תרגיל מס.5

עפיף חלומה 302323001

3 בדצמבר 2009

1 שאלה 1

1.1 א

$$
\begin{aligned}
RI &= V \\
\begin{pmatrix} R_1 + Ls & -Ls \\ -Ls & R_2 + \frac{1}{Cs} + Ls \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} V_s(s) \\ 0 \end{pmatrix} \\
V_c &= \frac{1}{Cs} I_2
\end{aligned}
$$

נשתמש בכלל כרמר ומקבלים:

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \frac{\begin{vmatrix} V_s(s) & -Ls \\ 0 & R_2 + \frac{1}{Cs} + Ls \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R_1 + Ls & -Ls \\ -Ls & R_2 + \frac{1}{Cs} + Ls \end{vmatrix}} \\
&= \frac{\left(R_2 + \frac{1}{Cs} + Ls\right) V_s(s)}{(R_1 + sL)\left(R_2 + sL + \frac{1}{sC}\right) - s^2 L^2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \frac{\begin{vmatrix} R_1 + Ls & V_s(s) \\ -Ls & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R_1 + Ls & -Ls \\ -Ls & R_2 + \frac{1}{Cs} + Ls \end{vmatrix}} \\
&= \frac{Ls \cdot V_s(s)}{(R_1 + sL)\left(R_2 + sL + \frac{1}{sC}\right) - s^2 L^2}
\end{aligned}
$$

מציבים:

$$
\begin{aligned}
V_C &= \frac{1}{Cs}\cdot\frac{Ls\cdot V_s(s)}{(R_1+sL)\left(R_2+sL+\frac{1}{sC}\right)-s^2L^2}\\
V_c &= \frac{L\cdot V_s(s)}{C(R_1+sL)\left(R_2+sL+\frac{1}{sC}\right)-s^2L^2C}\\
V_c &= \frac{sL\cdot V_s(s)}{\left(R_1R_2Cs+R_1s^2LC+R_1sC\frac{1}{sC}+s^2LCR_2+s^3L^2C+\frac{s^2LC}{sC}\right)-s^3L^2C}\\
V_c &= \frac{sL\cdot V_s(s)}{R_1+s(R_1R_2C+L)+s^2(R_1LC+LCR_2)}\\
sL\cdot V_s(s) &= V_c\left[R_1+s(R_1R_2C+L)+s^2(R_1LC+LCR_2)\right]\\
LV_s'(s) &= V_cR_1+V_c'(R_1R_2C+L)+V_c''(R_1LC+LCR_2)\\
\overbrace{\frac{L}{(R_1LC+LCR_2)}}^{K}V_s' &= V_c''+V_c'\overbrace{\frac{(R_1R_2C+L)}{(R_1LC+LCR_2)}}^{2\alpha}+V_c\overbrace{\frac{R_1}{(R_1LC+LCR_2)}}^{\omega_0^2}
\end{aligned}
$$

אז:

$$
\begin{aligned}
\omega_0 &= \sqrt{\frac{R_1}{(R_1LC+LCR_2)}}\\
Q &= \frac{\omega_0}{2\alpha}\\
&= \frac{\sqrt{R_1}}{\left(\frac{(R_1R_2C+L)}{\sqrt{(R_1LC+LCR_2)}}\right)}\\
&= \frac{\sqrt{R_1}\sqrt{(R_1LC+LCR_2)}}{(R_1R_2C+L)}
\end{aligned}
$$

1.2 ב

$$
\begin{aligned}
\omega_0 &= \sqrt{\frac{R_1}{(R_1LC+LCR_2)}}\\
&= \sqrt{\frac{2}{2\cdot4\cdot8+4\cdot8\cdot1}}\\
&= \sqrt{\frac{2}{64+48}}\\
&= \sqrt{\frac{2}{96}}\\
&= \frac{1}{\sqrt{48}}
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
\alpha &= \left(\frac{5}{48}\right) \\
Q &= \frac{\omega}{2\alpha} \\
&= \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{48}}\right)}{\left(\frac{5}{48}\right)} = \frac{1}{5\sqrt{48}} \\
K &= \frac{L}{(R_1LC + LCR_2)} \\
&= \frac{4}{96} = \frac{1}{24}
\end{aligned}$$

פתרון:

$$PV_c' = V_c'' + 2\alpha V_c' + \omega^2 V_c$$

פתרון הומוגיני:

$$\begin{aligned}
0 &= V_c'' + 2\alpha V_c' + \omega^2 V_c \\
0 &= V_C'' + \frac{5}{24}V_C' + \frac{1}{48}V_C
\end{aligned}$$

נפתור פולינום אופייני:

$$\begin{aligned}
s^2 + \frac{5}{24}s + \frac{1}{48} &= 0 \\
s_1 &= \frac{-5 + i\sqrt{23}}{48} \\
s_2 &= \frac{-5 - i\sqrt{23}}{48} \\
V_c(t) &= Ae^{s_1 t} + Be^{s_2 t}
\end{aligned}$$

פתרון הומוגני:

$$\begin{aligned}
V_c &= -\frac{\overbrace{24}^{p}}{\sqrt{23}} ie^{\frac{-5+i\sqrt{23}}{48}t} + \frac{24i}{\sqrt{23}}e^{\frac{-5-i\sqrt{23}}{48}t} \\
&= -pie^{\frac{-5}{48}t}\left(i\sin\left(\frac{\sqrt{23}}{48}t\right) + \cos\left(\frac{\sqrt{23}}{48}t\right)\right) + pie^{\frac{-5}{48}t}\left(i\sin\left(-\frac{\sqrt{23}}{48}t\right) + \cos\left(-\frac{\sqrt{23}}{48}t\right)\right) \\
&= pe^{\frac{-5}{48}t}\left(\sin\left(\frac{\sqrt{23}}{48}t\right) - i\cos\left(\frac{\sqrt{23}}{48}t\right)\right) + pie^{\frac{-5}{48}t}\left(\sin\left(\frac{\sqrt{23}}{48}t\right) + i\cos\left(\frac{\sqrt{23}}{48}t\right)\right) \\
&= \frac{48}{\sqrt{23}}e^{\frac{-5}{48}t}\sin\left(\frac{\sqrt{23}}{48}t\right)
\end{aligned}$$

פותרים ZSR:

$$V_C'' + \frac{5}{24}V_C' + \frac{1}{48}V_C = \frac{1}{24}\cdot 2\cdot u\left(t\right)$$

מנחשים פתרון: $V_p = a + bt$ ומציבים

$$\begin{aligned}
V_C^{ZSR} &= \left(V_p + V_h\right)u\left(t\right) \\
&= a + bt + Ae^{\frac{-5+i\sqrt{23}}{48}t} + Be^{\frac{-5-i\sqrt{23}}{48}t} \\
\frac{5}{24}b + \frac{1}{48}\left(a + bt\right) &= \frac{1}{12} \\
\left(\frac{5}{24}b + \frac{1}{48}a\right) + \left(\frac{1}{48}b\right)t &= \frac{1}{12} \\
b &= 0 \\
a &= 4
\end{aligned}$$

מציבים בתנאי התחלה

$$\begin{aligned}
V_C^{ZSR} &= 4 + Ae^{\frac{-5+i\sqrt{23}}{48}t} + Be^{\frac{-5-i\sqrt{23}}{48}t} \\
0 &= 4 + A + B \\
0 &= A\left(\frac{-5+i\sqrt{23}}{48}\right) + B\left(\frac{-5-i\sqrt{23}}{48}\right) \\
A &= -2 + \frac{10i}{\sqrt{23}} \\
B &= -2 - \frac{10i}{\sqrt{23}}
\end{aligned}$$

$$V_c = \frac{4}{23}e^{-\frac{5t}{48}}\left(23e^{\frac{5t}{48}} - 23\cos\left(\frac{\sqrt{23}t}{48}\right) - 5\sqrt{23}\sin\left(\frac{\sqrt{23}t}{48}\right)\right)u\left(t\right)$$

2 שאלה 2

נכתוב תחילה את המשוואה הדיפרנציאלית המתארת את הקשר בין $v_c\left(t\right)$ למבא $i_s\left(t\right)$:

$$\begin{aligned}
i_c\left(t\right) &= cv_c'\left(t\right) \\
i_R\left(t\right) &= \frac{1}{R}v_c\left(t\right) \\
i_L\left(t\right) &= \frac{1}{L}\int_0^t v_c\left(t\right)dt
\end{aligned}$$

KCL לצומת העליון:

$$i_S(t) = i_c(t) + i_R(t) + i_L(t)$$

נציב:

$$\begin{aligned} i_s(t) &= cv_c'(t) + \frac{1}{R}v_c(t) + \frac{1}{L}\int_0^t v_c(t)\,dt \\ \frac{1}{C}i_s'(t) &= v_c''(t) + \frac{1}{RC}v_c'(t) + \frac{1}{LC}v_c(t) \end{aligned}$$

מציבים הנתונים:

$$\begin{aligned} \omega_0 &= 10 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{10}{\sqrt{L}} \Rightarrow L = 1H \\ Q &= \frac{\omega_0}{2\alpha} = \frac{10}{2\alpha} = \frac{10}{{}^1/_{RC}} = \frac{10}{R} = \frac{1}{2} \Rightarrow R = \frac{1}{20}\Omega \\ i_s'(t) &= v_c''(t) + 20v_c'(t) + 100v_C(t) = i_s'(t) \end{aligned}$$

פולינום אופיני:

$$\begin{aligned} s^2 + 20s + 100 &= 0 \\ s_{1,2} &= \frac{-20 \pm \sqrt{400 - 400}}{2} = -10 \\ v_c^{zir}(t) &= Ae^{-10t} + Bte^{-10t} \end{aligned}$$

נסמן:

$$\begin{aligned} I_L\left(0^-\right) &= I_0 \\ V_c\left(0^-\right) &= V_0 \end{aligned}$$

דרושים לנו ת"ה ב $v_c(0^-)$ וב $v_c'(0^-)$. נמיר את ת"ה ב $i_L(0^-)$ בת"ה ב $v_c'(0^-)$:

$$\begin{aligned} i_C\left(0^-\right) &= -i_R\left(0^-\right) - i_L\left(0^-\right) = -\frac{V_0}{R} - I_0 \\ \Rightarrow Cv_c'\left(0^-\right) &= -\frac{V_0}{R} - I_0 \\ V_c'\left(0^-\right) &= -\frac{V_0}{RC} - \frac{I_0}{C} = -I_0 - 20V_0 \end{aligned}$$

נציב ת"ה:

$$\begin{aligned} v_c^{zir}(0) &= A = v_c\left(0^-\right) \\ v_c^{zir}(0) &= A = V_0 \\ v_c'^{zir}(0) &= -10Ae^{-10t} + Be^{-10t} - 10Bte^{-10t} \\ v_c'^{zir}(0) &= -10V_0e^{-10t} + B = -I_0 - 20V_0 \\ \Rightarrow B &= I_0 - 10V_0 \\ \Rightarrow v_c^{zir}(t) &= V_0e^{-10t} - (I_0 + 10V_0)\, te^{-10t}; t \geq 0 \end{aligned}$$

תגובת ZSR:

$$\begin{aligned} v_c''(t) + 20v_c'(t) + 100v_C(t) &= i_s'(t) \\ i_s &= u(t)\cos(2t) \\ i_s'(t) &= 2\sin(2t)\, u(t) + \cos(2t)\,\delta(t) \\ &= 3\sin(2t)\, u(t)\cos(2\cdot 0)\,\delta(t) \\ &= -2\sin(2t)\, u(t) + \delta(t) \end{aligned}$$

ניעזר בליניאריות כלומר נמצא את הפתרון למבא $-2\sin(2t)\,u(t)$ ולמבא $\delta(t)$ ונחברם.
ל $-2\sin(2t)\,u(t)$:

$$\begin{aligned} v''v_1(t) + 20v_{c_1}'(t) + 100v_{c_1}(t) &= -2\sin(2t) \\ v_{c_1}\left(0^-\right) &= 0 \\ v_{c_1}'\left(0^-\right) &= 0 \end{aligned}$$

נבחר בפתרון פרטי סינוסואידי:

$$v_{c_1p}(t) = A\sin(2t) + V\cos(2t)\, ; t > 0$$

נציב במשוואה למציאת A וB:

$$\begin{aligned} -4A\sin(2t) - 4B\cos(2t) + 10A\cos(2t) - 40B\sin(2t) + 100A\sin(2t) + 100B\cos(2t) &= -\sin(2t) \\ -4A - 40B + 100A &= -2 \\ -4B + 40A + 100B &= 0 \\ A &= -\frac{192}{10816} \\ B &= \frac{80}{10816} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
v_{c_1p}(t) &= -\frac{192}{10816}\sin(2t)+\frac{80}{10816}\cos(2t)\,; t>0\\
v_{c_1p}(0) &= \frac{80}{10816}\\
v'_{c_1p}(0) &= -\frac{2\cdot 192}{10816}
\end{aligned}
$$

מוסיפים פתרון הומוגיני לאפס תנאי התחלה:

$$v_{ch}(t)=Ae^{-10t}+Bte^{-10t}$$

בשביל לאפס ת"ה דורשים:

$$
\begin{aligned}
v_{ch}(0) &= A=-\frac{80}{10816}\\
v'_{ch}(0) &= -10A+B=\frac{2\cdot 192}{10816}\\
B &= -\frac{416}{10816}\\
v_{c_1}(t) &= -\frac{192}{10816}\sin(2t)+\frac{80}{10816}\cos(2t)-\frac{80}{10816}e^{-10t}-\frac{416}{10816}te^{-10t}; t>0
\end{aligned}
$$

לכניסת $\delta(t)$:

$$
\begin{aligned}
v''_{c_2}(t)+20v'_{c_2}(t)+100v_{c_2}(t) &= \delta(t)\\
v_{c_2}\left(0^-\right) &= 0\\
v_{c_2}\left(0^-\right) &= 0
\end{aligned}
$$

כפי שלמדנו, כאשר פותרים עבור הלם אפשר לפתור מעגל בלי עירור והעירור יתב-
טא בתנאי ההתחלה החדשים של המעגל.
לפי אי רציפות של פונקציות רואים כי

$$v''_{c_2}(t)=\delta(t)$$

ומכאן:

$$v'_{c_2}(t)=u(t)$$

כלומר יש קפיצה בת"ה של $v'_{c_2}(t)$ מ 0 ב 0^- ל 1 ב 0^+. הבעיה הצורה החדשה:

$$
\begin{aligned}
v''_{c_2}(t) + 20v'_{c_2}(t) + 100v_{c_2}(t) &= 0 \\
v_{c_2}(0+) &= 0 \\
v'_{c_2}(0^+) &= 1
\end{aligned}
$$

ופתרונות:

$$v_{c_2}(t) = te^{-10t}; t > 0$$

הפתרון השדפ עבור $t > 0$ יהיה אם כן:

$$
\begin{aligned}
v_c(t) &= v_{c_{zir}}(t) + v_{c_{zsr}}(t) \\
&= v_{c_{zir}}(t) + v_{c_1}(t) + v_{c_2}(t) \\
&= v_0e^{-10t} - (I_0 + 10V_0)\, te^{-10t} + \frac{-192\sin(2t) + 80\cos(2t) - 80e^{-10t} - 416te^{-10t}}{10816} + te^{-10t}
\end{aligned}
$$

נזכור כי נדרשנו לאפס תגובות דועכות. יש לאפס מקדמי האקספוננט:

$$
\begin{aligned}
V_0 - \frac{80}{10816} &= 0 \\
V_0 &= \frac{5}{676} \\
-(I_0 + 10V_0) - \frac{416}{10816} + 1 &= 0 \\
I_0 &= \frac{150}{196}
\end{aligned}
$$

ולמעשה משארנו עם הפתרון הפרטי בלבד, שכן התכובה לת"ה דועכת, ואותה איפסנו.

3 שאלה 3

סוף סוף שאלה קלה!

$$
\begin{aligned}
V_3 &= \overbrace{V_2 - 3V_1}^{ZIR} + \overbrace{7V_2}^{ZSR} \\
&= V_2 + 4V_1 \\
&= 5e^{-t} - 3e^{-2t} + \cos(2t + 60^\circ)
\end{aligned}
$$

4 שאלה 4

4.1 א

$$\begin{aligned}
G\cdot V &= I\\
\begin{pmatrix}\frac{1}{R_2}+\frac{1}{Ls} & -\frac{1}{Ls}\\ -\frac{1}{Ls} & \frac{1}{R_1}+Cs+\frac{1}{Ls}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}V_1\\V_2\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}\frac{V_s(t)}{R_2}\\0\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

לפי כרמר:

$$\begin{aligned}
V_c &= V_2\\
V_c &= \frac{\frac{V_s}{R_2sL}}{\left(\frac{1}{R_2}+\frac{1}{sL}\right)\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{Ls}+Cs\right)-\frac{1}{s^2L}}\\
\frac{1}{Lc}V_s &= V_c''+\left(\frac{1}{R_1C}+\frac{R_2}{L}\right)V_c'+\frac{1}{LC}\left(1+\frac{R_2}{R_1}\right)V_c\\
2V_s &= V_c''+20.2V_c'+6V_c\\
2u(t) &= V_c''+20.2V_c'+6V_c\\
\omega^2 &= 6\\
\alpha &= 10.1\\
Q &= 0.12
\end{aligned}$$

$Q<\frac{1}{2}$ אזי אנחנו במצב של ריסון יתר
פותרים ZIR:

$$\begin{aligned}
s^2+20.2s+6 &= 0\\
s_1 &= -19.98\\
s_2 &= 0.301\\
V_C &= \tilde{A}e^{-19.89t}+\tilde{B}e^{-0.3t}
\end{aligned}$$

ZSR:

$$V_c''+20.2V_c'+6V_c=\delta(t)$$

נפתור עבור $u(t)$: $v_o=q+bt$

$$\begin{aligned}
20.2b+6a+6bt &= u(t)\\
b &= 0\\
a &= \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

$$V_c^{ZSR}=\left(\frac{1}{6}+Ae^{-19.89t}+Be^{-0.301t}\right)u\left(t\right)$$

ע"פ ZSR: $A=2.5\cdot10^{-3},B=0.169$

$$\begin{aligned}V_c\left(t\right) &= \left(\frac{1}{6}+2.5\cdot10^{-3}\cdot e^{-19.89t}-0.169\cdot e^{-0.301t}\right)u\left(t\right)+\tilde{A}e^{-19.89t}-\tilde{B}e^{-0.3t}\\ V_c\left(t\right) &= \tilde{C}e^{-19.89t}+\tilde{D}e^{-0.3t}+0.051\left(e^{-0.3t}-e^{19.89t}\right)u\left(t\right)\end{aligned}$$

4.2 ב

$$\begin{aligned}V_c\left(0\right) &= 1\\ i_L\left(0\right) &= 2A\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}i_L &= i_{R_1}+i_L\\ i_L &= \frac{V_c}{R_2}+C\cdot V_c'\\ V_c'\left(0\right) &= \frac{i_L\left(0\right)}{C}-\frac{V_c\left(0\right)}{R_2L}\\ &= 3\frac{V}{s}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}V_C\left(0\right) &= 1\\ \tilde{A}+\tilde{B} &= 1\\ -19.89\tilde{A}-0.3\tilde{B} &= 3\\ \tilde{C} &= \tilde{A}\left(-19.89\right)\\ \tilde{D} &= \tilde{B}\left(-0.3\right)\end{aligned}$$

$$V_c\left(t\right)=-0.117e^{-19.89t}+1.17e^{-0.3t}+0.051\left(e^{-0.3t}-e^{-19.89t}\right)u\left(t\right)$$