DISCLAIMER

Questo è un file che contiene una lista di tutti i teoremi, osservazioni, definizioni, esempi, lemmi, corollari, formule e proposizioni **senza alcuna dimostrazione**, di conseguenza molte informazioni risulteranno essere senza alcun contesto se già non si conosce la materia. Detto questo, buona lettura.

Algebra relazionale

Definizione 1

- **Dominio**
  - A insieme finito o infinito
  - A, in algebra relazionale, è detto **dominio**

Definizione 2

- **Prodotto cartesiano**
  - $n \in \mathbb{N}$
  - $D_1, \ldots, D_n$ domini
  - $D_1 \times \ldots \times D_n := \{v_1, \ldots, v_n) \mid v_1 \in D_1, \ldots, v_n \in D_n\}$ è detto **prodotto cartesiano dei domini** $D_1, \ldots D_n$

Definizione 3

- **Relazione**
  - $n \in \mathbb{N}$
  - $D_1, \ldots, D_n$ domini
  - $k \in [1, n]$
  - $R \subseteq D_1 \times \ldots \times D_k$ è detta **relazione di grado** k
    - $(t_1, \ldots, t_k) \in R$ è detta **tupla di cardinalità** k
    - $\forall i \in [1, k] \quad (t_1, \ldots, t_k)[i] = t_i$
    - $\forall a, b \in [1, k] \mid a < b \quad (t_1, \ldots, t_k)[a, b] = (t_a, \ldots, t_b)$

Definizione 4

- **Schema relazionale**
  - $n \in \mathbb{N}$
  - $D_1, \ldots, D_n$ domini
  - $R \subseteq D_1 \times \ldots \times D_n$ relazione
  - $R(A_1, \ldots, A_n)$ è detto **schema relazionale**
    - R, in algebra relazionale, è categorizzata tramite **attributi**, denotati con A_i, nomi con i quali si etichettano le colonne della tabella, dunque uno schema relazionale è l'insieme delle etichette
    - $\forall i \in [1, n] \quad \mathrm{dom}(A_i) := D_i$ è detto **dominio di** A_i
    - $\forall i \in [1, n] \quad A_i \in \mathrm{dom}(A_i)$

- **Istanza di una relazione**
  - $n \in \mathbb{N}$
  - $D_1, \ldots, D_n$ domini
  - $k \in [1, n]$
  - $R \subseteq D_1 \times \ldots \times D_k$ relazione
  - $R(A_1, \ldots, A_n)$ schema relazionale
  - $D_1, \ldots, D_k$, l'insieme delle tuple di R, è detta **istanza della relazione** R

Operazioni

Definizione 5

- **Proiezione**
  - $n \in \mathbb{N}$
  - $D_1, \ldots, D_n$ domini
  - $R \subseteq D_1 \times \ldots \times D_n$ relazione
  - $R(A_1, \ldots, A_n)$ schema relazionale
  - $a, b \in [1, n] \mid a < b$
  - $\pi_{A_a, \ldots, A_b}(R) := D_a \times \ldots \times D_b$ è detta **proiezione di** R, associata ad uno schema relazionale $R(A_a, \ldots, A_b)$
- **Selezione**
  - $n \in \mathbb{N}$
  - $D_1, \ldots, D_n$ domini
  - $R \subseteq D_1 \times \ldots \times D_n$ relazione
  - $R(A_1, \ldots, A_n)$ schema relazionale
  - C espressione booleana
  - $\sigma_C(R) \subseteq D_1 \times \ldots \times D_n$ è detta **selezione di** R
    - corrisponde all'insieme delle righe della tabella che rendono la condizione C vera
- **Rinominazione**
  - $n \in \mathbb{N}$
  - $D_1, \ldots, D_n$ domini
  - $R \subseteq D_1 \times \ldots \times D_n$ relazione
  - $R(A_1, \ldots, A_n)$ schema relazionale
  - $R' = \rho_{A'_1 \leftarrow A_1}(R)$, dove ρ è detto **operatore di rinominazione**
    - R' sarà uno schema relazionale con la stessa istanza di R, ma con A_1 rinominato con A'_1
- **Unione**
  - $n \in \mathbb{N}$
  - $D_1, \ldots, D_n, D'_1, \ldots, D'_n$ domini $\mid \forall i \in [1, n] \quad D_i = D'_i$
  - $R_1 \subseteq D_1 \times \ldots \times D_n$ relazione
  - $R_2 \subseteq D'_1 \times \ldots \times D'_n$ relazione
  - $R_1(A_1, \ldots, A_n)$ schema relazionale

- $R_2(A'_1, \ldots, A'_n)$ schema relazionale
- r_1 istanza di R_1
- r_2 istanza di R_2
- $r_1 \cup r_2 := \{t \mid t \in r_1 \lor t \in r_2\}$ è detta **unione delle istanze** r_1 **e** r_2
  - dunque, l'unione di istanze è definita solamente per istanze con stesso numero di attributi, e attributi con stesso dominio

- **Differenza**
  - $n \in \mathbb{N}$
  - $D_1, \ldots, D_n, D'_1, \ldots, D'_n$ domini $\mid \forall i \in [1, n] \quad D_i = D'_i$
  - $R_1 \subseteq D_1 \times \ldots \times D_n$ relazione
  - $R_2 \subseteq D'_1 \times \ldots \times D'_n$ relazione
  - $R_1(A_1, \ldots, A_n)$ schema relazionale
  - $R_2(A'_1, \ldots, A'_n)$ schema relazionale
  - r_1 istanza di R_1
  - r_2 istanza di R_2
  - $r_2 - r_1 := \{t \mid t \in r_2 \land t \notin r_1\}$ è detta **differenza delle istanze** r_1 **e** r_2
    - dunque, la differenza di istanze è definita solamente per istanze con stesso numero di attributi, e attributi con stesso dominio

- **Intersezione**
  - $n \in \mathbb{N}$
  - $D_1, \ldots, D_n, D'_1, \ldots, D'_n$ domini $\mid \forall i \in [1, n] \quad D_i = D'_i$
  - $R_1 \subseteq D_1 \times \ldots \times D_n$ relazione
  - $R_2 \subseteq D'_1 \times \ldots \times D'_n$ relazione
  - $R_1(A_1, \ldots, A_n)$ schema relazionale
  - $R_2(A'_1, \ldots, A'_n)$ schema relazionale
  - r_1 istanza di R_1
  - r_2 istanza di R_2
  - $r_1 \cap r_2 := r_2 - (r_2 - r_1)$ è detta **intersezione delle istanze** r_1 **e** r_2
    - dunque, la differenza di istanze è definita solamente per istanze con stesso numero di attributi, e attributi con stesso dominio

- **Prodotto cartesiano**
  - $n \in \mathbb{N}$
  - $D_1, \ldots, D_n, D'_1, \ldots, D'_n$ domini $\mid \forall i \in [1, n] \quad D_i = D'_i$
  - $R_1 \subseteq D_1 \times \ldots \times D_n$ relazione
  - $R_2 \subseteq D'_1 \times \ldots \times D'_n$ relazione
  - $R_1(A_1, \ldots, A_n)$ schema relazionale
  - $R_2(A'_1, \ldots, A'_n)$ schema relazionale
  - r_1 istanza di R_1
  - r_2 istanza di R_2
  - $r_1 \times r_2 := \{(t_1, t_2) \mid t_1 \in r_1 \land t_2 \in r_2\}$ è detto **prodotto cartesiano delle istanze** r_2 **e** r_2

Definizione 6

- **Hp**
  - $n \in \mathbb{N}$

- $D_1, \dots, D_B, \dots, D_n, D'_1, \dots, D'_B, \dots, D'_n$ domini $\mid \forall i \in [1, n] \quad D_i = D'_i$
- $R_1 \subseteq D_1 \times \ldots \times D_B \times \ldots \times D_n$ relazione
- $R_2 \subseteq D'_1 \times \ldots \times D'_B \times \ldots \times D'_n$ relazione
- $R_1(A_1, \dots, B, \dots, A_n)$ schema relazionale
- $R_2(A'_1, \dots, B, \dots, A'_n)$ schema relazionale
- r_1 istanza di R_1
- r_2 istanza di R_2

- **Oss**
  - in questa situazione, si verifica che $r_1 \times r_2$ conterrà delle tuple senza significato, poiché esiste un attributo con stesso nome in R_1 e in R_2, ovvero B
  - per risolvere questo problema, spesso l'operatore $\times$ viene utilizzato congiuntamente a ρ, σ e π
    - infatti, per ottenere un prodotto cartesiano con significato è necessario prima rinominare l'attributo in comune in uno dei due schemi relazionali, per differenziarli, e dunque $R'_2 = \rho_{B' \leftarrow B}(R_2)$, e sia r'_2 l'istanza di R'_2
    - successivamente, facendo $r_1 \times r'_2$, si otterra un'istanza contenente delle tuple ancora senza significato, che sarà possibile rimuovere selezionando attraverso $\sigma_{B'=B}(r_1 \times r'_2)$
    - infine, a questo punto si avranno due colonne perfettamente identiche, e dunque è sufficiente proiettare prendendo solo una delle colonne tra B e B', e quindi $\pi_{A_1, \dots, B, \dots, A_n, A'_1, \dots, \hat{B'}, \dots, A'_n}(\sigma_{B=B'}(r_1 \times r'_2))$ è il prodotto cartesiano cercato

Def

- **Join naturale**
  - $n \in \mathbb{N}$
  - $D_1, \dots, D_n, D'_1, \dots, D'_n$ domini $\mid \forall i \in [1, n] \quad D_i = D'_i$
  - $R_1 \subseteq D_1 \times \ldots \times D_n$ relazione
  - $R_2 \subseteq D'_1 \times \ldots \times D'_n$ relazione
  - $R_1(A_1, \dots, A_n)$ schema relazionale
  - $R_2(A'_1, \dots, A'_n)$ schema relazionale
  - r_1 istanza di R_1
  - r_2 istanza di R_2
  - $r_1 \bowtie r_2$ è detto **join naturale di r_1 e r_2** !!! **SCRIVERE BENE LA DEFINIZIONE**
    - dunque, il join naturale costituisce il prodotto cartesiano "con significato" discusso precedentemente **SCRIVERE BENE LA DEFINIZIONE**
    - dunque, il join naturale costituisce il prodotto cartesiano "con significato" discusso precedentemente

Teorema 1

- **!!! 4.30**

Teorema 2

- **Hp**
  - $n \in \mathbb{N}$

- $D_1, \ldots, D_n, D'_1, \ldots, D'_n$ domini $\mid \forall i \in [1, n] \quad D_i = D'_i$
- $R_1 \subseteq D_1 \times \ldots \times D_n$ relazione
- $R_2 \subseteq D'_1 \times \ldots \times D'_n$ relazione
- $R_1(A_1, \ldots, A_n)$ schema relazionale
- $R_2(A'_1, \ldots, A'_n)$ schema relazionale
- $\nexists A \in \{A_1, \ldots, A_n, A'_1, \ldots, A'_n\} \mid \exists A' \in \{A_1, \ldots, A_n, A'_1, \ldots, A'_n\} : A = A'$, dunque gli attributi di R_1 ed R_2 sono tutti distinti
- r_1 istanza di R_1
- r_2 istanza di R_2

- **Th**
  - $r_1 \times r_2 = r_1 \bowtie r_2$

Dipendenze funzionali

Definizione 7

- **Dipendenza funzionale**
  - $n \in \mathbb{N}$
  - $D_1, \ldots, D_n$ domini
  - $R \subseteq D_1 \times \ldots \times D_n$ relazione
  - $R(A_1, \ldots, A_n)$ schema relazionale
  - $X = \{A_i \mid A_i \in R(A_1, \ldots, A_n)\} \mid X \neq \varnothing$
  - $Y = \{A_i \mid A_i \in R(A_1, \ldots, A_n)\} \mid Y \neq \varnothing$
  - $X \to Y$ è detta **dipendenza funzionale su** R
  - r istanza di R **soddisfa** $X \to Y \iff \forall t_1, t_2 \in R \quad t_1[X] = t_2[X] \implies t_1[Y] = t_2[Y]$
- **Istanza legale**
  - $n, k \in \mathbb{N}$
  - $D_1, \ldots, D_n$ domini
  - $R \subseteq D_1 \times \ldots \times D_n$ relazione
  - $R(A_1, \ldots, A_n)$ schema relazionale
  - $F_1, \ldots, F_k$ dipendenze funzionali su R
  - $F = \{F_1, \ldots, F_k\}$
  - r **istanza di** R **legale su** $F \iff \forall i \in [1, k] \quad r$ soddisfa F_i

Definizione 8

- **Chiusura di un insieme di dipendenze funzionali**
  - $n, k \in \mathbb{N}$
  - $D_1, \ldots, D_n$ domini
  - $R \subseteq D_1 \times \ldots \times D_n$ relazione
  - $R(A_1, \ldots, A_n)$ schema relazionale
  - $F_1, \ldots, F_k$ dipendenze funzionali su R
  - $F = \{F_1, \ldots, F_k\}$
  - $L = \{r \text{ istanza di } R \mid r \text{ legale su } F\}$

- $F^+ := \bigcup_{r \in L} \{\text{dipendenze funzionali in } r\}$
  - ovvero, è l'insieme delle dipendenze funzionali derivabili da ogni istanza legale su F
  - di fatto, ogni istanza legale in L soddisferà ogni dipendenza funzionale in F^+

Teorema 3

- **Hp**
  - $n, k \in \mathbb{N}$
  - $D_1, \ldots, D_n$ domini
  - $R \subseteq D_1 \times \ldots \times D_n$ relazione
  - $R(A_1, \ldots, A_n)$ schema relazionale
  - $F_1, \ldots, F_k$ dipendenze funzionali su R
  - $F = \{F_1, \ldots, F_k\}$
- **Th**
  - $F \subseteq F^+$

Teorema 4

- **Hp**
  - $n, k \in \ltimes$
  - $D_1, \ldots, D_n$ domini
  - $R \subseteq D_1 \times \ldots \times D_n$ relazione
  - $R(A_1, \ldots, A_n)$ schema relazionale
  - $X, Y \subseteq R(A_1, \ldots, A_n) \mid Y \subseteq X$
  - $F_1, \ldots, F_k$ dipendenze funzionali su R
  - $F = \{F_1, \ldots, F_k\}$
- **Th**
  - $X \rightarrow Y \in F^+$

Definizione 9

- **Chiave di una relazione**

  - $n \in \mathbb{N}$
  - $D_1, \ldots, D_n$ domini
  - $R \subseteq D_1 \times \ldots \times D_n$ relazione
  - $R(A_1, \ldots, A_n)$ schema relazionale
  - $X \subseteq R(A_1, \ldots, A_n)$ è detta **superchiave di** $R \iff \forall r$ istanza di $R \quad \forall t_1, t_2 \in r \quad t_1[X] = t_2[X] \implies t_1 = t_2$
  - X è detta **chiave di** $R \iff X$ è la chiave di R con minor numero di attributi

Teorema 5

- **Hp**
  - $n \in \mathbb{N}$
  - $D_1, \ldots, D_n$ domini
  - $R \subseteq D_1 \times \ldots \times D_n$ relazione

- $R(A_1, \ldots, A_n)$ schema relazionale
- $K \subseteq R(A_1, \ldots, A_n)$

- **Th**
  - K superchiave di $R \iff K \to R \in F^+$
  - K chiave di $R \iff K$ superchiave di $R \land \nexists K' \subseteq K \mid K' \to R$

Assiomi di Armstrong

Definizione 10

- **Assiomi di Armstrong**

  - $n, k \in \mathbb{N}$
  - $D_1, \ldots, D_n$ domini
  - $R \subseteq D_1 \times \ldots \times D_n$ relazione
  - $R(A_1, \ldots, A_n)$ schema relazionale
  - $F_1, \ldots, F_k$ dipendenze funzionali su R
  - $F = \{F_1, \ldots, F_k\}$
  - F^A è l'**insieme delle dipendenze funzionali ottenute partendo da** F **applicando gli assiomi di Armstrong**
  - $\forall X, Y \subseteq R(A_1, \ldots, A_n) \quad X \to Y \in F \implies X \to Y \in F^A$
  - $\forall X, Y \subseteq R(A_1, \ldots, A_n) \quad Y \subseteq X \implies X \to Y \in F^A$ è detto **assioma della riflessività**
  - $\forall X, Y, Z \subseteq R(A_1, \ldots, A_n) \quad X \to Y \in F^A \implies XZ \to YZ \in F^A$ è detto **assioma dell'aumento**
  - $\forall X, Y \subseteq R(A_1, \ldots, A_n) \quad X \to Y, Y \to Z \in F^A \implies X \to Z \in F^A$ è detto **assioma della transitività**

Teorema 6

- **Hp**
  - $n, k \in \mathbb{N}$
  - $D_1, \ldots, D_n$ domini
  - $R \subseteq D_1 \times \ldots \times D_n$ relazione
  - $R(A_1, \ldots, A_n)$ schema relazionale
  - $F_1, \ldots, F_k$ dipendenze funzionali su R
  - $F = \{F_1, \ldots, F_k\}$
- **Th**
  - $F \subseteq F^A$

Teorema 7

- **Hp**
  - $n, k \in \mathbb{N}$
  - $D_1, \ldots, D_n$ domini
  - $R \subseteq D_1 \times \ldots \times D_n$ relazione
  - $R(A_1, \ldots, A_n)$ schema relazionale
  - $X, Y, Z \subseteq R(A_1, \ldots, A_n)$

- $F_1, \ldots, F_k$ dipendenze funzionali su R
  - $F = \{F_1, \ldots, F_k\}$
- **Th**
  - $X \to Y, X \to Z \in F^A \implies X \to YZ \in F^A$ è detta **regola dell'unione**

Teorema 8

- **Hp**
  - $n, k \in \mathbb{N}$
  - $D_1, \ldots, D_n$ domini
  - $R \subseteq D_1 \times \ldots \times D_n$ relazione
  - $R(A_1, \ldots, A_n)$ schema relazionale
  - $X, Y, Z \subseteq R(A_1, \ldots, A_n)$
  - $F_1, \ldots, F_k$ dipendenze funzionali su R
  - $F = \{F_1, \ldots, F_k\}$
- **Th**
  - $X \to Y \in F^A \land Z \subseteq Y \implies X \to Z \in F^A$ è detta **regola della decomposizione**

Teorema 9

- **Hp**
  - $n, k \in \mathbb{N}$
  - $D_1, \ldots, D_n$ domini
  - $R \subseteq D_1 \times \ldots \times D_n$ relazione
  - $R(A_1, \ldots, A_n)$ schema relazionale
  - $X, Y, Z \subseteq R(A_1, \ldots, A_n)$
  - $F_1, \ldots, F_k$ dipendenze funzionali su R
  - $F = \{F_1, \ldots, F_k\}$
- **Th**
  - $X \to Y, WY \to Z \in F^A \implies XW \to Z \in F^A$ è detta **regola della pseudotransitività**

Teorema 10

- **Hp**
  - $n, k \in \mathbb{N}$
  - $i, j \in [1, n] \mid i < j$
  - $D_1, \ldots, D_n$ domini
  - $R \subseteq D_1 \times \ldots \times D_n$ relazione
  - $R(A_1, \ldots, A_n)$ schema relazionale
  - $A_i, \ldots, A_j \subseteq R(A_1, \ldots, A_n)$
  - $F_1, \ldots, F_k$ dipendenze funzionali su R
  - $F = \{F_1, \ldots, F_k\}$
- **Th**
  - $X \to A_i \ldots A_j \in F^A \iff \forall h \in [i, j] \quad X \to A_h \in F^A$

Definizione 11

- **Chiusura di un insieme di attributi**

- $n, k \in \mathbb{N}$
- $D_1, \ldots, D_n$ domini
- $R \subseteq D_1 \times \ldots \times D_n$ relazione
- $R(A_1, \ldots, A_n)$ schema relazionale
- $X \subseteq R(A_1, \ldots, A_n)$
- $F_1, \ldots, F_k$ dipendenze funzionali su R
- $F = \{F_1, \ldots, F_k\}$
- $X_F^+ := \{A \subseteq R(A_1, \ldots, A_n) \mid X \to A \in F^A\}$ è detta **chiusura di X rispetto ad F**
  - ovvero, è l'insieme degli attributi funzionalmente dipendenti da X attraverso l'applicazione degli assiomi di Armstrong

Teorema 11

- **Hp**
  - $n, k \in \mathbb{N}$
  - $D_1, \ldots, D_n$ domini
  - $R \subseteq D_1 \times \ldots \times D_n$ relazione
  - $R(A_1, \ldots, A_n)$ schema relazionale
  - $X \subseteq R(A_1, \ldots, A_n)$
  - $F_1, \ldots, F_k$ dipendenze funzionali su R
  - $F = \{F_1, \ldots, F_k\}$
- **Th**
  - $X \subseteq X_F^+$

Teorema 12

- **Hp**
  - $n, k \in \mathbb{N}$
  - $D_1, \ldots, D_n$ domini
  - $R \subseteq D_1 \times \ldots \times D_n$ relazione
  - $R(A_1, \ldots, A_n)$ schema relazionale
  - $X, Y \subseteq R(A_1, \ldots, A_n)$
  - $F_1, \ldots, F_k$ dipendenze funzionali su R
  - $F = \{F_1, \ldots, F_k\}$
- **Th**
  - $X \to Y \in F^A \iff Y \subseteq X_F^+$

Teorema 13

- **Hp**
  - $n, k \in \mathbb{N}$
  - $D_1, \ldots, D_n$ domini
  - $R \subseteq D_1 \times \ldots \times D_n$ relazione
  - $R(A_1, \ldots, A_n)$ schema relazionale
  - $F_1, \ldots, F_k$ dipendenze funzionali su R
  - $F = \{F_1, \ldots, F_k\}$
- **Th**
  - $F^+ = F^A$