תרגיל מס.1

עפיף חלומה 302323001

12 באפריל 2010

1 שאלה 1

$$f(z) = az + b$$

אם מנסים $f(0) = 0$ מקבלים $b = 0$ אזי אי אפשר לקבוע את שאר התנאים.
אם $f(0) = 1 + i$ אזי מקבלים $b = 1 + i$ מקבלים כי $a = -1 - i$, וגם מקיימים את $f(i) = 2$ אזי

$$f(z) = (-1 - i) z + 1 + i$$

2 שאלה 2

2.1 א

כדי להישאר במחצית המישור העליונה אסור לנו להזיז את המישור בציר y אבל מותר לנו למתוח אותו, אזי עבור $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$f(z) = \alpha z + \beta$$

2.2 ב

רוצים לסובב את המישור ב $-90°$ אזי נכפול את z ב $e^{-\frac{\pi}{2}} = -i$, אחר כך אפשר להזיז את המישור בכל מספר ממשי שנרצה אזי:

$$\begin{aligned} f(z) &= -i \cdot z + \beta \\ \beta &\in \mathbb{R} \end{aligned}$$

2.3 ג

מזיזים את המעגל לראשית, ואז מסובבים בθ, אז מזיזים את זה ל $(-1,0)$

$$f(z)=(z-1)\cdot e^{i\theta}-1$$

2.4 ד

בשביל להפוך את הקו $y=x+1$ לקו מהצורה $x=\alpha$ צריך לסובב אותו 45° אזי נכפול את z ב $re^{i\frac{\pi}{4}}$. מקבלים את הקו $x=r\sqrt{2}$. בשביל לקבל את $x=0$ צריך להחסיר את $r\sqrt{2}$ וניתן להזיז בציר y כרצוננו

$$\begin{aligned} f(z) &= re^{i\frac{\pi}{4}}-r\sqrt{2}+it \\ r,t &\in \mathbb{R} \end{aligned}$$

2.5 ה

הדרך היחידה לקבל היפרבולה דרך פעולות מתיכה והזזה זה לסובב אותה 180° או 360° אזי

$$\begin{aligned} w(z) &= z\cdot\left(e^{i\pi}\right)^n \\ &= (-1)^n\cdot z \end{aligned}$$

3 שאלה 3

3.1 א

לא קיימת העזתקה כזו כי אם בונים משולש בתוך האליפסה אנחנו אמורים לקבל משולש עם אותן זוויות במעגל, אבל לא ייתכן שזה יתקיים לגבי כל משולש אזי אי אפשר(כי טרנספורם אפיני שומר על זוויות)

3.2 ב

כן. רוצים שהמעגל יהיה ברדיוס $\sqrt{2}$ ואז להזהיה את המרכז ל $1+i$:

$$w(z)=\sqrt{2}\cdot z+2+i$$

3.3 ג

בונים משולש באליפסה הנתונה כך ש שתי נקודודת יושבות על הראדיוס הקטן והנ-קודה השלישית על הראדיוס הגדול, המשולש הזה הוא שווה שוקיים ויש עוד משולש דומה לו בצד השני של האליפסה. טרנספורמצית מוביוס שומרת על זוויות אזי בשביל לבנות שני המשולשים שווי השוקיים האלה באליפסה החדשה כל הנקודות יושבות על הראדיוסים, אבל המימדים של האליפסה השתנו באופן לא אחיד אזי אי אפשר לקבל את זהווית השלישית כמו שהיתה מקודם. לכן לא קיימת טרנספורמציה אפינית שמעבירה את האליפסה לאליפסה.

3.4 ד

בהיפרבולה אין נקודה כלשהיא שנמצאת על שני הישרים, אבל באיחוד שני ההיפר-בולות יש נקודה כזי $(z=0)$. יודעים כי טרנספורמציה אפינה לא מעבירה שתי נקודות לנקודה אחת אזי אי אפשר להעביר את ההיפרבולה לאיחוד שתי ההיפרבולות.

4 שאלה 4

4.1 א

רוצים להעביר את $w(a)\mapsto 1$ אזי

$$\begin{aligned}
w(a) &= 1\\
w(a+h) &= -1\\
\alpha\cdot a+\beta &= 1\\
\alpha(a+h)+\beta &= -1\\
\alpha a-\alpha a-\alpha h &= 2\\
\alpha &= -\frac{2}{h}\\
-\frac{2}{h}a+\beta &= 1\\
\beta &= 1+\frac{2}{h}a
\end{aligned}$$

$$w(z)=-\frac{2}{h}z+1+\frac{2}{h}a$$

4.2 ב

רוצים ש $a\mapsto 1$ ו $a+h\mapsto -1$ אזי מזיזים את z ב $a+\frac{h}{2}$ ומחלקים ב $\frac{h}{2}$ בשביל לקבל את זה. אחר כך מזיזים ב i בשביל לקבל את התנאי $w(a+{}^{h}/_{2})=i$

$$w(z)=\frac{-z+a+\frac{h}{2}}{{}^{h}/_{2}}+i$$

4.3 ג

רוצים להעביר את $y = kx$ ל $x = -1$ אזי ראשית נכפול את הקו kx ב $e^{-i\arctan(k)}$ שזה מעביר כל מספר מוכב מהצורה $x + ikx$ לצורה $a + 0 \cdot i$. רוצים להעביר את $-1 \mapsto 0$ אזי צריך להזיז את זה ב -1 אזי

$$w(z) = r \cdot e^{-i\arctan(k)} \cdot z - 1$$

העובי של הרצועה הנתונה היא $b\cos(\arctan(k))$ אנחנו רוצים רצועה בעובי 2 אזח $r = \frac{2}{b\cos(\arctan(k))}$ אזי

$$w(z) = \frac{2}{b\cos(\arctan(k))} e^{-i\arctan(k)} \cdot z - 1$$