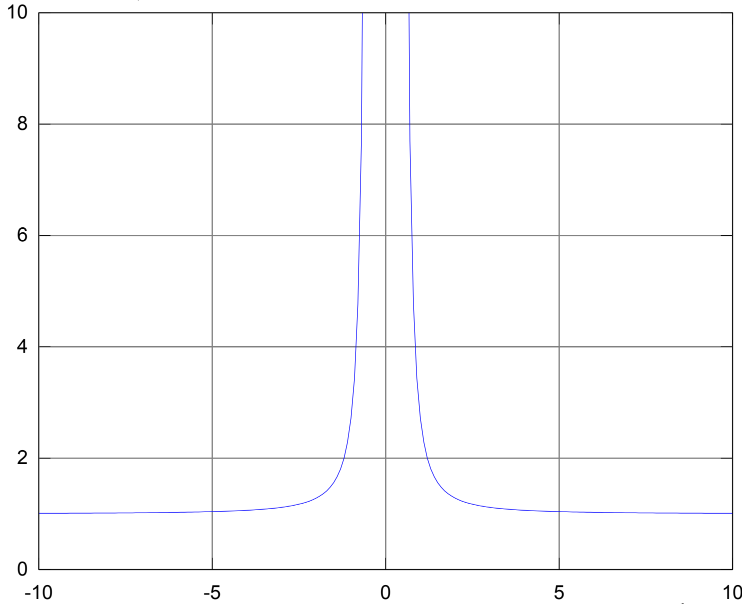
פרק 17

הרצאה מס. 11

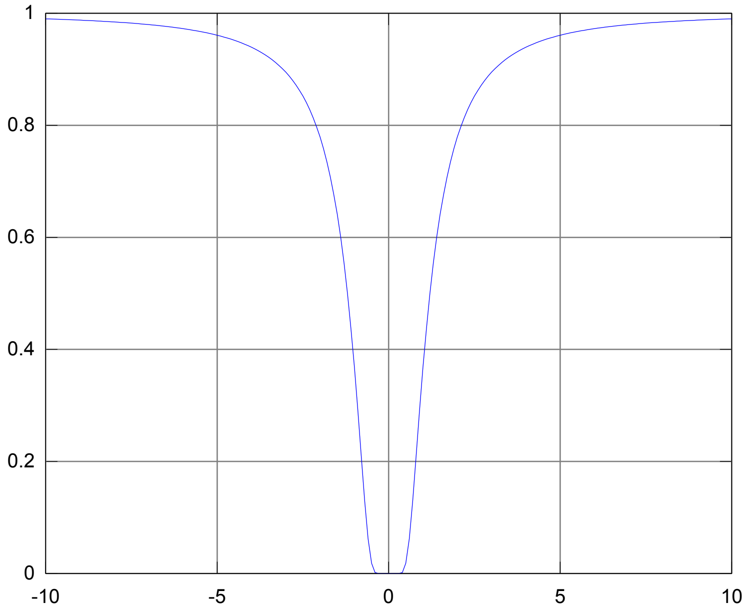
דוגמה:

$$f\left(x\right)=e^{-\frac{1}{x^{2}}}$$

אפשר לצייר אז $e^{\frac{1}{x^{2}}}$ כדי לכבל מוסג על איך נראת הפונקציה לפני שמצירים אותה.



אזי $e^{-\frac{1}{x^{2}}}$ היא



אבל אם מנסים לבנות טור טילור סביב אפס מקבלים כי $f^{(n)}(0) = 0$ לכל $n \in \mathbb{N}$ אזי מקבלים $P_n^f(x) = 0$.

17.1 נוסחת Taylor

$$f(x_1) = P_n^f(x_1) + \frac{f^{(n-1)}(c)}{(n+1)!}(x_1 - a)^n$$

אזי קיים מספר c כך שזה נכון. זאת היא השארית בצורת לגרנג La Grange.

17.1.1 משמעות גיאומטרית של נוסחת טילור

אם $n = 0$ אזי $\exists c \in (a, x_1)$ כך ש $f(x) = f(a) + f'(c)(x_1 - a)$ זאת אומרת כי $\frac{f(x_1) - f(a)}{x_1 - a}$.

דוגמה:

מצא את $\ln(1.1)$ בדיקוק של 5 ספרות אחרי הנקודה, $< \frac{1}{2}10^{-5}$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6}$$

השארית היא $\frac{0.1^{n+1}}{n+1}$ אזי רוצים $\frac{0.1^{n+1}}{n+1} < \frac{1}{2}10^{-5}$

פרק 18

הרצאמה מס.12

18.1 קירוב מוביל ותת-מוביל

טור טילור של $f(x)$ הוא

$$\sum_{n=0}^{\inf}\frac{f^{(n)}(x-a)^{n}}{n!}$$

טור טילור עד מקום n נסמן $P_{n}^{f}(x)$. כאשר $f(x)$ פולינום ממעלה n $k\leq n$ מתקיים $P_{n}^{f}(x)=f(x)$.
נניח ש $0\leq k$ מספר טבעי קטן ביותר כך ש $f^{(k)}(a)\neq0$. $k<L$ מספר טבעי קטן ביותר כך ש $f^{(L)}\neq0$.

$$P_{f}(x)=\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^{k}+\cdots+\frac{f^{(L)}(a)(x-a)^{L}}{L!}$$

דוגמה: $f(x)=\sin x$ אזי $P_{f}(x)=x-\frac{x^{3}}{3!}+\ldots$.
הגדרה: אם כותבים $f(x)=o(g(x))$ אזי $\frac{f(x)}{g(x)}\underset{x\to0}{\to}0$.
דוגמה: כאשר $x\to0$ מתקיים $\sin(x)-x=-\frac{x^{3}}{3}+\frac{x^{3}}{5!}-\cdots=o(x^{2})$ זה כמו לאומר $\sin x=x+o(x^{2})$.
דוגמאות:

$$\sin x=x-\frac{x^{3}}{6}+o(x^{3})$$

$$\begin{aligned}\sin^{2}(x) &= \left(x-\frac{x^{3}}{6}+o(x^{3})\right)^{2}\\ &= x^{2}+\frac{x^{4}}{3}+\cdots+o(x^{5})\end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial x^4}\left(\sin^2 x\right)|_{x=0}=-\frac{4!}{3}=-8$$

18.2 נקודות קריטיות של פונקציות

$x=a$ כך ש $f^{'}(a)=0$ אזי $f(x)=f(a)+\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)$. אם k זוגי ו$f^{(k)}(a)>0$ אזי זה מינימום., אם הוא חיובי אז זה מקסימום.

אם k אי זוגי אזי זאת נקודת פיתול כלומר מקבלים נקודת פיתול באופן בלתי תלוי ב$f^{'}(a)$, מה שצריך להתקיים זה ש$f^{(k)}(x)$ הראשון שבו $f^{(k)}(a)\neq 0$ יהי k אי-זוגי.

18.3 דוגמאות לחקירת פונקציה

צריך לעשות:

- $f(0)$ חיתוך עם ציר y.
- $f(x)=0$ השורשים.
- אסימפטוטות.
- סימנים של f.
- נק' קריטיות ולפעמים גם את נקודות הפיתול.

$$f(x)=\frac{x^2+4}{x+1}$$

x גדל

$$\begin{aligned} f(x) &\approxeq x\\ f(x) &= x+o(x)\\ f(x) &= \frac{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}\\ &= x\cdot\left(1+\frac{4}{x^2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{x}\right)^{-1}\end{aligned}$$

אם x גדול כלומר $x\to\inf$ אזי

$$\begin{aligned} f(x) &= x\left(1-\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)\\ &= x-1+o(1)\end{aligned}$$

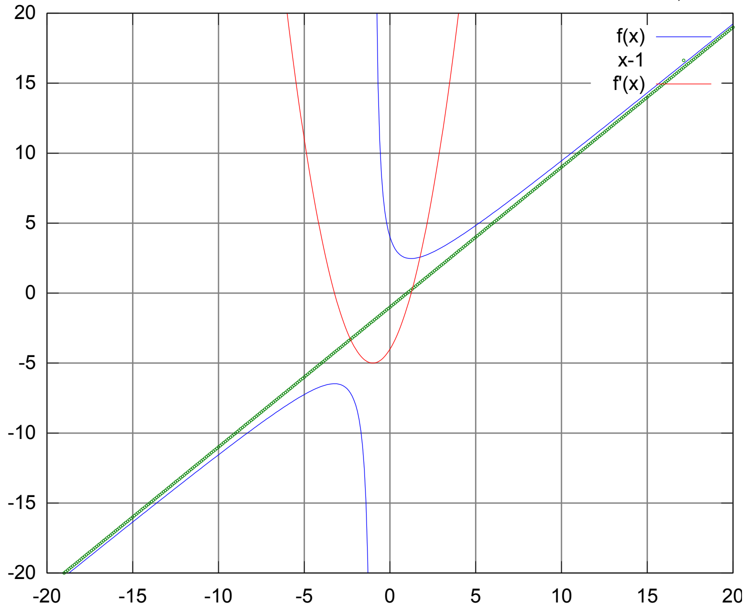
דרך אחרת למצא את האסימפטוטה:

$$\begin{aligned}\frac{x^2+4}{x+1} &= \frac{x^2-1+5}{x+1}\\ &= x-1+\frac{5}{x+1}\end{aligned}$$

רוצים למצא נרודות קיצון:

$$\begin{aligned}f^{'}(x) &= 0\\ \frac{\left(x^2+4\right)\cdot 1-(x+1)(2x)}{(x+1)^2} &= 0\\ x^2+2x-4 &= 0\\ x &= -1\pm\sqrt{5}\end{aligned}$$

אפשר למצא אם הנקודות מקסימום או מינימום דרך עוד גזירה או דרך ציור של המונה $f^{'}(x)$ ולראות שהנגזרת עוברת משלילי לחיובי בנקודה וההפך בנקודה אחרת ולציין מקסימום ומינימום.



פרק 19

תרגול מס.6

פולינום טילור מסדר r סביב a לפונקציה f הוא $P_r^f\left(x\right)=\sum_{k=0}^{r}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}\left(x-a\right)^k$ ומתקיים בו כי $f\left(a\right)=P_r^f\left(a\right)$ וגם $f^{(k)}\left(a\right)=P_r^f\left(a\right)$. לכל פונקציה יש אוסף נקודות שבהם הפונקציה מתכנסת. אוסף זה נקרא תחום ההתכנסות של טור טילור זה.

דוגמה:

$e^x=x+\frac{x^2}{2}+\cdots=\sum_{n=0}^{\inf}\frac{x^n}{n!}$ מתכנסת לכל $\mathbb{R}$

$\sin x=\sum_{n=0}^{\inf}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$ גם לכל $\mathbb{R}$

$\sin x=\sum_{n=0}^{\inf}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}$ גם לכל $\mathbb{R}$

$\ln\left(1+x\right)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots=\sum_{n=0}^{\inf}\frac{(-1)^n}{n}x^n$ מתכנס כאשר $-1<x<\leq 1$

$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots=\sum_{n=0}^{\inf}\left(-x\right)^n$ מתכנס ב $-1<x<1$

$\arctan x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{6}\cdots=\sum_{n=0}^{\inf}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$ מתכנס ב $-x\leq x\leq 1$

משפט:שארית מצורת לגרנג': אם f גזירה $n+1$ פעמים בסביבת a והסביבה כוללת את x_1 אז קיים c בין a ל-x_1 כך שהשארית מסדר n בנקודה x_1 היא $R_n\left(x_1\right)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\left(x_1-a\right)^{n+1}$

תרגילים:

1. חשבו את e על ידי קירוב רציונאלי עם דיוק קטן מ10^{-5}

$$\begin{aligned}
f\left(x\right) &= \sum_{n=0}^{N}\frac{1}{n!}x^n+\sum_{n=N+1}^{\inf}\frac{1}{n!}x^n\\
&= \sum_{n=0}^{n}\frac{1}{n!}x^n+\frac{f^{(N+1)}\left(c\right)}{(N+1)!}\left(x-1\right)^{N+1}
\end{aligned}$$

אזי רוצים $\frac{f^{(N+1)}(c)}{(N+1)!}\left(x-1\right)^{N+1}<10^{-5}$ כך ש $0<c<1$

$$\frac{f^{(N+1)}\left(c\right)}{(N+1)!}\left(x-1\right)^{N+1}=\frac{e^c}{(N+1)!}<\frac{e}{(N+1)!}<\frac{3}{(N+1)!}<10^5$$

אזי

$$\begin{aligned}
3\cdot 10^5 &< (N+1)!\\
N &\leq 8
\end{aligned}$$

אזי

$$e \approx 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots + \frac{1}{8!} = \frac{109601}{40320}$$

שאלה 2:

$$\begin{aligned} \sin\left(x\right) &= \sum_{n=0}^{\inf} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \\ &= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} \end{aligned}$$

זו סדרה ש:

1. הסימנים מתחלפים
2. כל איבר גדול בערך מוחלט מזה שבא אחריו.

אזי יש משפט שאומר:

$$\left| \sum_{n=N+1}^{\inf} a_n x^n \right| < \left| a_{n+1} x^{N+1} \right|$$

אם נרצה כי $\sin x - P_N^{\sin x}\left(x\right) < 10^{-5}$ אזי

$$\frac{0.2^{2N+3}}{(2N+3)!} < 10^{-5}$$

רואים כי $N = 2$ מספיק כבר.

19.1 סימוני למדאו $o\left(\right), O\left(\right)$

הריבוי של 0 של פונקציה $f\left(x\right) = \left(x-a\right)^n$ היא n. אבל איך להגדיר את זה למקרה הכללי?

משפט: הסדר של שורש של f בנקודה a הוא המספר המינימאלי שבו $f\left(0\right) = f'\left(0\right) = \cdots = f^{(k-1)}\left(0\right) = 0$ ו $f^{(k)}\left(0\right) \neq 0$

נאמר ש $f\left(x\right) = o\left(\left(x-a\right)^n\right)$ אם סדר האפסים של f בנק' a גזירה ממש מ- n

$$\begin{aligned} \sin x &\sim o\left(x^0\right) \\ \sin x - x &\sim o\left(x^1\right) \end{aligned}$$

בעזרת פעולות על טור טילור מצאו את האיבר המוביל(האיבר הראשון שלא מתאפס) והתת מוביל(האיבר השני שלא מתאפס) של f בסביבת x_0

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \ln x - x \\
&\approx \underbrace{1}_{\text{movil}} - \underbrace{\frac{1}{2}(x-1)^2}_{\text{tat movil}} + \frac{1}{3}(x-1)^3 + \dots
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1 - \frac{x^2}{2} - \cos x}{x^3} \\
a &= 0 \\
f(x) &\approx \frac{1 - \frac{x^2}{2} - \left(1 - \frac{x^3}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots\right)}{x^3} \\
&= \frac{-\frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots}{x^3} \\
&= -\frac{x}{4!} + \frac{x^3}{6!} + \dots
\end{aligned}
$$

פרק 20

הרצאה מס.13

20.1 פרק 7: האינטגרל הלא מסוים

הגדרה לפונקציה f אומרים כי F הפונקציה הקדומה שלה אם"ם $F^{'}=f$

דוגמה: $\frac{\partial}{\partial x}(\sin x)=\cos x$ לכן $\sin x$ היא פונקציה קדומה של $\cos x$.

לכל פונקציה יש אינסוף פונקציות קדומות כי אם F קדומה של f אזי גם $F+c$ עבור $c\in\mathbb{R}$ היא פונקציה קדומה לה.

אם גם F וG הם קדומות של f אזי $F-G=constant$ כי אם $F^{'}=f$ ו $G^{'}=f$

אזי $(F-G)^{'}=0\Rightarrow F-G=constant$

אם F קדומה של f אזי כותבים $\int f(x)\,\partial x=F+c$

תכונות:

אינטגרל של סכום:

$$\int(f(x)+g(x))\,\partial x=\int f(x)\,\partial x+\int g(x)\,\partial x$$

אינטגרציה בחלקים:

$$\int uv^{'}=uv-\int u^{'}v$$

אפשר לכתוב גם:

$$\int fg=f\int g-\int\left(f^{'}\int g\right)$$

אינטגרציה על ידי הצבה:

$$\int f(x)\,\partial x=\int f(\phi(t))\,\phi^{'}(t)\,\partial t$$

כאשר $\phi(t)=x$

דוגמאות:

$$\begin{aligned}\int\frac{\partial x}{\sqrt{a^2-x^2}} &= \int\frac{\partial x}{\sqrt{a^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}}\\ &= \frac{1}{a}\int\frac{\partial x}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}\end{aligned}$$

מציבים $u=\frac{x}{a}\Rightarrow x=ua$ אזי

$$\begin{aligned}\frac{1}{a}\int\frac{\partial x}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} &= \frac{1}{a}\int\frac{u^{'}\partial u}{\sqrt{1-u^2}}\\ &= \frac{1}{a}\int\frac{a\partial u}{\sqrt{1-u^2}}\\ &= \int\frac{\partial u}{\sqrt{1-u^2}}\\ &= \arcsin\left(u\right)+c\\ &= \arcsin\left(\frac{x}{a}\right)+c\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int\frac{\partial x}{a^2+x^2} &= \sinh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)+c\\ \int\frac{\partial x}{x^2-a^2} &= \cosh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)+c\\ \int\frac{\partial x}{a^2-x^2} &= \frac{1}{a}\tanh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)+c\\ \int\frac{\partial x}{a^2+x^2} &= \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)+c\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{\tan\left(ax\right)}\partial x &= \frac{1}{a}\int\frac{1}{\tan t}\partial t\\ &= \frac{1}{a}\ln\left(\sin t\right)+c\\ &= \frac{1}{a}\ln\left(\sin\left(ax\right)\right)+c\\ &= \frac{1}{a}\ln\left|\sin\left(ax\right)\right|+c\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{(x+1)^2+4}\partial x &= \int \frac{1}{t^2+4}\partial t \\
&= \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{t}{2}\right)+c \\
&= \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right)+c
\end{aligned}$$

השלמה לריבוע:

$$\begin{aligned}
\int \frac{\partial x}{x^2-4x+8} &= \int \frac{\partial x}{(x-2)^2+4} \\
&= -\int \frac{\partial x}{2-(x-2)^2} \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2}}\tanh\left(\frac{x-2}{\sqrt{2}}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{\partial x}{\sqrt{8+2x-x^2}} &= \int \frac{\partial x}{\sqrt{-(x-1)^2+9}} \\
&= \sin^{-1}\left(\frac{x-1}{3}\right)
\end{aligned}$$

דוגמאות של אינטגרציה בחלקים

$$\begin{aligned}
\int \underbrace{\ln x}_{1\cdot\ln x}\partial x &= \ln x\int 1\partial x-\int\left((\ln x)'\int 1\partial x\right)\partial x \\
&= x\ln x-\int\left(\frac{1}{x}\cdot x\right)\partial x \\
&= x\ln x-x
\end{aligned}$$

פרק 21

הרצאה מס. 14

21.1 אינטגרציה לפי חלקים

דוגמה:

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x}\ln x\partial x &= (\ln x)(\ln x) - \int \frac{1}{x}(\ln x)\,\partial x + c \\
2\int \frac{1}{x}\ln x\partial x &= \ln^2 x + c \\
\int \frac{1}{x}\ln x\partial x &= \frac{1}{2}\ln^2 x + c
\end{aligned}$$

21.2 נוסחת נסיגה

$$\begin{aligned}
I_n &= \int x^n e^x \partial x \\
&= x^n \int e^x \partial x - \int \left(\left(nx^{n-1}\right)\left(\int e^x \partial x\right)\partial x\right) \\
&= x^n e^x - n \cdot I_{n-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int (\ln x)^n \,\partial x &\underset{\substack{t=\ln x \\ \partial x = e^t \partial t}}{=} \int t^n e^t \partial t \\
&= (-1)^n \, n! \left(\frac{(-t)^n}{n!} + \frac{(-t)^{n-1}}{(n-1)!} + \cdots + 1\right) e^t + c \\
&= (-1)^n \, n! \left(\frac{(-\ln x)^n}{n!} + \frac{(-\ln x)^{n-1}}{(n-1)!} + \cdots + 1\right) x + c
\end{aligned}$$

21.3 דוגמאות של הצבה

א.

$$\int\left(t^{3}+t\right)e^{t^{4}+2t^{2}+5}\partial t$$

$$x=t^{4}+2t^{2}+5\Rightarrow\partial x=\left(4x^{3}+4t\right)\partial t$$

$$\begin{aligned}\int e^{x}\frac{1}{4}\partial x &= \frac{1}{4}e^{x}+c\\ &= \frac{1}{4}e^{t^{4}+2t^{2}+5}\end{aligned}$$

ב. כאשר r פונקציה רציונאלית

$$\int\frac{r\left(t\right)}{\sqrt{1-t^{2}}}\partial t$$

אזי עושים הצבה $t=\sin\theta,\cos\theta=\sqrt{1-t^{2}},\partial t=\cos\partial\theta$

$$\begin{aligned}\int\frac{r\left(t\right)}{\sqrt{1-t^{2}}}\partial t &= \int\frac{r\left(\sin\theta\right)}{\cos\theta}\cos\theta\partial\theta\\ &= \int r\left(\sin\theta\right)\partial\theta\end{aligned}$$

לדוגמה:

$$\begin{aligned}\int\frac{t^{2}}{\sqrt{1-t^{2}}}\partial t &= \int\frac{\sin^{2}\theta}{\cos\theta}\cos\theta\partial\theta\\ &= \int\sin^{2}\theta\partial\theta\\ &= \frac{1}{2}\left(\theta-\sin\theta\cos\theta\right)+c\\ &= \frac{1}{2}\left(\arcsin t-t\sqrt{1-t^{2}}\right)+c\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int\sqrt{1-t^{2}} &= \int\cos\theta\cos\theta\partial t\\ &= \int\cos^{2}\theta\end{aligned}$$

יש מקרים שאפשר להציב בהם יותר מדבר אחד:

$$\int\frac{r\left(t\right)\partial t}{\sqrt{1+t^{2}}}\Rightarrow\begin{cases}t=\tan\theta & 1+\tan^{2}=sec^{2}\theta\\t=\sinh x & \sqrt{1+\sinh^{2}x}=\cosh x\end{cases}$$

$$\int\frac{r\left(t\right)\partial t}{\sqrt{t^{2}-1}}\Rightarrow\begin{cases}t=sec\theta\\t=coshx & \sqrt{\cosh^{2}x=\sinh x}\end{cases}$$

21.4 אינטגרל של פונקציות רציונאליות של $\sin x,\cos x$

$$\begin{aligned}\sin\theta &= \frac{2t}{1+t^{2}}\\ \cos\theta &= \frac{1-t^{2}}{1+r^{2}}\end{aligned}$$

$$\int R\left(\cos\theta,\sin\theta\right)\partial\theta=\int R\left(\frac{1-t^{2}}{1+r^{2}},\frac{2t}{1+t^{2}}\right)\frac{2\partial t}{1+t^{2}}$$

דוגמה:

$$\begin{aligned}\int\frac{1+\cos\theta}{2+\sin\theta}\partial\theta &= \int\frac{1+\frac{1-t^{2}}{1+t}}{2+\frac{2t}{1+t^{2}}}\cdot\frac{2\partial t}{1+t^{2}}\\ &= \int\frac{4\partial t}{\left(1+t^{2}\right)\left(2+2t+2t^{2}\right)}\end{aligned}$$

21.5 עוד הצבות יותר פשוטות

$$R\left(-x,y\right)=-R\left(x,y\right)$$

דוגמה:

$$\begin{aligned}\int\frac{\cos^{3}\theta}{1+2\sin\theta}\partial\theta &\underset{\substack{t=\sin\theta\\ \partial t=\cos\theta\partial\theta}}{=} \int\frac{1-t^{2}}{1+2t}\partial t\\ &= \ln\left(1-t^{2}\right)\end{aligned}$$

$$R\left(x,-y\right)=R\left(x,y\right)$$

$$\int\frac{\sin\theta}{1+\cos^{3}\theta}\partial\theta=\int\frac{-\partial t}{1+t^{3}}$$

ואם

$$R\left(-x,-y\right)=R\left(x,y\right)$$

אזי כדאי להציב $t=\tan\theta$

$$\int\frac{\sin\theta\cos^{2}\left(\theta\right)}{\sin\theta+\cos\theta}=\int\frac{\left(t\cdot\frac{1}{1+t^{2}}\right)}{1+t}\cdot\frac{\partial t}{1+t^{2}}$$

פרק 22

תרגול מס.7

שאלה מפרק קודם:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1-\frac{x^2}{2}-\cos x}{x^3} \\
&= \frac{1-\frac{x^2}{2}-\sum_{n=0}^{\inf}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}}{x^3} \\
&= \frac{1-\frac{x^2}{2}-\left(1-\frac{x^2}{2}+\sum_{n=2}^{\inf}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}\right)}{x^3} \\
&= \frac{\sum_{n=2}^{\inf}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}}{x^3} \\
&= -\sum_{n=2}^{\inf}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n-3} \\
&= \frac{-1}{4!}x+\frac{1}{6!}x^3-\frac{1}{8!}x^5+\dots
\end{aligned}$$

אזי האיבר המוביל הוא $-\frac{1}{4!}x$ והאיבר התת מוביל הוא $\frac{1}{6!}x^3$ אזי $f^{'}(0) = \frac{1}{4!}$ ו $f^{'''}(0) = \frac{1}{6!}$

22.1 אינטגרלים לא מסוימים

אינטגרל לא מסוים מחזיר פונקציה. אינוגרל מסוים מחזיר מספר אחד.
אם יש פונקציה כלשהיא אז אנחנו יודעים לגזור את זה, אבל באינטגרלם אין את זה

22.2 שאלות

הצבה פשוטה $t = ax+b$

$$\begin{aligned}
\int \frac{4\partial x}{\sqrt{3x+t}} &= \int \frac{\frac{4}{3}\partial t}{\sqrt{t}} \\
& \frac{4}{3}\int \frac{\partial t}{\sqrt{t}} \\
& \frac{4}{3}\cdot 2\sqrt{t}+c \\
& \frac{4}{3}\cdot 2\sqrt{3x+5}+c
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int \sec^2(2x)+\tan(3x)\,\partial x &= \int \sec^2(2x)\,\partial x+\int \tan(3x)\,\partial x \\
&= \int \sec^2(t)\,\frac{1}{2}\partial t+\int \tan(s)\,\frac{1}{3}\partial s \\
&= \frac{1}{2}\tan(t)+\frac{1}{3}\ln|\cos(s)|+x \\
&= \frac{1}{2}\tan(2x)+\frac{1}{3}\ln|\cos(3x)|+x
\end{aligned}$$

השלמה לריבוע:

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{2a}\right)^2+c-\frac{b^2}{4a}$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{\partial x}{\sqrt{x^2-2x+5}} &= \int \frac{\partial x}{\sqrt{(x-1)^2+4}} \\
&= \int \frac{\partial x}{\sqrt{\left(\frac{(x-1)^2}{4}+1\right)\cdot 4}} \\
&= \int \frac{\partial x}{\left(\frac{x-1}{2}\right)^2+1} \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{2\partial t}{\sqrt{t^2+1}} \\
&= \sinh^{-1}(t)+c \\
&= \sinh^{-1}\left(\frac{x-1}{2}\right)+c
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int\frac{\partial x}{\sqrt{x^2-4x+3}} &= \int\frac{\partial x}{\sqrt{(x-2)^2-1}}\\ &= \int\frac{\partial t}{\sqrt{t^2-1}}\\ &= \cosh^{-1}(t)+c\\ &= \cosh^{-1}(x-2)+c\end{aligned}$$

נגזרת של הרכבה:

$$\int f(\phi(t))\,\phi'(t)\,\partial t \underset{s=\phi(t)}{=} f(s)\,\partial s$$

$$\begin{aligned}\int\frac{2x-4}{x^2-4x+3}\partial x &= \int\frac{2x-4}{s}\cdot\frac{\partial s}{2x-4}\\ &= \int\frac{\partial s}{s}\\ &= \ln s+c\\ &\quad \ln 2x-4+c\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int\frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}\partial x &= t^3\partial t\\ &= \frac{t^4}{4}+c\\ &= \frac{\arcsin^4(x)}{4}+c\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int\sec^4 x\partial x &= \int\sec^2 x\cdot\underbrace{\sec^2 x\partial x}_{\partial t}\\ &= \int\left(\tan^2(x)+1\right)\sec^2 x\partial x\\ &= \int\left(t^2+2\right)\partial t\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int\frac{x+5}{x^2-2x+5} &= \int\frac{x+5}{(x-1)^2+4}\partial x\\ &= \int\frac{x-1+6}{(x-1)^2+4}\\ &= \int\frac{x-1}{(x-1)^2+4}\partial x+\int\frac{6}{(x-1)^2+4}\partial x\end{aligned}$$

אז מחשב כל אחד בנפרד:

$$\begin{aligned}\int\frac{x-1}{(x-1)^2+4} &= \frac{1}{2}\int\frac{2(x-1)}{(x-1)^2+4}\\ &= \frac{1}{2}\int\frac{\partial t}{t+4}\\ &= \frac{1}{2}\ln(t+4)+c\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int\frac{6}{(x-1)^2+4}\partial x &= 6\int\frac{1}{4\left(\frac{(x-1)^2}{4}+1\right)}\partial x\\ &= \frac{6}{4}\int\frac{1}{\left(\frac{x-1}{2}\right)+1}\partial x\\ &= \frac{6}{4}\arctan\left(\frac{x-1}{2}\right)+c\end{aligned}$$

אינטגרציה בחלקים:

$$fg = \int f^{'}g\partial x+\int fg^{'}\partial x$$

$$\begin{aligned}\int\underbrace{x^2}_{f}\underbrace{\sin(x)}_{g^{'}}\partial x &= x^2(-\cos x)-\int 2x(-\cos x)\partial x\\ &= x^2(-\cos x)-\int\underbrace{2x}_{f}\underbrace{(-\cos x)}_{g^{'}}\partial x\\ &= -x^2\cos x-2\left(x\sin x-\int\sin x\partial x\right)\\ &= -x^2\cos x-2x\sin x+\cos x+c\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int\underbrace{e^{-x}}_{g^{'}}\underbrace{\cos(2x)}_{f}\partial x &= -e^{-x}\cos(2x)-\int -e^{-x}\cdot -2\sin(2x)\partial x\\ \int e^{-x}\cos(2x)\partial x &= -e^{-x}\cos(2x)-\int e^{-x}2\sin(2x)\partial x\\ \int e^{-x}\cos(2x)\partial x &= -e^{-x}\cos(2x)+\left(2e^{-x}\sin 2x-4\int e^{-x}\cos(2x)\right)\\ \int e^{-x}\cos(2x)\partial x &= -e^{-x}\cos(2x)+2e^{-x}\sin 2x-4\int e^{-x}\cos(2x)\\ 5\int e^{-x}\cos(2x)\partial x &= -e^{-x}\cos(2x)+2x^{-x}\sin 2x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int \underbrace{\ln x}_{f} \cdot \underbrace{1}_{g'} &= \ln x \cdot x - \int \frac{1}{x} \cdot x \partial x \\ &= x \ln x - x\end{aligned}$$

שימוש במספרים מורכבים:

$$\begin{aligned}\int e^{-x} \cos(2x)\, \partial x &= \int e^{-x} Real\left(e^{2ix}\right) \\ &= Real \int e^{-x} e^{2ix} \partial x \\ &= Real \int e^{-(1-2i)x} \partial x \\ &= Real\left(\frac{1}{-1+2i} e^{(-1+2i)x} \partial x\right) + c \\ &= Real\left(\frac{-1-2i}{5} e^{-x}\left(\cos 2x + i \sin 2x\right)\right) + c \\ &= \frac{e^{-x}}{5}\left(-\cos 2x + 2 \sin 2x\right) + c\end{aligned}$$

הצבות טריגונומטריות:

$$t = \tan\theta \Rightarrow \begin{cases}\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \\ \sin\theta = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \\ \partial t = \sec^2\theta \partial\theta\end{cases}$$

$$t = \tan\frac{\theta}{2} \Rightarrow \begin{cases}\sin t = \frac{2t}{1+t^2} \\ \cos t = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ \partial t = \frac{2}{t+t^2} \partial\theta\end{cases}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{\partial t}{\left(1+t^2\right)^{\frac{3}{2}}} &\overset{t=\tan\theta}{=} \int \frac{\sec^2\theta \partial\theta}{\left(1+\tan^2\theta\right)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \int \frac{\sec^2\theta \partial\theta}{\sec^3\theta} \\ &= \int \frac{1}{\sec\theta} \partial\theta \\ &= \int \cos\theta \partial\theta \\ &= \sin\theta + c \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} + c\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\int \frac{\partial\theta}{2+\sin\theta+2\cos\theta} &\overset{t=\tan\frac{\theta}{2}}{=} \frac{\frac{2\partial t}{1+t^2}}{2+\frac{2t}{1+t^2}+2\frac{1-t^2}{1+t^2}} \\
&= \int \frac{2\partial t}{2\left(1+t^2\right)+2t+2\left(1-t^2\right)} \\
&= \int \frac{\partial t}{2+t} \\
&= \ln\left(2+t\right)+c \\
&= \ln\left|\tan\frac{\theta}{2}+2\right|+c
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int \frac{\partial t}{1+\cosh t} &= \int \frac{\partial t}{1+\frac{e^t-e^{-t}}{2}} \\
&\overset{x=e^t}{=} \int \frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{x+\frac{1}{x}}{2}}\partial x \\
&= \int \frac{\partial x}{x+\frac{x^2+1}{2}} \\
&= \int \frac{\partial x}{\frac{x^2+2x+1}{2}} \\
&= 2\int \frac{\partial x}{\left(x+1\right)^2} \\
&= 2\frac{-1}{x+1}+c
\end{aligned}
$$

יש עוד דרך חשובה לעשות אינטגרל של שבר שזה לפרק לשברים יותר פשוטים, אבל על זה נלמד בפעם הבאה.

פרק 23

הרצאה מס.15

בוחן אמצע יהיה כל החומר עד לשיעור שעבר, כלומר עד פרק 7 עמוד 5.

23.1 אינטגרציה של פונקציות רציונאליות

$$\int\frac{p\left(x\right)}{q\left(x\right)}\partial x$$

אנחנו כבר מקירים כמה דרכים לפתור משהוא כזה למשל $\int\frac{1}{ax^{2}+bx+c}$ דרך השלמה בריבוע. תזכור

$$\begin{aligned}
\int\frac{\partial x}{x^{2}+1} & = \tan^{-1}x+c\\
\int\frac{\partial x}{x^{2}+1} & = \tanh^{-1}x+c\\
\int\frac{\partial x}{x^{2}} & = -\frac{1}{x}+c\\
\int\frac{\partial x}{ax+b} & = \frac{1}{a}\ln\left|ax+b\right|+c\\
\int\frac{2ax+b}{ax^{2}+bx+c} & = \ln\left|ax^{2}+bx+c\right|
\end{aligned}$$

אבל רוצים לחשבהאינטגרל של כל פונקציה, אזי מפרקים את השבר לשברים יותר פשוטים:

$$r\left(x\right)=\frac{p\left(x\right)}{q\left(x\right)}$$

צעד 1:
לחלק אז $p\left(x\right)$ ב $q\left(x\right)$ זה עובד אם $\deg p\left(x\right)>\deg q\left(x\right)$ אז מקבלים משהוא מהצורה: $a\left(x\right)+\frac{b(x)}{q(x)}$. למשל $\frac{x^{2}+1}{x+1}=x-1+\frac{2}{x+1}$
אז עדיין צריכים לדעת איך לעשות אינטגרל של $\frac{b(x)}{q(x)}$ כאשר $\deg b\left(x\right)<\deg q\left(x\right)$.
צעד 2:

לפרק את הפונקציה $\frac{a(x)}{b(x)}$ לסכום של איברים בצורה $\frac{A+Bx}{(x^2+ax+b)^n}$, $\frac{A}{(x+a)}$. אנחנו יודעים איך לעשות אינטגרל לשני אילו:

$$\begin{aligned}\int \frac{A}{x+a}\partial x &= A\ln(x+a)+c\\ \int \frac{A}{(x+a)^r} &= A\frac{(x+a)^{1-r}}{1-r}+c\end{aligned}$$

דוגמה:

$$\begin{aligned}\int \frac{\partial x}{x^2+3x+2} &= \int \frac{\partial x}{(x+1)(x+2)}\\ &= \int \left(\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+2}\right)\partial x\end{aligned}$$

אזי צריך למצא את A, B:

$$\begin{aligned}\frac{\partial x}{x^2+3x+2} &= \frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+2}\\ 1 &= A(x+2)+B(x+1)\\ 1 &= x(A+B)+(2A+B)\\ A+B &= 0\\ A &= -B\\ 2A+B &= 1\\ B &= 1-2A\\ A &= 1\\ B &= -A\end{aligned}$$

אז כל לעשות אינטגרל

$$\int \frac{5x\partial x}{x^2-2x-3}$$

יודעים כי $x^2+3x-3=(x+3)(x+1)$ אזי

$$\begin{aligned}\frac{5x}{x^2-2x-3} &= \frac{A}{x-3}+\frac{B}{x+1}\\ 5x &= A(x+1)+B(x-3)\\ 5x &= x(A+B)+(A-3B)\end{aligned}$$

נפתור ונקבל

$$A=\frac{15}{4}, B=\frac{5}{4}$$

אזי צריך לחשב:

$$\int\left(\frac{15}{4}\cdot\frac{1}{x-3}+\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{x+1}\right)\partial x=\frac{15}{4}\ln\left|x-3\right|+\frac{5}{4}\ln\left|x+1\right|+c$$

עוד דוגמה:

$$\int\frac{2x+5}{x^2+4x-4}\partial x$$

$$x^2+4x+4=\left(x+2\right)^2$$

אזי

$$\frac{2x+5}{x^2+4x+4}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{\left(x+2\right)^2}$$

$$\begin{aligned}
2x+5 &= A\left(x+2\right)+B\\
2x+5 &= Ax+\left(2A+B\right)\\
A &= 2\\
2A+B &= 5\\
B &= 1
\end{aligned}$$

$$\int\frac{x\partial x}{x^4-2x^2+1}$$

$$\begin{aligned}
x^4-2x^2+1 &= \left(x^2-1\right)^2\\
&= \left(x-1\right)^2\left(x+1\right)^2
\end{aligned}$$

$$\frac{x}{x^2-2x^2+1}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{\left(x-1\right)^2}+\frac{C}{x+1}+\frac{D}{\left(x+1\right)^2}$$

ולפתור רגיל.
אבל מה קורה אם השורשים הם לא ממשיים?

$$\int \frac{x+1}{x^4+x^2}\partial x$$

$$\begin{aligned} x^4+x^2 &= x^2\left(x^2+1\right) \\ &= x^2\left(x+i\right)\left(x-i\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{x+1}{x^4+x^2} &= \frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x+i}+\frac{D}{x-i} \\ x+1 &= Ax\left(x-i\right)\left(x+i\right)+B\left(x-i\right)\left(x+i\right)+Cx^2\left(x-i\right)+Dx^2\left(x+i\right) \end{aligned}$$

מציבים ומקבלים:

$$\begin{aligned} x=0 &\Rightarrow B=1 \\ x=i &\Rightarrow 1+i=2iD \\ & \quad\; D=\frac{1+i}{2i} \\ x=-i &\Rightarrow 1-i=C\cdot 2i \\ & \quad\; C=\frac{1-i}{2i} \end{aligned}$$

ומקבלים A מהשוואת מקדמים:

$$\begin{aligned} 0 &= A+C+D \\ A &= -\left(C+D\right)=1 \end{aligned}$$

אזי האינטגרל יהיה

$$\int \frac{x+1}{x^4+x^2}\partial x=\ln|x|+-\frac{1}{x}+\frac{-1+i}{2}\ln\left(x+i\right)+\frac{1-i}{2}\ln\left(x-i\right)+c$$

הערה: אי אפשר לסים $\ln|v|$ כאן כי משתמשים במספרים מורכבים.
רואים שיש לנו מספר מורכב + הצמוד שלו אזי

$$\begin{aligned} &= \frac{-1+i}{2}\ln\left(x+i\right)+\frac{1-i}{2}\ln\left(x-i\right) \\ &= Real\left(\left(-1-i\right)\ln\left(x+i\right)\right) \\ &= Real\left(\left(-1-i\right)\left(\ln\sqrt{x^2+1}+i\tan^{-1}\frac{1}{x}\right)\right) \\ &= -\ln\sqrt{x^2+1}+\tan^{-1}\frac{1}{x} \\ &= -\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)+\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}\left(x\right) \end{aligned}$$

אזי:

$$\int \frac{x+1}{x^4+x^2}\partial x = \ln|x| - \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right) - \tan^{-1}x + c$$

זה היה המון עבודה, אז יש לנו דרך אחרת לעשות את זה בלי מספרים מורכבים:

$$x^4+x^2 \quad = \quad x^2\left(x^2+1\right)$$

אזי

$$\frac{x+1}{x^4+x^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$$

עובדים רגיל ומקבלים $A=1, B=1, C=-1, D=-1$ אזי כל מה שנשאר זה לעשות אינטגרציה:

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{-x-1}{x^2+1}\partial x &= \ln|x| - \frac{1}{x} + \int \frac{-x-1}{x^2+1} \\ &= \ln|x| - \frac{1}{x} + \int \frac{-x}{x^2+1} - \int \frac{1}{x^2+1} \\ &= \ln|x| - \frac{1}{x} + \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right) - \tan^{-1}x + c\end{aligned}$$

פרק 24

הרצאה מס.16

האינטגרל המסויים

$$\int f(x)\,\partial x = F(x) + c$$

כאשר $F^{'} = f$
מסמנים $\int_a^b f(x)\,\partial x$ השטח מתחת לגרף בתחום $[a,b]$
המשפט היסודי של חד"ה

$$\begin{aligned}\int_a^b f &= [F]_a^b \\ &= F(b) - F(a)\end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\int_a^x f\right) = f(x)$$

אפשר להגיע מהשוויון השני לראשון: $\int_a^x f$ פונקציה קדומה, קיים c כך ש $\int_a^x f =$ $F(x) + c \overset{x=a}{\Rightarrow} 0 = F(a) + c$ אזי $\int_a^b f = F(b) + c = F(b) - F(a)$ אז הגענו לשוויון הראשון.
אז אם יודעים למה השוויון השני נכון יודעים את הכל(The answer to the great question of life the universe and everything)
אז מדוע 2 מתקיים:
אם שטח בין $[a,b]$ של f הוא $\int_a^b f$ אזי השטח של $\lim_{h\to 0}\int_a^{b+h} f \approx \int_a^{b+h} f + h\cdot$ $f(x)$ אזי

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\int_a^{x+h} f - \int_a^x f\right) = f(x)$$

הצד השמאלי של השוויון הוא נגזרת.
דוגמאות:

מה השטח בין $y=x^2, y=6-x$ אז מוצאים נקודות החיתוך

$$\begin{aligned} x^2 &= 6-x \\ (x+3)(x-2) &= 0 \end{aligned}$$

אז השטח הוא

$$\int_{-3}^{2}(6-x)\,\partial x-\int_{-3}^{2}x^2\partial x=\int_{-3}^{2}\left(6-x-x^2\right)\partial x$$

דוגמה על שוויון שני:

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_0^x \sin\left(u^2\right)\partial u$$

יודעים כי $\frac{\partial}{\partial x}\left(\int_a^x f\right)=f(x)$ אזי

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_0^x \sin\left(u^2\right)\partial u=\sin\left(x^2\right)$$

דוגמה אחרת:

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_0^{x^2} \sin\left(u^2\right)\partial u$$

מסמנים $F(x)=\int_0^x \sin\left(u^2\right)\partial u$
אזי

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}\int_0^{x^2} \sin\left(u^2\right)\partial u &= \frac{\partial}{\partial x}F\left(x^2\right) \\ &= F\left(x^2\right)\cdot 2x \\ &= \sin\left(x^4\right)\cdot 2x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}\left(\int_x^{x^2} \sin\left(u^2\right)\partial u\right) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\int_0^{x^2} \sin\left(u^2\right)\partial u-\int_0^x \sin\left(u^2\right)\partial u\right) \\ &= 2x\sin\left(x^2\right)-\sin\left(x^2\right) \end{aligned}$$

אפשר לעשות האינטגרציה בחלקים ישר באינטגרל מסויים:

$$\int uv^{'} = uv - \int u^{'}v$$

אזי במקרה המסויים מקבלים:

$$\begin{aligned}\int_a^b uv^{'} &= \left[\int uv^{'}\right]_a^b \\ &= \left[uv - \int u^{'}v\right]_a^b \\ &= [uv]_a^b - \int_a^b u^{'}v\end{aligned}$$

דוגמה:

$$\begin{aligned}\int_1^2 \ln x &= \int_1^2 (1 \cdot \ln x)\,\partial x \\ &= [\ln x \cdot x]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{x} \cdot x\partial x \\ &= 2\ln 2 - \int_1^2 1\partial x \\ &= 2\ln 2 - 1\end{aligned}$$

ואיך זה הולך עם הצבה?
אם $x = \phi(t)$ אזי $\partial x = \phi^{'}(t)\,\partial t$ אזי

$$\int f(x)\,\partial x = \int f(\phi(t))\,\phi^{'}(t)\,\partial t$$

אזי

$$\int\limits_{\phi(\alpha)}^{\phi(\beta)} f(x)\,\partial x = \int_\alpha^\beta f(\phi(t))\,\phi^{'}(t)\,\partial t$$

דוגמה:

$$\int_0^2 \frac{x\partial x}{(1+x^2)(2+x^2)}$$

אזי אם נציב $u = x^2$, $\partial u = 2x\partial x$ אזי

$$\begin{aligned}
\int_0^4 \frac{\frac{1}{2}\partial u}{(1+u)(2+u)} &= \frac{1}{2}\int_0^4 \left(\frac{1}{1+u} - \frac{1}{2+u}\right)\partial u \\
&= \frac{1}{2}\left[\ln(1+u) - \ln(2+u)\right]_0^4 \\
&= \frac{1}{2}\left((\ln 5 - \ln 6) - (-\ln 2)\right) \\
&= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{5}{3}\right)
\end{aligned}$$

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(x))^n \,\partial x$$

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{n-2}\left(1-\cos^2 x\right)\partial x \\
I_n &= I_{n-2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{(\cos x)}_{u}\underbrace{(\sin x)^{n-2}\cos(x)}_{v'} \\
I_n &= I_{n-2} - \left(\left[\cos x \cdot \frac{(\sin x)^{n-1}}{n-1}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\right) - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\sin x)\frac{(\sin(x))^{n-1}}{n-1}\partial x \\
I_n &= I_{n-2} - \frac{I_n}{n-1} \\
\left(1+\frac{1}{n+1}\right) I_n &= I_{n-2} \\
I_n &= \frac{n-1}{n} I_{n-2}
\end{aligned}$$

אבל לפעמים לא רוצים את $\int_\alpha^\beta f(\phi(t))\,\phi'(t) \overset{x=\phi(t)}{=} \int_{\phi(\alpha)}^{\phi(\beta)} f(x)\,\partial x$, ורוצים את ההפוך של זה:

$$\int_a^b g(t)\,\partial t \overset{\phi(t)}{=} \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} g\left(\phi^{-1}(x)\right)\frac{\partial}{\partial x}\left(\phi^{-1}(x)\right)\partial x$$

אבל זה כמובן עובד רק אם ϕ הפיכה. למשל אם מסתכלים על פונקציה

$$\begin{array}{rcl}
\int_{-2}^{3} t^2 \partial t & \underset{x=t^2}{\overset{?}{=}} & \int_4^9 x \frac{\partial x}{2\sqrt{x}} \\
\left[\frac{t^3}{3}\right]_{-2}^{3} & \overset{?}{=} & \int_4^9 \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}} \partial x \\
\frac{3^3-(-2)^3}{3} & \overset{?}{=} & \left[\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_4^9 \\
\frac{35}{3} & \overset{?}{=} & \frac{1}{3}\left[9^{\frac{3}{2}} - 4^{\frac{3}{2}}\right] \\
\frac{35}{3} & \neq & \frac{19}{3}
\end{array}$$

24.1 אינטגרלים לא טובים

אילו הם אינתגרלים כמו: $\int_{-\infty}^{\infty} f, \int_{-\infty}^{b} f, \int_a^{\infty} f$ או $\int_a^b f$ כאשר יש נקודות סינגולריות של f בתחום $[a,b]$.

הסוג הראשון הוא תחום אינסופי, אז בדרך כלל זה שטח אינסופי, אבל יש פונקצות מסוימות כמו $\int_1^{\infty} e^{-x}\partial x$ שמקבלים ערכים סופיים:

$$\begin{array}{rcl}
\int_1^x e^{-x} & = & \lim_{x\to\infty}\left[-e^{-x}\right]_1^x \\
 & = & \lim_{x\to\infty}\left(-e^{-x}\right) - \left(-e^{-1}\right) \\
 & = & \frac{1}{e} - \lim_{x\to\infty} e^{-x} \\
 & = & \frac{1}{e} - 0 \\
 & = & \frac{1}{e}
\end{array}$$

אבל למשל

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\partial x = [\ln x]_1^{\infty} = \ln(\infty) - \ln 1 = \infty$$

אז זה לא מוגדר

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\partial t = \left[2t^{\frac{1}{2}}\right] = 2 - 0 = 2$$

אז זה קיים

אפשר לכתוב את זה בצורה הבאה(לאילו שאוהבים כתיב מתמטי נכון)

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\epsilon}^1 \frac{1}{\sqrt{t}} = \lim_{\epsilon\to 0}\left[2t^{\frac{1}{2}}\right]_{\epsilon}^1 = 2 - \lim_{\epsilon\to 0} 2\sqrt{\epsilon} = 2 - 0 = 2$$

$$\begin{aligned}
\int_0^2 \frac{x}{x-1}\partial x &= \int_0^{1-\epsilon} \frac{x}{x-1}\partial x + \int_{1+\epsilon}^2 \frac{x}{x-1} \\
&= [x+\ln|x-1|]_0^{1-\epsilon} + [x+\ln|x-1|]_{1+\epsilon}^2 \\
&= (1-\epsilon+\ln\epsilon) + 2 - (1+\epsilon) - \ln\epsilon \\
&= (1-\epsilon+\ln\epsilon) + 1 - \epsilon - \ln\epsilon
\end{aligned}$$

אזי אומרים כי האינטגרל הזה לא מתכנס
דברים שיודעים אבל לא נוכיח עכשיו

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\partial x &= \sqrt{\pi} \\
\int_0^{\infty} e^{-x^2}\partial x &= \frac{\sqrt{\pi}}{2}
\end{aligned}$$

אז עכשיו אנחנו יכולים לחשב

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} xe^{-x^2} &\overset{u=x^2}{=} \int_0^{\infty} \frac{1}{2}e^{-u}\partial u \\
&= \left[\frac{1}{2}e^{-u}\right]_0^{\infty} \\
&= 0 - \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

פרק 25

הרצאה מס.17

25.1 פרק 9: פונקציות $\mathbb{R}\to\mathbb{C},\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$

דוגמה לפונקציה מ $\mathbb{R}$ ל$\mathbb{R}^2$: $r(t)=\begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\end{pmatrix}$. זה מעגל. דוגמה לפונקציה מ $\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$: $r(t)=\begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\\ t\end{pmatrix}$. זו ספיראלה.

הגדרה: אם $f_1(t)\dots f_n(t)$ הם פונקציות גזירות אז אם $f(t)=\begin{pmatrix}f_1(t)\\ f_2(t)\\ \vdots\\ f_n(t)\end{pmatrix}$ אזי $\frac{\partial}{\partial t}f(t)=\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial t}f_1(t)\\ \frac{\partial}{\partial t}f_2(t)\\ \vdots\\ \frac{\partial}{\partial t}f_n(t)\end{pmatrix}$ שזה בכיוון המשיק של הפונקציה בנקודה t וגודל הווקטור הוא "מהירות" הפונקציה.

דוגמה:

$r(t)=\begin{pmatrix}a\cos t\\ b\sin t\end{pmatrix}$ אזי $\frac{\partial}{\partial t}r(t)=\begin{pmatrix}-a\sin t\\ b\cos t\end{pmatrix}$

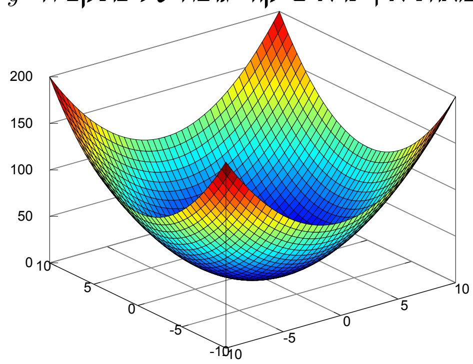
ב $n=3$ יש פעולת המכפלה הוקטורית, $\frac{\partial}{\partial t}(f\times g)=\frac{\partial f}{\partial t}\times g+f\times\frac{\partial g}{\partial t}$

הגדרה: $\int f(t)\,\partial t=\begin{pmatrix}\int f_1(t)\,\partial t\\ \int f_2(t)\,\partial t\\ \vdots\\ \int f_n(t)\,\partial t\end{pmatrix}$

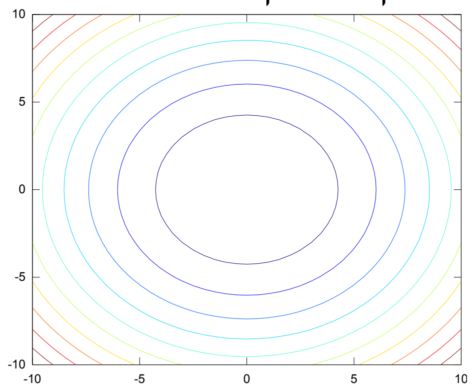
פרק 26

הרצאה מס.18

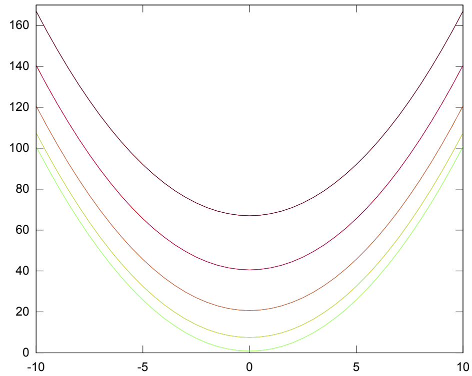
דוגמאות איך נראים קווי גובה של פונקציה $z = x^2 + y^2$



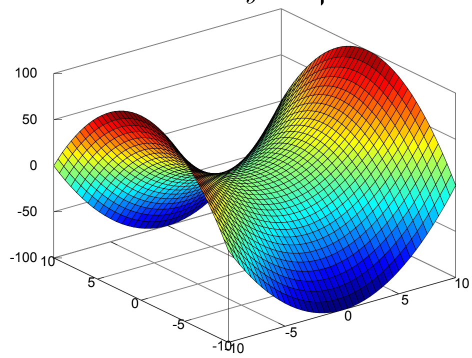
אם z קבוע אז מקבלים מעגלים.



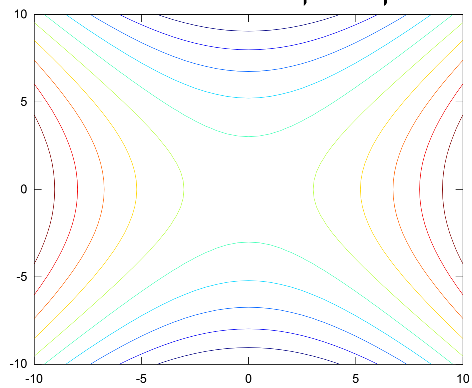
אם x או y קבוע מקבלים פרבולה. למשל אם x קבוע:



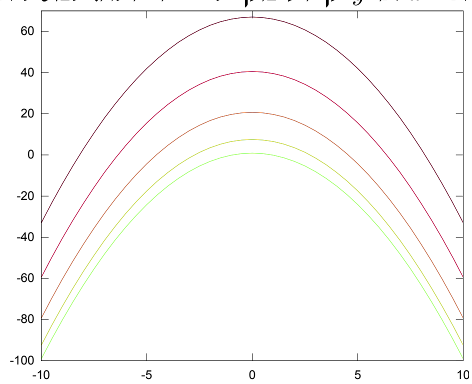
מה עם הפונקציה $z = x^2 - y^2$



אם z קבוע מקבלים היפרבולה



אם x או y קבוע מקבלים פרבולה. למשל אם x קבוע:



26.1 נגזרת חלקית

מסמנים

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(f\left(x,y\right)\right)|_{x=x_0} = \frac{\partial f}{\partial x}|_{x=x_0}$$

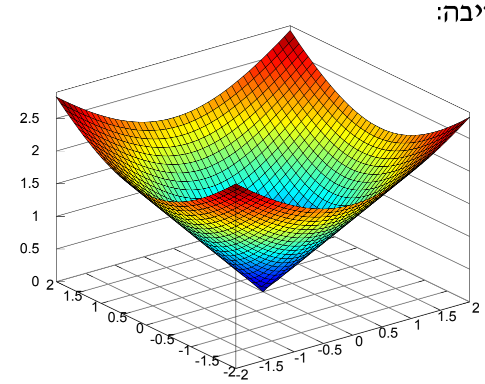
פירושו של זה שגוזרים את הפונקציה לפי משתנה x כאילו שy היה מספר קבוע.
הערה: זה נכון רק אם x וy הם בלתי תלויים, אם הפונקציה היא למשל $f\left(x,x^2\right) = x^2+x+1$ אי אפשר לגזור לפי x בנפרד ולפי x^2 בנפרד.
אם רוצים לקבל את הנגזרת של פונקציה מסויימת בכיוון ווקטור $\vec{e}$ אזי $\partial_{\vec{e}}f$ הוא הנגזרת של f בכיוון $\vec{e}$ כלומר המשיק של f בכיוון $\vec{e}$. אפשר לראות כי $\partial_{2\vec{e}}f = 2\partial_{\vec{e}}f$, לכן בדרך כלל מחשווים נגזרת בכיוון וקטור יחידה.
רוצים למשל לגזור את $f\left(x,y\right) = x^2+y^2$ לפי x בנקודה $(0,0)$ אזי

$$\frac{\partial f\left(x,y\right)}{\partial x}|_{(x,y)=(0,0)} = 2x+y^2 = 0$$

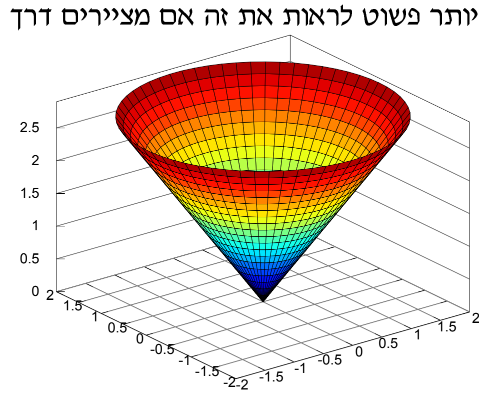
אבל אם למשל נרצה לגזור $f\left(x,y\right) = \sqrt{x^2+y^2}$ לפי x בנקודה $(0,0)$אזי:

$$\frac{\partial f\left(x,y\right)}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}\cdot 2x$$

אבל זה לא מוגדר בנקודה $(0,0)$. אם מסתכלים על הגרף של הפונקציה רואים הסיבה:



יותר פשוט לראות את זה אם מציירים דרך קואורדינטות פולריות:



לא מפתיע שהשיפוע של נקודה $(0,0)$ לא מוגדר בקונוס.

26.2 דופרנציאביליות

אומרים כי פונקציה $f\left(x,y\right)$ היא דיפרנציאבילית בסביבה $\left(x_{0},y_{0}\right)$ אם קיים עבורה קירוב ליניארי

$$f\left(x_{0}+\Delta x,y_{0}+\Delta y\right)\sim f\left(x_{0},y_{0}\right)+A\Delta x+B\Delta y$$

כלומר ההפרש r קטן ביחס למרחק $\sqrt{\Delta x^{2}+\Delta y^{2}}$

פרק 27

הרצאה מס.19

אם פונקציה דיפרנציאבילית אזי יש לה נגזרות חלקיות.
נרצה לחשב את $\partial_{\vec{e}} f$ שזה שווה ל $\frac{\partial}{\partial t}\left(f\left(x_0+te_x,y_0+te_y\right)\right)|_{t=0}$ אזי

$$\begin{aligned} f\left(x_0+te_x,y_0+te_y\right) &\approx f\left(x_0,y_0\right)+Ate_x+Bte_y \\ \partial_e f &= Ae_x+Be_y \end{aligned}$$

קירוב ליניארי ל-f הסביבה של $\left(x_0,y_0\right)$ הוא

$$f\left(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y\right)=f\left(x_0,y_0\right)+\frac{\partial}{\partial x}f\left(x_0,y_0\right)\cdot\Delta x+\frac{\partial}{\partial y}f\left(x_0,y_0\right)\cdot\Delta y$$

דוגמה:

$$f\left(x,y\right)=\sin\left(y\right)\cdot\sqrt{1+x}$$

היא דיפרנציאביליתבכל נקודה $x>-1$

$$\begin{aligned} f\left(0,0\right) &= 0 \\ f_x &= \left(\sin y\right)\frac{1}{2}\left(1+x\right)^{-\frac{1}{2}} \\ f_x\left(0,0\right) &= 0 \\ f_y &= \left(\cos y\right)\sqrt{1+x} \\ f_y\left(0,0\right) &= 1 \end{aligned}$$

לכן

$$\begin{aligned} f\left(x,y\right) &\sim 0+0\cdot x+1\cdot y \\ &\sim y \end{aligned}$$

דוגמא:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= x^2 + x\cos(y) + y^2 \\ f_x &= 2x + \cos y \\ y_y &= -x\sin y + 2y \end{aligned}$$

אז בסביבה של $(1,\pi)$:

$$\begin{aligned} f(1,\pi) &= 1 - 1 + \pi^2 \\ f_x(1,\pi) &= 1 \\ f_y(1,\pi) &= 2\pi \end{aligned}$$

אזי

$$f(1+\Delta x, \pi + \Delta y) \sim \pi^2 + \Delta x + 2\pi \cdot \Delta y$$

27.1 גרדיאנט, כלל שרשרת ודיפרנציאלים

מגדירים גדינט של f:

$$\vec{\nabla} f = (f_{x_1}, f_{x_2} \dots f_{x_n})$$

כלומר $\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2} \dots \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$
אזי הנגזרת של f בכיוון $\vec{e}$ היא

$$\left(\vec{\nabla} f\right) \cdot (\vec{e})$$

השיפוע הוא מקסימאלי בכיוון הגראדינט.

פרק 28

תרגול מס.8

שימוש של אינטגרל לא מסוים בשביל לחשב טור אינסופי:

$$f(n)=\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n-1}$$

כלומר

$$\begin{aligned}
f(1) &= \frac{1}{1}\\
f(2) &= \frac{1}{2}+\frac{1}{3}\\
f(3) &= \frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}
\end{aligned}$$

רוצים למצא $f(\infty)$. עושים כצת אלגברה:

$$\begin{aligned}
f(n) &= \frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+0}+\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{2}{n}}+\cdots+\frac{1}{2-\frac{1}{n}}\right)\\
&= \frac{1}{n}\left(f(0)+f\left(\frac{1}{n}\right)+\cdots+f\left(1-\frac{1}{n}\right)\right)\\
&= \int_0^1 f(x)\,\partial x\\
&= \int_0^1 \frac{1}{1+x}\partial x\\
&= \ln(1+x)|_0^1\\
&= \ln 2
\end{aligned}$$

דוגמה אחרת

$$\begin{aligned} f(n) &= n\left(\frac{1}{n\cdot 3n}+\frac{1}{(n+1)(3n+1)}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(4n-1)}\right) \\ &= \frac{n}{n^2}\left(\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(3+\frac{1}{n}\right)}+\cdots+\frac{1}{\left(2-\frac{1}{n}\right)\left(4-\frac{1}{n}\right)}\right) \\ &\underset{n\to\infty}{\to} \int\limits_1^2 \frac{1}{x(x+2)}\partial x \end{aligned}$$

דוגמה:

$$f(x)=\int_3^{x^2}\frac{\partial u}{\sqrt[3]{4-u^2}}$$

$$\begin{aligned} 4-u^2 &\neq 0 \\ u &= \pm 2 \\ x^2 &\neq 2 \\ x &\neq \pm\sqrt{2} \end{aligned}$$

התחומים שזה מוגדר בו $\{x>\sqrt{2}\},\{x<-\sqrt{2}\}$ אזי

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{4-(x^2)^2}}\cdot 2x$$

28.1 נגזרות חלקיות ומכוונות

מצא הנגזרות החלקיות והנגזרות הגיווניות של $f(x,y)=\sin x\cos\left(\frac{y}{2}\right)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}|_{(0,0)} &= \cos x\cos x\left(\frac{y}{2}\right)|_{(0,0)}=1 \\ \frac{\partial f}{\partial x}|_{(0,0)} &= -\frac{1}{2}\sin x\sin\left(\frac{y}{2}\right)|_{(0,0)}=0 \end{aligned}$$

נגזור בכיוון של $\vec{e}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ אזי:

$$
\begin{aligned}
f_{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}} &= \frac{\partial}{\partial t}\left(f\left(0+t\cdot 1,0+t\cdot 1\right)\right)|_{t=0}\\
&= \frac{\partial}{\partial t}\sin\left(t\right)\cos\left(\frac{t}{2}\right)|_{t=0}\\
&= \cos t\cdot\cos\frac{t}{2}+\sin t\cdot\left(-\frac{1}{2}\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right)|_{t=0}\\
&= 1
\end{aligned}
$$

נגזור ל $\vec{e}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ כללי:

$$
\begin{aligned}
f_{\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}} &= \frac{\partial}{\partial t}\sin\left(at\right)\cos\left(bt\right)|_{t=0}\\
&= a\cos\left(at\right)\cos\left(\frac{bt}{2}\right)-\frac{b}{2}\sin\left(at\right)\sin\left(\frac{bt}{2}\right)|_{t=0}\\
&= a
\end{aligned}
$$

עוד דוגמה: $f\left(x,y\right)=\left|x-y\right|$ פשוט לראות כי $\frac{\partial f}{\partial x}$ לא קיים וגם $\frac{\partial f}{\partial y}$ לא קיים

פרק 29

הרצאה מס.20

נניח שיש יחס בין שלושה משתנים p,v,t אזי אפשר לשאול על נגזרת לפי אחד מהם אם האחרים קבועים.

$$\begin{aligned}\partial p &= \frac{\partial p}{\partial v}|_t \partial v + \frac{\partial p}{\partial t}|_v \partial t \\ \partial v &= \frac{\partial v}{\partial p}|_t \partial p + \frac{\partial v}{\partial t}|_p \partial t\end{aligned}$$

אזי אפשר לכתוב

$$\frac{\partial v}{\partial p}|_t \partial p = \partial v - \frac{\partial v}{\partial t}|_p \partial t$$

ולהציב

$$\partial p = \frac{1}{\frac{\partial v}{\partial p}|_p} \partial v - \frac{\frac{\partial v}{\partial t}|_p}{\frac{\partial v}{\partial p}|_t}|_t$$

פרק 30

הרצאה מס.21

30.1 מיון נקודות סטציונאריות

$$f\left(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y\right) \sim f\left(x_0, y_0\right)+f_x \Delta x+f_y \Delta y+\frac{1}{2}\left(f_{xx}, g \Delta x^2+2 f_{xy} \Delta x \Delta y+f_{yy} \Delta y^2\right)$$

אם (x_0, y_0) נקודה קריטית אזי $\nabla f=0$ אזי $f_x=f_y=0$
אם $f_{xx}, f_{yy}>0$ אזי הנקודה היא מינימום, אם $f_{xx}, f_{yy}<0$ אזי הנקודה היא מקסימום.

30.2 ערכי קיצון של פונקציה על תחום

במקרה זה צריך גם לבדוק את השפה

30.3 בעיות קיצון תחת אילוצים

למצא ערכים מקס/מין של f תחת אילוץ $g=constant$.
דוגמה $x+\dot{y}+z$ תחת האילוץ $x^2+2y^2+3z^2=z$.
רוצים כי $\partial f=0$ לכל שינוי ∂x כך ש $\partial g=0$

$$\partial f=f_x \partial x+f_y \partial y+f_z \partial z=\underbrace{\begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix}}_{\vec{\nabla} f} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \partial x \\ \partial y \\ \partial z \end{pmatrix}}_{\partial \vec{x}}$$

רוצים ש $\underbrace{\vec{\nabla} f \cdot \partial \vec{x}=0}_{\partial \vec{x} \perp \vec{\nabla} f}$ לכל $\partial \vec{x}$ כך ש $\underbrace{\vec{\nabla} g \cdot \partial \vec{x}}_{\partial \vec{x} \perp \vec{\nabla} g}=0$
λ זה כפל Lagrange אזי $\exists \lambda: \vec{\nabla} f=\lambda \vec{\nabla} g$

$$\exists \lambda:\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix} 2x \\ 4y \\ 6z \end{pmatrix} \Rightarrow\begin{pmatrix} 1=2 \lambda x \\ 1=4 \lambda y \\ 1=6 \lambda z \\ x^2+2y^2+3z^2=2 \end{pmatrix} \rightarrow\begin{pmatrix} x=\frac{1}{2 \lambda} \\ y=\frac{1}{4 \lambda} \\ z=\frac{1}{6 \lambda} \\ x^2+2y^2+3z^2=2 \end{pmatrix}$$

מציבים את כל הבלגן הזה:

$$\begin{aligned}\frac{1}{4\lambda^2}+\frac{2}{16\lambda^2}+\frac{3}{36\lambda^2} &= 2\\ \frac{1}{\lambda^2}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{3}{36}\right) &= 2\\ \frac{11}{24\lambda^2} &= 2\\ \lambda &= \pm\sqrt{\frac{11}{48}}\end{aligned}$$

אזי

$$x=\pm\sqrt{\frac{12}{11}},y=\pm\sqrt{\frac{3}{11}},z=\pm\sqrt{\frac{4}{33}}$$

נבדוק אם כל התנאים מתקיימים:

$$\begin{aligned}x^2+2y^2+3z^2 &= \frac{12}{11}+2\cdot\frac{3}{11}+3\cdot\frac{4}{33}\\ &= \frac{12}{11}+\frac{6}{11}+\frac{4}{11}\\ &= 2\checkmark\end{aligned}$$

$$f\left(x,y,z\right)=\pm\sqrt{\frac{12}{11}}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)=\pm\frac{11}{6}\sqrt{\frac{12}{11}}=\pm\sqrt{\frac{11}{3}}$$

$$\max_D f=\sqrt{\frac{11}{3}},\min_D=-\sqrt{\frac{11}{3}}$$

פרק 31

תרגול מס.9

31.1 נגזרות חלקיות מסדר גבוה וטור טילור

$$
\begin{aligned}
f_{xx} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x} \\
f_{xy} &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\
f_{yx} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\
f_{yy} &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y}
\end{aligned}
$$

אם $f(x,y)$ ו f_{xy} וf_{yx} קיימים ורציפים אזי $f_{xy} = f_{yx}$
טור טילור הוא:

$$
f(x,y) = \begin{array}{c} f(x_0,y_0) + f_x(x-x_0) + f_y(y-y_0) \\ +\frac{1}{2!}\left(f_{xx}(x-x_0) + 2f_{xy}(x-x_0)(y-y_0) + f_{yy}(y-y_0)\right) \end{array}
$$

31.2 נקודות סטציונריות

אם $f_{xx}f_{yy} > f_{xy}^2$ ו $f_{xx} > 0$ אזי זו נקודת Min
אם $f_{xx}f_{yy} > f_{xy}^2$ ו $f_{xx} < 0$ אזי זו נקודת Max
אם $f_{xx}f_{yy} < f_{xy}^2$ אז זה אוכף
משפט: f רציפה ומוגדרת על תחום סגור וחסום היא חסומה ומשיגה שת חסמיה
D התחום הוא חסום אם קיימים M וN כך שלכל $(x,y) \in D$ מתקיים $|x| \leq M$ ו $|y| \leq N$

פרק 32

הרצאה מס.22

32.1 פרק 11. פונקציות $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$

אם $\vec{f}\left(x_1 \ldots x_m\right)$ היא מ$\mathbb{R}^n$ $\mathbb{R}^m \to$ זה כמו לכתוב $\vec{f}\left(x_1 \ldots x_m\right) = \begin{pmatrix} f_1\left(x_1 \ldots x_m\right) \\ \vdots \\ f_n\left(x_1 \ldots x_m\right) \end{pmatrix}$.

$f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ רציפה אם ורק אם $f_1 \ldots f_n$ רציפות.

$f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ דיפרנציאבילית אם ורק אם $f_1 \ldots f_n$ דיפרנציאבילית.

אם $m = 1$ אזי מקבלים $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ שזה למדנו בפרק 9

אבל אם לא אז מה הנגזרת?

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial x_i} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} \end{pmatrix}$$

קירוב ליניארי לשינוי δf

$$d\vec{f} = \begin{pmatrix} df_1 \\ \vdots \\ df_n \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \delta f_1 \\ \vdots \\ \delta f_n \end{pmatrix} = \delta \vec{f}$$

דיפרנציאל ונגזרת של $\vec{f}$

$$df = \begin{pmatrix} df_1 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix}$$

$$f_i : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$$

$$df_i = \frac{\partial f_i}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f_i}{\partial x_2}dx_2 + \dots \frac{\partial f_i}{\partial x_m}dx_m$$

אזי

$$\begin{aligned} d\vec{f} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2}dx_2 + \cdots + \frac{\partial f_1}{\partial x_m}dx_m \\ \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f_n}{\partial x_2}dx_2 + \cdots + \frac{\partial f_n}{\partial x_m}dx_m \end{pmatrix} \\ &= \frac{\partial \vec{f}}{\partial x_1}dx + \cdots + \frac{\partial \vec{f}}{\partial x_m}dx_m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d\vec{f} &= \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m} \end{pmatrix}}_{D\vec{f}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} dx_1 \\ \vdots \\ dx_m \end{pmatrix}}_{d\vec{x}} \\ &= D\vec{f} \cdot d\vec{x} \end{aligned}$$

כאשר $D\vec{f}$ הוא הנגזרת של $\vec{f}$
דוגמאות:

$$\begin{aligned} \vec{f}(x,y) &= \begin{pmatrix} x\cos y \\ x\sin y \\ x^2 \end{pmatrix} \\ D\vec{f} &= \begin{pmatrix} \cos y & -x\sin y \\ \sin y & x\cos y \\ 2x & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

בסביבה של $(x,y) = (1, {}^{\pi}/_{4})$ מקבלים

$$D\vec{f} = \begin{pmatrix} {}^{1}/_{\sqrt{2}} & -{}^{1}/_{\sqrt{2}} \\ {}^{1}/_{\sqrt{2}} & {}^{1}/_{\sqrt{2}} \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

הקירוב הליניארי של $\vec{f}$ הוא

$$
\begin{aligned}
\vec{f}(x,y) &\sim \vec{f}(1,{}^{\pi}\!/\!{}_4)+D\vec{f}\cdot\begin{pmatrix}x-1\\ y-{}^{\pi}\!/\!{}_4\end{pmatrix}\\
\vec{f}(x,y) &\sim \begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\ 1/\sqrt{2}\\ 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2}\\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\\ 2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x-1\\ k-{}^{\pi}\!/\!{}_4\end{pmatrix}\\
\vec{f}(1+h,{}^{\pi}\!/\!{}_4+k) &\sim \begin{pmatrix}1/\sqrt{2}+1/\sqrt{2}h-1/\sqrt{2}k\\ 1/\sqrt{2}+1/\sqrt{2}h+1/\sqrt{2}k\\ 1+2h\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

32.1.1 כלל השרשרת

$$\mathbb{R}^m \xrightarrow{\vec{f}} \mathbb{R}^n \xrightarrow{\vec{g}} \mathbb{R}^k \Rightarrow \mathbb{R}^m \xrightarrow{\vec{g}\circ\vec{f}} \mathbb{R}^k$$

נניח כי $\vec{x}\in\mathbb{R}^m$: $\vec{y}=\vec{f}(\vec{x}),\vec{z}=\vec{g}(\vec{y})$

$$
\begin{aligned}
d\vec{y} &= \left(D\vec{f}\right)\cdot d\vec{x}\\
d\vec{z} &= (D\vec{g})\cdot d\vec{y}\\
&= (D\vec{g})\cdot\left(\left(D\vec{f}\right)\cdot d\vec{x}\right)\\
&= \left((D\vec{g})\cdot\left(D\vec{f}\right)\right)\cdot d\vec{x}
\end{aligned}
$$

אזי כלל השרשרת הכללי הוא:

$$D(g\circ f)=(D\vec{g})\cdot\left(D\vec{f}\right)$$

דוגמה:

$$\mathbb{R}\xrightarrow{\vec{f}}\mathbb{R}^2\xrightarrow{\vec{g}}\mathbb{R}$$

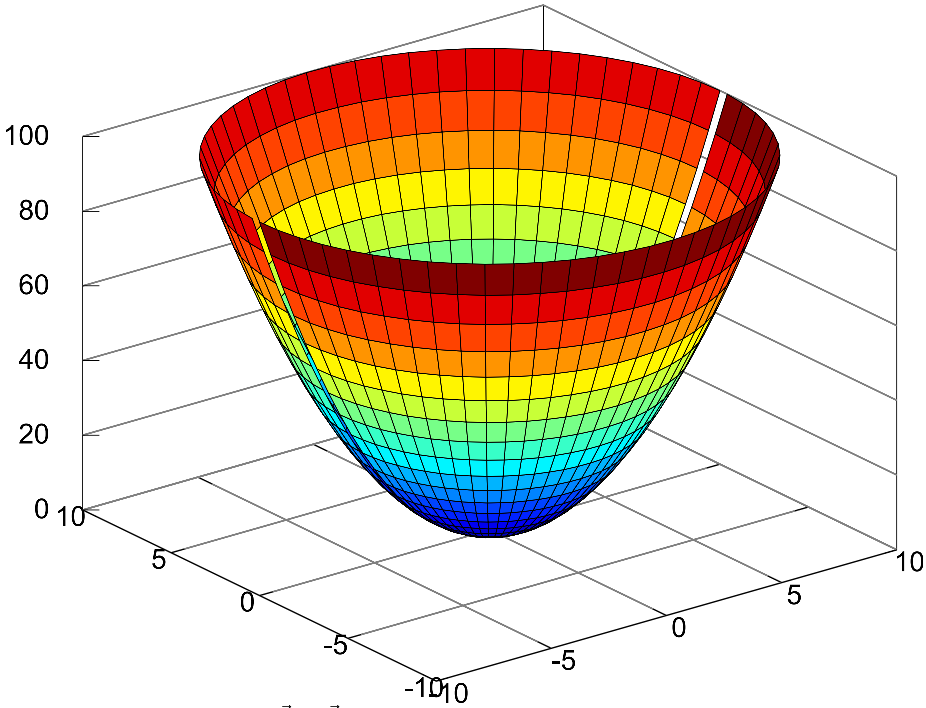
$$
\begin{aligned}
\frac{df}{dt}(u(t),v(t)) &= \frac{\partial f}{\partial u}u'+\frac{\partial f}{\partial v}v'\\
&= \begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u'\\ v'\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

32.1.2 משטחים ב$\mathbb{R}^3$

$$\vec{f} : D \to \mathbb{R}^3$$

כאשר $D \subset \mathbb{R}^2$
תמונה=משטח ב$\mathbb{R}^3$(המקרה הכללי)
דוגמה:

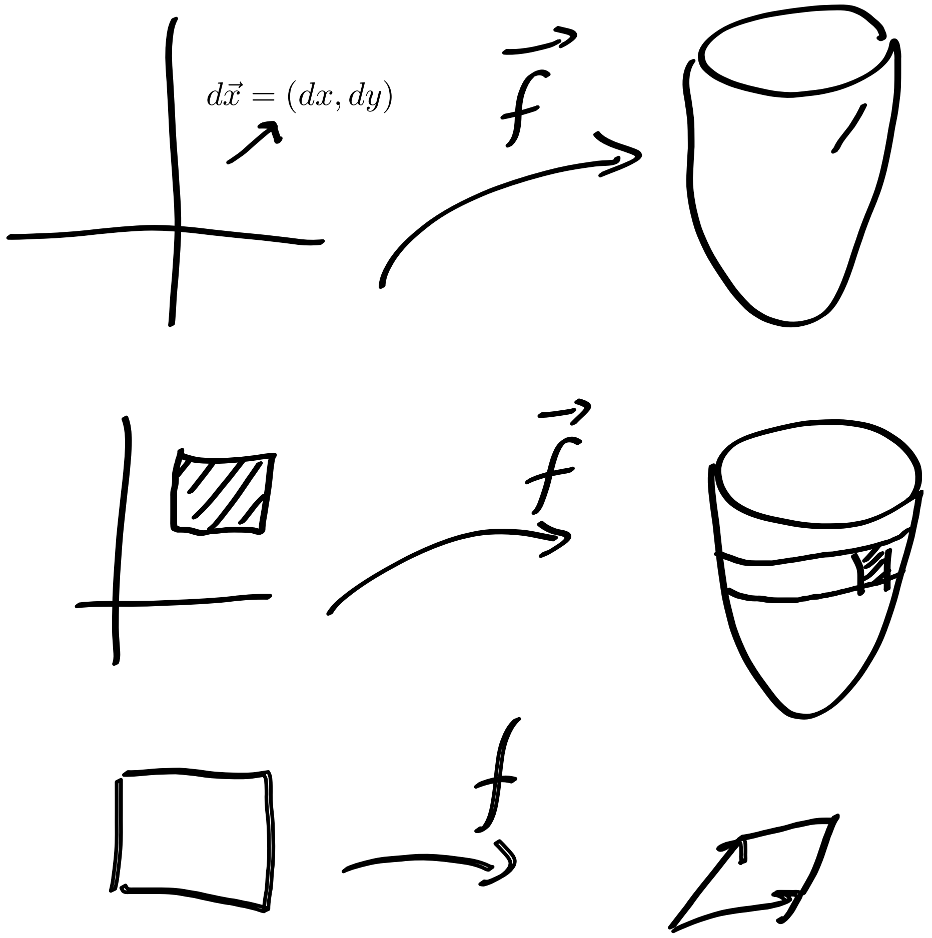
$$f(x,y) = \begin{pmatrix} x\cos y \\ x\sin y \\ x^2 \end{pmatrix}$$



המישור המשיק למשטח ב$\vec{f}(x_0,y_0)$ הוא מקביל ל$\frac{\partial \vec{f}}{\partial y}$ ו$\frac{\partial \vec{f}}{\partial x}$
ולכן הווקטור הנורמאלי למישור הוא $\frac{\partial \vec{f}}{\partial y} \times \frac{\partial \vec{f}}{\partial x}$.

$$\underbrace{\hat{N}}_{\substack{\text{Normal}\\ \text{Vector}}} = \frac{\frac{\partial \vec{f}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{f}}{\partial y}}{\left\| \frac{\partial \vec{f}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{f}}{\partial y} \right\|}$$

32.1.3 שטח במשטח



$$d\vec{f} = \frac{\partial \vec{f}}{\partial x}dx + \frac{\partial \vec{f}}{\partial y}dy$$

קירוב ליניארי לתמונה תחת $\vec{f}$ של מלבן הוא מקבילית. השטח של המקבילית הור $\left\|\left(\frac{\partial f}{\partial x}h\right) \times \left(\frac{\partial f}{\partial y}k\right)\right\| \sim hk\left\|\frac{\partial f}{\partial x} \times \frac{\partial f}{\partial y}\right\|$

דוגמה

$$\vec{f}(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} a\cos\theta\sin\varphi \\ a\sin\theta\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}$$

כך ש $0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \varphi \leq \pi$

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} -a\sin\theta\sin\varphi \\ a\cos\theta\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} a\cos\theta\cos\varphi \\ a\sin\theta\cos\varphi \\ -a\sin\varphi \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \theta} \times \frac{\partial f}{\partial \varphi} &= a^2\sin\varphi \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\cos\varphi \\ -\sin\varphi \end{pmatrix} \\ &= a^2\sin\varphi \begin{pmatrix} -\cos\theta\sin\varphi \\ -\sin mgv \sin mgj \\ -\cos\varphi \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial \theta} \times \frac{\partial f}{\partial \varphi} \right\| = a^2\sin\varphi$$

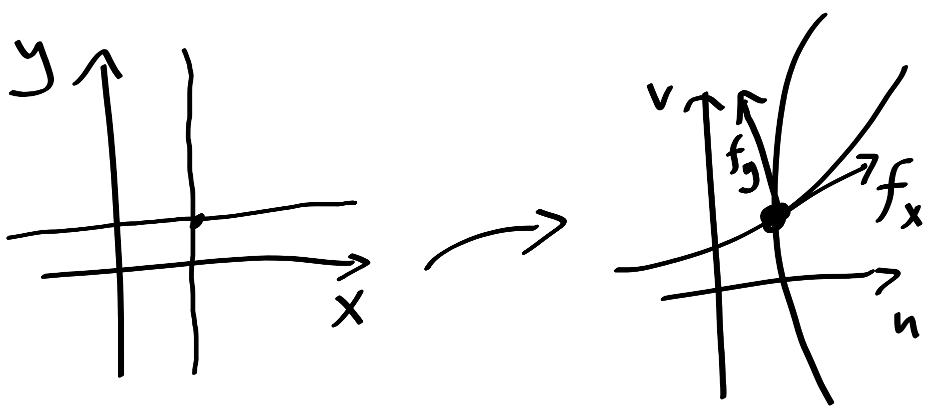
$$\hat{N} = \begin{pmatrix} -\cos\theta\sin\varphi \\ -\sin\theta\sin\varphi \\ -\cos\varphi \end{pmatrix} = -\frac{1}{a}\vec{f}$$

32.1.4 חילוף משתנים

$$\vec{f} = D \to \mathbb{R}^n$$

דוגמה:

$$\begin{aligned} \vec{f} : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ f\begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} &\to \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$



אזי השטח החדש הוא:

$$\left|h\vec{f}_x \quad k\vec{f}_y\right| = hk\left|\vec{f}_x \quad \vec{f}_y\right| = hk \cdot (\text{Jacobian})$$

אותו דבר ב $\mathbb{R}^3$ רק שזה לא מקבלית אלה מקבילון.
השטח הוא:

$$\underbrace{\left|\vec{f}_x \quad \vec{f}_y \quad \vec{f}_z\right|}_{\left|D\vec{f}\right|}\partial x\partial y$$

דוגמה:

$$f\begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \cos\theta & r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$$

כלומר השטח הוא $r\partial r\partial\theta$
דוגמה:

$$f\begin{pmatrix} \rho \\ \theta \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho\cos\theta \\ \rho\sin\theta \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \rho\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho$$

אזי השטח הוא $\rho\partial r\partial\theta\partial z$

פרק 33

הרצאה מס.23

33.1 שדות וקטוריים וסקלרים ופעולותיהם

כאשר $D \subset \mathbb{R}^n$
שדה וקטורי:

$$\vec{f}: D \to \mathbb{R}^n$$

סדה סקלרי

$$\vec{f}: D \to \mathbb{R}$$

אם $\phi(x_1 \dots x_n)$ אזי

$$\vec{\nabla}\phi = \mathrm{grad}\phi$$

$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial\phi}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial\phi}{\partial x_n} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

דוגמאות:

$$\phi = x^2 y + z$$

$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} 2xy \\ x^2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ב.

$$r=\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}$$

$$\vec{\nabla}r=\begin{pmatrix}\frac{\partial r}{\partial x_1}\\ \vdots\\ \frac{\partial r}{\partial x_n}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{x_1}{r}\\ \vdots\\ \frac{x_n}{r}\end{pmatrix}=\frac{r}{r}=\hat{r}$$

בסדה סקלארי מגדירים

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1}+\frac{\partial f_2}{\partial x_2}+\cdots+\frac{\partial f_n}{\partial x_n}=\vec{\nabla}\cdot\vec{f}=\mathrm{div}\vec{f}$$

דוגמה:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}\cdot\begin{pmatrix}x^2y\\ yz\\ z\end{pmatrix} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2y\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(yz\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(z\right)\\ &= 2xy+z+1\end{aligned}$$

מה המשמעות של זה?
אם $\vec{v}$ הוא שדה מהירות אזי $\vec{\nabla}v$ זה בערך כמה יצא מהמשטח ביחס לנפח של המשטח
אם מתעשקים ב $\mathbb{R}^3$ אז אפשר להגדיר:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}\times\vec{f} &= \begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\\ \frac{\partial}{\partial y}\\ \frac{\partial}{\partial z}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}f_1\\ f_2\\ f_3\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial y}\\ f_1 & f_2 & f_3\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}\frac{\partial f_3}{\partial y}-\frac{\partial f_2}{\partial z}\\ \frac{\partial f_1}{\partial z}-\frac{\partial f_3}{\partial x}\\ \frac{\partial f_z}{\partial x}-\frac{\partial f_1}{\partial y}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

דוגמה:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}\times\vec{f} &= \begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\\ \frac{\partial}{\partial y}\\ \frac{\partial}{\partial z}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}x^2y\\ yz\\ z\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}-y\\ 0\\ -x^2\end{pmatrix}\end{aligned}$$

תכונות:

$$
\begin{aligned}
\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}\times A\right) &= 0\\
\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\varphi\right) &= \vec{0}\\
\vec{\nabla}\cdot\left(f\vec{A}\right) &= \left(\vec{\nabla}f\right)\cdot\vec{A}+f\left(\vec{\nabla}A\right)\\
\vec{\nabla}\left(\vec{A}\times\vec{B}\right) &= \left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right)\vec{B}-\vec{A}\left(\vec{\nabla}\times\vec{B}\right)
\end{aligned}
$$

פרק 34

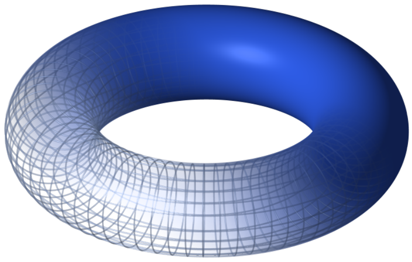
הרצאה מס.24

$$\oint_c \vec{f} \cdot \partial \vec{r} = \iint_\Sigma \left(\vec{\nabla} \times \vec{f}\right) \cdot \partial \vec{s}$$

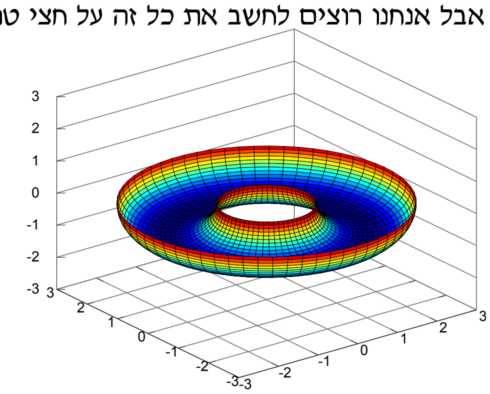
נאמת את משפט סטוקס:
עבור Σ המחצית העליונה של הטרוס:

$$\vec{f} = \begin{pmatrix} -z \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$$

נזכר בנוסחאות של טורוס:



אבל אנחנו רוצים לחשב את כל זה על חצי טורוס:



$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2+\cos u)\cos v \\ (2+\cos u)\sin v \\ \sin u \end{pmatrix}$$

כאשר $0 \le u \le \pi, 0 \le v \le 2\pi$
אזי

$$\partial\vec{S} = \hat{N}\partial S = (2+\cos u)\begin{pmatrix} \cos u \cos v \\ \cos u \sin v \\ \sin u \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{f} &= \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -z \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

אזי מחשבים:

$$\begin{aligned}
\iint \left(\vec{\nabla} \times \vec{f}\right) \cdot \partial \vec{S} &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot (2+\cos u) \begin{pmatrix} \cos u \cos v \\ \cos u \sin v \\ \sin u \end{pmatrix} \partial u \partial v \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} (2+\cos u)\left(-\cos u \sin v + \sin u\right) \partial u \partial v \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \left(-2\cos u \sin v - \cos^2 u \sin v + 2\sin u + \cos u \sin v\right) \partial u \partial v \\
&= 2\pi \left(-2\cos u - \frac{\cos 2u}{4}\right)|_0^{\pi} \\
&= 8\pi
\end{aligned}$$

אזי עכשיו ננסה לחשב את האינטגרל המסילתי ישירות:

$$\begin{aligned}
c_2 \quad &: \quad \vec{r}\,(t) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cos t \\ 3\sin t \\ 0 \end{pmatrix} \\
c_1 \quad &: \quad \vec{r}\,(t) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\oint_c \vec{f} \cdot \partial \vec{r} &= \oint_{c_1} \vec{f} \cdot \partial \vec{r} + \oint_{c_2} \vec{f} \cdot \partial \vec{r} \\
&= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 0 \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ -\cos t \\ 0 \end{pmatrix} \partial t + \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 0 \\ 3\cos t \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix} \partial t \\
&= \int_0^{2\pi} \left(-\cos^2 t\right) \partial t + \int_0^{2\pi} \left(9\cos^2 t\right) \partial t \\
&= 8 \overbrace{\int_0^{2\pi} \cos^2 t \partial t}^{\pi} \\
&= 8 \left[\frac{\frac{\sin 2t}{2} + t}{2}\right]_0^{2\pi} \\
&= 8\pi
\end{aligned}$$

34.1 שימושים במשפטי Gauss & Stocks

34.1.1 שימוש במשפט Gauss

$\vec{f}$ גזירה בריציפות ב D ועל שפתו

$$\oiint \vec{f}\cdot\partial\vec{s}=\iiint_D\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{f}\right)\partial V$$

נניח מסה לא נוצרת(כלומר קבועה!)

$$\vec{v}=(x,y,z,t)$$

והצפיפות:

$$\rho=\rho\left(x,y,z,t\right)$$

אז נרשום מסה בתחום:

$$m\left(D\right)=\iiint\limits_D\rho\partial V$$

קצב שינוי המסה:

$$\begin{aligned}\frac{\partial m}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t}\iiint\limits_D\rho\partial V\\ &= \iiint\limits_D\rho_t\partial t\end{aligned}$$

המסה היוצאת דרך ∂Dביחידת זמן:

$$\oiint\limits_{\partial D}\rho\vec{v}\cdot\partial\vec{S}$$

המסה הנכנסת בזמן:

$$\frac{\partial m}{\partial t}=-\oiint\limits_{\partial D}\rho\vec{v}\cdot\partial\vec{S}$$

$$\begin{aligned}\iiint\limits_D\rho_t\partial V &= -\iiint\limits_D\vec{\nabla}\left(\rho\vec{v}\right)\partial V\\ \iiint\limits_D\left(\rho_t+\vec{\nabla}\cdot\left(\rho\vec{v}\right)\right)\partial V &= 0\end{aligned}$$

ובגלל שזה צריך להתקיים בכל V אזי $\rho_t + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0$ שלזה קוראים משפט הריציפות.

34.1.1.1 שימוש במשפט Stocks

$$\iint\limits_{\Sigma} \left(\vec{\nabla} \times \vec{f}\right) \cdot \hat{N} \partial S = \oint\limits_{\partial\Sigma} \vec{f} \cdot \partial \vec{r}$$

נשתמש בניסוח הדו מימדי של המשפט הזה הנקרא משפט Green

$$\begin{aligned}\oint\limits_{c} \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \partial x \\ \partial y \end{pmatrix} &= \oint\limits_{c} P \partial x + Q \partial y \\ &= \iint\limits_{D} \left(Q_x - P_y\right) \partial x \partial y\end{aligned}$$