Teoria de Conjuntos

Centro Universitário Senac

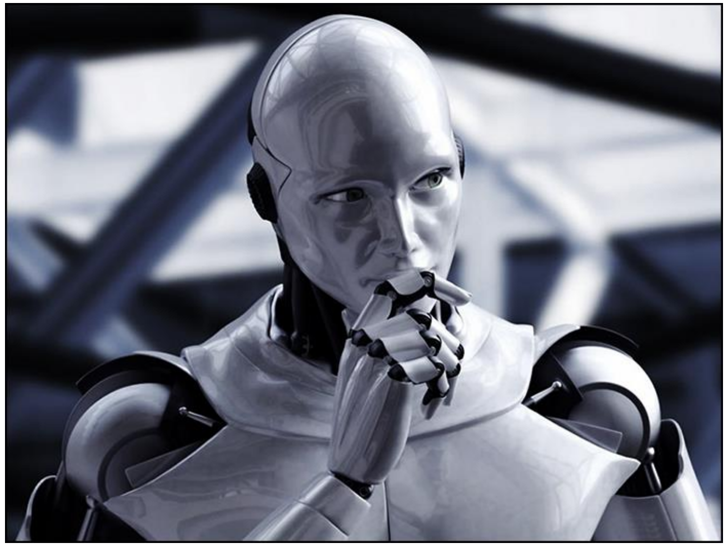
Tecnologia em Análise e Desenvolvimento de Sistemas

Matemática para Tecnologia da Informação

Ideia Intuitiva

Esta Foto de Autor Desconhecido está licenciado em CC BY-ND

O que é um conjunto?



Esta Foto de Autor Desconhecido está licenciado em CC BY

Fonte: http://educapes.capes.gov.br/handle/capes/430195

Notações dos Conjuntos

Muitas vezes, um conjunto é representado com os seus elementos envolvidos pelas chaves { e } através de duas formas básicas e de uma terceira forma geométrica:

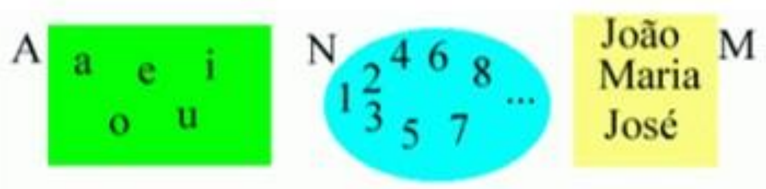
Apresentação (Enumeração): Os elementos do conjunto estão dentro de duas chaves { e }.

1. $A = \{a, e, i, o, u\}$
2. $N = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$
3. $M = \{\text{João}, \text{Maria}, \text{José}\}$

Descrição (Compreensão): O conjunto é descrito por uma ou mais propriedades.

1. $A = \{x : x \text{ é uma vogal}\}$
2. $N = \{x : x \text{ é um número natural}\}$
3. $M = \{x : x \text{ é uma pessoa da família de Maria}\}$

Diagrama de Venn-Euler: (lê-se: "Ven-óiler") Os conjuntos são mostrados graficamente.



A Teoria dos Conjuntos

A Teoria dos Conjuntos é o campo de conhecimento que estuda as relações e agrupamentos de diferentes elementos matemáticos. Tudo começa com a simples relação entre um elemento e determinado conjunto. Por exemplo, se dissermos que o número 3 faz parte do conjunto A, devemos expressar essa relação da seguinte maneira:

$3 \in A$ – leia-se: 3 pertence a A

Neste caso, o conjunto A pode ser definido como o conjunto dos números reais ímpares maiores que zero. Portanto, seus elementos serão listados da seguinte maneira:

$A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21...\}$

Se quisermos indicar que um número não pertence a determinado conjunto, podemos escrever da seguinte maneira:

$2 \notin A$ – leia-se: 2 não pertence a A

Relações de Inclusões

Em alguns casos, certos conjuntos podem ter elementos que também fazem parte de outros conjuntos. Por exemplo, o conjunto A dos números ímpares reais maiores que zero tem elementos que também fazem parte do conjunto B de números reais maiores que zero. Podemos descrever essa relação da seguinte forma:

Se B = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, ...}

$A \subset B$ – leia-se: A está contido em B

Da mesma maneira, se quisermos indicar que um conjunto não tem elementos que fazem parte de outro conjunto, podemos escrever da seguinte forma:

Se P = {-3, -2, -1}

$P \not\subset A$ – leia-se: P não está contido em A

Conjunto Vazio

O conjunto vazio ou conjunto nulo é aquele que não possui nenhum elemento. Ele pode ser representado de duas maneiras:

C = { } ou C = ∅

Uniões e Intersecções

É possível unir os elementos de dois ou mais conjuntos diferentes. Para representar esse processo, use a seguinte notação:

Se J = {1, 2, 3, 6} e K = {2, 4, 5, 6},

J∪K = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

Elementos em comum em dois conjuntos compõem a chamada "intersecção", e podem ser representados da seguinte maneira:

J∩K = {2, 6}

Relação de Inclusão
4 propriedades

- O Conjunto Vazio C={ } ou Ø é subconjunto de todo conjunto;
- $A \subset A$, isto é, todo conjunto é sempre subconjunto dele mesmo;
- Se $A \subset B$ e $B \subset A$, então $A = B$;
- Se $A \subset B$ e $B \subset C$, então $A \subset C$.

5. (CPFO) A afirmação correta é:

a) $\{0, 2\} \subset \{1, 2, 3\}$

b) $\{2\} \in \{0, 2, 4\}$

c) $0 \in \emptyset$

d) $\{1, 3\} \subset \{0, 1, 2, 3, 4\}$

6. (EsPCEx) Sendo dados os conjuntos:
$L = \{1\}$, $M = \{1, 2\}$, $P = \{3, 4\}$, $S = \{1, 2, 3\}$ e $T = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, então:

a) $M \in S$ **b)** $L \subset S$ **c)** $M = P$ **d)** $P \subset T$ **e)** n. d. a

5. (CPFO) A afirmação correta é:

a) $\{0, 2\} \subset \{1, 2, 3\}$
b) $\{2\} \in \{0, 2, 4\}$
c) $0 \in \emptyset$
d) $\{1, 3\} \subset \{0, 1, 2, 3, 4\}$

Resolução:

a) (F) → Justificativa: o elemento 0 não pertence ao conjunto $\{1, 2, 3\}$
b) (F) → Justificativa: $\{2\}$ é um subconjunto de $\{0, 2, 4\}$
c) (F) → Justificativa: $\emptyset$ é o conjunto vazio, não possui elementos
d) (V) → Justificativa: os elementos 1 e 3 são também elementos do conjunto $\{0, 1, 2, 3, 4\}$, portanto $\{1, 3\}$ é um subconjunto de $\{0, 1, 2, 3, 4\}$

6. (EsPCEx) Sendo dados os conjuntos:
$L = \{1\}$, $M = \{1, 2\}$, $P = \{3, 4\}$, $S = \{1, 2, 3\}$ e $T = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, então:

a) $M \in S$ b) $L \subset S$ c) $M = P$ d) $P \subset T$ e) n. d. a

Resolução:
Alternativa d pois, os elementos 3 e 4 são também elementos que pertencem ao conjunto T, logo, P é um subconjunto de T.

CONJUNTO DAS PARTES

O conjunto de todos os subconjuntos de um conjunto dado A é chamado de **CONJUNTO DE PARTES;**

Se A é o conjunto de três elementos {x, y, z} a lista completa de subconjuntos de A é:

{ } (o conjunto vazio);

{x};

{y};

{z};

{x, y};

{x, z};

{y, z};

{x, y, z};

e portanto o conjunto de partes de A é o conjunto de 8 elementos:

P(A) = {{ }, {x}, {y}, {z}, {x, y}, {x, z}, {y, z}, {x, y, z}}.

Fórmula:

$$P(A) = 2^{n(A)}$$

, onde

- P(A)= é o conjunto das partes de A
- n(A) = é o nº de elementos de A

11. Dado o conjunto A = {2, 5, 7}, determine todos os subconjuntos de A.

12. Dado o conjunto B = {a, b, c}, determinar todos os subconjuntos de B (ou partes de B).

11. Dado o conjunto A = {2, 5, 7}, determine todos os subconjuntos de A.

Resolução:

Subconjunto formado com nenhum elemento do conjunto A:

Ø (conjunto vazio)

Subconjuntos formados por 1 elemento do conjunto A.

{2}, {5}, {7}

Subconjuntos formados por 2 elementos do conjunto A

{2, 5}, {2, 7}, {5, 7}

Subconjuntos formado por 3 elementos do conjunto A (o próprio conjunto)

{2, 5, 7}

P(A) = {Ø, {2}, {5}, {7}, {2, 5}, {2, 7}, {5, 7}, {2, 5, 7} }

12. Dado o conjunto B = {a, b, c}, determinar todos os subconjuntos de B (ou partes de B).

Resolução:

Subconjunto formado com nenhum elemento do conjunto B:

Ø (conjunto vazio)

Subconjuntos formados por 1 elemento do conjunto B.

{a}, {b}, {c}

Subconjuntos formados por 2 elementos do conjunto B

{a, b}, {a, c}, {b, c}

Subconjuntos formados por 3 elementos do conjunto B (o próprio conjunto)

{a, b, c}

P(B) = {Ø, {a}, {b}, {c}, {a, b}, {a, c}, {b, c}, {a, b, c}}

SÍMBOLOS TEORIA DOS CONJUNTOS

$\in$	: Pertence	$\exists$	: Existe
$\notin$	: Não Pertence	$\nexists$	: Não Existe
$\subset$	: Está contido	$\forall$	: Para Todo ou (Qualquer que Seja)
$\not\subset$	: Não está Contido	$\varnothing$	: Conjunto Vazio
$\supset$	: Contém	N	: Conjunto dos Números Naturais
$\not\supset$	: Não Contém	Z	: Conjunto dos Números Inteiros
/	: Tal Que	Q	: Conjunto dos Números Racionais
$\Rightarrow$	: Implica Que	Q'= I	: Conjunto dos números Irracionais
$\Leftrightarrow$	: Se, e Somente se	R	: Conjunto dos Números Reais

Os conjuntos numéricos

Na matemática, existem alguns conjuntos utilizados com mais frequência. São eles:

Números Naturais: N = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8...}

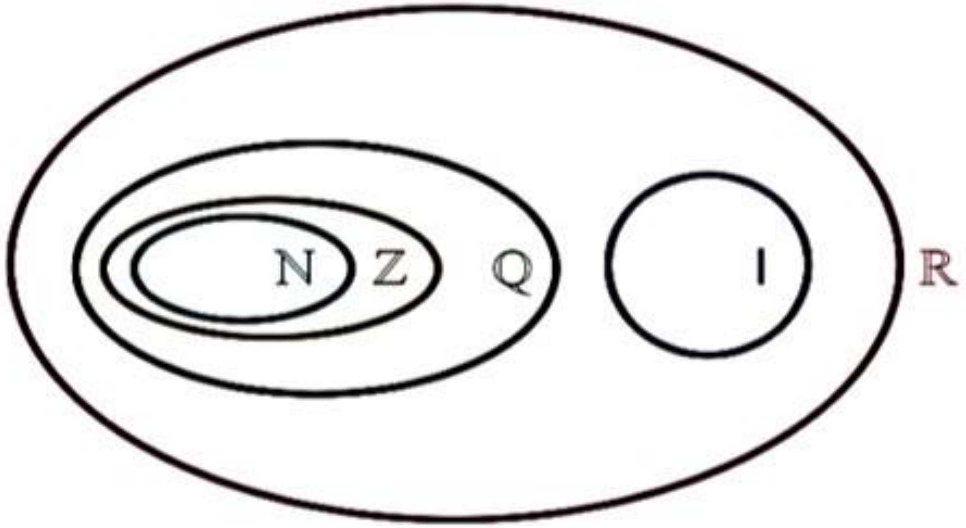
Números Inteiros: Z = {..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3...}

Números Racionais: Q = {..., -1, -12, 0, 1, 54...}

Números Irracionais: I = {...; v2; v3; 3,141592...}

Números Reais: R = N∪ Z ∪Q∪I

Esses conjuntos se relacionam de diversas formas e podem ser representados por meio do diagrama de Venn. Olhe só:



A teoria dos conjuntos tem tudo a ver com lógica

Observe as seguintes afirmações:

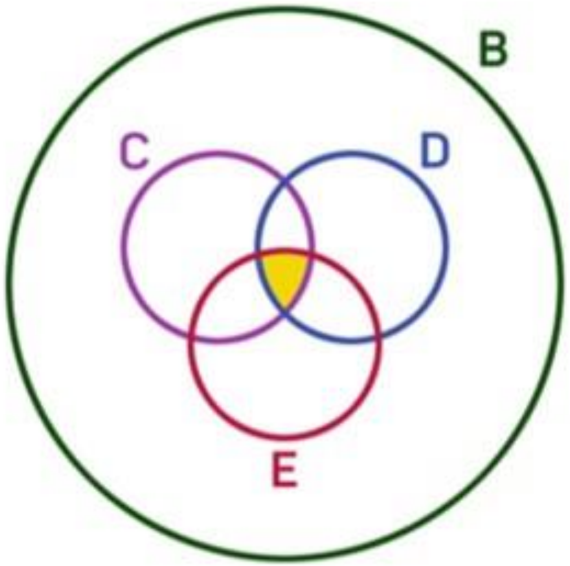
1 – Todas as crianças de 5 anos de idade que estão no parque são felizes.

2 – Crianças felizes sorriem bastante.

3 – João é uma criança de 5 anos de idade.

4 – João está no parque.

O que é possível afirmar sobre João?



B = {crianças}

C = {crianças de 5 anos}

D = {crianças felizes}

E = {crianças que estão no parque}

A teoria dos conjuntos tem tudo a ver com lógica

Observe as seguintes afirmações:

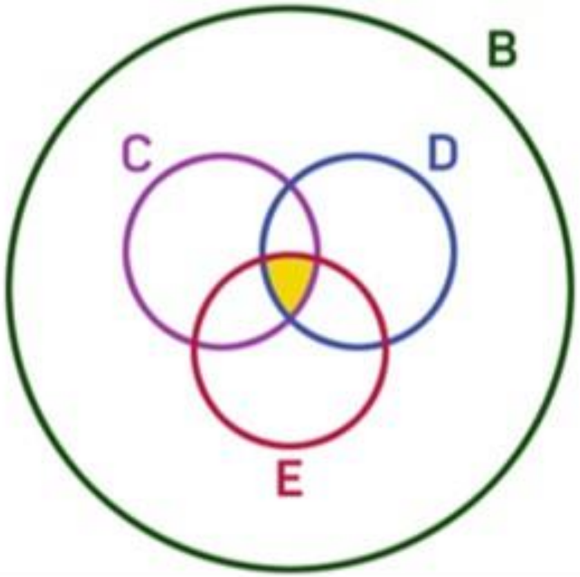
1 – Todas as crianças de 5 anos de idade que estão no parque são felizes.

2 – Crianças felizes sorriem bastante.

3 – João é uma criança de 5 anos de idade.

4 – João está no parque.

O que é possível afirmar sobre João?



B = {crianças}

C = {crianças de 5 anos}

D = {crianças felizes}

E = {crianças que estão no parque}

A área pintada de amarelo no diagrama corresponde ao grupo de crianças de 5 anos que são felizes e estão no parque. Vamos analisar a situação de João:

1 – João é uma criança, ou seja, pertence ao conjunto B.

2 – João tem 5 anos, ou seja, pertence ao conjunto C também.

3 – João está no parque, ou seja, pertence ao conjunto E também.

4 – Segundo a primeira afirmação, todas as crianças de 5 anos que estão no parque são felizes, ou seja, João pertence ao conjunto D também.

Logo, João sorri bastante.

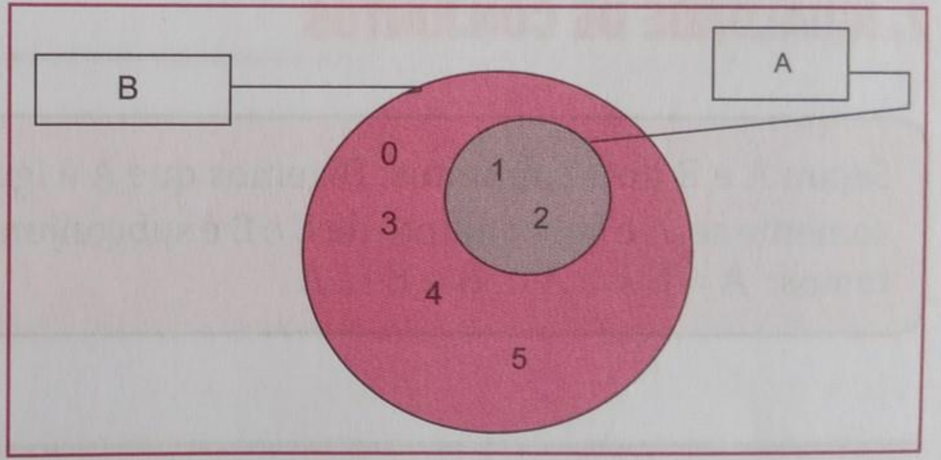
O exemplo em questão é bastante simples, mas é uma ótima maneira de enxergar com mais clareza por que a Teoria dos Conjuntos é tão importante na hora de resolver problemas de lógica. Incrível, não?

7. Dados os conjuntos A = {1, 2} e B = {0, 1, 2, 3, 4, 5}, represente-os por um diagrama.

8. Dados os conjuntos A = {0, 2, 4} e B = {1, 2, 3, 4, 5, 6}, represente-os por um diagrama.

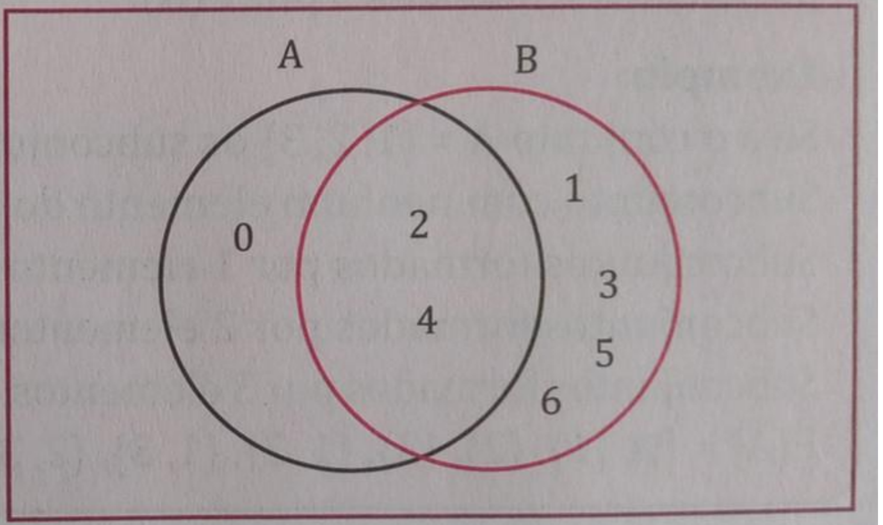
7. Dados os conjuntos A = {1, 2} e B = {0, 1, 2, 3, 4, 5}, represente-os por um diagrama.

Resolução:
Podemos notar que todo elemento do conjunto de A é também elemento de B. Então fazemos a seguinte representação em diagrama.



8. Dados os conjuntos A = {0, 2, 4} e B = {1, 2, 3, 4, 5, 6}, represente-os por um diagrama.

Resolução:
Podemos notar que os elementos 2 e 4 estão nos dois conjuntos ao mesmo tempo. Podemos, então, fazer a representação em diagrama da seguinte forma:

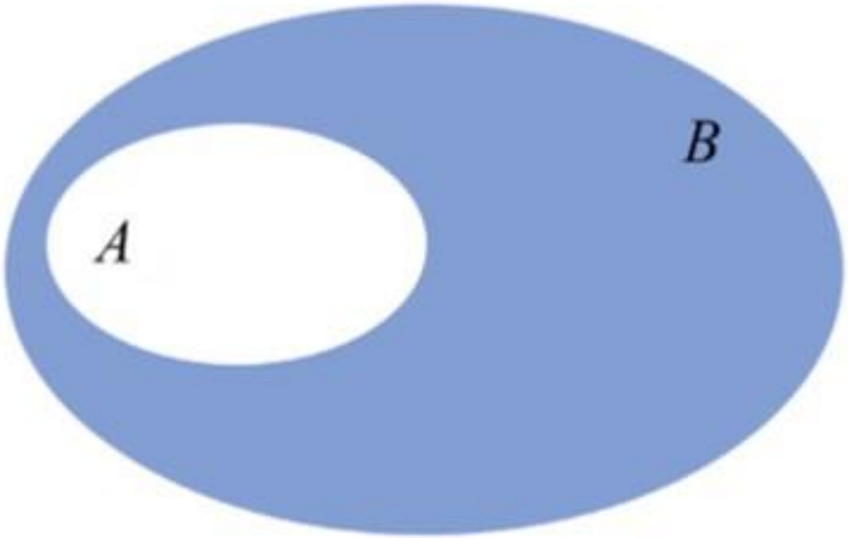


Subconjunto

Um conjunto A é um subconjunto de um conjunto B se todo elemento de A é também elemento de B. Denotamos por $A \subset B$ (Lê-se: A está contido em B, ou A é um subconjunto de B). Usamos então a relação:

$$A \subset B \Leftrightarrow \forall x \in A \Rightarrow x \in B \,.$$

(Lê-se: A está contido em B se, e somente se, para todo x pertencente a A, implica que x pertence a B).

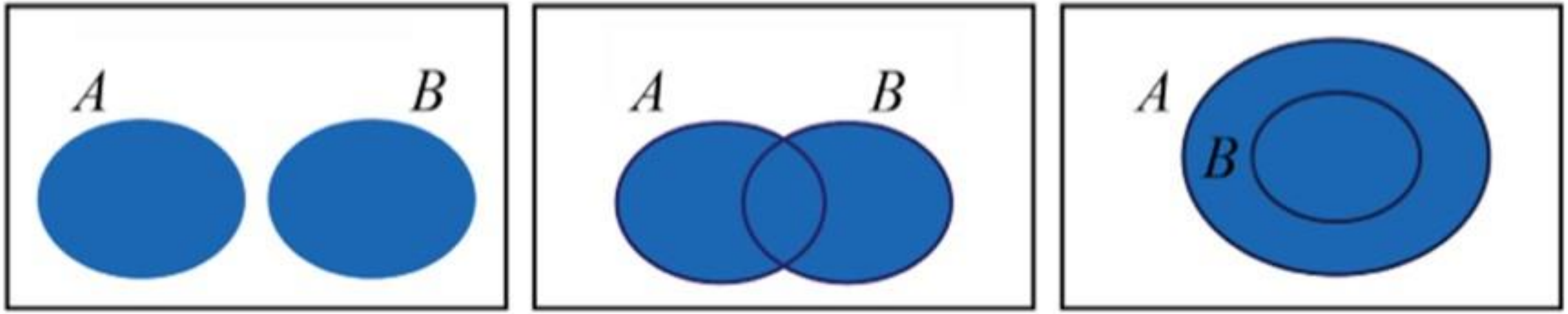


Operações com Conjuntos

- **UNIÃO**

Dados dois conjuntos A e B, chama-se **união** de A e B o conjunto formado por todos os elementos que pertencem a A ou a B. Denotamos por $A \cup B$. Assim, podemos escrever:

$$A \cup B = \{\, x \mid x \in A \text{ ou } x \in B \}$$

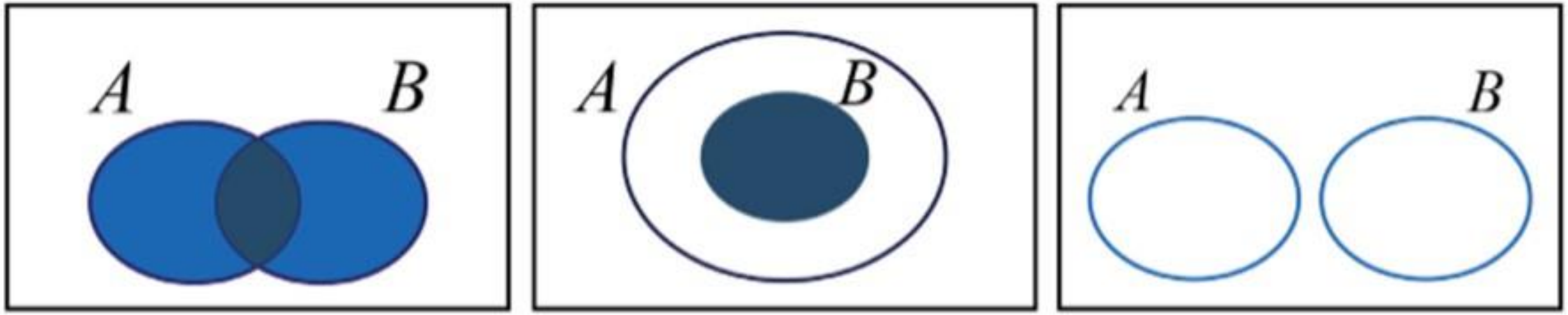


Operações com Conjuntos

- **INTERSEÇÃO**

Dados dois conjuntos, chama-se interseção de A e B o conjunto formado pelos elementos que estão em A e B, ao mesmo tempo. Denotamos por $A \cap B$. Assim, podemos escrever:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$$



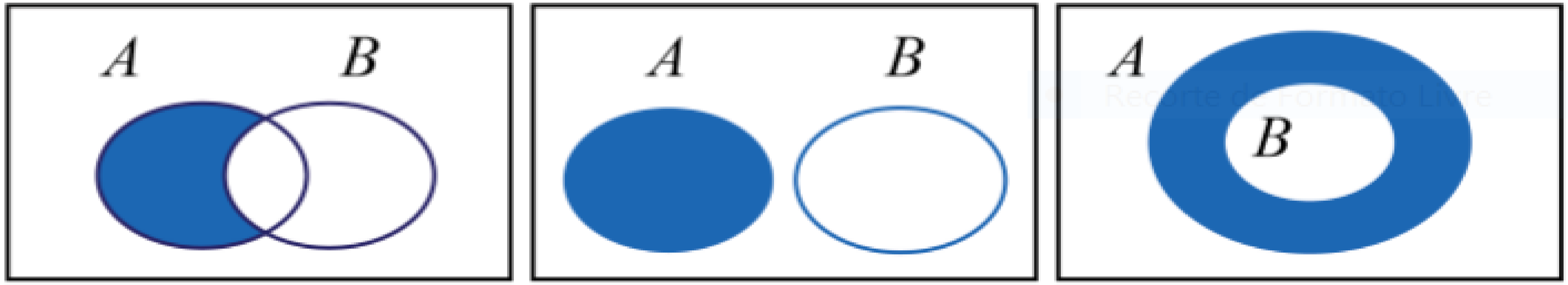
Operações com Conjuntos

- **DIFERENÇA**

Dados dois conjuntos A e B, definimos o conjunto diferença entre A e B, denotamos por $A - B$, como sendo formado pelos elementos que estão em A, mas não estão em B. Da mesma forma, o conjunto $B - A$ será formado pelos elementos que estão em B, mas não estão em A. Podemos escrever

$$A - B = \{ x \in A \mid x \notin B \} \text{ e } B - A = \{ x \in B \mid x \notin A \}$$

Representação da interseção $A - B$ pelo diagrama de Venn

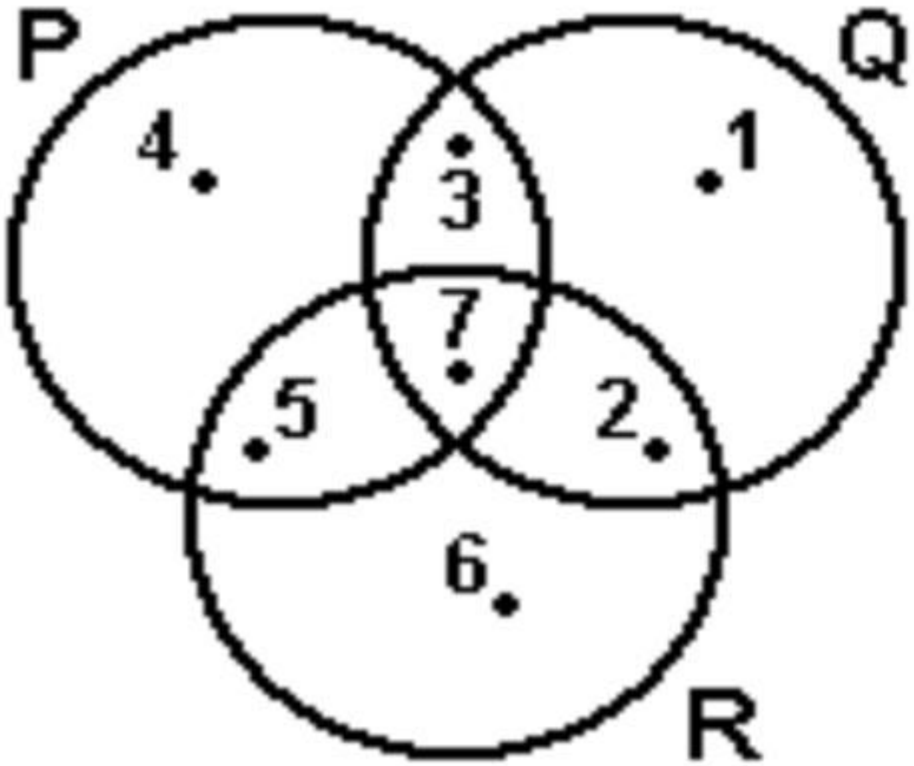


Rápida revisão...

https://www.youtube.com/watch?v=ZZmPGJ6IRyU

Exemplo 1!

Considere os conjuntos representados pelo diagrama de Venn.



Determine:

a) P
b) Q
c) R
d) $P \cap Q$
e) $Q \cup R$
f) $P \cap Q \cap R$

Considere os conjuntos representados pelo diagrama de Venn.

Determine:

a) P = {3,4,5,7}

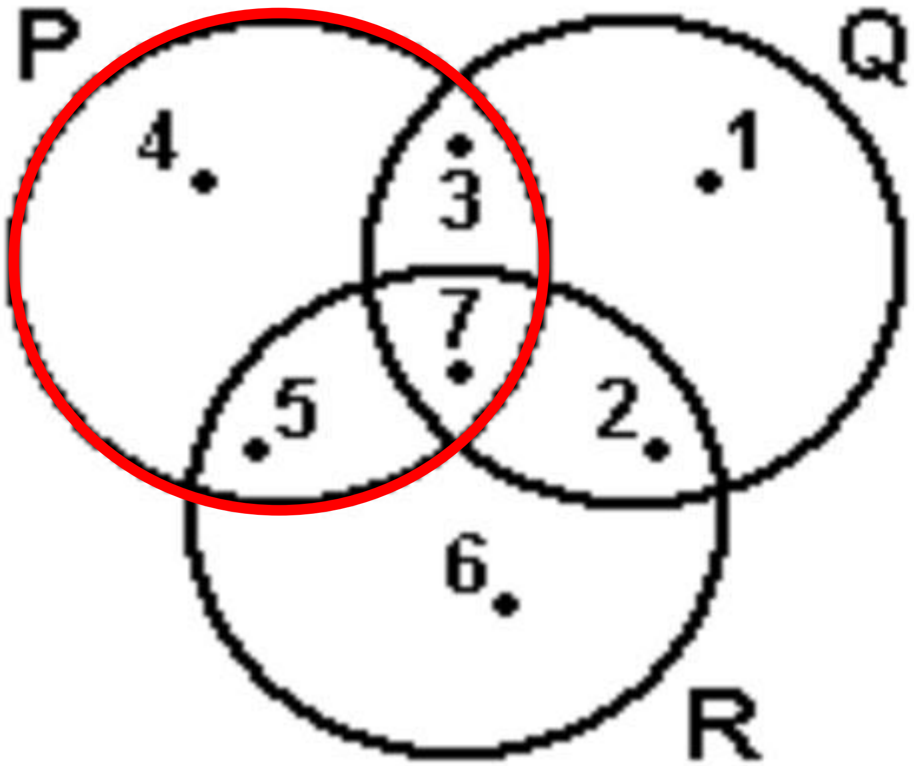
b) Q

c) R

d) P ∩ Q

e) Q U R

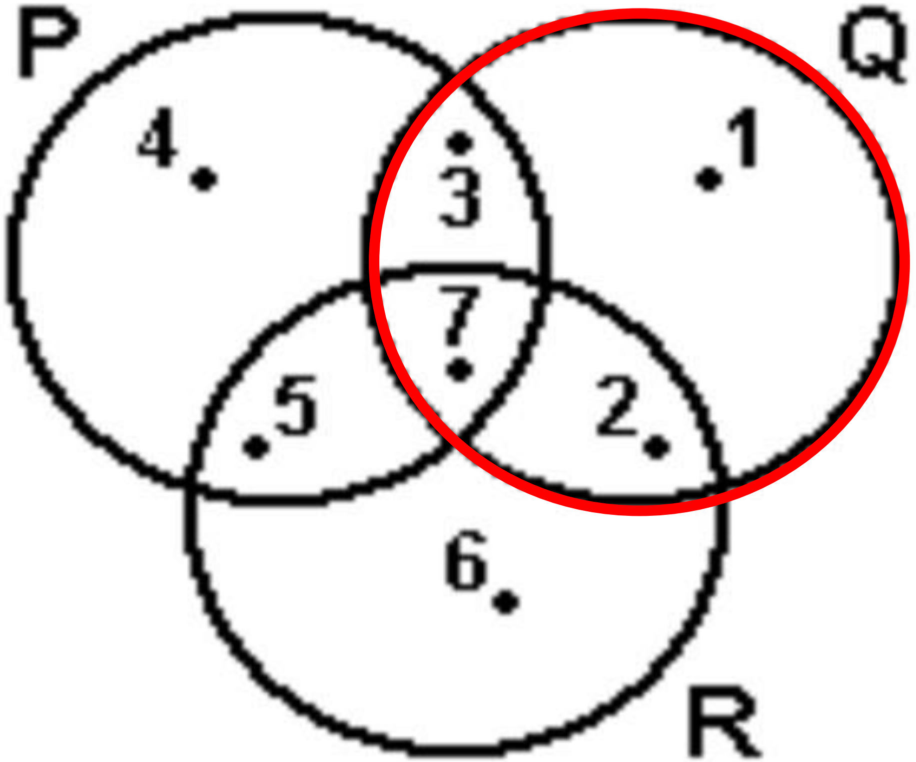
f) P ∩ Q ∩ R



Considere os conjuntos representados pelo diagrama de Venn.

Determine:

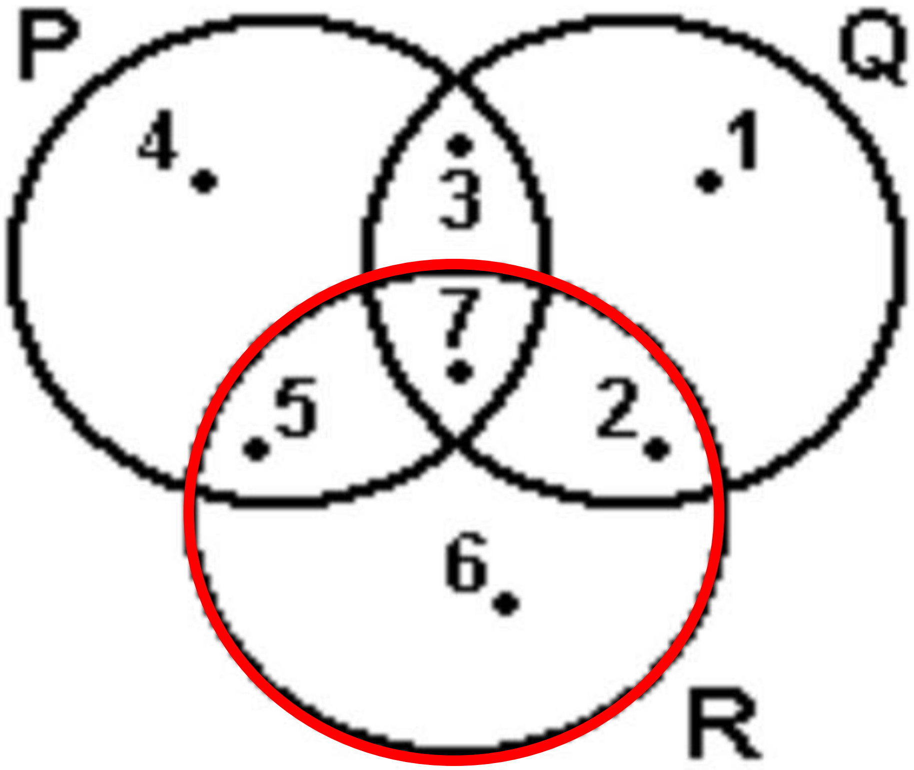
a) P
b) Q
c) R
d) P ∩ Q
e) Q ∪ R
f) P ∩ Q ∩ R



Considere os conjuntos representados pelo diagrama de Venn.

Determine:

a) P
b) Q
c) R
d) P ∩ Q
e) Q U R
f) P ∩ Q ∩ R



Considere os conjuntos representados pelo diagrama de Venn.

Determine:

a) P

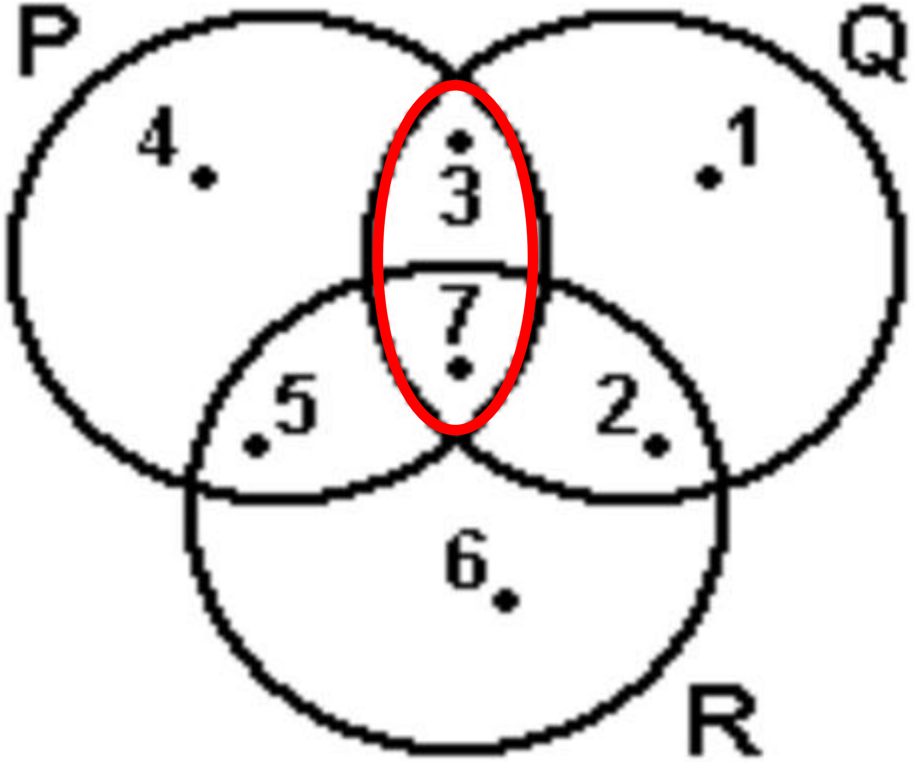
b) Q

c) R

d) P ∩ Q

e) Q ∪ R

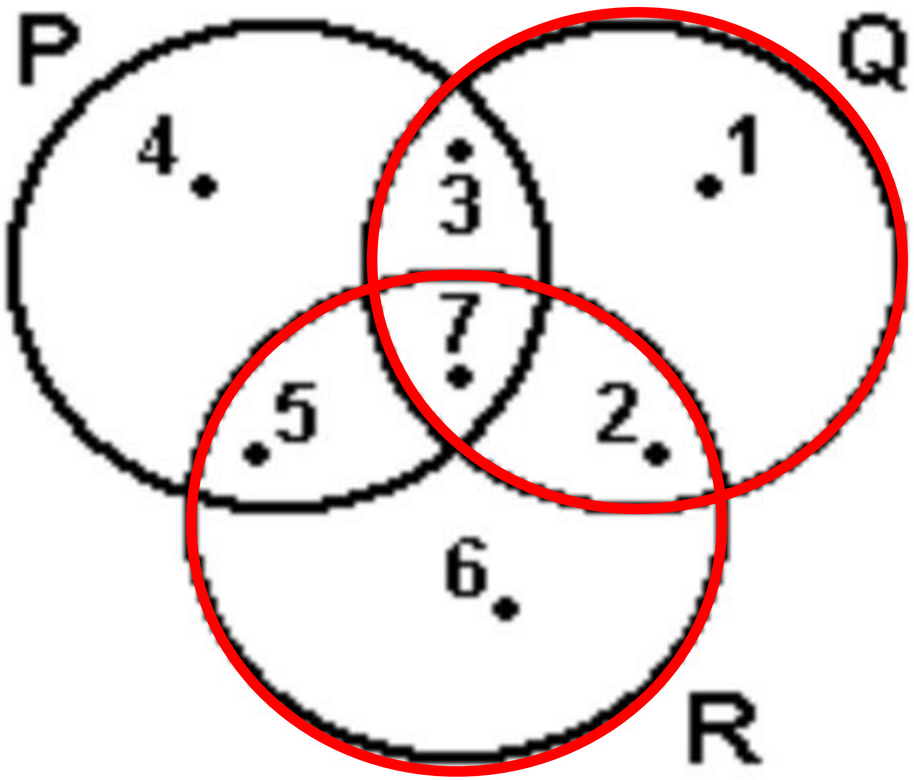
f) P ∩ Q ∩ R



Considere os conjuntos representados pelo diagrama de Venn.

Determine:

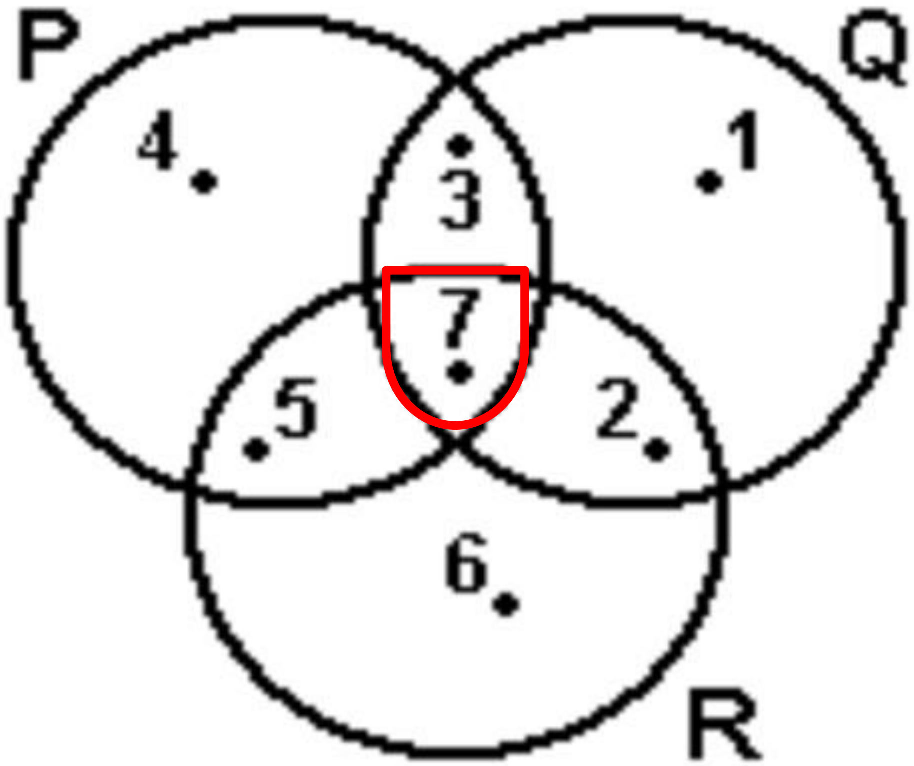
a) P
b) Q
c) R
d) P ∩ Q
e) Q U R
f) P ∩ Q ∩ R



Considere os conjuntos representados pelo diagrama de Venn.

Determine:

a) P
b) Q
c) R
d) P ∩ Q
e) Q U R
f) P ∩ Q ∩ R



Exemplo 2!

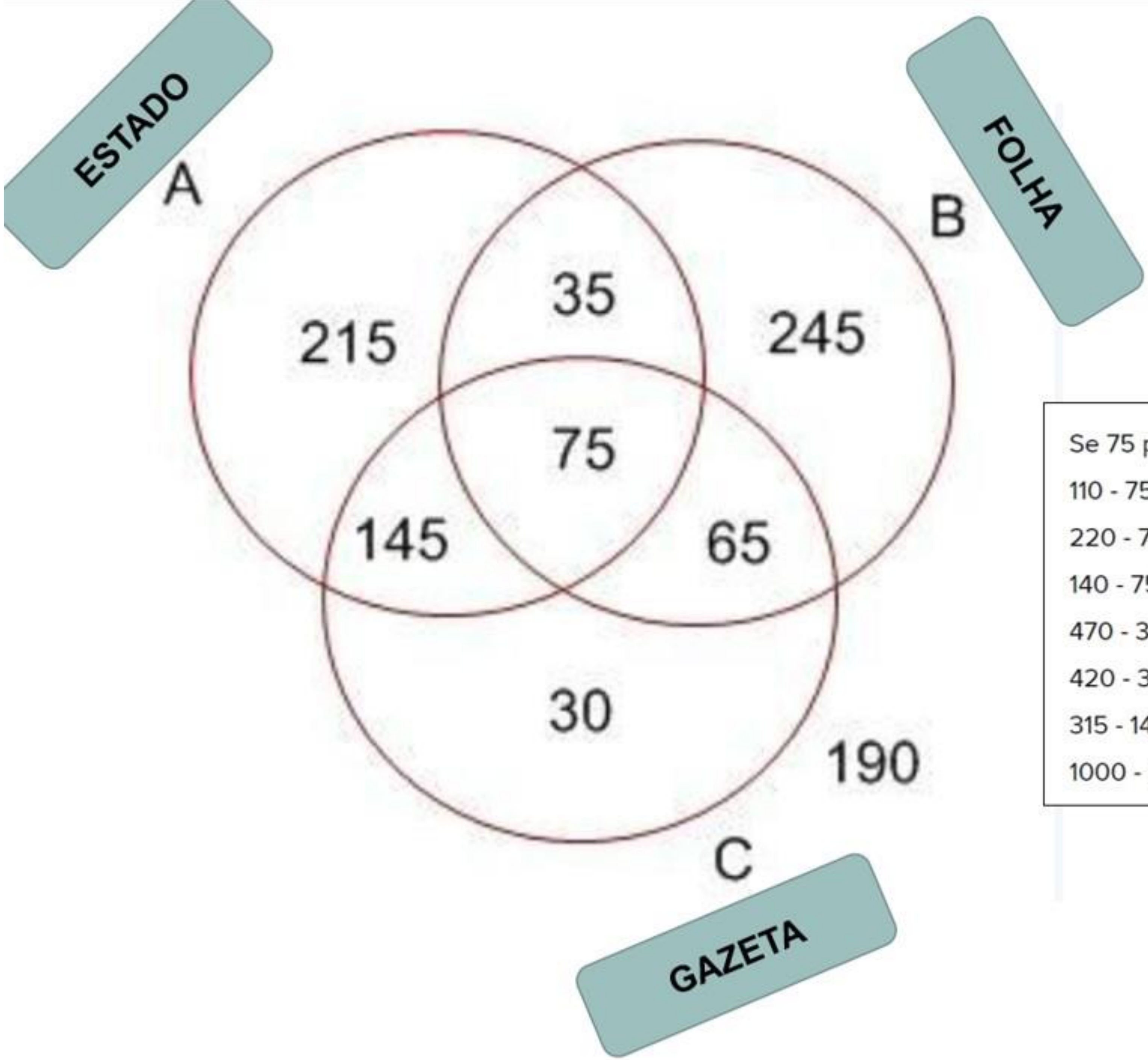
Numa cidade, há 1000 famílias: 470 assinam o Estado ; 420 a Folha ; 315 a Gazeta ; 110 assinam Estado e Folha; 140 assinam a Gazeta e a Folha ; 220, a Gazeta e o Estado ; 75 assinam os três jornais. Pode-se, então, concluir que o número de famílias que não assinam jornal é:

a) 150.

b) 170.

c) 190

d) 210.



Se 75 pessoas assinam os **três jornais**, então:

110 - 75 = 35 assinam **somente A e B**;

220 - 75 = 145 assinam **somente A e C**;

140 - 75 = 65 assinam **somente B e C**;

470 - 35 - 75 - 145 = 215 assinam **somente A**;

420 - 35 - 75 - 65 = 245 assinam **somente B**;

315 - 145 - 75 - 65 = 30 assinam **somente C**;

1000 - 215 - 35 - 245 - 145 - 75 - 65 - 30 = 190 **não assinam os jornais.**

Exemplo 3!

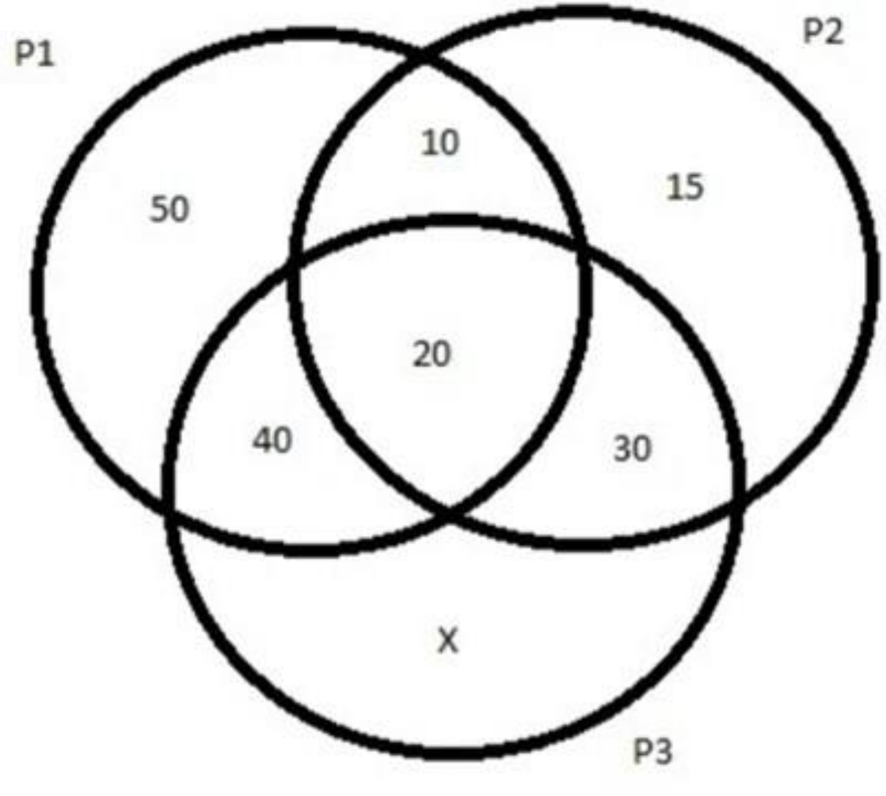
Uma pesquisa de mercado sobre a preferência de 200 consumidores por três produtos P1, P2 e P3 mostrou que, dos entrevistados, 20 consumiam os três produtos; 30 os produtos P1 e P2; 50 os produtos P2 e P3; 60 os produtos P1 e P3; 120 o produto P1; 75 o produto P2.

Se todas as 200 pessoas entrevistadas deram preferência a pelo menos um dos produtos, pergunta-se:

a) Quantas consumiam somente o produto P3?

b) Quantas consumiam pelo menos dois dos produtos?

c) Quantas consumiam os produtos P1 e P2, e não P3?



Temos que 20 consumidores preferem os 3 produtos. Logo, na interseção temos o 20

30 - 20 = 10 ficará na interseção de P1 e P2.
50 - 20 = 30 na interseção entre P2 e P3.
60 - 20 = 40 na interseção entre P1 e P3.

120 consumidores preferem o P1. Logo, 120 - 40 - 20 - 10 = 50 preferem apenas P1

Como 75 consumidores preferem o P2, então 75 - 10 - 20 - 30 = 15 preferem apenas P2.

a) Vamos chamar de x a quantidade de consumidores que preferem apenas o produto P3.

Logo, 200 - (50 + 40 + 20 + 10 + 30 + 15) = 200 -165 = 35 preferem apenas o P3.

b) Pelo menos dois quer dizer que consumiam 2 ou 3.

Logo, 20 + 40 + 10 + 30 = 100 consumidores.

c) Consumir P1 e P2 é a interseção. Portanto, 10 consumidores.