תרגיל 7

עפיף חלומה 302323001

14 במאי 2009

1 שאלה 1

הלוח תחת תופעת השדה האחיד מתקטב ונוצרת הצטברות של מטען שלילי על השפה האחת ומטען חיובי על האחרת של הלוח.

בתוך הלוח השדה יהיה סופרפוזיציה של השדה החיצוני E_0 והשדה שיווצר בפנים הלוח בהשפעת הדיפולים שנוצרו. כעת נמצא שדה פנימי זה.

ידוע לנו כי מתקיים:

$$\begin{aligned}
E_{0_\parallel} &= E_{1_\parallel} \\
D_{0_\perp} &= D_{1_\perp} \\
&\Updownarrow \\
\varepsilon_0 E_{0_\perp} &= \varepsilon E_{1_\perp} \\
E_{0_\perp} &= E_0 \cos\theta \\
E_{0_\parallel} &= E_0 \sin\theta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_{1_\perp} &= \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} E_{0_\perp} = \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} E_{0_\perp} \cos\theta \\
E_{1_\parallel} &= E_{0_\parallel}
\end{aligned}$$

אזי השדה בתוך הלוח הוא:

$$\begin{aligned}
\vec{E}_1 &= \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} E_0 \cos\theta + E_0 \sin\theta \\
&= \left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} \cos\theta + \sin\theta\right) \vec{E}_0
\end{aligned}$$

2 שאלה 2

לפתור בעיה זו נשתמש בשיטת המראות.

נמקם כדור זהה בעל מימדים זהים בעל צפיפות קיטוב $\vec{P}$. בכדי שיתקיים שהפוט-נציאל על המשטח האינסופי ב $z = 0$ יתאפס.

2.1 א

במרכז הכדור מתקיים כי השדה הוא סופרפוזיציה של שני השדות בהשפעת שני הכדורים:

$$\begin{aligned} E_{1_\odot} &= -\frac{\vec{P}}{3\varepsilon_0} - \frac{P_0}{3\varepsilon_0}\frac{1}{z} \\ E_{2_\odot} &= \frac{2Pk}{r^3}\cos\theta\cdot\hat{r} \end{aligned}$$

$$\vec{E}_{\odot_{tot}} = \left(-\frac{P_0}{3\varepsilon_0} + \frac{2P_0k}{8R^3}\right)\hat{z}$$

אזי בנקודת המגע

$$E_\perp = -\frac{P}{3\varepsilon_0}, E_\perp = -\frac{P}{3\varepsilon_0}$$

$$\vec{E}_{\perp_{tot}} = -\frac{2P}{3\varepsilon_0}\hat{z}$$

2.2 ב

העבודה הנדרשת היא:

$$\begin{aligned} W &= \int \vec{F}d\vec{x} \\ F_z &= \vec{P}\cdot\vec{\nabla}E_z \\ E_z &= \frac{P_0\cos\theta}{2\pi\varepsilon_0 r^3} \\ F_z &= P\cdot\frac{\partial}{\partial z}\frac{P}{2\pi\varepsilon_0 z^3} \\ &= -\frac{3P^2}{2\pi\varepsilon_0 z^4} \\ W &= \int_\infty^{2R} -\frac{3P^2}{2\pi\varepsilon_0 z^4}dz \\ &= \frac{3P^2}{2\pi\varepsilon_0}\int_\infty^{2R}\frac{1}{z^4}dz \\ &= \frac{P^2}{2\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{8R^3} \end{aligned}$$

3 שאלה 3

ידוע לנו כי מתקיים:

$$\begin{aligned} D_{1_\perp} &= D_{2_\perp} \\ \varepsilon_1 E_{1_\perp} &= \varepsilon_2 E_{2_\perp} \end{aligned}$$

וכמו כן כי מתקיים:

$$E_{1_\parallel} = E_{2_\parallel}$$

$$\begin{aligned} \tan\theta_1 &= \frac{E_{1_\parallel}}{E_{1_\perp}} \\ \tan\theta_2 &= \frac{E_{2_\parallel}}{E_{2_\perp}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\tan\theta_1}{\tan\theta_2} &= \frac{\left(\frac{E_{1_\parallel}}{E_{1_\perp}}\right)}{\left(\frac{E_{2_\parallel}}{E_{2_\perp}}\right)} \\ &= \frac{E_{1_\parallel}}{E_{1_\perp}} \cdot \frac{E_{2_\perp}}{E_{2_\parallel}} \\ &= \frac{E_{2_\perp}}{E_{1_\perp}} \\ &= \frac{D_{2_\perp}/\varepsilon_2}{D_{1_\perp}/\varepsilon_1} \\ &= \frac{D_{2_\perp}}{\varepsilon_2} \cdot \frac{\varepsilon_1}{D_{1_\perp}} \\ &= \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \end{aligned}$$

4 שאלה 4

מתקיימת סימטריה סביב ציר x לכן

$$\vec{D} = \begin{cases} \vec{D}_2(r)\,\hat{r} & x > 0 \\ \vec{D}_1(r)\,\hat{r} & x < 0 \end{cases}$$

כמו כן ידוע לנו כי מתקיים

$$
\begin{aligned}
2\pi r^2 \left(D_1 + D_2\right) &= \frac{q}{\varepsilon_0} \\
D_1 + D_2 &= \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 r^2} \\
D_1 &= \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} D_2 \\
D_2 \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} + D_2 &= \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 r^2} \\
D_2 \left(\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{\varepsilon_2}\right) &= \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 r^2} \\
\vec{D}_2 &= \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \cdot \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 r^2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\vec{D} &= \vec{D}_1 + \vec{D}_2 \\
&= \frac{\left(\varepsilon_1 + \varepsilon_2\right) q}{\left(\varepsilon_1 + \varepsilon_2\right) 2\pi r^2 \varepsilon_0} \hat{r} \\
&= \frac{q}{2\pi r^2 \varepsilon_0} \hat{r}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\vec{D} &= \epsilon \vec{E} \\
\vec{E} &= \frac{\vec{D}}{\varepsilon} \\
&= \frac{\frac{2kq}{r^2}}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \\
&= \frac{2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \cdot \frac{kq}{r^2} \hat{r}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
V &= \int_{R_2}^{R_1} \vec{E} d\vec{l} \\
&= \frac{2kq}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) \\
&= \frac{2kq}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \cdot \frac{R_1 + R_2}{R_2 \cdot R_1} \\
C &= \frac{q}{V} \\
&= \frac{2k}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \cdot \frac{R_1 + R_2}{R_2 \cdot R_1}
\end{aligned}
$$