

# Отчет о выполнении лабораторной работы 3.2.1

## Сдвиг фаз в цепи переменного тока.

Фитэль Алёна, Попеску Полина  
группа Б06-103

15 сентября 2024 г.

**Аннотация.** В работе исследована зависимость сдвига фаз между током и напряжением от сопротивления в  $RC$ – и в  $RL$ – цепи; определена добротность колебательного контура путем снятия зависимости сдвига фаз от частоты вблизи резонанса; оценен диапазон работы фазовращателя.

### Теоретическое введение

Удобным, хотя и не очень точным прибором для измерения фазовых соотношений служит электронный осциллограф. Пусть нужно измерить сдвиг фаз между двумя напряжениями  $U_1$  и  $U_2$ . Подадим эти напряжения на горизонтальную и вертикальную развёртки осциллографа. Смещение луча по горизонтали и вертикали определяется выражениями

$$x = x_0 \cos \Omega t, \quad y = y_0 \cos(\Omega t + \alpha),$$

где  $\alpha$  — сдвиг фаз между напряжениями  $U_1$  и  $U_2$ , а  $x_0$  и  $y_0$  — амплитуды напряжений, умноженные на коэффициенты усиления соответствующих каналов осциллографа. Исключив время, после несложных преобразований найдём:

$$\left(\frac{x}{x_0}\right)^2 + \left(\frac{y}{y_0}\right)^2 + \frac{2xy}{x_0 y_0} \cos \alpha = \sin^2 \alpha.$$

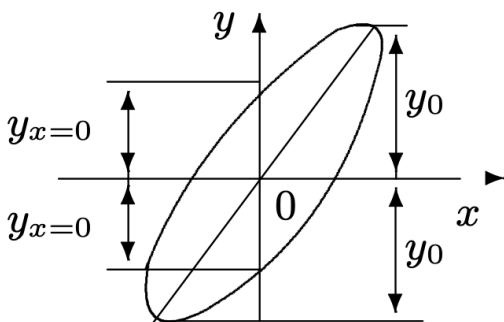


Рис. 1: Эллипс на экране осциллографа

Полученное выражение определяет эллипс, описываемый электронным лучом на экране осциллографа (рис. 1). Ориентация эллипса зависит как от искомого угла  $\alpha$ , так и от усиления каналов осциллографа. Для расчёта сдвига фаз можно измерить отрезки  $2y_{x=0}$  и  $2y_0$  (или  $2x_{y=0}$  и  $2x_0$ , на рисунке не указанные) и, подставляя эти значения в уравнение эллипса, найти

$$\alpha = \pm \arcsin \left( \frac{y_{x=0}}{y_0} \right).$$

Для правильного измерения отрезка  $2y_{x=0}$  важно, чтобы центр эллипса лежал на оси  $y$ .

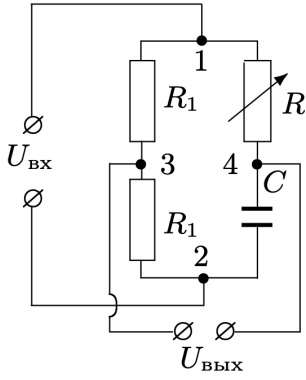


Рис. 2: Принципиальная схема фазовращателя

Другой способ измерения сдвига фаз изложен в описании экспериментальной установки.

На практике часто используются устройства, позволяющие в широких пределах изменять фазу напряжения ( $0 < \psi < \pi$ ). Такие устройства называются фазовращателями. Схема простого фазовращателя приведена на рис. 2. Она включает в себя два одинаковых резистора  $R_1$ , ёмкость  $C$  и переменное сопротивление  $R$ .

Используя метод комплексных амплитуд, найдём зависимость сдвига фаз между входным напряжением

$U_{\text{вх}} = U_0 \cos \Omega t$  и выходным  $U_{\text{вых}}$  от соотношения между импедансами сопротивления  $R$  и ёмкости  $C$ . Для этого выразим выходное напряжение  $U_{\text{вых}}$  через  $U_{\text{вх}}$ , параметры контура и частоту внешнего источника  $\Omega$ :  $U_{34} = f(U_{12}, R, C, \Omega)$ .

Обозначим комплексную амплитуду входного напряжения через  $\hat{U}_0$ . Тогда напряжение между точками 1 и 3 в силу равенства сопротивлений  $R_1$

$$\hat{U}_{13} = \frac{\hat{U}_0}{2}.$$

Если фазу напряжения  $\hat{U}_{\text{вх}}$  положить равной нулю, то  $\hat{U}_0$  будет действительной величиной:  $\hat{U}_0 = U_0$ . Приняв напряжение в точке 1 равным нулю, получим амплитуду напряжения в точке 3:

$$\hat{U}_{03} = \frac{U_0}{2}.$$

Расчитаем  $\hat{U}_{04}$  – амплитуду напряжения в точке 4. Импеданс  $Z$  последовательно соединённых сопротивления  $R$  и ёмкости  $C$  равен

$$Z = R - \frac{i}{\Omega C}.$$

Для комплексной амплитуды тока

$$\hat{I}_0 = \frac{U_0}{Z} = \frac{U_0}{R - i/\Omega C},$$

а для комплексной амплитуды напряжения в точке 4 –

$$\hat{U}_{04} = \hat{I}_0 R = U_0 \frac{R}{R - i/\Omega C}.$$

Выходное напряжение

$$\hat{U}_{\text{вых}} = \hat{U}_{04} - \hat{U}_{03} = \hat{U}_{04} - U_0/2 = \frac{U_0}{2} \frac{R + i/\Omega C}{R - i/\Omega C}.$$

В числитель и знаменатель последнего выражения входят комплексно-сопряжённые величины, модули которых одинаковы, поэтому величина выходного напряжения не меняется при изменении  $R$ . Модуль  $U_{\text{вых}}$  всегда равен  $U_0/2$  – половине  $U_{\text{вх}}$ . Сдвиг фаз между входным и выходным напряжениями равен  $2 \arctan(1/\Omega RC)$  и меняется от  $\pi$  (при  $R \rightarrow 0$ ) до 0 (при  $R \rightarrow \infty$ ).

## Экспериментальная установка

Схема для исследования сдвига фаз между током и напряжением в цепи переменного тока представлена на рис. 3. Эталонная катушка  $L$ , магазин емкостей  $C$  и магазин сопротивлений  $R$  соединены последовательно и через дополнительное сопротивление  $r$  подключены к источнику синусоидального напряжения — звуковому генератору.

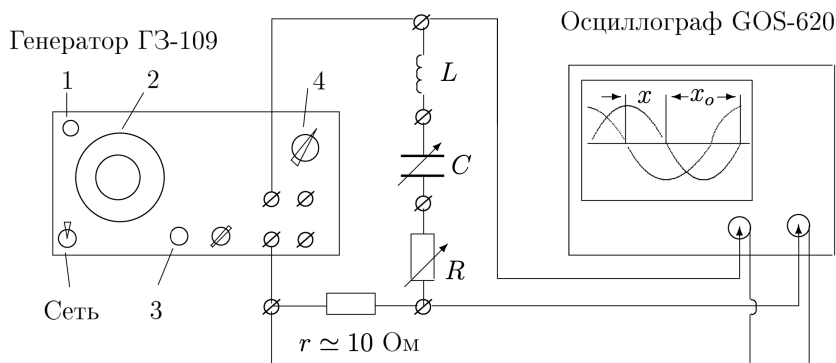


Рис. 3: Схема установки для исследования сдвига фаз между током и напряжением

Сигнал, пропорциональный току, снимается с сопротивления  $r$ , пропорциональный напряжению — с генератора. Оба сигнала подаются на универсальный осциллограф. Этот осциллограф имеет два канала вертикального отклонения, что позволяет одновременно наблюдать на экране два сигнала. В нашей работе это две синусоиды (рис. 3), смещённые друг относительно друга на расстояние  $x$ , зависящее от сдвига фаз между током и напряжением в цепи.

Измерение сдвига фаз удобно проводить следующим образом:

- 1) подобрать частоту развертки, при которой на экране осциллографа укладывается чуть больше половины периода синусоиды;
- 2) отцентрировать горизонтальную ось;
- 3) измерить расстояние  $x_0$  между нулевыми значениями одного из сигналов, что соответствует смещению по фазе на  $\pi$ ;
- 4) измерить расстояние  $x$  между нулевыми значениями двух синусоид и пересчитать в сдвиг по фазе:  $\psi = \pi \cdot x/x_0$ .

На рис. 1 синусоиды на экране ЭО сдвинуты по фазе на  $\pi/2$ .

Схема фазовращателя, изображённая на рис. 4, содержит два одинаковых резистора  $R_1$ , смонтированных на отдельной плате, магазин сопротивлений  $R$  и магазин емкостей  $C$ .

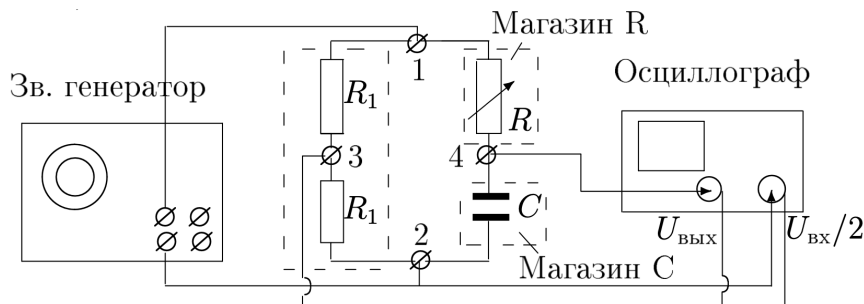


Рис. 4: Схема установки для исследования фазовращателя

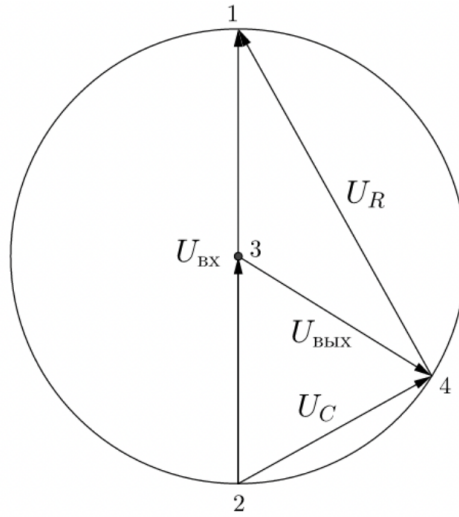


Рис. 5: Векторная диаграмма фазовращателя

Разность фаз равна  $\pi/2$ , когда медиана 34 является и высотой, т.е. когда  $\triangle 124$  – равнобедренный.

## Результаты измерений и обработка данных

После сборки схемы (рис. 4) установим на катушке индуктивности максимальное значение  $L = 50$  мГн, а в магазине емкостей  $C = 0.5$  мкФ, сопротивление  $R$  занулим. На генераторе установим частоту  $\nu = 1$  кГц и нагрузку 5 Ом.

Пересоберем схему по рис. 3 и замкнем катушку ( $RC$ –цепь).

В такой цепи зависимость разности фаз можно вычислить по простой формуле

$$\psi = \arctan \left( \frac{x}{R_{\Sigma}} \right), \quad (1)$$

где  $x = X_L - X_C$  – разность реактивных сопротивлений катушки и конденсатора,  $R_{\Sigma}$  – суммарное активное сопротивление цепи.

Реактивное сопротивление в цепи  $X_1 = \frac{1}{\omega C} = 31.83$  Ом.

Будем увеличивать сопротивление  $R$  от 0 до  $10X_1$  и проведем измерения (табл. 1), подбирая  $R$  так, чтобы приращения разности фаз были примерно одинаковы.

$R$ , Ом	0	40	80	120	190	240	300
$\psi$ , $2\pi/50$	12.5	11.5	10.5	9.5	8.5	7.5	6.5

Таблица 1:  $RC$ –цепь

Изобразим полученные данные на графике (рис. 5) и сравним с теоретическим значением (1).

Из графика видно, что измеренные величины довольно хорошо коррелируют с теоретической зависимостью. По МНК коэффициент наклона  $k_c = 0.95 \pm 0.11$ , что в пределах погрешности совпадает с теоретическим  $k = 1$ .

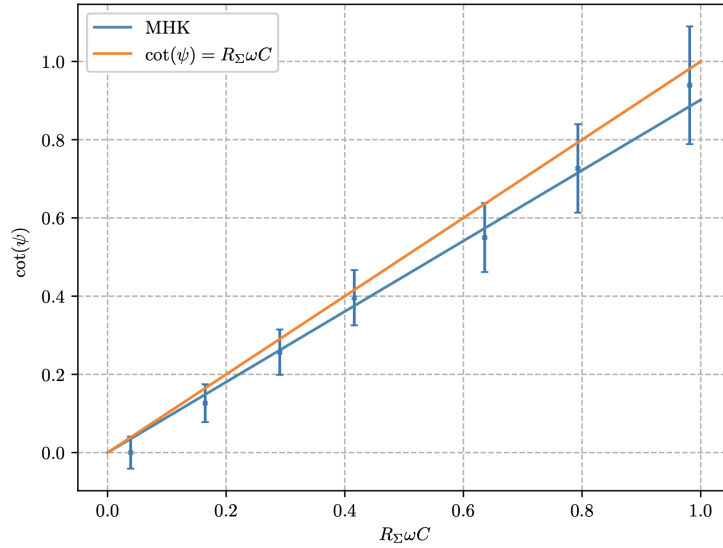


Рис. 6: Зависимость разности фаз от сопротивления в  $RC$ –цепи

Теперь в схеме на рис. 3 закоротим магазин емкостей ( $RL$ –цепь).

Реактивное сопротивление  $X_2 = \omega L = 314.16$  Ом.

Измерим зависимость сдвига фаз от сопротивления (табл. 2), меняя его от 0 до  $10X_2$ .

$R$ , Ом	0	380	700	1100	1500	2000	3000
$\psi$ , $2\pi/50$	11.5	5.5	3	2.5	2	1.5	1

Таблица 2:  $RL$ –цепь

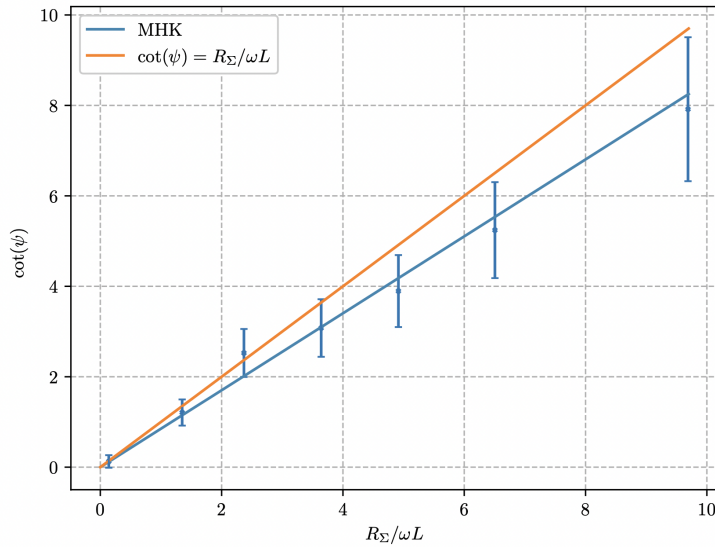


Рис. 7: Зависимость разности фаз от сопротивления в  $RL$ –цепи

По МНК  $k = 0.89 \pm 0.13$ , что в пределах погрешности совпадает с теоретическим  $k = 1$ .

Теперь проведем измерения в  $RLC$ –цепи.

Резонансная частота  $\nu_0 = \frac{2}{2\pi\sqrt{LC}} = 1006.58$  Гц. Теоретически полученное значение:  $\nu_0 \approx 990$  Гц.

Снимем зависимость сдвига фаз (от  $-\pi/3$  до  $\pi/3$ ) от частоты (табл. 3) при  $R = 0$  и при  $R = 100$  Ом.

$R = 0$							
$\nu$ , Ом	890	930	970	990	1040	1080	1120
$x/x_0$	-1/3	-9/35	-4/33	0	1/5	8/29	1/3
$R = 100$ Ом							
$\nu$ , Ом	700	800	900	990	1100	1200	1400
$x/x_0$	-7/22	-5/19	-5/34	0	1/12	3/13	7/22

Таблица 3:  $RCL$ –цепь

Изобразим данные на одном графике (рис. 7)

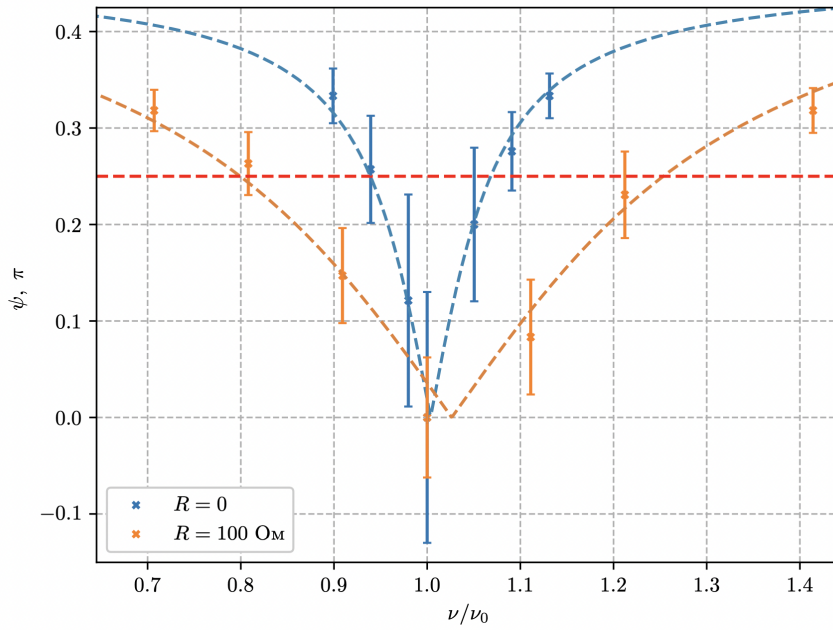


Рис. 8: Зависимость разности фаз от частоты

При сдвиге фаз  $\psi = \pi/4$  ширины графиков равны соответственно 0.128 и 0.434. Тогда добротности схем равны  $Q_{\text{прак}}(0) = 7.8$ ,  $Q_{\text{прак}}(100) = 2.3$ .

Также запишем параметры установки: сопротивление  $r = 12.4$  Ом, индуктивность  $L = 50$  мГн и активное сопротивление  $R_L = 31.5$  Ом.

Теоретически добротность контура равна

$$Q = \frac{1}{R_{\Sigma}} \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Тогда при  $R = 0$   $Q_{\text{теор}} = 7.2$ , при  $R = 100$  Ом  $Q_{\text{теор}} = 2.2$ , что примерно совпадает с экспериментальными значениями.

Соберем установку по рис. 4 и оценим диапазон изменения сдвига фаз при  $\nu = 1$  кГц и  $C = 0.5$  мкФ: он меняется от  $\psi(0) = 0$  до  $\psi(10\text{кОм}) = \pi/2$ .

## Подведение итогов

В ходе работы исследована зависимость сдвига фаз между током и напряжением от сопротивления. В  $RC$ – и  $RL$ – цепях экспериментальные значения в пределах погрешности

совпадают с теоретическими.

Также определена добротность колебательного контура путем снятия зависимости сдвига фаз от частоты вблизи резонанса: для  $R = 0$  значение  $Q = 7.8$ , что примерно совпадает с теоретическим  $Q = 7.2$  ( $\varepsilon \approx 9\%$ ), для  $R = 100$  Ом добротность контура  $Q = 2.3$ , что также хорошо коррелирует с теоретическим значением  $Q = 2.2$  ( $\varepsilon \approx 5\%$ ).