תרגיל מס.1

עפיף חלומה 302323001

26 בנובמבר 2009

1 שאלה 1

עבור מחרוזת s נבנה מטריצה $A\left[\operatorname{len}\left(s\right),\operatorname{len}\left(s\right)\right]$ ומסמנים $s.\operatorname{substr}\left[i,j\right]$ בתת מחרוזת המתחילה ב i ומסתיימת בj. אזי מאתחלים את המערך A באופן הבא:

$$A\left[i,j\right]=\begin{cases}1 & s.\operatorname{substr}\left[i,j\right]\in L\\ \infty & \text{else}\end{cases}$$

עבור כל משפצת במטריצה(מתחילים במשפצות היותר קרובות לאלכסון) מציבים $A\left[i,j\right]=\min_{t\in(i,j)}\left(A\left[i,j\right],A\left[i,t\right]+A\left[t,j\right]\right)$ אזי מקבלים במשפצת $A\left[i,j\right]$ את האורך המינימאלי שצריך בשביל לבנות את s או ∞ אם אי אפשר.

לחזעיפטם 1 אלג הפתרון

---

function findmin(s,L) {
–A=Matrix(len(s),len(s))
–$\forall\left(i,j\right)\in\left[0,len\left(s\right)\right]\times\left[0,len\left(s\right)\right]:\ A\left[i,j\right]=\begin{cases}1 & s.substr\left[i,j\right]\in L\\ \infty & else\end{cases}$
–for$j\in\left[0,\operatorname{len}\left(s\right)\right]$ {
—-for $i\in\left[i,\operatorname{len}\left(s\right)\right]$ {
—–for $t\in\left(i,j\right)$ {
——–A$[i,j]$ =min($A\left[i,j\right],A\left[i,t\right]+A\left[t+1,j\right]$)
—–}
—-}
–}
–return $A\left[0,\operatorname{len}\left(s\right)\right]$
}

זמן ריצה:

נסמן $l=\operatorname{len}\left(s\right)$

$$\begin{aligned}T\left(l,\left|L\right|\right) &= \mathcal{O}\left(l^{2}\cdot\left|L\right|+\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=i}^{l}\left(j-i\right)\right)\\ &= \mathcal{O}\left(l^{2}\left|L\right|+l^{3}\right)\end{aligned}$$

רוצים להוכיח כי אם $A\left[i,j\right]=\min_{i\in(i,j)}\left(A\left[i,j\right],A\left[i,t\right]+A\left[t+1,j\right]\right)$ עבור תנאים התחלתיים שציננו אזי $A\left[0,l\right]$ הוא מספר תתי המחרוזות המינימאלי שממנו ניתן לבנות את המחרוזת.

נוכיח באינדוקציה עבור $k=j-i$(אורך המחרוזת)

עבור $l=0$ הטענה מידית, או ש$A\left[i,i\right]=1$ או $A\left[i,i\right]=\infty$

נניח שהטענה נכונה עבור $k=l-1$ ונוכיח עבור $k=l$:

נניח בשלילה שקיים צירוף יותר קצר בשביל לבנות את המחרוזת מאשר $\min_{i\in(0,l)}\left(A\left[i,j\right],A\left[i,t\right]+A\left[t+1,j\right]\right)$

אם $A\left[i,j\right]$ הוא האיבר הקטן ביותר אז הוא נמצא ב L אזי ברור שהתשובה היא 1, אי אפשר לקבל ערך קטן מ1, בסתירה לטענה.

אם $A\left[0,t\right]+A\left[t+1,l\right]$ מסויים נבחר אזי אנחנו יודעים כי שתי תתי המחרוזת $s\left[0,t\right],s\left[t+1,l\right]$ הם אופטימאליות, ויודעים כי הצירוף של כל שתי תתי מחרוזת אחרים יהיה יותר גדול, אזי הצירוף זה הוא המינימאלי, בסתירה לזה שיש מינימאלי אחר.

2 שאלה 2

לחזעיפסם 2 אלג הפתרון

A=Array(1,S);
for i in $[1,S]$:
–A$[i]=\infty$
for i in $\left(\overbrace{v_1}^{1},v_2\right)$:
–A$[i]=i$
for $\forall v_i$:
–A$[v_i]=1$
for(i=1;i<=S;i++)
–if(A$[i]!=\infty$): continue #this only happens when there exists a v_i or $1\leq i\leq v_2$
–for$t$ in $[1,i-1]$:
—-A$[i]=\min\left(A\left[i\right],A\left[i-t\right]+A\left[t\right]\right)$

זמן ריצה:

$$\begin{aligned}T\left(n\right)&=\mathcal{O}\left(S+i+\left(v_2-1\right)+\sum_{i=1}^{s}i\right)\\&=\mathcal{O}\left(S+i^2\right)\end{aligned}$$

אני הנחתי כי v_2 הוא קבוע ואין צורך להתחיחס אליו

הוכחה שזה עובד:

רוצים להוכיח כי נוסחת הנסיגה: $\mathrm{A}[i]=\min\left(A\left[i\right],A\left[i-t\right]+A\left[t\right]\right)$ נותנת את הדרך המינימאלית להחזיר כסף עבור תנאי התחלה שקבענו.

נוכיח באינדוקציה:

בדיקה עבור $i=1$: זה נכון כי תמיד יש לנו מטבע בעל ערך 1 ומחזירים את הכדף הזה דרך המטבע הזה

נניח כי זה מתקיים עבור $S-1$ ונוכיח עבור S:

אם כל התווים $A[1\dots S-1]$ מכילים את הערכים המינימאליים אזי זה טריוויאלי שהאיחוד של המינימאליים זה גם מינימאלי(בעצם היינו יכולים לרשום פו אותו פתרון של שאלה קודמת)

3 שאלה 3

בונים מטריצה באורך $[len(s_1), len(s_2)]$ ומאתחלים את השורה הראשונה והעמודה הראשונה ל0. נסמן את המחרוזת ההפוכה של s_1 ב s_1' וההפוכה של s_2 ב s_2'. ואז עוברים על כל השורות והעמודות(עוברים על השורה ה i אחר כך העמודה ה i אחר כך השורה ה $i+1$ ואחר כך העמודה ה $i+2$...) וממלאים את המערך לפי הנוסחה הזו:

$$c[i,j]=\begin{cases}0 & i=0 \text{ or } j=0\\ c[i-1,j-1] & s_1'[i]=s_2'[j]\\ \max(c[i-1,j],c[i,j-1]) & s_1'[i]\neq s_2'[j]\end{cases}$$

ואז מקבלים אורך התת מחרוזת המקסימאלית בתא $c[len(s_1), len(s_2)]$.

בשביל שנוכל לקבל גם את התת מחרוזת עצמה נוסיף לכל תא את האינדקסים של הזא שממנו בא הערך(למעלה, שמאלה או אלכסוני) ואז יהיה לנו בקצה המטריצה ההתחלה של מסילה שעוברת של כל הותיות שהם בתת מחרוזת(כאשר רק סופרים האותיות שבהם הלכנו באלכסון)

ניתוח זמן ריצה:

האלג' עובר על כל תא במערך אזי זמן הריצה היא $\Theta(n\cdot m)$

הוכחת נכונות:

נוכיח את זה באינדוקציה עבור $z=\max(i,j)$.

עבור $z=1$ אזי ברור שאם שתי האותיות שוות אז הם בתת מחרוזת ואם הם לא שוות אז הם לא בתת מחרוזת, זה בדיוק מה שהאלג שלנו עושה.

נניח נכונות האלג עבור $z=\min(len(s_1), len(s_2))-1$ ונוכיח אותו עבור $z=\min(len(s_1), len(s_2))$.

אם $s_1'[z]=s_2'[z]$ אזי הוספת האות הזה לתת מחרוזת המקסימלית של המילים שלא היתה בהם האות הזה טריוויאלי נותן לנו המקסימום.

אם לא אזי צריך לבחור אם להוסיף אחת מהאותיות, ברור שאם שתי התת מחר-וזות משמאל ומימין הן מקסימליות אזי הוספת אות זה לתת מחרוזת המקסימלית זה גם מקסימאלי.

4 שאלה 4

ממינים את כל המסימות לפי זמן התחלה שלהם ומסמנים כל מסימה ב t_{index}

1. $i=0$
2. אם t_i קיים אזי:

   (א) מסמנים ב t_{last} את המסימה בעלת s_{last} מקסימלי כך ש $f_{last}<s_i$ (כלומר המסימה האחרונה שלא מתנגשת אם t_i)

   (ב) אם t_{last} לא קיים אזי

      i. $totalWeight(t_i)=w_i$

   (ג) אחרת

i. לכל $t_{intersect}$ כך ש $t_{intersect}$ ו t_i מתנגשים(צריכים לפעול באותו זמן) ו $s_{intersect} < s_i$:

A. $totalWeight\left(t_i\right) = \min\left(totalWeight\left(t_i\right), totalWeight\left(t_{intersect}\right), totalWeight\left(t_{last}\right) + w_i\right)$

(ד) $i++$

(ה) תחזור ל 2

3. תחזיר $totalWeight\left(t_{i-1}\right)$

סיבוכיות זמן ריצה של זה היא $O\left(n^2\right)$(רואים את זה מהלולאות)
הוכחה שהאלג עובד:
נוכיח באינדוקציה עבור n:
אם $n = 1$ אזי האלג יקח את המסימה הזו וזה הוא המשקל המקסימאלי
נניח שהאלג' עובד עבור $n - 1$ מסימות ונוכיח עבור n:

צריכים לבחור לקחת את המסימה החדשה או לא. אם אנחנו נבחור במסימה החדשה אזי צריכים לבטל מספר מסימות שחותכות את המסימה הזו, אזי המשקל שאנחנו בוחרים הוא $totalWeight\left(t_{\text{last before intersect}}\right) + w_n$

אם אנחנו בוחרים לא לבצע את המסימה הזו אזי המשקל הוא שמור במסימס האחרונה שכן טיפלנו בה, כלומר $totalWeight\left(t_{\text{last intersect}}\right)$

מכיוון שיש רק שני המקרים האלה ואנחנו מחזירים את המקסימום ביניהם אזי האלג שלנו הוא נכון. משל.