Composizione relativistica della velocità

Alessio Bandiera

1 Problema di partenza

Consideriamo un punto materiale all'ìnterno di un sistema di riferimento inerziale S, che sia in movimento con velocità u. Ora consideriamo un secondo sistema di riferimento inerziale S', in movimento con velocità v rispetto ad S, ed in modo tale che v sia parallela agli assi sovrapposti x ed x', che S ed S' siano paralleli ed equiversi, e che all'istante $t = t' = 0$ s, S ed S' si sovrappongano; rispetto ad S', il punto materiale in S si muove di velocità u'. È possibile trovare una legge che sia in grado di mettere in relazione le due velocità u ed u'?

2 Soluzione trovata da Galileo

La soluzione è stata data per la prima volta da Galieo Galilei, intorno agli inizi del 1600, il quale era riuscito a formulare delle trasformazioni che permettessero di mettere in relazione le 4 dimensioni (*3 spaziali e quella temporale*), di due sistemi di riferimento inerziali, nella condizione in cui uno dei due fosse in moto relativamente rispetto all'altro. Tali trasformazioni prendono il nome di "***Trasformazioni di Galileo***", dalle quali è possibile ricavare la legge che mette in relazione le due velocità del punto materiale, u e u', rispetto ad S e S':

$$u' = u - v \tag{1}$$

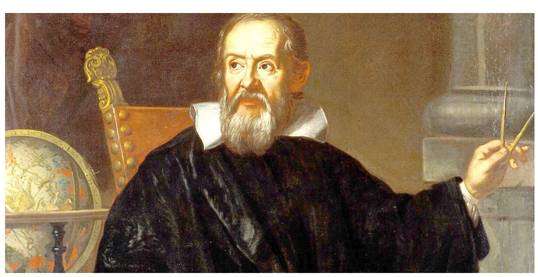

Figura 1: Ritratto di Galileo Galilei

3 La relatività ristretta

Nel 1905, tre secoli dopo Galileo, Albert Einstein sviluppò la teoria che rivoluzionò per sempre la fisica: **la teoria della relatività**. Einstein mise in discussione una grandezza fisica che nessuno, prima di lui, aveva mai pensato di analizzare da un punto di vista più relativo: il tempo. Infatti, all'interno della teoria della relatività (*in particolare quella ristretta*), Einstein spiega che il tempo non è una grandezza assoluta, e ciò deriva dei due postulati sui quali si fonda la sua teoria.

- **Le leggi della meccanica, dell'elettromagnetismo e dell'ottica sono le stesse in tutti i sistemi di riferimento inerziali**
- **La luce si propaga nel vuoto a velocità costante c, indipendentemente dallo stato di moto della sorgente o dell'osservatore**

4 Il nuovo problema

In quanto la luce, secondo la teoria della relatività, viaggia alla stessa velocità in tutti i sistemi di riferimento inerziali, le trasformazioni che Galileo aveva dedotto tre secoli prima non si dimostravano più valide per velocità prossime a quelle della luce: questo, in quanto le trasformazioni galileiane non ammettono invarianti, in disaccordo con la teoria della relatività, che prevede c come invariante in ogni sistema di riferimento.

$$c = 299.792 \text{ km/s} \tag{2}$$

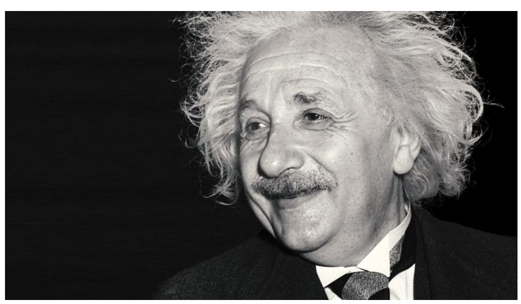

Figura 2: Albert Einstein

5 Le trasformazioni di Lorentz

Grazie ai contributi dati, inizialmente da Larmor nel 1887, successivamente da Poincarè nel 1905, alla relativitò ristretta, vennero definite le cosiddette "***Trasformazioni di Lorentz***". Tale nome venne scelto da Larmor stesso, in quanto tali trasformazioni sono caratterizzate dalla presenza del cosiddetto "*fattore Lorentziano*".

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{3}$$

Le trasformazioni di Lorentz sono trasformazioni lineari di coordinate che permettono di descrivere come varia la misura del tempo e dello spazio, tra due sistemi di riferimento inerziali, riuscendo a tenere conto dell'invarianza della velocità della luce.

$$\begin{cases} x' = \gamma\ (x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma \left(t - \dfrac{v}{c^2}x\right) \end{cases} \tag{4}$$

6 Composizione relativitstica delle velocità

Mediante le trasformazion di Lorentz, è possibile risolvere il problema che caratterizzava le trasformazioni galileiane, e trovare una formula che possa esprimere la relazione tra u e u', tenendo in considerazione la velocità della luce:

$$u' = \frac{u-v}{1-\frac{uv}{c^2}} \qquad\qquad u = \frac{u'+v}{1+\frac{u'v}{c^2}} \tag{5}$$

6.1 Dimostrazione della formula

$$\frac{\Delta x'}{\Delta t'} = \frac{x_2' - x_1'}{t_1' - t_1'} \tag{6}$$

$$\begin{cases} x' = \gamma\ (x - vt) \\ t' = \gamma \left(t - \dfrac{v}{c^2}x\right) \end{cases} \Rightarrow \frac{\Delta x'}{\Delta t'} = \frac{(x_2 - vt_2) - (x_1 - vt_1)}{(t_2 - \frac{v}{c^2}x_2) - (t_1 - \frac{v}{c^2}x_1)} \tag{7}$$

$$u' = \frac{\Delta x'}{\Delta t'} = \frac{x_2 - vt_2 - x_1 + vt_1}{t_2 - \frac{v}{c^2}x_2 - t_1 + \frac{v}{c^2}x_1} = \frac{(x_2 - x_1) - v(t_2 - t_1)}{(t_2 - t_1) - \frac{v}{c^2}(x_2 - x_1)} \tag{8}$$

$$x = ut \Rightarrow \Delta x = u\Delta t \Rightarrow u' = \frac{u(t_2 - t_1) - v(t_2 - t_1)}{(t_2 - t_1) - \frac{uv}{c^2}(t_2 - t_1)} \tag{9}$$

$$u' = \frac{(t_2 - t_1)(u - v)}{(t_2 - t_1)\left(1 - \frac{uv}{c^2}\right)} = \frac{u-v}{1-\frac{uv}{c^2}} \tag{10}$$

6.2 Invarianza di c

Placeholder

6.3 Velocità molto piccole rispetto a c

Placeholder

7 Analisi matematica della composzione relativistica delle velocità

Placeholder

7.1 Funzione omografica

Placeholder

7.2 Studio della funzione

Placeholder

7.3 Analisi derivata prima

Placeholder

7.4 Analisi della derivata seconda

yo mamma's so overweight