La composizione relativistica delle velocità

Alessio Bandiera

1 Problema di partenza

Consideriamo un punto materiale all'ìnterno di un sistema di riferimento inerziale S, che sia in movimento con velocità u. Ora consideriamo un secondo sistema di riferimento inerziale S', in movimento con velocità v rispetto ad S, ed in modo tale che v sia parallela agli assi sovrapposti x ed x', che S ed S' siano paralleli ed equiversi, e che all'istante $t = t' = 0$ s, S ed S' si sovrappongano; rispetto ad S', il punto materiale in S si muove con velocità u'. È possibile trovare una legge che sia in grado di mettere in relazione le due velocità u ed u'?

2 Soluzione trovata da Galileo

La soluzione è stata data per la prima volta da Galieo Galilei, intorno agli inizi del 1600, il quale era riuscito a formulare delle trasformazioni che permettessero di mettere in relazione le 4 dimensioni (*3 spaziali e quella temporale*), di due sistemi di riferimento inerziali, nella condizione in cui uno dei due fosse in moto relativamente rispetto all'altro.

$$\begin{cases} x' = x - vt \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases} \tag{1}$$

Tali trasformazioni prendono il nome di "***Trasformazioni di Galileo***", dalle quali è possibile ricavare la legge che mette in relazione le due velocità del punto materiale, u e u', rispetto ad S e S':

$$u' = u - v \tag{2}$$

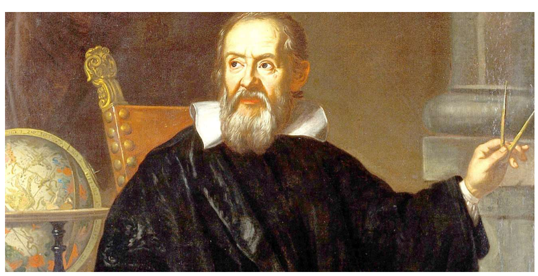


Figura 1: Ritratto di Galileo Galilei

3 La relatività ristretta

Nel 1905, tre secoli dopo Galileo, Albert Einstein sviluppò la teoria che rivoluzionò per sempre la fisica: **la teoria della relatività**. Einstein mise in discussione una grandezza fisica che nessuno, prima di lui, aveva mai pensato di analizzare da un punto di vista più relativo: il tempo. Infatti, all'interno della teoria della relatività (*in particolare quella ristretta*), Einstein spiega che il tempo non è una grandezza assoluta, e ciò deriva dai due postulati sui quali si fonda la sua teoria:

- **Le leggi della meccanica, dell'elettromagnetismo e dell'ottica sono le stesse in tutti i sistemi di riferimento inerziali**
- **La luce si propaga nel vuoto a velocità costante c, indipendentemente dallo stato di moto della sorgente o dell'osservatore**

4 Il nuovo problema

In quanto la luce, secondo la teoria della relatività, viaggia alla stessa velocità in tutti i sistemi di riferimento inerziali, le trasformazioni che Galileo aveva dedotto tre secoli prima non si dimostravano più valide per velocità prossime a quelle della luce: questo, in quanto le trasformazioni galileiane non ammettono invarianti, in disaccordo con la teoria della relatività, che prevede c come invariante in ogni sistema di riferimento.

$$c = 299.792 \text{ km/s} \tag{3}$$

Infatti, ad esempio, prendendo valori come $u = \frac{2}{3}c$ e $v = -\frac{2}{3}c$, (*ovvero, il sistema di riferimento S' si muoverebbe in verso opposto rispetto al sistema S*) allora, applicando la legge derivata dalle trasformazioni di Galileo, otterremmo

$$u' = u - v = \frac{2}{3}c - (-\frac{2}{3}c) = \frac{4}{3}c \tag{4}$$

Ma questo valore non può essere ritenuto valido, in quanto nessuna velocità può superare quella della luce; dunque, risulta ovvio che le trasformazioni di Galileo debbano essere necessariamente modificate.

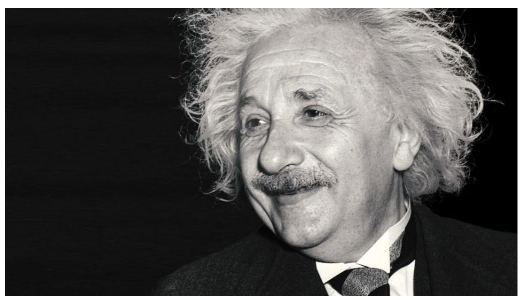


Figura 2: Albert Einstein

5 Le trasformazioni di Lorentz

Grazie ai contributi dati, inizialmente da Larmor nel 1887, successivamente da Poincarè nel 1905, alla relatività ristretta, vennero definite le cosiddette "***Trasformazioni di Lorentz***". Tale nome venne scelto da Larmor stesso, in quanto queste trasformazioni sono caratterizzate dalla presenza del cosiddetto "*fattore Lorentziano*", indicato con la lettera greca γ, ed è pari a

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{5}$$

Le trasformazioni di Lorentz sono trasformazioni lineari di coordinate che permettono di descrivere come variano le misure del tempo e dello spazio, tra due sistemi di riferimento inerziali, riuscendo a tenere conto dell'invarianza della velocità della luce:

$$\begin{cases} x' = \gamma\ (x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma \left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \end{cases} \tag{6}$$

6 La composizione relativistica delle velocità

Mediante le trasformazioni di Lorentz, è possibile risolvere il problema che caratterizzava le trasformazioni galileiane, e trovare una formula che possa esprimere la relazione tra u e u', che tenga in considerazione la velocità della luce:

$$u' = \frac{u - v}{1 - \frac{uv}{c^2}} \qquad\qquad u = \frac{u' + v}{1 + \frac{u'v}{c^2}} \tag{7}$$

6.1 Dimostrazione della formula

A partire dall'uguaglianza

$$\frac{\Delta x'}{\Delta t'} = \frac{x'_2 - x'_1}{t'_1 - t'_1} \tag{8}$$

riscriviamo il secondo membro mediante le trasformazioni di Lorentz

$$\begin{cases} x' = \gamma\ (x - vt) \\ t' = \gamma \left(t - \dfrac{v}{c^2} x \right) \end{cases} \Rightarrow \frac{\Delta x'}{\Delta t'} = \frac{(x_2 - vt_2) - (x_1 - vt_1)}{(t_2 - \frac{v}{c^2} x_2) - (t_1 - \frac{v}{c^2} x_1)} \tag{9}$$

e, successivamente, svolgendo i calcoli, otterremo

$$u' = \frac{\Delta x'}{\Delta t'} = \frac{x_2 - vt_2 - x_1 + vt_1}{t_2 - \frac{v}{c^2} x_2 - t_1 + \frac{v}{c^2} x_1} = \frac{(x_2 - x_1) - v(t_2 - t_1)}{(t_2 - t_1) - \frac{v}{c^2}(x_2 - x_1)} \tag{10}$$

ma sapendo che $x = ut$, e quindi $\Delta x = u\Delta t$, allora

$$u' = \frac{u(t_2 - t_1) - v(t_2 - t_1)}{(t_2 - t_1) - \frac{uv}{c^2}(t_2 - t_1)} \tag{11}$$

ed infine

$$u' = \frac{(t_2 - t_1)(u - v)}{(t_2 - t_1)\left(1 - \frac{uv}{c^2}\right)} = \frac{u - v}{1 - \frac{uv}{c^2}} \tag{12}$$

6.2 Invarianza di c

È possibile dimostrare che tale formula tiene conto dell'invarianza della velocità della luce, semplicemente ponendo $u = c$, e svolgendo i calcoli, si otterrà

$$u' = \frac{c - v}{1 - \frac{cv}{c^2}} = \frac{c - v}{1 - \frac{v}{c}} = \frac{c - v}{\frac{c - v}{c}} = \frac{c - v}{c - v} c = c \tag{13}$$

e dunque, per $u = c$, u' sarà pari a c indipendentemente dalla velocità v.

6.3 Velocità molto piccole rispetto a c

Le trasformazioni di Galileo erano state ritenute valide fino alla teoria della relatività, poiché è possibile dimostrare che per velocità u ed u' di molto inferiori rispetto a c, le trasformazioni di Lorentz possono essere approssimate a quelle di Galileo. Infatti, le trasformazioni di Galileo risultano essere un caso particolare delle trasformazioni di Lorentz, in quanto ponendo $u << c$ e $v << c$, allora $\frac{uv}{c^2} \approx 0$, e dunque

$$u' \approx \frac{u - v}{1 - 0} \approx u - v \tag{14}$$

ovvero, approssimativamente la formula (2).

7 Analisi matematica della composzione relativistica delle velocità

Per comodità, studieremo la funzione della composizione relativistica delle velocità, nella forma

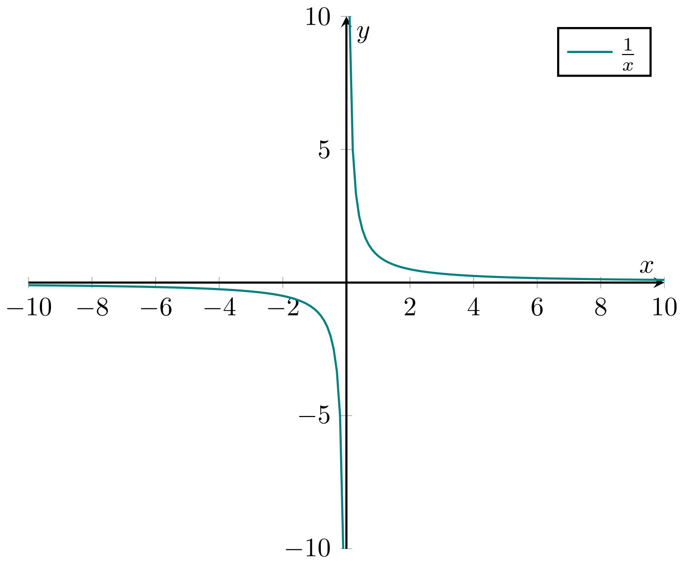
$$u = \frac{u' + v}{1 + \frac{u'v}{c^2}} \tag{15}$$

7.1 Funzione omografica

La cosiddetta *funzione omografica*, è una funzione del tipo

$$y = \frac{ax + b}{cx + d} \quad (c \neq 0) \tag{16}$$

Ad esempio, il grafico di $y = \frac{1}{x}$, un caso di funzione omografica molto semplice, è il seguente:



La funzione $u(u')$ risulta dunque essere proprio una funzione omografica, ed in particolare

$$a = 1 \qquad b = v \qquad c = \frac{v}{c^2} \qquad d = 1 \tag{17}$$

7.2 Studio della funzione

Partiamo dal classificare la funzione: essa è una *funzione algebrica razionale fratta*, e non è definita per tutto l'asse reale, infatti il dominio è

$$\mathrm{D}_u = \forall u' \mid 1 + \frac{u'v}{c^2} \neq 0 \tag{18}$$

e dunque

$$\mathrm{D}_u = \forall u' \mid u' \neq -\frac{c^2}{v} \tag{19}$$

Le intersezioni della curva con gli assi possono essere calcolate risolvendo due semplici sistemi:

$$\begin{cases} u' = 0 \\ u = \dfrac{0 + v}{1 + 0} \end{cases} \quad \begin{cases} u = 0 \\ 0 = \dfrac{u' + v}{1 + \frac{u'v}{c^2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u' = 0 \\ u = v \end{cases} \quad \begin{cases} u = 0 \\ u' = -v \end{cases} \tag{20}$$

e dunque i punti di intersezione con gli assi sono

$$(0;\ v) \quad (-v;\ 0) \tag{21}$$

Successivamente, andiamo a studiare gli intervalli di u' per i quali la funzione risulta essere positiva, negativa e nulla. Per far questo, basterà imporre $u > 0$, e dunque

$$\frac{u' + v}{1 + \frac{u'v}{c^2}} > 0 \tag{22}$$

Studiando il segno della funzione, otterremo che il numeratore è maggiore per

$$u' + v >' \Rightarrow u' > -v \tag{23}$$

mentre il denominatore è maggiore per

$$1 + \frac{u'v}{c^2} > 0 \Rightarrow u' > -\frac{u'v}{c^2} \tag{24}$$

Quindi, complessivamente, lo studio della funzione mostra che

$$\begin{aligned} &u > 0: \ u' < -\frac{c^2}{v} \vee u' > -v \\ &u = 0: \ u' = -v \\ &u < 0: \ -\frac{c^2}{v} < u' < -v \end{aligned}$$

Procedendo con lo studio della funzione, andiamo alla ricerca di eventuali limiti verticali, facendo tendere la variabile indipendente al valore che non fa parte del dominio della funzione (19), quindi calcolando

$$\lim_{u' \to -\frac{c^2}{v}} \frac{u' + v}{1 + \frac{u'v}{c^2}} \tag{25}$$

che è pari a

$$\frac{-\frac{c^2}{v} + v}{1 - \frac{c^2 v}{v c^2}} = \frac{\frac{-c^2+v^2}{v}}{1 - 1} = \frac{v^2 - c^2}{0} \tag{26}$$

Il numeratore di tale frazione è sempre negativo, in quanto $v < c \ \Rightarrow \ v^2 < c^2 \ \Rightarrow \ v^2 - c^2 < 0$, dunque

$$\begin{aligned} &\lim_{u' \to -\frac{c^2}{v}^-} u = +\infty \\ &\lim_{u' \to -\frac{c^2}{v}^+} u = -\infty \end{aligned}$$

quindi $u' = -\frac{c^2}{v}$ risulta essere un asintoto verticale. Invece, per quanto riguarda gli eventuali asintoti orizzontali, calcoliamo

$$\lim_{u' \to \pm\infty} \frac{u' + v}{1 + \frac{u'v}{c^2}} \tag{27}$$

e per calcolarlo, è necessario mettere in evidenza u' sia al numeratore che al denominatore, e dunque possiamo riscrivere il limite come

$$\lim_{u' \to \pm\infty} \frac{u'(1 + \frac{v}{u'})}{u'(\frac{1}{u'} + \frac{v}{c^2})} \tag{28}$$

e semplificando u', possiamo snellire ulteriormente il limite, in quanto se

$$u' \to \pm\infty \ \Rightarrow \ \begin{aligned} &\frac{v}{u'} \to 0 \\ &\frac{1}{u'} \to 0 \end{aligned} \tag{29}$$

dunque

$$\frac{(1+0)}{(0+\frac{v}{c^2})} = \frac{1}{\frac{v}{c^2}} = \frac{c^2}{v} \tag{30}$$

quindi $u = \frac{c^2}{v}$ è un asintoto orizzontale. In seguito, andremo a calcolare la derivata prima della funzione, per cercare eventuali punti di non derivabilità, e punti di minimo e/o punti di massimo. La derivata prima di u è possibile calcolarla ricordando che

$$\frac{d}{dx}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2} \tag{31}$$

e quindi, la derivata di $u(u')$ sarà

$$\frac{d}{du'}u = \frac{(1+\frac{u'v}{c^2}) - (u'+v)\frac{v}{c^2}}{\left(1+\frac{u'v}{c^2}\right)^2} = \frac{1+\frac{u'v}{c^2} - \frac{u'v}{c^2} - \frac{v^2}{c^2}}{\left(1+\frac{u'v}{c^2}\right)^2} = \frac{1-\frac{v^2}{c^2}}{\left(1+\frac{u'v}{c^2}\right)^2} \tag{32}$$

o, alternativamente, poiché $\beta = \frac{v}{c}$, possiamo riscrivere la derivata come

$$\frac{d}{du'}u = \frac{1-\beta^2}{\left(1+\frac{u'v}{c^2}\right)^2} \tag{33}$$

Ora, proseguiamo studiando il segno della derivata prima, e dunque

$$1-\beta^2 > 0 \;\Rightarrow\; \beta^2 < 1 \;\Rightarrow\; -1 < \beta < 1 \tag{34}$$

e poiché $\beta = \frac{v}{c}$, allora

$$-1 < \frac{v}{c} < 1 \;\Rightarrow\; -c < v < c \tag{35}$$

e ciò è sempre vero per il secondo assioma della relatività ristretta, di conseguenza il numeratore è sempre positivo. Invece, per quanto riguarda il numeratore, ponendolo maggiore di 0 otterremo

$$(1+\frac{u'v}{c^2})^2 > 0 \tag{36}$$

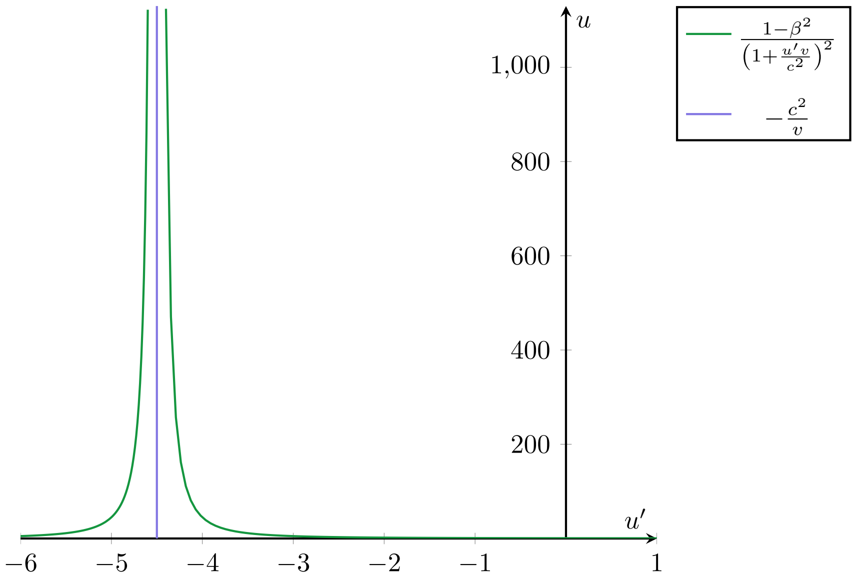
ed essendo un quadrato, è verificato per

$$\forall u' \mid 1+\frac{u'v}{c^2} \neq 0 \tag{37}$$

ovvero

$$\forall u' \mid u' \neq -\frac{c^2}{v} \tag{38}$$

Tale punto non costituisce un punto di non derivabilità in quanto il dominio della funzione è (19), e dunque il punto $u' = -\frac{c^2}{v}$ non fa parte del dominio di u. Di conseguenza, il denominatore è anch'esso sempre positivo, dunque complessivamente la funzione è sempre positiva, quindi si troverà nel I e nel II quadrante, e presenta un asintoto verticale che coincide con l'asintoto verticale della funzione di partenza. Tracciando il grafico della derivata prima, otterremo dunque il seguente (*nel grafico riportato sono stati utilizzati valori di c e di v non realistici, in quanto sono stati posti $c = 3$ e $v = 2$, ma esclusivamente per ragioni di comodità nel tracciare il grafico, l'andamento di questo risulta lo stesso con i valori reali, in quanto risulta solamente rappresentato in scala di un fattore pari a circa* 10^8):



L'ultimo elemento che bisogna analizzare per completare lo studio della funzione è la derivata seconda. Ma prima di calcolarla, riscriviamo la funzione utilizzando la formula (5) che definisce il fattore Lorentziano:

$$\begin{matrix} \frac{d}{du'}u = \frac{1-\beta^2}{\left(1+\frac{u'v}{c^2}\right)^2} \\ \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \ \Rightarrow \ \gamma^{-2} = 1-\beta^2 \end{matrix} \Rightarrow \ \frac{d}{du'}u = \frac{1}{\gamma^2\left(1+\frac{u'v}{c^2}\right)^2} = \frac{1}{\left[\gamma\left(1+\frac{u'v}{c^2}\right)\right]^2} \tag{39}$$