KATA PENGANTAR

Dengan mengucap syukur Alhamdulillah, akhirnya selesai juga pembuatan buku ajar dengan judul “Matematika Diskrit”. Buku ajar ini diperuntukkan bagi mahasiswa jurusan Teknik Informatika tingkat satu semester satu.

Dengan mempelajari buku ini, diharapkan pembaca dapat memperoleh pengetahuan mengenai dasar-dasar matematika informatika, mulai dari konsep himpunan, logika, induksi matematika, sampai dengan kombinatorial.

Penulis menyadari sepenuhnya bahwa penulisan ini masih jauh dari sempurna dan tidak luput dari kekurangan. Oleh sebab itu diharapkan adanya saran dan kritik demi kesempurnaannya.

Dalam kesempatan ini, penulis menyampaikan penghargaan dan ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada :

1. DR.Ir. Tundung Subali Patma, M.T, sebagai Direktur Politeknik Negeri Malang,
2. DR. Abdul Mukit,M.Pd. Sebagai Pimpinan Polinema Press,
3. Rekan-rekan sesama pengajar yang telah membantu memberikan berbagai informasi.

Tiada gading yang tak retak, begitu juga dengan buku ajar ini yang masih banyak kekurangannya. Untuk itu penulis sangat mengharapkan kritik dan saran yang membangun, sehingga bisa dilakukan perbaikan. Akhir wakalam penulis menyampaikan terima kasih atas bantuan dari berbagai pikah, hanya Allah SWT yang mampu membalasnya. Dan bagi yang mempelajari buku ini, semoga bermanfaat dan selamat belajar.

Penulis,

Malang, 14 Agustus 2017

GARIS-GARIS BESAR PROGRAM PENGAJARAN (GBPP)

Mata Kuliah : Matematika informatika

Kode Mata Kuliah : RIF 184

Semester/SKS : 1/2 SKS

Beban Studi : 2 jam / minggu

Deskripsi singkat : Memahami struktur-struktur diskrit seperti himpunan, relasi, graf, pohon, dan sebagainya. Memahami aplikasi matematika informatika dalam bidang-bidang lain, khususnya di bidang informatika dan keteknikan lainnya.

Kompetensi : Memberi landasan matematika khas informatika agar mahasiswa dapat memahami kuliah-kuliah di tingkat selanjutnya. Kuliah-kuliah di tingkat lanjut memerlukan konsep-konsep dasar yang terdapat di dalam matematika informatika..

Referensi : 1. Kenneth H. Rosen, Discrete Mathematics and Its Application , Mc Graw-Hill, 1999.

2. C.L. Liu, Element of Discrete Mathematics , McGraw-Hill, Inc, 1985.

No.	Standar Kompetensi (TIU)	Pokok Bahasan	Kompetensi Dasar (TIK)	Sub Pokok Bahasan	Waktu	Referensi
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
1.	Mengerti Pengantar Matematika informatika	Pengantar Matematika	Pengantar Matematika informatika	Pengantar Matematika informatika	3 x 45"	1, 2

		informatika				
2.	Mengerti Logika Matematika	Logika Matematika	Logika Matematika	Logika Matematika	6 x 45″	1, 2
3.	Mengerti Proposisi	Proposisi	Proposisi	Proposisi	3 x 45″	1, 2
4.	Mengerti Teori Himpunan	Teori Himpunan	Teori Himpunan	Teori Himpunan	6 x 45″	1, 2
5.	Mengerti Prinsip Inklusi-Eksklusi	Prinsip Inklusi-Eksklusi	Prinsip Inklusi-Eksklusi	Prinsip Inklusi-Eksklusi	6 x 45″	1, 2
6.	Mengerti Induksi Matematika	Induksi Matematika	Induksi Matematika	Induksi Matematika	3 x 45″	1, 2
7.	Mengerti Metode Pembuktian	Metode Pembuktian	Metode Pembuktian	Metode Pembuktian	6 x 45″	1, 2
8.	Mengerti Sistem Bilangan	Sistem Bilangan	Sistem Bilangan	Sistem Bilangan	9 x 45″	1, 2
9.	Mengerti Relasi dan Fungsi	Relasi dan Fungsi	Relasi dan Fungsi	Relasi dan Fungsi	6 x 45″	1, 2
10.	Mengerti Kombinatorial	Kombinatorial	Kombinatorial	Kombinatorial	6 x 45″	1, 2
11.	Mengerti Teori Peluang	Teori Peluang	Teori Peluang	Teori Peluang	6 x 45″	1, 2

DAFTAR ISI

1 PENGANTAR AWAL

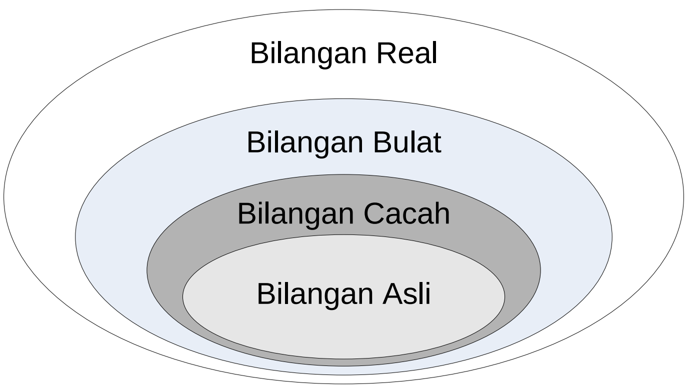
Di bangku sekolah tentunya kita sudah sering sekali berjumpa dan belajar tentang ilmu matematika. Mulai dari jenjang Sekolah Dasar sampai dengan Sekolah Lanjutan Tingkat Atas cabang ilmu matematika selalu diberikan di sekolah. Oleh karena itu tentu kita sudah sangat tidak asing lagi dengan namanya ilmu matematika.

Ilmu matematika memiliki cabang ilmu yang sangat banyak, seperti kalkulus, vektor, dan matematika diskrit. Mendengar kata matematika diskrit, mungkin di antara kita semua tidak banyak yang mengetahui seperti apa itu matematika diskrit. Oleh karena diktat ini bertemakan matematika diskrit, maka kita harus mengenal dahulu apa itu matematika diskrit.

1.1 Pengertian Diskrit

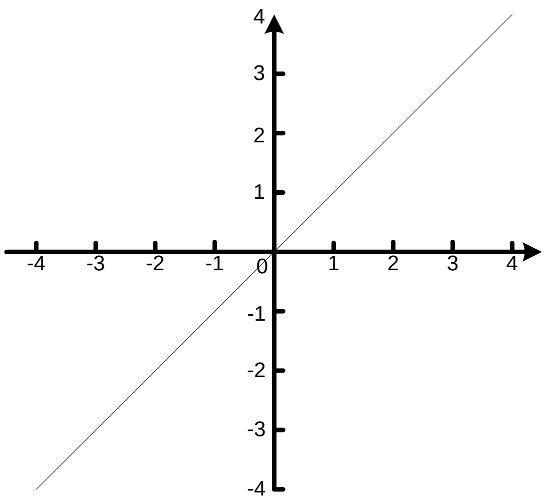
Matematika diskrit adalah cabang ilmu matematika yang mempelajari tentang objek-objek diskrit. Lalu apa yang dimaksud dengan kata diskrit itu. Diskrit disini artinya tidak saling berhubungan (lawan dari kata kontinyu atau berkesinambungan/berkelanjutan).

Contoh kasus yang membedakan antara diskrit dengan kontinyu adalah perbedaan antara bilangan bulat dan bilangan real. Seperti kita ketahui bilangan bulat merupakan bagian dari bilangan real yang memiliki sifat khusus. Diagram dari pengelompokan bilangan adalah sebagai berikut:

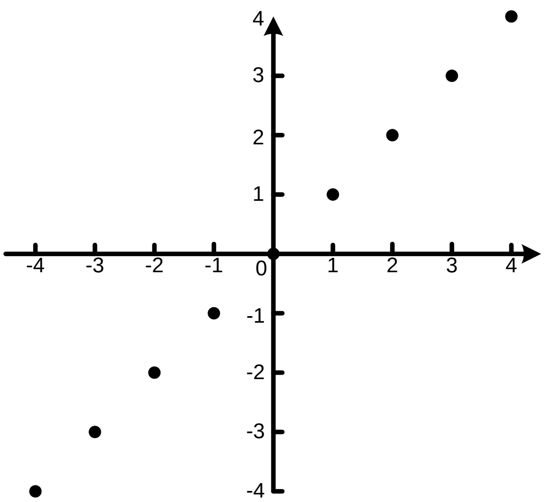


Contoh dari bilangan bulat adalah 1, 10, 0, -4, dan -1000. Sedangkan contoh dari bilangan real adalah 1, 2.5, 0, -30.333, $\sqrt{5}$, dll. Jadi karakteristik mendasar dari bilangan bulat adalah bilangan bulat merupakan bilangan real yang tidak diikutsertakan nilai pecahannya. Jika diperhatikan nilai bilangan bulat, antara dua angka yang saling bersebelahan tidak ada lagi angka yang menjadi perbatasannya, contohnya antara bilangan 1 dan 2 sudah tidak ada lagi angka pecahan yang masuk dalam bilangan bulat. Sedangkan pada bilangan real, antara angka 1 dan 2 terdapat banyak sekali nilai pecahan yang berada di antara kedua bilangan tersebut.

Sebagai ilustrasi jika kita membuat grafik y=x, dimana grafik I, nilai x berupa bilangan bulat dan grafik II, nilai x bernilai bilangan real.



Grafik A : y=x, dimana x bilangan real



Grafik B : y=x, dimana x bilangan bulat

Jika dilihat, kedua grafik di atas memiliki tampilan yang berbeda. Grafik A memiliki nilai yang tidak terputus atau bersambung, sehingga bentuk grafiknya adalah sebuah graris lurus. Sedangkan pada grafik B memiliki nilai yang cacah atau diskrit, sehinggal membentuk grafik dengan plot berupa titik pada nilai-nilai terntentu.

Jadi diskrit itu adalah sebuah sistem yang "hanya" memiliki nilai-nilai tertentu dimana antara nilai-nilai tersebut sudah tidak ada nilai lagi. Contoh lain dari sistem diskrit adalah sistem digital. Sebagai contoh termometer digital dengan akurasi sampai 1 desimal. Contoh angka yang bisa ditunjukkan oleh termometer tersebut adalah 36.1, 36.2, 36.5, dst. Termometer tersebut tidak bisa menunjukkan bilangan antara 36.1 dan 36.2 atau bilangan 36.14, karena memiliki sifat diskrit. Bandingkan dengan termometer manual/termometer raksa yang memakai sistem skala. Termometer raksa dengan skala dapat menunjukkan nilai ketelitian yang tinggi tergantung dari tingkat ketelitian kita. Termometer tersebut bisa saja menunjukkan 36.1 atau bahkan 36.125, tergantung dari tingkat ketelitian kita.

Oleh karena dalam dunia digital memakai sistem diskrit, maka bidang ilmu matematika diskrit ini sangat penting dalam ilmu komputer atau informatika. Berbeda dengan kalkulus atau aljabar vektor, matematika diskrit tidak membutuhkan kemampuan khusus dalam mempelajarinya.

1.2 Materi Dalam Matematika informatika

Pembahasan dalam matematika informatika meliputi pokok-pokok bahasan sebagai berikut:

1. Logika Matematika (*logic*)
2. Teori Himpunan (*set theory*)
3. Induksi Matematika (*mathematical induction*)
4. Sistem Bilangan (*number theory*)
5. Matriks (*matrice*)
6. Relasi dan Fungsi (*relation and function*)
7. Barisan dan Deret (*sequences and series*)
8. Aljabar Boolean (*Boolean algebra*).
9. Kombinatorial (*combinatorics*).
10. Teori Peluang Diskrit (*discrete probability*).
11. Teori Graf (*graph – included tree*)

2 LOGIKA MATEMATIKA

Logika merupakan bidang ilmu matematika yang mempelajari tentang studi penalaran, secara khusus membahas kebenaran sistem penalaran. Penalaran pada logika didasarkan pada hubungan antara pernyataan-pernyataan (*statements*). Dalam logika pernyataan-pernyataan yang saling dihubungkan tersebut akan disebut sebagai **proposisi**.

2.1 Proposisi

Proposisi adalah pernyataan yang memiliki nilai kebenaran (benar atau salah). Proposisi hanya boleh memiliki satu nilai kebenaran yaitu benar atau salah, tidak boleh keduanya.

Contoh dari proposisi adalah:

- Bumi ini berbentuk bulat sempurna.
- 7 adalah bilangan prima.
- Jumlah penduduk Indonesia yang belum menikah adalah 150 juta orang.
- Setiap bilangan ganjil adalah bilangan prima.
- Sapi dan monyet bisa hidup di air tawar.
- Semua bilangan genap selalu habis dibagi 2.
- James Watt menemukan mesin uap di Inggris pada tahun 1562.
- Tuhan menciptakan alam semesta dalam waktu tujuh hari.

Contoh kalimat yang **bukan** proposisi adalah:

a. Buatkan sarapan pagi untuk ayah. => Kalimat perintah.
b. Jam berapa saat ini?. => Kalimat pertanyaan.
c. Selamat pagi !.

Untuk mempermudah dalam penamaan sebuah proposisi, maka sebuah proposisi dilambangkan dengan huruf kecil. Contohnya adalah:

p : Indonesia termasuk dalam iklim tropis.

q : Budi adalah anak pertama dari Pak Jono.

r : Bilangan prima selalu merupakan bilangan ganjil.

2.2 *Proposisi Majemuk*

Dalam kehidupan sehari-hari seringkali kita mengkombinasikan antara sebuah pernyataan/proposisi dengan pernyataan yang lain. Sebagai contoh adalah :

- Adi berkulit putih sedangkan Ali berkulit sawo matang.
- Hari ini cuacanya cerah dan saya pergi bertamasya.

Dalam bahasa kalimat yang merupakan gabungan dari dua atau lebih kalimat disebut sebagai **kalimat majemuk**. Begitu juga dengan proposisi, gabungan atau kombinasi dari beberapa proposisi disebut sebagai **proposisi majemuk**. Nilai kebenaran yang dihasilkan dapat dijelaskan dalam **tabel kebenaran**.

Operator yang digunakan sebagai penghubung antar proposisi dalam proposisi majemuk adalah:

1. **Konjungsi (*conjunction*).**

   Notasi : $\wedge$, Operator : "dan". Contoh: $p \wedge q$, berarti p dan q.

   p : Penduduk kota Malang semakin padat.

   q : Di jalan sering terjadi macet.

   $p \wedge q$: Penduduk kota Malang semakin padat dan di jalan sering terjadi macet.

   Tabel kebenaran dari konjungsi adalah:

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

   Dari tabel tersebut dapat disimpulkan bahwa operasi konjungsi hanya akan bernilai benar jika semua proposisi yang membentuknya bernilai benar.

2. **Disjungsi (*disjunction*).**

   Notasi : $\vee$, Operator : "atau". Contoh: $p \vee q$, berarti p atau q.

   p : Komputer harganya mahal.

q : Rudi harus membeli komputer.

$p \vee q$: Komputer harganya mahal atau Rudi harus membeli komputer.

Tabel kebenaran dari disjungsi adalah:

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

Dari tabel tersebut dapat disimpulkan bahwa operasi disjungsi hanya akan bernilai salah jika semua proposisi yang membentuknya bernilai salah.

3. Ingkaran/Negasi (*negation*).

Notasi : ~/¯, Operator : "tidak". Contoh: ~ p, berarti tidak p.

p : Benda selalu jatuh ke bawah.

~ p : Tidak benar benda selalu jatuh ke bawah.

Tabel kebenaran dari negasi adalah:

p	$\sim p$
T	F
F	T

Contoh 2.1 :

p : Ikan paus hidup di laut.

q : Air laut rasanya asin.

1. Pernyataan dari suatu notasi:
   a. $p \wedge q$: Ikan paus hidup di laut dan air laut rasanya asin.
   b. $\sim p \wedge q$: Ikan paus tidak hidup di laut dan air laut rasanya asin.
   c. $\sim(p \wedge \sim q)$: Tidak benar bahwa ikan paus hidup di laut dan air laut rasanya tidak asin.
2. Notasi dari suatu pernyataan:
   a. Ikan paus tidak hidup di laut tetapi air laut rasanya asin. => $\sim p \wedge q$.
   b. Ikan paus hidup di laut atau tidak benar bahwa air laut rasanya asin dan ikan paus hidup di laut. => $p \vee \sim(q \wedge p)$.

c. Ikan paus tidak hidup di laut, air laut rasanya asin, dan ikan paus hidup di laut => $\sim p \wedge (q \wedge p)$

3. Tabel kebenaran dari $p \wedge q$, $\sim p \wedge q$, $\sim(p \wedge \sim q)$, $p \vee \sim(q \wedge p)$, dan $\sim(\sim p \vee \sim q)$, dan $\sim p \wedge (q \wedge p)$.

p	q	$p \wedge q$	$\sim p \wedge q$	$\sim(p \wedge \sim q)$	$p \vee \sim(q \wedge p)$	$\sim(\sim p \vee \sim q)$	$\sim p \wedge (q \wedge p)$
T	T	T	F	T	T	T	F
T	F	F	F	F	T	F	F
F	T	F	T	T	T	F	F
F	F	F	F	T	T	F	F

Contoh 2.2:

Buatlah tabel kebenaran dari proposisi majemuk $(p \wedge q) \vee (\sim q \wedge r)$.

p	q	r	$p \wedge q$	$\sim q$	$\sim q \wedge r$	$(p \wedge q) \vee (\sim q \wedge r)$
T	T	T	T	F	F	T
T	T	F	T	F	F	T
T	F	T	F	T	T	T
T	F	F	F	T	F	F
F	T	T	F	F	F	F
F	T	F	F	F	F	F
F	F	T	F	T	T	T
F	F	F	F	T	F	F

2.3 *Ekivalen, Tautologi, dan Kontradiksi*

Sebuah proposisi majemuk disebut **ekivalen** dengan proposisi majemuk yang lain jika kedua proposisi majemuk tersebut memiliki nilai kebenaran yang selalu sama. Pada contoh 2.1 di atas proposisi majemuk $p \wedge q$ ekivalen dengan $\sim(\sim p \vee \sim q)$, karena kedua proposisi majemuk tersebut selalu bernilai sama untuk setiap nilai p dan q.

Jadi $p \wedge q \equiv \sim(\sim p \vee \sim q)$.

Sebuah proposisi majemuk disebut sebagai **tautologi** jika proposisi majemuk tersebut selalu bernilai benar untuk semua nilai proposisi yang menyusunnya. Pada contoh 2.1 di atas proposisi majemuk $p \vee \sim(q \wedge p)$ disebut sebagai tautologi karena selalu bernilai benar untuk setiap nilai p dan q.

Sebuah proposisi majemuk disebut sebagai **kontradiksi** jika proposisi majemuk tersebut selalu bernilai salah untuk semua nilai proposisi yang menyusunnya. Pada contoh 2.1 di atas proposisi majemuk $\sim p \wedge (q \wedge p)$ disebut sebagai kontradiksi karena selalu bernilai salah untuk setiap nilai p dan q.

2.4 *Hukum-hukum pada Logika*

Beberapa hukum dasar pada logika adalah sebagai berikut:

1. Hukum Asosiatif.

- $p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$
- $p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$

2. Hukum Komutatif

- $p \vee q \equiv q \vee p$
- $p \wedge q \equiv q \wedge p$

3. Hukum Distributif

- $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
- $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

4. Hukum Identitas

- $p \vee \mathbf{F} \equiv p$
- $p \wedge \mathbf{T} \equiv p$

5. Hukum Komplemen

- $p \vee \sim p \equiv \mathbf{T}$
- $p \wedge \sim p \equiv \mathbf{F}$

6. Hukum Idempoten

- $p \vee \mathbf{T} \equiv \mathbf{T}$
- $p \wedge \mathbf{F} \equiv \mathbf{F}$

7. Hukum Penyerapan

- $p \vee (p \wedge q) \equiv p$

– $p \wedge (p \vee q) \equiv p$

8. Hukum Involusi

– $\sim(\sim p) \equiv p$

2.5 *Hukum De Morgan untuk Logika*

Hukum keekivalenan proposisi majemuk yang didefinisikan oleh ilmuwan Prancis bernama De Morgan adalah sebagai berikut:

– $\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$

– $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$

Tabel kebenaran untuk hukum De Morgan adalah:

p	q	$\sim(p \vee q)$	$\sim p \wedge \sim q$	$\sim(p \wedge q)$	$\sim p \vee \sim q$
T	T	F	F	F	F
T	F	F	F	T	T
F	T	F	F	T	T
F	F	T	T	T	T

Contoh 2.3 :

Tunjukkan bahwa $p \vee \sim(p \vee q)$ dan $p \vee \sim q$ keduanya ekivalen secara logika.

Penyelesaian:

$p \vee \sim(p \vee q) \equiv p \vee (\sim p \wedge \sim q)$ (Hukum De Morgan)

$\equiv (p \vee \sim p) \wedge (p \vee \sim q)$ (Hukum distributif)

$\equiv T \wedge (p \vee \sim q)$ (Hukum komplemen)

$\equiv p \vee \sim q$ (Hukum identitas)

Contoh 2.4 :

Buktikan hukum penyerapan: $p \wedge (p \vee q) \equiv p$

Penyelesaian:

$p \wedge (p \vee q) \equiv (p \vee F) \wedge (p \vee q)$ (Hukum Identitas)

$\equiv p \vee (F \wedge q)$ (Hukum Distributif)

$\equiv p \vee F$ (Hukum Idempoten)

$\equiv p$ (Hukum Identitas)

2.6 *Proposisi Bersyarat*

Proposisi bersyarat dalam kehidupan sehari-hari sering disebut sebagai kalimat sebab akibat. Contohnya adalah sebagai berikut:

a. Jika listrik menyala, maka komputer dapat dihidupkan.

b. Dini akan menjadi juara kelas jika dia rajin belajar.

Dalam logika operator proposisi bersyarat disebut juga sebagai operator **Kondisional atau Implikasi.**

Notasi : $\rightarrow$, Operator : “jika, maka”. Contoh: $p \rightarrow q$, berarti jika p maka q.

- Proposisi p disebut **hipotesis atau antesenden**.
- Proposisi q disebut **konklusi atau konsekuen**.

Contoh:

p : Iwan bangun jam 9 pagi.

q : Iwan terlambat kuliah.

$p \rightarrow q$: Jika Iwan bangun jam 9 pagi, maka dia terlambat kuliah.

Tabel kebenaran dari implikasi adalah:

p	q	$p \rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

Dari tabel tersebut dapat disimpulkan bahwa operasi implikasi hanya akan bernilai salah jika hipotesis bernilai benar dan konklusi bernilasi salah.

Terdapat beberapa cara lain dalam mengekspresikan bentuk implikasi selain jika p maka q. Misalkan terdapat pernyataan $p \rightarrow q$, dapat diekspresikan sebagai:

a. Jika p, maka q.

b. Jika p, q.

c. p mengakibatkan q.

d. q jika p.

e. p hanya jika q.

f. Syarat cukup bagi p adalah q. (**Hipotesis menyatakan syarat cukup**).

g. Syarat perlu bagi q adalah p. (**Konklusi menyatakan syarat perlu**).

h. p syarat cukup untuk q.

i. q syarat perlu untuk p.

j. q bilamana p.

Contoh 2.5 :

Ubahlah proposisi berikut ini menjadi bentuk proposisi bersyarat (jika p maka q):

a. Buah apel akan tumbuh dengan baik jika ditanam di dataran tinggi.

b. Kemarau berkepanjangan mengakibatkan banyak petani yang gagal panen.

c. Bus akan berangkat hanya jika semua tempat duduk sudah penuh.

d. Syarat cukup bagi kendaraan untuk melaju adalah sudah diisi bahan bakar.

e. Syarat perlu bagi Adi untuk bekerja adalah punya ijazah.

f. Bayi akan menangis bilamana dia lapar.

Jawaban:

a. Bentuk jika *p* maka *q*, setara dengan pernyataan *q* jika *p*.

► Jika buah apel ditanam di dataran tinggi, maka akan tumbuh dengan baik.

b. Bentuk jika *p* maka *q*, setara dengan pernyataan *p* mengakibatkan *q*.

► Jika terjadi kemarau berkepanjangan, maka banyak petani yang gagal panen.

c. Bentuk jika *p* maka *q*, setara dengan pernyataan *p* hanya jika *q*.

► Jika bus berangkat, maka semua tempat duduk sudah penuh.

d. Bentuk jika *p* maka *q*, setara dengan pernyataan syarat cukup bagi *q* adalah *p*.

► Jika sudah diisi bahan bakar, maka kendaraan bisa melaju.

e. **Bentuk jika p maka q, setara dengan pernyataan syarat perlu bagi p adalah q.**

► Jika Adi sudah bekerja, maka dia punya ijazah.

f. **Bentuk jika p maka q, setara dengan pernyataan q bilamana p.**

► Jika bayi lapar, maka dia akan menangis.

Contoh 2.6 :

Ubahlah proposisi berikut ini menjadi bentuk implikasi ($p \to q$):

Misalkan a : Rania rajin belajar.

b : Rania naik kelas.

a. Jika tidak rajin belajar, maka Rania akan naik kelas.
b. Rajin belajar mengakibatkan Rania naik kelas.
c. Rania tidak naik kelas hanya jika dia tidak rajin belajar.
d. Syarat cukup bagi Rania untuk naik kelas adalah rajin belajar.
e. Rajin belajar adalah syarat perlu bagi Rania untuk naik kelas.
f. Rania tidak naik kelas bilamana dia tidak rajin belajar.

Contoh 2.7 :

Tunjukkan bahwa $p \to q$ ekivalen secara logika dengan $\sim p \vee q$.

p	q	$\sim p$	$p \to q$	$\sim p \vee q$
T	T	F	T	T
T	F	F	F	F
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

Jadi pernyataan jika p maka q, ekivalen dengan tidak p atau q.

Contoh 2.8 :

Tentukan negasi dari $p \to q$.

$\sim(p \to q) \equiv \sim(\sim p \vee q)$

$\equiv p \wedge \sim q$ (Hukum De Morgan).

Jadi negasi dari pernyataan jika p maka q, adalah p dan tidak q.

Varian Proposisi Bersyarat

Untuk proposisi bersyarat , terdapat beberapa bentuk variasi:

1. Konvers (kebalikan) : $q \rightarrow p$
2. Invers : $\sim p \rightarrow \sim q$
3. Kontraposisi : $\sim q \rightarrow \sim p$

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$\sim p \rightarrow \sim q$	$\sim q \rightarrow \sim p$
T	T	F	F	T	T	T	T
T	F	F	T	F	T	T	F
F	T	T	F	T	F	F	T
F	F	T	T	T	T	T	T

Contoh 2.9 :

Tentukan konvers, invers, dan kontraposisi dari pernyataan berikut ini:

► Jika matahari terbit dari barat, maka dunia akan kiamat.

Jawaban:

- Konvers : Jika dunia akan kiamat, maka matahari terbit dari barat.
- Invers : Jika dunia tidak akan kiamat, maka matahari tidak terbit dari barat.
- Kontraposisi : Jika matahari tidak terbit dari barat, maka dunia tidak akan kiamat.

2.7 *Proposisi Bikondisional (Dwisyarat)*

Dalam logika operator proposisi bikondisional disebut juga sebagai operator **Biimplikasi.**

Notasi : $\leftrightarrow$, Operator : “jika dan hanya jika”. Contoh: $p \leftrightarrow q$, berarti p jika dan hanya jika q.

Contoh:

p : 10 adalah bilangan genap.

q : 2 adalah bilangan genap.

$p \leftrightarrow q$: 10 adalah bilangan genap jika dan hanya jika 2 bilangan genap.

Tabel kebenaran dari biimplikasi adalah:

p	q	$p \leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

Dari tabel tersebut dapat disimpulkan bahwa operasi biimplikasi hanya akan bernilai benar jika kedua proposisinya bernilai sama (sama-sama benar atau sama-sama salah).

Terdapat beberapa cara lain dalam mengekspresikan bentuk biimplikasi selain p jika dan hanya jika q. Misalkan terdapat pernyataan $p \leftrightarrow q$, dapat diekspresikan sebagai:

a. p adalah syarat perlu dan cukup untuk q.
b. Syarat cukup dan perlu p adalah q.
c. Jika p maka q, dan sebaliknya.
d. P iff q.

<u>Contoh 2.10 :</u>

Tunjukkan bahwa $p \leftrightarrow q$ ekivalen secara logika dengan $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$.

p	q	$p \leftrightarrow q$	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
T	T	T	T	T	T
T	F	F	F	T	F
F	T	F	T	F	F
F	F	T	T	T	T

Jadi pernyataan p jika dan hanya jika q, ekivalen dengan **jika p maka q dan jika q maka p**. Dengan kata lain, pernyataan tersebut bisa dinyatakan dengan kalimat **jika p maka q dan sebaliknya.**

<u>Contoh 2.11 :</u>

Ubahlah proposisi berikut ini menjadi bentuk proposisi bikondisional (p jika dan hanya jika q):

a. Jika harganya mahal maka barang itu kualitasnya baik dan jika kualitasnya baik maka barang itu harganya mahal.
b. Syarat cukup dan perlu agar anda lulus ujian adalah rajin belajar.
c. Jika jarak benda semakin jauh maka akan terlihat kecil, begitu juga sebaliknya.
d. Kendaraan terlihat bersih adalah syarat cukup dan perlu untuk kendaraan yang dicuci.

Jawaban:

a. Bentuk *p* jika dan hanya jika *q*, setara dengan pernyataan jika *p* maka *q* dan jika *q* maka *p*.

► Barang harganya mahal jika dan hanya jika kualitasnya baik.

b. Bentuk *p* jika dan hanya jika *q*, setara dengan pernyataan syarat cukup dan perlu *p* adalah *q*.

► Anda akan lulus ujian jika dan hanya jika anda rajin belajar.

c. Bentuk *p* jika dan hanya jika *q*, setara dengan pernyataan jika *p* maka *q* dan sebaliknya.

► Jarak benda semakin jauh jika dan hanya jika benda semakin terlihat kecil.

d. Bentuk *p* jika dan hanya jika *q*, setara dengan pernyataan *p* adalah syarat perlu dan cukup untuk *q*.

► Kendaraan terlihat bersih jika dan hanya jika kendaraan tersebut dicuci.

Teorema :

Dua buah proposisi majemuk, $P(p, q, ..)$ dan $Q(p, q, ..)$ disebut ekivalen secara logika, dilambangkan dengan $P(p, q, \ldots) \equiv Q(p, q, \ldots)$, jika $P \leftrightarrow Q$ adalah **tautologi**.

Contoh:

Periksalah dengan tabel kebenaran apakah proposisi $(-p \wedge q) \wedge (q \wedge p)$ adalah suatu Kontradiksi atau Tautologi.

Jawab:

p	q	$-p$	$-q$	$-p \wedge q$	$q \wedge p$	$(-p \wedge q) \wedge (q \wedge p)$
B	B	S	S	S	B	S

B	S	S	B	S	S	S
S	B	B	S	B	S	S
S	S	B	B	S	S	S

Jadi, pernyataan tersebut merupakan kontradiksi

2.8 Latihan Soal

1. Berikan satu contoh proposisi dan satu contoh yang bukan proposisi!
2. Buatlah proposisi dengan menggunakan operator:
   a. Konjungsi
   b. Disjungsi
   c. Ingkaran
3. Apakah proposisi $p \rightarrow (p \wedge q)$ dan $(p \wedge q) \rightarrow p$ ekivalen secara logika?(gunakan tabel kebenaran)
4. Tentukan konvers, invers, dan kontraposisi dari proposisi “Jika saya berlibur, maka saya senang”.

3 TEORI HIMPUNAN

Himpunan adalah kumpulan dari objek-objek yang berbeda. Dalam bahasa lain sering disebut sebagai set. Arti dari objek-objek itu adalah segala jenis objek yang nyata, contohnya adalah himpunan angka-angka, himpunan huruf, himpunan hewan, himpunan nama, dan lain-lain.

Objek-objek yang ada dalam sebuah himpunan disebut sebagai anggota himpunan, atau elemen himpunan. Notasi dalam matematika yang digunakan untuk menyatakan anggota atau elemen himpunan adalah $\in$.

- $x \in A$: x merupakan anggota himpunan A.
- $x \notin A$: x bukan merupakan anggota himpunan A.

3.1 Mendefinisikan Himpunan

Dalam matematika, terdapat beberapa cara untuk mendefinisikan atau menyatakan sebuah himpunan. Cara-cara menyatakan himpunan adalah sebagai berikut:

1. Enumerasi

Menyatakan sebuah himpunan dengan cara enumerasi adalah dengan menyebutkan satu persatu setiap anggota atau elemen himpunan tersebut. Contohnya adalah sebagai berikut:

- A = {0, 1, 2, 3, 4, 5}
- B = {a, i, u, e, o}
- C = {gajah, singa, monyet, jerapah, kuda, harimau}
- X = {2, 3, {5, 7}, { }, {11, 13, 17}, 19}
- Y = {a, {b, {x, y}, d}, {p, { }, q, {r, s}, o}, z}
- V = {...., -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ...}

2. Simbol Baku

Beberapa simbol huruf menyatakan suatu definisi himpunan yang spesifik. Simbol-simbol baku tersebut adalah sebagai berikut:

- P = himpunan bilangan bulat positif.
- Z = himpunan bilangan bulat.
- Q = himpunan bilangan rasional
- R = himpunan bilangan riil.
- U = himpunan semesta.

3. Notasi Pembentuk Himpunan

Notasi baku yang digunakan untuk menyatakan himpunan adalah:

$$\boxed{A = \{ x \mid \text{syarat yang harus dipenuhi oleh } x \}}$$

Contoh:

- $A = \{ x \mid x \text{ adalah bilangan bulat antara 0 sampai 10} \}$

  Dapat juga dinyatakan sebagai $A = \{ x \mid x \in Z, 0 < x < 10 \}$
- $B = \{ x \mid x \text{ adalah huruf vokal} \}$
- $C = \{ x \mid x \text{ adalah nama presiden-presiden Indonesia} \}$

4. Diagram Venn.

Himpunan juga dapat dinyatakan dalam bentuk diagram anggota himpunan yang disebut juga sebagai Diagram Venn.

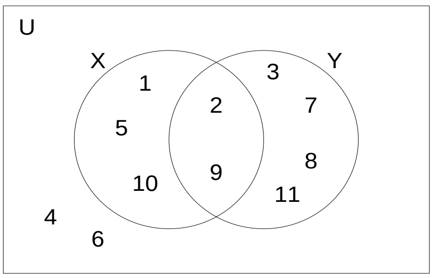
Contoh:

$X = \{1, 2, 5, 9, 10\}$

$Y = \{2, 3, 7, 8, 9, 11\}$

$U = \{ x \mid x \in P, x \leq 11 \}$

Diagram Venn dari ketiga himpunan di atas adalah:



3.2 *Himpunan Kosong*

Himpunan kosong adalah himpunan yang memiliki 0 anggota atau dengan kata lain tidak memiliki anggota. Cara menuliskan himpunan kosong adalah dengan notasi { } atau ∅.

Contoh:

- $A = \{\ \}$
- $B = \{ x \mid x$ adalah bilangan prima negatif $\}$
- $C = \{ x \mid x$ adalah negara dengan luas 1 m^2 $\}$
- $D = \{ x \mid x$ adalah akar-akar dari $x^2 + 4$ $\}$

3.3 *Kardinalitas Himpunan*

Kardinalitas adalah jumlah elemen yang ada pada sebuah himpunan. Kardinalitas dinyatakan dengan notasi $n(A)$ atau $|A|$, dimana A adalah nama sebuah himpunan.

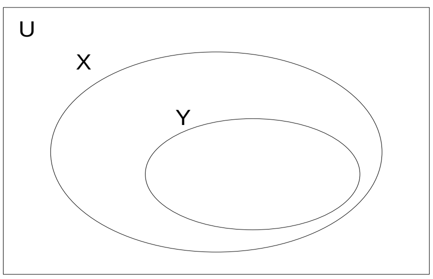
Contoh:

- $A = \{\ \}$, maka $|A| = 0$.
- $B = \{ x \mid x \in Z, 0 < x < 10 \}$, maka $|B| = 9$.
- $C = \{ x \mid x$ adalah huruf vokal $\}$, maka $|C| = 5$.
- $D = \{ 1, 2, \{ 4 \}, \{ 6, \{ 7, 9 \} \}, \{ 11 \} \}$, maka $|D| = 5$.

3.4 *Himpunan Bagian* (Subset)

Misalkan terdapat dua buah himpunan X dan Y. Jika setiap anggota himpunan X juga merupakan anggota himpunan Y, maka X disebut sebagai himpunan bagian dari Y. Dalam matematika X himpunan bagian dari Y dinotasikan dengan $X \subseteq Y$. Dalam hal ini Y disebut sebagai ***superset*** dari X.

Dalam diagram Venn, X dan Y digambarkan sebagai berikut:



Contoh:

- $\{ 2, 4, 6\} \subseteq \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \}$
- $\{ a, b, c \} \subseteq \{ a, b, c \}$
- $P \subseteq Z \subseteq R$

- $X = \{ x \mid x$ akar-akar dari $x^2 - 4 \}$ dan $Y = \{ x \mid x \in Z, -5 \leq x \leq 5 \}$, maka $X \subseteq Y$.

Misalkan terdapat himpunan X, maka untuk sembarang himpunan X berlaku hal sebagai berikut:

1. X adalah himpunan bagian dari himpunan itu sendiri ($X \subseteq X$).
2. Himpunan kosong adalah himpunan bagian dari X ($\varnothing \subseteq X$).
3. Jika $X \subseteq Y$ dan $Y \subseteq Z$, maka $X \subseteq Z$.

Jenis-jenis himpunan bagian:

1. ***Improper subset***, disebut juga sebagai **himpunan bagian tidak sebenarnya**. Dalam hal ini $\varnothing$ dan X merupakan improper subset dari X.
2. ***Proper subset***, disebut juga sebagai **himpunan bagian sebenarnya**. Dalam hal ini himpunan bagian selain $\varnothing$ dan himpunan itu sendiri merupakan proper set. Notasi dari proper set adalah $\subset$. Disebut $X \subset Y$ dimana $X \neq Y$.
3. **Himpunan bagian biasa** dengan notasi $\subseteq$. Disebut $X \subseteq Y$ dimana memungkinkan $X = Y$.

Dalam sebuah himpunan X dimungkinkan terdapat beberapa himpunan bagian yang menyusunnya. Himpunan dari semua himpunan bagian yang dapat menyusun himpunan X tersebut disebut sebagai **himpunan kuasa** (***power set***) dinotasikan dengan $P(X)$.

Contoh: $X = \{ 1, 3, 5 \}$

$$P(X) = \{\varnothing, \{ 1 \}, \{ 3 \}, \{ 5 \}, \{ 1, 3 \}, \{ 1, 5 \}, \{ 3, 5 \}, \{ 1, 3, 5 \}\}$$

Pada contoh tersebut, semua himpunan bagian dalam himpunan X disebutkan semuanya baik yang berupa *proper set* maupun *improper set*. Jumlah elemen dari sebuah himpunan kuasa tergantung dari jumlah anggota himpunan X. Rumusnya adalah sebagai berikut:

$$\boxed{\text{Jika } |X| = n, \text{ maka } |P(X)| = 2^n}$$

Pada kasus himpunan X:

$$|X| = 3, \text{ maka } |P(X)| = 2^3 = 8$$

3.5 Operasi Himpunan

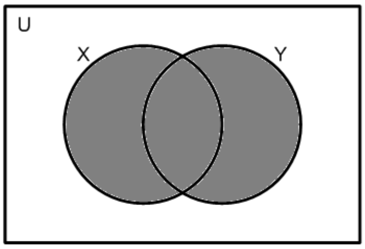
Seperti operasi aritmatika pada umumnya, antara dua himpunan juga dapat dioperasikan untuk menjadi sebuah himpunan lain yang baru. Terdapat enam operasi dasar himpunan, yaitu :

1. Gabungan (*union*).

Notasi : $\cup$

$$X \cup Y = \{ x \mid x \in X \text{ atau } x \in Y \}$$

Diagram Venn :



Contoh :

- Jika $X = \{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$, $Y = \{ 2, 4, 6, 8 \}$

  Maka $X \cup Y = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8 \}$
- Jika $M = \{ x \mid x \in P, 4 < x < 12 \}$, $N = \{ 2, 5, 7, 11, 13 \}$

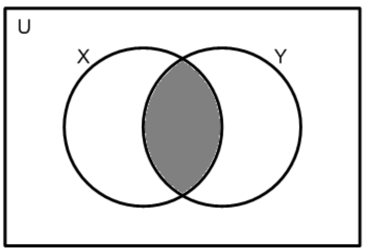
  Maka $M \cup N = \{ 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 13 \}$

2. Irisan (*intersect*).

Notasi : $\cap$

$$X \cap Y = \{ x \mid x \in X \text{ dan } x \in Y \}$$

Diagram Venn :



Contoh :

- Jika $X = \{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$, $Y = \{ 2, 4, 6, 8 \}$

Maka $X \cap Y = \{ 2, 4 \}$

- Jika $M = \{ x \mid x \in \text{P}, 4 < x < 12 \}$, $N = \{ 2, 5, 7, 11, 13 \}$

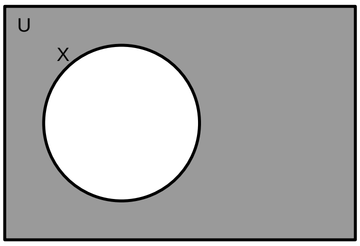
  Maka $M \cap N = \{ 5, 7, 11 \}$

3. Komplemen (*complement*).

Notasi : $\overline{X}$

$$\overline{X} = \{ x \mid x \in U \text{ dan } x \notin X \}$$

Diagram Venn :



Contoh :

- Jika $X = \{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$, $\text{U} = \{ x \mid x \in P, 0 < x < 10 \}$

  Maka $\overline{X} = \{ 6, 7, 8, 9 \}$

- Jika $U = \{ x \mid x \in P, 4 < x < 12 \}$, $N = \{ 5, 7, 9, 11 \}$

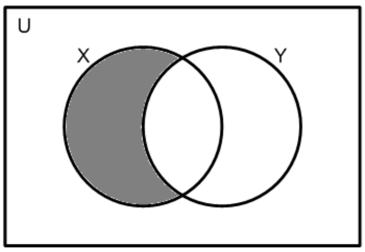
  Maka $\overline{N} = \{ 6, 8, 10 \}$

4. Selisih (*difference*).

Notasi : – (disebut juga **komplemen relatif atau *relative component***)

$$X - Y = \{ x \mid x \in X \text{ dan } x \notin Y \} = X \cap \overline{Y}$$

Diagram Venn :



Contoh :

- Jika $X = \{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$, $Y = \{ 2, 4, 6, 8 \}$

Maka $X - Y = \{ 1, 3, 5 \}$

- Jika $M = \{ x \mid x \in P, 4 < x < 12 \}$, $N = \{ 2, 5, 7, 11, 13 \}$

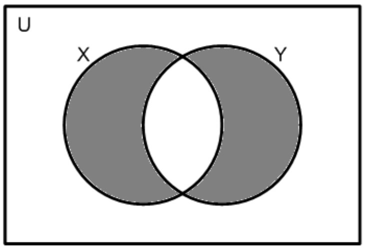
  Maka $M - N = \{ 6, 8, 9, 10 \}$

5. Beda setangkup (*symmetric difference*).

Notasi : $\oplus$

$$X \oplus Y = \{ x \mid x \in X \cup Y \text{ dan } x \notin X \cap Y \}$$
$$= (X \cup Y) - (X \cap Y)$$
$$= (X - Y) \cup (Y - X)$$

Diagram Venn :



Contoh :

- Jika $X = \{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$, $Y = \{ 2, 4, 6, 8 \}$

  Maka $X \oplus Y = \{ 1, 3, 5, 6, 8 \}$
- Jika $M = \{ x \mid x \in P, 4 < x < 12 \}$, $N = \{ 2, 5, 7, 11, 13 \}$

  Maka $M \oplus N = \{ 2, 6, 8, 9, 10, 13 \}$

6. Perkalian Cartesius (*Cartesian product*).

Notasi : $\times$

$$X \times Y = \{ (x, y) \mid x \in X \text{ dan } y \in Y \}$$

Contoh :

- Jika $X = \{ 1, 2, 3 \}$, $Y = \{ \text{y}, \text{z} \}$

  Maka $X \times Y = \{ (1, \text{y}), (1, \text{z}), (2, \text{y}), (2, \text{z}), (3, \text{y}), (3, \text{z}) \}$
- Jika $M = N = \text{R}$

  Maka $M \times N$ = himpunan semua koordinat pada bidang cartesian.
- Jika $A = \{ 0, 1 \}$, $B = \{ \text{x}, \text{y}, \text{z} \}$, $C = \{ \alpha, \beta \}$

  Maka $A \times B \times C = \{ (0, \text{x}, \alpha), (0, \text{x}, \beta), (0, \text{y}, \alpha), (0, \text{y}, \beta), (0, \text{z}, \alpha), (0, \text{z}, \beta),$

$(1, x, \alpha), (1, x, \beta), (1, y, \alpha), (1, y, \beta), (1, z, \alpha), (1, z, \beta) \}$

Sifat-sifat dari perkalian cartesian adalah:

a. $|X_1 \times X_2 \times X_2 \times \ldots \times Xn| = |X_1| \times |X_2| \times |X_2| \times \ldots \times |Xn|$

b. $(x, y) \neq (y, x)$

c. $X \times Y \neq Y \times X$

d. Jika $X = \varnothing$ dan $Y = \varnothing$, maka $X \times Y = \varnothing$

Contoh 3.1 :

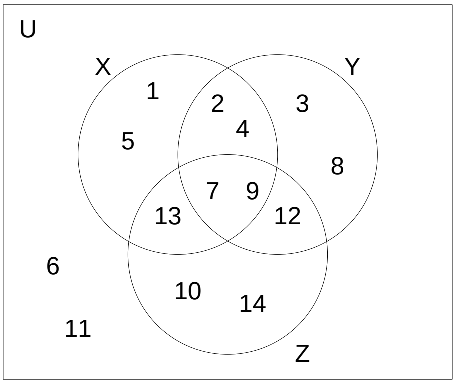
$X = \{ 1, 2, 4, 5, 7, 9, 13 \}$

$Y = \{ 2, 3, 4, 7, 8, 9, 12 \}$

$Z = \{ 7, 9, 10, 12, 13, 14 \}$

$U = \{ x \mid x \in \text{P}, 1 \leq x \leq 14 \}$

a. Diagram Venn



b. $X \cap (Y - Z)$

$(Y - Z) = \{ 2, 3, 4, 8 \}$

$X \cap (Y - Z) = \{ 2, 4 \}$

c. $(\overline{X \cup Y}) \cap (\overline{X \cup Z})$

$\overline{X \cup Y} = \{ 6, 10, 11, 14 \}$

$\overline{X \cup Z} = \{ 1, 5, 6, 11 \}$

$(\overline{X \cup Y}) \cap (\overline{X \cup Z}) = \{ 6, 11 \}$

d. $(\overline{X \oplus Y}) \cap (\overline{Z})$

$\overline{X \oplus Y} = \{ 2, 4, 6, 7, 9, 10, 11, 14 \}$

$\overline{Z} = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 11 \}$

$(\overline{X \oplus Y}) \cap (\overline{Z}) = \{ 2, 4, 6, 11)$

3.6 Keterkaitan Antar Himpunan

Keterkaitan antar himpunan menjelaskan tentang hubungan antara satu himpunan dengan himpunan yang lain. Antara dua himpunan bisa sama, atau ekivalen, atau saling lepas.

3.6.1 Himpunan yang sama

Himpunan X dan Y disebut sama jika setiap elemen X merupakan elemen Y dan setiap elemen Y merupakan elemen X. Dengan kata lain $X = Y$ jika dan hanya jika X himpunan bagian dari Y dan Y himpunan bagian dari X. Atau dengan notasi sebagai berikut:

$$\boxed{X = Y \leftrightarrow X \subseteq Y \text{ dan } Y \subseteq X}$$

Contoh himpunan yang sama adalah:

- $X = \{ \text{a, i, u, e, o} \}$, $Y = \{ x \mid x \text{ huruf vokal} \}$, maka $X = Y$.
- $A = \{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$, $B = \{ x \mid x \in P, x \leq 5 \}$, maka $A = B$

3.6.2 Himpunan yang ekivalen

Himpunan X dan Y disebut ekivalen jika jumlah elemen (kardinalitas) himpunan X sama dengan himpunan Y. Notasinya adalah sebagai berikut:

$$\boxed{X \approx Y \leftrightarrow |X| = |Y|}$$

Contoh himpunan yang ekivalen adalah:

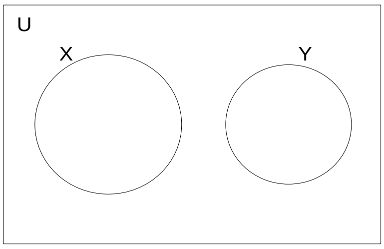
- $X = \{ \text{a, i, u, e, o} \}$, $Y = \{ x \mid x \in P, x \leq 5 \}$, maka $X \approx Y$ karena $|X| = |Y| = 5$.
- $A = \{ 2, 4, 6, 8 \}$, $B = \{ x \mid x \text{ bilangan prima lebih kecil dari 10} \}$, maka $A \approx B$.

3.6.3 Himpunan yang saling lepas (*disjoint*)

Himpunan X dan Y disebut saling lepas jika elemen dari himpunan X tidak merupakan elemen himpunan Y dan sebaliknya. sama dengan himpunan Y. Notasinya adalah adalah sebagai berikut :

$$X \mathbin{//} Y \leftrightarrow X \cap Y = \emptyset$$

Diagram Venn himpunan saling lepas:

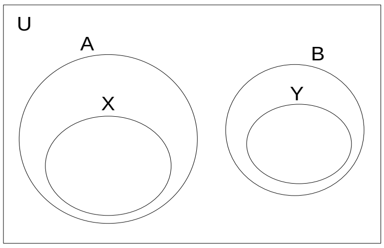


Contoh himpunan yang saling lepas adalah:

- $X = \{ a, i, u, e, o \}$, $Y = \{ x \mid x \in P, x \leq 5 \}$, maka X // Y.
- $A = \{ 4, 6, 8 \}$, $B = \{ x \mid x$ bilangan prima lebih kecil dari 10 }, maka $A \mathbin{//} B$.

Terdapat kasus khusus pada himpunan yang saling lepas, yaitu ketika dua buah himpunan X dan Y merupakan himpunan yang **saling lepas murni** (***pairwise disjoint***) jika X dan Y merupakan himpunan bagian dari dua himpunan yang berbeda.

Diagram Venn himpunan X dan Y yang saling lepas murni:



3.7 Hukum-hukum pada Himpunan

Beberapa hukum dasar pada himpunan adalah sebagai berikut:

1. Hukum Asosiatif.

- ► $X \cup (Y \cup Z) = (X \cup Y) \cup Z$
- ► $X \cap (Y \cap Z) = (X \cap Y) \cap Z$

2. Hukum Komutatif

- $X \cup Y = Y \cup X$
- $X \cap Y = Y \cap X$

3. Hukum Distributif

- $X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$
- $X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$

4. Hukum Identitas

- $X \cup \varnothing = X$
- $X \cap U = X$

5. Hukum Komplemen

- $X \cup \overline{X} = U$
- $X \cap \overline{X} = \varnothing$

6. Hukum Idempoten

- $X \cup U = X$
- $X \cap \varnothing = \varnothing$

7. Hukum Penyerapan

- $X \cup (X \cap Y) = X$
- $X \cap (X \cup Y) = X$

8. Hukum Involusi

- $\overline{\overline{X}} = X$

9. Hukum 0/1

- $\overline{\varnothing} = U$
- $\overline{U} = \varnothing$

10. Hukum De Morgan untuk himpunan

- $\overline{X \cup Y} = \overline{X} \cap \overline{Y}$
- $\overline{X \cap Y} = \overline{X} \cup \overline{Y}$

3.8 Prinsip Inklusi - Eksklusi

$$|X \cup Y| = |X| + |Y| - |X \cap Y|$$
$$|X \oplus Y| = |X| + |Y| - 2|X \cap Y|$$

Contoh 3.2 :

Pertanyaan:

► Berapa banyak bilangan bulat mulai dari 1 sampai 1000 yang habis dibagi 4 atau 5.

Jawaban:

X = himpunan bilangan bulat mulai dari 1 sampai 1000 yang habis dibagi 4.

Y = himpunan bilangan bulat mulai dari 1 sampai 1000 yang habis dibagi 5.

$U = \{ x \mid x \in Z, 1 \leq x \leq 1000 \}$

$X \cap Y$ = himpunan bilangan bulat mulai dari 1 sampai 1000 yang habis dibagi 4 dan 5.

$|X| = 1000/4 = 250$

$|Y| = 1000/5 = 200$

$|X \cap Y| = 1000/20 = 50$

Jumlah bilangan bulat yang habis dibagi 4 atau 5 = $|X \cup Y|$

$|X \cup Y| = |X| + |Y| - |X \cap Y|$

$= 250 + 200 - 50 = 400$

Jadi ada 400 bilangan mulai dari 1 sampai 1000 yang habis dibagi 4 atau 5.

Contoh 3.3 :

Pertanyaan:

► Berapa banyak bilangan bulat mulai dari 100 sampai 1000 yang habis dibagi 5 atau 7 tapi tidak keduanya.

Jawaban:

X = himpunan bilangan bulat mulai dari 100 sampai 1000 yang habis dibagi 5.
= himpunan bilangan bulat mulai dari 96 sampai 1000 yang habis dibagi 5.

Y = himpunan bilangan bulat mulai dari 100 sampai 1000 yang habis dibagi 7.
= himpunan bilangan bulat mulai dari 99 sampai 1000 yang habis dibagi 7.

$X \cap Y$ = himpunan bilangan bulat mulai dari 1 sampai 1000 yang habis dibagi 5 dan 7.
= himpunan bilangan bulat mulai dari 99 sampai 1000 yang habis dibagi 35.

$U = \{ x \mid x \in Z, 100 \leq x \leq 1000 \}$

$|X| = 905/5 = 181$

$|Y| = 901/7 = 128$

$|X \cap Y| = 901/35 = 25$

Jumlah bil. bulat yang habis dibagi 5 atau 7 tapi tidak keduanya = $|X \oplus Y|$

$|X \oplus Y| = |X| + |Y| - 2|X \cap Y|$

$= 181 + 128 - 2 \times 25 = 259$

Jadi ada 259 bilangan mulai dari 100 sampai 1000 yang habis dibagi 5 atau 7 tetapi tidak keduanya.

3.9 Latihan Soal

5. Terdapat himpunan pertama yang terdiri dari elemen-elemen: 2,4,6,8,10 dan himpunan kedua yang terdiri dari elemen-elemen: 1,2,3,4,5,6,7
   a. Sajikan himpunan pertama dan himpunan kedua tersebut dengan enumerasi!
   b. Sajikan himpunan pertama dan himpunan kedua tersebut dengan notasi himpunan!
   c. Berapa kardinal himpunan pertama dan himpunan kedua?
   d. Berapa banyak himpunan kuasa dari himpunan pertama dan himpunan kedua?
6. Terdapat himpunan $U = \{1,2,3,\ldots,20\}, A = \{1,4,9,16\}, B = \{2,4,6,8,10,12\}, C = \{1,3,5,7,9,11\}$
   a. Tentukan $A \cap B$
   b. Tentukan $B \cup C$
   c. Tentukan $A \oplus B$
   d. Tentukan $A \cup B \cup C$
   e. Buatlah diagram Venn nya!
7. Dalam sekelompok anak terdapat 20 anak gemar basket, 15 anak gemar bulu tangkis, 12 anak gemar keduanya, dan 7 anak tidak gemar basket dan bulutangkis.
   a. Buatlah diagram Venn berdasarkan keterangan tersebut!
   b. Berapa banyak anak dalam kelompok itu?

4 INDUKSI MATEMATIKA

Induksi matematika adalah salah satu metode dalam matematika untuk membuktikan pernyataan matematika atau proposisi. Pernyataan matematika atau proposisi tersebut lebih dikhususkan pada pernyataan perihal bilangan bulat atau *integer*.

Contoh pertama adalah induksi matematika dapat digunakan untuk membuktikan rumus jumlah sebuah deret aritmatika, dimana deret tersebut terdiri atas n bilangan.

Deret aritmatika : $1+2+3+4+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

Contoh lain adalah tentang deret n bilangan ganjil pertama. Perhatikan urutan berikut ini:

$$1=1^2$$

$$1+3=2^2$$

$$1+3+5=3^2$$

$$1+3+5+7=4^2$$

$$1+3+5+7+\ldots+(2n-1)=n^2$$

Dengan kata lain jumlah deret tersebut dapat kita generalisasikan untuk n bilangan ganjil pertama. Apakah pernyataan tersebut benar untuk semua nilai $n \geq 1$?. Dan masih banyak lagi pernyataan matematika perihal bilangan bulat yang membutuhkan pembuktian dengan induksi matematika.

Induksi matematika adalah sebuah metode yang baku dalam matematika dan **hanya** digunakan untuk membuktikan pernyataan matematika, bukan untuk menemukan sebuah rumus matematika. Induksi matematika dipergunakan secara luas untuk membuktikan pernyataan yang berkaitan dengan obyek diskrit, dalam hal ini adalah kompleksitas algoritma, teorema mengenai graf, identitas, dan ketidaksamaan yang melibatkan bilangan bulat, dsb.

4.1 Prinsip Induksi Matematika

Dalam melakukan pembuktian dengan induksi matematika, ada dua langkah utama yang harus ditempuh secara berurutan. Langkah tersebut adalah:

1. Langkah dasar (*basis step*).

- ► Sebuah pernyataan P(n) bernilai benar jika P(n_o) bernilai benar. Variabel n_o disini adalah nilai paling kecil yang disyaratkan pada pernyataan P(n).
- ► Pada pernyataan tentang deret aritmatika dan bilangan ganjil di atas, nilai n_o adalah 1. Jadi P(n) benar jika P(1) juga benar.

2. Langkah induksi (*induction step*).

- ► Sebuah pernyataan P(n) bernilai benar jika P(n+1) bernilai benar.

4.2 Pembuktian dengan Induksi Matematika

Pernyataan yang dapat dibuktikan dengan induksi matematika adalah jenis pernyataan yang berkaitan dengan bilangan bulat. Oleh karena itu untuk selanjutnya semua pernyataan merupakan himpunan bagian dari bilangan bulat, tanpa menyebutkan syarat dimana n adalah bilangan bulat.

<u>Contoh 4.1 :</u>

<u>Pertanyaan:</u>

Buktikan deret aritmatika berikut ini:

$$\mathrm{P}(n): \quad 1+2+3+4+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}, \text{ untuk } n \geq 1$$

<u>Jawaban:</u>

Digunakan langkah-langkah induksi matematika sebagai berikut:

1. Langkah dasar, dimana P(1) harus benar.

$$1=\frac{1(1+1)}{2}$$

$$1=1 \qquad \text{(Benar untuk } n = 1\text{)}$$

2. Langkah induksi, dimana P(n+1) harus benar.

$$1+2+3+4+\ldots+n+(n+1)=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Kita uraikan bagian sebelah kiri:

$$1+2+3+4+\ldots+n+(n+1) = \frac{n(n+1)}{2}+(n+1)$$
$$= \frac{n(n+1)}{2}+\frac{2(n+1)}{2}$$
$$= \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Langkah induksi bernilai benar maka pernyataan P(n) bernilai benar untuk semua nilai $n \geq 1$.

Contoh 4.2 :

Pertanyaan:

Buktikan deret aritmatika berikut ini:

$$\text{P}(n): \quad 1+3+5+7+\ldots+(2n-1)=n^2\text{, untuk } n \geq 1$$

Jawaban:

Digunakan langkah-langkah induksi matematika sebagai berikut:

1. Langkah dasar, dimana P(1) harus benar.

   $1 = 1^2$
   $1 = 1$ (Benar untuk n = 1)

2. Langkah induksi, dimana P(n+1) harus benar.

   $$1+3+5+7+\ldots+(2n-1)+(2n+1)=(n+1)^2$$

   Kita uraikan bagian sebelah kiri:

   $$1+3+5+7+\ldots+(2n-1)+(2n+1) = n^2+(2n+1)$$
   $$= (n+1)^2$$

   Langkah induksi bernilai benar maka pernyataan P(n) bernilai benar untuk semua nilai $n \geq 1$.

Contoh 4.3 :

Pertanyaan:

Tunjukkan bahwa P(n) : $n < 2^n$, untuk $n \geq 1$

Jawaban:

Digunakan langkah-langkah induksi matematika sebagai berikut:

1. Langkah dasar, dimana P(1) harus benar.

   $1 < 2^1$

$1 < 2$ (Benar untuk $n = 1$)

2. Langkah induksi, dimana P(n+1) harus benar.

$$n+1 < 2^{n+1}$$

Kita uraikan bagian sebelah kiri:

$$\begin{aligned} n+1 &< 2^n + 1 \\ &< 2^n + 2^n \\ &< 2^{n+1} \end{aligned}$$

Langkah induksi bernilai benar maka pernyataan P(n) bernilai benar untuk semua nilai $n \geq 1$.

<u>Contoh 4.4 :</u>

<u>Pertanyaan:</u>

Tunjukkan bahwa P(n) : $5^n - 1$ selalu habis dibagi 4 , untuk $n \geq 1$

<u>Jawaban:</u>

Digunakan langkah-langkah induksi matematika sebagai berikut:

1. Langkah dasar, dimana P(1) harus benar.

$5^1 - 1 = 4$ (Benar untuk $n = 1$)

2. Langkah induksi, dimana P(n+1) harus benar.

$5^{n+1} - 1$ selalu habis dibagi 4

Kita uraikan rumus tersebut:

$$\begin{aligned} 5^{n+1} - 1 &= 5 \cdot 5^n - 1 \\ &= (4+1) \cdot 5^n - 1 \\ &= 4 \cdot 5^n + 5^n - 1 \end{aligned}$$

Karena $4 \cdot 5^n$ habis dibagi 4 dan $5^n - 1$ juga habis dibagi 4, maka pernyataan P(n) bernilai benar untuk semua nilai $n \geq 1$.

<u>Contoh 4.5 :</u>

<u>Pertanyaan:</u>

Tunjukkan bahwa jika A adalah himpunan terhingga dengan n anggota, maka A mempunyai 2^n himpunan bagian, untuk $n \geq 0$.

<u>Jawaban:</u>

$P(n)$: himpunan dengan n anggota mempunyai 2^n himpunan bagian.

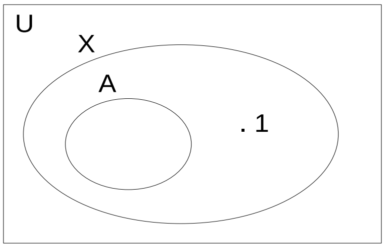
Digunakan langkah-langkah induksi matematika sebagai berikut:

1. Langkah dasar, dimana P(1) harus benar.

   Himpunan dengan 0 anggota punya 1 himpunan bagian.

2. Langkah induksi, dimana $P(n+1)$ harus benar.

   Misalkan X adalah himpunan dengan anggota sebanyak n+1, dimana $X = A \cup \{1\}, 1 \in X$.



   X memiliki himpunan bagian sejumlah himpunan bagian A dikombinasikan dengan elemen 1, dengan kata lain setiap himpunan bagian 1 himpunan bagian yang ada di A diwakili oleh 2 himpunan bagian X. Jadi jumlah himpunan bagian X sama dengan 2 kali himpunan bagian A.

   Jika himpunan bagian A sejumlah 2^n, maka jumlah himpunan bagian X sejumlah $2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$.

Contoh 4.6 :

Pertanyaan:

Tunjukkan bahwa surat pos dengan biaya perangko 5 rupiah atau lebih, bisa hanya dengan menggunakan perangko 2 rupiah atau 5 rupiah.

Jawaban:

$P(n)$: surat pos dengan biaya perangko 5 rupiah atau lebih, bisa hanya dengan menggunakan perangko 2 rupiah atau 5 rupiah.

Digunakan langkah-langkah induksi matematika sebagai berikut:

1. Langkah dasar, dimana P(5) harus benar.

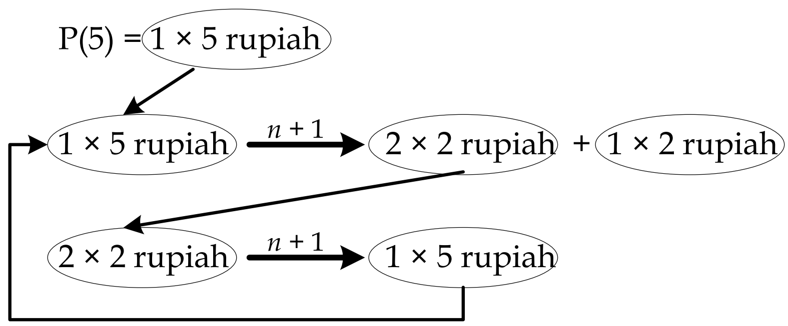
   Surat pos dengan biaya 5 rupiah bisa menggunakan 1 perangko 5 rupiah.

2. Langkah induksi, dimana $P(n+1)$ harus benar.

Jika hipotesa P(n) benar sehingga P(n+1) juga benar, maka ada dua kemungkinan cara perubahan dari n menjadi n+1, yaitu:

a. Sebuah perangko 5 rupiah diganti dengan tiga buah perangko 2 rupiah.

b. Dua buah perangko 2 rupiah diganti dengan sebuah perangko 5 rupiah.



Karena setiap biaya surat sebesar n+1 dapat digantikan dengan perangko 2 rupiah dan 5 rupiah, maka pernyataan P(n) bernilai benar untuk semua nilai $n \geq 5$.

4.3 Latihan Soal

Buktikan dengan induksi matematika untuk setiap pernyataan berikut ini:

1. $2 + 4 + 6 + \ldots + 2n = n(n + 1)$, untuk $n \geq 1$
2. $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, untuk $n \geq 1$
3. $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \ldots + n \cdot n! = (n + 1)! - 1$, untuk $n \geq 1$
4. $1^2 - 2^2 + 3^2 - \ldots + (-1)^{n+1} n^2 = \dfrac{(-1)^{n+1} n(n+1)}{2}$, untuk $n \geq 1$
5. $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \ldots + n)^2$, untuk $n \geq 1$
6. $1 + r + r^2 + \ldots + r^n = \dfrac{r^{n+1} - 1}{r - 1}$, untuk $n \geq 0$ dan $r \neq 0$
7. $\dfrac{1}{2^2 - 1} + \dfrac{1}{3^2 - 1} + \ldots + \dfrac{1}{(n+1)^2 - 1} = \dfrac{3}{4} - \dfrac{1}{2(n+1)} - \dfrac{1}{2(n+2)}$, untuk $n \geq 1$
8. Tunjukkan bahwa jika X_1, X_2, ... , X_n , dan X_1 adalah himpunan, maka:

   a. $X \cap (X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_n) = (X \cap X_1) \cup (X \cap X_2) \cup \ldots \cup (X \cap X_n)$

b. $\overline{X_1 \cap X_2 \cap \ldots \cap X_n} = \overline{X_1} \cup \overline{X_2} \cup \ldots \cup \overline{X_n}$

9. Tunjukkan bahwa:
   a. $11^n - 6$ selalu habis dibagi 5, untuk $n \geq 1$
   b. $6 \cdot 7^n - 2 \cdot 3^n$ selalu habis dibagi 4, untuk $n \geq 1$
   c. $n^3 + 2n$ selalu habis dibagi 3, untuk $n \geq 1$
   d. Jumlah pangkat tiga dari tiga bilangan bulat positif berurutan selalu habis dibagi 9.
10. Tunjukkan bahwa:
    a. $2n + 1 \leq 2^n$, untuk $n \geq 3$
    b. $2^n \geq n^2$, untuk $n \geq 4$
11. Tunjukkan bahwa:
    a. Surat pos dengan biaya perangko 8 rupiah atau lebih, bisa hanya dengan menggunakan perangko 3 rupiah atau 5 rupiah.
    b. Surat pos dengan biaya perangko 13 rupiah atau lebih, bisa hanya dengan menggunakan perangko 3 rupiah atau 7 rupiah.
    c. Surat pos dengan biaya perangko 24 rupiah atau lebih, bisa hanya dengan menggunakan perangko 5 rupiah atau 7 rupiah.
    d. Surat pos dengan biaya perangko 10 rupiah atau lebih, bisa hanya dengan menggunakan perangko 5 rupiah, 6 rupiah, atau 7 rupiah.

5 Sistem Bilangan

Dalam kehidupan nyata kita mengenal sistem bilangan desimal yang menggunakan sepuluh simbol bilangan. Mungkin sebuah kebetulan jika kita memakai sistem bilangan desimal selama ini karena jumlah jari tangan manusia normal adalah sepuluh buah. Sehingga setiap simbol bilangan yang ada mewakili setiap anggota jari-jari tangan manusia. Lalu bagaimana jika Tuhan menciptakan jari-jari manusia tidak sejumlah sepuluh buah?. Seandainya jumlah jari tangan manusia normal sebanyak 16 buah, mungkin kita tidak memakai sistem bilangan desimal, tetapi memakai sistem bilangan heksadesimal.

Dalam dunia komputer sebenarnya tidak mengenal sistem bilangan yang menjadi acuan baku. Pada operasi paling dasar, komputer menggunakan sistem bilangan biner untuk merepresentasikan setiap data maupun perintah. Sistem bilangan heksadesimal digunakan untuk merepresentasikan pengalamatan memori pada komputer, begitu juga dengan sistem bilangan oktal.

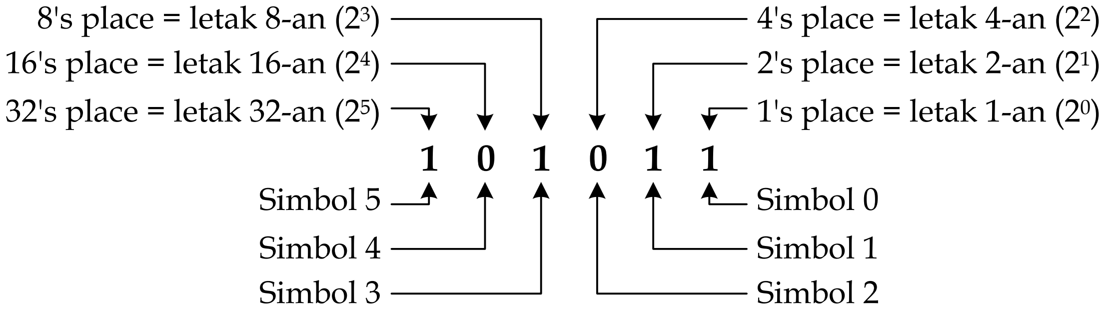
5.1 Sistem Bilangan pada Komputer

Pada sistem komputer, sistem bilangan yang dipakai ada 4 macam, yaitu:

1. **Sistem bilangan biner.**

   Simbol bilangan : 0 dan 1.

   Contoh : 10, 1011, 101011, 1110111, 100001111, dsb.

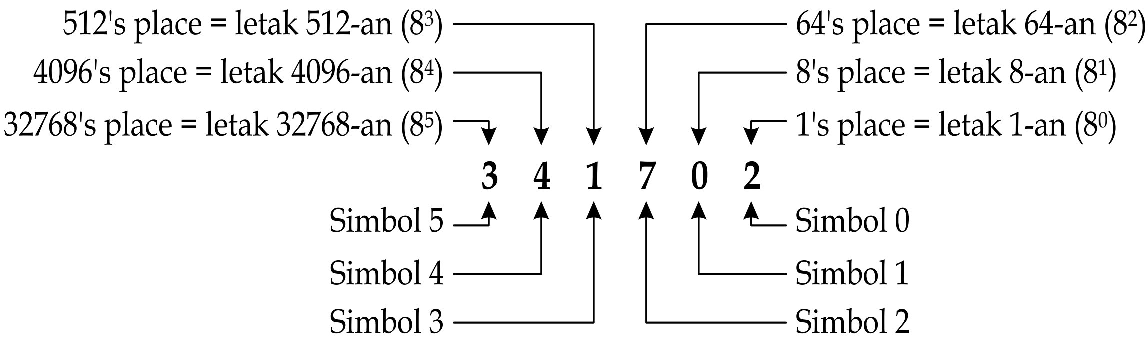


   Bilangan biner merupakan sistem bilangan yang digunakan pada operasi dasar komputer (sistem benar atau salah). Karena setiap data dan perintah yang ada pada komputer direpresentasikan dengan bilangan biner, maka bilangan biner sangat mutlak digunakan pada komputer.

2. Sistem bilangan oktal.

Simbol bilangan : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, dan 7.

Contoh : 16, 317, 341072, 6504722, dsb.

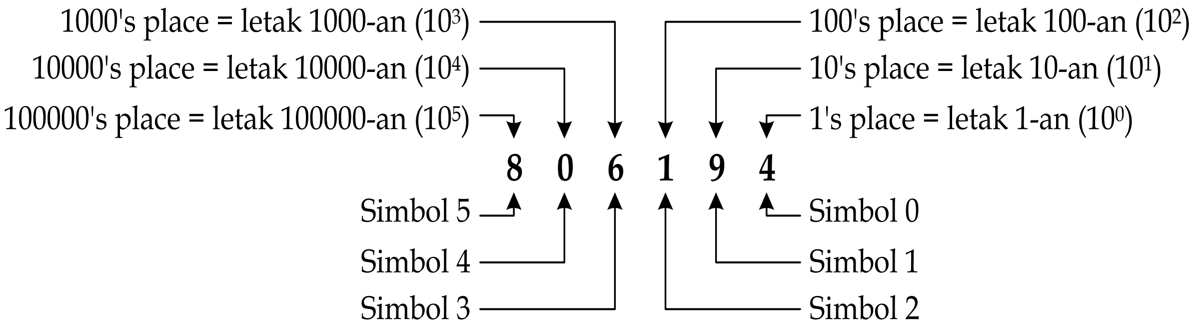


Bilangan oktal digunakan pada sistem komputer karena digunakan untuk penyederhanaan bilangan biner, dimana $8 = 2^3 . 2^0$

3. Sistem bilangan desimal.

Simbol bilangan : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, dan 9.

Contoh : 8, 12, 1543, 806194, 3289723489, dsb.

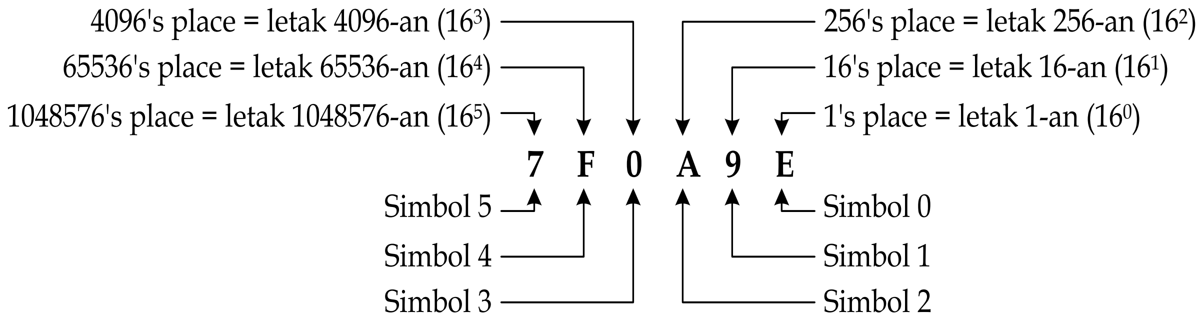


Bilangan desimal sebenarnya tidak digunakan sekali pada pengoperasian sistem komputer, karena bukan bilangan logaritmik dari 2 (sistem biner). Bilangan desimal "terpaksa" harus ditangani oleh komputer karena manusia memakai sistem desimal dalam kehidupan nyata. Oleh karena itu bilangan biner ada pada komputer praktis hanya karena kebutuhan manusia sebagai pengguna komputer.

4. Sistem bilangan heksadesimal.

Contoh : 12, A1BE, 2D3AF, 7F0A9E, FAEDCFCB, dsb.

Simbol bilangan : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, dan F.



Bilangan heksadesimal digunakan pada sistem komputer karena digunakan untuk penyederhanaan bilangan biner, dimana $16 = 2^4$. Bilangan heksadesimal digunakan pada pengalamatan ruang memori dan register. Selain itu masih banyak lagi penggunaan bilangan heksadesimal pada komputer, seperti untuk pengalamatan alamat IP, kode assembly, dll.

5.2 *Penulisan Baku Sistem Bilangan*

Oleh karena setiap sistem bilangan menggunakan simbol bilangan yang sama antara satu dengan yang lain, maka dalam beberapa kasus sulit untuk menentukan apakah sebuah angka menggunakan sistem desimal atau yang lain. Semakin tinggi tingkatan sistem bilangan semakin banyak pula simbol yang digunakan. Semua simbol yang ada pada sistem biner terdapat juga di sistem oktal, semua simbol yang ada di sistem oktal terdapat juga di sistem desimal, dan seterusnya.

Sebagai contoh adalah bilangan 10. Jika tanpa atribut apapun, sulit untuk menentukan apakah angka tersebut sebagai sistem biner, oktal, desimal, atau heksadesimal, karena simbol 1 dan 0 digunakan pada sistem biner, oktal, desimal, maupun heksadesimal. Berbeda dengan angka 3EC, angka tersebut sudah jelas sebagai sistem heksadesimal, karena simbol E dan C tidak ada dalam sistem biner, oktal, dan desimal.

Oleh karena itu untuk memperjelas sistem yang dipakai pada sebuah bilangan, perlu dituliskan subscript (tulisan menjorok ke bawah) dari nilai sistem bilangan yang dipakai. Contohnya adalah:

- Bilangan biner 10010 dapat ditulis 10010_2.
- Bilangan oktal 3610 dapat ditulis 2610_8.
- Bilangan desimal 16822 dapat ditulis 16822_{10}.
- Bilangan heksadesimal C58FB dapat ditulis $C58FB_{16}$.

5.3 *Konversi Bilangan*

Dari keempat sistem bilangan tersebut, kita dapat mengkonversikan sebuah bilangan ke bentuk sistem bilangan yang lain. Sebagai contoh angka 10_{10} sama dengan 1010_2 sama dengan 12_8 sama dengan A_{16}. Pada subbab ini akan dipelajari tentang konversi dari sebuah sistem bilangan ke tiga sistem bilangan yang lain.

Terdapat dua cara untuk mengkonversikan dari satu sistem bilangan ke sistem bilangan yang lain, yaitu:

1. Operasi desimal, cara ini khusus digunakan untuk konversi dari atau ke sistem bilangan desimal. Pada beberapa kasus bisa digunakan tabel konversi bilangan dasar dari desimal ke sistem bilangan lain.

Tabel 5.1 : Konversi dari Desimal ke Biner, Oktal, dan Heksadesimal

No.	Desimal	Biner	Oktal	Heksadsml
1	0	0	0	0
2	1	1	1	1
3	2		2	2
4	3		3	3
5	4		4	4
6	5		5	5
7	6		6	6
8	7		7	7
9	8			8
10	9			9
11	10			A
12	11			B

13	12			C
14	13			D
15	14			E
16	15			F

2. Tabel konversi, cara ini khusus digunakan untuk konversi dari atau ke sistem bilangan biner, oktal, dan heksadeimal. Hal ini disebabkan karena 2, 8, dan 16 berhubungan secara 2^n. Tabel konversi adalah sebagai berikut :

Tabel 5.2 : Konversi Oktal-Biner dan Heksadesimal-Biner

No.	Oktal	Biner
1	0	000
2	1	001
3	2	010
4	3	011
5	4	100
6	5	101
7	6	110
8	7	111

No.	Heksadsml	Biner
1	0	0000
2	1	0001
3	2	0010
4	3	0011
5	4	0100
6	5	0101
7	6	0110
8	7	0111
9	8	1000
10	9	1001
11	A	1010
12	B	1011
13	C	1100
14	D	1101
15	E	1110
16	F	1111

5.3.1 Dari Bilangan Biner

Dari bilangan biner kita dapat mengkonversikan ke sistem oktal, desimal dan heksa desimal. Sebagai contoh bilangan biner 1101100_2, dikonversikan ke:

1. Bilangan oktal.

Konversi dari biner ke oktal dapat menggunakan tabel 5.2 konversi oktal-biner. Langkah-langkah untuk mengkonversi adalah:

a. Jumlah digit bilangan harus dijadikan sejumlah kelipatan 3 dengan cara menambahkan angka 0 di depan bilangan:

$1101100_2 = 001101100_2$

b. Konversi biner ke oktal dengan memecah menjadi beberapa segmen dan setiap segmen terdiri atas 3 digit angka:

$$\underbrace{001}_{1}\ \underbrace{101}_{5}\ \underbrace{100}_{4}$$

Jadi bilangan $1101100_2 = 154_8$.

2. Bilangan desimal.

Setiap digit bilangan biner menyatakan nilai 2^n tergantung dari posisinya. Penulisan bilangan 1101110_2 dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$1101100_2 = 1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$$

Oleh karena itu untuk mengkonversi ke sistem desimal, dapat dilakukan dengan cara mengkalikan setiap digit bilangan biner dengan 2^n tergantung pada posisinya. Dengan menghitung ruas sebelah kanan dengan sistem desimal, didapatkan hasil sebagai berikut:

$$\begin{aligned} 1101100_2 &= 1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 \\ &= 64 + 32 + 0 + 8 + 4 + 0 + 0 \\ &= 108_{10} \end{aligned}$$

Jadi bilangan $1101100_2 = 108_{10}$.

3. Bilangan heksadesimal.

Sama seperti bilangan biner ke heksadesimal, konversi dari biner ke oktal dapat menggunakan tabel 5.2 konversi heksadesimal-biner. Langkah-langkah untuk mengkonversi adalah:

a. Jumlah digit bilangan harus dijadikan sejumlah kelipatan 4 dengan cara menambahkan angka 0 di depan bilangan:

$1101100_2 = 01101100_2$

b. Konversi biner ke oktal dengan memecah menjadi beberapa segmen dan setiap segmen terdiri atas 3 digit angka:

$$\underbrace{0110}_{6}\ \underbrace{1100}_{C}$$

Jadi bilangan $1101100_2 = 6C_{16}$.

5.3.2 Dari Bilangan Oktal

Sebagai contoh bilangan oktal 2175_8, dikonversikan ke:

1. Bilangan biner.

Konversi dari oktal ke biner dapat menggunakan tabel 5.2 konversi oktal-biner. Langkah-langkah untuk mengkonversi adalah:

a. Konversi dari oktal ke biner dengan melihat tabel 5.2:

$$\underbrace{2}_{010}\quad \underbrace{1}_{001}\quad \underbrace{7}_{111}\quad \underbrace{5}_{101}$$

$2175_8 = 010\ 001\ 111\ 101_2$

b. Menghilangkan angka 0 di depan angka:

$010\ 001\ 111\ 101_2 = 10001111101_2$

Jadi bilangan $2175_8 = 10001111101_2$.

2. Bilangan desimal.

Setiap digit bilangan oktal menyatakan nilai 8^n tergantung dari posisinya. Penulisan bilangan 2175_8 dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$2175_8 = 2 \cdot 8^3 + 1 \cdot 8^2 + 7 \cdot 8^1 + 5 \cdot 8^0$$

Dengan menghitung ruas sebelah kanan dengan sistem desimal, didapatkan hasil sebagai berikut:

$$\begin{aligned} 2175_8 &= 2 \cdot 8^3 + 1 \cdot 8^2 + 7 \cdot 8^1 + 5 \cdot 8^0 \\ &= 2 \cdot 512 + 1 \cdot 64 + 7 \cdot 8 + 5 \cdot 1 \\ &= 1024 + 64 + 56 + 5 = 1149_{10} \end{aligned}$$

Jadi bilangan $2175_8 = 1149_{10}$.

3. Bilangan heksadesimal.

Untuk mengkonversi bilangan oktal ke heksadesimal, terdapat dua cara yang dapat ditempuh, yaitu:

a. Mengkonversi dulu bilangan oktal ke biner, setelah itu dikonversikan ke heksadesimal. Cara ini bisa dilakukan dengan melihat tabel 5.2. Langkah-langkahnya adalah sebagai berikut:

i. Pada penghitungan sebelumnya, telah didapatkan nilai biner dari 2175_8, yaitu: $2175_8 = 10001111101_2$.

ii. Setelah itu bilangan 10001111101_2 dikonversikan ke heksadesimal.

$10001111101_2 = 010001111101_2$

$$\underbrace{0100}_{4}\ \underbrace{0111}_{7}\ \underbrace{1101}_{D}$$

Jadi bilangan $2175_8 = 47D_{16}$.

b. Cara kedua adalah dengan mengkonversikan dulu ke bilangan desimal, langkah-langkahnya adalah sebagai berikut:

i. Pada penghitungan sebelumnya, telah didapatkan nilai desimal dari 2175_8, yaitu: $2175_8 = 1149_{10}$.

ii. Setelah itu bilangan 1149_{10} dikonversikan ke heksadesimal.

$1149_{10} = 47D_{16}$

Jadi bilangan $2175_8 = 47D_{16}$.

5.3.3 Dari Bilangan Desimal

Sebagai contoh bilangan desimal 3862_{10}, dikonversikan ke:

1. Bilangan biner.

Konversi dari desimal ke biner dilakukan dengan membalik proses konversi dari biner ke desimal. Langkah-langkah untuk mengkonversi adalah:

Pembagi		Sisa bagi
	3862	
2	1931	0
2	965	1
2	482	1
2	241	0
2	120	1
2	60	0
2	30	0
2	15	0
2	7	1
2	3	1
2	1	1

Hasil konversi

Bilangan 3862 dibagi 2 sama dengan 1931 sisa 0, lalu 1931 dibagi 2 sama dengan 965 sisa 1, lalu 965 dibagi 2 sama dengan 482 sisa 1, dan seterusnya sampai dengan berhenti pada angka 0 atau 1.

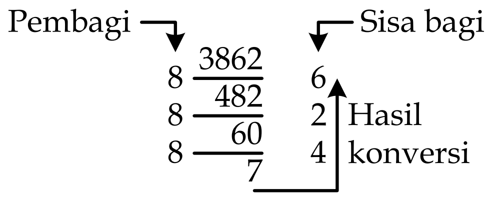
Dari proses tersebut dihasilkan rumus sebagai berikut:

$$3862_{10} = 1 \cdot 2^{11} + 1 \cdot 2^{10} + 1 \cdot 2^{9} + 1 \cdot 2^{8} + 0 \cdot 2^{7} + 0 \cdot 2^{6} + 0 \cdot 2^{5} + 1 \cdot 2^{4} + 0 \cdot 2^{3} + 1 \cdot 2^{2} + 1 \cdot 2^{1} + 0 \cdot 2^{0}$$

Jadi bilangan $3862_{10} = 111100010110_{2}$.

2. Bilangan oktal.

Konversi dari desimal ke biner dilakukan dengan membalik proses konversi dari oktal ke desimal. Langkah-langkah untuk mengkonversi adalah:



Bilangan 3862 dibagi 8 sama dengan 482 sisa 6, lalu 482 dibagi 8 sama dengan 60 sisa 2, dan seterusnya sampa berhenti pada angka yang lebih kecil dari 8.

Dari proses tersebut dihasilkan rumus sebagai berikut:

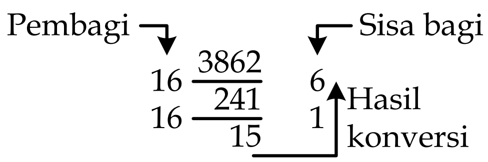
$$3862_{10} = 7 \cdot 8^{3} + 4 \cdot 8^{2} + 2 \cdot 8^{1} + 6 \cdot 8^{0}$$

Jadi bilangan $3862_{10} = 7426_{8}$.

3. Bilangan heksadesimal.

Untuk mengkonversi bilangan desimal ke heksadesimal, langkah awalnya sama dengan kedua langkah di atas, yaitu membagi bilangan dengan 16. Langkah-langkahnya adalah:

a. Proses pembagian dengan 16.



Bilangan 3862 dibagi 16 sama dengan 241 sisa 6, lalu 241 dibagi 16 sama dengan 15 sisa 1, dan seterusnya sampa berhenti pada angka yang lebih kecil dari 16.

Dari proses tersebut dihasilkan rumus sebagai berikut:

$$3862_{10} = 15 \cdot 16^2 + 1 \cdot 16^1 + 6 \cdot 16^0$$

b. Konversi bilangan dasar desimal ke heksadesimal.

Bilangan hasil pembagian dengan 16 masih dalam bentuk desimal, oleh karena itu harus dikonversikan ke bentuk heksadesimal dengan melihat tabel 5.1, dimana $15_{10} = F_{16}$, $1_{10} = 1_{16}$, dan $6_{10} = 6_{16}$.

Jadi rumus sebelumnya dapat dituliskan sebagai berikut:

$$3862_{10} = F_{16} \cdot 16^2 + 1_{16} \cdot 16^1 + 6_{16} \cdot 16^0$$

Jadi bilangan $3862_{10} = F16_{16}$.

5.3.4 Dari Bilangan Heksadesimal

Sebagai contoh bilangan oktal $5DB8_{16}$, dikonversikan ke:

1. Bilangan biner.

Konversi dari heksadesimal ke biner dapat menggunakan tabel 5.2 konversi heksadesimal-biner. Langkah-langkah untuk mengkonversi adalah:

a. Konversi dari oktal ke biner dengan melihat tabel 5.2:

$$\underbrace{\quad 5 \quad}_{0101}\ \underbrace{\quad D \quad}_{1101}\ \underbrace{\quad B \quad}_{1011}\ \underbrace{\quad 8 \quad}_{1000}$$

$5DB8_8 = 0101\ 1101\ 1011\ 1000_2$

b. Menghilangkan angka 0 di depan angka:

$0101\ 1101\ 1011\ 1000_2 = 101110110111000_2$

Jadi bilangan $5DB8_8 = 101110110111000_2$.

2. Bilangan desimal.

Setiap digit bilangan heksadesimal menyatakan nilai 16^n tergantung dari posisinya. Penulisan bilangan $5DB8_{16}$ dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$5DB8_8 = 5_{16} \cdot 16^3 + D_{16} \cdot 16^2 + B_{16} \cdot 16^1 + 8_{16} \cdot 16^0$$

Dengan mengkonversikan bilangan dasar heksadesimal ke desimal dengan melihat tabel 5.1, maka ruas kanan dapat dijabarkan sebagai berikut berikut:

$$5DB8_{8} = 5_{16} \cdot 16^{3} + D_{16} \cdot 16^{2} + B_{16} \cdot 16^{1} + 8_{16} \cdot 16^{0}$$
$$= 5 \cdot 16^{3} + 13 \cdot 16^{2} + 11 \cdot 16^{1} + 8 \cdot 16^{0}$$
$$= 5 \cdot 4096 + 13 \cdot 256 + 11 \cdot 16 + 8 \cdot 1$$
$$= 20480 + 3328 + 176 + 8 = 1149_{10}$$

Jadi bilangan $5DB8_{16} = 23992_{10}$.

3. Bilangan heksadesimal.

Untuk mengkonversi bilangan heksadesimal ke oktal, terdapat dua cara yang dapat ditempuh, yaitu:

a. Mengkonversi dulu bilangan heksadesimal ke biner, setelah itu dikonversikan ke oktal. Cara ini bisa dilakukan dengan melihat tabel 5.2. Langkah-langkahnya adalah sebagai berikut:

   i. Pada penghitungan sebelumnya, telah didapatkan nilai biner dari $5DB8_{16}$, yaitu: $5DB8_{16} = 101110110111000_{2}$.

   ii. Setelah itu bilangan 101110110111000_{2} dikonversikan ke oktal.

   $10001111101_{2} = 101\ 110\ 110\ 111\ 000_{2}$

   $$\underbrace{101}_{5}\ \underbrace{110}_{6}\ \underbrace{110}_{6}\ \underbrace{111}_{7}\ \underbrace{000}_{0}$$

   Jadi bilangan $5DB8_{16} = 56670_{8}$.

b. Cara kedua adalah dengan mengkonversikan dulu ke bilangan desimal, langkah-langkahnya adalah sebagai berikut:

   i. Pada penghitungan sebelumnya, telah didapatkan nilai desimal dari $5DB8_{16}$, yaitu: $5DB8_{16} = 23992_{10}$.

   ii. Setelah itu bilangan 23992_{10} dikonversikan ke oktal.

   $23992_{10} = 56670_{8}$

   Jadi bilangan $5DB8_{16} = 56670_{8}$.

5.4 Operasi Bilangan

Sistem bilangan selain desimal juga bisa dioperasikan dengan operasi-operasi dasar matematika, seperti penambahan, pengurangan, perkalian, dan pembagian. Cara paling sederhana untuk mengoperasikan bilangan selain desimal adalah dengan mengkonversikan dulu ke dalam desimal, baru dioperasikan dan dikonversikan lagi ke bentuk awalnya.

Contohnya adalah sebagai berikut:

1. $10111001_2 + 110111_2 = 185_{10} + 55_{10}$
   $= 240_{10}$
   $= 11110000_2$
2. $772465_8 + 52163_8 = 259381_{10} + 21619_{10}$
   $= 281000_{10}$
   $= 1044650_6$
3. $FB34A_{16} + CF63_{16} = 1028938_{10} + 53091_{10}$
   $= 1082029_{10}$
   $= 1082AD_{16}$

Mungkin cara tersebut terlihat sederhana, namun pada prakteknya kita harus mengkonversikan dulu setiap bilangan yang ada dan mengembalikannya lagi ke dalam bentuk semula. Proses konversi ini tentu saja butuh waktu yang tidak singkat, sehingga proses menjumlahkan menjadi lebih lama.

5.4.1 Penjumlahan Bilangan

Seperti sudah pernah diajarkan pada waktu sekolah dasar, teknik penjumlahan bilangan dilakukan pada tiap satuan-satuan bilangan. Contoh paling mudah pada penjumlahan desimal adalah penjumlahan 472 + 655 :

$$\begin{array}{r} 472 \\ +\ \ 655 \\ \hline \end{array} \longrightarrow \begin{array}{r} 472 \\ +\ \ 655 \\ \hline 7 \end{array} \text{ sisa} = 0 \longrightarrow \begin{array}{r} 472 \\ +\ \ 655 \\ \hline 27 \end{array} \text{ sisa} = 1$$

$$\begin{array}{r} 472 \\ +\ \ 655 \\ \hline 127 \end{array} \text{ sisa} = 1 \longrightarrow \begin{array}{r} 472 \\ +\ \ 655 \\ \hline 1127 \end{array}$$

Penjumlahan dimulai dari simbol ke-0 sampai simbol ke-*n*, tergantung jumlah digit bilangan. Pada contoh di atas, penjumlahan 472 + 655 dimulai dari menjumlahkan 2 + 5 sampai dengan 4 + 6. Jika hasil penjumlahan lebih dari 9, maka cukup ditulis simbol ke-0 hasil penjumlahan, simbol ke-1 disimpan sebagai sisa. Pada penjumlahan berikutnya, sisa tersebut harus diikutkan pada penjumlahan sampai dengan proses penjumlahan seluruh digit selesai. Jika masih ada sisa, maka sisa tersebut dituliskan pada digit paling depan hasil penjumlahan (seperti contoh di atas).

Pada penjumlahan bilangan biner, oktal, dan heksadesimal, sebenarnya memiliki proses yang sama dengan penjumlahan bilangan desimal. Hanya saja kita harus mematuhi batasan pada setiap sistem bilangan yang ada. Sebagai contoh, jika terjadi penjumlahan 5 + 6 pada sistem oktal, hasilnya bukan 11, melainkan 13. Begitu juga dengan biner penjumlahan 1 + 1 bukan 2 tetapi 10, dan pada heksadesimal penjumlahan 7 + 4 bukan 11 melainkan B.

Sebagai contoh akan diberikan penjumlahan pada sistem biner, oktal, dan heksedesimal sebagai berikut:

1. Penjumlahan Biner.

Contoh : $10111001_2 + 110111_2 = 11110000_2$

```
 10111001              10111001                   10111001
+  110111             +  110111  sisa = 1         +  110111  sisa = 1
----------            ----------                  ----------
                              0                           00

                       10111001                   10111001
                      +  110111  sisa = 1         +  110111  sisa = 1
                      ----------                  ----------
                            000                         0000

                       10111001                   10111001
                      +  110111  sisa = 1         +  110111  sisa = 1
                      ----------                  ----------
                          10000                       110000

                       10111001                   10111001
                      +  110111  sisa = 0         +  110111
                      ----------                  ----------
                        1110000                     11110000
```

Penjumlahan antar digit hasilnya tidak akan lebih dari 2 digit, karena maksimum nilai yang mungkin ada adalah 1 + 1 + 1 = 11.

2. Penjumlahan Oktal.

   Contoh : $713465_8 + 52163_8 = 1044650_8$

```
   772465           772465                 772465
+   52163  -->  +    52163  sisa = 1  -->  +   52163  sisa = 1
----------      ----------                 ----------
                         0                        50

                    772465                 772465
                +    52163  sisa = 0  -->  +   52163  sisa = 0
                ----------                 ----------
                       650                      4650

                    772465                 772465
                +    52163  sisa = 1  -->  +   52163  sisa = 1
                ----------                 ----------
                     44650                    044650

                    772465
                +    52163
                ----------
                   1044650
```

   Penjumlahan antar digit hasilnya tidak akan lebih dari 2 digit, karena maksimum nilai yang mungkin ada adalah 7 + 7 + 1 = 17.

3. **Penjumlahan Heksadesimal.**

   Contoh : $FB34A_{16} + CF63_{16} = 1082AD_{16}$

```
    FB34A           FB34A                  FB34A
+    CF63  -->  +    CF63  sisa = 0  -->  +    CF63  sisa = 0
---------       ---------                 ---------
                        D                        AD

                    FB34A                  FB34A
                +    CF63  sisa = 1  -->  +    CF63  sisa = 1
                ---------                 ---------
                      2AD                      92AD

                    FB34A                  FB34A
                +    CF63  sisa = 1  -->  +    CF63
                ---------                 ---------
                    082AD                    1082AD
```

   Penjumlahan antar digit hasilnya tidak akan lebih dari 2 digit, karena maksimum nilai yang mungkin ada adalah F + F + 1 = 1F.

5.5 Latihan Soal

1. Konversikan bilangan 3248_8 kedalam bentuk biner, desimal, dan heksadesimal!
2. Hitunglah hasil dari $E452A_{16} + 68BC1_{16} =$

6 RELASI DAN FUNGSI

Dalam informatika, data dan tabel merupakan hal yang sangat penting untuk diolah. Setiap tabel pasti akan berkaitan dengan tabel yang lain, terutama dalam basisdata relasional. Sebagai contoh sebuah tabel A berisi daftar mahasiswa dan tabel B adalah daftar dosen pengajar mata kuliah. Relasi antara tabel A dan tabel B akan membentuk tabel pengajaran, contohnya adalah Adi diajar oleh Pak Joko, dan Anya diajar oleh Pak Darmo.

Pada matematika informatika hubungan-hubungan tersebut didefinisikan pada sebuah relasi. Bab ini akan membahas tentang relasi, fungsi, dan cara untuk menggambarkannya.

6.1 Relasi

Relasi adalah himpunan hubungan antara anggota-anggota himpunan. Relasi dapat dibayangkan sebagai tabel yang mendaftar hubungan antar anggota himpunan satu dengan anggota yang lainnya.

<u>Contoh 6.1 :</u>

P = { Sapi, Gurita, Kodok, Merpati, Paus, Semut }

Q = { Air, Darat, Udara }

Misalkan R adalah himpunan relasi yang menyatakan tempat kehidupan hewan-hewan di himpunan P, maka R adalah:

R = { (Sapi, Darat), (Gurita, Air), (Kodok, Darat), (Kodok, Air),
(Merpati, Darat), (Merpati, Udara), (Paus, Air), (Semut, Darat) }

Semua kemungkinan relasi antara elemen-elemen pada dua buah himpunan adalah **hasil kali kartesian** antara kedua himpunan tersebut.

<u>Contoh 6.2 :</u>

X = { 1, 2, 3 }

Y = { a, b, c, d }

R adalah himpunan relasi setiap elemen X berelasi dengan setiap elemen Y.

R = {(1, a), (1, b), (1, c), (1, d), (2, a), (2, b), (2, c), (2, d), (3, a), (3, b), (3, c), (3, d)}

$= X \times Y$

Jadi relasi antara dua buah himpunan merupakan himpunan bagian dari **hasil kali kartesian** antara dua buah himpunan tersebut.

$$\boxed{R \subseteq (X \times Y)}$$

Jika $x \in X$ dan $y \in Y$, maka relasi antara x dan y dapat dituliskan sebagai $x\ R\ y$, dimana $(x, y) \in R$. Dengan kata lain x dikaitkan dengan y oleh R. Pada kasus $X = Y$, maka R disebut sebagai *relasi* (*binair*) pada X.

Definisi-definisi pada relasi adalah sebagai berikut:

- ► $x\ R\ y$ disebut x dikaitkan dengan y oleh R (x berelasi dengan y).
- ► $x \not R\ y$ disebut x tidak memiliki kaitan dengan y (x tidak berelasi dengan y).
- ► Himpunan $\{ x \in X \mid (x, y) \in R$ untuk beberapa $y \in Y \}$, disebut daerah asal (*domain*).
- ► Himpunan $\{ y \in Y \mid (x, y) \in R$ untuk beberapa $x \in X \}$, disebut daerah hasil (*range*).

Pada contoh 6.1 dapat dilihat bahwa:

a. $R \subseteq (X \times Y)$

b. X adalah himpunan asal dan Y adalah himpunan hasil.

c. (Gurita, Air) $\in R$, sehingga Gurita R Air.

d. (Gurita, Darat) $\notin R$, sehingga Gurita $\not R$ Darat.

Contoh 6.3 :

$A = \{ 1, 3, 5 \}$

$B = \{ 5, 6, 7, 8\}$

R adalah relasi dimana $(a, b) \in R$ jika selisih b terhadap a lebih besar dari 2, maka diperoleh himpunan R adalah:

R = {(1, 5), (1, 6), (1, 7), (1, 8), (3, 6), (3, 7), (3, 8), (5, 8)}

Relasi pada sebuah himpunan disebut sebagai relasi khusus, dimana relasinya adalah himpunan bagian dari perkalian himpunan dengan himpunan itu sendiri.

<u>Contoh 6.4 :</u>

$A = \{ 2, 3, 4, 6, 9 \}$

R adalah relasi dimana $(a, b) \in R$ jika a merupakan kelipatan dari b, maka diperoleh himpunan R adalah:

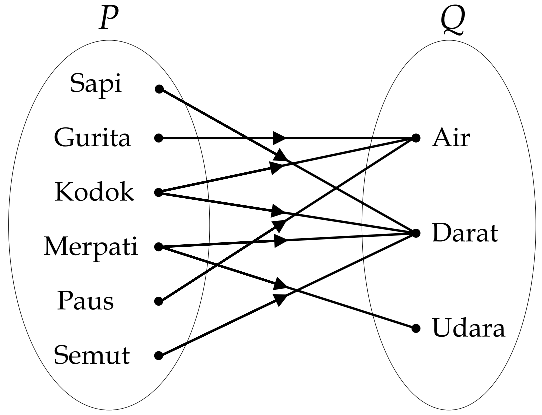
$R = \{(2, 2), (2, 4), (2, 6), (3, 3), (3, 6), (3, 9), (4, 4), (6, 6), (9, 9)\}$

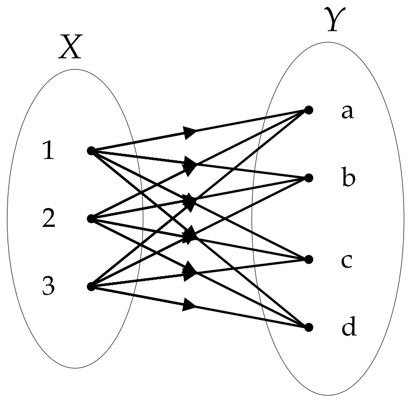
6.1.1 Representasi Relasi

Himpunan relasi dapat direpresentasikan dalam berbagai cara, yaitu:

1. **Diagram Panah**

   Pada contoh 6.1 dan 6.2 digambarkan sebagai berikut:





2. **Tabel Relasi**

   Kolom pertama pada tabel disebut daerah asal dan kolom kedua disebut daerah hasil. Contoh 6.1, 6.2, dan 6.4 dapat digambarkan sebagai berikut:

P	*Q*
Sapi	Darat
Gurita	Air
Kodok	Air
Kodok	Darat
Merpati	Darat
Merpati	Udara
Paus	Air
Semut	Darat

A	*B*
1	5
1	6
1	7
1	8
3	6
3	7
3	8
5	8

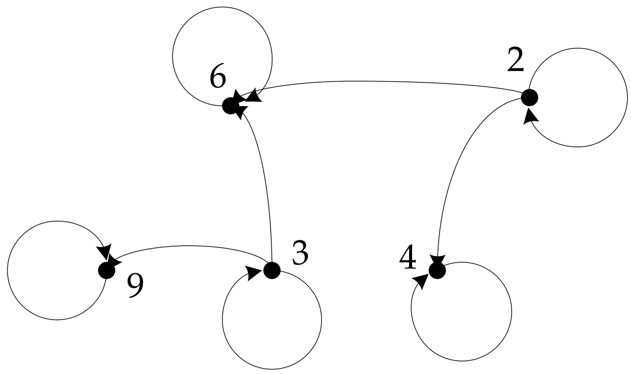
A	*A*
2	2
2	4
2	6
3	3
3	6
3	9
4	4
6	6
9	9

3. Graf Berarah/Digraf (Directed Graph/Digraph).

Salah satu cara untuk menggambarkan **relasi antar elemen pada sebuah himpunan** adalah dengan menggunakan digraf. Jadi digraf tidak digunakan untuk merepresentasikan relasi antara dua himpunan. Dari beberapa contoh di atas, hanya contoh 6.4 saja yang dapat digambarkan dalam bentuk digraf. Ketentuan dari digraf adalah:

a. Setiap elemen pada sebuah himpunan dinyatakan dalam bentuk titik, dimana dalam graf disebut sebagai simpul (*vertex*).
b. Setiap pasangan terurut dari dua buah elemen yang berelasi dinyatakan dalam bentuk busur (*arc*).
c. Sebuah relasi *x R y* akan membentuk busur dari *x* menuju *y*, sehingga *x* disebut sebagai simpul asal (*initial vertex*) dan simpul *y* disebut simpul tujuan (*terminal vertex*).
d. Pada kasus sebuah elemen himpunan berelasi dengan dirinya sendiri (*x R x*), maka busur yang menyatakan relasi *x R x* disebut sebagai *loop*.

Contoh 6.4 dapat digambarkan sebagai digraf berikut ini:



4. Matriks Biner

Matriks biner menyatakan relasi antara dua elemen himpunan dimana jika punya kaitan akan bernilai 1 dan jika tidak punya kaitan akan bernilai 0. Misalkan jika $X = (x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$ dan $Y = (y_1, y_2, y_3, ..., y_n)$, sehingga R disajikan sebagai matriks $M = [m_{ij}]$.

Bentuk matriks *M* adalah:

$$M = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{array} \\ \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{21} & \cdots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ m_{m1} & m_{m2} & \cdots & m_{mn} \end{bmatrix} \end{array}, \text{ dimana } m_{ij} = \begin{cases} 1, & (x_i, y_j) \in R \\ 0, & (x_i, y_j) \notin R \end{cases}$$

Contoh 6.1 dapat digambarkan sebagai berikut:

$$\begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} y_1 & y_2 & y_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Dimana :

- x_1 = Sapi, x_2 = Gurita, x_3 = Kodok, x_4 = Merpati, x_5 = Paus, dan x_6 = Semut
- y_1 = Air, y_2 = Darat, dan y_3 = Udara

Matriks contoh 6.2 :

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Matriks contoh 6.4 :

$$\begin{array}{c} \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 6 \\ 9 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 2 & 3 & 4 & 6 & 9 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

6.1.2 Invers Relasi

Jika *R* adalah relasi dari himpunan *X* ke himpunan *Y*, maka invers dari *R* adalah relasi dari *Y* ke *X*. Invers dari relasi *R* dilambangkan dengan R^{-1}, yaitu relasi dari *X* ke *Y*, yang didefinisikan sebagai berikut:

$$\boxed{R^{-1} = \{ (y, x) \mid (x, y) \in R \}}$$

<u>Contoh 6.5 :</u>

A = { 1, 2, 3, 4 }

B = { 2, 4, 6, 8, 9, 12}

R adalah relasi dimana $(a, b) \in R$ jika a habis membagi b, maka diperoleh himpunan R adalah:

R = { (1, 2), (1, 4), (1, 6), (1, 8), (1, 9), (1, 12), (2, 2), (2, 4), (2, 6) , (2, 8), (2, 12), (3, 6) , (3, 9) , (3, 12) , (4, 4) , (4, 8) , (4, 12) }

Invers relasi R adalah R^{-1}. R^{-1} adalah relasi dimana $(b, a) \in R$ jika b merupakan kelipatan dari a, maka diperoleh himpunan R^{-1} adalah:

R^{-1} = { (2, 1), (2, 2), (4, 1), (4, 2), (4, 4), (6, 1), (6, 2), (6, 3) , (8, 1) , (8, 2) , (8, 4) , (9, 1) , (9, 3), (12, 1) , (12, 2) , (12, 3) , (12, 4) }

Jika R digambarkan sebagai matriks relasi M, maka matriks relasi dari adalah transposes dari matriks M.

Matriks dari R :

$$M = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 2 & 4 & 6 & 8 & 9 & 12 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Matriks contoh R^{-1} :

$$N = M^T = \begin{array}{c} \\ 2 \\ 4 \\ 6 \\ 8 \\ 9 \\ 12 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

6.2 *Fungsi*

Fungsi (*function*) adalah jenis khusus dari relasi. Jika X dan Y adalah himpunan, maka relasi f dari X ke Y disebut fungsi jika **setiap elemen** pada X dihubungkan dengan **tepat satu** elemen di Y. Jadi agar f merupakan sebuah fungsi, domain dari f harus sama dengan X dan jika (x, y) dan (x, z) berada di f, maka $y = z$. Nama lain dari fungsi adalah **pemetaan** atau **transformasi**.

Fungsi f dari X ke Y adalah relasi dari X ke Y yang mempunyai sifat:

1. Domain dari f adalah X.
2. Jika $(x, y), (x, z) \in f$, maka $y = z$.

Fungsi f dari X ke Y dapat dinotasikan sebagai berikut:

$$\boxed{f : X \to Y}$$

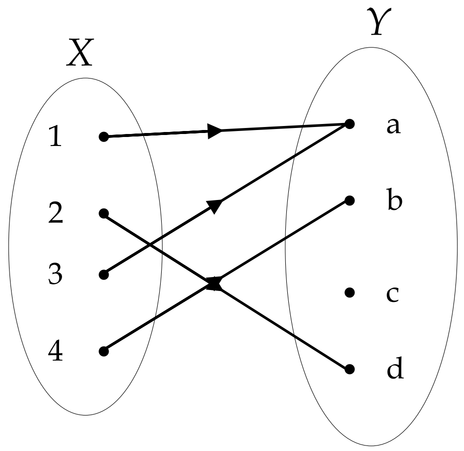
Contoh 6.6 :

$X = \{ 1, 2, 3, 4 \}$

$Y = \{ a, b, c, d \}$

f adalah contoh relasi yang merupakan sebuah fungsi.

$f = \{(1, a), (2, d), (3, a), (4, b) \}$



Jika $f(x) = y$, maka y disebut bayangan (*image*) dan y disebut **pra-bayangan** (*pre-image*) dari y. Himpunan Y yang berisi semua nilai pemetaan f disebut jelajah (*range*) dari f. Sehingga *range* dari f merupakan himpunan bagian dari Y.

6.3 Latihan Soal

1. Tulislah pasangan terurut pada relasi R dari $A = \{0,1,2,3,4,5\}$, $B = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ yang dalam hal ini pasangan terurut $(a, b) \in R$ jika dan hanya jika a habis membagi b!
2. Misalkan $A = \{1,2,3,4\}$ dan $R = \{(1,1), (1,3), (1,4), (2,3), (2,4), (3,1), (2,2), (4,1), (3,3), (3,2), (4,4), (4,2)\}$. Apakah relasi dari himpunan A tersebut bersifat refleksif, menghantar, setangkup, dan tolak setangkup? Beri alasan!
3. Terdapat fungsi $f = \{(2, b), (4, u), (5, p), (2, t)\}$ dan fungsi $g = \{(u, 2), (b, 5), (t, 2), (p, 2)\}$. Tentukan gof!

7 KOMBINATORIAL

Pada subbab yang membahas tentang himpunan bagian, himpunan kuasa atau *power set* adalah semua kombinasi himpunan bagian yang terjadi pada sebuah himpunan. Pada bab ini akan dibahas tentang cara mendapatkan semua kombinasi yang terjadi pada sebuah kasus.

Kombinatorial adalah ilmu yang mempelajari penghitungan jumlah penyusunan atau kombinasi objek-objek tanpa harus mengenumerasinya. Pada kasus lain seperti :

a. berapa jumlah kombinasi password yang disusun dari 3 buah karakter
b. berapa jumlah kombinasi warna yang tersusun atas nilai 16 digit biner.
c. berapa jumlah kombinasi dari pasangan yang dipilih dari 10 orang peserta, dll.

7.1 Kaidah Penjumlahan dan Perkalian

Dalam banyak kasus kombinatorial, seringkali ditemui tentang istilah percobaan. Percobaan (*experiment*) adalah suatu proses fisik yang mempunyai sejumlah hasil percobaan (*outcomes*) yang dapat diamati. Sebagai contoh adalah kasus memasukkan sebuah kelereng ke dalam sebuah kantung, memasukkan kelereng ke dalam beberapa kantung, memilih 3 perwakilan mahasiswa, melemparkan 2 keping koin, dan menggulirkan sebuah dadu, kesemuanya itu termasuk pada percobaan.

Kaidah untuk menghitung hasil-hasil percobaan ada dua, yaitu:

1. **Kaidah perkalian (*rule of product*).**

   Bila sebuah percobaan memiliki x hasil dan percobaan kedua memiliki y hasil yang mungkin terjadi, maka bila kedua percobaan itu dilakukan akan menghasilkan $x \times y$ hasil percobaan.

   Contohnya adalah misalkan terdapat sebuah koin yang memiliki 2 kemungkinan hasil dan sebuah dadu yang memiliki 6 kemungkinan hasil, maka jika kedua benda tersebut digabungkan dalam sebuah percobaan, maka akan dihasilkan 2×6 kombinasi dari keduanya.

2. **Kaidah penjumlahan (rule of sum).**

   Bila sebuah percobaan memiliki x hasil dan percobaan kedua memiliki y hasil yang mungkin terjadi, maka bila kedua percobaan itu dilakukan akan menghasilkan $x \times y$ hasil percobaan.

   Contohnya adalah misalkan dalam sebuah kelas terdapat 10 orang siswa laki-laki dan 15 orang siswa perempuan, maka jumlah kemungkinan pemilihan seorang ketua kelas adalah 10 + 15 kemungkinan.

Contoh 7.1 :

Pertanyaan:

Berapa banyaknya alamat memori dengan panjang 8 bit (1 Byte) yang disediakan oleh sebuah perangkat komputer.

Jawaban:

Dengan kaidah perkalian pada 8 percobaan, dimana masing-masing memiliki 2 kemungkinan, didapatkan hasil sebagai berikut:

Jumlah $= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^8$

$= 256$

Contoh 7.2 :

Pertanyaan:

Berapa banyaknya password dengan panjang 5 sampai 8 karakter yang bisa dibuat dengan syarat hanya karakter abjad saja yang boleh dipakai.

Jawaban:

Jumlah karakter abjad kecil (a..z) = 26

Jumlah karakter abjad kapital (A..Z) = 26

Total karakter abjad = 52

Terdapat 4 jenis percobaan utama, yaitu kemungkinan password dengan panjang 5 karakter, 6 karakter, 7 karakter, dan 8 karakter.

Banyaknya kemungkinan masing-masing percobaan adalah:

a. Password dengan panjang 5 karakter

   Jumlah = $52 \times 52 \times 52 \times 52 \times 52 = 380.204.032$

b. Password dengan panjang 6 karakter

   Jumlah = $52 \times 52 \times 52 \times 52 \times 52 \times 52 = 19.770.609.664$

c. Password dengan panjang 7 karakter

   Jumlah = $52 \times 52 \times 52 \times 52 \times 52 \times 52 \times 52 = 1.028.071.702.528$

d. Password dengan panjang 8 karakter

   Jumlah = $52 \times 52 \times 52 \times 52 \times 52 \times 52 \times 52 \times 52 = 53.459.728.531.456$

Dengan kaidah penjumlahan, maka seluruh kemungkinan susunan password yang ada adalah:

Total = 380.204.032 + 19.770.609.664 + 1.028.071.702.528 + 53.459.728.531.456

= 54507951047680

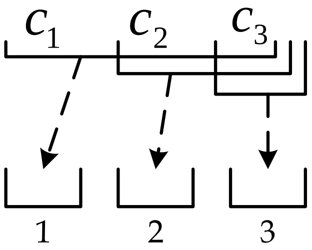
7.2 *Kombinatorial Dasar*

Misalkan terdapat 3 buah huruf A, B, dan C. Berapa jumlah kemungkinan password yang disusun dari ketiga huruf tersebut. Cara pertama yang bisa dilakukan adalah, dengan cara mengenumerasi semua kemungkinan, yaitu:

► ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, dan CBA

Kelemahan dari cara tersebut adalah tidak efektif jika jumlah huruf penyusunnya lebih banyak (misalkan 10 huruf). Oleh karena itu dalam kombinatorial, terdapat cara untuk menghitung jumlah kombinasi huruf-huruf tersebut.

Jika kita analisa, susunan tiga huruf berarti terdapat 3 tempat yang masing-masing harus diisi oleh huruf-huruf tersebut. Terdapat tiga percobaan yang ada pada kasus ini. Pada percobaan pertama masih terdapat 3 buah karakter yang tersedia (c_1, c_2, c_3) untuk ditempatkan pada tempat ke-1. Berikutnya untuk mengisi tempat ke-2 pada percobaan kedua, tinggal terdapat 2 karakter yang tersedia, dan terakhir pada percobaan ketiga hanya tinggal 1 karakter yang tersedia untuk mengisi tempat ketiga.



Apabila hal tersebut kita hitung dengan kaidah perkalian, maka jumlah susunan 3 huruf yang disusun dari A, B, dan C adalah:

Jumlah = percobaan ke-1 × percobaan ke-2 × percobaan ke-3

= 3 × 2 × 1

= 6

Hasil perhitungan tersebut sesuai dengan hasil jika menggunakan cara enumerasi. Perhitungan tersebut dapat dirumuskan jika terdapat n objek yang berbeda, maka jumlah kombinasi susunan dari n objek tersebut adalah:

$$\boxed{\begin{aligned}\text{Jumlah} &= n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 1 \\ &= n\,!\end{aligned}}$$

Operasi **faktorial** inilah yang disebut sebagai **operasi dasar** dari kombinatorial.

Contoh 7.3 :

Pertanyaan:

Berapa banyaknya susunan urutan posisi *start* pada perlombaan Moto GP yang diikuti oleh 21 peserta.

Jawaban:

Jumlah = 21! = 51090942171709440000

Contoh 7.4 :

Pertanyaan:

Berapa banyak kata yang bisa disusun dari huruf-huruf JAYAWIJAYA.

Jawaban:

Jika diperhatikan terdapat beberapa huruf yang muncul lebih dari satu kali, yaitu J (2 kali), A (4 kali), dan Y (2 kali). Total percobaan (10 huruf) harus dibagi dengan beberapa percobaan yang memungkinkan muncul duplikasi. Perhitungannya adalah sebagai berikut:

$$\text{Jumlah} = \frac{10!}{2!\times 4!\times 2!} = \frac{3628800}{2\times 24\times 2} = \frac{3628800}{96}$$

$$= 37800$$

Pada contoh 7.4 hasil perhitungannya dapat diperluas untuk kasus cara menyusun n objek, dimana dari n objek tersebut terbagi menjadi beberapa jenis objek. Dalam satu jenis objek, antara objek satu dengan objek lainnyya bernilai sama. Sehingga jika terdapat n objek yang terbagi menjadi t jenis, yaitu q_1, q_2, q_3, ..., q_t, maka jumlah susunannya adalah:

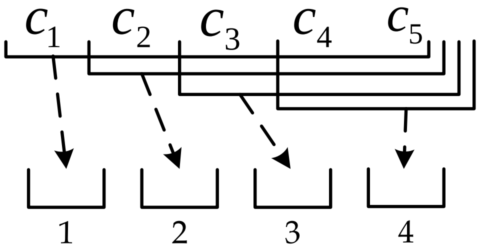
$$\boxed{\text{Jumlah} = \frac{n!}{q_1!\cdot q_2!\cdot q_3!\cdot \ldots \cdot q_t!}}$$

7.3 *Permutasi*

Pada contoh sebelumnya, teori dasar kombinatorial dengan menggunakan operasi faktorial digunakan untuk menghitung kombinasi dari n objek yang berbeda disusun dengan panjang n pula. Bagaimana tentang jumlah kombinasi dari n objek yang disusun dengan panjang r, dimana $r \leq n$. Contohnya adalah terdapat huruf A, B, C, D, dan E, berapakah jumlah kombinasi password yang tersusun atas 4 huruf. Susunan password tersebut diantaranya adalah ABCD, ABCE, ABDE, ACBD, ACDB, ..., dst.

Dengan menyediakan 4 tempat yang masing-masing harus diisi oleh huruf-huruf tersebut, maka percobaan pertama terdapat 5 buah karakter yang tersedia untuk mengisi tempat pertama. Percobaan kedua tinggal terdapat 4 karakter yang tersedia, percobaan ketiga tinggal terdapat 3 karakter yang tersedia, dan percobaan ketiga tinggal terdapat 2 karakter yang tersedia untuk mengisi tempat keempat.

Kasus tersebut dapat dihitung dengan cara yang digunakan untuk menghitung kasus dasar kombinatorial, sebagai berikut:



Dengan menghitung dengan kaidah perkalian untuk masing-masing percobaan ke-x yang dilambangkan dengan $p(x)$, maka jumlah susunan 3 huruf yang disusun dari A, B, C, D, dan E adalah:

$$\begin{aligned} \text{Jumlah} &= p(1) \times p(2) \times p(3) \times p(4) \\ &= 5 \times 4 \times 3 \times 2 \\ &= 120 \end{aligned}$$

Perhitungan tersebut dapat dirumuskan jika terdapat n objek yang berbeda, maka jumlah kombinasi susunan sejumlah r objek adalah:

$$\text{Jumlah} = n \times (n-1) \times \ldots \times (n-r+1)$$

Rumus tersebut dikalikan dengan $\dfrac{(n-r)\times(n-r-1)\times(n-r-2)\times\ldots\times 1}{(n-r)\times(n-r-1)\times(n-r-2)\times\ldots\times 1}$

$$\begin{aligned} \text{Jumlah} &= \frac{n\times(n-1)\times\ldots\times(n-r+1)\times(n-r)\times(n-r-1)\times(n-r-2)\times\ldots\times 1}{(n-r)\times(n-r-1)\times(n-r-2)\times\ldots\times 1} \\ &= \frac{n!}{(n-r)!} \end{aligned}$$

Kasus-kasus diatas disebut sebagai **permutasi**. Jika diperhatikan permutasi membedakan urutan susunan yang dibentuk (ABC berbeda dengan ACB). Selanjutnya jika susunan disebutkan dengan permutasi, maka urutan dari susunan itu harus diperhatikan. Notasi untuk permutasi dari n objek yang disusun dengan panjang r adalah $P(n, r)$ atau ${}_nP_r$ (selanjutnya digunakan notasi $P(n, r)$ sebagai notasi baku dalam diktat ini).

Permutasi r dari n objek adalah jumlah kemungkinan urutan r buah objek yang dipilih dari n buah objek, dimana $r \leq n$, yang dalam hal ini, pada setiap kemungkinan urutan tidak ada objek yang sama. Rumus dari permutasi *r* dari *n* objek adalah:

$$\boxed{P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}}$$

Contoh 7.5 :

Pertanyaan:

Berapa banyak kemungkinan susunan urutan absensi mahasiswa dalam sebuah kelas yang terdiri atas 24 orang mahasiswa.

Jawaban:

$n = 24$, dan $r = 24$

$P(n, r) = P(24, 24) = 24!$

Contoh 7.6 :

Pertanyaan:

Berapa banyak kemungkinan membentuk angka 4 digit dari angka 1, 2, 3, 4, 5, dan 6. Syarat dari susunan tersebut adalah:

a. tidak ada pengulangan angka.

b. boleh ada pengulangan angka.

Jawaban:

$n = 6$, dan $r = 4$

a. $P(n, r) = P(6, 4) = \dfrac{6!}{(6-4)!} = \dfrac{6!}{2!}$

$= 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360$

b. Kasus ini tidak bisa diselesaikan dengan kaidah permutasi, sehingga harus diselesaikan dengan kaidah perkalian. Terdapat 4 percobaan yang masing-masing memiliki 6 kemungkikan kejadian.

Jumlah $= 6 \times 6 \times 6 \times 6 = 6^4$

$= 1296$

Contoh 7.7 :

Pertanyaan:

Seperti pada contoh 7.2, namun angka yang menyusunnya adalah 0, 1, 2, 3, 4, dan 5.

Jawaban:

Untuk kasus terdapat angka 0 seperti ini, maka setiap angka yang dimulai dengan 0 tidak akan masuk hitungan karena angka menjadi dianggap 3 digit (contoh: 0214 = 214, 0021 = 21, 0003 = 3, dan 0000 = 0).

a. Hasil permutasi $P(6, 4)$ harus dikurangi dengan $P(5, 3)$, dimana $P(5, 3)$ merupakan jumlah angka yang dimulai dengan 0 (0XXX)

$$P(6, 4) - P(5, 3) = \frac{6!}{(6-4)!} - \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{6!}{2!} - \frac{5!}{2!}$$

$$= (6 \times 5 \times 4 \times 3) - (5 \times 4 \times 3)$$

$$= 360 - 60 = 300$$

b. Hasil perkalian 6^4 harus dikurangi dengan $5^3 + 5^2 + 5^1 + 5^0$, dimana masing-masing merupakan kombinasi dari 0XXX, 00XX, 000X, dan 0000.

$$6^4 - (5^3 + 5^2 + 5^1 + 5^0) = 1296 - (125 + 25 + 5 + 1)$$

$$= 1296 - 156 = 1140$$

Kenapa pada poin (a) tidak dikurangi dengan kasus 00XX, 000X, dan 0000 ?

Contoh 7.8 :

Pertanyaan:

Sebuah kelas terdiri atas 12 laki-laki dan 15 perempuan akan bepergian dengan sebuah bus berkapasitas 20 tempat duduk, hitunglah jumlah kemungkinan susunan urutan duduk dari siswa-siswa, jika:

a. Diambil 20 siswa untuk mengisi bus.
b. Diambil 10 laki-laki di lajur kiri dan 10 perempuan di lajur kanan.

Jawaban:

a. $P(n, r) = P(27, 20) = \frac{27!}{(27-20)!} = \frac{27!}{5!}$

$$= 2177773890083670432153600000$$

b. Terdapat 2 percobaan, masing-masing adalah $P(12, 10)$ dan $P(15, 10)$.

Dengan kaidah perkalian, didapat hasil:

$$\text{Jumlah} = P(12, 10) \times P(15, 10) = \frac{12!}{(12-10)!} \times \frac{15!}{(15-10)!}$$

$$= 239500800 \times 261534873600$$

$$= 62637811455098880000$$

7.4 Kombinasi

Kombinasi adalah kasus khusus dari permutasi, dimana kombinasi tidak memperhatikan urutan dari hasil percobaan. Misalnya menurut kaidah permutasi antara ABC dan CAB adalah hasil yang berbeda, akan tetapi menurut kaidah kombinasi, kedua hasil tersebut dianggap sama.

Sebagai contoh adalah terdapat huruf A, B, dan C. Jika kita daftarkan hasil dari $P(3, 2)$ adalah AB, AC, BA, BC, CA, dan CB. Sedangkan menurut kombinasi hasilnya adalah AB, AC, dan BC. Jika notasi baku dari permutasi adalah $P(n, r)$, maka notasi baku dari kombinasi adalah $C(n, r)$.

Karena kombinasi tidak memperhatikan lagi keterurutan dari hasil percobaan, maka rumus kombinasi bisa didapatkan dari rumus permutasi dibagi sejumlah kemungkinan urutan susunan dari r objek, yaitu sejumlah $r!$. Oleh karena itu rumus kombinasi adalah:

$$\boxed{C(n, r) = \frac{P(n,r)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}}$$

Kombinasi r elemen dari n elemen atau $C(n, r)$, adalah jumlah pemilihan yang tidak terurut r elemen yang diambil dari n buah elemen.

Contoh 7.9 :

Pertanyaan:

Sebuah kelas terdiri atas 10 laki-laki dan 15 perempuan. Hitunglah jumlah kombinasi jika pada kelas tersebut diambil perwakilan 5 orang dengan syarat sebagai berikut:

a. Tanpa syarat.

b. 3 orang laki-laki dan 2 orang perempuan.

c. Joko dan Gadis harus masuk didalamnya.

d. Joko dan Gadis tidak boleh didalamnya.

e. Salah satu dari Joko dan Gadis ada didalamnya.

Jawaban:

a. $C(n, r) = C(25, 5) = \dfrac{25!}{5! \cdot (25-5)!} = \dfrac{25!}{5! \cdot 20!}$

$= \dfrac{25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21}{5!} = \dfrac{6375600}{120} = 53130$

b. Terdapat 2 percobaan, masing-masing adalah $C(10, 3)$ dan $C(15, 2)$.

Dengan kaidah perkalian, didapat hasil:

Jumlah $= C(10, 3) \times C(15, 2) = \dfrac{10!}{3! \cdot (10-3)!} \times \dfrac{15!}{2! \cdot (15-2)!}$

$= \dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3!} \times \dfrac{15 \cdot 14}{2!} = \dfrac{720}{6} \times \dfrac{210}{2} = 12600$

c. Karena dua tempat sudah diisi oleh Joko dan Gadis, maka tinggal 3 tempat yang diperebutkan oleh 23 orang atau $C(23, 3)$.

$C(23, 3) = \dfrac{23!}{3! \cdot (23-3)!} = \dfrac{23!}{3! \cdot 20!} = \dfrac{23 \cdot 22 \cdot 21}{3!} = \dfrac{10626}{6}$

$= 1771$

d. Karena Joko dan Gadis tidak boleh ikut, maka tinggal 23 orang yang memperebutkan 5 tempat atau $C(23, 5)$.

$C(23, 5) = \dfrac{23!}{5! \cdot (23-5)!} = \dfrac{23!}{5! \cdot 18!} = \dfrac{23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot 20 \cdot 19}{5!} = \dfrac{4037880}{120}$

$= 33649$

e. Hal tersebut sama saja dengan Joko harus masuk dalam perwakilan atau Gadis harus masuk dalam perwakilan atau Joko dan Gadis harus masuk dalam perwakilan. Kombinasinya adalah $C(24, 4) + C(24, 4) + C(23, 3)$.

$$C(24, 4) + C(24, 4) + C(23, 3) = 2\left(\frac{24!}{4!\cdot(24-4)!}\right) + \frac{23!}{3!\cdot(23-3)!}$$

$$= 2\left(\frac{24\cdot 23\cdot 22\cdot 21}{4!}\right) + \frac{23\cdot 22\cdot 21}{3!}$$

$$= 2\left(\frac{255024}{24}\right) + \frac{10626}{6} = 2\cdot 10626 + 1771$$

$$= 23023$$

Contoh 7.10 :

Pertanyaan:

Dalam ujian, seorang mahasiswa harus menjawab 6 diantara 10 pertanyaan. Berapa banyak cara menjawab ujian jika:

a. Tidak ada syarat tertentu.

b. 3 pertanyaan pertama harus dijawab.

c. 3 pertanyaan pertama adalah bonus, jadi hanya boleh dipilih dua soal.

Jawaban:

a. $C(n, r) = C(10, 6) = \dfrac{10!}{6!\cdot(10-6)!} = \dfrac{10!}{6!\cdot 4!}$

$$= \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{4!} = \frac{5040}{24} = 210$$

b. Karena tiga tempat sudah diisi oleh tiga soal pertama, maka tinggal 3 soal yang harus dipilih dari 7 soal atau $C(7, 3)$.

$$C(7, 3) = \frac{7!}{3!\cdot(7-3)!} = \frac{7!}{3!\cdot 4!} = \frac{7\cdot 6\cdot 5}{3!} = \frac{210}{6}$$

$$= 35$$

c. Terdapat 2 percobaan, masing-masing adalah untuk memilih dua soal bonus atau $C(3, 2)$ dan sisanya memilih 4 diantara 7 soal atau $C(7, 4)$. Dengan kaidah perkalian, didapat hasil sebagai berikut:

$$\text{Jumlah} = C(3, 2) \times C(7, 4) = \frac{3!}{2!\cdot(3-2)!} \times \frac{7!}{4!\cdot(7-4)!}$$

7.5 Kombinasi dengan Pengulangan Objek

Pada kasus kombinasi sebelumnya hasil yang muncul pada sebuah percobaan tidak boleh ada pengulangan sebuah elemen. Misalnya dari tiga huruf ABC, jika dipilih dua huruf hasilnya adalah AB, AC, dan BC. Pada kasus lain memungkinkan munculnya hasil AA, BB, dan CC, maka hal tersebut disebut sebagai kombinasi dengan pengulangan objek.

Pengambilan *r* objek dari *n* objek yang berbeda, dengan memperbolehkan pengambilan berulang, dapat dipandang sebagai penggunaan *r* tanda yang sama untuk menandai *n* objek yang berbeda, dan setiap objek boleh ditandai lebih dari satu kali. Dengan demikian, banyaknya cara mengambil *r* objek dari *n* objek yang berbeda, dengan memperbolehkan pengambilan berulang adalah:

$$\boxed{C(n+r-1,\ r) = \frac{(n+r-1)!}{r!\cdot(n-1)!}}$$

<u>Contoh 7.11 :</u>

<u>Pertanyaan:</u>

Berapa banyaknya cara memilih 4 porsi masakan diantara 10 jenis masakan untuk disajikan pada tamu, dimana satu jenis masakan bisa muncul lebih dari 1 kali.

<u>Jawaban:</u>

Karena memungkinkan terjadi pengulangan pada pilihan, maka:

$$C(n+r-1,\ r) = C(10+4-1,\ r) = \frac{(10+4-1)!}{4!\cdot(10-1)!} = \frac{13!}{4!\cdot 9!}$$

$$= \frac{13\cdot 12\cdot 11\cdot 10}{4!} = \frac{17160}{24}$$

$$= 715$$

7.6 Latihan Soal

1. Dalam berapa cara 5 wanita dapat dipilih dari 12 wanita apabila:
   a. Satu wanita harus ikut dalam pemilihan
   b. 2 wanita dikeluarkan dalam pemilihan
   c. 2 wanita harus ikut dan 1 wanita dikeluarkan dalam pemilihan

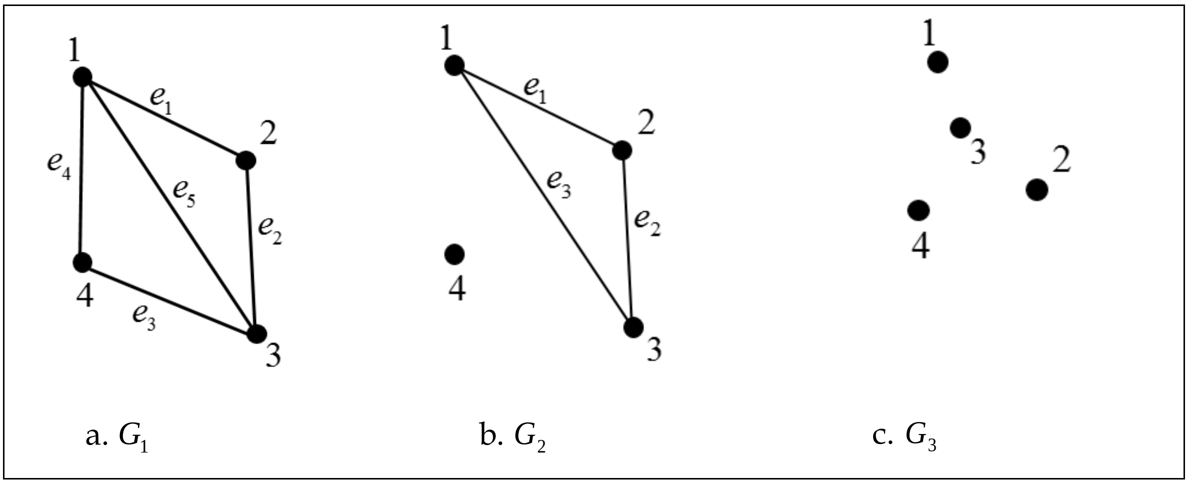
2. Terdapat satu set kartu, berapakah peluang jika:
   a. Diambil sebuah kartu dan muncul kartu wajik atau kartu angka.
   b. Diambil sebuah kartu dan muncul kartu wajik atau kartu angka tetapi tidak kartu angka wajik.
   c. Diambil 3 kartu dan muncul semuanya kartu wajik atau kartu angka.
   d. Diambil 3 kartu dan muncul semuanya kartu wajik atau kartu angka tetapi tidak kartu angka wajik.

8 GRAF

Salah satu materi yang terdapat pada mata kuliah matematika diskrit adalah graf. Graf menganologkan objek-objek pada kehidupan sehari-hari dan hubungan antar objek tersebut dengan simbol titik dan garis. Pada bab ini akan dibahas beberapa hal yang terkait dengan graf dan aplikasinya.

Definisi graf itu sendiri adalah himpunan $G = (V, E)$, dimana

$$V = \text{himpunan tidak kosong dari simpul-simpul/titik-titik (vertices)}$$
$$= \{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n\}$$
$$E = \text{himpunan sisi (edges) yang menghubungkan sepasang simpul}$$
$$= \{e_1, e_2, e_3, \ldots, e_n\}$$



Gambar 8.1. Contoh Graf

8.1 Terminologi Graf

1. Ketetanggaan (*Adjacent*)

Dua buah simpul dikatakan *bertetangga* bila keduanya terhubung langsung.

Contoh:

Perhatikan gambar 8.1a.

Simpul 1 bertetangga dengan simpul 2 dan 4, sedangkan simpul 2 tidak bertetangga dengan simpul 4.

2. Bersisian (*Incidency*)

Untuk sembarang sisi $e = (u, v)$, sisi e dikatakan bersisian dengan simpul u dan simpul v.

Contoh:
Perhatikan gambar 8.1b.

Sisi e_2 bersisian dengan simpul 2 dan 3.

3. Simpul Terpencil (Isolated Vertex)

Simpul terpencil adalah simpul yang tidak memiliki sisi yang bersisian dengannya.
Contoh:

Perhatikan gambar 8.1b.

Simpul 4 merupakan simpul terpencil.

4. Graf Kosong (Null Graph)

Graf kosong adalah graf yang tidak memiliki sisi.

Contoh:

Perhatikan gambar 8.1c. Gambar tersebut menunjukkan graf kosong.

5. Derajat (Degree)

Derajat adalah jumlah sisi yang bersisian pada suatu simpul.

Contoh:

Perhatikan gambar 8.1a.

Simpul 1 memiliki derajat 3, sedangkan simpul 4 memiliki derajat 2.

Perhatikan gambar 8.1c.

Semua simpul memiliki derajat 0.

6. Lintasan (Path)

Lintasan adalah panjangnya simpul awal ke simpul tujuan dengan penulisan berselang seling simpul-simpul dan sisi-sisi. Lintasa ada dua macam, lintasan terbuka dan lintasan tertutup. Lintasan terbuka adalah lintasan yang berawal dan berakhir di titik yang berbeda, sedangkan lintasan tertutup adalah lintasan yang berawal dan berakhir pada titik yang sama.

Contoh:

Perhatikan gambar 8.1a.

Lintasan terbuka dari simpul 1 ke 4 adalah 1, e_1,2, e_2,3, e_5,1, e_4,4

Lintasan tertutup pada graf tersebut adalah 1, e_1,2, e_2,3, e_3, 4, e_4, 1

7. Siklus (Cycle) atau Sirkuit (Circuit)

Siklus atau sirkuit adalah lintasan yang berawal dan berakhir pada simpul yang sama (lintasan tertutup).

Contoh:

Perhatikan gambar 8.1b. Sirkuit pada graf tersebut adalah 1,2,3,1.

8. Terhubung (Connected)

Terhubung adalah apabila terdapat lintasan dari simpul satu ke simpul lainnya dalam satu graf.

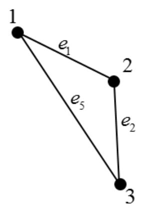
Contoh:

Gambar 8.1a adalah graf terhubung, sedangkan gambar 8.1b adalah graf tidak terhubung.

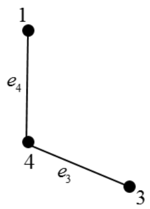
9. Upagraf (Subgraph) dan Komplemen Upagraf

Upagraf adalah sebagian dari graf, sedangkan komplemen upagraf adalah sebagian graf yang lain yang bersesuaian dengan upagraf.

Contoh:



Gambar disamping merupakan upagraf gambar 1.a

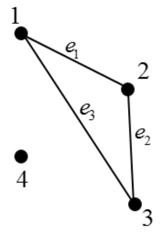


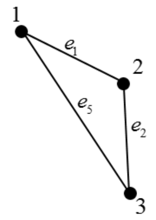
Gambar disamping merupakan komplemen upagraf gambar 1.a

10. Upagraf Merentang (Spanning Subgraph)

Upagraf merentang adalah upagraf yang mengandung semua simpul pada graf.

Contoh:



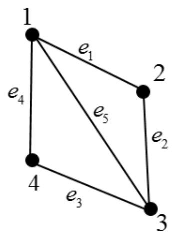


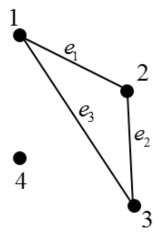
Upagraf merentang dari graf 8.1a   Bukan upagraf merentang dari graf 8.1a

11. Cut-Set

Cut set adalah himpunan sisi yang apabila dihilangkan dari sebuah graf, maka graf tersebut menjadi tidak terhubung.

Contoh:





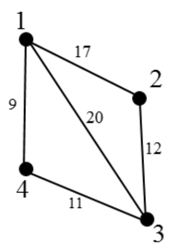
Graf awal   Graf akhir

Pada gambar diatas, yang merupakan cut-set adalah e_3 dan e_4.

12. Graf Berbobot

Graf berbobot adalah graf yang setiap sisinya diberi nilai.

Contoh:



Biasanya, graf berbobot ini digunakan untuk mencari jarak terpendek untuk melalui semua simpul.

8.2 Macam – macam Graf

Pengelompokan graf dapat dilakukan berdasarkan ada tidaknya gelang atau sisi ganda dan berdasarkan ada tidaknya arah pada suatu graf.

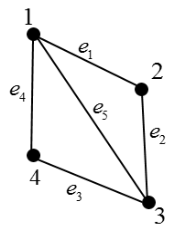
Berdasarkan ada tidaknya gelang, graf dibedakan mejadi 2, yaitu:

1. Graf sederhana

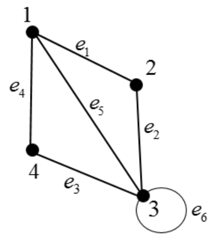
   Graf sederhana tidak memiliki gelang atau sisi ganda.

2. Graf tidak sederhana

   Graf tidak sederhana memiliki gelang atau sisi ganda.



Graf sederhana



Graf tidak sederhana

Gambar 8.2. Graf Sederhana dan Graf Tidak Sederhana

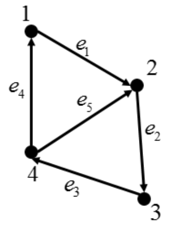
Berdasarkan ada tidaknya arah, graf dibedakan mejadi 2, yaitu:

1. Graf Berarah

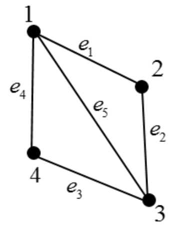
   Graf berarah adalah graf yang terdapat arah pada sisi graf tersebut.

2. Graf Tidak Berarah

   Graf tidak berarah adalah graf yang tidak terdapat arah pada sisi graf tersebut.



Graf Berarah



Graf Tidak Berarah

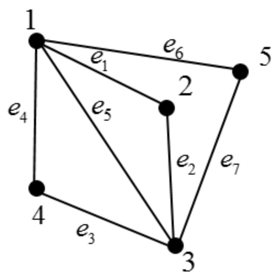
Gambar 8.3. Graf Berarah dan Graf Tidak Berarah

8.3 Lintasan dan Sirkuit Euler

Lintasan Euler adalah lintasan yang melalui masing-masing sisi di dalam graf tepat satu kali.

Sirkuit Euler adalah sirkuit yang melalui masing-masing sisi di dalam graf tepat satu kali.

Contoh:
Gambarkan contoh lintasan dan sirkuit Euler!
Jawab:



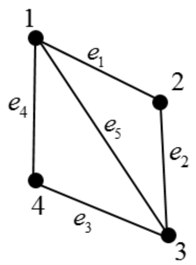
Lintasan dan sirkuit Euler pada graf tersebut adalah 1,2,3,1,4,3,5,1.

8.4 Lintasan dan Sirkuit Hamilton

Lintasan Hamilton adalah lintasan yang melalui tiap simpul di dalam graf tepat satu kali.

Sirkuit Hamilton adalah sirkuit yang melalui tiap simpul di dalam graf tepat satu kali.

Contoh:
Gambarkan contoh sebuah lintasan Hamilton!
Jaawab:



Lintasan Hamilton pada graf tersebut adalah 1,2,3,4

8.5 Latihan Soal

1. Gambarkan lintasan Hamilton!
2. Gambarkan sirkuit Euler
3. Gambarkan graf yang memiliki 10 titik dan 5 sisi!
4. Gambarkan graf yang setiap simpulnya memiliki derajat 3!
5. Gambarkan graf terarah yang mempunyai sisi 7!

9 POHON

Materi tentang pohon merupakan materi pengembangan dari graf. Materi ini banyak digunakan dalam ilmu computer. Definisi dari pohon itu sendiri adalah graf tak berarah terhubung yang tidak mengandung sirkuit.

Pohon Bukan pohon

Gambar 9.1. Contoh Pohon dan Bukan Pohon

9.1 Sifat-Sifat Pohon

Apabila graf $G = (V, E)$ adalah graf tak berarah sederhana dan jumlah simpulnya n, maka berlaku pernyataan berikut:

1. G adalah pohon.
2. Setiap pasang simpul di dalam G terhubung dengan lintasan tunggal.
3. G terhubung dan memiliki $m = n - 1$ buah sisi.
4. G tidak mengandung sirkuit dan memiliki $m = n - 1$ buah sisi.
5. G tidak mengandung sirkuit dan penambahan satu sisi pada graf akan membuat hanya satu sirkuit.
6. G terhubung dan semua sisinya adalah jembatan (jembatan adalah sisi yang bila dihapus menyebabkan graf terpecah menjadi dua komponen).

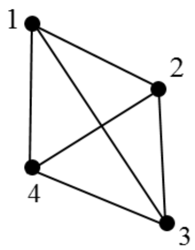
9.2 Pohon Merentang

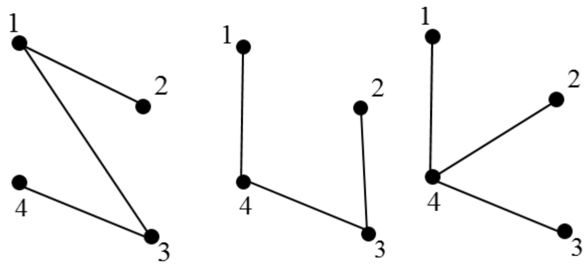
Pohon merentang dari graf terhubung adalah upagraf merentang yang berupa pohon. Hal ini diperoleh dengan memutus sirkuit di dalam graf.

Contoh:

Gambarkan pohon merentang dari suatu pohon!

Jawab:



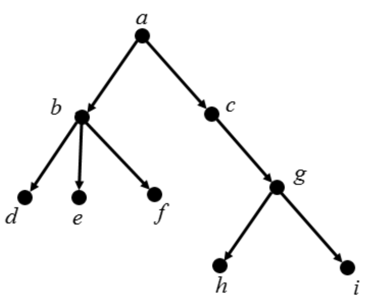


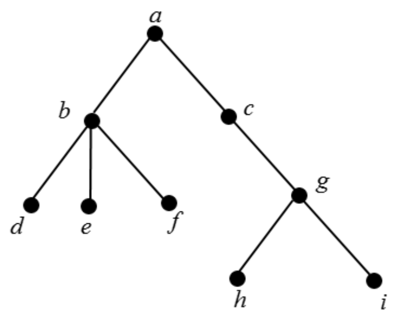
Graf Lengkap Pohon Merentang

9.3 *Pohon Berakar (Rooted Tree)*

Pohon berakar adalah pohon yang sebuah simpulnya diperlakukan sebagai akar dan sisi-sisinya diberi arah menjauh dari akar. Namun, arah pada pohon berakar dapat dihilangkan sebagai konvensi.

Contoh:





Pohon berakar Pohon berakar yang arahnya dihilangkan.

9.4 *Terminologi Pohon Berakar*

1. Anak *(child atau children)* dan Orangtua *(parent)*

   Pada gambar pohon berakar, *b* dan *c* adalah anak-anak simpul *a*, dan *a* adalah orangtua dari simpul b dan c

2. Lintasan *(path)*

   Pada gambar pohon berakar, lintasan dari *a* ke *h* adalah *a,c,g,h*. Panjang lintasan dari *a* ke *h* adalah 3.

3. Keturunan *(descendant)* dan Leluhur *(ancestor)*

   Jika terdapat lintasan dari *x* ke *y*, maka *x* adalah leluhur dari *y* dan *y* adalah keturunan dari *x*.

4. Saudara Kandung *(sibling)*

Pada gambar pohon berakar, *d* adalah saudara kandung *e*, tetapi *h* bukan saudara kandung *e*, karena orangtua mereka berbeda.

5. Derajat *(degree)*

   Derajat pada pohon adalah jumlah upapohon atau jumlah anak pada simpul tersebut.

   Contoh:

   Pada gambar pohon berakar, derajat simpul *a* adalah 2, dan derajat simbul *b* adalah 3.

6. Daun *(leaf)*

   Daun adalah simpul yang berderajat nol (simpul yang tidak memiliki anak).

   Contoh:

   Pada gambar pohon berakar, *d, e* dan *f* adalah daun.

7. Simpul dalam *(internal nodes)*

   Simpul dalam adalah simpul yang mempunyai anak.

   Contoh:

   Pada gambar pohon berakar, *a*, *b* dan *c* adalah simpul dalam, sedangkan *h* dan *i* bukan simpul dalam.

8. Aras *(level)* atau Tingkat

   Akar memiliki aras = 0, sedangkan aras simpul lainnya = 1+ panjang lintasan dari akar ke simpul tersebut.

   Contoh:

   Pada gambar pohon berakar, aras simpul *a* adalah 0, aras simpul *h* adalah 4, dan aras simpul *e* adalah 3.

9. Tinggi *(height)* atau Kedalaman *(dept)*

   Tinggi dari suatu pohon adalah aras maksimum dari pohon tersebut.

   Contoh:

   Tinggi dari pohon berakar tersebut adalah 4.

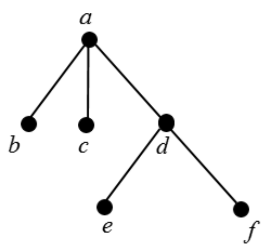
9.5 Pohon Terurut

Pohon terurut adalah pohon berakar yang urutan anak-anaknya penting. Urutan anak-anak pohon terurut dimulai dari kiri ke kanan.

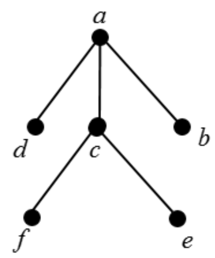
Contoh:

Berikan contoh pohon terurut!

Jawab:



Pohon Terurut 1



Pohon Terurut 2

Pohon terurut 1, simpul *a* memiliki anak-anak dengan urutan *b, c,* dan *d*.

Pohon terurut 2, simpul *a* memiliki anak-anak dengan urutan *d, c,* dan *b.*

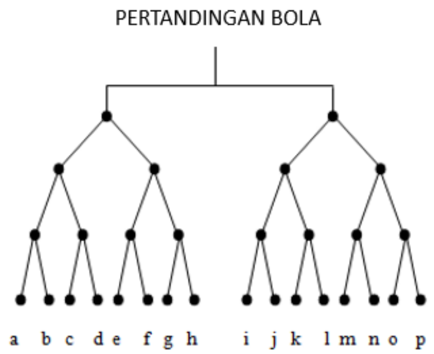
9.6 Pohon Biner

Pohon biner adalah pohon berakar yang paling banyak memiliki 2 anak. Jenis pohon ini biasanya digunakan untuk pengambilan keputusan.

Contoh:

Gambarkan pohon biner dari suatu pertandingan bola!

Jawab:

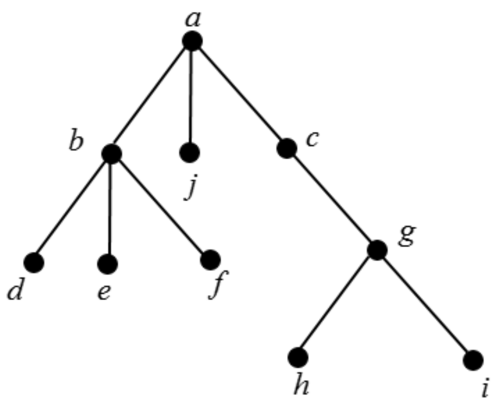


9.7 Pohon **n-ary**

Pohon *n-ary* adalah pohon yang memiliki anak sejumlah *n* anak. Jenis pohon ini banyak digunakan untuk mempresentasikan suatu struktur.

Contoh:

Gambarkan contoh pohon *n-ary!*
Jawab:



9.8 Latihan Soal

1. Gambarkan graf yang merupakan sebuah pohon!
2. Berikan contoh sebuah graf yang bukan pohon!
3. Sebutkan ciri-ciri graf yang dapat disebut pohon!
4. Gambarkan graf dan pohon merentangnya!
5. Gambarkan struktur keluarka kalian menggunakan pohon *n-ary!*

10. ALJABAR BOOLEAN

Aljabar Boolean pertama kali dikemukakan oleh seorang matematikawan inggris, geogre boole pada tahun 1854 merupakan rumusan matematika yang menjelaskan hubungan logika dari sebuah gerbang. Keluaran sebuah gerbang atau gabungan beberapa buah gerbang yang berupa ungkapan logika disebut ungkapan Boole. Gerbang logika (*Logic gate*) merupakan sebuah pemroses dasar yang memproses masukan-masukan bilangan biner.

Aljabar boolean mendefinisikan aturan-aturan untuk mengubah ungkapan simbol logika biner. ungkapan logika simbol biner terdiri dari variabel biner dan operator-operator (*AND, OR* dan *NOT*). Nilai-nilai dari ungkapan boolean bisa ditabulasikan dalam tabel kebenaran (*Truth Table*). Dengan menggunakan Hukum Aljabar Boolean sebuah ungkapan Boolean (*Ekspresi Boolean*) dapat dianalisa dan di sederhanakan.

10.1 Teori Dasar Aljabar Boolean

Alabar Boolean merupakan aljabar yang berhubungan dengan variable-variabel biner dan operasi logika Pada tabel 5.1 merupakan hukum-hukum dasar pada aljabar Boolean yang terdiri dari Elementer, Associative, Commutative, Distributive, Absorbtion dan Teori De Morgan.

Tabel 5.1. Hukum-hukum dasar pada Aljabar Boolean

Identitas	x + 0 = x	x . 1 = x
dominansi	x + 1 = 1	x . 0 = 0
komplemen	x + x’ = 1	x . x’ = 0
idempoten	x + x = x	x . x = x
involusi	(x’)’ = x	
Associative	x+(y+z)=(x+y)+z	x(y.z)=(x.y)z
Commutative	x + y = y + x	x . y = y . x
Distributive	x(y+z)=x.y+x.z	x+(y.z)=(x+y)(x+z)
Absorbtion	x + x.y = x	x.(x+y) = x
Teori De Morgan	(x + y)’ = x’.y’	(x.y)’ = x’ + y’

Pada Tabel 5.1. Tanda + (Plus) menyatakan OR (yang artinya atau) dengan lambang Gerbang  (x dan y merupakan masukan sedangkan y adalah bagian keluaran), tanda . (Titik) menyatakan AND (yang artinya dan) dengan lambang Gerbang

, tanda ' (Petik) menyatakan NOT (yang artinya Tidak/Bukan) dengan lambang 

.

Urutan Operasi (Parentheses) pada operasi bilangan biner, Operasi bilangan biner hanya mengenal AND dan OR, Jika terjadi operasi AND dan OR bersamaan tanpa ada kurung, maka yang didahulukan adalah AND, Misal : F = x.y+z sama dengan (x.y)+z dalam hal ini x dan y di and kan lebih dulu, baru hasilnya di or kan dengan z.

Tabel 5.2 tabel kebenaran gerbang "atau" Tanda + (Plus)

x	y	$x + y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Tabel 5.2 merupakan tabel kebenaran gerbang "atau", angka 0 berarti salah dan angka 1 berarti benar, sebagai ilustrasi ada perintah sebagai berikut "Tolong bawakan saya spidol atau balpoin" maka spidol dan ballpoint bisa saling menggantikan sebagai alat tulis sehingga salah satu saja ada apalagi keduanya ada maka bisa dianggap sudah benar.

Contoh yang lain "atau" dengan tiga masukan, misal ada perintah sebagai berikut "ambilkan pensil atau balpoin atau spidol" maka jika salah satu terpenuhi akan di dapat alat untuk menulis. Terlihat bahwa untuk OR ("atau") bersifat saling menggantikan yaitu jika satu saja masukannya bernilai benar maka keluarannya bernilai benar. Bisa diilustrasikan dengan cara lain yaitu tiga orang kerja kelompok walaupun yang mengerjakan tugas hanya satu orang yang lain tidak mengerjakan maka dianggap tugas kelompoknya sudah benar/terpenuhi/selesai.

Kunci Untuk "OR"

- Jika salah satu masukannya bernilai satu maka keluarannya akan bernilai satu tidak perduli nilai masukan yang lain contoh y = a+b+c+1 maka keluarannya (y) akan bernilai satu tidak perduli nilai a, b dan c.
- Jika salah satu atau lebih masukannya bernilai nol maka masukan nol tersebut bisa di hapus contoh : y = a+b+c+0+0+0 bisa ditulis y = a+b+c

Tabel 5.3 tabel kebenaran gerbang “dan” tanda . (Titik)

x	*y*	*x . y*
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Tabel 5.3 merupakan tabel kebenaran gerbang “dan” dengan tanda . (Titik) sebagai contoh ada perintah sebagai berikut “Ambilkan spidol dan kertas” maka akan di anggap benar jika diambilkan spidol bersama kertas karena untuk menulis butuh alat untuk menulis dan bahan untuk di tulis. Contoh yang lain “Ambilkan benang dan jarum dan kain ” maka hal ini akan terpenuhi jika ketiga-tiganya ada karena orang tersebut akan menjahit, jika salah satu saja tidak ada maka tidak akan bisa menjahit.

Kunci Untuk “AND”

- Jika salah satu masukannya bernilai nol maka keluarannya akan bernilai nol tidak perduli nilai masukan yang lain contoh y = a.b.c.0 maka keluarannya (y) akan bernilai nol tidak perduli nilai a, b dan c.
- Jika salah satu atau lebih masukannya bernilai satu maka masukan satu tersebut bisa di hapus contoh : y = a.b.c.1.1.1 bisa ditulis y = a.b.c

Tabel 5.4 tabel kebenaran ingkaran/tidak/bukan

x	*x’*
0	1
1	0

Tabel 5.4 merupakan tabel kebenaran ingkaran/tidak/bukan, nilai x akan berlawanan dengan nilai x’. jika x sama dengan satu maka x’ bernilai bukan satu atau bernilai nol.

Pada tabel 5.1. bagian Elementer yang bagian + (“atau”).

- x + 0 dengan menggunakan kunci OR jika bertemu nol maka nol tersebut bisa dihapus jadi x + 0 = x
- x + 1 dengan menggunakan kunci OR Jika salah satu masukannya bernilai satu maka keluarannya akan bernilai satu tidak perduli nilai masukan yang lain jadi x + 1 = 1

- x + x’ pada bagian ini jika x bernilai satu maka x’ bernilai nol atau jika x bernilai nol maka x’ bernilai satu yang terjadi sama dengan 1 + 0 atau 0 + 1 maka jelas selalu ada satu di tambah nol, kembali ke kunci OR jika bertemu satu maka tidak perduli nilai yang lain jadi x + x’ = 1
- x + x jika x=0 maka 0 + 0 = 0 (sama dengan x), jika x = 1 maka 1 + 1 = 1 (sama dengan x) jadi x + x = x
- (x’)’ pada bagian ini di beri ingkaran dua kali hasilnya kembali ke x, sebagai catatan jika di beri ingkaran sebanyak bilangan ganjil maka nilai logikanya berlawanan dan jika diberi ingkaran sebanyak bilangan genap maka nilai logika tidak berubah.

Pada tabel 5.1. bagian Elementer yang bagian . (dan”).

- x . 1 dengan menggunakan kunci “AND” Jika salah satu atau lebih masukannya bernilai satu maka masukan satu tersebut bisa di hapus jadi x . 1 = x.
- x . 0 dengan menggunakan kunci “AND” Jika salah satu masukannya bernilai nol maka keluarannya akan bernilai nol tidak perduli nilai yang lain jadi x . 0 = 0.
- x . x’ pada bagian ini jika x bernilai satu maka x’ bernilai nol atau jika x bernilai nol maka x’ bernilai satu yang terjadi sama dengan 1 . 0 atau 0 . 1 maka jelas selalu ada nol di and satu, dengan menggunakan kunci “AND” Jika salah satu masukannya bernilai nol maka keluarannya akan bernilai nol tidak perduli nilai masukan yang lain   jadi x . x’ = 0 (karena salah satu dari x atau x’ bernilai nol)
- x . x, jika x=0 maka 0 . 0 = 0 (sama dengan x), jika x = 1 maka 1 . 1 = 1 (sama dengan x) jadi x . x = x

Pada tabel 5.1. Associative bagian +, x+y+z pada bagian ini prioritas saat mengerjakan bisa di ubah ubah tanpa mengubah hasil x + y dulu dikerjakan lalu hasilnya di + z atau y + z dulu dikerjakan lalu hasilnya + x maka keluarannya tidak berubah, demikian juga untuk “AND” x.y.z (prioritas yg di kerjakan lebih dulu bisa diubah-ubah).

10.2 Membuat Fungsi dari sebuah tabel kebenaran

Fungsi Boolean atau Fungsi Biner merupakan pemetaan dari B^n ke B melalui ekspresi Boolean, ditulis sebagai : $f : B^n \rightarrow B$

Dengan : B^n = himpunan yang beranggotakan pasangan terurut ganda-n (ordered n – tuple) didalam daerah asal *B*.

Contoh :

f(a,b,c) = out = abc + a'b + b'c

Untuk membuat fungsi dari sebuah tabel kebenaran bisa menggunakan dua cara yaitu : Dengan menggunakan Sum Of Product (SOP) dan Product Of Sum (POS).

- **Cara Sum Of Product (SOP)** yaitu :

  Langkah 1 : Ubah data ber logika satu menjadi variabel masukannya misal x dan data berlogika nol menjadi variabel masukannya yang di "NOT" misal x' (Lebih jelasnya lihat contoh 5.1)

  Langkah 2: meng "AND" kan masing masing baris yang out nya sama dengan satu kearah baris (dari kiri ke kanan) setelah itu "OR" kan dari atas ke bawah.

- Cara Product Of Sum (POS) yaitu :

  Langkah 1 : Ubah data ber logika nol menjadi variabel masukannya misal x dan data berlogika satu menjadi variabel masukannya yang di "NOT" misal x' berlawanan dengan cara "SOP" (Lebih jelasnya lihat contoh 5.1)

  Langkah 2: meng "OR" kan masing-masing baris yang out nya sama dengan nol kearah baris (dari kiri ke kanan) setelah itu "AND" kan dari atas ke bawah.

Contoh 5.1 :

Tabel 5.5 tabel kebenaran yang akan dibuat fungsinya

x	*y*	*Out*
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Menggunakan tabel 5.5 buatlah tabel 5.6 yang isinya mengubah data di bawah x (pada kolom) dengan x jika bernilai satu dan x' jika bernilai nol demikian juga mengubah data di bawah y (pada kolom y) dengan y jika bernilai satu dan y' jika bernilai nol

Tabel 5.6 Adalah Tabel 5.5 dengan variabel masukan disesuaikan untuk "SOP"

x	*y*	*out*		
x'	y'	0		
x'	*y*	1	Pilih baris ini untuk SOP yang out=1	x'.y
x	y'	0		
x	*y*	1	Pilih baris ini untuk SOP yang out=1	x.y

Dengan menggunakan Tabel 5.6 Sum Of Product (SOP) pilih yang out nya "satu" maka f(x,y) = out = x'.y + x.y

Tabel 5.7 Adalah Tabel 5.5 dengan variabel masukan disesuaikan untuk "POS"

x	y	*out*		
x	y	0	Pilih baris ini untuk POS	X+Y

x	y’	1		
x’	y	0	Pilih baris ini untuk POS	x’+y
x’	y’	1		

Dengan menggunakan Product Of Sum (POS) maka f(x,y) = out = (X+Y).(x’+y)
Contoh 5.2 :
Buatlah fungsi dari tabel kebenaran berikut

x	*y*	*Out*
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

isi yang data berlogika nol pada tabel dengan ingkaran untuk SOP

x	*y*	*out*	
x’	y’	1	x’.y’
x’	*y*	1	x’.y
x	y’	0	
x	*y*	1	*x.y*

Dengan menggunakan Sum Of Product (SOP) pilih yang out = 1 maka f(x,y) = out = x’.y’ + x’.y + *x.y*
isi yang data berlogika satu pada tabel dengan ingkaran untuk POS

x	*y*	*out*	
x	y	1	
x	y’	1	
x’	y	0	x’+ y
x’	y’	1	

Menggunakan Product Of Sum (POS) pilih yang out = 0 maka f(x,y) = out = x’+ y

10.3 Menyederhanakan sebuah *Expresi Boolean*

Aplikasi Aljabar boole tujuan utamanya adalah untuk mendapatkan ekspresi logika yang paling sederhana sehingga saat dibuat rangkaiannya juga menjadi sederhana dan murah. Fungsi yang dihasilkan dari tabel kebenaran dengan menggunakan Sum Of Product (SOP) atau Product Of Sum (POS) mungkin masih belum sederhana sehingga perlu proses penyederhanaan fungsi boolean.

Penyederhanaan fungsi Boolean dapat dilakukan :

1. Secara aljabar
2. Menggunakan Peta Karnaugh
3. Menggunakan metode Quine Mc Cluskey (metode Tabulasi)

Pada bagian ini hanya membahas Penyederhanaan fungsi Boolean Secara aljabar, Dengan menggunakan Hukum-hukum dasar pada Aljabar Boolean pada tabel 5.1. maka ekspresi Boolean dapat disederhanakan.

10.4 Contoh Soal dan Pembahasa

Contoh 1:

Buktikan bahwa x + (x'.y) = x + y

Jawab :

Bukti : x + (x'.y) = (x+ x').(x + y) Distributive
= 1.(x + y) Identitas
= (x+y)

Contoh 2:

Sederhanakan *x'y'z + x'yz + xy'*

Jawab : *x'y'z + x'yz + xy'* Distributive
x'z(*y' + y*) + *xy'* komplemen
x'.z.1 + *xy'* Identitas
x'z + xz'

Contoh 3:

Sederhanakan x + x.y

Jawab : x + x.y Identitas

x.1+x.y Distributive
x.(1+y) dominansi

x .1 Identitas
x
jadi x + x.y = x Absorbtion

10.5 Latihan Soal

1. Sederhanakan fungsi berikut dengan aljabar boolean *ƒ*(A,B) = A'B + AB' +B'
2. Sederhanakan fungsi berikut menggunakan aljabar boolean *ƒ*(A,B,C) =AC'+ABC'
3. Sederhanakan fungsi berikut menggunakan aljabar boolean *ƒ*(A,B) =(A'+B)(A+B)
4. Sederhanakan fungsi berikut menggunakan aljabar boolean *ƒ*(A,B,C,D) =A'B'CD' + A'B'C'D'
5. Sederhanakan fungsi berikut menggunakan aljabar boolean *ƒ*(A,B,D) =A'D+ABD
6. Buatlah sebuah rangkaian untuk menjumlahkan satu bit bilangan biner (Buat tabel kebenarannya, buat fungsinya dan sederhanakan).
7. Buatlah sebuah rangkaian untuk menjumlahkan dua bit bilangan biner (Buat tabel kebenarannya, buat fungsinya dan sederhanakan).

8. Buatlah sebuah rangkaian pengurangan satu bit bilangan biner (Buat tabel kebenarannya, buat fungsinya dan sederhanakan).

9. Buatlah sebuah rangkaian pengurangan dua bit bilangan biner (Buat tabel kebenarannya, fungsinya dan sederhanakan).

10. Sederhanakan fungsi berikut F(x,y,z) = x'y'z' + xyz' + xy'z' + x'y'z + xy'z

11. Sederhanakan fungsi berikut F(A,B,C,D) = A'B'C'D + A'B'CD + A'BCD + ABCD + ABCD' + AB'C'D + AB'CD + AB'CD'

12. Buatlah sebuah fungsi dari tabel kebenaran berikut ini lalu sederhanakan

13. x	14. y	15. z	16. F
17. 0	18. 0	19. 0	20. 0
21. 0	22. 0	23. 1	24. 0
25. 0	26. 1	27. 0	28. 1
29. 0	30. 1	31. 1	32. 1
33. 1	34. 0	35. 0	36. 0
37. 1	38. 0	39. 1	40. 1
41. 1	42. 1	43. 0	44. 1
45. 1	46. 1	47. 1	48. 1

DAFTAR PUSTAKA

1. Kenneth H. Rosen, Discrete Mathematics and Its Application , Mc Graw-Hill, 1999.
2. C.L. Liu, Element of Discrete Mathematics , McGraw-Hill, Inc, 1985
3. Munir, Rinaldi, Matematika Diskrit, Informatika, 2005

GLOSARIUM

Matematika Diskrit	cabang ilmu matematika yang mempelajari tentang objek-objek diskrit
Proposisi	pernyataan yang memiliki nilai kebenaran (benar atau salah)
Hukum de Morgan	$\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$, $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$
Enumerasi	menyebutkan satu persatu setiap anggota atau elemen himpunan
Kardinalitas	jumlah elemen yang ada pada sebuah himpunan
Subset	himpunan bagian
Induksi Matematika	salah satu metode dalam matematika untuk membuktikan pernyataan matematika atau proposisi
Invers	jika R adalah relasi dari himpunan X ke himpunan Y, maka invers dari R adalah relasi dari Y ke X
Kombintorial	ilmu yang mempelajari penghitungan jumlah penyusunan atau kombinasi objek-objek tanpa harus mengenumerasinya
Permutasi	jumlah urutan berbeda dari pengaturan objek-objek
Kombinasi	jumlah pemilihan tak terurut dari suatu objek
Graf	himpunan tidak kosong dari simpul-simpul dan sisi
Pohon	graf tak berarah terhubung yang tidak mengandung sirkuit
Aljabar Boolean	aturan-aturan untuk mengubah ungkapan simbol logika biner

INDEKS

BIOGRAFI PENULIS

	Yan Watequlis Syaifudin, lahir di Malang 5 Januari 1981. Mendapatkan gelar sarjana dari Institut Teknologi Bandung pada tahun 2003 dan gelar magister dari Institut Teknologi Surabaya pada tahun 2011. Menjadi dosen di Jurusan Teknik Informasi Politeknik Negeri Malang dari tahun 2005 sampai sekarang.
	Deasy Sandhya Elya Ikawati, S.Si., M.Si. lahir di Malang 8 Desember 1990. Menyelesaikan Sarjana Sains di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang pada tahun 2013 dan Magister Sains di Universitas Brawijaya pada tahun 2016. Menjadi dosen di Politeknik Negeri Malang dari tahun 2016 sampai sekarang.
	DR. Eng. Cahya Rahmad, S.T., M.Kom., Lahir di Sumenep 2 Februari 1972, Mendapat gelar Sarjana Teknik dari Universitas Brawijaya 1998, gelar Magister Komputer dari ITS tahun 2005 dan gelar DR.Eng dari Saga University jepang tahun 2013. Menjadi dosen di Politeknik Negeri Malang dari tahun 2005 sampai sekarang.

SINOPSIS BUKU

Matematika Diskrit adalah cabang ilmu matematika yang dibutuhkan oleh jurusan Teknik Informatika. Materi mengenai logika, himpunan, fungsi, induksi, graf dan lain-lain merupakan pengetahuan dasar yang dibutuhkan oleh mahasiswa jurusan Teknik Informatika. Oleh karena itu Buku Matematika Diskrit ini ditulis untuk memudahkan pembaca pada umumnya dan mahasiswa jurusan Teknik Informatika khususnya. Buku ini juga dilengkapi contoh soal untuk lebih memudahkan pembaca dalam memahami tiap bab yang ada pada buku ini. Selain itu, terdapat latihan soal pada tiap bab tersebut yang dapat digunakan pembaca sebagai parameter pemahaman terkait materi yang sedang dipelajari.