

## Morfismi

### Def

- **Morfismo di gruppi**  $\triangleright$  -  $(G, \cdot), (H, \cdot)$  gruppi  $\triangleright$  -  $f : G \rightarrow H$   $\triangleright$  -  $f$  **morfismo di gruppi**  
 $\iff f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y) \quad \forall x, y \in G$
- **Morfismo di anelli**  $\triangleright$  -  $(A, +, \cdot), (B, +, \cdot)$  anelli  $\triangleright$  -  $f : A \rightarrow B$   $\triangleright$  -  $f$  **morfismo di anelli**  
 $\iff f(x + y) = f(x) + f(y)$  e  $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y) \quad \forall x, y \in A$   $\triangleright$  - la stessa definizione si applica per morfismo di campi

### Oss

- **Hp**
  - $(G, \cdot), (H, \cdot)$  gruppi
  - $1_G$  neutro per  $G$
  - $1_H$  neutro per  $H$
  - $f : G \rightarrow H$  morfismo
- **Th**
  - $f(1_G) = 1_H$
- **Dim**
  - $\forall g \in G \quad f(g) = f(1_G \cdot g) = f(1_G) \cdot f(g)$  poiché  $f$  morfismo
  - quindi  $f(g) = f(1_G) \cdot f(g) \implies f(g) \cdot f(g)^{-1} = f(1_G) \cdot f(g) \cdot f(g)^{-1} \implies 1_H = f(1_G) \cdot 1_H \implies 1_H = f(1_G)$  (poiché  $f(g), f(g)^{-1} \in H$  per definizione di  $f$ )

### Oss

- **Hp**
    - $(G, \cdot), (H, \cdot)$  gruppi
    - $1_G$  neutro per  $G$
    - $1_H$  neutro per  $H$
    - $f : G \rightarrow H$  morfismo
  - **Th**
    - $f(g^{-1}) = f(g)^{-1}$
  - **Dim**
    - per dimostrazione precedente,  $1_H = f(1_G) = f(g \cdot g^{-1}) = f(g) \cdot f(g^{-1}) \implies 1_H = f(g) \cdot f(g^{-1}) \implies f(g)^{-1} = f(g^{-1})$
- 

## Isomorfismi

### Def

- **Isomorfismo**  $\triangleright$  -  $f$  isomorfismo  $\iff f$  morfismo e  $f$  biiettiva

### Oss

- **Hp**
  - $f : G \rightarrow H$  isomorfismo
- **Th**

- $f^{-1} : H \rightarrow G$  isomorfismo
- **Dim**
  - $\forall g \in G, h \in H \quad \exists! f^{-1} \mid \left\{ \begin{array}{l} f^{-1}(f(g)) = g \\ f(f^{-1}(h)) = h \end{array} \right.$
  - $\forall h, h' \in H \quad f^{-1}(hh') = f^{-1}(h) \cdot f^{-1}(h') \iff hh' = f(f^{-1}(hh')) = f(f^{-1}(h) \cdot f^{-1}(h')) = f(f^{-1}(h)) \cdot f(f^{-1}(h')) = hh'$ , e dunque  $f^{-1}$  è un morfismo, e poiché è invertibile è un isomorfismo

## Ex

- **Hp**
  - $z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1$  sono le radici  $n$ -esime di 1
  - $\zeta := e^{i\frac{2\pi}{n}}$
  - $H := \{\zeta^0, \zeta^1, \zeta^k, \dots, \zeta^{n-1}\}$  è l'insieme delle radici  $n$ -esime di 1
- **Th**
  - $(H, \cdot) \subset (\mathbb{C} - \{0\}, \cdot)$  è un sottogruppo
- **Dim**
  - $\zeta^0 = 1 \implies 1 \in H$
  - $z, w \in H \iff z^n = w^n = 1$ , allora  $1 = z^n \cdot w^n = (z \cdot w)^n = 1 \implies z \cdot w \in H$  per definizione di  $H$
  - $z^n = 1 \implies \frac{1}{z^n} = 1 \iff (z^{-1})^n = 1 \implies z^{-1} \in H$  per definizione di  $H$

## Ex

- **Hp**
  - $f : \mathbb{Z}_n \rightarrow H : [k] \rightarrow \zeta^k$
- **Th**
  - $f$  isomorfismo di gruppi  $(\mathbb{Z}_n, +)$  e  $(H, \cdot)$
- **Dim**
  - $f$  è biettiva per costruzione di  $\mathbb{Z}_n := \{[0], [1], \dots, [n-1]\}$  e  $H := \{\zeta^0, \zeta^1, \dots, \zeta^{n-1}\}$
  - $f$  morfismo
    - \*  $f([i] + [j]) = f([i]) \cdot f([j])$ 
      - $[i] + [j] = [k]$  per un certo  $k \in \mathbb{Z}_n \implies \exists h \in \mathbb{Z} \mid i + j = k + hn$
      - $f([i] + [j]) = f([k]) = \zeta^k$
      - $f([i]) \cdot f([j]) = \zeta^i \cdot \zeta^j = \zeta^{i+j}$ , ma per osservazione precedente  $\zeta^{i+j} = \zeta^{k+nh} = \zeta^k \cdot (\zeta^n)^h$
      - $\zeta^n = 1$  per definizione di  $\zeta \implies$  entrambe i membri dell'equazione sono pari a  $\zeta^k$

## Ex

- **Hp**
  - $(G, \cdot)$  gruppo
  - $f : \mathbb{Z} \rightarrow G : n \rightarrow g^n$  per qualche  $g \in G$
- **Th**
  - $f$  morfismo di gruppi  $(\mathbb{Z}, +)$  e  $(G, \cdot)$
- **Dim**
  - $f(n+m) = g^{n+m} = g^m \cdot g^n = f(m) \cdot f(n) \implies f$  morfismo

Oss

- **Hp**
  - !!! MANCA UN TEOREMA CHE NON HO CAPITO NIENTE
- **Th**
- **Dim**

Ex

- **Hp**
  - $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_n : k \rightarrow [k]$
- **Th**
  - $f$  morfismo di anelli  $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$  e  $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$
- **Dim**
  - per come le operazioni  $+$  e  $\cdot$  sono state definite,  $f([x + y]) = f([x]) + f([y])$  e  $f([x \cdot y]) = f([x]) \cdot f([y])$

Ex

- **Hp**
  - $n \mid m$
  - $f : \mathbb{Z}_m \rightarrow \mathbb{Z}_n : x \pmod{m} \rightarrow x \pmod{n}$
- **Th**
  - $f$  morfismo di anelli  $(\mathbb{Z}_m, +, \cdot)$  e  $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$
- **Dim**
  - $x \pmod{m} + y \pmod{m} = x + y \pmod{m}$
  - $f(x + y \pmod{m}) = x + y \pmod{n}$
  - $x + y \pmod{n} = x \pmod{n} + y \pmod{n}$
  - il ragionamento è analogo per l'operazione  $\cdot$ , e dunque segue la tesi

Ex

- **Hp**
    - $G$  gruppo
    - $f : G \rightarrow G : h \rightarrow g \cdot h \cdot g^{-1}$  per qualche  $g \in G$
  - **Th**
    - $f$  morfismo di gruppi  $(G, \cdot)$  e  $(G, \cdot)$
  - **Dim**
    - $\forall h, h' \in G \quad f(h) \cdot f(h') = (ghg^{-1}) \cdot (gh'g^{-1}) = gh(g^{-1} \cdot g)h'g^{-1} = gh h' g^{-1} = f(hh')$
- 

## Kernel e Immagine

Def

- **Kernel e Immagine di gruppi** > -  $G, H$  gruppi > -  $f : G \rightarrow H$  morfismo > -  $\text{Ker}(f) := \{g \in G \mid f(g) = 1_H\}$  > -  $\text{Im}(f) := \{h \in H \mid \exists g \in G : f(g) = h\}$
- **Kernel e Immagine di anelli** > -  $A, B$  gruppi > -  $f : A \rightarrow B$  morfismo > -  $\text{Ker}(f) := \{a \in A \mid f(a) = 0_B\}$  > -  $\text{Im}(f) := \{b \in B \mid \exists a \in A : f(a) = b\}$

Oss

- **Hp**
  - $G, H$  gruppi
  - $f : G \rightarrow H$  morfismo
- **Th**
  - $\text{Ker}(f) \subset G$  è sottogruppo
- **Dim**
  - per dimostrazione precedente,  $f(1_G) = 1_H \implies 1_G \in \text{Ker}(f)$  per definizione
  - $x, y \in \text{Ker}(f) \implies f(x) = f(y) = 1_H$  per definizione, dunque  $f(x) \cdot f(y) = 1_H \cdot 1_H = 1_H$ , e  $f(x) \cdot f(y) = f(x \cdot y) = 1_H$  perché  $f$  morfismo, quindi  $x \cdot y \in \text{Ker}(f)$  per definizione
  - $g \in \text{Ker}(f) \implies f(g) = 1_H \implies f(g)^{-1} = 1_H^{-1} = 1_H$ , ma poiché per dimostrazione precedente  $f(g)^{-1} = f(g^{-1}) \implies f(g^{-1}) = 1_H \implies g^{-1} \in \text{Ker}(f)$  per definizione

Oss

- **Hp**
  - $G, H$  gruppi
  - $f : G \rightarrow H$  morfismo
- **Th**
  - $\text{Im}(f) \subset G$  è sottogruppo
- **Dim**
  - per dimostrazione precedente  $f(1_G) = 1_H \implies 1_H \in \text{Im}(f)$  per definizione
  - $x, y \in \text{Im}(f) \implies \exists g, g' \in G \mid x = f(g) \wedge y = f(g') \implies x \cdot y = f(g) \cdot f(g') = f(g \cdot g')$  perché  $f$  morfismo, quindi  $x \cdot y \in \text{Im}(f)$  per definizione
  - $x \in \text{Im}(f) \implies \exists g \in G \mid f(g) = x \implies x^{-1} = f(g)^{-1} = f(g^{-1})$  per dimostrazione precedente, quindi  $x^{-1} \in \text{Im}(f)$  per definizione

Oss

- **Hp**
  - $G, H$  gruppi
  - $f : G \rightarrow H$  morfismo
- **Th**
  - $f$  iniettiva  $\iff \text{Ker}(f) = \{1_G\}$
- **Dim**
  - $f$  iniettiva  $\implies \text{Ker}(f) = \{1_G\}$ 
    - \*  $f(1_G) = 1_H$  per dimostrazione precedente, dunque  $1_G \in \text{Ker}(f)$  per definizione
    - \*  $f$  iniettiva  $\implies \nexists x, y \in G \mid x \neq y \implies f(x) = f(y)$ , di conseguenza è unico  $1_G \in G \mid f(1_G) = 1_H$ , dunque  $\text{Ker}(f)$  conterrà esclusivamente  $1_G$  per definizione
  - $f$  iniettiva  $\iff \text{Ker}(f) = \{1_G\}$ 
    - \*  $\forall g, g' \in G \quad f(g) = f(g') \iff f(g)^{-1} \cdot f(g) = f(g)^{-1} \cdot f(g') \iff 1_H = f(g) \cdot f(g') = f(g \cdot g')$
    - \*  $\text{Ker}(f) = \{1_G\} \implies f(1_G) = 1_H$  per definizione, allora  $f(g \cdot g') = 1_H \implies g \cdot g' = 1_G$  necessariamente, e  $g \cdot g' = 1_G \iff g = g' \implies f(g) = f(g') \implies g = g' \implies f$  iniettiva

Oss

- **Hp**

- $A, B$  anelli
- $f : A \rightarrow B$  morfismo di anelli
- **Th**
  - $\text{Ker}(f)$  ideale
- **Dim**
  - $(\text{Ker}(f), +) \subset (A, +)$  sottogruppo per dimostrazione precedente
  - per analogia con dimostrazione precedente,  $f(0_A) = 0_B$
  - $x \in \text{Ker}(f) \implies f(x) = 0_B$  per definizione, quindi  $\forall x \in \text{Ker}(f), y \in A \quad f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y) = 0_B \cdot f(y) = 0_B \implies x \cdot y \in \text{Ker}(f)$  per definizione, quindi  $\text{Ker}(f) \cdot A \subset \text{Ker}(f)$

**Oss**

- **Hp**
  - $A, B$  anelli
  - $f : A \rightarrow B$  morfismo di anelli
- **Th**
  - $\text{Im}(f)$  sottoanello
- **Dim**
  - $(\text{Im}(f), +) \subset (A, +)$  sottogruppo per dimostrazione precedente
  - $x, y \in \text{Im}(f) \implies \exists a, a' \mid x = f(a) \wedge y = f(a') \implies x \cdot y = f(a) \cdot f(a') = f(a \cdot a')$  perche  $f$  morfismo, quindi  $\exists a \cdot a' \mid x \cdot y = f(a \cdot a') \implies x \cdot y \in \text{Im}(f) \implies \text{Im}(f) \cdot \text{Im}(f) \subset \text{Im}(f)$

**Oss**

- **Hp**
  - $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C} - \{0\} : k \rightarrow \zeta^k$
  - $f$  morfismo di gruppi  $(\mathbb{Z}, +)$  e  $(\mathbb{C} - \{0\}, \cdot)$
  - $I(n)$  ideale generato da  $n$  !!! **CHI È N**
- **Th**
  - $\text{Ker}(f) = I(n)$
- **Dim**
  - pass

**Oss**

- !!! coso finale su **H** che non ho capito niente

**Oss**

- **Hp**
  - $G, H$  gruppi
  - $f : G \rightarrow H$  morfismo
- **Th**
  - $\text{Ker}(f)$  è sottogruppo normale
- **Dim**
  - per la formulazione 2 della definizione di sottogruppo normale,  $\forall g \in G, h \in \text{Ker}(f) \implies ghg^{-1} \in \text{Ker}(f)$
  - $f(ghg^{-1}) = f(g) \cdot f(h) \cdot f(g^{-1})$
  - $h \in \text{Ker}(f) \implies f(h) = 1_H$  per definizione

- per dimostrazione precedente  $f(g^{-1}) = f(g)^{-1}$
- $f(ghg^{-1}) = f(g) \cdot 1_H \cdot f(g)^{-1} = 1_H \implies ghg^{-1} \in \text{Ker}(f)$  per definizione