

Morfismi

Def

- **Morfismo di gruppi** $\triangleright - (G, \cdot), (H, \cdot)$ gruppi $\triangleright - f : G \rightarrow H \triangleright - f$ morfismo di gruppi
 $\iff f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y) \quad \forall x, y \in G$
- **Morfismo di anelli** $\triangleright - (A, +, \cdot), (B, +, \cdot)$ anelli $\triangleright - f : A \rightarrow B \triangleright - f$ morfismo di anelli
 $\iff f(x + y) = f(x) + f(y)$ e $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y) \quad \forall x, y \in A \triangleright -$ la stessa definizione si applica per morfismo di campi

Oss

- **Hp**
 - $(G, \cdot), (H, \cdot)$ gruppi
 - 1_G neutro per G
 - 1_H neutro per H
 - $f : G \rightarrow H$ morfismo
- **Th**
 - $f(1_G) = 1_H$
- **Dim**
 - $\forall g \in G \quad f(g) = f(1_G \cdot g) = f(1_G) \cdot f(g)$ poiché f morfismo
 - quindi $f(g) = f(1_G) \cdot f(g) \implies f(g) \cdot f(g)^{-1} = f(1_G) \cdot f(g) \cdot f(g)^{-1} \implies 1_H = f(1_G) \cdot 1_H \implies 1_H = f(1_G)$ (poiché $f(g), f(g)^{-1} \in H$ per definizione di f)

Oss

- **Hp**
 - $(G, \cdot), (H, \cdot)$ gruppi
 - 1_G neutro per G
 - 1_H neutro per H
 - $f : G \rightarrow H$ morfismo
 - **Th**
 - $f(g^{-1}) = f(g)^{-1}$
 - **Dim**
 - per dimostrazione precedente, $1_H = f(1_G) = f(g \cdot g^{-1}) = f(g) \cdot f(g^{-1}) \implies 1_H = f(g) \cdot f(g^{-1}) \implies f(g)^{-1} = f(g^{-1})$
-

Isomorfismi

Def

- **Isomorfismo** $\triangleright - f$ isomorfismo $\iff f$ morfismo e f biiettiva

Oss

- **Hp**
 - $f : G \rightarrow H$ isomorfismo
- **Th**

- $f^{-1} : H \rightarrow G$ isomorfismo
- **Dim**
 - $\forall g \in G, h \in H \quad \exists! f^{-1} \mid \left\{ \begin{array}{l} f^{-1}(f(g)) = g \\ f(f^{-1}(h)) = h \end{array} \right.$
 - $\forall h, h' \in H \quad f^{-1}(hh') = f^{-1}(h) \cdot f^{-1}(h') \iff hh' = f(f^{-1}(hh')) = f(f^{-1}(h) \cdot f^{-1}(h')) = f(f^{-1}(h)) \cdot f(f^{-1}(h')) = hh'$, e dunque f^{-1} è un morfismo, e poiché è invertibile è un isomorfismo

Ex

- **Hp**
 - $z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1$ sono le radici n -esime di 1
 - $\zeta := e^{i\frac{2\pi}{n}}$
 - $H := \{\zeta^0, \zeta^1, \zeta^k, \dots, \zeta^{n-1}\}$ è l'insieme delle radici n -esime di 1
- **Th**
 - $(H, \cdot) \subset (\mathbb{C} - \{0\}, \cdot)$ è un sottogruppo
- **Dim**
 - $\zeta^0 = 1 \implies 1 \in H$
 - $z, w \in H \iff z^n = w^n = 1$, allora $1 = z^n \cdot w^n = (z \cdot w)^n = 1 \implies z \cdot w \in H$ per definizione di H
 - $z^n = 1 \implies \frac{1}{z^n} = 1 \iff (z^{-1})^n = 1 \implies z^{-1} \in H$ per definizione di H

Ex

- **Hp**
 - $f : \mathbb{Z}_n \rightarrow H : [k] \rightarrow \zeta^k$
- **Th**
 - f isomorfismo di gruppi $(\mathbb{Z}_n, +)$ e (H, \cdot)
- **Dim**
 - f è biettiva per costruzione di $\mathbb{Z}_n := \{[0], [1], \dots, [n-1]\}$ e $H := \{\zeta^0, \zeta^1, \dots, \zeta^{n-1}\}$
 - f morfismo
 - * $f([i] + [j]) = f([i]) \cdot f([j])$
 - $[i] + [j] = [k]$ per un certo $k \in \mathbb{Z}_n \implies \exists h \in \mathbb{Z} \mid i + j = k + hn$
 - $f([i] + [j]) = f([k]) = \zeta^k$
 - $f([i]) \cdot f([j]) = \zeta^i \cdot \zeta^j = \zeta^{i+j}$, ma per osservazione precedente $\zeta^{i+j} = \zeta^{k+nh} = \zeta^k \cdot (\zeta^n)^h$
 - $\zeta^n = 1$ per definizione di $\zeta \implies$ entrambe i membri dell'equazione sono pari a ζ^k

Ex

- **Hp**
 - (G, \cdot) gruppo
 - $f : \mathbb{Z} \rightarrow G : n \rightarrow g^n$ per qualche $g \in G$
- **Th**
 - f morfismo di gruppi $(\mathbb{Z}, +)$ e (G, \cdot)
- **Dim**
 - $f(n+m) = g^{n+m} = g^m \cdot g^n = f(m) \cdot f(n) \implies f$ morfismo

Oss

- **Hp**
 - !!! MANCA UN TEOREMA CHE NON HO CAPITO NIENTE
- **Th**
- **Dim**

Ex

- **Hp**
 - $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_n : k \rightarrow [k]$
- **Th**
 - f morfismo di anelli $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ e $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$
- **Dim**
 - per come le operazioni $+$ e \cdot sono state definite, $f([x + y]) = f([x]) + f([y])$ e $f([x \cdot y]) = f([x]) \cdot f([y])$

Ex

- **Hp**
 - $n \mid m$
 - $f : \mathbb{Z}_m \rightarrow \mathbb{Z}_n : x \pmod m \rightarrow x \pmod n$
- **Th**
 - f morfismo di anelli $(\mathbb{Z}_m, +, \cdot)$ e $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$
- **Dim**
 - $x \pmod m + y \pmod m = x + y \pmod m$
 - $f(x + y \pmod m) = x + y \pmod n$
 - $x + y \pmod n = x \pmod n + y \pmod n$
 - il ragionamento è analogo per l'operazione \cdot , e dunque segue la tesi

Ex

- **Hp**
 - G gruppo
 - $f : G \rightarrow G : h \rightarrow g \cdot h \cdot g^{-1}$ per qualche $g \in G$
 - **Th**
 - f morfismo di gruppi (G, \cdot) e (G, \cdot)
 - **Dim**
 - $\forall h, h' \in G \quad f(h) \cdot f(h') = (ghg^{-1}) \cdot (gh'g^{-1}) = gh(g^{-1} \cdot g)h'g^{-1} = gh h' g^{-1} = f(hh')$
-

Kernel e Immagine

Def

- **Kernel e Immagine di gruppi** > - G, H gruppi > - $f : G \rightarrow H$ morfismo > - $\text{Ker}(f) := \{g \in G \mid f(g) = 1_H\}$ > - $\text{Im}(f) := \{h \in H \mid \exists g \in G : f(g) = h\}$
- **Kernel e Immagine di anelli** > - A, B gruppi > - $f : A \rightarrow B$ morfismo > - $\text{Ker}(f) := \{a \in A \mid f(a) = 0_B\}$ > - $\text{Im}(f) := \{b \in B \mid \exists a \in A : f(a) = b\}$

Oss

- **Hp**
 - G, H gruppi
 - $f : G \rightarrow H$ morfismo
- **Th**
 - $\text{Ker}(f) \subset G$ è sottogruppo
- **Dim**
 - per dimostrazione precedente, $f(1_G) = 1_H \implies 1_G \in \text{Ker}(f)$ per definizione
 - $x, y \in \text{Ker}(f) \implies f(x) = f(y) = 1_H$ per definizione, dunque $f(x) \cdot f(y) = 1_H \cdot 1_H = 1_H$, e $f(x) \cdot f(y) = f(x \cdot y) = 1_H$ perché f morfismo, quindi $x \cdot y \in \text{Ker}(f)$ per definizione
 - $g \in \text{Ker}(f) \implies f(g) = 1_H \implies f(g)^{-1} = 1_H^{-1} = 1_H$, ma poiché per dimostrazione precedente $f(g)^{-1} = f(g^{-1}) \implies f(g^{-1}) = 1_H \implies g^{-1} \in \text{Ker}(f)$ per definizione

Oss

- **Hp**
 - G, H gruppi
 - $f : G \rightarrow H$ morfismo
- **Th**
 - $\text{Im}(f) \subset G$ è sottogruppo
- **Dim**
 - per dimostrazione precedente $f(1_G) = 1_H \implies 1_H \in \text{Im}(f)$ per definizione
 - $x, y \in \text{Im}(f) \implies \exists g, g' \in G \mid x = f(g) \wedge y = f(g') \implies x \cdot y = f(g) \cdot f(g') = f(g \cdot g')$ perché f morfismo, quindi $x \cdot y \in \text{Im}(f)$ per definizione
 - $x \in \text{Im}(f) \implies \exists g \in G \mid f(g) = x \implies x^{-1} = f(g)^{-1} = f(g^{-1})$ per dimostrazione precedente, quindi $x^{-1} \in \text{Im}(f)$ per definizione

Oss

- **Hp**
 - G, H gruppi
 - $f : G \rightarrow H$ morfismo
- **Th**
 - f iniettiva $\iff \text{Ker}(f) = \{1_G\}$
- **Dim**
 - f iniettiva $\implies \text{Ker}(f) = \{1_G\}$
 - * $f(1_G) = 1_H$ per dimostrazione precedente, dunque $1_G \in \text{Ker}(f)$ per definizione
 - * f iniettiva $\implies \nexists x, y \in G \mid x \neq y \implies f(x) = f(y)$, di conseguenza è unico $1_G \in G \mid f(1_G) = 1_H$, dunque $\text{Ker}(f)$ conterrà esclusivamente 1_G per definizione
 - f iniettiva $\iff \text{Ker}(f) = \{1_G\}$
 - * $\forall g, g' \in G \quad f(g) = f(g') \iff f(g)^{-1} \cdot f(g) = f(g)^{-1} \cdot f(g') \iff 1_H = f(g) \cdot f(g') = f(g \cdot g')$
 - * $\text{Ker}(f) = \{1_G\} \implies f(1_G) = 1_H$ per definizione, allora $f(g \cdot g') = 1_H \implies g \cdot g' = 1_G$ necessariamente, e $g \cdot g' = 1_G \iff g = g' \implies f(g) = f(g') \implies g = g' \implies f$ iniettiva

Oss

- **Hp**

- A, B anelli
- $f : A \rightarrow B$ morfismo di anelli
- **Th**
 - $\text{Ker}(f)$ ideale
- **Dim**
 - $(\text{Ker}(f), +) \subset (A, +)$ sottogruppo per dimostrazione precedente
 - per analogia con dimostrazione precedente, $f(0_A) = 0_B$
 - $x \in \text{Ker}(f) \implies f(x) = 0_B$ per definizione, quindi $\forall x \in \text{Ker}(f), y \in A \quad f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y) = 0_B \cdot f(y) = 0_B \implies x \cdot y \in \text{Ker}(f)$ per definizione, quindi $\text{Ker}(f) \cdot A \subset \text{Ker}(f)$

Oss

- **Hp**
 - A, B anelli
 - $f : A \rightarrow B$ morfismo di anelli
- **Th**
 - $\text{Im}(f)$ sottoanello
- **Dim**
 - $(\text{Im}(f), +) \subset (A, +)$ sottogruppo per dimostrazione precedente
 - $x, y \in \text{Im}(f) \implies \exists a, a' \mid x = f(a) \wedge y = f(a') \implies x \cdot y = f(a) \cdot f(a') = f(a \cdot a')$ perche f morfismo, quindi $\exists a \cdot a' \mid x \cdot y = f(a \cdot a') \implies x \cdot y \in \text{Im}(f) \implies \text{Im}(f) \cdot \text{Im}(f) \subset \text{Im}(f)$

Oss

- **Hp**
 - $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C} - \{0\} : k \rightarrow \zeta^k$
 - f morfismo di gruppi $(\mathbb{Z}, +)$ e $(\mathbb{C} - \{0\}, \cdot)$
 - $I(n)$ ideale generato da n !!! **CHI È N**
- **Th**
 - $\text{Ker}(f) = I(n)$
- **Dim**
 - pass

Oss

- !!! coso finale su **H** che non ho capito niente

Oss

- **Hp**
 - G, H gruppi
 - $f : G \rightarrow H$ morfismo
- **Th**
 - $\text{Ker}(f)$ è sottogruppo normale
- **Dim**
 - per la formulazione 2 della definizione di sottogruppo normale, $\forall g \in G, h \in \text{Ker}(f) \implies ghg^{-1} \in \text{Ker}(f)$
 - $f(ghg^{-1}) = f(g) \cdot f(h) \cdot f(g^{-1})$
 - $h \in \text{Ker}(f) \implies f(h) = 1_H$ per definizione

- per dimostrazione precedente $f(g^{-1}) = f(g)^{-1}$
- $f(ghg^{-1}) = f(g) \cdot 1_H \cdot f(g)^{-1} = 1_H \implies ghg^{-1} \in \text{Ker}(f)$ per definizione