Analisi Matematica III

Universitá degli studi di Trento
Dipartimento di Matematica
Anno Accademico 2015/2016
Docente: Silvano Delladio

Note a cura di:
Alex Pellegrini

`email: alex.pellegrini@live.com`
`web:   http://rexos.github.io`

Indice

Capitolo 1

Teoria della Misura

Definizione 1.1. Una *misura esterna* sull' insieme $\mathcal{X}$ é una mappa $\varphi : 2^{\mathcal{X}} \to [0, +\infty]$ tale che :

1. $\varphi(\emptyset) = 0$
2. $\varphi(E) \leq \varphi(F)$ se $E \subset F \subset \mathcal{X}$ (monotonia)
3. $\varphi(\bigcup_j E_j) \leq \sum_j \varphi(E_j)$ (σ-subadditivitá)

Esempio 1.2.

Esempio 1.3.

Esempio 1.4.

1.1 Misura di Peano-Jordan

Sia $A \subset \mathbb{R}^2$ limitato.
Sia $\mathcal{R}_A$ la famiglia di ricoprimenti finiti di A, formati da rettangoli aperti in $\mathbb{R}^2$ della forma $(a, b) \times (c, d)$.
Sia $\mathcal{R} = \{R_1, R_2, ..., R_k\}$ un ricoprimento finito di A. Indichiamo con $m(R_i)$ l'area di R_i. Ovviamente $A \subset \bigcup_{j=1}^{k} R_j$.

Definizione 1.5. La *misura superiore di Jordan* di un insieme A é definita come:

$$J^+(A) := \inf_{\mathcal{R} \in \mathcal{R}_A} \sum_{R_j \in \mathcal{R}} m(R_j)$$

Ovvero prendiamo la minore delle aree dei ricoprimenti di A.

La misura superiore di Peano-Jordan é definita anche per A non limitato come:

$$J^+(A) := \lim_{\rho \to +\infty} J^+(A \cap B_\rho(0,0))$$

Proposizione 1.6. La misura superiore di Peano-Jordan **non** é una misura esterna.

Dimostrazione. Consideriamo $A = (\mathbb{Q} \cap [0,1]) \times (\mathbb{Q} \cap [0,1])$. A é formato dai punti razionali nel quadrato reale di lato 1 centrato nell' origine. Siccome $\mathbb{Q}$ é denso in $\mathbb{R}$ nessun punto razionale di A é punto interno (lo stesso vale per la parte puramente reale).

Scriviamo dunque $A = \{P_1, P_2, ...\}$, ovvero $A = \bigcup\limits_{j=1}^{+\infty} P_j$ (infinito numerabile).

- Dimostriamo $J^+(P_j) = 0$.
  Sia Q_ε il quadrato aperto che ricopre il punto P_j. Abbiamo che $J^+(P_j) \leq m(Q_\varepsilon) = \varepsilon^2 \Rightarrow J^+(P_j) = 0$ per l'arbitrarietá di ε.

- Dimostriamo che $J^+(A) \geq 1$.
  Sia $\mathcal{R}$ un ricoprimento di A, allora

  $$1 \leq area(\mathcal{R}) \leq \sum_{R_j \in \mathcal{R}} m(R_j)$$

  Allora abbiamo che:

  $$\inf_{\mathcal{R} \in \mathcal{R}_A} \sum_{R_j \in \mathcal{R}} m(R_j) \geq 1$$

Concludiamo che $J^+(A) \geq 1 > \sum\limits_{j=1}^{\infty} J^+(P_j) = 0$. Quindi la misura superiore di Jordan non é esterna in quanto non rispetta la σ-subadditivitá $\square$

Consideriamo l' insieme $\mathcal{T}_A = \{\{R_1, ..., R_k\} | k < +\infty, R_j \subset A, R_i \cap R_j = \emptyset \ se \ i \neq j\}$, ovvero l'insieme dei ricomprimeti inscritti ad A (formati da rettangoli aperti) a due a due disgiunti.

Definizione 1.7. La *misura inferiore di Jordan* é definita come:

$$J^-(A) := \begin{cases} 0 & \text{se } \mathcal{T}_A = \emptyset \\ \sup\limits_{\mathcal{T} \in \mathcal{T}_A} \sum\limits_{R_j \in \mathcal{T}} m(R_j) & \text{se } \mathcal{T}_A \neq \emptyset \end{cases}$$

Il massimo delle aree dei ricoprimenti inscritti di A.

Definizione 1.8. A é *misurabile* secondo Jordan se $J^-(A) = J^+(A)$, in tal caso il valore si indica con $J(A)$.

Ovviamente $J^-(A) \leq J^+(A)$, per A come sopra abbiamo $\mathcal{T}_A = \emptyset \Rightarrow J^-(A) = 0$ inoltre come visto prima $J^+(A) \geq 1$. Dunque A non é misurabile secondo Jordan. Detto questo la mappa $J : M_J \longrightarrow [0, +\infty]$, con M_J insieme dei misurabili secondo Jordan, ha dominio $M_J \neq 2^{\mathbb{R}^2}$, quindi non puó essere misura esterna.

Definizione 1.9. Sia $\varphi : 2^{\mathcal{X}} \longrightarrow [0, +\infty]$ una misura esterna su $\mathcal{X}$. $E \subset \mathcal{X}$ é *misurabile* se $\forall A \subset \mathcal{X}$:

$$\varphi(A) = \varphi(A \cap E) + \varphi(A \cap E^c);$$

Questa proprietá é detta *buon spezzamento* indotto da E. La famiglia degli insiemi misurabili secondo φ é indicata con $\mathcal{M}_\varphi$.

Osservazione 1.10. Notiamo subito che $\mathcal{X}, \emptyset \in \mathcal{M}_\varphi$.

Osservazione 1.11. Per $E \subset \mathcal{X}$ e $\forall A \subset \mathcal{X}$

$$A = (A \cap E) \cup (A \cap E^c)$$

allora per σ-subadditivitá

$$\varphi((A \cap E) \cup (A \cap E^c)) \leq \varphi(A \cap E) + \varphi(A \cap E^c)$$

Quindi per dimostrare che un certo $E \in \mathcal{M}_\varphi$ basta dimostrare che vale la relazione $\geq$.

Il seguente teorema enuncia delle proprietá di chiusura della famiglia $\mathcal{M}_\varphi$

Teorema 1.12. *Sia $\varphi : 2^{\mathcal{X}} \longrightarrow [0, +\infty]$ una misura esterna su $\mathcal{X}$. Allora valgono le seguenti proprietá:*

1. *$\mathcal{M}_\varphi$ é c-chiusa (chiusura rispetto al complementare)*
2. *Se $E \subset \mathcal{X}$ con $\varphi(E) = 0 \Rightarrow E \in \mathcal{M}_\varphi$ (allora per 1 anche $\mathcal{X} \in \mathcal{M}_\varphi$)*
3. *Se $E_1, E_2, ..., E_n$ con $E_i \in \mathcal{M}_\varphi \Rightarrow \bigcap_{j=1}^{n} E_j \in \mathcal{M}_\varphi$ (quindi anche $\bigcup_{j}^{n} E_j \in \mathcal{M}_\varphi$)*
4. *Sia $\{E_j\}_j \subset \mathcal{M}_\varphi$ famiglia numerabile (2-2 disgiunta) $\Rightarrow S = \bigcup_j E_j \in \mathcal{M}_\varphi$ e vale*

$$\varphi(A) \geq \sum_j \varphi(A \cap E_j) + \varphi(A \cap S^c) \quad \forall A \subset \mathcal{X}$$

5. *Se $\{E_j\}_j$ come in 4) $\Rightarrow \varphi(\bigcup_j E_j) = \sum_j \varphi(E_j)$*

Dimostrazione. 1. Sia $E \in \mathcal{M}_\varphi$ e consideriamo E^c devo provare buon spezzamento $\forall A \subset \mathcal{X}$:

$$\varphi(A \cap E^c) + \varphi(A \cap (E^c)^c) = \varphi(A \cap E^c) + \varphi(A \cap E) = \varphi(A)$$

2. Per monotonia abbiamo che $\varphi(A \cap E) \leq \varphi(E)$ (poiché $(A \cap E) \subset E$). Siccome, per ipotesi, $\varphi(E) = 0$ allora anche $\varphi(A \cap E) = 0$ quindi posssiamo scivere:

$$\varphi(A \cap E) + \varphi(A \cap E^c) = 0 + \varphi(A \cap E^c) \leq \varphi(A)$$

Abbiamo visto nell' osservazione 1.11 che basta dimostrare questa disuguaglianza per ottenere la tesi.

3. Procediamo per induzione su n.

- $n = 1$ La tesi é banale.
- $n = 2$ Dimostro questo poi l'induzione deriva facilmente. Siano $E_1, E_2 \in \mathcal{M}_\varphi$ quindi devo provare il buon spezzamento $\forall A \subset \mathcal{X}$. Siccome $E_1, E_2 \in \mathcal{M}_\varphi$:

$$\varphi(A) = \varphi(A \cap E_1) + \varphi(A \cap E_1^c) \tag{1.1}$$

Ora per il buon spezzamento indotto su $A \cap E_1$ da E_2 riscriviamo il secondo termine dell'equazione come:

$$\varphi(A \cap E_1) = \varphi((A \cap E_1) \cap E_2) + \varphi((A \cap E_1) \cap E_2^c)$$

Ora sostituendo in 1.1 otteniamo:

$$\varphi(A) = \varphi((A \cap E_1) \cap E_2) + \varphi((A \cap E_1) \cap E_2^c) + \varphi(A \cap E_1^c) \tag{1.2}$$

Per σ-subadditivitá della misura il terzo e quarto termine possono essere minorati come segue:

$$\varphi(A \cap E_1 \cap E_2^c) + \varphi(A \cap E_1^c) \geq \varphi((A \cap E_1 \cap E_2^c) \cup (A \cap E_1^c))$$

$$= \varphi(A \cap [(E_1 \cap E_2^c) \cup E_1^c]) = \varphi(A \cap [(E_1 \cup E_1^c) \cap (E_2^c \cup E_1^c)])$$

$$= \varphi(A \cap (E_1^c \cup E_2^c)).$$

Sostituendo in 1.2 otteniamo infine:

$$\varphi(A) \geq \varphi(A \cap E_1 \cap E_2) + \varphi(A \cap E_1^c \cup E_2^c) \tag{1.3}$$

Dove ovviamente $E_1^c \cup E_2^c = (E_1 \cap E_2)^c \Rightarrow E_1 \cap E_2 \in \mathcal{M}_\varphi$.

Mostriamo ora che $\bigcup_j^n E_j \in \mathcal{M}_\varphi$. Per ogni valore di n abbiamo:

$$\bigcup_j^n E_j = [(\bigcup_j^n E_j)^c]^c = [(\bigcap_j^n E_j^c)]^c$$

Analizziamo l'ultimo termine. $E_j^c \in \mathcal{M}_\varphi$ per 1). L'intersezione $\bigcap_j^n E_j^c \in \mathcal{M}_\varphi$ per il punto 3) mentre il tutto é misurabile nuovamente per il punto 1).

4. Dimostriamo prima la seconda parte dell' enunciato. Sia $A \subset \mathcal{X}$ qualsiasi allora, per il buon spezzamento indotto da E_1:

$$\varphi(A) = \varphi(A \cap E_1) + \varphi(A \cap E_1^c) \tag{1.4}$$

Dunque per il buon spezzamento indotto da E_2 riscriviamo 1.4 modificando l'ultimo termine:

$$\varphi(A) = \varphi(A \cap E_1) + \varphi(A \cap (E_1^c \cap E_2)) + \varphi(A \cap (E_1^c \cap E_2^c)) \tag{1.5}$$

Ora, siccome gli E_j sono 2-2 disgiunti $E_i \cap E_j^c = E_i$ per $i \neq j$ in quanto $E_i \subset E_j^c$, sostituiamo in 1.5 che diventa come segue:

$$\varphi(A) = \varphi(A \cap E_1) + \varphi(A \cap E_2) + \varphi(A \cap E_1^c \cap E_2^c) \tag{1.6}$$

La tesi segue facilmente ora, ma eseguiamo ancora un passo per chiarezza. Esattamente come abbiamo fatto per il buon spezzamento indotto da E_2 possiamo procedere con E_3. Prendiamo l'ultimo termine di 1.6 e riscriviamolo come:

$$\varphi(A \cap E_1^c \cap E_2^c) = \varphi(A \cap E_1^c \cap E_2^c \cap E_3) + \varphi(A \cap E_1^c \cap E_2^c \cap E_3^c)$$

Per la stessa argomentazione che ci ha portato a 1.6 abbiamo $\varphi(A \cap E_1^c \cap E_2^c \cap E_3) = \varphi(A \cap E_3)$ in quanto $E_3 \subset E_i^c$ per $i = 1, 2$ (a dire la veritá vale $\forall i \neq 3$). Riscriviamo 1.6:

$$\varphi(A) = \varphi(A \cap E_1) + \varphi(A \cap E_2) + \varphi(A \cap E_3) + \varphi(A \cap E_1^c \cap E_2^c \cap E_3^c)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \varphi(A \cap E_j) + \varphi(A \cap (\bigcap_{j=1}^{n} E_j^c))$$

Ora $\bigcap_{j=1}^{n} E_j^c = (\bigcup_{j=1}^{n} E_j)^c \supset (\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j)^c = S$ quindi per monotonia della misura $\varphi(A \cap (\bigcup_{j=1}^{n} E_j)^c) \geq \varphi(A \cap S^c)$, e otteniamo il limite:

$$\lim_{n \to +\infty} \varphi(A) \geq \sum_{j=1}^{\infty} \varphi(A \cap E_j) + \varphi(A \cap S^c) \tag{1.7}$$

Dimostriamo ora la prima parte sfruttando quanto appena dimostrato. Sia dunque $S \in \mathcal{M}_\varphi$ allora

$$\varphi(A \cap S) = \varphi(A \cap (\bigcup_j E_j)) = \varphi(\bigcup_j (A \cap E_j)) \leq \sum_j \varphi(A \cap E_j)$$

per σ-subadditivitá. Allora

$$\varphi(A \cap S) + \varphi(A \cap S^c) \leq \sum_j \varphi(A \cap E_j) + \varphi(A \cap S^c) \leq \varphi(A)$$

dove l'ultima disuguaglianza vale per quanto dimostrato sopra del punto 4).

5. Per la seconda parte del punto 4) con $A = S$ otteniamo:

$$\varphi(\bigcup_j E_j) \geq \sum_j \varphi(E_j)$$

in quanto $E_j \in S$ e $S \cap S^c = \emptyset$. L'altro verso della disuguaglianza lo otteniamo per σ-subadditivitá.

$\square$

Quello che facciamo ora é togliere un vincolo dal punto 4) del teorema precedente, ovvero il fatto che gli E_j nella famiglia $\{E_j\}_j \in \mathcal{M}_\varphi$ non siano per forza 2-2 disgiunti. Quindi rienunciamo il punto 4).

Osservazione 1.13. Sia $\{E_j\}_j \in \mathcal{M}_\varphi$ numerabile, allora $\bigcup_j E_j \in \mathcal{M}_\varphi$.

Dimostrazione. Introduciamo il seguente tipo di insieme:

- $E_1^* = E_1$
- $E_n^* = E_n \setminus \bigcup_{j=1}^{n-1} E_j = E_n \cap (\bigcup_{j=1}^{n-1} E_j)^c$ in quanto togliere un insieme equivale a intersecare con il complementare.

Ora notiamo subito che $E_n \cap (\bigcup_{j=1}^{n-1} E_j)^c \in \mathcal{M}_\varphi$ per i punti 1) e 3) del teorema precedente, quindi anche $E_n^* \in \mathcal{M}_\varphi$. Inoltre abbiamo che $\bigcup_{j=1}^{n} E_j^* = \bigcup_{j=1}^{n} E_j \ \forall n$ per il punto 4) del teorema precedente, poiché gli E_j^* sono 2-2 disgiunti. Allora $\bigcup_j E_j \in \mathcal{M}_\varphi$. $\square$

1.2 σ-algebra

Cerchiamo di identificare la struttura della famiglia $\mathcal{M}_\varphi$. Introduciamo quindi la seguente nozione:

Definizione 1.14. Una famiglia non vuota $\Sigma \subset 2^{\mathcal{X}}$ é una σ-algebra se ha le seguenti proprietá:

1. $E \in \Sigma \Rightarrow E^c \in \Sigma$ (c-chiusura)

2. $\{E\}_j \subset \Sigma$ famiglia numerabile allora $\bigcup_j E_j \in \Sigma$

Proposizione 1.15. Se $\varphi : 2^{\mathcal{X}} \longrightarrow [0, +\infty]$ é misura esterna allora $\mathcal{M}_\varphi$ é una σ-algebra.

Dimostrazione. Direttamente dal teorema precedente (punti 1 e 4 principalmente). □

Osservazione 1.16. Se Σ é una σ-algebra in $\mathcal{X}$ allora:

1. $\emptyset, \mathcal{X} \in \Sigma$ poiché siccome Σ é non-vuota allora $\exists E \in \Sigma$ quindi $E^c \in \Sigma$ e $E \cup E^c = \mathcal{X} \in \Sigma$ inoltre $E \cap E^c = [(E \cap E^c)^c]^c = [E^c \cup E]^c = \mathcal{X}^c = \emptyset \in \Sigma$.

2. Σ é chiusa rispetto all'intersezione numerabile, infatti sia $\{E_j\}_j \subset \Sigma$ una famiglia numerabile di elementi di Σ allora $\bigcap_j E_j = [(\bigcap_j E_j)^c]^c = [(\bigcup_j E_j^c)]^c$. Ora $E_j^c \in \Sigma$ per definizione, $\bigcup_j E_j^c \in \Sigma$ ancora per definizione, poi Σ é c-chiusa. La tesi é dimostrata.

Enunciamo il teorema di continuitá sull' l'insieme di misurabili secondo una misura esterna.

Teorema 1.17. *Sia $\varphi : 2^{\mathcal{X}} \to [0, +\infty]$ una misura esterna. Allora*

1. *(Continuitá dal basso) Sia $\{E_j\}_j \subset \mathcal{M}_\varphi$ una famiglia numerabkile e crescente (i.e. $E_j \subset E_{j+1}$), allora:*

$$\varphi(\bigcup_j E_j) = \lim_j \varphi(E_j)$$

2. *(Continuitá dall'alto) Sia ora $\{E_j\}_j \subset \mathcal{M}_\varphi$ una famiglia numerabile e decrescente (i.e. $E_{j+1} \subset E_j$) con $\varphi(E_1) < +\infty$, allora:*

$$\varphi(\bigcap_j E_j) = \lim_j \varphi(E_j)$$

Dimostrazione. Notiamo innanzitutto che il limite nei due punti esiste in entrambi i casi in quanto stiamo trattando delle successioni monotone.

1. Definiamo $E_j^* = E_j \setminus E_{j-1}$ con $E_0^* = \emptyset$. Notiamo subito che $E_j^* \in \mathcal{M}_\varphi$ in quanto $E_j^* = E_j \cap E_{j-1}^c$ ed entrambi i termini sono misurabili per ipotesi. Inoltre $\bigcup_j^n E_j^* = E_n = \bigcup_j^n E_j$, quindi generalizzando all'unione numerabile $\bigcup_j E_j^* = \bigcup_j E_j$. Ora, é facile capire che gli E_j^* sono 2-2 disgiunti quindi vale la σ-additivitá (NB: non σ-SUBadditivitá), ovvero:

$$\varphi(\bigcup_j E_j) = \varphi(\bigcup_j E_j^*) = \sum_j \varphi(E_j^*) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{j=1}^n \varphi(E_j) =$$

$$\lim_{n\to+\infty} \varphi(\bigcup_{j=1}^n E_j) = \lim_{n\to+\infty} \varphi(E_n)$$

   Dove la seconda uguaglianza vale per il punto 5 del teorema 1.12.

2. Notiamo che E_1 puó essere illimitato avendo bensí area finita. Poniamo $F_j = E_1 \setminus E_j$ e notiamo che é misurabile per un argomentazione simile a quella sviluppata per gli E_j^* nel punto 1. Ora gli F_j formano una successione crescente al crescere di j quindi per il punto 1 abbiamo che $\varphi(\bigcup_j F_j) = \lim_j \varphi(F_j)$ con

$$\bigcup_j F_j = \bigcup_j E_1 \cap E_j^c = E_1 \cap \bigcup_j E_j^c = E_1 \cap (\bigcup_j E_j)^c = E_1 \setminus \bigcap_j E_j$$

   Quinidi passando alla misura otteniamo, usando il buon spezzamento indotto da $\bigcap_j E_j$:

$$\varphi(E_1) = \varphi(E_1 \cap \bigcap_j E_j) + \varphi(E_1 \cap (\bigcap_j E_j)^c).$$

   L'ultimo termine é proprio $\varphi(\bigcup_j F_j)$ quindi ricaviamo:

$$\varphi(\bigcup_j F_j) = \varphi(E_1) - \varphi(E_1 \cap \bigcap_j E_j) = \varphi(E_1) - \varphi(\bigcap_j E_j) \qquad (1.8)$$

   (L'ultima uguaglianza vale in quanto l'intersezione di tutti gli E_j é contenuta in E_1.) D'altro canto $F_j = E_1 \cap E_j^c$ quindi possiamo usare il buon spezzamento indotto da un singolo E_j come segue:

$$\varphi(E_1) = \varphi(E_1 \cap E_j) + \varphi(E_1 \cap E_j^c)$$

Notiamo che il secondo termine é $\varphi(E_j)$ mentre il terzo é proprio $\varphi(F_j)$. Quindi scriviamo:

$$\varphi(F_j) = \varphi(E_1) - \varphi(E_j) \tag{1.9}$$

Quindi unendo le equazioni 1.8 e 1.9 otteniamo:

$$\varphi(\bigcup_j F_j) = \varphi(E_1) - \varphi(\bigcap_j E_j) = \lim_j [\varphi(E_1) - \varphi(E_j)] = \varphi(E_1) - \lim_j \varphi(E_j)$$

Abbiamo quindi ottenuto la tesi:

$$\varphi(\bigcap_j E_j) = \lim_j \varphi(E_j)$$

□

Osservazione 1.18. Nel punto 2 del teorema precedente se non assumiamo che $\varphi(E_1) < +\infty$ il teorema fallisce.

Facciamo un esempio:

Esempio 1.19. Consideriamo l'insieme $\mathcal{X} = \mathbb{N}$ e la misura $\varphi = |\cdot|$, consideriamo anche le semirette $E_j = \{j, j+1, j+2, ...\}$. Vediamo subito che $E_{j+1} \subset E_j$ quindi abbiamo una famiglia numerabile e decrescente. Ora $\mathcal{M}_\varphi = 2^{\mathcal{X}}$ quindi ogni $E_j \in \mathcal{M}_\varphi$. Ora $\varphi(\bigcap_j E_j) = 0$ mentre $\varphi(E_j) = +\infty \ \forall j$. Questo smentisce il teorema.

1.3 Misura Metrica

Definizione 1.20. Una misura esterna φ su uno spazio metrico $(\mathcal{X}, d)$ é detta di Caratheodory o metrica se $\forall A, B \in 2^{\mathcal{X}}$ tali che
$d(A, B) = \inf\{d(a, b) | a \in A, b \in B\} > 0$ vale:

$$\varphi(A \cup B) = \varphi(A) + \varphi(B) \tag{1.10}$$

In altre parole una misura si dice metrica se é additiva su insiemi a distanza positiva (disgiunti). Il teorema seguente dimostra che in uno spazio metrico con una misura metrica tutti i chiusi sono misurabili (i.e. $\mathcal{F} \subset \mathcal{M}_\varphi$) Anticipiamo inoltre che questo teorema comporta il fatto che una misura metrica é Boreliana in quanto un Boreliano, essendo dato da unione o intersezione numerabili di chiusi (o aperti), é misurabile.

Teorema 1.21. *(Caratheodory) Sia $(\mathcal{X}, d)$ uno spazio metrico e $\varphi : 2^{\mathcal{X}} \to [0, +\infty]$ una misura metrica, allora ogni chiuso in $\mathcal{X}$ é misurabile.*

Dimostrazione. Dobbiamo verificare che i chiusi inducono il buon spezzamento della misura su qualsiasi insieme. Sia dunque $C \in \mathcal{C}$ e $A \subset \mathcal{X}$ un insieme qualsiasi. Come sappiamo ci basta dimostrare che $\varphi(A) \geq \varphi((A \cap C) \cup (A \cap C^c))$. La tesi é banale se $\varphi(A) = +\infty$ quindi supponiamo che A abbia misura finita. Introduciamo il seguente tipo di insieme: per $h > 0$ poniamo $C_h = \{x \in \mathcal{X} | d(x, C) \leq \frac{1}{h}\}$ (geometricamente $C_h \setminus C$ é un' intercapedine di larghezza $\frac{1}{h}$ attorno a C). Notiamo che anche C_h risulta chiuso in quanto nella sua definizione abbiamo l'uguaglianza.
C_h é dunque composto cosí:

$$C_h = \{x \in \mathcal{X} | d(x, C) = 0\} \cup \left\{ x \in \mathcal{X} | d(x, C) \in (0, \frac{1}{h}] \right\} \tag{1.11}$$

La prima parte dell'unione in 1.11 é chiaramente $\overline{C} = C$. Mentre nella seconda parte possiamo scrivere l'intervallo $(0, \frac{1}{h}] = \bigcup_{j \geq h} (\frac{1}{j+1}, \frac{1}{j}]$. Suddividiamo adesso $C_h \setminus C$ in ulteriori intercapedini del tipo:

$$S_j = \left\{ x \in \mathcal{X} | d(x, C) \in (\frac{1}{j+1}, \frac{1}{j}] \right\}$$

Ovvero scriviamo:

$$C_h = C \cup (\bigcup_{j \geq h} S_j)$$

Quindi ricaviamo C e dunque C^c:

$$C = C_h \setminus \bigcup_{j \geq h} S_j = C_h \cap (\bigcup_{j \geq h} S_j)^c$$

$$C^c = C_h^c \cup (\bigcup_{j \geq h} S_j)$$

Abbiamo dunque tutti gli strumenti per provare il buon spezzamento indotto da C. Prediamo dunque un $A \subset \mathcal{X}$ e vediamo che $(A \cap C) \cap (A \cap C_h^c) = \emptyset$ quindi per monotonia e meticitá della misura:

$$\varphi(A) \geq \varphi((A \cap C) \cup (A \cap C_h^c)) = \varphi((A \cap C)) + \varphi((A \cap C_h^c)) \tag{1.12}$$

Vogliamo dimostrare che $\lim_{h \to +\infty} \varphi(A \cap C_h^c) = \varphi(A \cap C^c)$ cosi possiamo passare al limite nell'equazione 1.12. Quindi abbiamo per monotonia ($C_h^c \subset C^c$) che:

$$\varphi(A \cap C_h^c) \leq \varphi(A \cap C^c)$$

Come abbiamo visto sopra la parte destra della disequazione diventa:

$$\varphi(A \cap C^c) = \varphi((A \cap C_h^c) \cup (A \cap \bigcup_{j \geq h} S_j)) \leq \varphi(A \cap C_h^c) + \sum_{j \geq h} \varphi(A \cap S_j)$$

Quello che vogliamo dimostrare che $\sum_{j\geq h} \varphi(A\cap S_j)$ converge e quindi $\lim_{h\to+\infty} \sum_{j\geq h} \varphi(A\cap S_j)$ va a 0 quindi vale l'uguaglianza nella disequazione sopra. Dunque sia $N > 0$ qualsiasi e:

$$\sum_{j=1}^{N} \varphi(A\cap S_j) = \sum_{j=1,j\ dispari}^{N} \varphi(A\cap S_j) + \sum_{j=2,j\ pari}^{N} \varphi(A\cap S_j)$$

Siccome la distanza tra due intercapedini indicizzate pari o tra due dispari la distanza é positiva, quindi per metricitá scrivo:

$$\sum_{j=1}^{N} \varphi(A\cap S_j) = \varphi(\bigcup_{j=1,j\ dispari}^{N} A\cap S_j) + \varphi(\bigcup_{j=2,j\ pari}^{N} A\cap S_j)$$

Ora entrambi i termini sulla destra sono sottoinsiemi di A quindi per monotonia:

$$\varphi(\bigcup_{j=1,j\ dispari}^{N} A\cap S_j) + \varphi(\bigcup_{j=2,j\ pari}^{N} A\cap S_j) \leq 2\varphi(A) < +\infty \quad \forall\ N$$

E allora:

$$\sum_{j=1}^{N} \varphi(A\cap S_j) \leq 2\varphi(A) < +\infty$$

Abbiamo dunque dimostrato che tale sommatoria converge quindi l'intercapedine si assottiglia fino a sparire per $h \to +\infty$ dunque il buon spezzamento segue e si ha la tesi. □

Osservazione 1.22. Vale il reciproco del teorema 1.21 (Caratheodory) ovvero:
Sia $(\mathcal{X}, d)$ uno spazio metrico e $\varphi : 2^{\mathcal{X}} \to [0, +\infty]$ una misura esterna tale che tutti i chiusi sono misurabili. Allora φ é metrica.

Proposizione 1.23. Sia $I \subset 2^{\mathcal{X}}$ e indichiamo con A_I la famiglia delle σ-algebre Σ su $\mathcal{X}$ tali che $I \subset \Sigma$. Allora $\Sigma_I = \bigcap_{\Sigma\in A_I} \Sigma$ é una σ-algebra su $\mathcal{X}$ che contiene I, essa é detta la σ-algebra generata da I.

Dimostrazione. Dimostriamo che le due proprietá di σ-algebra sono soddisfatte.

1. Sia $E \in \Sigma_I$ allora $E \in \bigcap_{\Sigma\in A_I} \Sigma$ dunque $\exists\Sigma$ tale che $E \in \Sigma$, quindi siccome Σ é una σ-algebra $E^c \in \Sigma$. Quindi torniamo indietro $E^c \in \bigcap_{\Sigma\in A_I} \Sigma = \Sigma_I$

2. Sia $\{E_j\}_j \subset \Sigma_I$ una famiglia numerabile allora $\forall j \; E_j \in \Sigma_I$ allora $E_j \in \Sigma \; \forall \Sigma \in A_I$ quindi $\bigcup_j E_j \in \Sigma \; \forall \Sigma \in A_I$ perció $\bigcup_j E_j \in \bigcap_{\Sigma \in A_I} \Sigma = \Sigma_I$

□

Osservazione 1.24. Se I é una σ-algebra allora $\Sigma_I = I$

Dimostrazione. $'' \supset ''$ banale per definizione anche se I non é una σ-algebra.

$'' \subset ''$ poiché I é una σ-algebra allora $I \in A_I$ quindi é ovvio che $\bigcap_{\Sigma \in A_I} \Sigma \subset I$

□

Andremo ora ad analizzare le σ-algebre generate da aperti, chiusi e compatti in uno spazio topologico. Idichiamo con $\mathcal{K}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ rispettivamente i compatti, i chiusi e gli aperti.

Proposizione 1.25. Sia ora $\mathcal{X}$ uno spazio topologico. Allora:

1. $\Sigma_{\mathcal{F}} = \Sigma_{\mathcal{G}}$

2. Se $\mathcal{X}$ é di Hausdorff allora $\Sigma_{\mathcal{K}} \subset \Sigma_{\mathcal{F}}$

3. Se $(\mathcal{X}, d)$ é uno spazio metrico separabile (i.e. esiste un sottoinsieme denso e numerabile) allora $\Sigma_{\mathcal{K}} = \Sigma_{\mathcal{F}}$

Dimostrazione. 1. Osserviamo che $A_{\mathcal{F}} = A_{\mathcal{G}}$ in quanto, siccome le σ-algebre sono c-chiuse e il complementare di un aperto é chiuso, una sigma algebra che contiene l'insieme degli aperti contiene a sua volta quello dei chiusi. Dunque:

$$\Sigma_{\mathcal{F}} = \bigcap_{\Sigma \in A_{\mathcal{F}}} \Sigma = \bigcap_{\Sigma \in A_{\mathcal{G}}} \Sigma = \Sigma_{\mathcal{G}}$$

2. Se $\mathcal{X}$ é di Hausdorff allora i compatti sono chiusi (i.e. $\mathcal{K} \subset \mathcal{F}$), questo significa che $A_{\mathcal{F}} \subset A_{\mathcal{K}}$ dunque:

$$\Sigma_{\mathcal{K}} = \bigcap_{\Sigma \in A_{\mathcal{K}}} \Sigma \subset \bigcap_{\Sigma \in A_{\mathcal{F}}} \Sigma = \Sigma_{\mathcal{F}}$$

Abbiamo $\subset$ sopra in quanto $A_{\mathcal{K}}$ é piú numerosa di $A_{\mathcal{F}}$ e la contiene. Quindi abbiamo piú termini nella famiglia delle σ-algebre che contengono i compatti su cui fare l'intersezione.

3. Per questo punto ci limitiamo al caso in cui $\mathcal{X} = \mathbb{R}^n$ che sappiamo essere la chiusura dei razionali (i.e. $\overline{\mathbb{Q}}^n = \mathbb{R}^n$) i quali formano un insieme denso e numerabile in $\mathbb{R}$. Quello che dobbiamo fare é dimostrare

che ogni aperto é unione numerabile di compatti, ovvero per il punto 1:

$$\Sigma_{\mathcal{F}} = \Sigma_{\mathcal{G}} \subset \Sigma_{\mathcal{K}}$$

infatti, se questo vale, $\mathcal{G} \in \Sigma_{\mathcal{K}} \Rightarrow \Sigma_{\mathcal{G}} = \Sigma_K$ per il punto 2. Dimostriamo che un aperto é unione di compatti. Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un aperto e $B_A = \left\{\overline{B_q(r)} | q \in \mathbb{Q}^n, r \in \mathbb{Q}, r > 0, \overline{B_q(r)} \subset A\right\}$ l'insieme, numerabile, delle bolle chiuse di centro q e raggio r contenuti in A. Notiamo che $\forall b \in B_A, b \in \mathcal{K}$. Diciamo che:

$$\bigcup_{k \in B_A} k = A$$

Se questo é vero la tesi segue, quindi dimostriamo entrambe le inclusioni:

$'' \subset''$ Ovvia in quanto $k \subset A \forall k \in B_A$

$'' \supset''$ Sia $a \in A \Rightarrow \exists r \in \mathbb{Q}, r > 0$ tale che $B_r(a) \subset A$. Poiché $\mathbb{Q}$ é denso in $\mathbb{R}$ allora $\exists q \in \mathbb{Q}$ tale che $q \in B_{\frac{r}{2}}(a)$ (notiamo che questa bolla é aperta). Quindi si ha che $a \in \overline{B_{\frac{r}{2}}(q)}$ (il quale é compatto) siccome $|a - q| < \frac{r}{2}$. Inoltre:

$$\overline{B_{\frac{r}{2}}(q)} \subset B_r(a) \subset A$$

e ovviamente $\overline{B_{\frac{r}{2}}(q)} \in B_A$ ed é compatto. Quindi abbiamo dimostrato che:

$$a \in \bigcup_{k \in B_A} k \ \forall a \in A.$$

Ovvero $A \subset \bigcup_{k \in B_A} k$.

□

Osservazione 1.26. Senza l'ipotesi di separabilitá nel punto 3 potrebbe capitare che $\Sigma_{\mathcal{K}} \subset \Sigma_{\mathcal{G}} = \Sigma_{\mathcal{F}}$ come per esempio in $\mathcal{X} = [0, 1]$ munito della topologia discreta dove $\mathcal{K}$ coincide con la famiglia degli insiemi finiti.

Definizione 1.27. Sia $\mathcal{X}$ uno spazio topologico e $\varphi : 2^{\mathcal{X}} \to [0, +\infty]$ una misura esterna, allora:

1. la σ-algebra $\Sigma_{\mathcal{F}} = \Sigma_{\mathcal{G}}$ é indiata con $\mathscr{B}(\mathcal{X})$ e i suoi elementi sono detti insiemi Boreliani di $\mathcal{X}$.

2. φ é detta funzione Boreliana se i Boreliani sono misurabili (i.e. $\mathscr{B}(\mathcal{X}) \subset \mathcal{M}_{\varphi}$).

3. φ é Borel-regolare se é boreliana e se $\forall A \subset \mathcal{X}$ esiste $B \in \mathscr{B}(\mathcal{X})$ tale che $A \subset B$ e $\varphi(B) = \varphi(A)$. Dal punto di vista geometrico questo significa che una misura é Borel-regolare se ogni sottoinsieme di $\mathcal{X}$ é approssimabile dall'esterno con un Boreliano che ha la stessa misura di tale sottoinsieme.

4. φ si dice di Radon se é Borel-regolare e se $\varphi(k) < +\infty \ \forall k \in \mathcal{K}$. Ovvero una misura si dice di Radon se é finita sui compatti. Anticipiamo che la misura di Lebesgue é di Radon, invece non lo é la misura di Hausdorff

Come promesso il risultato sulle misure metriche:

Corollario 1.28. Ogni misura esterna di Caratheodory (i.e. metrica) é Boreliana.

Dimostrazione. Abbiamo dimostrato nel teorema 1.21 che tutti i chiusi sono misurabili secondo una misura metrica i.e.:

$$F \in \mathcal{M}_\varphi \ \forall F \in \mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{M}_\varphi \in A_\mathcal{F}$$

Quindi siccome $\mathscr{B}(\mathcal{X}) = \Sigma_\mathcal{F} = \bigcap\limits_{\Sigma \in A_\mathcal{F}} \Sigma$ i boreliani sono contenuti in tutte le σ-algebre dei chiusi quindi anche $\mathscr{B}(\mathcal{X}) \subset \mathcal{M}_\varphi$. □

1.4 Teoremi di Approssimazione

Lemma 1.29. Sia $\mathcal{X}$ uno spazio topologico e consideriamo $D \subset 2^\mathcal{X}$ tale che:

1. $\mathcal{F}, \mathcal{G} \subset D$

2. D é chiuso rispetto $\bigcup\limits_{numer}$ e $\bigcap\limits_{numer}$

Allora $\mathscr{B}(\mathcal{X}) \subset D$.

Dimostrazione. Definiamo l' insieme $H = \{E \subset \mathcal{X} | E \subset D, E^c \subset D\}$ (quindi notiamo subito che $H \subset D$) e proviamo che H é una σ-algebra. Ovviamente H é c-chiuso per costruzione. Mostriamo la chiusura rispetto all'unione numerabile. Sia $\{E_j\}_j$ una famiglia numerabile in H mostriamo che $\bigcup\limits_j E_j \in H$. Siccome $E_j \in H \ \forall j$ abbiamo che $E_j \in D \ \forall j$ quindi per la seconda ipotesi del lemma $\bigcup\limits_j E_j \in D$. Sappiamo che possiamo scrivere $(\bigcup\limits_j E_j)^c = \bigcap\limits_j E_j^c$ il quale sta in D ancora per la seconda ipotesi e quindi in H per costruzione. Quindi H é una σ-algebra. Ora sfruttando la prima ipotesi otteniamo che $\mathcal{G} \subset H$. Allora $H \in A_\mathcal{G}$ il che significa $\mathscr{B}(\mathcal{X}) = \Sigma_\mathcal{G} \subset H \subset D$ □

Proviamo un teorema di approssimazione dei Boreliani dall'esterno con un aperto e dall'interno con un chiuso. Quello che vogliamo dimostrare é che dato un Boreliano esiste un chiuso che lo approssima dall'interno e un aperto dall'esterno con scarto arbitrariamente piccolo.

Teorema 1.30. *Sia φ una misura esterna Boreliana in uno spazio metrico $(\mathcal{X}, d)$ e sia $B \in \mathscr{B}(\mathcal{X})$ Allora:*

1. *Se $\varphi(B) < +\infty$ allora $\forall \varepsilon > 0\ \exists F \in \mathcal{F}$ tale che $F_\varepsilon \subset B$ e $\varphi(B \setminus F_\varepsilon) < \varepsilon$*
2. *Se $B \subset \bigcup\limits_{j}^{+\infty} V_j, V_j \in \mathcal{G}\ \forall j$ e $\varphi(V_j) < +\infty$ allora $\forall \varepsilon > 0\ \exists G_\varepsilon \in \mathcal{G}$ tale che $B \subset G_\varepsilon$ e $\varphi(G_\varepsilon \setminus B) < \varepsilon$*

Dimostrazione. 1. Definiamo $\mu := \varphi_{|B} : 2^{\mathcal{X}} \to [0, +\infty]$ dove $\mu(A) = \varphi(B \cap A)$ ed é finita per monotonia, infatti $\mu(A) \leq \varphi(B) < +\infty$. Verifichiamo che μ é una misura esterna, ovvero che valgono i 3 punti della definizione 1.1:

(a) $\mu(\emptyset) = \varphi(B \cap \emptyset) = \varphi(\emptyset) = 0$

(b) Sia $E \subset F \subset \mathcal{X}$ allora per monotonia di φ otteniamo $\mu(E) = \varphi(E \cap B) \leq \varphi(F \cap B) = \mu(F)$

(c) Sia $\{E_j\}_j$ una famiglia numerabile in $\mathcal{X}$ allora per σ-subadditivitá di φ abbiamo $\mu(\bigcup\limits_j E_j) = \varphi(B \cap \bigcup\limits_j E_j) = \varphi(\bigcup\limits_j B \cap E_j) \leq \sum\limits_j \varphi(B \cap E_j) = \sum\limits_j \mu(E_j)$

Ora verifichiamo anche che $\mathcal{M}_\varphi \subset \mathcal{M}_\mu$. Sia $E \in \mathcal{M}_\varphi$ e proviamo il buon spezzamento indotto da E su ogni $A \subset \mathcal{X}$:

$$\mu(A \cap E) + \mu(A \cap E^c) = \varphi(B \cap (A \cap E)) + \varphi(B \cap (A \cap E^c)) =$$

$$= \varphi((B \cap A) \cap E) + \varphi((B \cap A) \cap E^c) = \varphi(B \cap A) = \mu(A)$$

Abbiamo quindi che $E \in \mathcal{M}_\mu$ e in particolare anche i Boreliani $\mathscr{B}(\mathcal{X}) \subset \mathcal{M}_\varphi \subset \mathcal{M}_\mu$.
Ora costruiremo una collezione di tutti gli insiemi approssimabili dall'interno con dei chiusi e poi dimostreremo che i Boreliani appartengono a tale insieme semplicemente applicando il lemma 1.29. Definiamo ora tale insieme:

$$D := \{E \in \mathcal{M}_\mu | \forall \varepsilon > 0\ \exists F_\varepsilon \in \mathcal{F}, F_\varepsilon \subset E, \mu(E \setminus F_\varepsilon) < \varepsilon\}$$

Ora dimostriamo che il lemma é applicabile a D verificando i due punti:

(a) Mostriamo che chiusi e aperti sono in D:

$''\mathcal{F} \subset D''$ Sia $F \in \mathcal{F}$ allora $F \in \mathscr{B}(\mathcal{X}) \subset \mathcal{M}_\varphi \subset \mathcal{M}_\mu$. Ora sia $\varepsilon > 0$ e in questo caso possiamo considerare $F_\varepsilon = F$ quindi valgono le due condizioni di appartenenza a D in quanto:

$$F_\varepsilon \subset F$$

e anche

$$\mu(F \setminus F_\varepsilon) = \mu(\emptyset) = 0 < \varepsilon$$

Quindi $F \in D$ per ogni $F \in \mathcal{F}$.

$''\mathcal{G} \subset D''$ Consideriamo $G \in \mathcal{G}$ e definiamo il tipo di insieme:

$$F_h := \left\{ x \in \mathcal{X} | d(x, G^c) \geq \frac{1}{h} \right\}$$

Dal punto di vista geometrico abbiamo appena definito un insieme, che dato un h, contiene tutti i punti dentro G che distano $\frac{1}{h}$ dall' esterno di G. In altre parlole, F_h é un insieme interno a G che lascia un intercapedine di spessore $\frac{1}{h}$ tra esso e G^c. Grazie all'uguaglianza nella condizione di appartenenza, notiamo anche che gli $F_h \in \mathcal{F}$ per ogni h. Abbiamo poi che $F_h \subset F_{h+1}$. Dimostriamo che $\bigcup\limits_h F_h = G$:

- $'' \subset''$ inclusione banale
- $'' \supset''$ Sia $x \in G$ allora $\exists r > 0$ tale che la bolla $B_r(x) \subset G$ allora $d(x, G^c) \geq r \geq \frac{1}{h}$ per un qualche h sufficientemente grande. Quindi $x \in F_h \Rightarrow x \in \bigcup\limits_h F_h$ per ogni x. Dunque $G \subset \bigcup\limits_h F_h$.

Abbiamo ottenuto é che:

$$\{F_h\}_h \subset \mathcal{F} \subset \mathscr{B}(\mathcal{X}) \subset \mathcal{M}_\varphi \subset \mathscr{M}_\mu$$

Quindi per la continuitá dal basso (Teorema 1.17 punto 1) otteniamo che $\mu(G) = \lim\limits_{h \to +\infty} \mu(F_h)$. Dunque prendendo $\varepsilon > 0$ $\exists h_\varepsilon$ tale che:

$$0 \leq \mu(G) - \mu(F_{h_\varepsilon}) \leq \varepsilon \tag{1.13}$$

Ora i chiusi sono misurabili quindi possiamo scrivere $\mu(g) = \mu(g \cap F_{h_\varepsilon}) + \mu(g \setminus F_{h_\varepsilon})$ (buon spezzamento), quindi l' equazione 1.13 diventa :

$$0 \leq \mu(G \setminus F_{h_\varepsilon}) \leq \varepsilon$$

Quindi $G \in D$.

(b) Verifichiamo ora la seconda condizione del lemma ovvero che D é $\bigcup\limits_{numer}$ -chiuso (la dimostrazione sará analoga anche per la $\bigcap\limits_{numer}$ -chiusura, quindi mostriamo solo questo). Quindi sia $\{E_j\}_j$ una famiglia numerabile in D dobbiamo controllare che le condizioni di appartenenza a D siano rispettate. Innanzitutto vediamo che per ogni $j, E_j \in \mathcal{M}_\mu$, siccome $\mathcal{M}_\mu$ é una σ-algebra, $\bigcup\limits_j E_j \in \mathcal{M}_\mu$.

Controlliamo quindi le proprietá di approssimazione interna.
Sia $\varepsilon > 0$, poiché $E_j \in D\ \forall j$ abbiamo che $\exists F_j \in \mathcal{F}$ tale che $F_j \subset E_j$ e $\mu(E_j \setminus F_j) \leq \frac{\varepsilon}{2^j}$ per ogni j.

Poniamo $A = \bigcup\limits_j F_j$ e osserviamo che $C_N := \bigcup\limits_j^N F_j \in \mathcal{F}$ inoltre $C_N \subset C_{N+1}$ e $\bigcup\limits_N C_N = \bigcup\limits_j F_j = A$. Quindi C_N tende ad A con il crescere di N verso ∞ mentre simmetricamente $C_N^c \to A^c$. D'altra parte abbiamo anche che $A = \bigcup\limits_j F_j \subset \bigcup\limits_j E_j$ quindi:

$$(\bigcup_j E_j) \setminus A = (\bigcup_j E_j) \cap A^c = \bigcup_j (E_j \cap A^c) \subset \bigcup_j (E_j \cap F_j^c)$$

L'ultima inclusione deriva dal fatto che $\forall j A = \bigcup\limits_j F_j \supset F_j$ e quindi $A^c \subset F_j^c$. Quindi ne deriviamo che:

$$\mu((\bigcup_j E_j) \setminus A) \leq \mu(\bigcup_j (E_j \setminus F_j)) \leq \sum_j \mu(E_j \setminus F_j) < \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon}{2^j} = \varepsilon \tag{1.14}$$

Dove la prima disuguaglianza dell'equazione 1.14 é data per monotonia mentre la seconda per σ-subadditivitá di μ. Ora dal fatto che C_N^c decresce verso A^c al crescere di N otteniamo che $(\bigcup\limits_j E_j) \cap C_N^c$ decresce a $(\bigcup\limits_j E_j) \cap A^c = (\bigcup\limits_j E_j) \setminus A$. Per la continuitá dall' alto (Teorema 1.17 punto 2):

$$\varepsilon > \mu((\bigcup_j E_j) \setminus A) = \lim_{N \to +\infty} \mu((\bigcup_j E_j) \setminus C_N)$$

Quindi esiste N_ε tale che $\mu((\bigcup\limits_j E_j) \setminus C_{N_\varepsilon}) < \varepsilon$ allora pongo $F_\varepsilon = C_{N_\varepsilon} \subset \mathcal{F}$ e abbiamo l'approssimazione:

$$F_\varepsilon = C_{N_\varepsilon} \subset A \subset \bigcup_j E_j$$

e

$$\mu((\bigcup_j E_j) \setminus F_\varepsilon) < \varepsilon$$

Quindi $\bigcup_j E_j \in D$ come volevamo.

Applichiamo finalmente il Lemma 1.29 a D e otteniamo che $\mathscr{B}(\mathcal{X}) \subset D$ e in particolare $B \in D$ quindi $\forall \varepsilon > 0\ \exists F_\varepsilon \in \mathcal{F}$ tale che:

$$F_\varepsilon \subset B$$

e

$$\mu(B \setminus F_\varepsilon) < \varepsilon$$

quest'ultima disequazione messa in termini di φ diventa

$$\varphi(B \cap (B \setminus F_\varepsilon)) = \varphi(B \setminus F_\varepsilon).$$

2. Notiamo prima di tutto che $\forall j\ V_j \setminus B = V_j \cap B^c \in \mathscr{B}(\mathcal{X})$, in quanto V_j é aperto quindi ci risulta ancora un intersezione numerabile di aperti, e che per monotonia di φ abbiamo $\varphi(V_j \setminus B) \leq \varphi(V_j) < +\infty$.
Ora sia $\varepsilon > 0$ per il punto 1 abbiamo che $\forall j\ \exists F_j \in \mathcal{F}$ tale che $F_j \subset V_j \cap B^c$ e $\varphi((V_j \setminus B) \setminus F_j) < \frac{\varepsilon}{2^j}$. Quindi per la prima proprietá di F_j otteniamo, passando al complementare, $F_j^c \supset (V_j \setminus B)^c = V_j^c \cup B$. Definiamo l'insieme $G = \bigcup_j (V_j \setminus F_j) = \bigcup_j (V_j \cap F_j^c) \in \mathcal{G}$ dove ogni argomento $V_j \cap F_j^c$ é un aperto (poiché F_j^c é aperto in quanto F_j é chiuso). Facciamo una breve descrizione geometrica di ció che abbiamo costruito: abbiamo preso un Boreliano B e un aperto V_j appartenente a un ricoprimento di B. Abbiamo sottratto B da V_j e abbiamo visto che il pezzo che avanza é ancora un Boreliano quindi puó essere approssimato dall' interno da un chiuso grazie al punto 1. Abbiamo poi costruito G unendo gli insiemi ottenuti togliendo a tutti gli aperti costruiti come appena detto i chiusi approssimanti, i.e. F_j da V_j per ogni j.
Vogliamo dimostrare che $G \supset B$ perció

$$G \supset G \cap B = B \cap \left[\bigcup_j (V_j \cap F_j^c)\right] \supset B \cap \left[\bigcup_j \left(V_j \cap (V_j^c \cap B)\right)\right] \tag{1.15}$$

Vediamo che

$$V_j \cap (V_j^c \cap B) = (V_j \cap V_j^c) \cup (V_j \cap B) = \emptyset \cup (V_j \cap B) = V_j \cap B$$

quindi sostituendo in 1.15 quanto osservato:

$$B \cap \left[\bigcup_j (V_j \cap B)\right] = \bigcup_j (V_j \cap B) = (\bigcup_j V_j) \cap B = B.$$

L'ultima uguaglianza é data dal fatto che l'unione dei V_j é un ricoprimento aperto di B. Come volevasi dimostrare G é un soprainsieme di B.
Passiamo ora alla misura ovvero controlliamo che valga $\varphi(G \setminus B)$ $\forall \varepsilon$:

$$\varphi(G \setminus B) = \varphi(G \cap B^c) = \varphi([\bigcup_j (V_j \cap F_j^c)] \cap B) =$$

$$= \varphi(\bigcup_j (V_j \cap F_j^c \cap B^c)) \le \sum_j \varphi((V_j \setminus F_j) \setminus B) < \tag{1.16}$$

$$< \sum_j \frac{\varepsilon}{2^j} = \varepsilon$$

Dove la disuguaglianza nell' equazione 1.16 vale per σ-subadditivitá.
□

Il seguente corollario estende il teorema ai misurabili.

Corollario 1.31. Sia $(\mathcal{X}, d)$ uno spazio metrico, $\varphi : 2^{\mathcal{X}} \to [0, +\infty]$ una misura esterna Borel-Regolare ed $E \in \mathcal{M}_\varphi$. Allora:

1. Se $\varphi(E) < +\infty$ allora $\forall \varepsilon > 0$ esiste $F \in \mathcal{F}$ tale che $F \subset E$ e inoltre $\varphi(E \setminus F) < \varepsilon$
2. Se $E \subset \bigcup_j V_j$, unione numerabile di aperti tali che $\varphi(V_j) < +\infty$ allora $\forall \varepsilon > 0$ $\exists G \in \mathcal{G}$ tale che $G \supset E$ inoltre $\varphi(G \setminus E) < \varepsilon$.

Dimostrazione. 1. Sia $B_1 \in \mathscr{B}(\mathcal{X})$ tale che

$$\begin{cases} B_1 \supset E \\ \varphi(B_1) = \varphi(E) \end{cases}$$

tale Boreliano esiste in quanto lavoriamo con una misura Borel-regolare. Siccome E é misurabile possiamo applicare il buon spezzamento che induce:

$$\varphi(B_1) = \varphi(B_1 \cap E) + \varphi(B_1 \setminus E) = \varphi(E) + \varphi(B_1 \setminus E)$$

Da qui ricaviamo che $\varphi(B_1 \setminus E) = \varphi(B_1)\varphi(E) = 0$. Abbiamo che l'intercapedine di misura 0 é ancora un misurabile in quanto $E, B_1 \in \mathcal{M}_\varphi$ la quale é una σ-algebra. Quindi, come prima, esiste $B_2 \in \mathscr{B}(\mathcal{X})$ che é un involucro di $B_1 \setminus E$ tale che:

$$\begin{cases} B_2 \supset (B_1 \setminus E) \\ \varphi(B_2) = \varphi(B_1 \setminus E) = 0 \end{cases}$$

Quello che faremo ora é trovare un nuovo Boreliano che approssima E dall'interno per poi applicare il punto 1 del teorema 1.30 e dimostrare che esiste un chiuso interno ad E con le proprietá volute. Definiamo quindi $B_3 := B_1 \setminus B_2 = B_1 \cap B_2^c \in \mathscr{B}(\mathcal{X})$ e verifichiamo che $B_3 \subset E$:

$$B_3 = (B_1 \cap B_2^c) \subset (B_1 \cap (B_1 \cap E^c)^c) =$$
$$= B_1 \cap (B_1^c \cup E) = (B_1 \cap B_1^c) \cup (B_1 \cap E) =$$
$$= B_1 \cap E \subset E$$

Applichiamo ora il punto 1 del teorema 1.30 come preannunciato a B_3 trovando che esiste $F \in \mathcal{F}$ tale che $\forall \varepsilon$:

$$\begin{cases} F \subset B_3 \\ \varphi(B_3 \setminus F) < \varepsilon \end{cases}$$

Ovviamente $F \subset B_3 \subset E \Rightarrow F \subset E$ inoltre $E \setminus F \subset B_1 \setminus F = (B_1 \setminus B_3) \cup (B_3 \setminus F)$. Controlliamo il termine $B_1 \setminus B_3$:

$$B_1 \setminus B_3 = B_1 \cap B_3^c = B_1 \cap (B_1 \cap B_2^c)^c =$$
$$= B_1 \cap (B_1^c \cup B_2) = (B_1 \cap B_1^c) \cup (B_1 \cap B_2) \subset B_2$$

Quindi $\varphi(B_1 \setminus B_3) \leq \varphi(B_2) = 0$ per monotonia ovvero $\varphi(B_1 \setminus B_3) = 0$. Passando ora alla misura di $E \setminus F$ otteniamo che:

$$\varphi(E \setminus F) = \varphi(B_1 \setminus B_3) + \varphi(B_3 \setminus F) \tag{1.17}$$

Siccome $\varphi(B_3 \setminus F) < \varepsilon$ abbiamo che la 1.17 diventa:

$$\varphi(E \setminus F) < \varepsilon$$

2. La dimostrazione di questo punto é analoga a quella del secondo punto del teorema 1.30.

□

1.5 Misura di Lebesgue

Prima di tutto dobbiamo definire delle nozioni che saranno utilizzate nella definizione di misura di Lebesgue. Consideriamo $E \subset \mathbb{R}^n$ e l'intervallo aperto in $\mathbb{R}^n$ $I := \bigotimes_{i:=1 \ldots n} (a_i, b_i)$

- $\mathcal{R}_E$ é la famiglia dei ricoprimenti numerabili do E composti da intervalli aperti di $\mathbb{R}^n$
- $v(I) := \prod_{i:=1 \ldots n} (b_i - a_i)$ é la misura elementare di un intervallo aperto (lunghezze, aree, volumi, ...)

- $diam(E) = \sup_{x,y \in E} \{d(x,y)\}$ il diametro di E.

Teorema 1.32. *Si consideri $E \subset \mathbb{R}^n$ e $\mathcal{L}^n : 2^{\mathbb{R}^n} \to [0, +\infty]$ cosi definita:*

$$\mathcal{L}^n(E) = \inf_{\{I_j\} \in \mathcal{R}_E} \{\sum_j v(I_j)\}$$

Allora $\mathcal{L}^n$ é una misura esterna metrica ed é di Radon.

Dimostrazione. (Durante la dimostrazione talvolta mi riferiró a $\mathcal{L}^n$ come misura di Lebesgue nonostante la definizione sia data dopo il teorema)
Verifichiamo i punti della definizione 1.1

($\varphi(\emptyset) = 0$) Vediamo subito che $\forall \varepsilon > 0$ abbiamo $\emptyset \subset (0,\varepsilon)^n$ inoltre $\{(0,\varepsilon)^n\} \in \mathcal{R}_E$. Ora

$$\mathcal{L}^n(\emptyset) = \inf\{\sum_j v(I_j) | \{I_j\} \in \mathcal{R}_E\} \leq v((0,\varepsilon)^n) = \varepsilon^n \ \forall \varepsilon$$

Quindi per arbitrarietá di ε otteniamo $\mathcal{L}^n(\emptyset) = 0$.

(*monot.*) Sia $E \subset F \subset \mathbb{R}^n$. Abbiamo che ovviamente i ricoprimenti di F sono anche ricoprimenti di E quindi $\mathcal{R}_F \subset \mathcal{R}_E$. Quindi $\mathcal{L}^n(E)$ ha un numero maggiore di elementi su cui cercare l' inf. Quindi $\mathcal{L}^n(E) \leq \mathcal{L}^n(F)$.

($\sigma - sub$) Sia $\{E_j\}_j$ una famiglia numerabile in $2^{\mathbb{R}^n}$. Mostriamo che $\mathcal{L}^n(\bigcup_j E_j) \leq \sum_j \mathcal{L}^n(E_j)$

- Se $\sum_j \mathcal{L}^n(E_j) = +\infty$ abbiamo finito.
- Se inveve $\sum_j \mathcal{L}^n(E_j) < +\infty$ allora $\mathcal{L}^n(E_j) < +\infty \ \forall j$. Consideriamo un ε arbitrario. Adesso $\forall j$ esiste un ricoprimento di E_j $\{I_i^{(j)}\}_i \in \mathcal{R}_{E_j}$ tale che:

$$\sum_i v(I_i^{(j)}) < \mathcal{L}^n(E_j) + \frac{\varepsilon}{2^j}$$

Ovvero troviamo un ricoprimento del singolo E_j tale che sia di poco piú grande di quello misurato con Lebesgue. Ora é facile osservare che $\{I_i^{(j)}\}_{i,j} \in \mathcal{R}_{\bigcup_j E_j}$. Ovvero l'unione di questi ricoprimenti di poco piú grandi dei minimi sono un ricoprimento dell'unione di tutti gli E_j. Allora:

$$\mathcal{L}^n(\bigcup_j E_j) \leq \sum_{i,i} v(I_i^{(j)}) = \sum_j \sum_i v(I_i^{(j)}) <$$

$$< \sum_j \mathcal{L}^n(E_j) + \sum_j \frac{\varepsilon}{2^j} = \sum_j \mathcal{L}^n(E_j) + \varepsilon$$

Concludioamo quindi che $\mathcal{L}^n(\bigcup_j E_j) \leq \sum_j \mathcal{L}^n(E_j)$

($metrica$) Dimostriamo ora la metricitá della misura di Lebesgue. Quindi siano $A, B \in 2^{\mathbb{R}^n}$ tali che $d = d(A, B) = inf\{||a - b|| \; |a \in A, b \in B\} > 0$, ovvero che abbiano distanza positiva (infatti dobbiamo controllare l'additivitá della misura proprio su questi insiemi). Vogliamo controllare appunto:

$$\mathcal{L}^n(A \cup B) = \mathcal{L}^n(A) + \mathcal{L}^n(B)$$

verificando i due versi della disuguaglianza:

$'' \leq ''$ Questa deriva direttamente dalla σ-subadd. dimostrata per $\mathcal{L}^n$.

$'' \geq ''$ Qui supponiamo che la misura sia finita, altrimenti la tesi sarebbe banale. Quindi prendiamo un $\varepsilon > 0$ allora esiste $\{I_j\} \in \mathcal{R}_{A \cup B}$ tale che:

$$\sum_j v(I_j) < \mathcal{L}^n(A \cup B) + \varepsilon \tag{1.18}$$

Quello che facciamo ora é prende un ricoprimento di ogni I_j nel ricoprimento di $A \cup B$ e farne una griglia di tessere di diametro minore di d. In questo modo ogni tesera interseca A o B ma non entrambi. Dopodiché espando di poco le tessere in modo che si sovrappongano ma mantenendo il loro diametro minore di d, questo rimarrá un ricoprimento di $A \cup B$ ma allo stesso tempo ci permetterá di ottenere due ricoprimenti disgiunti per i singoli A e B. Formalmente: $\forall j \; \exists \; \{I_i^{(j)}\}_{i=1}^{m_j} \in \mathcal{R}_{I_j}$ tale che:

$$\begin{cases} diam(I_i^{(j)}) < d \\ \sum_{i=1}^{m_j} v(I_i^{(j)}) < v(I_i) + \frac{\varepsilon}{2^j} \end{cases} \tag{1.19}$$

Sia $H = (i, j)$ l'insieme delle coppie che identificano la i-esima tesserina dell j-esimo insieme del ricoprimento $\{I_j\}_j$. Usiamo per comoditá la notazione $\{J_h\}_{h \in H}$ per identificare tutte le tesserine. Dunque:

$$H_A := \{h \in H | J_h \cap A \neq \emptyset\}, \quad H_B := \{h \in H | J_h \cap B \neq \emptyset\}$$

Ovviamente $H_A \cup H_B \subset H$ e $H_A \cap H_B = \emptyset$ in quanto se una tesserina intersecasse sia A che B avrebbe diamentro maggiore di d ma questo non é possibile per costruzione. Inoltre come abbiamo detto:

$$\{J_h\}_{h \in H_A} \in \mathcal{R}_A, \quad \{J_h\}_{h \in H_B} \in \mathcal{R}_B$$

Passando ora alla misura:

$$\mathcal{L}^n(A) + \mathcal{L}^n(B) \leq \sum_{h \in H_A} v(J_h) + \sum_{h \in H_B} v(J_h) \leq$$

$$\leq \sum_{h \in H} v(J_h) \leq \sum_{i,j} v(I_i^{(j)}) = \sum_j \sum_i v(I_i^{(j)})$$

Ora per la seconda proprietá descritta in equazione 1.19 otteniamo :

$$\sum_j \sum_i v(I_i^{(j)}) \leq \sum_j v(I_j) + \frac{\varepsilon}{2^j} \leq \sum_j v(I_j) + \varepsilon$$

Ora consideriamo quanto descritto nell' equazione 1.18 e troviamo che:

$$\sum_j v(I_j) + \varepsilon \leq \mathcal{L}^n(A \cup B) + 2\varepsilon$$

Allora riassumendo il tutto:

$$\mathcal{L}^n(A) + \mathcal{L}^n(B) \leq \mathcal{L}^n(A \cup B) + 2\varepsilon \quad \forall \varepsilon \tag{1.20}$$

Quindi per l'arbitrarietá di ε otteniamo la tesi.

$(Borel - reg.)$ Per dimostrare che $\mathcal{L}^n$ é una misura di Radon, come prima cosa dobbiamo dimostrare che é Borel-regolare (Dovremmo dimostrare anche che é Boreliana ma siccome é metirca per il corollario 1.28 é anche Boreliana).
Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ qualsiasi, distinguiamo due casi:

- Se $\mathcal{L}^n(A) = +\infty$ prendiamo $B = \mathbb{R}^n \in \mathscr{B}(\mathcal{X})$ e abbiamo che $A \subset B$ e $\mathcal{L}^n(A) = +\infty \leq$
  $Le^n(B)$ Ne deriviamo semplicemente che $\mathcal{L}^n(B) = +\infty$.
- Supponiamo quindi che $\mathcal{L}^n(A) < +\infty$. Per ogni $h > 0$ esiste un ricoprimento aperto numerabile $\{I_j^{(h)}\} \in \mathcal{R}_A$ tale che $\sum\limits_j v(I_j^{(h)}) < \mathcal{L}^n(A) + \frac{1}{h}$. Poniamo dunque $G_h := \bigcup\limits_j I_j^{(h)} \in \mathcal{G}$, i quali sono unione di aperti e inoltre sappiamo che $\mathcal{G} \subset \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ e poniamo $B := \bigcap\limits_h G_h \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$. Ovviamente $B \supset A$.
  Dal punto di vista geometrico abbiamo preso dei ricoprimenti aperti di A che siano di poco piú grandi $(\frac{1}{h})$ del minimo (quello misurato con Lebesgue). Abbiamo creato gli insiemi G_h ovvero l'unione degli aperti di un determinato ricoprimento, quindi A sta in ognuno di questi. Infine abbiamo creato un Boreliano B che sia intersezione di tutti i G_h, quindi A sta logicamente in B. Per monotonia otteniamo che $\mathcal{L}^n(A) \leq \mathcal{L}^n(B)$.

Ora $\{I_j^{(h)}\}$ é un ricoprimento di A ma lo é anche di G_h per come é definito. Quindi ricopre sicuramente anche l'intersezione $\bigcap_h G_h = B$. Dunque vale:

$$\mathcal{L}^n(B) \leq \sum_j v(I_j^{(h)})$$

Poiché $\mathcal{L}^n(B)$ é la misura minore di tutti i ricoprimenti di B. Inoltre per definizione:

$$\sum_j v(I_j^{(h)}) \leq \mathcal{L}^n(A) + \frac{1}{h}$$

Quindi tirando le somme:

$$\mathcal{L}^n(A) \leq \mathcal{L}^n(B) \leq \mathcal{L}^n(A) + \frac{1}{h}$$

Sparando $h \to +\infty$ otteniamo che $\mathcal{L}^n(B) = \mathcal{L}^n(A)$ e dunque che la misura é Borel-regolare.

(*Radon*) Sia $K \in \mathcal{K}$ vogliamo dimostrare che $\mathcal{L}^n(K) < +\infty$. Siccome K é un compatto di $\mathbb{R}^n$ esso é chiuso e limitato per il teorema di Heine-Borel. Quindi esiste un intervallo aperto $I \in \mathbb{R}^n$ tale che $K \subset I$. Allora

$$\mathcal{L}^n(K) \leq \mathcal{L}^n(I) \leq v(I) < +\infty$$

□

Definizione 1.33. La misura esterna $\mathcal{L}^n : 2^{\mathbb{R}^n} \to [0, +\infty]$ é detta misura esterna di *Lebesgue* in $\mathbb{R}^n$

Vediamo come per le alcune proprietá della misura di Lebesgue.

Teorema 1.34. *Valgono le seguenti proprietá per $\mathcal{L}^n$:*

1. *$\forall a \in \mathbb{R}^n$ abbiamo $\mathcal{L}^n(a) = 0$*

2. *Per ogni intervallo aperto e limitato $I \subseteq \mathbb{R}^n$ si ha $\mathcal{L}^n(I) = v(I)$*

3. *(invarianza risp. traslazione) $\forall E \subset \mathbb{R}^n$ e $\forall \tau \in \mathbb{R}^n$ valgono:*

$$\begin{cases} \mathcal{L}^n(E + \tau) = \mathcal{L}^n(E) \\ se\ E \in \mathcal{M}_{\mathcal{L}^n} \Rightarrow E + \tau \in \mathcal{M}_{\mathcal{L}^n} \end{cases}$$

4. *(invarianza risp. omotetia) $\forall E \subset \mathbb{R}^n$ e $\forall \rho \in \mathbb{R}_{>0}$ con $\rho(E) := \{\rho P | P \in E\}$ valgono:*

$$\begin{cases} \mathcal{L}^n(\rho E) = \rho^n \mathcal{L}^n(E) \\ se\ E \in \mathcal{M}_{\mathcal{L}^n} \Rightarrow \rho E \in \mathcal{M}_{\mathcal{L}^n} \end{cases}$$

Dimostrazione. 1. Sia $a \in \mathbb{R}^n$, esso é dato dalle n coordinate $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, per ogni $\varepsilon > 0$ definiamo

$$I_\varepsilon := (a_1 - \varepsilon, a_1 + \varepsilon) \times (a_2 - \varepsilon, a_2 + \varepsilon) \times \ldots \times (a_n - \varepsilon, a_n + \varepsilon)$$

il quale é un quadrato n-dimensionale centrato in a. Quindi $I_\varepsilon \in \mathcal{R}_a$. Passando alla misura otteniamo che sicuramente

$$\mathcal{L}^n(\{a\}) \leq v(I_\varepsilon) = (2\varepsilon)^n$$

Ora per l'arbitrarietá di ε lo spariamo a zero ottenendo che $\mathcal{L}^n(\{a\}) = 0$

2. Proviamo entrambi i versi della disuguaglianza:

$'' \leq ''$ Possiamo considerare $\{I\}$ come ricoprimento aperto di se stesso, ovvero $I \in \mathcal{R}_I$, quindi otteniamo che:

$$\mathcal{L}^n(\{I\}) \leq v(I)$$

$'' \geq ''$ Siano $\{I_j\} \in \mathcal{R}_I$ ricomprimenti numerabili di I. Allora la misura elementare (i.e. $v(\cdot)$) su di essi é sicuramente maggiore che la misura elementare di I stesso quindi:

$$\sum_j v(I_j) \geq v(I)$$

Quindi prendendo l' inf otteniamo ancora che:

$$\inf \left\{ \sum_j v(I_j) | \{I_j\} \in \mathcal{R}_I \right\} \geq v(I) \tag{1.21}$$

Ma il termine a sinistra della disuguaglianza 1.21 é esattamente $\mathcal{L}^n(I)$.

Abbiamo dunque l'uguaglianza e la tesi.

3. Sia $E \subset \mathbb{R}^n$ e $\tau \in \mathbb{R}^n$.
Dal punto di vista geometrico possiamo considerare τ come un vettore di $\mathbb{R}^n$. L' insieme $(E+\tau)$ é l'insieme dei punti di E spostati applicando la traslazione del vettore τ.
Ora per ogni $\{I_j\} \in \mathcal{R}_E$ si ha che $\{I_j + \tau\} \in \mathcal{R}_{E+\tau}$ quindi per definizione di misura di Lebesgue segue che $\mathcal{L}^n(E + \tau) \leq v(I_j + \tau)$.
Notiamo che secondo la misrua elementare si ha che $\sum_j v(I_j + \tau) = \sum_j v(I_j)$ quindi passando alla misura di Lebesgue $\mathcal{L}^n(E+\tau) \leq \mathcal{L}^n(E)\ \forall E \subset \mathbb{R}^n$. D'altro canto, per lo stesso motivo, vale anche il viceversa di tale

relazione confermando l'uguaglianza.
Proviamo ora la seconda parte del punto 3. Sia perció $E \in \mathcal{M}_{\mathcal{L}^n}$ dimostriamo che $E + \tau$ induce il buon spezzamento della misura e che quindi $(E + \tau) \in \mathcal{M}_{\mathcal{L}^n}$. Ovvero proviamo che:

$$\mathcal{L}^n(A) = \mathcal{L}^n(A \cap (E + \tau)) + \mathcal{L}^n(A \cap (E + \tau)^c) \tag{1.22}$$

Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ generico. Abbiamo che $A \cap (E + \tau) = (A + \tau - \tau) \cap (E + \tau)$. Vediamo che si tratta dell'intersezione di due insiemi traslati di τ ovvero $(A - \tau)$ e E, quindi lo sará pure la loro intersezione, dunque possiamo prima intersecare e poi traslare, i.e. $((A + \tau) \cap E) + \tau$. Passando alla misura e tenendo conto che $\mathcal{L}^n$ é invariante rispetto la traslazione:

$$\mathcal{L}^n((A - \tau) \cap E) = \mathcal{L}^n(A \cap (E + \tau)) \tag{1.23}$$

Ragionando allo stesso modo $A \cap (E + \tau)^c = (A + \tau - \tau) \cap (E + \tau)^c = (A + \tau - \tau) \cap (E^c + \tau) = ((A - \tau) \cap E^c) + \tau$. Quindi passando alla misura:

$$\mathcal{L}^n((A - \tau) \cap E^c) = \mathcal{L}^n(A \cap (E^c + \tau)^c) \tag{1.24}$$

Sommando le equazioni 1.23 e 1.24 otteniamo:

$$\mathcal{L}^n(A \cap (E + \tau)) + \mathcal{L}^n(A \cap (E^c + \tau)^c) = \mathcal{L}^n((A - \tau) \cap E) + \mathcal{L}^n((A - \tau) \cap E^c) \tag{1.25}$$

Siccome per ipotesi E é misurabile possiamo riscrivere la parte destra di 1.25:

$$\mathcal{L}^n((A - \tau) \cap E) + \mathcal{L}^n((A - \tau) \cap E^c) = \mathcal{L}^n(A - \tau) = \mathcal{L}^n(A)$$

L'ultima uguaglianza é data per invarianza rispetto alla traslazione di $\mathcal{L}^n$

4. Consideriamo $E \subset \mathbb{R}^n$ e $\rho \in \mathbb{R}_{>0}$. Abbiamo che $\forall \{I_j\} \in \mathcal{R}_E, \{\rho I_j\} \in \mathcal{R}_{\rho E}$. Proviamo innanzitutto che $\forall I \subset \mathbb{R}^n$ aperto finito $v(\rho I) = \rho^n v(I)$. Sappiamo che $I := \bigotimes_{i=1}^{n} (a_i, b_i)$ perció $\rho I = \bigotimes_{i=1}^{n} (\rho a_i, \rho b_i)$ quindi passando alla misura elementare otteniamo:

   $$v(\rho I) = \prod_{i=1}^{n} (\rho b_i - \rho a_i) = \prod_{i=1}^{n} \rho \cdot (b_i - a_i) = \rho^n \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i) = \rho^n v(I)$$

   Ora, per Lebesgue abbiamo che per un singolo ricoprimento:

   $$\mathcal{L}^n(\rho E) \leq \sum_j v(\rho I_j) = \rho^n \sum_j v(I_j)$$

   Ora passiamo all' inf su tutti i ricoprimenti $\{I_j\} \in \mathcal{R}_e$ otteniamo:

   $$\mathcal{L}^n(\rho E) \leq \rho^n \inf_{\{I_j\} \in \mathcal{R}_E} \{\sum_j v(I_j)\} = \rho^n \mathcal{L}^n(E) \ \forall \rho > 0$$

D'altra parte possiamo prendere $\mathcal{L}^n(E) = \mathcal{L}^n(\frac{1}{\rho}\rho E) \leq \frac{1}{\rho^n}\mathcal{L}^n(\rho E)$, quindi abbiamo ottenuto anche che $\mathcal{L}^n(\rho E) \geq \rho^n \mathcal{L}^n(E)$ e ne segue l'uguaglianza:

$$\mathcal{L}^n(\rho E) = \rho^n \mathcal{L}^n(E)$$

Proviamo ora la seconda affermazione di 4.
Sia dunque $E \in \mathcal{M}_{\mathcal{L}^n}$ e $\rho \in \mathbb{R}_{>0}$ Anche qui dobbiamo dimostrare che ρE induce il buon spezzamento della misura ovvero che $\forall A \subset \mathbb{R}^n$:

$$\mathcal{L}^n(A) = \mathcal{L}^n(A \cap (\rho E)) + \mathcal{L}^n(A \cap (\rho E)^c)$$

Quello che faremo é isolare E e poi sfruttare il fatto che é misurabile:

$$(A \cap (\rho E)) = (\frac{1}{\rho}\rho A) \cap (\rho E) = \rho\left[(\frac{1}{\rho}A) \cap E\right] \tag{1.26}$$

e con lo stesso ragionamento otteniamo:

$$A \cap (\rho E)^c = (\frac{1}{\rho}\rho A) \cap (\rho E^c) = \rho\left[(\frac{1}{\rho}A) \cap E^c\right] \tag{1.27}$$

Ora per ipotesi abbiamo che E é misurabile quindi induce il buon spezzamento quindi unendo 1.26 e 1.27 e passando alla misura otteniamo:

$$\mathcal{L}^n((A \cap (\rho E))) + \mathcal{L}^n(A \cap (\rho E)^c) = \rho^n\left(\mathcal{L}^n((\frac{1}{\rho}A) \cap E) + \mathcal{L}^n((\frac{1}{\rho}A) \cap E^c)\right) =$$

$$= \rho^n \mathcal{L}^n(\frac{1}{\rho}A) = \rho^n \frac{1}{\rho^n}\mathcal{L}^n(A) = \mathcal{L}^n(A)$$

□

Esempio 1.35.

Esempio 1.36.

Esempio 1.37.

1.6 Misura di Hausdorff

La misura di Hausdorff viene comoda quando si tratta di misurare le sottovarietá. Prendiamo per esempio una curva nel piano. Ora la ricopriamo con una famiglia di dischi $\{C_j\}$. La (pre)misura sará calcolata come segue:

$$\mathcal{H}^1_\delta(E) = inf\left\{\sum_j diam(C_j) | E \subset \bigcup_j C_j, diam(C_j) < \delta\right\}$$

Quindi piú rimpicciolíamo δ e piú i dischetti si restringeranno costringendoci a seguire sempre piú precisamente la geometria della curva. Quindi una volta presa la premisura spariamo $\delta \to 0$ e abbiamo la misura di Hausdorff, ovvero:

$$\mathcal{H}^1(E) = \lim_{\delta \to 0} \mathcal{H}^1_\delta(E) \tag{1.28}$$

Teorema 1.38. *Sia $E \subset \mathbb{R}^n$ e $\delta > 0$. Identifichiamo con $\mathcal{R}_\delta(E)$ la famiglia dei ricoprimenti numerabili $\{C_j\}$ di E tali che $diam(C_j) \leq \delta \ \forall j$.*
Per $s \in [0, +\infty)$ poniamo anche $\alpha(S) = \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma(\frac{s}{2}+1)}$, dove:

$$\Gamma(t) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{t-1} dx$$

Inoltre se $s \in \mathbb{N}$ allora $\alpha(s) = \mathcal{L}^s(B_1(0))$. Allora la funzione $\mathcal{H}^s_\delta : 2^{\mathbb{R}^n} \to [0, +\infty]$ definita da:

$$\mathcal{H}^s_\delta(E) = \begin{cases} 0 \ se \ E = \emptyset \\ inf \left\{ \sum_j \alpha(s) \left(\frac{diam(C_j)}{2} \right)^s | \{C_j\} \in \mathcal{R}_\delta(E) \right\} \ se \ E \neq 0 \end{cases} \tag{1.29}$$

é detta premisura di Hausdorff ed é una misura esterna.

Prima di dimostrare il teorema diamo un occhiata a come lavora tale premisura. Facendo un paio di calcoli vediamo che:

$$\alpha(0) = 1$$

$$\alpha(1) = \mathcal{L}^1((-1,1)) = 2$$

$$\alpha(2) = \mathcal{L}^2(B_1(0)) = \pi$$

$$\alpha(3) = \mathcal{L}^3(B_1(0)) = \frac{4}{3}\pi$$

$$\vdots$$

La quantitá $\left(\frac{diam(C_j)}{2} \right)^s$ é ovviamente una potenza del raggio di ogni palla che ricopre un pezzo di curva. Quindi per una curva, ovvero per $s = 1$ otteniamo che la premisura di Hausdorff calcola $2 \cdot r$ per ogni palla. Ovvero fa la somma dei diametri. Per $s = 2$ copriamo una superficie con delle sfere. Otteniamo $\alpha(2) * \left(\frac{diam(C_j)}{2} \right)^s = \pi \cdot r^2$ che é l'area della superficie del disco che si ottiene sezionando una sfera all'equatore (abbiamo l'analogia con il diametro del disco per $s = 1$). Per $s = 3$ otteniamo $\frac{4}{3}\pi \cdot r^3$ che é proprio il volume di una sfera (con la stessa analogia dei casi precedenti) e cosí via.

Dimostrazione. Controlliamo che valgano i tre punti della definizione 1.1.

1. $\mathcal{H}^s_\delta(\emptyset) = 0$ per definizione.

2. Consideriamo ora $E \subset F \subset \mathbb{R}^n$, logicamente se un ricoprimento di F é anche un ricoprimento di E quindi abbiamo che $\mathcal{R}_\delta(F) \subset \mathcal{R}_\delta(E)$ quindi:

$$\mathcal{H}^s_\delta(F) = inf \left\{ \sum_j \alpha(s) \left(\frac{diam(C_j)}{2} \right)^s |\{C_j\} \in \mathcal{R}_\delta(F) \right\} \leq$$

$$\leq inf \left\{ \sum_j \alpha(s) \left(\frac{diam(C_j)}{2} \right)^s |\{C_j\} \in \mathcal{R}_\delta(E) \right\} = \mathcal{H}^s_\delta(E)$$

3. Sia $\{E_j\} \subset 2^{\mathbb{R}^n}$ una famiglia numerabile di insiemi. Vogliamo dimostrare che vale la σ-subadditivitá. Come sempre distinguiamo i due casi:

   - Se $\sum_j \mathcal{H}^s_\delta(E_j) = +\infty$ allora la tesi é banale.
   - Se invece tale somme é finita possiamo trovare un ricoprimento $\{C_i^{(j)}\} \in \mathcal{R}_\delta E_j$ tale che la sua misura sia (anche di poco) maggiore di quella di E_j ovvero:

$$\sum_i \alpha(s) \left(\frac{diam(C_j)}{2} \right)^s < \mathcal{H}^s_\delta(E_j) + \frac{\varepsilon}{2^j} \tag{1.30}$$

Osserviamo che $\{C_i^{(j)}\} \in \mathcal{R}_\delta(\bigcup_j E_j)$, allora possiamo scrivere:

$$\mathcal{H}^s_\delta(\bigcup_j E_j) \leq \sum_{i,j} \alpha(s) \left(\frac{diam(C_j)}{2} \right)^s = \sum_i \sum_j \alpha(s) \left(\frac{diam(C_j)}{2} \right)^s$$

L'ultimo termine, per quanto osservato nell'equazione 1.30, puó essere riscritto come segue:

$$\sum_i \sum_j \alpha(s) \left(\frac{diam(C_j)}{2} \right)^s \leq \sum_j (\mathcal{H}^s_\delta(E_j) + \frac{\varepsilon}{2^j}) = \sum_j (\mathcal{H}^s_\delta(E_j) + \varepsilon$$

Per l'arbitrarietá di ε lo spariamo a 0 e otteniamo la tesi.

□

Con il seguente teorema costruiamo la misura di Hausdorff effettiva.

Teorema 1.39. *Sia $s \in [0, +\infty)$ ed $E \subset \mathbb{R}^n$. Allora la funzione $\delta \mapsto \mathcal{H}^s_\delta(E)$ con $\delta > 0$ é monotona e decrescente (1), quindi $\exists$ il limite:*

$$\mathcal{H}^s(E) := \lim_{\delta \to 0^+} \mathcal{H}^s_\delta(E)$$

La mappa $\mathcal{H}^s : 2^{\mathbb{R}^n} \to [0, +\infty]$ é una misura esterna (2) metrica (3) ed é Borel-regolare (4). Essa é detta misura di Hausdorff.

Dimostrazione. 1. Siano $0 < \delta_1 < \delta_2 < +\infty$ allora $\mathcal{R}_{\delta_1}(E) \subset \mathcal{R}_{\delta_2}(E)$, questo vale poiché siamo in $\mathbb{R}^n$ e stiamo considerando la topologia euclidea quindi $\mathcal{R}_{\delta_1}(E)$ contiente tutte le famiglie ricoprenti E formate da palle di raggio inferiore a δ_1 quindi per ipotesi sono inferiori a δ_2. Quindi passiamo all'immagine della mappa e tenendo conto che in $\mathcal{R}_{\delta_2}(E)$ contiene piú famiglie su cui fare l' inf (tra cui anche quelle di $\mathcal{R}_{\delta_1}(E)$):

$$inf\left\{\sum_j \alpha(s)\left(\frac{diam(C_j)}{2}\right)^s |\{C_j\} \in \mathcal{R}_{\delta_2}(F)\right\} \leq$$

$$\leq inf\left\{\sum_j \alpha(s)\left(\frac{diam(C_j)}{2}\right)^s |\{C_j\} \in \mathcal{R}_{\delta_1}(F)\right\}$$

E dunque:

$$\mathcal{H}^s_{\delta_2}(E) \leq \mathcal{H}^s_{\delta_1}(E)$$

2. Proviamo ora i tre punti della definizione 1.1 per $\mathcal{H}^s$:

   (a) Tenendo conto di come abbiamo definito $\mathcal{H}^s_\delta$ ricaviamo:

   $$\mathcal{H}^s(\emptyset) = \lim_{\delta\to 0^+} \mathcal{H}^s_\delta(\emptyset) = 0$$

   (b) Sia ora $E \subset F \subset \mathbb{R}^n$ quindi siccome per il teorema 1.38 $\mathcal{H}^s_\delta$ é misura esterna scriviamo che $\mathcal{H}^s_\delta(E) \leq \mathcal{H}^s_\delta(F)$ quindi passando al limite su entrambi i lati:

   $$\mathcal{H}^s(E) = \lim_{\delta\to 0^+} \mathcal{H}^s_\delta(E) \leq \lim_{\delta\to 0^+} \mathcal{H}^s_\delta(F) = \mathcal{H}^s(F)$$

   (c) Sia $\{E_j\} \subset 2^{\mathbb{R}^n}$ una famiglia numerabile di insiemi e sia $\delta > 0$. Di nuovo per il fatto che $\mathcal{H}^s_\delta$ é una misura esterna sfruttiamo la "sua" σ-subaffitivitá per scrivere:

   $$\mathcal{H}^s_\delta(\bigcup_j E_j) \leq \sum_j \mathcal{H}^s_\delta(E_j)$$

   Ogni termine nella sommatoria $\mathcal{H}^s_\delta(E_j) \leq \mathcal{H}^s(E_j)$ poiché mandiamo $\delta \to 0$ e il ragionamento é identico a quello fatto all'inizio del punto 1. Quindi passiamo al limite e otteniamo che:

   $$\lim_{\delta\to 0^+} \mathcal{H}^s_\delta(\bigcup_j E_j) = \mathcal{H}^s(\bigcup_j E_j) \leq \sum_j \mathcal{H}^s(E_j)$$

   Abbiamo dimostrato quindi che $\mathcal{H}^s$ é anch'essa una misura esterna.

3. Dimostriamone ora la metricitá. Siano $A, B \subset \mathbb{R}^n$ due insiemi tali che $d(A, B) = \inf\{|a - b| \mid a \in A, b \in B\} > 0$ ovvero a distanza positiva. Vogliamo provare che $\mathcal{H}^s(A \cup B) = \mathcal{H}^s(A) + \mathcal{H}^s(B)$, provando entrambi i versi della disuguaglianza.

   $'' \leq ''$ Banale per σ-subadditivitá

   $'' \geq ''$ Supponiamo subito che $\mathcal{H}^s(A \cup B) < +\infty$ altrimenti la tesi sarebbe ovvia. Quindi sia $0 < \delta < d$ e $\varepsilon > 0$ arbitrario. Ricordiamo che $\mathcal{H}^s_\delta(A \cup B) \leq \mathcal{H}^s(A \cup B) < +\infty$.
   Sia ora $\{C_j\}_j \in \mathcal{R}_\delta(A \cup B)$ un ricporimento dell'unione tale che:

$$\sum_j \alpha(s) \left(\frac{diam(C_j)}{2}\right)^s \leq \mathcal{H}^s_\delta(A \cup B) + \varepsilon \leq \mathcal{H}^s(A \cup B) + \varepsilon$$

   Prima di tutto vediamo che ogni aperto del ricoprimento é una bolla di diametro minore di d, questo significa che se un aperto interseca A esso non puó sicuramente intersecare B. Definiamo ora due insiemi uno composto dagli indici di aperti del ricoprimento che intersecano A e uno composto dagli indici di quelli che intersecano B:

$$J_A := \{j \mid C_j \cap A \neq \emptyset\}$$
$$J_B := \{j \mid C_j \cap B \neq \emptyset\}$$

   Ovviamente $J_A \cap J_B = \emptyset$ e inoltre $\{C_j\}_{j \in J_A} \in \mathcal{R}_\delta(A)$ ovvero l'unione degli aperti che intersecano A formano un ricoprimento di A, ovviamente lo stesso vale per B. Ricordiamo che $\{C_j\}$ é un ricoprimento arbitrario e siccome con Hausdorff prendiamo l'inf possiamo sicuramente scrivere:

$$\mathcal{H}^s_\delta(A) + \mathcal{H}^s_\delta(B) \leq \sum_{j \in J_A} \alpha(s) \left(\frac{diam(C_j)}{2}\right)^s + \sum_{j \in J_B} \alpha(s) \left(\frac{diam(C_j)}{2}\right)^s \leq$$

$$\leq \sum_{j \in J_A \cup J_B} \alpha(s) \left(\frac{diam(C_j)}{2}\right)^s \leq$$

$$\leq \sum_j \alpha(s) \left(\frac{diam(C_j)}{2}\right)^s \leq \mathcal{H}^s(A \cup B) + \varepsilon$$

   Ora spariamo $\delta \to 0$ e per l'arbitrarietá di ε otteniamo:

$$\mathcal{H}^s(A) + \mathcal{H}^s(B) \leq \mathcal{H}^s(A \cup B)$$

4. Proviamo che $\mathcal{H}^s$ é Borel-regolare ovvero che esiste $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ tale che:

$$\begin{cases} B \supset A \\ \mathcal{H}^s(B) = \mathcal{H}^s(A) \end{cases}$$

Supponiamo che $\mathcal{H}^s(A) < +\infty$ altrimenti potremmo prendere $B = \mathbb{R}^n$ e la tesi seguirebbe. Si ha che $\forall h \in \mathbb{Z}_{>0}$ possiamo scrivere $\mathcal{H}^s_{\frac{1}{h}}(A) \leq \mathcal{H}^s(A) < +\infty$ quindi possiamo trovare un ricoprimento di A fatto di bolle di diametro al piú $\frac{1}{h}$ ovvero $\{C_j^{(h)}\}_j \in \mathcal{R}_{\frac{1}{h}}(A)$ tale che sia di poco piú grande dell' inf misurato con Hausdorff, i.e.:

$$\sum_j \alpha(s) \left(\frac{diam(C_j^{(h)})}{2} \right)^s \leq \mathcal{H}^s_{\frac{1}{h}}(A) + \frac{1}{h}$$

Ora poniamo $B_h := \bigcup_j \overline{C_j^{(h)}}$ e notiamo che valgono:

$$\begin{cases} B_h \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n) \\ B_h \supset A \end{cases}$$

La prima proprietá vale poiché B_h é unione numerabile di chiusi e come sappiamo (proposizione 1.25) in uno spazio topologico la σ-algebra generata dagli aperti é uguale a quella generata dai chiusi (i.e. $\Sigma_G = \Sigma_F$).
Poniamo anche $B := \bigcap_h B_h$ e vediamo che:

$$\begin{cases} B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n) \\ B \supset A \end{cases}$$

Ovviamente vale anche $B \subset B_h$ quindi scriviamo:

$$\mathcal{H}^s_{\frac{1}{h}}(A) \leq \mathcal{H}^s_{\frac{1}{h}}(B) \leq \mathcal{H}^s_{\frac{1}{h}}(B_h) \tag{1.31}$$

Dove entrambe le disuguaglianze valgono per monotonia. Ora vediamo che un ricoprimento di B_h é proprio $\{\overline{C_j^{(h)}}\}_j \in \mathcal{R}_{\frac{1}{h}}(B_h)$ dove $diam(\overline{C_j^{(h)}}) = diam(C_j^{(h)}) < \frac{1}{h}\ \forall j$. Quindi possiamo minorare l'ultimo termine della disequazione 1.32 come segue:

$$\leq \sum_j \alpha(s) \left(\frac{diam(\overline{C_j^{(h)}})}{2} \right)^s = \sum_j \alpha(s) \left(\frac{diam(C_j^{(h)})}{2} \right)^s < \mathcal{H}^s_{\frac{1}{h}}(A) + \frac{1}{h}$$

Allora abbiamo ottenuto un sandwich poiché:

$$\mathcal{H}^s_{\frac{1}{h}}(A) \leq \mathcal{H}^s_{\frac{1}{h}}(B) \leq \mathcal{H}^s_{\frac{1}{h}}(A) + \frac{1}{h}$$

Ora sparando $h \to 0$ otteniamo il sandwich ancora piú stretto e quindi l'uguaglianza:

$$\mathcal{H}^s(A) \leq \mathcal{H}^s(B) \leq \mathcal{H}^s(A) \Longrightarrow \mathcal{H}^s(B) = \mathcal{H}^s(A)$$

$\square$

Vediamo ora alcune proprietá della misura di Hausdorff.

Teorema 1.40. *Valgono le seguenti proprietá per la misura di Hausdorff:*

1. $\mathcal{H}^0 = |\cdot|$ *(cardinalitá)*

2. $\mathcal{H}^n = \mathcal{L}^n$ *in* $\mathbb{R}^n$ *non dimostreremo questo punto, ma diciamo che segue dalla disuguaglianza isodiametrica.*

3. $\forall E \subset \mathbb{R}^n$, $\forall \tau \in \mathbb{R}^{\ltimes}$ *vale (invarianza rispetto alla traslazione):*

$$\begin{cases} \mathcal{H}^s(E+\tau) = \mathcal{H}^s(E) \\ E \in \mathcal{M}_{\mathcal{H}^s} \Rightarrow (E+\tau) \in \mathcal{M}_{\mathcal{H}^s} \end{cases}$$

4. $\forall E \subset \mathbb{R}^n$, $\forall \rho \in \mathbb{R}_{>0}$ *vale (invarianza rispetto omotetia):*

$$\begin{cases} \mathcal{H}^s(\rho E) = \mathcal{H}^s(E) \\ E \in \mathcal{M}_{\mathcal{H}^s} \Rightarrow (\rho E) \in \mathcal{M}_{\mathcal{H}^s} \end{cases}$$

Dimostrazione. 1. Dimostriamo prima di tutto il caso in cui $E = \{p\}, p \in \mathbb{R}^n$ come abbiamo visto otteniamo $\alpha(0) = 1$ ora:

$$\mathcal{H}^0_\delta(\{p\}) = inf \left\{ \sum_j 1 \left(\frac{diam(C_j)}{2}\right)^0 |\{C_j\} \in \mathcal{R}_\delta(\{p\}) \right\} \geq 1$$

Ovviamente dobbiamo richiedere che $diam(C_j) > 0$ se vogliamo che questo valga. D'altro canto abbiamo che $\{B_{\frac{\delta}{2}}(p)\} \in \mathcal{R}_\delta(p)$ e quindi vale che:

$$\mathcal{H}^s_\delta(\{p\}) \leq 1 \cdot \left(\frac{diam(B_{\frac{\delta}{2}}(p))}{2}\right)^0 = 1$$

E quindi $\mathcal{H}^0_\delta(\{p\}) = 1$. Ora possiamo sparare $\delta \to 0^+$ Passiamo ora al caso generale che suddividiamo in due casi:

- Caso in cui $\exists\, p_1, p_2, \ldots, p_n$ distinti in $\mathbb{R}^n$ tali che $E = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\} = \bigcup_i p_i$. Notiamo inoltre che ogni punto p_i é chiuso e dunque boreliano e siccome la misura é metrica allora é anche misurabile (corollario 1.28), formalmente $\{p\} \in \mathcal{F} \subset \mathscr{B}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{M}^0_{\mathcal{H}}$. Dunque:

$$\mathcal{H}^0(E) = \mathcal{H}^0(\bigcup_i (p_i)) = \sum_{i=1}^n \mathcal{H}^0(\{p_i\}) = n = |E|$$

- $\forall n > 0\ \exists p_1, p_2, \ldots, p_n$ tali che $p_i \in E$. Allora grazie alla monotonia $\mathcal{H}^0(E) \geq \mathcal{H}^0(p_1, p_2, \ldots, p_n) = n$ e $\mathcal{H}^0(E) = +\infty$

2. Disuguaglianza isoperimetrica

3. Uguale al punto 3 del teorema 1.34 (Lebesgue)

4. Uguale al punto 4 del teorema 1.34 (Lebesgue)

$\square$

Proposizione 1.41. Sia $s \in [0, +\infty)$ e $E \subset \mathbb{R}^n$ tali che $\mathcal{H}^s(E) < +\infty$ allora:

1. $\mathcal{H}^t(E) = 0, \ \forall t > s$

2. $\forall t > n$ si ha che $\mathcal{H}^t(\mathbb{R}^n) = 0$. Conseguentemente $\forall E \subset \mathbb{R}^n$ l'insieme $S(E) = \{t \in [0, +\infty) \mid \mathcal{H}^t(E) = 0\}$ é una semiretta destra che include $(n, +\infty)$. La dimensione di Hausdorff di E é definita dal numero:

$$dim_{\mathcal{H}}(E) = \inf S(E) \leq n$$

(Quindi prima della semiretta $S(E)$ si avrá $+\infty$ e 0 in tutta la semiretta.)

Dimostrazione. 1. Sia $\mathcal{H}^s(E) < +\infty$ e $t > s \geq 0$. Consideriamo anche $\delta > 0$ e quindi $\mathcal{H}^s_\delta(E) \leq \mathcal{H}^s(E) < +\infty$ (ricordiamo sparando $\delta \to 0^+$ i ricoprimenti su cui fare l'inf diminuiscono) allora $\exists \{C_j\}_j \subset \mathcal{R}_\delta(E)$ t.c:

$$\sum_j \alpha(s) \left(\frac{diam(C_j)}{2}\right)^s \leq \mathcal{H}^s_\delta(E) + 1 \leq \mathcal{H}^s(E) + 1 \tag{1.32}$$

Allora

$$\mathcal{H}^t_\delta(E) \leq \sum_j \alpha(t) \left(\frac{diam(C_j)}{2}\right)^{t-s+s} s =$$

$$= \frac{\alpha(t)}{\alpha(s)} \sum_j \alpha(s) \left(\frac{diam(C_j)}{2}\right)^s \left(\frac{diam(C_j)}{2}\right)^{t-s} \leq$$

$$\leq \frac{\alpha(t)}{\alpha(s)} \left(\frac{\delta}{2}\right)^{t-s} \sum_j \alpha(s) \left(\frac{diam(C_j)}{2}\right)^s$$

Ora per 1.32 possiamo scrivere:

$$\mathcal{H}^t_\delta(E) \leq \frac{\alpha(t)}{\alpha(s)} \left(\frac{\delta}{2}\right)^{t-s} [\mathcal{H}^s(E) + 1]$$

Sparando $\delta \to 0^+$ abbiamo $\mathcal{H}^t(E) \leq 0 \Rightarrow \mathcal{H}^t(E) = 0$.

2. Sia $t > n$, possiamo scrivere che $\mathbb{R}^n = \bigcup_{h=1}^{+\infty} B_h(0)$ con $B_h(0) \subset B_{h+1}(0)$, ovvero una successione crescente di bolle aperte. Poiché sappiamo che per n $\mathcal{H}^n = \mathcal{L}^n$ e che per $h = 1, 2, \dots$ $\mathcal{H}^n(B_h(0)) = \mathcal{L}_n(B_h(0)) < +\infty$ allora per il punto appena dimostrato $\mathcal{H}^t(B_h(0)) = +\infty$ $\forall h = 1, 2, \dots$. Adesso sfruttando la continuitá dal basso otteniamo che

$$\mathcal{H}^t(\mathbb{R}^n) = \mathcal{H}^t(\bigcup_{h=1}^{+\infty} B_h(0)) = \lim_{h\to+\infty} \mathcal{H}^t(B_h(0)) = 0$$

L'ultima uguaglianza vale in quanto la misura di ogni termine del limite vale 0 per qualsiasi valore di h.

□

Corollario 1.42. La misura esterna di Hausdorff in $\mathbb{R}^n$ non é di Radon eccetto per $s \geq n$.

Dimostrazione. $s = n$ In questo caso abbiamo visto che $\mathcal{H}^s = \mathcal{H}^n = \mathcal{L}^n$ la quale é di Radon.

$s > n$ Abbiamo che $\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^n) = 0$ allora $\mathcal{H}^s \equiv 0$ (identicamente nulla) quindi di Radon.

$s < n$ Sia $E := [0, 1]^n$ che sappiamo essere compatto e dunque abbiamo che $\mathcal{H}^n(E) = \mathcal{L}^n(E) = 1$ allora per la proposizione 1.41 abbiamo la semiretta dei valori di s per cui la misura vale ∞.

□

1.7 Funzioni Misurabili

Definiamo innanzitutto la nozione di misura generale.

Definizione 1.43. Sia $\mathcal{X}$ un insieme, $\mathcal{A}$ una σ-algebra su $\mathcal{X}$. Allora una *misura* su A é una funzione $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ tale che:

1. $\mu(\emptyset) = 0$
2. Se $\{E_j\}_j \subset 2^{\mathcal{A}}$ é una famiglia numerabile di insiemi 2-2 disgiunti allora $\mu(\bigcup_j E_j) = \sum_j \mu(E_j)$

La terna ($\mathcal{X}$, $\mathcal{A}$, μ) é detta *spazio con misura*

Osserviamo subito che la nozione di misura generalizza quella di misura esterna in quanto, in generale, non vale la monotonia e nemmeno la σ-subadditivitá nel caso di una famiglia di insiemi non 2-2 disgiunti. Ricordiamo inoltre che il dominio di una misura esterna (e.g. su $\mathcal{X}$) é $2^{\mathcal{X}}$.

É anche facile osservare che é possibile costruire una misura partendo da una misura esterna semplicemente restringendo tale misura esterna alla sua famiglia di misurabili.

Proposizione 1.44. Se $\varphi : 2^{\mathcal{X}} \to (0, +\infty)$ é una misura esterna allora ($\mathcal{X}$, $\mathcal{M}_\varphi$, $\varphi_{|\mathcal{M}_\varphi}$) é uno spazio con misura.

Osservazione 1.45. Vale il viceversa della proposizione 1.44 ovvero:
Sia ($\mathcal{X}$, $\mathcal{A}$, φ) uno spazio con misura allora $\exists \varphi : 2^{\mathcal{X}} \to [0, +\infty]$ misura esterna tale che:

$$\begin{cases} A \subset \mathcal{M}_\varphi \\ \varphi_{|A} = \mu \end{cases}$$

Il nostro scopo é di arrivare a definire il concetto di integrale il quale prevede una funzione ed una misura. Definiamo quindi una funzione misurabile.

Definizione 1.46. Sia ($\mathcal{X}$, $\mathcal{A}$, μ) uno spazio con misura e ($\mathcal{Y}$, τ) uno spazio topologico. Una funzione $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ si dice *misurabile* rispetto a μ se:

$$f^{-1}(G) \in \mathcal{A} \ \ \forall G \in \tau$$

ovvero la controimmagine di un aperto in τ é un misurabile rispetto a μ.

Osservazione 1.47. Se ($\mathcal{X}$, $\mathcal{A}$, μ) é uno spazio con misura ed é anche spazio topologico tale che gli aperto stanno in $\mathcal{A}$ ($\Rightarrow \mathcal{A}$ contiene anche i Boreliani in quanto é σ-algebra), allora ogni funzione continua:

$$f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$$

con Y spazio topologico é misurabile.

Dimostrazione. Sia $G \in \tau_{\mathcal{Y}}$ allora per continuitá $f^{-1}(G) \in \tau_{\mathcal{X}}$. Peró siccome gli aperti stanno in $\mathcal{A}$ abbiamo anche $f^{-1}(G) \in \mathcal{A}$. □

Proposizione 1.48. Sia ($\mathcal{X}$, $\mathcal{A}$, μ) uno spazio con misura e $\mathcal{Y}$, $\mathcal{Z}$ spazi topologici. Sia $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ misurabile e $g : \mathcal{Y} \to \mathcal{Z}$ continua. Allora:

$$g \circ f : \mathcal{X} \to \mathcal{Z}$$

é misurabile.

Dimostrazione. Lo schema della composizione é il seguente:

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} \mathcal{Z}$$

Sia $U \in \tau_{\mathcal{Z}}$ per continuitá di g abbiamo che $g^{-1}(U) \in \tau_{\mathcal{Y}}$ quindi per la misurabilitá di f otteniamo che:

$$f^{-1}(g^{-1}(U)) \in \mathcal{A}$$

ovvero $(g \circ f)(U) \in \mathcal{A}$ per ogni $U \in \tau_{\mathcal{Z}}$. □

Esempio 1.49. $(\mathbb{R}^n,\ \mathcal{M}_{\mathcal{L}^n},\ \mathcal{L}^n_{|\mathcal{M}_{\mathcal{L}^n}})$ é uno spazio con misura. Prendiamo $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ continua (dove $\overline{\mathbb{R}} =< \{[-\infty, a), (a, b), (a, +\infty]\} >$). Allora f é misurabile.

Proposizione 1.50. Sia $(\mathcal{X},\ \mathcal{A},\ \mu)$ uno spazio con misura e $f : \mathcal{X} \to \overline{\mathbb{R}}$ allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:

1. f é misurabile
2. $f^{-1}((a, +\infty]) \in \mathcal{A}\ \forall a \in \overline{\mathbb{R}}$
3. $f^{-1}([a, +\infty]) \in \mathcal{A}\ \forall a \in \overline{\mathbb{R}}$
4. $f^{-1}([-\infty, a)) \in \mathcal{A}\ \forall a \in \overline{\mathbb{R}}$
5. $f^{-1}([-\infty, a]) \in \mathcal{A}\ \forall a \in \overline{\mathbb{R}}$

Prima di procedere con la dimostrazione facciamo una osservazione insiemistica sulle controimmagini di funzioni tra due insiemi generici X e Y. La seguente osservazione vale solo ed esclusivamente per le controimmagini.

Osservazione 1.51. Sia $f : X \to Y$ una funzione tra due insiemi X e Y. Allora valgono le seguenti proprietá:

1. $f^{-1}(\bigcup\limits_j E_j) = \bigcup\limits_j f^{-1}(E_j)$
2. $f^{-1}(\bigcap\limits_j E_j) = \bigcap\limits_j f^{-1}(E_j)$
3. $f^{-1}(E^c) = (f^{-1}(E))^c$

Dimostrazione.

1. Prendiamo $x \in f^{-1}(\bigcup\limits_j E_j)$ allora $f(x) \in \bigcup\limits_j E_j$ quindi esiste un E_{j_0} tale che $f(x) \in E_{j_0}$, ma questo vale se e solo se $x \in f^{-1}(E_{j_0})$ e dunque $x \in \bigcup\limits_j f^{-1}(E_j)$.
2. Sia $x \in f^{-1}(\bigcap\limits_j E_j)$ allora $f(x) \in \bigcap\limits_j E_j$ il che significa che per ogni E_j, $f(x) \in E_j$ ma questo vale se e solo se $x \in f^{-1}(E_j)\ \forall j$ il che implica $x \in \bigcap\limits_j f^{-1}(E_j)$
3. Prendiamo $x \in f^{-1}(E^c)$ ovvero $x \notin f^{-1}(E)$ e quindi rimane che $x \in (f^{-1}(E))^c$

□

Dimostrazione. (Della proposizione 1.50.)
Dimostreremo la proposizione seguendo le implicazioni :

$$1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 4 \Rightarrow 5 \Rightarrow 2 \Rightarrow 1$$

$1 \Rightarrow 2$ Sia $(a, +\infty] \subset \tau_{\overline{\mathbb{R}}}$ allora $f^{-1}((a, +\infty]) \in \mathcal{A}$ per misurabilitá.

$2 \Rightarrow 3$ Possiamo costruire come $[a, +\infty] = \bigcup_{h=1}^{+\infty} (a + \frac{1}{h}, +\infty]$ applicando f^{-1} su entrambi i termini si ottiene $f^{-1}([a, +\infty]) = f^{-1}(\bigcup_{h=1}^{+\infty} (a + \frac{1}{h}, +\infty]) = \bigcup_{h=1}^{+\infty} f^{-1}((a + \frac{1}{h}, +\infty])$. Ogni elemento dell' unione numerabile precedente appartiene ad $\mathcal{A}$ quindi anche tutta l'unione appartiene ad $\mathcal{A}$ e otteniamo la tesi.

$3 \Rightarrow 4$ $f^{-1}([-\infty, a)) = f^{-1}([a, +\infty]^c) = (f^{-1}([a, +\infty]))^c \in \mathcal{A}$ che vale per la c-chiusura di A e per il punto 3 dell osservazione precedente.

$4 \Rightarrow 5$ Ugualmente a $2 \Rightarrow 3$ solo che prendiamo $[-\infty, a] = \bigcap_{h=1}^{+\infty} [-\infty, a + \frac{1}{h})$ e procediamo come sopra.

$5 \Rightarrow 2$ Per il complementare $(a, +\infty] = [-\infty, a]^c$ e procediamo come in $3 \Rightarrow 4$.

$2 \Rightarrow 1$ Assumendo 2 abbiamo validi anche 3,4,5 quindi f^{-1} manda tutti gli aperti di base di $\tau_{\overline{\mathbb{R}}}$ in $\mathcal{A}$ quindi per definizione f é misurabile.

□

Introduciamo le seguenti notazioni:

$$(\inf_k f_k)(x) = \inf_k \{f_k(x)\}$$

$$\max\{f, g\}(x) = \max\{f(x), g(x)\} = f \vee g$$

$$(\liminf_{k \to +\infty} f_k)(x) = \liminf_{k \to +\infty} f_k(x) = \lim_{m \to +\infty} \inf_{k \geq m} \{f_k(x)\} = \sup_m (\inf_{k \geq m} \{f_k(x)\})$$

Vediamo ora alcune proprietá delle funzioni misurabili.

Teorema 1.52. *Sia $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio con misura. Valgono le seguenti affermazioni:*

1. *Siano $f, g : \mathcal{X} \to \overline{\mathbb{R}}$ misurabili. Allora $f + g$ é misurabile (se non si verifica $+\infty$ o $-\infty$), $|f|$, fg, $\max\{f, g\}$, $\min\{f, g\}$ sono misurabili. Se $g(x) \neq 0$ $\forall x \in \mathcal{X}$ allora $\frac{f}{g}$ é misurabile.*

2. *Sia data la successione di funzioni misurabili $f_1, f_2, \ldots$ con $f_k : \mathcal{X} \to \overline{\mathbb{R}}$ allora anche:*

$$\inf_k \{f_k\}, \quad \sup_k \{f_k\}, \quad \liminf_{k \to +\infty} \{f_k\}, \quad \limsup_{k \to +\infty} \{f_k\}$$

sono misurabili.

Dimostrazione. Durante la dimostrazione scriviamo $\{f < a\}$ per intendere $\{x \in \mathcal{X} | f(x < a)\} = f^{-1}([-\infty, a))$.

1. Vediamo il caso $f+g$. Vogliamo provare la seguente identitá sfruttando quanto dimostrato nella precedente proposizione:

$$\{f + g < a\} = \bigcup_{s,t \in \mathbb{Q} \ | \ s+t<a} (\{f < s\} \cap \{g < t\})$$

vediamo subito che la parte a destra é un insieme misurabile in quanto é una unione di intersezioni di insiemi misurabili. Mostriamo le due inclusioni:

$'' \supset ''$ Sia $x \in \bigcup_{s,t \in \mathbb{Q} \ | \ s+t<a} (\{f < s\} \cap \{g < t\})$ allora esistono $t_0, s_0 \in \mathbb{Q}$ tali per cui $t_0 + s_0 < a$ e se:

$$\begin{cases} f(x) < s_0 \\ g(x) < t_0 \end{cases}$$

allora $f(x) + g(x) < a$ ovvero $x \in \{f + g < a\}$.

$'' \subset ''$ Sia ora $x \in \{f + g < a\}$ e sia $r \in \mathbb{Q}$ tale che $f(x) + g(x) + 2r < a$, il che vale grazie al fatto che $\mathbb{Q}$ é denso in $\mathbb{R}$. Consideriamo ora $s, t \in \mathbb{Q}$ tali che:

$$\begin{cases} f(x) < s < f(x) + r \\ g(x) < t < g(x) + r \end{cases}$$

allora $x \in \{f < s\}$ e anche $x \in \{g < t\}$ quindi $x \in \{f < s\} \cap \{g < t\}$. Inoltre $s + t < g(x) + f(x) + 2r < a$.

Proviamo ora il caso $f \cdot g$. Lo suddividiamo in 3 sottocasi:

$''g = f''$ In questo caso $g \cdot f = f^2 = q \circ f$ dove $q(x) = x^2$ é la funzione quadrato, la quale é banalmente continua quindi per la proposizione 1.48, $q \circ f$ é misurabile quindi lo é $f \cdot g$.

$''g = c''$ ovvero costante. In questo caso $f \cdot g = cf$ possiamo considerare il prodotto per una costante come una funzione, la quale é, ancora una volta, banalmente continua quindi con la stessa argomentazione del caso precedente lo é anche $c \cdot f$.

$''f, g \neq \infty''$ Qui scriviamo $fg = \frac{(f+g)^2 - f^2 - g^2}{2}$ e analizziamo ogni singolo pezzetto f^2, g^2 sono misurabili per il primo caso mentre $(f + g)^2 = (f + g)(f + g)$ é misurabile perché lo é $(f + g)$ e applicando il primo caso, $\cdot\frac{1}{2}$ lo é per il secondo caso.

"*gener.*" Qui dobbiamo prendere per buono il punto 2 del teorema e definiamo:

$$f_k = (f \wedge k) \vee (-k)$$
$$g_k = (g \wedge k) \vee (-k)$$

dove con k indichiamo (e.g. la retta del piano) $y = k$. Per il punto 2 entrambe queste funzioni sono misurabili quindi anche $f_k \cdot g_k$ lo é. Ora sparando $k \to +\infty$ otteniamo che anche $g \cdot f$ é misurabile.

Analizziamo ora $|f|$ dove scriviamo $|f| = \alpha \circ f$ con $\alpha(t) = |t|$. Sappiamo che α é una funzione continua su $\overline{\mathbb{R}}$ quindi come sopra $\alpha \circ f$ é misurabile e di conseguenza anche $|f|$ lo é. Vediamo ora per $\frac{f}{g}$. Ci basta provare che $\frac{1}{g}$ é misurabile e la tesi segue facilmente applicando il prodotto. Vogliamo mostrare che $\{g < a\} \in \mathcal{A}\ \forall a \in \mathbb{R}$.

$a = 0$ allora $\{\frac{1}{g} < a\} = \{\frac{1}{g} < 0\} = \{g < 0\} \in \mathcal{A}$

$a < 0$ allora $\{\frac{1}{g} < a\}$ ma $\frac{1}{g(x)} < a$ se e solo se:

$$\begin{cases} g(x) < 0 \\ g(x) > \frac{1}{a} \end{cases}$$

ovvero se e solo se $\frac{1}{a} < g(x) < 0$. Perció $\{\frac{1}{g} < a\} = g < 0 \cap g > \frac{1}{a}$ il quale é un insieme misurabile, quindi ok.

$a > 0$ Stesso ragionamento di sopra.

2. Proviamo i casi dell'enunciato per ogni $a \in \mathbb{R}$. Vediamo innanzitutto $\inf\limits_k f_k$. Vogliamo dimostrare che $\{\inf\limits_k f_k \geq a\} = \bigcap\limits_k \{f_k \geq a\}$. Infatti abbiamo che $x \in \{\inf\limits_k f_k \geq a\}$ se e solo se $\inf\limits_k f_k(x) \geq a$ ovvero $f_k(x) \geq a$ per ogni k. Ma allora $x \in \bigcap\limits_k \{f_k \geq a\} \in \mathcal{A}$. Proviamo ora $\sup\limits_k f_k$, ma vediamo subito che:

$$\sup_k f_k = -\inf_k \{-f_k\}$$

che é misurabile. Da questi due appena dimostrati derivano anche max e min dell' enunciato punto 1. Andando avanti vediamo che secondo definizione:

$$\liminf_{k \to +\infty} = \lim m \to +\infty \inf_{k \geq m} f_k = \sup_m \inf_{k \geq m} f_k$$

il quale é misurabile. L'ultimo caso é analogo.

□

Definizione 1.53. Sia $\mathcal{X}$ un insieme, $f : \mathcal{X} \to \overline{\mathbb{R}}$ si dice *numerabilmente semplice* se $Im(f)$ é un insieme numerabile.

Capitolo 2

Teoria dell' Integrazione

Prima di tutto assumiamo la seguente convenzione:

$$0 \cdot \infty = \infty \cdot 0 = 0$$

Definizione 2.1. Sia $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio con misura e Σ la famiglia delle funzioni numerabilmente semplici $\varphi : \mathcal{X} \to \overline{\mathbb{R}}$. Allora:

1. Se $\varphi \in \Sigma$ e $\varphi \geq 0$ allora definiamo l'integrale semplice $\mathcal{I}_\mu(\varphi) = \sum\limits_i a_i \mu(E_i)$ dove a_i é l'immagine di φ e $E_i = \varphi^{-1}(a_i)$

2. Sia Σ^* la famiglia delle $\varphi \in \Sigma$ tali che almeno uno dei seguenti numeri é finito:
$$\mathcal{I}_\mu(\varphi \vee 0), \qquad \mathcal{I}_\mu((-\varphi) \vee 0)$$
Se $\varphi \in \Sigma^*$ poniamo $\mathcal{I}_\mu(\varphi) = \mathcal{I}_\mu(\varphi \vee 0) - \mathcal{I}_\mu((-\varphi) \vee 0)$

Proposizione 2.2. Sia $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio con misura. Allora:

$$\mathcal{I}_\mu(\varphi) \leq \mathcal{I}_\mu(\psi)$$

per ogni $\varphi, \psi \in \Sigma^*$ tale che $\varphi \leq \psi$ $\mu - q.o.$ i.e. $\exists Z \in \mathcal{A}$ tale che $\mu(Z) = 0$ e $\varphi(x) \leq \psi(x)$ $\forall x \in \mathcal{X} \setminus Z$.
Di conseguenza se consideriamo una funzione $f : \mathcal{X} \to \overline{\mathbb{R}}$ e poniamo:

$$\Sigma_-(f) := \{\varphi \in \Sigma^* | \varphi \leq f,\ \mu - q.o.\}$$

$$\Sigma_+(f) := \{\varphi \in \Sigma^* | \varphi \geq f,\ \mu - q.o.\}$$

Allora vale la seguente disuguaglianza:

$$\sup\{\mathcal{I}_\mu(\varphi) | \varphi \in \Sigma_-(f)\} \leq \inf\{\mathcal{I}_\mu(\psi) | \psi \in \Sigma_+(f)\}$$

Dimostrazione. Grazie alla semplicitá numerabile di φ e ψ abbiamo che gli insiemi $\{a_i\}_i$ e $\{b_j\}_j$ sono numerabili. Ora poniamo $A_i = \varphi^{-1}(\{a_i\})$ e $B_j = \psi^{-1}(\{b_j\})$, e vediamo che gli A_i sono 2-2 disgiunti e lo stesso vale per i B_i, inoltre $\bigcup\limits_i A_i = \mathcal{X} = \bigcup\limits_j B_j$.
Ora:

$$A_i = A_i \cap \mathcal{X} = A_i \cap \bigcup_j B_j = \bigcup_j A_i \cap B_j$$

$$B_j = B_j \cap \mathcal{X} = B_j \cap \bigcup_i A_i = \bigcup_i B_j \cap A_i$$

Ora per definizione di integrale semplice abbiamo:

$$\mathcal{I}_\mu(\varphi) = \mathcal{I}_\mu(\varphi \vee 0) - \mathcal{I}\mu((-\varphi) \vee 0) = \sum_{i,\ a_i \geq 0} a_i \mu(A_i) - \sum_{i,\ a_i < 0} -a_i \mu(A_i) =$$

$$= \sum_i a_i \mu(A_i) = \sum_i a_i \sum_j \mu(A_i \cap B_j) = \sum_{i,j} a_i \mu(A_i \cap B_j)$$

la penultima disuguaglianza deriva dal fatto che tutti i B_j sono 2-2 disgiunti perció lo sono anche i $B_j \cap A_i$ per ogni i, j.
Procediamo allo stesso modo per $\mathcal{I}_\mu(\psi)$ quindi quello che vogliamo dimostrare é che:

$$a_i \mu(A_i \cap B_j) \leq b_i \mu(A_i \cap B_j) \ \forall i, j$$

il che comporterá $\mathcal{I}_\mu(\varphi) \leq \mathcal{I}_\mu(\psi)$. Abbiamo da distinguere due casi:

- se $A_i \cap B_j = \emptyset$ allora $0 \leq 0$ e abbiamo finito.
- se invece $A_i \cap B_j \neq \emptyset$ allora $\exists x \in A_i \cap B_j$ tale che:

$$\begin{cases} \varphi(x) = a_i \\ \psi(x) = b_j \end{cases}$$

  Ma per definizione $\varphi(x) \leq \psi(x) \Rightarrow a_i \leq b_j$ e di conseguenza:

$$a_i \mu(A_i \cap B_j) \leq b_i \mu(A_i \cap B_j)$$

□

Definizione 2.3. Sia $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mu)$ spazio con misura e $f : \mathcal{X} \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione. Allora:

1. L'integrale superiore di f é il numero:

$$\int^* f d\mu = \inf\{\mathcal{I}_\mu(\varphi) \mid \varphi \in \Sigma_+(f)\}$$

mentre l'integrale inferiore é il numero:

$$\int_* f d\mu = \sup\{\mathcal{I}_\mu(\psi) \mid \psi \in \Sigma_-(f)\}$$

e notiamo subito che $\int^* f d\mu \leq \int_* f d\mu$.

2. Si dice che f é integrabile se f é misurabile e se:

$$\int^* f d\mu = \int_* f d\mu$$

in tal caso questo numero é detto *integrale* di f ed é indicato con $\int f d\mu$.

3. Si dice che f é sommabile se é integrabile e se $\int f d\mu$ é finito.

Notiamo subito la seguente relazione:

$$sommabile \subset integrabile \subset misurabile$$

Osservazione 2.4. Sia $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio con misura, $f, g : \mathcal{X} \to \overline{\mathbb{R}}$ due funzioni misurabili tali che $f = g \ \mu - q.o.$ allora:

$$\Sigma_-(f) = \Sigma_-(g) \quad e \quad \Sigma_+(f) = \Sigma_+(g)$$

e dunque:

$$\int^* f d\mu = \int^* g d\mu \quad e \quad \int_* f d\mu = \int_* g d\mu$$

In particolare f é integrabile se e solo se g é integrabile.

Definizione 2.5. Sia $A \subset \mathcal{X}$ un insieme, la funzione caratteristica $\chi_A : \mathcal{X} \to \overline{\mathbb{R}}$ é definita come:

$$\chi_A := \begin{cases} 1 \ se \ x \in A \\ 0 \ altrimenti \end{cases}$$

Vediamo ora di provare alcune proprietá fondamentali dell' integrale.

Teorema 2.6. *Sia $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio con misura, valgono le seguenti proprietá:*

1. *Se $\varphi \in \Sigma^*$ allora φ é integrabile e si ha che*

$$\int \varphi d\mu = \mathcal{I}_\mu(\varphi)$$

diremo che l'integrale estende l'integrale semplice. In particolare se $\mathcal{I}_\mu(\varphi)$ é finito allora φ é sommabile.

2. *Una funzione sommabile é finita $\mu - q.o.$*

3. *Siano $f, g : \mathcal{X} \to \overline{\mathbb{R}}$ sommabili allora per $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ abbiamo $\alpha f + \beta g$ é sommabile e :*

$$\int (\alpha f + \beta g) d\mu = \alpha \int f d\mu + \beta \int g d\mu$$

similmente a uno spazio vettoriale.

4. *Siano f, g integrabili tali che $f \leq g$ $\mu - q.o.$ allora $\int f d\mu \leq \int g d\mu$. Questa é detta monotonia integrale.*

5. *Sia f sommabile e $A \in \mathcal{A}$ allora $f\chi_A$ é sommabile*

6. *Sia f misurabile. Allora:*

$$f \textit{ sommabile} \iff |f| \textit{ sommabile}$$

7. *Se f é sommabile allora $|\int f d\mu| \leq \int |f| d\mu$*

Dimostrazione. 1. Vediamo che se $\varphi \in \Sigma^*$ allora:

$$\begin{cases} \varphi \in \Sigma_-(f) \\ \varphi \in \Sigma_+(f) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \int_* \varphi d\mu = \sup\{\mathcal{I}_\mu(\psi) \mid \psi \in \Sigma_-(f)\} = \mathcal{I}_\mu(\varphi) \\ \int^* \varphi d\mu = \inf\{\mathcal{I}_\mu(\psi) \mid \psi \in \Sigma_+(f)\} = \mathcal{I}_\mu(\varphi) \end{cases}$$

quindi otteniamo la relazione seguente:

$$\int_* \varphi d\mu = \int^* \varphi d\mu = \mathcal{I}_\mu(\varphi)$$

perció φ é integrabile e vale $\int \varphi d\mu = \mathcal{I}_\mu(\varphi)$

2. Se f é sommabile allora $\int f d\mu = \int_* f d\mu = \int^* f d\mu$ ed esistono $\varphi \in \Sigma_-(f)$ e $\psi \in \Sigma_+(f)$ tali che:

$$\begin{cases} \mathcal{I}_\mu(\psi) < \int^* f d\mu + 1 \\ \mathcal{I}_\mu(\varphi) > \int_* f d\mu - 1 \end{cases}$$

Ovvero riusciamo a trovare una ψ di poco maggiore dell' inf che determina l'integrale superiore. La stessa cosa per φ e l'integrale inferiore. Vediamo anche che la parte a destra di entrambe le disequazioni é finita grazie alla sommabilitá di f. Consideriamo la funzione ψ. Denotiamo con $\{b_j\}_j = Im(\psi)$ e $B_j = \psi(b_j)$ e allora $\psi = \sum_j b_j \chi_{B_j}$. Grazie a quanto detto sopra vediamo che:

$$-\infty < \sum_j b_j \mu(B_j) < +\infty \tag{2.1}$$

Dove la parte centrale é ovviamente $\mathcal{I}_\mu(\psi)$. Mostriamo che $\psi < +\infty$ e poi, siccome $f < \psi$ otteniamo la tesi per $+\infty$, e lo stesso ragionamento si applicherá con φ per dimostrare che $f > -\infty$. Abbiamo 2 casi:

- $\exists j$ tale che $b_j = +\infty$ o $b_j = -\infty$ allora per mantenere l'integrale semplice finito dovrá essere $\mu(B_j) = 0$.
- Se per ogni j, b_j é finito la tesi é banale.

$\square$