Chapitre 1

Analyse combinatoire

Introduction :

On est souvent amené lorsque l'on calcule des probabilités à compter des objets. Ce comptage peut se révéler assez ardu et il est souvent indispensable pour arriver au résultat de faire appel aux quelques notions d'analyse combinatoire qui font l'objet de ce chapitre.

1. PERMUTATIONS SANS RÉPÉTITION DE n OBJETS

Considérons n objets tous différents. On peut former des groupements de n objets différents les uns des autres par l'ordre dans lequel ces objets sont rangés. Chacun de ces groupements s'appelle une **permutation**.

Exemple : si l'on baptise 3 objets A, B et C, les permutations possibles sont les suivantes :

A B C	BAC	CAB
ACB	BCA	CBA

Remarquons que l'on n'accepte pas de groupements avec répétition tels que AAB.

Nous appellerons P_n le nombre de permutations possibles vers n objets (on vient de voir que $P_3=6$). On se demande maintenant quelle est la valeur de $P_{n.}$

Reprenons les différentes permutations des 3 objets A, B et C. Si l'on rajoute un quatrième objet D à la première permutation (ABC), on peut le placer soit avant le A et le B soit entre le B et le C, soit enfin après le C. Pour chacune des permutations de 3 objets il existe 4 permutations de 4 objets d'où $P_4= 4 P_3$.

D'une manière générale on peut former n permutations de n objets à partir de chaque permutation de P_{n-1} objets :

$$P_n = n P_{n-1}$$

Connaissant P_1 (nombre de permutation de 1 objet =1) on calcule les différents P de proche en proche :

$P_{1=1}$

$P_2= 2 P_1=2$

$P_3=3 P_2=3X2=3 !$

.

Pn= n Pn-1=n (n-1)…3.2=n !

$$P_n = n\,!$$

2. ARRANGEMENT SANS RÉPÉTITION DE n OBJETS PRIS p à p

Disposant de n objets tous différents on forme maintenant des groupements de p objets différents entre eux soit par la nature des objets soit par l'ordre dans lequel ils sont rangés.

Exemple : arrangements de 4 objets A, B, C, D pris 2 à 2 :

AB	AC	AD	BC	BD	CD
BA	CA	DA	CB	DB	DC

Le nombre d'arrangements possibles sera noté A_n^p (on vient de voir que A_4^2 =12).

Si l'on veut à partir de 4 objets ci-dessus former des arrangements 3 à 3, on peut rajouter à chaque arrangement 2 à 2 les 2 objets qui lui manquent (par exemple à AB on peut ajouter C ou D) et former 2 fois plus d'arrangements 3 à 3 d'où A_4^3 =2 A_4^2 .

D'une manière générale supposons connus les arrangements de n objets pris p àp. (n-p) objets ne figurent pas dans ces arrangements. Si l'on veut ajouter un objet à chacun des arrangements p à p pour former des arrangements (p+1) à (p+1) on a donc n-p façons de le faire :

$$A_n^{p+1} = (n-p)\ A_n^p$$

Cette relation de récurrence permet de calculer A_n^p à partir de A_n^1 (A_n^1 =n) :

$$A_n^2 = (n-1)\ A_n^1 = (n-1)n$$

$$A_n^3 = (n-2)\ A_n^2 = (n-2)\ (n-1)n$$

$$A_n^p = (n-p+1)\ A_n^{p-1} = (n-p+1)(n-p+2)\ldots(n-3)(n-2)(n-1)n$$

Considérons le développement de n !

n ! =n(n-1)(n-2)…(n-p+1)(n-p)….3.3.2.1.= A_n^p (n-p) !

$$\boxed{A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}}$$

Cas particulier : si on fait p=n on trouve bien sûr A_n^n = P_n= n !

3. ARRANGEMENT AVEC RÉPÉTITION DE n OBJETS PRIS p à p

Si on accepte maintenant les répétitions dans chaque arrangement le problème est différent. Cherchons par exemple le nombre de n° de téléphone de 4 chiffres, c'est le nombre d'arrangements avec répétition de 10 objets (les 10 chiffres de 0 à 9) pris 4 à 4. Le résultat est évident, ce sont les nombres de 0000 à 9999, il y en a donc 10000 donc $A_{10}^{'4}$ =10^4.

D'une manière générale supposons que l'on connaisse $A_n^{'p}$ pour former les $A_n^{'p+1}$ il suffit de rajouter un objet mais cette fois-ci on peut choisir celui-ci parmi les n objets puisqu'on accepte les répétitions :

$$A_n^{'p+1} = n\ A_n^{'p}$$

On sait que $A_n^{'1}$ = n d'où $A_n^{'2}$ = n², $A_n^{'3}$ = n³…….

$$\boxed{A_n^{'P} = n^p}$$

4. COMBINAISON SANS RÉPÉTITION DE n OBJETS PRIS p à p

On forme, comme pour les arrangements des groupements de p objets mais les combinaisons ne diffèrent entre elles que par la nature des objets, l'ordre étant indifférent.

Le nombre de combinaison de n objets pris p à p est noté C_n^P .

A partir de chaque combinaison de p objet il est possible de former par permutation p ! Arrangements donc A_n^p = p ! C_n^P

$$\boxed{C_n^P = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}}$$

Relations intéressantes concernant les combinaisons :

- On vérifie très facilement que $C_n^P = C_n^{n-P}$
- $C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^{p} = \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)!} + \frac{(n-1)!}{p!(n-1-p)!}$

$$= \frac{p(n-1)!}{p!(n-p)!} + \frac{(n-p)(n-1)!}{p!(n-p)!} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = C_n^P$$

5. FORMULE DU BINÔME

Considérons le produit suivant :

$(x+a_1)$ $(x+a_2)$ $(x+a_3)$…… $(x+a_n)$

Le développement sera de la forme suivante :

$X^n + x^{n-1}$ (a1+a2+…an) + x^{n-2} (a1a2+a1a3+….) + …+a1a2…an

Le coefficient de x^{n-1} contient n termes (= C_n^1) tels que a1,a2, ….

Le coefficient de x^{n-2} est constitué par les combinaisons de a_n pris 2 à 2 soit C_n^2 termes.

Le coefficient de x^{n-p} est constitué par les combinaisons de a_n pris 2 à 2 soit C_n^2 termes.

Supposons maintenant que a1 = a2 = …=an=a.

On arrive à la formule du binôme :

(x+a)^{n} = C_n^0 X^{n} + C_n^1 a X^{n-1} + C_n^2 a² x^{n-2} + ….+ C_n^p a^{p} x^{n-p} + ….+ C_n^n a^{n}

Quelques remarques sur ce développement :

- On a vu plus haut que C_n^P = C_n^{n-P} : les coefficients équidistants des extrêmes sont donc égaux
- Considérons les développements successifs :

X+a = C_1^0 x + C_1^1 a

(x+a)² = C_2^0 X² + C_2^1 a X + C_2^2 a²

(x+a)^{3} = C_3^0 X^{3} + C_3^1 a X^{2} + C_3^2 a² x + C_3^3 a^{3}

….

(x+a)$^{n-1}$ = C_{n-1}^0 X^{n-1} +….+ C_{n-1}^{p-1} a^{p-1} X^{n-p} + C_{n-1}^p a ^{p} x^{n-p-1} + ….

(x+a)$^{n-}$= C_n^0 X^{n}+….+ C_n^p a^{p} X^{n-p}

On a démontré plus haut que C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p = C_n^P . On constate donc qu'un coefficient du tableau ci-dessus est la somme des 2 coefficients situés dans la ligne précédente et dans la même colonne précédente.

C'est cette remarque qui permet d'établir le célèbre triangle de Pascal :

1
11
121
1331
14641

Chapitre 2

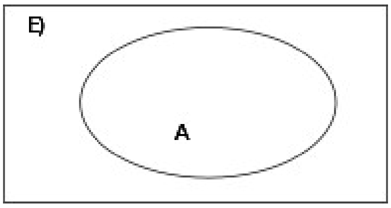
DEFINITION D'UNE PROBABILITE

1. <u>EVÉNEMENTS ET EVENTUALITES</u>.

Etant donnée une expérience nous appellerons éventualité (ou « cas ») tous les résultats possibles de cette expérience.

Exemple : L'expérience étant de jeter un dé, les éventualités ou cas possibles sont au nombre de six (1, 2, 3 ,4 ,5 ,6). Si l'expérience est de tirer une carte d'un jeu de bridge, il y a 52 cas possibles. Toutes les éventualités envisageables constituent l'ensemble des cas possibles que nous noterons (E).

Plusieurs des cas possibles peuvent posséder une propriété commune par exemple, dans le jeu de dé, les cas 2, 4, 6 ont pour propriété de donner un résultat pair. On définit ainsi l'événement « tirer un nombre pair » qui est un sous ensemble de l'ensemble des cas possibles. Dans le deuxième exemple on peut définir les évènements « tirer un trèfle » ou « tirer un valet » qui sont également des sous-ensembles de l'ensemble des cas possibles. L'ensemble des cas possibles (E) et le sous-ensemble des cas favorables à un événement donné (A) peut se représenter graphiquement de la manière suivante :



2. RAPPORTS LOGIQUES ENTRE EVENEMENTS.

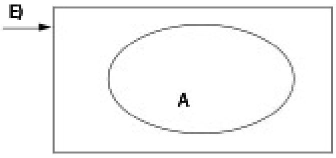
A) Evènements contraires : La notion d'événements contraires est intuitive. Etant donné un événement A , il suffit d'ajouter »ne pas » devant sa définition pour obtenir l'événement contraire que (l'on notera $\acute{A}$).

Exemple : Si on reprend l'expérience qui consiste à tirer une carte d'un jeu :

A = tirer un trèfle

$\acute{A}$ = ne pas tirer un trèfle

Le sous-ensemble $\acute{A}$ est constitué par tous les cas qui ne sont pas favorables à A :



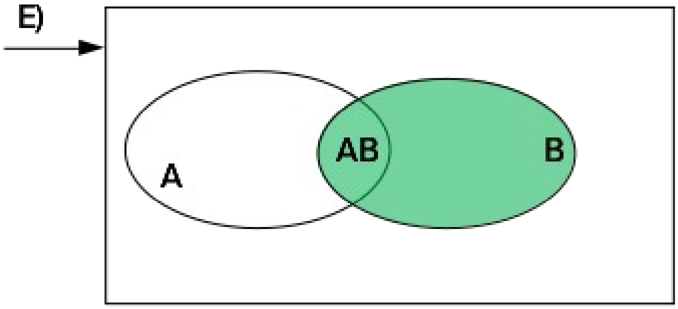
b) <u>Conjonction de deux évènements</u> : On utilise l'une des trois notations suivantes :
$A \cap B$, A et B , AB . La conjonction se définit en intercalant le mot « et » (dans le sens de « à la fois ») entre les définitions des deux événements.

Exemple : A = tirer un trèfle

B =tirer un roi

$A \cap B$ = tirer une carte qui soit à la fois trèfle et roi (il n'y a qu'un cas favorable, c'est le roi de trèfle).

La représentation graphique est la suivante :



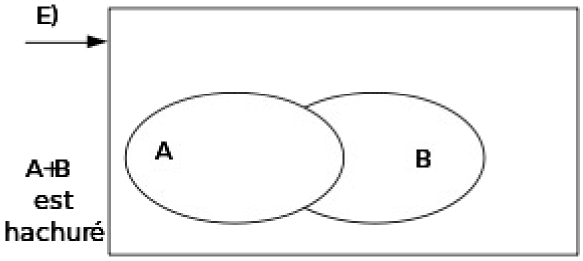
c) <u>Réunion de deux événements</u> : On utilise l'une des trois notations suivantes : $A \cup B$, A + B , A ou B . On intercale ici le mot « ou » entre les définitions des 2 événements.

Exemple : A = tirer une carte noire

B = tirer un carreau

A + B = tirer une carte noire ou un carreau = tirer pic ou trèfle ou un carreau.

Représentation graphique :



On remarquera que si A et B sont deux événements contraires A + B est identique à E. Cet événement réalisé dans tous les cas possibles s'appelle <u>événement certain.</u> Inversement un événement qui n'est réalisé pour aucun cas possible est un événement impossible.

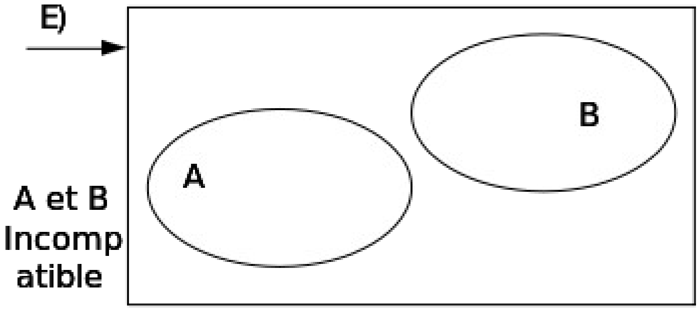
d) <u>Evénements compatibles et incompatibles.</u>

Deux événements sont incompatibles s'ils ne peuvent pas se produire en même temps.

Exemple : A = tirer un trèfle

B = tirer un cœur

Il n'y a aucun cas favorable à la fois à A et à B

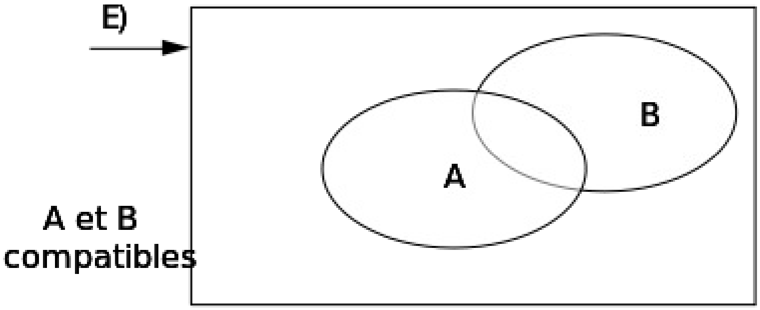


Deux événements sont compatibles si ils peuvent se produire en même temps.

Exemple : A = tirer un trèfle

B = tirer un as

Il existe un ou plusieurs cas favorables à la fois à A et à B (dans l'exemple ci-dessus c'est le cas = tirer l'as de trèfle.



3. DEFINITION DE LA PROBABILITE.

Considérons une expérience et l'ensemble (E) de tous les cas possibles de cette expérience. Si le résultat de l'expérience est simplement dû au hasard il n'y a aucune raison de penser qu'un cas ait plus de chance de se produire qu'un autre on dira que tous les cas sont également vraisemblables.

Exemple 1 : L'expérience étant de jeter un dé non truqué, les 6 cas possibles sont tous vraisemblables.

Exemple 2 : L'expérience est pour un piéton de traverser une rue et de constater s'il est ou non renversé par une voiture, les deux cas, fort heureusement ne sont pas également vraisemblables.

Ces remarques préliminaires permettent de définir une probabilité : considérons une expérience dont les résultats constituent l'ensemble (E) des cas possibles et l'événement A réalisé dans un certain nombre de cas.

On appelle probabilité d'un événement A le rapport entre le nombre de cas favorables de A et le nombre de cas possibles. Tous les cas possibles étant également vraisemblables.

Exemple 1 : Quelle est la probabilité de tirer un nombre pair au jeu de dés ?

Nombre de cas possibles : 6 (1, 2, 3, 4, 5, 6)

Nombre de cas favorables : 3 (2, 4, 6)

$P_A = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

Exemple 2 : Une urne contient 3 boules noires, 5 blanches et une rouge. On tire une boule au hasard, quelle est la probabilité de tirer une boule blanche ?

Nombre de cas possibles : 9 (3+5+1)

Nombre de cas favorables : 5

$P_A = \frac{5}{9}$

4. QUELQUES PROPRIETÉS D’UNE PROBABILITE.
   a) L’ensemble des cas favorables à un événement A est un sous-ensemble de l’ensemble des cas possibles. Le nombre de cas favorables à A est donc inférieur ou égal au nombre de cas possibles.

      $0 \leq P \leq 1$

   b) Si tous les cas sont favorables à l’événement on est en présence de l’événement certain :
      $P=1$

      Si aucun cas n’est favorable, $P=0$

5. REMARQUE SUR LA DEFINITION DE LA PROBABILITE.
   La définition citée plus haut a le mérite d’être simple il faut cependant être conscient qu’elle est loin d’être parfaite. Ceci vient surtout du fait que l’on a été contraint d’utiliser dans sa définition les mots « également vraisemblables » et on peut objecter non sans raison que cela ressemble fort à « également probable », c’est ce que l’on appelle communément un cercle vicieux. Il existe bien sûr des manières rigoureuses de définir une probabilité on se contentera cependant de celle-ci en raison de sa simplicité et de son caractère concret et intuitif.

Exercices

1. Dix chevaux sont engagés dans une course. Combien de groupe de 3 chevaux peut-on former si l'on ne tient pas compte de l'ordre d'arrivée ? Si on tient compte de l'ordre d'arrivée ?
2. On distribue 13 cartes d'un jeu de bridge (52 cartes). Quel est le nombre de mains possibles ?
3. Combien peut-on former de nombre de 3 chiffres ayant 3 chiffres différents et ne commençant pas par 0 ?
4. On considère n points dans un plan, on joint ces points 2 à 2 par des droites. Combien peut-on tracer de droites ? Combien existe-il de points d'intersections (en plus des n points d'origines) ?
5. Calculer les sommes suivantes :

   $C_n^0+C_n^1+C_n^2+\ldots+C_n^n$

   $C_n^0+C_n^2+C_n^4+\ldots+C_n^{2p}$

   $C_n^0-C_n^2+C_n^4-C_n^6\ldots\ldots$

6. On jette 2 dés. Quelle est la probabilité d'obtenir 9 en additionnant les points obtenus ?
7. Quelle est la probabilité d'obtenir 2 piles et 2 faces en lançant 4 pièces ?
8. Quelle est la probabilité d'obtenir 421 avec 3 dés lancés simultanément ?
9. On tire 3 cartes au hasard d'un jeu de 32 cartes. Quelle est la probabilité de tirer 3 as ?
10. Au bridge Nord et Sud ont dix cœurs dans leurs mains. Quelle est la probabilité pour que 3 cœurs restants soient dans la même main ?

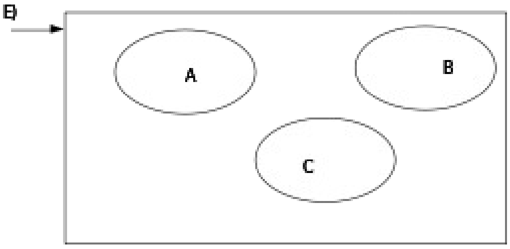
Chapitre 3

THEOREMES GENERAUX DE PROBABILITE

1 AXIOME DE PROBABILITES TOTALES

Considérons une expérience et N le nombre de résultats possibles de cette expérience. Ces N cas possibles constituent l'ensemble E.

Soit A , B , C ….Un certain nombre d'évènements définis par des sous-ensembles de l'ensemble E et supposons tous ces événements incompatibles.



A est réalisé dans n_1 cas d'où Prob (A) = $\frac{n_1}{N}$

B est réalisé dans n_2 cas d'où Prob (B) = $\frac{n_2}{N}$

C est réalisé dans n_3 cas d'où Prob (C) = $\frac{n_3}{N}$

Soit R la réunion de ces événements :

$R = A \cup B \cup C \ldots..$

Le nombre de cas favorables à R est $n_1 + n_2 + n_3 + \ldots.$car les événements sont incompatibles :

$$\text{Prob (R)} = \frac{n1+n2+n3+\ldots.}{N} = \frac{n_1}{N} + \frac{n_2}{N} + \frac{n_3}{N}$$

Si A, B , C …..sont des événements incompatibles :

$$Prob(A\cup B\cup C\ldots..)=Prob(A)+Prob(B)+Prob(C)+\ldots..$$

Cas particulier d'applications :
Considérons un événement A et son contraire $\acute{A}$ on sait que $A\cup \acute{A}$ = E (événements certains)

Les deux événements A et $\acute{A}$ sont incompatibles on peut donc appliquer l'axiome des probabilités totales :

$$P(A\cup \acute{A})=P(E)=P(A)+P(\acute{A})=1$$

2 THEOREME DES PROBABILITES TOTALES

On va maintenant chercher la probabilité de la réunion de deux événements $(A\cup B)$ ceux-ci n'étant pas incompatibles.

Considérons $(A\cup B)$ comme la réunion de trois événements incompatibles $A\acute{B}$, AB , $B\acute{A}$ auxquels on peut appliquer l'axiome des probabilités totales :

$$A\cup B=A\acute{B}\cup AB\cup B\acute{A}$$

$$Prob\ (A\cup B) = Prob\ A\acute{B} + Prob\ AB + Prob\ B\acute{A}$$

(1)

A est la réunion de 2 événements incompatibles $A\acute{B}$ et $A\,B$

$A = A\acute{B} \cup A\,B$

$$Prob\,A = Prob\left(A\acute{B}\right) + Prob\left(AB\right)$$

$$Prob\left(A\acute{B}\right) = Prob\,A - Prob\left(AB\right) \qquad (2)$$

On trouverait de même, en découpant B en 2 évènements incompatibles que :

$$Prob\left(B\acute{A}\right) = Prob\,B - Prob\left(AB\right) \qquad (3)$$

En reportant (2) et (3) dans (1) on trouve l'expression du théorème des probabilités totales :

$$P\left(A \cup B\right) = P\left(A\right) + P\left(B\right) - P\left(AB\right)$$

3 PROBABILITES CONDITIONNELLES (OU PROBABILITECOMPOSEES)

3.1 Définitions :

Il arrive très fréquemment que la probabilité d'un événement soit différente selon qu'un autre événement est réalisé ou non

Soit B l'événement « il pleut » et A l'événement « avoir un accident de voiture »

Il est bien certain que la probabilité de A n'est pas la même selon que B est ou non réalisé.

On notera $P\left(A/B\right)$ la probabilité de l'événement A sachant que l'événement B a été réalisé auparavant.

Exemple : On jette successivement 2 dés soit X_1 le nombre de points obtenus avec le premier, X_2 le nombre de points du deuxième et S la somme des points obtenus.

On peut présenter les résultats de cette expérience par le tableau suivant où la valeur de S figure dans les cases qui correspondent à un couple de valeur pour X_1 et X_2 :

X_1

		1	2	3	4	5	6
	1	2	3	4	5	6	7
	2	3	4	5	6	7	8
X_2	3	4	5	6	7	8	9
	4	5	6	7	8	9	10
	5	6	7	8	9	10	11
	6	7	8	9	10	11	12

Calculons d'abord la probabilité pour que $S \geq 10$, on constate dans le tableau qu'il y a 36 cas possibles dont 6 sont favorables à l'événement considéré :

$$P(S \geq 10) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

Supposons maintenant que l'événement $X_1=6$ soit réalisé, il n'y a plus alors que 6 cas possibles dont 3 sont favorables à l'événement $S \geq 10$:

$$P(S \geq 10 / X1=6) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Il ne faut pas confondre l'événement « $S \geq 10$ sachant que $X_1=6$ » et l'événement « $S \geq 10$ et $X_1=6$ », pour ce dernier événement il y a 36 cas possibles dont 3 favorables :

$$P(S \geq 10 \, et \, X1=6) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

3.2 Théorème des probabilités composées

Soit E l'ensemble des cas possibles d'une expérience, A et B sont 2 événements liés à cette expérience :

L'événement certain, E est la réunion de 4 événements incompatibles $A\,B$, $\acute{A}\,\acute{B}$, $A\,\acute{B}$, $\acute{A}\,B$.

Soit N le nombre de cas possibles constituant l'ensemble E.

Supposons que $A\,B$ soit réalisé dans n_1 cas

$A\,\acute{B}$ soit réalisé dans n_2 cas

$\acute{A}\,B$ soit réalisé dans n_3 cas

$\acute{A}\,\acute{B}$ soit réalisé dans n_4 cas

$n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = N$

$P(A)=P(A\acute{B})+P(AB)$ (Axiome des probabilités totales)

$\text{¿}\frac{n_2}{N}+\frac{n_1}{N}=\frac{n_1+n_2}{N}$ de même on trouve $P(B)=\frac{n_1+n_3}{N}$

Calculons maintenant la probabilité de B sachant que A est réalisé : le nombre de cas possibles n'est plus maintenant que $n_1 + n_2$ parmi lesquels n_1 sont favorables à B :

$$P(B/A)=\frac{n_1}{n_1+n_2}=\frac{\frac{n_1}{N}}{\frac{n_1+n_2}{N}}=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

On trouve ainsi l'expression du théorème des probabilités composées :

$$B/A$$
$$P(AB)=P(A).P\text{¿}$$

Exemple d’application du théorème :

Une urne contient 4 boules noires, 5 rouges et 2 blanches, quelle est la probabilité de sortir à la suite 1 noire et une rouge ?

P(noire puis rouge) = P(noire) . P(rouge/noire)

Il y a 11 boules dont 4 noires, la probabilité de sortir une boule noire la première fois est donc P(noire) $¿\frac{4}{11}$.

Au deuxième tirage il reste 10 boules dont 5 rouges d’où

P(rouge/noire) $¿\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$

D’où la probabilité cherchée : P(noire puis rouge) $¿\frac{4}{11}.\frac{1}{2}=\frac{2}{11}$

Généralisation du théorème :

On peut généraliser facilement à plus de 2 événements :

$$P(ABC)=[P(AB).C]=P(AB).P(C/AB)$$

$$P(ABC)=P(A).P(B/A).P(C/AB)$$

3.3 Evénements indépendants

2 événements sont dits indépendants si la réalisation ou la non réalisation de l’un n’influence pas la probabilité de l’autre.

Donc dans ce cas $P(B/A).=P(B)$

Si 2 événements sont indépendants :
$P(AB)=P(A).P(B)$

Attention ne pas confondre événements indépendants et incompatibles

Exercices

11. Deux urnes contiennent l’une 10 boules blanches et 3 noires l’autre 3 boules blanches et 5 noires. Deux boules dont on ne voit pas la couleur sont transférées de la première urne à la seconde.

On demande la probabilité pour qu’une boule extraite de la deuxième urne soit blanche après le transfert.

12. Quelle est la probabilité en tirant une seule carte d’un jeu de 52 cartes d’obtenir un as ou un pique ?
13. On dispose de 3 jetons A, B , C :

$A=$¿ 2 faces blanches

$B=$¿ 1 face blanche, 1 face noire

$C=$¿ 2 faces noires

On tire un jeton au hasard et on ne voit qu’une de ces faces, elle est blanche. Quelle est la probabilité pour que l’autre le soit aussi ?

14. Une urne contient 2 boules blanches, 3 boules noires et 5 rouges. On tire 2 boules au hasard ensemble.
    a. Quelle est la probabilité pour que ces 2 boules soient de même couleur ?
    b. Quelle est la probabilité pour que ces 2 boules soient de couleurs différentes ?

15. Supposons la probabilité d’avoir un garçon soit 0,5. Dans une famille de 4 enfants évaluer la probabilité des événements suivants :
    a. Les 4 enfants sont des garçons
    b. Les 4 enfants sont du même sexe
    c. Le premier est un garçon, les trois autres sont des filles
    d. Un au moins des 4 enfants est un garçon
16. Dans une usine on dispose de 3 machines dont la production et le pourcentage de pièces défectueuses pour chaque machine sont consignés dans le tableau suivant :

	Pourcentage de production totale	Pourcentage de pièces défectueuses
machine n°1	$P_1=25\%$	$P'_1=5\%$
machine n°2	$P_2=35\%$	P'2=4%
machine n°3	$P_3=40\%$	P'3=2%

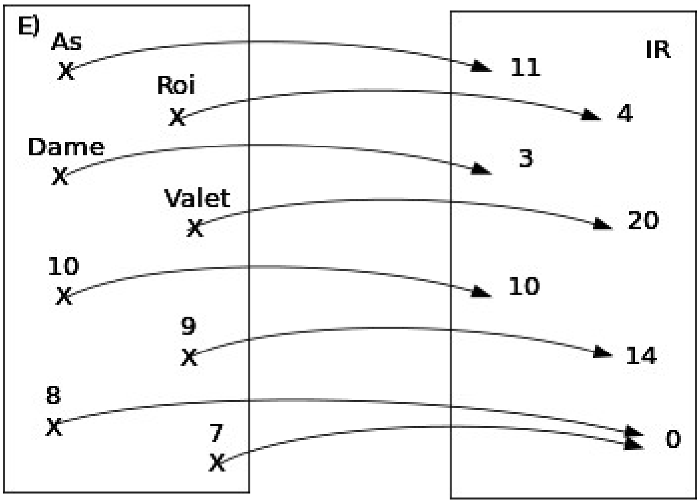
On tire une pièce d'un lot constitué de pièces fabriquées dans les proportions indiquées pour chaque machine, on constate que cette pièce est défectueuse. Calculer la probabilité qu'elle ait été fabriquée par 1, par 2, par 3.

Chapitre 4

VARIABLES ALEATOIRES

1 DEFINITION D'UNE VARIABLE ALEATOIRE-LOI DE PROBABILITE

Nous allons définir une variable aléatoire à partir d'un exemple : considérons l'expérience qui consiste à tirer une carte d'un jeu de 32. Si on ne considère que la nature de la carte sans distinction de couleur il y a 8 cas possibles (As , Roi, Dame, Valet, 10, 9, 8, 7) soit E l'ensemble de ces cas possibles. On peut faire correspondre à chacun des cas possibles un nombre réel : on fait une application de E dans IR. Par exemple :



On a ainsi défini une variable aléatoire qui peut prendre 7 valeurs : 0, 3,4 ,10 ,11 ,14 ,20.

On dira que la probabilité pour que cette variable aléatoire X soit égale à 20 est la même que la probabilité de l'évènement correspondant : tirer un valet.

D'une manière générale on aura défini une variable aléatoire lorsque l'on aura précisé :

a. Les valeurs que peut prendre cette variable aléatoire
b. La probabilité de prendre chacune de ces valeurs

L'ensemble des couples : (valeur prise, probabilité de prendre cette valeur) constitue la loi de probabilité de la variable aléatoire, elle peut se représenter par un diagramme en bâton : en abscisse figurent les valeurs prises par la variable aléatoire en ordonnée les probabilités correspondantes.

<u>Exemple de loi de probabilité</u> :

Reprenons l'exemple déjà étudié au chapitre précédent qui consiste à lancer 2 dés, la variable aléatoire X que l'on considère est égale à la somme des points marqués. Les résultats possibles figurent dans le tableau suivant :

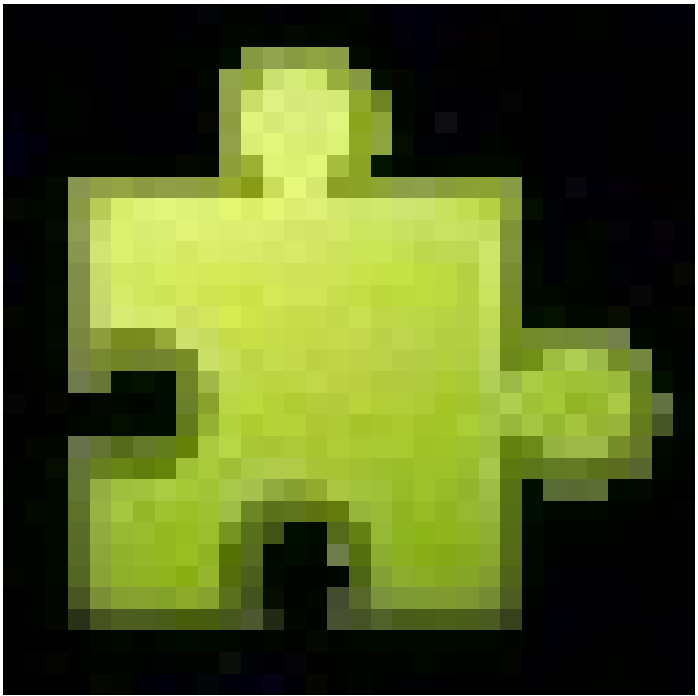
X_1

		1	2	3	4	5	6
	1	2	3	4	5	6	7
	2	3	4	5	6	7	8
X_2	3	4	5	6	7	8	9
	4	5	6	7	8	9	10
	5	6	7	8	9	10	11
	6	7	8	9	10	11	12

La variable aléatoire peut prendre 11 valeurs 2, 3, 4, ….11, 12 avec les probabilités suivantes :

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

Ceci définit la loi de probabilité suivie par X que l'on peut représenter sur le diagramme suivant :



Object 441

2 FONCTION DE REPARTITION D'UNE VARIABLE ALEATOIRE

On appelle fonction de répartition d'une variable aléatoire X une fonction telle que $F(x)=Prob(X<x)$

Reprenons l'exemple précédent :

Pour $x\leq 2 ; F(x)=0$ car X ne prend jamais de valeur plus petite que 2

Pour $2<x\leq 3 ; F(x)=Prob(X=2)=\frac{1}{36}$

Pour $3<x\leq 4 ; F(x)=Prob(X=3)+Prob(X=2)=\frac{2}{36}+\frac{1}{36}=\frac{3}{36}$

x	® ʹ	2® ® ,	3® ® И	4® ® и	5® ®	6® ®	7® ® ˛	8® ® ɔ	9® ® ͲͲ	10® ® ͲͲ	11® ® Ͳʹ	® Ͳʹ
F(x)	0	1/36	3/36	6/36	10/36	15/36	21/36	26/36	30/36	33/36	35/36	36/36 =1

Propriétés générales d'une fonction de répartition :

a) $F(x)=0$ pour toute valeur de x plus petite que la plus petite valeur prise par X en particulier $F(-\infty)=0$.

b) $F(x)=1$ pour toute valeur de x plus grande que la plus grande des valeurs prise par X

c) *Considérons l'événement* A réalisé si $a \leq X \leq b$

Nous allons calculer la probabilité de A et d'abord, puisque c'est plus simple la probabilité de son contraire :

$\acute{A}=(X<a)\cup(X\geq b)$

Les 2 événements $(X<a)$ et $(X\geq b)$ sont, bien sûr, incompatibles :

$Prob\,\acute{A}=Prob(X<a)+Prob(X\geq b)$

On sait que $Prob(X<a)=F(a)$ d'autre part $Prob(X<b)=F(b)$ d'où la probabilité de l'événement contraire

$Prob(X\geq b)=1-F(b)$

$Prob(\acute{A})=F(a)+1-F(b)$

$Prob(A)=1-(F(a)+1-F(b))$

$Prob(a\leq X<b)=F(b)-F(a)$

C'est la propriété essentielle de la fonction de répartition. Elle justifie, à elle seule, comme on le verra par la suite l'introduction de cette fonction.

d) La fonction de répartition a toujours la même allure que dans l'exemple ci-dessus. C'est une fonction « en escalier », partant de 0 et arrivant en 1, qui ne peut que croître ou rester constante : elle est « non décroissante ».*

3 EXTENSION AUX VARIABLES ALEATOIRES CONTINUES

3.1 Position du problème

Nous avons raisonné jusqu'à présent sur des variables aléatoires prenant un nombre fini de valeurs discrètes. Considérons l'expérience suivante : Une aiguille tourne sur un pivot, sa position est repérée par un cadran gradué. Si on lance l'aiguille elle va s'arrêter dans une certaine direction faisant un angle θ avec l'origine.

La mesure de l’angle constitue-elle une variable aléatoire ? Il faudrait d’abord définir les valeurs que peut prendre cette variable aléatoire X : ceci est simple, X peut prendre toutes les valeurs comprises entre 0 et 360° donc une infinité de valeur. Pour chacune des valeurs prises il faut ensuite définir la probabilité de prendre cette valeur, on tombe alors sur une impossibilité : quelle est par exemple la probabilité pour que X égale strictement 60°, il y a un cas favorable et une infinité de cas possibles. On arrive à une probabilité quasi nulle.

Notre définition d’une variable aléatoire est donc en défaut lorsqu’elle peut prendre une infinité de valeur.

En revanche la notion de fonction de répartition reste parfaitement valable dans le cas présent on sait calculer par exemple $(60)=Prob(X<60)=\frac{1}{6}$.

3.2 Fonction de répartition d’une variable aléatoire continue

Partant de la courbe en escalier étudiée plus haut, supposons que le nombre de valeur prisent par X augmente indéfiniment. En sautant délibérément les justifications mathématiques qui s’imposeraient on admettra que cette courbe en escalier tend vers une courbe continue possédant les mêmes propriétés, à savoir :

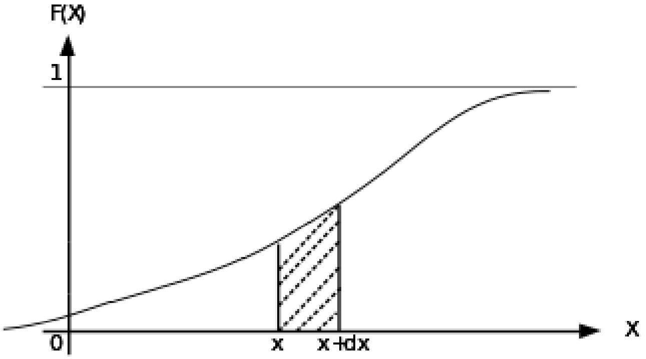
$$F(-\infty)=0$$

$$F(+\infty)=1$$

$$Prob(a\leq X<b)=F(b)-F(a)$$

La courbe est croissante.

Dans le cas où X peut prendre toutes les valeurs entre $-\infty$ et $+\infty$ la courbe a l'allure suivante, (l'intervalle dans lequel X prend ses valeurs peut bien sûr être réduit).



3.3 Densité de probabilité.

En supposant que $F(x)$ est dérivable appelons $f(x)$ sa dérivée. $f(x)$ est la densité de probabilité de la variable aléatoire X . Si dx est un intervalle infiniment petit, tendant vers 0 :

$$f(x)=\frac{F(x+dx)-F(x)}{dx}$$

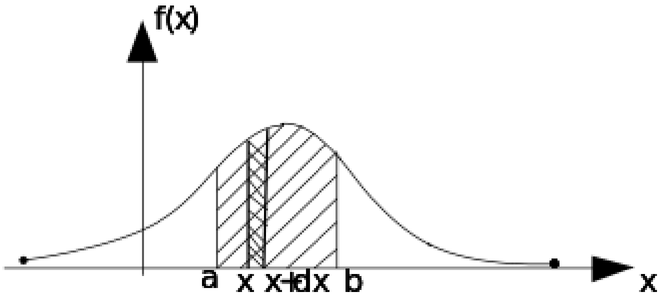
On sait d'après les propriétés de $F(x)$ que

$$Prob(x\leq X<x+dx)=F(x+dx)-F(x)=f(x)dx$$.

On remarque que si l'on n'a pas su définir la probabilité pour que X prenne strictement la valeur de x on vient de définir la probabiluité pour que X soit dans un petit intervalle dx .

La densité de probabilité joue donc, pour les variables aléatoires continues le rôle que jouait la probabilité pour les variables aléatoires ne prenant que des valeurs discrètes.

En observant la pente de la tangentes à $F(x)$ on peut dessiner l'allure générale de $f(x)$:



La probabilité élémentaire pour que X soit compris dans l'intervalle $(x, x+dx)$, égale $f(x)dx$ est représentée par la surface du petit rectangle doublement hachuré.

La probabilité pour que X soit compris dans l'intervalle fini (a, b) est égale à une somme de petits rectangles élémentaires, elle est égale à la surface comprise entre l'axe x , la courbe et entre a et b :

$$Prob¿\ a \leq x < ¿\ \text{b) = F(b)-F(a) =} \int_a^b f(x)\,dx \ .$$

En particulier $Prob(-\infty < x < +\infty) = 1$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$$

Ceci est une propriété caractéristique d'une densité de probabilité. Toute fonction qui possède cette propriété peut être considérée comme une densité de probabilité

4 VARIABLES ALEATOIRES INDEPENDANTES

On a défini au chapitre 3 l'indépendance de 2 événements A et B :

A et B sont indépendants si $P(B/A) = P(B)$

Ou $P(A\,et\,B) = P(A).P(B)$

Nous allons maintenant définir l'indépendance de 2 variables aléatoires en raisonnant sur des variables aléatoires discrètes :

X prend les valeurs x_i avec des probabilités P_i

Y prend les valeurs y_j avec des probabilités P_j

L'événement $X=x_i$ et $Y=y_j$ (à la fois) se produit avec la probabilité P_{ij} .

Le théorème des probabilités composées permet d'écrire :

$$Prob(X=x_i et\ Y=y_j)=Prob(X=x_i).Prob(Y=y_j/(X=x_i))$$

On dit que 2 variables aléatoires X et Y sont indépendantes si

$$Prob(Y=y_j/X=x_i)=Prob(Y=y_j)$$

Si X et Y sont indépendantes $P_{ij}=P_i.P_j$

D'une manière générale on peut dire que 2 variables aléatoires sont indépendantes si la valeur prise par l'une n'a aucune influence sur la valeur de l'autre.

Chapitre 5

CARACTERISTIQUE DES LOIS DE PROBABILITE

On a vu au chapitre précédent qu'une loi de probabilité est parfaitement définie par la connaissance des valeurs que peut prendre la variable aléatoire et des probabilités (ou densité de probabilité) correspondantes.

Ce catalogue de valeurs, même mis sous forme de courbes n'est pas très facile à manier si l'on veut par exemple comparer deux lois de probabilité.

C'est pourquoi on a essayé de résumer les propriétés d'une loi de probabilité par quelques nombres caractéristiques de la loi considérée. Il existe un assez grand nombre de « caractéristiques », on étudiera que les deux plus importantes : L'espérance mathématique et la variance. Il faut bien voir que ces deux caractéristiques, si elles donnent une bonne idée de la loi de probabilité, ne suffisent pas à la définir entièrement, deux lois de probabilités peuvent avoir la même espérance mathématique et la même variance et être différentes.

Nous définirons d'abord l'espérance mathématique et la variance pour des variables aléatoires prenant des valeurs discrètes, la généralisation à des variables aléatoires continues se fera ensuite.

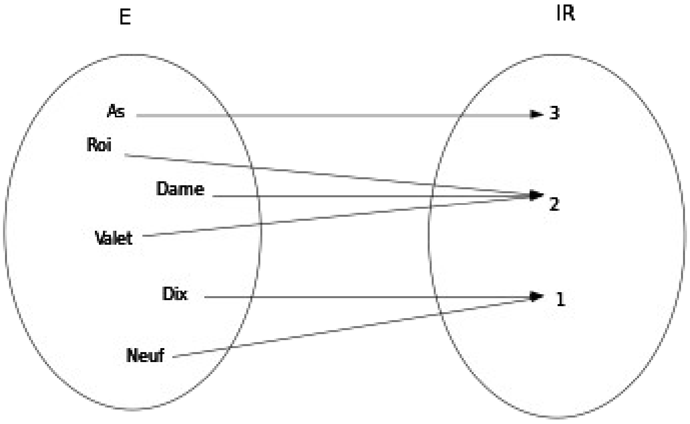
1 ESPERANCE MATHEMATIQUES

1.1 Définition :

Considérons d'abord l'exemple suivant : au jeu de dé on gagne 6 euros si on tire l'as. A chaque coup on peut gagner 6 euros mais la probabilité n'est que de $\frac{1}{6}$. L'espérance de gain à chaque fois est donc 6 X $\frac{1}{6}$ = 1 euro.

L'espérance mathématique est ici le produit du gain par la probabilité d'obtenir ce gain. C'est le gain moyen : en jouant un grand nombre de coups le gain serait de 1 euro par coup.

Considérons maintenant une variable aléatoire (X) définie de la manière suivante :



$Prob(X=1)=\frac{1}{3}$, $Prob(X=2)=\frac{1}{2}$, $Prob(X=3)=\frac{1}{6}$

En appliquant le même raisonnement que plus haut on voit que dans ce cas l'espérance mathématique est :

$$E(X)=3.\frac{1}{6}+2.\frac{1}{2}+1.\frac{1}{3}=1,83$$

D'une manière générale :

L'espérance mathématique de la variable aléatoire (X) est la moyenne arithmétique des valeurs de X pondérées par les probabilités respectives de ces différentes valeurs.

Si une variable aléatoire (X) peut prendre des valeurs x_1 , $x_2, x_3, \ldots\ldots, x_i$ avec les probabilités $p_{1,} p_2, p_3, \ldots\ldots, p_i$:

$$E(X)=\sum x_i p_i$$

1.2 Propriétés de l'espérance mathématique:

1.2.1 Espérance mathématique d'une somme de 2 variables aléatoires.

Soit la variable aléatoire (X) prenant les valeurs x_1 , $x_2, x_3, \ldots\ldots, x_i, \ldots\ldots x_m$

Avec les probabilités $p_{1,} p_2, p_3, \ldots\ldots, p_i, \ldots\ldots p_m$

Et la variable aléatoire (Y) prenant les valeurs y_1 , $y_2, y_3, \ldots\ldots, y_j, \ldots\ldots y_n$

Avec les probabilités $q_{1,} q_2, q_3, \ldots\ldots, q_j, \ldots\ldots q_n$

la variable aléatoire $(X+Y)$ peut prendre les mn valeurs $\left(\overset{x}{\underset{¿}{¿¿i}}+y_j\right)$ avec les probabilités r_{ij} .

Appliquons à ces trois variables aléatoires la définition de l'espérance mathématique :

$$E(X)=\sum_{i=1}^{m} x_i p_i$$

$$E(Y)=\sum_{j=1}^{n} y_j q_j$$

$$x_i + y$$

$$\sum_{j=1}^{n} r_{ij} (¿¿ j) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} r_{ij} x_i + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} r_{ij} y_j$$

$$E(X+Y) = \sum_{i=1}^{m} ¿$$

$$r_{ij}$$

$$x_i \sum_{j=1}^{n} ¿$$

$$¿$$

$$(¿ y_j \sum_{i=1}^{m} r_{ij})$$

$$¿$$

$$¿ \sum_{i=1}^{m} ¿$$

Examinons le terme : $\sum_{j=1}^{n} r_{ij}$ $\quad \sum_{j=1}^{n} r_{ij} = r_{i1} + r_{i2} + r_{i3} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + r_{¿}$

$$¿ Prob(X = x_i et\, Y = 1) + Prob(X = x_i et\, Y = 2) \ldots\ldots + Prob(X = x_i et\, Y = n)$$

$¿ Prob(X = x_i)$ Quel que soit y

$$¿ p_i$$

On trouverait de même $\sum_{i=1}^{m} r_{ij}$ $\quad ¿ q_i$

$$E(X+Y) = \sum_{i=1}^{m} x_i p_i \quad + \quad \sum_{j=1}^{n} y_j q_j \quad ¿ E(X) + E(Y)$$

Remarquons que l'on a fait aucune hypothèse sur X et sur Y quoi peuvent être indépendantes ou non.

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$$

1.2.2 Espérance mathématique d'un produit.

Reprenons les 2 variables aléatoires du paragraphe précédent, la variable aléatoire (XY) peut prendre les mn valeurs $\underset{¿}{\overset{x}{(¿¿i\,y_j)}}$ avec les probabilités r_{ij} (r_{ij} probabilité d'avoir en même temps $X=x_i$ et $Y=y_j$).

$$E(XY)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} r_{ij}x_i y_j$$

Si les 2 variables aléatoires sont quelconques, on ne peut pas aller plus loin. Supposons alors qu'elles soient indépendantes, dans ce cas $r_{ij}=p_i q_j$ (cf chapitre 4-paragraph 4).

$$E(XY)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_i q_j x_i y_j \qquad ¿\sum_{i=1}^{m} x_i p_i \sum_{j=1}^{n} y_j q_j \qquad ¿E(X).E(Y)$$

Si X et Y sont indépendantes

$$E(XY)=E(X).E(Y)$$

2 **VARIANCE.**

2.1 **Signification physique**:

On vient de voir que l'espérance mathématique était très proche de ce que l'on appelle communément la « moyenne ». On dit quelquefois que l'espérance mathématique est une caractéristique de « position », elle indique une valeur autour de laquelle seront regroupées les valeurs prises par la variable aléatoire. Si l'on représente les lois de probabilité de 2 variables aléatoires ayant pour espérance mathématique 10 et 100 on obtient des résultats ayant l’allure suivante :

Considérons maintenant les 2 lois de probabilités suivantes ayant même espérance mathématique (par exemple 10)

La différence entre ces deux lois de probabilités est flagrante, la deuxième est beaucoup plus « dispersée » autour de son espérance mathématique, c’est cette propriété de plus ou moins grande dispersion autour de l’espérance mathématique que l’on veut chiffrer par la variance.

2.2 **Définition**:

Ce qui est intéressant pour chiffrer la dispersion c’est donc l’écart $x_i-E(X)$ entre chacune des valeurs prises par X et l’espérance mathématique. On a choisi de considérer le carré de ces écarts et de les pondérer par la probabilité de prendre la valeur x_i ce qui est bien normal car une valeur même très éloignées de $E(X)$ n’a que peu d’importance si la probabilité correspondante est très faible. On arrive alors à la définition de la variance :

$$x$$

$$VAR(X)=\sum_{i=1}^{n} p_i(¿¿i-E(X))^2$$

$$¿$$

On utilise souvent une autre caractéristique liée à la variance, l’écart type noté $\sigma(X)$, c’est la racine carrée de la variance.

Considérons une nouvelle variable aléatoire $Y=(X-E(X))^2$, Y prend les valeurs $(¿\underset{¿}{\overset{x}{¿}}i-E(X))^2$ avec les probabilités p_i on remarque alors que

$$VAR(X)=E(Y)$$

$$VAR(X)=\sigma^2(X)=E([X-E(X)]^2)$$

La variance d'une variable aléatoire est égale à l'espérance mathématique du carré de son écart à sa moyenne.

2.3 **Propriétés de la variance**:

2.3.1 Somme d'une variable aléatoire (X) et d'une constante (K)

$$VAR(X+K)=E[(X+K)-E(X+K)]^2$$

Considérons $E(X+K)$, la constante K peut être considérée comme une variable aléatoire prenant une seule valeur avec la probabilité 1 d'où $E(K)$ = K x1= K .

D'après le théorème sur l'espérance d'une somme (paragraphe 1.2.1 ci-dessus) :

$$\begin{array}{c} X \\ ¿ \\ K \\ X \\ ¿ \\ E(X+K)=E¿ \end{array}$$

$$VAR(X+K)=E[(X+K)-E(X+K)]^2$$

$$\begin{array}{c} X \\ (X-E(¿)] \\ ¿ \\ ¿ \\ ¿E¿ \end{array}$$

$$VAR(X+K)=VAR(X)$$

Ce résultat était prévisible : en ajoutant une constante à une variable aléatoire on ne fait que décaler sa loi de probabilité le long de l'axe des x sans modifier sa dispersion.

2.3.2 Produit d'une variable aléatoire (X) et d'une constante (K)

$$VAR(KX)=E[(KX)-E(KX)]^2$$

K et X sont bien sûr indépendantes, $E(KX)=E(K).E(X)=KE(X)$

$VAR(KX)=E[(KX)-KE(X)]^2$

¿ $E[K(X-E(X))]^2$

¿ $K^2E[(X)-E(X)]^2$

$VAR(KX)=K^2VAR(X)$

2.3.3 Autre expression de la variance

$[X-E(X)]^2=X^2-2XE(X)+[E(X)]^2$

$X^2-2XE(X)+2[E(X)^2-[E(X)]^2]$

$VAR(X)=E$ ¿

¿ $E[X^2-2E(X)[X-E(X)]-[E(X)]^2]$

¿ $E\left[X^2-[E(X)]^2\right]-2E[E(X)[X-E(X)]]$

Il faut bien voir ici que $E(X)$ est un nombre certain, c'est une constante, d'où la transformation du 2ème terme :

¿ $E\left[E(X)[X-E(X)]\right]=E(X).E[X-E(X)]$

¿ $E(X).[E(X)-E(X)]=0$

$VAR(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$

Cette expression est très souvent plus intéressante que la définition pour calculer effectivement la variance.

2.3.4 Variance d'une somme

$VAR(X+Y)=E[(X+Y)-E(X+Y)]^2$

$(X-E(X))^2+(Y-E(Y))^2+2(X-E(X))$ ¿

¿ E ¿

¿ $VAR(X)+VAR(Y)+2E([X-E(X)][Y--E(Y)])$

Si X et Y sont indépendants :

$$Y-E(Y)$$

$$E([X-E(Y)][Y-E(Y)])=E(X-E(X)).E¿$$ (cf 1.2.2)

$$0.0$$

Si X et Y sont indépendantes :

$$VAR(X+Y)=VAR(X)+VAR(Y)$$

Si X et Y ne sont pas indépendantes, on appellera covariance de X et Y le 3ème terme non nul :

$$COVAR(X.Y)=E([X-E(X)][Y-E(Y)])$$

$$¿E(XY-XE(Y)-YE(X)+E(X).E(Y))$$

$$¿E(XY)-E(X).E(Y)$$

On définit également un coefficient de corrélation entre X et Y :

$$r=\frac{COVAR(X.Y)}{\sigma(x).\sigma(y)}$$

Si X et Y ne sont pas indépendantes

$$VAR(X+Y)=VAR(X)+VAR(Y)+2COVAR(X,Y)$$

3 GENERALISATION AUX VARIABLES CONTINUES.

Soit X une variable aléatoire continue, elle possède une fonction de répartition $F(x)$ et une densité de probabilité telles que :

$$F(x)=Prob(X<x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

On a vu au chapitre 4 que la densité de probabilité jouait pour les variables continues le rôle de la probabilité pour les variables discrètes ceci permet par analogie de définir l’espérance mathématique et la variance pour une variable continue :

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,dx \qquad VAR(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} [x-E(X)]^2 f(x)\,dx$$

RESUME DE PROPRIETES DE L'ESPERANCE MATHEMATIQUE

ET DE LA VARIANCE

ESPERANCE MATHEMATIQUE . Caractéristique de position

Définition : $E(X)=\sum x_i p_i$ (Variable discrète)

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,dx$$ (Variable continue)

Propriétés :

$E(X+Y)=E(X)+E(Y)$ (Toujours)

$E(XY)=E(X).E(Y)$ Si X et Y sont indépendantes

VARIANCE . Caractéristique de dispersion

Définition :

$$VAR(X)=\sum_{i=1}^{n} p_i(\underset{\text{¿}}{\overset{x}{\text{¿¿}}}i-E(X))^2$$ (Variable discrète)

$VAR(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}[x-E(X)]^2 f(x)\,dx$ (Variable continue)

Propriétés :

$VAR(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$

$VAR(X+K)=VAR(X)$ $K=cste$

$VAR(KX)=K^2\,VAR(X)$ $K=cste$

$VAR(X+Y)=VAR(X)+VAR(Y)$ Si X et Y sont indépendantes

$VAR(X+Y)=VAR(X)+VAR(Y)+2COVAR(X,Y)$ Si X et Y non indépendantes

$COVAR(XY)=E(XY)-E(X).E(Y)$

Exercices

17. Soient a et b 2 nombres réels $(b>a)$ et $f(x)$ une fonction telle que :

$f(x)=k\,si\,a\le x\le b$

$f(x)=0$ si non

a) Quelle est la valeur de k pour que $f(x)$ soit la densité de probabilité d'une variable aléatoire X ?
b) Calculer $E(X)$ et $VAR(X)$
c) Déterminer et tracer la fonction de répartition $F(x)$.

18. On considère la fonction $\rho(V)=k\,V^2 e^{-\left(\frac{V}{V_0}\right)^2}$ si $V\ge 0$

¿0 si $V<$¿ 0

a) Déterminer k pour que $\rho(V)$ puisse être considéré comme la densité de probabilité de la variable aléatoire V qui mesure le module de la vitesse d’un neutron ;

(on rappelle que $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$)

b) Calculer la vitesse la plus probable (vitesse pour laquelle ρ est maximum)

c) Calculer la vitesse moyenne $E(V)$

d) Calculer l’écart type $\rho(V)$

19. Soit X une variable aléatoire dont la fonction de répartition est F et la densité f .

On définit la variable aléatoire Y par $Y=X^2$.

a) Déterminer la fonction de répartition G et la densité g de Y

b) On suppose $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x^2}{2}}$, expliciter la fonction g et calculer $E(Y)$

On admettra que $\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{4}$

Chapitre 6

LOI BINOMIALE (LOI DE BERNOULLI)

Après avoir défini une loi de probabilité puis étudié ses caractéristiques essentielles, nous allons maintenant étudier quelques cas particuliers des lois de probabilités, celles que l'on retrouve le plus souvent dans les phénomènes physiques et pour commencer, la loi binomiale.

1 DEFINITION-EXPRESSION MATHEMATIQUE.

Considérons ce que l'on appelle un modèle de Bernoulli : une urne contient a_1 boules blanches et a_2 boules noires. On procède à N tirages successifs, au hasard, en remettant à chaque fois la boule dans l'urne (tirage non exhaustif). On considère à chaque fois le fait de tirer une boule blanche comme un succès, le fait de tirer une noire comme un échec. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de succès en N tirages.

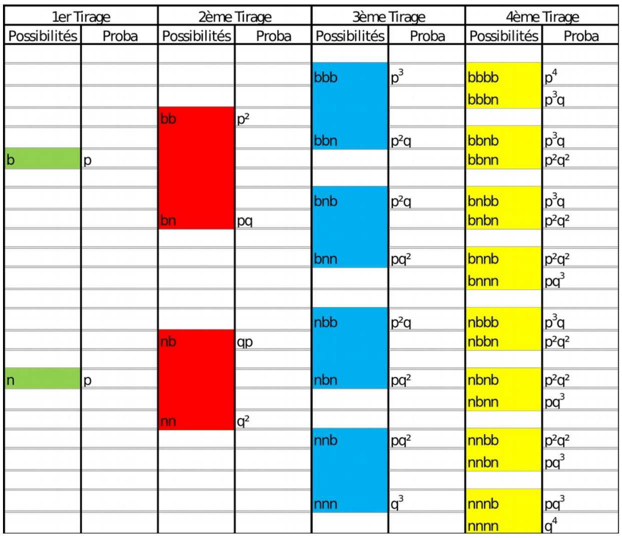
On dira que X suit une loi de Bernouilli ou loi Binomiale.

Il reste maintenant à déterminer la probabilité pour que X prenne toutes les valeurs comprises entre 0 et N .

La probabilité de succès à chaque coup est $p=\frac{a_1}{a_1+a_2}$.

La probabilité d'échec est $p=\frac{a_2}{a_1+a_2}$ avec $p+q=1$

Considérons le tableau suivant donnant, pour les 4 premiers tirages les différentes possibilités avec les probabilités correspondantes :



1er Tirage		2ème Tirage		3ème Tirage		4ème Tirage	
Possibilités	Proba	Possibilités	Proba	Possibilités	Proba	Possibilités	Proba
				bbb	p^3	bbbb	p^4
						bbbn	p^3q
		bb	p^2				
				bbn	p^2q	bbnb	p^3q
b	p					bbnn	p^2q^2
				bnb	p^2q	bnbb	p^3q
		bn	pq			bnbn	p^2q^2
				bnn	pq^2	bnnb	p^2q^2
						bnnn	pq^3
				nbb	p^2q	nbbb	p^3q
		nb	qp			nbbn	p^2q^2
n	p			nbn	pq^2	nbnb	p^2q^2
						nbnn	pq^3
		nn	q^2				
				nnb	pq^2	nnbb	p^2q^2
						nnbn	pq^3
				nnn	q^3	nnnb	pq^3
						nnnn	q^4

Il est important de voir qu’à chaque tirage la probabilité de succès (ou d’échec) est toujours la même, elle est en particulier indépendante des tirages précédents.

Les résultats du tableau précédant sont regroupés ci-dessous en fonction du nombre d’épreuve :

$$N=1\ Prob(X=1)=p=C_1^1 p$$

$$Prob(X=0)=q=C_1^0 q$$

$$N=2\ Prob(X=2)=p^2=C_2^2 p^2$$

$$Prob(X=1)=2pq=C_2^1 pq$$

$$Prob(X=0)=q^2=C_2^0 q^2$$

$$N=3\ Prob(X=3)=p^3=C_3^3 p^3$$

$$Prob(X=2)=3p^2q=C_3^2 p^2 q$$

$$Prob(X=1)=3pq^2=C_3^1 pq^2$$

$Prob(X=0)=q^3=C_3^0 q^3$

$N=4\ Prob(X=4)=p^4=C_4^4 p^4$

$Prob(X=3)=4p^3 q=C_4^3 p^3 q$

$Prob(X=2)=6p^2 q^2=C_4^2 p^2 q^2$

$Prob(X=1)=4p q^3=C_4^1 pq^3$

$Prob(X=0)=q^4=C_4^0 q^4$

On remarque que les différentes probabilités sont les termes du développement du binôme d'exposant N .

Pour $N=3$ par exemple $(p+q)^3=p^3+3p^2q+3pq^2+q^3$

Ayant vu la loi de formation, on peut écrire facilement, pour N quelconque la probabilité pour que $X=K$:

$$Prob(X=K)=C_N^K p^K q^{N-K}=C_N^K p^K (1-p)^{N-K}$$

On aurait pu trouver ce résultat par un raisonnement direct : en N tirages on cherche la probabilité de tirer K blanches et donc $(N-K)$ noires.

Une première possibilité consiste à tirer K blanches à la suite puis $N-K\ noires$ tous lés événements sont indépendants d'où la probabilité : $p^K q^{N-K}$.

Il y a bien d'autres possibilités : ce sont toutes les combinaisons dans l'ordre de succession des boules blanches et noires soit C_N^K , la probabilité pour chaque suite est toujours la même, d'où le résultat trouvé plus haut :

$$Prob(X=K)=C_N^K p^K(1-p)^{N-K}$$

Enoncé de la loi Binomiale

Une variable aléatoire X , pouvant prendre $N+1$ valeurs entières obéit à une loi binomiale si la probabilité pour que $X=K$ est de la forme :

$$Prob(X=K)=C_N^K p^K(1-p)^{N-K}$$

2 Exemple de loi Binomiale.

Considérons l'expérience suivante : on lance un dé 6 fois de suite et on s'intéresse à la variable aléatoire X égale au nombre de fois où on amène l'as.

On se trouve bien dans les conditions d'application de la Loi de Bernoulli.

- A chaque lancé il n'y a que 2 solutions ; Succès (As) ou échec.
- La probabilité de succès est la même à chaque fois.

$$Prob(X=0)=C_6^0\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^6=0{,}3349$$

$$Prob(X=1)=C_6^1\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{5}{6}\right)^5=0{,}4019$$

$$Prob(X=2)=C_6^2\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^4=0{,}2009$$

$$Prob(X=3)=C_6^3\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^3=0{,}0536$$

$$Prob(X=4)=C_6^4\left(\frac{1}{6}\right)^4\left(\frac{5}{6}\right)^2=0{,}0080$$

$$Prob(X=5)=C_6^5\left(\frac{1}{6}\right)^5\left(\frac{5}{6}\right)^1=0{,}0006$$

$$Prob(X=6)=C_6^6\left(\frac{1}{6}\right)^6\left(\frac{5}{6}\right)^0=0{,}0002$$

Ces résultats permettent de tracer la loi de probabilité et la fonction de répartition :

Loi de probabilité :

Object 1092

3 ESPERANCE MATHEMATIQUE ET VARIANCE DE LA LOI BINOMIALE.

3.1 Espérance mathématique.

Considérons une variable aléatoire X telle que

$$Prob(X=K)=C_N^K\, p^K (1-p)^{N-K}$$

Appliquons la définition de l'espérance mathématique :

$$E(X)=\sum_{K=0}^{n} K C_N^K\, p^K q^{N-K}$$

$$E(X)=0+\frac{N!}{1!(N-1)!}p\,q^{N-1}+\ldots+K\frac{N!}{K!(N-K)!}p^K q^{N-K}+\ldots+N\frac{N}{N!0!}p^N q^0$$

Nous ne considérerons, pour simplifier l'écriture que le terme général de cette somme :

$$(N-1)-(K-1)!$$

¿

$$(K-1)!¿$$

$$E(X)=\ldots+\frac{N!}{¿}$$

$$¿\,Np[\ldots+\frac{(N-1)!}{(K-1)!\left[(N-1)-(K-1)!\right]}p^{K-1}q^{[(N-1)-(K-1)]}+\ldots].$$

Posons $K-1=r$, r varie de $0\,à\,N-1$ car le 1^er^ terme pour $K=0$ est nul.

$$E(X)=Np[\ldots+\frac{(N-1)!}{r!\left[(N-1)-r\right]!}p^r q^{[(N-1)-r]}+\ldots]$$

On reconnait entre crochets le développement de $(p+q)^{N-1}$

$E(X)=Np(p+q)^{N-1}$ or $p+q=1$

$E(X)=Np$

3.2 Variance.

$$X^2-2XE(x)+E(X)^2=E[X^2-2X+Np+N^2P^2]$$
$$VAR(X)=E[X-E(X)]^2=E¿$$

$$¿E\left[X(X-1)+X-2NpX+N^2P^2\right]=E\left[X(X-1)\right]+E(X)-ENpE(X)+N^2P^2$$

$$X(X-1)$$
$$¿E[¿+Np-N^2P^2]$$

Nous allons calculer le premier terme $¿E\left[X(X-1)\right]$ en appliquant la définition de l'espérance mathématique.

$$E\left[X(X-1)\right]=\sum_{k=0}^{n}K(K-1)\frac{N!}{K!(N-K)!}p^Kq^{N-K}$$

Remarquons que les 2 premiers termes de cette sommes sont nuls, on peut donc faire varier K de 2 à N

$$E\left[X(X-1)\right]=\sum_{k=2}^{n}\frac{N!}{(K-2)!(N-K)!}p^Kq^{N-K}$$

$N-2$

¿

$K-2$

$-(¿)$

¿

¿

$(K-2)!¿$

$$\frac{(N-2)!}{¿}$$

$$¿\,N(N-1)p^2\sum_{k=2}^{n}¿$$

Les termes $(K-2)$ varie de 0 à $(N-2)$ on reconnait alors le développement de $(p+q)^{N-2}$

$$E[X(X-1)]=N(N-1)p^2(p+q)^{N-2}=N(N-1)p^2$$

D’où la variance : $VAR(X)=N(N-1)p^2+NP-N^2p^2=Np(1-p)=Npq$

$$VAR(X)=Npq$$

$$\sigma(X)=\sqrt{Npq}$$

4 RESUME DE CE CHAPITRE.

-Lors d’une série de N épreuves on appelle X la variable aléatoire égale au nombre de succès. X suit une loi de Bernoulli si les conditions suivantes sont remplies :

- à chaque épreuve il n’y a que deux solutions : succès ou échec
- à chaque épreuve la probabilité de succès est toujours la même : p

La probabilité que $\overset{0 \leq k \leq N}{X=k\text{¿}}$ est alors $C_N^K p^K (1-p)^{N-K}$ le diagramme en bâton de cette loi de probabilité est dissymétrique (sauf pour $p=q=1-p$), elle est d’autant plus dissymétrique que p est différent de q .

L’expression de cette probabilité est assez complexe, dès que N est grand le calcul se révèle laborieux en raison de la présence de factorielles.

En revanche le calcul de la moyenne et de la variance est immédiat :

$$E(X)=Np$$

$$VAR(X)=Npq$$

Exercices

20. Dans un jeu de 32 cartes on tire 5 fois une carte qui est remise chaque fois dans le jeu.

    Quelle est la probabilité d’obtenir 2 fois un pique ?

21. On dispose d’une machine à interroger, basée sur le principe suivant : chaque élève dispose d’un clavier à 5 touches numérotées, pour chaque question on lui propose 5 réponses numérotées dont une seule est exacte. Il désigne celle qui lui parait satisfaisante en enfonçant la touche correspondante au numéro de cette question.

    Pour un examen on pose 8 questions, il faut avoir répondu correctement à 5 d’entre elles au moins pour être reçu.

    Un singe non savant se présente à l’examen, à chaque question il enfonce une touche au hasard, quelle est la probabilité pour qu’il soit reçu ?

22. Une personne jouant à un certain jeu peut gagner 1 euros avec une probabilité égale à 1/3 et perdre 25 centimes avec une probabilité égale à 2/3. Quelle est la probabilité de gagner au moins 3 euros en 20 coups ?

Chapitre 7

LOI DE POISSON ET DE GAUSS

1. INTRODUCTION DE LA LOI DE POISSON COMME APPROXIMATION DE LA LOI DE BERNOULLI.

Dans la loi de BERNOULLI, on fait aucune hypothèse sur le nombre N de tirages ni sur la probabilité de succès p .

Supposons maintenant que N soit grand et p petit, ceci va nous permettre de simplifier la formulation de la probabilité de k succès en N tirages :

$$Prob(X=K)=C_N^K p^K (1-p)^{N-K}$$

$$Prob(X=K)=\frac{N(N-1)\dots(N-K+1)}{k!} p^K (1-p)^{N-K}$$

$$\text{¿}\frac{N(N-1)\dots(N-K+1)}{k!(1-p)^k} p^K (1-p)^N$$

$$\text{¿}\frac{Np(Np-p)\dots(Np-(K-1)p)(1-\frac{Np}{N})^N}{k!(1-p)^k}$$

$$\text{¿}\frac{\lambda(\lambda-p)\dots(\lambda-(K-1)p)(1-\frac{\lambda}{N})^N}{k!(1-p)^k}$$

Si p est petit et si k est également petit devant N : $(1-p)^k \# 1$

D'autre part tous les termes $(\lambda-p)\dots(\lambda-(K-1)p)$ sont voisins de λ de plus, si N est grand $(1-\frac{\lambda}{N})^N \to e^{-\lambda}$ d'où l'expression simplifiée :

$$Prob(X=K)=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

Cette approximation de la loi de BERNOULLI intéresse des événements rares dans une suite d’observations nombreuses, plus précisément les conditions d’application de l’approximation sont les suivantes :

- N grand
- p petit devant 1
- k petit devant N

Dans la pratique, il suffit en fait d’avoir les 2 conditions suivantes :

$$N > 30$$

$$Np < 5$$

2 LOI DE POISSON.

2.1 Définition :

Une variable aléatoire X , pouvant prendre toutes les valeurs entières positives ou nulles suit une loi de Poisson lorsque la probabilité pour que X prenne la valeure entière k est la suivante :

$$Prob(X=K)=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

2.2 Espérance mathématique.

$$E(X)=\sum_{K=0}^{+\infty} K.\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

¿ $$1.e^{-\lambda}\frac{e^{-\lambda}\lambda^1}{1!}+2e^{-\lambda}\frac{e^{-\lambda}\lambda^2}{2!}+\ldots+k.\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}+\ldots$$

¿ $$\lambda e^{-\lambda}[1+\frac{\lambda^1}{1!}+\frac{\lambda^2}{2!}+\ldots+\frac{\lambda^k}{k!}+\ldots]$$

On reconnait entre crochet le développement de e^{λ} :

$$E(X)=\lambda e^{-\lambda}e^{\lambda}$$

$E(X)=\lambda$

2.3 Variance.

$VAR(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$

$$E(X^2)=\sum_{k=0}^{+\infty} k^2 . \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

$$\frac{k^2}{k!}=\frac{1}{(k-1)!}+\frac{1}{(k-2)!}$$

$$E(X^2)=\sum_{k=1}^{+\infty} e^{-\lambda}\lambda\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}+\sum_{k=2}^{+\infty} e^{-\lambda}\lambda^2\frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!}$$

On reconnait encore le développement de e^{λ} :

$$E(X^2)=e^{-\lambda}\lambda e^{\lambda}+e^{-\lambda}\lambda^2 e^{\lambda}=\lambda+\lambda^2$$

Et enfin : $VAR(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\lambda+\lambda^2-\lambda^2$

$VAR(X)=\lambda$

2.4 Allure de la loi de Poisson.

Les courbes suivantes donnent l’allure générale de la loi de Poisson pour différentes valeur de λ. Il faut bien voir qu’on n’a pas le droit normalement de tracer de telles courbes car X ne prend que des valeurs entières, les points correspondants ont été reliés par des segments de droite pour rendre le graphique plus lisible.

On constate que la loi est très dissymétrique lorsque λ est petit, elle devient ensuite symétrique lorsque λ grandit.

3 INTRODUCTION DE LA LOI DE GAUSS COMME APPROXIMATION DE LA LOI DE BERNOULLI.

Reprenons la loi de BERNOULLI : $Prob(X=K)=C_N^K p^K (1-p)^{N-K}$ en faisant maintenant une nouvelle hypothèse :

Supposons que N soit grand et que p soit du même ordre de grandeur que $(1-p)$, donc voisin de $0{,}5$.

Si N est grand on peut approximer les exponentielles par la formule de Stirling :

$N!=N^N e^{-N}\sqrt{2\pi N}(1+\varepsilon_N)\varepsilon_N \to 0$ quand $N \to +\infty$

En utilisant cette formule et après une démonstration que l'on ne fera pas, on trouve une nouvelle approximation pour la loi de BERNOULLI :

$$Prob(X=K)=\frac{1}{\sqrt{2\pi Npq}}e^{\frac{-1}{2}\left(\frac{k-Np}{Npq}\right)^2}$$

On sait que $Npq=VAR(X)=\sigma^2(X)$ et $Np=E(X)$ d'où :

$$Prob(X=K)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-1}{2}\left(\frac{k-E(X)}{\sigma}\right)^2}$$

Dans la pratique cette approximation est valable si les conditions suivantes sont remplies :

$N>30$

$Np>5$

$N(1-p)>5$

4 LOI DE GAUSS (ou loi normale).

4.1 Définition :

Alors qu'on ne s'est intéressé jusqu'à présent qu'à des variables aléatoires prenant des valeurs entières, la loi de Gauss s'applique à des variables aléatoires continues prenant toutes les valeurs comprises entre $-\infty$ et $+\infty$.

Une variable aléatoire X , continue, est gaussienne si la probabilité pour que X soit plus petit que x s'exprime par la fonction de répartition suivante :

$$F(X)=\frac{1}{b\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{X} e^{\frac{-1}{2}\left(\frac{x-a}{b}\right)^2} dx$$

Et la densité de probabilité :

$$f(x)dxProb(x<X<x+dx)=\frac{1}{b\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-1}{2}\left(\frac{x-a}{b}\right)^2} dx$$

4.2 Justification de la définition

Cette définition n'a de sens que si $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$ (cf Ch.4 paragraphe 3.4)

Il faut donc calculer $I=\frac{1}{b\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-1}{2}\left(\frac{x-a}{b}\right)^2} dx$

Posons $\frac{x-a}{b}=t$ d'où $dx=bdt$

$$I=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-t^2}{2}} dt$$

Pour calculer cette intégrale, on peut utiliser l'artifice suivant :

Soit $I_1=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-x^2}{2}} dx$ et $I_2=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-y^2}{2}} dy$

On a bien $I_1=I_2$

$$I_1 I_2=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-x^2}{2}} dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-y^2}{2}} dy=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-(x^2+y^2)}{2}} dxdy$$

En passant en coordonnées polaires :

$$I_1 I_2=\int_0^{2\pi}\int_0^{+\infty} e^{\frac{-\rho^2}{2}}\rho d\rho d\theta=2\pi\int_0^{+\infty} e^{\frac{-\rho^2}{2}}\rho d\rho=2\pi\left[-e^{\frac{-\rho^2}{2}}\right]_0^{+\infty}=2\pi$$

On en déduit $\begin{matrix}1=¿\,I_2=\sqrt{2\pi}\\ I_{¿}\end{matrix}$ et donc $I=1$ ce qui justifie la définition de la loi de Gauss.

4.3 Calcul des caractéristiques

4.3.1 Espérance mathématique.

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} x e^{\frac{-1}{2}\left[\frac{x-a}{b}\right]^2}\,dx$$

Posons $t=\frac{x-a}{b}$ $\quad E(X)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(tb+a)e^{\frac{-t^2}{2}}\,dt$

$$¿\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[b\int_{-\infty}^{+\infty}(t)e^{\frac{-t^2}{2}}\,dt+a\int_{-\infty}^{+\infty}e^{\frac{-t^2}{2}}\,dt\right]$$

La première intégrale est très simple : $\int_{-\infty}^{+\infty}(t)e^{\frac{-t^2}{2}}\,dt=-\left[e^{\frac{-t^2}{2}}\right]_{-\infty}^{+\infty}=0$

Il reste alors $\quad E(X)=\frac{a}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}te^{\frac{-t^2}{2}}\,dt$

Le calcul de cette intégrale a été fait au paragraphe précédent :

$$E(X)=a$$

4.3.2 Variance.

$$\sigma^2(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[X-E(X)\right]^2 f(x)\,dx$$

$$\sigma^2(X)$$

$$¿\frac{1}{b\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-a)^2 e^{\frac{-1}{2}\left(\frac{x-a}{b}\right)^2}dx$$

Posons $t=\frac{x-a}{b}$ $\quad \sigma^2(X)=\frac{b^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}t^2e^{\frac{-t^2}{2}}\,dt$

Par intégration par partie : $u=t$ $\qquad du=dt$

$$dv = t\, e^{\frac{-t^2}{2}} dt \qquad\qquad v = -e^{\frac{-t^2}{2}}$$

$$\sigma^2(X) = \frac{b^2}{\sqrt{2\pi}} \left[\left[-t\, e^{\frac{-t^2}{2}} \right]_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-t^2}{2}} dt \right]$$

Le premier terme est nul, l’intégrale restante a déjà été calculée, elle est égale à $\sqrt{2\pi}$:

$$\sigma(X) = b$$

4.4 Nouvelle expression de la loi de Gauss et courbe représentative.

Compte tenu des résultats précédents, la fonction de répartition et la densité de probabilité prennent les expressions suivantes :

$$F(X) = Prob(X < x) = \frac{1}{\sigma(X)\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{X} e^{\frac{-1}{2}\left[\frac{x - E(X)}{\sigma(X)}\right]^2} dx$$

$$f(X) = Prob(x < X < x + dx) = \frac{1}{\sigma(X)\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-1}{2}\left[\frac{x - E(X)}{\sigma(X)}\right]^2}$$

La courbe représentative de $f(X)$ est la suivante :

On pourra vérifier les points suivants :

- Elle est symétrique par rapport à $x = E(X)$
- La valeur du maximum est $\frac{1}{\sigma(X)\sqrt{2\pi}}$
- Elle possède 2 points d’inflexions pour $x = E(X) \pm \sigma(X)$

4.5 Variable centrée réduite.

Reprenons la densité de probabilité d'une variable de Gauss :

$$f(X) = Prob(x < X < x + dx) = f(x)dx = \frac{1}{\sigma(X)\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-1}{2}\left[\frac{x - E(X)}{\sigma(X)}\right]^2} dx$$

Considérons une nouvelle variable aléatoire $T = \frac{X - E(X)}{\sigma(X)}$, à chaque valeur x de X correspond une valeur t de T telle que $t = \frac{x - E(X)}{\sigma(X)}$, en effectuant ce changement de variable on obtient la densité de probabilité de T compte tenu que $dx = \sigma(X)dt$, ainsi que la fonction de répartition :

$$Prob(t < T < t + dt) = f(t)dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-t^2}{2}} dt$$

$$Prob(T < t) = F(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{\frac{-t^2}{2}} dt$$

Ces nouvelles fonctions ont le gros avantage de ne pas dépendre des caractéristiques de la loi que l’on étudie, elles sont universelles. Le premier souci, lorsqu’on étudiera une loi de Gauss est de faire le changement de variable pour passer en variable centrée réduite.

Courbes représentatives :

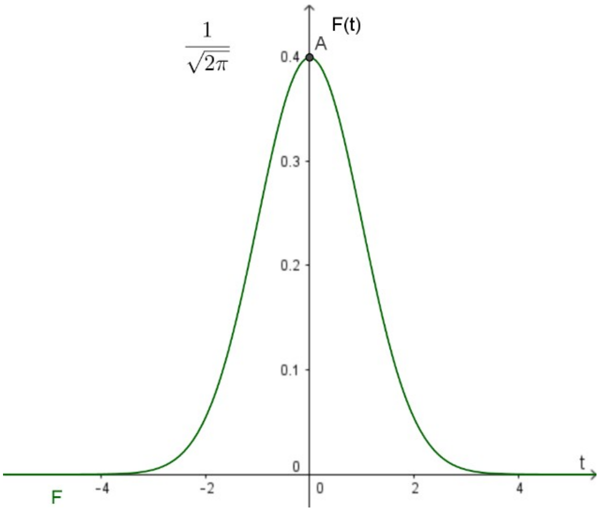
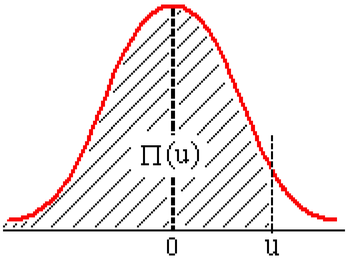


Table de Loi Normale

Fonction de répartition Π de la loi normale centrée réduite.

Probabilité de trouver une valeur inférieure à u .

$\Pi(-u) = 1 - \Pi(u)$



u	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.51994	0.52392	0.52790	0.53188	0.53586
0.1	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172	0.55567	0.55962	0.56356	0.56749	0.57142	0.57535
0.2	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095	0.59483	0.59871	0.60257	0.60642	0.61026	0.61409
0.3	0.61791	0.62172	0.62552	0.62930	0.63307	0.63683	0.64058	0.64431	0.64803	0.65173
0.4	0.65542	0.65910	0.66276	0.66640	0.67003	0.67364	0.67724	0.68082	0.68439	0.68793
0.5	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194	0.70540	0.70884	0.71226	0.71566	0.71904	0.72240
0.6	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565	0.73891	0.74215	0.74537	0.74857	0.75175	0.75490
0.7	0.75804	0.76115	0.76424	0.76730	0.77035	0.77337	0.77637	0.77935	0.78230	0.78524
0.8	0.78814	0.79103	0.79389	0.79673	0.79955	0.80234	0.80511	0.80785	0.81057	0.81327
0.9	0.81594	0.81859	0.82121	0.82381	0.82639	0.82894	0.83147	0.83398	0.83646	0.83891
1.0	0.84134	0.84375	0.84614	0.84849	0.85083	0.85314	0.85543	0.85769	0.85993	0.86214
1.1	0.86433	0.86650	0.86864	0.87076	0.87286	0.87493	0.87698	0.87900	0.88100	0.88298
1.2	0.88493	0.88686	0.88877	0.89065	0.89251	0.89435	0.89617	0.89796	0.89973	0.90147
1.3	0.90320	0.90490	0.90658	0.90824	0.90988	0.91149	0.91309	0.91466	0.91621	0.91774
1.4	0.91924	0.92073	0.92220	0.92364	0.92507	0.92647	0.92785	0.92922	0.93056	0.93189
1.5	0.93319	0.93448	0.93574	0.93699	0.93822	0.93943	0.94062	0.94179	0.94295	0.94408
1.6	0.94520	0.94630	0.94738	0.94845	0.94950	0.95053	0.95154	0.95254	0.95352	0.95449
1.7	0.95543	0.95637	0.95728	0.95818	0.95907	0.95994	0.96080	0.96164	0.96246	0.96327
1.8	0.96407	0.96485	0.96562	0.96638	0.96712	0.96784	0.96856	0.96926	0.96995	0.97062
1.9	0.97128	0.97193	0.97257	0.97320	0.97381	0.97441	0.97500	0.97558	0.97615	0.97670
2.0	0.97725	0.97778	0.97831	0.97882	0.97932	0.97982	0.98030	0.98077	0.98124	0.98169
2.1	0.98214	0.98257	0.98300	0.98341	0.98382	0.98422	0.98461	0.98500	0.98537	0.98574
2.2	0.98610	0.98645	0.98679	0.98713	0.98745	0.98778	0.98809	0.98840	0.98870	0.98899
2.3	0.98928	0.98956	0.98983	0.99010	0.99036	0.99061	0.99086	0.99111	0.99134	0.99158
2.4	0.99180	0.99202	0.99224	0.99245	0.99266	0.99286	0.99305	0.99324	0.99343	0.99361
2.5	0.99379	0.99396	0.99413	0.99430	0.99446	0.99461	0.99477	0.99492	0.99506	0.99520
2.6	0.99534	0.99547	0.99560	0.99573	0.99585	0.99598	0.99609	0.99621	0.99632	0.99643
2.7	0.99653	0.99664	0.99674	0.99683	0.99693	0.99702	0.99711	0.99720	0.99728	0.99736
2.8	0.99744	0.99752	0.99760	0.99767	0.99774	0.99781	0.99788	0.99795	0.99801	0.99807
2.9	0.99813	0.99819	0.99825	0.99831	0.99836	0.99841	0.99846	0.99851	0.99856	0.99861
3.0	0.99865	0.99869	0.99874	0.99878	0.99882	0.99886	0.99889	0.99893	0.99896	0.99900
3.1	0.99903	0.99906	0.99910	0.99913	0.99916	0.99918	0.99921	0.99924	0.99926	0.99929
3.2	0.99931	0.99934	0.99936	0.99938	0.99940	0.99942	0.99944	0.99946	0.99948	0.99950
u	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
3.3	0.99952	0.99953	0.99955	0.99957	0.99958	0.99960	0.99961	0.99962	0.99964	0.99965

3.4	0.99966	0.99968	0.99969	0.99970	0.99971	0.99972	0.99973	0.99974	0.99975	0.99976
3.5	0.99977	0.99978	0.99978	0.99979	0.99980	0.99981	0.99981	0.99982	0.99983	0.99983
3.6	0.99984	0.99985	0.99985	0.99986	0.99986	0.99987	0.99987	0.99988	0.99988	0.99989
3.7	0.99989	0.99990	0.99990	0.99990	0.99991	0.99991	0.99992	0.99992	0.99992	0.99992
3.8	0.99993	0.99993	0.99993	0.99994	0.99994	0.99994	0.99994	0.99995	0.99995	0.99995
3.9	0.99995	0.99995	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99997	0.99997

EXERCICES

Exercices 23 :

Un engin sol-sol ne présente aucun écart en direction, les écarts en portée suivent une loi de Gauss avec un écart type de 50m. Le point visé est l'origine.

a) Quelle est la probabilité pour qu'un engin tombe entre 25 et 50m ?
b) Quelle est la probabilité pour qu'un engin tombe entre -5 et +5m
c) On tire 100 engins, combien tomberont entre -50m et +50m ?
d) On tire 100 engins, dans quel intervalle tomberont 50 engins ?

Exercices 24 :

Soient deux variables aléatoires X et Y suivant les lois de Poisson. X a pour moyenne λ et Y a pour moyenne μ. Montrer que la variable aléatoire $Z=X+Y$ suit une loi de Poisson de moyenne $\lambda+\mu$.

Exercices 25 :

Une compagnie d'assurance envisage de créer des polices d'assurances individuelles contre un certain type d'accident. Une enquête a montré qu'une personne a une chance sur 50000, chaque année, d'être victime de l'accident considéré et que la compagnie pourra vendre 10000 police d'assurance. Déterminer la probabilité pour que le nombre d'assurés accidentés ne dépasse pas 3 par an.

Exercices 26 :

Un restaurant d'entreprise doit servir 1000 repas en 2 services. Un sondage a montré que la probabilité de se présenter au 1er service était de 2/3. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de personnes se présentant au 1er service.

a) Donner l'expression de $Prob(X=k), k \in (0,1000)$
b) Montrer qu'on peut approximer cette probabilité à l'aide d'une loi de Gauss
c) On s'impose de ne pas refuser plus qu'une demande sur 100. Quel doit être le nombre de place dans le restaurant ?

Exercice 27:

On lance deux dés tétraédriques parfaits et on regarde si la somme des dés est supérieure ou égale à 5. Donner la loi de probabilité associée à cette expérience.

Exercice 28:

Un fabricant produit et vend 400 consoles de jeux par mois. Le coût de fabrication est de 160 € par machine. Le fabricant fait réaliser un test de conformité, dans les mêmes conditions, sur chacun de ses objets fabriqués. Le test est positif dans 93% des cas et une console de jeux reconnue conforme peut alors être vendue 290 €. Si le test est en revanche négatif, la console de jeux est bradée au prix de 150 €.
1) On note X la variable aléatoire qui indique le nombre de consoles de jeux conformes parmi les 400 produites. Calculer l’espérance de X.
2) On note Y la variable aléatoire qui indique le bénéfice mensuel, exprimé en euros. Calculer l’espérance de Y et interpréter le résultat.

Exercice 29:
On lance 50 fois un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6, truqué de telle sorte que la probabilité p de faire apparaître la face numérotée 6 soit supérieure à $\frac{1}{2}$. On compte le nombre de 6 obtenus.

Quelle doit être la valeur de p pour que la variance de la loi de probabilité du nombre de 6 obtenus soit égale à 10

Exercice 30:

On fait tourner deux fois de suite la roue ci-contre, parfaitement équilibrée, et dont les secteurs colorés sont représentés par une même aire.
Représenter l’expérience à l’aide d’un arbre pondéré.