FUNÇÃO QUADRÁTICA

Centro Universitário Senac
TADS
MIT

Objetivos do capítulo

Neste capítulo, você estudará os conceitos relacionados às *funções quadráticas*. Uma parte importante do estudo da função quadrática é a análise de seu gráfico representado pela *parábola*. Você verá passo a passo como construir a parábola identificando seus principais pontos e aspectos. Analisando a parábola, você identificará em seu *vértice* um ponto de *máximo* (ou *mínimo*) da função. Com o auxílio das coordenadas do vértice da parábola, você também identificará intervalos de crescimento e decrescimento da função. Dessa forma, você verá que a função quadrática, aplicada em situações práticas, permite identificar no fenômeno estudado as condições que maximizam ou minimizam uma de suas variáveis envolvidas.

4.1 Função quadrática

A *função quadrática*, que estudaremos a seguir, é bastante interessante e utilizada em muitas aplicações práticas.

Você notará que o uso da função quadrática ocorre, entre outras coisas, por ser uma função simples cujo gráfico apresenta um ponto de máximo ou mínimo. Determinar o valor máximo ou mínimo da função é muito importante, e isso será abordado a seguir.

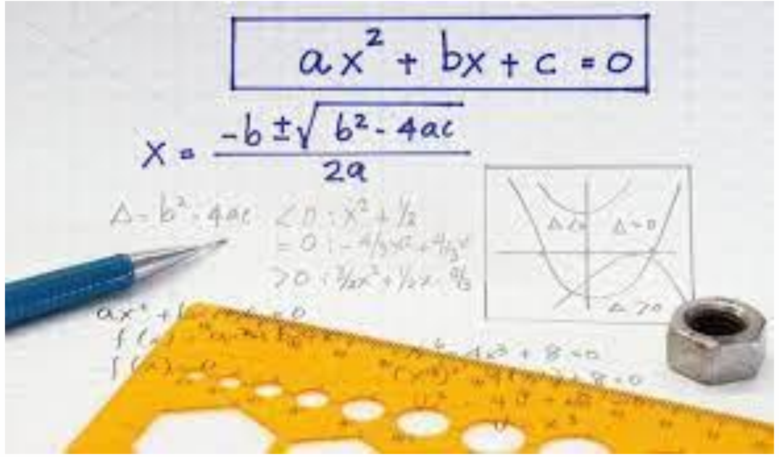
Função quadrática

Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é chamada *função quadrática,* ou *função polinomial do segundo grau,* se for da forma

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

sendo a, b e c números reais e $a \neq 0$.

2. COMO RESOLVER UMA EQUAÇÃO DO 2º GRAU?

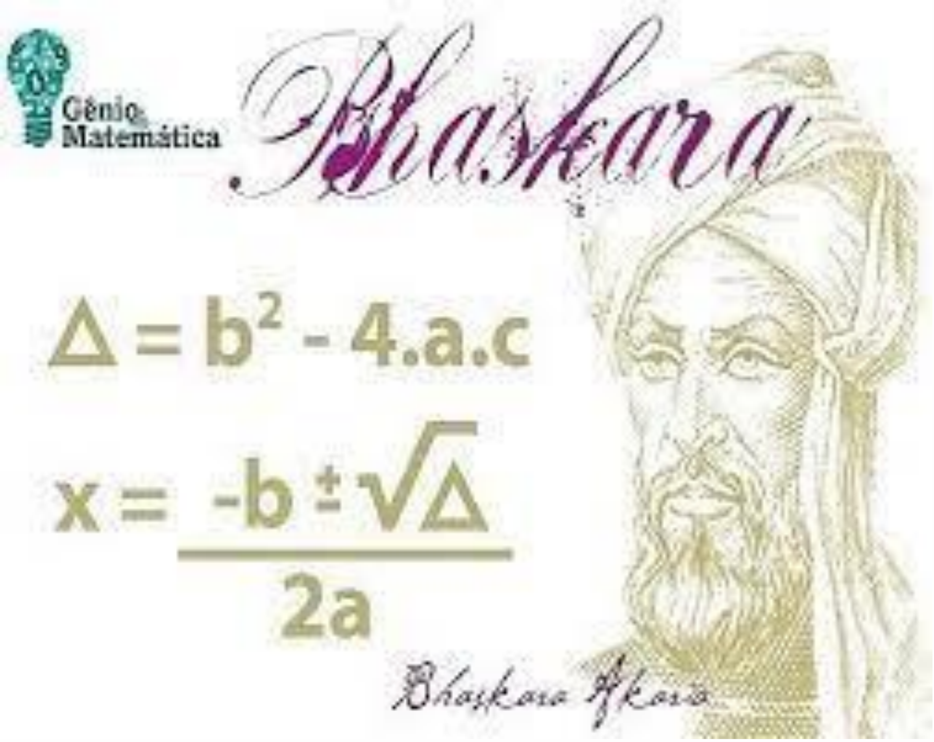


https://m3.ime.unicamp.br/recursos/1097

Resolver uma equação do 2º grau "**ax^2 + bx + c = 0**", significa **encontrar os valores de *x*** que tornam o valor da expressão "**ax^2 + bx + c**" igual a zero. Esses valores de x que devem ser encontrados, são conhecidos como as **raízes da equação do 2º grau**. Falamos em valores ou raízes, sempre no plural, porque por ser formada por um polinômio de grau 2, toda equação do 2º grau sempre possui **duas raízes**, ou **dois valores de x** que fazem com que a expressão resulte no valor zero. Geralmente, as raízes da equação do 2º grau são representadas por x_1 e x_2 ou x' e x".

Dois métodos costumam ser utilizados para **determinar as raízes das equações do 2º grau**. Um deles, é a uma das fórmulas matemáticas mais conhecidas no planeta: a fórmula de Bhaskara. Não menos importante, o método da soma e produto pode nos ajudar a resolver uma equação do 2º grau de forma ainda mais rápida.

2.1 Fórmula de Bhaskara



Para encontrar as raízes de uma equação do segundo grau através da fórmula de Bhaskara, basta substituir os valores numéricos dos coeficientes a, b e c da equação na fórmula. Após realizar as operações básicas propostas pela fórmula, chega-se facilmente aos valores de x_1 e x_2 ou x' e x" desejados.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{ou} \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Então, $\Delta = b^2 - 4ac$

2.2 Método da Soma e Produto

O método da soma e produto é considerado bastante prático quando se deseja obter as raízes de uma equação do 2º grau e estas são números inteiros. Nesse método, é preciso **pensar em dois números x_1 e x_2** que quando somados, geram como resultado o valor oposto ou contrário ao quociente entre os coeficientes b e a da equação. Ao mesmo tempo, quando esses dois números x_1 e x_2 são multiplicados, devem gerar como resultado o valor igual ao quociente entre os coeficientes c e a da equação. Os números x_1 e x_2 de quem tanto falamos, é claro, são as **raízes da equação do 2º grau**.

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$$

Assim, para utilizar o método com facilidade, a dica é começar pensando nas possibilidades que levam ao **produto entre as duas raízes da equação**. Depois de elencadas essas possibilidades, basta substituí-las na fórmula da soma, e ver se os resultados se encaixam.

Já já chegará o momento em que iremos aplicar esse método na resolução de exercícios de vestibular. Mas se vocês desejam aprofundar ainda mais os conhecimentos sobre o método, ou conferir uma série de exemplos resolvidos, cliquem aqui! Aqui no blog vocês encontram um texto exclusivo que aborda o método da soma e produto.

2.3 Equações do 2º Grau Incompletas

Podemos utilizar o método da soma e produto e principalmente a fórmula de Bhaskara para resolver qualquer equação do 2º grau. Contudo, quando as equações do segundo grau encontram-se em seu formato incompleto, existe uma **forma ainda mais simples de resolvê-las**. Isso porque nesse caso é possível **isolar a incógnita x da equação**, o que não acontece quando a equação está em seu formato completo.

Exemplos:

a) $x^2 - 81 = 0$

$\Rightarrow x^2 = 81$

$\Rightarrow x = \pm\sqrt{81}$

$\Rightarrow x = \pm 9$

$S = \{-9, +9\}$

b) $2x^2 - 50 = 0$

$\Rightarrow 2x^2 = 50$

$\Rightarrow x^2 = 25$

$\Rightarrow x = \pm\sqrt{25}$

$\Rightarrow x = \pm 5$

$S = \{-5 + 5\}$

c) $x^2 + 4x = 0$

$\Rightarrow x(x+4) = 0$

$\Rightarrow x = 0 \; ou$

$x + 4 = 0$

$\Rightarrow x = -4$

$S = \{-4, 0\}$

d) $2x^2 - 8x = 0$

$\Rightarrow x(2x - 8) = 0$

$\Rightarrow x = 0 \; ou$

$2x - 8 = 0$

$2x = 8 \Rightarrow x = 4$

$S = \{0, 4\}$

Exercício 1

(Cesgranrio – adaptada) Se as raízes da equação $x^2 + bx + 27 = 0$ são múltiplos positivos de 3, então, quanto vale o coeficiente b?

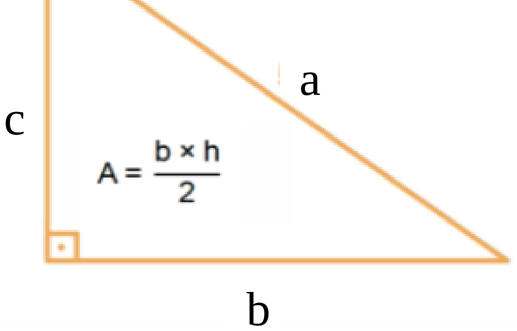
Exercício 2

(Uece – adaptada) Se x_1 e x_2 são raízes da equação $3x^2 - 2x - 8 = 0$, sendo $x_1 < x_2$, então, qual é valor resultante da expressão "$3x_2^2 - 2x_1 - 8$"?

Exercício 3

(Ufv – adaptada) As medidas da hipotenusa e de um dos catetos de um triângulo retângulo são dadas pelas raízes da equação $x^2 - 9x + 20 = 0$. Qual é a área desse triângulo?

$a^2 = b^2 + c^2$



Exercício 1

(Cesgranrio – adaptada) Se as raízes da equação $x^2 + bx + 27 = 0$ são múltiplos positivos de 3, então, quanto vale o coeficiente b?

EXERCÍCIO 01:

$$\underbrace{x^2}_{a=1} + \underbrace{bx}_{b=b} + \underbrace{27}_{c=27} = 0$$

x_1 e x_2

$\Downarrow$

Múltiplos positivos de 3

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \Rightarrow x_1 + x_2 = -b$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \Rightarrow x_1 \cdot x_2 = 27$$

$x_1 = 3$ e

$x_2 = 9$

$3 + 9 = -b$

$b = -12$

$$\boxed{x^2 - 12x + 27 = 0}$$

Exercício 2

(Uece – adaptada) Se x_1 e x_2 são raízes da equação $3x^2 - 2x - 8 = 0$, sendo $x_1 < x_2$, então, qual é valor resultante da expressão "$3x_2^2 - 2x_1 - 8$"?

Exercício 2

$$\underbrace{3x^2}_{a} - \underbrace{2x}_{b} - \underbrace{8}_{c} = 0$$

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 < x_2 \\ \Downarrow \\ \boxed{3 \cdot x_2^2 - 2x_1 - 8} \end{array}\right.$$

?

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2a}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-8)}}{2 \cdot 3} = \frac{2 \pm 10}{6}$$

$x_1 = -\frac{4}{3}$ e $x_2 = 2$

Substituindo os valores, temos:

$$3 \cdot (2)^2 - 2 \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) - 8 =$$

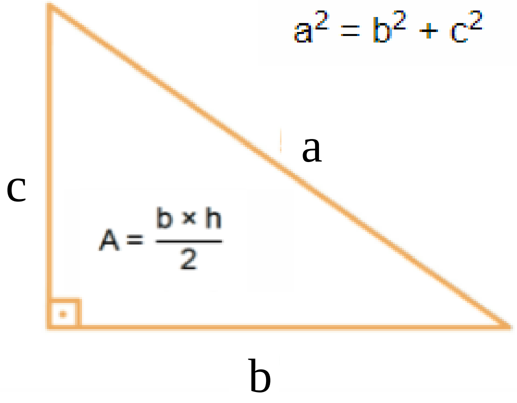
$$= 4 + \frac{8}{3} = \frac{20}{3}$$

//

Exercício 3

(Ufv – adaptada) As medidas da hipotenusa e de um dos catetos de um triângulo retângulo são dadas pelas raízes da equação $x^2 - 9x + 20 = 0$. Qual é a área desse triângulo?

$$a^2 = b^2 + c^2$$



Exercício 3:

$$\underbrace{x^2}_{a} - \underbrace{9x}_{b} + \underbrace{20}_{c} = 0$$

$$\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 \\ \Downarrow \quad \Downarrow \\ x_1 \quad x_2 \end{cases}$$

$$S = \frac{-b}{a} = \frac{9}{1} = 9 \Rightarrow x_1 + x_2 = 9$$

$$P = \frac{c}{a} = \frac{20}{1} = 20 \Rightarrow x_1 \cdot x_2 = 20$$

$x_1 = 5$ e $x_2 = 4$

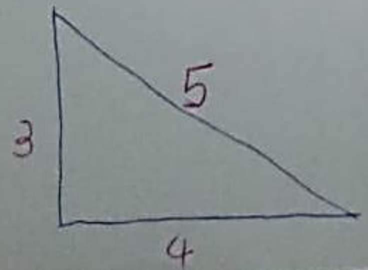
$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$5^2 = 4^2 + c^2$$

$$c^2 = 25 - 16 = 9$$

$$c = 3$$

$$A = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2}$$



$\Rightarrow$

$$A = \frac{4 \times 3}{2}$$

$$\boxed{A = 6}$$

Construção de uma parábola

Sendo a função $f(x) = x^2 - 2x + 2$

1º passo:

Determinar as raízes

$x^2 - 2x + 2 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = -4$

$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

s= { } (não existe raiz real)

2º passo:

Determinar x_v e y_v.

$x_v = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-(-2)}{2} = 1 \quad y_v = \dfrac{-\Delta}{4a} = \dfrac{-(-4)}{4} = 1$

3º passo:

Determinar onde a parábola corta o eixo ordenado(termo independente da função = **c**) e o seu simétrico em relação ao eixo de simetria.

4º passo:

Marcar os pontos no gráfico e traçar a curva

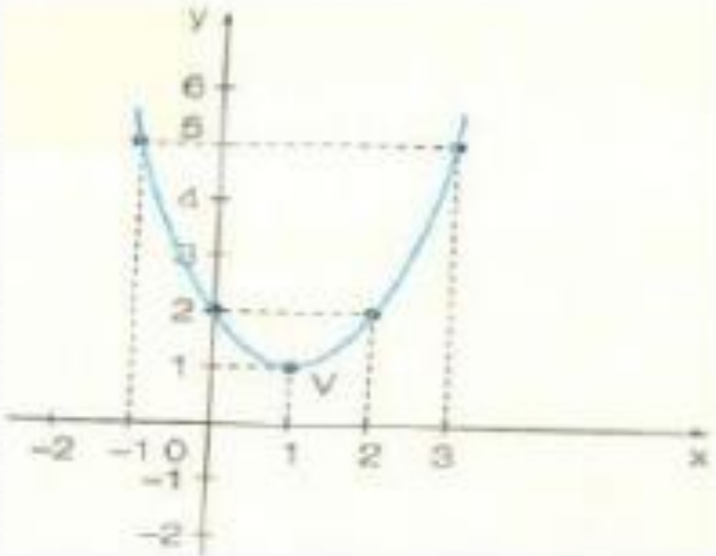


Gráfico da função quadrática e seus elementos "passo a passo"

Dada a função quadrática $y = f(x) = ax^2 + bx + c$, seu gráfico é a ***parábola*** e pode ser obtido observando os seguintes passos:

- se o coeficiente a for positivo, $a > 0$, a ***concavidade*** é voltada para ***cima*** e, se o coeficiente a for negativo, $a < 0$, a ***concavidade*** é voltada para ***baixo***. Veja a Figura 4.1 ao lado.

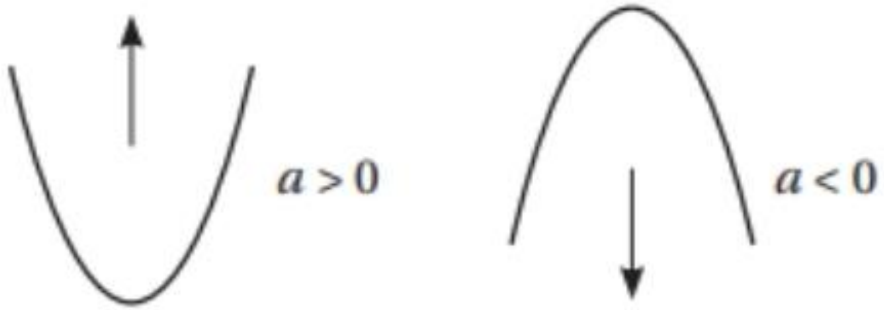


Figura 4.1 Concavidades da parábola

- o ***termo independente c*** sinaliza o ponto em que a parábola corta o eixo y e pode ser obtido fazendo $x = 0$:

$$y = f(0) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c \;\Rightarrow\; y = c$$

  Veja a Figura 4.2 ao lado.

Figura 4.2 Parábola cortando o eixo *y*

- as ***raízes*** da função, se existirem, indicam o(s) ponto(s) em que a parábola corta ou toca o eixo x. Para obter, quando possível, a(s) raiz(es), fazemos $y = 0$:

$$y = 0 \Rightarrow ax^2 + bx + c = 0$$

Para a resolução dessa equação, pode-se utilizar a ***fórmula de Bhaskara*** com o *discriminante* dado por $\Delta = b^2 - 4ac$ e escrever:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

De acordo com o valor do discriminante, podemos determinar o número de raízes reais ou o número de pontos em que a parábola encontra o eixo x:

- Quando $\Delta > 0$, encontramos ***duas raízes*** reais distintas, ou seja, ***dois pontos*** em que a parábola cruza o eixo x. As raízes são $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ e $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$. Veja a Figura 4.3 ao lado.

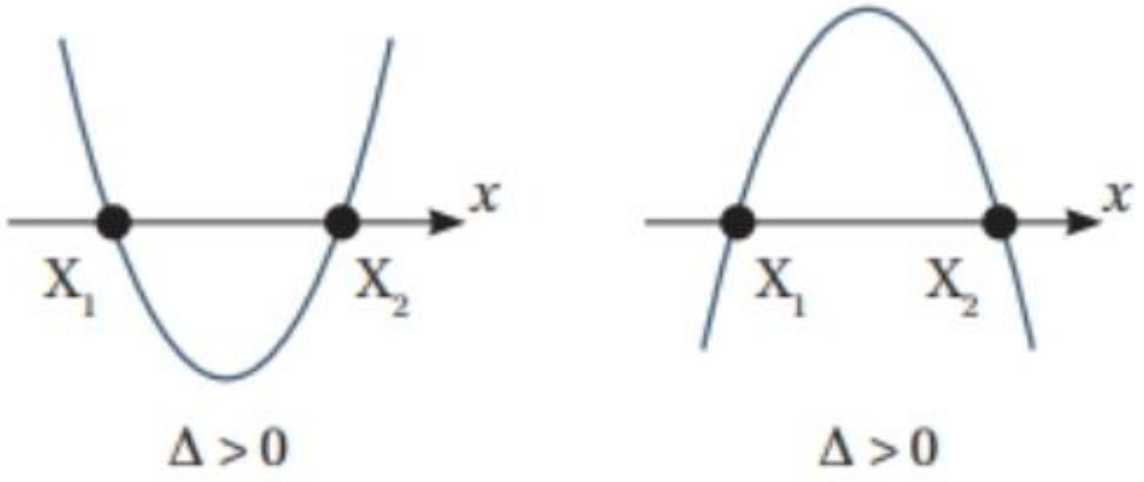


Figura 4.3 Parábola cruzando o eixo x

- Quando $\Delta = 0$, encontramos duas raízes reais **iguais**, ou seja, uma única raiz real, indicando um único ponto em que a parábola "toca" o eixo x. A raiz será $x = \frac{-b \pm \sqrt{0}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-b}{2a}$. Nesse caso, dizemos que essa raiz tem multiplicidade 2. Veja a Figura 4.4 ao lado.

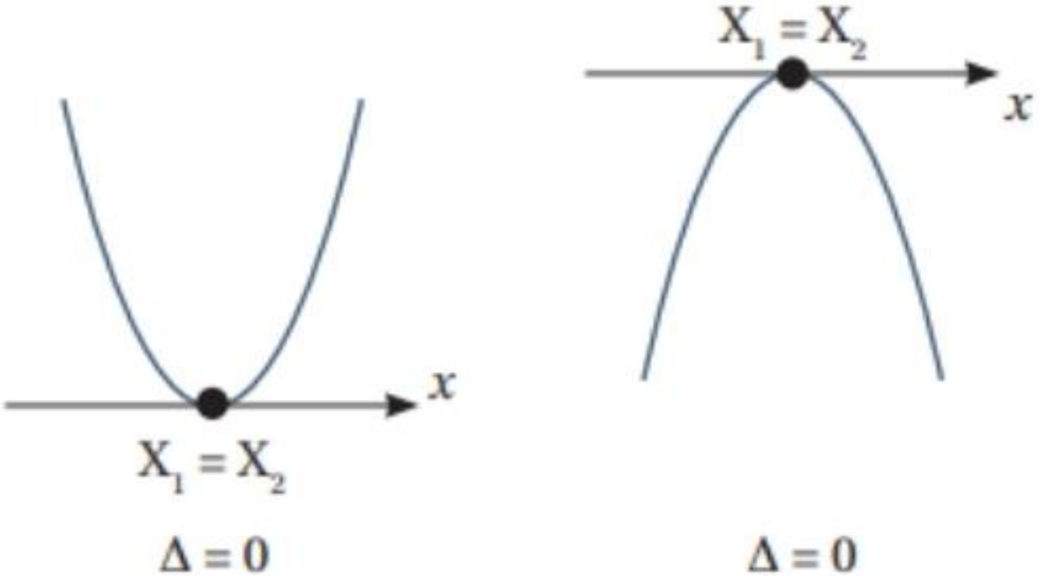


Figura 4.4 Parábola tocando o eixo x

- Quando $\Delta < 0$, não existem raízes reais, ou seja, a parábola não cruza o eixo x. Veja a Figura 4.5 ao lado.

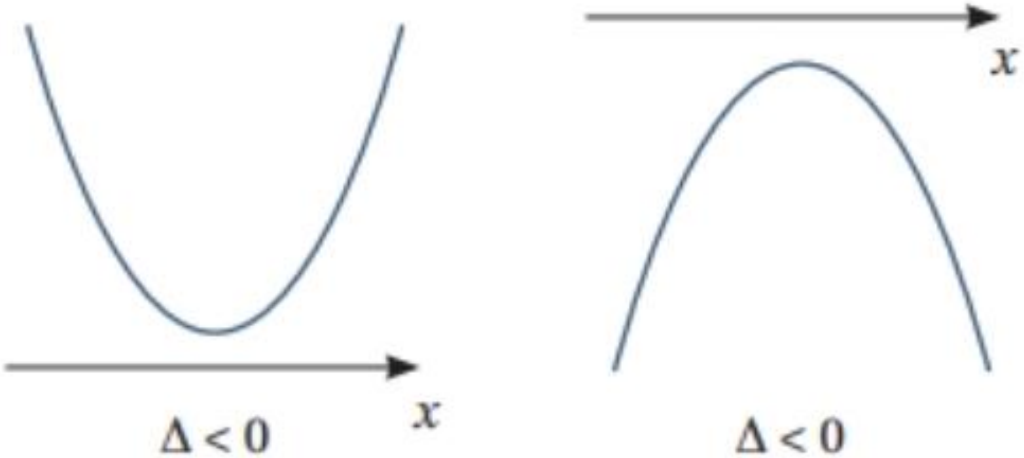


Figura 4.5 Parábola sem tocar o eixo x

Após a análise das raízes e seu significado gráfico, temos o último passo para o esboço do gráfico:

- o ***vértice*** da parábola é dado pelo ponto $\boldsymbol{V} = (x_v; y_v) = \left(-\dfrac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{2a}}; -\dfrac{\Delta}{\boldsymbol{4a}}\right)$. Veja a Figura 4.6 ao lado.

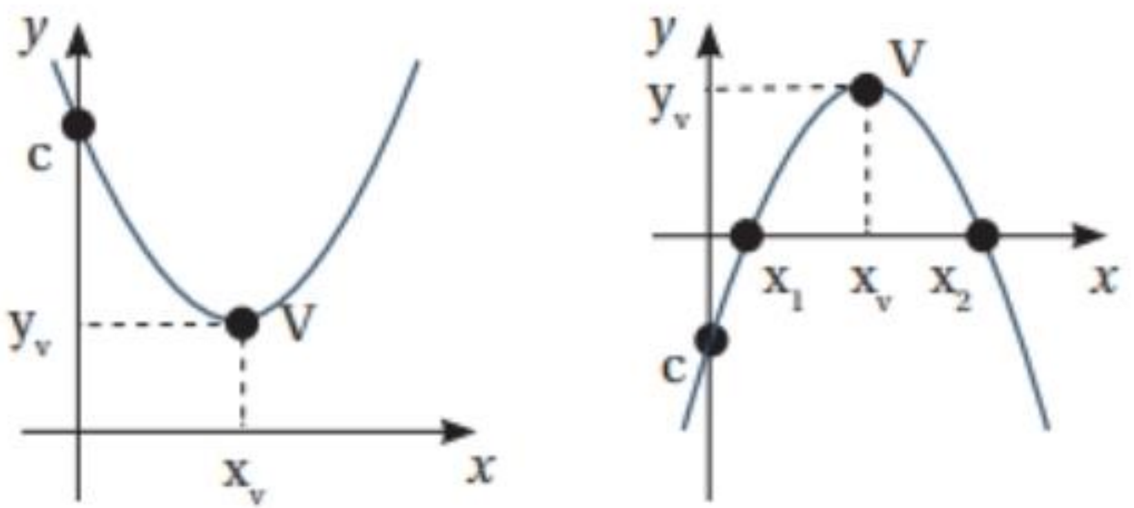


Figura 4.6 Vértices da parábola

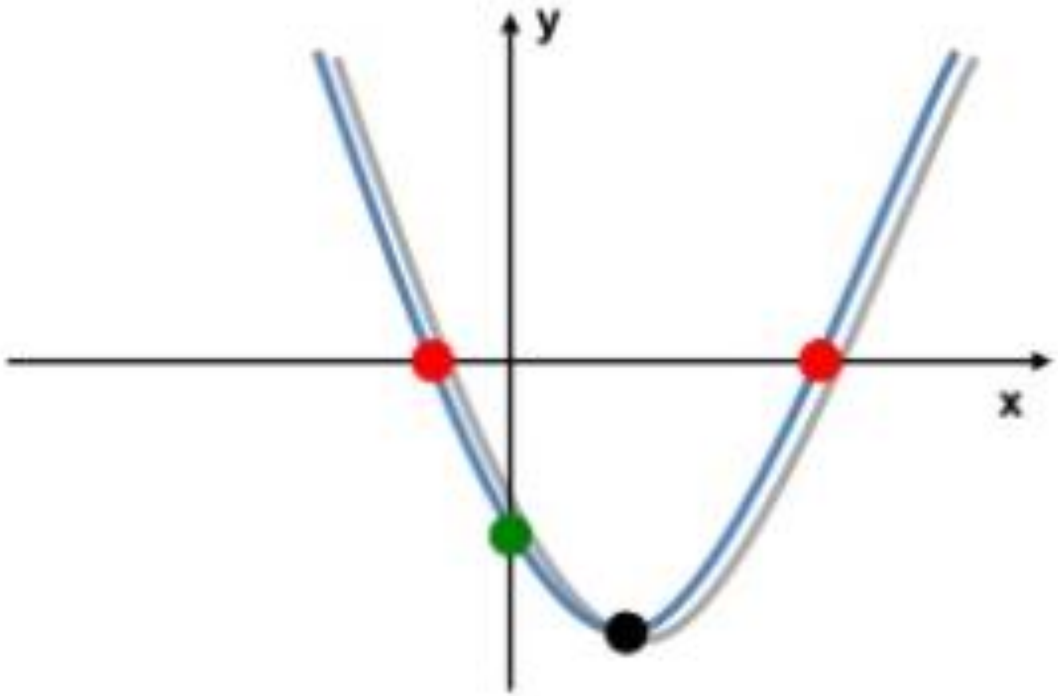
Se a função apresenta raízes reais, é possível calcular as coordenadas do vértice de outro modo:

- Quando $\Delta > 0$, temos duas raízes reais distintas e a abscissa do vértice é a média aritmética simples das raízes, ou seja, $x_v = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$, e a ordenada do vértice é obtida calculando o valor da função em x_v, ou seja, $y_v = f(x_v)$.
- Quando $\Delta = 0$, temos uma única raiz real e ela é a abscissa do vértice com $y_v = 0$, ou seja, o vértice é o ponto em que a parábola toca o eixo x.

Vamos esboçar um gráfico seguindo os passos descritos anteriormente.

No gráfico de uma função quadrática devemos levar em conta:

- Concavidade
- Ponto c
- Zeros
- Vértice



Exemplo 1: Nos itens a seguir, temos funções quadráticas com a indicação de seus coeficientes.

a) $y = -x^2 + 2x + 8$ $(a = -1,\ b = 2,\ c = 8)$

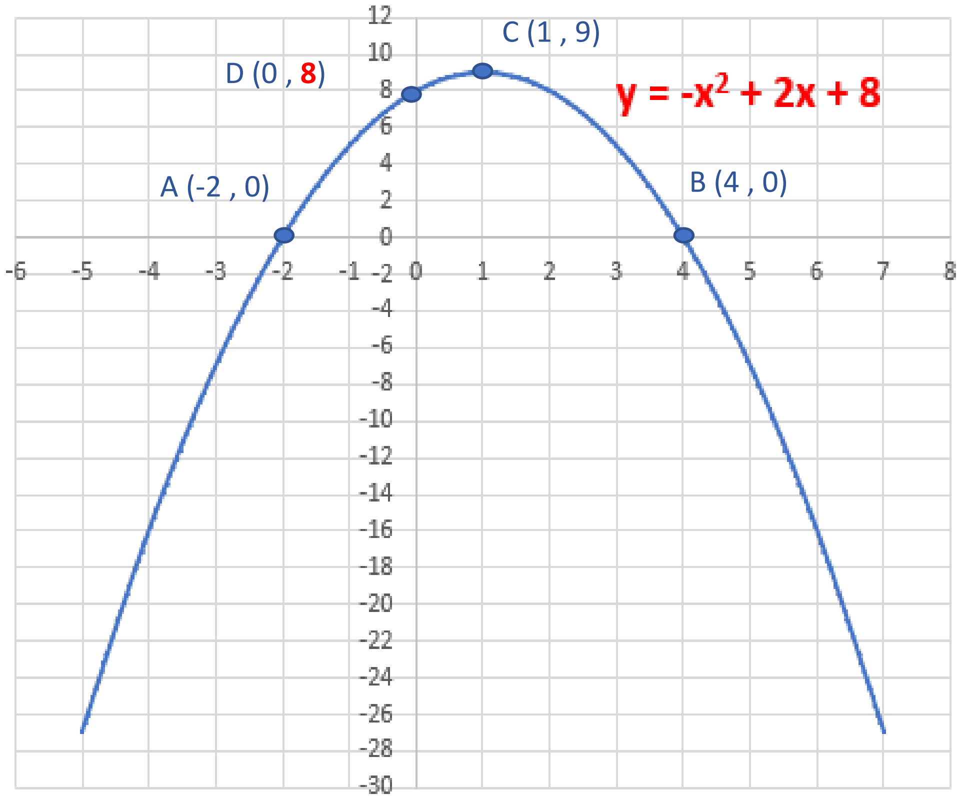
b) $f(x) = 3x^2 + 6x$ $(a = 3,\ b = 6,\ c = 0)$

c) $f(x) = 5x^2 + 10$ $(a = 5,\ b = 0,\ c = 10)$

d) $y = -4x^2$ $(a = -4,\ b = 0,\ c = 0)$

$y = -x^2 + 2x + 8$

x	y
-5	-27
-4	-16
-3	-7
-2	0
-1	5
0	8
1	9
2	8
3	5
4	0
5	-7
6	-16
7	-27



Soma das raízes $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = \frac{-2}{-1} = 2$

Produto das raízes $x_1 \times x_2 = \frac{c}{a} = \frac{8}{-1} = -8$

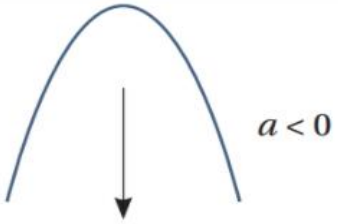
Quais os dois números que somados dá 2 e que multiplicados dá -8?

Resposta: -2 e 4

Exemplo 2: Do alto de certo prédio, um corpo é lançado verticalmente para cima com velocidade inicial de 50 m/s. Considerando 10 m/s^2 a intensidade da aceleração da gravidade, as posições do móvel no decorrer do tempo são dadas por $S = -5t^2 + 50t + 120$. Vamos esboçar o gráfico e analisar as posições do móvel a partir dos principais pontos da parábola.

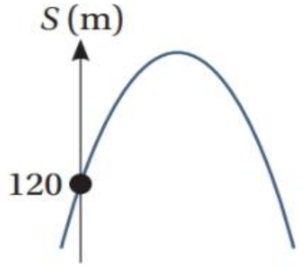
Para essa função quadrática, temos os coeficientes $a = -5$, $b = 50$ e $c = 120$.

- Como $a < 0$, a concavidade é voltada para baixo.



- A parábola corta o eixo $\boldsymbol{S}$ em $c = 120$, pois para $t = 0$:

$$S(0) = -5 \cdot 0^2 + 50 \cdot 0 + 120 \quad \Rightarrow \quad S(0) = 120$$



- A parábola corta o eixo $\boldsymbol{t}$ para $S = 0$

$$-5t^2 + 50t + 120 = 0$$

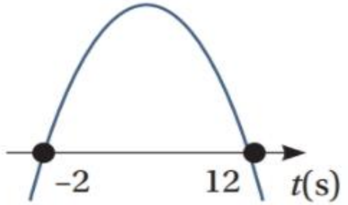
Usando na fórmula de Bhaskara o discriminante

$$\Delta = b^2 - 4ac \quad \Rightarrow \quad \Delta = 50^2 - 4 \cdot (-5) \cdot 120$$
$$\Delta = 4.900 \ (\Delta > 0)$$

As duas raízes reais são obtidas por

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \Rightarrow \quad t = \frac{-50 \pm \sqrt{4.900}}{2 \cdot (-5)}$$

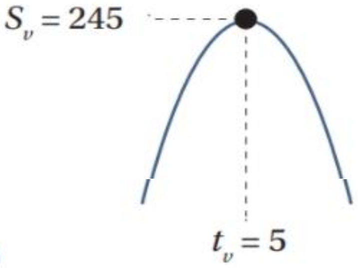
$$t_1 = -2 \quad \text{e} \quad t_2 = 12$$



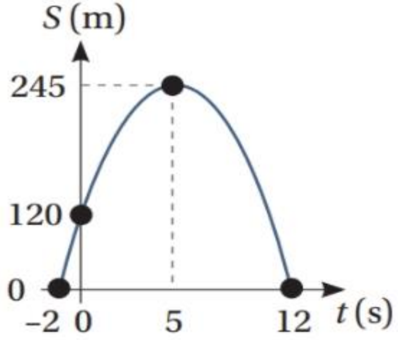
- O vértice da parábola pode ser obtido por

$$V = (t_v ; S_v) = \left(-\frac{b}{2a} ; -\frac{\Delta}{4a} \right)$$

$$V = \left(-\frac{50}{2 \cdot (-5)} ; -\frac{4.900}{4 \cdot (-5)} \right) \quad \Rightarrow \quad V = (5;\ 245)$$



Em resumo, veja o esboço ao lado.

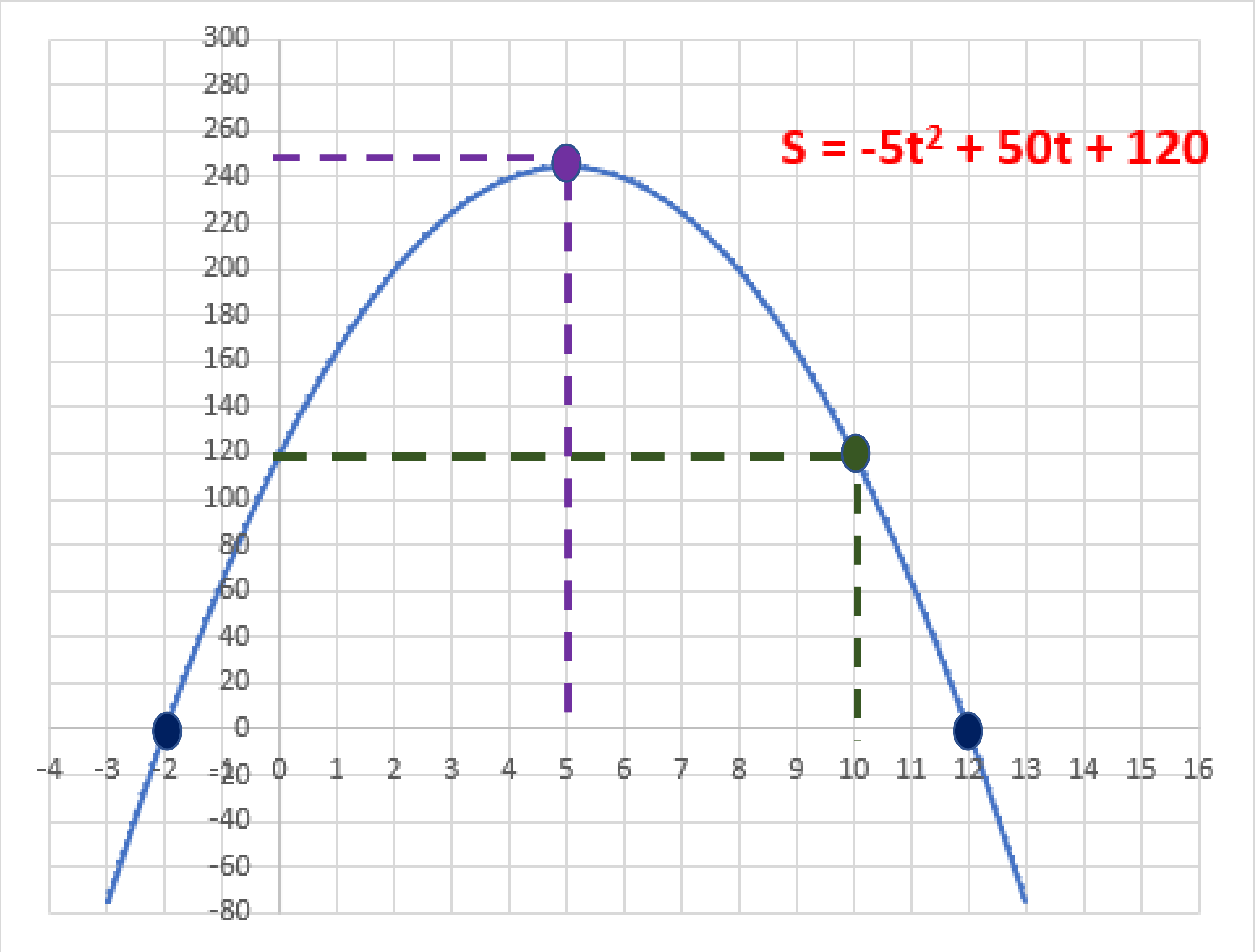


Analisando o gráfico, percebemos que a posição inicial é 120 metros, e ela cresce até o máximo de 245 metros para o instante 5 segundos, indicando o instante em que a posição é máxima.

A partir de 5 segundos, as posições diminuem até o movimento se encerrar aos 12 segundos, instante em que a posição é nula (0 metros), indicando que o corpo está no solo.

$$S = -5t^2 + 50t + 120$$

x	y
-3	-75
-2	0
-1	65
0	120
1	165
2	200
3	225
4	240
5	245
6	240
7	225
8	200
9	165
10	120
11	65
12	0
13	-75



a=	-5
b=	50
c=	120
x_1=	-2
x_2=	12

Δ=	$b^2 - 4ac$	4900
$x_1 + x_2$=	$-b/a$	10
$x_1 \times x_2$=	c/a	-24
Xv =	$-b/2a$	5
Yv =	$-\Delta/4a$	245

10. Do alto de um prédio, um objeto é arremessado verticalmente para cima e tem suas posições, em relação ao solo, no decorrer do tempo, dadas por $S = -5t^2 + 70t + 160$, com as posições dadas em metros e o tempo em segundos.

a) Esboce o gráfico da função a partir da concavidade, dos pontos em que a parábola cruza os eixos (se existirem) e vértice.

b) Em qual instante o objeto atingiu altura máxima?

c) Qual a altura máxima atingida pelo objeto?

d) Em qual instante o objeto atingiu o solo?

e) Qual o outro instante em que o objeto estava à mesma altura do instante do lançamento?

10. Do alto de um prédio, um objeto é arremessado verticalmente para cima e tem suas posições, em relação ao solo, no decorrer do tempo, dadas por $S = -5t^2 + 70t + 160$, com as posições dadas em metros e o tempo em segundos.

a) Esboce o gráfico da função a partir da concavidade, dos pontos em que a parábola cruza os eixos (se existirem) e vértice.

b) Em qual instante o objeto atingiu altura máxima?

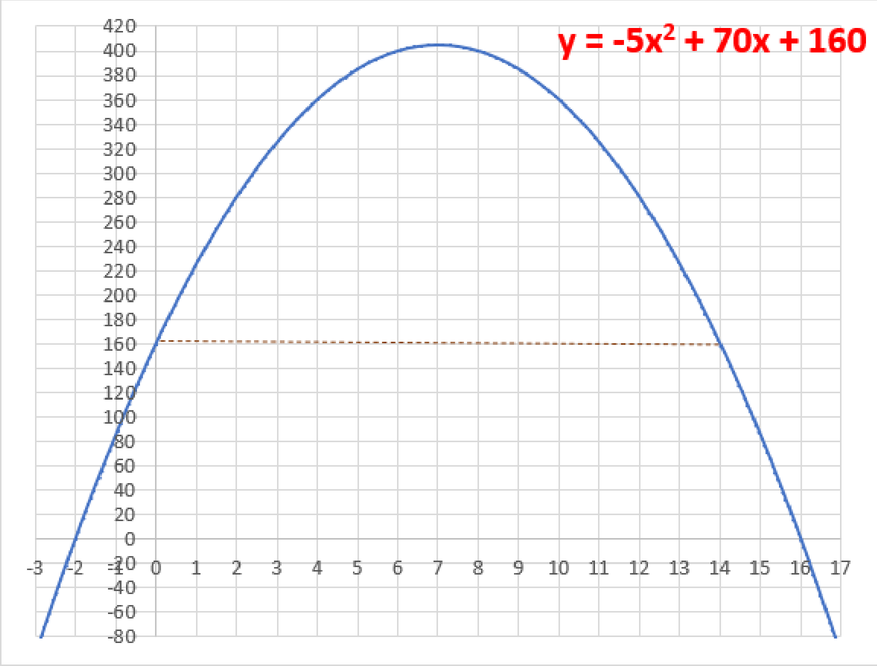
c) Qual a altura máxima atingida pelo objeto?

d) Em qual instante o objeto atingiu o solo?

e) Qual o outro instante em que o objeto estava à mesma altura do instante do lançamento?

$S = -5t^2 + 70t + 160$

x	y
-3	-95
-2	0
-1	85
0	160
1	225
2	280
3	325
4	360
5	385
6	400
7	405
8	400
9	385
10	360
11	325
12	280
13	225
14	160
15	85
16	0
17	-95



a=	-5
b=	70
c=	160
x_1=	-2
x_2=	16

Δ=	$b^2 - 4ac$	8100
$x_1 + x_2$=	$-b/a$	14
$x_1 \times x_2$=	c/a	-32
Xv =	$-b/2a$	7
Yv =	$-\Delta/4a$	405

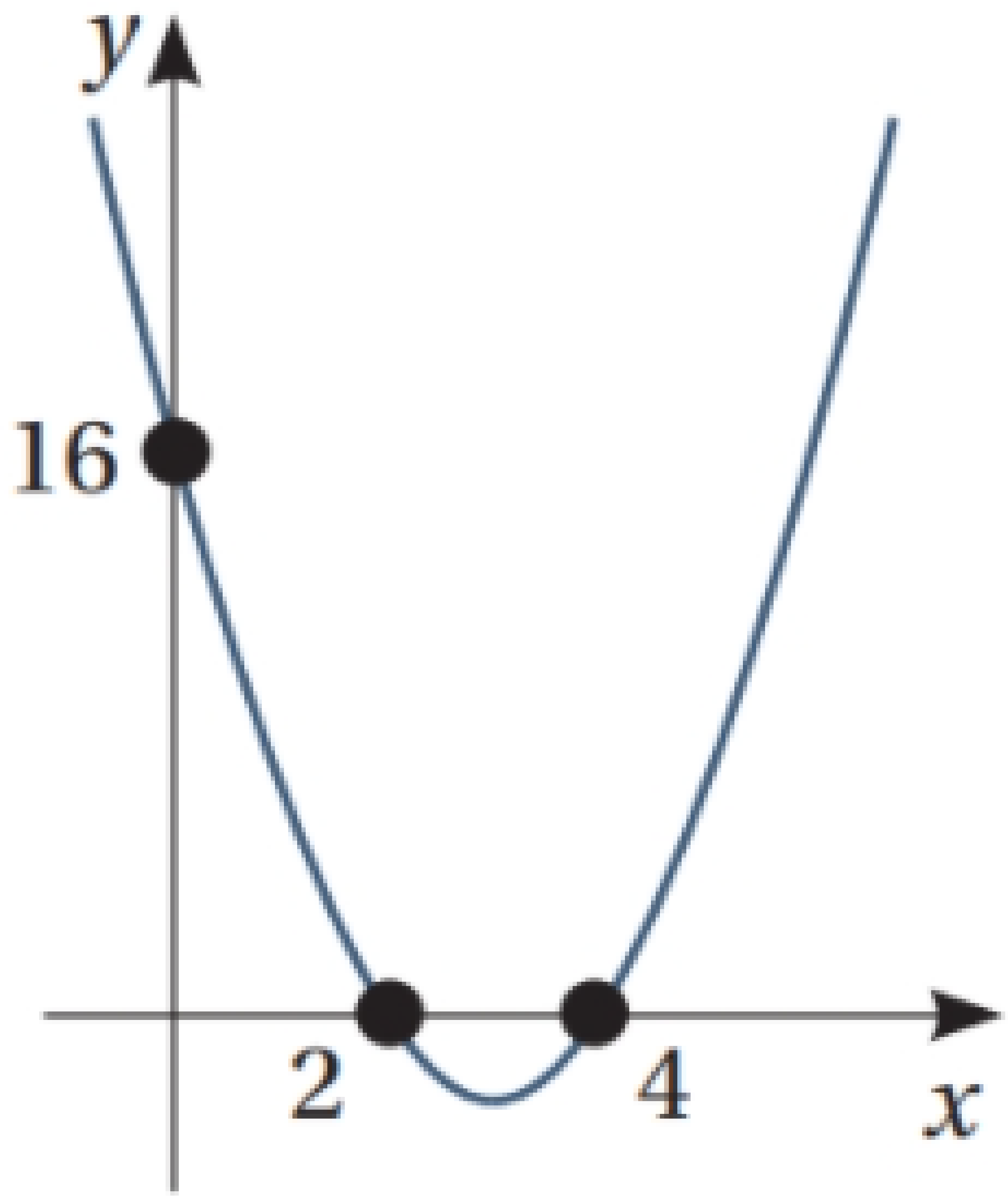
Forma fatorada da função quadrática

Sendo uma função quadrática $y = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$ e suas raízes x_1 e x_2, a ***forma fatorada*** da função é

$$y = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Exemplo 3: Dada a função $y = -2x^2 - 2x + 24$, suas raízes são $x_1 = 3$ e $x_2 = -4$. Então, sua *forma fatorada* é

$$y = a(x - x_1)(x - x_2)$$
$$y = -2(x - 3)[x - (-4)]$$
$$y = -2(x - 3)(x + 4)$$



Dado o gráfico, obtenha a função quadrática.

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$y = a(x - x1)(x - x2)$$

Ponto 1 (2,0)
Ponto 2 (4,0)
Ponto 3 (0,16)

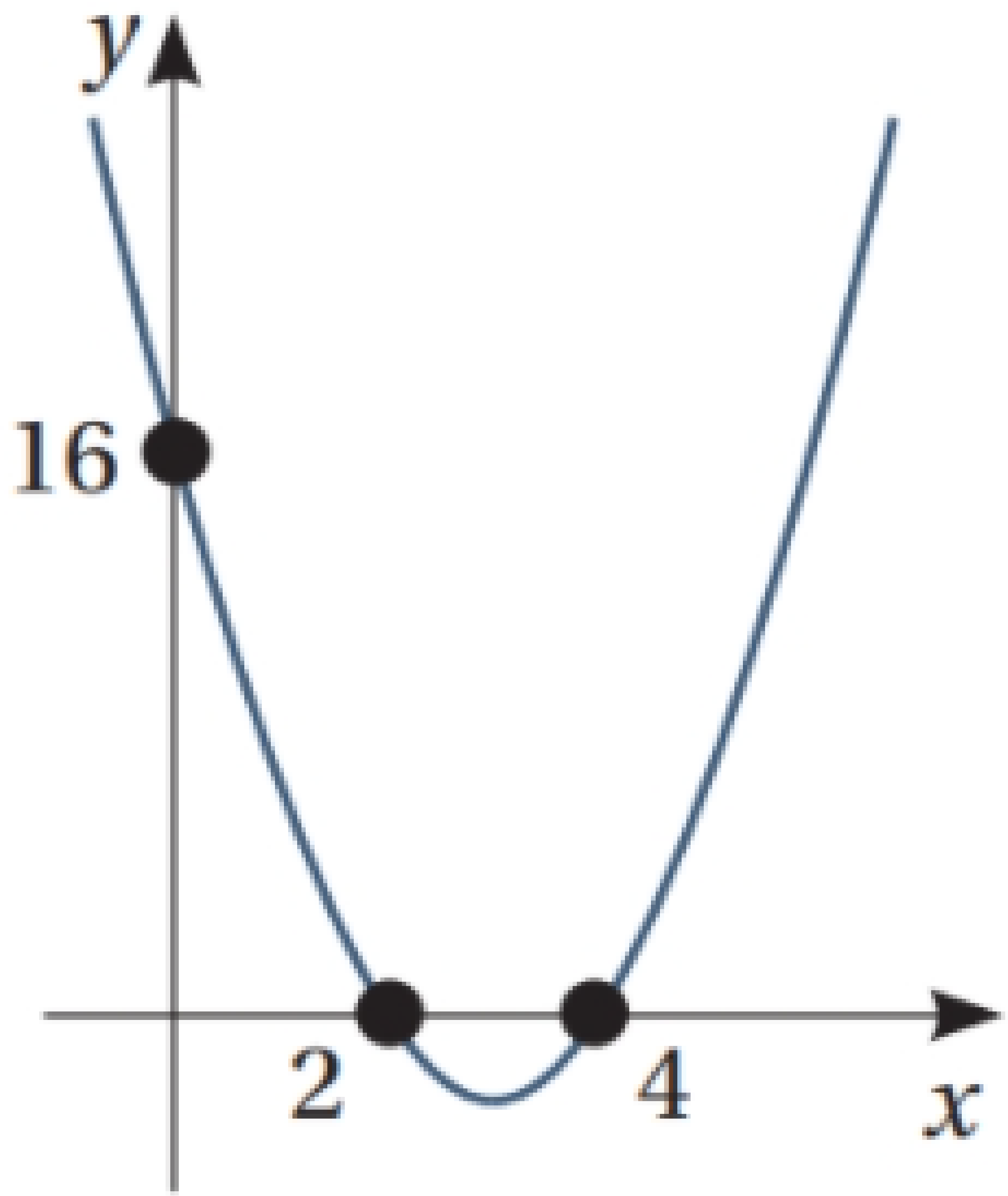
$$16 = a(0 - 2)(0 - 4)$$
$$16 = a(-2)(-4)$$
$$16 = a(8)$$
$$a = 2$$

$$y = 2(x - 2)(x - 4)$$

$$y = 2(x^2 - 4x - 2x + 8)$$

$$y = 2(x^2 - 6x + 8)$$

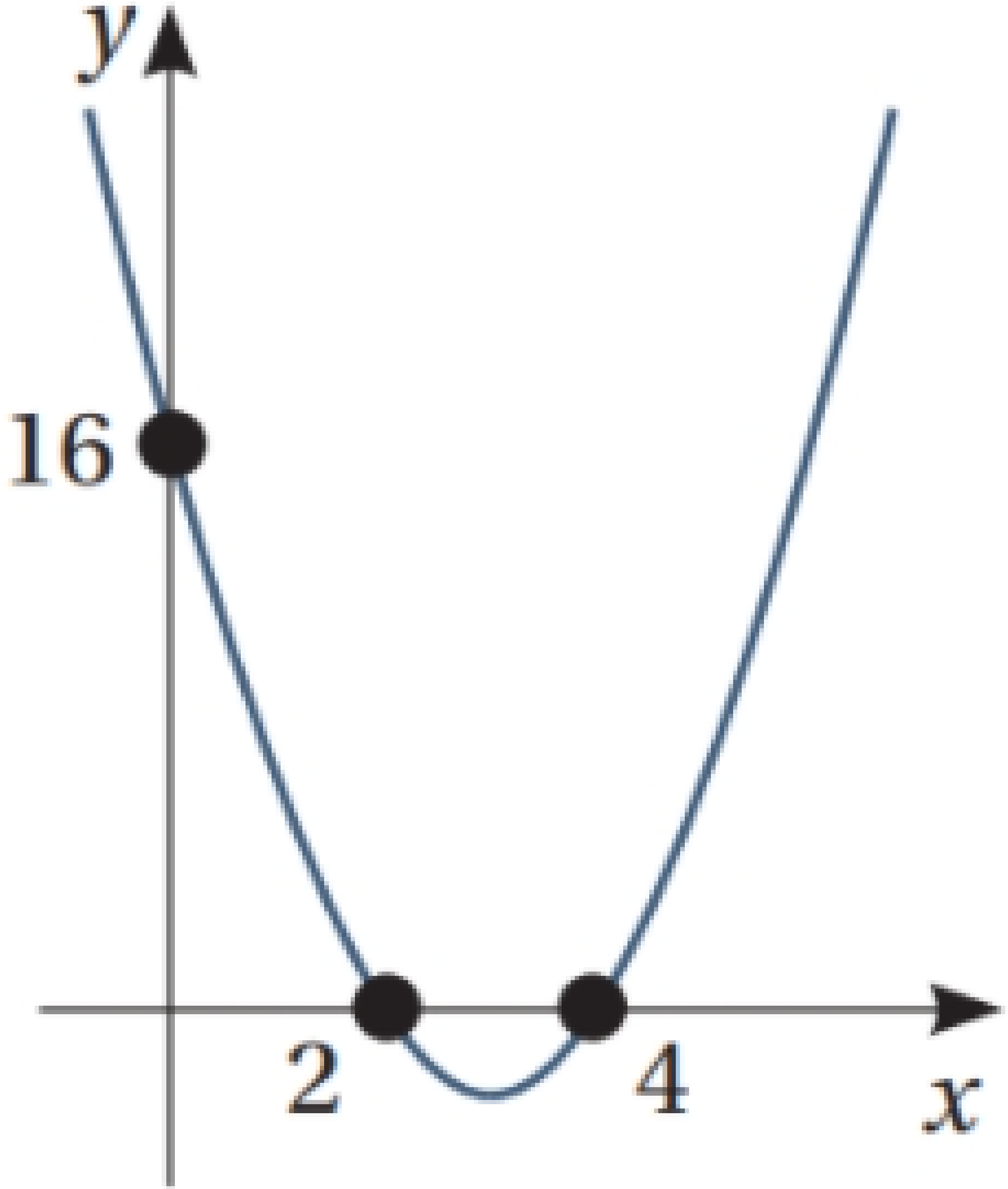
$$y = 2x^2 - 12x + 16$$



Dado o gráfico, obtenha a função quadrática.

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$y = a(x - x1)(x - x2)$$

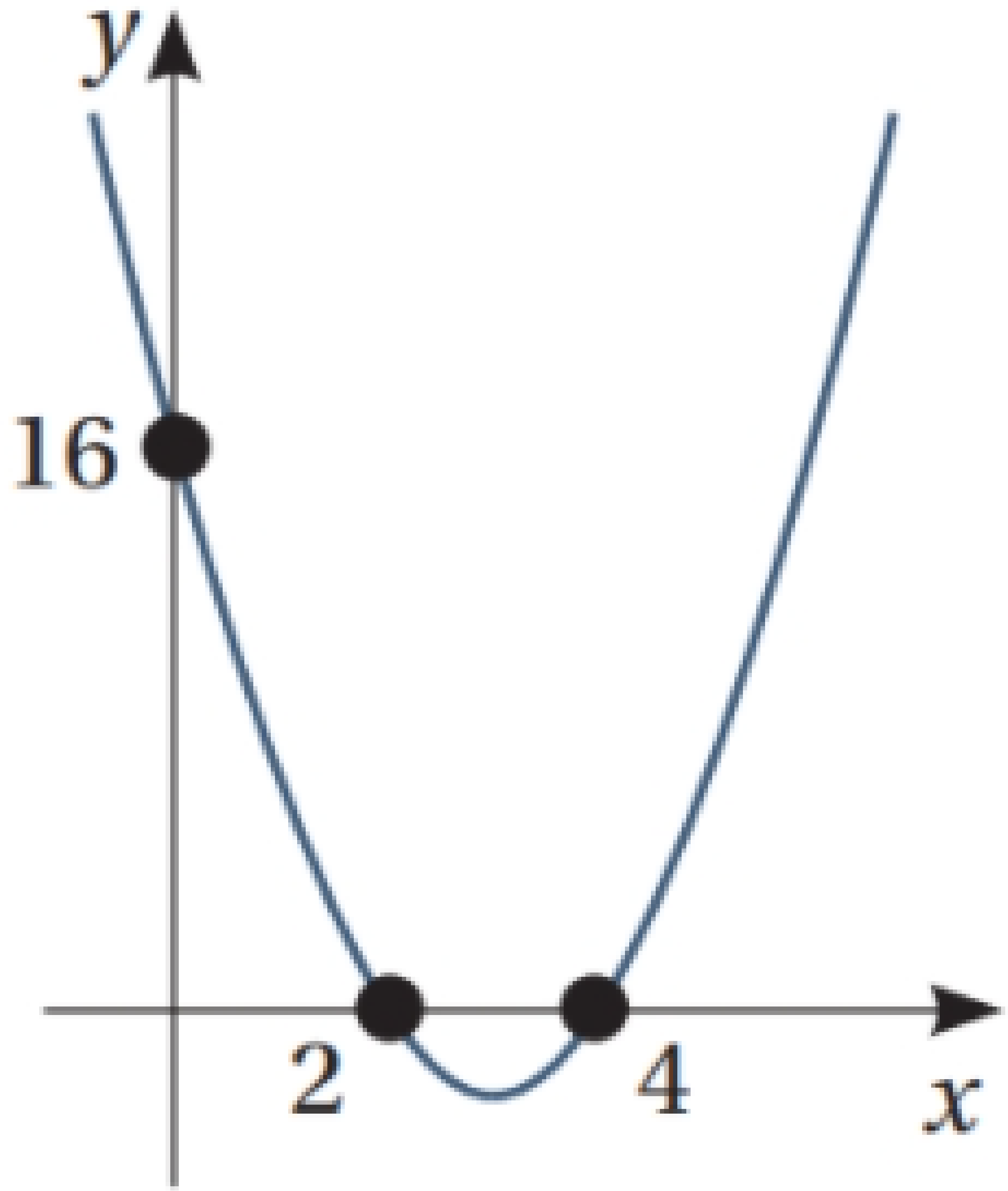


Dado o gráfico, obtenha a função quadrática.

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$y = a(x - x1)(x - x2)$$

Ponto 1 (2,0)
Ponto 2 (4,0)
Ponto 3 (0,16)



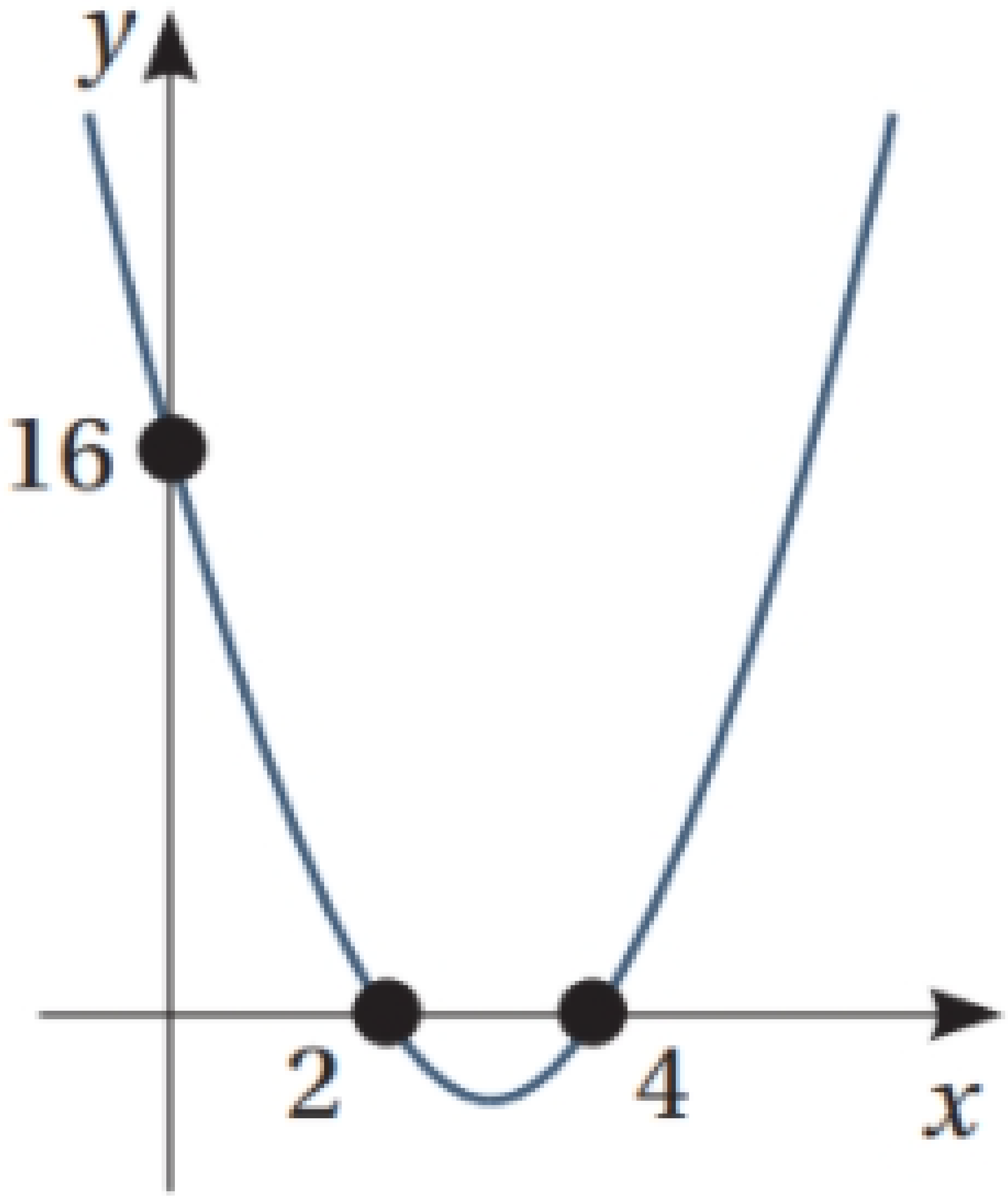
Dado o gráfico, obtenha a função quadrática.

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$y = a(x - x1)(x - x2)$$

Ponto 1 (2,0)
Ponto 2 (4,0)
Ponto 3 (0,16)

$$16 = a(0-2)(0-4)$$
$$16 = a(-2)(-4)$$
$$16 = a(8)$$
$$a = 2$$



Dado o gráfico, obtenha a função quadrática.

$$y = ax^2 + bx + c$$

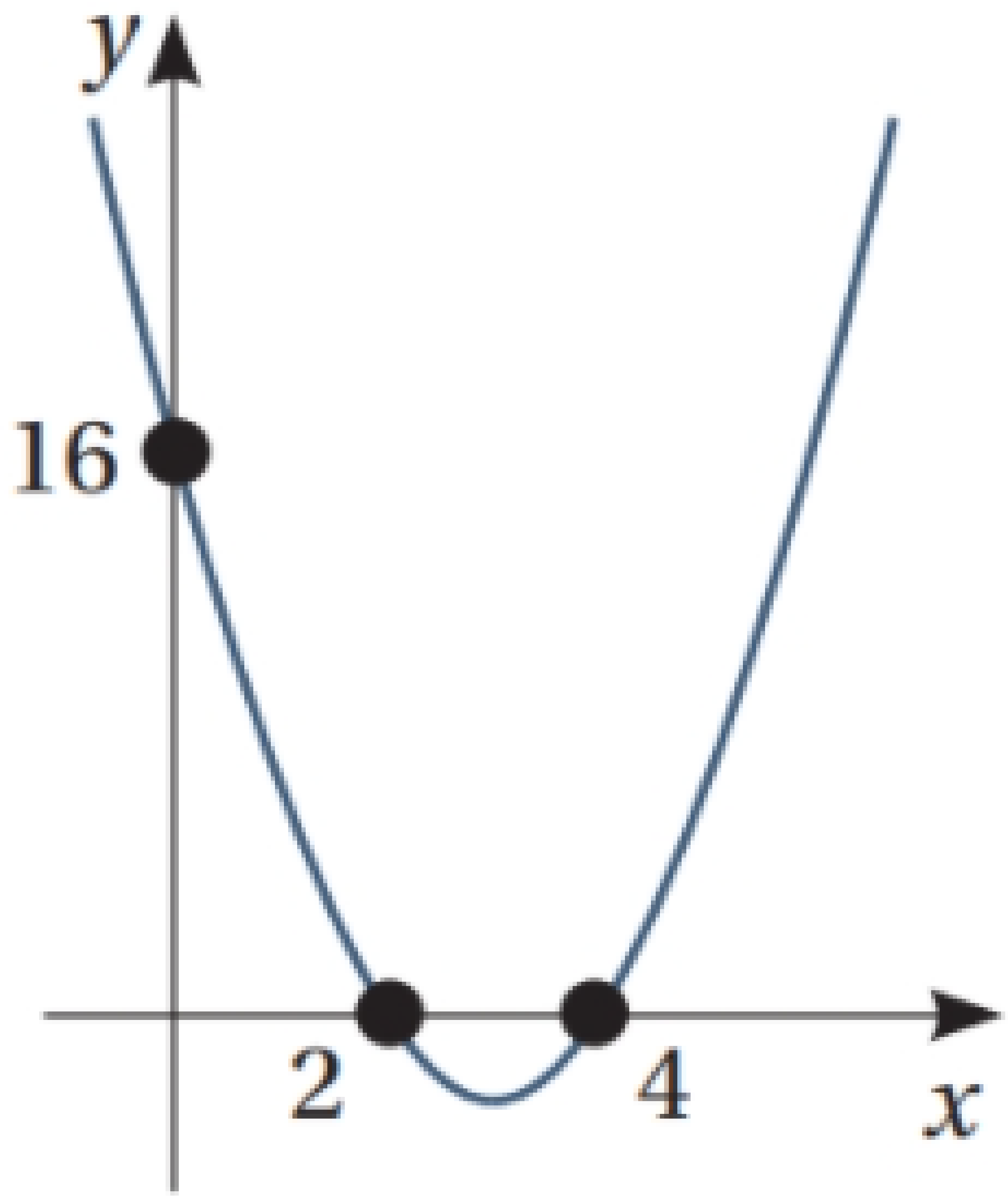
$$y = a(x - x1)(x - x2)$$

Ponto 1 (2,0)
Ponto 2 (4,0)
Ponto 3 (0,16)

$$16 = a(0 - 2)(0 - 4)$$
$$16 = a(-2)(-4)$$
$$16 = a(8)$$
$$a = 2$$

$$y = 2(x - 2)(x - 4)$$

Dado o gráfico, obtenha a função quadrática.



$$y = ax^2 + bx + c$$

$$y = a(x - x1)(x - x2)$$

Ponto 1 (2,0)
Ponto 2 (4,0)
Ponto 3 (0,16)

$$16 = a(0-2)(0-4)$$
$$16 = a(-2)(-4)$$
$$16 = a(8)$$
$$a = 2$$

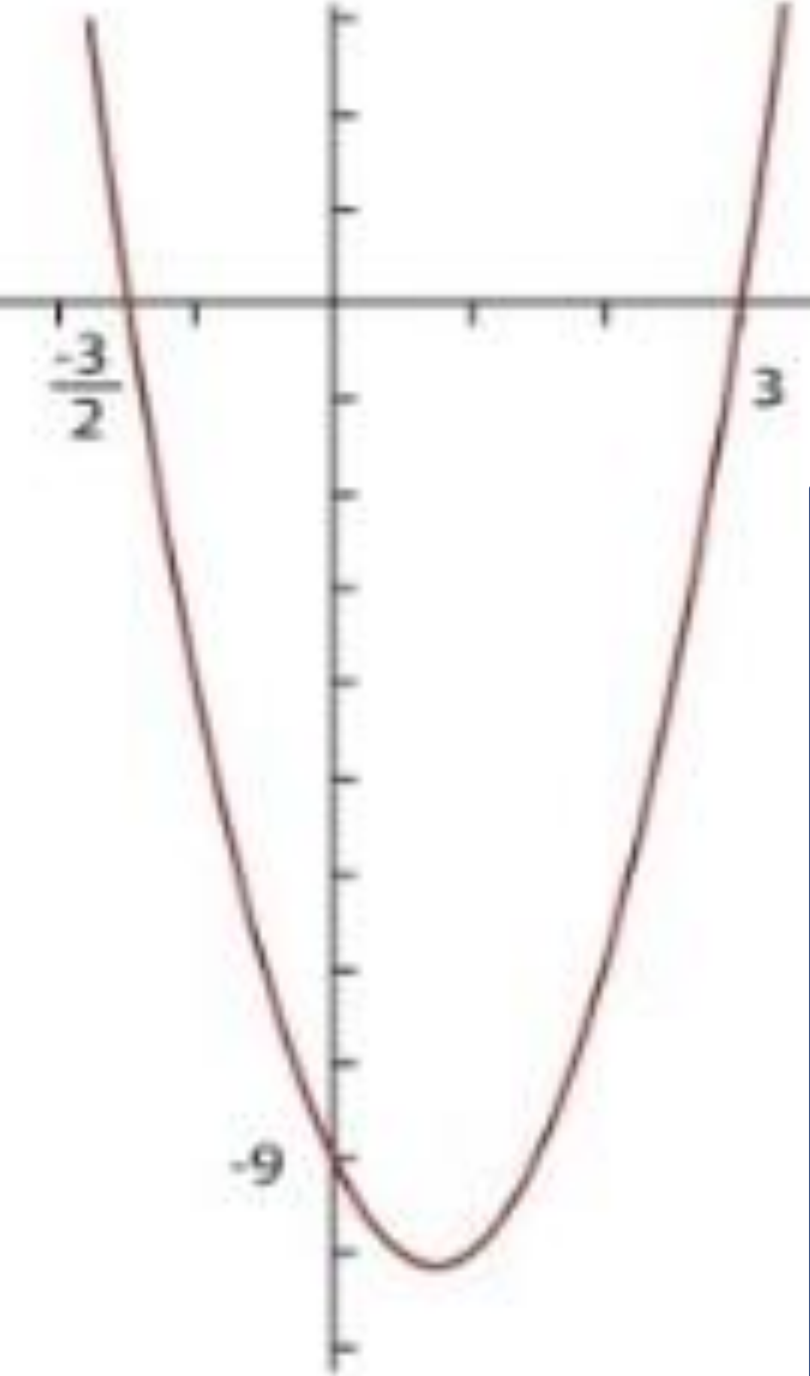
$$y = 2(x-2)(x-4)$$

$$y = 2(x^2 - 4x - 2x + 8)$$

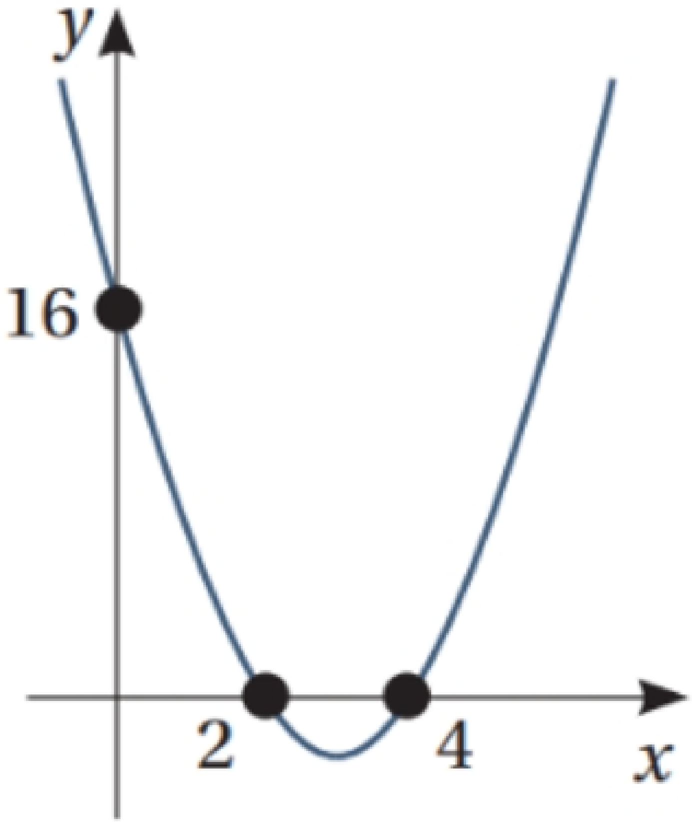
$$y = 2(x^2 - 6x + 8)$$

$$\boxed{y = 2x^2 - 12x + 16}$$

Dado o gráfico, obtenha a função quadrática.



$y = 2\,x^2 - 3x - 9$



Dado o gráfico, obtenha a função quadrática.

$y = ax^2 + bx + c$

$y = a(x - x1)(x - x2)$

Ponto 1 (2,0)
Ponto 2 (4,0)
Ponto 3 (0,16)

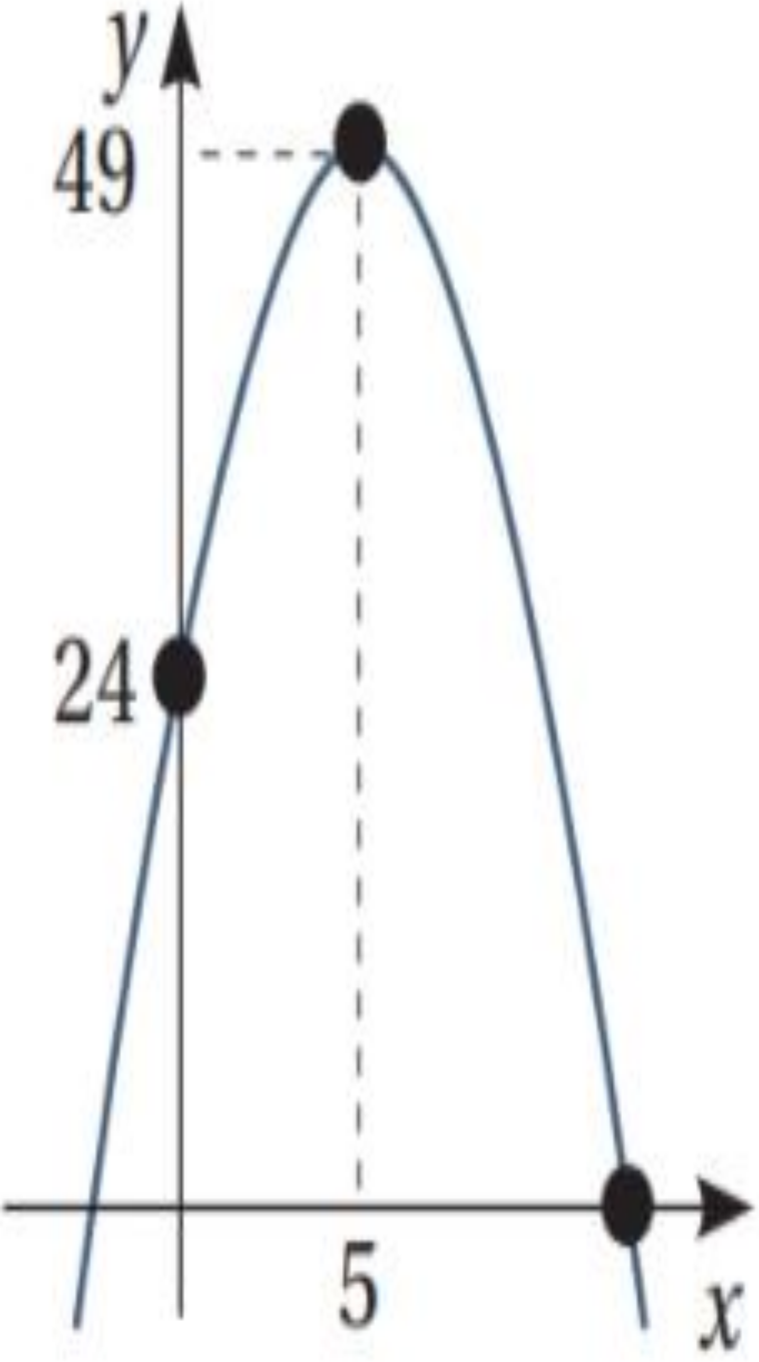
$16 = a(0-2)(0-4)$
$16 = a(-2)(-4)$
$16 = a(8)$
$a = 2$

$y = 2(x-2)(x-4)$

$y = 2(x^2 - 4x - 2x + 8)$

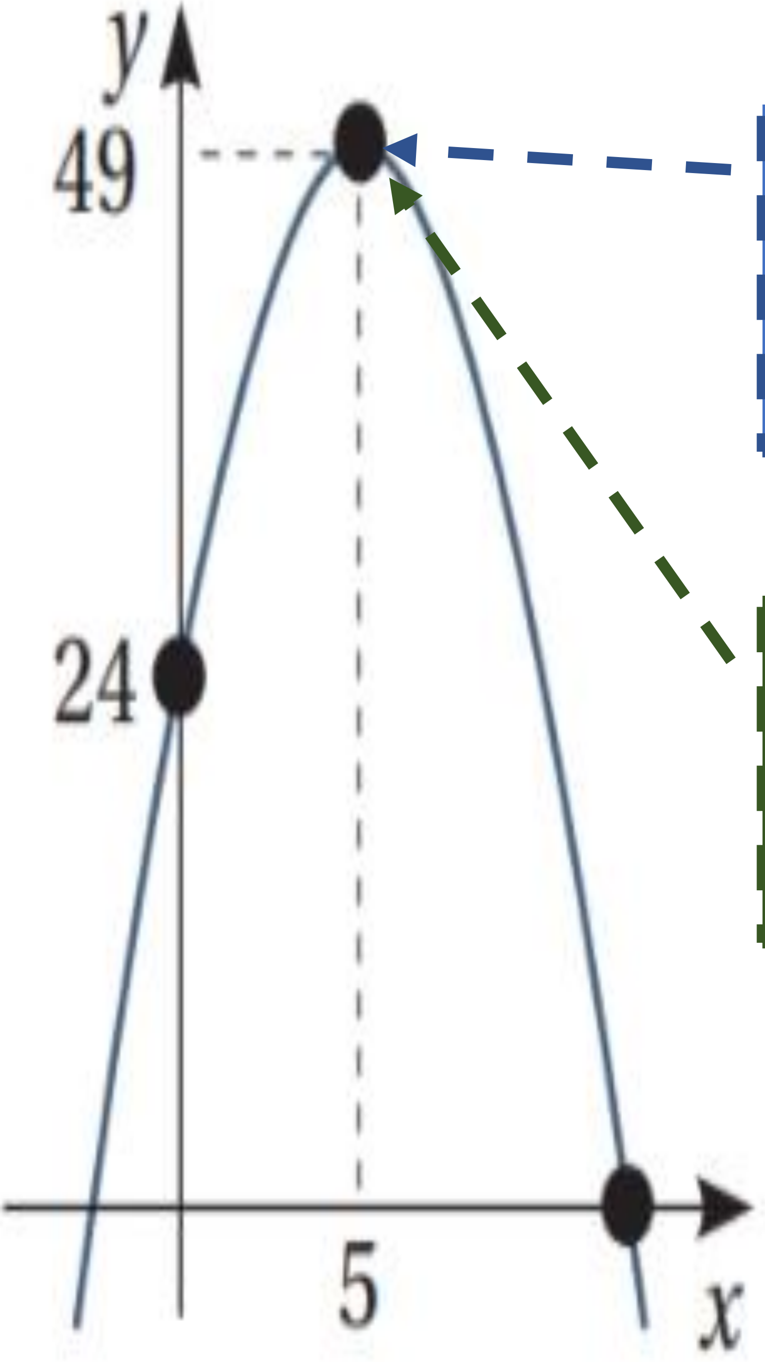
$y = 2(x^2 - 6x + 8)$

$\boxed{y = 2x^2 - 12x + 16}$



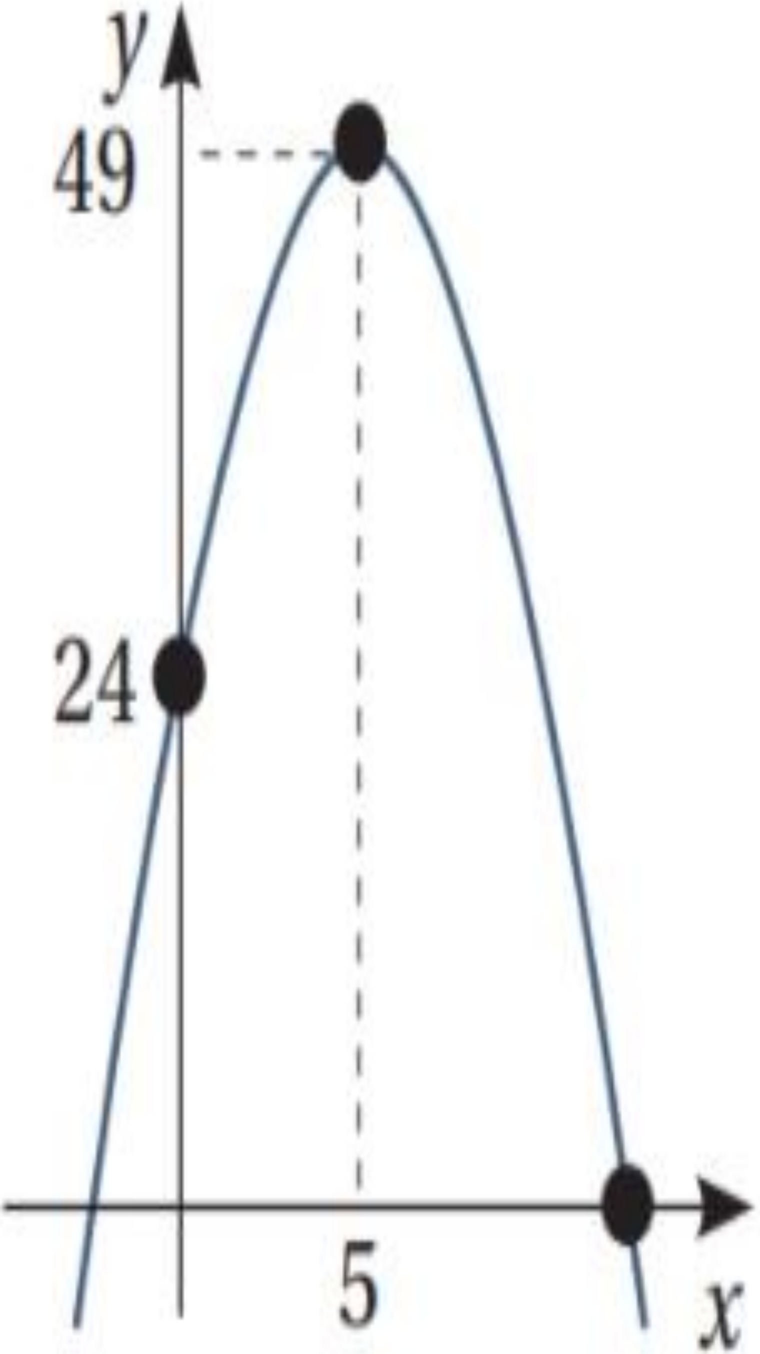
Dado o gráfico, obtenha a função quadrática: $y = ax^2 + bx + c$

Dado o gráfico, obtenha a função quadrática: $y = ax^2 + bx + c$



$$Xv = \frac{-b}{2a}$$

$$Yv = \frac{-\Delta}{4a}$$



Nesse exemplo, temos o ponto $(0,\ 24)$ no qual a parábola cruza o eixo y e que indica o parâmetro $c=24$. Com isso, escrevemos a função na forma $y=ax^2+bx+24$. Para obter os parâmetros a e b, utilizaremos o vértice $(5,\ 49)$ cujas coordenadas são dadas por $\left(-\frac{b}{2a};-\frac{\Delta}{4a}\right)$.

Igualando a abscissa e ordenada do vértice, obtemos o sistema no qual foi substituída a expressão do discriminante

$$\begin{cases} -\dfrac{b}{2a}=5 \\ -\dfrac{\Delta}{4a}=49 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -b=5\cdot 2a \\ -\left(b^2-4ac\right)=4a\cdot 49 \end{cases}$$

e lembrando que $c=24$, obtemos

$$\begin{cases} -b=10a \\ -b^2+4a\cdot 24=196a \end{cases}$$

que, em um formato mais simples, leva a

$$\begin{cases} 10a+b=0 \\ -b^2-100a=0 \end{cases}$$

Substituindo $b=-10a$ da primeira equação na segunda, obtemos

$$-(-10a)^2-100a=0 \quad \Rightarrow \quad -100a^2-100a=0$$
$$a=-1 \text{ ou } a=0 \text{ (não convém)}$$

Como $a=-1$, temos $b=-10\cdot(-1)$, ou $b=10$, que substituímos na função:

$$y=-1x^2+10x+24 \quad \Rightarrow \quad y=-x^2+10x+24$$

1. Dada a função quadrática $f(x)=x^2-6x+8$, determine:

a) $f(1)$
b) $f(0)$
c) $f(x+1)$
d) $f(x+h)$
e) As raízes da função.
f) x, de modo que $f(x)=3$.
g) x, de modo que $f(x)=-1$.

2. Para as funções a seguir, determine suas raízes e escreva em seguida sua forma fatorada.

a) $f(x)=x^2-5x+6$
b) $y=x^2-2x-3$
c) $y=-2x^2-16x-30$
d) $f(x)=3x^2-6x+3$

3. Para cada item a seguir, esboce o gráfico a partir da concavidade, dos pontos em que a parábola cruza os eixos (se existirem) e vértice.

a) $y=x^2-4x-5$
b) $y=-x^2+5x-6$
c) $y=2x^2-4x-30$
d) $y=-3x^2-6x+24$
e) $y=x^2-8x+16$
f) $y=-x^2-2x-1$
g) $y=x^2+6x+10$
h) $y=-x^2+4x-6$
i) $y=x^2-4x$
j) $y=-3x^2-18x$
k) $y=4x^2-100$
l) $y=x^2+10$
m) $y=-3x^2+48$
n) $y=10x^2$
o) $y=-x^2$
p) $y=-x^2-5$

4. Dada a função quadrática $y=(k-2)x^2+5x-6$, determine os valores reais de k para que a parábola correspondente tenha concavidade voltada para cima.

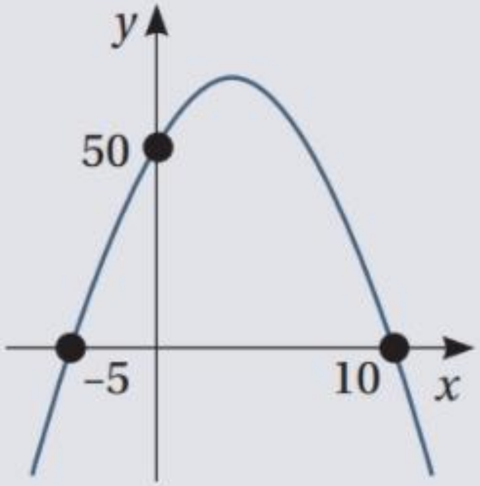
5. Para quais valores de k a função $y=x^2-6x+k$:

a) Tem uma única raiz real?
b) Tem duas raízes reais e distintas?
c) Não tem raiz real?

6. Determine o valor de k para que o ponto $P(2, 3)$ pertença à parábola que representa graficamente a função $y = x^2 - 6x + k$.

7. Em cada item a seguir, obtenha a função correspondente à parábola dada:

a)



b)

são dadas por $S = -5t^2 + 20t$. O tempo t é dado em segundos.

a) Esboce o gráfico da função a partir da concavidade, dos pontos em que a parábola cruza os eixos (se existirem) e vértice.

b) Qual o significado, na prática, das coordenadas do vértice dessa parábola?

c) Qual o significado, na prática, dos pontos em que a parábola corta o eixo t?

d) Qual o domínio dessa função?

e) Para quais instantes a função é crescente?

f) Para quais instantes a função é decrescente?

9. Em uma plantação, a produção $\boldsymbol{P}$ de soja depende de vários fatores, entre eles a quantidade $\boldsymbol{q}$ de fertilizante utilizada. Considere $P = -q^2 + 30q + 175$, sendo a

9. Em uma plantação, a produção ***P*** de soja depende de vários fatores, entre eles a quantidade ***q*** de fertilizante utilizada. Considere $P = -q^2 + 30q + 175$, sendo a produção em toneladas e a quantidade de fertilizante em g/m^2.

a) Esboce o gráfico da função a partir da concavidade, dos pontos em que a parábola cruza os eixos (se existirem) e vértice.

b) Qual o significado, na prática, do ponto em que a parábola corta o eixo P?

c) Qual o significado, na prática, das coordenadas do vértice dessa parábola?

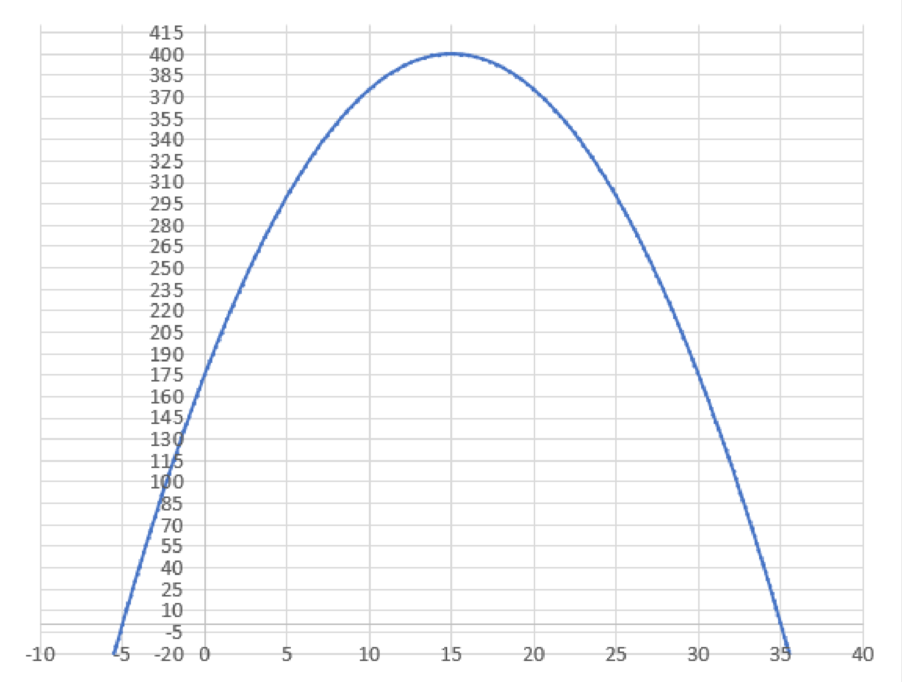
d) Qual é o domínio dessa função?

e) Para quais quantidades de fertilizante temos a produção crescente?

f) Para quais quantidades de fertilizante temos a produção decrescente?

P= $-q^2 + 30q + 175$

x	y
-10	-225
-5	0
0	175
5	300
10	375
15	400
20	375
25	300
30	175
35	0
40	-225
45	-500
50	-825
55	-1200
60	-1625
65	-2100
70	-2625
75	-3200
80	-3825
85	-4500
90	-5225



a=	-1
b=	30
c=	175
x_1=	-5
x_2=	35

Δ=	$b^2 - 4ac$	1600
$x_1 + x_2$=	$-b/a$	30
$x_1 \times x_2$=	c/a	-175
Xv =	$-b/2a$	15
Yv =	$-\Delta/4a$	400

4.2 Aplicações

Como notamos, as funções quadráticas têm as parábolas como seus gráficos. Entre os pontos da parábola, o vértice é um dos mais importantes, pois sinaliza em que condições a função assume *valor máximo* (ou *mínimo*).

Em aplicações práticas, determinar o vértice da função quadrática auxilia a entender quais as condições que maximizam ou minimizam valores da função que descreve o fenômeno. O vértice também ajuda a entender em que situações práticas a função, do fenômeno estudado, é crescente ou decrescente, dado que cada função quadrática apresenta intervalos de crescimento e decrescimento.

Atentos a esses aspectos, analisaremos algumas aplicações práticas.

Pontos de máximo ou mínimo a partir do vértice

Dada a função quadrática $y = ax^2 + bx + c$, o vértice da parábola correspondente representará um ponto de **máximo** se a concavidade for voltada para **baixo**, sendo $a < 0$, e um ponto de **mínimo** se a concavidade for voltada para **cima**, sendo $a > 0$.

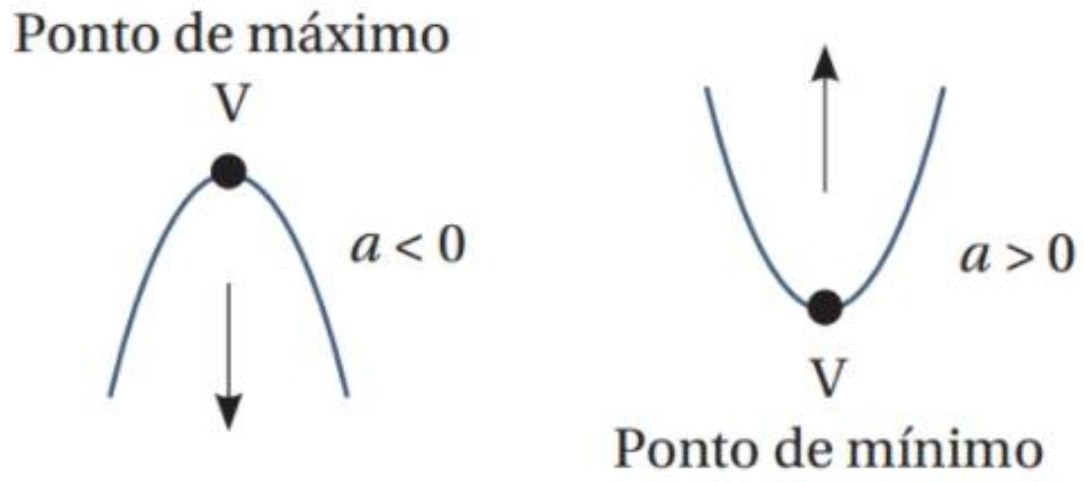


Figura 4.7 Pontos de máximo ou mínimo da função quadrática

No vértice $V = (x_v ; y_v)$ a coordenada x_v dá o valor para o qual a função apresenta máximo ou mínimo (conforme a concavidade); o valor y_v dá o **valor máximo** ou **valor mínimo** da função (conforme a concavidade).

Intervalos de crescimento/decrescimento a partir do vértice

A partir da parábola que representa uma função quadrática, notamos que, dado um ponto de **máximo**, à esquerda da abscissa do vértice a função é **crescente** e à direita a função é **decrescente**. Veja a Figura 4.8 ao lado.

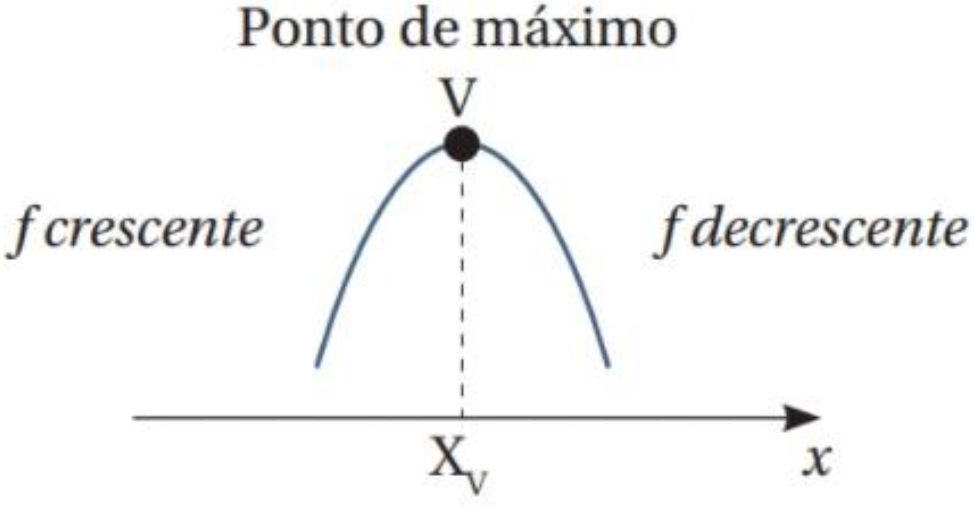


Figura 4.8 Crescimento e decrescimento

De modo parecido, dado um ponto de **mínimo,** à esquerda da abscissa do vértice a função é **decrescente** e à direita a função é **crescente**. Veja a Figura 4.9 ao lado.

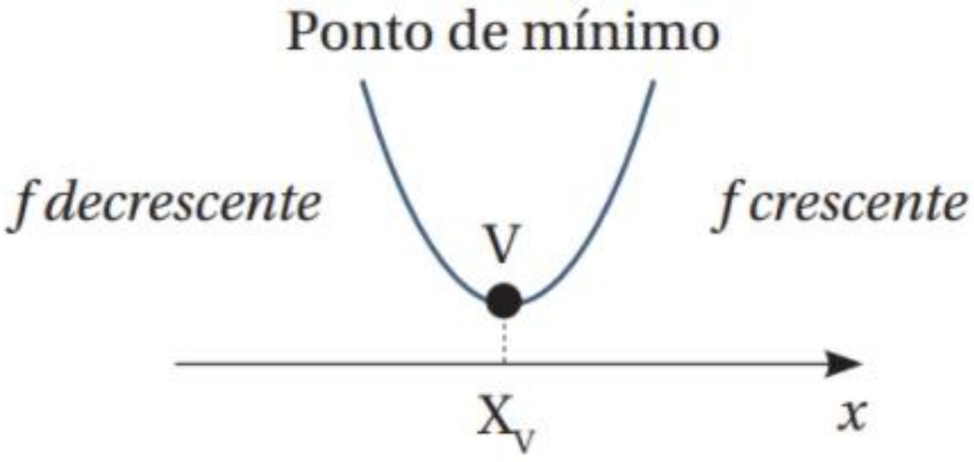


Figura 4.9 Decrescimento e crescimento

11. Em uma trajetória retilínea, a posição S, em metros, de um móvel é dada por $S = 2t^2 - 16t + 30$, em que t representa o tempo, medido em segundos. Determine:

a) A posição inicial do móvel.

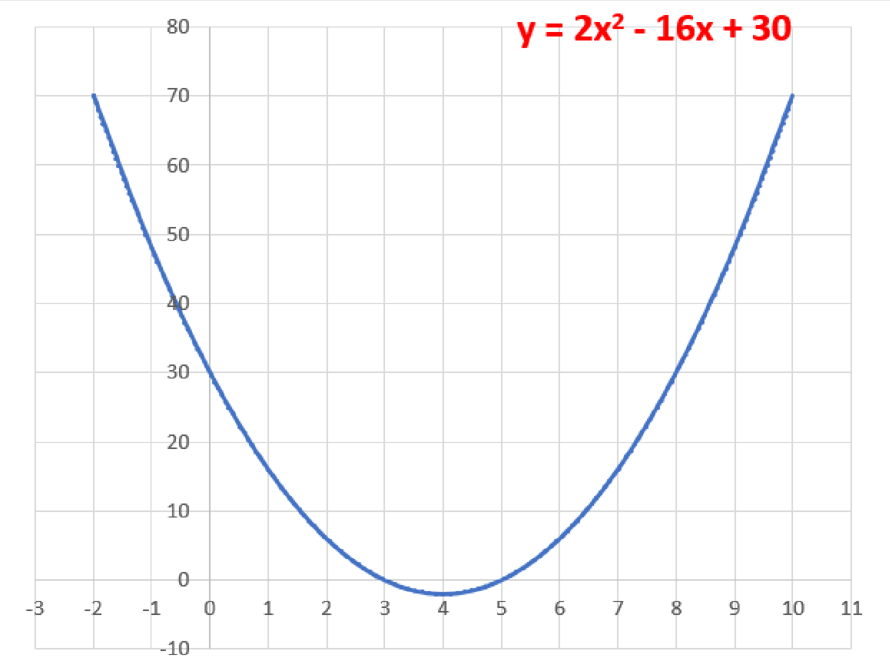
b) Os instantes nos quais o móvel passou pela origem da trajetória.

c) O instante em que a posição é mínima.

d) A posição mínima atingida pelo móvel.

$f(x) = 2x^2 - 16t + 30$

x	y
-2	70
-1	48
0	30
1	16
2	6
3	0
4	-2
5	0
6	6
7	16
8	30
9	48
10	70



a=	2
b=	-16
c=	30
x_1=	3
x_2=	5

Δ=	$b^2 - 4ac$	16
$x_1 + x_2$=	$-b/a$	8
$x_1 \times x_2$=	c/a	15
Xv =	$-b/2a$	4
Yv =	$-\Delta/4a$	-2

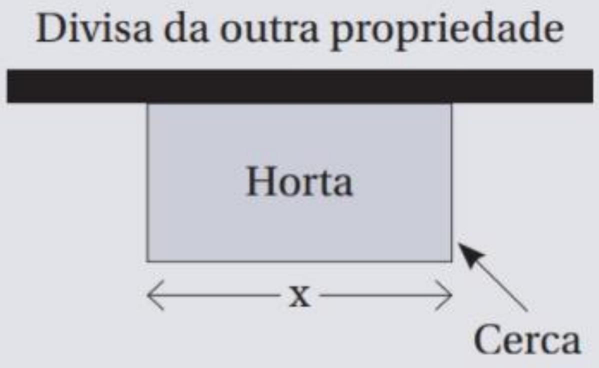
12. Considerando um gerador com força eletromotriz de $\varepsilon = 10\,V$ e resistência interna de $r = 0{,}5\ \Omega$, a potência útil é dada por $P_u = 10i - 0{,}5i^2$, sendo a potência dada em *watt* (W) e a intensidade da corrente i dada em *ampère* (A).

a) Esboce o gráfico da função indicando o vértice e os pontos de intersecção com os eixos.

b) Qual a corrente que dá potência útil máxima?

c) Qual a potência útil máxima?

13. Um agricultor pretende construir uma horta retangular cercada, não havendo necessidade de fechar os fundos da horta, uma vez que ela faz divisa com outra propriedade que já está cercada. Para tanto, dispõe de 400 metros de tela de alambrado.



Na figura, temos uma vista aérea da futura horta e cerca, com x indicando uma das dimensões da horta.

a) Obtenha a função que dá a área y da horta em função de x.

b) Determine as dimensões do cercado para que a horta tenha área máxima.

c) Calcule a área máxima da horta.

14. O preço de um eletrodoméstico varia de acordo com a relação $p = -2q + 1.000$, em que q representa a quantidade comercializada. Sabendo que a receita é dada pela relação $R = p \cdot q$:

a) Obtenha a função receita e esboce seu gráfico indicando os principais pontos.

b) Qual a quantidade a ser comercializada para que a receita seja máxima?

c) Qual a receita máxima?

d) Para quais quantidades comercializadas a receita é crescente? E decrescente?

15. Considerando as mesmas condições do problema anterior e o custo para produção e comercialização do eletrodoméstico como $C = 200q + 35.000$:

a) Obtenha a função lucro e esboce o gráfico indicando os principais pontos.

b) Qual a quantidade a ser comercializada para que o lucro seja máximo?

c) Qual o lucro máximo?

d) Para quais quantidades comercializadas o lucro é positivo? E negativo?

16. Em uma represa, a quantidade de água foi observada durante 8 meses e pode ser aproximada pela função $Q = t^2 - 6t + 40$, em que Q dá a quantidade em bilhões de litros e o número de meses é dado por t (considere $t = 0$ o início da observação, $t = 1$ o 1º mês; $t = 2$ o 2º mês; ...).

a) Esboce o gráfico da função salientando os principais pontos.

b) Em que mês a quantidade de água na represa foi mínima?

c) Qual a quantidade mínima de água na represa?

17. Na região central de uma cidade, foi contado o número N de infrações de trânsito durante os 20 primeiros dias de um mês. Tal número pode ser aproximado pela expressão $N = 0{,}25t^2 - 6t + 84$, em que t representa o número do dia em que foi feita a contagem. Obtenha o vértice da parábola que representa essa função e interprete o significado de suas coordenadas.

18. Na confecção de uma liga metálica, dois dos metais que podem compô-la têm suas quantidades, em gramas, dadas por x (cobre) e y (ferro), sendo essas quantidades relacionadas por $10x^2 + 10y = 1.000$.

a) Expresse a quantidade de ferro em função da quantidade de cobre da liga.

b) Esboce o gráfico da função obtida no item anterior ressaltando os principais pontos.

c) Se forem inseridos 8 g de cobre, qual a quantidade de ferro na liga?

d) Se forem inseridos 19 g de ferro, qual a quantidade de cobre na liga?

e) Se não se inserir cobre na liga, quanto será inserido de ferro?

f) Se não se inserir ferro na liga, quanto cobre será inserido?

Estudo de caso

Um produtor rural dispõe, em sua fazenda, de uma área ociosa na qual deseja implementar a produção com o cultivo de soja ou milho.

Um dos fatores que norteiam a decisão de qual lavoura escolher é o custo dos fertilizantes, bem como da produção obtida com a utilização dos fertilizantes.

Após consulta aos técnicos agrícolas, o produtor sabe que a produção estimada, em toneladas, de soja para a área disponível é dada por $P_S = 500 + 40q - q^2$*, em que* q *é a quantidade de fertilizantes em* g/m^2*. De modo análogo, sabe-se também que a produção para o plantio de milho é dada por* $P_M = 144 + 32q - q^2$*.*

Conhecendo essas funções, é possível ao produtor responder às seguintes perguntas que norteiam a sua decisão:

Caso não sejam utilizados fertilizantes, quais as produções estimadas de milho e soja? Quais as quantidades de fertilizantes a serem utilizadas para que as produções estimadas de soja e milho sejam maximizadas? Quais as estimativas de produções máximas de soja e milho? Existem quantidades de fertilizantes que indicam saturação do solo, inviabilizando as produções? Quais os intervalos das quantidades de fertilizantes que tornam crescentes as produções?