תרגיל מס.1

עפיף חלומה 302323001

10 במרץ 2010

1 שאלה 1

$$\begin{aligned}
-5i &= 5e^{i\frac{3}{2}\pi} \\
3+i &= \sqrt{3^2+1^2}e^{i\arctan\left(\frac{1}{3}\right)} \\
&= \sqrt{10}e^{0.1024\pi} \\
-3-4i &= \sqrt{3^2+4^2}e^{i\arctan\left(\frac{-4}{-3}\right)} \\
&= 5e^{1.295\pi} \\
-3+i &= \sqrt{10}e^{-i0.397\pi}
\end{aligned}$$

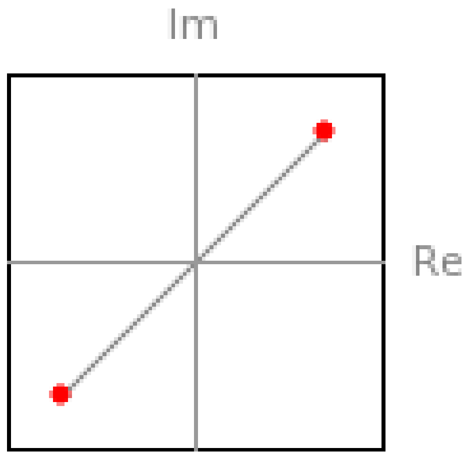
2 שאלה 2

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+i} &= \frac{1}{1+i}\cdot\frac{1-i}{1-i} \\
&= \frac{1-i}{2} \\
\frac{1+2i}{i} &= \frac{1+2i}{i}\cdot\frac{-i}{-i} \\
&= -i+2 \\
\frac{2+3i}{2-3i} &= \frac{2+3i}{2-3i}\cdot\frac{2+3i}{2+3i} \\
&= \frac{4+12i-9}{13} \\
&= \frac{12i-5}{13} \\
(1-2i)^2 &= 1-4i-4 \\
&= -3-4i \\
(1+3i)^9 &= \left(\sqrt{10}e^{i\arctan\left(\frac{3}{1}\right)}\right)^9 \\
&= \left(\sqrt{10}e^{i0.39758\pi}\right)^9 \\
&= \sqrt{10^9}e^{i3.578\pi}
\end{aligned}$$

3 שאלה 3

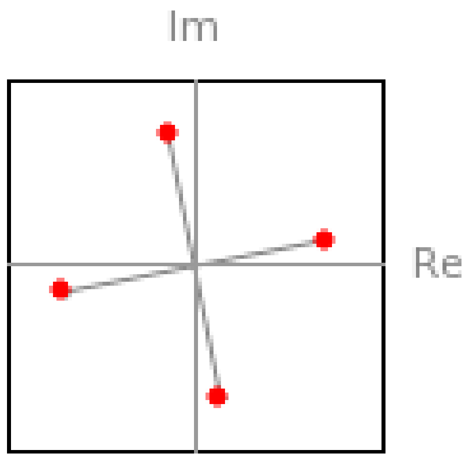
3.1 א

$$
\begin{aligned}
z_1 &= -0.707 - i0.707 \\
z_2 &= +0.707 + i0.707
\end{aligned}
$$



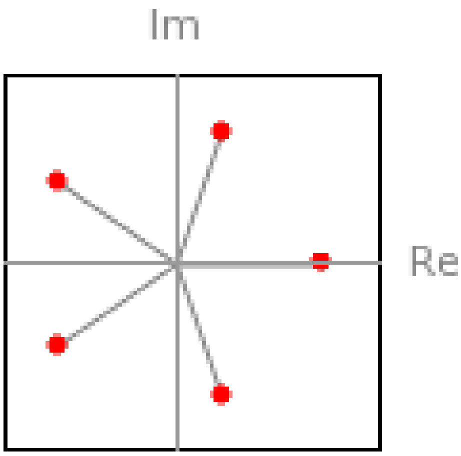
3.2 ב

$$
\begin{aligned}
z_1 &= -1.069 - i0.21 \\
z_2 &= 0.212 - 1.069i \\
z_3 &= -0.2127 + 1.0695i \\
z_4 &= 1.0695 + 0.212i
\end{aligned}
$$



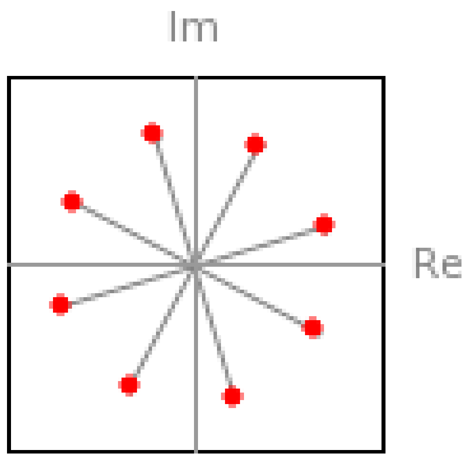
ג 3.3

$$
\begin{aligned}
z_1 &= -0.809 - 0.5877i \\
z_2 &= 0.309 + 0.951i \\
z_3 &= 0.309 - 0.951i \\
z_4 &= 0.809 + 0.5877i
\end{aligned}
$$



ד 3.4

$$
\begin{aligned}
z_1 &= -0.58 - 1.09i \\
z_2 &= 0.58 + 1.09i \\
z_3 &= -1.188 - 0.36i \\
z_4 &= 0.360 - 1.188i \\
z_5 &= -0.36 + 1.188i \\
z_6 &= 1.188 + 0.36i \\
z_7 &= 1.095 - 0.585i \\
z_8 &= -1.09 + 0.58i
\end{aligned}
$$



4 שאלה 4

4.1 א

זה כל הנקודות המרוחקות אותו מרחק מהנקודה z_1 ו z_2

$$\begin{aligned}
\left|z-z_1\right| &= \left|z-z_2\right| \\
(x-a)^2+(y-b)^2 &= (x-c)^2+(y-d)^2 \\
x^2-2xa+a^2+y^2-2by+b^2 &= x^2-2cx+c^2+y^2-2yd+d^2 \\
-2xa+a^2-2by+b^2+2cx-c^2+2yd-d^2 &= 0 \\
2yd-2by &= 2xa-a^2-b^2-2cx+c^2+d^2 \\
y\left(2d-2b\right) &= x\left(2a-2c\right)-a^2-b^2+c^2+d^2
\end{aligned}$$

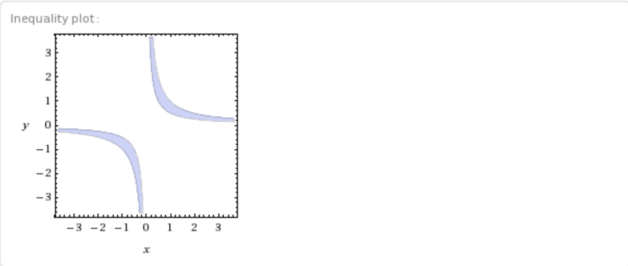
4.2 ב

אליפסה שמוקדיה הם $(-3,0)$ ו $(2,0)$ וראדיוס $\sqrt{10}$

4.3 ג

$$\begin{array}{ccc}
1< & \Im\left(z^2\right) & <2 \\
1< & \Im\left(x^2+2ixy-y^2\right) & <2 \\
1< & 2xy & <2
\end{array}$$

האיזור הנמצא בין הפונקציה $y=\frac{1}{2x}$ ו $y=\frac{1}{x}$



איור 1: $1<2xy<2$

4.4 ד

$$\begin{aligned}
|z| &= \Re(z)+2\Im(z)\\
\sqrt{x^2+y^2} &= x+2y\\
x^2+y^2 &= x^2+4xy+4y^2\\
4xy+3y^2 &= 0\\
4x+3y &= 0\\
y &= \frac{3}{4}x
\end{aligned}$$

קו ישר

4.5 ה

$$\begin{aligned}
\Re\left(\frac{z-z_1}{z-z_2}\right) &= 0\\
\Re\left(\frac{z-z_1}{z-z_2}\cdot\frac{\overline{z-z_2}}{\overline{z-z_2}}\right) &= 0\\
\Re\left(\frac{(z-z_1)\cdot\overline{(z-z_2)}}{|z-z_2|}\right) &= 0\\
\Re\left(\frac{(x+iy-a-ib)\cdot(x-iy-c+id)}{\dots}\right) &= 0\\
\Re\left(\frac{\begin{pmatrix}ac-iad-ax+iay+ibc+bd-ibx+\\-by-cx-icy+idx-dy+x^2+y^2\end{pmatrix}}{\dots}\right) &= 0\\
ac-ax+bd-by-cx-dy+x^2+y^2 &= 0\\
x^2-x(a+c)+y^2-y(b+d) &= -ac-bd\\
\left(x-\frac{a+c}{2}\right)^2+\left(y-\frac{b+d}{2}\right)^2 &= -ac-bd+\left(\frac{a+c}{2}\right)^2+\left(\frac{b+d}{2}\right)^2
\end{aligned}$$

4.6 ו

$$
\begin{aligned}
\Im\left(\frac{z-z_1}{z-z_2}\right) &= 0\\
\Im\left(\frac{z-z_1}{z-z_2}\cdot\frac{\overline{z-z_2}}{\overline{z-z_2}}\right) &= 0\\
\Im\left(\frac{ac-iad-ax+iay+ibc+bd-ibx-by-cx-icy+idx-dy+x^2+y^2}{\cdots}\right) &= 0\\
-ad+ay+bc-bx-cy+dx &= 0
\end{aligned}
$$

קו ישר

4.7 ז

$$
\begin{aligned}
\Re\left(\frac{1}{z+1}\right) &= c\\
\frac{\frac{1}{z+1}+\frac{1}{\overline{z}+1}}{2} &= c\\
\frac{\frac{z+1+\overline{z}+1}{(z+1)(\overline{z}+1)}}{2} &= c\\
\frac{2x+2}{(z+1)\left(\overline{z}+1\right)} &= 2c\\
\frac{2x+2}{(z+1)\overline{(z+1)}} &= 2c\\
\frac{2x+2}{(x+1)^2+y^2} &= 2c\\
2x+2 &= 2c\left((x+1)^2+y^2\right)\\
x+1 &= c\,(x+1)^2+cy^2\\
x+1 &= c\left(x^2+2x+1\right)+cy^2\\
-cx^2-cy^2+x-2cx &= c-1\\
cx^2+cy^2-x+2cx &= 1-c\\
x^2+y^2-\frac{x}{c}+2x &= \frac{1}{c}-1\\
x^2+y^2-x\left(\frac{1}{c}+2\right) &= \frac{1}{c}-1\\
\left(x-\frac{1}{2c}-1\right)^2+y^2 &= \frac{1}{c}-1+\left(\frac{1}{2c}+1\right)^2\\
\left(x-\frac{1}{2c}-1\right)^2+y^2 &= \frac{8c+1}{4c^2}
\end{aligned}
$$

במקרה ש $c \neq 0$ הפתרון הוא מעגל בעל רדיוס $\sqrt{\frac{8c^2+1}{4c^2}}$ שמרכזו ב $\left(\frac{1}{2c}+1,0\right)$.
בשביל שיהיה רדיוס ממשי צריך להתקיים $-\frac{1}{8} < c < 0$ או $c > 0$
במקרה ש $c = 0$ הפתרון הוא $z = -1 + iy$

4.8 ח

$$
\begin{aligned}
\Im\left(z+\frac{2}{z}\right) &= 0\\
\Im\left(x+iy+\frac{2}{x+iy}\right) &= 0\\
\Im\left(x+iy+\frac{2}{x+iy}\cdot\frac{x-iy}{x-iy}\right) &= 0\\
\Im\left(x+iy+\frac{2\left(x-iy\right)}{x^2+y^2}\right) &= 0\\
y-\frac{2y}{x^2+y^2} &= 0\\
y\left(x^2+y^2\right)-2y &= 0\\
x^2+y^2 &= 2
\end{aligned}
$$

מעגל ברדיוס 2 שמרזו בנק' $(0,0)$ ועוד הקו $z = x$.

5 שאלה 5

$$\xi = \frac{x}{1+x^2+y^2}, \eta = \frac{y}{1+x^2+y^2}, \zeta = \frac{x^2+y^2}{1+x^2+y^2}$$

5.1 א

נתון

$$
\begin{aligned}
\arg z &= \alpha\\
\arctan\left(\frac{y}{x}\right) &= \alpha\\
\frac{y}{x} &= \tan\alpha\\
y &= x\cdot\overbrace{\tan\alpha}^{\beta}\\
y &= \beta x
\end{aligned}
$$

$$\xi = \frac{x}{1+x^2+\beta^2x^2}, \eta = \frac{\beta x}{1+x^2+\beta^2x^2}, \zeta = \frac{x^2+\beta^2x^2}{1+x^2+\beta^2x^2}$$

אלה הם כווי האורך של שכדור

5.2 ב

ניתן לראות(גיאומטרית) כי מעגל במישור x, y עובר למעגל על כדור רימן, אם הרדיוס של המעגל גדל אז המעגל האופקי על הכדור ולה למעלה(ברדיוס אינסוף נקבל $(0,0,1)$)

5.3 ג

חצי הכדור כאשר $\eta > 0$

5.4 ד

חצי הכדור כאשר $\eta < 0$

5.5 ה

חצי הכדור כאשר $\xi > 0$

5.6 ו

חצי הכדור כאשר $\xi < 0$

5.7 ז

חלק מתחתית הכדור(פחות מחצי)

5.8 ח

חלק עליון של הכדור(יותר מחצי)

6 שאלה 5

6.1 א

זה רציף לפי עיכרון הסדוויץ

$$0 \le \left|\frac{z\Re(z)}{|z|}\right| = \left|\frac{z\Re(z)}{z}\right| = \Re(z) \le |\Re(z)|$$

6.2 ב

הגבול לא קיים כי אם נסמן $z_{1_n} = \frac{1}{n}, z_{2_n} = \frac{\sqrt{i}}{n}$

$$\frac{\Re\left(\left({}^{1}\!/_{n}\right)^2\right)}{\left|{}^{1}\!/_{n}\right|^2} = 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{\Re\left(a_{1_n}^2\right)}{a_{1_n}^2} = 1$$

אבל

$$\frac{\Re\left(\left({}^{\sqrt{i}}\!/_{n}\right)^2\right)}{\left|{}^{\sqrt{i}}\!/_{n}\right|^2} = \frac{\Re\left({}^{i}\!/_{n^2}\right)}{{}^{i}\!/_{n^2}} = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{\Re\left(b_{1_n}^2\right)}{b_{1_n}^2} = 0$$

6.3 ג

כנ"ל עם $z_{2_n} = \frac{1}{n}, z_{1_n} = -\frac{1}{n}$

6.4 ד

כנ"ל עם $z_{2_n} = \frac{i}{n}, z_{1_n} = \frac{1}{n}$