תרגיל מס.5

עפיף חלומה 302323001

10 בדצמבר 2009

1 שאלה 1

$$
\begin{aligned}
v_\phi &= \sqrt{gH} \\
n &= \frac{c}{v_\phi} \\
n &\sim \frac{1}{\sqrt{H}}
\end{aligned}
$$

1.1 א

לפי חוק סנל:

$$
\begin{aligned}
\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} &= \frac{n_2}{n_1} \\
\sin\theta_2 &= \sin\theta_2\frac{n_1}{n_2} = \sqrt{\frac{H_2}{H_1}}\sin\theta_1 \\
\theta_2 &= 56.4^\circ \\
\sin\theta_3 &= \sin\theta_2\sqrt{\frac{H_3}{H_2}} \\
\theta_3 &= 42^\circ
\end{aligned}
$$

1.2 ב

ע"ם ש $\theta_3 = \frac{\pi}{2}$:

$$
\begin{aligned}
\sin\theta_1 &= \sqrt{\frac{H_1}{H_2}}\sqrt{\frac{H_2}{H_3}}\sin\theta_3 \\
&= \sqrt{\frac{H_1}{H_3}}\sin\theta_3 \\
\sin\theta_1 &= \sqrt{\frac{H_1}{H_3}}\cdot 1 \\
\theta_1 &= 48.6^\circ
\end{aligned}
$$

1.3 ג

$$\begin{aligned} v_\phi &= \sqrt{gH} = \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda\omega}{2\pi} \\ v_\phi &= \frac{c}{n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{2\omega}{2\pi} &= \frac{c}{n} \sim \sqrt{H} \\ \frac{\lambda_2}{\lambda_1} &= \sqrt{\frac{H_2}{H_1}} \end{aligned}$$

לכן

$$\begin{aligned} \lambda_2 &= \frac{5}{3}\lambda_1 = 83.3cm \\ \lambda_3 &= \frac{4}{3}\lambda_1 = 66.7cm \end{aligned}$$

1.4 ד

$$\begin{aligned} R_{12} &= \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} = \frac{1}{4} \\ T_{12} &= \frac{2n_1}{n_1 + n_2} = \frac{5}{4} \\ R_{23} &= \frac{n_2 - n_3}{n_2 + n_3} = -\frac{1}{9} \\ T_{23} &= \frac{2n_2}{n_2 + n_3} = \frac{8}{9} \end{aligned}$$

1.5 ה

$$\begin{aligned} \psi_1 &= A\cos(\omega t - k_1 x) \\ \psi_2 &= AR_{12}\cos(\omega t + k_1 x) \\ &= \frac{A}{4}\cos(\omega t + k_1 x) \\ \psi_3 &= T_{12}A\cos(\omega t - k_2 x) \\ \psi_4 &= AT_{12}R_{23}\cos(\omega t + k_2 x + \varphi) \end{aligned}$$

נמצא הפזה ע"י

$$\begin{aligned} \psi_3 R_{23}|_{x=L} &= \psi_4|_{x=L} \\ \cos(\omega t - k_2 L) &= \cos(\omega t + k_2 L + \varphi) \end{aligned}$$

ולכן

$$\varphi = -2k_2 L$$

הגל בתחום 2:

$$\begin{aligned} \psi_4 &= A T_{12} R_{23} \cos(\omega t + k_2 x - 2k_2 L) \\ T_{12} R_{23} T_{21} &= -0.1 \end{aligned}$$

ולכן הגל בתחום 1:

$$\psi_2 + \psi_3 = \frac{1}{4} A \cos(\omega t + k_1 x) - \frac{1}{10} A \cos(\omega t + k_1 x - 2k_2 L)$$

1.6 ו

הגל מקבל ערך מינימאלי כאשר $2k_2 L = 2\pi n$ עבור $n = 1, 2, 3 \ldots$ אזי

$$L = \frac{\pi n}{k_2} = \frac{\pi n}{2\pi} \lambda = \frac{\lambda_2 n}{2} = n \cdot 41.1cm$$

1.7 ז

זה כי לא כל הגל חוזר, יש גם החזרות מסדר יותר גבוה(נכנסים לתחום 2 ואז עושים כול מיני החזרות $1 \to 2 \to 1 \to 2 \to 1$ לפני שהם יוצאים לתחום 1 עוד פעם) ויש אין סוף גלים כאלה(אבל אנחנו פיזיקאים אז מזניחים דברים שלא בא לנו לטפל בהם)

2 שאלה 3

$$t_1 = \frac{L}{\nu} = \frac{L}{\left(\frac{c}{n_1}\right)} = n_1 \frac{L}{C}$$

$$\begin{aligned} n_1 \sin\theta_m &= n_2 \sin\theta_f = n_2 \\ \sin\theta_m &= \frac{n_1}{n_2} \end{aligned}$$

$$t_2 = \frac{L}{v_x} = \frac{L}{\frac{c}{n_1}\sin(\theta_m)} = \frac{L}{C} \cdot \frac{n_1^2}{n_2}$$

הפרש הזמנים:

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{L}{c} \cdot \left[\frac{n_1^2}{n_2} - n_1\right] = \frac{L}{C}\frac{n_1}{n_2} \cdot (n_2 - n_2)$$

2.1 ב

$$\begin{aligned} L &= 42 \cdot 10^4 m \\ n_1 &= 1.58 \\ n_2 &= 1525 \\ c &= 3 \cdot 10^8 \frac{m}{sec} \end{aligned}$$

2.2 ג

גם אם שתי הקרניים קוהרנטיות כלומר נכנסות לתחום כך שתהיה התהפכות צריך שהפרש הזפזה יהי π

$$\begin{aligned} \Delta\varphi &= \omega \Delta t \\ \omega &= \frac{\Delta t}{\pi} = 2.6 \cdot 10^{-5} \end{aligned}$$

3 שאלה 4

$$\psi(x, t=0) \begin{cases} V_0 & |x| \leq \frac{L}{2} \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

הגל נע בכיוון החיובי לכן

$$\begin{aligned} \psi(x,t) &= \sum_n A_n \cos(\omega_n t - k_n x) \\ \psi(x,y) &= \int_0^\infty A(k) \cos(\omega_n t - kx)\, dk \end{aligned}$$

ע"ם למצא מה זה $A(k)$ נציב תנאי התחלה $t=0$

$$\begin{aligned}\int_0^\infty A(k)\cos(kx)\,dx &= \frac{2V_0}{\pi}\int_0^{L/2}\cos(kx)\,dx\\ &= \frac{2V_0}{\pi}\frac{\sin\left(\frac{kL}{2}\right)}{k}\end{aligned}$$

ונקבל כי הגל הינו

$$\psi(x,t)=\frac{2V_0}{\pi}\int_0^\infty\frac{\sin\left(\frac{kL}{2}\right)}{k}\cos(\omega(k)t-kx)\,dk$$

3.1 $\omega(k)=\nu k$

נקבל

$$\psi_0(x,t)=\frac{2V_0}{\pi}\int_0^\infty\frac{\sin\left(\frac{kL}{2}\right)}{k}\cos(-n(x-\nu t))\,dx$$

מהירות הגל ν. גם רואים כי $\psi(x,t=0)=\psi(x-\nu t,t)$ אזי הוא שומר על צורתו.

3.2 $\omega(k)=\omega_0+\nu k$

לכל מספר גל k מהירות פאזה שונה כיוון ש $v_\phi=\frac{\omega(k)}{k}$ שונה למספרי גל שונים.
לעומת זאת מהירות החבורה זהה לסעיף הקודם $\nu_g=\frac{\partial\omega}{\partial k}=\nu$.
מכיוון שלכל מספר גל מהירות שונה צורת הגל תשתנה. נציב ונקבל:

$$\psi(x,t)=\frac{2v_0}{\pi}\int_0^\infty\frac{\sin\left(\frac{kL}{2}\right)}{k}\cos[\omega_0 t-k(x-\nu t)]\,dk$$

עבור זמנים קצרים צצ$1\ll\omega_0 t$ מתקיים

$$\begin{aligned}\cos(\omega_0 t-kx(t)) &= \cos(-kx(t))+\omega_0 t\sin(kx(t))+\theta(\omega_0 t)^2\\ x(t) &= x-\nu t\end{aligned}$$

נציב

$$\psi(x,t)=\frac{2v_0}{\pi}\int_0^\infty\frac{\sin\frac{kL}{2}}{k}\cos[-k(x-\nu t)]\,dk+\omega_0 t\cdot\int_0^\infty\frac{\sin\frac{kL}{2}}{k}\sin[-k(x-\nu t)]\,dk$$

האיבר הראשון הוא פתרון סעיף א $\psi_0(x,t)$, הגל השני הוא גל הנע במהירות ν
כיוון שהוא מהצורה $f(x-\nu t)$ כאשר הוא כדל עם הזמן. נמצא צורה זו

$$\int_0^\infty \frac{\sin\left(\frac{kL}{2}\right)}{k}\sin\left(k\cdot x\left(t\right)\right)dk=\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\cos\left[k\left(\frac{L}{2}-x\left(t\right)\right)\right]}{k}-\frac{\cos\left[k\left(\frac{L}{2}+x\left(t\right)\right)\right]}{k}dk$$

עבור p קטן הזהות נכונה אזי גם עבור $p=0$:

$$\int_p^\infty \left[\frac{\cos kx_1}{k}-\frac{\cos kx_2}{k}\right]du=\log p-\log p+\log x_1-\log x_2=\log\frac{x_1}{x_2}$$

לכן הגל:

$$\psi\left(x,t\right)=\psi_0\left(x,t\right)+\omega_0 t+\frac{v_0}{\pi}\left(\frac{x-\nu t-\frac{L}{2}}{x-\nu t+\frac{L}{2}}\right)$$