



SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

“SAPIENZA” UNIVERSITÀ DI ROMA
INGEGNERIA DELL'INFORMAZIONE,
INFORMATICA E STATISTICA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

Linguaggi di Programmazione

Appunti integrati con il libro "TODO", TODO 1, Autore 2, ...

Author
Alessio Bandiera

16 ottobre 2023

Indice

Informazioni e Contatti	1
1 Induzione	2
1.1 Algebre induttive	2
1.1.1 Assiomi di Peano	2
1.1.2 Algebre induttive	4
1.2 Strutture dati induttive	7
1.2.1 Liste	7
1.2.2 Alberi binari	8
2 Paradigma funzionale	11
2.1 Grammatiche	11
2.1.1 Definizioni	11
2.2 Assegnazioni	14
2.2.1 Definizioni	14
2.2.2 Ambienti	16
2.2.3 Semantica operativa	17
2.3 Valutazioni e scoping	18
2.3.1 Definizioni	18
2.4 Funzioni	22
2.4.1 Definizioni	22
2.4.2 Semantiche operative	24
2.5 Lambda calcolo	28
2.5.1 Numeri di Church	28

Informazioni e Contatti

Prerequisiti consigliati:

- Algebra
- TODO

Segnalazione errori ed eventuali migliorie:

Per segnalare eventuali errori e/o migliorie possibili, si prega di utilizzare il **sistema di Issues fornito da GitHub** all'interno della pagina della repository stessa contenente questi ed altri appunti (link fornito al di sotto), utilizzando uno dei template già forniti compilando direttamente i campi richiesti.

Gli appunti sono in continuo aggiornamento, pertanto, previa segnalazione, si prega di controllare se l'errore sia ancora presente nella versione più recente.

Licenza di distribuzione:

These documents are distributed under the [GNU Free Documentation License](#), a form of copyleft intended to be used on manuals, textbooks or other types of document in order to assure everyone the effective freedom to copy and redistribute it, with or without modifications, either commercially or non-commercially.

Contatti dell'autore e ulteriori link:

- Github: <https://github.com/ph04>
- Email: alessio.bandiera02@gmail.com
- LinkedIn: [Alessio Bandiera](#)

1

Induzione

1.1 Algebre induttive

1.1.1 Assiomi di Peano

Definizione 1.1.1.1: Assiomi di Peano

Gli **assiomi di Peano** sono 5 assiomi che definiscono l'insieme \mathbb{N} , e sono i seguenti:

- i) $0 \in \mathbb{N}$
- ii) $\exists \text{succ} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, o equivalentemente, $\forall x \in \mathbb{N} \quad \text{succ}(x) \in \mathbb{N}$
- iii) $\forall x, y \in \mathbb{N} \quad x \neq y \implies \text{succ}(x) \neq \text{succ}(y)$
- iv) $\nexists x \in \mathbb{N} \mid \text{succ}(x) = 0$
- v) $\forall S \subseteq \mathbb{N} \quad (0 \in S \wedge (\forall x \in S \quad \text{succ}(x) \in S)) \implies S = \mathbb{N}$

Esempio 1.1.1.1 (\mathbb{N} di von Neumann). Una rappresentazione dell'insieme dei numeri naturali \mathbb{N} alternativa alla canonica

$$\mathbb{N} := \{0, 1, 2, \dots\}$$

è stata fornita da John von Neumann. Indicando tale rappresentazione con \aleph , si ha che, per Neumann

$$\begin{aligned} 0_{\aleph} &:= \emptyset = \{\} \\ 1_{\aleph} &:= \{0_{\aleph}\} = \{\{\}\} \\ 2_{\aleph} &:= \{0_{\aleph}, 1_{\aleph}\} = \{\{\}, \{\{\}\}\} \\ &\vdots \end{aligned}$$

e la funzione succ_{\aleph} è definita come segue

$$\text{succ}_{\aleph} : \aleph \rightarrow \aleph : x_{\aleph} \mapsto x_{\aleph} \cup \{x_{\aleph}\} = \{\mu_{\aleph} \in \aleph \mid |\mu_{\aleph}| \leq |x_{\aleph}|\}$$

ed in particolare $\forall x_{\mathbb{N}} \in \mathbb{N} \quad |x_{\mathbb{N}}| + 1 = |\text{succ}_{\mathbb{N}}(x_{\mathbb{N}})|$.

È possibile verificare che tale rappresentazione di \mathbb{N} soddisfa gli assiomi di Peano, in quanto

- i) $0_{\mathbb{N}} := \emptyset \in \mathbb{N}$;
- ii) $\exists \text{succ}_{\mathbb{N}} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, definita precedentemente;
- iii) $\forall x_{\mathbb{N}}, y_{\mathbb{N}} \in \mathbb{N} \quad x_{\mathbb{N}} \neq y_{\mathbb{N}} \implies |x_{\mathbb{N}}| \neq |y_{\mathbb{N}}| \implies |\text{succ}_{\mathbb{N}}(x_{\mathbb{N}})| \neq |\text{succ}_{\mathbb{N}}(y_{\mathbb{N}})| \implies \text{succ}_{\mathbb{N}}(x_{\mathbb{N}}) \neq \text{succ}_{\mathbb{N}}(y_{\mathbb{N}})$;
- iv) per assurdo, sia $x_{\mathbb{N}} \in \mathbb{N}$ tale che $\text{succ}_{\mathbb{N}}(x_{\mathbb{N}}) = 0_{\mathbb{N}} := \emptyset$; per definizione $\text{succ}_{\mathbb{N}}(x_{\mathbb{N}}) := \{\mu_{\mathbb{N}} \in \mathbb{N} \mid |\mu_{\mathbb{N}}| \leq |x_{\mathbb{N}}|\}$, ma non esiste $\mu_{\mathbb{N}} \in \mathbb{N}$ con cardinalità minore o uguale 0, e dunque $\nexists x_{\mathbb{N}} \in \mathbb{N} \mid \text{succ}_{\mathbb{N}}(x_{\mathbb{N}}) = 0_{\mathbb{N}}$;
- v) per assurdo, sia $S \subseteq \mathbb{N}$ tale che $0_{\mathbb{N}} \in S$ e $\forall x_S \in S \quad \text{succ}_{\mathbb{N}}(x_S) \in S$ ma $S \neq \mathbb{N} \iff \mathbb{N} - S \neq \emptyset \implies \exists \zeta_{\mathbb{N}} \in \mathbb{N} - S$, ed in particolare $\zeta_{\mathbb{N}} \neq 0_{\mathbb{N}}$; \mathbb{N} è chiuso su $\text{succ}_{\mathbb{N}}$ per il secondo assioma di Peano, e dunque $\zeta_{\mathbb{N}} \neq 0_{\mathbb{N}} \implies \exists \zeta'_{\mathbb{N}} \in \mathbb{N} \mid \text{succ}_{\mathbb{N}}(\zeta'_{\mathbb{N}}) = \zeta_{\mathbb{N}}$, e sicuramente $\zeta'_{\mathbb{N}} \notin S$, poiché altrimenti $\zeta_{\mathbb{N}} \in S$ anch'esso in quanto S è chiuso rispetto a $\text{succ}_{\mathbb{N}}$; allora, ripetendo il ragionamento analogo per l'intera catena di predecessori, S risulterebbe essere vuoto, ma ciò è impossibile poiché $0_{\mathbb{N}} \in S$ in ipotesi \nexists .

Principio 1.1.1.1: Principio di Induzione

Sia P una proprietà che vale per $n = 0$, e dunque $P(0)$ è vera; inoltre, per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha che $P(n) \implies P(n+1)$; allora, $P(n)$ è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$.

In simboli, utilizzando la notazione della logica formale, si ha che

$$\frac{P(0) \quad \frac{\forall n \in \mathbb{N} \quad P(n)}{P(n+1)}}{\forall n \in \mathbb{N} \quad P(n)}$$

Osservazione 1.1.1.1: Quinto assioma di Peano

Si noti che il quinto degli assiomi di Peano ([Definizione 1.1.1.1](#)) equivale al principio di induzione ([Principio 1.1.1.1](#)). Infatti, il quinto assioma afferma che qualsiasi sottoinsieme S di \mathbb{N} avente lo 0, e caratterizzato dalla chiusura sulla funzione di successore succ , coincide con \mathbb{N} stesso.

1.1.2 Algebre induttive

Definizione 1.1.2.1: Segnatura di una funzione

Data una funzione f , si definisce

$$f : A \rightarrow B$$

come **segnatura della funzione** f , dove A è detto **dominio**, denotato con $\text{dom}(f)$ e B **codominio** di f .

Definizione 1.1.2.2: Algebra

Una **struttura algebrica**, o più semplicemente **algebra**, consiste di un insieme *non vuoto*, talvolta chiamato **insieme sostegno** (*carrier set* o *domain*), fornito di una o più operazioni su tale insieme, quest'ultime caratterizzate da un numero finito di assiomi da soddisfare.

Se A è il carrier set, e $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ sono delle operazioni definite su A , allora con

$$(A, \gamma_1, \dots, \gamma_n)$$

si indica l'algebra costituita da tali componenti, e questo simbolismo prende il nome di **segnatura dell'algebra**.

Esempio 1.1.2.1 (Strutture algebriche con singola operazione). Esempi di strutture algebriche con un'operazione binaria sono i seguenti:

- semigrupperi
- monoidi
- gruppi
- gruppi abeliani

Esempio 1.1.2.2 (Strutture algebriche con due operazioni). Esempi di strutture algebriche con due operazioni binarie sono i seguenti:

- semianelli
- anelli
- campi

Definizione 1.1.2.3: Insieme unità

Con **insieme unità** si intende un qualsiasi insieme tale che $|1| = 1$, e verrà indicato attraverso il simbolo $\mathbb{1}$.

Definizione 1.1.2.4: Funzione nullaria

Dato un insieme A , con **funzione nullaria** si intende una qualsiasi funzione con segnatura

$$f : \mathbb{1} \rightarrow A$$

Osservazione 1.1.2.1: Iniettività della funzione nullaria

Si noti che ogni funzione nullaria è iniettiva, poiché il dominio è costituito da un solo elemento.

Definizione 1.1.2.5: Algebra induttiva

Sia A un insieme, e siano $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ funzioni definite su A di arbitraria arietà; allora, $(A, \gamma_1, \dots, \gamma_n)$ è definita **algebra induttiva** se si verificano le seguenti:

- i) $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ sono iniettive
- ii) $\forall i, j \in [1, n] \mid i \neq j \quad \text{im}(\gamma_i) \cap \text{im}(\gamma_j) = \emptyset$, ovvero, le immagini dei costruttori sono a due a due disgiunte
- iii) $\forall S \subseteq A \quad (\forall i \in [1, n], a_1, \dots, a_k \in S, k \in \mathbb{N} \quad \gamma_i(a_1, \dots, a_k) \in S) \implies S = A$, o equivalentemente, in A non devono essere contenute algebre induttive.

Le funzioni $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ prendono il nome di **costruttori dell'algebra**.

Osservazione 1.1.2.2: Terzo assioma delle algebre induttive

Si noti che nel terzo assioma della [Definizione 1.1.2.5](#) anche $S = \emptyset$ è un valido sottoinsieme di A , ma poiché non esistono $a_1, \dots, a_k \in \emptyset$, in esso ogni qualificazione è vera a vuoto. Di conseguenza, nel momento in cui si ammette $S = \emptyset$ nel terzo assioma, l'algebra risulta essere non induttiva necessariamente (a meno dell'algebra vuota).

Di conseguenza, questo terzo assioma forza la necessità della presenza di un costruttore nullario all'interno di ogni algebra induttiva, in modo da non poter ammettere $S = \emptyset$, poiché l'algebra deve essere chiusa su ognuno dei suoi costruttori.

Esempio 1.1.2.3 (Numeri naturali). $(\mathbb{N}, +)$ non è un algebra induttiva, poiché esistono $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{N}$ con $x_1 \neq x_3$ e $x_2 \neq x_4$ tali che $x_1 + x_2 = x_3 + x_4$; ad esempio, $2 + 3 = 5 = 1 + 4$, e $2 \neq 1, 3 \neq 4$.

Esempio 1.1.2.4 (Algebra di Boole). Dato l'insieme $B = \{\text{true}, \text{false}\}$, e la funzione \neg definita come segue

$$\neg : B \rightarrow B : x \mapsto \begin{cases} \text{false} & x = \text{true} \\ \text{true} & x = \text{false} \end{cases}$$

è possibile dimostrare che l'algebra (B, \neg) non è induttiva; infatti, nonostante \neg sia iniettiva, e la seconda proprietà della [Definizione 1.1.2.5](#) sia vera a vuoto, (B, \neg) non

presenta costruttore nullario, e dunque non può costituire un'algebra induttiva (si noti l'Osservazione 1.1.2.2).

Esempio 1.1.2.5 (Algebre induttive). Sia zero la funzione definita come segue

$$\text{zero} : \mathbb{1} \rightarrow \mathbb{N} : x \mapsto 0$$

e si prenda in esame l'algebra $(\mathbb{N}, \text{succ}, \text{zero})$; allora si ha che

i) succ e zero sono iniettive, poiché

- succ è iniettiva per il terzo assioma di Peano (Definizione 1.1.1.1)
- zero è iniettiva per l'Osservazione 1.1.2.1

ii) $\text{im}(\text{succ}) \cap \text{im}(\text{zero}) = (\mathbb{N} - \{0\}) \cap \{0\} = \emptyset$

iii) TODO

Definizione 1.1.2.6: Omomorfismo

Un **omomorfismo** è una funzione, tra due algebre dello stesso tipo, tale da preservarne le strutture.

Formalmente, siano (A, μ_1, \dots, μ_n) e $(B, \delta_1, \dots, \delta_n)$ due algebre tali che ogni funzione μ_i abbia la stessa arietà e lo stesso numero di parametri esterni (denotati con k) di δ_i , pari rispettivamente ad η_i ed a ν_i , per qualche $i \in [1, n]$; allora, una funzione $f : A \rightarrow B$ è detta essere un **omomorfismo** tra le due algebre, se e solo se

$$\begin{aligned} \forall a_1, \dots, a_{\eta_1} \quad f(\mu_1(a_1, \dots, a_{\eta_1}), k_1, \dots, k_{\nu_1}) &= \delta_1(f(a_1), \dots, f(a_{\eta_1}), k_1, \dots, k_{\nu_1}) \\ &\vdots \\ \forall a_1, \dots, a_{\eta_n} \quad f(\mu_n(a_1, \dots, a_{\eta_n}), k_1, \dots, k_{\nu_n}) &= \delta_n(f(a_1), \dots, f(a_{\eta_n}), k_1, \dots, k_{\nu_n}) \end{aligned}$$

Esempio 1.1.2.6 (Omomorfismi). Si considerino i gruppi $(\mathbb{R}, +)$ e $(\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$, e sia f definita come segue:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{>0} : x \mapsto e^x$$

allora, si ha che

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad f(x) \cdot f(y) = e^x \cdot e^y = e^{x+y} = f(x+y)$$

dunque f è un omomorfismo di gruppi.

Definizione 1.1.2.7: Isomorfismo

Un **isomorfismo** è un omomorfismo biiettivo.

Esempio 1.1.2.7 (Isomorfismi). Si consideri l'omomorfismo dell'Esempio 1.1.2.6; si noti che

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \mid x \neq y \quad e^x \neq e^y \implies f(x) \neq f(y)$$

e dunque f è iniettiva; inoltre

$$\forall y \in \mathbb{R}_{>0} \quad \exists x \in \mathbb{R} \mid f(x) = e^x = y \iff y = \ln(x)$$

e dunque f è suriettiva. Allora, f è biettiva, e poiché è un omomorfismo, risulta essere un isomorfismo.

1.2 Strutture dati induttive

1.2.1 Liste

Definizione 1.2.1.1: Liste

Una **lista** è una collezione ordinata di elementi, e l'insieme delle liste di lunghezza finita viene denotato con $\text{List}\langle T \rangle$, dove T è il tipo degli elementi che le liste contengono, ed il simbolo T verrà identificato con l'insieme di tutti gli oggetti aventi tipo T .

Dati $a_1, \dots, a_n \in T$, una lista $l \in \text{List}\langle T \rangle$ contenente tali elementi può essere rappresentata come segue:

$$[a_1, \dots, a_n]$$

Definizione 1.2.1.2: Algebra delle liste finite

L'algebra delle liste finite è definita come segue:

$$(\text{List}\langle T \rangle, \text{empty}, \text{cons})$$

dove i costruttori sono i seguenti:

$$\begin{aligned} \text{empty} &: \mathbb{1} \rightarrow \text{List}\langle T \rangle : x \mapsto [] \\ \text{cons} &: \text{List}\langle T \rangle \times T \rightarrow \text{List}\langle T \rangle : ([a_1, \dots, a_n], x) \mapsto [a_1, \dots, a_n, x] \end{aligned}$$

Proposizione 1.2.1.1: Liste finite induttive

L'algebra delle liste finite è induttiva.

Dimostrazione. Si noti che:

- empty ha dominio in $\mathbb{1}$, e poiché questo contiene un solo elemento, empty è necessariamente iniettiva;
- $\forall l, l' \in \text{List}\langle T \rangle, x, x' \in T \quad \text{cons}(l, x) = \text{cons}(l', x') \implies \begin{cases} l = l' \\ x = x' \end{cases}$ altrimenti l ed l' avrebbero avuto lunghezze diverse, oppure avrebbero contenuto diversi elementi;
- $\text{im}(\text{empty}) \cap \text{im}(\text{cons}) = \emptyset$, poiché solo empty può restituire $[]$, in quanto cons restituisce sempre una lista contenente almeno l'elemento fornito in input;

- sia $S \subseteq \text{List}\langle T \rangle$ tale da essere chiuso rispetto a cons , e contenente la lista vuota; per assurdo, sia $\text{List}\langle T \rangle - S \neq \emptyset \implies \exists l \in \text{List}\langle T \rangle - S$, ma $\text{List}\langle T \rangle$ è chiuso rispetto a cons , ed in particolare $\exists x \in T, l' \in \text{List}\langle T \rangle \mid \text{cons}(l', x) = l$, ma poiché $l \notin S$, allora necessariamente $l' \notin S$, poiché S è chiuso rispetto a cons , e quindi $l' \in S \implies l \in S$, ma l è stato scelto in $\text{List}\langle T \rangle - S$; ripetendo tale ragionamento induttivamente, si ottiene che S è vuoto, ma questo è impossibile poiché $[] \in \text{List}\langle T \rangle$ in ipotesi \nmid .

Dunque, l'algebra delle liste finite risulta essere induttiva. \square

Osservazione 1.2.1.1: Algebra delle liste infinite

Se all'algebra delle liste finite venissero aggiunte anche le liste infinite, l'algebra risultante non sarebbe induttiva, in quanto conterrebbe l'algebra delle liste finite, la quale è induttiva per la [Proposizione 1.2.1.1](#), e verrebbe dunque contraddetto il terzo assioma della [Definizione 1.1.2.5](#).

Osservazione 1.2.1.2: Concatenazione di liste finite

È possibile estendere l'algebra delle liste finite per supportare l'operazione di concatenazione tra liste, come segue:

$$\text{concat} : \text{List}\langle T \rangle \times \text{List}\langle T \rangle \rightarrow \text{List}\langle T \rangle : (l, l') \mapsto \begin{cases} l' & l = [] \\ \text{cons}(x, \text{concat}(t, l')) & \exists x \in T, t \in \text{List}\langle T \rangle \mid l = \text{cons}(t, x) \end{cases}$$

1.2.2 Alberi binari

Definizione 1.2.2.1: Albero binario

Un **albero binario** è una struttura dati che è possibile rappresentare graficamente come segue:



Il primo nodo, poiché non è figlio di nessuno, è detto **radice**, e poiché l'albero è *binario*, ogni nodo ha 0 — nel qual caso è definito **foglia** — oppure 2 figli. L'insieme degli alberi binari viene denotato con **B-tree**.

Definizione 1.2.2.2: Algebra degli alberi binari finiti

L'algebra degli alberi binari finiti è definita come segue:

$$(\mathbf{B\text{-}tree}, \text{leaf}, \text{branch})$$

dove i costruttori sono i seguenti:

$$\text{leaf} : \mathbb{1} \rightarrow \mathbf{B\text{-}tree} : x \mapsto \circ$$

$$\text{branch} : \mathbf{B\text{-}tree} \times \mathbf{B\text{-}tree} \rightarrow \mathbf{B\text{-}tree} : (b, b') \mapsto$$



L'algebra degli alberi binari finiti è induttiva.

Dimostrazione. Omessa. □

Osservazione 1.2.2.1: Algebra degli alberi binari infiniti

Analogamente all'[Osservazione 1.2.1.1](#), l'algebra degli alberi binari finiti ed infiniti non è induttiva.

Osservazione 1.2.2.2: Nodi di un albero binario finito

È possibile estendere l'algebra degli alberi binari finiti per supportare l'operazione per contare i nodi di un albero, come segue:

$$\text{nodes} : \mathbf{B\text{-}tree} \rightarrow \mathbb{N} : b \mapsto \begin{cases} 1 & b = \circ \\ 1 + \text{nodes}(t) + \text{nodes}(t') & \exists t, t' \in \mathbf{B\text{-}tree} \mid b = \text{branch}(t, t') \end{cases}$$

Osservazione 1.2.2.3: Foglie di un albero binario finito

È possibile estendere l'algebra degli alberi binari finiti per supportare l'operazione per contare le foglie di un albero, come segue:

$$\text{leaves} : \mathbf{B\text{-}tree} \rightarrow \mathbb{N} : b \mapsto \begin{cases} 1 & b = \circ \\ \text{leaves}(t) + \text{leaves}(t') & \exists t, t' \in \mathbf{B\text{-}tree} \mid b = \text{branch}(t, t') \end{cases}$$

Teorema 1.2.2.1: Relazione tra foglie e nodi

Ogni albero binario finito, avente n foglie, ha $2n - 1$ nodi.

Dimostrazione. La seguente dimostrazione procede per *induzione strutturale*, dunque effettuando l'induzione sulla morfologia della struttura dati, e non sul numero n di foglie.

Caso base. Il caso base è costituito dunque da \circ , l'albero ottenuto attraverso il costruttore nullario leaf, ed infatti si ha che

$$\text{leaves}(\circ) = 1 \implies 2 \cdot 1 - 1 = 1$$

e \circ ha esattamente 1 nodo.

Ipotesi induttiva. Un albero binario finito, avente n foglie, ha $2n - 1$ nodi.

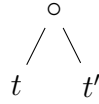
Passo induttivo. Sia $b \in \mathbf{B\text{-}tree}$ tale che esistano $t, t' \in \mathbf{B\text{-}tree}$ tali che $\text{branch}(t, t') = b$, e siano

$$\begin{cases} \text{leaves}(t) = n \\ \text{leaves}(t') = n' \end{cases}$$

Si noti che, per ipotesi induttiva, si ha che

$$\begin{cases} \text{nodes}(t) = 2n - 1 \\ \text{nodes}(t') = 2n' - 1 \end{cases}$$

ed inoltre, poiché $b = \text{branch}(t, t')$, b ha la forma seguente



dunque, per definizione di leaves si ha che

$$\text{leaves}(b) = \text{leaves}(t) + \text{leaves}(t') = n + n'$$

e, dalla morfologia di b , segue che

$$\text{nodes}(b) = \text{nodes}(t) + \text{nodes}(t') + 1 = 2n - 1 + 2n' - 1 + 1 = 2(n + n') - 1$$

ed è quindi verificata la tesi, poiché

$$\text{leaves}(b) = n + n' \implies \text{nodes}(b) = 2(n + n') - 1$$

□

2

Paradigma funzionale

2.1 Grammatiche

2.1.1 Definizioni

Definizione 2.1.1.1: Grammatica

Una **grammatica** è un insieme di regole che definiscono come manipolare un insieme di stringhe, agendo su elementi sintattici detti **termini**.

Definizione 2.1.1.2: Forma di Backus-Naur (BNF)

La **forma di Backus-Naur** (*Backus-Naur Form*) è una notazione utilizzata per descrivere la sintassi di grammatiche, ed è definita come segue:

$$\langle \text{symbol} \rangle, \dots, \langle \text{symbol} \rangle ::= _expression_ \mid \dots \mid _expression_$$

dove

- $\langle \text{symbol} \rangle$ è una *metavariabile non terminale*, ovvero, può essere sostituita con regole definite dalla grammatica; si noti che le regole possono essere utilizzate ricorsivamente;
- il simbolo $::=$ indica che ciò che è posto alla sua sinistra deve essere sostituito con ciò che è alla sua destra;
- $_expression_$ è un'espressione che verrà usata per rimpiazzare le metavariable non terminali, attraverso le regole definite dalla grammatica; le *metavariable* che compongono le espressioni possono essere **costanti**, **variabili**, **termini** o **espressioni** contenenti combinazioni delle precedenti, presentando eventualmente anche operazioni sintattiche specifiche.

Esempio 2.1.1.1 (Grammatica *Exp*). Sia *Exp* la seguente grammatica:

$$M, N ::= 0 \mid 1 \mid \dots \mid x \mid M + N \mid M * N$$

essa definisce le regole per utilizzare i numeri in \mathbb{N} , ammettendo inoltre le operazioni sintattiche di $+$ e $*$.

All'interno di questa grammatica dunque, le metavariables utilizzate sono le seguenti:

- *costanti*: $0, 1, \dots$
- *variabili*: x
- *termini*: M ed N
- *espressioni*: $M + N$ e $M * N$ (tecnicamente anche le precedenti sono espressioni, ma queste in particolare comprendono anche operazioni sintattiche)

Definizione 2.1.1.3: Variabili

Data una grammatica di G , con Var si indica l'**insieme delle variabili** di G .

Definizione 2.1.1.4: Valori

Data una grammatica, con Val si indica l'**insieme dei valori** che ogni termine della grammatica può assumere.

Esempio 2.1.1.2 (Variabili e valori di *Exp*). Si prenda in considerazione la grammatica *Exp* dell'[Esempio 2.2.1.1](#); in essa, si ha che

$$\begin{aligned}\text{Var} &= \{x\} \\ \text{Val} &= \{0, 1, \dots\}\end{aligned}$$

Definizione 2.1.1.5: Linguaggio di una grammatica

Sia G una grammatica; allora, il suo **linguaggio** è l'insieme delle stringhe che è possibile costruire attraverso le regole dettate da G .

Esempio 2.1.1.3 (Linguaggio di *Exp*). Sia *Exp* la grammatica dell'[Esempio 2.1.1.1](#); in essa, considerando ad esempio le stringhe "4" e "23", si può ottenere la stringa

$$+("4", "23") = "4 + 23"$$

dove la *polish notation* — alla sinistra dell'uguale — e la forma sintattica canonica — alla sua destra — verranno utilizzate intercambiabilmente, poiché puro *syntactic sugar*.

Osservazione 2.1.1.1: Valutazione di Exp

Si prenda in considerazione la grammatica Exp dell'Esempio 2.1.1.1; su di essa, è possibile definire ricorsivamente una funzione $eval$, in grado di valutare le stringhe che tale grammatica può produrre, come segue:

$$\begin{aligned} eval(0) &= 0 \\ eval(1) &= 1 \\ &\vdots \\ eval(M + N) &= eval(M) + eval(N) \\ eval(M * N) &= eval(M) * eval(N) \end{aligned}$$

Osservazione 2.1.1.2: Ambiguità di Exp

Si prenda in considerazione la grammatica Exp dell'Esempio 2.1.1.1; si noti che tale grammatica è ambigua, poichè ad esempio

$$+("5", *("6", "7")) = "5 + 6 * 7" = *(+("5", "6"), "7")$$

e da ciò segue anche che $\text{im}(+) \cap \text{im}(*) \neq \emptyset$.

Osservazione 2.1.1.3: Disambiguazione di Exp

Si noti che l'ambiguità trattata nell'Osservazione 2.1.1.2 non permetterebbe di poter definire la funzione $eval$, descritta nell'Osservazione 2.1.1.1. Dunque, per risolvere tale ambiguità, a meno di parentesi (che *non* sono definite all'interno della grammatica) o dell'esplicitazione della composizione di funzioni utilizzata, verrà sottintesa la normale precedenza degli operatori aritmetica durante la valutazione delle stringhe.

2.2 Assegnazioni

2.2.1 Definizioni

Definizione 2.2.1.1: Clausola *let*

Sia G una grammatica; allora, è possibile definire su G una funzione let , come segue:

$$let : \text{Var} \times G \times G \rightarrow G$$

e verrà utilizzata attraverso la sintassi

$$let \text{ *variable*} = \text{ _expression_1} \text{ in } \text{ _expression_2}$$

dove alla variabile ***variable*** verrà assegnata l'espressione _expression_1 *durante la valutazione* di _expression_2 ; la variabile ***variable***, all'interno di _expression_2 , prende il nome di **variabile locale**.

Una variabile alla quale non è stata assegnata nessuna espressione prende il nome di **variabile libera** (*unbound variable* in inglese); una variabile non libera è detta **variabile legata** (*bound variable*).

Esempio 2.2.1.1 (Estensione di Exp). Sia Exp la seguente estensione della grammatica presente all'interno dell'[Esempio 2.1.1.1](#):

$$M, N ::= k \mid x \mid M + N \mid M * N \mid let\ x = M \text{ in } N$$

In essa, sono presenti:

- *costanti*: indicate con k , che sta ad indicare che in Exp è ammessa qualsiasi costante; di fatto, è possibile pensare a k come una funzione definita come segue:

$$k : \mathbb{N} \rightarrow Exp : x \mapsto "x"$$

- *variabili*: x
- *termini*: M ed N
- *espressioni*: $M + N$, $M * N$ e $let\ x = M \text{ in } N$

Esempio 2.2.1.2 (Clausole *let*). Sia Exp la grammatica dell'[Esempio 2.2.1.1](#); un esempio di espressione su Exp , che utilizza la clausola *let* della [Definizione 2.2.1.1](#), è la seguente:

$$let\ x = 3 \text{ in } (x + 1)$$

e nel momento in cui viene valutata tale espressione, si ha che

$$x = 3 \implies x + 1 = 3 + 1 = 4$$

e dunque il valore dell'espressione è 4.

Esempio 2.2.1.3 (Variabili libere). Sia Exp la grammatica dell'Esempio 2.2.1.1, ed ammettendo la variabile y in essa, si consideri la seguente espressione:

$$let\ x = 3\ in\ (x + y)$$

in essa, la variabile x è posta pari a 3, ma ad y non è stato assegnato alcuna espressione, e dunque risulta essere una variabile libera.

Osservazione 2.2.1.1: Ambiguità di *let*

Sia Exp la grammatica dell'Esempio 2.2.1.1, e si consideri la sua seguente espressione

$$let\ x = M\ in\ x + y$$

per qualche espressione $M \in Exp$, e due variabili $x, y \in \text{Var}$, ammettendo dunque y tra le variabili di Exp ; si noti che tale espressione è ambigua, poiché potrebbe equivalere a

$$(let\ x = M\ in\ x) + y$$

oppure a

$$let\ x = M\ in\ (x + y)$$

Per convenzione, all'interno di questi appunti, in assenza di parentesi che descrivano la precedenza degli operatori, si assume la precedenza della seconda espressione mostrata.

Osservazione 2.2.1.2: Variabili libere di un'espressione

Sia Exp la grammatica dell'Esempio 2.2.1.1; su di essa, è possibile definire, ricorsivamente, una funzione in grado di restituire le variabili unbound di una data espressione, come segue:

$$\text{free} : Exp \rightarrow \mathcal{P}(\text{Var}) : e \mapsto \begin{cases} \emptyset & \exists \eta \in \mathbb{N} \mid e = k(\eta) \\ \{x\} & \exists x \in \text{Var} \mid e = x \\ \text{free}(M) \cup \text{free}(N) & \exists M, N \in Exp \mid e = M + N \vee e = M * N \\ \text{free}(M) \cup (\text{free}(N) - \{x\}) & \exists x \in \text{Var}, M, N \in Exp \mid e = (let\ x = M\ in\ N) \end{cases}$$

2.2.2 Ambienti

Definizione 2.2.2.1: Ambiente di una grammatica

Data una grammatica tale che Val sia un insieme finito, un **ambiente** della grammatica è una funzione della forma

$$E : \text{Var} \xrightarrow{\text{fin}} \text{Val}$$

che associa dunque una variabile ad un possibile valore che può assumere (la notazione *fin* indica che E è una funzione *parziale*, dunque non necessariamente definita su tutto il dominio). L'insieme di tutti gli ambienti della grammatica è denotato con

$$\text{Env} := \{f \mid f : \text{Var} \xrightarrow{\text{fin}} \text{Val}\}$$

In simboli, gli ambienti verranno scritti come insiemi di coppie (x, k) con $x \in \text{Var}$, $k \in \text{Val}$, che descriveranno la mappa definita dall'ambiente stesso. Si noti che, per un certo ambiente $E \in \text{Env}$, $E(x)$ è indefinito per ogni $x \in \text{Var} - \text{dom}(E)$.

Esempio 2.2.2.1 (Ambienti di Exp). Sia Exp la grammatica dell'[Esempio 2.2.1.1](#); allora, un possibile ambiente di Exp , denotato con $E \in \text{Env}$, è il seguente:

$$E := \{(z, 3), (y, 9)\}$$

ed esso esprime la possibilità che in Exp z possa essere valutato pari a 3, mentre y pari a 9 (tecnicamente, le variabili z ed y andrebbero ammesse all'interno della grammatica, ma d'ora in avanti tale precisazione verrà sottintesa).

Definizione 2.2.2.2: Concatenazione di ambienti

Siano E_1 ed E_2 due ambienti di una grammatica; allora, si definisce **concatenazione** di E_1 ed E_2 la seguente funzione

$$E_1 E_2 : \text{Env} \times \text{Env} \rightarrow \text{Env} : x \mapsto \begin{cases} E_2 & x \in \text{dom}(E_2) \vee x \in \text{dom}(E_1) \cap \text{dom}(E_2) \\ E_1(x) & x \in \text{dom}(E_1) \end{cases}$$

dunque, nella concatenazione E_2 sovrascrive le tuple che sono presenti anche in E_1 .

Esempio 2.2.2.2 (Concatenazioni di ambienti). Sia Exp la grammatica descritta all'interno del [Esempio 2.2.1.1](#), e siano

$$\begin{aligned} E_1 &:= \{(z, 3), (y, 9)\} \\ E_2 &:= \{(z, 4)\} \end{aligned}$$

due suoi ambienti; allora si ha che

$$E_1 E_2 := \{(z, 4), (y, 9)\}$$

2.2.3 Semantica operativa

Definizione 2.2.3.1: Semantica operativa di una grammatica

Data una grammatica G , si definisce **semantica operativa** della grammatica una relazione, indicata col simbolo \rightsquigarrow , definita come segue:

$$\rightsquigarrow \subseteq \text{Env} \times G \times \text{Val}$$

Un elemento $(E, M, v) \in \rightsquigarrow$ è detto **giudizio operativo**, e viene scritto attraverso il seguente simbolismo:

$$E \vdash M \rightsquigarrow v$$

e si legge "valutando M , nell'ambiente E , si ottiene v ".

Esempio 2.2.3.1 (Semantica operativa di Exp). Sia Exp la grammatica definita all'interno dell'Esempio 2.2.1.1, e sia E un suo ambiente; allora, sono vere le seguenti asserzioni:

$$\begin{aligned} & [const] \quad E \vdash k \rightsquigarrow k \\ & \forall x \in \text{Var} \quad \exists v \in \text{Val} \mid E(x) = v \implies [var] \quad E \vdash x \rightsquigarrow v \\ & \forall v', v'' \in \text{Val}, M, N \in Exp \quad \exists v \in \text{Val} \mid v = v' + v'' \implies [plus] \quad \frac{E \vdash M \rightsquigarrow v' \quad E \vdash N \rightsquigarrow v''}{E \vdash M + N \rightsquigarrow v} \\ & \forall v', v'' \in \text{Val}, M, N \in Exp \quad \exists v \in \text{Val} \mid v = v' \cdot v'' \implies [times] \quad \frac{E \vdash M \rightsquigarrow v' \quad E \vdash N \rightsquigarrow v''}{E \vdash M * N \rightsquigarrow v} \\ & \forall v, v' \in \text{Val}, x \in \text{Var}, M, N \in Exp \quad [let] \quad \frac{E \vdash M \rightsquigarrow v' \quad E\{(x, v')\} \vdash N \rightsquigarrow v}{E \vdash let \ x = M \ in \ N \rightsquigarrow v} \end{aligned}$$

Definizione 2.2.3.2: Equivalenza operativa

Sia G una grammatica, e siano M ed N due sue espressioni; queste sono dette **operazionalmente equivalenti**, se è vera la seguente proposizione:

$$\forall E \in \text{Env}, v \in \text{Val} \quad E \vdash M \rightsquigarrow v \iff E \vdash N \rightsquigarrow v$$

e viene indicato con $M \sim N$.

Definizione 2.2.3.3: Albero di valutazione

Con **albero di valutazione** di un'espressione e , si definisce l'albero, composto da inferenze logiche, ottenuto dalla valutazione di e .

Osservazione 2.2.3.1: Ambiente iniziale

Per qualsiasi grammatica — a meno di specifiche — si assume che, all'interno di una valutazione, l'ambiente iniziale sia $\emptyset \in \text{Env}$.

Esempio 2.2.3.2 (Alberi di valutazione su *Exp*). Sia *Exp* la grammatica definita all'interno dell'Esempio 2.2.1.1; allora, l'albero di valutazione dell'espressione

$$\text{let } x = 3 \text{ in } x + 4$$

è il seguente

$$\frac{\emptyset \vdash 3 \rightsquigarrow 3 \quad \frac{\{(x, 3)\} \vdash x \rightsquigarrow 3 \quad \{(x, 3)\} \vdash 4 \rightsquigarrow 4}{\{(x, 3)\} \vdash x + 4 \rightsquigarrow 7}}{\emptyset \vdash \text{let } x = 3 \text{ in } x + 4 \rightsquigarrow 7}$$

e l'espressione è valutabile poiché $x \in \text{dom}(\{(x, 1)\}) = \{x\}$.

2.3 Valutazioni e scoping

2.3.1 Definizioni

Definizione 2.3.1.1: Valutazione eager

Data una grammatica, la **valutazione eager** (*call-by-name*) valuta una data espressione della grammatica non appena questa viene legata ad una variabile. In simboli, la valutazione eager verrà indicata con il pedice E.

Definizione 2.3.1.2: Valutazione lazy

Data una grammatica, la **valutazione lazy** (*call-by-need*) valuta una data espressione della grammatica solo quando il suo valore viene richiesto da un'altra espressione. In simboli, la valutazione lazy verrà indicata con il pedice L.

Definizione 2.3.1.3: Scoping statico

Data una grammatica, la valutazione a **scoping statico** (*lexical scope*) valuta le variabili TODO. In simboli, lo scoping statico verrà indicato con il pedice S.

Definizione 2.3.1.4: Scoping dinamico

Data una grammatica, la valutazione a **scoping dinamico** valuta le variabili utilizzando l'ambiente definito in tempo di valutazione. TODO NON MI PIACE CAMBIA. In simboli, lo scoping dinamico verrà indicato con il pedice D.

Definizione 2.3.1.5: Equivalenza di semantiche operazionali

Data una grammatica, due sue semantiche operazionali sono dette **equivalenti** se, presa una qualunque espressione di G , quando questa viene valutata attraverso le due semantiche, produce lo stesso risultato.

In simboli, data una grammatica G , e due sue semantiche operazionali A e B , se queste sono equivalenti, la loro equivalenza viene denotata con il seguente simbolismo

$$G_A \equiv G_B$$

Lemma 2.3.1.1: Exp_{ES} e Exp_{ED}

Sia Exp la grammatica definita all'interno dell'Esempio 2.2.1.1, avente le clausole definite nell'Esempio 2.2.3.1; allora, si ha che

$$Exp_{ES} \equiv Exp_{ED}$$

Dimostrazione. Omessa. □

Esempio 2.3.1.1 (Exp_E). Sia Exp la grammatica definita nell'Esempio 2.2.1.1, e si consideri la seguente espressione:

$$let\ x = 3\ in\ (let\ y = x\ in\ (let\ x = 7\ in\ y + x))$$

essa, valutata attraverso valutazione eager, produce il seguente albero di derivazione:

$$\begin{array}{c} \emptyset \vdash 3 \rightsquigarrow 3 \quad \frac{\frac{\frac{\{(x,3)\} \vdash x \rightsquigarrow 3}{\{(x,3), (y,3)\} \vdash 7 \rightsquigarrow 7} \quad \frac{\frac{\{(x,3), (y,3)\} \vdash 7 \rightsquigarrow 7 \quad \frac{\{(x,3), (y,3)\} \vdash y \rightsquigarrow 3}{\{(x,3), (y,3)\} \vdash y + x \rightsquigarrow 10}}{\{(x,3), (y,3)\} \vdash let\ x = 7\ in\ y + x \rightsquigarrow 10}}{\{(x,3), (y,3)\} \vdash let\ y = x\ in\ (let\ x = 7\ in\ y + x) \rightsquigarrow 10}} \\ \hline \emptyset \vdash let\ x = 3\ in\ (let\ y = x\ in\ (let\ x = 7\ in\ y + x)) \rightsquigarrow 10 \end{array}$$

Osservazione 2.3.1.1: Exp_{LD}

Sia Exp la grammatica definita nell'Esempio 2.2.1.1; per poter valutare le sue espressioni in maniera lazy dinamica, è necessario ridefinire alcune regole di inferenza definite all'interno dell'Esempio 2.2.3.1:

- l'insieme degli ambienti di Exp viene ridefinito come segue:

$$Env := \{f \mid Var \xrightarrow{fin} Val \cup Exp\}$$

dunque gli ambienti possono associare delle variabili anche a delle espressioni, in modo da poter ritardare la valutazione di quest'ultime fin quando non diventa strettamente necessario conoscerne il valore;

- $\forall E \in Env, x \in Var \quad x \in \text{dom}(E) \wedge M := E(x) \implies \frac{E \vdash M \rightsquigarrow v}{E \vdash x \rightsquigarrow v}$, per rendere M calcolabile, attraverso l'ambiente corrente, nel momento in cui viene assegnata ad una variabile;
- $\forall x \in Var, M, N \in Exp \quad [let] \frac{E\{(x, M)\} \vdash N \rightsquigarrow v}{E \vdash let \ x = M \ in \ N \rightsquigarrow v}$, in modo da ritardare la valutazione di M .

Si noti che tale valutazione utilizza lo scoping dinamico, poiché viene utilizzato l'ambiente corrente per valutare le variabili.

Osservazione 2.3.1.2: Exp_{LS}

Sia Exp la grammatica definita all'interno dell'Esempio 2.2.1.1; per poter valutare le sue espressioni in maniera lazy statica, è necessario ridefinire alcune regole di inferenza definite all'interno dell'Esempio 2.2.3.1:

- l'insieme degli ambienti di Exp viene ridefinito come segue:

$$Env := \{f \mid Var \xrightarrow{fin} Exp \times Env\}$$

dunque gli ambienti possono associare delle variabili anche a delle tuple contenenti espressioni ed ambienti; in particolare, per una tupla $(x, (M, E))$, si ha che x vale M valutata nell'ambiente E ; questa correzione nella definizione di Env permette di tenere traccia degli ambienti in cui sono state fatte le assegnazioni;

- $\forall E \in Env, x \in Var \quad x \in \text{dom}(E) \wedge (M, E') := E(x) \implies \frac{E' \vdash M \rightsquigarrow v}{E \vdash x \rightsquigarrow v}$, affinché sia possibile valutare le variabili esattamente nell'ambiente in cui gli è stata assegnata l'espressione M , e non nell'ambiente corrente;
- $\forall x \in Var, M, N \in Exp \quad [let] \frac{E\{(x, (M, E))\} \vdash N \rightsquigarrow v}{E \vdash let \ x = M \ in \ N \rightsquigarrow v}$, in modo da salvare anche l'ambiente in cui alla variabile x è stata assegnata l'espressione M .

Si noti che tale valutazione utilizza lo scoping statico, poiché vengono salvati anche gli ambienti in cui sono state fatte le assegnazioni.

Lemma 2.3.1.2: Exp_{LS} e Exp_{LD}

Sia Exp la grammatica definita nell'Esempio 2.2.1.1; allora, si ha che

$$Exp_{LS} \neq Exp_{LD}$$

Dimostrazione. Si consideri l'espressione definita nell'Esempio 2.3.1.1; essa, valutata attraverso valutazione lazy dinamica, produce il seguente albero di derivazione:

$$\begin{array}{c} \frac{\{(x, 3), (y, x)\}\{(x, 7)\} \vdash 7 \rightsquigarrow 7}{\{(x, 3), (y, x)\}\{(x, 7)\} \vdash x \rightsquigarrow 7} \quad \frac{\{(x, 3), (y, x)\}\{(x, 7)\} \vdash 7 \rightsquigarrow 7}{\{(x, 3), (y, x)\}\{(x, 7)\} \vdash y \rightsquigarrow 7} \\ \hline \{(x, 3), (y, x)\}\{(x, 7)\} \vdash y + x \rightsquigarrow 14 \\ \hline \{(x, 3), (y, x)\} \vdash let \ x = 7 \ in \ y + x \rightsquigarrow 14 \\ \hline \{(x, 3)\} \vdash let \ y = x \ in \ (let \ x = 7 \ in \ y + x) \rightsquigarrow 14 \\ \hline \emptyset \vdash let \ x = 3 \ in \ (let \ y = x \ in \ (let \ x = 7 \ in \ y + x)) \rightsquigarrow 14 \end{array}$$

Differentemente, valutando tale espressione attraverso valutazione lazy statica, produce

il seguente albero di derivazione:

$$\begin{array}{c}
 \frac{}{\emptyset \vdash 3 \leadsto 3} \\
 \frac{}{E \vdash x \leadsto 3} \quad \frac{}{E' \vdash 7 \leadsto 7} \\
 \frac{}{E'' \vdash y \leadsto 3} \quad \frac{}{E'' \vdash x \leadsto 7} \\
 \frac{}{E' \{(x, (7, E'))\} \vdash y + x \leadsto 10} \\
 \frac{}{E \{(y, (x, E))\} \vdash \text{let } x = 7 \text{ in } y + x \leadsto 10} \\
 \frac{}{\{(x, (3, \emptyset))\} \vdash \text{let } y = x \text{ in } (\text{let } x = 7 \text{ in } y + x) \leadsto 10} \\
 \emptyset \vdash \text{let } x = 3 \text{ in } (\text{let } y = x \text{ in } (\text{let } x = 7 \text{ in } y + x)) \leadsto 10
 \end{array}$$

dove

$$\begin{aligned}
 E &:= \{(x, (3, \emptyset))\} \\
 E' &:= E \{(y, (x, E))\} \\
 E'' &:= E' \{(x, (7, E'))\}
 \end{aligned}$$

Allora, poiché le due valutazioni producono risultati differenti, per la [Definizione 2.3.1.5](#), segue la tesi. \square

2.4 Funzioni

2.4.1 Definizioni

Definizione 2.4.1.1: Clausola fn

Sia G una grammatica; allora, è possibile definire su G una funzione fn , come segue:

$$fn : \text{Var} \times G \rightarrow G$$

e verrà utilizzata attraverso la sintassi

$$fn \text{ *variable*} \Rightarrow \text{_expression_}$$

che restituisce una funzione avente come parametro *variable* , il cui valore sarà utilizzato per valutare _expression_ .

Definizione 2.4.1.2: Applicazione

Sia G una grammatica; allora, dati due suoi termini M, N , è possibile definire su G l'applicazione di M ad N , attraverso la seguente sintassi:

$$MN$$

Tale sintassi è presa in prestito dal lambda calcolo.

Si noti che un'espressione MNL applica prima M ad N , e poi MN ad L , dunque la precedenza è da sinistra verso destra, ovvero $(MN)L$.

Esempio 2.4.1.1 (Grammatica *Fun*). Sia *Fun* la seguente estensione della grammatica *Exp*, definita all'interno dell'Esempio 2.2.1.1:

$$M, N ::= k \mid x \mid M + N \mid M * N \mid \text{let } x = M \text{ in } N \mid \text{fn } x \Rightarrow M \mid MN$$

Esempio 2.4.1.2 (Espressioni su *Fun*). Sia *Fun* la grammatica definita all'interno dell'Esempio 2.4.1.1, e sia

$$(\text{fn } x \Rightarrow x + 1)7$$

una sua espressione; essa, poiché applica la funzione $\text{fn } x \Rightarrow x + 1$ all'espressione 7, viene valutata a

$$x = 7 \implies x + 1 = 7 + 1 = 8$$

Esempio 2.4.1.3 (Espressioni su *Fun*). Sia *Fun* la grammatica definita all'interno dell'Esempio 2.4.1.1, e sia

$$(\text{fn } x \Rightarrow x3)(\text{fn } x \Rightarrow x + 1)$$

una sua espressione; essa, una volta valutata, applica la funzione $\text{fn } x \Rightarrow x + 1$ all'espressione 3, e dunque il suo valore è pari a

$$x = 3 \implies x + 1 = 3 + 1 = 4$$

Osservazione 2.4.1.1: Curryficazione

Si consideri la clausola *fn* della Definizione 2.4.1.1; è possibile definirne una notazione contratta, che prende il nome di *curryficazione*, ed è definita come segue:

$$\text{fn } x_1 x_2 \dots x_n \Rightarrow M \iff \text{fn } x_1 \Rightarrow (\text{fn } x_2 \Rightarrow \dots (\text{fn } x_n \Rightarrow M) \dots)$$

Il processo inverso prende il nome di *uncurryficazione*.

Esempio 2.4.1.4 (Curryficazioni). Sia *Fun* la grammatica dell'Esempio 2.4.1.1, e sia

$$(\text{fn } xy \Rightarrow yx)7(\text{fn } x \Rightarrow x + 1)$$

una sua espressione; una volta effettuata l'uncurryficazione, si ottiene la seguente espressione:

$$(\text{fn } x \Rightarrow \text{fn } y \Rightarrow yx)7(\text{fn } x \Rightarrow x + 1)$$

che, una volta valutata, diventa

$$(\text{fn } y \Rightarrow y7)(\text{fn } x \Rightarrow x + 1)$$

e dunque, analogamente all'Esempio 2.4.1.3, il risultato è

$$x = 7 \implies x + 1 = 7 + 1 = 8$$

Esempio 2.4.1.5 (Curryficazioni). Sia *Fun* la grammatica dell'Esempio 2.4.1.1, e sia

$$(\text{fn } x \Rightarrow xx)(\text{fn } x \Rightarrow xx)$$

una sua espressione; essa, durante la valutazione, va in loop infinito, poiché ad ogni valutazione viene restituita l'espressione di partenza.

2.4.2 Semantiche operazionali

Osservazione 2.4.2.1: Fun_{ED}

Sia Fun la grammatica definita nell'Esempio 2.4.1.1; per poter valutare le sue espressioni in maniera eager dinamica, è necessario ridefinire alcune regole di inferenza:

- l'insieme degli ambienti di Fun viene definito come segue:

$$Env := \{f \mid f : Var \xrightarrow{fin} Val\}$$

- l'insieme dei valori di Fun viene ridefinito come segue:

$$Val := \{0, 1, \dots\} \cup (Var \times Fun)$$

affinché i giudizi operazionali di Fun possano contenere tuple;

- $\forall E \in Env, x \in Var, M \in Fun \quad E \vdash fn \ x \Rightarrow M \rightsquigarrow (x, M)$ per la valutazione delle funzioni;

- $\forall E \in Env, M, N \in Fun \quad \frac{E \vdash M \rightsquigarrow (x, L) \quad E \vdash N \rightsquigarrow v' \quad E\{(x, v')\} \vdash L \rightsquigarrow v}{E \vdash MN \rightsquigarrow v}$
per certi $x \in Var, L \in Fun$ tali che M sia una funzione della forma $fn \ x \Rightarrow L$; dunque, per le applicazioni, si ha che il primo giudizio operazionale forza M ad essere una funzione, il secondo valuta N , ed il terzo valuta L con x pari al valore di N .

Si noti che tale valutazione risulta essere eager, poiché N viene valutata immediatamente.

Osservazione 2.4.2.2: Fun_{ES}

Sia Fun la grammatica definita nell'Esempio 2.4.1.1; per poter valutare le sue espressioni in maniera eager statica, è necessario ridefinire alcune regole di inferenza:

- l'insieme degli ambienti di Fun viene definito come segue:

$$Env := \{f \mid f : Var \xrightarrow{fin} Val\}$$

- l'insieme dei valori di Fun viene ridefinito come segue:

$$Val := \{0, 1, \dots\} \cup (Var \times Fun \times Env)$$

affinché i giudizi operazionali di Fun possano contenere triple;

- $\forall E \in Env, x \in Var, M \in Fun \quad E \vdash fn \ x \Rightarrow M \rightsquigarrow (x, M, E)$ per la valutazione delle funzioni;
- $\forall E \in Env, M, N \in Fun \quad \frac{E \vdash M \rightsquigarrow (x, L, E') \quad E \vdash N \rightsquigarrow v' \quad E'\{(x, v')\} \vdash L \rightsquigarrow v}{E \vdash MN \rightsquigarrow v}$
per certi $E' \in Env, x \in Var, L \in Fun$ tali che M sia una funzione della forma $fn \ x \Rightarrow L$; dunque, per le applicazioni, si ha che il primo giudizio operativoale forza M ad essere una funzione — salvando inoltre l'ambiente in cui la funzione M è stata valutata — il secondo valuta N , ed il terzo valuta L con x pari al valore di N , ma all'interno dell'ambiente che era stato salvato valutando la funzione M .

Si noti che tale valutazione risulta essere eager, poiché N viene valutata immediatamente, ed è a scoping statico poiché viene riportato l'ambiente in cui le valutazioni vengono effettuate.

Lemma 2.4.2.1: Fun_{ES} e Fun_{ED}

Sia Fun la grammatica definita nell'Esempio 2.4.1.1; allora, si ha che

$$Fun_{ES} \neq Fun_{ED}$$

Dimostrazione. Si consideri la seguente espressione

$$let \ x = 7 \ in \ ((fn \ y \Rightarrow let \ x = 3 \ in \ yx)(fn \ z \Rightarrow x))$$

definita sulla grammatica Fun ; essa, valutata attraverso valutazione eager dinamica, produce il seguente albero di derivazione:

$$\begin{array}{c}
 (*) \quad \frac{E' \vdash 3 \rightsquigarrow 3 \quad \frac{E'' \vdash y \rightsquigarrow (z, x) \quad E'' \vdash x \rightsquigarrow 3 \quad E''\{(z, 3)\} \vdash x \rightsquigarrow 3}{E'\{(x, 3)\} \vdash yx \rightsquigarrow 3}}{E\{(y, (z, x))\} \vdash let \ x = 3 \ in \ yx \rightsquigarrow 3} \\
 \\
 \varnothing \vdash 7 \rightsquigarrow 7 \quad \frac{E \vdash fn \ y \Rightarrow let \ x = 3 \ in \ yx \rightsquigarrow (y, let \ x = 3 \ in \ yx) \quad E \vdash fn \ z \Rightarrow x \rightsquigarrow (z, x) \quad (*)}{\frac{\{(x, 7)\} \vdash ((fn \ y \Rightarrow let \ x = 3 \ in \ yx)(fn \ z \Rightarrow x)) \rightsquigarrow 3}{\varnothing \vdash let \ x = 7 \ in \ ((fn \ y \Rightarrow let \ x = 3 \ in \ yx)(fn \ z \Rightarrow x)) \rightsquigarrow 3}}
 \end{array}$$

dove

$$\begin{aligned} E &:= \{(x, 7)\} \\ E' &:= E\{(y, (z, x))\} \\ E'' &:= E'\{(x, 3)\} \end{aligned}$$

Differentemente, valutando tale espressione attraverso valutazione eager statica, produce il seguente albero di derivazione:

$$\begin{array}{c} (*) \quad \frac{E' \vdash 3 \rightsquigarrow 3 \quad \frac{E'' \vdash y \rightsquigarrow (z, x, E) \quad E'' \vdash x \rightsquigarrow 3 \quad E\{(z, 3)\} \vdash x \rightsquigarrow 7}{E'\{(x, 3)\} \vdash yx \rightsquigarrow 7}}{E\{(y, (z, x, E))\} \vdash \text{let } x = 3 \text{ in } yx \rightsquigarrow 7} \\ \frac{\emptyset \vdash 7 \rightsquigarrow 7 \quad \frac{E \vdash \text{fn } y \Rightarrow \text{let } x = 3 \text{ in } yx \rightsquigarrow ((y, \text{let } x = 3 \text{ in } yx), E) \quad E \vdash \text{fn } z \Rightarrow x \rightsquigarrow (z, x, E) \quad (*)}{\{(x, 7)\} \vdash (\text{fn } y \Rightarrow \text{let } x = 3 \text{ in } yx)(\text{fn } z \Rightarrow x) \rightsquigarrow 7}}{\emptyset \vdash \text{let } x = 7 \text{ in } ((\text{fn } y \Rightarrow \text{let } x = 3 \text{ in } yx)(\text{fn } z \Rightarrow x)) \rightsquigarrow 7} \end{array}$$

dove

$$\begin{aligned} E &:= \{(x, 7)\} \\ E' &:= E\{(y, (z, x, E))\} \\ E'' &:= E'\{(x, 3)\} \end{aligned}$$

Allora, poiché le due valutazioni producono risultati differenti, per la [Definizione 2.3.1.5](#), segue la tesi. \square

Osservazione 2.4.2.3: Fun_{LD}

Sia Fun la grammatica definita nell'[Esempio 2.4.1.1](#); per poter valutare le sue espressioni in maniera lazy dinamica, è necessario ridefinire alcune regole di inferenza:

- l'insieme degli ambienti di Fun viene ridefinito come segue:

$$Env := \{f \mid f : Var \xrightarrow{fin} Fun\}$$

- l'insieme dei valori di Fun viene ridefinito come segue:

$$Val := \{0, 1, \dots\} \cup (Var \times Fun)$$

affinché i giudizi operazionali di Fun possano contenere tuple;

- $\forall E \in Env, x \in Var, M \in Fun \quad E \vdash \text{fn } x \Rightarrow M \rightsquigarrow (x, M)$ per la valutazione delle funzioni;
- $\forall E \in Env, M, N \in Fun \quad \frac{E \vdash M \rightsquigarrow (x, L) \quad E'\{(x, N)\} \vdash L \rightsquigarrow v}{E \vdash MN \rightsquigarrow v}$ per certi $x \in Var, L \in Fun$ tali che M sia una funzione della forma $\text{fn } x \Rightarrow L$; dunque, per le applicazioni, si ha che il primo giudizio operativo forza M ad essere una funzione, mentre il secondo valuta L con x pari ad N — e non al valore che questa assume.

Si noti che tale valutazione risulta essere lazy, poiché N non viene valutata immediatamente, ma ne viene ritardato il calcolo finché non strettamente necessario.

Osservazione 2.4.2.4: Fun_{LS}

Sia Fun la grammatica definita nell'Esempio 2.4.1.1; per poter valutare le sue espressioni in maniera lazy statica, è necessario ridefinire alcune regole di inferenza:

- l'insieme degli ambienti di Fun viene ridefinito come segue:

$$Env := \{f \mid f : Var \xrightarrow{fin} Fun \times Env\}$$

dunque, la sua definizione è ricorsiva

- l'insieme dei valori di Fun viene ridefinito come segue:

$$Val := \{0, 1, \dots\} \cup (Var \times Fun \times Env)$$

- $\forall E \in Env, x \in Var, M \in Fun \quad E \vdash fn \ x \Rightarrow M \rightsquigarrow (x, M, E)$ per la valutazione delle funzioni;
- $\forall E \in Env, M, N \in Fun \quad \frac{E \vdash M \rightsquigarrow (x, L, E') \quad E' \{(x, (N, E))\} \vdash L \rightsquigarrow v}{E \vdash MN \rightsquigarrow v}$ per certi $E' \in Env, x \in Var, L \in Fun$ tali che M sia una funzione della forma $fn \ x \Rightarrow L$; dunque, per le applicazioni, si ha che il primo giudizio operativo forza M ad essere una funzione — salvando inoltre l'ambiente in cui la funzione M è stata valutata — mentre il secondo valuta L senza valutare l'espressione N , ma ponendo solamente x pari ad N — e non al suo valore — all'interno dell'ambiente in cui è stata effettuata l'applicazione MN .

Si noti che tale valutazione risulta essere lazy, poiché N non viene valutata immediatamente, ed è a scoping statico poiché viene riportato l'ambiente in cui le valutazioni vengono effettuate.

Lemma 2.4.2.2: Fun_{LS} e Fun_{LD}

Sia Fun la grammatica definita nell'Esempio 2.4.1.1; allora, si ha che

$$Fun_{LS} \not\equiv Fun_{LD}$$

Dimostrazione. Omessa. □

Definizione 2.4.2.1: Espressione ω

Data una grammatica, l'espressione ω è un'espressione composta dalla più piccola funzione che entra in ricorsione infinita senza chiamare sé stessa.

Esempio 2.4.2.1 (Espressione ω di Fun). Sia Fun la grammatica definita all'interno dell'Esempio 2.4.1.1; allora, una sua espressione ω è la seguente:

$$\omega := (fn \ x \Rightarrow xx)(fn \ x \Rightarrow xx)$$

Essa risulta essere un'espressione ω per Fun , poiché la sua valutazione entra in ricorsione infinita indipendentemente dalla semantica scelta.

Lemma 2.4.2.3: Semantiche di Fun

Sia Fun la grammatica definita nell'Esempio 2.4.1.1; allora, si ha che

$$Fun_{LD} \not\equiv Fun_{ED} \not\equiv Fun_{ES} \not\equiv Fun_{LS}$$

Dimostrazione. Si noti che:

- $Fun_{ED} \not\equiv Fun_{ES}$ per il Lemma 2.4.2.1
- $Fun_{LS} \not\equiv Fun_{LD}$ per il Lemma 2.4.2.2

mentre, per quanto riguarda $Fun_{ED} \not\equiv Fun_{LD}$ e $Fun_{ES} \not\equiv Fun_{LS}$, si prenda l'espressione ω di Fun , presentata all'interno dell'Esempio 2.4.2.1, e si consideri la seguente espressione

$$let\ x = \omega\ in\ 69^1$$

questa, quando valutata in maniera eager — indipendentemente dallo scoping — richiederebbe di valutare immediatamente l'espressione ω , la quale è invalutabile per definizione; mentre, quando valutata in maniera lazy — indipendentemente dallo scoping — rimanderebbe il calcolo dell'espressione ω , restituendo 69 come risultato. Dunque, poiché si ottengono risultati diversi a seconda della semantica utilizzata per valutare tale espressione, segue la tesi. \square

2.5 Lambda calcolo

2.5.1 Numeri di Church

Definizione 2.5.1.1: Numeri di Church

La **rappresentazione di Church** dei numeri naturali, denotata con \mathbb{N}_λ è la seguente:

- $0_\lambda := fn\ x \Rightarrow fn\ y \Rightarrow y \iff fn\ xy \Rightarrow y$
- $succ_\lambda := fn\ z \Rightarrow (fn\ x \Rightarrow fn\ y \Rightarrow zx(xy)) \iff fn\ zxy \Rightarrow zx(xy)$

Esempio 2.5.1.1 (1_λ di Church). Per calcolare l' $1_\lambda \in \mathbb{N}_\lambda$ di Church, è sufficiente valutare $succ_\lambda(0_\lambda)$, e dunque

$$\begin{aligned} (fn\ zxy \Rightarrow zx(xy))(fn\ xy \Rightarrow y) &\longrightarrow fn\ xy \Rightarrow (fn\ xy \Rightarrow y)x(xy) \longrightarrow \\ &\longrightarrow fn\ xy \Rightarrow (fn\ y \Rightarrow y)(xy) \longrightarrow fn\ xy \Rightarrow y \end{aligned}$$

¹Nice.

Esempio 2.5.1.2 (2_λ di Church). Per calcolare il $2_\lambda \in \mathbb{N}_\lambda$ di Church, è sufficiente valutare $\text{succ}_\lambda(1_\lambda)$, e dunque

$$\begin{aligned} (fn\ zxy \Rightarrow zx(xy))(fn\ xy \Rightarrow xy) &\longrightarrow fn\ xy \Rightarrow (fn\ xy \Rightarrow xy)x(xy) \longrightarrow \\ &\longrightarrow fn\ xy \Rightarrow (fn\ y \Rightarrow xy)(xy) \longrightarrow fn\ xy \Rightarrow xxy \end{aligned}$$

Proposizione 2.5.1.1: Algebra dei numeri di Church

Si consideri l'algebra dei numeri di Church, definita come $(\mathbb{N}_\lambda, \text{zero}_\lambda, \text{succ}_\lambda)$, dove

$$\text{zero}_\lambda : \mathbb{1} \rightarrow \mathbb{N}_\lambda : x \mapsto 0_\lambda$$

essa è un'algebra induttiva.

Dimostrazione. Omessa. □

Osservazione 2.5.1.1: Funzione eval_λ

Si considerino l'Esempio 2.5.1.1 e l'Esempio 2.5.1.2, e si noti che

$$\begin{aligned} 0_\lambda &:= fn\ xy \Rightarrow y \\ 1_\lambda &:= fn\ xy \Rightarrow xy \\ 2_\lambda &:= fn\ xy \Rightarrow x(xy) \\ &\vdots \end{aligned}$$

dunque, la corrispondenza tra \mathbb{N} e \mathbb{N}_λ è data dal *numero di applicazioni effettuate* ad una qualche variabile, infatti è possibile costruire il seguente isomorfismo tra le algebre $(\mathbb{N}, \text{zero}, \text{succ})$ e $(\mathbb{N}_\lambda, \text{zero}_\lambda, \text{succ}_\lambda)$:

$$\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}_\lambda : n \mapsto fn\ xy \Rightarrow \underbrace{x \cdots x}_n y$$

dove x dunque è una funzione che può essere applicata ad una certa variabile y .

È possibile definire una funzione che, dato un numero di Church, restituisce il corrispondente numero naturale (dunque l'equivalente di φ^{-1}), come segue:

$$\text{eval}_\lambda := fn\ z \Rightarrow z(fn\ x \Rightarrow x + 1)0$$

poiché applica la funzione $\text{succ}_\mathbb{N}$ esattamente z volte — e dunque necessariamente $z \in \mathbb{N}_\lambda$.

Esempio 2.5.1.3 (Corrispondenze tra \mathbb{N}_λ e \mathbb{N}). Per calcolare $\text{eval}_\lambda(1_\lambda)$ è necessario svolgere i seguenti calcoli:

$$\begin{aligned} (fn\ z \Rightarrow z(fn\ x \Rightarrow x + 1)0)(fn\ xy \Rightarrow xy) &\longrightarrow (fn\ xy \Rightarrow xy)(fn\ x \Rightarrow x + 1)0 \longrightarrow \\ &\longrightarrow (fn\ y \Rightarrow (fn\ x \Rightarrow x + 1)y)0 \longrightarrow (fn\ x \Rightarrow x + 1)0 \longrightarrow 1 \end{aligned}$$

Osservazione 2.5.1.2: Operazione sum_λ

Si consideri l'algebra dei numeri di Church; su di essa, è possibile definire l'operazione di somma, come segue:

$$\text{sum}_\lambda := \text{fn } z \Rightarrow \text{fn } w \Rightarrow (\text{fn } x \Rightarrow \text{fn } y \Rightarrow zx(wxy)) \iff \text{fn } zwx y \Rightarrow zx(wxy)$$

poiché alla variabile y viene prima applicata x esattamente w volte — il quale deve dunque essere un numero di Church, e successivamente viene applicata x altre z volte — e ciò richiede che anche questo sia in \mathbb{N}_λ .

Esempio 2.5.1.4 (Somme in \mathbb{N}_λ). Per calcolare $\text{sum}_\lambda(2_\lambda, 1_\lambda)$ è necessario svolgere i seguenti calcoli:

$$\begin{aligned} & (\text{fn } zwx y \Rightarrow zx(wxy))(\text{fn } xy \Rightarrow x(xy))(\text{fn } xy \Rightarrow xy) \longrightarrow \\ & \longrightarrow (\text{fn } wxy \Rightarrow (\text{fn } xy \Rightarrow x(xy))x(wxy))(\text{fn } xy \Rightarrow xy) \longrightarrow \\ & \longrightarrow (\text{fn } wxy \Rightarrow (\text{fn } y \Rightarrow x(xy))(wxy))(\text{fn } xy \Rightarrow xy) \longrightarrow \\ & \longrightarrow (\text{fn } wxy \Rightarrow x(x(wxy)))(\text{fn } xy \Rightarrow xy) \longrightarrow \text{fn } xy \Rightarrow x(x((\text{fn } xy \Rightarrow xy)xy)) \longrightarrow \\ & \longrightarrow \text{fn } xy \Rightarrow x(x((\text{fn } y \Rightarrow xy)y)) \longrightarrow \text{fn } xy \Rightarrow x(x(xy)) =: 3_\lambda \end{aligned}$$