

# Analisi Matematica III

*Alex Pellegrini*

# Indice

<b>I</b>	<b>Teoria Della Misura</b>	<b>2</b>
<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>3</b>
1.1	Misura di Peano-Jordan . . . . .	3
1.2	$\sigma$ -algebra . . . . .	9
1.3	Misura Metrica . . . . .	11
1.4	Teoremi di Approssimazione . . . . .	16

**Parte I**

**Teoria Della Misura**

# Capitolo 1

## Introduzione

**Definizione 1.1.** Una *misura esterna* sull'insieme  $\mathcal{X}$  é una mappa  $\varphi : 2^{\mathcal{X}} \rightarrow [0, +\infty]$  tale che :

1.  $\varphi(\emptyset) = 0$
2.  $\varphi(E) \leq \varphi(F)$  se  $E \subset F \subset \mathcal{X}$  (monotonia)
3.  $\varphi(\bigcup_j E_j) \leq \sum_j \varphi(E_j)$  ( $\sigma$ -subadditivit )

**Esempio 1.2.**

**Esempio 1.3.**

**Esempio 1.4.**

### 1.1 Misura di Peano-Jordan

Sia  $A \subset \mathbb{R}^2$  limitato.

Sia  $\mathcal{R}_A$  la famiglia di ricoprimenti finiti di  $A$ , formati da rettangoli aperti in  $\mathbb{R}^2$  della forma  $(a, b) \times (c, d)$ .

Sia  $\mathcal{R} = \{R_1, R_2, \dots, R_k\}$  un ricoprimento finito di  $A$ . Indichiamo con  $m(R_i)$

l'area di  $R_i$ . Ovviamente  $A \subset \bigcup_{j=1}^k R_j$ .

**Definizione 1.5.** La *misura superiore di Jordan* di un insieme  $A$  é definita come:

$$J^+(A) := \inf_{\mathcal{R} \in \mathcal{R}_A} \sum_{R_j \in \mathcal{R}} m(R_j)$$

Ovvero prendiamo la minore delle aree dei ricoprimenti di  $A$ .

La misura superiore di Peano-Jordan é definita anche per  $A$  non limitato come:

$$J^+(A) := \lim_{\rho \rightarrow +\infty} J^+(A \cap B_\rho(0, 0))$$

**Proposizione 1.6.** La misura superiore di Peano-Jordan **non** é una misura esterna.

*Dimostrazione.* Consideriamo  $A = (\mathbb{Q} \cap [0, 1]) \times (\mathbb{Q} \cap [0, 1])$ .  $A$  é formato dai punti razionali nel quadrato reale di lato 1 centrato nell' origine. Siccome  $\mathbb{Q}$  é denso in  $\mathbb{R}$  nessun punto razionale di  $A$  é punto interno (lo stesso vale per la parte puramente reale).

Scriviamo dunque  $A = \{P_1, P_2, \dots\}$ , ovvero  $A = \bigcup_{j=1}^{+\infty} P_j$  (infinito numerabile).

- Dimostriamo  $J^+(P_j) = 0$ .  
Sia  $Q_\varepsilon$  il quadrato aperto che ricopre il punto  $P_j$ . Abbiamo che  $J^+(P_j) \leq m(Q_\varepsilon) = \varepsilon^2 \Rightarrow J^+(P_j) = 0$  per l'arbitrarietá di  $\varepsilon$ .
- Dimostriamo che  $J^+(A) \geq 1$ .  
Sia  $\mathcal{R}$  un ricoprimento di  $A$ , allora

$$1 \leq \text{area}(\mathcal{R}) \leq \sum_{R_j \in \mathcal{R}} m(R_j)$$

Allora abbiamo che:

$$\inf_{\mathcal{R} \in \mathcal{R}_A} \sum_{R_j \in \mathcal{R}} m(R_j) \geq 1$$

Concludiamo che  $J^+(A) \geq 1 > \sum_{j=1}^{\infty} J^+(P_j) = 0$ . Quindi la misura superiore di Jordan non é esterna in quanto non rispetta la  $\sigma$ -subadditivitá  $\square$

Consideriamo l' insieme  $\mathcal{T}_A = \{\{R_1, \dots, R_k\} | k < +\infty, R_j \subset A, R_i \cap R_j = \emptyset \text{ se } i \neq j\}$ , ovvero l'insieme dei ricoprimenti inscritti ad  $A$  (formati da rettangoli aperti) a due a due disgiunti.

**Definizione 1.7.** La *misura inferiore di Jordan* é definita come:

$$J^-(A) := \begin{cases} 0 & \text{se } \mathcal{T}_A = \emptyset \\ \sup_{\mathcal{T} \in \mathcal{T}_A} \sum_{R_j \in \mathcal{T}} m(R_j) & \text{se } \mathcal{T}_A \neq \emptyset \end{cases}$$

Il massimo delle aree dei ricoprimenti inscritti di  $A$ .

**Definizione 1.8.**  $A$  é *misurabile* secondo Jordan se  $J^-(A) = J^+(A)$ , in tal caso il valore si indica con  $J(A)$ .

Ovviamente  $J^-(A) \leq J^+(A)$ , per  $A$  come sopra abbiamo  $\mathcal{T}_A = \emptyset \Rightarrow J^-(A) = 0$  inoltre come visto prima  $J^+(A) \geq 1$ . Dunque  $A$  non é misurabile secondo Jordan. Detto questo la mappa  $J : M_J \rightarrow [0, +\infty]$ , con  $M_J$  insieme dei misurabili secondo Jordan, ha dominio  $M_J \neq 2^{\mathbb{R}^2}$ , quindi non può essere misura esterna.

**Definizione 1.9.** Sia  $\varphi : 2^{\mathcal{X}} \rightarrow [0, +\infty]$  una misura esterna su  $\mathcal{X}$ .  $E \subset \mathcal{X}$  é *misurabile* se  $\forall A \subset \mathcal{X}$ :

$$\varphi(A) = \varphi(A \cap E) + \varphi(A \cap E^c);$$

Questa proprietà é detta *buon spezzamento* indotto da  $E$ . La famiglia degli insiemi misurabili secondo  $\varphi$  é indicata con  $\mathcal{M}_\varphi$ .

**Osservazione 1.10.** Notiamo subito che  $\mathcal{X}, \emptyset \in \mathcal{M}_\varphi$ .

**Osservazione 1.11.** Per  $E \subset \mathcal{X}$  e  $\forall A \subset \mathcal{X}$

$$A = (A \cap E) \cup (A \cap E^c)$$

allora per  $\sigma$ -subadditività

$$\varphi((A \cap E) \cup (A \cap E^c)) \leq \varphi(A \cap E) + \varphi(A \cap E^c)$$

Quindi per dimostrare che un certo  $E \in \mathcal{M}_\varphi$  basta dimostrare che vale la relazione  $\geq$ .

Il seguente teorema enuncia delle proprietà di chiusura della famiglia  $\mathcal{M}_\varphi$

**Teorema 1.12.** Sia  $\varphi : 2^{\mathcal{X}} \rightarrow [0, +\infty]$  una misura esterna su  $\mathcal{X}$ . Allora valgono le seguenti proprietà:

1.  $\mathcal{M}_\varphi$  é *c-chiusa* (chiusura rispetto al complementare)
2. Se  $E \subset \mathcal{X}$  con  $\varphi(E) = 0 \Rightarrow E \in \mathcal{M}_\varphi$  (allora per 1 anche  $\mathcal{X} \in \mathcal{M}_\varphi$ )
3. Se  $E_1, E_2, \dots, E_n$  con  $E_i \in \mathcal{M}_\varphi \Rightarrow \bigcap_{j=1}^n E_j \in \mathcal{M}_\varphi$  (quindi anche  $\bigcup_j^n E_j \in \mathcal{M}_\varphi$ )
4. Sia  $\{E_j\}_j \subset \mathcal{M}_\varphi$  famiglia numerabile (2-2 disgiunta)  $\Rightarrow S = \bigcup_j E_j \in \mathcal{M}_\varphi$  e vale

$$\varphi(A) \geq \sum_j \varphi(A \cap E_j) + \varphi(A \cap S^c) \quad \forall A \subset \mathcal{X}$$

5. Se  $\{E_j\}_j$  come in 4)  $\Rightarrow \varphi(\bigcup_j E_j) = \sum_j \varphi(E_j)$

*Dimostrazione.* 1. Sia  $E \in \mathcal{M}_\varphi$  e consideriamo  $E^c$  devo provare buon spezzamento  $\forall A \subset \mathcal{X}$ :

$$\varphi(A \cap E^c) + \varphi(A \cap (E^c)^c) = \varphi(A \cap E^c) + \varphi(A \cap E) = \varphi(A)$$

2. Per monotonia abbiamo che  $\varphi(A \cap E) \leq \varphi(E)$  (poiché  $(A \cap E) \subset E$ ). Siccome, per ipotesi,  $\varphi(E) = 0$  allora anche  $\varphi(A \cap E) = 0$  quindi possiamo scrivere:

$$\varphi(A \cap E) + \varphi(A \cap E^c) = 0 + \varphi(A \cap E^c) \leq \varphi(A)$$

Abbiamo visto nell'osservazione 1.11 che basta dimostrare questa disuguaglianza per ottenere la tesi.

3. Procediamo per induzione su  $n$ .

- $n = 1$  La tesi é banale.
- $n = 2$  Dimostro questo poi l'induzione deriva facilmente. Siano  $E_1, E_2 \in \mathcal{M}_\varphi$  quindi devo provare il buon spezzamento  $\forall A \subset \mathcal{X}$ . Siccome  $E_1, E_2 \in \mathcal{M}_\varphi$ :

$$\varphi(A) = \varphi(A \cap E_1) + \varphi(A \cap E_1^c) \quad (1.1)$$

Ora per il buon spezzamento indotto su  $A \cap E_1$  da  $E_2$  riscriviamo il secondo termine dell'equazione come:

$$\varphi(A \cap E_1) = \varphi(A \cap E_1 \cap E_2) + \varphi(A \cap E_1^c \cap E_2^c)$$

Ora sostituendo in 1.1 otteniamo:

$$\varphi(A) = \varphi(A \cap E_1 \cap E_2) + \varphi(A \cap E_1^c \cap E_2^c) + \varphi(A \cap E_1^c) \quad (1.2)$$

Per  $\sigma$ -subadditività della misura il terzo e quarto termine possono essere minorati come segue:

$$\begin{aligned} \varphi(A \cap E_1^c \cap E_2^c) + \varphi(A \cap E_1^c) &\geq \varphi((A \cap E_1^c \cap E_2^c) \cup (A \cap E_1^c)) \\ &= \varphi(A \cap [(E_1^c \cap E_2^c) \cup E_1^c]) = \varphi(A \cap [(E_1^c \cup E_1^c) \cap (E_2^c \cup E_1^c)]) \\ &= \varphi(A \cap E_1^c \cup E_2^c). \end{aligned}$$

Sostituendo in 1.2 otteniamo infine:

$$\varphi(A) \geq \varphi(A \cap E_1 \cap E_2) + \varphi(A \cap E_1^c \cup E_2^c) \quad (1.3)$$

Dove ovviamente  $E_1^c \cup E_2^c = (E_1 \cap E_2)^c \Rightarrow E_1 \cap E_2 \in \mathcal{M}_\varphi$ .

Mostriamo ora che  $\bigcup_j^n E_j \in \mathcal{M}_\varphi$ . Per ogni valore di  $n$  abbiamo:

$$\bigcup_j^n E_j = [(\bigcup_j^n E_j)^c]^c = [(\bigcap_j^n E_j^c)]^c$$

Analizziamo l'ultimo termine.  $E_j^c \in \mathcal{M}_\varphi$  per 1). L'intersezione  $\bigcap_j^n E_j^c \in \mathcal{M}_\varphi$  per il punto 3) mentre il tutto é misurabile nuovamente per il punto 1).

4. Dimostriamo prima la seconda parte dell' enunciato. Sia  $A \subset \mathcal{X}$  qualsiasi allora, per il buon spezzamento indotto da  $E_1$ :

$$\varphi(A) = \varphi(A \cap E_1) + \varphi(A \cap E_1^c) \quad (1.4)$$

Dunque per il buon spezzamento indotto da  $E_2$  riscriviamo 1.4 modificando l'ultimo termine:

$$\varphi(A) = \varphi(A \cap E_1) + \varphi(A \cap (E_1^c \cap E_2)) + \varphi(A \cap (E_1^c \cap E_2^c)) \quad (1.5)$$

Ora, siccome gli  $E_j$  sono 2-2 disgiunti  $E_i \cap E_j^c = E_i$  per  $i \neq j$  in quanto  $E_i \subset E_j^c$ , sostituiamo in 1.5 che diventa come segue:

$$\varphi(A) = \varphi(A \cap E_1) + \varphi(A \cap E_2) + \varphi(A \cap E_1^c \cap E_2^c) \quad (1.6)$$

La tesi segue facilmente ora, ma eseguiamo ancora un passo per chiarezza. Esattamente come abbiamo fatto per il buon spezzamento indotto da  $E_2$  possiamo procedere con  $E_3$ . Prendiamo l'ultimo termine di 1.6 e riscriviamolo come:

$$\varphi(A \cap E_1^c \cap E_2^c) = \varphi(A \cap E_1^c \cap E_2^c \cap E_3) + \varphi(A \cap E_1^c \cap E_2^c \cap E_3^c)$$

Per la stessa argomentazione che ci ha portato a 1.6 abbiamo  $\varphi(A \cap E_1^c \cap E_2^c \cap E_3) = \varphi(A \cap E_3)$  in quanto  $E_3 \subset E_i^c$  per  $i = 1, 2$  (a dire la verità vale  $\forall i \neq 3$ ). Riscriviamo 1.6:

$$\begin{aligned} \varphi(A) &= \varphi(A \cap E_1) + \varphi(A \cap E_2) + \varphi(A \cap E_3) + \varphi(A \cap E_1^c \cap E_2^c \cap E_3^c) \\ &= \sum_{j=1}^n \varphi(E_j) + \varphi(\bigcap_{j=1}^n E_j^c) \end{aligned}$$

Ora  $\bigcap_{j=1}^n E_j^c = (\bigcup_{j=1}^n E_j)^c \supset (\bigcup_{j=1}^\infty E_j)^c = S$  quindi per monotonia della misura  $\varphi(A \cap (\bigcup_{j=1}^n E_j)^c) \geq \varphi(A \cap S^c)$ , e otteniamo il limite:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi(A) \geq \sum_{j=1}^\infty \varphi(A \cap E_j) + \varphi(A \cap S^c) \quad (1.7)$$



Dimostriamo ora la prima parte sfruttando quanto appena dimostrato. Sia dunque  $S \in \mathcal{M}_\varphi$  allora

$$\varphi(A \cap S) = \varphi(A \cap (\bigcup_j E_j)) = \varphi(\bigcup_j A \cap E_j) \leq \sum_j \varphi(A \cap E_j)$$

per  $\sigma$ -subadditivit . Allora

$$\varphi(A \cap S) + \varphi(A \cap S^c) \leq \sum_j \varphi(A \cap E_j) + \varphi(A \cap S^c) \leq \varphi(A)$$

dove l'ultima disuguaglianza vale per quanto dimostrato sopra del punto 4).

5. Per la seconda parte del punto 4) con  $A = S$  otteniamo:

$$\varphi(\bigcup_j E_j) \geq \sum_j \varphi(E_j)$$

in quanto  $E_j \in S$  e  $S \cap S^c = \emptyset$ . L'altro verso della disuguaglianza lo otteniamo per  $\sigma$ -subadditivit .

□

Quello che facciamo ora   togliere un vincolo dal punto 4) del teorema precedente, ovvero il fatto che gli  $E_j$  nella famiglia  $\{E_j\}_j \in \mathcal{M}_\varphi$  non siano per forza 2-2 disgiunti. Quindi rinunciamo il punto 4).

**Osservazione 1.13.** Sia  $\{E_j\}_j \in \mathcal{M}_\varphi$  numerabile, allora  $\bigcup_j E_j \in \mathcal{M}_\varphi$ .

*Dimostrazione.* Introduciamo il seguente tipo di insieme:

- $E_1^* = E_1$
- $E_n^* = E_n \setminus \bigcup_{j=1}^n E_j = E_n \cap (\bigcup_{j=1}^n E_j)^c$  in quanto togliere un insieme equivale a intersecare con il complementare.

Ora notiamo subito che  $E_n \cap (\bigcup_{j=1}^n E_j)^c \in \mathcal{M}_\varphi$  per i punti 1) e 3) del teorema

precedente, quindi anche  $E_n^* \in \mathcal{M}_\varphi$ . Inoltre abbiamo che  $\bigcup_{j=1}^n E_j^* = \bigcup_{j=1}^n E_j \quad \forall n$

per il punto 4) del teorema precedente, poich  gli  $E_j^*$  sono 2-2 disgiunti. Allora  $\bigcup_j E_j \in \mathcal{M}_\varphi$ . □

## 1.2 $\sigma$ -algebra

Cerchiamo di identificare la struttura della famiglia  $\mathcal{M}_\varphi$ . Introduciamo quindi la seguente nozione:

**Definizione 1.14.** Una famiglia non vuota  $\Sigma \subset 2^{\mathcal{X}}$  é una  $\sigma$ -algebra se ha le seguenti proprietà:

1.  $E \in \Sigma \Rightarrow E^c \in \Sigma$  (c-chiusura)
2.  $\{E_j\}_j \subset \Sigma$  famiglia numerabile allora  $\bigcup_j E_j \in \Sigma$

**Proposizione 1.15.** Se  $\varphi : 2^{\mathcal{X}} \rightarrow [0, +\infty]$  é misura esterna allora  $\mathcal{M}_\varphi$  é una  $\sigma$ -algebra.

*Dimostrazione.* Direttamente dal teorema precedente (punti 1 e 4 principalmente).  $\square$

**Osservazione 1.16.** Se  $\Sigma$  é una  $\sigma$ -algebra in  $\mathcal{X}$  allora:

1.  $\emptyset, \mathcal{X} \in \Sigma$  poiché siccome  $\Sigma$  é non-vuota allora  $\exists E \in \Sigma$  quindi  $E^c \in \Sigma$  e  $E \cup E^c = \mathcal{X} \in \Sigma$  inoltre  $E \cap E^c = [(E \cap E^c)^c]^c = [E^c \cup E]^c = \mathcal{X}^c = \emptyset \in \Sigma$ .
2.  $\Sigma$  é chiusa rispetto all'intersezione numerabile, infatti sia  $\{E_j\}_j \subset \Sigma$  una famiglia numerabile di elementi di  $\Sigma$  allora  $\bigcap_j E_j = [(\bigcup_j E_j^c)^c]^c = [(\bigcup_j E_j^c)]^c$ . Ora  $E_j^c \in \Sigma$  per definizione,  $\bigcup_j E_j^c \in \Sigma$  ancora per definizione, poi  $\Sigma$  é c-chiusa. La tesi é dimostrata.

Enunciamo il teorema di continuità sull'insieme di misurabili secondo una misura esterna.

**Teorema 1.17.** Sia  $\varphi : 2^{\mathcal{X}} \rightarrow [0, +\infty]$  una misura esterna. Allora

1. (Continuità dal basso) Sia  $\{E_j\}_j \subset \mathcal{M}_\varphi$  una famiglia numerabile e crescente (i.e.  $E_j \subset E_{j+1}$ ), allora:

$$\varphi\left(\bigcup_j E_j\right) = \lim_j \varphi(E_j)$$

2. (Continuità dall'alto) Sia ora  $\{E_j\}_j \subset \mathcal{M}_\varphi$  una famiglia numerabile e decrescente (i.e.  $E_{j+1} \subset E_j$ ) con  $\varphi(E_1) < +\infty$ , allora:

$$\varphi\left(\bigcap_j E_j\right) = \lim_j \varphi(E_j)$$

*Dimostrazione.* Notiamo innanzitutto che il limite nei due punti esiste in entrambi i casi in quanto stiamo trattando delle successioni monotone.

1. Definiamo  $E_j^* = E_j \setminus E_{j-1}$  con  $E_0^* = \emptyset$ . Notiamo subito che  $E_j^* \in \mathcal{M}_\varphi$  in quanto  $E_j^* = E_j \cap E_{j-1}^c$  ed entrambi i termini sono misurabili per ipotesi. Inoltre  $\bigcup_j^n E_j^* = E_n = \bigcup_j^n E_j$ , quindi generalizzando all'unione numerabile  $\bigcup_j E_j^* = \bigcup_j E_j$ . Ora, é facile capire che gli  $E_j^*$  sono 2-2 disgiunti quindi vale la  $\sigma$ -additivit  (NB: non  $\sigma$ -SUBadditivit ), ovvero:

$$\begin{aligned}\varphi\left(\bigcup_j E_j\right) &= \varphi\left(\bigcup_j E_j^*\right) = \sum_j \varphi(E_j^*) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{j=1}^n \varphi(E_j) = \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi\left(\bigcup_{j=1}^n E_j\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi(E_n)\end{aligned}$$

Dove la seconda uguaglianza vale per il punto 5 del teorema 1.12.

2. Notiamo che  $E_1$  pu  essere illimitato avendo bens  area finita. Poniamo  $F_j = E_1 \setminus E_j$  e notiamo che é misurabile per un'argomentazione simile a quella sviluppata per gli  $E_j^*$  nel punto 1. Ora gli  $F_j$  formano una successione crescente al crescere di  $j$  quindi per il punto 1 abbiamo che  $\varphi(\bigcup_j F_j) = \lim_j \varphi(F_j)$  con

$$\bigcup_j F_j = \bigcup_j E_1 \cap E_j^c = E_1 \cap \bigcup_j E_j^c = E_1 \cap \left(\bigcup_j E_j\right)^c = E_1 \setminus \bigcap_j E_j$$

Quindi passando alla misura otteniamo, usando il buon spezzamento indotto da  $\bigcap_j E_j$ :

$$\varphi(E_1) = \varphi\left(E_1 \cap \bigcap_j E_j\right) + \varphi\left(E_1 \cap \left(\bigcap_j E_j\right)^c\right).$$

L'ultimo termine é proprio  $\varphi(\bigcup_j F_j)$  quindi ricaviamo:

$$\varphi\left(\bigcup_j F_j\right) = \varphi(E_1) - \varphi\left(E_1 \cap \bigcap_j E_j\right) = \varphi(E_1) - \varphi\left(\bigcap_j E_j\right) \quad (1.8)$$

(L'ultima uguaglianza vale in quanto l'intersezione di tutti gli  $E_j$  é contenuta in  $E_1$ .) D'altro canto  $F_j = E_1 \cap E_j^c$  quindi possiamo usare il buon spezzamento indotto da un singolo  $E_j$  come segue:

$$\varphi(E_1) = \varphi(E_1 \cap E_j) + \varphi(E_1 \cap E_j^c)$$

Notiamo che il secondo termine é  $\varphi(E_j)$  mentre il terzo é proprio  $\varphi(F_j)$ .  
Quindi scriviamo:

$$\varphi(F_j) = \varphi(E_1) - \varphi(E_j) \quad (1.9)$$

Quindi unendo le equazioni 1.8 e 1.9 otteniamo:

$$\varphi\left(\bigcup_j F_j\right) = \varphi(E_1) - \varphi\left(\bigcap_j E_j\right) = \lim_j [\varphi(E_1) - \varphi(E_j)] = \varphi(E_1) - \lim_j \varphi(E_j)$$

Abbiamo quindi ottenuto la tesi:

$$\varphi\left(\bigcap_j E_j\right) = \lim_j \varphi(E_j)$$

□

**Osservazione 1.18.** Nel punto 2 del teorema precedente se non assumiamo che  $\varphi(E_1) < +\infty$  il teorema fallisce.

Facciamo un esempio:

**Esempio 1.19.** Consideriamo l'insieme  $\mathcal{X} = \mathbb{N}$  e la misura  $\varphi = |\cdot|$ , consideriamo anche le semirette  $E_j = \{j, j+1, j+2, \dots\}$ . Vediamo subito che  $E_{j+1} \subset E_j$  quindi abbiamo una famiglia numerabile e decrescente. Ora  $\mathcal{M}_\varphi = 2^{\mathcal{X}}$  quindi ogni  $E_j \in \mathcal{M}_\varphi$ . Ora  $\varphi(\bigcap_j E_j) = 0$  mentre  $\varphi(E_j) = +\infty \forall j$ . Questo smentisce il teorema.

### 1.3 Misura Metrica

**Definizione 1.20.** Una misura esterna  $\varphi$  su uno spazio metrico  $(\mathcal{X}, d)$  é detta di Caratheodory o metrica se  $\forall A, B \in 2^{\mathcal{X}}$  tali che  $d(A, B) = \inf\{d(a, b) | a \in A, b \in B\} > 0$  vale:

$$\varphi(A \cup B) = \varphi(A) + \varphi(B) \quad (1.10)$$

In altre parole una misura si dice metrica se é additiva su insiemi a distanza positiva (disgiunti). Il teorema seguente dimostra che in uno spazio metrico con una misura metrica tutti i chiusi sono misurabili (i.e.  $\mathcal{F} \subset \mathcal{M}_\varphi$ ) Anticipiamo inoltre che questo teorema comporta il fatto che una misura metrica é Boreliana in quanto un Boreliano, essendo dato da unione o intersezione numerabili di chiusi (o aperti), é misurabile.

**Teorema 1.21.** (Caratheodory) Sia  $(\mathcal{X}, d)$  uno spazio metrico e  $\varphi : 2^{\mathcal{X}} \rightarrow [0, +\infty]$  una misura metrica, allora ogni chiuso in  $\mathcal{X}$  é misurabile.

*Dimostrazione.* Dobbiamo verificare che i chiusi inducono il buon spezzamento della misura su qualsiasi insieme. Sia dunque  $C \in \mathcal{C}$  e  $A \subset \mathcal{X}$  un insieme qualsiasi. Come sappiamo ci basta dimostrare che  $\varphi(A) \geq \varphi((A \cap C) \cup (A \cap C^c))$ . La tesi é banale se  $\varphi(A) = +\infty$  quindi supponiamo che  $A$  abbia misura finita. Introduciamo il seguente tipo di insieme: per  $h > 0$  poniamo  $C_h = \{x \in \mathcal{X} | d(x, C) \leq \frac{1}{h}\}$  (geometricamente  $C_h \setminus C$  é un'intercapedine di larghezza  $\frac{1}{h}$  attorno a  $C$ ). Notiamo che anche  $C_h$  risulta chiuso in quanto nella sua definizione abbiamo l'uguaglianza.

$C_h$  é dunque composto cosí:

$$C_h = \{x \in \mathcal{X} | d(x, C) = 0\} \cup \left\{x \in \mathcal{X} | d(x, C) \in (0, \frac{1}{h}]\right\} \quad (1.11)$$

La prima parte dell'unione in 1.11 é chiaramente  $\overline{C} = C$ . Mentre nella seconda parte possiamo scrivere l'intervallo  $(0, \frac{1}{h}] = \bigcup_{j \geq h} (\frac{1}{j+1}, \frac{1}{j}]$ . Suddividiamo adesso  $C_h \setminus C$  in ulteriori intercapedini del tipo:

$$S_j = \left\{x \in \mathcal{X} | d(x, C) \in (\frac{1}{j+1}, \frac{1}{j}]\right\}$$

Ovvero scriviamo:

$$C_h = C \cup \left(\bigcup_{j \geq h} S_j\right)$$

Quindi ricaviamo  $C$  e dunque  $C^c$ :

$$C = C_h \setminus \bigcup_{j \geq h} S_j = C_h \cap \left(\bigcup_{j \geq h} S_j\right)^c$$

$$C^c = C_h^c \cup \left(\bigcup_{j \geq h} S_j\right)$$

Abbiamo dunque tutti gli strumenti per provare il buon spezzamento indotto da  $C$ . Prediamo dunque un  $A \subset \mathcal{X}$  e vediamo che  $(A \cap C) \cap (A \cap C_h^c) = \emptyset$  quindi per monotonia e meticitá della misura:

$$\varphi(A) \geq \varphi((A \cap C) \cup (A \cap C_h^c)) = \varphi(A \cap C) + \varphi(A \cap C_h^c) \quad (1.12)$$

Vogliamo dimostrare che  $\lim_{h \rightarrow +\infty} \varphi(A \cap C_h^c) = \varphi(A \cap C^c)$  cosí possiamo passare al limite nell'equazione 1.12. Quindi abbiamo per monotonia ( $C_h^c \subset C^c$ ) che:

$$\varphi(A \cap C_h^c) \leq \varphi(A \cap C^c)$$

Come abbiamo visto sopra la parte destra della disequazione diventa:

$$\varphi(A \cap C^c) = \varphi((A \cap C_h^c) \cup (A \cap \bigcup_{j \geq h} S_j)) \leq \varphi(A \cap C_h^c) + \sum_{j \geq h} \varphi(A \cap S_j)$$

Quello che vogliamo dimostrare che  $\sum_{j \geq h} \varphi(A \cap S_j)$  converge e quindi  $\lim_{h \rightarrow +\infty} \sum_{j \geq h} \varphi(A \cap S_j) \rightarrow 0$  quindi vale l'uguaglianza nella disequazione sopra. Dunque sia  $N > 0$  qualsiasi e:

$$\sum_{j=1}^N \varphi(A \cap S_j) = \sum_{j=1, j \text{ dispari}}^N \varphi(A \cap S_j) + \sum_{j=2, j \text{ pari}}^N \varphi(A \cap S_j)$$

Siccome la distanza tra due intercapedini indicizzate pari o tra due dispari la distanza é positiva, quindi per metricit  scriviamo:

$$\sum_{j=1}^N \varphi(A \cap S_j) = \varphi\left(\bigcup_{j=1, j \text{ dispari}}^N A \cap S_j\right) + \varphi\left(\bigcup_{j=2, j \text{ pari}}^N A \cap S_j\right)$$

Ora entrambi i termini sulla destra sono sottoinsiemi di  $A$  quindi per monotonia:

$$\varphi\left(\bigcup_{j=1, j \text{ dispari}}^N A \cap S_j\right) + \varphi\left(\bigcup_{j=2, j \text{ pari}}^N A \cap S_j\right) \leq 2\varphi(A) < +\infty \quad \forall N$$

E allora:

$$\sum_{j=1}^N \varphi(A \cap S_j) \leq 2\varphi(A) < +\infty$$

Abbiamo dunque dimostrato che tale sommatoria converge quindi l'intercapedine si assottiglia fino a sparire per  $h \rightarrow +\infty$  dunque il buon spezzamento segue e si ha la tesi.  $\square$

**Osservazione 1.22.** Vale il reciproco del teorema 1.21 (Caratheodory) ovvero:

*Sia  $(\mathcal{X}, d)$  uno spazio metrico e  $\varphi : 2^{\mathcal{X}} \rightarrow [0, +\infty]$  una misura esterna tale che tutti i chiusi sono misurabili. Allora  $\varphi$  é metrica.*

**Proposizione 1.23.** Sia  $I \subset 2^{\mathcal{X}}$  e indichiamo con  $A_I$  la famiglia delle  $\sigma$ -algebre  $\Sigma$  su  $\mathcal{X}$  tali che  $I \subset \Sigma$ . Allora  $\Sigma_I = \bigcap_{\Sigma \in A_I} \Sigma$  é una  $\sigma$ -algebra su  $\mathcal{X}$  che contiene  $I$ , essa é detta la  $\sigma$ -algebra generata da  $I$ .

*Dimostrazione.* Dimostriamo che le due propriet  di  $\sigma$ -algebra sono soddisfatte.

1. Sia  $E \in \Sigma_I$  allora  $E \in \bigcap_{\Sigma \in A_I} \Sigma$  dunque  $\exists \Sigma$  tale che  $E \in \Sigma$ , quindi siccome  $\Sigma$  é una  $\sigma$ -algebra  $E^c \in \Sigma$ . Quindi torniamo indietro  $E^c \in \bigcap_{\Sigma \in A_I} \Sigma = \Sigma_I$

2. Sia  $\{E_j\}_j \subset \Sigma_I$  una famiglia numerabile allora  $\forall j \ E_j \in \Sigma_I$  allora  $E_j \in \Sigma \ \forall \Sigma \in A_I$  quindi  $\bigcup_j E_j \in \Sigma \ \forall \Sigma \in A_I$  perciò  $\bigcup_j E_j \in \bigcap_{\Sigma \in A_I} \Sigma = \Sigma_I$

□

**Osservazione 1.24.** Se  $I$  é una  $\sigma$ -algebra allora  $\Sigma_I = I$

*Dimostrazione.* "  $\supset$  " banale per definizione anche se  $I$  non é una  $\sigma$ -algebra.

"  $\subset$  " poiché  $I$  é una  $\sigma$ -algebra allora  $I \in A_I$  quindi é ovvio che  $\bigcap_{\Sigma \in A_I} \Sigma \subset I$

□

Andremo ora ad analizzare le  $\sigma$ -algebre generate da aperti, chiusi e compatti in uno spazio topologico. Idichiamo con  $\mathcal{K}$ ,  $\mathcal{F}$ ,  $\mathcal{G}$  rispettivamente i compatti, i chiusi e gli aperti.

**Proposizione 1.25.** Sia ora  $\mathcal{X}$  uno spazio topologico. Allora:

1.  $\Sigma_{\mathcal{F}} = \Sigma_{\mathcal{G}}$
2. Se  $\mathcal{X}$  é di Hausdorff allora  $\Sigma_{\mathcal{K}} \subset \Sigma_{\mathcal{F}}$
3. Se  $(\mathcal{X}, d)$  é uno spazio metrico separabile (i.e. esiste un sottoinsieme denso e numerabile) allora  $\Sigma_{\mathcal{K}} = \Sigma_{\mathcal{F}}$

*Dimostrazione.* 1. Osserviamo che  $A_{\mathcal{F}} = A_{\mathcal{G}}$  in quanto, siccome le  $\sigma$ -algebre sono c-chiuse e il complementare di un aperto é chiuso, una sigma algebra che contiene l'insieme degli aperti contiene a sua volta quello dei chiusi. Dunque:

$$\Sigma_{\mathcal{F}} = \bigcap_{\Sigma \in A_{\mathcal{F}}} \Sigma = \bigcap_{\Sigma \in A_{\mathcal{G}}} \Sigma = \Sigma_{\mathcal{G}}$$

2. Se  $\mathcal{X}$  é di Hausdorff allora i compatti sono chiusi (i.e.  $\mathcal{K} \subset \mathcal{F}$ ), questo significa che  $A_{\mathcal{F}} \subset A_{\mathcal{K}}$  dunque:

$$\Sigma_{\mathcal{K}} = \bigcap_{\Sigma \in A_{\mathcal{K}}} \Sigma \subset \bigcap_{\Sigma \in A_{\mathcal{F}}} \Sigma = \Sigma_{\mathcal{F}}$$

Abbiamo  $\subset$  sopra in quanto  $A_{\mathcal{K}}$  é piú numerosa di  $A_{\mathcal{F}}$  e la contiene. Quindi abbiamo piú termini nella famiglia delle  $\sigma$ -algebre che contengono i compatti su cui fare l'intersezione.

3. Per questo punto ci limitiamo al caso in cui  $\mathcal{X} = \mathbb{R}^n$  che sappiamo essere la chiusura dei razionali (i.e.  $\overline{\mathbb{Q}}^n = \mathbb{R}^n$ ) i quali formano un insieme denso e numerabile in  $\mathbb{R}$ . Quello che dobbiamo fare é dimostrare

che ogni aperto é unione numerabile di compatti, ovvero per il punto 1:

$$\Sigma_{\mathcal{F}} = \Sigma_{\mathcal{G}} \subset \Sigma_{\mathcal{K}}$$

infatti, se questo vale,  $\mathcal{G} \in \Sigma_{\mathcal{K}} \Rightarrow \Sigma_{\mathcal{G}} = \Sigma_{\mathcal{K}}$  per il punto 2. Dimostriamo che un aperto é unione di compatti. Sia  $A \subset \mathbb{R}^n$  un aperto e  $B_A = \left\{ \overline{B_q(r)} \mid q \in \mathbb{Q}^n, r \in \mathbb{Q}, r > 0, \overline{B_q(r)} \subset A \right\}$  l'insieme, numerabile, delle bolle chiuse di centro  $q$  e raggio  $r$  contenuti in  $A$ . Notiamo che  $\forall b \in B_A, b \in \mathcal{K}$ . Diciamo che:

$$\bigcup_{k \in B_A} k = A$$

Se questo é vero la tesi segue, quindi dimostriamo entrambe le inclusioni:

" $\subset$ " Ovvio in quanto  $k \subset A \forall k \in B_A$

" $\supset$ " Sia  $a \in A \Rightarrow \exists r \in \mathbb{Q}, r > 0$  tale che  $B_r(a) \subset A$ . Poiché  $\mathbb{Q}$  é denso in  $\mathbb{R}$  allora  $\exists q \in \mathbb{Q}$  tale che  $q \in B_{\frac{r}{2}}(a)$  (notiamo che questa bolla é aperta). Quindi si ha che  $a \in \overline{B_{\frac{r}{2}}(q)}$  (il quale é compatto) siccome  $|a - q| < \frac{r}{2}$ . Inoltre:

$$\overline{B_{\frac{r}{2}}(q)} \subset B_r(a) \subset A$$

e ovviamente  $\overline{B_{\frac{r}{2}}(q)} \in B_A$  ed é compatto. Quindi abbiamo dimostrato che:

$$a \in \bigcup_{k \in B_A} k \quad \forall a \in A.$$

Ovvero  $A \subset \bigcup_{k \in B_A} k$ .

□

**Osservazione 1.26.** Senza l'ipotesi di separabilit  nel punto 3 potrebbe capitare che  $\Sigma_{\mathcal{K}} \subset \Sigma_{\mathcal{G}} = \Sigma_{\mathcal{F}}$  come per esempio in  $\mathcal{X} = [0, 1]$  munito della topologia discreta dove  $\mathcal{K}$  coincide con la famiglia degli insiemi finiti.

**Definizione 1.27.** Sia  $\mathcal{X}$  uno spazio topologico e  $\varphi : 2^{\mathcal{X}} \rightarrow [0, +\infty]$  una misura esterna, allora:

1. la  $\sigma$ -algebra  $\Sigma_{\mathcal{F}} = \Sigma_{\mathcal{G}}$  é indiciata con  $\mathcal{B}(\mathcal{X})$  e i suoi elementi sono detti insiemi Boreliani di  $\mathcal{X}$ .
2.  $\varphi$  é detta funzione Boreliana se i Boreliani sono misurabili (i.e.  $\mathcal{B}(\mathcal{X}) \subset \mathcal{M}_{\varphi}$ ).



3.  $\varphi$  é Borel-regolare se é boreliana e se  $\forall A \subset \mathcal{X}$  esiste  $B \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$  tale che  $A \subset B$  e  $\varphi(B) = \varphi(A)$ . Dal punto di vista geometrico questo significa che una misura é Borel-regolare se ogni sottoinsieme di  $\mathcal{X}$  é approssimabile dall'esterno con un Boreliano che ha la stessa misura di tale sottoinsieme.
4.  $\varphi$  si dice di Radon se é Borel-regolare e se  $\varphi(k) < +\infty \forall k \in \mathcal{K}$ . Ovvero una misura si dice di Radon se é finita sui compatti. Anticipiamo che la misura di Lebesgue é di Radon, invece non lo é la misura di Hausdorff

Come promesso il risultato sulle misure metriche:

**Corollario 1.28.** Ogni misura esterna di Caratheodory (i.e. metrica) é Boreliana.

*Dimostrazione.* Abbiamo dimostrato nel teorema 1.21 che tutti i chiusi sono misurabili secondo una misura metrica i.e.:

$$F \in \mathcal{M}_\varphi \quad \forall F \in \mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{M}_\varphi \in \mathcal{A}_\mathcal{F}$$

Quindi siccome  $\mathcal{B}(\mathcal{X}) = \Sigma_\mathcal{F} = \bigcap_{\Sigma \in \mathcal{A}_\mathcal{F}} \Sigma$  i boreliani sono contenuti in tutte le  $\sigma$ -algebre dei chiusi quindi anche  $\mathcal{B}(\mathcal{X}) \subset \mathcal{M}_\varphi$ .  $\square$

## 1.4 Teoremi di Approssimazione

**Lemma 1.29.** Sia  $\mathcal{X}$  uno spazio topologico e consideriamo  $D \subset 2^\mathcal{X}$  tale che:

1.  $\mathcal{F}, \mathcal{G} \subset D$
2.  $D$  é chiuso rispetto  $\bigcup_{numer}$  e  $\bigcap_{numer}$

Allora  $\mathcal{B}(\mathcal{X}) \subset D$ .

*Dimostrazione.* Definiamo l'insieme  $H = \{E \subset \mathcal{X} | E \subset D, E^c \subset D\}$  (quindi notiamo subito che  $H \subset D$ ) e proviamo che  $H$  é una  $\sigma$ -algebra. Ovviamente  $H$  é c-chiuso per costruzione. Mostriamo la chiusura rispetto all'unione numerabile. Sia  $\{E_j\}_j$  una famiglia numerabile in  $H$  mostriamo che  $\bigcup_j E_j \in H$ . Siccome  $E_j \in H \forall j$  abbiamo che  $E_j \in D \forall j$  quindi per la seconda ipotesi del lemma  $\bigcup_j E_j \in D$ . Sappiamo che possiamo scrivere  $(\bigcup_j E_j)^c = \bigcap_j E_j^c$  il quale sta in  $D$  ancora per la seconda ipotesi e quindi in  $H$  per costruzione. Quindi  $H$  é una  $\sigma$ -algebra. Ora sfruttando la prima ipotesi otteniamo che  $\mathcal{G} \subset H$ . Allora  $H \in \mathcal{A}_\mathcal{G}$  il che significa  $\mathcal{B}(\mathcal{X}) = \Sigma_\mathcal{G} \subset H \subset D$   $\square$

Proviamo un teorema di approssimazione dei Boreliani dall'esterno con un aperto e dall'interno con un chiuso. Quello che vogliamo dimostrare é che dato un Boreliano esiste un chiuso che lo approssima dall'interno e un aperto dall'esterno con scarto arbitrariamente piccolo.

**Teorema 1.30.** *Sia  $\varphi$  una misura esterna Boreliana in uno spazio metrico  $(\mathcal{X}, d)$  e sia  $B \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$  Allora:*

1. *Se  $\varphi(B) < +\infty$  allora  $\forall \varepsilon > 0 \exists F \in \mathcal{F}$  tale che  $F_\varepsilon \subset B$  e  $\varphi(B \setminus F_\varepsilon) < \varepsilon$*
2. *Se  $B \subset \bigcup_j^{+\infty} V_j, V_j \in \mathcal{G} \forall j$  e  $\varphi(V_j) < +\infty$  allora  $\forall \varepsilon > 0 \exists G_\varepsilon \in \mathcal{G}$  tale che  $B \subset G_\varepsilon$  e  $\varphi(G_\varepsilon \setminus B) < \varepsilon$*

*Dimostrazione.* 1. Definiamo  $\mu := \varphi|_B : 2^{\mathcal{X}} \rightarrow [0, +\infty]$  dove  $\mu(A) = \varphi(B \cap A)$  ed é finita per monotonia, infatti  $\mu(A) \leq \varphi(B) < +\infty$ . Verifichiamo che  $\mu$  é una misura esterna, ovvero che valgono i 3 punti della definizione 1.1:

- (a)  $\mu(\emptyset) = \varphi(B \cap \emptyset) = \varphi(\emptyset) = 0$
- (b) Sia  $E \subset F \subset \mathcal{X}$  allora per monotonia di  $\varphi$  otteniamo  $\mu(E) = \varphi(E \cap B) \leq \varphi(F \cap B) = \mu(F)$
- (c) Sia  $\{E_j\}_j$  una famiglia numerabile in  $\mathcal{X}$  allora per  $\sigma$ -subadditivitá di  $\varphi$  abbiamo  $\mu(\bigcup_j E_j) = \varphi(B \cap \bigcup_j E_j) = \varphi(\bigcup_j B \cap E_j) \leq \sum_j \varphi(B \cap E_j) = \sum_j \mu(E_j)$

Ora verifichiamo anche che  $\mathcal{M}_\varphi \subset \mathcal{M}_\mu$ . Sia  $E \in \mathcal{M}_\varphi$  e proviamo il buon spezzamento indotto da  $E$  su ogni  $A \subset \mathcal{X}$ :

$$\begin{aligned} \mu(A \cap E) + \mu(A \cap E^c) &= \varphi(B \cap (A \cap E)) + \varphi(B \cap (A \cap E^c)) = \\ &= \varphi((B \cap A) \cap E) + \varphi((B \cap A) \cap E^c) = \varphi(B \cap A) = \mu(A) \end{aligned}$$

Abbiamo quindi che  $E \in \mathcal{M}_\mu$  e in particolare anche i Boreliani  $\mathcal{B}(\mathcal{X}) \subset \mathcal{M}_\varphi \subset \mathcal{M}_\mu$ .

Ora costruiremo una collezione di tutti gli insiemi approssimabili dall'interno con dei chiusi e poi dimostreremo che i Boreliani appartengono a tale insieme semplicemente applicando il lemma 1.29. Definiamo ora tale insieme:

$$D := \{E \in \mathcal{M}_\mu | \forall \varepsilon > 0 \exists F_\varepsilon \in \mathcal{F}, F_\varepsilon \subset E, \mu(E \setminus F_\varepsilon) < \varepsilon\}$$

Ora dimostriamo che il lemma é applicabile a  $D$  verificando i due punti:

- (a) Mostriamo che chiusi e aperti sono in  $D$ :

" $\mathcal{F} \subset D$ " Sia  $F \in \mathcal{F}$  allora  $F \in \mathcal{B}(\mathcal{X}) \subset \mathcal{M}_\varphi \subset \mathcal{M}_\mu$ . Ora sia  $\varepsilon > 0$  e in questo caso possiamo considerare  $F_\varepsilon = F$  quindi valgono le due condizioni di appartenenza a  $D$  in quanto:

$$F_\varepsilon \subset F$$

e anche

$$\mu(F \setminus F_\varepsilon) = \mu(\emptyset) = 0 < \varepsilon$$

Quindi  $F \in D$  per ogni  $F \in \mathcal{F}$ .

" $\mathcal{G} \subset D$ " Consideriamo  $G \in \mathcal{G}$  e definiamo il tipo di insieme:

$$F_h := \left\{ x \in \mathcal{X} \mid d(x, G^c) \geq \frac{1}{h} \right\}$$

Dal punto di vista geometrico abbiamo appena definito un insieme, che dato un  $h$ , contiene tutti i punti dentro  $G$  che distano  $\frac{1}{h}$  dall'esterno di  $G$ . In altre parole,  $F_h$  é un insieme interno a  $G$  che lascia un'intercapedine di spessore  $\frac{1}{h}$  tra esso e  $G^c$ . Grazie all'uguaglianza nella condizione di appartenenza, notiamo anche che gli  $F_h \in \mathcal{F}$  per ogni  $h$ . Abbiamo poi che  $F_h \subset F_{h+1}$ . Dimostriamo che  $\bigcup_h F_h = G$ :

" $\subset$ " inclusione banale

" $\supset$ " Sia  $x \in G$  allora  $\exists r > 0$  tale che la bolla  $B_r(x) \subset G$  allora  $d(x, G^c) \geq r \geq \frac{1}{h}$  per un qualche  $h$  sufficientemente grande. Quindi  $x \in F_h \Rightarrow x \in \bigcup_h F_h$  per ogni  $x$ . Dunque

$$G \subset \bigcup_h F_h.$$

Abbiamo ottenuto é che:

$$\{F_h\}_h \subset \mathcal{F} \subset \mathcal{B}(\mathcal{X}) \subset \mathcal{M}_\varphi \subset \mathcal{M}_\mu$$

Quindi per la continuitá dal basso (Teorema 1.17 punto 1) otteniamo che  $\mu(G) = \lim_{h \rightarrow +\infty} \mu(F_h)$ . Dunque prendendo  $\varepsilon > 0 \exists h_\varepsilon$  tale che:

$$0 \leq \mu(G) - \mu(F_{h_\varepsilon}) \leq \varepsilon \quad (1.13)$$

Ora i chiusi sono misurabili quindi possiamo scrivere  $\mu(g) = \mu(g \cap F_{h_\varepsilon}) + \mu(g \setminus F_{h_\varepsilon})$  (buon spezzamento), quindi l'equazione 1.13 diventa :

$$0 \leq \mu(G \setminus F_{h_\varepsilon}) \leq \varepsilon$$

Quindi  $G \in D$ .

(b) Verifichiamo ora la seconda condizione del lemma ovvero che  $D$  é  $\bigcup_{numer}$ -chiuso (la dimostrazione sará analoga anche per la  $\bigcap_{numer}$ -chiusura, quindi mostriamo solo questo). Quindi sia  $\{E_j\}_j$  una famiglia numerabile in  $D$  dobbiamo controllare che le condizioni di appartenenza a  $D$  siano rispettate. innanzitutto vediamo che per ogni  $j, E_j \in \mathcal{M}_\mu$ , siccome  $\mathcal{M}_\mu$  é una  $\sigma$ -algebra,  $\bigcup_j E_j \in \mathcal{M}_\mu$ .

Controlliamo quindi le proprietá di approssimazione interna.

Sia  $\varepsilon > 0$ , poiché  $E_j \in D \forall j$  abbiamo che  $\exists F_j \in \mathcal{F}$  tale che  $F_j \subset E_j$  e  $\mu(E_j \setminus F_j) \leq \frac{\varepsilon}{2^j}$  per ogni  $j$ .

Poniamo  $A = \bigcup_j F_j$  e osserviamo che  $C_N := \bigcup_j^N F_j \in \mathcal{F}$  inoltre  $C_N \subset C_{N+1}$  e  $\bigcup_N C_N = \bigcup_j F_j = A$ . Quindi  $C_N$  tende ad  $A$  con il crescere di  $N$  verso  $\infty$  mentre simmetricamente  $C_N^c \rightarrow A^c$ . D'altra parte abbiamo anche che  $A = \bigcup_j F_j \subset \bigcup_j E_j$  quindi:

$$\left(\bigcup_j E_j\right) \setminus A = \left(\bigcup_j E_j\right) \cap A^c = \bigcup_j (E_j \cap A^c) \subset \bigcup_j (E_j \cap F_j^c)$$

L'ultima inclusione deriva dal fatto che  $\forall j A = \bigcup_j F_j \supset F_j$  e quindi  $A^c \subset F_j^c$ . Quindi ne deriviamo che:

$$\mu\left(\left(\bigcup_j E_j\right) \setminus A\right) \leq \mu\left(\bigcup_j (E_j \setminus F_j)\right) \leq \sum_j \mu(E_j \setminus F_j) < \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon}{2^j} = \varepsilon \quad (1.14)$$

Dove la prima disuguaglianza dell'equazione 1.14 é data per monotonía mentre la seconda per  $\sigma$ -subadditivitá di  $\mu$ . Ora dal fatto che  $C_N^c$  decresce verso  $A^c$  al crescere di  $N$  otteniamo che  $\left(\bigcup_j E_j\right) \cap C_N^c$  decresce a  $\left(\bigcup_j E_j\right) \cap A^c = \left(\bigcup_j E_j\right) \setminus A$ . Per la continuitá dall' alto (Teorema 1.17 punto 2):

$$\varepsilon > \mu\left(\left(\bigcup_j E_j\right) \setminus A\right) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \mu\left(\left(\bigcup_j E_j\right) \setminus C_N\right)$$

Quindi esiste  $N_\varepsilon$  tale che  $\mu\left(\left(\bigcup_j E_j\right) \setminus C_{N_\varepsilon}\right) < \varepsilon$  allora pongo  $F_\varepsilon = C_{N_\varepsilon} \subset \mathcal{F}$  e abbiamo l'approssimazione:

$$F_\varepsilon = C_{N_\varepsilon} \subset A \subset \bigcup_j E_j$$

e

$$\mu\left(\left(\bigcup_j E_j\right) \setminus F_\varepsilon\right) < \varepsilon$$

Quindi  $\bigcup_j E_j \in D$  come volevamo. Applichiamo finalmente il Lemma 1.29 a  $D$  e otteniamo che  $\mathcal{B}(\mathcal{X}) \subset D$  e in particolare  $B \in D$  quindi  $\forall \varepsilon > 0 \exists F_\varepsilon \in \mathcal{F}$  tale che:

$$F_\varepsilon \subset B$$

e

$$\mu(B \setminus F_\varepsilon) < \varepsilon$$

quest'ultima disequazione messa in termini di  $\varphi$  diventa

$$\varphi(B \cap (B \setminus F_\varepsilon)) = \varphi(B \setminus F_\varepsilon).$$

□