תרגיל מס.1

עפיף חלומה 302323001

25 בנובמבר 2009

1 שאלה 1

1.1 א

נחשב את $\frac{P(x=k+1)}{P(x=k)}$ ונקבל

$$\begin{aligned}\frac{P(x=k+1)}{P(x=k)} &= \frac{\left(\frac{e^{-\lambda}\cdot\lambda^{k+1}}{(k+1)!}\right)}{\left(\frac{e^{-\lambda}\cdot\lambda^{k}}{k!}\right)} \\ &= \frac{\lambda}{k+1}\end{aligned}$$

כלומר הפונק עולה כאשר $\lambda < k+1$ ועולה במקרה של $\lambda > k+1$

1.2 ב

עבור $\lambda = k+1$ היחס שווה בדיוק ל1 ולכן $P(x=k) = P(x=k+1)$
אם $k < \lambda < k+1$ אז המקסימום מתקבל ב $P(x=k)$

2 שאלה 2

ההסתברות שרכיב יתקלקל שווה בכל אחד מ 12 החודשים. המכשיר פועל כל עוד יש לפחות אחד מהרכיבים תקין.

2.1 א

ההסתברות שרכיב אחד יתכלכל בחצי שנה הוא $\frac{1}{2}$ לכן ההסתברות ששלושתם יתכ-לכלו(באופן בלתי תלוי) היא $\frac{1}{8} = \left(\frac{1}{2}\right)^3$, אזי ההסתברות שלא כולם התכלכלו במשך $\frac{1}{2}$ שנה היא

$$1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

2.2 ב

ההסתברות שלפחות 9 תקינים היא ההסתברות שנקבל או 9 או 10 בניסוי הזה כלומר:

$$
\begin{aligned}
P(x \geq 9) &= P(x=9) + P(x=10) \\
&= \binom{10}{9}\left(\frac{7}{8}\right)^9\left(\frac{1}{8}\right) + \binom{10}{10}\left(\frac{7}{8}\right)^{10} \\
&= 0.63
\end{aligned}
$$

3 שאלה 3

יש w כדורים לבנים ו b שחורים.

ההסתברות שנצליח למצא a לבנים בדיוק היא $\frac{\binom{k}{a}\binom{w-k}{k-a}}{\binom{w}{k}}$ ולכן הסיכוי שנכשל הוא $1-\frac{\binom{k}{a}\binom{w-k}{k-a}}{\binom{w}{k}}$. כדי לחזור על הניסוי בדיוק n פעמים צריכים להיכשל $n-1$ פעמים ולהצליח בפעם ב n כלומר:

$$
P(X=n) = \left(1-\frac{\binom{k}{a}\binom{w-k}{k-a}}{\binom{w}{k}}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{\binom{k}{a}\binom{w-k}{k-a}}{\binom{w}{k}}\right)
$$

4 שאלה 4

4.1 א

נסמן את p להיות ההצלחה בקבלת ערך זוגי, אזי $(1-p)\,p_{n-1}$ להיכשל $n-1$ פעמים ולהצליח $(1-p_{n-1})$ הפעם ב n. אזי מקבלים כי

$$
P_n = p\left(1-P_{n-1}\right) + (1-p)\,P_{n-1}
$$

4.2 ב

נוכיח באינדוקציה עבור n, אזי

$$
\begin{aligned}
P_1 &= \frac{1}{2}\left(1+(1-2\cdot p)^1\right) \\
&= 1-p
\end{aligned}
$$

זה נכון תמיד אזי נניח נכונות הטענה עבור $n-1$ ונוכיח עבור n:

$$
P_{n-1} = \frac{1}{2}\left(1+(1-2p)^{n-1}\right)
$$

הוכחה:

$$
\begin{aligned}
2P_n &= 1+(1-2p)^n \\
&= 1+(1-2p)^{n-1}\cdot(1-2p) \\
&= 2p_{n-1}\cdot(1-2p)
\end{aligned}
$$

זה נכון לפי סעיף א

5 שאלה 5

נחשב ההסתברות ש A ניצחה בסדרה, כלומר קיבלה 3 נצחונות לפני B. אזי ההסתב-רות היא ששיחקו 3 משחקים ו A ניצחה בכולם או שיחקו 4 משחקים וA ניצחה 3 מהם או שחקו 5 משחקים ו A ניצחה 3 מהם, כלומר:

$$
\begin{aligned}
P(x=A) &= \binom{3}{3}p^3+\binom{4}{3}p^3(1-p)^1+\binom{4}{3}p^3(1-p)^2 \\
&= \sum_{i=3}^{5}\binom{i}{3}p^3(1-p)^{i-3}
\end{aligned}
$$

5.1 א

נסמן B לנצח ב2 מהמשחקים(אחרי המשחק הראשון), ו A לנצח במשחק הראשון אזי

$$
P(A\cap B)=p(p\cdot p+p(1-p)p+(1-p)p\cdot p+(1-p)(1-p)pp+(1-p)p(1-p)p)
$$

אזי

$$
\begin{aligned}
P(A|B) &= \frac{p(p\cdot p+p(1-p)p+(1-p)p\cdot p+(1-p)(1-p)pp+(1-p)p(1-p)p)}{p} \\
&= p^2+2(1-p)p^2+2(1-p)(1-p)p^2
\end{aligned}
$$

5.2 ב

$$
\begin{aligned}
P(B|A) &= \frac{P(A|B)}{P(A\cap B)} \\
&= \frac{p^2+2(1-p)p^2+2(1-p)(1-p)p^2}{\begin{pmatrix} p^2+2(1-p)p^2+2(1-p)(1-p)p^2+ \\ (1-p)\left(2(1-p)p^3+p^3+3(1-p)p^3+\right)\end{pmatrix}}
\end{aligned}
$$

6 שאלה 6

$$
\begin{aligned}
P\left(y=k\right) &= e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^{k}}{k!}-e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^{0}}{0!}\\
&= e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^{k}}{k!}-e^{-\lambda}\\
&= e^{-\lambda}\cdot\left(\frac{\lambda^{k}}{k!}-1\right)
\end{aligned}
$$

7 שאלה 7

צ"ל

$$\sum_{k=0}^{n}P\left(x=k\right)=\sum\frac{\binom{A}{k}\binom{N-A}{n-k}}{\binom{N}{n}}=1$$

לפי תרגיל 2: $\sum_{k=0}^{n}\binom{A}{k}\binom{N-A}{n-k}=\binom{N}{n}$ אזי

$$\frac{\binom{N}{n}}{\binom{N}{n}}=1$$

משל.