

# Everything

## DISCLAIMER

Questo è un file che contiene una lista di tutti i teoremi, osservazioni, definizioni, esempi, lemmi, corollari, formule e proposizioni **senza alcuna dimostrazione**, di conseguenza molte informazioni risulteranno essere senza alcun contesto se già non si conosce la materia. Detto questo, buona lettura.

---

## Gruppi e Anelli

### Definizione 1

- **Semigrupp**
  - $S$  insieme
  - $m : S \times S \rightarrow S$
  - $(S, m)$  **semigrupp**  $\iff \forall x, y, z \in S \quad m(x, m(y, z)) = m(m(x, y), z)$
- **Monoide**
  - $S$  insieme
  - $m : S \times S \rightarrow S$
  - $(S, m)$  **monoide**  $\iff (S, m)$  semigrupp e  $\forall x \in S \quad \exists e \in S \mid m(x, e) = m(e, x) = x$
- **Gruppo**
  - $S$  insieme
  - $m : S \times S \rightarrow S$
  - $(S, m)$  **gruppo**  $\iff (S, m)$  monoide e  $\forall x \in S \quad \exists x^{-1} \in S \mid m(x, x^{-1}) = m(x^{-1}, x) = e$
- **Gruppo abeliano**
  - $S$  insieme
  - $m : S \times S \rightarrow S$
  - $(S, m)$  **gruppo abeliano**  $\iff (S, m)$  gruppo e  $\forall x, y \in S \quad m(x, y) = m(y, x)$

### Teorema 1

- **Hp**
  - $G$  monoide
  - $\exists e \in G$  elemento neutro
- **Th**
  - $e$  è unico in  $G$

### Teorema 2

- **Hp**
  - $(G, m)$  gruppo

- $x \in G$
- $\exists x^{-1} \in G$  inverso di  $x$  rispetto ad  $m$
- **Th**
  - $x^{-1}$  è unico in  $G$  per  $x$  rispetto a  $m$

### Teorema 3

- **Hp**
  - $X, Y$  insiemi,
  - $Y^X = \{f \mid f : X \rightarrow Y\}$
- **Th**
  - $(X^X, \circ)$  è monoide

### Teorema 4

- **Hp**
  - $X, Y$  insiemi finiti
- **Th**
  - $|Y^X| = |Y|^{|X|}$

### Definizione 2

- **Anello**
  - $A$  insieme
  - $+: A \times A \rightarrow A$
  - $\cdot: A \times A \rightarrow A$
  - $(A, +, \cdot)$  **anello**  $\iff (A, +)$  gruppo abeliano,  $(A, \cdot)$  monoide e  $\forall a, b, c \in A \quad a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
  - $a \cdot b = b \cdot a \quad \forall a, b \in A \implies (A, \cdot, +)$  è un **anello commutativo**
- **Campo**
  - $(A, +, \cdot)$  anello
  - $(A, +, \cdot)$  è un **campo**  $\iff \forall x \in A \quad \exists x^{-1}$  rispetto a  $\cdot$
- **Semianello commutativo**
  - $A$  insieme
  - $+: A \times A \rightarrow A$
  - $\cdot: A \times A \rightarrow A$
  - $(A, +, \cdot)$  **semianello commutativo**  $\iff (A, +)$  monide commutativo,  $(A, \cdot)$  monoide commutativo e  $\forall a, b, c \in A \quad a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
- **Sottoanello**
  - $(A, +, \cdot)$  anello
  - $(B, +, \cdot) \subset (A, +, \cdot)$  **sottoanello**  $\iff (B, +) \subset (A, +)$  sottogruppo e  $B \cdot B \subset B$

### Definizione 3

- **Invertibili**
  - $(A, +, \cdot)$  anello commutativo

- $a \in A$  **invertibile**  $\iff \exists a^{-1} \in A \mid a \cdot a^{-1} = e$ , dove  $e$  è l'elemento neutro dell'anello rispetto a  $\cdot$
- $A^* := \{a \in A \mid a \text{ invertibile}\}$  è l'insieme degli invertibili di  $A$

### Teorema 5

- **Hp**
  - $(A, +, \cdot)$  anello commutativo
- **Th**
  - $(A^*, \cdot)$  è un gruppo

### Teorema 6

- **Hp**
  - $(A, +, \cdot)$  anello commutativo
- **Th**
  - $(A^*, \cdot) \subset (A, \cdot)$  è un sottogruppo

### Definizione 4

- **Divisori dello 0**
  - $(A, +, \cdot)$  anello commutativo
  - $a \in A$  **divisore dello 0**  $\iff \exists b \in A - \{0\} \mid a \cdot b = 0$
- **Dominio di integrità**
  - $(A, +, \cdot)$  anello commutativo
  - $A$  **dominio di integrità**  $\iff \nexists x \neq 0 : x \mid 0$
  - alternativamente,  $A$  è dominio di integrità  $\iff$  in  $A$  vale la legge di annullamento del prodotto

### Teorema 7

- **Hp**
  - $(A, +, \cdot)$  anello commutativo
- **Th**
  - $x \mid 0 \iff x \notin A^*$

### Teorema 8

- **Hp**
  - $A$  campo
- **Th**
  - $A$  dominio di integrità

### Definizione 5

- **Elementi irriducibili**
  - $A$  anello commutativo
  - $a \in A - \{0\} \mid a \in A^*$

- $a$  **irriducibile**  $\iff \exists b, c \in A \mid a = bc \implies b \in A^* \vee c \in A^*$
- **Elementi primi**
  - $A$  anello commutativo
  - $a \in A - \{0\} \mid a \in A^*$
  - $a$  **primo**  $\iff \exists b, c \in A : a \mid bc \implies a \mid b \vee a \mid c$

### Teorema 9

- **Hp**
    - $A$  dominio di integrità
  - **Th**
    - $a$  primo  $\implies a$  irriducibile
- 

## Sottogruppi

### Definizione 6

- **Sottogruppo**
  - $(G, *)$  gruppo
  - $(H, *) \subset (G, *)$  **sottogruppo**  $\iff \exists e \in H \mid e$  è l'elemento neutro,  $H * H \subset H$  e  $\exists x^{-1} \in H \quad \forall x \in H$

### Definizione 7

- **Sottogruppo normale**
  - $(G, *)$  gruppo
  - $(H, *) \subset (G, *)$  sottogruppo
  - $x \in G$
  - $xH := \{xh \mid h \in H\}$
  - $Hx := \{hx \mid h \in H\}$
  - $H$  **sottogruppo normale**  $\iff \forall x \in G \quad xH = Hx$

### Teorema 10

- **Hp**
    - $G$  gruppo
    - 1)  $H$  è sottogruppo normale
    - 2)  $\forall g \in G, h \in H \quad g \cdot h \cdot g^{-1} \in H$
    - 3)  $\forall g \in G, h \in H \quad \exists k \in H \mid g \cdot h = k \cdot g$
  - **Th**
    - le proposizioni sono equivalenti
-

# Ordine

## Definizione 8

- **Ordine di un elemento in un gruppo**
  - $G$  gruppo
  - $g \in G$
  - $H(g) := \{g^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$  è detto **sottogruppo ciclico**
    - prende il nome di *sottogruppo ciclico* poiché, a seconda del gruppo, le potenze di  $g$  possono essere infinite o finite, ma quest'ultimo caso si verifica esclusivamente quando le potenze ciclarono su loro stesse
  - $o(g) := |H(g)|$  è detto **ordine di  $g \in G$** 
    - tale valore può dunque essere infinito o finito, e in quest'ultimo caso l'ordine costituisce il valore più piccolo, non nullo, per cui  $g^{o(g)} = e$ , poiché per valori maggiori le potenze ricicleranno infinitamente

## Teorema 11

- **Hp**
  - $(G, +)$  gruppo
  - $g \in G$
- **Th**
  - $(H(g), +) \subset (G, +)$  sottogruppo

## Teorema 12

- **Hp**
  - $(G, \cdot)$  gruppo
  - $g \in G$
- **Th**
  - $(H(g), \cdot) \subset (G, \cdot)$  è sottogruppo

## Teorema 13

- **Hp**
  - $G$  gruppo
  - $g \in G$
  - $I(g) := \{n \in \mathbb{Z} \mid g^n = e\}$
- **Th**
  - $I(g)$  è un ideale

## Teorema 14

- **Hp**
  - $G$  gruppo
  - $g \in G$
  - $\exists! d \geq 0 \mid I(g) = I(d)$
- **Th**
  - $d = 0 \implies o(g) := |H(g)| = |\mathbb{Z}|$ , dunque infinito
  - $d > 0 \implies d = o(g)$

### Teorema 15

- **Hp**
  - $(G, \cdot)$  gruppo finito
  - $g \in G \mid d := o(g)$  finito
- **Th**
  - $g^{|G|} = e$

### Teorema 16

- **Hp**
  - $G$  gruppo finito
  - $g \in G$
- **Th**
  - $o(g) = o(g^{-1})$

### Teorema 17

- **Hp**
  - $G$  gruppo finito
  - $k \in \mathbb{Z}$
- **Th**
  - $\forall g \in G \quad o(g^k) \mid o(g)$

### Teorema 18

- **Hp**
  - $G$  gruppo finito
  - $g, h \in G \mid gh = hg$
  - $d := \text{MCD}(o(g), o(h))$
  - $m := \text{mcm}(o(g), o(h))$
- **Th**
  - $\frac{m}{d} \mid o(gh) \wedge o(gh) \mid m$

### Teorema 19

- **Hp**
    - $G$  gruppo finito
    - $g, h \in G \mid gh = hg$
    - $d := \text{MCD}(o(g), o(h)) = 1$
    - $m := \text{mcm}(o(g), o(h))$
  - **Th**
    - $o(gh) = o(hg) = m$
-

# Ideali

## Definizione 9

- **Ideali**
  - $(A, +, \cdot)$  anello
  - $I \subset A$  **ideale**  $\iff (I, +) \subset (A, +)$  è un sottogruppo e  $A \cdot I \subset I$  e  $I \cdot A \subset I$

## Teorema 20

- **Hp**
  - $(A, +, \cdot)$  anello
  - $a \in \mathbb{Z}$
  - $I(a) := \{ax \mid x \in A\}$
- **Th**
  - $I(a)$  è un ideale, e prende il nome di *ideale di A generato da a*  $a \in A$

## Teorema 21

- **Hp**
  - $A$  dominio di integrità
  - $a, b \in A$
- **Th**
  - $I(a) = I(b) \iff \exists c \in A^* \mid a = bc$

## Teorema 22

- **Hp**
  - $a, b \in \mathbb{Z} - \{0\}$
- **Th**
  - $I(a) = I(b) \iff a = \pm b$

## Teorema 23

- **Hp**
  - $(A, +, \cdot)$  anello
  - $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$
  - $I(a_1, \dots, a_n) := \{a_1b_1 + \dots + a_nb_n \mid b_1, \dots, b_n \in A\}$
- **Th**
  - $I(a_1, \dots, a_n)$  è un ideale, e prende il nome di *ideale di A generato dagli  $a_1, \dots, a_n \in A$*

## Definizione 10

- **Congruenza modulo di un ideale**
  - $(A, +, \cdot)$  anello
  - $I \subset A$  ideale
  - per definizione,  $I$  ideale  $\implies (I, +) \subset (A, +)$  sottogruppo, dunque ha senso definire  $A/I$ , e infatti  $I$  induce una relazione di equivalenza su  $A$  detta **congruenza modulo  $I$** , dove  $\forall a, b \in A \quad a \equiv b \pmod{I} \iff b - a \in I$

- $b - a \in I \iff (-a) + b \in I$ , di conseguenza questa congruenza coincide con la classe laterale sinistra di  $(A, +)$

### Teorema 24

- **Hp**
  - $(A, +, \cdot)$  anello
  - $I \subset A$  ideale
  - $+: A/I \times A/I \rightarrow A/I$
  - $\cdot: A/I \times A/I \rightarrow A/I$
- **Th**
  - $(A/I, +, \cdot)$  è un anello

### Teorema 25

- **Hp**
  - $I \subset \mathbb{Z}$  ideale
- **Th**
  - $\exists! d \in \mathbb{N} \mid I = I(d)$ , o equivalentemente, in  $\mathbb{Z}$  ogni ideale è principale

### Teorema 26

- **Hp**
  - $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$
  - $\exists! d \in \mathbb{N} \mid I(a_1, \dots, a_n) = I(d)$
- **Th**
  - $d = \text{MCD}(a_1, \dots, a_n)$

### Definizione 11

- **Massimo Comun Divisore**
  - $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$
  - $\exists! d \in \mathbb{N} \mid I(a_1, \dots, a_n) = I(d)$ , ed è detto **massimo comun divisore** degli  $a_1, \dots, a_n$ 
    - per dimostrazione precedente  $I(a_1, \dots, a_n)$  è un ideale, e per dimostrazione precedente ogni ideale in  $\mathbb{Z}$  è principale, dunque per un certo  $d$  coincide con  $I(d)$ , e in particolare  $d$  è proprio il massimo comun divisore degli  $a_1, \dots, a_n$  per dimostrazione precedente

### Teorema 27

- **Hp**
  - $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$
  - $d := \text{MCD}(a_1, \dots, a_n)$
- **Th**
  - $\exists x_1, \dots, x_n \in \mathbb{Z} \mid a_1x_1 + \dots + a_nx_n = d$ , che prende il nome di *identità di Bézout*

### Teorema 28

- !!! MANCA DIMOSTRAZIONE SISTEMA DI IDENTITÀ DI BÉZOUT



---

## Operazioni sugli ideali

### Definizione 12

- **+** tra ideali
  - $(A, +, \cdot)$  anello commutativo
  - $I, J \subset A$  ideali
  - $I + J = \{i + j \mid \forall i \in I, j \in J\}$

### Teorema 29

- **Hp**
  - $(A, +, \cdot)$  anello commutativo
  - $I, J \subset A$  ideali
- **Th**
  - $I + J$  è un ideale

### Definizione 13

- **$\cap$**  tra ideali
  - $(A, +, \cdot)$  anello commutativo
  - $I, J \subset A$  ideali
  - $I \cap J = \{x \in I \wedge x \in J\}$

### Teorema 30

- **Hp**
  - $(A, +, \cdot)$  anello commutativo
  - $I, J \subset A$  ideali
- **Th**
  - $I \cap J$  è un ideale

### Definizione 14

- **Minimo Comune Multiplo**
  - $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$
  - $\exists! m \in \mathbb{N} \mid I(m) = I(a_1) \cap \dots \cap I(a_n) = \bigcap_{i=1}^n I(a_i)$ , ed è detto **minimo comune multiplo** degli  $a_1, \dots, a_n$

### Definizione 15

- **$\cdot$**  tra ideali
  - $(A, +, \cdot)$  anello commutativo
  - $I, J \subset A$  ideali

- $I \cdot J = \{i_1 j_1 + \dots + i_k j_k \mid k \geq 1, \forall i_1, \dots, i_k \in I, j_1, \dots, j_k \in J\}$

### Teorema 31

- **Hp**
  - $(A, +, \cdot)$  anello commutativo
  - $I, J \subset A$  ideali
- **Th**
  - $I \cdot J$  è un ideale

### Teorema 32

- **Hp**
  - $a, b \in \mathbb{Z}$
  - $d := \text{MCD}(a, b)$
- **Th**
  - $I(a) + I(b) = I(d)$

### Teorema 33

- **Hp**
    - $a, b \in \mathbb{Z}$
  - **Th**
    - $I(a) \cdot I(b) = I(a \cdot b)$
- 

## Relazioni

### Definizione 16

- **Relazioni**
  - $S$  insieme
  - ogni elemento  $R \subseteq S \times S$  è una **relazione** su  $S$
- **Relazione riflessiva**
  - $S$  insieme
  - $R$  relazione in  $S \times S$
  - $R$  **riflessiva**  $\iff \forall x \in S \quad (x, x) \in R$
- **Relazione simmetrica**
  - $S$  insieme
  - $R$  relazione in  $S \times S$
  - $R$  **simmetrica**  $\iff \forall x, y \in S \quad (x, y) \in R \implies (y, x) \in R$
- **Relazione transitiva**
  - $S$  insieme
  - $R$  relazione in  $S \times S$
  - $R$  **transitiva**  $\iff \forall x, y, z \in S \quad (x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \implies (x, z) \in R$

- **Relazione antisimmetrica**

- $S$  insieme
- $R$  relazione in  $S \times S$
- $R$  **transitiva**  $\iff \forall x, y \in R \quad (x, y) \in R \wedge (y, x) \in R \implies x = y$

- **Relazione totale**

- $S$  insieme
- $R$  relazione in  $S \times S$
- $R$  **totale**  $\iff \forall x, y \in R \quad (x, y) \in R \vee (y, x) \in R$

- **Relazione di equivalenza**

- $S$  insieme
- $R$  relazione in  $S \times S$
- $R$  è una **relazione di equivalenza**  $\iff R$  riflessiva, simmetrica e transitiva

- **Ordine parziale**

- $S$  insieme
- $R$  relazione in  $S \times S$
- $R$  **ordine parziale**  $\iff R$  riflessiva, transitiva e antisimmetrica

- **Ordine totale**

- $S$  insieme
- $R$  relazione in  $S \times S$
- $R$  **ordine totale**  $\iff R$  ordine parziale in cui vale la totalità

### Teorema 34

- **Hp**
  - $m, n \in \mathbb{N}$
  - $m \mid n \iff \exists p \in \mathbb{N} \mid mp = n$
- **Th**
  - $\mid$  è ordine parziale

### Teorema 35

- **Hp**
  - $a, b \in \mathbb{Z}$
  - $a \equiv b \pmod{n} \iff m \mid b - a$  è detta congruenza modulo  $n$
- **Th**
  - $\equiv$  è una relazione di equivalenza

### Teorema 36

- **Hp**
  - $x, y \in \mathbb{Z} \mid x \equiv y \pmod{n}$
  - $d \in \mathbb{Z} : d \mid n$
- **Th**
  - $x \equiv y \pmod{d}$

### Teorema 37

- **Hp**
  - $n \in \mathbb{N}$
  - $[a], [b] \in \mathbb{Z}_n$
  - $d := \text{MCD}(a, n)$
- **Th**
  - $d \nmid b \implies \nexists [x] \in \mathbb{Z}_n \mid ax \equiv b \pmod{n}$
  - $d \mid b \implies \forall [x] \in \mathbb{Z}_n \mid ax \equiv b \pmod{n}$   $x$  è anche tale che  $\frac{a}{d}x \equiv \frac{b}{d} \pmod{\frac{n}{d}}$

### Teorema 38

- **Hp**
    - $G$  gruppo
    - $g, h \in G$
    - $g \sim h \iff \exists a \in G \mid h = a \cdot g \cdot a^{-1}$  è detta *relazione di coniugio*
  - **Th**
    - $\sim$  è una relazione di equivalenza
- 

## Partizioni

### Definizione 17

- **Partizione**
  - $X$  insieme
  - $I$  insieme di indici
  - $\forall i \in I \quad X_i \subset X$
  - $X = \coprod_{i \in I} X_i$

### Teorema 39

- **Hp**
  - $G$  gruppo
- **Th**
  - $\forall x, y \in G \quad x \approx y \iff [x] \cap [y] = \emptyset \vee x \sim y \iff [x] = [y]$

### Teorema 40

- **Hp**
    - $G$  gruppo
    - $\sim$  è una relazione di equivalenza in  $G$
  - **Th**
    - $\sim$  induce una partizione di  $G$ , dunque  $G = \coprod_{[x] \in X/\sim} [x]$
-

## Classi laterali

### Teorema 41

- **Hp**
  - $G$  gruppo
  - $H \subset G$  sottogruppo
  - $x, y \in G$
- **Th**
  - $x \sim_S y \iff x^{-1}y \in H$  è una relazione di equivalenza

### Definizione 18

- **Classi laterali**
  - $(G, \cdot)$  gruppo
  - $(H, \cdot) \subset (G, \cdot)$  sottogruppo
  - $\forall x, y \in G \quad x \sim_S y \iff x^{-1}y \in H$  è una relazione di equivalenza
  - $\forall x, y \in G \quad x \sim_D y \iff xy^{-1} \in H$  è una relazione di equivalenza
  - $x \in G$
  - $[x] = \{y \in G \mid y \sim_S x\}$  è detta **classe laterale sinistra**
  - $[x] = \{y \in G \mid y \sim_D x\}$  è detta **classe laterale destra**
  - $G/H := \{[x] \mid x \in G\}$  è l'**insieme delle classi laterali sinistre o destre**

### Teorema 42

- **Hp**
  - $(\mathbb{Z}, +)$  anello
  - $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$
  - $I(n) := \{nk \mid k \in \mathbb{Z}\}$
  - $a, b \in \mathbb{Z}$
- **Th**
  - $a \sim_S b \iff a \equiv b \pmod{n}$

### Teorema 43

- **Hp**
  - $G$  gruppo
  - $H \subset G$  sottogruppo
- **Th**
  - $H = [1] \in G/H$

### Teorema 44

- **Hp**
  - $G$  gruppo
  - $H \subset G$  sottogruppo
  - $x \in G$
  - $[x] = \{y \in G \mid y \sim_S x\}$
- **Th**
  - $xH := \{xh \mid h \in H\} = [x]$

### Teorema 45

- **Hp**
  - $G$  gruppo
  - $H \subset G$  sottogruppo
  - $x \in G$
- **Th**
  - $|xH| = |H|$

### Teorema 46

- **Hp**
    - $G$  gruppo
    - $H \subset G$  sottogruppo
    - $+: G/H \times G/H \rightarrow G/H$
  - **Th**
    - $(G/H, +)$  è gruppo abeliano
- 

## Insieme quoziente

### Definizione 19

- **Insieme quoziente**
  - $G$  gruppo
  - $\sim$  relazione di equivalenza in  $G$
  - $\forall x \in G \quad [x] := \{y \in G \mid x \sim y\}$
  - $G/\sim := \{[x] \mid x \in G\}$  è l'**insieme quoziente**, ovvero l'insieme delle classi di equivalenza determinate da  $\sim$

### Definizione 20

- **Insieme quoziente  $\mathbb{Z}_n$** 
  - $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$  anello, in particolare  $(\mathbb{Z}, +)$  gruppo
  - $n \in \mathbb{Z}$
  - $\mathbb{Z}/\equiv$  è l'insieme delle classi di equivalenza definite dalla relazione di equivalenza  $\equiv$
  - $m \equiv r \pmod{n} \iff r \equiv m \pmod{n} \implies n \mid m - r \implies \exists q : nq = m - r \implies m = nq + r \quad 0 \leq r < n$
  - $0 \leq r < n \implies$  è possibile definire  $\mathbb{Z}_n := \{[0], [1], \dots, [n-1]\}$ , che coincide con  $\mathbb{Z}/\equiv$

### Teorema 47

- **Hp**
  - $n \in \mathbb{Z}$
  - $I(n) := \{nk \mid k \in \mathbb{Z}\}$
- **Th**

- $(\mathbb{Z}_n, +)$  è un gruppo

### Teorema 48

- **Hp**
  - $p \in \mathbb{P}$
  - $a, b \in \mathbb{Z}$
  - $p \mid ab$
- **Th**
  - $p \mid a \vee p \mid b$

### Teorema 49

- **Hp**
  - $n \in \mathbb{Z}$
- **Th**
  - $\mathbb{Z}_n$  dominio di integrità  $\iff n \in \mathbb{P}$

### Teorema 50

- **Hp**
  - $n \in \mathbb{Z}$
- **Th**
  - $\forall [a] \in \mathbb{Z}_n \quad \text{MCD}(a, n) = 1 \iff [a] \in \mathbb{Z}_n^*$

### Teorema 51

- **Hp**
  - $p \in \mathbb{P}$
- **Th**
  - $\mathbb{Z}_p$  campo

### Teorema 52

- **Hp**
    - $p \in \mathbb{P}$
  - **Th**
    - $(\mathbb{Z}_p^*, \cdot)$  è ciclico
- 

## Funzione totiente di Eulero

### Definizione 21

- **Funzione totiente di Eulero**
  - $n \in \mathbb{N}$
  - $\varphi(n) := |\mathbb{Z}_n^*|$

### Teorema 53

- **Hp**
  - $n, m \in \mathbb{N} \mid \text{MCD}(a, n) = 1$
- **Th**
  - $[a] \in \mathbb{Z}_{mn}^* \iff [a] \in \mathbb{Z}_m^* \wedge [a] \in \mathbb{Z}_n^*$

### Teorema 54

- **Hp**
  - $m, n \in \mathbb{N} \mid \text{MCD}(m, n) = 1$
- **Th**
  - $\varphi(m \cdot n) = \varphi(m) \cdot \varphi(n)$

### Teorema 55

- **Hp**
  - $p \in \mathbb{P}$
  - $k \in \mathbb{N} \mid k \geq 1$
- **Th**
  - $\varphi(p^k) = p^{k-1}(p-1)$

### Teorema 56

- **Hp**
    - $k \in \mathbb{N} \mid k \geq 1$
    - $p_1, \dots, p_k \in \mathbb{P}$
    - $i_1, \dots, i_k \geq 1$
    - $n \in \mathbb{N} \mid n = p_1^{i_1} \cdot \dots \cdot p_k^{i_k}$
  - **Th**
    - $\varphi(n) = n \cdot \prod_{p \mid n} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$
- 

## Permutazioni

### Definizione 22

- **Permutazioni**
  - $X$  insieme
  - $S_X := \{f \mid f : X \rightarrow X \text{ biettiva}\}$  è l'insieme delle permutazioni di  $X$
  - $X = \{1, \dots, n\} \implies S_n$  è detto **gruppo simmetrico di  $n$**

### Teorema 57

- **Hp**
  - $S_X := \{f \mid f : X \rightarrow Y \text{ biettiva}\}$
- **Th**
  - $(S_X, \circ)$  è un gruppo, non abeliano se  $|X| \geq 3$



### Definizione 23

- **Ciclo di una permutazione**

- $n \in \mathbb{N}$
- $\sigma \in S_n$

$$\bullet \exists 1 \leq i_1, \dots, i_d \leq n \in \mathbb{N} \mid \left\{ \begin{array}{l} \sigma(i_1) = i_2 \\ \sigma(i_2) = i_3 \\ \vdots \\ \sigma(i_{d-1}) = i_d \\ \sigma(i_d) = i_1 \end{array} \right. \implies i_1, \dots, i_d \text{ costituiscono un ciclo di } \sigma$$

### Teorema 58

- **Hp**

- $n \in \mathbb{N}$
- $\sigma \in S_n$
- $1 \leq i < n \in \mathbb{N}$
- $I(\sigma, i) := \{n \in \mathbb{Z} \mid \sigma^n(i) = i\}$

- **Th**

- $(I(\sigma, i), +) \subset (\mathbb{Z}, +)$  è un ideale

### Teorema 59

- **Hp**

- !!! **RISCRIVI TUTTO**
- $I(\sigma, i)$  è **ideale principale** in  $\mathbb{Z}$  generato da  $I(d)$ , dove  $d$  è la lunghezza del ciclo di  $i$ , quindi  $I(\sigma, i) = I(d)$
- $I(\sigma, i) = I(d) \implies d \in I(\sigma, i)$

### Teorema 60

- **Hp**

- $n \in \mathbb{N}$
- $\sigma \in S_n \mid \sigma = \gamma_1 \dots \gamma_k$  sia la sua decomposizione in cicli
- $d_j := \text{lunghezza di } \gamma_j \quad \forall j \in [1, k]$
- $m := \text{mcm}(d_1, \dots, d_k)$
- $I(\sigma) := \{n \in \mathbb{Z} \mid \sigma^n = \text{id}\}$

- **Th**

- $o(\sigma) = m$
- 

## Trasposizioni

### Definizione 24

- **Trasposizione**

- $n \in \mathbb{N}$

- $i, j \in \mathbb{N} \mid 1 \leq i < j \leq n$
- $k \in [1, n]$
- $\tau_{i,j} \in S_n \mid \tau_{i,j} = \begin{cases} j & k = i \\ i & k = j \\ k & k \neq i, j \end{cases}$  è detta **trasposizione**, ovvero una permutazione che inverte esclusivamente due elementi tra loro
  - $\tau_{i,j}^2 = \text{id} \iff \tau_{i,j} = \tau_{i,j}^{-1}$
- **Trasposizione adiacente**
  - $n \in \mathbb{N}$
  - $i, j \in \mathbb{N} \mid 1 \leq i < j \leq n \wedge j = i + 1$
  - $\tau_{i,j} = \tau_{i,i+1}$  è detta **trasposizione adiacente**, poiché inverte esclusivamente due elementi, adiacenti, tra loro

## Teorema 61

- **Hp**
    - $n \in \mathbb{N}$
    - $\sigma \in S_n$
  - **Th**
    - $\exists i_1, \dots, i_k < n \mid \sigma = \tau_{i_1, i_1+1} \dots \tau_{i_k, i_k+1}$ , quindi ogni permutazione può essere riscritta come composizione di trasposizioni adiacenti
- 

## Segno

### Definizione 25

- **Segno di una permutazione**
  - $n \in \mathbb{N}$
  - $\sigma \in S_n$
  - $\text{Inv}(\sigma) := \{(i, j) \mid 1 \leq i < j < n : \sigma(i) > \sigma(j)\}$  è l'**insieme delle inversioni di  $\sigma$**
  - $\text{sgn}(\sigma) := (-1)^{|\text{Inv}(\sigma)|} = \begin{cases} +1 & |\text{Inv}(\sigma)| \equiv 0 \pmod{2} \\ -1 & |\text{Inv}(\sigma)| \equiv 1 \pmod{2} \end{cases} \implies \sigma \text{ pari} \iff \text{sgn}(\sigma) = +1$ 
    - $\text{sgn}(\text{id}) = (-1)^0 = 1$ , in quando la funzione identità non ha inversioni

## Teorema 62

- **Hp**
  - $n \in \mathbb{N}$
  - $A_n := \{\sigma \in S_n \mid \sigma \text{ pari}\}$
- **Th**
  - $A_n \subset S_n$  è un sottogruppo normale, detto *gruppo alterno di ordine  $n$*

## Teorema 63

- **Hp**

- $n \in \mathbb{N}$
- $\sigma \in S_n \mid \sigma = \tau_1 \dots \tau_k$  dove  $\forall j \in [1, k] \quad \tau_j = \tau_{j,j+1}$ , dunque tutte le trasposizioni sono adiacenti
- **Th**
  - $\text{sgn}(\sigma) = (-1)^k$

#### Teorema 64

- **Hp**
  - $n \in \mathbb{N}$
  - $\sigma, \sigma' \in S_n \mid \begin{cases} \sigma = \tau_1 \dots \tau_k \\ \sigma' = \tau'_1 \dots \tau'_h \end{cases}$ , dove ogni trasposizione è adiacente
- **Th**
  - $\text{sgn}(\sigma\sigma') = \text{sgn}(\sigma) \cdot \text{sgn}(\sigma')$

#### Teorema 65

- **Hp**
  - $n \in \mathbb{N}$
  - $\sigma \in S_n$
- **Th**
  - $\text{sgn}(\sigma^{-1}) = \text{sgn}(\sigma)$

#### Teorema 66

- **Hp**
  - $n \in \mathbb{N}$
  - $\sigma, \sigma' \in S_n$
  - $\sigma \sim \sigma' \iff \exists \alpha \in S_n \mid \sigma' = \alpha\sigma\alpha^{-1}$
- **Th**
  - $\text{sgn}(\sigma') = \text{sgn}(\sigma)$

#### Teorema 67

- **Hp**
  - $n \in \mathbb{N}$
  - $\sigma, \sigma' \in S_n \mid \sigma := \gamma_1 \dots \gamma_k, \sigma' := \gamma'_1 \dots \gamma'_h$
  - $\sigma \sim \sigma' \iff \exists \alpha \in S_n \mid \sigma' = \alpha\sigma\alpha^{-1}$ , che costituisce dunque la relazione di coniugio
- **Th**
  - $\sigma \sim \sigma' \iff \begin{cases} k = h \\ d = d'_1 \\ \vdots \\ d_k = d'_h = d'_k \end{cases}$ , dove  $d_j$  è la lunghezza del ciclo  $\gamma_j$  e  $d'_j$  è la lunghezza del ciclo  $\gamma'_j$

#### Teorema 68

- **Hp**
  - $n \in \mathbb{N}$
  - $\sigma \in S_n \mid \sigma := \gamma_1 \dots \gamma_k$

- **Th**
    - $\text{sgn}(\sigma) = (-1)^{n-k}$
- 

## Morfismi

### Definizione 26

- **Morfismo di gruppi**
  - $(G, \cdot), (H, \cdot)$  gruppi
  - $f : G \rightarrow H$
  - $f$  **morfismo di gruppi**  $\iff \forall x, y \in G \quad f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$
- **Morfismo di anelli**
  - $(A, +, \cdot), (B, +, \cdot)$  anelli
  - $f : A \rightarrow B$
  - $f$  **morfismo di anelli**  $\iff \forall x, y \in A \quad f(x + y) = f(x) + f(y) \wedge f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$ 
    - la stessa definizione si applica per morfismo di campi

### Teorema 69

- **Hp**
  - $(G, \cdot), (H, \cdot)$  gruppi
  - $1_G$  neutro per  $G$
  - $1_H$  neutro per  $H$
  - $f : G \rightarrow H$  morfismo
- **Th**
  - $f(1_G) = 1_H$

### Teorema 70

- **Hp**
    - $(G, \cdot), (H, \cdot)$  gruppi
    - $1_G$  neutro per  $G$
    - $1_H$  neutro per  $H$
    - $f : G \rightarrow H$  morfismo
  - **Th**
    - $f(g^{-1}) = f(g)^{-1}$
- 

## Isomorfismi

### Definizione 27

- **Isomorfismo**
  - $f$  **isomorfismo**  $\iff f$  morfismo e  $f$  biiettiva

### Teorema 71

- **Hp**
  - $(G, \cdot), (H, \cdot)$  gruppi
  - $f : G \rightarrow H$  isomorfismo
- **Th**
  - $f^{-1} : H \rightarrow G$  isomorfismo

### Teorema 72

- **Hp**
  - $\cong$  è la relazione di isomorfismo
- **Th**
  - $\cong$  è una relazione di equivalenza

### Teorema 73

- **Hp**
  - $z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1$  sono le radici  $n$ -esime di 1
  - $\zeta := e^{i\frac{2\pi}{n}}$
  - $H := \{\zeta^0, \zeta^1, \zeta^k, \dots, \zeta^{n-1}\}$  è l'insieme delle radici  $n$ -esime di 1
- **Th**
  - $(H, \cdot) \subset (\mathbb{C} - \{0\}, \cdot)$  è un sottogruppo

### Teorema 74

- **Hp**
  - $f : \mathbb{Z}_n \rightarrow H : [k] \rightarrow \zeta^k$
- **Th**
  - $f$  isomorfismo di gruppi  $(\mathbb{Z}_n, +)$  e  $(H, \cdot)$

### Teorema 75

- **Hp**
  - $(G, \cdot)$  gruppo
  - $g \in G$
  - $f : \mathbb{Z} \rightarrow G : n \rightarrow g^n$
- **Th**
  - $f$  morfismo di gruppi  $(\mathbb{Z}, +)$  e  $(G, \cdot)$

### Teorema 76

- **Hp**
  - $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_n : k \rightarrow [k]$
- **Th**
  - $f$  morfismo di anelli  $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$  e  $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$

### Teorema 77

- **Hp**

- $n, m \in \mathbb{Z} : n \mid m$
- $f : \mathbb{Z}_m \rightarrow \mathbb{Z}_n : x \pmod{m} \rightarrow x \pmod{n}$
- **Th**
  - $f$  morfismo di anelli  $(\mathbb{Z}_m, +, \cdot)$  e  $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$

### Teorema 78

- **Hp**
    - $G$  gruppo
    - $g \in G$
    - $f : G \rightarrow G : h \rightarrow g \cdot h \cdot g^{-1}$
  - **Th**
    - $f$  morfismo di gruppi  $(G, \cdot)$  e  $(G, \cdot)$
- 

## Kernel e immagine

### Definizione 28

- **Kernel e immagine di gruppi**
  - $G, H$  gruppi
  - $f : G \rightarrow H$  morfismo
  - $\ker(f) := \{g \in G \mid f(g) = 1_H\}$  è detto **kernel/nucleo di  $f$**
  - $\text{im}(f) := \{h \in H \mid \exists g \in G : f(g) = h\}$  è detta **immagine di  $f$**
- **Kernel e immagine di anelli**
  - $A, B$  gruppi
  - $f : A \rightarrow B$  morfismo
  - $\ker(f) := \{a \in A \mid f(a) = 0_B\}$  è detto **kernel/nucleo di  $f$**
  - $\text{im}(f) := \{b \in B \mid \exists a \in A : f(a) = b\}$  è detto **immagine di  $f$**

### Teorema 79

- **Hp**
  - $G, H$  gruppi
  - $f : G \rightarrow H$  morfismo
- **Th**
  - $\ker(f) \subset G$  è sottogruppo

### Teorema 80

- **Hp**
  - $G, H$  gruppi
  - $f : G \rightarrow H$  morfismo
- **Th**
  - $\text{im}(f) \subset H$  è sottogruppo

### Teorema 81

- **Hp**
  - $G, H$  gruppi
  - $f : G \rightarrow H$  morfismo
- **Th**
  - $f$  iniettiva  $\iff \ker(f) = \{1_G\}$

### Teorema 82

- **Hp**
  - $A, B$  anelli
  - $f : A \rightarrow B$  morfismo di anelli
- **Th**
  - $\ker(f)$  ideale

### Teorema 83

- **Hp**
  - $A, B$  anelli
  - $f : A \rightarrow B$  morfismo di anelli
- **Th**
  - $\text{im}(f) \subset B$  sottoanello

### Teorema 84

- **Hp**
  - $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C} - \{0\} : k \rightarrow \zeta^k$
  - $f$  morfismo di gruppi  $(\mathbb{Z}, +)$  e  $(\mathbb{C} - \{0\}, \cdot)$
  - $I(n)$  ideale generato da  $n$
- **Th**
  - $\ker(f) = I(n)$

### Teorema 85

- **Hp**
    - $G, H$  gruppi
    - $f : G \rightarrow H$  morfismo
  - **Th**
    - $\ker(f) \subset G$  sottogruppo normale
- 

## Gruppi diedrali

### Definizione 29

- **Gruppo diedrale**
  - $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$
  - $D_n$  è l'insieme delle simmetrie dell' $n$ -gono regolare

- l'insieme delle rotazioni che lasciano l' $n$ -gono invariato, e delle riflessioni rispetto agli assi di simmetria
- $\rho :=$  rotazione di  $\frac{360^\circ}{n}$  gradi di un  $n$ -gono regolare
- $\sigma_i :=$  riflessione rispetto all' $i$ -esimo asse di simmetria dell' $n$ -gono regolare

### Teorema 86

- **Hp**
  - $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$
  - $D_n$  insieme delle simmetrie dell' $n$ -gono regolare
- **Th**
  - $|D_n| = 2n$

### Teorema 87

- **Hp**
  - $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$
  - $D_n$  insieme delle simmetrie dell' $n$ -gono regolare
  - $\cdot$  è l'operazione di composizione delle simmetrie
- **Th**
  - $(D_n, \cdot)$  è un gruppo

### Teorema 88

- **Hp**
  - $D_2$  gruppo diedrale
- **Th**
  - $(D_2, \cdot)$  è l'unico gruppo diedrale abeliano

### Teorema 89

- **Hp**
  - $D_n$  gruppo diedrale
- **Th**
  - $D_n \hookrightarrow S_n$
  - $\exists X \subset S_n$  sottogruppo di  $S_n \mid D_n \cong X$
  - \*  $D_3 \cong S_3$

### Definizione 30

- **Gruppo di Klein**
  - $K_4 := \{1, a, b, c\}$
  - $a^2 = b^2 = c^2 = 1$
  - $ab = c = ba$
  - $ac = b = ca$
  - $cb = a = bc$

### Teorema 90

- **Hp**



- $K_4$  è il gruppo di Klein
  - **Th**
    - $K_4 \cong D_2$
- 

## Polinomi

### Definizione 31

- **Polinomi**
  - $\mathbb{K}$  campo
  - $a(x) := \sum_{k=0}^n a_k x^k = a_0 x^0 + \dots + a_n x^n$  è un **polinomio**
  - $\mathbb{K}[x] := \{a_0 x^0 + \dots + a_n x^n \mid a_0, \dots, a_n \in \mathbb{K}\}$  è l'insieme dei **polinomi a coefficienti in  $\mathbb{K}$**
  - $p(x) = a_0 x^0 + \dots + a_n x^n \in \mathbb{K}[x]$  è detto **polinomio monico**  $\iff a_n = 1$

### Teorema 91

- **Hp**
  - $(\mathbb{K}, +, \cdot)$  anello
- **Th**
  - $(\mathbb{K}[x], +, \cdot)$  è un anello

### Definizione 32

- **Grado del polinomio**
  - $\mathbb{K}$  campo
  - $a(x) = a_0 x^0 + \dots + a_n x^n \in \mathbb{K}[x]$
  - $\deg(a(x)) := \begin{cases} n & a(x) \neq 0 \\ -\infty & a(x) = 0 \end{cases}$

### Teorema 92

- **Hp**
  - $\mathbb{K}$  campo
  - $a(x), b(x) \in \mathbb{K}[x]$
- **Th**
  - $\deg(a(x) \cdot b(x)) = \deg(a(x)) + \deg(b(x))$

### Teorema 93

- **Hp**
  - $\mathbb{K}$  campo
  - $a(x) \in \mathbb{K}[x] \mid \deg(a(x)) \geq 1$
- **Th**
  - $\nexists a^{-1}(x) \in \mathbb{K}[x]$

### Teorema 94

- **Hp**
  - $\mathbb{K}$  campo
- **Th**
  - $\mathbb{K}[x]^* = \mathbb{K}^* \subset \mathbb{K}[x]$

### Teorema 95

- **Hp**
  - $\mathbb{K}$  campo
- **Th**
  - $\mathbb{K}[x]$  è un dominio di integrità

### Definizione 33

- **Radici di un polinomio**
  - $\mathbb{K}$  campo
  - $p(x) \in \mathbb{K}[x]$
  - $\{c \in \mathbb{K} \mid p(c) = 0\}$  è l'insieme delle radici di  $p(x)$

### Teorema 96

- **Hp**
  - $\mathbb{K}$  campo
  - $p(x) \in \mathbb{K}[x]$
  - $c \in \mathbb{K}$
- **Th**
  - $p(c) = 0 \iff x - c \mid p(x)$

### Teorema 97

- **Hp**
  - $\mathbb{K}$  campo
  - $p(x) \in \mathbb{K}[x]$
  - $n := \deg(p(x))$
- **Th**
  - $|\{c \in \mathbb{K} \mid p(c) = 0\}| \leq n$

### Teorema 98

- **Hp**
  - $\mathbb{K}$  campo
  - $I \subset \mathbb{K}[x]$  ideale
- **Th**
  - $I$  è un ideale principale

### Teorema 99

- **Hp**

- $\mathbb{K}$  campo
- $I(a_1(x)), \dots, I(a_n(x)) \subset \mathbb{K}[x]$  ideali
- $\exists d(x) \in \mathbb{K}[x] \mid I(a_1(x), \dots, a_n(x)) = I(d(x))$
- **Th**
  - $d(x) = \text{MCD}(a_1(x), \dots, a_n(x))$

### Teorema 100

- **Hp**
  - $\mathbb{K}$  campo
  - $I(a_1(x)), \dots, I(a_n(x)) \subset \mathbb{K}[x]$  ideali
  - $\exists m(x) \in \mathbb{K}[x] \mid I(a_1(x)) \cap \dots \cap I(a_n(x)) = I(m(x))$
- **Th**
  - $m(x) = \text{mcm}(a_1(x), \dots, a_n(x))$

### Teorema 101

- **Hp**
  - $\mathbb{K}$  campo
  - $a_1(x), \dots, a_n(x) \in \mathbb{K}[x]$
  - $c \in \mathbb{K}$
  - $d(x) := \text{MCD}(a_1(x), \dots, a_n(x))$
- **Th**
  - $a_1(c) = \dots = a_n(c) = 0 \iff d(c) = 0$

### Teorema 102

- **Hp**
  - $\mathbb{K}$  campo
  - $p(x) \in \mathbb{K}[x]$
- **Th**
  - $p(x) \in \mathbb{K}[x]$  irriducibile  $\iff p(x)$  primo

### Teorema 103

- **Hp**
  - $\mathbb{K}$  campo
  - $p(x) \in \mathbb{K}[x] - \{0\}$
- **Th**
  - $\exists! q_1(x), \dots, q_k(x) \in \mathbb{K}[x]$  irriducibili e monici,  $c \in \mathbb{K} - \{0\} \mid p(x) = c \cdot q_1(x) \cdot \dots \cdot q_k(x)$
  - in particolare, i polinomi sono unici a meno di un riordinamento

### Teorema 104

- **Hp**
  - $\mathbb{K}$  campo
  - $p(x) \in \mathbb{K}[x]$
- **Th**
  - $p(x)$  irriducibile  $\iff \deg(p(x)) = 1$

### Teorema 105

- **Hp**
  - $p(x) \in \mathbb{R}[x]$
- **Th**
  - $p(x)$  irriducibile  $\iff \deg(p(x)) = 1$  oppure  $\deg(p(x)) = 2 \wedge \Delta < 0$

### Teorema 106

- **Hp**
  - $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{Z} \mid a_0, a_n \neq 0$
  - $p(x) \in \mathbb{Z}[x] \mid p(x) = a_0 + \dots + a_n x^n$
  - $a, b \in \mathbb{Z} \mid \text{MCD}(a, b) = 1$
  - $p(\frac{a}{b}) = 0$
- **Th**
  - $a \mid a_0 \wedge b \mid a_n$

### Teorema 107

- !!! MANCA UN TEOREMA ENORME
- 

## Spazi Vettoriali

### Definizione 34

- **Spazio vettoriale**
  - $\mathbb{K}$  campo
  - $x \in \mathbb{K}$  è detto **scalare**
  - $V$  è **spazio vettoriale su  $\mathbb{K}$**   $\iff (V, +)$  gruppo abeliano, è ben definita un'operazione di  $\cdot : K \times V \rightarrow V$  che ammetta elemento neutro, inoltre  $\forall s, t \in \mathbb{K}, v \in V \quad s \cdot (t \cdot v) = (s \cdot t) \cdot v, (s + t) \cdot v = s \cdot v + t \cdot v$  e infine  $\forall s \in \mathbb{K}, v, w \in V \quad s \cdot (v + w) = s \cdot v + s \cdot w$
  - $x \in V$  è detto **vettore**
- **Spazio di Hilbert**
  - $\mathbb{K}$  campo
  - $V$  spazio vettoriale su  $\mathbb{K}$
  - $V$  spazio di Hilbert  $\iff$  in  $V$  è ben definito il prodotto scalare

### Teorema 108

- **Hp**
  - $n \in \mathbb{N}$
  - $\mathbb{K}$  campo
- **Th**
  - $\mathbb{K}^n$  spazio vettoriale su  $\mathbb{K}$

### Definizione 35

- **Sottospazio vettoriale**
  - $\mathbb{K}$  campo
  - $V$  spazio vettoriale su  $\mathbb{K}$
  - $W$  è **sottospazio vettoriale di  $V$**   $\iff (W, +) \subset (V, +)$  sottogruppo, e  $\forall w \in W, \lambda \in \mathbb{K} \quad \lambda \cdot w \in W$

### Definizione 36

- **Span di vettori**
  - $n \in \mathbb{N}$
  - $\mathbb{K}$  campo
  - $V$  spazio vettoriale su  $\mathbb{K}$
  - $v_1, \dots, v_n \in V$
  - $\text{span}(v_1, \dots, v_n) := \{\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n \mid \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}\}$ , ovvero l'insieme delle combinazioni lineari degli  $v_1, \dots, v_n$

### Teorema 109

- **Hp**
  - $n \in \mathbb{N}$
  - $\mathbb{K}$  campo
  - $V$  spazio vettoriale su  $\mathbb{K}$
  - $v_1, \dots, v_n \in V$
- **Th**
  - $\text{span}(v_1, \dots, v_n)$  è un sottospazio vettoriale di  $V$

### Definizione 37

- **Vettori generatori**
  - $n \in \mathbb{N}$
  - $\mathbb{K}$  campo
  - $V$  spazio vettoriale su  $\mathbb{K}$
  - $v_1, \dots, v_n \in V$
  - $v_1, \dots, v_n$  sono **generatori di  $V$**   $\iff \text{span}(v_1, \dots, v_n) = V$ 
    - equivalentemente, ogni altro vettore in  $V$  è una combinazione lineare degli  $v_1, \dots, v_n$
- **Indipendenza lineare**
  - $n \in \mathbb{N}$
  - $\mathbb{K}$  campo
  - $V$  spazio vettoriale su  $\mathbb{K}$
  - $v_1, \dots, v_n \in V$
  - $v_1, \dots, v_n$  sono **linearmente indipendenti** se e solo se  $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0_V \iff \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0_{\mathbb{K}}$ 
    - equivalentemente, nessuno degli  $v_1, \dots, v_n$  è combinazione lineare degli altri
- **Base di uno spazio vettoriale**

- $n \in \mathbb{N}$
- $\mathbb{K}$  campo
- $V$  spazio vettoriale su  $\mathbb{K}$
- $v_1, \dots, v_n \in V$
- $v_1, \dots, v_n$  sono una **base di  $V$**   $\iff v_1, \dots, v_n$  sono generatori di  $V$  e linearmente indipendenti
- $n$  è detta **cardinalità della base di  $V$**

### Teorema 110

- **Hp**
  - $n \in \mathbb{N}$
  - $\mathbb{K}$  campo
  - $e_1 := (1, 0, \dots, 0), \dots, e_n := (0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{K}^n$
- **Th**
  - $e_1, \dots, e_n$  sono una base di  $\mathbb{K}^n$ , ed è detta *base canonica*

### Teorema 111

- **Hp**
  - $n \in \mathbb{N}$
  - $\mathbb{K}$  campo
  - $V$  spazio vettoriale su  $\mathbb{K}$
  - $v_1, \dots, v_n \in V$
- **Th**
  - $v_1, \dots, v_n$  linearmente indipendenti  $\iff v_1, \dots, v_{n-1}$  linearmente indipendenti  $\wedge v_n \notin \text{span}(v_1, \dots, v_{n-1})$

### Teorema 112

- **Hp**
  - $m, k \in \mathbb{N}$
  - $\mathbb{K}$  campo
  - $V$  spazio vettoriale su  $\mathbb{K}$
  - $w_1, \dots, w_m \in V$
  - $v_1, \dots, v_k \in \text{span}(w_1, \dots, w_m) \mid v_1, \dots, v_k$  linearmente indipendenti
- **Th**
  - $k \leq m$

### Teorema 113

- **Hp**
  - $n, m \in \mathbb{N}$
  - $\mathbb{K}$  campo
  - $V$  spazio vettoriale su  $\mathbb{K}$
  - $w_1, \dots, w_m \in V \mid w_1, \dots, w_m$  base di  $V$
  - $v_1, \dots, v_n \in V \mid v_1, \dots, v_n$  base di  $V$
- **Th**
  - $n = m$ , il che implica che la cardinalità delle basi di uno spazio vettoriale è unica

### Definizione 38

- **Base ortogonale di uno spazio di Hilbert**
  - $n \in \mathbb{N}$
  - $\mathbb{K}$  campo
  - $V$  spazio di Hilbert su  $\mathbb{K}$
  - $v_1, \dots, v_n$  base di  $V$
  - $v_1, \dots, v_n$  **base ortogonale di  $V$**   $\iff \forall i, j \in [1, n], i \neq j \quad v_i \cdot v_j = 0$
- **Base ortonormale di uno spazio di Hilbert**
  - $n \in \mathbb{N}$
  - $\mathbb{K}$  campo
  - $V$  spazio di Hilbert su  $\mathbb{K}$
  - $v_1, \dots, v_n$  base ortogonale di  $V$
  - $v_1, \dots, v_n$  **base ortonormale di  $V$**   $\iff \forall i, j \in [1, n] \quad v_i \cdot v_j = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$ 
    - in particolare, è possibile ottenere  $v_1, \dots, v_n$  a partire da  $e_1, \dots, e_n$  tramite rotazioni e riflessioni

### Teorema 114

- **Hp**
  - $n \in \mathbb{N}$
  - $\mathbb{K}$  campo
  - $v \in \mathbb{K}^n$
  - $v_1, \dots, v_k$  base ortonormale di  $\mathbb{K}^n$
- **Th**
  - $v = (v \cdot v_1)v_1 + \dots + (v \cdot v_n)v_n$

### Teorema 115

- **Hp**
  - $n \in \mathbb{N}$
  - $\mathbb{K}$  campo
  - $A \in O(n)$
- **Th**
  - $A_1, \dots, A_n$  e  $A^1, \dots, A^n$  basi ortonormali di  $\mathbb{K}^n$

### Definizione 39

- **Dimensione di uno spazio vettoriale**
  - $\mathbb{K}$  campo
  - $V$  spazio vettoriale su  $\mathbb{K}$
  - $\dim(V)$  è detta **dimensione di  $V$** , ed è la cardinalità delle basi di  $V$

### Teorema 116

- **Hp**
  - $n \in \mathbb{N}$

- $\mathbb{K}$  campo
- $V$  spazio vettoriale su  $\mathbb{K}$
- $v_1, \dots, v_n \in V$
- **Th**
  - $v_1, \dots, v_n$  base di  $V \iff \forall v \in V \quad \exists! \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K} \mid v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$

### Teorema 117

- **Hp**
  - $\mathbb{K}$  campo
  - $W$  spazio vettoriale su  $\mathbb{K}$
  - $n := \dim(W)$
  - $k \in \mathbb{N} \mid k < n$
  - $w_1, \dots, w_k \in W$  linearmente indipendenti
- **Th**
  - $\exists w_{k+1}, \dots, w_n \in W \mid w_1, \dots, w_n$  è una base di  $W$

### Teorema 118

- **Hp**
  - $\mathbb{K}$  campo
  - $W$  spazio vettoriale su  $\mathbb{K}$
  - $n := \dim(W)$
  - $m \in \mathbb{N} \mid m \geq n$
  - $w_1, \dots, w_m \in W \mid w_1, \dots, w_m$  generatori di  $W$
- **Th**
  - $\exists 1 \leq i_1, \dots, i_n \leq m \mid w_{i_1}, \dots, w_{i_n}$  è una base di  $W$

### Teorema 119

- **Hp**
  - $\mathbb{K}$  campo
  - $W$  spazio vettoriale su  $\mathbb{K}$
  - $n := \dim(W)$
  - $w_1, \dots, w_n \in W$
- **Th**
  - $w_1, \dots, w_n$  linearmente indipendenti  $\iff w_1, \dots, w_n$  generatori di  $W$

### Teorema 120

- **Hp**
  - $\mathbb{K}$  campo
  - $W$  spazio vettoriale su  $\mathbb{K}$
  - $U, V \subset W$  sottospazi vettoriali
- **Th**
  - $\dim(U + V) = \dim(U) + \dim(V) - \dim(U \cap V)$

### Teorema 121

- **Hp**



- $\mathbb{K}$  campo
- $V$  spazio vettoriale su  $\mathbb{K}$
- $W \subset V$  sottospazio vettoriale
- **Th**
  - $V/W$  sottospazio vettoriale

### Teorema 122

- **Hp**
  - $\mathbb{K}$  campo
  - $V$  spazio vettoriale su  $\mathbb{K}$
  - $W \subset V$  sottospazio vettoriale
- **Th**
  - $\dim(V/W) = \dim(V) - \dim(W)$

### Teorema 123

- **Hp**
    - $\mathbb{K}$  campo
    - $k \in \mathbb{N}$
    - $V_1, \dots, V_k$  spazi vettoriali su  $\mathbb{K}$
  - **Th**
    - $\dim(V_1 \times \dots \times V_k) = \dim(V_1) \cdot \dots \cdot \dim(V_k)$
- 

## Applicazioni lineari

### Definizione 40

- **Applicazioni lineari**
  - $\mathbb{K}$  campo
  - $V$  e  $W$  spazi vettoriali su  $\mathbb{K}$
  - $f : V \rightarrow W$  **morfismo di spazi vettoriali**  $\iff \forall x, y \in V \quad f(x + y) = f(x) + f(y)$  e  $\forall v \in V, \lambda \in \mathbb{K} \quad f(\lambda v) = \lambda f(v)$ 
    - un morfismo su spazi vettoriali è detto anche **applicazione lineare** o **trasformazione lineare**

### Teorema 124

- **Hp**
  - $\mathbb{K}$  campo
  - $V$  spazio vettoriale su  $\mathbb{K}$
  - $n := \dim(V)$
- **Th**
  - $V \cong \mathbb{K}^n$

### Teorema 125

- **!!! QUI C'È UN BUCO DI COSE CHE NON HO CAPITO**

### Teorema 126

- **Hp**
  - $\mathbb{K}$  campo
  - $V, W$  spazi vettoriali su  $\mathbb{K}$
- **Th**
  - $V \cong W \iff \dim(V) = \dim(W)$

### Definizione 41

- **Kernel e immagine**
  - $\mathbb{K}$  campo
  - $V, W$  spazi vettoriali su  $\mathbb{K}$
  - $f : V \rightarrow W$  trasformazione lineare
  - $\ker(f) = \{v \in V \mid f(v) = 0_W\}$
  - $\text{im}(f) = \{w \in W \mid \exists v \in V : w = f(v)\}$

### Teorema 127

- **Hp**
  - $\mathbb{K}$  campo
  - $V, W$  spazi vettoriali su  $\mathbb{K}$
  - $f : V \rightarrow W$  trasformazione lineare
- **Th**
  - $\ker(f) \subset V$  sottospazio

### Teorema 128

- **Hp**
  - $\mathbb{K}$  campo
  - $V, W$  spazi vettoriali su  $\mathbb{K}$
  - $f : V \rightarrow W$  trasformazione lineare
- **Th**
  - $\text{im}(f) \subset W$  sottospazio

### Definizione 42

- **Rango di un'applicazione lineare**
    - $\mathbb{K}$  campo
    - $V$  e  $W$  spazi vettoriali su  $\mathbb{K}$
    - $f : V \rightarrow W$  applicazione lineare
    - $\text{rk}(f) := \dim(\text{im}(f))$  è detto **rango di  $f$**
- 

## Sottospazi affini

### Teorema 129

- !!! TODO

---

### Teorema 130

- **Hp**
    - $\mathbb{K}$  campo
    - $m, n \in \mathbb{N} - \{0\}$
    - $A \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{K})$
    - $b \in \text{Mat}_{m \times 1}(\mathbb{K})$
    - $X := \{x \in \text{Mat}_{n \times 1}(\mathbb{K}) \mid A \cdot x = b\}$
    - $X \neq \emptyset$
  - **Th**
    - $X$  sottospazio affine di  $\mathbb{K}^n$ , con dimensione pari a  $n - \text{rk}(A)$
- 

## Matrici

### Definizione 43

- **Matrici**
  - $\mathbb{K}$  campo
  - $m, n \in \mathbb{N} - \{0\}$
  - $\text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{K})$  è l'insieme delle matrici aventi  $m$  righe e  $n$  colonne a coefficienti in  $\mathbb{K}$
- **Vettori riga e vettori colonna**
  - $\mathbb{K}$  campo
  - $m, n \in \mathbb{N} - \{0\}$
  - $\forall A \in \text{Mat}_{1 \times n}(\mathbb{K}) \quad A = (x_1, \dots, x_n)$  è detto **vettore riga**
  - $\forall A \in \text{Mat}_{m \times 1}(\mathbb{K}) \quad A = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$  è detto **vettore colonna**
  - $\forall A \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{K}) \quad \exists A^1, \dots, A^n \in \mathbb{K}^m$  vettori colonna e  $A_1, \dots, A_m \in \mathbb{K}^n$  vettori riga  $\mid A = (A^1, \dots, A^n) = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix}$

### Definizione 44

- **Somma tra matrici**
  - $\mathbb{K}$  campo
  - $m, n \in \mathbb{N} - \{0\}$
  - $\forall i \in [1, m], j \in [1, n] \quad a_{i,j}, b_{i,j} \in \mathbb{K}$
  - $A, B \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{K}) \mid A = \begin{pmatrix} \ddots & & \\ & a_{i,j} & \\ & & \ddots \end{pmatrix} \wedge B = \begin{pmatrix} \ddots & & \\ & b_{i,j} & \\ & & \ddots \end{pmatrix}$

- $A + B = \begin{pmatrix} \ddots & & \\ & a_{i,j} + b_{i,j} & \\ & & \ddots \end{pmatrix}$  è la **somma tra A e B**

### Teorema 131

- **Hp**
  - $\mathbb{K}$  campo
  - $m, n \in \mathbb{N} - \{0\}$
- **Th**
  - $\text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{K})$  è uno spazio vettoriale

### Definizione 45

- **Prodotto tra matrici**
  - $\mathbb{K}$  campo
  - $l, m, n \in \mathbb{N} - \{0\}$
  - $A \in \text{Mat}_{l \times m}(\mathbb{K}) \mid A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{l,1} & \cdots & a_{l,m} \end{pmatrix}$
  - $B \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{K}) \mid B = \begin{pmatrix} b_{1,1} & \cdots & b_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m,1} & \cdots & b_{m,n} \end{pmatrix}$
  - $C \in \text{Mat}_{l \times n}(\mathbb{K}) \mid C = AB$  è il **prodotto tra A e B**, ed è definito come
 
$$\begin{pmatrix} a_{1,1}b_{1,1} + \dots + a_{1,m}b_{m,1} & \cdots & a_{1,1}b_{1,n} + \dots + a_{1,m}b_{m,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{l,1}b_{1,1} + \dots + a_{l,m}b_{m,1} & \cdots & a_{l,1}b_{1,n} + \dots + a_{l,m}b_{m,n} \end{pmatrix}$$

### Teorema 132

- **Hp**
  - $\mathbb{K}$  campo
  - $\lambda \in \mathbb{K}$
  - $l, m, n, k \in \mathbb{N} - \{0\}$
  - $A \in \text{Mat}_{l \times m}(\mathbb{K})$
  - $B \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{K})$
- **Th**
  - **!!! TODO**
  - $\forall C \in \text{Mat}_{n \times k}(\mathbb{K}) \quad (AB)C = A(BC)$
  - $\forall C \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{K}) \quad A(B + C) = AB + AC$
  - $\forall C \in \text{Mat}_{n \times k}(\mathbb{K}) \quad (A + B)C = AC + BC$
  - $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$

### Teorema 133

- **Hp**
  - $\mathbb{K}$  campo

- $\lambda \in \mathbb{K}$
  - $n \in \mathbb{N} - \{0\}$
  - **Th**
    - $(\text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K}), +, \cdot)$  è un anello
- 

## Interpretazione geometrica dei vettori

### Definizione 46

- **Prodotto scalare**
  - $\mathbb{K}$  campo
  - $n \in \mathbb{N} - \{0\}$
  - $u, v \in \mathbb{K}^n \mid u = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$
  - $u \cdot v := \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i$  è il **prodotto scalare** tra  $u$  e  $v$

### Teorema 134

- **Hp**
  - $n \in \mathbb{N} - \{0\}$
  - $u, v \in \mathbb{K}^n$
- **Th**
  - $u \cdot v = v \cdot u$
  - $\forall w \in \mathbb{K}^n \quad u \cdot (v + w) = u \cdot v + u \cdot w$
  - $u \cdot (\lambda v) = \lambda(u \cdot v)$

### Definizione 47

- **Norma di un vettore**
  - $\mathbb{K}$  campo
  - $n \in \mathbb{N} - \{0\}$
  - $u \in \mathbb{K}^n \mid u = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$
  - $\|u\| := \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$  è detta **norma di  $u$** 
    - graficamente, corrisponde alla lunghezza del vettore  $u$  nel piano cartesiano

### Teorema 135

- **Hp**
  - $\mathbb{K}$  campo
  - $n \in \mathbb{N} - \{0\}$

- $u \in \mathbb{K}^n \mid u = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$
  - **Th**
    - $\|u\| = \sqrt{u \cdot u}$
- 

## Matrici particolari

### Definizione 48

- **Vettore trasposto**
  - $\mathbb{K}$  campo
  - $n \in \mathbb{N}$
  - $v \in \text{Mat}_{n \times 1}(\mathbb{K}) \mid \exists x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K} : v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$
  - $v^T = (x_1, \dots, x_n)$  è il **vettore trasposto di**  $v$ 
    - vicendevolmente, se  $v$  è un vettore riga, il suo trasposto sarà il corrispondente vettore colonna
- **Matrice trasposta**
  - $m, n \in \mathbb{N} - \{0\}$
  - $\mathbb{K}$  campo
  - $A \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{K}) \mid A = (A^1, \dots, A^n)$
  - $A^T = \begin{pmatrix} A^{1T} \\ \vdots \\ A^{nT} \end{pmatrix}$  è la **matrice trasposta di**  $A$ 
    - vale il ragionamento analogo considerando le righe di  $A$  al posto delle colonne
- **Matrice simmetrica**
  - $n \in \mathbb{N} - \{0\}$
  - $\mathbb{K}$  campo
  - $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K})$
  - $A$  è detta **simmetrica**  $\iff A^T = A$

### Teorema 136

- **Hp**
  - $m, n \in \mathbb{N} - \{0\}$
  - $\mathbb{K}$  campo
  - $A \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{K})$
  - $B \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{K})$
- **Th**
  - $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$

### Definizione 49

- **Matrice identità**

- $\mathbb{K}$  campo
- $n \in \mathbb{N} - \{0\}$

- $I_n = \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} = (e_1^T, \dots, e_n^T) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$  è detta **matrice**

**identità**

- **Matrice invertibile**

- $\mathbb{K}$  campo
- $n \in \mathbb{N} - \{0\}$
- $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K})$
- $A$  **invertibile**  $\iff \exists A^{-1} \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K}) \mid A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$

- **Gruppo Generale Lineare**

- $\mathbb{K}$  campo
- $n \in \mathbb{N} - \{0\}$
- $\text{GL}(n, \mathbb{K}) := \{A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K}) \mid A \text{ invertibile}\}$  è detto **gruppo speciale lineare invertibile**

### Teorema 137

- **Hp**

- $\mathbb{K}$  campo
- $n \in \mathbb{N} - \{0\}$

- **Th**

- $(\text{GL}(n, \mathbb{K}), \cdot)$  è un gruppo

### Teorema 138

- **Hp**

- $\mathbb{K}$  campo
- $n \in \mathbb{N} - \{0\}$
- $f : \text{GL}(n, \mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}^*$

- **Th**

- $f$  morfismo di gruppi

### Definizione 50

- **Matrice ortogonale**

- $\mathbb{K}$  campo
- $n \in \mathbb{N} - \{0\}$
- $A \in \text{GL}(n, \mathbb{K})$
- $A$  è detta **ortogonale**  $\iff A \cdot A^T = A^T \cdot A = I_n$

– in particolare  $A^{-1} = A^T$

- **Gruppo ortogonale**

- $\mathbb{K}$  campo
- $n \in \mathbb{N} - \{0\}$
- $A \in \text{GL}(n, \mathbb{K})$
- $O(n) := \{A \in \text{GL}(n, \mathbb{K}) \mid A \text{ ortogonale}\}$  è detto **gruppo ortogonale**

### Definizione 51

- **Gruppo Speciale Lineare**

- $\mathbb{K}$  campo
- $n \in \mathbb{N} - \{0\}$
- $\text{SL}(n, \mathbb{K}) := \{A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K}) \mid \det(A) = 1\}$  è detto **gruppo generale lineare invertibile**

### Definizione 52

- **Matrici simili**

- $\mathbb{K}$  campo
- $n \in \mathbb{N} - \{0\}$
- $A, B \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K})$
- $A$  **simile a**  $B \iff \exists C \in \text{GL}(n, \mathbb{K}) \mid A = C^{-1}BC$

### Definizione 53

- **Traccia**

- $\mathbb{K}$  campo
- $n \in \mathbb{N} - \{0\}$
- $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K})$
- $\text{tr}(A) := a_{1,1} + \dots + a_{n,n}$  è detta **traccia di**  $A$

### Teorema 139

- **Hp**

- $\mathbb{K}$  campo
- $n \in \mathbb{N} - \{0\}$
- $A, B \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K}) \mid A$  simile a  $B$

- **Th**

- $\text{tr}(A) = \text{tr}(B)$

### Definizione 54

- **Matrice triangolare superiore**

- $\mathbb{K}$  campo
- $n \in \mathbb{N} - \{0\}$
- $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K})$
- $A$  è detta **triangolare superiore**  $\iff \forall i, j \in [1, n], i > j \quad a_{i,j} = 0$



- **Matrice triangolare inferiore**
  - $\mathbb{K}$  campo
  - $n \in \mathbb{N} - \{0\}$
  - $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K})$
  - $A$  è detta **triangolare inferiore**  $\iff \forall i, j \in [1, n], i < j \quad a_{i,j} = 0$
- **Matrice triangolare**
  - $\mathbb{K}$  campo
  - $n \in \mathbb{N} - \{0\}$
  - $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K})$
  - $A$  è detta **triangolare**  $\iff A$  triangolare superiore o triangolare inferiore
- **Matrice triangolarizzabile**
  - $\mathbb{K}$  campo
  - $n \in \mathbb{N} - \{0\}$
  - $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K})$
  - $A$  è detta **triangolarizzabile**  $\iff \exists B \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K}) \mid B$  triangolare  $\wedge B$  simile ad  $A$
- **Matrice diagonale**
  - $\mathbb{K}$  campo
  - $n \in \mathbb{N} - \{0\}$
  - $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K})$
  - $A$  è detta **diagonale**  $\iff \forall i, j \in [1, n], i \neq j \quad a_{i,j} = 0$   
– in particolare,  $A$  è diagonale  $\iff A$  triangolare superiore ed inferiore
- **Matrice diagonalizzabile**
  - $\mathbb{K}$  campo
  - $n \in \mathbb{N} - \{0\}$
  - $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K})$
  - $A$  è detta **diagonalizzabile**  $\iff \exists B \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K}) \mid B$  diagonale  $\wedge B$  simile ad  $A$

## Teorema 140

- **Hp**
  - $\mathbb{K}$  campo
  - $n \in \mathbb{N} - \{0\}$
  - $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K}) \mid A$  diagonalizzabile
- **Th**
  - $A$  triangolarizzabile

## Definizione 55

- **Sottomatrice di una matrice**
  - $\mathbb{K}$  campo
  - $m, n \in \mathbb{N} - \{0\}$
  - $A \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{K})$

- $A_i^j$  è una **sottomatrice di**  $A \iff A_i^j$  si ottiene rimuovendo  $A_i$  e  $A^j$  da  $A$
- **Minore di una matrice**
  - $\mathbb{K}$  campo
  - $m, n \in \mathbb{N} - \{0\}$
  - $A \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{K})$
  - $M$  è un **minore di**  $A \iff M$  è una sottomatrice quadrata di  $A$
- **Orlato di un minore**
  - $\mathbb{K}$  campo
  - $m, n, r \in \mathbb{N} - \{0\} \mid r < m \wedge r < n$
  - $A \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{K})$
  - $M \in \text{Mat}_{r \times r}(\mathbb{K})$  è un minore di  $A$
  - $M' \in \text{Mat}_{(r+1) \times (r+1)}(\mathbb{K})$  è un **orlato di**  $M \iff M'$  è un minore di  $A$  e  $M$  si ottiene rimuovendo una riga e una colonna da  $M'$

### Teorema 141

- **Hp**
  - $\mathbb{K}$  campo
  - $m, n, r \in \mathbb{N} - \{0\} \mid r < m \wedge r < n$
  - $A \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{K})$
  - $M \in \text{Mat}_{r \times r}(\mathbb{K})$  è un minore di  $A$
- **Th**
  - $M$  ha  $(m - r) \cdot (n - r)$  orlati in  $A$

### Definizione 56

- **Matrice completa**
  - $\mathbb{K}$  campo
  - $m, n \in \mathbb{N} - \{0\}$
  - $A \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{K})$
  - $b \in \text{Mat}_{m \times 1}(\mathbb{K})$
  - $A_b := \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} & b_m \end{pmatrix}$

### Definizione 57

- **Matrice di un'applicazione lineare**
  - $\mathbb{K}$  campo
  - $m, n \in \mathbb{N} - \{0\}$
  - $V, W$  spazi vettoriali su  $\mathbb{K}$
  - $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$  base di  $V$
  - $\mathcal{C} = \{w_1, \dots, w_m\}$  base di  $W$
  - $f : V \rightarrow W$  isomorfismo
  - $\varphi_{\mathcal{B}} : \mathbb{K}^n \rightarrow V$  isomorfismo
  - $\varphi_{\mathcal{C}} : \mathbb{K}^m \rightarrow W$  isomorfismo

- $A \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{K}) \mid f = \varphi_C \cdot L_A \cdot \varphi_B^{-1}$  è detta **matrice di  $f$**   
 – è possibile dimostrare che  $\forall f$  applicazione lineare  $\exists! A \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{K})$
- 

## Rango

### Definizione 58

- **Sottospazio ortogonale**
  - $\mathbb{K}$  campo
  - $n \in \mathbb{N} - \{0\}$
  - $V \subset \mathbb{K}^n$  sottospazio vettoriale
  - $V^\perp := \{w \in \mathbb{K}^n \mid \forall v \in V \quad w \cdot v = 0_{\mathbb{K}^n}\}$  è detto **sottospazio ortogonale di  $\mathbb{K}^n$**   
 – la definizione ha significato poiché il prodotto scalare tra due vettori è nullo esattamente quando i due vettori sono perpendicolari tra loro, per osservazione precedente

### Teorema 142

- **Hp**
  - $\mathbb{K}$  campo
  - $n \in \mathbb{N} - \{0\}$
  - $V \subset \mathbb{K}^n$  sottospazio vettoriale
- **Th**
  - $V^\perp$  è sottospazio vettoriale di  $\mathbb{K}^n$

### Teorema 143

- **Hp**
  - $\mathbb{K}$  campo
  - $n \in \mathbb{N} - \{0\}$
  - $V \subset \mathbb{K}^n$  sottospazio vettoriale
- **Th**
  - $\dim(V^\perp) = \dim(\mathbb{K}^n) - \dim(V)$

### Definizione 59

- **Moltiplicazione sinistra**
  - $\mathbb{K}$  campo
  - $m, n \in \mathbb{N} - \{0\}$
  - $A \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{K})$
  - $L_A : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m : x \rightarrow A \cdot x$  è detta **moltiplicazione sinistra di  $A$**

### Teorema 144

- **Hp**
  - $\mathbb{K}$  campo
  - $m, n \in \mathbb{N} - \{0\}$

- $A \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{K})$
- **Th**
  - $L_A$  è una trasformazione lineare

### Teorema 145

- **Hp**
  - $\mathbb{K}$  campo
  - $m, n \in \mathbb{N} - \{0\}$
  - $A \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{K})$
- **Th**
  - $\ker(L_A) = \text{span}(A_1, \dots, A_m)^\perp$
  - $\text{im}(L_A) = \text{span}(A^1, \dots, A^n)$

### Definizione 60

- **Rango di una matrice**
  - $\mathbb{K}$  campo
  - $m, n \in \mathbb{N} - \{0\}$
  - $A \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{K})$
  - $\text{rk}(A) := \text{rk}(L_A)$  è il **rango di  $A$**

### Teorema 146

- **Hp**
    - $\mathbb{K}$  campo
    - $m, n \in \mathbb{N} - \{0\}$
    - $A \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{K})$
  - **Th**
    - $\text{rk}(A) = \dim(\text{span}(A^1, \dots, A^n)) = \dim(\text{span}(A_1, \dots, A_m))$
- 

## Operazioni su righe e colonne

### Definizione 61

- **Scambio di righe di una matrice**
  - $\mathbb{K}$  campo
  - $m, n \in \mathbb{N} - \{0\}$
  - $A \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{K})$
  - $\forall A_1, \dots, A_m$  righe di  $A$ , scambiare  $A_i$  e  $A_j$  lascia invariato  $\ker(L_A)$
- **Moltiplicazione di una riga per una costante**
  - $\mathbb{K}$  campo
  - $m, n \in \mathbb{N} - \{0\}$
  - $A \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{K})$
  - $\lambda \in \mathbb{K}^*$
  - $\forall A_1, \dots, A_m$  righe di  $A$ , moltiplicare  $A_i$  per  $\lambda$  lascia invariato  $\ker(L_A)$

- **Somma di una riga con un multiplo di un'altra**
  - $\mathbb{K}$  campo
  - $m, n \in \mathbb{N} - \{0\}$
  - $A \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{K})$
  - $\lambda \in \mathbb{K}^*$
  - $\forall A_1, \dots, A_m$  righe di  $A$ , sommare ad  $A_i$  un certo  $\lambda \cdot A_j$  lascia invariato  $\ker(L_A)$
- **Scambio di colonne di una matrice**
  - $\mathbb{K}$  campo
  - $m, n \in \mathbb{N} - \{0\}$
  - $A \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{K})$
  - $\forall A^1, \dots, A^m$  colonne di  $A$ , scambiare  $A^i$  e  $A^j$  lascia invariato  $\text{im}(L_A)$
- **Moltiplicazione di una colonna per una costante**
  - $\mathbb{K}$  campo
  - $m, n \in \mathbb{N} - \{0\}$
  - $A \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{K})$
  - $\lambda \in \mathbb{K}^*$
  - $\forall A^1, \dots, A^m$  colonne di  $A$ , moltiplicare  $A^i$  per  $\lambda$  lascia invariato  $\text{im}(L_A)$
- **Somma di una colonna con un multiplo di un'altra**
  - $\mathbb{K}$  campo
  - $m, n \in \mathbb{N} - \{0\}$
  - $A \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{K})$
  - $\lambda \in \mathbb{K}^*$
  - $\forall A^1, \dots, A^m$  righe di  $A$ , sommare ad  $A^i$  un certo  $\lambda \cdot A^j$  lascia invariato  $\text{im}(L_A)$

### Teorema 147

- **Hp**
  - $\mathbb{K}$  campo
  - $m, n \in \mathbb{N} - \{0\}$
  - $A, B \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{K})$
  - $A \equiv B \iff$  è possibile ricavare  $B$  da  $A$  eseguendo operazioni *tra righe* definite precedentemente
- **Th**
  - $\equiv$  una relazione di equivalenza

### Teorema 148

- **Hp**
  - $\mathbb{K}$  campo
  - $m, n \in \mathbb{N} - \{0\}$
  - $A, B \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{K})$
  - $A \equiv B \iff$  è possibile ricavare  $B$  da  $A$  eseguendo operazioni *tra righe* definite precedentemente
- **Th**
  - $A \equiv B \implies \ker(L_A) = \ker(L_B) \wedge \text{rk}(A) = \text{rk}(B)$

## Teorema 149

- **Hp**
  - $\mathbb{K}$  campo
  - $m, n \in \mathbb{N} - \{0\}$
  - $A, B \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{K})$
  - $A \equiv B \iff$  è possibile ricavare  $B$  da  $A$  eseguendo operazioni *tra colonne* definite precedentemente
- **Th**
  - $\equiv$  una relazione di equivalenza

## Teorema 150

- **Hp**
    - $\mathbb{K}$  campo
    - $m, n \in \mathbb{N} - \{0\}$
    - $A, B \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{K})$
    - $A \equiv B \iff$  è possibile ricavare  $B$  da  $A$  eseguendo operazioni *tra colonne* definite precedentemente
  - **Th**
    - $A \equiv B \implies \text{im}(L_A) = \text{im}(L_B) \wedge \text{rk}(A) = \text{rk}(B)$
- 

## Determinante

### Definizione 62

- **Applicazione multilineare**
  - $\mathbb{K}$  campo
  - $k \in \mathbb{N}$
  - $V_1, \dots, V_k, W$  spazi vettoriali
  - $f : V_1 \times \dots \times V_k \rightarrow W : (v_1, \dots, v_k) \rightarrow w$
  - $f$  **multilineare**  $\iff \forall i \in [1, k], \forall v_1 \in V_1, \dots, v'_i, v''_i \in V_i, \dots, v_k \in V_k, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$   
 $f(v_1, \dots, \lambda v'_i + \mu v''_i, \dots, v_k) = \lambda f(v_1, \dots, v'_i, \dots, v_k) + \mu f(v_1, \dots, v''_i, \dots, v_k)$
- **Determinante**
  - $\mathbb{K}$  campo
  - $n \in \mathbb{N} - \{0\}$
  - $\det : \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ 
    - 1.  $\forall A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K})$   $\det$  multilineare su  $A_1, \dots, A_n$  e  $A^1, \dots, A^n$
    - 2.  $\forall A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K})$   $A_1, \dots, A_n$  e  $A^1, \dots, A^n$  basi di  $\mathbb{K}^n \iff \det(A) \neq 0$
    - 3.  $\det(I_n) = 1$
    - 4. per  $\mathbb{K} \mid 1 \neq -1$  scambiando due righe o due colonne  $\det(A)$  cambia segno
  - $\det$  è il **determinante**  $\iff \det$  verifica 1, 2 e 3, oppure 1, 3 e 4

- poiché è possibile dimostrare che la funzione che verifica tali condizioni esiste ed è unica, allora il  $\det$  è totalmente determinato da tali caratteristiche

### Teorema 151

- **Hp**
  - $\mathbb{K}$  campo |  $1 \neq -1$
  - $n \in \mathbb{N} - \{0\}$
  - $f : \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$
  - 4. **!!! SCRIVI**
- **Th**
  - **!!! DETERMINANTE ALTERNANTE**

### Definizione 63

- **Matrice singolare**
  - $\mathbb{K}$  campo
  - $n \in \mathbb{N} - \{0\}$
  - $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K})$
  - $A$  è detta **singolare**  $\iff \det(A) = 0$

### Teorema 152

- **Hp**
  - $\mathbb{K}$  campo
  - $n \in \mathbb{N} - \{0\}$
  - $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K})$
  - 1.  $A$  invertibile
  - 2.  $\text{rk}(A) = n$
  - 3.  $A_1, \dots, A_n$  base di  $\mathbb{K}^n$
  - 4.  $A^1, \dots, A^n$  base di  $\mathbb{K}^n$
  - 5.  $\det(A) \neq 0$
  - 6.  $A \equiv I_n$  tramite la relazione di equivalenza delle operazioni sulle righe
  - 7.  $A \equiv I_n$  tramite la relazione di equivalenza delle operazioni sulle colonne
- **Th**
  - le proposizioni sono equivalenti

### Teorema 153

- **Hp**
  - $\mathbb{K}$  campo
  - $n \in \mathbb{N} - \{0\}$
  - $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K})$  |  $\exists i \in [1, n] : A_i = 0_{\mathbb{K}^n} \vee \exists j \in [1, n] : A^j = 0_{\mathbb{K}^n}$ , ovvero in  $A$  è presente o una riga, o una colonna nulla
- **Th**
  - $\det(A) = 0$

### Teorema 154

- **Hp**
  - $\mathbb{K}$  campo
  - $n \in \mathbb{N} - \{0\}$
  - $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K})$
- **Th**
  - $\det(A) = \det(A^T)$

### Teorema 155

- **Hp**
  - $\mathbb{K}$  campo
  - $n \in \mathbb{N} - \{0\}$
  - $A, B \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K}) \mid A$  simile a  $B$
- **Th**
  - $\det(A) = \det(B)$

### Teorema 156

- **Hp**
  - $\mathbb{K}$  campo
  - $n \in \mathbb{N} - \{0\}$
  - $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K})$
- **Th**
  - $\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \cdot \prod_{i=1}^n a_{i, \sigma_i}$

### Teorema 157

- **Hp**
  - $\mathbb{K}$  campo
  - $A \in \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{K})$
  - $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$
- **Th**
  - $\det(A) = a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1}$

### Teorema 158

- **Hp**
  - $\mathbb{K}$  campo
  - $A \in \text{Mat}_{3 \times 3}(\mathbb{K})$
  - $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}$
- **Th**
  - $\det(A) = a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} + a_{1,3}a_{2,1}a_{3,2} + a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1} - a_{1,3}a_{2,2}a_{3,1} - a_{1,1}a_{2,3}a_{3,2} - a_{1,2}a_{2,1}a_{3,3}$



### Teorema 159

- **Hp**
  - $\mathbb{K}$  campo
  - $n \in \mathbb{N} - \{0\}$
  - $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K}) \mid A$  triangolare
- **Th**
  - $\det(A) = a_{1,1} \cdot \dots \cdot a_{n,n}$

### Teorema 160

- **Hp**
  - $\mathbb{K}$  campo
  - $n \in \mathbb{N} - \{0\}$
  - $\lambda \in \mathbb{K}$
  - $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K})$
- $A' = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ \lambda A_i \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix}$
- **Th**
  - $\det(A') = \lambda \cdot \det(A)$

### Teorema 161

- **Hp**
  - $\mathbb{K}$  campo
  - $n \in \mathbb{N} - \{0\}$
  - $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K})$
- **Th**
  - $\forall 1 \leq i, j \leq n \quad \det(A) = \sum_{k=1}^n (-1)^{i+k} \cdot a_{i,k} \cdot \det(A_i^k) = \sum_{h=1}^n (-1)^{h+j} \cdot a_{h,j} \cdot \det(A_h^j)$

### Definizione 64

- **Aggiunta di una matrice**
  - $\mathbb{K}$  campo
  - $n \in \mathbb{N} - \{0\}$
  - $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K})$
  - $A^*$  è detta **aggiunta di**  $A \iff \forall i, j \in [1, n] \quad a_{i,j}^* = (-1)^{i+j} \cdot \det(A_i^j)$

### Teorema 162

- **Hp**
  - $\mathbb{K}$  campo
  - $n \in \mathbb{N} - \{0\}$
  - $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K}) \mid \det(A) \neq 0$

- **Th**
  - $A^{-1} = \frac{(A^*)^T}{\det(A)}$

### Teorema 163

- **Hp**
    - $\mathbb{K}$  campo
    - $A \in \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{K}) \mid \det(A) \neq 0$
    - $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$
  - **Th**
    - $A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$
- 

## Polinomio caratteristico

### Definizione 65

- $\mathbb{K}$  campo
- $n \in \mathbb{N} - \{0\}$
- $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K})$
- $p_A(x) := \det(x \cdot I_n - A)$  è detto **polinomio caratteristico di A**

### Teorema 164

- **Hp**
  - $\mathbb{K}$  campo
  - $n \in \mathbb{N} - \{0\}$
  - $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K})$
- **Th**
  - $p_A(x) = x^n - \text{tr}(A) \cdot x^{n-1} + \dots + (-1)^n \cdot \det(A)$

### Teorema 165

- **Hp**
  - $\mathbb{K}$  campo
  - $n \in \mathbb{N} - \{0\}$
  - $A, B \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K}) \mid A$  simile a  $B$
- **Th**
  - $p_A(x) = p_B(x)$

### Definizione 66

- **Autovalore**
  - $\mathbb{K}$  campo
  - $n \in \mathbb{N} - \{0\}$
  - $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K})$

- $\lambda \in \mathbb{K} \mid p_A(\lambda) = 0$  è detto **autovalore di  $A$**
- **Spettro**
  - $\mathbb{K}$  campo
  - $n \in \mathbb{N} - \{0\}$
  - $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K})$
  - $\text{sp}(A) := \{\lambda \in \mathbb{K} \mid p_A(\lambda) = 0\}$  è detto **spettro di  $A$**

### Teorema 166

- **Hp**
  - $\mathbb{K}$  campo
  - $n \in \mathbb{N} - \{0\}$
  - $A, B \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K}) \mid A$  simile a  $B$
- **Th**
  - $\text{sp}(A) = \text{sp}(B)$

### Teorema 167

- **Hp**
  - $\mathbb{K}$  campo
  - $n \in \mathbb{N} - \{0\}$
  - $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K})$
  - $\lambda \in \mathbb{K}$
- **Th**
  - $\lambda$  autovalore  $\iff \exists v \in \mathbb{K}^n - \{0\} \mid A \cdot v = \lambda \cdot v$

### Definizione 67

- **Autovettore relativo ad un autovalore**
  - $\mathbb{K}$  campo
  - $n \in \mathbb{N} - \{0\}$
  - $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K})$
  - $\lambda \in \text{sp}(A)$
  - $v \in \mathbb{K}^n - \{0\}$  è detto **autovettore di  $A$  relativo a  $\lambda$**   $\iff (A - \lambda \cdot I_n) \cdot v = 0$

### Teorema 168

- **Hp**
  - $\mathbb{K}$  campo
  - $n \in \mathbb{N} - \{0\}$
  - $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K})$
  - $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \text{sp}(A)$
  - $v_1, \dots, v_k$  autovettori di  $A$  relativi rispettivamente a  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$
- **Th**
  - $v_1, \dots, v_k$  linearmente indipendenti

### Definizione 68

- **Autospazio relativo ad un autovalore**
  - $\mathbb{K}$  campo
  - $n \in \mathbb{N} - \{0\}$
  - $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K})$
  - $\lambda \in \text{sp}(A)$
  - $E_\lambda(A) := \{v \in \mathbb{K}^n \mid (A - \lambda \cdot I_n) \cdot v = 0\}$  è detto **autospazio di  $A$  relativo a  $\lambda$** 
    - in particolare  $0_{\mathbb{K}^n} \in E_\lambda(A)$

### Teorema 169

- **Hp**
  - $\mathbb{K}$  campo
  - $n \in \mathbb{N} - \{0\}$
  - $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K})$
  - $\lambda \in \text{sp}(A)$
- **Th**
  - $E_\lambda(A) \subset \mathbb{K}$  sottospazio vettoriale

### Definizione 69

- **Molteplicità algebrica di un autovalore**
  - $\mathbb{K}$  campo
  - $n \in \mathbb{N} - \{0\}$
  - $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K})$
  - $\lambda \in \text{sp}(A)$
  - $\mu(\lambda) := \max(\{\varepsilon \in \mathbb{N} : (x - \lambda)^\varepsilon \mid p_A(x)\})$  è detta **molteplicità algebrica di  $\lambda$**

### Teorema 170

- **Hp**
  - $\mathbb{K}$  campo
  - $n \in \mathbb{N} - \{0\}$
  - $A, B \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K}) \mid A$  simile a  $B$
  - $\lambda \in \text{sp}(A) = \text{sp}(B)$
- **Th**
  - $\mu_A(\lambda) = \mu_B(\lambda)$

### Definizione 70

- **Molteplicità geometrica di un autovalore**
  - $\mathbb{K}$  campo
  - $n \in \mathbb{N} - \{0\}$
  - $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K})$
  - $\lambda \in \text{sp}(A)$
  - $\nu(\lambda) := \dim(E_\lambda(A))$  è detta **molteplicità geometrica di  $\lambda$**

### Teorema 171

- **Hp**
  - $\mathbb{K}$  campo
  - $n \in \mathbb{N} - \{0\}$
  - $A, B \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K}) \mid A$  simile a  $B$
  - $\lambda \in \text{sp}(A) = \text{sp}(B)$
- **Th**
  - $\nu_A(\lambda) = \nu_B(\lambda)$

### Teorema 172

- **Hp**
  - $\mathbb{K}$  campo
  - $n \in \mathbb{N} - \{0\}$
  - $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K})$
  - $\lambda \in \text{sp}(A)$
- **Th**
  - $\nu(\lambda) = n - \text{rk}(A - \lambda \cdot I_n)$

### Teorema 173

- **Hp**
  - $\mathbb{K}$  campo
  - $n \in \mathbb{N} - \{0\}$
  - $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K})$
  - $\lambda \in \text{sp}(A)$
- **Th**
  - $\nu(\lambda) \leq \mu(\lambda)$

### Teorema 174

- **Hp**
  - $\mathbb{K}$  campo
  - $n \in \mathbb{N} - \{0\}$
  - $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K})$
  - 1.  $A$  triangolarizzabile
  - 2.  $\sum_{\lambda \in \text{sp}(A)} \mu(\lambda) = n$
  - 3.  $p_A(x) = \prod_{\lambda \in \text{sp}(A)} (x - \lambda)^{\mu(\lambda)}$ , ovvero  $p_A(x)$  è completamente fattorizzabile
- **Th**
  - le proposizioni sono equivalenti

### Teorema 175

- **Hp**
  - $n \in \mathbb{N} - \{0\}$
  - $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{C})$
- **Th**

- $A$  è triangolarizzabile

### Teorema 176

- **Hp**
  - $n \in \mathbb{N} - \{0\}$
  - $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$
- **Th**
  - $A$  triangolarizzabile  $\iff \forall \lambda \in \text{sp}(A) \quad \lambda \in \mathbb{R}$

### Teorema 177

- **Hp**
  - $\mathbb{K}$  campo
  - $n \in \mathbb{N} - \{0\}$
  - $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K})$
- 1.  $A$  diagonalizzabile
- 2.  $\sum_{\lambda \in \text{sp}(A)} \nu(\lambda) = n$
- 3.  $\exists B^1, \dots, B^n$  autovettori di  $A \mid B^1, \dots, B^n$  base di  $\mathbb{K}^n$
- **Th**
  - le proposizioni sono equivalenti

### Teorema 178

- **Hp**
    - $\mathbb{K}$  campo
    - $n \in \mathbb{N} - \{0\}$
    - $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K})$
    - $B^1, \dots, B^n$  autovettori di  $A \mid B = (B^1, \dots, B^n) \in \text{GL}(n, \mathbb{K}) \wedge B^1, \dots, B^n$  base di  $\mathbb{K}^n$
  - **Th**
    - $A$  diagonalizzabile
- 

## Numeri complessi

### Definizione 71

- **Insieme dei complessi**
  - $\mathbb{C} := \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}, i : i^2 = -1\}$  è l'insieme dei complessi
  - $\forall z \in \mathbb{C} \quad \begin{cases} a := \text{Re}(z) \\ b := \text{Im}(z) \end{cases}$

### Teorema 179

- **Hp**
  - $a, b, c, d \in \mathbb{R}$
  - $z \in \mathbb{C} \mid z = a + ib$

- $w \in \mathbb{C} \mid w = c + id$
- **Th**
  - $z + w = (a + b) + i(c + d)$
  - $z \cdot w = (ac - bd) + i(ad + bc)$

## Definizione 72

- **Coniugato**
  - $a, b \in \mathbb{R}$
  - $z \in \mathbb{C} \mid z = a + ib$
  - $\bar{z} := a - ib$  è il **coniugato** di  $z$

## Teorema 180

- **Hp**
  - $a, b, c, d, \in \mathbb{R}$
  - $z \in \mathbb{C} \mid z = a + ib$
  - $w \in \mathbb{C} \mid w = c + id$
- **Th**
  - $\bar{z} + \bar{w} = \overline{z + w}$
  - $\bar{z} \cdot \bar{w} = \overline{z \cdot w}$

## Teorema 181

- **Hp**
  - $0 \leq \theta < 2\pi$
- **Th**
  - $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$

## Definizione 73

- **Raggio**
  - $a, b \in \mathbb{R}$
  - $z \in \mathbb{C} \mid z = a + ib$
  - $|z| := \sqrt{a^2 + b^2}$  è il **raggio** di  $z$ 
    - corrisponde alla distanza di  $z$  dall'origine nel piano di Gauss

## Definizione 74

- **Forma polare**
  - $a, b \in \mathbb{C}$
  - $z \in \mathbb{C} - \{0\}$
  - $z = |z| \cdot e^{i\theta}$  è detta **forma polare** di  $z$

## Definizione 75

- **Soluzione principale**
  - $a, b \in \mathbb{R}$

- $z \in \mathbb{C} \mid z = a + ib$
- $\arg(z) \subset \mathbb{R}$  è l'insieme delle soluzioni del sistema  $\begin{cases} \cos \theta = \frac{a}{|z|} \\ \sin \theta = \frac{b}{|z|} \end{cases}$
- per definizione,  $\arg(z) \implies \exists! \theta \mid 0 \leq \theta < 2\pi$  tale che  $\theta$  sia soluzione del sistema, e questo prende il nome di  $\text{Arg}(z)$ , detta **soluzione principale**

### Teorema 182

- **Hp**
  - $(\mathbb{C}, +, \cdot)$  è un gruppo
- **Th**
  - $(\mathbb{C}, +, \cdot)$  è un campo

### Teorema 183

- **Hp**
  - $z, w \in \mathbb{C}$
- **Th**
  - $|z \cdot w| = |z| \cdot |w| \quad \arg(z \cdot w) = \arg(z) + \arg(w)$
  - $|\overline{w}| = |w| \quad \arg(\overline{w}) = -\arg(w)$
  - $|w^{-1}| = |w|^{-1} \quad \arg(w^{-1}) = -\arg(w)$
  - $\left| \frac{z}{w} \right| = \frac{|z|}{|w|} \quad \arg\left(\frac{z}{w}\right) = \arg(z) - \arg(w)$

### Teorema 184

- **Hp**
    - $z \in \mathbb{C}$
  - **Th**
    - $z^n = |z|^n e^{i\theta n} \quad \arg(z^n) = n \arg(z)$
- 

## Coefficienti binomiali

### Definizione 76

- **Coefficiente binomiale**
  - $0! := 1$
  - $n, k \in \mathbb{N}$
  - $\binom{n}{k} := \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!} & k \leq n \\ 0 & k > n \end{cases}$

### Teorema 185

- **Hp**
  - $n, k \in \mathbb{N}$
- **Th**



$$- \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

### Teorema 186

- **Hp**
  - $n, k \in \mathbb{N}$
- **Th**
  - $\binom{n}{k+1} = \binom{n-1}{k+1} \binom{n-1}{k}$

### Teorema 187

- **Hp**
  - $p \in \mathbb{P}$
  - $k \in \mathbb{N} \mid 0 < k < p$
- **Th**
  - $p \mid \binom{p}{k}$

### Teorema 188

- **Hp**
  - $n \in \mathbb{Z}$
  - $p \in \mathbb{P} : p \mid n$
  - $[a] \in \mathbb{Z}_p$
- **Th**
  - $n \cdot [a] = [0] \text{ in } \mathbb{Z}_p$

### Teorema 189

- **Hp**
  - $n \in \mathbb{Z}$
  - $p \in \mathbb{P} : p \mid n$
  - $[a] \in \mathbb{Z}_p$
  - $k \in \mathbb{N} \mid 0 < k < p$
- **Th**
  - $\binom{p}{k} \cdot [a] = [0] \text{ in } \mathbb{Z}_p$

### Teorema 190

- **Hp**
  - $p \in \mathbb{P}$
  - $[a], [b] \in \mathbb{Z}_p$
- **Th**
  - $([a] + [b])^p = [a]^p + [b]^p \text{ in } \mathbb{Z}_p$

### Teorema 191

- **Hp**

- $p \in \mathbb{P}$
  - $[a_1], \dots, [a_n] \in \mathbb{Z}_p$
  - **Th**
    - $([a_1] + \dots + [a_n])^p = [a_1]^p + \dots + [a_n]^p$  in  $\mathbb{Z}_p$
- 

## Induzione

### Definizione 77

- **Induzione**
  - successione di proposizioni infinita  $P_1, P_2, P_3, \dots$
  - $\begin{cases} P_1 \text{ vera} \\ P_1, P_2, P_3, \dots, P_n \implies P_{n+1} \quad \forall n \geq 1 \end{cases}$
  - allora  $P_n$  vera  $\forall n$

### Teorema 192

- **Hp**
    - $\begin{cases} F_0 = 0 \\ F_1 = 1 \\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad \forall n \geq 2 \end{cases}$  è detta *sequenza di Fibonacci*
    - $x^2 - x - 1 = 0$  ha come soluzioni  $\begin{cases} \phi := \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \\ \psi := \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \end{cases}$
  - **Th**
    - $\forall n \in \mathbb{N} \quad F_n = \frac{\phi^n - \psi^n}{\phi - \psi} = \frac{\phi^n - \psi^n}{\sqrt{5}}$
- 

## Teorema fondamentale dell'algebra

- **Hp**
    - $\mathbb{K}$  campo
    - $p(x) \in \mathbb{K}[x] \mid p(x) = a_0x^0 + \dots + a_nx^n$
  - **Th**
    - $\exists z \in \mathbb{C} \mid p(z) = 0$
- 

## Teorema della divisione euclidea con il resto

- **Hp**
  - $m \in \mathbb{Z}$
  - $n \in \mathbb{Z} - \{0\}$
- **Th**
  - $\exists! q, r \in \mathbb{Z} \mid m = nq + r \quad 0 \leq r < n$

### Teorema 193

- **Hp**
    - $\mathbb{K}$  campo
    - $a(x), b(x) \in \mathbb{K}[x] \mid b(x) \neq 0$
  - **Th**
    - $\exists! q(x), r(x) \in \mathbb{K}[x] \mid a(x) = b(x) \cdot q(x) + r(x) \quad \deg(r(x)) < \deg(b(x))$ , che è detto *teorema della divisione con il resto tra polinomi*
- 

### Teorema di Lagrange

- **Hp**
    - $G$  gruppo finito
    - $H \subset G$  sottogruppo finito
  - **Th**
    - $|G| = |H| \cdot |G/H|$
- 

### Teorema fondamentale dell'aritmetica

- **Hp**
    - $a, b \in \mathbb{N}$
  - **Th**
    - $\text{mcm}(a, b) \cdot \text{MCD}(a, b) = a \cdot b$
- 

### Teorema cinese dei resti

#### Teorema 194

- **Hp**
  - $a_1, \dots, a_n \geq 2 \in \mathbb{Z} \mid \text{MCD}(a_i, a_j) = 1 \quad \forall i, j \in [1, n] : i \neq j$
  - $m := \text{mcm}(a_1, \dots, a_n)$
- **Th**
  - $m = a_1 \cdot \dots \cdot a_n$

#### Teorema 195

- **Hp**
  - $n \in \mathbb{N}$
  - $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}_{n \geq 2}$
  - $m := \text{mcm}(a_1, \dots, a_n)$
- **Th**
  - $\exists \phi \mid \phi : \mathbb{Z}_m \rightarrow \mathbb{Z}_{a_1} \times \dots \times \mathbb{Z}_{a_n} : x \pmod{m} \rightarrow (x \pmod{a_1}, \dots, x \pmod{a_n})$
  - $\phi$  è una funzione ben definita, ed è iniettiva

### Teorema 196

- **Hp**
  - $n \in \mathbb{N}$
  - $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}_{\geq 2} \mid \forall i, j \in [1, n] \quad i \neq j \implies \text{MCD}(a_i, a_j) = 1$
  - $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{Z} \mid 0 \leq b_1 < a_1, \dots, 0 \leq b_n < a_n$
  - $m := \text{mcm}(a_1, \dots, a_n)$
- **Th**
  - $\exists! x \pmod{m} \mid \begin{cases} x \equiv b_1 \pmod{a_1} \\ \vdots \\ x \equiv b_n \pmod{a_n} \end{cases}$

### Teorema 197

- **Hp**
    - $k \in \mathbb{N}$
    - $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N} - \{0\} \mid \forall i, j \in [1, k] \quad i \neq j \implies \text{MCD}(n_i, n_j) = 1$
    - $N := \text{mcm}(n_1, \dots, n_k)$
    - $[a] \in \mathbb{Z}_N^*$
    - $o := o([a])$  in  $\mathbb{Z}_N^*$
    - $\forall h \in [1, k] \quad o_h := o([a])$  in  $\mathbb{Z}_{n_h}^*$
  - **Th**
    - $o = \text{mcm}(o_1, \dots, o_k)$
- 

### Teorema del binomio di Newton

- **Hp**
  - $A$  anello commutativo
  - $a, b \in A$
  - $n \in \mathbb{N}$
- **Th**
  - $(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

### Teorema 198

- !!! NON HO CAPITO UN CAZZO
- 

### Piccolo teorema di Fermat

- **Hp**
  - $p \in \mathbb{P}$
  - $a \in \mathbb{Z}$
- **Th**
  - $a^p \equiv a \pmod{p}$

### Teorema 199

- **Hp**
  - $p \in \mathbb{P}$
  - $[a] \in \mathbb{Z}_p - \{0\}$
- **Th**
  - $[a]^{-1} = [a]^{p-2}$

### Teorema 200

- **Hp**
  - $p \in \mathbb{P}$
- **Th**
  - $\prod_{0 < a < p} (x - a) \equiv x^{p-1} - 1 \pmod{p}$

### Teorema 201

- **!!! NON HO CAPITO UN CAZZO**
- 

### Teorema di Eulero

- **Hp**
    - $a, n \in \mathbb{N} \mid \text{MCD}(a, n) = 1$
  - **Th**
    - $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$
- 

### Teorema fondamentale di isomorfismo

- **Hp**
  - $A, B$  anelli
  - $f : A \rightarrow B$  morfismo di anelli
- **Th**
  - $A/\ker(f) \cong \text{im}(f)$ , ovvero  $\exists \varphi \mid \varphi : A/\ker(f) \rightarrow \text{im}(f) : [a] \rightarrow f(a)$  isomorfismo di anelli

### Teorema 202

- **Hp**
  - $G, H$  gruppi
  - $f : G \rightarrow H$  morfismo di gruppi
- **Th**
  - $G/\ker(f) \cong \text{im}(f)$ , o alternativamente  $\exists \varphi \mid \varphi : G/\ker(f) \rightarrow \text{im}(f) : [g] \rightarrow f(g)$  isomorfismo di gruppi

### Teorema 203

- **Hp**
    - $\mathbb{K}$  campo
    - $V, W$  spazi vettoriali su  $\mathbb{K}$
    - $f : V \rightarrow W$  trasformazione lineare
  - **Th**
    - $V/\ker(f) \cong \text{im}(f)$ , o alternativamente  $\exists \varphi : V/\ker(f) \rightarrow \text{im}(f) : [v] \rightarrow f(v)$
- 

### Teorema di Cauchy

- **Hp**
  - $G$  gruppo finito
  - $p \in \mathbb{P}$
  - $p \mid |G|$
- **Th**
  - $\exists g \in G \mid o(g) = p$

### Teorema 204

- **Hp**
    - $G$  gruppo  $\mid |G| = 4$
  - **Th**
    - $G \cong \mathbb{Z}_4$  oppure  $G \cong K_4$
- 

### Teorema di Carnot

- **Hp**
  - $n \in \mathbb{N} - \{0\}$
  - $u, v \in \mathbb{K}^n \mid u = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$
  - $\theta$  l'angolo compreso tra  $u$  e  $v$
- **Th**
  - $\|v - u\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2 \cos(\theta) \cdot \|u\| \cdot \|v\|$

### Teorema 205

- **Hp**
  - $n \in \mathbb{N} - \{0\}$
  - $u, v \in \mathbb{K}^n \mid u = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

- $\theta$  l'angolo compreso tra  $u$  e  $v$
  - **Th**
    - $\cos(\theta) = \frac{u \cdot v}{||u|| \cdot ||v||}$
- 

## Teorema del rango

- **Hp**
    - $\mathbb{K}$  campo
    - $V, W$  spazi vettoriali su  $\mathbb{K}$
    - $f : V \rightarrow W$  trasformazione lineare
  - **Th**
    - $\text{rk}(f) = \dim(V) - \dim(\ker(f))$
- 

## Teorema di Rouché-Capelli

- **Hp**
    - $\mathbb{K}$  campo
    - $m, n \in \mathbb{N} - \{0\}$
    - $A \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{K})$
    - $b \in \text{Mat}_{m \times 1}(\mathbb{K})$
  - **Th**
    - $\exists x \in \text{Mat}_{n \times 1}(\mathbb{K}) \mid A \cdot x = b \iff \text{rk}(A) = \text{rk}(A_b)$
- 

## Teorema di Cramer

- **Hp**
    - $\mathbb{K}$  campo
    - $n \in \mathbb{N} - \{0\}$
    - $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K}) \mid \det(A) \neq 0$
    - $b \in \text{Mat}_{n \times 1}(\mathbb{K})$
  - **Th**
    - $\begin{cases} x_1 = \det(A)^{-1} \cdot \det \begin{pmatrix} b_1 & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \\ \vdots \\ x_n = \det(A)^{-1} \cdot \det \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n-1} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n-1} & b_n \end{pmatrix} \end{cases}$  sono le componenti del vettore
    - $x \in \text{Mat}_{n \times 1}(\mathbb{K}) \mid A \cdot x = b$
-

## Teorema di Kronecker

- **Hp**
    - $\mathbb{K}$  campo
    - $n, r, r' \in \mathbb{N} - \{0\} \mid r < r' < n$
    - $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K})$
    - $M_1 \in \text{Mat}_{r \times r}(\mathbb{K}) \mid M_1$  minore di  $A \wedge \det(A) \neq 0$
  - **Th**
    - $\text{rk}(A) = r \iff \forall M'_1 \text{ orlato di } M_1 \quad \det(M'_1) = 0 \iff \forall M_2 \in \text{Mat}_{r' \times r'}(\mathbb{K}) \mid M_2 \text{ minore di } A \quad \det(M_2) = 0$
- 

## Teorema di Binet

- **Hp**
  - $\mathbb{K}$  campo
  - $n \in \mathbb{N} - \{0\}$
  - $A, B \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K})$
- **Th**
  - $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$

## Teorema 206

- **Hp**
    - $\mathbb{K}$  campo
    - $n \in \mathbb{N} - \{0\}$
    - $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K})$
  - **Th**
    - $\det(A)^{-1} = \det(A^{-1})$
- 

## Teorema spettrale

- **Hp**
  - $n \in \mathbb{N} - \{0\}$
  - $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R}) \mid A$  simmetrica
  - 1.  $\forall \lambda \in \text{sp}(A) \quad \lambda \in \mathbb{R}$
  - 2.  $A$  diagonalizzabile
  - 3.  $\exists B^1, \dots, B^n$  autovettori di  $A \mid B^1, \dots, B^n$  base ortonormale di  $\mathbb{R}^n$
  - 4.  $\exists B \in O(n) \mid B^{-1}AB$  diagonale
- **Th**
  - le proposizioni sono equivalenti