Induzione

Def

- **Induzione** > - successione di proposizioni infinita $P_1, P_2, P_3, \ldots$ > - $\begin{cases} P_1 \text{ vera} \\ P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n \implies P_{n+1} \quad \forall n \geq 1 \end{cases}$ > - allora P_n vera $\forall n$

Ex

- **Hp**
  - $\begin{cases} F_0 = 0 \\ F_1 = 1 \\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad \forall n \geq 2 \end{cases}$ è detta *sequenza di Fibonacci*
  - $x^2 - x - 1 = 0$ ha come soluzioni $\begin{cases} \phi := \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \\ \psi := \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$
- **Th**
  - la formula chiusa della serie di Fibonacci è $F_n = \dfrac{\varphi^n - \psi^n}{\varphi - \psi} = \dfrac{\varphi^n - \psi^n}{\sqrt{5}}$
- **Dim**
  - $n = 0 \implies F_0 = \dfrac{\phi^0 - \psi^0}{\sqrt{5}} = \dfrac{1-1}{\sqrt{5}} = 0$
  - $n = 1 \implies F_1 = \dfrac{\phi^1 - \psi^1}{\phi - \psi} = 1$
  - per il passo induttivo, al posto di trovare il caso n nel caso $n+1$, si trova il caso $n-1$ nel caso n
    * $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ per ipotesi induttiva, quindi $F_n = \dfrac{\phi^{n-1} - \psi^{n-1}}{\sqrt{5}} + \dfrac{\phi^{n-2} - \psi^{n-2}}{\sqrt{5}} = \dfrac{\phi^{n-1} - \psi^{n-1} + \phi^{n-2} - \psi^{n-2}}{\sqrt{5}}$, e riordinando i termini $\dfrac{(\phi^{n-1} + \phi^{n-2}) - (\psi^{n-1} - \psi^{n-2})}{\sqrt{5}}$ $= \dfrac{\varphi^{n-2}(\varphi + 1) - \psi^{n-2}(\psi + 1)}{\sqrt{5}}$
    * $\left.\begin{matrix} \varphi^2 = \varphi + 1 \\ \psi^2 = \psi + 1 \end{matrix}\right\} \implies \dfrac{\varphi^{n-2} \cdot \varphi^2 - \psi^{n-2} \cdot \psi^2}{\sqrt{5}} = \dfrac{\phi^n - \psi^n}{\sqrt{5}}$