תרגיל מס.1

עפיף חלומה 302323001

4 בנובמבר 2009

1 שאלה 1

נראה שכל איבר שלא מקיים אף אחת מהתכונות נספר פעם אחת, ושכל איבר שמקיים מספר חיובי כלשהו של תכונות מתקזז בספירה.

כל איבר שלא מקיים אף תכונה נספר רק פעם אחת, במחובר הראשון בסכום, N

יהי כעת איבר שמקיים בדיוק r תכונות. אז לכל $s \leq r$, איבר זה נספר במחובר $\sum_{i_1<i_2<\cdots<i_s} N_{i_1 i_2 \ldots i_s}$ בדיוק $\binom{r}{s}$ פעמים. (מספר האפשרויות שלנו לבחור s תכונות שונות מסך r התכונות שיש לאיבר שלנו, ולספור אותו בגלל אותן תכונות).

אם כך, עבור איבר זה נקבל את הסכום הבא:

$\binom{r}{0} - \binom{r}{1} + \cdots + (-1)^s \binom{r}{s} + \cdots + (-1)^r \binom{r}{r} = \sum_{s=0}^{r} (-1)^s \binom{r}{s}$

סכום זה הוא בדיוק נוסחת הבינום, $(a+b)^r$ כאשר $a = 1, b = -1$, ולכן הסכום הכולל הוא $(1-1)^r = 0$. כך לכל איבר שמקיים לפחות אחת מהתכונות, ולכן מספר האיברים שנספרים הוא בדיוק מספרם של אלו שאינם מקיימים אף אחת מהתכונות.

2 שאלה 2

מהשוויון הראשון נובע כי:

$$
\begin{aligned}
P\left(A \cup \overline{B}\right) &= P\left(\overline{A} \cup B\right) \\
P(A) - P(A \cap B) &= P(B) - P(A \cap B) \\
P(A) &= P(B)
\end{aligned}
$$

מהשוויון השני נובע כי

$$
\begin{aligned}
P\left(\overline{A} \cup B\right) &= P\left(\overline{A} \cup \overline{B}\right) \\
P(B) - P(A \cap B) &= P(A \cap B) \\
P(B) - P(A) P(B) &= P(A) P(B) \\
P(B) - P(B) P(B) &= P(B) P(B) \\
0 &= 2P^2(B) - P(B) \\
0 &= P(B) \cdot (2P(B) - 1) \\
P(B) &= 0 \\
2P(B) - 1 &= 0 \\
P(B) &= \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

3 שאלה 3

3.1 א

נבחר יום ההולדת הראשון, זה יכול להיות כל אחד מבין 12 החודשים האפשריים, אבל השני כבר חייב להיות אחד מבין 11 החודשים שנשארו. נמשיך באופן הזה עד שנגיע לאחרון שחייב להיות בחודש מסויים אזי:

$$\begin{aligned}\frac{12}{12}\cdot\frac{11}{12}\cdot\frac{10}{12}\cdots\frac{2}{12}\cdot\frac{1}{12} &= \frac{12!}{12^{12}}\\ &= \frac{11!}{12^{11}}\\ &= \frac{1925}{35831808}\\ &\approx 0.000644679\end{aligned}$$

3.2 ב

ההסתברות ש 5 מבין 20 אנשים נולדו בקיץ היא:

$$\frac{\binom{20}{5}}{4^{20}}\cdot\frac{\binom{15}{5}}{4^{15}}$$

3.3 ג

$$\frac{\binom{2}{10}\frac{1}{12^2}}{12^{10}}\cdot\frac{\binom{2}{8}\frac{1}{12^2}}{12^{8}}\cdot\frac{\binom{2}{6}\frac{1}{12^2}}{12^{6}}$$

4 שאלה 4

4.1 א

$$\Omega = \begin{matrix}(1,1,1,1),(1,1,1,2),(1,1,2,1),(1,1,2,2),\\(1,2,1,1),(1,2,1,2),(1,2,2,1),(1,2,2,2),\\(2,1,1,1),(2,1,1,2),(2,1,2,1),(2,1,2,2),\\(2,2,1,1),(2,2,1,2),(2,2,2,1),(2,2,2,2),\end{matrix}$$

4.2 ב

$$A = (1,1,1,2),(1,1,2,1),(1,2,1,1),(2,1,1,1)$$

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{4}{16}$$

5 שאלה 5

נסים בכל תא כדור לבן וכדור שחור לפני שנתחיל כי דרוש שבכל תא יהיו כדורים משני הצבעים. אזי נשארו 3 כדורים לבנים ו 3 כדורים שחורים, רוצים לחלק אותם.

5.1 א

אם רוצים שבכל תא יהיה אותו מספר כדורים אזי:

$$\Omega = \begin{array}{l} ((B,B),(W,W),(W,B)), \\ ((W,W),(B,B),(W,B)), \\ ((B,B),(W,B),(W,W)), \\ ((W,W),(W,B),(B,B)), \\ ((W,B),(B,B),(W,W)), \\ ((W,B),(W,W),(B,B)), \\ ((W,B),(W,B),(W,B)), \end{array}$$

7 אופנים שונים.

6 שאלה 6

6.1 ב

$$\begin{aligned}
\binom{n}{2} &\stackrel{?}{=} \binom{k}{2} + k(n-k) + \binom{n-k}{2} \\
\frac{n!}{2(n-2)!} &\stackrel{?}{=} \frac{k!}{2\cdot(k-2)!} + k(n-k) + \frac{(n-k)!}{2\cdot(n-k-2)!} \\
\frac{n(n-1)}{2} &\stackrel{?}{=} \frac{k\cdot(k-1)}{2} + k(n-k) + \frac{(n-k)(n-k-1)}{2} \\
n(n-1) &\stackrel{?}{=} k(k-1) + 2k(n-k) + (n-k)(n-k-1) \\
n(n-1) &\stackrel{?}{=} k^2 - k + 2nk - 2k^2 + n^2 - nk - n - nk + k^2 + k \\
n(n-1) &\stackrel{\checkmark}{=} n^2 - n
\end{aligned}$$

מספר הדרכים לבחור 2 מתוך n שווה לזה לבחור 2 מתוך k ו 2 מתוך $n-k$ ועוד $k(n-k)$

6.2 ג

הוכחה הסתברותית: לבחר n איברים מתוך $\{a_1, a_2, a_3 \ldots a_{2n}\}$ זה שווה ללבחור k איברים מתוך $\{a_1 \ldots a_n\}$ ו $n-k$ מ $\{a_{n+1} \ldots a_{2n}\}$ עבור כל k בתחום $0 \le k \le n$