

Московский Физико-технический Институт
(Национальный исследовательский университет)

Отчет о выполнении работы 3.6.1

Спектральный анализ электрических сигналов

Выполнили студентки 2 курса
ФБМФ, группа Б06-103
Попеску Полина
Фитэль Алёна

Долгопрудный, 2022 г.

1 Теоретическое введение

1.1 Разложение сложных сигналов на периодические колебания

Используется разложение в сумму синусов и косинусов с различными аргументами или, как чаще его называют, *разложение в ряд Фурье*.

Пусть задана функция $f(t)$, которая периодически повторяется с частотой $\Omega_1 = \frac{2\pi}{T}$, где T — период повторения импульсов. Её разложение в ряд Фурье имеет вид

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\Omega_1 t) + b_n \sin(n\Omega_1 t)] \quad (1)$$

или

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\Omega_1 t - \psi_n). \quad (2)$$

Если сигнал чётен относительно $t = 0$, в тригонометрической записи остаются только члены с косинусами. Для нечетной наоборот.

Коэффициенты определяются по формуле

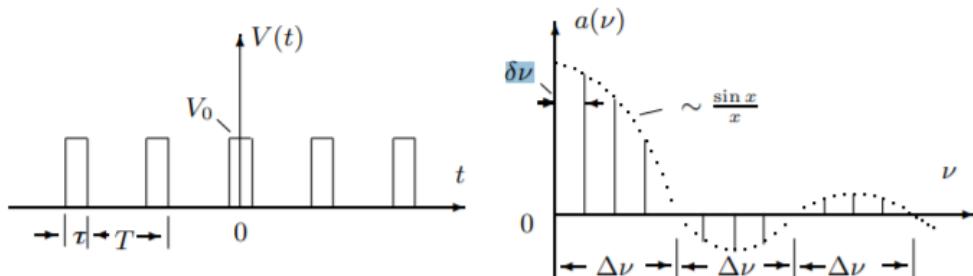
$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} f(t) \cos(n\Omega_1 t) dt, \\ b_n &= \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} f(t) \sin(n\Omega_1 t) dt. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь t_1 — время, с которого мы начинаем отсчет.

Сравнив формулы (1) и (2) можно получить выражения для A_n и ψ_n :

$$\begin{aligned} A_n &= \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \\ \psi_n &= \arctan \frac{b_n}{a_n}. \end{aligned} \quad (4)$$

1.2 Периодическая последовательность прямоугольных импульсов



Введем величину: $\Omega_1 = \frac{2\pi}{T}$, где T — период повторения импульсов.

Коэффициенты при косинусных составляющих будут равны

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} V_0 \cos(n\Omega_1 t) dt = 2V_0 \frac{\tau}{T} \frac{\sin(n\Omega_1 \tau/2)}{n\Omega_1 \tau/2} \sim \frac{\sin x}{x}. \quad (5)$$

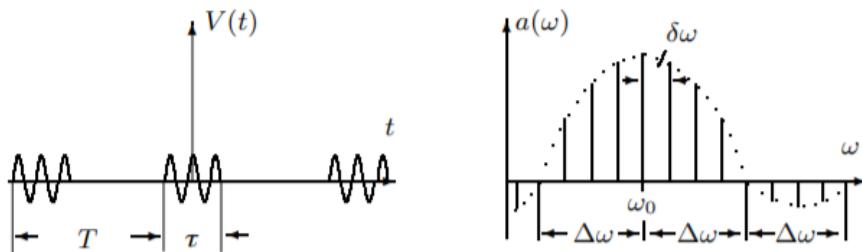
Здесь V_0 - амплитуда сигнала.

Поскольку наша функция четная, то $b_n = 0$.

Пусть T кратно τ . Тогда введем ширину спектра, равную $\Delta\omega$ — расстояние от главного максимума до первого нуля огибающей, возникающего, как нетрудно убедиться при $n = \frac{2\pi}{\tau\Omega_1}$. При этом

$$\Delta\omega\tau \simeq 2\pi \Rightarrow \Delta\nu\Delta t \simeq 1. \quad (6)$$

1.3 Периодическая последовательность цугов



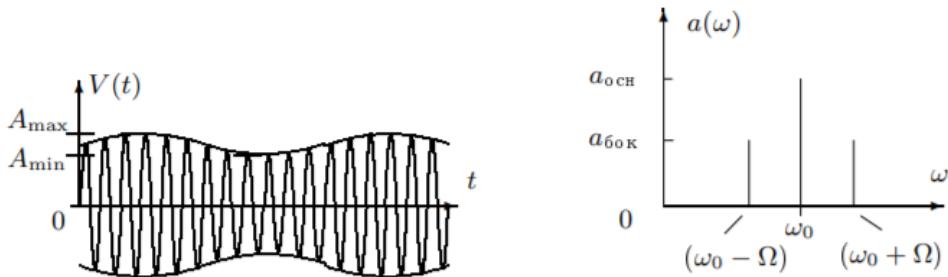
Возьмём цуги колебания $V_0 \cos(\omega_0 t)$ с длительностью цуга τ и периодом повторений T .

Функция $f(t)$ снова является четной относительно $t = 0$. Коэффициент при n -ой гармонике согласно формуле (3) равен

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} V_0 \cos(\omega_0 t) \cdot \cos(n\Omega_1 t) dt = V_0 \frac{\tau}{T} \left(\frac{\sin[(\omega_0 - n\Omega_1) \frac{\tau}{2}]}{(\omega_0 - n\Omega_1) \frac{\tau}{2}} + \frac{\sin[(\omega_0 + n\Omega_1) \frac{\tau}{2}]}{(\omega_0 + n\Omega_1) \frac{\tau}{2}} \right). \quad (7)$$

Пусть T кратно τ . Тогда спектры последовательности прямоугольных сигналов и цугов аналогичны, но максимумы сдвинуты на ω_0 .

1.4 Амплитудно-модулированные колебания



Рассмотрим гармонические колебания высокой частоты ω_0 , амплитуда которых медленно меняется по гармоническому закону с частотой $\Omega \ll \omega_0$.

$$f(t) = A_0 [1 + m \cos \Omega t] \cos \omega_0 t. \quad (8)$$

Коэффициент m называется *глубиной модуляции*. При $m < 1$ амплитуда меняется от минимальной $A_{min} = A_0(1 - m)$ до максимальной $A_{max} = A_0(1 + m)$. Глубина модуляции может быть представлена в виде

$$m = \frac{A_{max} - A_{min}}{A_{max} + A_{min}}. \quad (9)$$

Простым тригонометрическим преобразованием уравнения (8) можно найти спектр колебаний

$$f(t) = A_0 \cos \omega_0 t + \frac{A_0 m}{2} \cos (\omega_0 + \Omega) t + \frac{A_0 m}{2} \cos (\omega_0 - \Omega) t. \quad (10)$$

2 Экспериментальная установка

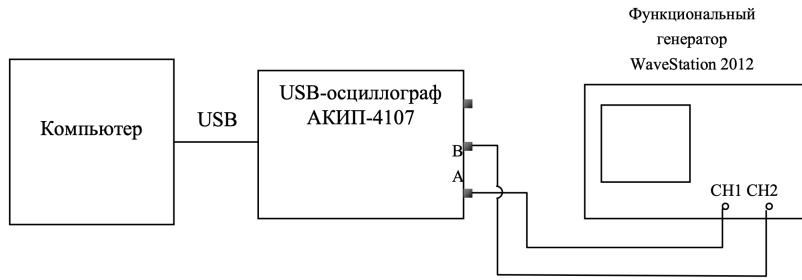


Рис. 1: Схема установки

Функциональный генератор WaveStation 2012 позволяет сформировать два различных электрических сигнала, которые выводятся на два независимых канала – CH1 и CH2. Сигнал с канала CH1 подается на вход A, а сигнал с канала CH2 – на вход B USB-осциллографа. Затем эти сигналы подаются на вход компьютера через USB-соединение. При работе USB-осциллографа в режиме осциллографа, на экране компьютера можно наблюдать каждый из сигналов в отдельности, а также их произведение. В режиме спектроанализатора можно наблюдать спектры этих сигналов.

3 Результаты измерений и обработка данных

3.1 Исследование спектра периодической последовательности прямоугольных импульсов

На изображениях 2, 3, 4 приведены фото развертки при различных t и $f_{\text{повт}}$

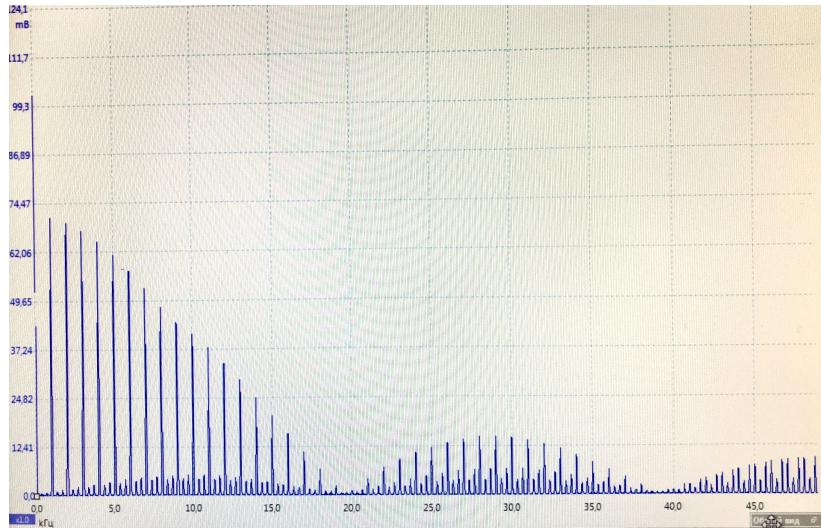


Рис. 2: $\tau = 50\text{мкс}$, $f_{\text{повт}} = 1\text{кГц}$

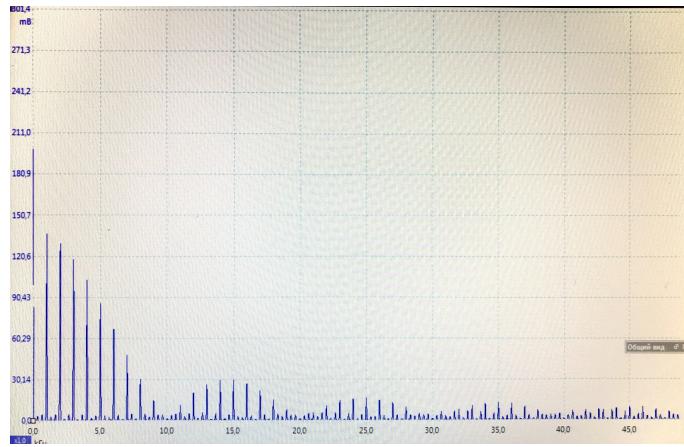


Рис. 3: $\tau = 100\text{мкс}$, $f_{\text{повт}} = 1\text{кГц}$

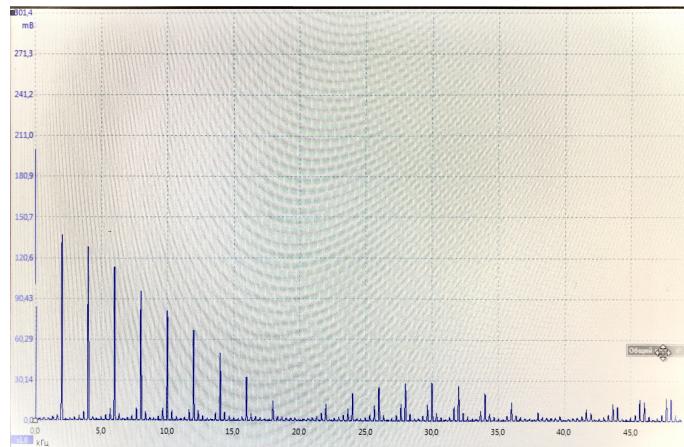


Рис. 4: $\tau = 50\text{мкс}$, $f_{\text{повт}} = 2\text{кГц}$

Теперь исследуем зависимость ширины спектра $\Delta\nu$ от τ при $f_{\text{повт}} = 1 \text{ кГц}$

$\tau, \text{ мкс}$	25	50	75	100	125	175	200
$\Delta\nu, \text{ кГц}$	39.6	20.0	13.0	10.0	7.9	5.5	5.0
$1/\tau \cdot 10^3 \text{ с}^{-1}$	40	20	13.3	10	8	5.7	5

Таблица 1: Исследование зависимости $\Delta\nu(\tau)$

Проведем измерения частот и амплитуд у различных гармоник сигналов с различной длительностью импульсов

$\tau = 50\text{мкс}$, $f_{\text{повт}} = 1\text{кГц}$

n	1	2	3	4	5	6	7	8
$\nu, \text{ кГц}$	0.004	1.000	2.003	3.005	4.006	4.993	5.996	6.997
A, мВ	15.66	3.165	3.022	2.815	2.625	2.522	2.514	2.450

$\tau = 100\text{мкс}$, $f_{\text{повт}} = 1\text{кГц}$

n	1	2	3	4	5	6	7	8
$\nu, \text{ кГц}$	0.001	1.003	2.001	3.005	4.005	4.996	5.994	6.998
A, мВ	2.041	6.139	5.677	5.018	4.224	3.604	2.955	2.224

На рис. 5 изображен график, построенный по полученным значениям. По МНК получаем, что $k \approx 0.99 \pm 0.01$, что подтверждает теоретические расчеты.

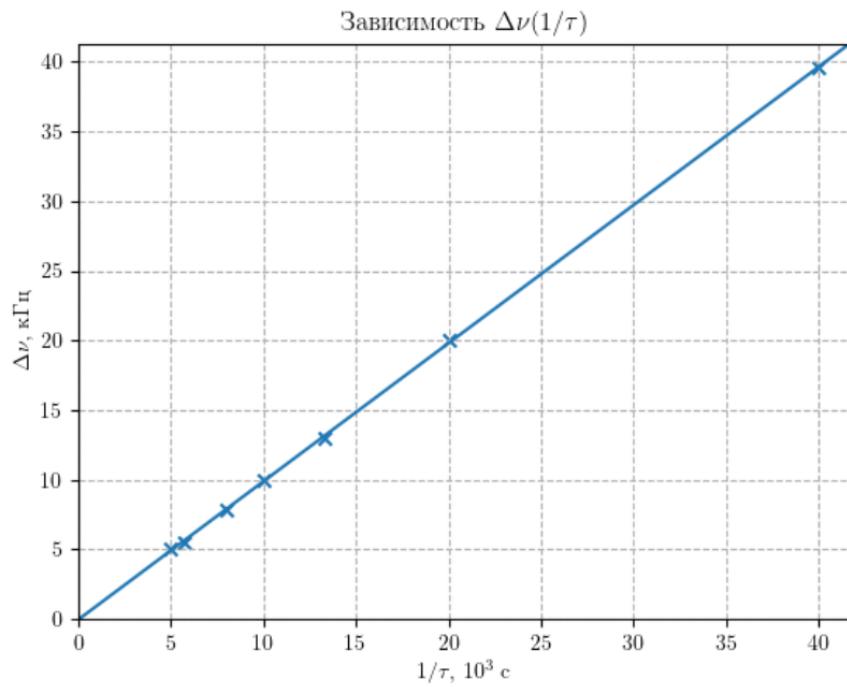


Рис. 5: Зависимость $\Delta\nu(1/\tau)$

3.2 Исследование спектра периодической последовательности цугов гармонических колебаний

При увеличении длительности импульса вдвое произошли изменения, аналогичные с первой частью работы. Изображения представлены на рис. 6 и рис. 7

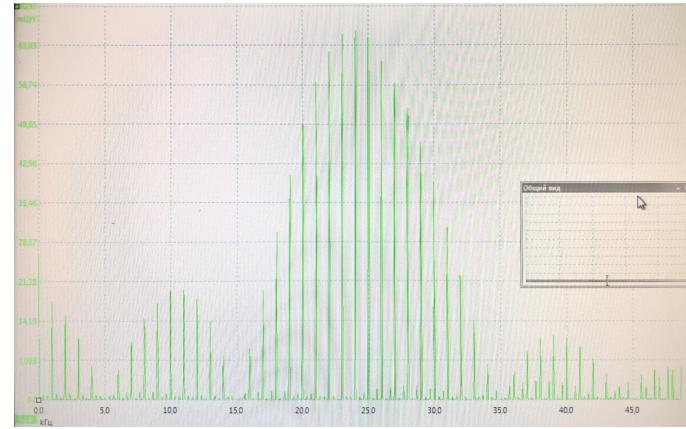


Рис. 6: $\tau = 50\text{мкс}$, $f_{\text{повт}} = 1\text{кГц}$

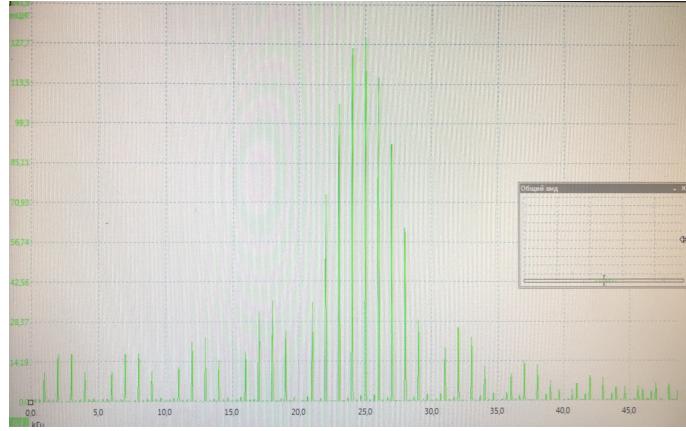


Рис. 7: $\tau = 100\text{мкс}$, $f_{\text{повт}} = 1\text{кГц}$

При изменении $f_{\text{повт}}$ (10, 25 и 40 кГц) изображение меняло свое положение по горизонтальной оси (рис. 7, 8, 9).

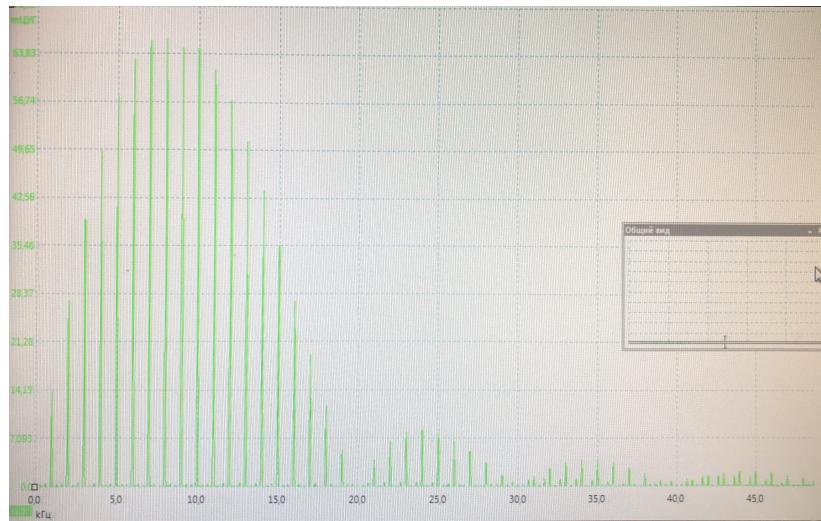


Рис. 8: $f_{\text{повт}} = 10 \text{ кГц}$

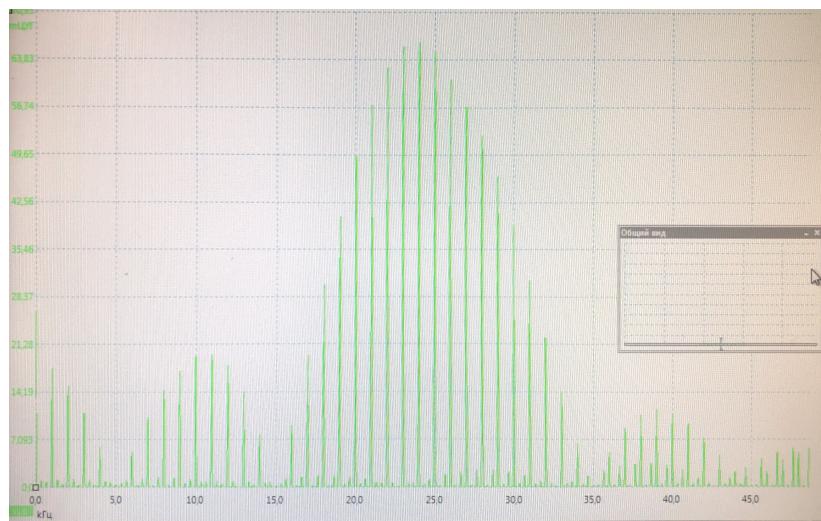


Рис. 9: $f_{\text{повт}} = 25 \text{ кГц}$

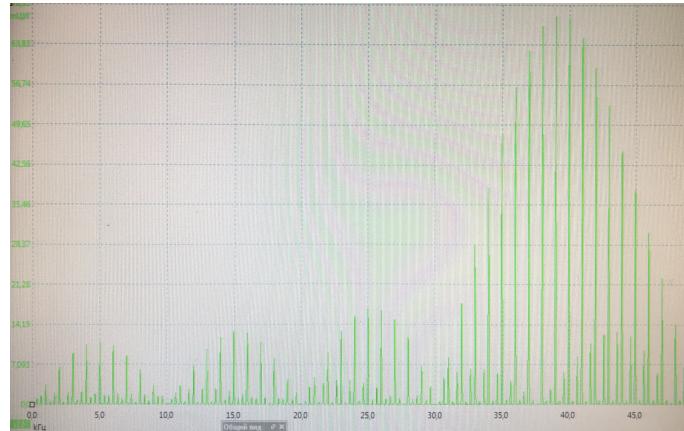


Рис. 10: $f_{\text{повт}} = 40 \text{ кГц}$

Теперь установим значения $\nu_0 = 30 \text{ кГц}$, $\tau = 100 \text{ мкс}$ и проведем измерение зависимости $\delta\nu$ от $f_{\text{повт}}$

$f_{\text{повт}}, \text{ кГц}$	0.5	1	2	4	5
$\delta\nu, \text{ кГц}$	0.5	1	2	4	5

Таблица 2: Исследование зависимости $\delta\nu(f_{\text{повт}})$

Измерим частоты и амплитуды различных гармоник при $f_{\text{повт}} = 100$ и 200 кГц

$f_{\text{повт}} = 1 \text{ кГц}$, $\tau = 100 \text{ мкс}$

n	1	2	3	4	5	6	7	8
$\nu, \text{ кГц}$	30.02	31.00	31.95	33.00	33.98	34.96	36.02	36.92
A, мкВ	12.160	7.962	7.452	6.601	5.678	4.415	3.347	2.496

$f_{\text{повт}} = 2 \text{ кГц}$, $\tau = 100 \text{ мкс}$

n	1	2	3	4	5	6	7	8
$\nu, \text{ кГц}$	30.04	31.08	32.11	33.45	34.00	35.08	36.66	37.03
A, мкВ	25.008	15.098	14.908	13.201	11.098	9.802	6.701	5.007

Построим график по полученным значениям (рис. 11). Здесь коэффициент наклона также равен 1, что соответствует расчетам.

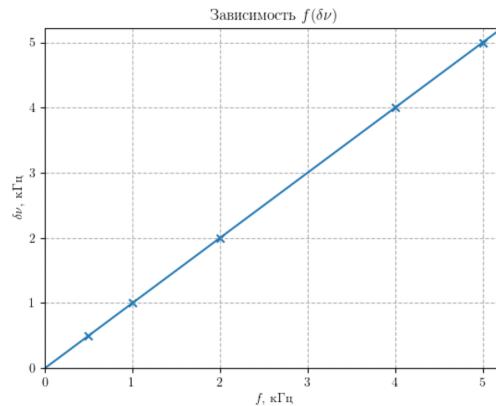


Рис. 11: Зависимость $\delta\nu(f_{\text{повт}})$

3.3 Исследование спектра гармонических сигналов, модулированных по амплитуде

Установим $\nu_0 = 25$ кГц и $f_{mod} = 1$ кГц.

Обозначим $\frac{A_{max}-A_{min}}{A_{max}+A_{min}} = m$, $\frac{A_{бок}}{A_{осн}} = k$ и снимем зависимость $k(m)$

A, мВ	2	0.8	1.2	1.6	0.4
A_{max} , мЦУГ	990	707	790	890	601
A_{min} , мЦУГ	17	293	200	103	398
$A_{осн}$, мЦУГ	317.5	321	322	322	321
$A_{бок}$, мЦУГ	163.5	63.5	96	125	31
m	6.3	1.6	2.6	4.0	0.7
k	0.5	0.2	0.3	0.4	0.1

Таблица 3: Исследование зависимости $k(m)$

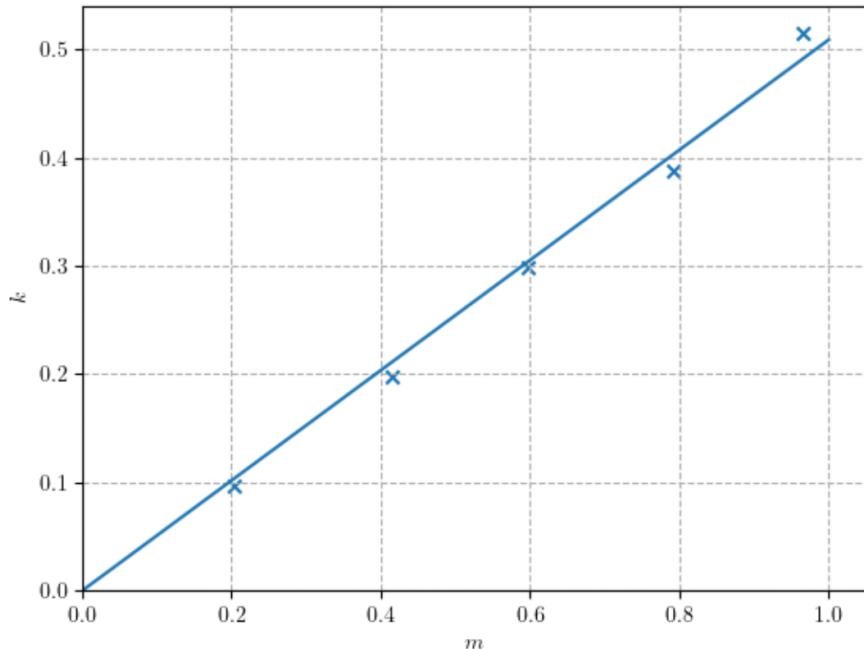


Рис. 12: Исследование зависимости $k(m)$

Полученное значение углового наклона $k' = 0.51 \pm 0.01$, что сходится с теоретическим значением.

4 Подведение итогов

В ходе работы был изучен спектральный состав периодических электрических сигналов различных форм: прямоугольные импульсы, цуги гармонических колебаний и сигналы, модулированные по амплитуде. Полученные результаты подтверждают установленные соотношения.