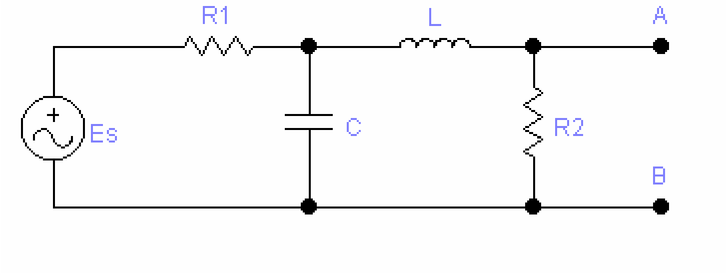
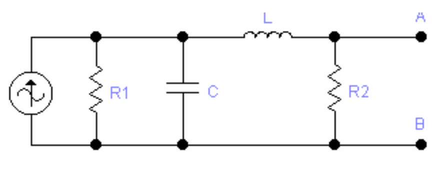
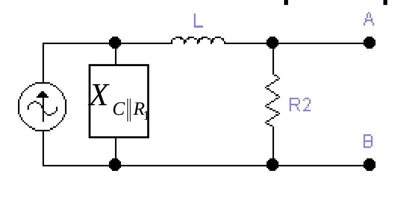
פתרון תרגיל 7

.1



נעביר, כרגיל מתבנין לנורתון.





כאשר $X_{C\|R_1} = X_C \| R_1 = \frac{R_1 \cdot \frac{1}{j\omega C}}{R_1 + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{R_1}{R_1 \cdot j\omega C + 1}$, ו $I_{N1} = \frac{E_S}{R_1}$

נמשיך באותו אופן $V_{T1} = I_{N1} \cdot X_{C\|R_1} = \frac{E_s}{R_1 \cdot j\omega C + 1}$

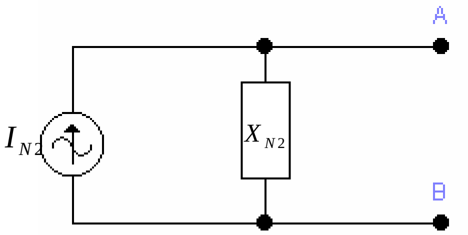
$$X_{T1} = X_{C\|R_1} + X_L = \frac{R_1}{R_1 \cdot j\omega C + 1} + j\omega L = \frac{R_1(1-\omega^2 CL) + j\omega L}{R_1 \cdot j\omega C + 1}$$

נמיר לנורטון

$$I_{N2} = \frac{V_{T1}}{X_{C\|R_1+L}} = \frac{E_s}{R_1 \cdot j\omega C + 1} \cdot \frac{R_1 \cdot j\omega C + 1}{R_1(1-\omega^2 CL) + j\omega L} = \frac{E_s}{R_1(1-\omega^2 CL) + j\omega L}$$

$$X_{N2} = X_{C\|R_1+L} \| X_{R_2} = \frac{\frac{R_1(1-\omega^2 CL) + j\omega L}{R_1 \cdot j\omega C + 1} \cdot R_2}{\frac{R_1(1-\omega^2 CL) + j\omega L}{R_1 \cdot j\omega C + 1} + R_2} = \frac{R_1 R_2 (1-\omega^2 CL) + j\omega L R_2}{R_1(1-\omega^2 CL) + j\omega L + R_2 R_1 \cdot j\omega C + R_2}$$

$$X_{N2} = \frac{R_1 R_2 (1-\omega^2 CL) + j\omega L R_2}{R_1(1-\omega^2 CL) + R_2 + j\omega(L + R_2 R_1 \cdot C)}$$



2. נשתמש בכתיב פאזורי:

$$e(t)=\cos(\omega t)\Rightarrow \hat{E}=1\angle 0^{o}$$

$$\hat{V}_2=\frac{\hat{I}}{j\omega C}=\frac{1}{j\omega C}\bullet\frac{\hat{E}}{R+1/j\omega C}=\frac{1\angle 0^{o}}{1+j\omega RC}=|V_2|\angle\theta$$

$$\theta=tg^{-1}(0-\frac{\omega RC}{1})$$

כדי ש- $V_2(t)$ יפגר ב- 63.45^{o} אחרי $e(t)$ כנדרש, נדרוש:

$$\theta=-63.45^{o}=-tg^{-1}(\omega RC)$$
$$\Rightarrow \omega RC=tg63.45^{o}=2$$
$$\Rightarrow \omega=\frac{2}{RC}$$

והמשרעת של $V_2(t)$:

$$|V_2|=\frac{1}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+4}}=\frac{1}{\sqrt{5}}[V]$$

ו $V_2(t)$:

$$V_2(t)=\frac{1}{\sqrt{5}}\cos(\omega t-63.45)[V]$$

3.

א. תחילה נמצא את V הפאזורי משיקולי מחלק מתח:

$$\hat{V}=\hat{V}_S\frac{Z_L\parallel Z_C}{Z_L\parallel Z_C+R}$$

$$Z_L\parallel Z_C=\frac{j\omega L\bullet 1/j\omega C}{j\omega L+1/j\omega C}=\frac{j\omega L}{1-\omega^2 LC}$$

$$\hat{V}\underset{\hat{V}_s=1}{=}\frac{\frac{j\omega L}{1-\omega^2 LC}}{\frac{j\omega L}{1-\omega^2 LC}+R}=\frac{j\omega L}{j\omega L+R-\omega^2 LCR}\underset{1/j=-j}{=}\frac{\omega L}{\omega L+j(\omega^2 LCR-R)}$$

כעת נרצה לעבור למישור הזמן חזרה מהפאזור:

$$v(t)=|\hat{V}|\cos[(\omega t)+\angle\hat{V}]$$

$$|\hat{V}|=\frac{\omega L}{\sqrt{(\omega L)^2+(R-\omega^2 LCR)^2}}=\frac{\frac{1}{9}\omega}{\sqrt{\frac{1}{81}\omega^2+(\frac{1}{10}-\omega^2\frac{1}{9}\cdot 1\cdot\frac{1}{10})^2}}=$$

$$=\frac{\frac{1}{9}\omega}{\sqrt{\frac{1}{81}\omega^2+\frac{1}{100}-\omega^2\frac{2}{900}+\omega^4\frac{1}{8100}}}=\frac{\frac{1}{9}\omega}{\sqrt{\frac{100-18}{8100}\omega^2+\frac{1}{100}+\frac{1}{8100}\omega^4}}=$$

$$=\frac{\frac{1}{9}\omega}{\sqrt{\frac{1}{8100}\omega^4+\frac{82}{8100}\omega^2+\frac{81}{8100}}}=$$

$$=\frac{10\omega}{\sqrt{\omega^4+82\omega^2+81}}$$

$$\angle\hat{V}=tg^{-1}(0^o)-tg^{-1}\left(\frac{\omega^2 LCR-R}{\omega L}\right)=-tg^{-1}\left(\frac{\omega^2\frac{1}{90}-\frac{1}{10}}{\frac{1}{9}\omega}\right)=-tg^{-1}\left(\frac{\omega^2-9}{10\omega}\right)$$

$$v(t)=\frac{10\omega}{\sqrt{\omega^4+82\omega^2+81}}\cos\left[\omega t-tg^{-1}\left(\frac{\omega^2-9}{10\omega}\right)\right]$$

ב. לפני שנתחיל בפתרון, נבחן את המעגל:

ב- $\omega\to 0$ הסליל מתנהג כקצר, ולכן v(t)=0.

ב- $\omega\to\infty$ הקבל מתנהג כקצר, ולכן v(t)=0.

ב- $\omega=\frac{1}{\sqrt{LC}}$ הקבל והסליל בתהודה ולכן: $i_L=-i_C$.

מכאן נובע שאין זרם על הנגד: $i_R=i_L+i_C=0$ ולכן המתח על הסליל (ועל הקבל) הוא מתח המקור בלבד, כלומר: $V(t)=V_S(t)$ ומתח המוצא מקבל ערך מקסימלי.

מסקנה: נצפה לקבל מסנן מעביר-פס, או Band Pass Filter (BPF).

כעת נפתור:

מכיוון שערכו המקסימלי של מתח המוצא בתהודה הוא כאמור: $\hat{V}=\hat{V}_S=1$,

ומתקיים: $|\hat{V}|=\frac{|\hat{V}|}{|\hat{V}_S|}=|H(jw)|$, אז הערך המקסימלי של $|H(jw)|$ הוא הערך המקסימלי של $|\hat{V}|$, שהוא 1.

הגדרנו את נקודות ה - 3dB כנקודות שבהן $|H(jw)|$ הוא $\frac{1}{\sqrt{2}}$ מערכו המקסימלי

ולכן בנקודות ה - 3dB מתקיים:

$$\left|H(jw)\right| = \frac{|\hat{V}|}{|\hat{V}_S|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

נציב $|\hat{V}_S| = 1$:

$$\left|H(jw)\right| = \frac{|\hat{V}|}{|\hat{V}_S|} = \frac{10\omega}{\sqrt{\omega^4 + 82\omega^2 + 81}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sqrt{2}\cdot 10\omega = \sqrt{\omega^4 + 82\omega^2 + 81}$$

נעלה בריבוע את שני האגפים:

$$\omega^4 + 82\omega^2 + 81 = 200\omega^2$$

$$\omega^4 - 118\omega^2 + 81 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \omega_{1,2}^2 = \frac{118 \pm \sqrt{118^2 - 4\cdot 81}}{2}$$

$$\omega_1{}^2 = 117.3 \quad ; \quad \omega_2{}^2 = 0.69$$

לכן נקודות ה - 3dB הן:

$$\omega_1 = 10.83\frac{rad}{sec} \quad ; \quad \omega_2 = 0.83\frac{rad}{sec}$$

או, אם נסמן תדרים אלה ב- ω_H ו- ω_L:

$$\omega_H = 10.83\frac{rad}{sec} \quad ; \quad \omega_L = 0.83\frac{rad}{sec}.$$

ורוחב הסרט (Bandwidth) הוא:

$$BW = \omega_H - \omega_L = 10.83 - 0.83 = 10\frac{rad}{sec}.$$

ג. כפי שאמרנו בפתח הדברים, נצפה לערך מרבי של $v(t)$ בתדר התהודה.
מכיוון ש: $\left|H(j\omega)\right| = |\hat{V}|$, כדי למצוא מקסימום נגזור את $|\hat{V}|$ לפי התדר ונשווה לאפס:

$$\frac{d|\hat{V}(j\omega)|}{d\omega}=\frac{10\sqrt{\omega^4+82\omega^2+81}-10\omega\cdot\frac{1}{2}\left(\omega^4+82\omega^2+81\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot(4\omega^3+2\cdot 82\omega)}{(\omega^4+82\omega^2+81)}=$$

$$=\frac{10}{\sqrt{\omega^4+82\omega^2+81}}-\frac{10\omega\cdot(4\omega^3+2\cdot 82\omega)}{2\sqrt{\omega^4+82\omega^2+81}\cdot(\omega^4+82\omega^2+81)}=$$

$$=\frac{10\cdot(\omega^4+82\omega^2+81)-5\omega\cdot(4\omega^3+2\cdot 82\omega)}{\sqrt{\omega^4+82\omega^2+81}\cdot(\omega^4+82\omega^2+81)}=0$$

$$\Rightarrow 10\omega^4+820\omega^2+810-20\omega^4-820\omega^2=0$$

$$10\omega^4=810$$

$$\omega^4=81$$

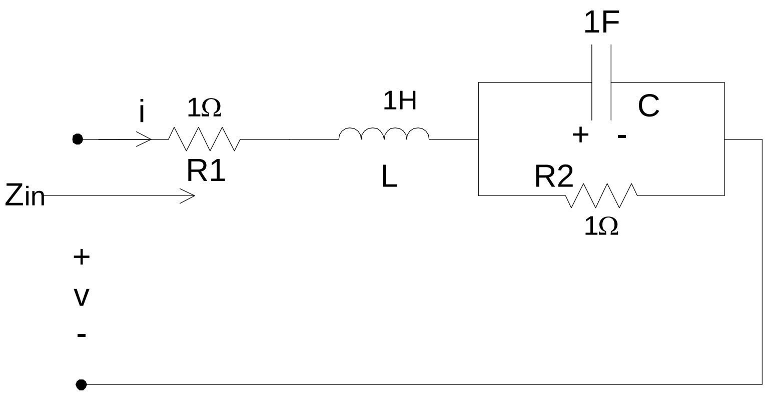
$$\omega_{max}=3\frac{rad}{sec}$$

ואכן תדר התהודה הוא:

$$\frac{1}{\sqrt{LC}}=\frac{1}{\sqrt{1/9}}=3\frac{rad}{sec}$$

כלומר, המקסימום מתקבל בתדר התהודה, כפי שציפינו.

.4



א. נמצא את העכבה השקולה:

$$Z(j\omega)=R_1+j\omega L+\frac{R_2\cdot 1/j\omega C}{R_2+1/j\omega C}$$

נציב את ערכי האלמנטים:

$$Z(j\omega)=1+j\omega+\frac{\frac{1}{j\omega}}{1+\frac{1}{j\omega}}=1+j\omega+\frac{1}{1+j\omega}=\frac{1+(1+j\omega)^2}{1+j\omega}=$$
$$=\frac{2+2j\omega-\omega^2}{1+j\omega}=\frac{(2+2j\omega-\omega^2)(1-j\omega)}{(1+j\omega)(1-j\omega)}=$$
$$=\frac{2-2j\omega+2j\omega+2\omega^2-\omega^2+j\omega^3}{1+\omega^2}=\frac{2+\omega^2+j\omega^3}{1+\omega^2}$$

לכן האמפליטודה (המשרעת) היא:

$$|Z(j\omega)|=\frac{\sqrt{(2+\omega^2)^2+\omega^6}}{1+\omega^2}=\frac{\sqrt{4+4\omega^2+\omega^4+\omega^6}}{1+\omega^2}$$

והפאזה היא:

$$\angle Z(j\omega)=tg^{-1}\left(\frac{\omega^3}{2+\omega^2}\right)-tg^{-1}(0)=tg^{-1}\left(\frac{\omega^3}{2+\omega^2}\right)$$

כעת נניח שנרצה לשרטט את המשרעת והפאזה.

לשם שרטוט $|Z(j\omega)|$ נחשב את ערכיו במספר תדרים:

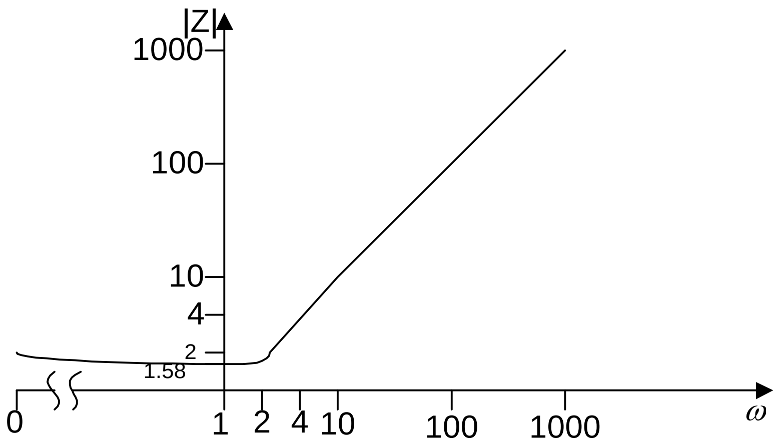
$$|Z(j\bullet 0)|=\frac{\sqrt{4}+0}{1}=2\Omega$$
$$|Z(j\bullet 1)|=\frac{\sqrt{4+4+1+1}}{1+1}=\frac{\sqrt{10}}{2}=1.58\Omega$$
$$|Z(j\bullet 2)|=\frac{\sqrt{4+4\bullet 2^2+2^4+2^6}}{1+2^2}=\frac{\sqrt{4+16+16+64}}{1+4}=$$
$$=\frac{\sqrt{100}}{5}=2\Omega$$
$$|Z(j\bullet 4)|=\frac{\sqrt{4+4\bullet 4^2+4^4+4^6}}{1+4^2}=\frac{\sqrt{4+64+256+4096}}{1+16}=$$
$$=\frac{\sqrt{4420}}{17}=3.91\Omega$$

$$|Z(j\bullet 10)| = \frac{\sqrt{4+400+10^4+10^6}}{1+100} = 9.97\Omega$$

$$|Z(j\bullet 100)| = \frac{\sqrt{4+2\bullet 10^4\bullet +10^8+10^{12}}}{1+10^4} \cong \frac{\sqrt{10^{12}}}{10^4} = 100\Omega$$

$$|Z(j\bullet 1000)| = \frac{\sqrt{4+2\bullet 10^6\bullet +10^{12}+10^{18}}}{1+10^6} \cong \frac{\sqrt{10^{18}}}{10^6} = 1000\Omega$$

נשרטט את |Z| בסקלה לוגריתמית, המאפשרת להראות תחום רחב, כלומר הצירים הם, בעצם,
:log (|Z|) ו- log (ω)



נעבור לשרטוט הפאזה:

$$\angle Z(j\omega) = tg^{-1}\left(\frac{\omega^3}{2+\omega^2}\right)$$

$$\angle Z(j\bullet 0) = tg^{-1}(0) = 0$$

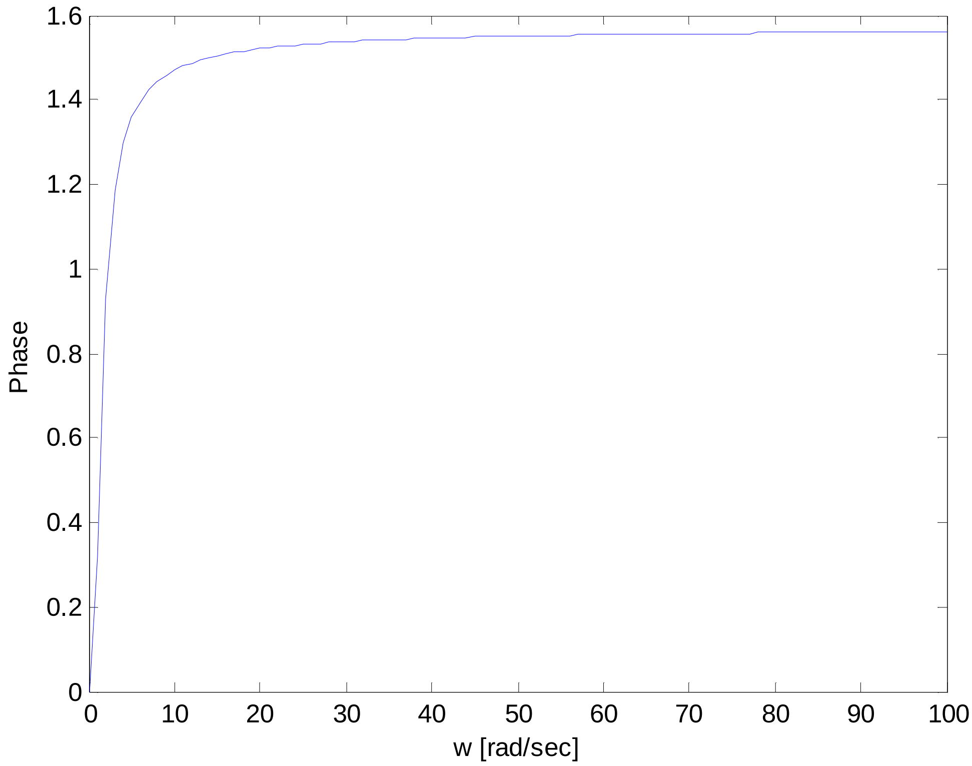
$$\angle Z(j\bullet 1) = tg^{-1}\left(\frac{1}{2+1}\right) = 18.4^o$$

$$\angle Z(j\bullet 2) = tg^{-1}\left(\frac{8}{2+4}\right) = 53.1^o$$

$$\angle Z(j\bullet 4) = tg^{-1}\left(\frac{64}{2+16}\right) = 74.3^o$$

$$\angle Z(j\bullet 10) = tg^{-1}\left(\frac{1000}{2+100}\right) = 84.2^o$$

$$\lim_{\omega\to\infty} \angle Z(j\omega) = tg^{-1}\left(\lim_{\omega\to\infty}\frac{\omega^3}{2+\omega^2}\right) = tg^{-1}\left(\lim_{\omega\to\infty}\frac{1}{\frac{2}{\omega^3}+\frac{1}{\omega}}\right) = tg^{-1}(\infty) = 90^o$$



ב.

$$v_s(t) = 10\cos(2t) \quad \Rightarrow \quad \hat{V}_S = 10\angle 0^o \quad ; \quad \omega = 2$$

כפי שכבר ראינו בסעיף הקודם:

$$Z(j \bullet 2) = 2\angle 53.1^o$$

ולכן:

$$\hat{I} = \frac{\hat{V}_S}{Z} = \frac{10\angle 0^o}{2\angle 53.1^o} = 5\angle -53.1^o$$

$$\Rightarrow i(t) = 5\cos(\omega t - 53.1^o)$$

ג. נתון:

$$i_s(t) = 1 + \cos t + \cos(2t)$$

היות והמערכת לינארית וקבועה בזמן, נפעיל את עקרון הסופרפוזיציה. נסמן:

$$i_1(t) = 1 \quad \Rightarrow \quad \hat{I}_1 = 1 \quad ; \quad \omega_1 = 0$$

$$i_2(t) = \cos t \quad \Rightarrow \quad \hat{I}_2 = 1 \quad ; \quad \omega_2 = 1$$

$$i_3(t) = \cos(2t) \quad \Rightarrow \quad \hat{I}_3 = 1 \quad ; \quad \omega_3 = 2$$

נחשב את המתח לכל אחד משלושת הזרמים בנפרד ולבסוף נחבר:

$$\hat{V}_1 = Z(j \bullet 0) \bullet \hat{I}_1 = 2 \bullet 1 = 2$$
$$v_1(t) = 2$$
$$\hat{V}_2 = Z(j \bullet 1) \bullet \hat{I}_2 = 1.58\angle 18.4^o \bullet 1 = 1.58\angle 18.4^o$$
$$v_2(t) = 1.58\cos(t + 18.4^o)$$
$$\hat{V}_3 = Z(j \bullet 2) \bullet \hat{I}_3 = 2\angle 53.1^o \bullet 1 = 2\angle 53.1^o$$
$$v_3(t) = 2\cos(2t + 53.1^o)$$

ולסיכום:

$$v(t) = v_1(t) + v_2(t) + v_3(t) = 2 + 1.58\cos(t + 18.4^o) + 2\cos(2t + 53.1^o)$$

5. א.

$$v_a(t) = 10\cos(1000t + 60^o) \quad \Rightarrow \quad \hat{V}_a = 10\angle 60^o$$
$$v_b(t) = 5\cos(1000t - 30^o) \quad \Rightarrow \quad \hat{V}_b = 5\angle -30^o$$
$$Z_C = \frac{1}{j\omega C} = -j \cdot \frac{1}{\omega C} = -j \cdot 10 = 10\angle -90^o$$

לפנינו מחלק מתח:

$$\hat{V}_b = \hat{V}_a \frac{Z_C}{Z_C + Z_n}$$

נחלץ את Z_n המבוקש:

$$\hat{V}_b(Z_C + Z_n) = \hat{V}_a Z_C$$
$$\hat{V}_b Z_n = (\hat{V}_a - \hat{V}_b) Z_C$$
$$Z_n = \frac{(\hat{V}_a - \hat{V}_b)Z_C}{\hat{V}_b} = \frac{\hat{V}_a Z_C}{\hat{V}_b} - Z_C = \frac{(10\angle 60^o)\cdot(10\angle -90^o)}{5\angle -30^o} - 10\angle -90^o =$$
$$= \frac{100\angle -30^o}{5\angle -30^o} - 10\angle -90^o =$$
$$= 20\angle 0^o + 10\angle 90^o = 20 + j\cdot 10 = 22.4\angle 26.6^o$$

ב.

$$P_{av} = \frac{1}{2}|\hat{V}_n||\hat{I}|\cos(\angle\hat{V}_n - \angle\hat{I})$$

$$\hat{V}_n = \hat{V}_a - \hat{V}_b = 10\angle 60^o - 5\angle -30^o = (5 + j\cdot 8.66) - (4.33 - j\cdot 2.5) =$$

$$= 0.67 + j\cdot 11.16 = 11.2\angle 86.56^o$$

$$\hat{I} = \frac{\hat{V}_b}{Z_C} = \frac{5\angle -30^o}{10\angle -90^o} = 0.5\angle 60^o$$

$$P_{av} = \frac{1}{2}|\hat{V}_n||\hat{I}|\cos(\angle\hat{V}_n - \angle\hat{I}) = \frac{11.2\cdot 0.5}{2}\cos(86.6^o - 60^o) = 2.5_{watt}$$