

# DISCLAIMER

Questo è un file che contiene una lista di tutti i teoremi, osservazioni, definizioni, esempi, lemmi, corollari, formule e proposizioni **senza alcuna dimostrazione**, di conseguenza molte informazioni risulteranno essere senza alcun contesto se già non si conosce la materia. Detto questo, buona lettura.

---

## Algebra relazionale

### Definizione 1

- **Dominio**
  - $A$  insieme finito o infinito
  - $A$ , in algebra relazionale, è detto **dominio**

### Definizione 2

- **Prodotto cartesiano**
  - $n \in \mathbb{N}$
  - $D_1, \dots, D_n$  domini
  - $D_1 \times \dots \times D_n := \{v_1, \dots, v_n \mid v_1 \in D_1, \dots, v_n \in D_n\}$  è detto **prodotto cartesiano dei domini**  $D_1, \dots, D_n$

### Definizione 3

- **Relazione**
  - $n \in \mathbb{N}$
  - $D_1, \dots, D_n$  domini
  - $k \in [1, n]$
  - $R \subseteq D_1 \times \dots \times D_k$  è detta **relazione di grado  $k$** 
    - $(t_1, \dots, t_k) \in R$  è detta **tupla di cardinalità  $k$**
    - $\forall i \in [1, k] \quad (t_1, \dots, t_k)[i] = t_i$
    - $\forall a, b \in [1, k] \mid a < b \quad (t_1, \dots, t_k)[a, b] = (t_a, \dots, t_b)$

### Definizione 4

- **Schema relazionale**
  - $n \in \mathbb{N}$
  - $D_1, \dots, D_n$  domini
  - $R \subseteq D_1 \times \dots \times D_n$  relazione
  - $R(A_1, \dots, A_n)$  è detto **schema relazionale**
    - $R$ , in algebra relazionale, è categorizzata tramite **attributi**, denotati con  $A_i$ , nomi con i quali si etichettano le colonne della tabella, dunque uno schema relazionale è l'insieme delle etichette
    - $\forall i \in [1, n] \quad \text{dom}(A_i) := D_i$  è detto **dominio di  $A_i$**
    - $\forall i \in [1, n] \quad A_i \in \text{dom}(A_i)$

- **Istanza di una relazione**

- $n \in \mathbb{N}$
  - $D_1, \dots, D_n$  domini
  - $k \in [1, n]$
  - $R \subseteq D_1 \times \dots \times D_k$  relazione
  - $R(A_1, \dots, A_n)$  schema relazionale
  - $D_1, \dots, D_k$ , l'insieme delle tuple di  $R$ , è detta **istanza della relazione**  $R$
- 

## Operazioni

### Definizione 5

- **Proiezione**

- $n \in \mathbb{N}$
- $D_1, \dots, D_n$  domini
- $R \subseteq D_1 \times \dots \times D_n$  relazione
- $R(A_1, \dots, A_n)$  schema relazionale
- $a, b \in [1, n] \mid a < b$
- $\pi_{A_a, \dots, A_b}(R) := D_a \times \dots \times D_b$  è detta **proiezione di**  $R$ , associata ad uno schema relazionale  $R(A_a, \dots, A_b)$

- **Selezione**

- $n \in \mathbb{N}$
- $D_1, \dots, D_n$  domini
- $R \subseteq D_1 \times \dots \times D_n$  relazione
- $R(A_1, \dots, A_n)$  schema relazionale
- $C$  espressione booleana
- $\sigma_C(R) \subseteq D_1 \times \dots \times D_n$  è detta **selezione di**  $R$ 
  - corrisponde all'insieme delle righe della tabella che rendono la condizione  $C$  vera

- **Rinominazione**

- $n \in \mathbb{N}$
- $D_1, \dots, D_n$  domini
- $R \subseteq D_1 \times \dots \times D_n$  relazione
- $R(A_1, \dots, A_n)$  schema relazionale
- $R' = \rho_{A'_1 \leftarrow A_1}(R)$ , dove  $\rho$  è detto **operatore di rinominazione**
  - $R'$  sarà uno schema relazionale con la stessa istanza di  $R$ , ma con  $A_1$  rinominato con  $A'_1$

- **Unione**

- $n \in \mathbb{N}$
- $D_1, \dots, D_n, D'_1, \dots, D'_n$  domini  $\mid \forall i \in [1, n] \quad D_i = D'_i$
- $R_1 \subseteq D_1 \times \dots \times D_n$  relazione
- $R_2 \subseteq D'_1 \times \dots \times D'_n$  relazione
- $R_1(A_1, \dots, A_n)$  schema relazionale

- $R_2(A'_1, \dots, A'_n)$  schema relazionale
- $r_1$  istanza di  $R_1$
- $r_2$  istanza di  $R_2$
- $r_1 \cup r_2 := \{t \mid t \in r_1 \vee t \in r_2\}$  è detta **unione delle istanze  $r_1$  e  $r_2$** 
  - dunque, l'unione di istanze è definita solamente per istanze con stesso numero di attributi, e attributi con stesso dominio
- **Differenza**
  - $n \in \mathbb{N}$
  - $D_1, \dots, D_n, D'_1, \dots, D'_n$  domini  $\mid \forall i \in [1, n] \quad D_i = D'_i$
  - $R_1 \subseteq D_1 \times \dots \times D_n$  relazione
  - $R_2 \subseteq D'_1 \times \dots \times D'_n$  relazione
  - $R_1(A_1, \dots, A_n)$  schema relazionale
  - $R_2(A'_1, \dots, A'_n)$  schema relazionale
  - $r_1$  istanza di  $R_1$
  - $r_2$  istanza di  $R_2$
  - $r_2 - r_1 := \{t \mid t \in r_2 \wedge t \notin r_1\}$  è detta **differenza delle istanze  $r_1$  e  $r_2$** 
    - dunque, la differenza di istanze è definita solamente per istanze con stesso numero di attributi, e attributi con stesso dominio
- **Intersezione**
  - $n \in \mathbb{N}$
  - $D_1, \dots, D_n, D'_1, \dots, D'_n$  domini  $\mid \forall i \in [1, n] \quad D_i = D'_i$
  - $R_1 \subseteq D_1 \times \dots \times D_n$  relazione
  - $R_2 \subseteq D'_1 \times \dots \times D'_n$  relazione
  - $R_1(A_1, \dots, A_n)$  schema relazionale
  - $R_2(A'_1, \dots, A'_n)$  schema relazionale
  - $r_1$  istanza di  $R_1$
  - $r_2$  istanza di  $R_2$
  - $r_1 \cap r_2 := r_2 - (r_2 - r_1)$  è detta **intersezione delle istanze  $r_1$  e  $r_2$** 
    - dunque, la differenza di istanze è definita solamente per istanze con stesso numero di attributi, e attributi con stesso dominio
- **Prodotto cartesiano**
  - $n \in \mathbb{N}$
  - $D_1, \dots, D_n, D'_1, \dots, D'_n$  domini  $\mid \forall i \in [1, n] \quad D_i = D'_i$
  - $R_1 \subseteq D_1 \times \dots \times D_n$  relazione
  - $R_2 \subseteq D'_1 \times \dots \times D'_n$  relazione
  - $R_1(A_1, \dots, A_n)$  schema relazionale
  - $R_2(A'_1, \dots, A'_n)$  schema relazionale
  - $r_1$  istanza di  $R_1$
  - $r_2$  istanza di  $R_2$
  - $r_1 \times r_2 := \{(t_1, t_2) \mid t_1 \in r_1 \wedge t_2 \in r_2\}$  è detto **prodotto cartesiano delle istanze  $r_1$  e  $r_2$**

## Definizione 6

- **Hp**
  - $n \in \mathbb{N}$

- $D_1, \dots, D_B, \dots, D_n, D'_1, \dots, D'_B, \dots, D'_n$  domini  $\mid \forall i \in [1, n] \quad D_i = D'_i$
- $R_1 \subseteq D_1 \times \dots \times D_B \times \dots \times D_n$  relazione
- $R_2 \subseteq D'_1 \times \dots \times D'_B \times \dots \times D'_n$  relazione
- $R_1(A_1, \dots, B, \dots, A_n)$  schema relazionale
- $R_2(A'_1, \dots, B, \dots, A'_n)$  schema relazionale
- $r_1$  istanza di  $R_1$
- $r_2$  istanza di  $R_2$
- **Oss**
  - in questa situazione, si verifica che  $r_1 \times r_2$  conterrà delle tuple senza significato, poiché esiste un attributo con stesso nome in  $R_1$  e in  $R_2$ , ovvero  $B$
  - per risolvere questo problema, spesso l'operatore  $\times$  viene utilizzato congiuntamente a  $\rho, \sigma$  e  $\pi$ 
    - \* infatti, per ottenere un prodotto cartesiano con significato è necessario prima rinominare l'attributo in comune in uno dei due schemi relazionali, per differenziarli, e dunque  $R'_2 = \rho_{B' \leftarrow B}(R_2)$ , e sia  $r'_2$  l'istanza di  $R'_2$
    - \* successivamente, facendo  $r_1 \times r'_2$ , si otterrà un'istanza contenente delle tuple ancora senza significato, che sarà possibile rimuovere selezionando attraverso  $\sigma_{B'=B}(r_1 \times r'_2)$
    - \* infine, a questo punto si avranno due colonne perfettamente identiche, e dunque è sufficiente proiettare prendendo solo una delle colonne tra  $B$  e  $B'$ , e quindi  $\pi_{A_1, \dots, B, \dots, A_n, A'_1, \dots, B', \dots, A'_n}(\sigma_{B=B'}(r_1 \times r'_2))$  è il prodotto cartesiano cercato

## Def

- **Join naturale**
  - $n \in \mathbb{N}$
  - $D_1, \dots, D_n, D'_1, \dots, D'_n$  domini  $\mid \forall i \in [1, n] \quad D_i = D'_i$
  - $R_1 \subseteq D_1 \times \dots \times D_n$  relazione
  - $R_2 \subseteq D'_1 \times \dots \times D'_n$  relazione
  - $R_1(A_1, \dots, A_n)$  schema relazionale
  - $R_2(A'_1, \dots, A'_n)$  schema relazionale
  - $r_1$  istanza di  $R_1$
  - $r_2$  istanza di  $R_2$
  - $r_1 \bowtie r_2$  è detto **join naturale di  $r_1$  e  $r_2$  !!!** **SCRIVERE BENE LA DEFINIZIONE**
    - dunque, il join naturale costituisce il prodotto cartesiano “con significato” discusso precedentemente **SCRIVERE BENE LA DEFINIZIONE**
    - dunque, il join naturale costituisce il prodotto cartesiano “con significato” discusso precedentemente

## Teorema 1

- !!! 4.30

## Teorema 2

- **Hp**
  - $n \in \mathbb{N}$

- $D_1, \dots, D_n, D'_1, \dots, D'_n$  domini  $\mid \forall i \in [1, n] \quad D_i = D'_i$
  - $R_1 \subseteq D_1 \times \dots \times D_n$  relazione
  - $R_2 \subseteq D'_1 \times \dots \times D'_n$  relazione
  - $R_1(A_1, \dots, A_n)$  schema relazionale
  - $R_2(A'_1, \dots, A'_n)$  schema relazionale
  - $\nexists A \in \{A_1, \dots, A_n, A'_1, \dots, A'_n\} \mid \exists A' \in \{A_1, \dots, A_n, A'_1, \dots, A'_n\} : A = A'$ , dunque gli attributi di  $R_1$  ed  $R_2$  sono tutti distinti
  - $r_1$  istanza di  $R_1$
  - $r_2$  istanza di  $R_2$
  - **Th**
    - $r_1 \times r_2 = r_1 \bowtie r_2$
- 

## Dipendenze funzionali

### Definizione 7

- **Dipendenza funzionale**
  - $n \in \mathbb{N}$
  - $D_1, \dots, D_n$  domini
  - $R \subseteq D_1 \times \dots \times D_n$  relazione
  - $R(A_1, \dots, A_n)$  schema relazionale
  - $X = \{A_i \mid A_i \in R(A_1, \dots, A_n)\} \mid X \neq \emptyset$
  - $Y = \{A_i \mid A_i \in R(A_1, \dots, A_n)\} \mid Y \neq \emptyset$
  - $X \rightarrow Y$  è detta **dipendenza funzionale su  $R$**
  - $r$  istanza di  $R$  **soddisfa**  $X \rightarrow Y \iff \forall t_1, t_2 \in R \quad t_1[X] = t_2[X] \implies t_1[Y] = t_2[Y]$
- **Istanza legale**
  - $n, k \in \mathbb{N}$
  - $D_1, \dots, D_n$  domini
  - $R \subseteq D_1 \times \dots \times D_n$  relazione
  - $R(A_1, \dots, A_n)$  schema relazionale
  - $F_1, \dots, F_k$  dipendenze funzionali su  $R$
  - $F = \{F_1, \dots, F_k\}$
  - $r$  **istanza legale di  $R$  su  $F$**   $\iff \forall i \in [1, k] \quad r$  soddisfa  $F_i$

### Definizione 8

- **Chiusura di un insieme di dipendenze funzionali**
  - $n, k \in \mathbb{N}$
  - $D_1, \dots, D_n$  domini
  - $R \subseteq D_1 \times \dots \times D_n$  relazione
  - $R(A_1, \dots, A_n)$  schema relazionale
  - $F_1, \dots, F_k$  dipendenze funzionali su  $R$
  - $F = \{F_1, \dots, F_k\}$
  - $L = \{r \text{ istanza di } R \mid r \text{ legale su } F\}$

- $F^+ := \bigcup_{r \in L} \{\text{dipendenze funzionali in } r\}$ 
  - ovvero, è l'insieme delle dipendenze funzionali derivabili da ogni istanza legale su  $F$

### Teorema 3

- **Hp**
  - $n, k \in \mathbb{N}$
  - $D_1, \dots, D_n$  domini
  - $R \subseteq D_1 \times \dots \times D_n$  relazione
  - $R(A_1, \dots, A_n)$  schema relazionale
  - $F_1, \dots, F_k$  dipendenze funzionali su  $R$
  - $F = \{F_1, \dots, F_k\}$
- **Th**
  - $F \subseteq F^+$

### Teorema 4

- **Hp**
  - $n, k \in \mathbb{N}$
  - $D_1, \dots, D_n$  domini
  - $R \subseteq D_1 \times \dots \times D_n$  relazione
  - $R(A_1, \dots, A_n)$  schema relazionale
  - $X, Y \subseteq R(A_1, \dots, A_n) \mid Y \subseteq X$
  - $F_1, \dots, F_k$  dipendenze funzionali su  $R$
  - $F = \{F_1, \dots, F_k\}$
- **Th**
  - $X \rightarrow Y \in F^+$

### Definizione 9

- **Chiave di una relazione**
  - $n \in \mathbb{N}$
  - $D_1, \dots, D_n$  domini
  - $R \subseteq D_1 \times \dots \times D_n$  relazione
  - $R(A_1, \dots, A_n)$  schema relazionale
  - $X \subseteq R(A_1, \dots, A_n)$  è detta **superchiave di  $R$**   $\iff \forall r$  istanza di  $R \quad \forall t_1, t_2 \in r \quad t_1[X] = t_2[X] \implies t_1 = t_2$
  - $X$  è detta **chiave di  $R$**   $\iff X$  è la chiave di  $R$  con minor numero di attributi

### Teorema 5

- **Hp**
  - $n \in \mathbb{N}$
  - $D_1, \dots, D_n$  domini
  - $R \subseteq D_1 \times \dots \times D_n$  relazione
  - $R(A_1, \dots, A_n)$  schema relazionale
  - $K \subseteq R(A_1, \dots, A_n)$

- **Th**
  - $K$  superchiave di  $R \iff K \rightarrow R \in F^+$
  - $K$  chiave di  $R \iff K$  superchiave di  $R \wedge \nexists K' \subseteq K \mid K' \rightarrow R$

## Definizione 10

- **Assiomi di Armstrong**
  - $n, k \in \mathbb{N}$
  - $D_1, \dots, D_n$  domini
  - $R \subseteq D_1 \times \dots \times D_n$  relazione
  - $R(A_1, \dots, A_n)$  schema relazionale
  - $F_1, \dots, F_k$  dipendenze funzionali su  $R$
  - $F = \{F_1, \dots, F_k\}$
  - $F^A$  è l'insieme delle dipendenze funzionali ottenute partendo da  $F$  applicando gli assiomi di Armstrong
  - $\forall X, Y \subseteq R(A_1, \dots, A_n) \quad X \rightarrow Y \in F \implies X \rightarrow Y \in F^A$
  - $\forall X, Y \subseteq R(A_1, \dots, A_n) \quad Y \subseteq X \implies X \rightarrow Y \in F^A$  è detto **assioma della riflessività**
  - $\forall X, Y, Z \subseteq R(A_1, \dots, A_n) \quad X \rightarrow Y \in F^A \implies XZ \rightarrow YZ \in F^A$  è detto **assioma dell'aumento**
  - $\forall X, Y \subseteq R(A_1, \dots, A_n) \quad X \rightarrow Y, Y \rightarrow Z \in F^A \implies X \rightarrow Z \in F^A$  è detto **assioma della transitività**
- **Regole derivate dagli assiomi di Armstrong**
  - $n, k \in \mathbb{N}$
  - $D_1, \dots, D_n$  domini
  - $R \subseteq D_1 \times \dots \times D_n$  relazione
  - $R(A_1, \dots, A_n)$  schema relazionale
  - $F_1, \dots, F_k$  dipendenze funzionali su  $R$
  - $F = \{F_1, \dots, F_k\}$
  - $\forall X, Y, Z \in R(A_1, \dots, A_n) \quad X \rightarrow Y, X \rightarrow Z \in F^A \implies X \rightarrow YZ \in F^A$  è detta **regola dell'unione**
  - $\forall X, Y, Z \in R(A_1, \dots, A_n) \quad X \rightarrow Y \in F^A \wedge Z \subseteq Y \implies X \rightarrow Z \in F^A$  è detta **regola della decomposizione**
  - $\forall X, Y, Z, W \in R(A_1, \dots, A_n) \quad X \rightarrow Y, WY \rightarrow Z \in F^A \implies WX \rightarrow Z \in F^A$  è detta **regola della pseudotransitività**

## Teorema 6

- **Hp**
  - $n, k \in \mathbb{N}$
  - $D_1, \dots, D_n$  domini
  - $R \subseteq D_1 \times \dots \times D_n$  relazione
  - $R(A_1, \dots, A_n)$  schema relazionale
  - $F_1, \dots, F_k$  dipendenze funzionali su  $R$
  - $F = \{F_1, \dots, F_k\}$
- **Th**
  - $F^+ = F^A$