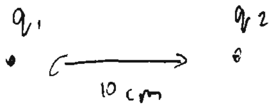
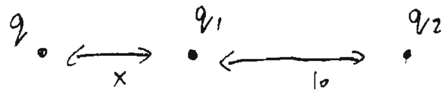
- פתרון תרגיל 1 -



1

כדי שלא יפעל כוח על מטען שלישי יש למקם אותו על המשך הקו המחבר את שני המטענים בצד שקרוב ל q_1, בכל מקום אחר לא יהיה ניתן לאזן את הכוחות.

נמצא את המרחק מ q_1



$$k\frac{\cancel{q}\cdot q_1}{x^2} + k\frac{\cancel{q}\, q_2}{(x+10)^2} = 0$$

$$q_1(x+10)^2 = -q_2 x^2$$

$q_1 = 1\cdot10^{-6}C$
$q_2 = -3\cdot10^{-6}C$

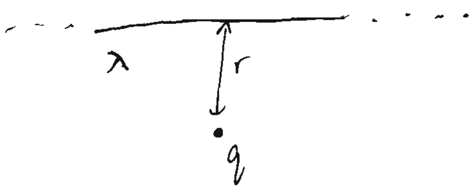
$$x^2+20x+100 = 3x^2$$

$$x^2-10x-50=0$$

$$x = \frac{10\pm\sqrt{300}}{2} = 5\pm5\sqrt{3}$$

$$\Downarrow$$

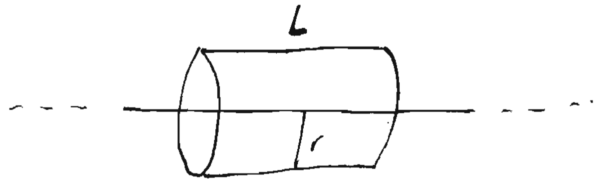
$$x = 5+5\sqrt{3}\ \text{cm}$$



ידוע כי $\vec{F} = \vec{E} \cdot q$

לכן נמצא את $\vec{E}$ בנק' בה
הניחו את q ולשם כך נשתמש
במשפט גאוס:

נבנה מעטפת גאוס גלילית באורך L ורדיוס r סביב התיל:



בגלל הסימטריה הגלילית, ניתן לומר שהשדה יהיה בכיוון מאונך למעטפת הגליל (ומשיק לבסיסים) ושווה בגודלו ע"פ המעטפת
ולכן

$$q = \epsilon_0 \oint\!\!\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{s} = \epsilon_0 E \cdot 2\pi r L$$

מצד שני המטען הכלוא במעטפת יהיה

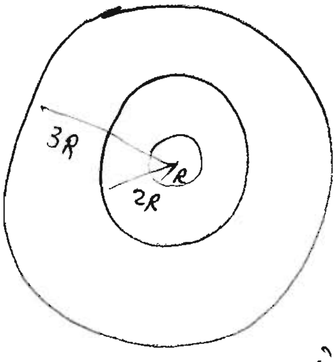
$$q = \lambda L$$

ולכן נקבל

$$\vec{E}(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}\hat{r}$$

והכוח יהיה

$$\vec{F} = \frac{\lambda q}{2\pi\epsilon_0 r}\hat{r}$$



חישוב שדה חשמלי:

ניקח משטח גאוסי בצורת כדור שמרכזו במרכז הקליפות הכדוריות. בגלל הסימטריה צריך להיות שדה אחיד על המשטח ולכן

$$\oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{s} = E\oiint_S ds = E\cdot 4\pi r^2$$

לפי חוק גאוס

$$q = \epsilon_0 \oiint_S \vec{E}\, d\vec{s}$$

ולכן

$$E = \begin{cases} 0 & r < R \\ \dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{r} & R < r < 2R \\ -\dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{r} & 2R < r < 3R \\ \dfrac{2Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{r} & r > 3R \end{cases}$$

לחישוב הפוטנציאל נבחר משטח על גבי הרדיוס ונחשב

$$\Delta U = -\int_{r_1}^{r_2} \vec{E}\cdot d\vec{l} \qquad -\int_{r_1}^{r_2} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{r}\cdot d\vec{l} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}\Big|_{r_1}^{r_2}$$

$$-\int_{\infty}^{r} \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\int_{\infty}^{r} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{r}\cdot d\vec{l} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \qquad r > 3R$$

$$U_r - U_{3R} = -\int_{3R}^{r} -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{r}\cdot d\vec{l} = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 (3R)} \qquad 3R > r > 2R$$

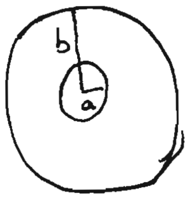
$$U_r - U_{2R} = -\int_{2R}^{r} \frac{2Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{r}\cdot d\vec{l} = \frac{2Q}{4\pi\epsilon_0 r} - \frac{2Q}{4\pi\epsilon_0 (2R)} \qquad 2R > r > R$$

$$R > r$$

$$U_r - U_R = 0$$

$$U = \begin{cases} \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} & r > 3R \\ -\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} + \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 (3R)} + \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 (3R)} & 2R < r < 3R \\ \dfrac{2Q}{4\pi\varepsilon_0 r} - \dfrac{2Q}{4\pi\varepsilon_0 (2R)} + \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 (6R)} & R < r < 2R \\ \dfrac{7Q}{4\pi\varepsilon_0 r} & r < R \end{cases}$$

קיבול מוגדר כיחס בין המטען על אחד מלוחות הקבל ובין המתח
בין שני הדקי הקבל, לכן נמצא איזה מתח גורם מטען
Q על הגליל הפנימי של הקבל.



ניקח חתך של הקבל:

נניח כי הגליל הפנימי טעון במטען Q
נמצא ע"י חוק גאוס את השדה החשמלי $\vec{E}$ שמטען זה
יוצר:
נקיף את הגליל הפנימי במעטפת גלילית ברדיוס r ובגובה
L כך שהצירים של הגליל ושל המעטפת מתלכדים.
מכיוון ש $a,b \ll L$ ניתן להזניח אפקט קצוות, ולכן יש
סימטריה ב φ ו z, כלומר השדה תלוי רק ב-r ויהיה
בכיוון $\vec{r}$.

לפי חוק גאוס:
$$\frac{Q}{\varepsilon_0} = \oint \vec{E}\cdot d\vec{s}$$

מכיוון שהשדה בכיוון $\vec{r}$ בלבד, אין שטף דרך בסיסי הגליל.
מכיוון שיש סימטריה והשדה תלוי ב-r בלבד, השדה יהיה קבוע
ע"פ הגליל ונקבל:

$$\frac{Q}{\varepsilon_0} = E\int_0^L dz\int_0^{2\pi} r\,d\varphi = E\cdot 2\pi r\cdot L$$

$$\vec{E}_{(r)} = \frac{Q}{2\pi r\cdot L\cdot\varepsilon_0}\vec{r}$$

כעת, בכדי למצוא את המתח בין לוחות הקבל, יש לבצע את
האינטגרל:
$$V = -\int_b^a \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

נבחר מסלול בכיוון $\vec{r}$ ונקבל:
$$V = \int_a^b \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 L}\cdot\frac{1}{r}\,dr = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 L}\left(\ln b - \ln a\right)$$

$$Q = \frac{2\pi\varepsilon_0 L}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}\cdot V = C\cdot V \qquad C = \frac{2\pi\varepsilon_0 L}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$