Analisi Matematica III

Alex Pellegrini

Indice

Parte I

Teoria Della Misura

Capitolo 1

Introduzione

Definizione 1.1. Una *misura esterna* sull' insieme $\mathcal{X}$ é una mappa $\varphi : 2^{\mathcal{X}} \to [0, +\infty]$ tale che :

1. $\varphi(\emptyset) = 0$
2. $\varphi(E) \leq \varphi(F)$ se $E \subset F \subset \mathcal{X}$ (monotonia)
3. $\varphi(\bigcup_j E_j) \leq \sum_j \varphi(E_j)$ (σ-subadditivitá)

Esempio 1.2.

Esempio 1.3.

Esempio 1.4.

1.1 Misura di Peano-Jordan

Sia $A \subset \mathbb{R}^2$ limitato.
Sia $\mathcal{R}_A$ la famiglia di ricoprimenti finiti di A, formati da rettangoli aperti in $\mathbb{R}^2$ della forma $(a, b) \times (c, d)$.
Sia $\mathcal{R} = \{R_1, R_2, ..., R_k\}$ un ricoprimento finito di A. Indichiamo con $m(R_i)$ l'area di R_i. Ovviamente $A \subset \bigcup_{j=1}^{k} R_j$.

Definizione 1.5. La *misura superiore di Jordan* di un insieme A é definita come:

$$J^+(A) := \inf_{\mathcal{R} \in \mathcal{R}_A} \sum_{R_j \in \mathcal{R}} m(R_j)$$

Ovvero prendiamo la minore delle aree dei ricoprimenti di A.

La misura superiore di Peano-Jordan é definita anche per A non limitato come:

$$J^+(A) := \lim_{\rho \to +\infty} J^+(A \cap B_\rho(0,0))$$

Proposizione 1.6. La misura superiore di Peano-Jordan **non** é una misura esterna.

Dimostrazione. Consideriamo $A = (\mathbb{Q} \cap [0,1]) \times (\mathbb{Q} \cap [0,1])$. A é formato dai punti razionali nel quadrato reale di lato 1 centrato nell' origine. Siccome $\mathbb{Q}$ é denso in $\mathbb{R}$ nessun punto razionale di A é punto interno (lo stesso vale per la parte puramente reale).

Scriviamo dunque $A = \{P_1, P_2, ...\}$, ovvero $A = \bigcup\limits_{j=1}^{+\infty} P_j$ (infinito numerabile).

- Dimostriamo $J^+(P_j) = 0$.
  Sia Q_ε il quadrato aperto che ricopre il punto P_j. Abbiamo che $J^+(P_j) \leq m(Q_\varepsilon) = \varepsilon^2 \Rightarrow J^+(P_j) = 0$ per l'arbitrarietá di ε.

- Dimostriamo che $J^+(A) \geq 1$.
  Sia $\mathcal{R}$ un ricoprimento di A, allora

  $$1 \leq area(\mathcal{R}) \leq \sum_{R_j \in \mathcal{R}} m(R_j)$$

  Allora abbiamo che:

  $$\inf_{\mathcal{R} \in \mathcal{R}_A} \sum_{R_j \in \mathcal{R}} m(R_j) \geq 1$$

Concludiamo che $J^+(A) \geq 1 > \sum\limits_{j=1}^{\infty} J^+(P_j) = 0$. Quindi la misura superiore di Jordan non é esterna in quanto non rispetta la σ-subadditivitá $\square$

Consideriamo l' insieme $\mathcal{T}_A = \{\{R_1, ..., R_k\} | k < +\infty, R_j \subset A, R_i \cap R_j = \emptyset \ se \ i \neq j\}$, ovvero l'insieme dei ricomprimeti inscritti ad A (formati da rettangoli aperti) a due a due disgiunti.

Definizione 1.7. La *misura inferiore di Jordan* é definita come:

$$J^-(A) := \begin{cases} 0 & \text{se } \mathcal{T}_A = \emptyset \\ \sup\limits_{\mathcal{T} \in \mathcal{T}_A} \sum\limits_{R_j \in \mathcal{T}} m(R_j) & \text{se } \mathcal{T}_A \neq \emptyset \end{cases}$$

Il massimo delle aree dei ricoprimenti inscritti di A.

Definizione 1.8. A é *misurabile* secondo Jordan se $J^-(A) = J^+(A)$, in tal caso il valore si indica con $J(A)$.

Ovviamente $J^-(A) \leq J^+(A)$, per A come sopra abbiamo $\mathcal{T}_A = \emptyset \Rightarrow J^-(A) = 0$ inoltre come visto prima $J^+(A) \geq 1$. Dunque A non é misurabile secondo Jordan. Detto questo la mappa $J : M_J \longrightarrow [0, +\infty]$, con M_J insieme dei misurabili secondo Jordan, ha dominio $M_J \neq 2^{\mathbb{R}^2}$, quindi non puó essere misura esterna.

Definizione 1.9. Sia $\varphi : 2^{\mathcal{X}} \longrightarrow [0, +\infty]$ una misura esterna su $\mathcal{X}$. $E \subset \mathcal{X}$ é *misurabile* se $\forall A \subset \mathcal{X}$:

$$\varphi(A) = \varphi(A \cap E) + \varphi(A \cap E^c);$$

Questa proprietá é detta *buon spezzamento* indotto da E. La famiglia degli insiemi misurabili secondo φ é indicata con $\mathcal{M}_\varphi$.

Osservazione 1.10. Notiamo subito che $\mathcal{X}, \emptyset \in \mathcal{M}_\varphi$.

Osservazione 1.11. Per $E \subset \mathcal{X}$ e $\forall A \subset \mathcal{X}$

$$A = (A \cap E) \cup (A \cap E^c)$$

allora per σ-subadditivitá

$$\varphi((A \cap E) \cup (A \cap E^c)) \leq \varphi(A \cap E) + \varphi(A \cap E^c)$$

Quindi per dimostrare che un certo $E \in \mathcal{M}_\varphi$ basta dimostrare che vale la relazione $\geq$.

Il seguente teorema enuncia delle proprietá di chiusura della famiglia $\mathcal{M}_\varphi$

Teorema 1.12. *Sia $\varphi : 2^{\mathcal{X}} \longrightarrow [0, +\infty]$ una misura esterna su $\mathcal{X}$. Allora valgono le seguenti proprietá:*

1. *$\mathcal{M}_\varphi$ é c-chiusa (chiusura rispetto al complementare)*
2. *Se $E \subset \mathcal{X}$ con $\varphi(E) = 0 \Rightarrow E \in \mathcal{M}_\varphi$ (allora per 1 anche $\mathcal{X} \in \mathcal{M}_\varphi$)*
3. *Se $E_1, E_2, ..., E_n$ con $E_i \in \mathcal{M}_\varphi \Rightarrow \bigcap_{j=1}^{n} E_j \in \mathcal{M}_\varphi$ (quindi anche $\bigcup_{j}^{n} E_j \in \mathcal{M}_\varphi$)*
4. *Sia $\{E_j\}_j \subset \mathcal{M}_\varphi$ famiglia numerabile (2-2 disgiunta) $\Rightarrow S = \bigcup_j E_j \in \mathcal{M}_\varphi$ e vale*

$$\varphi(A) \geq \sum_j \varphi(A \cap E_j) + \varphi(A \cap S^c) \quad \forall A \subset \mathcal{X}$$

5. *Se $\{E_j\}_j$ come in 4) $\Rightarrow \varphi(\bigcup_j E_j) = \sum_j \varphi(E_j)$*

Dimostrazione. 1. Sia $E \in \mathcal{M}_\varphi$ e consideriamo E^c devo provare buon spezzamento $\forall A \subset \mathcal{X}$:

$$\varphi(A \cap E^c) + \varphi(A \cap (E^c)^c) = \varphi(A \cap E^c) + \varphi(A \cap E) = \varphi(A)$$

2. Per monotonia abbiamo che $\varphi(A \cap E) \leq \varphi(E)$ (poiché $(A \cap E) \subset E$). Siccome, per ipotesi, $\varphi(E) = 0$ allora anche $\varphi(A \cap E) = 0$ quindi posssiamo scivere:

$$\varphi(A \cap E) + \varphi(A \cap E^c) = 0 + \varphi(A \cap E^c) \leq \varphi(A)$$

Abbiamo visto nell' osservazione 1.11 che basta dimostrare questa disuguaglianza per ottenere la tesi.

3. Procediamo per induzione su n.

   - $n = 1$ La tesi é banale.
   - $n = 2$ Dimostro questo poi l'induzione deriva facilmente. Siano $E_1, E_2 \in \mathcal{M}_\varphi$ quindi devo provare il buon spezzamento $\forall A \subset \mathcal{X}$. Siccome $E_1, E_2 \in \mathcal{M}_\varphi$:

$$\varphi(A) = \varphi(A \cap E_1) + \varphi(A \cap E_1^c) \tag{1.1}$$

Ora per il buon spezzamento indotto su $A \cap E_1$ da E_2 riscriviamo il secondo termine dell'equazione come:

$$\varphi(A \cap E_1) = \varphi(A \cap E_1 \cap E_2) + \varphi(A \cap E_1^c \cap E_2^c)$$

Ora sostituendo in 1.1 otteniamo:

$$\varphi(A) = \varphi(A \cap E_1 \cap E_2) + \varphi(A \cap E_1^c \cap E_2^c) + \varphi(A \cap E_1^c) \tag{1.2}$$

Per σ-subadditivitá della misura il terzo e quarto termine possono essere minorati come segue:

$$\varphi(A \cap E_1^c \cap E_2^c) + \varphi(A \cap E_1^c) \geq \varphi((A \cap E_1^c \cap E_2^c) \cup (A \cap E_1^c))$$
$$= \varphi(A \cap [(E_1^c \cap E_2^c) \cup E_1^c]) = \varphi(A \cap [(E_1^c \cup E_1^c) \cap (E_2^c \cup E_1^c)])$$
$$= \varphi(A \cap E_1^c \cup E_2^c).$$

Sostituendo in 1.2 otteniamo infine:

$$\varphi(A) \geq \varphi(A \cap E_1 \cap E_2) + \varphi(A \cap E_1^c \cup E_2^c) \tag{1.3}$$

Dove ovviamente $E_1^c \cup E_2^c = (E_1 \cap E_2)^c \Rightarrow E_1 \cap E_2 \in \mathcal{M}_\varphi$.

Mostriamo ora che $\bigcup_{j}^{n} E_j \in \mathcal{M}_\varphi$. Per ogni valore di n abbiamo:

$$\bigcup_{j}^{n} E_j = [(\bigcup_{j}^{n} E_j)^c]^c = [(\bigcap_{j}^{n} E_j^c)]^c$$

Analizziamo l'ultimo termine. $E_j^c \in \mathcal{M}_\varphi$ per 1). L'intersezione $\bigcap_{j}^{n} E_j^c \in \mathcal{M}_\varphi$ per il punto 3) mentre il tutto é misurabile nuovamente per il punto 1).

4. Dimostriamo prima la seconda parte dell' enunciato. Sia $A \subset \mathcal{X}$ qualsiasi allora, per il buon spezzamento indotto da E_1:

$$\varphi(A) = \varphi(A \cap E_1) + \varphi(A \cap E_1^c) \tag{1.4}$$

Dunque per il buon spezzamento indotto da E_2 riscriviamo 1.4 modificando l'ultimo termine:

$$\varphi(A) = \varphi(A \cap E_1) + \varphi(A \cap (E_1^c \cap E_2)) + \varphi(A \cap (E_1^c \cap E_2^c)) \tag{1.5}$$

Ora, siccome gli E_j sono 2-2 disgiunti $E_i \cap E_j^c = E_i$ per $i \neq j$ in quanto $E_i \subset E_j^c$, sostituiamo in 1.5 che diventa come segue:

$$\varphi(A) = \varphi(A \cap E_1) + \varphi(A \cap E_2) + \varphi(A \cap E_1^c \cap E_2^c) \tag{1.6}$$

La tesi segue facilmente ora, ma eseguiamo ancora un passo per chiarezza. Esattamente come abbiamo fatto per il buon spezzamento indotto da E_2 possiamo procedere con E_3. Prendiamo l'ultimo termine di 1.6 e riscriviamolo come:

$$\varphi(A \cap E_1^c \cap E_2^c) = \varphi(A \cap E_1^c \cap E_2^c \cap E_3) + \varphi(A \cap E_1^c \cap E_2^c \cap E_3^c)$$

Per la stessa argomentazione che ci ha portato a 1.6 abbiamo $\varphi(A \cap E_1^c \cap E_2^c \cap E_3) = \varphi(A \cap E_3)$ in quanto $E_3 \subset E_i^c$ per $i = 1, 2$ (a dire la veritá vale $\forall i \neq 3$). Riscriviamo 1.6:

$$\varphi(A) = \varphi(A \cap E_1) + \varphi(A \cap E_2) + \varphi(A \cap E_3) + \varphi(A \cap E_1^c \cap E_2^c \cap E_3^c)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \varphi(E_j) + \varphi(\bigcap_{j=1}^{n} E_j^c)$$

Ora $\bigcap_{j=1}^{n} E_j^c = (\bigcup_{j=1}^{n} E_j)^c \supset (\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j)^c = S$ quindi per monotonia della misura $\varphi(A \cap (\bigcup_{j=1}^{n} E_j)^c) \geq \varphi(A \cap S^c)$, e otteniamo il limite:

$$\lim_{n \to +\infty} \varphi(A) \geq \sum_{j=1}^{\infty} \varphi(A \cap E_j) + \varphi(A \cap S^c) \tag{1.7}$$

Dimostriamo ora la prima parte sfruttando quanto appena dimostrato. Sia dunque $S \in \mathcal{M}_\varphi$ allora

$$\varphi(A \cap S) = \varphi(A \cap (\bigcup_j E_j)) = \varphi(\bigcup_j A \cap E_j)) \leq \sum_j \varphi(A \cap E_j)$$

per σ-subadditivitá. Allora

$$\varphi(A \cap S) + \varphi(A \cap S^c) \leq \sum_j \varphi(A \cap E_j) + \varphi(A \cap S^c) \leq \varphi(A)$$

dove l'ultima disuguaglianza vale per quanto dimostrato sopra del punto 4).

5. Per la seconda parte del punto 4) con $A = S$ otteniamo:

$$\varphi(\bigcup_j E_j) \geq \sum_j \varphi(E_j)$$

in quanto $E_j \in S$ e $S \cap S^c = \emptyset$. L'altro verso della disuguaglianza lo otteniamo per σ-subadditivitá.

$\square$

Quello che facciamo ora é togliere un vincolo dal punto 4) del teorema precedente, ovvero il fatto che gli E_j nella famiglia $\{E_j\}_j \in \mathcal{M}_\varphi$ non siano per forza 2-2 disgiunti. Quindi rienunciamo il punto 4).

Osservazione 1.13. Sia $\{E_j\}_j \in \mathcal{M}_\varphi$ numerabile, allora $\bigcup\limits_j E_j \in \mathcal{M}_\varphi$.

Dimostrazione. Introduciamo il seguente tipo di insieme:

- $E_1^* = E_1$
- $E_n^* = E_n \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{n} E_j = E_n \cap (\bigcup\limits_{j=1}^{n} E_j)^c$ in quanto togliere un insieme equivale a intersecare con il complementare.

Ora notiamo subito che $E_n \cap (\bigcup\limits_{j=1}^{n} E_j)^c \in \mathcal{M}_\varphi$ per i punti 1) e 3) del teorema precedente, quindi anche $E_n^* \in \mathcal{M}_\varphi$. Inoltre abbiamo che $\bigcup\limits_{j=1}^{n} E_j^* = \bigcup\limits_{j=1}^{n} E_j \ \forall n$ per il punto 4) del teorema precedente, poiché gli E_j^* sono 2-2 disgiunti. Allora $\bigcup\limits_j E_j \in \mathcal{M}_\varphi$. $\square$

1.2 σ-algebra

Cerchiamo di identificare la struttura della famiglia $\mathcal{M}_\varphi$. Introduciamo quindi la seguente nozione:

Definizione 1.14. Una famiglia non vuota $\Sigma \subset 2^{\mathcal{X}}$ é una σ-algebra se ha le seguenti proprietá:

1. $E \in \Sigma \Rightarrow E^c \in \Sigma$ (c-chiusura)
2. $\{E\}_j \subset \Sigma$ famiglia numerabile allora $\bigcup\limits_j E_j \in \Sigma$

Proposizione 1.15. Se $\varphi : 2^{\mathcal{X}} \longrightarrow [0, +\infty]$ é misura esterna allora $\mathcal{M}_\varphi$ é una σ-algebra.

Dimostrazione. Direttamente dal teorema precedente (punti 1 e 4 principalmente). $\square$

Osservazione 1.16. Se Σ é una σ-algebra in $\mathcal{X}$ allora:

1. $\emptyset, \mathcal{X} \in \Sigma$ poiché siccome Σ é non-vuota allora $\exists E \in \Sigma$ quindi $E^c \in \Sigma$ e $E \cup E^c = \mathcal{X} \in \Sigma$ inoltre $E \cap E^c = [(E \cap E^c)^c]^c = [E^c \cup E]^c = \mathcal{X}^c = \emptyset \in \Sigma$.
2. Σ é chiusa rispetto all'intersezione numerabile, infatti sia $\{E_j\}_j \subset \Sigma$ una famiglia numerabile di elementi di Σ allora $\bigcap\limits_j E_j = [(\bigcap\limits_j E_j)^c]^c = [(\bigcup\limits_j E_j^c)]^c$. Ora $E_j^c \in \Sigma$ per definizione, $\bigcup\limits_j E_j^c \in \Sigma$ ancora per definizione, poi Σ é c-chiusa. La tesi é dimostrata.

Enunciamo il teorema di continuitá sull' l'insieme di misurabili secondo una misura esterna.

Teorema 1.17. *Sia $\varphi : 2^{\mathcal{X}} \to [0, +\infty]$ una misura esterna. Allora*

1. *(Continuitá dal basso) Sia $\{E_j\}_j \subset \mathcal{M}_\varphi$ una famiglia numerabkile e crescente (i.e. $E_j \subset E_{j+1}$), allora:*

$$\varphi(\bigcup_j E_j) = \lim_j \varphi(E_j)$$

2. *(Continuitá dall'alto) Sia ora $\{E_j\}_j \subset \mathcal{M}_\varphi$ una famiglia numerabile e decrescente (i.e. $E_{j+1} \subset E_j$) con $\varphi(E_1) < +\infty$, allora:*

$$\varphi(\bigcap_j E_j) = \lim_j \varphi(E_j)$$

Dimostrazione. Notiamo innanzitutto che il limite nei due punti esiste in entrambi i casi in quanto stiamo trattando delle successioni monotone.

1. Definiamo $E_j^* = E_j \setminus E_{j-1}$ con $E_0^* = \emptyset$. Notiamo subito che $E_j^* \in \mathcal{M}_\varphi$ in quanto $E_j^* = E_j \cap E_{j-1}^c$ ed entrambi i termini sono misurabili per ipotesi. Inoltre $\bigcup_j^n E_j^* = E_n = \bigcup_j^n E_j$, quindi generalizzando all'unione numerabile $\bigcup_j E_j^* = \bigcup_j E_j$. Ora, é facile capire che gli E_j^* sono 2-2 disgiunti quindi vale la σ-additivitá (NB: non σ-SUBadditivitá), ovvero:

$$\varphi(\bigcup_j E_j) = \varphi(\bigcup_j E_j^*) = \sum_j \varphi(E_j^*) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{j=1}^n \varphi(E_j) =$$

$$\lim_{n\to+\infty} \varphi(\bigcup_{j=1}^n E_j) = \lim_{n\to+\infty} \varphi(E_n)$$

   Dove la seconda uguaglianza vale per il punto 5 del teorema 1.12.

2. Notiamo che E_1 puó essere illimitato avendo bensí area finita. Poniamo $F_j = E_1 \setminus E_j$ e notiamo che é misurabile per un argomentazione simile a quella sviluppata per gli E_j^* nel punto 1. Ora gli F_j formano una successione crescente al crescere di j quindi per il punto 1 abbiamo che $\varphi(\bigcup_j F_j) = \lim_j \varphi(F_j)$ con

$$\bigcup_j F_j = \bigcup_j E_1 \cap E_j^c = E_1 \cap \bigcup_j E_j^c = E_1 \cap (\bigcup_j E_j)^c = E_1 \setminus \bigcap_j E_j$$

   Quinidi passando alla misura otteniamo, usando il buon spezzamento indotto da $\bigcap_j E_j$:

$$\varphi(E_1) = \varphi(E_1 \cap \bigcap_j E_j) + \varphi(E_1 \cap (\bigcap_j E_j)^c).$$

   L'ultimo termine é proprio $\varphi(\bigcup_j F_j)$ quindi ricaviamo:

$$\varphi(\bigcup_j F_j) = \varphi(E_1) - \varphi(E_1 \cap \bigcap_j E_j) = \varphi(E_1) - \varphi(\bigcap_j E_j) \qquad (1.8)$$

   (L'ultima uguaglianza vale in quanto l'intersezione di tutti gli E_j é contenuta in E_1.) D'altro canto $F_j = E_1 \cap E_j^c$ quindi possiamo usare il buon spezzamento indotto da un singolo E_j come segue:

$$\varphi(E_1) = \varphi(E_1 \cap E_j) + \varphi(E_1 \cap E_j^c)$$

Notiamo che il secondo termine é $\varphi(E_j)$ mentre il terzo é proprio $\varphi(F_j)$. Quindi scriviamo:

$$\varphi(F_j) = \varphi(E_1) - \varphi(E_j) \tag{1.9}$$

Quindi unendo le equazioni 1.8 e 1.9 otteniamo:

$$\varphi(\bigcup_j F_j) = \varphi(E_1) - \varphi(\bigcap_j E_j) = \lim_j [\varphi(E_1) - \varphi(E_j)] = \varphi(E_1) - \lim_j \varphi(E_j)$$

Abbiamo quindi ottenuto la tesi:

$$\varphi(\bigcap_j E_j) = \lim_j \varphi(E_j)$$

□

Osservazione 1.18. Nel punto 2 del teorema precedente se non assumiamo che $\varphi(E_1) < +\infty$ il teorema fallisce.

Facciamo un esempio:

Esempio 1.19. Consideriamo l'insieme $\mathcal{X} = \mathbb{N}$ e la misura $\varphi = |\cdot|$, consideriamo anche le semirette $E_j = \{j, j+1, j+2, ...\}$. Vediamo subito che $E_{j+1} \subset E_j$ quindi abbiamo una famiglia numerabile e decrescente. Ora $\mathcal{M}_\varphi = 2^{\mathcal{X}}$ quindi ogni $E_j \in \mathcal{M}_\varphi$. Ora $\varphi(\bigcap_j E_j) = 0$ mentre $\varphi(E_j) = +\infty \ \forall j$. Questo smentisce il teorema.

1.3 Misura Metrica

Definizione 1.20. Una misura esterna φ su uno spazio metrico $(\mathcal{X}, d)$ é detta di Caratheodory o metrica se $\forall A, B \in 2^{\mathcal{X}}$ tali che
$d(A,B) = \inf\{d(a,b) | a \in A, b \in B\} > 0$ vale:

$$\varphi(A \cup B) = \varphi(A) + \varphi(B) \tag{1.10}$$

In altre parole una misura si dice metrica se é additiva su insiemi a distanza positiva (disgiunti). Il teorema seguente dimostra che in uno spazio metrico con una misura metrica tutti i chiusi sono misurabili (i.e. $\mathcal{C} \subset \mathcal{M}_\varphi$) Anticipiamo inoltre che questo teorema comporta il fatto che una misura metrica é Boreliana in quanto un Boreliano, essendo dato da unione o intersezione numerabili di chiusi (o aperti), é misurabile.

Teorema 1.21. *(Caratheodory) Sia $(\mathcal{X}, d)$ uno spazio metrico e $\varphi : 2^{\mathcal{X}} \to [0, +\infty]$ una misura metrica, allora ogni chiuso in $\mathcal{X}$ é misurabile.*

Dimostrazione. Dobbiamo verificare che i chiusi inducono il buon spezzamento della misura su qualsiasi insieme. Sia dunque $C \in \mathcal{C}$ e $A \subset \mathcal{X}$ un insieme qualsiasi. Come sappiamo ci basta dimostrare che $\varphi(A) \geq \varphi((A \cap C) \cup (A \cap C^c))$. La tesi é banale se $\varphi(A) = +\infty$ quindi supponiamo che A abbia misura finita. Introduciamo il seguente tipo di insieme: per $h > 0$ poniamo $C_h = \{x \in \mathcal{X} | d(x, C) \leq \frac{1}{h}\}$ (geometricamente $C_h \setminus C$ é un' intercapedine di larghezza $\frac{1}{h}$ attorno a C). Notiamo che anche C_h risulta chiuso in quanto nella sua definizione abbiamo l'uguaglianza.
C_h é dunque composto cosí:

$$C_h = \{x \in \mathcal{X} | d(x, C) = 0\} \cup \left\{x \in \mathcal{X} | d(x, C) \in (0, \frac{1}{h}]\right\} \tag{1.11}$$

La prima parte dell'unione in 1.11 é chiaramente $\overline{C} = C$. Mentre nella seconda parte possiamo scrivere l'intervallo $(0, \frac{1}{h}] = \bigcup\limits_{j \geq h} (\frac{1}{j+1}, \frac{1}{j}]$. Suddividiamo adesso $C_h \setminus C$ in ulteriori intercapedini del tipo:

$$S_j = \left\{x \in \mathcal{X} | d(x, C) \in (\frac{1}{j+1}, \frac{1}{j}]\right\}$$

Ovvero scriviamo:

$$C_h = C \cup (\bigcup_{j \geq h} S_j)$$

Quindi ricaviamo C e dunque C^c:

$$C = C_h \setminus \bigcup_{j \geq h} S_j = C_h \cap (\bigcup_{j \geq h} S_j)^c$$

$$C^c = C_h^c \cup (\bigcup_{j \geq h} S_j)$$

Abbiamo dunque tutti gli strumenti per provare il buon spezzamento indotto da C. Prediamo dunque un $A \subset \mathcal{X}$ e vediamo che $(A \cap C) \cap (A \cap C_h^c) = \emptyset$ quindi per monotonia e meticitá della misura:

$$\varphi(A) \geq \varphi((A \cap C) \cup (A \cap C_h^c)) = \varphi((A \cap C)) + \varphi((A \cap C_h^c)) \tag{1.12}$$

Vogliamo dimostrare che $\lim\limits_{h \to +\infty} \varphi(A \cap C_h^c) = \varphi(A \cap C^c)$ cosi possiamo passare al limite nell'equazione 1.12. Quindi abbiamo per monotonia ($C_h^c \subset C^c$) che:

$$\varphi(A \cap C_h^c) \leq \varphi(A \cap C^c)$$

Come abbiamo visto sopra la parte destra della disequazione diventa:

$$\varphi(A \cap C^c) = \varphi((A \cap C_h^c) \cup (A \cap \bigcup_{j \geq h} S_j)) \leq \varphi(A \cap C_h^c) + \sum_{j \geq h} \varphi(A \cap S_j)$$

Quello che vogliamo dimostrare che $\sum_{j \geq h} \varphi(A \cap S_j)$ converge e quindi $\lim_{h \to +\infty} \sum_{j \geq h} \varphi(A \cap S_j)$ va a 0 quindi vale l'uguaglianza nella disequazione sopra. Dunque sia $N > 0$ qualsiasi e:

$$\sum_{j=1}^{N} \varphi(A \cap S_j) = \sum_{j=1, j \ dispari}^{N} \varphi(A \cap S_j) + \sum_{j=2, j \ pari}^{N} \varphi(A \cap S_j)$$

Siccome la distanza tra due intercapedini indicizzate pari o tra due dispari la distanza positiva, quindi per metricit scrivo:

$$\sum_{j=1}^{N} \varphi(A \cap S_j) = \varphi(\bigcup_{j=1, j \ dispari}^{N} A \cap S_j) + \varphi(\bigcup_{j=2, j \ pari}^{N} A \cap S_j)$$

Ora entrambi i termini sulla destra sono sottoinsiemi di A quindi per monotonia:

$$\varphi(\bigcup_{j=1, j \ dispari}^{N} A \cap S_j) + \varphi(\bigcup_{j=2, j \ pari}^{N} A \cap S_j) \leq 2\varphi(A) < +\infty \quad \forall \ N$$

E allora:

$$\sum_{j=1}^{N} \varphi(A \cap S_j) \leq 2\varphi(A) < +\infty$$

Abbiamo dunque dimostrato che tale sommatoria converge quindi l'intercapedine si assottiglia fino a sparire per $h \to +\infty$ dunque il buon spezzamento segue e si ha la tesi. $\square$

Osservazione 1.22. Vale il reciproco del teorema 1.21 (Caratheodory) ovvero:
Sia $(\mathcal{X}, d)$ uno spazio metrico e $\varphi : 2^{\mathcal{X}} \to [0, +\infty]$ una misura esterna tale che tutti i chiusi sono misurabili. Allora φ metrica.

Proposizione 1.23. Sia $I \subset 2^{\mathcal{X}}$ e indichiamo con A_I la famiglia delle σ-algebre Σ su $\mathcal{X}$ tali che $I \subset \Sigma$. Allora $\Sigma_I = \bigcap_{\Sigma \in A_I} \Sigma$ una σ-algebra su $\mathcal{X}$ che contiene I, essa detta la σ-algebra generata da I.

Dimostrazione. Dimostriamo che le due propriet di σ-algebra sono soddisfatte.

1. Sia $E \in \Sigma_I$ allora $E \in \bigcap_{\Sigma \in A_I} \Sigma$ dunque $\exists \Sigma$ tale che $E \in \Sigma$, quindi siccome Σ una σ-algebra $E^c \in \Sigma$. Quindi torniamo indietro $E^c \in \bigcap_{\Sigma \in A_I} \Sigma = \Sigma_I$

2. Sia $\{E_j\}_j \subset \Sigma_I$ una famiglia numerabile allora $\forall j \; E_j \in \Sigma_I$ allora $E_j \in \Sigma \; \forall \Sigma \in A_I$ quindi $\bigcup_j E_j \in \Sigma \; \forall \Sigma \in A_I$ perció $\bigcup_j E_j \in \bigcap_{\Sigma \in A_I} \Sigma = \Sigma_I$

□

Osservazione 1.24. Se I una σ-algebra allora $\Sigma_I = I$

Dimostrazione. $'' \supset ''$ banale per definizione anche se I non una σ-algebra.

$'' \subset ''$ poich I una σ-algebra allora $I \in A_I$ quindi ovvio che $\bigcap_{\Sigma \in A_I} \Sigma \subset I$

□

Andremo ora ad analizzare le σ-algebre generate da aperti, chiusi e compatti in uno spazio topologico. Idichiamo con $\mathcal{K}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ rispettivamente i compatti, i chiusi e gli aperti.

Proposizione 1.25. Sia ora $\mathcal{X}$ uno spazio topologico. Allora:

1. $\Sigma_{\mathcal{F}} = \Sigma_{\mathcal{G}}$
2. Se $\mathcal{X}$ di Hausdorff allora $\Sigma_{\mathcal{K}} \subset \Sigma_{\mathcal{F}}$
3. Se $(\mathcal{X}, d)$ uno spazio metrico separabile (i.e. esiste un sottoinsieme denso e numerabile) allora $\Sigma_{\mathcal{K}} = \Sigma_{\mathcal{F}}$

Dimostrazione. 1. Osserviamo che $A_{\mathcal{F}} = A_{\mathcal{G}}$ in quanto, siccome le σ-algebre sono c-chiuse e il complementare di un aperto chiuso, una sigma algebra che contiene l'insieme degli aperti contiene a sua volta quello dei chiusi. Dunque:

$$\Sigma_{\mathcal{F}} = \bigcap_{\Sigma \in A_{\mathcal{F}}} \Sigma = \bigcap_{\Sigma \in A_{\mathcal{G}}} \Sigma = \Sigma_{\mathcal{G}}$$

2. Se $\mathcal{X}$ di Hausdorff allora i compatti sono chiusi (i.e. $\mathcal{K} \subset \mathcal{F}$), questo significa che $A_{\mathcal{F}} \subset A_{\mathcal{K}}$ dunque:

$$\Sigma_{\mathcal{K}} = \bigcap_{\Sigma \in A_{\mathcal{K}}} \Sigma \subset \bigcap_{\Sigma \in A_{\mathcal{F}}} \Sigma = \Sigma_{\mathcal{F}}$$

Abbiamo $\subset$ sopra in quanto $A_{\mathcal{K}}$ pi numerosa di $A_{\mathcal{F}}$ e la contiene. Quindi abbiamo pi termini nella famiglia delle σ-algebre che contengono i compatti su cui fare l'intersezione.

3. Per questo punto ci limitiamo al caso in cui $\mathcal{X} = \mathbb{R}^n$ che sappiamo essere la chiusura dei razionali (i.e. $\overline{\mathbb{Q}}^n = \mathbb{R}^n$) i quali formano un insieme denso e numerabile in $\mathbb{R}$. Quello che dobbiamo fare dimostrare che ogni aperto unione numerabile di compatti, ovvero per il punto 1:

$$\Sigma_{\mathcal{F}} = \Sigma_{\mathcal{G}} \subset \Sigma_{\mathcal{K}}$$

infatti, se questo vale, $\mathcal{G} \in \Sigma_{\mathcal{K}} \Rightarrow \Sigma_{\mathcal{G}} = \Sigma_K$ per il punto 2. Dimostriamo che un aperto unione di compatti. Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un aperto e $B_A = \left\{ \overline{B_q(r)} | q \in \mathbb{Q}^n, r \in \mathbb{Q}, r > 0, \overline{B_q(r)} \subset A \right\}$ l'insieme, numerabile, delle bolle chiuse di centro q e raggio r contenuti in A. Notiamo che $\forall b \in B_A, b \in \mathcal{K}$. Diciamo che:

$$\bigcup_{k \in B_A} k = A$$

Se questo vero la tesi segue, quindi dimostriamo entrambe le inclusioni:

$'' \subset ''$

$\square$