Insiemi quoziente

Def

- **Insieme quoziente** > - G gruppo > - $\sim$ relazione di equivalenza in G > - $\forall x \in G \quad [x] := \{y \in G \mid x \sim y\}$ > - $G/\sim := \{[x] \mid x \in G\}$ è l'**insieme quoziente**, ovvero l'insieme delle classi di equivalenza determinate da $\sim$

Def

- **Insieme quoziente** $\mathbb{Z}_n$ > - $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ anello, in particolare $(\mathbb{Z}, +)$ gruppo > - $n \in \mathbb{Z}$ > - $\mathbb{Z}/\equiv$ è l'insieme delle classi di equivalenza definite dalla relazione di equivalenza $\equiv$ > - $m \equiv r \pmod{n} \iff r \equiv m \pmod{n} \implies n \mid m - r \implies \exists q : nq = m - r \implies m = nq + r \quad 0 \leq r < n$ > - $0 \leq r < n \implies$ è possibile definire $\mathbb{Z}_n := \{[0], [1], \ldots, [n-1]\}$, che coincide con $\mathbb{Z}/\equiv$

Oss

- **Hp**
  - $n \in \mathbb{Z}$
  - $I(n) := \{nk \mid k \in \mathbb{Z}\}$
- **Th**
  - $(\mathbb{Z}_n, +)$ è un gruppo
- **Dim**
  - per dimostrazione precedente, $I(n)$ è un sottogruppo, quindi ha senso definire $\mathbb{Z}/I(n)$, che conterrà le classi laterali sinistre definite in $\mathbb{Z}$ rispetto a $I(n)$, che per dimostrazione precedente corrispondono alle classi di equivalenza definite da $\equiv$
  - di conseguenza, $\mathbb{Z}/I(n) = \mathbb{Z}/\equiv \, = \mathbb{Z}_n$ per definizione precedente
  - per dimostrazione precedente, la somma tra classi di equivalenza è ben definita, di conseguenza è possibile definire la struttura di gruppo $(\mathbb{Z}_n, +)$

Lem

- **Hp**
  - $p \in \mathbb{P}$
  - $a, b \in \mathbb{Z}$
  - $p \mid ab$
- **Th**
  - $p \mid a \lor p \mid b$
- **Dim**
  - $p \mid ab \implies p$ compare nella fattorizzazione in numeri primi di ab
  - allora p è nella fattorizzazione di a, e quindi $p \mid a$, oppure p è nella fattorizzazione di b, e quindi $p \mid b$

Oss

- **Hp**
  - $n \in \mathbb{Z}$
- **Th**
  - $\mathbb{Z}_n$ dominio di integrità $\iff n$ primo
- **Dim**
  - $\mathbb{Z}_n$ dominio di integrità $\implies n$ primo
    * è possibile riscrivere l'implicazione come $\neg(n$ primo$) \implies \neg(\mathbb{Z}_n$ dominio di integrità$)$
    * dunque, equivalentemente, n non primo $\implies \mathbb{Z}_n$ ammette divisori dello 0 diversi da 0
    * $n \notin \mathbb{P} \implies \exists a, b \in \mathbb{Z} \mid n = ab \quad 0 < a, b < n$
    * $n = ab \iff [n] = [ab]$!!! **MANCA DIMOSTRAZIONE**
  - n primo $\implies \mathbb{Z}_n$ dominio di integrità
    * ipotizzando che $\mathbb{Z}_n$ non sia dominio di integrità, e dunque $\exists [a] \in \mathbb{Z}_n : [a] \neq [0], a \mid 0$
    * $a \mid 0 \implies \exists b \in \mathbb{Z} \mid [a][b] = [0] \quad b \neq 0$
    * $[0] = [a][b] \iff [0] = [ab] \iff 0 \equiv ab \pmod{n} \iff n \mid ab - 0 \iff n \mid ab$
    * n primo, allora $n \mid ab \implies n \mid a \vee n \mid b$ per dimostrazione precedente
      · $n \mid a \implies [a] = [n] = [0]$ in $\mathbb{Z}_n$ $\perp$
      · $n \mid b \implies [b] = [n] = [0]$ in $\mathbb{Z}_n$, ma $b \neq 0$ in ipotesi, dunque necessariamente $[a] = [0]$ $\perp$

Oss

- **Hp**
  - $n \in \mathbb{Z}$
- **Th**
  - $\forall [a] \in \mathbb{Z}_n \quad \text{MCD}(a, n) = 1 \iff [a] \in \mathbb{Z}_n^*$
- **Dim**
  - $[a] \in \mathbb{Z}_n^* \implies \text{MCD}(a, n) = 1$
    * $[a] \in \mathbb{Z}_n^* \implies \exists b \in \mathbb{Z} \mid [a][b] = [1] \quad 0 < b < n \iff ab \equiv 1 \pmod{n} \iff n \mid 1 - ab \iff \exists k \in \mathbb{Z} \mid nk = 1 - ab$
    * allora $\exists b, k \in \mathbb{Z} \mid nk = 1 - ab \iff 1 = nk + ab$
    * $d := \text{MCD}(a, n)$
    * per definizione, $d \mid a \wedge d \mid n$
      · $d \mid a \implies \exists x \in \mathbb{Z} \mid dx = a$
      · $d \mid n \implies \exists y \in \mathbb{Z} \mid dy = n$
    * $1 = nk + ab \iff 1 = dyk + dxb = d(yk + xb) \implies \exists yk + xb \in \mathbb{Z} \mid 1 = d(yk + xb) \implies d \mid 1$
    * $d \mid 1 \iff d = \pm 1$, ma $d := \text{MCD}(a, n) \implies d \geq 0 \implies d = 1$
  - $\text{MCD}(a, n) = 1 \implies [a] \in \mathbb{Z}_n^*$
    * $d := \text{MCD}(a, n) = 1$

  * per dimostrazione precedente, $I(d) = I(a,n) \implies d \in I(a,n) \implies \exists b,k \in \mathbb{Z} \mid d = ab + nk$ per definizione di $I(a,n)$, allora $d = 1 = ab+nk \iff nk = 1-ab \iff n \mid 1-ab \iff ab \equiv 1 \pmod{n} \implies [a][b] = [1]$ in $\mathbb{Z}_n$, dunque sono uno l'inverso dell'altro, e in particolare $[a] = [b]^{-1} \implies \exists [b] \in \mathbb{Z}_n \mid [a] \in \mathbb{Z}_n^*$

Oss

- **Hp**
  - $p \in \mathbb{P}$
- **Th**
  - $\mathbb{Z}_p$ campo
- **Dim**
  - $\mathbb{Z}_p^* := \{[x] \in \mathbb{Z}_p \mid \exists [x]^{-1} \in \mathbb{Z}_p\}$
  - $p \in \mathbb{P} \implies$ ogni numero è coprimo con p
  - per dimostrazione precedente, allora tutti gli elementi di $\mathbb{Z}_p$ sono invertibili, tranne $[0]$ in quanto $[0]$ non ha inversi
  - allora $\mathbb{Z}_p^* = \mathbb{Z}_p - \{[0]\}$, che per definizione implica che $\mathbb{Z}_p$ campo

---

Funzione totiente di Eulero

Def

- **Funzione totiente di Eulero** > - $n \in \mathbb{N}$ > - $\varphi(n) := |\mathbb{Z}_n^*|$

Lem

- **Hp**
  - $n, m \in \mathbb{N}$
- **Th**
  - $[a] \in \mathbb{Z}_{mn}^* \iff [a] \in \mathbb{Z}_m^* \wedge [a] \in \mathbb{Z}_n^*$
- **Dim**
  - *prima implicazione*
    * $a \pmod{n} \in \mathbb{Z}_{mn}^* \implies \exists x \in \mathbb{Z} \mid ax \equiv 1 \pmod{mn}$
      · per dimostrazione precedente $\left.\begin{array}{l} a \mid b \\ x \equiv y \pmod{b} \end{array}\right\} x \equiv y \pmod{a} \implies \begin{cases} m, n \mid mn \\ ax \equiv 1 \pmod{mn} \end{cases} \iff \begin{cases} ax \equiv 1 \pmod{m} \\ ax \equiv 1 \pmod{n} \end{cases} \implies \begin{cases} [a] \in \mathbb{Z}_m^* \\ [a] \in \mathbb{Z}_n^* \end{cases}$
  - *seconda implicazione*
    * $[a] \in \mathbb{Z}_m^* \wedge [a] \in \mathbb{Z}_n^* \implies \exists y, z \mid \begin{cases} ay \equiv 1 \pmod{m} \\ az \equiv 1 \pmod{n} \end{cases}$, e per il teorema cinese dei resti $\exists ! [x] \in \mathbb{Z}_{mn}$, che si trova ponendo

$\begin{cases} x \equiv y \pmod{m} \\ x \equiv z \pmod{n} \end{cases} \implies \begin{cases} ax \equiv ay \pmod{m} \\ ax \equiv az \pmod{n} \end{cases}$ moltiplicando entrambe le equazioni per a, e per il sistema precedente $\begin{cases} ax \equiv 1 \pmod{m} \\ ax \equiv 1 \pmod{n} \end{cases}$, e poiché m e n sono coprimi in ipotesi, per il teorema cinese dei resti $ax \equiv 1 \pmod{mn} \implies [a] \in \mathbb{Z}^*_{mn}$

Oss

- **Hp**
  - $m, n \in \mathbb{N} \mid \mathrm{MCD}(m, n) = 1$
- **Th**
  - $\varphi(m \cdot n) = \varphi(m) \cdot \varphi(n)$
- **Dim**
  - per dimostrazione precedente, esiste una biezione definita come $\mathbb{Z}^*_{mn} \to \mathbb{Z}^*_m \times \mathbb{Z}^*_n$
  - $\varphi(m \cdot n) := |\mathbb{Z}^*_{mn}| = |\mathbb{Z}^*_m \times \mathbb{Z}^*_n|$ perché è una biezione, e dunque è pari a $|\mathbb{Z}^*_m| \cdot |\mathbb{Z}^*_n| = \varphi(m) \cdot \varphi(n)$ per definizione

Oss

- **Hp**
  - $p \in \mathbb{P}$
  - $k \in \mathbb{N} \mid k \geq 1$
- **Th**
  - $\varphi(p^k) = p^{k-1}(p-1)$
- **Dim**
  - $0 \leq a < p^k \in \mathbb{Z}^*_{p^k} \iff \mathrm{MCD}(a, p^k) = 1$, che è vero quando $p \nmid a$ poiché $p \in \mathbb{P}$
  - simmetricamente, $0 \leq a < p^k \notin \mathbb{Z}^*_{p^k} \iff \exists n \in \mathbb{Z} \mid a = np$
    - i multipli di p sono tutti $0 \leq np < p^k \implies 0 \leq n < p^{k-1}$ **!!! INCOMPLETA**
  - $\varphi\left(p^k\right) := \left|\mathbb{Z}^*_{p^k}\right| = \left|\mathbb{Z}_{p^k} - \left\{[a] \in \mathbb{Z}_{p^k} \mid \nexists [a]^{-1} \in \mathbb{Z}_{p^k}\right\}\right| = p^k - p^{k-1} = p^{k-1}(p-1)$

Oss

- **Hp**
  - $k \in \mathbb{N} \mid k \geq 1$
  - $p_1, \ldots, p_k \in \mathbb{P}$
  - $i_1, \ldots, i_k \geq 1$
  - $n \in \mathbb{N} \mid n = p_1^{i_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{i_k}$
- **Th**
  - $\varphi(n) = n \cdot \prod_{p \mid n} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$

- **Dim**
  - per dimostrazione precedente $\varphi(n) = \varphi\left(p_1^{i_1}\right) \cdot \ldots \cdot \varphi\left(p_k^{i_k}\right) = p_1^{i_1-1}(p_1 - 1) \cdot \ldots \cdot p_k^{i_k-1}(p_k - 1) = p_1^{i_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{i_k} \cdot \dfrac{p_1 - 1}{p_1} \cdot \ldots \cdot \dfrac{p_k - 1}{p_k} = n \cdot \dfrac{p_1 - 1}{p_1} \cdot \ldots \cdot \dfrac{p_k - 1}{p_k} \implies \varphi(n) = n \cdot \prod_{p|n} \left(1 - \dfrac{1}{p}\right)$