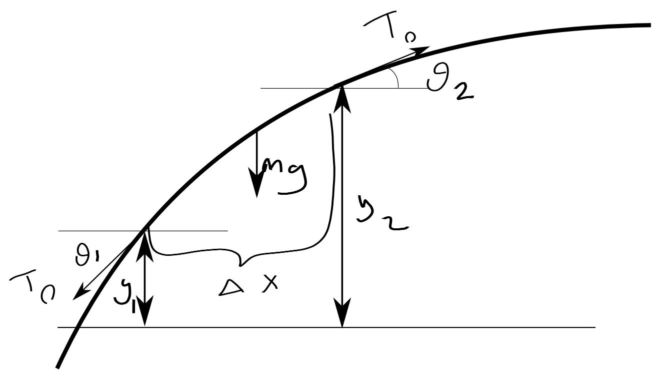
תרגיל מס.4

עפיף חלומה 302323001

16 בנובמבר 2009

1 שאלה 1

1.1 א



איור 1: גל

$$\begin{aligned}
m\ddot{y} &= -\sin\theta_1 T_0 + \sin\theta_2 T_0 - mg \\
\sin\theta_1 &\approx -\frac{\Delta y}{\Delta x}|_{x_1} \\
\sin\theta_2 &\approx \frac{\Delta y}{\Delta x}|_{x_2} \\
\ddot{y} &= T_0\left(\frac{\frac{\Delta y}{\Delta x}|_{x_1} - \frac{\Delta y}{\Delta x}|_{x_2}}{\rho\Delta x}\right) - g \\
\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= \frac{T_0}{\rho}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - g
\end{aligned}$$

1.2 ב

יודעים כי ψ_1, ψ_2 פותרים שת המשוואה, אזי רוצים לדעת אם גם $\psi_1 + \psi_2$ פותרים אותה.
נתון:

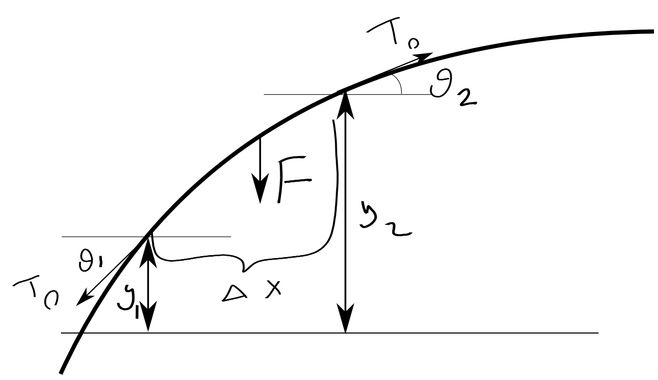
$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t^2} - \frac{T_0}{\rho} \cdot \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} + g &= 0 \\
\frac{\partial^2 \psi_2}{\partial t^2} - \frac{T_0}{\rho} \cdot \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x^2} + g &= 0
\end{aligned}
$$

אזי:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \left(\psi_1 + \psi_2\right)}{\partial t^2} &\overset{?}{=} \frac{T_0}{\rho} \cdot \frac{\partial^2 \left(\psi_1 + \psi_2\right)}{\partial t^2} - g \\
\frac{\partial^2 \left(\psi_1 + \psi_2\right)}{\partial t^2} - \frac{T_0}{\rho} \cdot \frac{\partial^2 \left(\psi_1 + \psi_2\right)}{\partial t^2} + g &\overset{?}{=} 0 \\
\underbrace{\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t^2} - \frac{T_0}{\rho} \cdot \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} + g}_{0} + \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial t^2} - \frac{T_0}{\rho} \cdot \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x^2} &\overset{?}{=} 0 \\
\frac{\partial^2 \psi_2}{\partial t^2} - \frac{T_0}{\rho} \cdot \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x^2} &\overset{\times}{=} 0
\end{aligned}
$$

אזי זה לא מתקיים(מסיבה שזו משוואה לא הומוגינית)

2 שאלה 2



איור 2: גל עם הכח המוזר הזה

נתון ש $F = -\gamma y \Delta x$

$$
\begin{aligned}
m\ddot{y} &= -\sin\theta_1 T_0 + \sin\theta_2 T_0 - \gamma y \Delta x \\
\sin\theta_1 &\approx -\frac{\Delta y}{\Delta x}|_{x_1} \\
\sin\theta_2 &\approx \frac{\Delta y}{\Delta x}|_{x_2} \\
\ddot{y} &= T_0\left(\frac{\frac{\Delta y}{\Delta x}|_{x_1} - \frac{\Delta y}{\Delta x}|_{x_2}}{\rho\Delta x}\right) - \frac{\gamma y \Delta x}{\rho \Delta x} \\
\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= \frac{T_0}{\rho}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\gamma y}{\rho}
\end{aligned}
$$

נניח שקיים פתרון מהצורה $\psi = A(x)T(t)$ אזי:

$$
\begin{aligned}
A(x)\frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2} &= \frac{T_0}{\rho}\cdot T(t)\cdot\frac{\partial A(x)}{\partial x^2} - \frac{\gamma A(x)T(t)}{\rho} \\
\frac{1}{T(t)}\cdot\frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2} &= \frac{T_0}{\rho A(x)}\cdot\frac{\partial^2 A(x)}{\partial x^2} - \frac{\gamma}{\rho}
\end{aligned}
$$

מכיוון ששני הצדדים שווים עבור כל x,t אזי כל צד חייב להיות שווה לקבוע, אזי $\lambda = -\omega^2$ אזי:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{T(t)}\cdot\frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2} &= \lambda \\
\frac{T_0}{\rho A(x)}\cdot\frac{\partial^2 A(x)}{\partial x^2} - \frac{\gamma}{\rho} &= \lambda
\end{aligned}
$$

פותרים את המשוואות הבלתי תלויות:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2} &= \lambda T(t) \\
T(t) &= \alpha e^{i\omega\cdot t} + \beta e^{-i\omega\cdot t} \\
\frac{T_0}{\rho A(x)}\cdot\frac{\partial^2 A(x)}{\partial x^2} - \frac{\gamma}{\rho} &= -\omega^2 \\
\frac{\partial^2 A(x)}{\partial x^2} &= \left(-\omega^2 + \frac{\gamma}{\rho}\right)\cdot\frac{\rho}{T_0}A(x) \\
A(x) &= e^{\sqrt{\left(-\omega^2+\frac{\gamma}{\rho}\right)\cdot\frac{\rho}{T_0}}\cdot x} \\
&= e^{-ikx}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
-\kappa^2 &= \left(-\omega^2 + \frac{\gamma}{\rho}\right)\cdot\frac{\rho}{T_0} \\
\kappa &= \mp\sqrt{\left(\omega^2 - \frac{\gamma}{\rho}\right)\cdot\frac{\rho}{T_0}}
\end{aligned}
$$

הקשר הליניארי לא נשמר.

3 שאלה 3

3.1 א

$$
\begin{aligned}
PV^{\gamma} &= C \\
\kappa &= \frac{1}{V}\cdot\frac{\partial V}{\partial P} \\
V &= \left(\frac{C}{P}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \\
\kappa &= \left(\frac{C}{P}\right)^{-\frac{1}{\gamma}}\cdot\frac{\partial\left(\left(\frac{C}{P}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\right)}{\partial P} \\
&= \left(\frac{C}{P}\right)^{-\frac{1}{\gamma}}\cdot\frac{1}{\gamma}\cdot\left(\frac{C}{P}\right)^{\frac{1}{\gamma}-1}\left(-C\cdot\frac{1}{P^2}\right) \\
&= -\frac{1}{\gamma}\cdot\frac{P}{C}\cdot C\cdot\frac{1}{P^2} \\
&= -\frac{1}{\gamma P}
\end{aligned}
$$

3.2 ב

$$
\begin{aligned}
v &= \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho_0}} \\
&= \sqrt{\frac{7/5\cdot 1.033\cdot 10^5}{0.0013}} \\
&= 333.535\frac{m}{sec}
\end{aligned}
$$

3.3 ג

$$
\begin{aligned}
20\log_{10}\left(\frac{P_s}{P_{s_0}}\right) &= 120\text{dB} \\
\log_{10}\left(\frac{P_s}{P_{s_0}}\right) &= 6 \\
\frac{P_s}{P_{s_0}} &= 10^6 \\
P_s &= 10^6\cdot\left(2\cdot 10^{-5}\right) \\
&= 20\tfrac{N}{m^2}
\end{aligned}
$$

4 שאלה 4

4.1 א

$$\begin{aligned}
F\left(\omega\right) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f\left(x\right)e^{-i\omega x}dx\\
F\left(-\omega\right) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f\left(x\right)e^{i\omega x}dx\\
\overline{F\left(\omega\right)} &= \overline{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f\left(x\right)e^{-i\omega x}dx}\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f\left(x\right)e^{i\omega x}dx
\end{aligned}$$

משל.
ההתמרה היא סימטרית בציר הממשיים ואנטי סימטרית בציר המרוכבים.

4.2 ב

$$\begin{aligned}
\overline{F\left(\omega\right)} &= \overline{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f\left(x\right)e^{-i\omega x}dx}\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\overline{f\left(x\right)e^{-i\omega x}}dx\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f\left(-x\right)e^{+i\omega x}dx\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}-\int_{\infty}^{-\infty}f\left(x\right)e^{-i\omega x}dx\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f\left(x\right)e^{-i\omega x}dx
\end{aligned}$$

וזה שווה ל $F\left(\omega\right)$ ולכן $F\left(\omega\right)$ ממשי

4.3 ג

גם התמרת פורייה היא סימטרית וממשית.

5 שאלה 5

5.1 א

$$f\left(t\right)=\begin{cases} e^{-at} & t\geq0\\ 0 & t<0 \end{cases}$$

$$
\begin{aligned}
F(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-at} \cdot e^{-i\omega t} dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{(-a-i\omega)t} dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{e^{(-a-i\omega)t}}{-a-i\omega} \right]_0^\infty \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[0 - \frac{1}{-a-i\omega} \right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}(a+i\omega)}
\end{aligned}
$$

5.2 ב

6 שאלה 6

6.1 א

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \cos(\omega_0 t) \\
&= \frac{e^{i\omega_0 x} + e^{-i\omega_0 x}}{2} \\
\mathcal{F}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{i\omega_0 x} + e^{-i\omega_0 x} \right) e^{-i\omega x} dx \\
\mathcal{F}(\omega) &= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\omega_0 - \omega)x} dx + \int_{\infty}^{\infty} e^{-i(\omega + \omega_0)x} dx \right]
\end{aligned}
$$

כבר פיתחנו בכיתה כי $\int_0^\infty e^{0(\omega_0-\omega)x} = \delta(\omega_0 - \omega)$ אזי:

$$
\mathcal{F}(\omega) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \left[\delta(\omega_0 - \omega) + \delta(\omega + \omega_0) \right]
$$

6.2 ב

נניח ששהתמאה של $f(t)$ היא $F(\omega)$ אזי משתמשים בתכונה של טרנספורם פורייה, האורת שההתמרה של $e^{iat} f(t)$ היא $F(\omega - a)$, כלומר מזיזים את הערוצים על ציר התדר. דואגים לכך ש $\Delta\omega > |a_1 - a_2|$ ועושים מניפולציה פשוטה:

$$
\begin{aligned}
f_1'(t) &= f_1(t) \cdot e^{ia_1 t} \\
f_2'(t) &= f_2(t) \cdot e^{ia_2 t}
\end{aligned}
$$