תרגיל מס.9

עפיף חלומה 302323001

5 בינואר 2010

1 שאלה 1

1.1 א

נתון לכל קודקוד משתנה אקראי $v_i = \{0,1\}$ בהסתברות אחידה $\frac{1}{2}$. אם קודקוד קיבל 1 אז אנחנו כוללים אותו בקבוצה A אם הוא קיבל 0 נכלול אותו ב B. החתך שמחפסים הוא (A,B). תוכלת ההסתברות היא

$$E(F) = E\left(\sum_{i=1}^{|E|} F_i\right) = \sum_{i=1}^{|E|} E(F_i)$$

אבל F_i נמצא בחתך(כלומר ערך 1) אם אחד משתי הקודקודים שלו לא נמצא בחתך כלומר אם נסמן F_i הוא הצלע $\left(v_i^-, v_i^+\right)$ נקבל

$$P(F_i = 1) = p \cdot q + q \cdot p = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

אזי

$$E(F) = \sum_{i=1}^{|E|} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}|E|$$

1.2 ב

$$
\begin{aligned}
\frac{|E|}{2} &= \sum_{i=1}^{|E|} i \cdot p_i \\
\frac{|E|}{2} &= \sum_{i=1}^{|E|} i \cdot p_i \\
\frac{|E|}{2} &= \sum_{i=1}^{\frac{|E|}{2}-1} ip_i + \sum_{i=\frac{|E|}{2}}^{|E|} ip_i \\
\frac{|E|}{2} &\le \left(\frac{|E|}{2}-1\right) \sum_{i=1}^{\frac{|E|}{2}-1} p_i + |E| \sum_{i=\frac{|E|}{2}}^{|E|} p_i \\
\frac{|E|}{2} &\le \left(\frac{|E|}{2}-1\right) \overbrace{(1-p)}^{q} + |E|\, p \\
p &\ge \frac{2}{2+|E|}
\end{aligned}
$$

1.3 ג

זו היא תוחלת של משתנה מקרי גיאומטרי שהיא

$$E\left(X\right) = \frac{1}{p} = \frac{2+|E|}{2}$$

2 שאלה 2

2.1 א

$$
\begin{aligned}
\hat{f} &= H_n f = \begin{pmatrix} H_{n/2} & D_0 H_{n/2} \\ H_{n/2} & D_1 H_{n/2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_{even} \\ f_{odd} \end{pmatrix} \\
H_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\
f_{even} &= \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} \\
f_{odd} &= \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \\
\hat{f}_{odd} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \\
\hat{f}_{even} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} \\
\hat{f} &= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3i \\ 6 \\ 5-3i \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

2.2 ב

נחשב את האיבר ה l בהתמרה, זה שווה ל -

$$\sum_{r=0}^{n-1} a_i e^{\frac{2\pi irl}{N}} = \sum_{r=0}^{n-1} e^{\frac{2\pi irl}{N}}$$

אם $e^{\frac{2\pi ilr}{N}} = 1$ אז סכומם שווה ל 1.
אחרת זו סדרה הנדסית ולכן הסכום הינו שווה ל -

$$\frac{e^{\frac{2\pi inlR}{N}} - 1}{e^{\frac{2\pi inl}{N}} - 1} = \frac{1-1}{e^{\frac{2\pi inl}{N}} - 1} = 0$$

ולכן האיברים שהם שונים מאפס הם אלה ש $n|l$ ולכן

$$\text{DFT}(a) = \left(\overbrace{n, 0, 0, 0, 0 \ldots, 0}^{n \text{ items}}, \overbrace{n, 0, 0, 0, 0 \ldots, 0}^{n \text{ items}}, \overbrace{n, 0, 0, 0, 0 \ldots, 0}^{n \text{ items}} \ldots \right)$$

3 שאלה 3

3.1 א+ב

נשתמש בקונבולוציה לפתור את השאלה הזו.

עבור המילה שמחפסים אם $p_i = 0$ נחליף אותו ב -1 ואם הוא $*$ אז נחליף ב 0. גם צריכים להפוך את המחרוזת(כי הקונבולוציה תהפוך את זה עוד פעם) ואז אם מר-יצים את הקונבולוציה נקבל במקומות המתאימות מספר התווים במילה פחות מספר הקוכביות.

4 שאלה 4

4.1 א

$$\begin{aligned}
C^a &= \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \dots & a_{n-2} \\ a_{n-2} & a_{n-1} & \dots & a_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{pmatrix} \\
(C^a \cdot b)_l &\stackrel{?}{=} (b * a)_l \\
\sum_{m=0}^{n-1} a_{(l-m) \mod n} \cdot b_m &\stackrel{?}{=} \sum_{m=0}^{n-1} b_m \cdot a_{(l-m) \mod n}
\end{aligned}$$

הוכחנו שוויון ראשון(לפי ההגרה הפשוטה של זה) אזי נשאר להוכיח כי $a*b = b*a$

$$\begin{aligned}
a * b &= b * a \\
\sum_{m=0}^{n-1} a_m \cdot b_{(l-m) \mod n} &= \sum_{m=0}^{n-1} b_m \cdot a_{(l-m) \mod n}
\end{aligned}$$

רואים שאם קיים $a_x \cdot b_y$ אזי גם קיים $a_y b_x$ בגלל פעולת המודולו, אז שת הצדדים שווים.

4.2 ב

$$
\begin{aligned}
(v_k C_a)_m &\stackrel{?}{=} \lambda (v_k)_m \\
\sum_l \omega_n^{-kl} \cdot a_{(l-m) \mod n} &\stackrel{?}{=} \lambda \omega_n^{-km} \\
\omega_n^{-km} \cdot \omega_n^{km} \cdot \sum_l \omega_n^{-kl} \cdot a_{(l-m) \mod n} &\stackrel{?}{=} \lambda \omega_n^{-km} \\
\omega_n^{-km} \cdot \sum_l \omega_n^{km} \omega_n^{-kl} \cdot a_{(l-m) \mod n} &\stackrel{?}{=} \lambda \omega_n^{-km} \\
\omega_n^{-km} \cdot \sum_l \omega_n^{k(l-m)} \cdot a_{(l-m) \mod n} &\stackrel{?}{=} \lambda \omega_n^{-km} \\
\omega_n^{-km} \cdot \sum_l \omega_n^{kl} \cdot a_l &\stackrel{?}{=} \lambda \omega_n^{-km} \\
\sum_l \omega_n^{kl} \cdot a_l &\stackrel{\checkmark}{=} \lambda \\
\hat{a} &= \lambda
\end{aligned}
$$

אזי אם נכפיל מטריצה אלכסונית במטריצה C_a מה שנקבל זה הכל שורה בתוצאה היא וקטור עצמי אזי:

$$
\begin{aligned}
H \cdot C_a &= D \cdot H \\
C_a &= H^{-1} D H
\end{aligned}
$$

4.3 ג

$$
\begin{aligned}
\widehat{(a * y)}_k &= \sum_{n=0}^{N-1} (x * y)_n \, e^{-\frac{2\pi i n k}{N}} \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} x_m y_{n-m} e^{-\frac{2\pi i n k}{N}} \\
&= \sum_{m=0}^{N-1} x_m \sum_{n=0}^{N-1} y_{n-m} e^{-\frac{2\pi i n k}{N}} \\
& \sum_{m=0}^{N-1} x_m \sum_{n=0}^{N-1} y_{n-m} e^{-\frac{2\pi i n k}{N}} \cdot e^{\frac{2\pi i m k}{N}} \cdot e^{-\frac{2\pi i m k}{N}} \\
&= \sum_{m=0}^{N-1} x_m \left(\sum_{n=0}^{N-1} y_{n-m} e^{-2\pi k (n-m)} \right) e^{-\frac{2\pi i m k}{N}} \\
&= \left(\sum_{m=0}^{N-1} x_m e^{-\frac{2\pi i m k}{N}} \right) \cdot \hat{y}_k \\
&= \hat{x}_k \cdot \hat{y}_k
\end{aligned}
$$