תרגיל מס.1

עפיף חלומה 302323001

26 בנובמבר 2009

1 שאלה 1

1.1 א

תורשתיות: לכל $X \subset A$ מתקיים שלכל i: $|X \cap S_i| \le |A \cap S_i| \le 1$.

תכונת ההחלפה: מכיוון ש $|X| < |A|$ ו $\{S_i\}_{i=1}^{k}$ הם חלוקה של A, קיים i כך ש $|A \cap S_i| > |X \cap S_i|$, אזי קיים $x \in (A \setminus X) \cap S_i$ כך ש $|(X \cup \{x\}) \cap S_i| \le |A \cap S_i| \le 1$

1.2 ב

דוגמה נגדית:
$S = \{A, B, C, D\}$ ו $I_1 = \{\emptyset, \{A\}, \{B\}, \{C\}, \{A, B\}, \{A, C\}\}$ ו $I_2 = \{\emptyset, \{A\}, \{B\}, \{C\}, \{A, B\}, \{B, C\}\}$
אזי $I = \{\emptyset, \{A\}, \{B\}, \{C\}, \{A, B\}\}$ שזה לא מטרואיד כי הוא לא מקיים את תכונת ההחלפה בין האיברים $\{A, B\}, \{C\}$

1.3 ג

תורשתיות: יהי $A = X_1 \cup X_2$ ו $B \subseteq A$. נסמן $A_1 = A \cap X_1, A_2 = A \cap X_2$ ו $B_1 = B \cap X_1, B_2 = B \cap X_2$ אזי $B_1 \subseteq A_1 \subseteq X_1, B_2 \subseteq A_2 \subseteq X_2$, אזי $B_1 \in I_1, B_2 \in I_2$ כלומר $B_1 \cup B_2 \in I_1 \cup I_2$

תכונת ההחלפה: נניח כי S_1, S_2 חלוקה של S, ו I_1', I_2' הם הקבוצות הבלתי תלויות המתאימות להם. רואים כי $M' = \left(S_1 \cup S_2, \overbrace{\{A \cup B | A \in I_1, B \in I_2\}}^{I''}\right)$ הוא מטר-ואיד. אזי בונים פונק' מ $f : S_1 \cup S_2 \to S$ שמעתיק כל איבר לעותק המקורי שלו. אזי $(f(S), f(I''))$ הוא בדיוק הדבר שרוצים להוכיח שהוא מטרואיד. מהמשפט שנתון לנו עבור f מקבלים כי זה באמת מטרואיד.

2 שאלה 2

טענת עזר: אם A, B מקסימליים אזי $|A| = |B|$.
נניח בשלילה בלי הגבלת הכלליות כי $|A| > |B|$ אזי קיים $a \in A \setminus B$ כך ש $\{a\} \cup B \in I$ אבל $w(\{a\} \cup B) = w(a) + w(b) > w(b)$ בסתירה לזה כי זה מקסימאלי.
משל

כעת נניח כי A, B הם שני קבוצות מקסימליות שונות, לפי טענת העזר $|A| = |B|$.
נסמן ב s האיבר המינימאלי שנמצא בA או B(אבל לא בשניהם) , בלי הגבלת הכלליות

$A' \cup \{b\} \in I$ כך ש $b \in B$ אזי קיים $|B| > |A'|$ מכיבבן ש $A' = A \backslash \{s\}$ אזי נסמן $s \in A$,
מכיוון ש $w(b) > w(a)$ מתקיים כי $|A' \cup \{b\}| > |A|$ בסתירה לזה ש A מקסימאלית

3 שאלה 3

3.1 א

נמיין את המסימות לפי סדר זמן סיום. אפשר לעשות את זה ב $O(|A|)$ דאך Counter Sort(אפשר להשתמש בזה כי יודעים כי את הערך המינימאלי והמקסימאלי של הdeadlines).
עכשיו נרוץ על המערך שלנו ונבדוק אם ה deadline של מסימה i הוא יותר גדול מאשר הריבוע שהיא משובצת בו. אם כן אז אי אפשר לשבץ.

3.2 ב

4 שאלה 4

4.1 א

4.1.1 צ"ל כי אם הווקטורים של העמודות בלתי תלויים ליניארית אזי אין מעגלים

נניח בשלילה כי קיים גרף בעל מטריצה שעמודותיה בלתי תלויות ליניארית ויש בו מעגל.
בכל מעגל קיים מעגל פשוט, אזי נסמן את הקשתות של המעגל הזה באופן הבא:
$(v_1, v_2), (v_2, v_3) \dots (v_{n-1}, v_n), (v_n, v_1)$
נסמן את העמודות המתאימות לקשת (v_i, v_{i+1}) ב c_i[1](מקרה פרטי נסמן (v_n, v_1) ב c_n) ואת האיבר ה t בעמודה נסמן ב c_i^t. אנחנו יודעים כי בכלעמודה יש 2 איברים שהם 1 וכל השאר שווה לאפס(כי לצלע יש רק שתי קצבות) אזי הצירוף הליניארי $\sum_{i=1}^n c_i$ נותן:

$$\sum_{i=1}^{n} c_i = \begin{pmatrix} c_1^1 + c_n^1 \\ c_1^2 + c_2^2 \\ \vdots \\ c_{n-1}^n + c_{n-1}^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

הביטוי שווה אפס כי כך בחרנו את העמודות.
אזי קיבלנו שהעמודון $\{c_i\}_{i=1}^n$ הם תלויות ליניאריות, בסתירה לנתון. אזי לא מתקיים שגרף בעל מטריצה שעמודותיה בלתי תלויות ליניארית יש בו מעגל אזי אם הווקטורים של העמודות בלתי תלויים ליניארית, אין מעגלים.

4.1.2 צ"ל כי ווקטורי העמודות של גרף חסר מעגלים הם בלתי תלויים ליניארית

נניח בשלילה כי העמודות הם כן תלויים ליניארית
אזי כלומר קיימים $\alpha_1 \dots \alpha_n$ שלא כולם שווים לאפס כך ש $\alpha_1 v_1 \dots \alpha_n v_n = 0$.
מכיוון שאנחנו עובדים ב F_2 מתקיים כי $\alpha_i \in (0,1)$. נבחור קבוצה $A = \{v_i\}$ כך ש $\alpha_i \neq 0$. הצירוף הליניארי $\sum_{v \in V} v = 0$(כי זה אותו ביטוי שהיה מקודם אחרי השמטת האיברים המוכפלים באפס).
נסמן האיברים של A ב $e_1, e_2 \dots e_k$ אזי

[1] נניח שהשורות מסודרים לפי המספרים שנתננו לקודקודים מקודם כדי שתהיה משמעות חד-חד ערכית לאיבר בשורה

$$\sum_{i=1}^{k} e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

זה אומר שאם נספור הווקטורים שיש להם 1בשורה מסויימת נקבל מספר זוגי(כי לפי הגדרת החיבור ב F_2 $n \bmod 2 = 0$)

אם הדרגה של כל קודקוד בתת גרף הזה היא זוגית אזי יש מעגל בגרף[2].

4.2 ב

4.2.1 צ"ל כי תת קבוצה של עמודות המטריצה הם קבוצה בלתי תלויה מקסימאלית אם הצלעות המתאימים הם עץ פורש

נניח בשלילה כי זה לא מתקיים, כלומר הצלעות $E' \subset E$ לא מהווים עץ פורש. אזי קיימת קבוצת צלעות $E'' \subseteq E$ כך ש $E' \cap E'' = \emptyset, |E''| > 0$ כך ש $E'' \cup E'$ מהווה עץ פורש. הוכחנו מקודם שאם אין מעגלים בגרף העמודות הן בלתי תלויות ליניארית וקיימות קבוצות V', V'' המתאימות ל$E' \cap E''$. רואים כי $|V'' \cup V'| > |V'|$ בסתירה לזה שV' היא קבוצה בלתי תלויה מקסימאלית.

4.2.2 צ"ל כי אם צלעות של גרף מהווים עץ פורש אזי העמודות המתאימים מהווים קבוצה בלתי תלויה מקסימאלית

נניח בשלילה שזה לא מתקיים, כלומר קבוצת הווקטורים V' היא לא מקסימאלית, אזי קיימת קבוצה V'' כך ש $V'' \cap V' \neq 0$ וגם $|V''| > 0$כך ש $V'' \cup V'$ מהווים קבוצה בלתי תלויה ליניארית מקסימאלית. יש קבוצות של צלעים E', E'' המתאימות לV', V'' ומכיוון ש$V' \cap V''$ בלתי תלוי ליניארית מתקיים כי $E' \cap E''$ חסר מעגלים. $|E' \cap E''| > |E'|$ בסתירה לזה ש E' גרף פורש.

4.3 ג

הוכחנו בכיתה כי קבוצת ווקטורים בלתי תלוייה ליניארית היא מטרואיד. מכיוון שכל עמודה(ווקטור) במטריצה שלנו מהווה צלע, אז האלג החמדן שפועל על המטרואיד הזה ימצא את הקבוצה הב"ת המקסימאלית, שהוכחנו מקודם שהיא עץ פורש, ויודעים שהאלג' החמדן מצליח למצא את הקבוצה המקסימאלית. מכל זה נובע שאלג קרו-סקאל(שהוא חמדן) מוצא את העץ הפורש המקסימאלי.

4.4 ב

נסמן $M = \max_{e \in E} w(e)$ ואז נחלף את הפונק' w ב $w' = M + 1 - w(e)$. קל לראות שהסידור של האיברים בפונק החדשה הוא בדיוק הפוך לסידור המקורי. אזי אם קרוסקאל בוחר את הערך המקסימאלי(שכבר הוכחנו שזה עובד) ב w' זה זהה לבחור את הערך המינימאלי ב w. משל.

[2]משפט מתורת הגרפים שלמדנו בדיסקרטית