

Numeri complessi

Def

- **Insieme dei complessi** $\mathbb{C} := \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}, i : i^2 = -1\}$ è l'insieme dei complessi $z \in \mathbb{C} \implies \begin{cases} a := \operatorname{Re}(z) \\ b := \operatorname{Im}(z) \end{cases}$

Oss

- **Hp**
 - $a, b \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{C} \mid z = a + ib$
 - $c, d \in \mathbb{R}, w \in \mathbb{C} \mid w = c + id$
- **Th**
 - $z + w = (a + b) + i(c + d)$
 - $z \cdot w = (ac - bd) + i(ad + bc)$

Def

- **Coniugato**
 - $z = a + ib$
 - $\bar{z} := a - ib$ è il **coniugato** di z

Oss

- **Hp**
 - $a, b \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{C} \mid z = a + ib$
 - $c, d \in \mathbb{R}, w \in \mathbb{C} \mid w = c + id$
- **Th**
 - $\bar{\bar{z}} + \bar{w} = \overline{z + w}$
 - $\bar{\bar{z}} \cdot \bar{w} = \overline{z \cdot w}$

Formula di Eulero

- $\forall \theta \quad e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$

Def

- **Raggio** $|z| := \sqrt{a^2 + b^2}$ è il **raggio** di z - è la distanza di z dall'origine nel piano di Gauss

Forma polare

- $\forall z \in \mathbb{C} - 0 \implies z = |z| \cdot e^{i\theta}$

Def

- $\arg(z) \subset \mathbb{R}$ è l'insieme delle soluzioni del sistema $\begin{cases} \cos \theta = \frac{a}{|z|} \\ \sin \theta = \frac{b}{|z|} \end{cases}$

- per definizione, $\arg(z) \implies \exists! \theta \mid 0 \leq \theta \leq 2\pi$ tale che θ sia soluzione del sistema, e questo prende il nome di $\text{Arg}(z)$, detta **soluzione principale**

Oss

- **Hp**
 - $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ è un gruppo
- **Th**
 - $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ è un campo
- **Dim**
 - $\left. \begin{array}{l} z \cdot \bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 - (ib)^2 \\ i^2 = -1 \end{array} \right\} \implies a^2 - i^2 b^2 = a^2 + b^2 = |z|^2$
 - $z \cdot \bar{z} = |z|^2 \iff z = \frac{|z|^2}{\bar{z}} \iff z^{-1} = \frac{z}{|z|^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i \frac{b}{a^2 + b^2} \implies \mathbb{C} \text{ ammette}$
inversi moltiplicativi $\implies (\mathbb{C}, +, \cdot)$ è un campo

Oss

- $|z \cdot w| = |z| \cdot |w| \quad \arg(z \cdot w) = \arg(z) + \arg(w)$
- $|\bar{w}| = |w| \quad \arg(\bar{w}) = -\arg(w)$
- $|w^{-1}| = |w|^{-1} \quad \arg(w^{-1}) = -\arg(w)$
- $\left| \frac{z}{w} \right| = \frac{|z|}{|w|} \quad \arg\left(\frac{z}{w}\right) = \arg(z) - \arg(w)$

Formula di de Moivre

- $z^n = |z|^n e^{in\theta} \quad \arg(z^n) = n \arg(z)$