תרגיל מס.1

עפיף חלומה 302323001

26 בנובמבר 2009

1 שאלה 1

1.1 א

אחרי זמן רב הקבל הוא נתק, אזי

$$\begin{aligned} V\left(0^{-}\right) &= V_c\left(0^{-}\right) = V_{R_2}\left(0^{-}\right) \\ V_{R_2}\left(0^{-}\right) &= V \cdot \frac{R_1}{R_1+R_2} \\ &= 10 \cdot \frac{1}{1+1.5} \\ &= 4 \end{aligned}$$

1.2 ב

ברגע שהמקור מנותק מקבלים מעגל של פריקה:

$$\begin{aligned} i_c &= -i_r \\ C\frac{\partial V_c}{\partial t} &= -\frac{V_R}{R} \\ C\frac{\partial V_c}{\partial t} &= -\frac{V_C}{R} \\ \frac{\partial V_c}{\partial t} + \frac{1}{RC}V_C &= 0 \\ V_C\left(t\right) &= Ae^{-\frac{1}{RC}t} \end{aligned}$$

מרציפות המתח על הקבל $V_c\left(0^{-}\right) = V_c\left(0^{+}\right) = 4$

$$\begin{aligned} V_c\left(0\right) &= 4 \\ Ae^{-\frac{1}{RC}\cdot 0} &= 4 \\ A &= 4 \end{aligned}$$

$$V_c\left(t\right) = 4e^{-\frac{1}{RC}t}$$

1.3 ג

$$
\begin{aligned}
E_c(t) &= \frac{1}{2}C\left(V(t)\right)^2 \\
&= \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 16\cdot e^{-\frac{2}{RC}t} \\
&= 8e^{-\frac{2}{RC}t}
\end{aligned}
$$

האנרגיה המתבזבזת בנגד:

$$
\begin{aligned}
E_R(t) &= \int_0^t I^2 R dt' \\
&= \int_0^t \frac{4e^{-\frac{2}{RC}t}}{R}\cdot R dt' \\
&= -4RCe^{-\frac{2}{RC}t}
\end{aligned}
$$

1.4 ד

האנרגיה תשאר בקבל ולא תצא ממנו לנצח.

2 שאלה 2

ניקח את שתי הנגדים ושני סלילים ונקבל:

$$
\begin{aligned}
L &= L_1 + L_2 \\
R &= \left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R}\right)^{-1} \\
&= \frac{R_1R_2}{R_1+R_2}
\end{aligned}
$$

נרשום משוואת המתחים ומוצאים תנאי התחלה

$$
\begin{aligned}
L\frac{\partial i}{\partial t} + Ri &= \delta(t) \\
L\int_{0^-}^{0^+}\frac{\partial i}{\partial t} + R\int_{0^-}^{0^+} i &= \int_{0^-}^{0^+}\delta(t) \\
L\left[i\left(0^+\right) - i\left(0^-\right)\right] + 0 &= 1 \\
i\left(0^+\right) &= \frac{1}{L}
\end{aligned}
$$

עובדים בזמן $t > 0^+$ אזי אפשר לרשום

$$
\begin{aligned}
L\frac{\partial i}{\partial t}+Ri &= 0\\
\frac{\partial i}{\partial t}+\frac{R}{L}i &= 0\\
i &= Ae^{-\frac{R}{L}t}\\
A &= \frac{1}{L}
\end{aligned}
$$

3 שאלה 3

3.1 א

נרשום משוואת המתחים:

$$
\begin{aligned}
V_c+V_R &= e_s\\
V_c+RC\frac{\partial V_c}{\partial t} &= e_s\\
\frac{\partial V_c}{\partial t}+\frac{V_c}{RC} &= \frac{1}{RC}e_s\\
\frac{\partial V_c}{\partial t}+\frac{V_c}{RC} &= \frac{30}{RC}\cos\left(2\pi\cdot 10^{-3}t\right)
\end{aligned}
$$

נפתור את ZIR כלומר פתרון הומוגיני:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial V_c}{\partial t}+\frac{V_c}{RC} &= 0\\
V_c &= Ae^{-\frac{1}{RC}t}
\end{aligned}
$$

כאשר ערך התחלתי $V(0)=1$ מקבלים $V_c=e^{-\frac{1}{RC}t}$
עכשיו ZSR, מקבלים בערך אותו דבר וה $\cos$ נותן פתרון פרטי $\cos+\sin$:

$$
\begin{aligned}
V_h &= Ae^{-\frac{1}{RC}t}\\
V_p &= B\cos(\omega t)+C\sin(\omega t)
\end{aligned}
$$

כאשר $\omega=2\pi\cdot 10^{-3}$. נציב פתרון פרטי במשוואה ונקבל אחרי הרבה אלגברה שממש אין לי חשק לכתוב אותה כי השעה כבר 2 בלילה ויש לי עוד 2 עבודות בית אחרות לעשות:

$$
\begin{aligned}
B &= \frac{30\omega\cdot 500}{500^2+\omega^2}\\
C &= \frac{30\cdot 500^2}{500^2+\omega^2}
\end{aligned}
$$

אזי $v_c = v_p + v_h$. מציבים בתנאי התחלה ומקבלים:

$$\begin{aligned} v_c &= Ae^{-\frac{1}{500}t} + \frac{30 \cdot 500}{500^2 + \omega^2}\left[500\cos(\omega t) + \omega \sin(\omega t)\right] \\ v_c(0) &= 0 \\ A &= -\frac{30 \cdot 500^2}{500^2 + \omega^2} \\ v_C &= \left[-\frac{30 \cdot 500^2}{500^2 + \omega^2}e^{-\frac{1}{500}t} + \frac{30 \cdot 500}{500^2 + \omega^2}\left[500\cos(\omega t) + \omega \sin(\omega t)\right]\right]u(t) + e^{-\frac{1}{RC}t} \end{aligned}$$

אזי גוזרים ומקבלים i(אתם מאמינים לי כאשר אני אומר לכם שאני יודע איך לעשות נגזרת נכון? אז אין צורך לעשות את זה כבר)

3.2 ב

נחזור על הבלגן שעשינו ומקבלים A שונה:

$$A = \frac{30 \cdot 500}{500^2 + \omega^2}\left[500\cos(\varphi) + \omega \sin(\varphi)\right]$$

אז אם נדרוש שהמקדם של האקספוננט שווה ל0 עבור $t > 0$ מקבלים:

$$\begin{aligned} 1 - \frac{30 \cdot 500}{500^2 + \omega^2}\left[500\cos(\varphi) + \omega \sin(\varphi)\right] &= 0 \\ 500\cos(\varphi) + \omega \sin(\varphi) &= \frac{500^2 + \omega^2}{30 \cdot 500} \\ \varphi &= 20.2^\circ \end{aligned}$$

4 שאלה 4

מכיוון שמשוואה היא ליניארית מסדר ראשון אפשר לבצע עליה פעולות של משוואה ליניארית(כפל בקבוע והזזה וגזירה)

$$\begin{aligned} y &= -1 \cdot v(t) + 3v(t-4) \\ &= -2\left(1 - e^{-t}\right)u(t) + 6\left(1 - e^{-t+4}\right)u(t-4) \\ &= -2u(t) - 2e^{-t}u(t) + 6u(t-4) + 6e^{-t+4}u(t-4) \end{aligned}$$

עם פולס אנחנו צריכים להוסיף נגזרת של הפונקציה המקורית

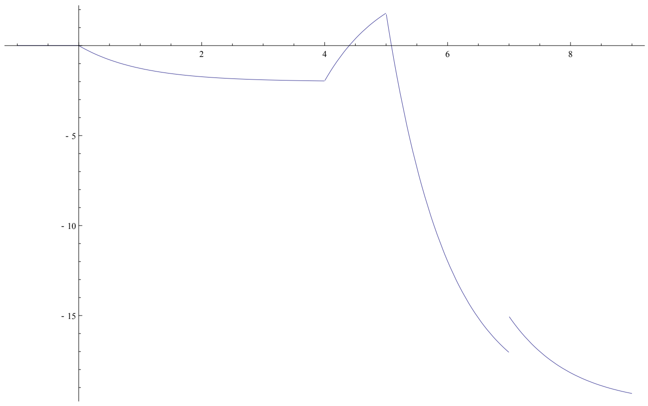
$$\begin{aligned} v'(t-7) &= \left(2\left(1 - e^{-t+7}\right)u(t-7)\right)' \\ &= 2 \cdot \left(1 - e^{-t+7}\right)\delta(t-7) + 2\left((-t+7)\,e^{-t+7}\right)u(t-7) \end{aligned}$$

פונק $\delta\left(t-7\right)$ חיה רק ב $t=\left(7^{-},7^{+}\right)$ ובתחום הזה היא מוכפלת ב 0 אזי מקבבלים:

$$v'\left(t-7\right)=2\left(-t+7\right)e^{-t+7}u\left(t-7\right)$$

אזי

$$y=-2u\left(t\right)-2e^{-t}u\left(t\right)+6u\left(t-4\right)+6e^{-t+4}u\left(t-4\right)+2\left(-t+7\right)e^{-t+7}u\left(t-7\right)$$



איור 1: ציור של הפתרון

5 שאלה 5

משוואת הנגד:

$$V=\begin{cases}2000i & -2<V<2\\ 500i+1.5 & V>2\\ 500i-1.5 & V<2\end{cases}$$

בתחום $-2<V<2$ מקבלים:

$$\begin{aligned}V_{c} &= V\\ &= 500\left(-C\frac{\partial V}{\partial t}\right)+1.5\\ \frac{\partial V}{\partial t}+200V &= 300\end{aligned}$$

נפתור ZIR:

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial t}+200V &= 0\\ V(0) &= 0\\ V(t) &= 5e^{-200t}\end{aligned}$$

עוברים ל ZSR:

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial t}+200v &= 300\\ V(0) &= 5\\ v(t) &= \left(A+Be^{-200t}\right)u(t)\end{aligned}$$

נציב בתנאי ההתחלה ונקבל $A=1.5$, עכשיו נציב בתנאי התחלה 0(כי זה ZSR) ומקבלים $B=-1.5$. אזי הפתרון הכללי הוא:

$$v(t)=\left(1.5-1.5e^{-200t}\right)u(t)+5e^{-200t}$$

הפונקציה מגיעה למתח של 2 ברגע $t_2=9.7\cdot10^{-3}sec$. במקרה הזה יש לנו נגד רגיל של $2K\Omega$ אזי:

$$\begin{aligned}V+RC\frac{\partial v}{dt} &= 0\\ V(t_2) &= 2\\ V(t-t_2) &= Ae^{-RC(t-t_2)}\\ A &= V(t_2)=2\\ V(t_2) &= 2e^{-RC(t-t_2)}\end{aligned}$$

אילה הם הפתרונות בתחומים המסומנים.