DISCLAIMER

Questo è un file che contiene una lista di tutti i teoremi, osservazioni, definizioni, esempi, lemmi, corollari, formule e proposizioni **senza alcuna dimostrazione**, di conseguenza molte informazioni risulteranno essere senza alcun contesto se già non si conosce la materia. Detto questo, buona lettura.

Algebra relazionale

Definizione 1

- **Dominio**
  - A insieme finito o infinito
  - A, in algebra relazionale, è detto **dominio**

Definizione 2

- **Prodotto cartesiano**
  - $n \in \mathbb{N}$
  - $D_1, \ldots, D_n$ domini
  - $D_1 \times \ldots \times D_n := \{v_1, \ldots, v_n) \mid v_1 \in D_1, \ldots, v_n \in D_n\}$ è detto **prodotto cartesiano dei domini** $D_1, \ldots D_n$

Definizione 3

- **Relazione**
  - $n \in \mathbb{N}$
  - $D_1, \ldots, D_n$ domini
  - $k \in [1, n]$
  - $R \subseteq D_1 \times \ldots \times D_k$ è detta **relazione di grado** k
    - $(t_1, \ldots, t_k) \in R$ è detta **tupla di cardinalità** k
    - $\forall i \in [1, k] \quad (t_1, \ldots, t_k)[i] = t_i$
    - $\forall a, b \in [1, k] \mid a < b \quad (t_1, \ldots, t_k)[a, b] = (t_a, \ldots, t_b)$

Definizione 4

- **Schema relazionale**
  - $n \in \mathbb{N}$
  - $D_1, \ldots, D_n$ domini
  - $R \subseteq D_1 \times \ldots \times D_n$ relazione
  - $R(A_1, \ldots, A_n)$ è detto **schema relazionale**
    - R, in algebra relazionale, è categorizzata tramite **attributi**, denotati con A_i, nomi con i quali si etichettano le colonne della tabella, dunque uno schema relazionale è l'insieme delle etichette
    - $\forall i \in [1, n] \quad \mathrm{dom}(A_i) := D_i$ è detto **dominio di** A_i
    - $\forall i \in [1, n] \quad A_i \in \mathrm{dom}(A_i)$

- **Istanza di una relazione**
    - $n \in \mathbb{N}$
    - $D_1, \ldots, D_n$ domini
    - $k \in [1, n]$
    - $R \subseteq D_1 \times \ldots \times D_k$ relazione
    - $R(A_1, \ldots, A_n)$ schema relazionale
    - $D_1, \ldots, D_k$, l'insieme delle tuple di R, è detta **istanza della relazione** R

Operazioni

Definizione 5

- **Proiezione**
- !!! **RISCRIVI** > - $n \in \mathbb{N}$ > - $D_1, \ldots, D_n$ domini > - $R \subseteq D_1 \times \ldots \times D_n$ relazione > - $R(A_1, \ldots, A_n)$ schema relazionale > - $a, b \in [1, n] \mid a < b$ > - $\pi_{A_a, \ldots, A_b}(R) := D_a \times \ldots \times D_b$ è detta **proiezione di** R, associata ad uno schema relazionale $R(A_a, \ldots, A_b)$
- **Selezione**
    - $n \in \mathbb{N}$
    - $D_1, \ldots, D_n$ domini
    - $R \subseteq D_1 \times \ldots \times D_n$ relazione
    - $R(A_1, \ldots, A_n)$ schema relazionale
    - C espressione booleana
    - $\sigma_C(R) \subseteq D_1 \times \ldots \times D_n$ è detta **selezione di** R
        - corrisponde all'insieme delle righe della tabella che rendono la condizione C vera
- **Rinominazione**
    - $n \in \mathbb{N}$
    - $D_1, \ldots, D_n$ domini
    - $R \subseteq D_1 \times \ldots \times D_n$ relazione
    - $R(A_1, \ldots, A_n)$ schema relazionale
    - $R' = \rho_{A'_1 \leftarrow A_1}(R)$, dove ρ è detto **operatore di rinominazione**
        - R' sarà uno schema relazionale con la stessa istanza di R, ma con A_1 rinominato con A'_1
- **Unione**
    - $n \in \mathbb{N}$
    - $D_1, \ldots, D_n, D'_1, \ldots, D'_n$ domini $\mid \forall i \in [1, n] \quad D_i = D'_i$
    - $R_1 \subseteq D_1 \times \ldots \times D_n$ relazione
    - $R_2 \subseteq D'_1 \times \ldots \times D'_n$ relazione
    - $R_1(A_1, \ldots, A_n)$ schema relazionale
    - $R_2(A'_1, \ldots, A'_n)$ schema relazionale
    - r_1 istanza di R_1
    - r_2 istanza di R_2
    - $r_1 \cup r_2 := \{t \mid t \in r_1 \vee t \in r_2\}$ è detta **unione delle istanze** r_1 **e** r_2

    - dunque, l'unione di istanze è definita solamente per istanze con stesso numero di attributi, e attributi con stesso dominio

- **Differenza**
    - $n \in \mathbb{N}$
    - $D_1, \ldots, D_n, D'_1, \ldots, D'_n$ domini $\mid \forall i \in [1, n] \quad D_i = D'_i$
    - $R_1 \subseteq D_1 \times \ldots \times D_n$ relazione
    - $R_2 \subseteq D'_1 \times \ldots \times D'_n$ relazione
    - $R_1(A_1, \ldots, A_n)$ schema relazionale
    - $R_2(A'_1, \ldots, A'_n)$ schema relazionale
    - r_1 istanza di R_1
    - r_2 istanza di R_2
    - $r_2 - r_1 := \{t \mid t \in r_2 \land t \notin r_1\}$ è detta **differenza delle istanze r_1 e r_2**
        - dunque, la differenza di istanze è definita solamente per istanze con stesso numero di attributi, e attributi con stesso dominio

- **Intersezione**
    - $n \in \mathbb{N}$
    - $D_1, \ldots, D_n, D'_1, \ldots, D'_n$ domini $\mid \forall i \in [1, n] \quad D_i = D'_i$
    - $R_1 \subseteq D_1 \times \ldots \times D_n$ relazione
    - $R_2 \subseteq D'_1 \times \ldots \times D'_n$ relazione
    - $R_1(A_1, \ldots, A_n)$ schema relazionale
    - $R_2(A'_1, \ldots, A'_n)$ schema relazionale
    - r_1 istanza di R_1
    - r_2 istanza di R_2
    - $r_1 \cap r_2 := r_2 - (r_2 - r_1)$ è detta **intersezione delle istanze r_1 e r_2**
        - dunque, la differenza di istanze è definita solamente per istanze con stesso numero di attributi, e attributi con stesso dominio

- **Prodotto cartesiano**
    - $n \in \mathbb{N}$
    - $D_1, \ldots, D_n, D'_1, \ldots, D'_n$ domini $\mid \forall i \in [1, n] \quad D_i = D'_i$
    - $R_1 \subseteq D_1 \times \ldots \times D_n$ relazione
    - $R_2 \subseteq D'_1 \times \ldots \times D'_n$ relazione
    - $R_1(A_1, \ldots, A_n)$ schema relazionale
    - $R_2(A'_1, \ldots, A'_n)$ schema relazionale
    - r_1 istanza di R_1
    - r_2 istanza di R_2
    - $r_1 \times r_2 := \{(t_1, t_2) \mid t_1 \in r_1 \land t_2 \in r_2\}$ è detto **prodotto cartesiano delle istanze r_2 e r_2**

Definizione 6

- **Hp**
    - $n \in \mathbb{N}$
    - $D_1, \ldots, D_B, \ldots, D_n, D'_1, \ldots, D'_B, \ldots, D'_n$ domini $\mid \forall i \in [1, n] \quad D_i = D'_i$
    - $R_1 \subseteq D_1 \times \ldots \times D_B \times \ldots \times D_n$ relazione
    - $R_2 \subseteq D'_1 \times \ldots \times D'_B \times \ldots \times D'_n$ relazione
    - $R_1(A_1, \ldots, B, \ldots, A_n)$ schema relazionale

- $R_2(A'_1, \dots, B, \dots, A'_n)$ schema relazionale
  - r_1 istanza di R_1
  - r_2 istanza di R_2
- **Oss**
  - in questa situazione, si verifica che $r_1 \times r_2$ conterrà delle tuple senza significato, poiché esiste un attributo con stesso nome in R_1 e in R_2, ovvero B
  - per risolvere questo problema, spesso l'operatore $\times$ viene utilizzato congiuntamente a ρ, σ e π
    * infatti, per ottenere un prodotto cartesiano con significato è necessario prima rinominare l'attributo in comune in uno dei due schemi relazionali, per differenziarli, e dunque $R'_2 = \rho_{B' \leftarrow B}(R_2)$, e sia r'_2 l'istanza di R'_2
    * successivamente, facendo $r_1 \times r'_2$, si otterra un'istanza contenente delle tuple ancora senza significato, che sarà possibile rimuovere selezionando attraverso $\sigma_{B'=B}(r_1 \times r'_2)$
    * infine, a questo punto si avranno due colonne perfettamente identiche, e dunque è sufficiente proiettare prendendo solo una delle colonne tra B e B', e quindi $\pi_{A_1, \dots, B, \dots, A_n, A'_1, \dots, \hat{B}', \dots, A'_n}(\sigma_{B=B'}(r_1 \times r'_2))$ è il prodotto cartesiano cercato

Def

- **Join naturale**

  - $n \in \mathbb{N}$
  - $D_1, \dots, D_n, D'_1, \dots, D'_n$ domini $\mid \forall i \in [1, n] \quad D_i = D'_i$
  - $R_1 \subseteq D_1 \times \dots \times D_n$ relazione
  - $R_2 \subseteq D'_1 \times \dots \times D'_n$ relazione
  - $R_1(A_1, \dots, A_n)$ schema relazionale
  - $R_2(A'_1, \dots, A'_n)$ schema relazionale
  - r_1 istanza di R_1
  - r_2 istanza di R_2
  - $r_1 \bowtie r_2$ è detto **join naturale di r_1 e r_2** !!! **SCRIVERE BENE LA DEFINIZIONE**
    - dunque, il join naturale costituisce il prodotto cartesiano "con significato" discusso precedentemente **SCRIVERE BENE LA DEFINIZIONE**
    - dunque, il join naturale costituisce il prodotto cartesiano "con significato" discusso precedentemente

Teorema 1

- !!! **4.30**

Teorema 2

- **Hp**
  - $n \in \mathbb{N}$
  - $D_1, \dots, D_n, D'_1, \dots, D'_n$ domini $\mid \forall i \in [1, n] \quad D_i = D'_i$
  - $R_1 \subseteq D_1 \times \dots \times D_n$ relazione
  - $R_2 \subseteq D'_1 \times \dots \times D'_n$ relazione
  - $R_1(A_1, \dots, A_n)$ schema relazionale

- $R_2(A'_1, \dots, A'_n)$ schema relazionale
- $\nexists A \in \{A_1, \dots, A_n, A'_1, \dots, A'_n\} \mid \exists A' \in \{A_1, \dots, A_n, A'_1, \dots, A'_n\} : A = A'$, dunque gli attributi di R_1 ed R_2 sono tutti distinti
- r_1 istanza di R_1
- r_2 istanza di R_2

- **Th**
  - $r_1 \times r_2 = r_1 \bowtie r_2$

Teoria relazionale

Definizione 7

- **Dipendenza funzionale**
  - $n \in \mathbb{N}$
  - $D_1, \dots, D_n$ domini
  - $R \subseteq D_1 \times \ldots \times D_n$ relazione
  - $R(A_1, \dots, A_n)$ schema relazionale
  - $X, Y \subseteq R(A_1, \dots, A_n) \mid X, Y \neq \varnothing$
  - $X \to Y$ è detta **dipendenza funzionale su** R
    - X è detto **determinante**, Y è detto **determinato**
  - r istanza di R **soddisfa** $X \to Y \iff \forall t_1, t_2 \in R \quad t_1[X] = t_2[X] \implies t_1[Y] = t_2[Y]$
- **Istanza legale**
  - $n, k \in \mathbb{N}$
  - $D_1, \dots, D_n$ domini
  - $R \subseteq D_1 \times \ldots \times D_n$ relazione
  - $R(A_1, \dots, A_n)$ schema relazionale
  - $F_1, \dots, F_k$ dipendenze funzionali su R
  - $F = \{F_1, \dots, F_k\}$
  - r **istanza di** R **legale su** $F \iff \forall i \in [1, k] \quad r$ soddisfa F_i

Definizione 8

- **Chiusura di un insieme di dipendenze funzionali**
  - $n, k \in \mathbb{N}$
  - $D_1, \dots, D_n$ domini
  - $R \subseteq D_1 \times \ldots \times D_n$ relazione
  - $R(A_1, \dots, A_n)$ schema relazionale
  - $F_1, \dots, F_k$ dipendenze funzionali su R
  - $F = \{F_1, \dots, F_k\}$
  - $L = \{r \text{ istanza di } R \mid r \text{ legale su } F\}$
  - $F^+ := \displaystyle\bigcap_{r \in L} \{\text{dipendenze funzionali in } r\}$
    - ovvero, è l'insieme delle dipendenze funzionali derivabili da ogni istanza legale su F

  - di fatto, ogni istanza legale in L soddisferà ogni dipendenza funzionale in F^+

Teorema 3

- **Hp**
  - $n, k \in \mathbb{N}$
  - $D_1, \ldots, D_n$ domini
  - $R \subseteq D_1 \times \ldots \times D_n$ relazione
  - $R(A_1, \ldots, A_n)$ schema relazionale
  - $F_1, \ldots, F_k$ dipendenze funzionali su R
  - $F = \{F_1, \ldots, F_k\}$
- **Th**
  - $F \subseteq F^+$

Teorema 4

- **Hp**
  - $n, k \in \ltimes$
  - $D_1, \ldots, D_n$ domini
  - $R \subseteq D_1 \times \ldots \times D_n$ relazione
  - $R(A_1, \ldots, A_n)$ schema relazionale
  - $X, Y \subseteq R(A_1, \ldots, A_n) \mid Y \subseteq X$
  - $F_1, \ldots, F_k$ dipendenze funzionali su R
  - $F = \{F_1, \ldots, F_k\}$
- **Th**
  - $X \to Y \in F^+$

Assiomi di Armstrong

Definizione 9

- **Assiomi di Armstrong**
  - $n, k \in \mathbb{N}$
  - $D_1, \ldots, D_n$ domini
  - $R \subseteq D_1 \times \ldots \times D_n$ relazione
  - $R(A_1, \ldots, A_n)$ schema relazionale
  - $F_1, \ldots, F_k$ dipendenze funzionali su R
  - $F = \{F_1, \ldots, F_k\}$
  - F^A è l'**insieme delle dipendenze funzionali ottenute partendo da F applicando gli assiomi di Armstrong**
  - $\forall X, Y \subseteq R(A_1, \ldots, A_n) \quad X \to Y \in F \implies X \to Y \in F^A$
  - $\forall X, Y \subseteq R(A_1, \ldots, A_n) \quad Y \subseteq X \implies X \to Y \in F^A$ è detto **assioma della riflessività**
  - $\forall X, Y, Z \subseteq R(A_1, \ldots, A_n) \quad X \to Y \in F^A \implies XZ \to YZ \in F^A$ è detto **assioma dell'aumento**

- $\forall X, Y \subseteq R(A_1, \ldots, A_n) \quad X \to Y, Y \to Z \in F^A \implies X \to Z \in F^A$ è detto **assioma della transitività**

Teorema 5

- **Hp**
  - $n, k \in \mathbb{N}$
  - $D_1, \ldots, D_n$ domini
  - $R \subseteq D_1 \times \ldots \times D_n$ relazione
  - $R(A_1, \ldots, A_n)$ schema relazionale
  - $F_1, \ldots, F_k$ dipendenze funzionali su R
  - $F = \{F_1, \ldots, F_k\}$
- **Th**
  - $F \subseteq F^A$

Teorema 6

- **Hp**
  - $n, k \in \mathbb{N}$
  - $D_1, \ldots, D_n$ domini
  - $R \subseteq D_1 \times \ldots \times D_n$ relazione
  - $R(A_1, \ldots, A_n)$ schema relazionale
  - $X, Y, Z \subseteq R(A_1, \ldots, A_n)$
  - $F_1, \ldots, F_k$ dipendenze funzionali su R
  - $F = \{F_1, \ldots, F_k\}$
- **Th**
  - $X \to Y, X \to Z \in F^A \implies X \to YZ \in F^A$ è detta **regola dell'unione**

Teorema 7

- **Hp**
  - $n, k \in \mathbb{N}$
  - $D_1, \ldots, D_n$ domini
  - $R \subseteq D_1 \times \ldots \times D_n$ relazione
  - $R(A_1, \ldots, A_n)$ schema relazionale
  - $X, Y, Z \subseteq R(A_1, \ldots, A_n)$
  - $F_1, \ldots, F_k$ dipendenze funzionali su R
  - $F = \{F_1, \ldots, F_k\}$
- **Th**
  - $X \to Y \in F^A \land Z \subseteq Y \implies X \to Z \in F^A$ è detta **regola della decomposizione**

Teorema 8

- **Hp**
  - $n, k \in \mathbb{N}$
  - $D_1, \ldots, D_n$ domini
  - $R \subseteq D_1 \times \ldots \times D_n$ relazione
  - $R(A_1, \ldots, A_n)$ schema relazionale
  - $X, Y, Z \subseteq R(A_1, \ldots, A_n)$
  - $F_1, \ldots, F_k$ dipendenze funzionali su R

    - $F = \{F_1, \dots, F_k\}$
- **Th**
    - $X \to Y, WY \to Z \in F^A \implies XW \to Z \in F^A$ è detta **regola della pseudotransitività**

Teorema 9

- **Hp**
    - $n, k \in \mathbb{N}$
    - $i, j \in [1, n] \mid i < j$
    - $D_1, \dots, D_n$ domini
    - $R \subseteq D_1 \times \dots \times D_n$ relazione
    - $R(A_1, \dots, A_n)$ schema relazionale
    - $A_i, \dots, A_j \subseteq R(A_1, \dots, A_n)$
    - $F_1, \dots, F_k$ dipendenze funzionali su R
    - $F = \{F_1, \dots, F_k\}$
- **Th**
    - $X \to A_i \dots A_j \in F^A \iff \forall h \in [i, j] \quad X \to A_h \in F^A$

Definizione 10

- **Chiusura di un insieme di attributi**

    - $n, k \in \mathbb{N}$
    - $D_1, \dots, D_n$ domini
    - $R \subseteq D_1 \times \dots \times D_n$ relazione
    - $R(A_1, \dots, A_n)$ schema relazionale
    - $X \subseteq R(A_1, \dots, A_n)$
    - $F_1, \dots, F_k$ dipendenze funzionali su R
    - $F = \{F_1, \dots, F_k\}$
    - $X_F^+ := \{A \subseteq R(A_1, \dots, A_n) \mid X \to A \in F^A\}$ è detta **chiusura di X rispetto ad F**
        - ovvero, è l'insieme degli attributi funzionalmente dipendenti da X attraverso l'applicazione degli assiomi di Armstrong

Teorema 10

- **Hp**
    - $n, k \in \mathbb{N}$
    - $D_1, \dots, D_n$ domini
    - $R \subseteq D_1 \times \dots \times D_n$ relazione
    - $R(A_1, \dots, A_n)$ schema relazionale
    - $X \subseteq R(A_1, \dots, A_n)$
    - $F_1, \dots, F_k$ dipendenze funzionali su R
    - $F = \{F_1, \dots, F_k\}$
- **Th**
    - $X \subseteq X_F^+$

Teorema 11

- **Hp**
  - $n, k \in \mathbb{N}$
  - $D_1, \ldots, D_n$ domini
  - $R \subseteq D_1 \times \ldots \times D_n$ relazione
  - $R(A_1, \ldots, A_n)$ schema relazionale
  - $X, Y \subseteq R(A_1, \ldots, A_n)$
  - $F_1, \ldots, F_k$ dipendenze funzionali su R
  - $F = \{F_1, \ldots, F_k\}$
- **Th**
  - $X \to Y \in F^A \iff Y \subseteq X_F^+$

Teorema 12

- **Hp**
  - $n, k \in \mathbb{N}$
  - $D_1, \ldots, D_n$ domini
  - $R \subseteq D_1 \times \ldots \times D_n$ relazione
  - $R(A_1, \ldots, A_n)$ schema relazionale
  - $F_1, \ldots, F_k$ dipendenze funzionali su R
  - $F = \{F_1, \ldots, F_k\}$
- **Th**
  - $F^+ = F^A$

Teorema 13

- **Input**
  - $n, k \in \mathbb{N}$
  - $D_1, \ldots, D_n$ domini
  - $R \subseteq D_1 \times \ldots \times D_n$ relazione
  - $R(A_1, \ldots, A_n)$ schema relazionale
  - $X \subseteq R(A_1, \ldots, A_n)$
  - $F_1, \ldots, F_k$ dipendenze funzionali su R
  - $F = \{F_1, \ldots, F_k\}$
- **Output**
  - $Z = X_F^+$
- **Algoritmo**
  - $Z := X$
  - $S := \{A \in R(A_1, \ldots, A_n) \mid \exists Y, V \subseteq R(A_1, \ldots, A_n), Y \to V \in F : A \in V \land Y \subseteq Z\}$
  - `while` $S \not\subseteq Z$:
    - $Z = Z \cup S$
    - $S = \{A \in R(A_1, \ldots, A_n) \mid \exists Y, V \subseteq R(A_1, \ldots, A_n), Y \to V \in F : A \in V \land Y \subseteq Z\}$
- **Oss**
  - l'algoritmo calcola X_F^+
  - di fatto, il loop `while` applica gli assiomi di Armstrong

Definizione 11

- **Insiemi di dipendenze funzionali equivalenti**

    - $n, k, h \in \mathbb{N}$
    - $D_1, \ldots, D_n$ domini
    - $R \subseteq D_1 \times \ldots \times D_n$ relazione
    - $R(A_1, \ldots, A_n)$ schema relazionale
    - $F_1, \ldots, F_k, G_1, \ldots, G_h$ dipendenze funzionali su R
    - $F = \{F_1, \ldots, F_k\}$
    - $G = \{G_1, \ldots, G_h\}$
    - $F \equiv G \iff F^+ = F^+$, e F e G sono detti **equivalenti**

Teorema 14

- **Hp**
    - $n, k, h \in \mathbb{N}$
    - $D_1, \ldots, D_n$ domini
    - $R \subseteq D_1 \times \ldots \times D_n$ relazione
    - $R(A_1, \ldots, A_n)$ schema relazionale
    - $F_1, \ldots, F_k, G_1, \ldots, G_h$ dipendenze funzionali su R
    - $F = \{F_1, \ldots, F_k\}$
    - $G = \{G_1, \ldots, G_h\}$
- **Th**
    - $F \xrightarrow{A} G \iff G \subseteq F^+$

Terza forma normale

Definizione 12

- **Chiave e superchiave di una relazione**

    - $n \in \mathbb{N}$
    - $D_1, \ldots, D_n$ domini
    - $R \subseteq D_1 \times \ldots \times D_n$ relazione
    - $R(A_1, \ldots, A_n)$ schema relazionale
    - $X \subseteq R(A_1, \ldots, A_n)$ è detta **superchiave di** $R \iff \forall r$ istanza di $R \quad \forall t_1, t_2 \in r \quad t_1[X] = t_2[X] \implies t_1 = t_2$
    - X è detta **chiave di** $R \iff X$ è la chiave di R con minor numero di attributi

Teorema 15

- **Hp**
    - $n \in \mathbb{N}$
    - $D_1, \ldots, D_n$ domini
    - $R \subseteq D_1 \times \ldots \times D_n$ relazione
    - $R(A_1, \ldots, A_n)$ schema relazionale
    - $K \subseteq R(A_1, \ldots, A_n)$
- **Th**
    - K superchiave di $R \iff K \to R \in F^+$
    - K chiave di $R \iff K$ superchiave di $R \land \nexists K' \subseteq K \mid K' \to R \in F^+$

Teorema 16

- **Hp**
  - $n, k \in \mathbb{N}$
  - $D_1, \dots, D_n$ domini
  - $R \subseteq D_1 \times \dots \times D_n$ relazione
  - $R(A_1, \dots, A_n)$ schema relazionale
  - $X \subseteq R(A_1, \dots, A_n)$
  - $F_1, \dots, F_k$ dipendenze funzionali su R
  - $F = \{F_1, \dots, F_k\}$
- **Th**
  - $X_F^+ = R \iff X$ superchiave di R

Teorema 17

- **Hp**
  - $n, k \in \mathbb{N}$
  - $D_1, \dots, D_n$ domini
  - $R \subseteq D_1 \times \dots \times D_n$ relazione
  - $R(A_1, \dots, A_n)$ schema relazionale
  - $F_1, \dots, F_k$ dipendenze funzionali
  - $F = \{F_1, \dots, F_k\}$
  - $X = \bigcap\limits_{F_i := A \to B \in F} R - (B - A)$
- **Th**
  - $X_F^+ = R \iff X$ chiave unica in R

Definizione 13

- **Attributo primo**
  - $n \in \mathbb{N}$
  - $D_1, \dots, D_n$ domini
  - $R \subseteq D_1 \times \dots \times D_n$ relazione
  - $R(A_1, \dots, A_n)$ schema relazionale
  - $X \in R(A_1, \dots, A_n)$ è **primo** $\iff \exists K \subseteq R(A_1, \dots, A_n)$ chiave di $R \mid X \in K$

Definizione 14

- **Terza forma normale**
  - $n, k \in \mathbb{N}$
  - $D_1, \dots, D_n$ domini
  - $R \subseteq D_1 \times \dots \times D_n$ relazione
  - $R(A_1, \dots, A_n)$ schema relazionale
  - $K \subseteq R(A_1, \dots, A_n)$ chiave di R
  - $F_1, \dots, F_k$ dipendenze funzionali su R
  - $F = \{F_1, \dots, F_k\}$
  - R è in **terza forma normale** $\iff \forall A \in R(A_1, \dots, A_n), X \subseteq R(A_1, \dots, A_n) \mid X \to A \in F^+, A \notin X \quad A \in K \lor K \subseteq X$

  - ovvero, per ogni dipendenza funzionale non banale in F^+, o il determinante è superchiave, o il determinato è primo
  - la terza forma normale garantisce che non ci siano problemi di ridondanza, dunque non vi sono problemi di inserimento, di aggiornamento e di eliminazione

Teorema 18

- **Hp**
  - $n, k \in \mathbb{N}$
  - $D_1, \ldots, D_n$ domini
  - $R \subseteq D_1 \times \ldots \times D_n$ relazione
  - $R(A_1, \ldots, A_n)$ schema relazionale
  - $K \subseteq R(A_1, \ldots, A_n)$ chiave di R
  - $F_1, \ldots, F_k$ dipendenze funzionali su R
  - $F = \{F_1, \ldots, F_k\}$
- **Th**
  - R in terza forma normale $\iff \forall X, Y \subseteq R(A_1, \ldots, A_n) \mid Y := A_i \ldots A_j, X \to Y \in F^+, Y \nsubseteq X \quad \forall h \in [i, j] \quad A_h \in K \vee K \subseteq X$, dunque basta decomporre $X \to Y \in F^+$ e controllare gli $A_i \ldots A_j$

Definizione 15

- **Dipendenza parziale**
  - $n, k \in \mathbb{N}$
  - $D_1, \ldots, D_n$ domini
  - $R \subseteq D_1 \times \ldots \times D_n$ relazione
  - $R(A_1, \ldots, A_n)$ schema relazionale
  - $K \subseteq R(A_1, \ldots, A_n)$ chiave di R
  - $F_1, \ldots, F_k$ dipendenze funzionali su R
  - $F = \{F_1, \ldots, F_k\}$
  - $A \in R(A_1, \ldots, A_n)$
  - $X \subseteq R(A_1, \ldots, A_n) \mid X \to A \in F^+, A \notin X$
  - $X \to A \in F^+$ è detta **dipendenza parziale su** $R \iff A$ non primo e $X \subset K$
    - in particolare $X \neq K$
- **Dipendenza transitiva**
  - $n, k \in \mathbb{N}$
  - $D_1, \ldots, D_n$ domini
  - $R \subseteq D_1 \times \ldots \times D_n$ relazione
  - $R(A_1, \ldots, A_n)$ schema relazionale
  - $F_1, \ldots, F_k$ dipendenze funzionali su R
  - $F = \{F_1, \ldots, F_k\}$
  - $A \in R(A_1, \ldots, A_n)$
  - $X \subseteq R(A_1, \ldots, A_n) \mid X \to A \in F^+, A \notin X$
  - $X \to A \in F^+$ è detta **dipendenza parziale su** $R \iff A$ non primo e $\forall K \subseteq R(A_1, \ldots, A_n)$ chiave di $R \quad K \cap X = \varnothing \vee X \subset K$
    - in particolare $\forall K \subseteq R(A_1, \ldots, A_n)$ chiave di $R \quad X \neq K$

Teorema 19

- **Hp**
  - $n, k \in \mathbb{N}$
  - $D_1, \ldots, D_n$ domini
  - $R \subseteq D_1 \times \ldots \times D_n$ relazione
  - $R(A_1, \ldots, A_n)$ schema relazionale
  - $K \subseteq R(A_1, \ldots, A_n)$ chiave di R
  - $F_1, \ldots, F_k$ dipendenze funzionali su R
  - $F = \{F_1, \ldots, F_k\}$
- **Th**
  - R in terza forma normale $\iff \nexists X, Y \subseteq R(A_1, \ldots, A_n) \mid X \to Y \in F^+$ dipendenza parziale o $X \to Y \in F^+$ dipendenza transitiva

Definizione 16

- **Forma Normale di Boyce-Codd**

  - $n, k \in \mathbb{N}$
  - $D_1, \ldots, D_n$ domini
  - $R \subseteq D_1 \times \ldots \times D_n$ relazione
  - $R(A_1, \ldots, A_n)$ schema relazionale
  - $K \subseteq R(A_1, \ldots, A_n)$ chiave di R
  - $F_1, \ldots, F_k$ dipendenze funzionali su R
  - $F = \{F_1, \ldots, F_k\}$
  - R è in **forma normale di Boyce-Codd** $\iff \forall X \subseteq R(A_1, \ldots, A_n), X$ determinante $\exists K \subseteq R(A_1, \ldots, A_n)$ superchiave $\mid X \subseteq K$
    - questa forma normale preserva le dipendenze funzionali soddisfatte da ogni istanza legale di ogni sottoschema di R, senza perdita di informazioni
    - inoltre, permette di ricostruire attraverso il join naturale ogni istanza legale di ogni sotto schema di R, senza aggiunta di informazioni

Teorema 20

- **Hp**
  - $n, k \in \mathbb{N}$
  - $D_1, \ldots, D_n$ domini
  - $R \subseteq D_1 \times \ldots \times D_n$ relazione
  - $R(A_1, \ldots, A_n)$ schema relazionale $\mid R$ in forma normale di Boyce-Codd
  - $F_1, \ldots, F_k$ dipendenze funzionali su R
  - $F = \{F_1, \ldots, F_k\}$
- **Th**
  - R in terza forma normale

Definizione 17

- **Ricoprimento**
- !!! **DEFINISCI SOTTOSCHEMA**

  - $n, N \in \mathbb{N}$

- $D_1, \ldots, D_n$ domini
- $R \subseteq D_1 \times \ldots \times D_n$ relazione
- $R(A_1, \ldots, A_n)$ schema relazionale
- $R_1, \ldots, R_N$ sottoschemi di R
- $R_1, \ldots, R_N$ **ricoprimento di** $R \iff \bigcup_{i=1}^{N} R_i = R$

- **Decomposizione**
  - $n, N \in \mathbb{N}$
  - $D_1, \ldots, D_n$ domini
  - $R \subseteq D_1 \times \ldots \times D_n$ relazione
  - $R(A_1, \ldots, A_n)$ schema relazionale
  - $C := \{R_1, \ldots, R_N\}$ ricoprimento di R
  - $\forall \rho \subseteq C \quad \rho$ è detto **decomposizione di** R
- **Proiezione di un insieme di dipendenze su un sottoschema**
  - $n, k, h \in \mathbb{N}$
  - $D_1, \ldots, D_n$ domini
  - $R \subseteq D_1 \times \ldots \times D_n$ relazione
  - $R(A_1, \ldots, A_n)$ schema relazionale
  - $F_1, \ldots, F_k$ dipendenze funzionali su R
  - $F = \{F_1, \ldots, F_k\}$
  - $\rho = R_1, \ldots, R_h$ decomposizione di R
  - $i \in [1, h]$
  - $R_i \in \rho$ sottoschema di R in ρ
  - $\pi_{R_i}(F) := \{X \to Y \in F^+ \mid XY \subseteq R_i\}$ è detta **proiezione di** F **su** R_i
    - $\pi_{R_i}(F)$ è l'insieme delle dipendenze funzionali in F che hanno determinante e determinato in R_i
- **Preservazione di un insieme di dipendenze funzionali**
  - $n, k, h \in \mathbb{N}$
  - $D_1, \ldots, D_n$ domini
  - $R \subseteq D_1 \times \ldots \times D_n$ relazione
  - $R(A_1, \ldots, A_n)$ schema relazionale
  - $F_1, \ldots, F_k$ dipendenze funzionali su R
  - $F = \{F_1, \ldots, F_k\}$
  - $\rho = R_1, \ldots, R_h$ decomposizione di R
  - $G = \bigcup_{i=1}^{h} \pi_{R_i}(F)$
  - ρ **preserva** $F \iff F \equiv G$

Teorema 21

- **Hp**
  - $n, k, h \in \mathbb{N}$
  - $D_1, \ldots, D_n$ domini
  - $R \subseteq D_1 \times \ldots \times D_n$ relazione
  - $R(A_1, \ldots, A_n)$ schema relazionale

- $F_1, \dots, F_k$ dipendenze funzionali su R
    - $F = \{F_1, \dots, F_k\}$
    - $\rho = R_1, \dots, R_h$ decomposizione di R
    - $G = \bigcup_{i=1}^{h} \pi_{R_i}(F)$
- **Th**
    - ρ preserva $F \iff G^+ \supseteq F$

Teorema 22

- **Input**
    - $n, k, h \in \mathbb{N}$
    - $D_1, \dots, D_n$ domini
    - $R \subseteq D_1 \times \dots \times D_n$ relazione
    - $R(A_1, \dots, A_n)$ schema relazionale
    - $X \subseteq R(A_1, \dots, A_n)$
    - $F_1, \dots, F_k$ dipendenze funzionali su R
    - $F = \{F_1, \dots, F_k\}$
    - $\rho = R_1, \dots, R_h$ decomposizione di R
    - $G = \bigcup_{i=1}^{h} \pi_{R_i}(F)$
- **Output**
    - $Z = X_G^+$
- **Algoritmo**
    - !!! **TODO**
- **Oss**
    - l'algoritmo calcola X_G^+ senza calcolare F^+
        * il calcolo di F^+ ha costo computazionale esponenziale

Teorema 23

- **Input**
    - $n, k, h \in \mathbb{N}$
    - $D_1, \dots, D_n$ domini
    - $R \subseteq D_1 \times \dots \times D_n$ relazione
    - $R(A_1, \dots, A_n)$ schema relazionale
    - $F_1, \dots, F_k$ dipendenze funzionali su R
    - $F = \{F_1, \dots, F_k\}$
    - $\rho = R_1, \dots, R_h$ decomposizione di R
    - $G = \bigcup_{i=1}^{h} \pi_{R_i}(F)$
- **Output**
    - `True/False`
- **Algoritmo**
    - `for` $X \to Y$ `in` F:
        * `if` $Y \nsubseteq X_G^+$:
            · `return False`
    - `return True`

- **Oss**
  - l'algoritmo controlla se ρ preserva F
  - per lemma precedente $Y \subseteq X_G^+ \implies X \to Y \in G^A = G^+$
  - allora $\exists X \to Y \in F \mid Y \nsubseteq X_G^+ \implies X \to Y \notin G^+ \implies F \nsubseteq G^+ \implies \rho$ non preserva F per dimostrazione precedente
    * per calcolare X_G^+ viene utilizzato l'algoritmo precedentemente mostrato, che non richiede il calcolo di F^+