



SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

“SAPIENZA” UNIVERSITÀ DI ROMA
INGEGNERIA DELL'INFORMAZIONE,
INFORMATICA E STATISTICA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

Automi: Calcolabilità e Complessità

Appunti integrati con il libro "Introduzione alla teoria della computazione",
Michael Sipser

Author
Alessio Bandiera

18 luglio 2023

Indice

Informazioni e Contatti	1
1 New Chapter	2
1.1 New Section	2
1.1.1 New subsection	2

Informazioni e Contatti

Prerequisiti consigliati:

- TODO: DA DECIDERE

Segnalazione errori ed eventuali migliorie:

Per segnalare eventuali errori e/o migliorie possibili, si prega di utilizzare il **sistema di Issues fornito da GitHub** all'interno della pagina della repository stessa contenente questi ed altri appunti (link fornito al di sotto), utilizzando uno dei template già forniti compilando direttamente i campi richiesti.

Gli appunti sono in continuo aggiornamento, pertanto, previa segnalazione, si prega di controllare se l'errore sia ancora presente nella versione più recente.

Licenza di distribuzione:

These documents are distributed under the [GNU Free Documentation License](#), a form of copyleft intended to be used on manuals, textbooks or other types of document in order to assure everyone the effective freedom to copy and redistribute it, with or without modifications, either commercially or non-commercially.

Contatti dell'autore e ulteriori link:

- Github: <https://github.com/ph04>
- Email: alessio.bandiera02@gmail.com
- LinkedIn: [Alessio Bandiera](#)

1

New Chapter

1.1 New Section

1.1.1 New subsection

Definizione 1.1.1.1: Alfabeto

Si definisce **alfabeto** un qualsiasi insieme finito, non vuoto; i suoi elementi sono detti **simboli**.

Esempio 1.1.1.1 (Alfabeto). $\Sigma = \{0, 1, x, y, z\}$ è un alfabeto, composto da 5 simboli.

Definizione 1.1.1.2: Stringa

Sia Σ un alfabeto; una **stringa su Σ** è una sequenza finita di simboli di Σ ; la **stringa vuota** appartiene ad ogni alfabeto, ed è denotata con ε .

- Data una stringa w di Σ , allora $|w|$ è la lunghezza di w .
- Se w ha lunghezza $n \in \mathbb{N}$, allora è possibile scrivere che $w = w_1 w_2 \cdots w_n$ con $w_i \in \Sigma$ e $i \in [1, n]$.

Esempio 1.1.1.2 (Stringa). Sia $\Sigma = \{0, 1, x, y, z\}$ un alfabeto; allora una sua possibile stringa è $w = x1y0z$.

Definizione 1.1.1.3: Stringa inversa

Sia Σ un alfabeto, e $w = w_1 w_2 \cdots w_n$ una sua stringa; allora si definisce l'**inversa** di w come segue: $w^{\mathcal{R}} = w_n w_{n-1} \cdots w_1$

Definizione 1.1.1.4: Concatenazione

Sia Σ un alfabeto, e $x = x_1x_2 \cdots x_n, y = y_1y_2 \cdots y_n$ due sue stringhe; allora xy è la stringa ottenuta attraverso la **concatenazione** di x ed y .

Per indicare una stringa concatenata con se stessa k volte, si utilizza la notazione $x^k = \underbrace{xx \cdots x}_k$.

Definizione 1.1.1.5: Prefisso

Sia Σ un alfabeto, ed x, y due sue stringhe; allora x è detto essere un **prefisso** di y , se $\exists z \mid xz = y$, con z stringa in Σ .

Esempio 1.1.1.3 (Prefisso). Sia $\Sigma = \{a, b, c\}$ un alfabeto; allora la stringa $x = ab$ è prefisso della stringa $y = abc$, poiché esiste una stringa $z = c$ tale per cui $xz = y$.

Definizione 1.1.1.6: Linguaggio

Sia Σ un alfabeto; si definisce **linguaggio** un insieme di stringhe di Σ . Un linguaggio è detto **prefisso**, se nessun suo elemento è prefisso di un altro.

Definizione 1.1.1.7: Automa finito

Un **automa finito**, o **macchina**, è una quintupla $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, dove

- Q è l'**insieme degli stati** dell'automa, un insieme *finito*
- Σ è l'**alfabeto** dell'automa, un insieme *finito*
- $\delta : Q \times \Sigma \rightarrow Q$ è la **funzione di transizione**, che definisce la relazione tra gli stati
- $q_0 \in Q$ è lo **stato iniziale**
- $F \subseteq Q$ è l'**insieme degli stati accettanti**, sui quali le stringhe possono terminare

Esempio 1.1.1.4 (Automa finito). Un esempio di automa finito è il seguente:

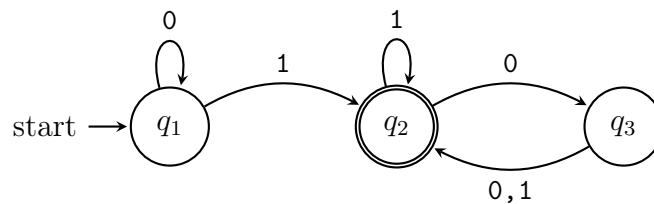


Figura 1.1: Un automa.

esso può essere descritto secondo la quintupla $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ come segue:

- $Q = \{q_1, q_2, q_3\}$
- $\Sigma = \{0, 1\}$
- δ è la seguente:

	0	1
q_1	q_1	q_2
q_2	q_3	q_2
q_3	q_2	q_2

- q_1 è lo stato iniziale
- $F = \{q_2\} \subseteq Q$

Definizione 1.1.1.8: Linguaggio di un automa

Sia M un automa; allora il **linguaggio** di M è un insieme $L(M)$ contenente tutte le stringhe accettate da M ; simmetricamente, si dice che M **riconosce** $L(M)$.

Esempio 1.1.1.5 (Linguaggio di un automa). Si consideri il seguente automa M_1 :

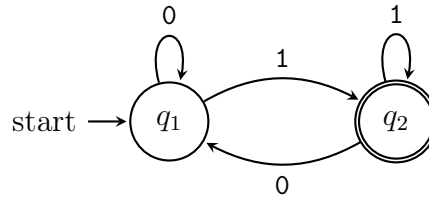


Figura 1.2: Un automa M_1 .

sapendo che $\Sigma = \{0, 1\}$, che q_1 è lo stato iniziale, e che $F = \{q_2\}$, ci si convince facilmente che

$$L(M_1) = \{w \mid w = w_1 w_2 \cdots w_{n-1} 1, n \in \mathbb{N}\}$$

ovvero, M_1 accetta tutte e sole le stringhe che terminano per 1.

Definizione 1.1.1.9: Stringhe accettate

Sia $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ un automa, e sia $w = w_1 \cdots w_n$ una stringa tale per cui $\forall i \in [1, n] \quad w_i \in \Sigma$; allora, M **accetta** w se esiste una sequenza di stati $r_0, \dots, r_n \in Q$ tali per cui

- $r_0 = q_0$
- $\forall i \in [1, n - 1] \quad \delta(r_i, w_{i+1}) = r_{i+1}$
- $r_n \in F$

Dato un linguaggio A , si ha che M **riconosce** A se e solo se $A = \{w \mid M \text{ accetta } w\}$.