פתרון תרגיל 5

.1

$$I)\, i_L(t) = Cv'_C(t) + \frac{1}{R}v_C(t)$$

$$II)\, i_L(t) = \frac{1}{L}\int_0^t v_L(t)dt = \frac{1}{L}\int_0^t [v_S(t) - v_C(t)]dt$$

מהשוואת I ל-II וגזירת המשוואה המתקבלת:

$$v''_C(t) + \frac{1}{RC}v'_C(t) + \frac{1}{LC}v_C(t) = \frac{1}{LC}v_S(t)$$

נציב את נתוני הרכיבים ונקבל:

$$2\alpha = \frac{1}{RC} = \frac{1}{4}; \omega_0^2 = \frac{1}{LC} = 4$$

$$v''_C(t) + 0.25v'_C(t) + 4v_C(t) = 4v_S(t)$$

נמצא את <u>הפתרון ההומוגני</u>. הפולינום האופייני ופתרונותיו:

$$p(s) = s^2 + 0.25s + 4 = 0 \Rightarrow$$

$$s_{1,2} = \frac{-0.25 \pm \sqrt{0.0625 - 16}}{2} = -0.125 \pm j1.996$$

וזהו תת-ריסון.

$$v_{Ch}(t) = Ae^{-0.125t}\sin(1.996t) + Be^{-0.125t}\cos(1.996t)$$

<u>הפתרון הפרטי למדרגה, vs(t)=u(t)</u>:

הפתרון המתבקש ל-t>0 הוא מהצורה של העירור, כלומר:

$$v_{Cp} = 1$$

והפתרון הכולל הוא:

$$v_C(t) = v_{Cp}(t) + v_{Ch}(t) =$$

$$= 1 + Ae^{-0.125t}\sin(1.996t) + Be^{-0.125t}\cos(1.996t); t > 0$$

מהגדרת התגובה למדרגה ת"ה הם אפס (כל-עוד לא נאמר אחרת).

נמצא את A ו-B המאפסים את ת"ה:

$$v_C(0) = 1 + B = 0 \Rightarrow B = -1$$

$$v'_C(0) = -0.125B + 1.996A = 0 \Rightarrow A = -0.0626$$

והתגובה המלאה למדרגה:

$$v_C(t) = \left[1 + e^{-0.125t}[-0.0626\sin(1.996t) - \cos(1.996t)]\right]u(t)$$

<u>חישוב התגובה לשיפוע (ramp) עם שיפוע 3, vs(t)=3tu(t)</u>:

יש שתי שיטות: 1. אינטגרציה לתגובה למדרגה, היות ו- והכפלה ב-3:

$$3r(t) = 3\int_0^t u(t)dt\,.$$

2. מציאת פתרון פרטי+הומוגני (באיפוס ת"ה).

נפתח בשיטה השנייה:

העירור הוא 3tu(t). ננחש, שהפתרון הפרטי הוא מצורה דומה, כלומר:

$$v_{Cp} = A + Bt$$

כזכור, אפשר להציב במד"ר הפתרון הפרטי בלבד ולהשמיט u(t) מהעירור. נציב במשוואה למציאת A ו-B:

$$0.25B + 4A + 4Bt = 12t \Rightarrow A = -0.1875; B = 3$$

$$v_{Cp} = -0.1875 + 3t$$

נוסיף פתרון הומוגני (זהה לזה שמצאנו לעירור מדרגה, שכן הפתרון ההומוגני תלוי רק בפולינום האופייני ובת"ה ולא בעירור):

$$e^{-0.125t}[A\sin(1.996t) + B\cos(1.996t)]; t > 0$$

מאיפוס ת"ה:

$$B = 0.1875$$

$$3 - 0.125B + 1.996A = 0 \Rightarrow A = -1.49$$

והתגובה המלאה לשיפוע 3:

$$v_C(t) =$$
$$= \{-0.1875 + 3t + e^{-0.125t}[-1.49\sin(1.996t) + 0.1875\cos(1.996t)]\}u(t)$$

ובשיטת האינטגרציה:

$$v_C(t)|_{3r(t)} = 3\int_0^t v_C(t)|_{u(t)}dt =$$
$$= 3\int_0^t 1dt - 3\cdot 0.0626\int_0^t e^{-0.125t}\sin(0.1996t)dt - 3\int_0^t e^{-0.125t}\cos(1.996t)dt =$$
$$= 3t - 0.1878[\frac{e^{-0.125t}(-0.125\sin(1.996t) - \cos(1.996t))}{0.125^2 + 0.1996^2}]_0^t -$$
$$-3[\frac{e^{-0.125t}(-0.125\cos(1.996t) + 1.996\sin(1.996t))}{0.125^2 + 0.1996^2}]_0^t =$$
$$= \{3t + e^{-0.125t}[-1.49\sin(1.996t) + 0.1878\cos(1.996t)] - 0.1878\}u(t)$$

ופתרון זה זהה, למרבה המזל, לזה שמצאנו בשיטה הקודמת עם קירובים קטנים מאחר ולא השתמשנו בתוצאות מאוד מדוייקות.

<u>הערה</u>: כדאי לבדוק, מה קורה בזמנים

$$t \to \infty, t \to 0$$

$$v_C(t)|_{u(t), t\to\infty} = 1$$

והמשמעות: ב- $t\to\infty$ עירור המדרגה כמוהו כ-DC, ולכן הקבל יתנהג כנתק, והסליל – כקצר:

$$\frac{1}{\omega C}|_{\omega=0} \to \infty; \omega L|_{\omega=0} = 0$$

מכאן ברור, ש-:

$$v_C(t) = v_S(t) = 1$$

2. נכתוב תחילה את המשוואה הדיפרנציאלית, המתארת את הקשר בין $v_C(t)$ למבוא $i_S(t)$.

$$i_C(t) = cv'_C(t)$$

$$i_R(t) = \frac{1}{R}v_C(t); i_L(t) = \frac{1}{L}\int_0^t v_C(t)dt$$

KCL לצומת העליון:

$$i_S(t) = i_C(t) + i_R(t) + i_L(t)$$

ונציב את הביטויים הקודמים במשוואה:

$$i_S(t) = cv'_C(t) + \frac{1}{R}v_C(t) + \frac{1}{L}\int_0^t v_C(t)dt$$

נביא את המשוואה לצורתה המקובלת ע"י גזירת שני האגפים וחלוקה במקדם הנגזרת הגבוהה:

$$v''_C(t) + \frac{1}{RC}v'_C(t) + \frac{1}{LC}v_C(t) = \frac{1}{C}i'_S(t)$$

עד כאן הפתרון כללי לכל מעגל RLC מקבילי.
נמצא את ערכי המקדמים לפי הנתונים:

$$\omega_0 = 10 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{10}{\sqrt{L}} \Rightarrow L = 1H$$

$$Q = \frac{\omega_0}{2\alpha} = \frac{10}{2\alpha} = \frac{10}{1/RC} = \frac{10}{R} = \frac{1}{2} \Rightarrow R = \frac{1}{20} = 0.05\Omega$$

$$v''_C(t) + 20v'_C(t) + 100v_C(t) = i'_S(t)$$

נמצא את התגובה השלמה.
תחילה נישב את תגובת ZIR.
הפולינום האופייני:

$$P(s) = s^2 + 20s + 100 = 0 \Rightarrow s_{1,2} = \frac{-20 \pm \sqrt{400-400}}{2} = -10$$

$$v_{C,ZIR}(t) = Ae^{-10t} + Bte^{-10t}$$

נסמן:

$$i_L(0^-) = I_0; v_C(0^-) = V_0$$

דרושים לנו ת"ה ב- $v_C(0^-)$ וב- $v'_C(0^-)$. נמיר את ת"ה ב- $i_L(0^-)$ בת"ה ב- $v'_C(0-)$:

$$i_C(0^-) = -i_R(0^-) - i_L(0^-) = -\frac{V_0}{R} - I_0$$
$$\Rightarrow Cv'_C(0^-) = -\frac{V_0}{R} - I_0$$
$$v'_C(0^-) = -\frac{V_0}{RC} - \frac{I_0}{C} = -I_0 - 20V_0$$

נציב ת"ה:

$$v_{C,ZIR}(0) = A = v_C(0^-)$$
$$v_{C,ZIR}(0) = A = V_0$$
$$v'_{C,ZIR}(t) = -10Ae^{-10t} + Be^{-10t} - 10Bte^{-10t}$$
$$v'_{C,ZIR}(0) = -10V_0e^{-10t} + B = -I_0 - 20V_0$$
$$\Rightarrow B = -I_0 - 10V_0$$
$$\Downarrow$$
$$v_{C,ZIR}(t) = V_0e^{-10t} - (I_0 + 10V_0)te^{-10t}; t \ge 0$$

תגובת ZSR:

$$v''_C(t) + 20v'_C(t) + 100v_C(t) = i'_S(t)$$
$$i_S(t) = u(t)\cos(2t) \Rightarrow i'_S(t) = -2\sin(2t)u(t) + \underbrace{\cos(2t)}_{=1@t=0}\delta(t) =$$
$$= -2\sin(2t)u(t) + \cos(2\bullet 0)\delta(t) = -2\sin(2t)u(t) + \delta(t)$$

ניעזר בלינאריות, כלומר, נמצא את הפתרון למבוא $-2\sin(2t)u(t)$ ולמבוא $\delta(t)$ ונחברם.

ל- $-2\sin(2t)u(t)$:

$$v''_{C1}(t) + 20v'_{C1}(t) + 100v_{C1}(t) = -2\sin(2t)$$
$$v_{C1}(0^-) = 0; v'_{C1}(0^-) = 0$$

נבחר בפתרון פרטי סינוסואידלי:

$$v_{C1p}(t) = A\sin(2t) + B\cos(2t); t \ge 0$$

נציב במשוואה למציאת A ו-B:

$$\underbrace{-4A\sin(2t)-4B\cos(2t)}_{v''_{C1}(t)}+\underbrace{40A\cos(2t)-40B\sin(2t)}_{20v'_{C1}(t)}+\underbrace{100A\sin(2t)+100B\cos(2t)}_{100v_{C1}(t)}=$$
$$=-\sin(2t)$$
$$\Downarrow$$
$$-4A-40B+100A=-2;$$
$$-4B+40A+100B=0$$
$$\Downarrow$$
$$96A-40B=-2;$$
$$40A+96B=0$$
$$\Downarrow$$
$$A=\frac{-96B}{40};[96\bullet\frac{(-96)}{40}-40]B=-2$$
$$\Downarrow$$
$$B=\frac{80}{10816};A=-\frac{192}{10816}$$
$$v_{C1p}(t)=-\frac{192}{10816}\sin(2t)+\frac{80}{10816}\cos(2t);t\geq 0$$

$$v_{C1p}(0\ \ )=\frac{80}{10816};v'_{C1p}(0)=-\frac{2\bullet 192}{10816}$$

עלינו להוסיף פתרון הומוגני לאיפוס ת"ה:

$$v_{Ch}(t)=Ae^{-10t}+Bte^{-10t}$$

ולאיפוס ת"ה נדרוש:

$$v_{Ch}(0)=A=-\frac{80}{10816}$$
$$v'_{Ch}(0)=-10A+B=\frac{2\bullet 192}{10816}\Rightarrow B=-\frac{416}{10816}$$
$$v_{C1}(t)=\underbrace{-\frac{192}{10816}\sin(2t)+\frac{80}{10816}\cos(2t)}_{v_{c1p}}\underbrace{-\frac{80}{10816}e^{-10t}-\frac{416}{10816}te^{-10t}}_{v_{Ch}(0)};t\geq 0$$

לכניסת $\delta(t)$:

$$v''_{C2}(t)+20v'_{C2}(t)+100v_{C2}(t)=\delta(t)$$
$$v_{C2}(0^-)=0;v'_{C2}(0^-)=0$$

כפי שלמדנו, כשהעירור הוא הלם, אפשר לפתור ZIR (כאילו אין עירור), ותרומת ההלם תתבטא בתנאי התחלה חדשים.

מאחר שבאגף ימין יש הלם, הנגזרת הגבוהה באגף שמאל, כלומר:

$$v''_{C2}(t)=\delta(t)$$

ומכאן:

$$v'_{C2}(t) = u(t)$$

כלומר, יש קפיצה בת"ה של $v'_{C2}(t)$, מ- 0 ב-(- 0) ל- 1 ב-(+ 0).

הבעיה בצורתה החדשה:

$$\begin{cases} v''_{C2}(t) + 20v'_{C2}(t) + 100v_{C2}(t) = 0 \\ v_{C2}(0+) = 0; v'_{C2}(0+) = 1 \end{cases} \qquad t > 0$$

ופתרונה:

$$v_{C2}(t) = te^{-10t}; t > 0$$

הפתרון השלם עבור t>0 יהיה, אם-כן:

$$v_C(t) = v_{C,\,ZIR}(t) + v_{C,\,ZSR}(t) = v_{C,\,ZIR}(t) + v_{C1}(t) + v_{C2}(t) =$$

$$= \underbrace{V_0e^{-10t} - (I_0 + 10V_0)te^{-10t}}_{ZIR} + \underbrace{\frac{1}{10816}[-192\sin(2t) + 80\cos(2t) - 80e^{-10t} - 416te^{-10t}]}_{ZSR;v_{C1}(t)}$$

$$+ \underbrace{te^{-10t}}_{ZSR;v_{C2}(t)} \qquad ; t > 0$$

נזכור, כי נדרשנו לאפס תגובות דועכות.יש לאפס מקדמי האקספוננט:

$$V_0 - \frac{80}{10816} = 0 \Rightarrow V_0 = \frac{80}{10816} = \frac{5}{676}$$

$$-(I_0 + 10V_0) - \frac{416}{10816} + 1 = 0 \Rightarrow I_0 = \frac{9600}{10816} = \frac{150}{196}$$

ולמעשה, נשארנו עם הפתרון הפרטי בלבד, שכן התגובה לת"ה דועכת, ואותה איפסנו.

3. מתוך ZSR במקרה הראשון:

$$i_1(t) = u(t)\cos(2t)$$

$$v_1(t) = e^{-t} - 1.5e^{-2t} + \cos(2t + 60^0); t \geq 0$$

נסיק את ZSR במקרה השני, ומתוכו את ZIR:

$$v_{2,\,ZSR}(t) = 3v_1(t) = 3[e^{-t} - 1.5e^{-2t} + \cos(2t + 60^0)]; t \geq 0$$

$$v_{ZIR}(t) = v_2(t) - v_{2,\,ZSR}(t) =$$

$$= e^{-t} + 3e^{-2t} + 3\cos(2t + 60^0) - 3[e^{-t} - 1.5e^{-2t} + \cos(2t + 60^0)] =$$

$$= -2e^{-t} + 7.5e^{-2t}$$

והתגובה ל-(i3(t:

$$i_3(t) = 5i_1(t) \Rightarrow v_{3,\,ZSR}(t) = 5v_1(t) = 5[e^{-t} - 1.5e^{-2t} + \cos(2t + 60^0)]$$

$$v_3(t) = v_{ZIR}(t) + v_{3,\,ZSR}(t) = -2e^{-t} + 7.5e^{-2t} + 5[e^{-t} - 1.5e^{-2t} + \cos(2t + 60^0)] =$$

$$= 3e^{-t} + 5\cos(2t + 60^0)$$

4. על-פי KCL ו-KVL:

$$\mathrm{I})\, L\frac{di}{dt} + v_C + R_L i_L = e_S$$

$$\mathrm{II})\, C\frac{dv_C}{dt} + \frac{v_C}{R_1} - i_L = 0$$

מהצבת i_L ממשוואה II ב-I:

$$LC\frac{d^2v_C}{dt^2} + \left(\frac{L}{R_1} + CR_2\right)\frac{dv_C}{dt} + \left(\frac{R_2}{R_1} + 1\right)v_C = e_S$$

ומתוך II:

$$\frac{dv_C}{dt}(0) = \frac{1}{C}\left[i_L(0) - \frac{v_C(0)}{R_1}\right]$$

하나. תחילה נמצא את התגובה למדרגה:

$$v''_C + 4v'_C + 5v_C = 2u(t)$$

$$v_C(0) = v'_C(0) = 0$$

הפולינום האופייני ופתרונותיו:

$$s^2 + 4s + 5 = 0 \Rightarrow s_{1,2} = -2 \pm j \bullet 1 = \alpha + j\omega$$

הפתרון ההומוגני:

$$v_{Ch} = e^{\alpha t}[A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)]$$

הפתרון הפרטי הוא קבוע (בדומה לעירור, 4u(t), שהוא קבוע ב-t>0). נציב אותו במד"ר:

$$5v_{Cp} = 2 \Rightarrow v_{Cp} = 0.4$$

הפתרון המלא צריך לקיים את תנאי ההתחלה. נציב למציאת A ו-B:

$$v_{Cp} + v_{Ch}(0) = 0.4 + A = 0 \Rightarrow A = -0.4$$

$$v'_{Cp} + v'_{Ch}(0) = \alpha A + \omega B = 0 \Rightarrow B = -\frac{\alpha A}{\omega} = -\frac{-2 \cdot -0.4}{1} = -0.8$$

והתגובה למדרגה:

$$s(t) = \left\{0.4 - e^{-2t}[0.4\cos(t) + 0.8\sin(t)]\right\}u(t)$$

והתגובה להלם:

$$h(t) = \frac{ds(t)}{dt} = \{2[0.4\cos(t) + 0.8\sin(t)] +$$
$$[-0.4\sin(t) + 0.8\cos(t)]\}e^{-2t} \cdot u(t) =$$
$$= 2e^{-2t}\sin(t)u(t)$$

ב. לפתרון ZIR:

$$v''_C + 4v'_C + 5v_C = 0$$
$$v_{ZIR} = e^{\alpha t}[A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)]$$
$$v_C(0) = 1; \quad II \Rightarrow \quad v'_C(0) = \frac{1}{C}[i_L(0) - \frac{v_C(0)}{R_1}] = 2(2 - \frac{1}{2}) = 3$$
$$\Downarrow \qquad\qquad\qquad \Downarrow$$
$$A = 1; \qquad\qquad 3 = \alpha A + \omega B \Rightarrow \quad B = \frac{3 - \alpha A}{\omega} = \frac{3+2}{1} = 5$$
$$v_{ZIR} = e^{-2t}[\cos(t) + 5\sin(t)]$$

את פתרון ZSR, שסימנו כ-h(t), מצאנו בסעיף הקודם:

$$v_C = v_{ZIR} + v_{ZSR} = e^{-2t}[\cos(t) + 5\sin(t)] + 2e^{-2t}\sin(t)u(t)$$