Tarea Optica 4

Andrés Felipe Moreno

Supongamos un rayo incidente, de magnitud E_o, con polarización circular a izquierda, esto quiere decir que las magnitudes perpendiculares a la dirección de propagación de la onda son iguales, con un desfase de $\frac{\pi}{2}$, así, suponiendo que se propaga en dirección $-\hat{\jmath}$, es decir que $\vec{k}_i = \frac{2\pi n}{\lambda_o}(-\hat{\jmath})$, donde n es el coeficiente de refracción del medio, y λ_o es la longitud de onda del rayo, entonces es posible escribir la ecuación de la onda de la forma:

$$\vec{E}_i(\vec{r},t) = \frac{E_o}{\sqrt{2}}\left[\hat{\imath} + i\hat{z}\right] e^{i\left(\vec{k}_i\cdot\vec{r}-\omega t\right)} \tag{1}$$

Siendo que este rayo incide a 30° con respecto al vector normal de una superficie plana de una interfase, entonces se tiene que se debe realizar una rotación de los ejes coordenados, de acuerdo a la matriz de transformación:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \cos(30°) & -\sin(30°) & 0 \\ \sin(30°) & \cos(30°) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

Por lo tanto los vectores $\vec{E}_i(\vec{r},t)$ y $\vec{k}_i$ se transforman cómo:

$$\begin{aligned} \vec{E}_i'(\vec{r},t) &= \mathbf{M}\vec{E}_i(\vec{r},t) && (3) \\ &= \frac{E_o}{\sqrt{2}} e^{i\left(\vec{k}_i\cdot\vec{r}-\omega t\right)} \begin{pmatrix} \cos(30°) & -\sin(30°) & 0 \\ \sin(30°) & \cos(30°) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \end{pmatrix} && (4) \\ &= \frac{E_o}{\sqrt{2}} e^{i\left(\vec{k}_i\cdot\vec{r}-\omega t\right)} \begin{pmatrix} \cos(30°) \\ \sin(30°) \\ i \end{pmatrix} && (5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{k}_i' &= \mathbf{M}\vec{k}_i && (6) \\ &= \frac{2\pi n}{\lambda_o} \begin{pmatrix} \cos(30°) & -\sin(30°) & 0 \\ \sin(30°) & \cos(30°) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} && (7) \\ &= \frac{2\pi n}{\lambda_o} \begin{pmatrix} \sin(30°) \\ -\cos(30°) \\ 0 \end{pmatrix} && (8) \end{aligned}$$

A partir de esto se tiene que el rayo al incidir sobre la interfase, ubicada en el plano xz, con $n = 1$ en la parte positiva del eje y y $n' = 1{,}5$ en la parte negativa de este mismo eje, se tiene que este se refleja y transmite de acuerdo a lo que se puede observar en la Figura1.

A partir de esto, y teniendo que:

$$\theta_i = \theta_r = 30° \qquad\qquad n\sin(\theta_i) = n'\sin(\theta_t) \tag{9}$$

de modo que el angulo del rayo transmitido es:

$$\theta_t \approx 19.47° \tag{10}$$

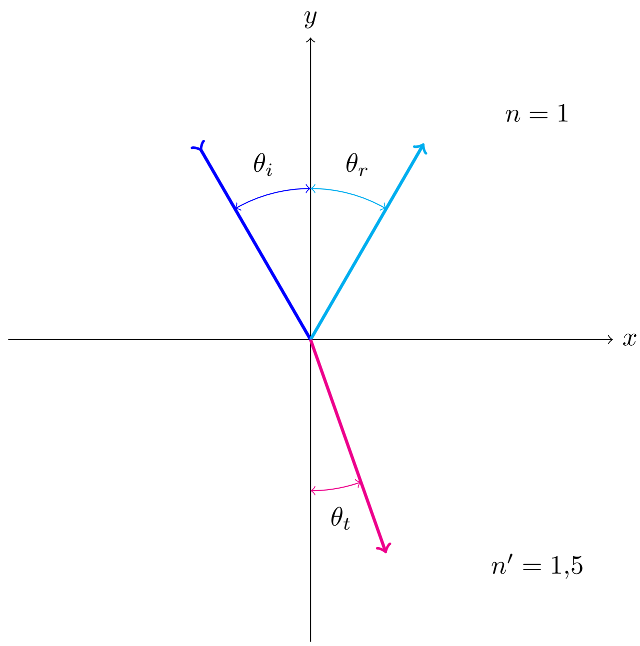

Figura 1: Relfexión de un rayo insidente sobre una interfase

Ahora bien, de acuerdo a la configuración de los ejes coordenados, el rayo incidente paralelo y el perpendicular transformación:

$$E_i^{\|}(\vec{r},t) = \frac{E_o}{\sqrt{2}}(\cos^2(30°) + \sin^2(30°)) = \frac{E_o}{\sqrt{2}} \tag{11}$$

$$E_i^{\perp}(\vec{r},t) = \frac{E_o}{\sqrt{2}} i \tag{12}$$

Luego:

$$\vec{E}_i' = e^{i\left(\vec{k}_i' \cdot \vec{r} - \omega t\right)} \begin{pmatrix} E_i^{\|} \\ \\ E_i^{\perp} \end{pmatrix} = E_o e^{i\left(\vec{k}_i' \cdot \vec{r} - \omega t\right)} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \\ \frac{i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \tag{13}$$

$$\vec{k}_i' = \frac{2\pi}{\lambda_o} \begin{pmatrix} \sin(30°) \\ -\cos(30°) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{14}$$

$$\tag{15}$$

$$\tag{16}$$

Ahora bien se tiene que los indices de reflexion y transmisión están dados por:

$$r_{\parallel} = \frac{n_t \cos\theta_i - n_i \cos\theta_t}{n_t \cos\theta_i + n_i \cos\theta_t} = \frac{1{,}5\ \frac{\sqrt{2}}{2} - 0{,}8129}{1{,}5\ \frac{\sqrt{2}}{2} + 0{,}8129} = 0{,}1589 \tag{17}$$

$$r_{\perp} = \frac{n_i \cos\theta_i - n_t \cos\theta_t}{n_i \cos\theta_i + n_t \cos\theta_t} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} - 1{,}5\ 0{,}8129}{\frac{\sqrt{2}}{2} + 1{,}5\ 0{,}8129} = -0{,}2404 \tag{18}$$

$$t_{\parallel} = \frac{2 n_i \cos\theta_i}{n_t \cos\theta_i + n_i \cos\theta_t} = \frac{2\ \frac{\sqrt{2}}{2}}{1{,}5\ \frac{\sqrt{2}}{2} + 0{,}8129} = 0{,}7726 \tag{19}$$

$$t_{\perp} = \frac{2 n_i \cos\theta_i}{n_i \cos\theta_i + n_t \cos\theta_t} = \frac{2\ \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2} + 1{,}5\ 0{,}8129} = 0{,}7596 \tag{20}$$

Con esto se tiene que:

$$\vec{E}_r' = e^{i\left(\vec{k}_r' \cdot \vec{r} - \omega t + \epsilon_r\right)} \begin{pmatrix} r_{\parallel} E_i^{\parallel} \\ \\ r_{\perp} E_i^{\perp} \end{pmatrix} = E_o e^{i\left(\vec{k}_r' \cdot \vec{r} - \omega t + \epsilon_r\right)} \begin{pmatrix} \frac{0{,}1589}{\sqrt{2}} \\ \\ \frac{-0{,}2404 i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \tag{21}$$

$$\vec{E}_t' = e^{i\left(\vec{k}_t' \cdot \vec{r} - \omega t + \epsilon_t\right)} \begin{pmatrix} t_{\parallel} E_i^{\parallel} \\ \\ t_{\perp} E_i^{\perp} \end{pmatrix} = E_o e^{i\left(\vec{k}_t' \cdot \vec{r} - \omega t + \epsilon_t\right)} \begin{pmatrix} \frac{0{,}7726}{\sqrt{2}} \\ \\ \frac{0{,}7596 i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \tag{22}$$

Donde:

$$\vec{k}_r' = \frac{2\pi}{\lambda_o} \begin{pmatrix} \sin(30°) \\ \cos(30°) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{23}$$

$$\tag{24}$$

$$(\vec{k}_i' - \vec{k}_r') = \frac{2\pi}{\lambda_o} \begin{pmatrix} 0 \\ -2\cos(30°) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{25}$$

$$\epsilon_r = -2\cos(30°)\frac{2\pi}{\lambda_o} \tag{26}$$

$$\vec{k}_t' = \frac{2\pi 1{,}5}{\lambda_o} \begin{pmatrix} \sin(19.47°) \\ -\cos(19.47°) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{27}$$

$$\tag{28}$$

$$(\vec{k}_i' - \vec{k}_t') = \frac{2\pi}{\lambda_o} \begin{pmatrix} 0 \\ -\cos(30°) + 1{,}5\cos(19.47°) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{29}$$

$$\epsilon_t = (1{,}5\cos(19.47°) - \cos(30°))\frac{2\pi}{\lambda_o} \tag{30}$$