



SAPIENZA  
UNIVERSITÀ DI ROMA

“SAPIENZA” UNIVERSITÀ DI ROMA  
INGEGNERIA DELL'INFORMAZIONE,  
INFORMATICA E STATISTICA  
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

---

# Linguaggi di Programmazione

---

Appunti integrati con il libro "TODO", TODO 1, Autore 2, ...

*Author*  
Alessio Bandiera

20 ottobre 2023

# Indice

<b>Informazioni e Contatti</b>	<b>1</b>
<b>1 Induzione</b>	<b>2</b>
1.1 Algebre induttive . . . . .	2
1.1.1 Assiomi di Peano . . . . .	2
1.1.2 Algebre induttive . . . . .	4
1.2 Strutture dati induttive . . . . .	7
1.2.1 Liste . . . . .	7
1.2.2 Alberi binari . . . . .	8
<b>2 Paradigma funzionale</b>	<b>11</b>
2.1 Grammatiche . . . . .	11
2.1.1 Definizioni . . . . .	11
2.2 Assegnazioni . . . . .	14
2.2.1 Definizioni . . . . .	14
2.2.2 Ambienti . . . . .	16
2.2.3 Semantica operativa . . . . .	17
2.3 Valutazioni e scoping . . . . .	18
2.3.1 Definizioni . . . . .	18
2.4 Funzioni . . . . .	22
2.4.1 Definizioni . . . . .	22
2.4.2 Semantiche operative . . . . .	24
2.5 Lambda calcolo . . . . .	29
2.5.1 Numeri di Church . . . . .	29
2.5.2 Logica booleana di Church . . . . .	32
2.5.3 Lambda calcolo . . . . .	34

# Informazioni e Contatti

## Prerequisiti consigliati:

- Algebra
- TODO

## Segnalazione errori ed eventuali migliorie:

Per segnalare eventuali errori e/o migliorie possibili, si prega di utilizzare il **sistema di Issues fornito da GitHub** all'interno della pagina della repository stessa contenente questi ed altri appunti (link fornito al di sotto), utilizzando uno dei template già forniti compilando direttamente i campi richiesti.

Gli appunti sono in continuo aggiornamento, pertanto, previa segnalazione, si prega di controllare se l'errore sia ancora presente nella versione più recente.

## Licenza di distribuzione:

These documents are distributed under the [GNU Free Documentation License](#), a form of copyleft intended to be used on manuals, textbooks or other types of document in order to assure everyone the effective freedom to copy and redistribute it, with or without modifications, either commercially or non-commercially.

## Contatti dell'autore e ulteriori link:

- Github: <https://github.com/ph04>
- Email: [alessio.bandiera02@gmail.com](mailto:alessio.bandiera02@gmail.com)
- LinkedIn: [Alessio Bandiera](#)

# 1

## Induzione

### 1.1 Algebre induttive

#### 1.1.1 Assiomi di Peano

##### Definizione 1.1.1.1: Assiomi di Peano

Gli **assiomi di Peano** sono 5 assiomi che definiscono l'insieme  $\mathbb{N}$ , e sono i seguenti:

- i)  $0 \in \mathbb{N}$
- ii)  $\exists \text{succ} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , o equivalentemente,  $\forall x \in \mathbb{N} \quad \text{succ}(x) \in \mathbb{N}$
- iii)  $\forall x, y \in \mathbb{N} \quad x \neq y \implies \text{succ}(x) \neq \text{succ}(y)$
- iv)  $\nexists x \in \mathbb{N} \mid \text{succ}(x) = 0$
- v)  $\forall S \subseteq \mathbb{N} \quad (0 \in S \wedge (\forall x \in S \quad \text{succ}(x) \in S)) \implies S = \mathbb{N}$

**Esempio 1.1.1.1** ( $\mathbb{N}$  di von Neumann). Una rappresentazione dell'insieme dei numeri naturali  $\mathbb{N}$  alternativa alla canonica

$$\mathbb{N} := \{0, 1, 2, \dots\}$$

è stata fornita da John von Neumann. Indicando tale rappresentazione con  $\aleph$ , si ha che, per Neumann

$$\begin{aligned} 0_{\aleph} &:= \emptyset = \{\} \\ 1_{\aleph} &:= \{0_{\aleph}\} = \{\{\}\} \\ 2_{\aleph} &:= \{0_{\aleph}, 1_{\aleph}\} = \{\{\}, \{\{\}\}\} \\ &\vdots \end{aligned}$$

e la funzione  $\text{succ}_{\aleph}$  è definita come segue

$$\text{succ}_{\aleph} : \aleph \rightarrow \aleph : x_{\aleph} \mapsto x_{\aleph} \cup \{x_{\aleph}\} = \{\mu_{\aleph} \in \aleph \mid |\mu_{\aleph}| \leq |x_{\aleph}|\}$$

ed in particolare  $\forall x_{\mathbb{N}} \in \mathbb{N} \quad |x_{\mathbb{N}}| + 1 = |\text{succ}_{\mathbb{N}}(x_{\mathbb{N}})|$ .

È possibile verificare che tale rappresentazione di  $\mathbb{N}$  soddisfa gli assiomi di Peano, in quanto

- i)  $0_{\mathbb{N}} := \emptyset \in \mathbb{N}$ ;
- ii)  $\exists \text{succ}_{\mathbb{N}} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , definita precedentemente;
- iii)  $\forall x_{\mathbb{N}}, y_{\mathbb{N}} \in \mathbb{N} \quad x_{\mathbb{N}} \neq y_{\mathbb{N}} \implies |x_{\mathbb{N}}| \neq |y_{\mathbb{N}}| \implies |\text{succ}_{\mathbb{N}}(x_{\mathbb{N}})| \neq |\text{succ}_{\mathbb{N}}(y_{\mathbb{N}})| \implies \text{succ}_{\mathbb{N}}(x_{\mathbb{N}}) \neq \text{succ}_{\mathbb{N}}(y_{\mathbb{N}})$ ;
- iv) per assurdo, sia  $x_{\mathbb{N}} \in \mathbb{N}$  tale che  $\text{succ}_{\mathbb{N}}(x_{\mathbb{N}}) = 0_{\mathbb{N}} := \emptyset$ ; per definizione  $\text{succ}_{\mathbb{N}}(x_{\mathbb{N}}) := \{\mu_{\mathbb{N}} \in \mathbb{N} \mid |\mu_{\mathbb{N}}| \leq |x_{\mathbb{N}}|\}$ , ma non esiste  $\mu_{\mathbb{N}} \in \mathbb{N}$  con cardinalità minore o uguale 0, e dunque  $\nexists x_{\mathbb{N}} \in \mathbb{N} \mid \text{succ}_{\mathbb{N}}(x_{\mathbb{N}}) = 0_{\mathbb{N}}$ ;
- v) per assurdo, sia  $S \subseteq \mathbb{N}$  tale che  $0_{\mathbb{N}} \in S$  e  $\forall x_S \in S \quad \text{succ}_{\mathbb{N}}(x_S) \in S$  ma  $S \neq \mathbb{N} \iff \mathbb{N} - S \neq \emptyset \implies \exists \zeta_{\mathbb{N}} \in \mathbb{N} - S$ , ed in particolare  $\zeta_{\mathbb{N}} \neq 0_{\mathbb{N}}$ ;  $\mathbb{N}$  è chiuso su  $\text{succ}_{\mathbb{N}}$  per il secondo assioma di Peano, e dunque  $\zeta_{\mathbb{N}} \neq 0_{\mathbb{N}} \implies \exists \zeta'_{\mathbb{N}} \in \mathbb{N} \mid \text{succ}_{\mathbb{N}}(\zeta'_{\mathbb{N}}) = \zeta_{\mathbb{N}}$ , e sicuramente  $\zeta'_{\mathbb{N}} \notin S$ , poiché altrimenti  $\zeta_{\mathbb{N}} \in S$  anch'esso in quanto  $S$  è chiuso rispetto a  $\text{succ}_{\mathbb{N}}$ ; allora, ripetendo il ragionamento analogo per l'intera catena di predecessori,  $S$  risulterebbe essere vuoto, ma ciò è impossibile poiché  $0_{\mathbb{N}} \in S$  in ipotesi  $\nexists$ .

#### Principio 1.1.1.1: Principio di Induzione

Sia  $P$  una proprietà che vale per  $n = 0$ , e dunque  $P(0)$  è vera; inoltre, per ogni  $n \in \mathbb{N}$  si ha che  $P(n) \implies P(n+1)$ ; allora,  $P(n)$  è vera per ogni  $n \in \mathbb{N}$ .

In simboli, utilizzando la notazione della logica formale, si ha che

$$\frac{P(0) \quad \frac{\forall n \in \mathbb{N} \quad P(n)}{P(n+1)}}{\forall n \in \mathbb{N} \quad P(n)}$$

#### Osservazione 1.1.1.1: Quinto assioma di Peano

Si noti che il quinto degli assiomi di Peano ([Definizione 1.1.1.1](#)) equivale al principio di induzione ([Principio 1.1.1.1](#)). Infatti, il quinto assioma afferma che qualsiasi sottoinsieme  $S$  di  $\mathbb{N}$  avente lo 0, e caratterizzato dalla chiusura sulla funzione di successore  $\text{succ}$ , coincide con  $\mathbb{N}$  stesso.

## 1.1.2 Algebre induttive

### Definizione 1.1.2.1: Segnatura di una funzione

Data una funzione  $f$ , si definisce

$$f : A \rightarrow B$$

come **segnatura della funzione**  $f$ , dove  $A$  è detto **dominio**, denotato con  $\text{dom}(f)$  e  $B$  **codominio** di  $f$ .

### Definizione 1.1.2.2: Algebra

Una **struttura algebrica**, o più semplicemente **algebra**, consiste di un insieme *non vuoto*, talvolta chiamato **insieme sostegno** (*carrier set* o *domain*), fornito di una o più operazioni su tale insieme, quest'ultime caratterizzate da un numero finito di assiomi da soddisfare.

Se  $A$  è il carrier set, e  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$  sono delle operazioni definite su  $A$ , allora con

$$(A, \gamma_1, \dots, \gamma_n)$$

si indica l'algebra costituita da tali componenti, e questo simbolismo prende il nome di **segnatura dell'algebra**.

**Esempio 1.1.2.1** (Strutture algebriche con singola operazione). Esempi di strutture algebriche con un'operazione binaria sono i seguenti:

- semigrupperi
- monoidi
- gruppi
- gruppi abeliani

**Esempio 1.1.2.2** (Strutture algebriche con due operazioni). Esempi di strutture algebriche con due operazioni binarie sono i seguenti:

- semianelli
- anelli
- campi

### Definizione 1.1.2.3: Insieme unità

Con **insieme unità** si intende un qualsiasi insieme tale che  $|1| = 1$ , e verrà indicato attraverso il simbolo  $\mathbb{1}$ .

**Definizione 1.1.2.4: Funzione nullaria**

Dato un insieme  $A$ , con **funzione nullaria** si intende una qualsiasi funzione con segnatura

$$f : \mathbb{1} \rightarrow A$$

**Osservazione 1.1.2.1: Iniettività della funzione nullaria**

Si noti che ogni funzione nullaria è iniettiva, poiché il dominio è costituito da un solo elemento.

**Definizione 1.1.2.5: Algebra induttiva**

Sia  $A$  un insieme, e siano  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$  funzioni definite su  $A$  di arbitraria arietà; allora,  $(A, \gamma_1, \dots, \gamma_n)$  è definita **algebra induttiva** se si verificano le seguenti:

- i)  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$  sono iniettive
- ii)  $\forall i, j \in [1, n] \mid i \neq j \quad \text{im}(\gamma_i) \cap \text{im}(\gamma_j) = \emptyset$ , ovvero, le immagini dei costruttori sono a due a due disgiunte
- iii)  $\forall S \subseteq A \quad (\forall i \in [1, n], a_1, \dots, a_k \in S, k \in \mathbb{N} \quad \gamma_i(a_1, \dots, a_k) \in S) \implies S = A$ , o equivalentemente, in  $A$  non devono essere contenute algebre induttive.

Le funzioni  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$  prendono il nome di **costruttori dell'algebra**.

**Osservazione 1.1.2.2: Terzo assioma delle algebre induttive**

Si noti che nel terzo assioma della [Definizione 1.1.2.5](#) anche  $S = \emptyset$  è un valido sottoinsieme di  $A$ , ma poiché non esistono  $a_1, \dots, a_k \in \emptyset$ , in esso ogni qualificazione è vera a vuoto. Di conseguenza, nel momento in cui si ammette  $S = \emptyset$  nel terzo assioma, l'algebra risulta essere non induttiva necessariamente (a meno dell'algebra vuota).

Di conseguenza, questo terzo assioma forza la necessità della presenza di un costruttore nullario all'interno di ogni algebra induttiva, in modo da non poter ammettere  $S = \emptyset$ , poiché l'algebra deve essere chiusa su ognuno dei suoi costruttori.

**Esempio 1.1.2.3** (Numeri naturali).  $(\mathbb{N}, +)$  non è un algebra induttiva, poiché esistono  $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{N}$  con  $x_1 \neq x_3$  e  $x_2 \neq x_4$  tali che  $x_1 + x_2 = x_3 + x_4$ ; ad esempio,  $2 + 3 = 5 = 1 + 4$ , e  $2 \neq 1, 3 \neq 4$ .

**Esempio 1.1.2.4** (Algebra di Boole). Dato l'insieme  $B = \{\text{true}, \text{false}\}$ , e la funzione  $\neg$  definita come segue

$$\neg : B \rightarrow B : x \mapsto \begin{cases} \text{false} & x = \text{true} \\ \text{true} & x = \text{false} \end{cases}$$

è possibile dimostrare che l'algebra  $(B, \neg)$  non è induttiva; infatti, nonostante  $\neg$  sia iniettiva, e la seconda proprietà della [Definizione 1.1.2.5](#) sia vera a vuoto,  $(B, \neg)$  non

presenta costruttore nullario, e dunque non può costituire un'algebra induttiva (si noti l'Osservazione 1.1.2.2).

**Esempio 1.1.2.5** (Algebre induttive). Sia zero la funzione definita come segue

$$\text{zero} : \mathbb{1} \rightarrow \mathbb{N} : x \mapsto 0$$

e si prenda in esame l'algebra  $(\mathbb{N}, \text{succ}, \text{zero})$ ; allora si ha che

i) succ e zero sono iniettive, poiché

- succ è iniettiva per il terzo assioma di Peano (Definizione 1.1.1.1)
- zero è iniettiva per l'Osservazione 1.1.2.1

ii)  $\text{im}(\text{succ}) \cap \text{im}(\text{zero}) = (\mathbb{N} - \{0\}) \cap \{0\} = \emptyset$

iii) TODO

#### Definizione 1.1.2.6: Omomorfismo

Un **omomorfismo** è una funzione, tra due algebre dello stesso tipo, tale da preservarne le strutture.

Formalmente, siano  $(A, \mu_1, \dots, \mu_n)$  e  $(B, \delta_1, \dots, \delta_n)$  due algebre tali che ogni funzione  $\mu_i$  abbia la stessa arietà e lo stesso numero di parametri esterni (denotati con  $k$ ) di  $\delta_i$ , pari rispettivamente ad  $\eta_i$  ed a  $\nu_i$ , per qualche  $i \in [1, n]$ ; allora, una funzione  $f : A \rightarrow B$  è detta essere un **omomorfismo** tra le due algebre, se e solo se

$$\begin{aligned} \forall a_1, \dots, a_{\eta_1} \quad f(\mu_1(a_1, \dots, a_{\eta_1}), k_1, \dots, k_{\nu_1}) &= \delta_1(f(a_1), \dots, f(a_{\eta_1}), k_1, \dots, k_{\nu_1}) \\ &\vdots \\ \forall a_1, \dots, a_{\eta_n} \quad f(\mu_n(a_1, \dots, a_{\eta_n}), k_1, \dots, k_{\nu_n}) &= \delta_n(f(a_1), \dots, f(a_{\eta_n}), k_1, \dots, k_{\nu_n}) \end{aligned}$$

**Esempio 1.1.2.6** (Omomorfismi). Si considerino i gruppi  $(\mathbb{R}, +)$  e  $(\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$ , e sia  $f$  definita come segue:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{>0} : x \mapsto e^x$$

allora, si ha che

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad f(x) \cdot f(y) = e^x \cdot e^y = e^{x+y} = f(x+y)$$

dunque  $f$  è un omomorfismo di gruppi.

#### Definizione 1.1.2.7: Isomorfismo

Un **isomorfismo** è un omomorfismo biiettivo.

**Esempio 1.1.2.7** (Isomorfismi). Si consideri l'omomorfismo dell'Esempio 1.1.2.6; si noti che

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \mid x \neq y \quad e^x \neq e^y \implies f(x) \neq f(y)$$



e dunque  $f$  è iniettiva; inoltre

$$\forall y \in \mathbb{R}_{>0} \quad \exists x \in \mathbb{R} \mid f(x) = e^x = y \iff y = \ln(x)$$

e dunque  $f$  è suriettiva. Allora,  $f$  è biettiva, e poiché è un omomorfismo, risulta essere un isomorfismo.

## 1.2 Strutture dati induttive

### 1.2.1 Liste

#### Definizione 1.2.1.1: Liste

Una **lista** è una collezione ordinata di elementi, e l'insieme delle liste di lunghezza finita viene denotato con  $\text{List}\langle T \rangle$ , dove  $T$  è il tipo degli elementi che le liste contengono, ed il simbolo  $T$  verrà identificato con l'insieme di tutti gli oggetti aventi tipo  $T$ .

Dati  $a_1, \dots, a_n \in T$ , una lista  $l \in \text{List}\langle T \rangle$  contenente tali elementi può essere rappresentata come segue:

$$[a_1, \dots, a_n]$$

#### Definizione 1.2.1.2: Algebra delle liste finite

L'algebra delle liste finite è definita come segue:

$$(\text{List}\langle T \rangle, \text{empty}, \text{cons})$$

dove i costruttori sono i seguenti:

$$\begin{aligned} \text{empty} &: \mathbb{1} \rightarrow \text{List}\langle T \rangle : x \mapsto [] \\ \text{cons} &: \text{List}\langle T \rangle \times T \rightarrow \text{List}\langle T \rangle : ([a_1, \dots, a_n], x) \mapsto [a_1, \dots, a_n, x] \end{aligned}$$

#### Proposizione 1.2.1.1: Liste finite induttive

L'algebra delle liste finite è induttiva.

*Dimostrazione.* Si noti che:

- $\text{empty}$  ha dominio in  $\mathbb{1}$ , e poiché questo contiene un solo elemento,  $\text{empty}$  è necessariamente iniettiva;
- $\forall l, l' \in \text{List}\langle T \rangle, x, x' \in T \quad \text{cons}(l, x) = \text{cons}(l', x') \implies \begin{cases} l = l' \\ x = x' \end{cases}$  altrimenti  $l$  ed  $l'$  avrebbero avuto lunghezze diverse, oppure avrebbero contenuto diversi elementi;
- $\text{im}(\text{empty}) \cap \text{im}(\text{cons}) = \emptyset$ , poiché solo  $\text{empty}$  può restituire  $[]$ , in quanto  $\text{cons}$  restituisce sempre una lista contenente almeno l'elemento fornito in input;

- sia  $S \subseteq \text{List}\langle T \rangle$  tale da essere chiuso rispetto a  $\text{cons}$ , e contenente la lista vuota; per assurdo, sia  $\text{List}\langle T \rangle - S \neq \emptyset \implies \exists l \in \text{List}\langle T \rangle - S$ , ma  $\text{List}\langle T \rangle$  è chiuso rispetto a  $\text{cons}$ , ed in particolare  $\exists x \in T, l' \in \text{List}\langle T \rangle \mid \text{cons}(l', x) = l$ , ma poiché  $l \notin S$ , allora necessariamente  $l' \notin S$ , poiché  $S$  è chiuso rispetto a  $\text{cons}$ , e quindi  $l' \in S \implies l \in S$ , ma  $l$  è stato scelto in  $\text{List}\langle T \rangle - S$ ; ripetendo tale ragionamento induttivamente, si ottiene che  $S$  è vuoto, ma questo è impossibile poiché  $[] \in \text{List}\langle T \rangle$  in ipotesi  $\nmid$ .

Dunque, l'algebra delle liste finite risulta essere induttiva.  $\square$

### Osservazione 1.2.1.1: Algebra delle liste infinite

Se all'algebra delle liste finite venissero aggiunte anche le liste infinite, l'algebra risultante non sarebbe induttiva, in quanto conterrebbe l'algebra delle liste finite, la quale è induttiva per la [Proposizione 1.2.1.1](#), e verrebbe dunque contraddetto il terzo assioma della [Definizione 1.1.2.5](#).

### Osservazione 1.2.1.2: Concatenazione di liste finite

È possibile estendere l'algebra delle liste finite per supportare l'operazione di concatenazione tra liste, come segue:

$$\text{concat} : \text{List}\langle T \rangle \times \text{List}\langle T \rangle \rightarrow \text{List}\langle T \rangle : (l, l') \mapsto \begin{cases} l' & l = [] \\ \text{cons}(x, \text{concat}(t, l')) & \exists x \in T, t \in \text{List}\langle T \rangle \mid l = \text{cons}(t, x) \end{cases}$$

## 1.2.2 Alberi binari

### Definizione 1.2.2.1: Albero binario

Un **albero binario** è una struttura dati che è possibile rappresentare graficamente come segue:



Il primo nodo, poiché non è figlio di nessuno, è detto **radice**, e poiché l'albero è *binario*, ogni nodo ha 0 — nel qual caso è definito **foglia** — oppure 2 figli. L'insieme degli alberi binari viene denotato con **B-tree**.

**Definizione 1.2.2.2: Algebra degli alberi binari finiti**

L'algebra degli alberi binari finiti è definita come segue:

$$(\mathbf{B\text{-}tree}, \text{leaf}, \text{branch})$$

dove i costruttori sono i seguenti:

$$\text{leaf} : \mathbb{1} \rightarrow \mathbf{B\text{-}tree} : x \mapsto \circ$$

$$\text{branch} : \mathbf{B\text{-}tree} \times \mathbf{B\text{-}tree} \rightarrow \mathbf{B\text{-}tree} : (b, b') \mapsto$$



L'algebra degli alberi binari finiti è induttiva.

*Dimostrazione.* Omessa. □

**Osservazione 1.2.2.1: Algebra degli alberi binari infiniti**

Analogamente all'[Osservazione 1.2.1.1](#), l'algebra degli alberi binari finiti ed infiniti non è induttiva.

**Osservazione 1.2.2.2: Nodi di un albero binario finito**

È possibile estendere l'algebra degli alberi binari finiti per supportare l'operazione per contare i nodi di un albero, come segue:

$$\text{nodes} : \mathbf{B\text{-}tree} \rightarrow \mathbb{N} : b \mapsto \begin{cases} 1 & b = \circ \\ 1 + \text{nodes}(t) + \text{nodes}(t') & \exists t, t' \in \mathbf{B\text{-}tree} \mid b = \text{branch}(t, t') \end{cases}$$

**Osservazione 1.2.2.3: Foglie di un albero binario finito**

È possibile estendere l'algebra degli alberi binari finiti per supportare l'operazione per contare le foglie di un albero, come segue:

$$\text{leaves} : \mathbf{B\text{-}tree} \rightarrow \mathbb{N} : b \mapsto \begin{cases} 1 & b = \circ \\ \text{leaves}(t) + \text{leaves}(t') & \exists t, t' \in \mathbf{B\text{-}tree} \mid b = \text{branch}(t, t') \end{cases}$$

**Teorema 1.2.2.1: Relazione tra foglie e nodi**

Ogni albero binario finito, avente  $n$  foglie, ha  $2n - 1$  nodi.

*Dimostrazione.* La seguente dimostrazione procede per *induzione strutturale*, dunque effettuando l'induzione sulla morfologia della struttura dati, e non sul numero  $n$  di foglie.

*Caso base.* Il caso base è costituito dunque da  $\circ$ , l'albero ottenuto attraverso il costruttore nullario leaf, ed infatti si ha che

$$\text{leaves}(\circ) = 1 \implies 2 \cdot 1 - 1 = 1$$

e  $\circ$  ha esattamente 1 nodo.

*Ipotesi induttiva.* Un albero binario finito, avente  $n$  foglie, ha  $2n - 1$  nodi.

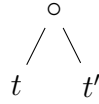
*Passo induttivo.* Sia  $b \in \mathbf{B-tree}$  tale che esistano  $t, t' \in \mathbf{B-tree}$  tali che  $\text{branch}(t, t') = b$ , e siano

$$\begin{cases} \text{leaves}(t) = n \\ \text{leaves}(t') = n' \end{cases}$$

Si noti che, per ipotesi induttiva, si ha che

$$\begin{cases} \text{nodes}(t) = 2n - 1 \\ \text{nodes}(t') = 2n' - 1 \end{cases}$$

ed inoltre, poiché  $b = \text{branch}(t, t')$ ,  $b$  ha la forma seguente



dunque, per definizione di leaves si ha che

$$\text{leaves}(b) = \text{leaves}(t) + \text{leaves}(t') = n + n'$$

e, dalla morfologia di  $b$ , segue che

$$\text{nodes}(b) = \text{nodes}(t) + \text{nodes}(t') + 1 = 2n - 1 + 2n' - 1 + 1 = 2(n + n') - 1$$

ed è quindi verificata la tesi, poiché

$$\text{leaves}(b) = n + n' \implies \text{nodes}(b) = 2(n + n') - 1$$

□

# 2

## Paradigma funzionale

### 2.1 Grammatiche

#### 2.1.1 Definizioni

##### Definizione 2.1.1.1: Grammatica

Una **grammatica** è un insieme di regole che definiscono come manipolare un insieme di stringhe, agendo su elementi sintattici detti **termini**.

##### Definizione 2.1.1.2: Forma di Backus-Naur (BNF)

La **forma di Backus-Naur** (*Backus-Naur Form*) è una notazione utilizzata per descrivere la sintassi di grammatiche, ed è definita come segue:

$$\langle \text{symbol} \rangle, \dots, \langle \text{symbol} \rangle ::= \_ \text{expression\_} \mid \dots \mid \_ \text{expression\_}$$

dove

- $\langle \text{symbol} \rangle$  è una *metavariabile non terminale*, ovvero, può essere sostituita con regole definite dalla grammatica; si noti che le regole possono essere utilizzate ricorsivamente;
- il simbolo  $::=$  indica che ciò che è posto alla sua sinistra deve essere sostituito con ciò che è alla sua destra;
- $\_ \text{expression\_}$  è un'espressione che verrà usata per rimpiazzare le metavariable non terminali, attraverso le regole definite dalla grammatica; le *metavariable* che compongono le espressioni possono essere **costanti**, **variabili**, **termini** o **espressioni** contenenti combinazioni delle precedenti, presentando eventualmente anche operazioni sintattiche specifiche.

**Esempio 2.1.1.1** (Grammatica *Exp*). Sia *Exp* la seguente grammatica:

$$M, N ::= 0 \mid 1 \mid \dots \mid x \mid M + N \mid M * N$$

essa definisce le regole per utilizzare i numeri in  $\mathbb{N}$ , ammettendo inoltre le operazioni sintattiche di  $+$  e  $*$ .

All'interno di questa grammatica dunque, le metavariable utilizzate sono le seguenti:

- *costanti*:  $0, 1, \dots$
- *variabili*:  $x$
- *termini*:  $M$  ed  $N$
- *espressioni*:  $M + N$  e  $M * N$  (tecnicamente anche le precedenti sono espressioni, ma queste in particolare comprendono anche operazioni sintattiche)

### Definizione 2.1.1.3: Variabili

Data una grammatica di  $G$ , con  $\text{Var}$  si indica l'**insieme delle variabili** di  $G$ .

### Definizione 2.1.1.4: Valori

Data una grammatica, con  $\text{Val}$  si indica l'**insieme dei valori** che ogni termine della grammatica può assumere.

**Esempio 2.1.1.2** (Variabili e valori di *Exp*). Si prenda in considerazione la grammatica *Exp* dell'[Esempio 2.2.1.1](#); in essa, si ha che

$$\begin{aligned}\text{Var} &= \{x\} \\ \text{Val} &= \{0, 1, \dots\}\end{aligned}$$

### Definizione 2.1.1.5: Linguaggio di una grammatica

Sia  $G$  una grammatica; allora, il suo **linguaggio** è l'insieme delle stringhe che è possibile costruire attraverso le regole dettate da  $G$ .

**Esempio 2.1.1.3** (Linguaggio di *Exp*). Sia *Exp* la grammatica dell'[Esempio 2.1.1.1](#); in essa, considerando ad esempio le stringhe "4" e "23", si può ottenere la stringa

$$+("4", "23") = "4 + 23"$$

dove la *polish notation* — alla sinistra dell'uguale — e la forma sintattica canonica — alla sua destra — verranno utilizzate intercambiabilmente, poiché puro *syntactic sugar*.

**Osservazione 2.1.1.1: Valutazione di  $Exp$** 

Si prenda in considerazione la grammatica  $Exp$  dell'Esempio 2.1.1.1; su di essa, è possibile definire ricorsivamente una funzione  $eval$ , in grado di valutare le stringhe che tale grammatica può produrre, come segue:

$$\begin{aligned} eval(0) &= 0 \\ eval(1) &= 1 \\ &\vdots \\ eval(M + N) &= eval(M) + eval(N) \\ eval(M * N) &= eval(M) * eval(N) \end{aligned}$$

**Osservazione 2.1.1.2: Ambiguità di  $Exp$** 

Si prenda in considerazione la grammatica  $Exp$  dell'Esempio 2.1.1.1; si noti che tale grammatica è ambigua, poichè ad esempio

$$+("5", *("6", "7")) = "5 + 6 * 7" = *(+("5", "6"), "7")$$

e da ciò segue anche che  $\text{im}(+) \cap \text{im}(*) \neq \emptyset$ .

**Osservazione 2.1.1.3: Disambiguazione di  $Exp$** 

Si noti che l'ambiguità trattata nell'Osservazione 2.1.1.2 non permetterebbe di poter definire la funzione  $eval$ , descritta nell'Osservazione 2.1.1.1. Dunque, per risolvere tale ambiguità, a meno di parentesi (che *non* sono definite all'interno della grammatica) o dell'esplicitazione della composizione di funzioni utilizzata, verrà sottintesa la normale precedenza degli operatori aritmetica durante la valutazione delle stringhe.

## 2.2 Assegnazioni

### 2.2.1 Definizioni

#### Definizione 2.2.1.1: Clausola *let*

Sia  $G$  una grammatica; allora, è possibile definire su  $G$  una funzione  $let$ , come segue:

$$let : \text{Var} \times G \times G \rightarrow G$$

e verrà utilizzata attraverso la sintassi

$$let \text{ *variable* } = \text{ _expression\_1 } \text{ in } \text{ _expression\_2 }$$

dove alla variabile **\*variable\*** verrà assegnata l'espressione  $\text{ _expression\_1 }$  *durante la valutazione* di  $\text{ _expression\_2 }$ ; la variabile **\*variable\***, all'interno di  $\text{ _expression\_2 }$ , prende il nome di **variabile locale**.

Una variabile alla quale non è stata assegnata nessuna espressione prende il nome di **variabile libera** (*free variable* in inglese); una variabile non libera è detta **variabile legata** (*bound variable*). L'azione di legare o liberare una variabile è detta **variable binding**.

**Esempio 2.2.1.1** (Estensione di  $Exp$ ). Sia  $Exp$  la seguente estensione della grammatica presente all'interno dell'[Esempio 2.1.1.1](#):

$$M, N ::= k \mid x \mid M + N \mid M * N \mid let\ x = M \text{ in } N$$

In essa, sono presenti:

- *costanti*: indicate con  $k$ , che sta ad indicare che in  $Exp$  è ammessa qualsiasi costante; di fatto, è possibile pensare a  $k$  come una funzione definita come segue:

$$k : \mathbb{N} \rightarrow Exp : x \mapsto "x"$$

- *variabili*:  $x$
- *termini*:  $M$  ed  $N$
- *espressioni*:  $M + N$ ,  $M * N$  e  $let\ x = M \text{ in } N$

**Esempio 2.2.1.2** (Clausole *let*). Sia  $Exp$  la grammatica dell'[Esempio 2.2.1.1](#); un esempio di espressione su  $Exp$ , che utilizza la clausola *let* della [Definizione 2.2.1.1](#), è la seguente:

$$let\ x = 3 \text{ in } (x + 1)$$

e nel momento in cui viene valutata tale espressione, si ha che

$$x = 3 \implies x + 1 = 3 + 1 = 4$$

e dunque il valore dell'espressione è 4.



**Esempio 2.2.1.3** (Variabili libere). Sia  $Exp$  la grammatica dell'Esempio 2.2.1.1, ed ammettendo la variabile  $y$  in essa, si consideri la seguente espressione:

$$let\ x = 3\ in\ (x + y)$$

in essa, la variabile  $x$  è posta pari a 3, ma ad  $y$  non è stato assegnato alcuna espressione, e dunque risulta essere una variabile libera.

#### Osservazione 2.2.1.1: Ambiguità di $let$

Sia  $Exp$  la grammatica dell'Esempio 2.2.1.1, e si consideri la sua seguente espressione

$$let\ x = M\ in\ x + y$$

per qualche espressione  $M \in Exp$ , e due variabili  $x, y \in \text{Var}$ , ammettendo dunque  $y$  tra le variabili di  $Exp$ ; si noti che tale espressione è ambigua, poiché potrebbe equivalere a

$$(let\ x = M\ in\ x) + y$$

oppure a

$$let\ x = M\ in\ (x + y)$$

Per convenzione, all'interno di questi appunti, in assenza di parentesi che descrivano la precedenza degli operatori, si assume la precedenza della seconda espressione mostrata.

#### Osservazione 2.2.1.2: Variabili libere di $Exp$

Sia  $Exp$  la grammatica dell'Esempio 2.2.1.1; su di essa, è possibile definire, ricorsivamente, una funzione in grado di restituire le variabili free di una data espressione, come segue:

$$\text{free} : Exp \rightarrow \mathcal{P}(\text{Var}) : e \mapsto \begin{cases} \emptyset & \exists \eta \in \mathbb{N} \mid e = k(\eta) \\ \{x\} & \exists x \in \text{Var} \mid e = x \\ \text{free}(M) \cup \text{free}(N) & \exists M, N \in Exp \mid e = M + N \vee e = M * N \\ \text{free}(M) \cup (\text{free}(N) - \{x\}) & \exists x \in \text{Var}, M, N \in Exp \mid e = (let\ x = M\ in\ N) \end{cases}$$

## 2.2.2 Ambienti

### Definizione 2.2.2.1: Ambiente di una grammatica

Data una grammatica tale che  $\text{Val}$  sia un insieme finito, un **ambiente** della grammatica è una funzione della forma

$$E : \text{Var} \xrightarrow{\text{fin}} \text{Val}$$

che associa dunque una variabile ad un possibile valore che può assumere (la notazione *fin* indica che  $E$  è una funzione *parziale*, dunque non necessariamente definita su tutto il dominio). L'insieme di tutti gli ambienti della grammatica è denotato con

$$\text{Env} := \{f \mid f : \text{Var} \xrightarrow{\text{fin}} \text{Val}\}$$

In simboli, gli ambienti verranno scritti come insiemi di coppie  $(x, k)$  con  $x \in \text{Var}$ ,  $k \in \text{Val}$ , che descriveranno la mappa definita dall'ambiente stesso. Si noti che, per un certo ambiente  $E \in \text{Env}$ ,  $E(x)$  è indefinito per ogni  $x \in \text{Var} - \text{dom}(E)$ .

**Esempio 2.2.2.1** (Ambienti di  $\text{Exp}$ ). Sia  $\text{Exp}$  la grammatica dell'[Esempio 2.2.1.1](#); allora, un possibile ambiente di  $\text{Exp}$ , denotato con  $E \in \text{Env}$ , è il seguente:

$$E := \{(z, 3), (y, 9)\}$$

ed esso esprime la possibilità che in  $\text{Exp}$   $z$  possa essere valutato pari a 3, mentre  $y$  pari a 9 (tecnicamente, le variabili  $z$  ed  $y$  andrebbero ammesse all'interno della grammatica, ma d'ora in avanti tale precisazione verrà sottintesa).

### Definizione 2.2.2.2: Concatenazione di ambienti

Siano  $E_1$  ed  $E_2$  due ambienti di una grammatica; allora, si definisce **concatenazione** di  $E_1$  ed  $E_2$  la seguente funzione

$$E_1 E_2 : \text{Env} \times \text{Env} \rightarrow \text{Env} : x \mapsto \begin{cases} E_2 & x \in \text{dom}(E_2) \vee x \in \text{dom}(E_1) \cap \text{dom}(E_2) \\ E_1(x) & x \in \text{dom}(E_1) \end{cases}$$

dunque, nella concatenazione  $E_2$  sovrascrive le tuple che sono presenti anche in  $E_1$ .

**Esempio 2.2.2.2** (Concatenazioni di ambienti). Sia  $\text{Exp}$  la grammatica descritta all'interno del [Esempio 2.2.1.1](#), e siano

$$\begin{aligned} E_1 &:= \{(z, 3), (y, 9)\} \\ E_2 &:= \{(z, 4)\} \end{aligned}$$

due suoi ambienti; allora si ha che

$$E_1 E_2 := \{(z, 4), (y, 9)\}$$

### 2.2.3 Semantica operativa

#### Definizione 2.2.3.1: Semantica operativa di una grammatica

Data una grammatica  $G$ , si definisce **semantica operativa** della grammatica una relazione, indicata col simbolo  $\rightsquigarrow$ , definita come segue:

$$\rightsquigarrow \subseteq \text{Env} \times G \times \text{Val}$$

Un elemento  $(E, M, v) \in \rightsquigarrow$  è detto **giudizio operativo**, e viene scritto attraverso il seguente simbolismo:

$$E \vdash M \rightsquigarrow v$$

e si legge "valutando  $M$ , nell'ambiente  $E$ , si ottiene  $v$ ".

**Esempio 2.2.3.1** (Semantica operativa di  $Exp$ ). Sia  $Exp$  la grammatica definita all'interno dell'Esempio 2.2.1.1, e sia  $E$  un suo ambiente; allora, sono vere le seguenti asserzioni:

$$\begin{aligned} & [const] \quad E \vdash k \rightsquigarrow k \\ & \forall x \in \text{Var} \quad \exists v \in \text{Val} \mid E(x) = v \implies [var] \quad E \vdash x \rightsquigarrow v \\ & \forall v', v'' \in \text{Val}, M, N \in Exp \quad \exists v \in \text{Val} \mid v = v' + v'' \implies [plus] \quad \frac{E \vdash M \rightsquigarrow v' \quad E \vdash N \rightsquigarrow v''}{E \vdash M + N \rightsquigarrow v} \\ & \forall v', v'' \in \text{Val}, M, N \in Exp \quad \exists v \in \text{Val} \mid v = v' \cdot v'' \implies [times] \quad \frac{E \vdash M \rightsquigarrow v' \quad E \vdash N \rightsquigarrow v''}{E \vdash M * N \rightsquigarrow v} \\ & \forall v, v' \in \text{Val}, x \in \text{Var}, M, N \in Exp \quad [let] \quad \frac{E \vdash M \rightsquigarrow v' \quad E\{(x, v')\} \vdash N \rightsquigarrow v}{E \vdash let \ x = M \ in \ N \rightsquigarrow v} \end{aligned}$$

#### Definizione 2.2.3.2: Equivalenza operativa

Sia  $G$  una grammatica, e siano  $M$  ed  $N$  due sue espressioni; queste sono dette **operazionalmente equivalenti**, se è vera la seguente proposizione:

$$\forall E \in \text{Env}, v \in \text{Val} \quad E \vdash M \rightsquigarrow v \iff E \vdash N \rightsquigarrow v$$

e viene indicato con  $M \sim N$ .

#### Definizione 2.2.3.3: Albero di valutazione

Con **albero di valutazione** di un'espressione  $e$ , si definisce l'albero, composto da inferenze logiche, ottenuto dalla valutazione di  $e$ .

#### Osservazione 2.2.3.1: Ambiente iniziale

Per qualsiasi grammatica — a meno di specifiche — si assume che, all'interno di una valutazione, l'ambiente iniziale sia  $\emptyset \in \text{Env}$ .

**Esempio 2.2.3.2** (Alberi di valutazione su *Exp*). Sia *Exp* la grammatica definita all'interno dell'Esempio 2.2.1.1; allora, l'albero di valutazione dell'espressione

$$\text{let } x = 3 \text{ in } x + 4$$

è il seguente

$$\frac{\emptyset \vdash 3 \rightsquigarrow 3 \quad \frac{\{(x, 3)\} \vdash x \rightsquigarrow 3 \quad \{(x, 3)\} \vdash 4 \rightsquigarrow 4}{\{(x, 3)\} \vdash x + 4 \rightsquigarrow 7}}{\emptyset \vdash \text{let } x = 3 \text{ in } x + 4 \rightsquigarrow 7}$$

e l'espressione è valutabile poiché  $x \in \text{dom}(\{(x, 1)\}) = \{x\}$ .

## 2.3 Valutazioni e scoping

### 2.3.1 Definizioni

#### Definizione 2.3.1.1: Valutazione eager

Data una grammatica, la **valutazione eager** (*call-by-name*) valuta una data espressione della grammatica non appena questa viene legata ad una variabile. In simboli, la valutazione eager verrà indicata con il pedice E.

#### Definizione 2.3.1.2: Valutazione lazy

Data una grammatica, la **valutazione lazy** (*call-by-need*) valuta una data espressione della grammatica solo quando il suo valore viene richiesto da un'altra espressione. In simboli, la valutazione lazy verrà indicata con il pedice L.

#### Definizione 2.3.1.3: Scoping statico

Data una grammatica, la valutazione a **scoping statico** (*lexical scope*) valuta le variabili TODO. In simboli, lo scoping statico verrà indicato con il pedice S.

#### Definizione 2.3.1.4: Scoping dinamico

Data una grammatica, la valutazione a **scoping dinamico** valuta le variabili utilizzando l'ambiente definito in tempo di valutazione. TODO NON MI PIACE CAMBIA. In simboli, lo scoping dinamico verrà indicato con il pedice D.

**Definizione 2.3.1.5: Equivalenza di semantiche operazionali**

Data una grammatica, due sue semantiche operazionali sono dette **equivalenti** se, presa una qualunque espressione di  $G$ , quando questa viene valutata attraverso le due semantiche, produce lo stesso risultato.

In simboli, data una grammatica  $G$ , e due sue semantiche operazionali  $A$  e  $B$ , se queste sono equivalenti, la loro equivalenza viene denotata con il seguente simbolismo:

$$G_A \equiv G_B$$

**Lemma 2.3.1.1:  $Exp_{ES}$  e  $Exp_{ED}$** 

Sia  $Exp$  la grammatica definita all'interno dell'Esempio 2.2.1.1, avente le clausole definite nell'Esempio 2.2.3.1; allora, si ha che

$$Exp_{ES} \equiv Exp_{ED}$$

*Dimostrazione.* Omessa. □

**Esempio 2.3.1.1 ( $Exp_E$ ).** Sia  $Exp$  la grammatica definita nell'Esempio 2.2.1.1, e si consideri la seguente espressione:

$$let\ x = 3\ in\ (let\ y = x\ in\ (let\ x = 7\ in\ y + x))$$

essa, valutata attraverso valutazione eager, produce il seguente albero di derivazione:

$$\begin{array}{c} \emptyset \vdash 3 \rightsquigarrow 3 \quad \frac{\{(x, 3)\} \vdash x \rightsquigarrow 3 \quad \frac{\{(x, 3), (y, 3)\} \vdash 7 \rightsquigarrow 7 \quad \frac{\{(x, 3), (y, 3)\} \vdash y \rightsquigarrow 3 \quad \{(x, 3), (y, 3)\} \vdash x \rightsquigarrow 7}{\{(x, 3), (y, 3)\} \vdash y + x \rightsquigarrow 10}}{\{(x, 3), (y, 3)\} \vdash let\ x = 7\ in\ y + x \rightsquigarrow 10}}{\{(x, 3)\} \vdash let\ y = x\ in\ (let\ x = 7\ in\ y + x) \rightsquigarrow 10}} \\ \hline \emptyset \vdash let\ x = 3\ in\ (let\ y = x\ in\ (let\ x = 7\ in\ y + x)) \rightsquigarrow 10 \end{array}$$

**Osservazione 2.3.1.1:**  $Exp_{LD}$ 

Sia  $Exp$  la grammatica definita nell'Esempio 2.2.1.1; per poter valutare le sue espressioni in maniera lazy dinamica, è necessario ridefinire alcune regole di inferenza definite all'interno dell'Esempio 2.2.3.1:

- l'insieme degli ambienti di  $Exp$  viene ridefinito come segue:

$$Env := \{f \mid Var \xrightarrow{fin} Val \cup Exp\}$$

dunque gli ambienti possono associare delle variabili anche a delle espressioni, in modo da poter ritardare la valutazione di quest'ultime fin quando non diventa strettamente necessario conoscerne il valore;

- $\forall E \in Env, x \in Var \quad x \in \text{dom}(E) \wedge M := E(x) \implies \frac{E \vdash M \rightsquigarrow v}{E \vdash x \rightsquigarrow v}$ , per rendere  $M$  calcolabile, attraverso l'ambiente corrente, nel momento in cui viene assegnata ad una variabile;
- $\forall x \in Var, M, N \in Exp \quad [let] \frac{E\{(x, M)\} \vdash N \rightsquigarrow v}{E \vdash let \ x = M \ in \ N \rightsquigarrow v}$ , in modo da ritardare la valutazione di  $M$ .

Si noti che tale valutazione utilizza lo scoping dinamico, poiché viene utilizzato l'ambiente corrente per valutare le variabili.

**Osservazione 2.3.1.2:**  $Exp_{LS}$ 

Sia  $Exp$  la grammatica definita all'interno dell'Esempio 2.2.1.1; per poter valutare le sue espressioni in maniera lazy statica, è necessario ridefinire alcune regole di inferenza definite all'interno dell'Esempio 2.2.3.1:

- l'insieme degli ambienti di  $Exp$  viene ridefinito come segue:

$$Env := \{f \mid Var \xrightarrow{fin} Exp \times Env\}$$

dunque gli ambienti possono associare delle variabili anche a delle tuple contenenti espressioni ed ambienti; in particolare, per una tupla  $(x, (M, E))$ , si ha che  $x$  vale  $M$  valutata nell'ambiente  $E$ ; questa correzione nella definizione di  $Env$  permette di tenere traccia degli ambienti in cui sono state fatte le assegnazioni;

- $\forall E \in Env, x \in Var \quad x \in \text{dom}(E) \wedge (M, E') := E(x) \implies \frac{E' \vdash M \rightsquigarrow v}{E \vdash x \rightsquigarrow v}$ , affinché sia possibile valutare le variabili esattamente nell'ambiente in cui gli è stata assegnata l'espressione  $M$ , e non nell'ambiente corrente;
- $\forall x \in Var, M, N \in Exp \quad [let] \frac{E\{(x, (M, E))\} \vdash N \rightsquigarrow v}{E \vdash let \ x = M \ in \ N \rightsquigarrow v}$ , in modo da salvare anche l'ambiente in cui alla variabile  $x$  è stata assegnata l'espressione  $M$ .

Si noti che tale valutazione utilizza lo scoping statico, poiché vengono salvati anche gli ambienti in cui sono state fatte le assegnazioni.

**Lemma 2.3.1.2:**  $Exp_{LS}$  e  $Exp_{LD}$ 

Sia  $Exp$  la grammatica definita nell'Esempio 2.2.1.1; allora, si ha che

$$Exp_{LS} \neq Exp_{LD}$$

*Dimostrazione.* Si consideri l'espressione definita nell'Esempio 2.3.1.1; essa, valutata attraverso valutazione lazy dinamica, produce il seguente albero di derivazione:

$$\begin{array}{c} \frac{\{(x, 3), (y, x)\}\{(x, 7)\} \vdash 7 \rightsquigarrow 7}{\{(x, 3), (y, x)\}\{(x, 7)\} \vdash x \rightsquigarrow 7} \quad \frac{\{(x, 3), (y, x)\}\{(x, 7)\} \vdash 7 \rightsquigarrow 7}{\{(x, 3), (y, x)\}\{(x, 7)\} \vdash y \rightsquigarrow 7} \\ \hline \{(x, 3), (y, x)\}\{(x, 7)\} \vdash y + x \rightsquigarrow 14 \\ \hline \{(x, 3), (y, x)\} \vdash let \ x = 7 \ in \ y + x \rightsquigarrow 14 \\ \hline \{(x, 3)\} \vdash let \ y = x \ in \ (let \ x = 7 \ in \ y + x) \rightsquigarrow 14 \\ \hline \emptyset \vdash let \ x = 3 \ in \ (let \ y = x \ in \ (let \ x = 7 \ in \ y + x)) \rightsquigarrow 14 \end{array}$$

Differentemente, valutando tale espressione attraverso valutazione lazy statica, produce

il seguente albero di derivazione:

$$\begin{array}{c}
 \frac{}{\emptyset \vdash 3 \leadsto 3} \\
 \frac{}{E \vdash x \leadsto 3} \quad \frac{}{E' \vdash 7 \leadsto 7} \\
 \frac{}{E'' \vdash y \leadsto 3} \quad \frac{}{E'' \vdash x \leadsto 7} \\
 \frac{}{E' \{(x, (7, E'))\} \vdash y + x \leadsto 10} \\
 \frac{}{E \{(y, (x, E))\} \vdash \text{let } x = 7 \text{ in } y + x \leadsto 10} \\
 \frac{}{\{(x, (3, \emptyset))\} \vdash \text{let } y = x \text{ in } (\text{let } x = 7 \text{ in } y + x) \leadsto 10} \\
 \emptyset \vdash \text{let } x = 3 \text{ in } (\text{let } y = x \text{ in } (\text{let } x = 7 \text{ in } y + x)) \leadsto 10
 \end{array}$$

dove

$$\begin{aligned}
 E &:= \{(x, (3, \emptyset))\} \\
 E' &:= E \{(y, (x, E))\} \\
 E'' &:= E' \{(x, (7, E'))\}
 \end{aligned}$$

Allora, poiché le due valutazioni producono risultati differenti, per la [Definizione 2.3.1.5](#), segue la tesi.  $\square$

## 2.4 Funzioni

### 2.4.1 Definizioni

#### Definizione 2.4.1.1: Clausola $fn$

Sia  $G$  una grammatica; allora, è possibile definire su  $G$  una funzione  $fn$ , come segue:

$$fn : \text{Var} \times G \rightarrow G$$

e verrà utilizzata attraverso la sintassi

$$fn \text{ *variable*} \Rightarrow \text{\_expression\_}$$

che restituisce una funzione avente come parametro  $\text{*variable*}$ , il cui valore sarà utilizzato per valutare  $\text{\_expression\_}$ .

#### Definizione 2.4.1.2: Applicazione

Sia  $G$  una grammatica; allora, dati due suoi termini  $M, N$ , è possibile definire su  $G$  l'applicazione di  $M$  ad  $N$ , attraverso la seguente sintassi:

$$MN$$

Tale sintassi è presa in prestito dal lambda calcolo.

Si noti che un'espressione  $MNL$  applica prima  $M$  ad  $N$ , e poi  $MN$  ad  $L$ , dunque la precedenza è da sinistra verso destra, ovvero  $(MN)L$ .



**Esempio 2.4.1.1** (Grammatica *Fun*). Sia *Fun* la seguente estensione della grammatica *Exp*, definita all'interno dell'Esempio 2.2.1.1:

$$M, N ::= k \mid x \mid M + N \mid M * N \mid \text{let } x = M \text{ in } N \mid \text{fn } x \Rightarrow M \mid MN$$

**Esempio 2.4.1.2** (Espressioni su *Fun*). Sia *Fun* la grammatica definita all'interno dell'Esempio 2.4.1.1, e sia

$$(\text{fn } x \Rightarrow x + 1)7$$

una sua espressione; essa, poiché applica la funzione  $\text{fn } x \Rightarrow x + 1$  all'espressione 7, viene valutata a

$$x = 7 \implies x + 1 = 7 + 1 = 8$$

**Esempio 2.4.1.3** (Espressioni su *Fun*). Sia *Fun* la grammatica definita all'interno dell'Esempio 2.4.1.1, e sia

$$(\text{fn } x \Rightarrow x3)(\text{fn } x \Rightarrow x + 1)$$

una sua espressione; essa, una volta valutata, applica la funzione  $\text{fn } x \Rightarrow x + 1$  all'espressione 3, e dunque il suo valore è pari a

$$x = 3 \implies x + 1 = 3 + 1 = 4$$

#### Osservazione 2.4.1.1: Curryficazione

Si consideri la clausola *fn* della Definizione 2.4.1.1; è possibile definirne una notazione contratta, che prende il nome di *curryficazione*, ed è definita come segue:

$$\text{fn } x_1 x_2 \dots x_n \Rightarrow M \iff \text{fn } x_1 \Rightarrow (\text{fn } x_2 \Rightarrow \dots (\text{fn } x_n \Rightarrow M) \dots)$$

Il processo inverso prende il nome di *uncurryficazione*.

**Esempio 2.4.1.4** (Curryficazioni). Sia *Fun* la grammatica dell'Esempio 2.4.1.1, e sia

$$(\text{fn } xy \Rightarrow yx)7(\text{fn } x \Rightarrow x + 1)$$

una sua espressione; una volta effettuata l'uncurryficazione, si ottiene la seguente espressione:

$$(\text{fn } x \Rightarrow \text{fn } y \Rightarrow yx)7(\text{fn } x \Rightarrow x + 1)$$

che, una volta valutata, diventa

$$(\text{fn } y \Rightarrow y7)(\text{fn } x \Rightarrow x + 1)$$

e dunque, analogamente all'Esempio 2.4.1.3, il risultato è

$$x = 7 \implies x + 1 = 7 + 1 = 8$$

**Esempio 2.4.1.5** (Curryficazioni). Sia *Fun* la grammatica dell'Esempio 2.4.1.1, e sia

$$(\text{fn } x \Rightarrow xx)(\text{fn } x \Rightarrow xx)$$

una sua espressione; essa, durante la valutazione, va in loop infinito, poiché ad ogni valutazione viene restituita l'espressione di partenza.

## 2.4.2 Semantiche operazionali

### Osservazione 2.4.2.1: $Fun_{ED}$

Sia  $Fun$  la grammatica definita nell'Esempio 2.4.1.1; per poter valutare le sue espressioni in maniera eager dinamica, è necessario ridefinire alcune regole di inferenza:

- l'insieme degli ambienti di  $Fun$  viene definito come segue:

$$Env := \{f \mid f : Var \xrightarrow{fin} Val\}$$

- l'insieme dei valori di  $Fun$  viene ridefinito come segue:

$$Val := \{0, 1, \dots\} \cup (Var \times Fun)$$

affinché i giudizi operazionali di  $Fun$  possano contenere tuple;

- $\forall E \in Env, x \in Var, M \in Fun \quad E \vdash fn \ x \Rightarrow M \rightsquigarrow (x, M)$  per la valutazione delle funzioni;

- $\forall E \in Env, M, N \in Fun \quad \frac{E \vdash M \rightsquigarrow (x, L) \quad E \vdash N \rightsquigarrow v' \quad E\{(x, v')\} \vdash L \rightsquigarrow v}{E \vdash MN \rightsquigarrow v}$   
per certi  $x \in Var, L \in Fun$  tali che  $M$  sia una funzione della forma  $fn \ x \Rightarrow L$ ; dunque, per le applicazioni, si ha che il primo giudizio operativo forza  $M$  ad essere una funzione, il secondo valuta  $N$ , ed il terzo valuta  $L$  con  $x$  pari al valore di  $N$ .

Si noti che tale valutazione risulta essere eager, poiché  $N$  viene valutata immediatamente.

**Osservazione 2.4.2.2:**  $Fun_{ES}$ 

Sia  $Fun$  la grammatica definita nell'Esempio 2.4.1.1; per poter valutare le sue espressioni in maniera eager statica, è necessario ridefinire alcune regole di inferenza:

- l'insieme degli ambienti di  $Fun$  viene definito come segue:

$$Env := \{f \mid f : Var \xrightarrow{fin} Val\}$$

- l'insieme dei valori di  $Fun$  viene ridefinito come segue:

$$Val := \{0, 1, \dots\} \cup (Var \times Fun \times Env)$$

affinché i giudizi operazionali di  $Fun$  possano contenere triple;

- $\forall E \in Env, x \in Var, M \in Fun \quad E \vdash fn \ x \Rightarrow M \rightsquigarrow (x, M, E)$  per la valutazione delle funzioni;
- $\forall E \in Env, M, N \in Fun \quad \frac{E \vdash M \rightsquigarrow (x, L, E') \quad E \vdash N \rightsquigarrow v' \quad E'\{(x, v')\} \vdash L \rightsquigarrow v}{E \vdash MN \rightsquigarrow v}$   
per certi  $E' \in Env, x \in Var, L \in Fun$  tali che  $M$  sia una funzione della forma  $fn \ x \Rightarrow L$ ; dunque, per le applicazioni, si ha che il primo giudizio operativoale forza  $M$  ad essere una funzione — salvando inoltre l'ambiente in cui la funzione  $M$  è stata valutata — il secondo valuta  $N$ , ed il terzo valuta  $L$  con  $x$  pari al valore di  $N$ , ma all'interno dell'ambiente che era stato salvato valutando la funzione  $M$ .

Si noti che tale valutazione risulta essere eager, poiché  $N$  viene valutata immediatamente, ed è a scoping statico poiché viene riportato l'ambiente in cui le valutazioni vengono effettuate.

**Lemma 2.4.2.1:**  $Fun_{ES}$  e  $Fun_{ED}$ 

Sia  $Fun$  la grammatica definita nell'Esempio 2.4.1.1; allora, si ha che

$$Fun_{ES} \neq Fun_{ED}$$

*Dimostrazione.* Si consideri la seguente espressione

$$let \ x = 7 \ in \ ((fn \ y \Rightarrow let \ x = 3 \ in \ yx)(fn \ z \Rightarrow x))$$

definita sulla grammatica  $Fun$ ; essa, valutata attraverso valutazione eager dinamica, produce il seguente albero di derivazione:

$$\begin{array}{c}
 (*) \quad \frac{E' \vdash 3 \rightsquigarrow 3 \quad \frac{E'' \vdash y \rightsquigarrow (z, x) \quad E'' \vdash x \rightsquigarrow 3 \quad E''\{(z, 3)\} \vdash x \rightsquigarrow 3}{E'\{(x, 3)\} \vdash yx \rightsquigarrow 3}}{E\{(y, (z, x))\} \vdash let \ x = 3 \ in \ yx \rightsquigarrow 3} \\
 \\
 \varnothing \vdash 7 \rightsquigarrow 7 \quad \frac{E \vdash fn \ y \Rightarrow let \ x = 3 \ in \ yx \rightsquigarrow (y, let \ x = 3 \ in \ yx) \quad E \vdash fn \ z \Rightarrow x \rightsquigarrow (z, x) \quad (*)}{\frac{\{(x, 7)\} \vdash ((fn \ y \Rightarrow let \ x = 3 \ in \ yx)(fn \ z \Rightarrow x)) \rightsquigarrow 3}{\varnothing \vdash let \ x = 7 \ in \ ((fn \ y \Rightarrow let \ x = 3 \ in \ yx)(fn \ z \Rightarrow x)) \rightsquigarrow 3}}
 \end{array}$$

dove

$$\begin{aligned} E &:= \{(x, 7)\} \\ E' &:= E\{(y, (z, x))\} \\ E'' &:= E'\{(x, 3)\} \end{aligned}$$

Differentemente, valutando tale espressione attraverso valutazione eager statica, produce il seguente albero di derivazione:

$$\begin{array}{c} (*) \quad \frac{E' \vdash 3 \rightsquigarrow 3 \quad \frac{E'' \vdash y \rightsquigarrow (z, x, E) \quad E'' \vdash x \rightsquigarrow 3 \quad E\{(z, 3)\} \vdash x \rightsquigarrow 7}{E'\{(x, 3)\} \vdash yx \rightsquigarrow 7}}{E\{(y, (z, x, E))\} \vdash \text{let } x = 3 \text{ in } yx \rightsquigarrow 7} \\ \hline \emptyset \vdash 7 \rightsquigarrow 7 \quad \frac{E \vdash \text{fn } y \Rightarrow \text{let } x = 3 \text{ in } yx \rightsquigarrow ((y, \text{let } x = 3 \text{ in } yx), E) \quad E \vdash \text{fn } z \Rightarrow x \rightsquigarrow (z, x, E) \quad (*)}{\{(x, 7)\} \vdash (\text{fn } y \Rightarrow \text{let } x = 3 \text{ in } yx)(\text{fn } z \Rightarrow x) \rightsquigarrow 7}} \\ \hline \emptyset \vdash \text{let } x = 7 \text{ in } ((\text{fn } y \Rightarrow \text{let } x = 3 \text{ in } yx)(\text{fn } z \Rightarrow x)) \rightsquigarrow 7 \end{array}$$

dove

$$\begin{aligned} E &:= \{(x, 7)\} \\ E' &:= E\{(y, (z, x, E))\} \\ E'' &:= E'\{(x, 3)\} \end{aligned}$$

Allora, poiché le due valutazioni producono risultati differenti, per la [Definizione 2.3.1.5](#), segue la tesi.  $\square$

#### Osservazione 2.4.2.3: $Fun_{LD}$

Sia  $Fun$  la grammatica definita nell'[Esempio 2.4.1.1](#); per poter valutare le sue espressioni in maniera lazy dinamica, è necessario ridefinire alcune regole di inferenza:

- l'insieme degli ambienti di  $Fun$  viene ridefinito come segue:

$$Env := \{f \mid f : Var \xrightarrow{fin} Fun\}$$

- l'insieme dei valori di  $Fun$  viene ridefinito come segue:

$$Val := \{0, 1, \dots\} \cup (Var \times Fun)$$

affinché i giudizi operazionali di  $Fun$  possano contenere tuple;

- $\forall E \in Env, x \in Var, M \in Fun \quad E \vdash \text{fn } x \Rightarrow M \rightsquigarrow (x, M)$  per la valutazione delle funzioni;
- $\forall E \in Env, M, N \in Fun \quad \frac{E \vdash M \rightsquigarrow (x, L) \quad E'\{(x, N)\} \vdash L \rightsquigarrow v}{E \vdash MN \rightsquigarrow v}$  per certi  $x \in Var, L \in Fun$  tali che  $M$  sia una funzione della forma  $\text{fn } x \Rightarrow L$ ; dunque, per le applicazioni, si ha che il primo giudizio operativo forza  $M$  ad essere una funzione, mentre il secondo valuta  $L$  con  $x$  pari ad  $N$  — e non al valore che questa assume.

Si noti che tale valutazione risulta essere lazy, poiché  $N$  non viene valutata immediatamente, ma ne viene ritardato il calcolo finché non strettamente necessario.

**Osservazione 2.4.2.4:**  $Fun_{LS}$ 

Sia  $Fun$  la grammatica definita nell'Esempio 2.4.1.1; per poter valutare le sue espressioni in maniera lazy statica, è necessario ridefinire alcune regole di inferenza:

- l'insieme degli ambienti di  $Fun$  viene ridefinito come segue:

$$Env := \{f \mid f : Var \xrightarrow{fin} Fun \times Env\}$$

dunque, la sua definizione è ricorsiva

- l'insieme dei valori di  $Fun$  viene ridefinito come segue:

$$Val := \{0, 1, \dots\} \cup (Var \times Fun \times Env)$$

- $\forall E \in Env, x \in Var, M \in Fun \quad E \vdash fn \ x \Rightarrow M \rightsquigarrow (x, M, E)$  per la valutazione delle funzioni;
- $\forall E \in Env, M, N \in Fun \quad \frac{E \vdash M \rightsquigarrow (x, L, E') \quad E' \{(x, (N, E))\} \vdash L \rightsquigarrow v}{E \vdash MN \rightsquigarrow v}$  per certi  $E' \in Env, x \in Var, L \in Fun$  tali che  $M$  sia una funzione della forma  $fn \ x \Rightarrow L$ ; dunque, per le applicazioni, si ha che il primo giudizio operativo forza  $M$  ad essere una funzione — salvando inoltre l'ambiente in cui la funzione  $M$  è stata valutata — mentre il secondo valuta  $L$  senza valutare l'espressione  $N$ , ma ponendo solamente  $x$  pari ad  $N$  — e non al suo valore — all'interno dell'ambiente in cui è stata effettuata l'applicazione  $MN$ .

Si noti che tale valutazione risulta essere lazy, poiché  $N$  non viene valutata immediatamente, ed è a scoping statico poiché viene riportato l'ambiente in cui le valutazioni vengono effettuate.

**Lemma 2.4.2.2:**  $Fun_{LS}$  e  $Fun_{LD}$ 

Sia  $Fun$  la grammatica definita nell'Esempio 2.4.1.1; allora, si ha che

$$Fun_{LS} \not\equiv Fun_{LD}$$

*Dimostrazione.* Omessa. □

**Definizione 2.4.2.1:** Espressione  $\omega$ 

Data una grammatica, l'espressione  $\omega$  è un'espressione composta dalla più piccola funzione che entra in ricorsione infinita senza chiamare sé stessa.

**Esempio 2.4.2.1** (Espressione  $\omega$  di  $Fun$ ). Sia  $Fun$  la grammatica definita all'interno dell'Esempio 2.4.1.1; allora, una sua espressione  $\omega$  è la seguente:

$$\omega := (fn \ x \Rightarrow xx)(fn \ x \Rightarrow xx)$$

Essa risulta essere un'espressione  $\omega$  per  $Fun$ , poiché la sua valutazione entra in ricorsione infinita indipendentemente dalla semantica scelta.

**Lemma 2.4.2.3: Semantiche di  $Fun$**

Sia  $Fun$  la grammatica definita nell'Esempio 2.4.1.1; allora, si ha che

$$Fun_{LD} \not\equiv Fun_{ED} \not\equiv Fun_{ES} \not\equiv Fun_{LS}$$

*Dimostrazione.* Si noti che:

- $Fun_{ED} \not\equiv Fun_{ES}$  per il Lemma 2.4.2.1
- $Fun_{LS} \not\equiv Fun_{LD}$  per il Lemma 2.4.2.2

mentre, per quanto riguarda  $Fun_{ED} \not\equiv Fun_{LD}$  e  $Fun_{ES} \not\equiv Fun_{LS}$ , si prenda l'espressione  $\omega$  di  $Fun$ , presentata all'interno dell'Esempio 2.4.2.1, e si consideri la seguente espressione

$$let\ x = \omega\ in\ 69^1$$

questa, quando valutata in maniera eager — indipendentemente dallo scoping — richiederebbe di valutare immediatamente l'espressione  $\omega$ , la quale è invalutabile per definizione; mentre, quando valutata in maniera lazy — indipendentemente dallo scoping — rimanderebbe il calcolo dell'espressione  $\omega$ , restituendo 69 come risultato. Dunque, poiché si ottengono risultati diversi a seconda della semantica utilizzata per valutare tale espressione, segue la tesi.  $\square$

**Osservazione 2.4.2.5: Variabili libere di  $Fun$**

Sia  $Fun$  la grammatica dell'Esempio 2.4.1.1; su di essa, è possibile definire, ricorsivamente, una funzione in grado di restituire le variabili free di una data espressione, come segue:

$$free : Fun \rightarrow \mathcal{P}(\text{Var}) : e \mapsto \begin{cases} \emptyset & \exists \eta \in \mathbb{N} \mid e = k(\eta) \\ \{x\} & \exists x \in \text{Var} \mid e = x \\ free(M) \cup free(N) & \exists M, N \in Fun \mid e = M + N \vee e = M * N \\ free(M) \cup (free(N) - \{x\}) & \exists x \in \text{Var}, M, N \in Fun \mid e = (let\ x = M\ in\ N) \\ free(M) - \{x\} & \exists x \in \text{Var}, M \in Fun \mid e = (fn\ x \Rightarrow M) \\ free(M) \cup free(N) & \exists M, N \in Fun \mid e = (MN) \end{cases}$$

<sup>1</sup>Nice.

## 2.5 Lambda calcolo

### 2.5.1 Numeri di Church

#### Definizione 2.5.1.1: Numeri di Church

La **rappresentazione di Church** dei numeri naturali, denotata con  $\mathbb{N}_\lambda$ , è la seguente:

- $0_\lambda := fn\ x \Rightarrow fn\ y \Rightarrow y \iff fn\ xy \Rightarrow y$
- $succ_\lambda := fn\ z \Rightarrow (fn\ x \Rightarrow fn\ y \Rightarrow zx(xy)) \iff fn\ zxy \Rightarrow zx(xy)$

**Esempio 2.5.1.1** ( $1_\lambda$  di Church). Per calcolare l' $1_\lambda \in \mathbb{N}_\lambda$  di Church, è sufficiente valutare  $succ_\lambda(0_\lambda)$ , e dunque

$$\begin{aligned} (fn\ zxy \Rightarrow zx(xy))(fn\ xy \Rightarrow y) &\longrightarrow fn\ xy \Rightarrow (fn\ xy \Rightarrow y)x(xy) \longrightarrow \\ &\longrightarrow fn\ xy \Rightarrow (fn\ y \Rightarrow y)(xy) \longrightarrow fn\ xy \Rightarrow xy =: 1_\lambda \end{aligned}$$

**Esempio 2.5.1.2** ( $2_\lambda$  di Church). Per calcolare il  $2_\lambda \in \mathbb{N}_\lambda$  di Church, è sufficiente valutare  $succ_\lambda(1_\lambda)$ , e dunque

$$\begin{aligned} (fn\ zxy \Rightarrow zx(xy))(fn\ xy \Rightarrow xy) &\longrightarrow fn\ xy \Rightarrow (fn\ xy \Rightarrow xy)x(xy) \longrightarrow \\ &\longrightarrow fn\ xy \Rightarrow (fn\ y \Rightarrow xy)(xy) \longrightarrow fn\ xy \Rightarrow xxy =: 2_\lambda \end{aligned}$$

#### Proposizione 2.5.1.1: Algebra dei numeri di Church

Si consideri l'algebra dei numeri di Church, definita come  $(\mathbb{N}_\lambda, zero_\lambda, succ_\lambda)$ , dove

$$zero_\lambda : \mathbb{1} \rightarrow \mathbb{N}_\lambda : x \mapsto 0_\lambda$$

Essa è un'algebra induttiva.

*Dimostrazione.* Omessa. □

**Osservazione 2.5.1.1: Significato di  $\mathbb{N}_\lambda$** 

Si considerino l'Esempio 2.5.1.1 e l'Esempio 2.5.1.2, e si noti che

$$\begin{aligned} 0_\lambda &:= fn\ xy \Rightarrow y \\ 1_\lambda &:= fn\ xy \Rightarrow xy \\ 2_\lambda &:= fn\ xy \Rightarrow x(xy) \\ &\vdots \end{aligned}$$

dunque, la corrispondenza tra  $\mathbb{N}$  e  $\mathbb{N}_\lambda$  è data dal *numero di applicazioni effettuate* ad una qualche variabile. Infatti è possibile costruire il seguente isomorfismo tra le algebre  $(\mathbb{N}, \text{zero}, \text{succ})$  e  $(\mathbb{N}_\lambda, \text{zero}_\lambda, \text{succ}_\lambda)$ :

$$\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}_\lambda : n \mapsto fn\ xy \Rightarrow \underbrace{x \cdots (xy)}_{n \text{ volte}}$$

dove  $x$  è dunque una funzione, che può essere applicata ad una certa variabile  $y$ .

**Osservazione 2.5.1.2: Funzione  $\text{eval}_\lambda$** 

È possibile definire una funzione che, dato un numero di Church, restituisce il corrispondente numero naturale, come segue:

$$\text{eval}_\lambda := fn\ z \Rightarrow z(fn\ x \Rightarrow x + 1)0$$

poiché applica la funzione  $\text{succ}_\mathbb{N}$  esattamente  $z \in \mathbb{N}_\lambda$  volte a 0.

**Esempio 2.5.1.3** (Corrispondenze tra  $\mathbb{N}_\lambda$  e  $\mathbb{N}$ ). Per valutare  $\text{eval}_\lambda(1_\lambda)$  è necessario svolgere i seguenti calcoli:

$$\begin{aligned} (fn\ z \Rightarrow z(fn\ x \Rightarrow x + 1)0)(fn\ xy \Rightarrow xy) &\longrightarrow (fn\ xy \Rightarrow xy)(fn\ x \Rightarrow x + 1)0 \longrightarrow \\ &\longrightarrow (fn\ y \Rightarrow (fn\ x \Rightarrow x + 1)y)0 \longrightarrow (fn\ x \Rightarrow x + 1)0 \longrightarrow 1 \end{aligned}$$



**Osservazione 2.5.1.3: Operazione  $\text{sum}_\lambda$** 

Si consideri l'algebra dei numeri di Church; su di essa, è possibile definire l'operazione di somma, come segue:

$$\text{sum}_\lambda := fn\ z \Rightarrow fn\ w \Rightarrow (fn\ x \Rightarrow fn\ y \Rightarrow zx(wxy)) \iff fn\ zwxy \Rightarrow zx(wxy)$$

poiché alla variabile  $y$  viene prima applicata  $x$  esattamente  $w \in \mathbb{N}_\lambda$  volte ad  $y$ , e successivamente ad esso viene applicata  $x$  altre  $z \in \mathbb{N}_\lambda$  volte. Inoltre, è possibile fornire una definizione alternativa della funzione, come segue:

$$\text{sum}_\lambda := fn\ z \Rightarrow fn\ w \Rightarrow z\ \text{succ}_\lambda\ w \iff fn\ zw \Rightarrow z\ \text{succ}_\lambda\ w$$

poiché viene applicata la funzione di successore  $\text{succ}_\lambda$  a  $w \in \mathbb{N}_\lambda$ , esattamente  $z \in \mathbb{N}_\lambda$  volte.

**Esempio 2.5.1.4** (Somme in  $\mathbb{N}_\lambda$ ). Per calcolare  $\text{sum}_\lambda(2_\lambda, 1_\lambda)$  è necessario svolgere i seguenti calcoli:

$$\begin{aligned} & (fn\ zwxy \Rightarrow zx(wxy))(fn\ xy \Rightarrow x(xy))(fn\ xy \Rightarrow xy) \longrightarrow \\ & \longrightarrow (fn\ wxy \Rightarrow (fn\ xy \Rightarrow x(xy))x(wxy))(fn\ xy \Rightarrow xy) \longrightarrow \\ & \longrightarrow (fn\ wxy \Rightarrow (fn\ y \Rightarrow x(xy))(wxy))(fn\ xy \Rightarrow xy) \longrightarrow \\ & \longrightarrow (fn\ wxy \Rightarrow x(x(wxy)))(fn\ xy \Rightarrow xy) \longrightarrow fn\ xy \Rightarrow x(x((fn\ xy \Rightarrow xy)xy)) \longrightarrow \\ & \longrightarrow fn\ xy \Rightarrow x(x((fn\ y \Rightarrow xy)y)) \longrightarrow fn\ xy \Rightarrow x(x(xy)) =: 3_\lambda \end{aligned}$$

**Osservazione 2.5.1.4: Operazione  $\text{prod}_\lambda$** 

Si consideri l'algebra dei numeri di Church; su di essa, è possibile definire l'operazione di prodotto, come segue:

$$\text{prod}_\lambda := fn\ z \Rightarrow fn\ w \Rightarrow (fn\ x \Rightarrow fn\ y \Rightarrow z(wx)y) \iff fn\ zwxy \Rightarrow z(wx)y$$

poiché alla variabile  $y$  viene applicata la funzione  $z(wx)$ , che equivale alla funzione  $wx$  composta su sé stessa  $z$  volte — e dunque  $z, w \in \mathbb{N}_\lambda$ . Inoltre, è possibile fornire una definizione alternativa della funzione, come segue:

$$\text{prod}_\lambda := fn\ z \Rightarrow fn\ w \Rightarrow z(\text{sum}_\lambda\ w)0_\lambda \iff fn\ zw \Rightarrow z(\text{sum}_\lambda\ w)0_\lambda$$

poiché allo  $0_\lambda$  viene applicata la funzione  $z(\text{sum}_\lambda\ w)$ , che equivale alla funzione  $(\text{sum}_\lambda\ w)$  — la quale restituisce una funzione che si aspetta il secondo argomento a cui applicare la somma, che sarà  $0_\lambda$  — composta su sé stessa  $z \in \mathbb{N}_\lambda$  volte.

**Osservazione 2.5.1.5: Operazione  $\text{power}_\lambda$** 

Si consideri l'algebra dei numeri di Church; su di essa, è possibile definire l'operazione di elevamento a potenza, come segue:

$$\text{power}_\lambda := \text{fn } z \Rightarrow \text{fn } w \Rightarrow wz$$

TODO.

**2.5.2 Logica booleana di Church****Definizione 2.5.2.1: Logica booleana di Church**

La **rappresentazione di Church** della logica booleana, denotata con  $B_\lambda$ , è la seguente

- $\text{true}_\lambda := \text{fn } x \Rightarrow \text{fn } y \Rightarrow x \iff \text{fn } xy \Rightarrow x$
- $\text{false}_\lambda := \text{fn } x \Rightarrow \text{fn } y \Rightarrow y \iff \text{fn } xy \Rightarrow y$

**Osservazione 2.5.2.1: Funzione  $\text{evalBool}_\lambda$** 

Si consideri la grammatica definita all'interno dell'[Esempio 2.4.1.1](#); è possibile estenderla affinché includa anche i valori booleani *true* e *false*. Dunque, è possibile definire una funzione che, dato un booleano di Church, restituisce il corrispondente valore booleano, come segue:

$$\text{evalBool}_\lambda := \text{fn } z \Rightarrow z \text{ true } \text{ false}$$

**Esempio 2.5.2.1** (Valutazione di  $\text{true}_\lambda$ ). Per valutare  $\text{evalBool}_\lambda(\text{true}_\lambda)$ , è sufficiente svolgere i seguenti calcoli:

$$\begin{aligned} (\text{fn } z \Rightarrow z \text{ true } \text{ false})(\text{fn } xy \Rightarrow x) &\longrightarrow (\text{fn } xy \Rightarrow x) \text{ true } \text{ false} \longrightarrow \\ &\longrightarrow (\text{fn } y \Rightarrow \text{true}) \text{ false} \longrightarrow \text{true} \end{aligned}$$

**Osservazione 2.5.2.2: Operazione  $\text{ite}_\lambda$** 

Si consideri l'algebra dei booleani di Church; su di essa, è possibile definire l'operazione logica *if-then-else*, come segue:

$$\text{ite}_\lambda := \text{fn } z \Rightarrow \text{fn } u \Rightarrow \text{fn } v \Rightarrow zuv \iff \text{fn } zuv \Rightarrow zuv$$

poiché dato un  $z \in B_\lambda$ , la funzione restituirà  $u$  se  $z$  è  $\text{true}_\lambda$ , altrimenti  $v$ .

**Osservazione 2.5.2.3: Operazione  $\text{if}_\lambda$** 

Si consideri l'algebra dei booleani di Church; su di essa, è possibile definire l'operazione logica *if*, come segue:

$$\text{if}_\lambda := \text{fn } z \Rightarrow \text{fn } u \Rightarrow z \ u \ \text{true}_\lambda \iff \text{fn } zu \Rightarrow z \ u \ \text{true}_\lambda$$

poiché l'operazione è equivalente ad  $\text{ite}_\lambda$  definita all'interno dell'[Osservazione 2.5.2.2](#), ma il branch dell'*else* restituisce sempre  $\text{true}_\lambda$ .

**Osservazione 2.5.2.4: Operazione  $\text{not}_\lambda$** 

Si consideri l'algebra dei booleani di Church; su di essa, è possibile definire l'operazione logica di negazione come segue:

$$\text{not}_\lambda := \text{fn } z \Rightarrow (\text{fn } x \Rightarrow \text{fn } y \Rightarrow zyx) \iff \text{fn } zxy \Rightarrow zyx$$

poiché, dato un  $z \in B_\lambda$ , tale funzione passa a  $z$  le variabili  $x$  ed  $y$  scambiate di posto. Si noti che l'operazione è simile all'operazione  $\text{ite}_\lambda$  definita nell'[Osservazione 2.5.2.2](#), poiché è possibile interpretarla come l'inverso dell'operazione *if-then-else*.

**Osservazione 2.5.2.5: Operazione  $\text{or}_\lambda$** 

Si consideri l'algebra dei booleani di Church; su di essa, è possibile definire l'operazione logica di *or*, come segue:

$$\text{or}_\lambda := \text{fn } z \Rightarrow \text{fn } w \Rightarrow \text{if}_\lambda(\text{not}_\lambda z)w \iff \text{fn } zw \Rightarrow \text{if}_\lambda(\text{not}_\lambda z)w$$

poiché TODO

**Osservazione 2.5.2.6: Operazione  $\text{and}_\lambda$** 

Si consideri l'algebra dei booleani di Church; su di essa, è possibile definire l'operazione logica di *and*, come segue:

$$\text{and}_\lambda := \text{fn } z \Rightarrow \text{fn } w \Rightarrow \text{not}_\lambda(\text{if}_\lambda z(\text{not}_\lambda w))$$

poiché TODO

### 2.5.3 Lambda calcolo

#### Definizione 2.5.3.1: Lambda calcolo

Il **lambda calcolo** è un sistema formale atto ad analizzare formalmente le funzioni e le loro applicazioni. La grammatica del lambda calcolo è la seguente

$$M, N ::= x \mid \lambda x.M \mid MN$$

dove  $\lambda x.M$  indica una funzione della forma  $fn\ x \Rightarrow M$ , e prende il nome di **lambda astrazione**. Le espressioni del lambda calcolo sono dette **lambda espressioni**.

**Esempio 2.5.3.1** (Lambda espressioni). I seguenti sono esempi di espressioni del lambda calcolo

- $(\lambda x.x + 1)2$  corrisponde a  $(fn\ x \Rightarrow x + 1)2$  ed equivale a 3
- $\lambda xy.x(xy)$  corrisponde a  $fn\ xy \Rightarrow x(xy)$ , ovvero  $3_\lambda \in \mathbb{N}_\lambda$
- $(\lambda x.xy)(\lambda x.x)$  equivale ad  $y$

#### Definizione 2.5.3.2: Sostituzione

Date due espressioni  $M$  ed  $N$ , ed una variabile  $x$ , l'operazione di **sostituzione** rimpiazza ogni occorrenza della variabile  $x$  all'interno dell'espressione  $M$ , con il termine  $N$ . In simboli

$$M[N/x]$$

**Esempio 2.5.3.2** (Sostituzioni). I seguenti sono esempi di sostituzioni in espressioni:

- $(xy)[\lambda z.z/x]$  corrisponde a  $(\lambda z.z)y$ , ovvero  $y$
- $(fn\ x \Rightarrow y)[x/y]$  corrisponde a  $fn\ x \Rightarrow x$

#### Osservazione 2.5.3.1: Cattura di variabili

L'operazione di sostituzione, definita nella [Definizione 2.5.3.2](#), potrebbe cambiare il binding delle variabili definite; tale fenomeno prende il nome di **cattura di variabili**.

**Esempio 2.5.3.3** (Catture di variabili). Si consideri la seguente espressione:

$$(\lambda y.M)[N/x]$$

se  $N$  contenesse la variabile  $y$  in modo libero, si avrebbe che

$$\lambda y.(M[N/x])$$

non sarebbe equivalente all'espressione di partenza, poiché  $y$  diverrebbe legata. Dunque, la loro equivalenza è garantita solamente se  $y \notin \text{free}(N)$ .

**Definizione 2.5.3.3: Alfa conversione**

Data una lambda astrazione  $\lambda x.M$ , si definisce **alfa conversione** la regola secondo la quale ogni occorrenza di  $x$  nella lambda astrazione viene rimpiazzata con un'altra variabile. In simboli

$$\lambda x.M \longrightarrow_{\alpha} \lambda y.(M[y/x])$$

**Esempio 2.5.3.4** (Alfa conversioni). Si consideri la seguente lambda astrazione

$$\lambda x.x(\lambda z.zw)$$

allora, ad esempio, è vero che

$$\lambda x.x(\lambda z.zw) \longrightarrow_{\alpha} \lambda z.z(\lambda z.zw)$$

avendo rimpiazzato  $x$  con  $z$ .

**Definizione 2.5.3.4: Alfa equivalenza**

Due lambda astrazioni  $\lambda x.M$  e  $\lambda y.N$  sono dette **alfa equivalenti**, indicato con il simbolo  $\equiv_{\alpha}$  se è vera la seguente:

$$\lambda x.M \equiv_{\alpha} \lambda y.N \iff \begin{cases} \lambda x.M \longrightarrow_{\alpha} \lambda y.(N[y/x]) \\ \lambda y.N \longrightarrow_{\alpha} \lambda x.(M[x/y]) \end{cases}$$

**Esempio 2.5.3.5** (Alfa equivalenze). Si considerino le due seguenti lambda astrazioni

$$\begin{array}{l} \lambda x.xy \\ \lambda z.zy \end{array}$$

e si noti che

$$\begin{cases} \lambda x.xy \longrightarrow_{\alpha} \lambda z.zy \\ \lambda z.zy \longrightarrow_{\alpha} \lambda x.xy \end{cases} \iff \lambda x.xy \equiv_{\alpha} \lambda z.zy$$

dunque le due lambda astrazioni sono alfa equivalenti. Si considerino invece le due seguenti lambda astrazioni

$$\begin{array}{l} \lambda x.x(\lambda z.zw) \\ \lambda z.z(\lambda z.zw) \end{array}$$

e si noti, diversamente, che

$$\begin{cases} \lambda x.x(\lambda z.zw) \longrightarrow_{\alpha} \lambda z.z(\lambda z.zw) \\ \lambda z.z(\lambda z.zw) \not\longrightarrow_{\alpha} \lambda x.x(\lambda z.zw) \end{cases} \implies \lambda x.x(\lambda z.zw) \not\equiv_{\alpha} \lambda z.z(\lambda z.zw)$$

**Definizione 2.5.3.5: Beta conversione**

Data una lambda espressione  $(\lambda x.M)$ , si definisce **beta conversione** la regola secondo la quale ogni occorrenza di  $x$  all'interno di  $M$  viene rimpiazzata dal termine  $N$ . In simboli

$$(\lambda x.M)N \longrightarrow_{\beta} M[N/x]$$

Di fatto, la beta conversione corrisponde ad un passo computazionale.

**Esempio 2.5.3.6** (Beta conversioni). Si consideri la seguente lambda espressione

$$(\lambda x.xy)(\lambda z.z)$$

applicando la beta conversione, si ottiene

$$(\lambda x.xy)(\lambda z.z) \longrightarrow_{\beta} (\lambda z.z)y \longrightarrow_{\beta} y$$

#### Definizione 2.5.3.6: Eta conversione

Si definisce **eta conversione** la regola secondo la quale una lambda espressione  $(\lambda x.Mx)$  può essere rimpiazzata con  $M$ , solo se  $x$  non è libera. In simboli

$$x \notin \text{free}(M) \implies \lambda x.Mx \longrightarrow_{\eta} M$$

**Esempio 2.5.3.7** (Eta conversioni). Si consideri la seguente lambda espressione

$$\lambda x.(\lambda y.y)x$$

si noti che  $\text{free}(\lambda y.y) = \emptyset \implies x \notin \text{free}(\lambda y.y)$  e dunque è possibile applicare l'eta conversione, ottenendo quindi

$$\lambda x.(\lambda y.y)x \longrightarrow_{\eta} \lambda y.y$$

#### Osservazione 2.5.3.2: Cattura nelle eta conversioni

Si noti che, all'interno della [Definizione 2.5.3.6](#), la condizione per cui  $x$  non sia libera garantisce che la conversione produca espressioni equivalenti; infatti, se  $x$  fosse libera in  $M$ , poiché non lo sarebbe comunque in  $(\lambda x.Mx)$ , l'eta conversione non avrebbe mantenuto l'equivalenza.