

תרגיל 7 - מתמטיקה דיסקרטית

(1) n סקוטים נכנסים לבר. היות וחורף, לכולם מעילים טובים ומחממים. כמובן שבסוף בערב כל החבורה שיכורה מכדי שיזהו כל אחד את מעילו, ולכן כל אחד לוקח מעיל באקראי. נסמן ב- F_n את מספר האפשרויות ללקיחת המעילים (שהוא כמובן $n!$) וב- D_n את מספר האפשרויות בהן אף אחד לא לקח את המעיל שאיתו בא.

(א) הוכיחו שמתקיים יחס הנסיגה $D_{n+1} = n(D_n + D_{n-1})$.

(ב) הוכיחו שמתקיים יחס הנסיגה $F_{n+1} = n(F_n + F_{n-1})$.

(ג) הסבירו איך בכל זאת קורה ש- $D_n \neq F_n$.

(ד) ידוע שמתקיים יחס הנסיגה $F_n = nF_{n-1}$. הוכיחו שמתקיים גם יחס הנסיגה $D_n = nD_{n-1} + (-1)^n$.

(2) נסמן ב- T_n את מספר הדרכים לחלק מצולע בעל $n+2$ צלעות ל- n משולשים בעזרת אלכסונים שלא נחתכים.

(א) הראו ש- $T_1 = 1 = C_1, T_2 = 2 = C_2$ (כאשר C_n הוא מספר קטלן ה- n).

(ב) הראו שבהגדרת $T_0 = 1$ מתקיים יחס הנסיגה $T_n = \sum_{k=1}^n T_{k-1}T_{n-k}$ והסיקו ש- $T_n = C_n$ לכל n טבעי.

(3) בהיותו בן 30 נפטר סבו של חיימק'ה העצלן והוריש לו הון של 10 מיליון שקלים. היות וחיימק'ה לא עבד, לא היה לו גרוש בכיסו בעת קבלת הירושה. הסבא הפקיד את הכסף בתוכנית בנקאית מתחדשת שנפתחת רק בתחילת כל שנה, ונותנת ריבית של 2% לשנה (מה לעשות - מיתון...). חיימק'ה מעריך את הוצאותיו השנתיות ב-150 אלף ש"ח, והוא מוציא סכום זה מהתוכנית בתחילת כל שנה ומאפשר לכל השאר (קרן+ריבית) להתחדש - והוא יכול לעשות זאת רק אחרי שנה (שכן הכסף כבר סגור). תחת ההנחה שאין לחיימק'ה הכנסות נוספות (עצלן כבר אמרנו?), שתנאים אלה לא ישתנו במשך כל חייו של חיימק'ה ושתוחלת החיים הממוצעת היא 80 שנה, כמה כסף יוריש חיימק'ה לצאצאיו על ערש דווי? אין צורך לחשב מפורשות את המספר המתקבל, ויספיק ביטוי.

(4) (א) יהיו n ו- d שני מספרים טבעיים $2 \leq d$. הוכיחו שקיימות שתי חזקות שונות של n שהפרשן מתחלק ב- d .

(ב) n בנים ו- n בנות יושבים על שולחן עגול ומול כל אחד יש מסך טלוויזיה. על k מבין המסכים מוקרנת אופרת הסבון המפורסמת "אנחלינה" ועל $2n-k$ המסכים הנותרים מוקרנת תחרות ההיאבקות של ה- WWF . הבנים רוצים לראות את "אנחלינה" והבנות רוצות לצפות בקרב הגמר החשוב של גביע ה- WWF . הראו שניתן לסובב את השולחן כך שלפחות n מהאנשים יוכלו לצפות במה שחפצה נפשם.

(ג) n אנשים מגיעים למסיבת קוקטייל, ואילו ביניהם שהם מכרים מברכים זה את זה בלחיצת יד. אף זוג אינו לוחץ ידיים יותר מפעם אחת במהלך הערב. הוכיחו שבתום המסיבה יש שני אנשים שלחצו אותו מספר של ידיים.