



SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

“SAPIENZA” UNIVERSITÀ DI ROMA
INGEGNERIA DELL'INFORMAZIONE,
INFORMATICA E STATISTICA
DIPARTIMENTO DI INFORMATICA

Linguaggi di Programmazione

Appunti integrati con il libro "TODO", TODO 1, Autore 2, ...

Author
Alessio Bandiera

1 ottobre 2023

Indice

| | |
|--------------------------------|----------|
| Informazioni e Contatti | 1 |
| 1 TODO | 2 |
| 1.1 TODO | 2 |
| 1.1.1 TODO | 2 |

Informazioni e Contatti

Prerequisiti consigliati:

- Algebra
- TODO

Segnalazione errori ed eventuali migliorie:

Per segnalare eventuali errori e/o migliorie possibili, si prega di utilizzare il **sistema di Issues fornito da GitHub** all'interno della pagina della repository stessa contenente questi ed altri appunti (link fornito al di sotto), utilizzando uno dei template già forniti compilando direttamente i campi richiesti.

Gli appunti sono in continuo aggiornamento, pertanto, previa segnalazione, si prega di controllare se l'errore sia ancora presente nella versione più recente.

Licenza di distribuzione:

These documents are distributed under the [GNU Free Documentation License](#), a form of copyleft intended to be used on manuals, textbooks or other types of document in order to assure everyone the effective freedom to copy and redistribute it, with or without modifications, either commercially or non-commercially.

Contatti dell'autore e ulteriori link:

- Github: <https://github.com/ph04>
- Email: alessio.bandiera02@gmail.com
- LinkedIn: [Alessio Bandiera](#)

1

TODO

1.1 TODO

1.1.1 TODO

Definizione 1.1.1.1: Assiomi di Peano

Gli **assiomi di Peano** sono 5 assiomi che definiscono l'insieme \mathbb{N} , e sono i seguenti:

- i) $0 \in \mathbb{N}$
- ii) $\exists \text{succ} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, o equivalentemente, $\forall x \in \mathbb{N} \quad \text{succ}(x) \in \mathbb{N}$
- iii) $\forall x, y \in \mathbb{N} \quad x \neq y \implies \text{succ}(x) \neq \text{succ}(y)$
- iv) $\nexists x \in \mathbb{N} \mid \text{succ}(x) = 0$
- v) $\forall S \subseteq \mathbb{N} \quad (0 \in S \wedge (\forall x \in S \quad \text{succ}(x) \in S)) \implies S = \mathbb{N}$

Esempio 1.1.1.1 (\mathbb{N} di von Neumann). Una rappresentazione dell'insieme dei numeri naturali \mathbb{N} alternativa alla canonica

$$\mathbb{N} := \{0, 1, 2, \dots\}$$

è stata fornita da John von Neumann. Indicando tale rappresentazione con \aleph , si ha che, per Neumann

$$\begin{aligned} 0_{\aleph} &:= \emptyset = \{\} \\ 1_{\aleph} &:= \{0_{\aleph}\} = \{\{\}\} \\ 2_{\aleph} &:= \{0_{\aleph}, 1_{\aleph}\} = \{\{\}, \{\{\}\}\} \\ &\vdots \end{aligned}$$

e la funzione succ_{\aleph} è definita come segue

$$\text{succ}_{\aleph} : \aleph \rightarrow \aleph : x_{\aleph} \mapsto x_{\aleph} \cup \{x_{\aleph}\} = \{\mu_{\aleph} \in \aleph \mid |\mu_{\aleph}| \leq |x_{\aleph}|\}$$

ed in particolare $\forall x_{\mathbb{N}} \in \mathbb{N} \quad |x_{\mathbb{N}}| + 1 = |\text{succ}_{\mathbb{N}}(x_{\mathbb{N}})|$.

È possibile verificare che tale rappresentazione di \mathbb{N} soddisfa gli assiomi di Peano, in quanto

- i) $0_{\mathbb{N}} := \emptyset \in \mathbb{N}$
- ii) $\exists \text{succ}_{\mathbb{N}} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, definita precedentemente
- iii) $\forall x_{\mathbb{N}}, y_{\mathbb{N}} \in \mathbb{N} \quad x_{\mathbb{N}} \neq y_{\mathbb{N}} \implies |x_{\mathbb{N}}| \neq |y_{\mathbb{N}}| \implies |\text{succ}_{\mathbb{N}}(x_{\mathbb{N}})| \neq |\text{succ}_{\mathbb{N}}(y_{\mathbb{N}})| \implies \text{succ}_{\mathbb{N}}(x_{\mathbb{N}}) \neq \text{succ}_{\mathbb{N}}(y_{\mathbb{N}})$
- iv) per assurdo, sia $x_{\mathbb{N}} \in \mathbb{N}$ tale che $\text{succ}_{\mathbb{N}}(x_{\mathbb{N}}) = 0_{\mathbb{N}} := \emptyset$; per definizione $\text{succ}_{\mathbb{N}}(x_{\mathbb{N}}) := \{\mu_{\mathbb{N}} \in \mathbb{N} \mid |\mu_{\mathbb{N}}| \leq |x_{\mathbb{N}}|\}$, ma non esiste $\mu_{\mathbb{N}} \in \mathbb{N}$ con cardinalità minore o uguale 0, e dunque $\nexists x_{\mathbb{N}} \in \mathbb{N} \mid \text{succ}_{\mathbb{N}}(x_{\mathbb{N}}) = 0_{\mathbb{N}}$
- v) per assurdo, sia $S \subseteq \mathbb{N}$ tale che $0_{\mathbb{N}} \in S$ e $\forall x_S \in S \quad \text{succ}_{\mathbb{N}}(x_S) \in S$ ma $S \neq \mathbb{N} \iff \mathbb{N} - S \neq \emptyset$; \mathbb{N} è chiuso su $\text{succ}_{\mathbb{N}}$ per il secondo assioma di Peano, ed in particolare $\mathbb{N} - S$ è chiuso attraverso la definizione di successore, il quale presenterà dunque una successione di elementi definita dalla funzione $\text{succ}_{\mathbb{N}}$ stessa; inoltre, si noti che tale successione non può costituire un ciclo per come $\text{succ}_{\mathbb{N}}$ è definita, dunque la funzione genera necessariamente una successione in cui è presente un primo elemento $\zeta_{\mathbb{N}}$ che non ha predecessore in $\mathbb{N} - S$, ma che possiede un predecessore poiché $0_{\mathbb{N}} \in S$ in ipotesi, e dunque sicuramente $\zeta_{\mathbb{N}} \neq 0_{\mathbb{N}}$; allora, il predecessore di $\zeta_{\mathbb{N}}$ deve necessariamente essere in S , e sia questo $\zeta'_{\mathbb{N}} \in S$; infine poiché S è definito tale da essere chiuso su $\text{succ}_{\mathbb{N}}$, dal fatto che $\begin{cases} \zeta'_{\mathbb{N}} \in S \\ \text{succ}_{\mathbb{N}}(\zeta'_{\mathbb{N}}) = \zeta_{\mathbb{N}} \end{cases}$ segue che $\zeta_{\mathbb{N}} \in S$, e tale ragionamento è possibile applicarlo per ogni elemento che segue da $\zeta_{\mathbb{N}}$ in $\mathbb{N} - S$ nella successione definita da $\text{succ}_{\mathbb{N}}$; in conclusione, $S = \mathbb{N}$ necessariamente.

Principio 1.1.1.1: Principio di Induzione

Sia P una proprietà che vale per $n = 0$, e dunque $P(0)$ è vera; inoltre, per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha che $P(n) \implies P(n+1)$; allora, $P(n)$ è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$.

In simboli

$$\forall P \quad (P(0) \wedge (\forall n \in \mathbb{N} \quad P(n) \implies P(n+1))) \implies \forall n \in \mathbb{N} \quad P(n)$$

Osservazione 1.1.1.1: Quinto assioma di Peano

Si noti che il quinto degli assiomi di Peano ([Definizione 1.1.1.1](#)) equivale al principio di induzione ([Principio 1.1.1.1](#)). Infatti, il quinto assioma afferma che qualsiasi sottoinsieme S di \mathbb{N} avente lo 0, e caratterizzato dalla chiusura sulla funzione di successore succ , coincide con \mathbb{N} stesso.

Definizione 1.1.1.2: Algebra

Una **struttura algebrica**, o più semplicemente **algebra**, consiste di un insieme *non vuoto*, talvolta chiamato **insieme sostegno** (*carrier set* o *domain*), fornito di una o più operazioni su tale insieme, quest'ultime caratterizzate da un numero finito di assiomi da soddisfare.

Se A è il carrier set, e $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ sono delle operazioni definite su A , allora con

$$(A, \gamma_1, \dots, \gamma_n)$$

si indica l'algebra costituita da tali componenti.

Esempio 1.1.1.2 (Strutture algebriche con singola operazione). Esempi di strutture algebriche con un'operazione binaria sono i seguenti:

- semigrupperi
- monoidi
- gruppi
- gruppi abeliani

Esempio 1.1.1.3 (Strutture algebriche con due operazioni). Esempi di strutture algebriche con due operazioni binarie sono i seguenti:

- semianelli
- anelli
- campi

Definizione 1.1.1.3: Insieme unità

Con **insieme unità** verrà inteso un qualsiasi insieme tale che $|\mathbb{1}| = 1$, e verrà indicato attraverso il simbolo $\mathbb{1}$.

Definizione 1.1.1.4: Algebra induttiva

Sia A un insieme, e siano $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ funzioni definite su A di arbitraria arietà; allora, $(A, \gamma_1, \dots, \gamma_n)$ è definita **algebra induttiva** se si verificano le seguenti:

- i) $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ sono iniettive
- ii) $\forall i, j \in [1, n] \mid i \neq j \quad \text{im}(\gamma_i) \cap \text{im}(\gamma_j) = \emptyset$, ovvero, le immagini delle funzioni sono a due a due disgiunte
- iii) $\forall S \subseteq A \quad (\forall i \in [1, n], a_1, \dots, a_k \in S, k \in \mathbb{N} \quad \gamma_i(a_1, \dots, a_k) \in S) \implies S = A$, o equivalentemente, deve essere soddisfatto il [Principio 1.1.1.1](#).

Esempio 1.1.1.4 (Numeri naturali). $(\mathbb{N}, +)$ non è un'algebra induttiva, poiché esistono $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{N}$ con $x_1 \neq x_3$ e $x_2 \neq x_4$ tali che $x_1 + x_2 = x_3 + x_4$; ad esempio, $2 + 3 = 5 = 1 + 4$, e $2 \neq 1$, $3 \neq 4$.

Esempio 1.1.1.5 (Algebre induttive). Sia zero la funzione definita come segue

$$\text{zero} : \mathbb{1} \rightarrow \mathbb{N} : x \mapsto 0$$

e si prenda in esame l'algebra $(\mathbb{N}, \text{succ}, \text{zero})$; allora si ha che

i) succ e zero sono iniettive, poiché

- succ è iniettiva per il terzo assioma di Peano ([Definizione 1.1.1.1](#))
- $\forall x, y \in \mathbb{1} \quad \text{zero}(x) = \text{zero}(y) \implies x = y$ poiché $x, y \in \mathbb{1} \implies x = y$ in quanto $|\mathbb{1}| = 1$

ii) $\text{im}(\text{succ}) \cap \text{im}(\text{zero}) = (\mathbb{N} - \{0\}) \cap \{0\} = \emptyset$

iii) TODO

Definizione 1.1.1.5: Omomorfismo

Un **omomorfismo** è una funzione, tra due algebre dello stesso tipo, tale da preservarne le strutture.

Formalmente, siano (A, μ_1, \dots, μ_n) e $(B, \delta_1, \dots, \delta_n)$ due algebre tali che ogni funzione μ_i abbia la stessa arietà e lo stesso numero di parametri esterni (denotati con k) di δ_i , pari rispettivamente ad η_i ed a ν_i , per qualche $i \in [1, n]$; allora, una funzione $f : A \rightarrow B$ è detta essere un **omomorfismo** tra le due algebre, se e solo se

$$\begin{aligned} \forall a_1, \dots, a_{\eta_1} \quad f(\mu_1(a_1, \dots, a_{\eta_1}), k_1, \dots, k_{\nu_1}) &= \delta_1(f(a_1), \dots, f(a_{\eta_1}), k_1, \dots, k_{\nu_1}) \\ &\vdots \\ \forall a_1, \dots, a_{\eta_n} \quad f(\mu_n(a_1, \dots, a_{\eta_n}), k_1, \dots, k_{\nu_n}) &= \delta_n(f(a_1), \dots, f(a_{\eta_n}), k_1, \dots, k_{\nu_n}) \end{aligned}$$

Esempio 1.1.1.6 (Omomorfismi). Si considerino i gruppi $(\mathbb{R}, +)$ e $(\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$, e sia f definita come segue:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{>0} : x \mapsto e^x$$

allora, si ha che

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad f(x) \cdot f(y) = e^x \cdot e^y = e^{x+y} = f(x+y)$$

dunque f è un omomorfismo di gruppi.

Definizione 1.1.1.6: Isomorfismo

Un **isomorfismo** è un omomorfismo biiettivo.

Esempio 1.1.1.7 (Isomorfismi). Si consideri l'omomorfismo dell'[Esempio 1.1.1.6](#); si noti che

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \mid x \neq y \quad e^x \neq e^y \implies f(x) \neq f(y)$$

e dunque f è iniettiva; inoltre

$$\forall y \in \mathbb{R}_{>0} \quad \exists x \in \mathbb{R} \mid f(x) = e^x = y \iff y = \ln(x)$$

e dunque f è suriettiva. Allora, f è biiettiva, e poiché è un omomorfismo, risulta essere un isomorfismo.