תרגיל מס.1

עפיף חלומה 302323001

18 במרץ 2009

1 שאלה 1

1.1 $\mathbb{F}$ שדה אזי:

1.1.1 צ"ל כי $a \cdot x = a \Rightarrow x = 1$ וגם $a \neq 0$

נתון כי $a \neq 0$ אזי קיים הפיך כפלי a^{-1}. כופלים המשוואה הנתונה בa^{-1} משמאל.

$$\begin{aligned} a \cdot x &= a \\ \underbrace{a^{-1} \cdot a}_{1} \cdot x &= \underbrace{a^{-1} \cdot a}_{1} \\ 1 \cdot x &= 1 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

הערה: $1 \cdot x = x$ כי 1 הוא האיבר הנוטרלי לכפל.

1.1.2 צ"ל כי $x^3 - y^3 = (x-y)\left(x^2+xy+y^2\right)$

נשתמש בחוק הפילוג על צד שמאלי של המשוואה

$$\begin{aligned} (x-y)\left(x^2+xy+y^2\right) &\overset{\text{פילוג}}{=} x \cdot \left(x^2+xy+y^2\right) - y \cdot \left(x^2+xy+y^2\right) \\ &\overset{\text{פילוג}}{=} x \cdot x^2 + x \cdot xy + x \cdot y^2 - y \cdot x^2 - y \cdot xy - y \cdot y^2 \\ &= x^3 + x^2y + x \cdot y^2 - x^2y - xy^2 - y^3 \\ &\overset{\text{חילוף}}{=} x^3 + x^2y - x^2y + x \cdot y^2 - xy^2 - y^3 \\ &\overset{\text{קיבוץ}}{=} x^3 + \left(x^2y - x^2y\right) + \left(x \cdot y^2 - xy^2\right) - y^3 \\ &\overset{\text{הפיך חיבורי}}{=} x^3 + 0 + 0 - y^3 \\ &\overset{\text{נוטרלי לחיבור}}{=} x^3 - y^3 \end{aligned}$$

1.1.3 צ"ל כי $b,c \neq 0 \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$

$$\begin{aligned} \frac{a \cdot c}{b \cdot c} &= a \cdot c\,(b \cdot c)^{-1} \\ &= a \cdot c \cdot b^{-1} \cdot c^{-1} \\ &= a \cdot b^{-1} c \cdot c^{-1} \\ &= a \cdot b^{-1} \cdot 1 \\ &= a \cdot b^{-1} \\ &= \frac{a}{b} \end{aligned}$$

1.1.4 צ"ל כי $b,c \neq 0 \Rightarrow \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$

$$\begin{aligned} \frac{ad+bc}{bd} &= (ad+bc) \cdot (bd)^{-1} \\ &= (ad+bc) \cdot b^{-1} \cdot d^{-1} \\ &= ad \cdot b^{-1} \cdot d^{-1} + bc \cdot b^{-1} \cdot d^{-1} \\ &= ad \cdot b^{-1} \cdot d^{-1} + bc \cdot b^{-1} \cdot d^{-1} \\ &= a \cdot b^{-1} \cdot d \cdot d^{-1} + c \cdot b \cdot b^{-1} \cdot d^{-1} \\ &= a \cdot b^{-1} \cdot 1 + c \cdot 1 \cdot d^{-1} \\ &= a \cdot b^{-1} + c \cdot d^{-1} \\ &= \frac{a}{b} + \frac{c}{d} \end{aligned}$$

1.2 $\mathbb{F}$ שדה סדור

1.2.1 צ"ל $-b < -a \Leftrightarrow a < b$

מוכיחים כי $-b < -a \Rightarrow a < b$: נתון כי $-b < -a$ כלומר

$$\begin{aligned} ((-a) - (-b)) &\in P \\ (-a + b) &\in P \\ (b - a) &\in P \end{aligned}$$

כלומר

$$a < b$$

מוכיחים כי $-b < -a \Leftarrow a < b$: פשוט הולכים בכיוון הפוך ממה שעשינו קודם. אם $a < b$ אזי

$$\begin{aligned}(b-a) &\in P\\ (-a+b) &\in P\\ (-a+(-(-b))) &\in P\\ ((-a)-(-b)) &\in P\end{aligned}$$

כלומר $-b<-a$

1.2.2 צ"ל כי $a<b\wedge c>d\Rightarrow a-c<b-d$

נתון כי $a<b\wedge c>d$ **אזי** $b-a\in P\wedge c-d\in P$ **לכן גם** $(b-a)+(c-d)\in P$

$$\begin{aligned}(b-a)+(c-d) &\in P\\ b-a+c-d &\in P\\ (b-d)-(-(c-a)) &\in P\\ (b-d)-(a-c) &\in P\end{aligned}$$

כלומר

$$(b-d)>(a-c)$$

1.2.3 צ"ל כי $a<b\wedge c>0\Rightarrow ac<bc$

נתון כי $b-a\in P\wedge c\in P$ **לכן** $c\cdot(b-a)\in P$

$$\begin{aligned}c\cdot(b-a) &\in P\\ cb-ca &\in P\\ bc-ac &\in P\end{aligned}$$

כלומר $ac<bc$

1.2.4 צ"ל כי $-1<a<1\Leftrightarrow a^2<1$

נוכיח כי $-1<a<1\Rightarrow a^2<1$ **נתון כי** $a+1\in P\wedge 1-a\in P$ **לכן** $(a+1)(1-a)\in P$

$$\begin{aligned}(a+1)(1-a) &\in P\\ a+a(-a)+1-a &\in P\\ 1-a^2+a-a &\in P\\ 1-a^2+0 &\in P\\ 1-a^2 &\in P\end{aligned}$$

נוכיח כי $a^2 < 1 \Leftarrow -1 < a < 1$ נתון כי $a^2 < 1$ אזי $1 - a^2 \in P$

$$\begin{aligned}1-a^2 &\in P\\1-a^2+0 &\in P\\1-a^2+(a-a) &\in P\\1+a-a^2-a &\in P\\(a+1)(1-a) &\in P\end{aligned}$$

כלומר $-1 < a < 1 \Rightarrow a > -1 \wedge 1 > a$

1.2.5 צ"ל כי $0 \leq a < b \wedge 0 \leq c < d \Rightarrow ac < bd$

נחלק למקרים:

1. $a = 0$

צ"ל כי $0 \cdot c < bd$

נתון $b > 0 \wedge d > 0$ אזי $b \in P \wedge d \in P$ לכן $bd \in P$

$$\begin{aligned}bd &\in P\\bd-0 &\in P\end{aligned}$$

$$bd > 0$$

2. $b = 0$

צ"ל כי $0 \cdot c < bd$

נתון $b > 0 \wedge d > 0$ אזי $b \in P \wedge d \in P$ לכן $bd \in P$

$$\begin{aligned}bd &\in P\\bd-0 &\in P\end{aligned}$$

$$bd > 0$$

3. $a \neq 0 \wedge b \neq 0$

נתון $0 < a < b \wedge 0 < c < d$ כלומר $(a \in P) \wedge (c \in P) \wedge (b - a \in P) \wedge$ $(d - c \in P)$ אזי $bd - ac \in P$

$$\begin{aligned}(b-a)(d-c) &\in P\\ bd-bc-ad+ac &\in P\\ (bd+ac)-(bc+ad) &\in P\end{aligned}$$

כלומר $bd+ac>bc+ad$ רוצים להוכיח כי $bc+ad>ac+ac$ אזי מספיק להוכיח כי $(bc>ac)\wedge(ad>ac)$

(א) צ"ל כי $bc>ac$ כלומר $bc-ac\in P$.

נתון כי $b-a\in P$ וגם $c\in P$ אזי גם $c(b-a)\in P$

$$\begin{aligned}c(b-a) &\in P\\ bc-ac &\in P\end{aligned}$$

כלומר $bc>ac$

(ב) צ"ל כי $ad>ac$ כלומר $ad-ac\in P$.

נתון כי $d-c\in P$ וגם $a\in P$ אזי גם $a(d-c)\in P$

$$\begin{aligned}a(d-c) &\in P\\ ad-ac &\in P\end{aligned}$$

כלומר $ad>ac$

אז קיבלנו כי $(ad-ac\in P)\wedge(bc-ac\in P)$ וראינו מקודם כי $(bd+ac)-(bc+ad)\in P$ לכן גם $(bd+ac)-(bc+ad)+(ad-ac)+(bc-ac)\in P$ אזי

$$\begin{aligned}(bd+ac)-(bc+ad)+(ad-ac)+(bc-ac) &\in P\\ (bd+ac)-(bc+ad)+(ad-ac)+(bc-ac) &\in P\\ bd+ac-bc-ad+ad-ac+bc-ac &\in P\\ bd+(ac-ac)+(ad-ad)+(bc-bc)-ac &\in P\\ bd-ac &\in P\end{aligned}$$

כלומר $bd>ac$

1.2.6 צ"ל כי $0\le a<b\Rightarrow a^2<b^2$

הוכחנו קודם כי $0\le a<b\wedge 0\le c<d\Rightarrow ac<bd$ אזי מציבים $c=a$ ו $d=b$ ומקבלים $a^2<b^2$

2 שאלה 2

2.1 צ"ל כי $|x+y+z| \le |x|+|y|+|z|$

$$\begin{aligned} |x+y+z| &= |(x+y)+z| \\ &\le |x+y|+|z| \\ &\le |x|+|y|+|z| \end{aligned}$$

2.2 הוכחות על $\max(x,y)$ $\min(x,y)$

1. צ"ל כי $\max(x,y) = \frac{x+y+|y-x|}{2}$

   (א) נבדוק מקרה של $x=y$: $\max(x,x) = \frac{2x+0}{2} = x$ ✓

   (ב) נניח כי $x>y$ אזי: $\frac{x+y+|y-x|}{2} = \frac{x+y+-(y-x)}{2} = \frac{x+y-y+x}{2} = \frac{2x}{2} = x$ ✓

   (ג) נניח כי $y>x$ אזי $\frac{x+y+|y-x|}{2} = \frac{x+y+y-x}{2} = \frac{2y}{2} = y$ ✓

2. פעולות בינאריות

   (א) אסוציאטיבית אבל לא קומוטטיבית:

   (ב) קומוטטיבית אבל לא אסוציאטיבית: חזקה:

3 אינדוקציה

.1

$$1+r+r^2+\cdots+r^n = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$$

בדיקה עבור $n=0$

$$\begin{aligned} 1 &\stackrel{?}{=} \frac{1-r}{1-r} \\ 1 &= 1 \end{aligned}$$

נניח כי לכל $n>0$ מתקיים

$$1+r+r^2+\cdots+r^n = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$$

נוכיח עבור $n+1$:

$$
\begin{aligned}
1 + r + \cdots + r^n + r^{n+1} &= \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} + r^{n+1} \\
&= \frac{1 - r^{n+1} + r^{n+1} - r^{n+2}}{1 - r} \\
&= \frac{1 - r^{n+2}}{1 - r} \checkmark
\end{aligned}
$$

.2

$$
\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k \right)^2
$$

(א) בדיקה עבור $n = 1$

(ב)

$$
\begin{aligned}
1^3 &\stackrel{?}{=} 1^2 \\
1 &= 1
\end{aligned}
$$

(ג) נניח כי זה מתקיים עבור n ונוכיח עבור $n+1$

(ד)

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k^3 &= \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3 \\
&= \left(\sum_{k=1}^{n} k \right)^2 + (n+1)^3 \\
&= ???
\end{aligned}
$$

4 תורת הקבוצות

1. יותר קל לרשום מה לא נכון:
   - $C \in D$
   - $C \in E$
   - $B \subseteq C$
   - $B \subseteq E$
   - $D \subseteq E$
2. גם יותר קל לכתוב רק מה שלא נכון
   - $B \cup \{B\} = C$

- $D \cup \{C\} = D$
- $D \cup \{A\} = E$
- $B \cap C = B$
- $D \cap E = D$
- $E \setminus D = D$