תרגיל מס.2

עפיף חלומה 302323001

15 במרץ 2010

1 שאלה 1

1.1 צ"ל כי $\underbrace{f(x)}_{\textbf{Polynom}} = O\left(\underbrace{g(x)}_{\textbf{Exponential}}\right)$

כלומר צ"ל כי קיים $t > 0$ כך שעבור $x > x_0$ מתקיים

$$\begin{aligned} f(x) &\leq t \cdot g(x) \\ a_0 + a_1 x + \cdots + a_d x^d &\leq tc^x \end{aligned}$$

אבור $x \geq 1$ מתקיים $x^a \leq x^{a+1}$ לכל $a \geq 0$ אזי

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 x + \cdots + a_d x^d \leq x^d (a_0 + a_1 + \cdots + a_d) &\leq tc^x \\ x^d (a_0 + a_1 + \cdots + a_d) &\leq tc^x \\ x^d a_T &\leq tc^x \\ \ln\left(x^d a_T\right) &\leq \ln(tc^x) \\ d\ln(x) + \ln(a_T) &\leq \ln(t) + x\ln(c) \\ d\ln(x) + \ln(a_T) \leq dx + \ln(a_T) &\leq \ln(t) + x\ln(c) \\ dx + \ln(a_T) &\leq \ln(t) + x\ln(c) \\ \ln(a_T) - \ln(t) &\leq x\ln(c) - dx \\ \ln(a_T) - \ln(t) &\leq x(\ln c - d) \\ \frac{\ln(a_T) - \ln(t)}{\ln(c) - d} &\leq x \\ \frac{\ln(a_T) - \ln(t)}{\ln(c) - d} &\leq 2 \leq x \\ \frac{\ln(a_T) - \ln(t)}{\ln(c) - d} &\leq 2 \\ \ln(a_T) - \ln(t) &\leq 2(\ln(c) - d) \\ \ln(t) &\geq \ln(a_T) - 2(\ln(c) - d) \\ t &\geq e^{\ln(a_T) - 2(\ln(c) - d)} \end{aligned}$$

משל[1]

1.2 צ"ל כי $\underbrace{f(x)}_{\textbf{Polynom}} = \Omega\left((\log x)^c\right)$

לפולינום חייב להיות $a_n > 0$ [2] כאשר $n > 0$ [3] מסמנים a_n זה בa_p

$$\begin{aligned} f(x) &\geq t \cdot (\log x)^c \\ a_0 + a_1 x + \cdots + a_d x^d &\geq t(\log x)^c \\ a_0 + a_1 x + \cdots + a_d x^d \geq a_p x &\geq t\left(\frac{\log_c x}{\log_c 2}\right)^c \\ a_p x &\geq \frac{t}{\log_c 2} \cdot x \\ a_p x &\geq \frac{t}{\log_c 2} \cdot x \\ a_p \cdot \log_c 2 &\geq t \end{aligned}$$

כלומר מספיק לבחור $t \leq a_p \log_c 2$. משל

2 שאלה 2

2.1 א

$$\begin{aligned} y &= \log_b n \\ b^y &= n \\ \log_a b^y &= \log_a n \\ y \log_a b &= \log_a n \\ y &= \frac{\log_a n}{\log_a b} \end{aligned}$$

2.2 ב

$$\begin{aligned} a^{\log_b n} &= e^{\log_b(a)\log_b(n)} \\ &= e^{\log_b(n)\log_b(a)} \\ &= n^{\log_b(a)} \end{aligned}$$

[1] מזל שהצלחנו להוכיח
[2] לא ייתכן כי זה שלילי גם כי אין מצב לסיבוכיות שלילית
[3] ניתן להוכיח כי עבור $f(x) = c$ אי אפשר להוכי $f(x) = \Omega\left((\log x)^c\right)$

3 שאלה 3

3.1 א

$$T\left(n\right)=7T\left(\frac{n}{2}\right)+n^{2}$$

אזי ב master theorem מקבלים הערכים הבאים:

$$a=7,b=2,f\left(x\right)=n^{2}$$

בדיקה:

$$\begin{aligned}f\left(n\right) & \overset{?}{=} O\left(n^{\log_{b}(a)-\epsilon}\right)\\ n^{2} & \overset{?}{=} O\left(n^{\log_{2}(7)-\epsilon}\right)\end{aligned}$$

נבחר ϵ כך ש $\log_{2}\left(7\right)-\epsilon=2$ כלומר $\epsilon=\log_{2}\left(7\right)-2>0$ אז

$$n^{2}\overset{\checkmark}{=}O\left(n^{2}\right)$$

אזי

$$\begin{aligned}T\left(n\right) & = \Theta\left(n^{\log_{b}a}\right)\\ & = \Theta\left(n^{\log_{2}7}\right)\end{aligned}$$

3.2 ב

$$T\left(n\right)=2T\left(\frac{n}{4}\right)+8n$$

$$a=2,b=4,f\left(n\right)=8n$$

בדיקה:

$$\begin{aligned}f\left(n\right) & \overset{?}{=} O\left(n^{\log_{b}(a)-\epsilon}\right)\\ 8n & \overset{?}{=} O\left(n^{\log_{4}2-\epsilon}\right)\\ 8n & \overset{X}{=} O\left(n^{\frac{1}{2}-\epsilon}\right)\end{aligned}$$

זה לא מתקיים אזי בודקים האפשרות השניה:

$$\begin{aligned} f(n) &\stackrel{?}{=} \Omega\left(n^{\log_b a+\epsilon}\right) \\ 8n &\stackrel{?}{=} \Omega\left(n^{\log_4 2+\epsilon}\right) \\ 8n &\stackrel{?}{=} \Omega\left(n^{(1/2+1/2)}\right) \\ 8n &\stackrel{\checkmark}{=} \Omega(n) \end{aligned}$$

בדיקה של תנאי שני

$$\begin{aligned} af\left(\frac{n}{b}\right) &\leq cf(n) \\ 2f\left(\frac{n}{4}\right) &\leq cf(n) \\ 2\cdot 8\frac{n}{4} &\leq c\cdot 8n \\ 4n &\leq 8cn \end{aligned}$$

בוחרים $c = 0.9 < 1$ אזי

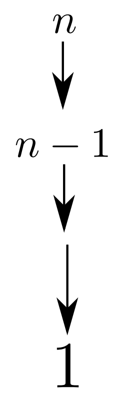
$$4 \stackrel{\checkmark}{\leq} 7.2\cdot n$$

מתקיים

אזי

$$T(n) = \Theta(8n) = \Theta(n)$$

4 עץ של מיון מיזוג



איור 1: משקל כל קודקוד במיזוג מיון

סיבוכיות האלגוריתם היא $\Theta\left(n^2\right)$

5 $T(n) = T(n-2) + \Theta(\log(n))$

נתון בפורום $T(1) = 1, T(2) = 2$
מנחשים כי סיבוכיות של זה היא $\Theta(n \log n)$

5.1 הוכחה עבור $\mathcal{O}$

בדיקה עבור $n = 2$

$$\begin{aligned} T(2) &\le c \cdot 2 \log 2 \\ 1 &\le c \cdot 2 \\ \frac{1}{2} &\le c \end{aligned}$$

בדיקה עבור $n = 3$ (כי קיימת אי תלות בין מספרים זוגיים לאי זוגיים)

$$\begin{aligned} T(3) &\le c \cdot 3 \log 3 \\ T(1) + \Theta(\log 3) &\le c \cdot 3 \log 3 \\ 1 + c_2 \log 3 &\le c \cdot 3 \end{aligned}$$

זה גם מתקיים
נניח כי ההנחה מתקיימת עבור $n = k$ ומוכיחים עבור $n = n + 1$

$$
\begin{aligned}
T(n+1) &= T(n-1)+\Theta(\log(n+1)) \\
&\leq T(n-1)+c_2\log(n+1) \\
&\leq c(n-1)\log(n-3)+c_2\log(n+1) \\
&= \log\left((n-2)^{c(n-1)}\right)+\log\left((n+1)^{c_2}\right) \\
&= \log\left((n-2)^{c(n-1)}(n+1)^{c_2}\right) \\
&\leq \log\left((n-2)^{c(n-1)}(n-2)^{c_2}\right) \\
&\leq \log\left((n-2)^{c(n-1)+c_2}\right) \\
&\leq (c(n-1)+c_2)\log(n-2) \\
&= \mathcal{O}(n\log n)
\end{aligned}
$$

5.2 הוכחה עבור Ω

בדיקה עבור $n=2$

$$
\begin{aligned}
T(2) &\geq c\cdot 2\log 2 \\
1 &\geq c\cdot 2 \\
\frac{1}{2} &\geq c
\end{aligned}
$$

בדיקה עבור $n=3$ (כי קיימת אי תלות בין מספרים זוגיים לאי זוגיים)

$$
\begin{aligned}
T(3) &\geq c\cdot 2\log 2 \\
T(1)+\Theta(\log 3) &\geq c\cdot 2\log 2 \\
1+c_2\log 3 &\geq c\cdot 2
\end{aligned}
$$

זה גם מתקיים

נניח כי ההנחה מתקיימת עבור $n=k$ ומוכיחים עבור $n=k+1$

$$
\begin{aligned}
T(n+1) &= T(n-1)+\Theta(\log(n+1)) \\
&\geq T(n-1)+c_2\log(n+1) \\
&\geq c(n-1)\log(n-1)+c_2\log(n+1) \\
&= \log\left((n-1)^{c(n-1)}\right)+\log\left((n+1)^{c_2}\right) \\
&= \log\left((n-1)^{c(n-1)}(n+1)^{c_2}\right) \\
&\geq \log\left((n+1)^{c(n-1)}(n+1)^{c_2}\right)\geq\log\left((n-1)^{c(n-1)}(n+1)^{c_2}\right) \\
&\geq \log\left((n+1)^{c(n-1)+c_2}\right) \\
&\geq (c(n-1)+c_2)\log(n) \\
&= \Omega(n\log n)
\end{aligned}
$$

משל.

6 שאלה 6

הטעות היא בהזנחת הקבועים. צריך להתחשב בזה כי $\underbrace{c+c+c+\cdots+c}_{n}$ היא בעלת סיבוכיות $\Theta(n)$ ולא $\Theta(1)$

7 שאלה 7

$$
T(n) = 7\cdot T\left(\frac{n}{2}\right)+\Theta\left(n^2\cdot\frac{n}{2}\right)
$$

$$
a=7, b=2, f(n)=n^3
$$

בדיקה

$$
\begin{aligned}
f(n) &= \Omega\left(n^{\log_7 2+\epsilon}\right) \\
\frac{n^3}{2} &= \Omega\left(n^{\log_7 2+\epsilon}\right) \\
n^3 &= \Omega\left(n^{\log_7 2+\epsilon}\right) \\
n^3 &= \Omega\left(n^3\right)
\end{aligned}
$$

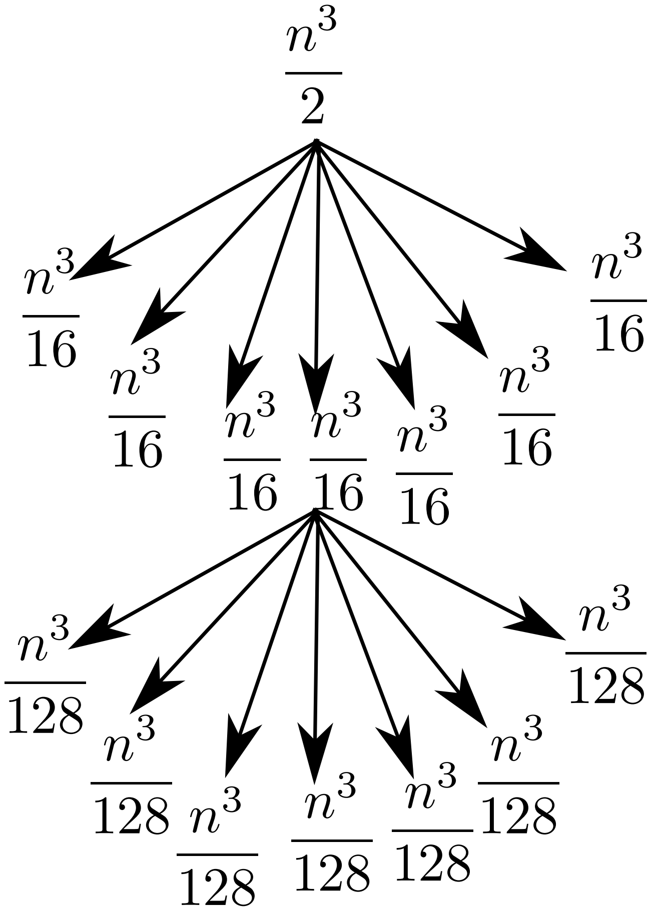
בדיקת התנאי השני

$$\begin{aligned}
af\left(\frac{n}{b}\right) &\leq cf\left(n\right) \\
7f\left(\frac{n}{2}\right) &\leq cf\left(n\right) \\
7\frac{n^3}{2^3} &\leq cn^3 \\
\left(\frac{7}{8}\right)n^3 &\leq cn^3 \\
\left(\frac{7}{8}\right) &\leq c
\end{aligned}$$

אז גם תנאי זה מתקיים כי $c = \frac{7}{8} < 1$

אזי הסיבוכיות היא

$$T\left(n\right) = \theta\left(n^3\right)$$



איור 2: גרף ריקוקסיה

אם מספקים לפונקציה $x = 2^n$ אזי היא תחזיר $7^n \cdot 42$