Numeri complessi

Def

- **Insieme dei complessi** > - $\mathbb{C} := \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{R},\ i : i^2 = -1\}$ è l'**insieme dei complessi** > - $z \in \mathbb{C} \implies \begin{cases} a := \mathrm{Re}(z) \\ b := \mathrm{Im}(z) \end{cases}$

Oss

- $\begin{cases} z = a + ib \\ w = c + id \end{cases} \implies \begin{cases} z + w = (a + b) + i(c + d) \\ z \cdot w = (ac - bd) + i(ad + bc) \end{cases}$

Def

- **Coniugato**
  - $z = a + ib$
  - $\bar{z} := a - ib$ è il **coniugato** di z

Oss

- $\overline{z} + \overline{w} = \overline{z + w}$
- $\overline{z} \cdot \overline{w} = \overline{z \cdot w}$

Formula di Eulero

- $\forall\theta \quad e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

Def

- **Raggio** > - $z = a + ib$ > - $|z| := \sqrt{a^2 + b^2}$ è il **raggio** di z > - è la distanza di z dall'origine nel piano di Gauss

Forma polare

- $\forall z \in \mathbb{C} - 0 \implies z = |z| \cdot e^{i\theta}$

Def

  - $\arg(z) \subset \mathbb{R}$ è l'**insieme delle soluzioni** del sistema $\begin{cases} \cos\theta = \frac{a}{|z|} \\ \sin\theta = \frac{b}{|z|} \end{cases}$
  - per definizione, $\arg(z) \implies \exists!\theta \mid 0 \leq \theta \leq 2\pi$ tale che θ sia soluzione del sistema, e questo prende il nome di $\mathrm{Arg}(z)$, detta **soluzione principale**

Oss

- **Hp**
  - $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ è un gruppo
- **Th**
  - $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ è un campo

- **Dim**
  - $\left.\begin{array}{l} z \cdot \bar{z} = (a+ib)(a-ib) = a^2 - (ib)^2 \\ i^2 = -1 \end{array}\right\} \implies a^2 - i^2b^2 = a^2 + b^2 = |z|^2$
  - $z \cdot \bar{z} = |z|^2 \iff z = \dfrac{|z|^2}{\bar{z}} \iff z^{-1} = \dfrac{z}{|z|^2} = \dfrac{a}{a^2+b^2} - i\dfrac{b}{a^2+b^2} \implies \mathbb{C}$ ammette inversi moltiplicativi $\implies (\mathbb{C}, +, \cdot)$ è un campo

Oss

- $|z \cdot w| = |z| \cdot |w| \quad \arg(z \cdot w) = \arg(z) + \arg(w)$
- $|\overline{w}| = |w| \quad \arg(\overline{w}) = -\arg(w)$
- $|w^{-1}| = |w|^{-1} \quad \arg(w^{-1}) = -\arg(w)$
- $\left|\dfrac{z}{w}\right| = \dfrac{|z|}{|w|} \quad \arg\left(\dfrac{z}{w}\right) = \arg(z) - \arg(w)$

Formula di de Moivre

- $z^n = |z|^n e^{in\theta} \quad \arg(z^n) = n\arg(z)$