

Induzione

Def

- **Induzione** > - successione di proposizioni infinita P_1, P_2, P_3, \dots > - $\begin{cases} P_1 \text{ vera} \\ P_1, P_2, P_3, \dots, P_n \implies P_{n+1} \end{cases} \quad \forall n \geq 1$
> - allora P_n vera $\forall n$

Ex

- **Hp**
 - $\begin{cases} F_0 = 0 \\ F_1 = 1 \\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad \forall n \geq 2 \end{cases}$ è detta *sequenza di Fibonacci*
 - $x^2 - x - 1 = 0$ ha come soluzioni $\begin{cases} \phi := \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \\ \psi := \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \end{cases}$
- **Th**
 - la formula chiusa della serie di Fibonacci è $F_n = \frac{\varphi^n - \psi^n}{\varphi - \psi} = \frac{\varphi^n - \psi^n}{\sqrt{5}}$
- **Dim**
 - $n = 0 \implies F_0 = \frac{\phi^0 - \psi^0}{\sqrt{5}} = \frac{1 - 1}{\sqrt{5}} = 0$
 - $n = 1 \implies F_1 = \frac{\phi^1 - \psi^1}{\phi - \psi} = 1$
 - per il passo induttivo, al posto di trovare il caso n nel caso $n + 1$, si trova il caso $n - 1$ nel caso n
 - * $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ per ipotesi induttiva, quindi $F_n = \frac{\phi^{n-1} - \psi^{n-1}}{\sqrt{5}} + \frac{\phi^{n-2} - \psi^{n-2}}{\sqrt{5}} = \frac{\phi^{n-1} - \psi^{n-1} + \phi^{n-2} - \psi^{n-2}}{\sqrt{5}}$, e riordinando i termini
$$\frac{(\phi^{n-1} + \phi^{n-2}) - (\psi^{n-1} + \psi^{n-2})}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{\varphi^{n-2}(\varphi + 1) - \psi^{n-2}(\psi + 1)}$$
 - * $\left. \begin{matrix} \varphi^2 = \varphi + 1 \\ \psi^2 = \psi + 1 \end{matrix} \right\} \implies \frac{\varphi^{n-2} \cdot \varphi^2 - \psi^{n-2} \cdot \psi^2}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{\varphi^n - \psi^n}$