תרגיל מס.3

עפיף חלומה 302323001

15 במרץ 2010

1 שאלה 1

$$T(n) = T(m-1) + T(n-m) + \theta(n)$$

כאשר $T(1) = T(0) = k$.
המקרה הגרוע ביותר הוא כאשר $m = 1$ לכן $T(n) = T(n-1) + \theta(n)$
נוכיח באינדוקציה כי זה $T(n) = \mathcal{O}(n^2)$.
בדיקה:

$$\begin{aligned} T(1) &\leq c \cdot 1 \\ k &\leq c \end{aligned}$$

הנחת האידוקציה: נניח כי לכל n מתקיים $T(n) \leq c \cdot n^2$ ונוכיח עבור $n+1$

$$\begin{aligned} T(n+1) &\stackrel{?}{\leq} T(n) + c(n+1) \\ T(n+1) &\stackrel{?}{\leq} c \cdot n^2 + c(n+1) \\ T(n+1) &\stackrel{?}{\leq} cn^2 \leq c \cdot n^2 + c(n+1) \\ T(n+1) &= \mathcal{O}(n^2) \end{aligned}$$

2 שאלה 2

Partition in place	לחןעיפטם 1

```
PartitionInPlace[A, left, right]
–p = A[right]
–l = left
–r = right − 1
–While(l < r)
—-While(l < r And A[l] ≤ p)
——l + +
—-While(l < r And A[r] > p)
——r − −
—-If(r! = l) swap(A[r], A[l])
—-If(A[r] > p) swap(A[right], A[r]) //swap the pivot
—-else swap(A[right], A[r + 1]) //with something bigger than it is
```

3 שאלה 3

מקבלים המצב המקסימאלי של סטודנטים שיש להם +75$ אם כל הסטודנטים האחרים אין להם כסף בכלל(וכל אילו שיש להם יש להם בדיוק 75$)

$$\begin{aligned}\frac{0\cdot x+75\,(200-x)}{200} &= 15\\ x &= 160\end{aligned}$$

אזי אילו שיש להם יותר מ75$ הם לכל היותר 40. כלומר $0 \le n \le 40$

4 שאלה 4

ההסתברות לכבל לפחות 6 אחת ב 4 זריקות היא:

$$\begin{aligned}P &= \binom{4}{1}\left(\frac{5}{6}\right)^3\left(\frac{1}{6}\right)+\binom{4}{2}\left(\frac{5}{6}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)^2+\binom{4}{3}\left(\frac{5}{6}\right)^1\left(\frac{1}{6}\right)^3+\binom{4}{4}\left(\frac{1}{6}\right)^4\\ &= 4\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^3\left(\frac{1}{6}\right)+6\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)^2+4\left(\frac{5}{6}\right)^1\left(\frac{1}{6}\right)^3+\left(\frac{1}{6}\right)^4\\ &= 0.51774691358024691358\end{aligned}$$

אבל אני לא איכפת לי הכסף, אני רק רוצה שיתן לי ציון טוב.
אבל בן אדם טבעי[1] לא ישחק

5 שאלה 5

5.1 א

זה 50%

[1] כלומר לא סטודנט של הנדסת או מדעי מחשבים

5.2 ב

לחזעיפטם 2 מציאת סוג המערך

```
first=a[0]
for(i=1;i<n/2+1;i++)
–if(a[i]!=first) return “balanced”
return “constant”
```

Worst case complexity: $\Theta(n)$

Worst Input A[0]=A[1 to n/2], A[n/2+1]!=A[0]

Best input: A[0]!=A[1].

5.3 ג

לחזעיפטם 3 מציאת סוג מערך באופן ראנדומאלי

```
first=a[0]
For(i=1;i<n/2+1;i++)
–x=Random(i,n)
–if(a[x]!=first) return “balanced”
–swap(x,i-1)
return “constant”
```

ההסתברות למצא תשובה אחרי גישה אחת למערך(בשורה 1) היא 0. ההסתברות למציאת מספר שונה בכל פעם אחרת היא c כך ש $\left(\frac{n}{2}+1\right)c=1$ אזי $c=\frac{1}{(n/2+1)}$. אזי רוצים לחשב

$$
\begin{aligned}
EP(x) &= 0+\sum_{i=2}^{\frac{n}{2}+1} i\cdot c \\
&= c\cdot\sum_{i=2}^{\frac{n}{2}+1} i \\
&= \frac{1}{(n/2+1)}\cdot\frac{\left(\frac{n}{2}+1\right)^2-2^2+\frac{n}{2}+1+2}{2} \\
&= \frac{\frac{n^2}{4}+n+1-4+\frac{n}{2}+3}{2\left(n/2+1\right)} \\
&= \frac{\frac{n^2}{8}+\frac{3}{4}n}{n/2+1} \\
&= \frac{n+6}{4n+8}\cdot n
\end{aligned}
$$

5.4 ה

5.4.1 אם המערך Constant

האלגוריתם שלנו מחזיר "constant" אם הוא לא מוצא הבדל בין המספרים או הוא מגיע לסוף המערך, אז אם זה יופסק בכל מקרה לא יחזיר תשובה לא נכונה. ההסתברות להחזיר תשובה לא נכונה היא 0.

5.4.2 אם המערך Balanced

צריכים לחשב את ההסתברות למצא תשובה שונה מ$a[0]$ ב 9 הגישות למערך שנותרו:

$$\begin{aligned} P(1 < x \leq 10) &= 9 \cdot c \\ &= \frac{9}{(n/2+1)} \end{aligned}$$

אזי ההסתברות להחזיר תשובה לא נכונה היא $1 - \frac{9}{(n/2+1)}$[2]

6 שאלה 6

נתון משתנה $T = X + Y$ אזי ההסתברות לקבל $t = x + y$ הוא $P_X(x) + P_Y(y)$

6.1 א

$$\begin{aligned} ET &= \sum_{i=0}^{\infty} i \cdot P_T(i) \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} (iP_X(i) + iP_Y(i)) \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} iP_X(i) + \sum_{i=0}^{\infty} iP_Y(i) \\ &= EX + EY \end{aligned}$$

6.2 ב

$$\begin{aligned} E(cX) &= \sum_{i=0}^{\infty} (c \cdot i) P_X(i) \\ &= c \sum_{i=0}^{\infty} iP_X(i) \\ &= cEX \end{aligned}$$

[2]כמובן אם זה שלילי אז ההסתברות היא אפס