МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Реферат
на тему: «Исторический путь: от 13-й проблемы Гильберта к архитектурным инновациям XXI века»

по дисциплине «Организация и управление научными исследованиями в области информационных систем»

Выполнил:
Зиберов Александр Александрович
студент 1 курса группы ИНС-м-о-25-1
направления подготовки: 09.04.02 «Информационные системы и технологии», направленность (профиль) «Управление данными»
очной формы обучения

Проверил:
Винокурский Д.Л., доцент департамента цифровых, робототехнических систем и электроники института перспективной инженерии
(ФИО, должность, кафедра)

Ставрополь
2025

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Проблема описания и анализа функций многих переменных занимает важное место в математике и прикладных науках. С ростом сложности моделей, используемых в физике, инженерии, экономике и обработке данных, возрастает интерес к вопросам функциональной структуры, выразительной способности и способов представления многомерных зависимостей. Понимание того, как сложные функции могут быть разложены на более простые компоненты, имеет значение не только для теории, но и для построения вычислительных моделей.

Одним из ключевых этапов в развитии этих представлений стала 13-я проблема Гильберта, сформулированная в начале XX века. Она отразила господствующие в то время взгляды на принципиальную сложность функций многих переменных и поставила вопрос о возможности их представления через суперпозиции функций меньшего числа аргументов. Дальнейшее развитие этой идеи привело к появлению теоремы Колмогорова–Арнольда, которая существенно изменила понимание функциональной сложности, показав, что в классе непрерывных функций такие представления в принципе возможны.

Во второй половине XX века вопросы суперпозиции функций получили новое развитие в контексте нейросетевых моделей. Хотя ранние нейросети реализовывали идеи композиции и суммирования в неявной форме, их развитие сопровождалось как периодами активного роста, так и длительными спадами интереса. Возрождение нейросетевых методов в XXI веке было связано, прежде всего, с технологическими факторами, однако одновременно выявило ограничения классических архитектур, связанные с интерпретируемостью и использованием функциональной структуры задачи.

На этом фоне в последние годы появились архитектуры Kolmogorov–Arnold Networks (KANs), в которых идеи теории суперпозиции используются как архитектурный принцип обучаемых моделей. Эти подходы представляют собой попытку связать классические результаты теории функций с современными методами машинного обучения и переосмыслить роль одномерных функций в аппроксимации многомерных зависимостей.

В данном реферате рассматривается исторический путь от постановки 13-й проблемы Гильберта до современных решений XXI века. В работе анализируются предпосылки возникновения теоремы Колмогорова–Арнольда, её математическое значение и ограничения, влияние идей суперпозиции на развитие нейросетей, причины «зимы» нейросетевых методов и факторы их последующего возрождения. Отдельное внимание также уделяется и KAN, их концепции, практическим реализациям, успешным и неудачным применениям, а также перспективам дальнейшего развития.

1 13-Я ПРОБЛЕМА ГИЛЬБЕРТА И ЕЁ ПОСТАНОВКА

1.1 Исторический контекст и формулировка проблемы

В конце XIX – начале XX века математика переживала период интенсивного развития и переосмысления собственных оснований. Существенные успехи в анализе, алгебре и теории функций сопровождались стремлением к систематизации накопленных результатов и выявлению принципиальных возможностей и ограничений существующих методов. Особое внимание уделялось вопросам строгости, общности и границ применимости математических построений.

В этот период заметную роль сыграли работы Давида Гильберта, направленные на формирование целостной картины математического знания. Его подход заключался не только в решении отдельных задач, но и в постановке фундаментальных проблем, способных определить направления дальнейших исследований. В 1900 году на Международном конгрессе математиков в Париже Гильберт представил список из 23 проблем, охватывающих широкий спектр областей – от теории чисел и геометрии до анализа и логики [1]. Задачи были сформулированы как ориентиры для будущего развития математики и во многих случаях оказали долгосрочное влияние на соответствующие дисциплины.

Одной из характерных черт этого времени было представление о росте сложности математических объектов при увеличении числа переменных или параметров. Функции многих переменных рассматривались как существенно более сложные по своей природе, чем одномерные функции, и не существовало общих методов, позволяющих систематически сводить многомерные зависимости к более простым. В этом контексте вопросы о возможности разложения сложных функций на композиции функций меньшей размерности приобретали принципиальный характер.

Именно в рамках этих представлений была поставлена 13-я проблема Гильберта, которая отражала общее состояние теории и интуитивные ожидания своего времени. Она была направлена на выяснение того, существуют ли фундаментальные ограничения на представимость сложных функциональных зависимостей через более простые компоненты, и тем самым выходила за рамки частных алгебраических задач, затрагивая общие вопросы структуры функций.

1.2 Формулировка 13-й проблемы Гильберта

Рассмотрим более детально эту проблему. На то время, в математике отсутствовали общие результаты, позволяющие описывать функции многих переменных через композиции более простых функций. Это касалось как аналитических, так и алгебраических задач. Рост числа переменных или параметров рассматривался как источник принципиального усложнения задачи, а не как техническое затруднение.

На этом фоне 13-я проблема была сформулирована Давид Гильберт в докладе на Международном конгрессе математиков в Париже в 1900 году. Она относилась к теории алгебраических уравнений и была поставлена в терминах представимости решений общего алгебраического уравнения седьмой степени [2].

К началу XX века уже существовали результаты, показывающие, что:

– уравнения до пятой степени включительно допускают представление их решений через суперпозиции функций меньшего числа переменных (при достаточно широком классе допустимых функций);

– для уравнений шестой степени вопрос был существенно более сложным, но не рассматривался как заведомо недоступный.

Седьмая степень рассматривалась как первая, при которой ожидалось появление принципиального препятствия, не связанного с конкретными методами, а обусловленного самой структурой задачи. Именно поэтому

Гильберт сформулировал проблему не в общем виде «для любой степени», а сфокусировался на седьмой степени как на минимальном кандидате на отрицательный результат.

Общее уравнение седьмой степени имеет вид:

$$x^7 + a_1x^6 + a_2x^5 + a_3x^4 + a_4x^3 + a_5x^2 + a_6x + a_7 = 0,$$

где коэффициенты $a_1, a_2, \dots, a_7$ рассматриваются как независимые переменные. Коэффициенты этого уравнения рассматривались как независимые параметры. Каждое решение уравнения трактовалось как функция от этих параметров. Тем самым задача сводилась к изучению свойств функции нескольких переменных, возникающей как решение параметрического алгебраического уравнения.

Гильберт поставил вопрос о том, можно ли представить такие функции в виде суперпозиции функций двух переменных. При этом допускалось использование произвольных непрерывных функций, а также операций сложения и композиции. Ограничение касалось только числа аргументов элементарных функций, входящих в представление.

Предполагалось, что такое представление невозможно. Это предположение не опиралось на доказательство, а отражало общее состояние теории: на тот момент не существовало методов, позволяющих систематически разлагать функции высокой размерности на суперпозиции функций меньшего числа переменных. Также отсутствовали и примеры, указывающие на возможность подобного разложения.

В последующие десятилетия после постановки проблемы существенных продвижений в её решении получено не было. Задача рассматривалась как трудная и в основном интерпретировалась как указание на ограничения метода суперпозиции. Исследования носили фрагментарный характер и не приводили к общему результату. В таком виде 13-я проблема сохраняла статус открытой задачи вплоть до середины XX века, когда она была переосмыслена в терминах теории непрерывных функций многих переменных.

2 ТЕОРЕМА КОЛМОГОРОВА – АРНОЛЬДА

2.1 Колмогоров и Арнольд: научный контекст и предыстория результата

К моменту появления теоремы о суперпозиции функций (утверждающей, что любую непрерывную функцию многих переменных можно представить через композиции функций одной переменной и операции сложения) её авторы представляли разные поколения одной математической школы, однако их научные интересы пересекались в областях, непосредственно связанных с полученным результатом.

Колмогоров Андрей Николаевич родился в Тамбове и получил математическое образование в Московском университете, с которым была связана значительная часть его научной деятельности. К 1930–1940-м годам он уже был признанным лидером советской математики. Его работы охватывали теорию вероятностей, теорию функций, топологию и математическую логику. Для Колмогорова был характерен интерес к фундаментальным вопросам структуры математических объектов и к поиску универсальных утверждений, не зависящих от конкретных формул или частных классов задач.

В теории функций Колмогорова интересовали, прежде всего, вопросы представимости и аппроксимации, а также связь аналитических свойств функций с топологическими свойствами пространств. В середине 1950-х годов он обратился к задаче суперпозиции функций в предельно общей постановке, рассматривая произвольные непрерывные функции, определённые на компактных множествах. Такой подход позволял использовать методы общей топологии, но делал доказательство неконструктивным.

В 1957 году Колмогоров получил экзистенциальный результат о представимости непрерывных функций многих переменных через суперпозиции функций одной переменной и операции сложения. Доказательство было ориентировано на установление факта существования такого представления и не содержало явных конструкций или алгоритмов.

Владимир Арнольд Игоревич родился в Одессе и также был связан с Московским университетом, где он учился и впоследствии работал. Уже в ранних работах Арнольда проявился его интерес к геометрическим и топологическим аспектам математических задач. Он занимался теорией динамических систем, теорией особенностей и топологией, уделяя большое внимание наглядности и концептуальной ясности формулировок.

Будучи ещё 20-летним учеником Андрея Николаевича Колмогорова в Московском государственном университете, в 1957 году Арнольд показал, что любая непрерывная функция нескольких переменных может быть представлена в виде комбинации конечного числа функций от двух переменных, тем самым решив тринадцатую проблему Гильберта [4].

Он уточнил структуру доказательства, устранил неявные переходы и показал, каким образом экзистенциальное утверждение Колмогорова относится к задаче о суперпозиции функций, обсуждавшейся в математике ранее. Именно в работах Арнольда была явно сформулирована связь между полученной теоремой и обобщённой формой задачи о представимости функций многих переменных.

Так и получилось, что в научной литературе результат закрепился под двойным названием, отражающим вклад обоих математиков: получение основного утверждения и его последующую интерпретацию. При обсуждении этого круга идей также упоминается имя Юргена Мозера; в более широком контексте теория иногда обозначается как теория Колмогорова–Арнольда–Мозера [5]. Мозер одним из первых подробно проанализировал теорему Колмогорова–Арнольда в связи с 13-й проблемой Гильберта и указал на различие между формальным решением задачи и её содержательной интерпретацией. Он подчёркивал неконструктивный характер полученного разложения и обращал внимание на сложную структуру функций, входящих в представление, что не позволяет рассматривать результат как практический метод. Замечания способствовали формированию более сдержанной оценки значения теоремы в последующей математической литературе.

2.2 Основные положения теоремы

Теорема Колмогорова–Арнольда отвечает на следующий общий вопрос: насколько сложными по своей структуре являются непрерывные функции многих переменных.

Рассматривается произвольная непрерывная зависимость нескольких переменных, например $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, где значение функции меняется непрерывно при изменении каждого аргумента. Такие функции естественно возникают в самых разных задачах – от геометрии до прикладных моделей.

Содержание теоремы состоит в утверждении, что любую такую зависимость можно собрать из функций одной переменной, если разрешить использовать:

- сложение;
- композицию функций.

Иными словами, утверждается, что даже если функция зависит сразу от многих аргументов, эту зависимость можно представить как комбинацию более простых одномерных преобразований. Многомерность в этом представлении возникает не за счёт элементарных функций, а за счёт того, как они комбинируются между собой. Важно отметить, что речь идёт именно о существовании такого представления. Теорема не утверждает, что оно удобно, коротко или легко находится. Она также не говорит, что полученные функции будут простыми или гладкими. Единственное требование – сохранение непрерывности.

С практической же точки зрения результат можно сформулировать так: непрерывные функции многих переменных не обладают «принципиально новой» сложностью по сравнению с функциями одной переменной, если рассматривать их с точки зрения возможности представления. При этом теорема не даёт универсальной формулы, пригодной для вычислений, и не предлагает алгоритма построения такого разложения. Она лишь утверждает, что подобная схема всегда возможна в принципе.

Именно в таком виде результат оказался важным для дальнейших исследований: он изменил представления о том, что означает сложность функции, и какие ограничения действительно существуют при разложении многомерных зависимостей.

2.3 Математическое значение и ограничения результата

Теорема Колмогорова–Арнольда дала чёткий ответ на вопрос о принципиальной представимости непрерывных функций многих переменных. Было доказано, что в классе непрерывных функций не существует запрета на разложение многомерной зависимости в виде суперпозиции функций одной переменной и операции сложения.

Для любой непрерывной:

$$f\colon [0,1]^n \to \mathbb{R}$$

существует представление через функции одной переменной, сложение и композицию [6]. В стандартной записи разложение имеет вид:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{q=1}^{2n+1} \varphi_q \left(\sum_{p=1}^{n} \psi_p \left(x_p\right) \right),$$

где ψ_p – «универсальные» функции (зависят от n, а не от выбора f), а φ_q подбираются уже под конкретную функцию f. Число слагаемых $2n+1$ фиксировано формулировкой.

Тем самым было показано, что увеличение числа переменных само по себе не создаёт принципиально нового уровня сложности с точки зрения существования представления. Это противоречило распространённому ранее предположению о том, что функции высокой размерности по своей природе не сводимы к комбинациям более простых зависимостей.

Одновременно с этим теорема выявила важные ограничения. Полученный результат является неконструктивным: он утверждает существование разложения, но не содержит способа его построения. Функции, входящие в представление, могут быть негладкими, сложными по структуре и не иметь удобной аналитической формы. Теорема также не даёт оценок точности, устойчивости или вычислительной сложности такого представления.

По этой причине результат не мог быть использован как практический метод. Он не задаёт алгоритма, который по заданной функции строит разложение, и не позволяет напрямую применять полученную формулу в вычислительных или численных задачах. В течение длительного времени теорема рассматривалась как утверждение о свойствах пространства непрерывных функций и использовалась преимущественно в теоретических исследованиях.

В таком виде результат фиксировал границу возможного: он снимал запрет на существование разложения, но оставлял открытым вопрос о том, при каких дополнительных условиях подобные представления могут быть получены в конструктивной или вычислительно удобной форме.

3 ВЛИЯНИЕ ТЕОРИИ СУПЕРПОЗИЦИИ НА РАЗВИТИЕ НЕЙРОСЕТЕЙ

3.1 Ранние нейросетевые модели

Первые нейросетевые модели появились задолго до практического использования результатов теории суперпозиции, однако концептуально были с ней тесно связаны. Основная идея заключалась в том, чтобы представлять сложные зависимости как результат последовательного применения простых преобразований и их суммирования.

Классическим примером такой модели является перцептрон, предложенный Фрэнком Розенблаттом в конце 1950-х годов. Перцептрон представлял собой модель, в которой входные переменные сначала умножаются на веса, затем суммируются, и к результату применяется нелинейная функция одной переменной. В упрощённой форме это можно записать как

$$y = \sigma\left(\sum_{i=1}^{n} w_i\, x_i\right),$$

где x_i – входные переменные, w_i – параметры модели, а σ – функция активации.

Такая схема напрямую реализует базовый принцип суперпозиции: линейное объединение одномерных вкладов и последующее применение нелинейного преобразования. Однако ранние нейросетевые модели имели существенные ограничения. Однослойные перцептроны могли представлять лишь ограниченный класс функций и не позволяли моделировать более сложные зависимости, например, нелинейно разделимые задачи.

Попытки преодолеть эти ограничения привели к идее многослойных сетей, в которых выход одного слоя используется как вход следующего. Формально это означало последовательную композицию функций вида $x \mapsto \sigma(Wx)$, что приближало нейросетевые модели к общей схеме суперпозиции функций. Тем не менее, в ранний период отсутствовали эффективные методы обучения таких архитектур, а теоретическое понимание их выразительной способности оставалось ограниченным.

В результате ранние нейросетевые модели представляли собой скорее интуитивную реализацию идеи разложения сложных зависимостей на простые компоненты, чем практическое воплощение строгих результатов теории функций. Связь с теоремой Колмогорова–Арнольда в этот период носила косвенный характер и не использовалась напрямую при построении моделей.

3.2 Зима нейронных сетей

Термин «зима нейросетей» используется для обозначения периода резкого снижения интереса к нейросетевым методам, сопровождавшегося сокращением финансирования и числа исследований. По аналогии с более общим понятием «зима искусственного интеллекта», этим термином обозначают время, когда нейросети рассматривались как малоперспективное направление и практически не использовались в прикладных задачах. В контексте нейросетей такой период охватывает в основном 1970-е годы и начало 1980-х.

Интерес к нейросетевым моделям начал активно формироваться в конце 1950-х годов, когда в 1958 году представили модель перцептрона (рассказано в разделе 3.1) и которая впоследствии была реализована в виде электронной машины «Марк-1» [7]. В начале 1960-х годов перцептроны рассматривались как перспективное направление исследований в области искусственного интеллекта, а ожидания от их возможностей были достаточно высокими.

Ситуация в области исследований нейронных сетей существенно изменилась в 1969 году после публикации книги «Perceptrons» Марвина Минского и Сеймура Пейперта, в которой были сформулированы принципиальные ограничения однослойных персептронов. В этой работе были строго проанализированы ограничения однослойных перцептронов и показано, что такие модели не способны решать задачи, неразделимые линейно, в частности классическую задачу XOR. Хотя авторы не утверждали невозможность многослойных сетей в принципе, именно ограничения простейших моделей получили наибольшее внимание и оказали значительное влияние на восприятие нейросетей в научном сообществе. После 1969 года интерес к нейросетям начал снижаться. В начале 1970-х годов финансирование исследований в этой области существенно сократилось. Основной причиной было отсутствие теоретически обоснованных и практически реализуемых методов обучения многослойных сетей. Алгоритмы настройки параметров либо отсутствовали, либо были вычислительно неэффективны, а существующие на тот момент компьютеры не позволяли проводить масштабные эксперименты. В течение 1970-х годов доминирующее положение в исследованиях искусственного интеллекта заняли альтернативные подходы, прежде всего символический ИИ и экспертные системы. Эти направления казались более предсказуемыми с точки зрения результатов и лучше соответствовали возможностям вычислительной техники того времени. Нейросетевые модели при этом рассматривались как теоретически интересные, но практически бесперспективные. Даже появление в 1974 году первых идей, связанных с алгоритмом обратного распространения ошибки, не привело к немедленному возрождению интереса к нейросетям. Результаты оставались малоизвестными и не получили широкого применения из-за вычислительных ограничений и отсутствия устойчивых практических примеров.

Лишь в середине 1980-х годов, после работ Дэвида Румельхарта, Джеффри Хинтона и Рональда Уильямса, алгоритм обратного распространения ошибки стал использоваться для обучения многослойных сетей на практике. К этому моменту период «зимы» нейросетей уже продолжался более десяти лет, а к началу 1980-х годов нейросетевые модели практически исчезли из числа приоритетных направлений исследований и рассматривались как теоретически интересные, но малопригодные для практического применения.

4 ВОЗРОЖДЕНИЕ НЕЙРОСЕТЕВЫХ МЕТОДОВ В XXI ВЕКЕ

4.1 Технологические предпосылки роста

Возобновление интереса к нейросетевым методам в конце XX – начале XXI века было обусловлено не появлением принципиально новых математических концепций, а изменением технологической среды, в которой ранее разработанные идеи получили возможность практической реализации. В 1990-е годы вычислительные ресурсы оставались ограниченными, поэтому нейросети применялись преимущественно в узком круге задач и не рассматривались как универсальный инструмент анализа данных. Ситуация начала постепенно меняться на рубеже 1990-х и 2000-х годов по мере роста производительности центральных процессоров и увеличения объёма оперативной памяти. Такое положение дел сделало возможным обучение моделей с большим числом параметров и проведение численных экспериментов, которые ранее были вычислительно недоступны или экономически нецелесообразны [9].

Существенный вклад внесло развитие графических процессоров. Первоначально ориентированные на обработку графики, GPU в начале 2000-х годов стали использоваться для параллельных вычислений общего назначения. Их архитектура оказалась хорошо приспособленной для массовых операций линейной алгебры, лежащих в основе обучения нейросетевых моделей. В результате к середине 2000-х годов обучение многослойных нейронных сетей с использованием GPU стало практически осуществимым.

Еще одним фактором стал и рост объёма доступных данных. Распространение интернета, цифровых камер и различных сенсорных устройств в 2000-е годы привело к накоплению крупных массивов информации, в том числе с ручной разметкой. Создание в 2009 году набора данных ImageNet стало значимым этапом в развитии компьютерного зрения и предоставило единый стандарт для сравнения нейросетевых моделей.

Параллельно развивалась программная инфраструктура. В 2000-е и начале 2010-х годов появились специализированные библиотеки для численных вычислений и машинного обучения, которые упростили реализацию и обучение сложных моделей. Порог входа в данную область снизился, что позволило исследователям сосредоточиться на проектировании архитектур и анализе их свойств, а не на низкоуровневых аспектах программирования.

К началу 2010-х годов сочетание вычислительных ресурсов, доступности данных и развитых программных инструментов сформировало условия, при которых нейросетевые методы стали практически применимыми в широком круге задач. Именно в этой технологической среде нейросети вновь заняли заметное место среди основных инструментов прикладного анализа данных.

4.2 Ограничения классических архитектур нейросетей

Несмотря на рост вычислительных возможностей и успехи нейросетей в прикладных задачах, классические архитектуры, получившие широкое распространение в 2000-х и 2010-х годах, имели ряд устойчивых ограничений. Они касались как процесса обучения, так и интерпретации получаемых моделей.

Одной из ключевых проблем оставалась сложность обучения глубоких сетей. При увеличении числа слоёв возникали эффекты затухающего и взрывающегося градиента, из-за которых настройка параметров становилась нестабильной [10]. Хотя в 2010-х годах были предложены методы частичного решения этой проблемы (нормализация, специальные функции активации, архитектурные приёмы), само обучение оставалось чувствительным к выбору гиперпараметров и начальных условий.

Другим ограничением была параметрическая избыточность. Классические нейросети описывают зависимости через линейные преобразования и нелинейные функции активации, что требует большого числа параметров даже для относительно простых функций. Это приводило к необходимости обучения на больших объёмах данных и делало модели склонными к переобучению при недостатке обучающей выборки. Существенной проблемой являлась и интерпретируемость. В стандартных архитектурах вклад отдельных входных переменных в итоговый результат трудно проследить. Веса и активации слоёв не имеют прямой функциональной интерпретации, из-за чего нейросетевые модели часто рассматривались как «чёрные ящики», что ограничивало их использование в задачах, где требуется объяснимость или аналитический контроль поведения модели.

Классические архитектуры также слабо использовали структурные свойства функций. Хотя нейросети теоретически обладают высокой выразительной способностью, на практике они аппроксимируют функции через общие линейно-нелинейные блоки, не учитывая возможные разложения по переменным или особенности функциональной структуры задачи. Указанные ограничения не препятствовали практическому успеху нейросетей, но обозначили круг проблем, которые оставались нерешёнными даже после их массового внедрения. В дальнейшем именно эти вопросы стали отправной точкой для поиска альтернативных архитектур и новых способов построения обучаемых моделей.

5 СЕТИ КОЛМОГОРОВА-АРНОЛЬДА (KANs)

5.1 Возникновение идеи и мотивация подхода

Идея Kolmogorov–Arnold Networks (KAN) была сформулирована в 2023 году группой исследователей под руководством Ziming Liu. Зиминг Лю является исследователем в области машинного обучения, чьи работы посвящены архитектурам нейросетей, вопросам аппроксимации функций и интерпретируемости обучаемых моделей. Работа этой группы была опубликована в виде препринта и рассматривалась как архитектурный эксперимент в области обучаемых моделей, вдохновлённый теоремой о представлении непрерывных функций многих переменных Колмогорова–Арнольда [11].

Лю и соавторы исходили из того, что при всех успехах современных нейросетей классические архитектуры не отражают явно функциональную структуру задачи: многомерные зависимости моделируются через линейные веса и фиксированные функции активации, а вклад отдельных переменных, по сути, распределён по параметрам и слоям без явной интерпретации. В работе по KAN предложено заменить фиксированные весовые коэффициенты набором параметрических одномерных функций.

Подход ориентирован на использование обучаемых одномерных функций в качестве основных строительных блоков архитектуры: вместо весов на рёбрах и фиксированных нелинейностей между слоями сеть настраивает функции вида $\phi(x)$, параметризованные в виде кубических сплайнов или другой подходящей базы.

Авторы работы отмечали, что эта схема позволяет получить сети, которые в ряде задач демонстрируют сопоставимую или лучшую точность при меньшем числе параметров по сравнению с классическими многослойными перцептронами и одновременно обеспечивают более явную интерпретацию компонентов модели.

Работа «Liu et al» стала отправной точкой для последующей литературы, в которой KAN используется или модифицируется для различных задач: прогнозирования состояния батарей [12], обработки акустических данных, комбинирования с традиционными нейросетевыми блоками и других.

5.2 Идейные и математические основы KAN

Сети KAN опираются на общий принцип теоремы о суперпозиции непрерывных функций, согласно которой многомерную зависимость можно выразить через композицию одномерных функций и операцию сложения. В KAN эта идея реализуется так, что обучаемыми становятся не только параметры линейных комбинаций, но и сами одномерные функции, используемые в представлении.

В классических нейросетях нелинейность задаётся фиксированной функцией активации, а веса линейных преобразований настраиваются в процессе обучения. В KAN же подход иной: каждое ребро сети содержит обучаемую одномерную функцию $\phi(x)$, параметризованную, например, через базисные функции или сплайны, тем самым, форма этих функций адаптируется под данные и структуру задачи.

Формально можно представить шаг обработки переменной так:

$$x \mapsto \phi(x),$$

ϕ – параметрическая функция одной переменной. Объединение таких преобразований, а затем их суммирование и последующие одномерные функции образуют итоговое разложение, приближая многомерную функцию по схеме, близкой формуле Колмогорова–Арнольда.

С позиции архитектуры это означает, что сеть учится формам одномерных функций, а не только коэффициентам линейных связей. В литературе предложены варианты системы базисов для этих функций:

– B-сплайны – локальные сглаженные функции, удобные для гибкой аппроксимации;

– радиальные базисные функции (RBF) – эффективные для локальных особенностей данных;

– полиномы Чебышева и рациональные функции – полезные при аппроксимации специфических зависимостей;

– волновые функции – применимы в задачах с переменными частотными компонентами.

В некоторых исследованиях архитектуру KAN расширяют, вводя специализированные блоки (например, временные KAN – TKAN, или вариации для квантовых вычислений), что подчёркивает гибкость подхода и возможность адаптации под разные типы задач.

5.3 Отличия KAN от традиционных нейросетей

Главное различие между Kolmogorov–Arnold Networks и классическими нейросетями заключается в том, что именно считается базовым обучаемым элементом модели.

В традиционных архитектурах (MLP, CNN) обучаемыми являются веса линейных преобразований, тогда как нелинейность задаётся фиксированной функцией активации [13]. Форма этой функции одинакова для всех узлов сети и не изменяется в процессе обучения. Аппроксимация сложной зависимости достигается за счёт комбинации большого числа линейных преобразований и повторного применения одной и той же нелинейности.

В KAN ситуация обратная. Основным обучаемым объектом становится функция одной переменной, размещённая на связях между узлами. Веса либо отсутствуют вовсе, либо играют второстепенную роль. Приводит это к иному распределению сложности: модель учится не столько «смешивать» признаки, сколько подбирать форму одномерных зависимостей (рисунок 1).

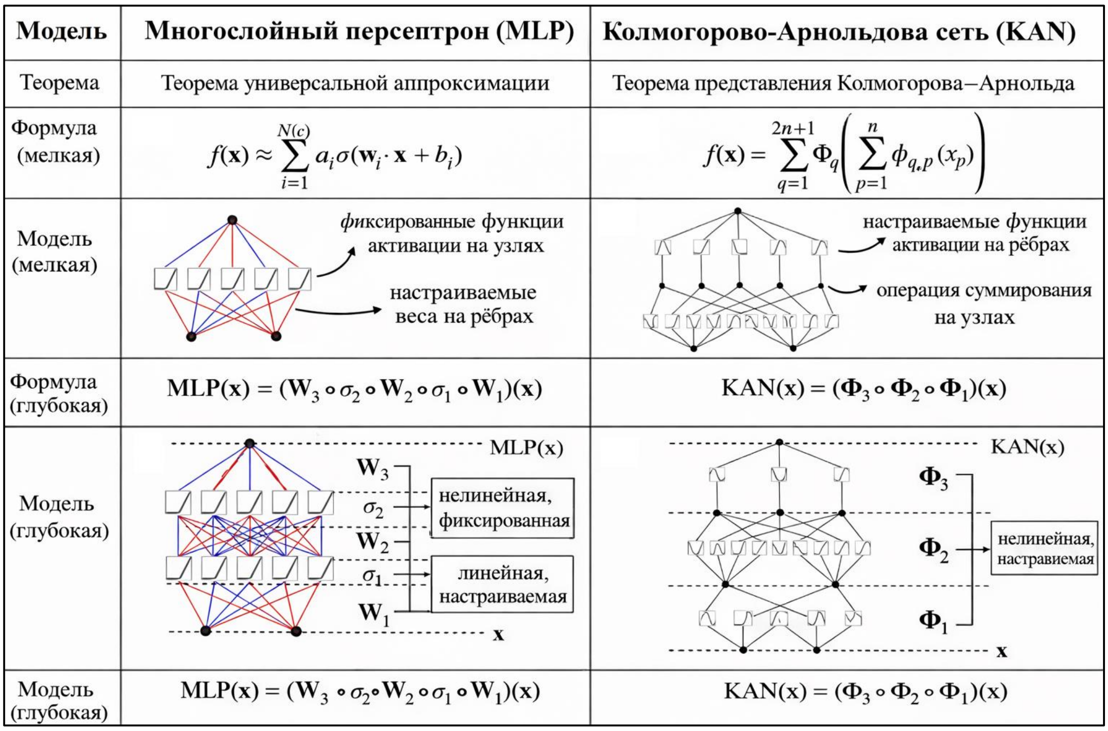

Рисунок 1 – Многослойные персептроны (MLP) против сетей Колмогорова-Арнольда (KAN)

С этим связано различие в числе параметров. В классических сетях число параметров быстро растёт с увеличением размерности и глубины. В KAN параметризация сосредоточена в описании одномерных функций (например, через сплайны), что в ряде задач позволяет использовать меньше параметров при сопоставимой точности аппроксимации.

Отдельное отличие касается интерпретируемости. В классических нейросетях вклад отдельной переменной распределён по множеству весов и слоёв и не имеет прямого функционального описания. В KAN каждая связь соответствует явной функции одной переменной, которую можно визуализировать и проанализировать, а также рассмотреть зависимости между входом и промежуточными представлениями.

Различия проявляются и в характере обучения. Обучение KAN связано с оптимизацией параметров функций, а не только числовых коэффициентов, что делает модель более гибкой по форме аппроксимации, но одновременно повышает требования к устойчивости обучения и выбору параметризации функций.

Наконец, различается и область применимости. Классические нейросети хорошо масштабируются и подходят для задач с очень большими объёмами данных и сложной иерархической структурой признаков. KAN ориентированы на задачи, где важны компактность модели, интерпретируемость и явная функциональная структура зависимости. В ряде прикладных работ KAN используются как самостоятельные модели или в комбинации с традиционными архитектурами.

5.4 Конкретные реализации и проекты на основе KAN

Начиная с публикации оригинальной статьи по Kolmogorov–Arnold Networks (KAN), в экосистеме машинного обучения появились несколько практических реализаций этой архитектуры, а также проекты, ориентированные на её адаптацию под реальные задачи.

Одной из основных реализаций является библиотека pykan – официальная Python-реализация KAN, доступная как на GitHub, так и через PyPI. Библиотека совместима с современными инструментами Python и позволяет настраивать и обучать KAN-модели, используя стандартные компоненты машинного обучения, такие как numpy и PyTorch при необходимости. Сайт документации по этой библиотеке подчёркивает архитектурное отличие KAN – в сети функции одной переменной размещаются на рёбрах (edges) архитектуры, а не на узлах, как в классических MLP, и оптимизируются в процессе обучения [14].

Помимо pykan, сообщество разработчиков предложило ряд альтернативных реализаций и вспомогательных проектов:

1) FastKAN – реализация KAN, в которой вместо сплайн-базисных функций используются радиальные базисные функции (RBF). Такой выбор упрощает вычисления и позволяет ускорить обучение модели в отдельных задачах, сохраняя общую структуру KAN [15].

2) Awesome KAN – представляет собой подборку открытых реализаций и модификаций KAN, а также проектов, в которых эта архитектура

используется или расширяется, среди которых можно выделить:

– efficient-KAN, FasterKAN, TorchKAN – реализации KAN с различными способами параметризации одномерных функций и акцентом на вычислительную эффективность;

– Vision-KAN, CF-KAN – проекты, в которых KAN комбинируются с другими архитектурами для решения прикладных задач, включая компьютерное зрение и рекомендательные системы;

– Temporal-KAN (TKAN) – модификации, ориентированные на работу с временными рядами и моделирование временных зависимостей.

Кроме инфраструктурных реализаций, есть примеры практического применения KAN в научных исследованиях. В одном из недавних исследований такие сети использовались для генерации синтетических данных и анализа динамических систем в рамках задач идентификации моделей [17].

5.5 Перспективы развития и использования KAN

В 2024 году архитектура Kolmogorov–Arnold Networks была предложена как альтернатива классическим многослойным перцептронам за счёт принципиального изменения обучаемых элементов: в KAN на рёбрах сети оптимизируются одномерные функции (как правило, параметризованные B-сплайнами), а не числовые веса линейных преобразований. В той же работе подчёркивалось, что такой подход позволяет явно работать с функциональной структурой аппроксимируемой зависимости. В этом же году появились и первые бенчмарк-исследования на табличных данных, где KAN сравнивались с MLP. В этих экспериментах KAN показали сопоставимые или более высокие метрики качества на ряде датасетов, однако при этом требовали больших вычислительных затрат по сравнению с классическими архитектурами, что было связано с оптимизацией параметров одномерных функций.

К 2025 году стали появляться прикладные работы, в которых KAN-подобные слои использовались как замена стандартных линейных блоков. В исследовании по задаче spoken language understanding, представленном на Interspeech 2025, такие слои обеспечили сравнимое или более высокое качество по сравнению с базовыми моделями без увеличения размера сети и времени обучения в большинстве экспериментов [18].

В задачах прогнозирования временных рядов были предложены специализированные модификации архитектуры, объединяющие KAN с механизмами обработки последовательностей. В работе 2025 года по прогнозу добычи нефти временной вариант KAN (TKAN) показал лучшие результаты, чем набор базовых моделей, включая LSTM и другие распространённые бенчмарки, в рамках выбранной экспериментальной постановки. Аналогичные результаты были получены в задачах моделирования энергетических систем, где KAN демонстрировали более сильные показатели по сравнению с MLP на отдельных кейсах [19].

Наряду с успешными примерами в 2024-2025 годах были зафиксированы и ограничения подхода. В критической оценке KAN отмечается нестабильность обучения, связанная с оптимизацией параметров B-сплайнов, а также недостаточная статистическая проработка экспериментов, когда результаты приводятся для единичных запусков без анализа разброса [20]. Обзорная работа ACM также выделяет технические трудности обучения: необходимость аккуратной инициализации коэффициентов сплайнов и чувствительность обучения к настройкам [21].

KAN также активно исследуются в сочетании с другими преобразованиями и расширениями архитектур. Например, рассматриваются вариации с различными базисными функциями от B-сплайнов до полиномов Чебышева и радиальных базисов для повышения точности, и устойчивости аппроксимации.

В итоге, можно сделать вывод – накопленные результаты показывают, что KAN уже демонстрируют практическую применимость в отдельных классах задач, прежде всего в регрессии, анализе временных рядов и интерпретируемом моделировании. Одновременно сохраняются открытые технические вопросы, связанные с устойчивостью обучения и вычислительной стоимостью, которые в настоящее время ограничивают использование KAN в задачах крупномасштабного машинного обучения.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данном реферате был проведён последовательный обзор исторического и теоретического пути идеи суперпозиции функций – от 13-й проблемы Гильберта до современных архитектур машинного обучения. Во введении была обозначена значимость этой проблемы для понимания функциональной сложности и её роли в развитии математики и прикладных методов. Рассмотрение постановки 13-й проблемы позволило проследить, какие представления о функциях многих переменных существовали в начале XX века, и почему эта задача считалась принципиально трудной.

Анализ теоремы Колмогорова-Арнольда и её математического содержания показал, что класс непрерывных функций не обладает теми ограничениями, которые предполагались ранее. Было установлено, что многомерные зависимости допускают представление через суперпозиции одномерных функций, однако полученный результат носит экзистенциальный характер и не предоставляет конструктивного метода для практического использования.

Дальнейшее рассмотрение истории нейросетевых моделей позволило показать, как идеи суперпозиции проявлялись в неявной форме в ранних архитектурах, а также почему развитие нейросетей сопровождалось периодом спада интереса, известным как «зима» нейросетей. Анализ причин этого периода подчеркнул роль теоретических ограничений, отсутствия эффективных алгоритмов обучения и вычислительных ресурсов. Возрождение нейросетевых методов в XXI веке было связано прежде всего с технологическими факторами, что привело к широкому распространению классических архитектур, но одновременно выявило их ограничения.

Рассмотрение Kolmogorov–Arnold Networks показало, что в современных исследованиях предпринимаются попытки вернуться к функциональной постановке задачи, заложенной в теореме Колмогорова–Арнольда, уже в рамках обучаемых моделей. Анализ архитектуры KAN, существующих реализаций, успешных и неудачных применений, а также перспектив развития позволяет сделать вывод о том, что данный подход не является универсальной заменой классических нейросетей, но представляет интерес для специализированных задач, где важны интерпретируемость и явная функциональная структура модели.

Проведённый обзор показал, что фундаментальные математические идеи могут сохранять актуальность на протяжении длительного времени и находить новые формы реализации по мере развития вычислительных методов. Историческая связь между проблемой Гильберта, теоремой Колмогорова-Арнольда и современными архитектурами машинного обучения подчёркивает преемственность между абстрактной теорией и прикладными инновациями XXI века.

СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Проблемы Гильберта // Википедия. URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Проблемы_Гильберта [Электронный ресурс] (дата обращения: 20.12.2025).

2. Математики воскресили 13-ю проблему Гильберта // Хабр. URL: https://habr.com/ru/articles/544266/ [Электронный ресурс] (дата обращения: 20.12.2025).

3. Колмогоров, Андрей Николаевич // Википедия. URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Колмогоров,_Андрей_Николаевич [Электронный ресурс] (дата обращения: 20.12.2025).

4. Арнольд, Владимир Игоревич // Википедия. URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Арнольд,_Владимир_Игоревич [Электронный ресурс] (дата обращения: 20.12.2025).

5. Теория Колмогорова – Арнольда – Мозера // Википедия. URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Теория_Колмогорова_–_Арнольда_–_Мозера [Электронный ресурс] (дата обращения: 21.12.2025).

6. Скопенков А. Б. 13-я проблема Гильберта и базисные вложения // [без официального источника публикации]. URL: https://old.mccme.ru/mmks/dec08/Skopenkov.pdf [Электронный ресурс] (дата обращения: 21.12.2025).

7. Перцептрон // Википедия. URL: https://ru.ruwiki.ru/wiki/Перцептрон [Электронный ресурс] (дата обращения: 21.12.2025).

8. Перцептрон // MachineLearning.ru. URL: http://www.machinelearning.ru/wiki/index.php?title=Персептрон [Электронный ресурс] (дата обращения: 21.12.2025).

9. История и развитие искусственного интеллекта: от зарождения идеи до массового внедрения // Блог Serverflow. URL: https://serverflow.ru/blog/stati/istoriya-i-razvitie-iskusstvennogo-intellekta-ot-

zarozhdeniya-idei-do-massovogo-vnedreniya/ [Электронный ресурс] (дата обращения: 21.12.2025).

10. RNN // CS231n: Deep Learning for Computer Vision. URL: https://cs231n.github.io/rnn/ [Электронный ресурс] (дата обращения: 21.12.2025).

11. Liu Z., Wang Y., Vaidya S., Ruehle F., Halverson J., Soljačić M., Hou T. Y., Tegmark M. KAN: Kolmogorov–Arnold Networks // arXiv. URL: https://arxiv.org/abs/2404.19756 [Электронный ресурс] (дата обращения: 21.12.2025).

12. Hien D. M., Truong V. V., Fang L., Sidorov D. N. A Kolmogorov–Arnold neural networks approach to state of charge estimation and confidence assessment for Li-ion batteries // iPolytech Journal. 2025. Vol. 29. No. 1. pp. 66–81. URL: https://cyberleninka.ru/article/n/a-kolmogorov-arnold-neural-networks-approach-to-state-of-charge-estimation-and-confidence-assessment-for-li-ion-batteries [Электронный ресурс] (дата обращения: 21.12.2025).

13. KAN: Kolmogorov–Arnold Networks // Хабр. URL: https://habr.com/ru/articles/856776/ [Электронный ресурс] (дата обращения: 22.12.2025).

14. Kolmogorov Arnold Network (KAN) documentation // pykan (GitHub Pages). URL: https://kindxiaoming.github.io/pykan/ [Электронный ресурс] (дата обращения: 22.12.2025).

15. FastKAN: Very Fast Implementation of Kolmogorov-Arnold Networks (KAN) // GitHub. URL: https://github.com/ZiyaoLi/fast-kan [Электронный ресурс] (дата обращения: 22.12.2025).

16. Awesome KAN (Kolmogorov–Arnold Network) – A comprehensive collection of KAN-related resources // GitHub. URL: https://github.com/mintisan/awesome-kan [Электронный ресурс] (дата обращения: 22.12.2025).

17. Chiparova L., Popov V. Kolmogorov–Arnold Networks for System Identification of First- and Second-Order Dynamic Systems // Engineering

Proceedings. 2025. Vol. 100. No. 1. p. 59. URL: https://www.mdpi.com/2673-4591/100/1/59 [Электронный ресурс] (дата обращения: 22.12.2025).

18. Koudounas A., La Quatra M., Pastor E., Siniscalchi S. M., Baralis E. “KAN you hear me?” – Exploring Kolmogorov-Arnold Networks for Spoken Language Understanding // Proc. Interspeech 2025. URL: https://www.isca-archive.org/interspeech_2025/koudounas25_interspeech.pdf [Электронный ресурс] (дата обращения: 22.12.2025).

19. Zheng M., Zhang T., Cao J., Chen Z., Zou J. Oil production forecasting using temporal Kolmogorov–Arnold networks // Computers & Chemical Engineering. 2026. Vol. 205. Part 1. [Электронный ресурс]. URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0098135425004867 (дата обращения: 22.12.2025).

20. Hou Y., Ji T., Zhang D., Stefanidis A. Kolmogorov-Arnold Networks: A Critical Assessment of Claims, Performance, and Practical Viability // arXiv. URL: https://arxiv.org/abs/2407.11075 [Электронный ресурс] (дата обращения: 22.12.2025).

21. Somvanshi S., Javed S. A., Islam M. M., Pandit D., Das S. A Survey on Kolmogorov-Arnold Network // ACM Computing Surveys. 2025. Vol. 58. No. 2. pp. 1–35. URL: https://dl.acm.org/doi/10.1145/3743128 [Электронный ресурс] (дата обращения: 22.12.2025).