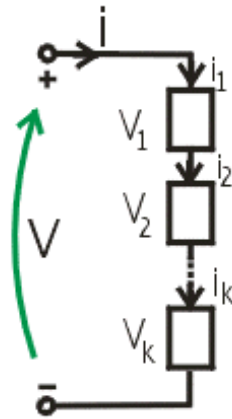


חיבורים טוריים

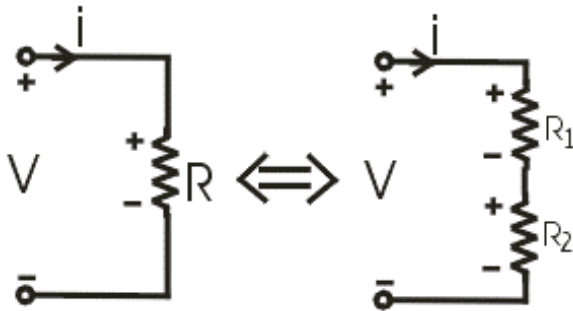
באופן כללי:

$$i = i_1 = i_2 = \dots = i_k$$

$$v = v_1 + v_2 + \dots + v_k$$



נגדים:



$$(*) \begin{cases} i = i_1 = i_2 \\ v - v_1 - v_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow v = v_1 + v_2$$

עבור נגדים לינאריים:

נרצה להחליף את שני הנגדים המחוברים בטור לנגד אחד שקול.
על הנגד השקול ייפול מתח V ויזרום זרם I, לכן:

$$\rightarrow \text{הנגד האקוויולנטי} \quad R = \frac{V}{i} = \frac{V_1 + V_2}{i} = \frac{V_1}{i} + \frac{V_2}{i} = \frac{V_1}{i_1} + \frac{V_2}{i_2} = R_1 + R_2$$

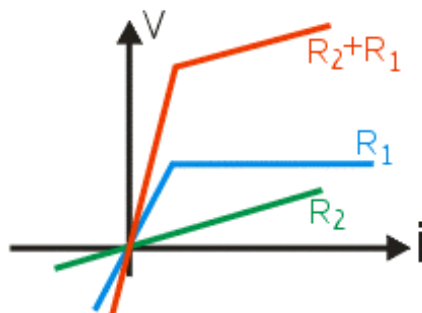
הראינו, אם כן, ש: $R = R_1 + R_2$. ניתן להכליל גם ליותר מ-2 נגדים: $R = R_1 + R_2 + \dots$ וכן למקרה התלוי בזמן

$$\dots R(t) = R_1(t) + R_2(t) + \dots$$

נסכם ונאמר שבאופן כללי ההתנגדות השקולה לחיבור טורי של נגדים היא סכום ההתנגדויות:

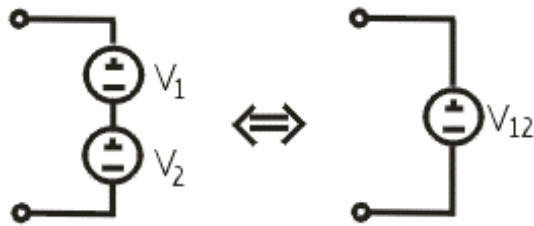
$$R = \sum_k R_k$$

אם הנגדים אינם לינאריים ויש להם אופייין $v(i)$, איך נחשב התנגדות שקולה?
נניח שנתונים שני אופייניים $v_1(i_1)$ ו- $v_2(i_2)$. המשוואות המסומנות ב- * עדיין מתקיימות ולכן ניתן לחבר את האופייניים:



באופן אנליטי: אם $v_1 = f_1(i_1)$, $v_2 = f_2(i_2)$

$$\text{אזי:} \quad v_{1+2} = f_1(i) + f_2(i)$$



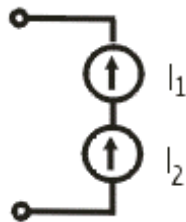
מקורות מתח:

מתקיימת השקילות: $v_{12} = v_1 + v_2$

$$V = \sum_n V_n$$

וניתן להכליל:

עבור חיבור מספר כלשהו של מקורות מתח בטור.

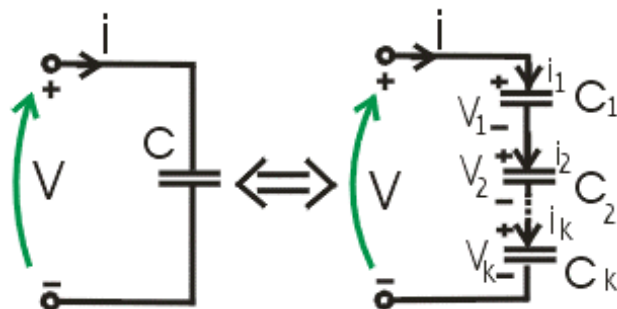


מקורות זרם:

עבור מקורות זרם בטור:

מבחינה פיזיקלית, מצב זה יתכן רק אם $i_1 = i_2$. כלומר, באופן כללי לא מחברים מקורות זרם בטור.

מקור זרם המחובר בטור לאלמנט אחר שקול למקור זרם בלבד:



קבלים:

$$\begin{cases} v = v_1 + v_2 \\ i = i_1 = i_2 \end{cases}$$

$$v_k(t) = v_k(0) + \frac{1}{C_k} \int_0^t i_k(t') dt'$$

ידוע כי על הקבל ה- k :

$$v(t) = \sum_k v_k = \sum_k v_k(0) + \sum_k \frac{1}{C_k} \int_0^t i_k(t') dt' = v(0) + \left(\sum_k \frac{1}{C_k} \right) \cdot \int_0^t i_k(t') dt'$$

ולכן

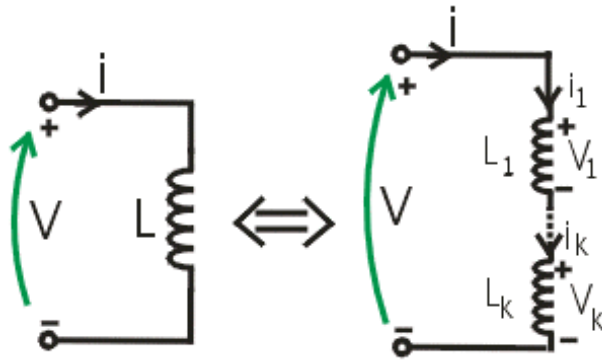
$$v(0) = \sum_k v_k(0)$$

$$\frac{1}{C} = \sum_k \frac{1}{C_k} \quad , \quad S = \sum_k S_k$$

נובע מכך:

סלילים:

עבור סלילים לינאריים:



$$v_k = L_k \frac{di_k}{dt}$$

$$v = \sum_k V_k = \sum_k L_k \frac{di_k}{dt} = \left(\sum_k L_k \right) \frac{di}{dt}$$

$i = i_1 = i_2 = \dots = i_k$

$$L = \sum L_k$$

$$i(0) = i_k(0)$$

נובע מכך:

עבור המקרה של סלילים לא לינאריים הנתונים ע"י אופיין הזרם-שטף שלהם:

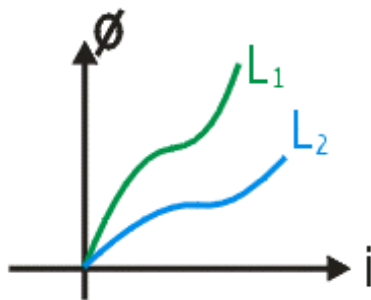
נזכור כי המתח הוא הנגזרת של השטף התלוי בזרם.

לכן:

$$V = \sum_k V_k = \sum_k \frac{d}{dt} \phi_k(i_k) = \frac{d}{dt} \sum_k \phi_k(i) = \frac{d}{dt} \phi(i)$$

$$\phi(i) = \sum_k \phi_k(i)$$

כלומר יש לחבר את השטפים בכדי לקבל את השטף השקול דרך כל הסלילים.

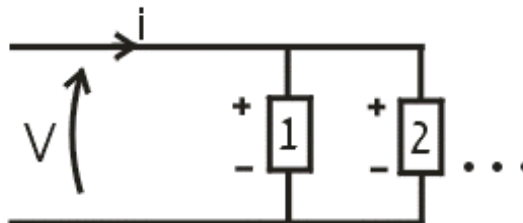


חיבורים מקביליים:

באופן כללי:

$$i = i_1 + i_2 + \dots$$

$$v = v_1 = v_2 = \dots$$



נגדים:

כאמור מתקיים הקשר בין הזרמים:

$$i = \sum i_k$$

$$i_k = G_k V_k = \frac{V_k}{R_k} = \frac{V}{R_k}$$

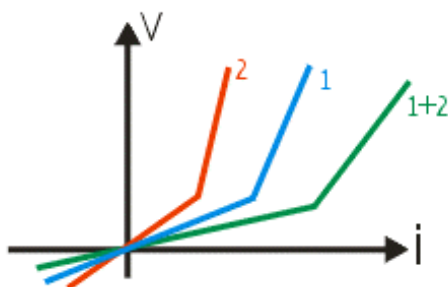
בנגדים לינאריים:

$$G = \sum G_k$$

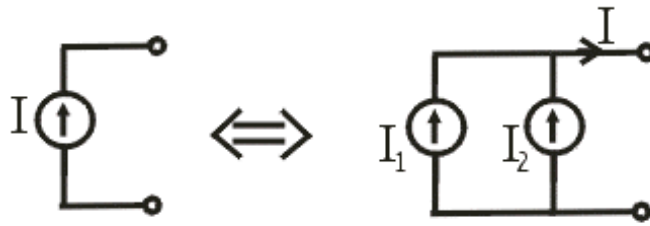
לכן:

$$\frac{1}{R} = \sum \frac{1}{R_k}$$

או באופן שקול:



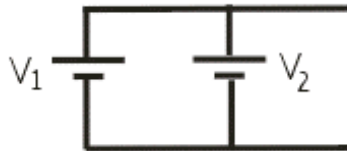
מקורות זרם:



$$i = i_1 + i_2$$

מקורות מתח:

עבור מקורות מתח במקביל:



מבחינה פיזיקלית, מצב זה יתכן רק אם $v_1 = v_2$. כלומר, באופן כללי לא מחברים מקורות מתח במקביל.

קבלים:

בקבלים מתקיים הקשר: $i_k = C_k \frac{dv_k}{dt}$

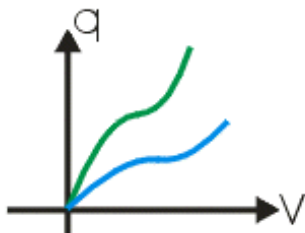
$$i = \sum i_k = \sum C_k \left(\frac{dv_k}{dt} \right) = \sum C_k \left(\frac{dv}{dt} \right) = \left(\frac{dv}{dt} \right) \sum C_k$$

שוב נציב בסכום הזרמים ונקבל:

לכן עבור הקבל השקול מתקיים:

$$C = \sum C_k$$

$$v(0) = v_1(0) = \dots v_k(0)$$



בקבל לא לינארי:

$$i = \sum i_k = \sum \frac{dq_k}{dt} = \frac{d \sum q_k}{dt} = \frac{dq}{dt}$$

כלומר גם במקרה זה נבצע חיבור אנכי של המטענים.

סלילים:

בסלילים מתקיים הקשר: $i_k = i_k(0) + \frac{1}{L_k} \int_0^t v_k(t') dt'$

$$i = \sum i_k = \sum i_k(0) + \sum \frac{1}{L_k} \int_0^t v_k(t') dt = \sum i_k(0) + \int_0^t v_k(t') dt \left(\sum \frac{1}{L_k} \right)$$

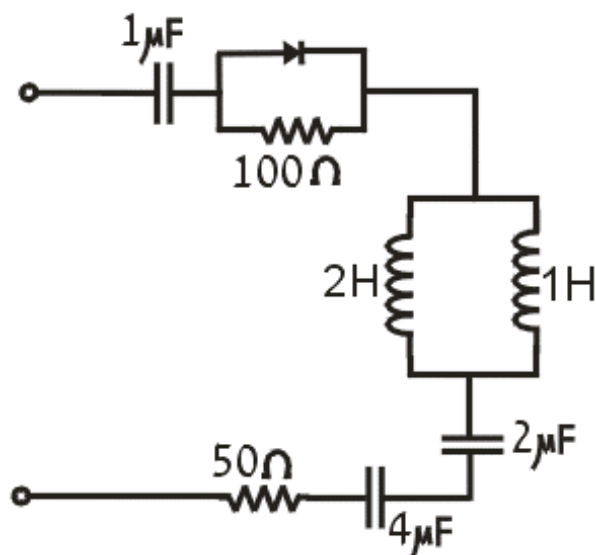
ולכן:

נובע מכך שהסליל השקול יקיים:

$$\frac{1}{L} = \sum \frac{1}{L_k}$$

$$i(0) = \sum i_k(0)$$

דוגמא: פשט את המעגל הבא:



פתרון:

תחילה נמצא את הקבל השקול לשלושת הקבלים במעגל. מכיוון שהקבלים מחוברים

$$\text{בטור: } \frac{1}{C} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$$

וקיבלנו את הקבל השקול: $C = \frac{4}{7} \mu F$

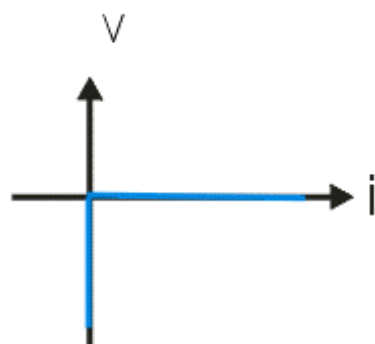
כעת, נמצא את הסליל השקול לשני הסלילים שבמעגל. הסלילים מחוברים

$$\text{במקביל: } \frac{1}{L} = \frac{1}{2} + \frac{1}{1} = \frac{3}{2}$$

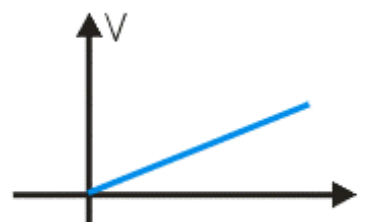
ולכן הסליל השקול הוא: $L = \frac{2}{3} H$

נעבור לפשט את חיבור הדיודה ושני הנגדים:

תזכורת:

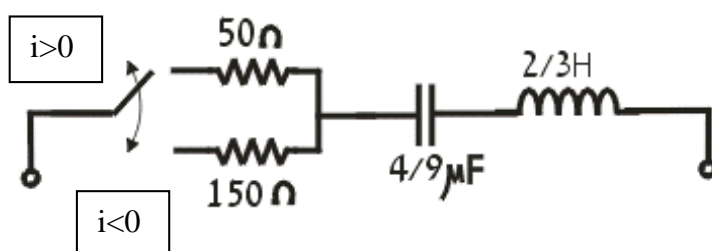
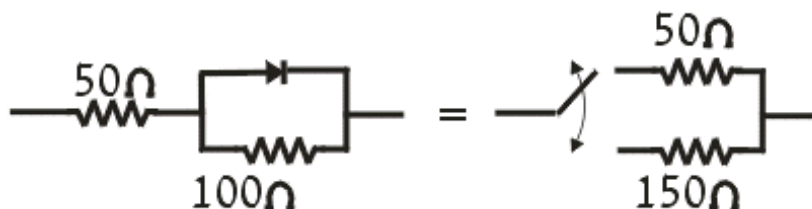


דיודה אידיאלית



דיודה

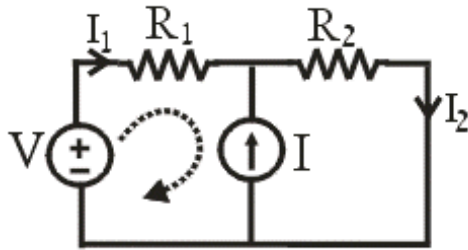
ישנם שני מצבים אפשריים לפעולת הדיודה: כאשר הזרם עליה חיובי הדיודה היא קצר (בהנחה שהיא אידיאלית) ולכן היא מקצרת את הנגד 100Ω , כלומר לא זורם עליו זרם. כאשר הזרם שלילי, הדיודה היא נתק ולכן הזרם לא יכול לזרום דרכה. אז נקבל חיבור רגיל של שני נגדים בטור שנותן נגד שקול של 150Ω :



לכן המעגל המפושט הוא:

כאשר יש קשר לינארי בין ערור ותוצאותיו, השפעת מספר ערורים הפועלים יחד הינה שווה לסכום כל ערור הפועל לחוד כאשר שאר מקורות המתח מקוצרים ומקורות הזרם מנותקים.

דוגמא:



ניתן לראות ישירות מהמעגל (לפי חוקי קירכהוף) שמתקיים:

$$v = (I_2 - I)R_1 + I_2 R_2$$

↓

$$I_2 = \frac{V}{R_1 + R_2} + I \frac{R_1}{R_1 + R_2} = I_2' + I_2''$$

נפתור לפי עקרון הסופר-פוזיציה:
תחילה נבחן את השפעת מקור המתח.
לכן ננתק את מקור הזרם ונקבל:

$$I_2' = \frac{V}{R_1 + R_2}$$

כעת נבחן את השפעת מקור הזרם.
לכן נקצר את מקור המתח ונקבל:

$$I_2'' = I \cdot \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} \cdot \frac{1}{R_2} = I \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

וכמובן שקיבלנו את אותה תוצאה בשתי השיטות.
נשים לב: עבור הספקים עקרון הסופר-פוזיציה לא פועל.

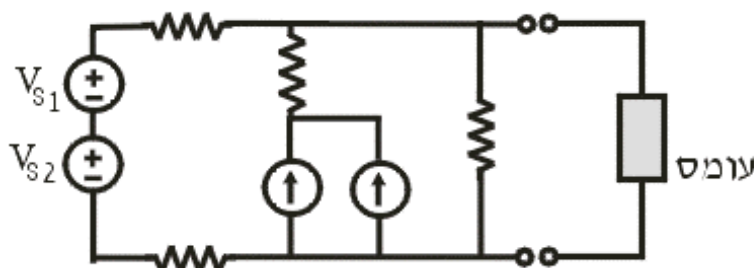
נתבונן למשל על ההספק על הנגד R_2 :

מהמעגל הראשון של השפעת מקור המתח נקבל: $P_v = \left(\frac{V}{R_1 + R_2} \right)^2 R_2$

מהמעגל השני של השפעת מקור הזרם נקבל: $P_i = I^2 \left(\frac{R_1}{R_1 + R_2} \right)^2 R_2$

ורואים כי $P_i + P_v \neq P_T = \left(\frac{V}{R_1 + R_2} + I \frac{R_1}{R_1 + R_2} \right)^2 R_2$

כלומר עקרון הסופר-פוזיציה עובד בזרמים ומתחים אך לא בהספקים.

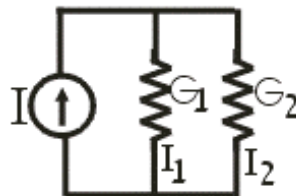


הסבר לעקרון הסופר-פוזיציה:
נניח שהמערכת הנתונה
בדוגמה שלפנינו היא לינארית.

כדי לטפל בענף מקורות המתח, מנתקים את מקורות הזרם. מוצאים את השפעת V_{s1} על העומס ואת השפעת V_{s2} , ומחברים. על העומס נקבל קשר מתח-זרם לינארי כלשהו שכן כל תגובה היא לינארית וחיבור תגובות לינאריות גם הוא לינארי. כנ"ל לגבי מקורות הזרם בקיצור מקורות המתח. כלומר: עקרון הסופר פוזיציה הינו למעשה חיבור אופני התגובה הלינאריים כתוצאה מהמקורות השונים. התגובה הכללית היא סופר-פוזיציה של כל ארבעת התגובות.

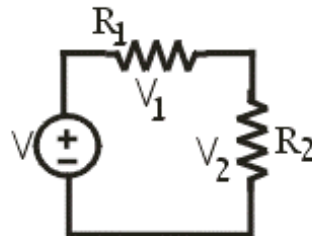
בנקודה זו נציין שתי שיטות נוספות שיעזרו לנו בפישוט מעגלים:

מחלק זרם:



$$I_1 = I \cdot \frac{G_1}{G_1 + G_2} = I \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

מחלק מתח:

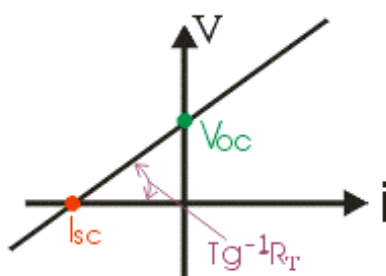
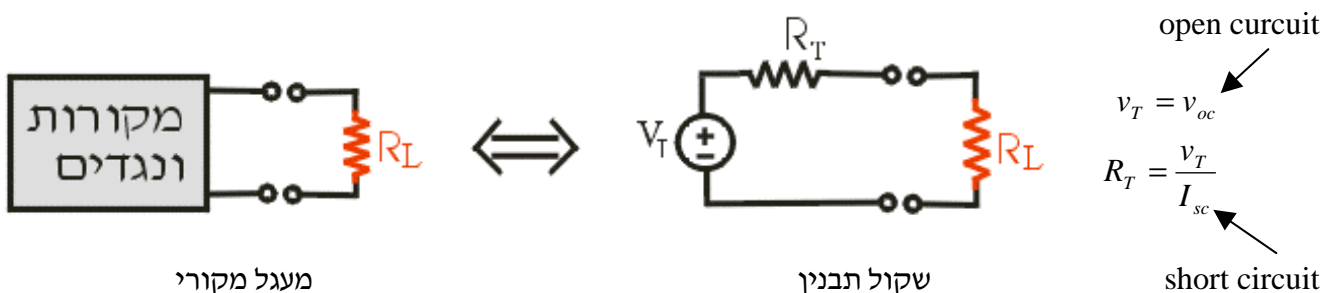


$$V_1 = V \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

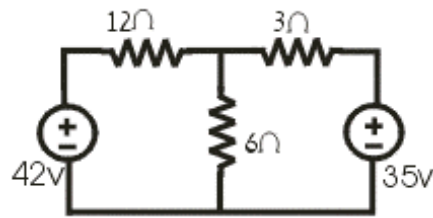
משפט תבנין עבור רשתות אקטיביות - Thevenin's Theorem

עבור עומס ספציפי, ניתן להמיר רשת של אלמנטים לינאריים ומקורות טורי של מקור אידיאלי V_T בטור עם נגד R_T , כאשר V_T הוא מתח הנתק על האלמנט ו- R_T הוא היחס בין V_T לזרם הקצר.

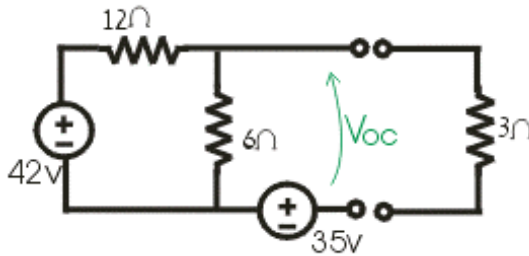
כלומר, כדי למצוא את V_T ננתק את העומס מהמעגל ונחשב את המתח על ההדקים של העומס. כדי למצוא את R_T נקצר את העומס, נחשב מהו הזרם שעובר דרכו, נחלץ את R_T ונמיר את הרשת במקור המתח עם ההתנגדות:



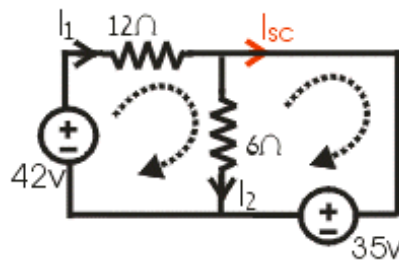
הסבר: סכום השפעת מקורות הוא סכום קשרים לינאריים וגם הוא לינארי. קשר זה הוא גרף לינארי כללי שעלינו למצוא את הפרמטרים שלו. לכן תמיד ניתן לתאר את המקרה הכללי ביותר ע"י מקור יחיד אשר עבורו מתקבל אותו קשר לינארי:



דוגמא:
נתונה הרשת הבאה:
עבור המעגל הנתון, מצא רשת אקוויולנטית
לפי תבנית, עבור הנגד 3Ω .



פתרון:
תחילה נמצא את מתח הנתק:
 $V_T = V_{oc} = 42 \cdot \frac{6}{6+12} - 35 = 14 - 35 = -21_v$
ע"י מחלק מתח

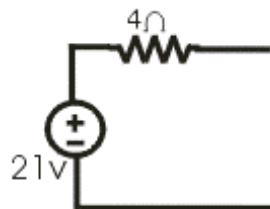


כעת נמצא את זרם הקצר:
מהחוג השמאלי: $12I_1 + 6I_2 = 42$
מהחוג הימני: $-6I_2 = -35 \Rightarrow I_2 = \frac{35}{6}$
נציב במשוואה העליונה ונקבל:

$$I_1 = \frac{42 - \frac{6 \cdot 35}{6}}{12} = \frac{7}{12}$$

לפי חוק קירכהוף עבור הזרמים בצומת:
 $I_{sc} = I_1 - I_2 = \frac{7}{12} - \frac{35}{12} = -\frac{63}{12} = -\frac{21}{4}$

לבסוף נחלץ את ההתנגדות:
 $R_T = \frac{-21}{-\frac{21}{4}} = 4\Omega$

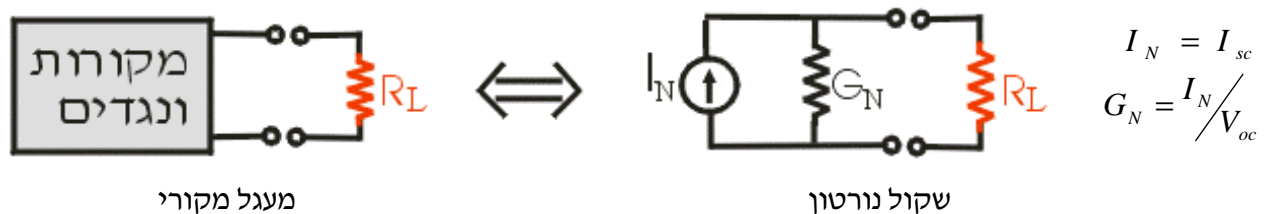


ולכן המעגל השקול לפי תבנית (ללא ציור העומס של 3Ω) הוא:

הערה: עבור רשתות נגדים פשוטות ניתן למצוא את R_T ע"י מציאת ההתנגדות שרואים לתוך הרשת כאשר מקצרים את כל מקורות המתח ומנתקים את מקורות הזרם. בדוגמא שלנו נקבל: $6\Omega \parallel 12\Omega = 4\Omega$

משפט נורטון עבור רשתות אקטיביות - Norton's theorem

עבור עומס ספציפי ברשת של אלמנטים לינאריים ומקורות, ניתן להמיר את הרשת בחיבור מקבילי של מקור זרם אידיאלי I_N ומוליכות G_N , כאשר I_N הוא זרם הקצר על האלמנט ו- G_N הוא היחס בין זרם הקצר למתח הנתק.



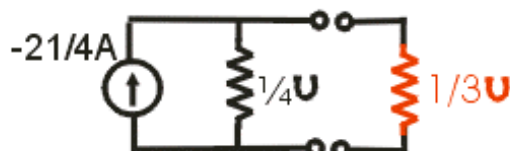
כלומר, כדי למצוא את I_N נקצר את האלמנט ונחשב את הזרם דרכו. כדי למצוא את G_N ננתק את האלמנט מהמעגל, נמצא את המתח על הדקיו ונחלץ את המוליכות לפי היחס ביניהם. אז נוכל להמיר את הרשת בחיבור המקבילי של מקור הזרם עם המוליכות.

נחזור לדוגמא הקודמת:

$$G_N = \frac{-\frac{21}{4}}{-21} = \frac{1}{4} \text{ mho} \quad \text{לכן,} \quad I_{sc} = -\frac{21}{4} \text{ A} \quad V_{oc} = -21 \text{ V}$$

מצאנו קודם ש:

ולכן המעגל השקול לפי נורטון (כולל העומס) הוא:



בדיקה: הבה נשווה את הזרם דרך העומס I_L .

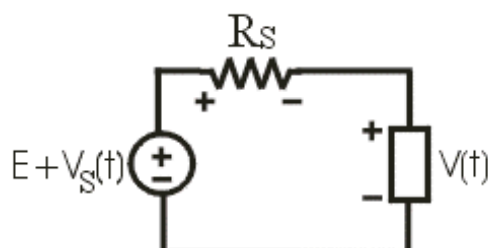
$$I_L = \frac{-21}{7} = -3 \text{ A} \quad \text{בתבנית:}$$

$$I_L = \frac{-21}{4} \cdot \frac{1}{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}} \cdot \frac{1}{3} = -\frac{21}{4} \cdot \frac{1}{\frac{7}{12}} \cdot \frac{1}{3} = -3 \text{ A} \quad \text{בנורטון:}$$

מסקנה: כפי שראינו קודם, כל מקור מתח V עם נגד טורי R ניתן להחלפה עם מקור זרם בגודל $I = \frac{V}{R}$ עם

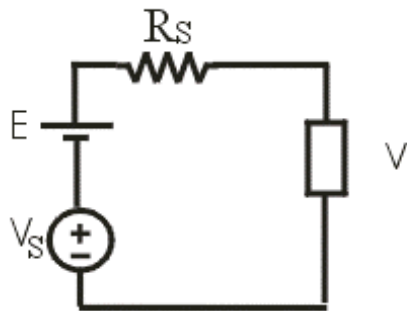
אותו נגד R בחיבור מקבילי.

רכיבים לא לינאריים:



רכיבים עבורם הקשר בין הזרם למתח עליהם אינו קשר לינארי. נתבונן למשל במעגל הבא, שאופיין הזרם-מתח שלו מובא בהמשך:

עבור שינויי מתח קטנים (V_s) סביב נקודת מתח קבועה (E), כלומר עבור $V_s \ll E$, ניתן לבצע את ה"מתכון" הבא (שנקרא קירוב לאותות קטנים):



$$i = g(v) \quad (1)$$

$$E + V_s = iR_s + V \quad (2)$$

כאשר משוואה (1) היא הקשר הלא ליניארי על האלמנט, ומשוואה (2) היא חוק kV בחוג היחיד במעגל. העיקרון הוא: באותות קטנים נקרב את האופיין הלא ליניארי לאופיין ליניארי, אך בכל אזור באופיין הקירוב יהיה שונה. כעת נראה את שלבי הפתרון:

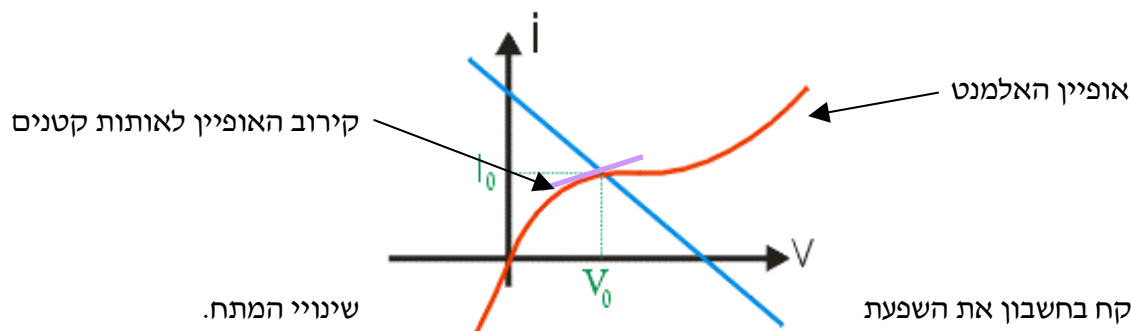
שלב א' מציאת נקודת העבודה: מניחים שאין שינויי מתח, כלומר: $V_s = 0$.

$$\begin{cases} I_0 = g(V_0) \\ E = I_0 R_s + V_0 \end{cases} \Rightarrow I_0, V_0$$

מחלצים מתוך שתי המשוואות את המתח והזרם על האלמנט הלא ליניארי בנקודת העבודה:

ממשוואה 2 עבור $V_s = 0$ נובע כי $i = \frac{E - V}{R_s}$. זהו הישר הכחול בגרף הבא.

לכן הפתרון של (1)+(2) הוא נקודת החיתוך בין הישרים. זוהי נקודת העבודה שלנו ונשתמש בה בהמשך חישובינו לקירוב האופיין הלא ליניארי.



שינויי המתח גורמים לשינויים קטנים במתח.

שלב ב' כעת ניקח בחשבון את השפעת שינויים קטנים במתח המקור V_s

של האלמנט, נסמנם V_1 , ושינויים קטנים בזרם על האלמנט, נסמנם I_1 :

נתבונן באיזור נקודת העבודה: $I_0 + I_1(t)$, $V_0 + V_1(t)$ ונקרב את האופיין באופן הבא:

$$I_0 + i_1 = g(V_0 + V_1) \approx g(V_0) + V_1 \frac{\partial g(V)}{\partial V} \bigg|_{(V=V_0)}$$

לפי קירוב טיילור

ומכיון ש: $I_0 = g(V_0)$

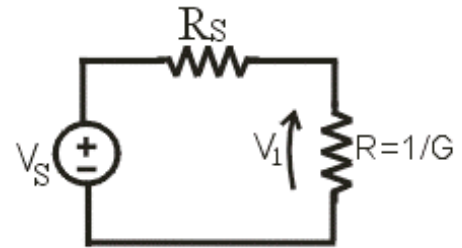
$$i_1 = V_1 \frac{\partial g}{\partial V} \bigg|_{(V=V_0)} = G V_1 \Rightarrow G = \frac{\partial g}{\partial V} \bigg|_{(V=V_0)} = \frac{1}{R}$$

כעת נקרב את האלמנט שלנו לנגד ליניארי שערכו R .

חשוב לציין: הקירוב נכון רק לנקודת העבודה V_0 שמצאנו.

שלב ג' - נחליף את האלמנט בנגד שמצאנו, ונפתור את המעגל למציאת v_1, i_1 :

$$i_1 = \frac{v_s}{R_s + R}, \quad V_1 = V_s \cdot \frac{R}{R_s + R} \Leftrightarrow$$



יש לשים לב ש- R יכול להיות שלילי.

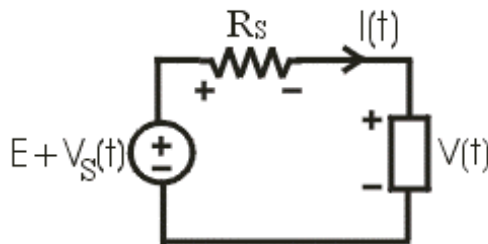
שוב נציין שהקירוב תקף אך ורק בנקודת העבודה I_0, V_0 . לפתרון האות הקטן נוסיף עתה את נקודת העבודה.

לסיכום: א - פותרים עבור E בלבד ומוצאים נקודת עבודה $V_0(E), I_0(E)$.

ב מחשבים את השיפוע: $\frac{1}{R} = \left. \frac{\partial g}{\partial V} \right|_{(V=V_0)}$

ג מחליפים את האלמנט הלא ליניארי בנגד R ומוצאים את v_1, i_1 .

ד - מחברים את תוצאות א', ג' לקבלת הפיתרון הכללי: $V(t) = V_0 + V_1(t), I(t) = I_0 + I_1(t)$

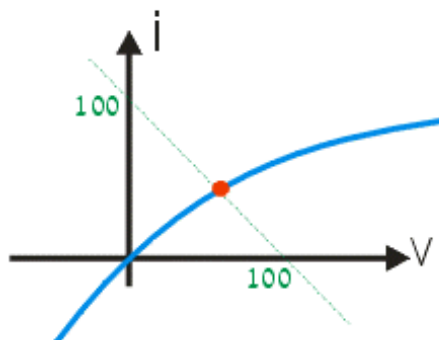


דוגמא:
נתון:

$$E = 100\text{volt}, \quad v_s(t) = \sin(2\pi t)\text{volt}$$

$$R_s = 1\Omega$$

נתון גם אופייין האלמנט:



$$i(v) = 100 \left(1 - e^{-\frac{v}{100}} \right) = g(v)$$

צ"ל: $v(t), i(t) = ?$
פתרון:

א - עבור המעגל, בכל רגע ורגע מתקיים:

$$(1) \quad i(t) = g(v(t))$$

$$(2) \quad E + V_s(t) = i(t) \cdot R_s + V(t)$$

מציאת נקודת העבודה :

כאמור, אנו מניחים $V_s = 0$

$$\left. \begin{array}{l} (1) \quad I_0 = 100 \left(1 - e^{-\frac{V_0}{100}} \right) \\ (2) \quad 100 = I_0 \cdot 1 + V_0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} 100 - V_0 = 100 \left(1 - e^{-\frac{V_0}{100}} \right) \\ \Downarrow \\ v_0 = 100e^{-\frac{V_0}{100}} \end{array}$$

נפתור את המשוואה ע"י הוצאת \ln משני הצדדים ונקבל :

$$\begin{array}{l} V_0 = 56.7 \text{ volt} \\ \Downarrow \\ I_0 = 43.3 \text{ A} \end{array}$$

כאשר הצבנו חזרה את v_0 שהתקבל במשוואה (1) כדי למצוא את i_0 .

ב - נתבונן בשינויים קטנים במתח המקור, כלומר מניחים $V_s(t) \ll E$ (והנחה זו מתקיימת במקרה זה כי לפי הנתונים : $|V_s(t)| < 1 \ll 100 = E$).

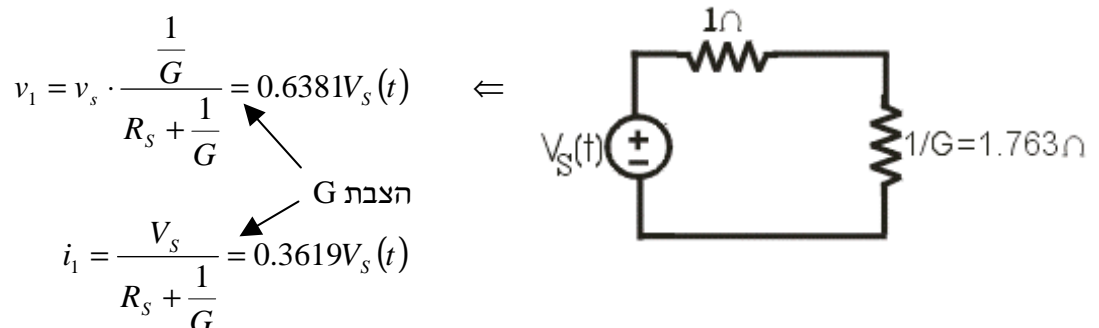
התגובה הכללית תהיה כאמור :

$$\begin{array}{l} V_0 + V_1(t) \quad , \quad I_0 + I_1(t) \\ I_0 + I_1 = g(v_0 + v_1) \approx g(v_0) + v_1 \cdot \frac{\partial g(v)}{\partial v} \\ \frac{\partial g(v)}{\partial v} = e^{-\frac{v}{100}} \Rightarrow \frac{\partial g(v)}{\partial v} \Big|_{v=v_0} = e^{-\frac{V_0}{100}} = 0.5672 = G \end{array}$$

הצבת v_0

$$i_1(t) = v_1(t) \cdot G \quad \text{ולכן :}$$

ג - מעגל התמורה לאות קטן :



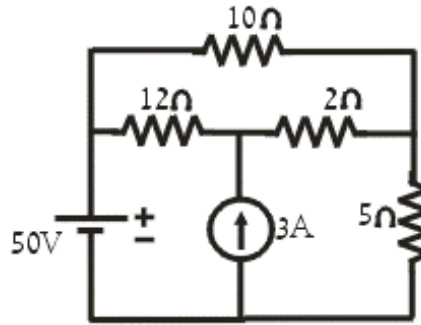
ד - לכן התוצאה הסופית :

$$\begin{array}{l} v(t) = v_0 + v_1(t) = 56.7 + 0.6381 \cdot \sin(2\pi t) \\ i(t) = I_0 + I_1(t) = 43.3 + 0.3619 \cdot \sin(2\pi t) \end{array}$$

דוגמאות לסיום הפרק:

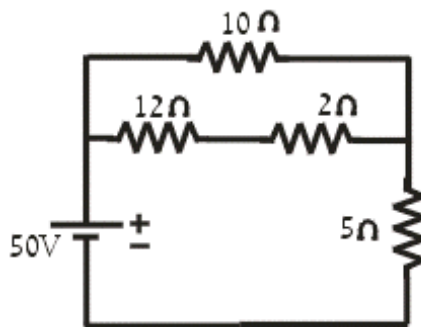
דוגמא 1:

חשב את הזרם על הנגד 2Ω .



פתרון:

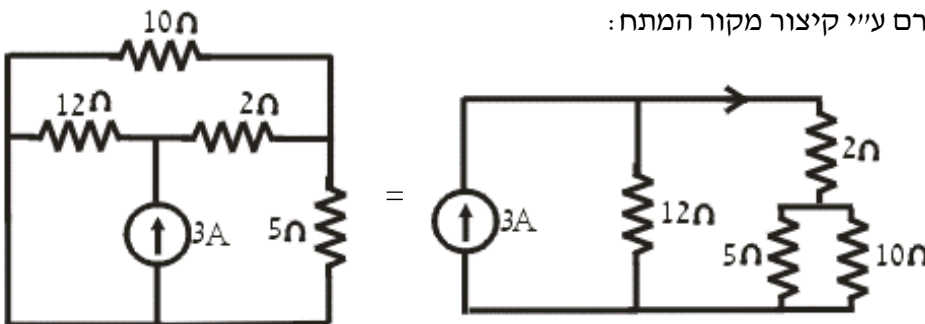
נשתמש בעקרון הסופר-פוזיציה:
תחילה, ננתק את מקור הזרם ונחשב את תרומת מקור הזרם:



$$i_v = \frac{50}{5 + 10 \parallel 12} \cdot \frac{1}{\frac{1}{10} + \frac{1}{12}} = \frac{50}{5 + \frac{140}{24}} \cdot \frac{10}{24} = \frac{500}{260} \text{ A}$$

מחלק זרם
הנגד השקול
לארבעת הנגדים

כעת נעבור לחשב את תרומת מקור הזרם ע"י קיצור מקור המתח:



$$i_A = 3 \cdot \frac{12}{12 + (2 + 10 \parallel 5)} = \frac{54}{26} \text{ A}$$

מחלק זרם

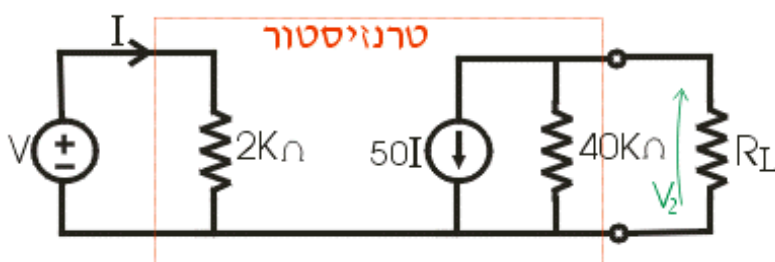
והתגובה הכללית היא הסכום:

$$I = i_v + i_A = 4 \text{ A}$$

דוגמא 2:

בהינתן המעגל שבציור,

מצא את $\frac{V_2}{V}$ עבור $R_L = 3k\Omega$:



פתרון :

$$I = \frac{V}{2_{k\Omega}} \quad \text{מהחוג השמאלי של המעגל רואים ש:}$$

המשוואה המתארת את החוג הימני של המעגל:

$$V_2 = (-50I) \cdot 40k \parallel 3k = -(I50) \frac{1}{\frac{1}{40} + \frac{1}{3}} = -(I50) \cdot \frac{40 \cdot 3}{43}$$

נציב את I ונקבל:

$$\frac{V_2}{V} = \frac{-\frac{V \cdot 50}{2k} \cdot \frac{40 \cdot 3}{43}}{V} = -\frac{120 \cdot 50}{2 \cdot 43} = -\frac{3000}{43}$$

כלומר, יש כאן הגברת מתח הכניסה V פי $\frac{3000}{43}$.