CONJUNTOS NUMÉRICOS

Centro Universitário Senac

TADS

MTI

História

- Contar objetos e ter registros numéricos.
- Abstrair a natureza por meio de processos de determinação de quantidades.
- Primeiro princípio de contagem foi as mãos. Depois pedras, ossos, desenhos.
- E essa procura pela abstração da natureza foi fundamental para a evolução, não só, mas também, dos conjuntos numéricos

Esta Foto de Autor Desconhecido está licenciado em CC BY-NC-ND

CONJUNTO DOS NÚMEROS NATURAIS

Chama-se **conjunto dos números naturais** — símbolo $\mathbb{N}$ — o conjunto formado pelos números 0, 1, 2, 3, ...

$$\boxed{\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}}$$

Observações:

- operações soma e multiplicação estão definidas.
- Como o zero originou-se depois dos outros números e possui algumas propriedades próprias, algumas vezes teremos a necessidade de representar o conjunto dos números naturais sem incluir o zero. Notação:

$$N^* = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, ...\}$$

62. Seja H o conjunto $\{n \in \mathbb{N} \mid 2 \leqslant n \leqslant 40, n \text{ múltiplo de } 2, n \text{ não múltiplo de } 3\}$. Qual é o número de elementos de H?

H = { 2, 4, 8, 10, 14, 16, 20, 22, 26, 28, 32, 34, 38, 40}

n(H) = 14

63. Um subconjunto X de números naturais contém 12 múltiplos de 4, 7 múltiplos de 6, 5 múltiplos de 12 e 8 números ímpares. Qual é o número de elementos de X?

	Sub conjunto X de números naturais (total)			
QUANTDADE	Mult. 4	Mult. 6	Mult. 12	nº impar
1	4	6	12	1
2	8	12	24	3
3	12	18	36	5
4	16	24	48	7
5	20	30	60	9
6	24	36		11
7	28	42		13
8	32			15
9	36			
10	40			
11	44			
12	48			
TOTAL	32 elementos			

	Sub conjunto X de números naturais (total)			
QUANTDADE	Mult. 4	Mult. 6	Mult. 12	nº impar
1	4	6		1
2	8			3
3	12	18		5
4	16			7
5	20	30	60	9
6	24			11
7	28	42		13
8	32			15
9	36			
10	40			
11	44			
12	48			
TOTAL	**25 elementos**			

64. Sendo $A = \{n \mid n = 2p - 1 \text{ e } p \in B\}$, qual é a condição sobre B para que n seja um número natural ímpar?

B = {1,2,3,4,5,6,7,8....} Por tanto: B = N*

CONJUNTO DOS NÚMEROS INTEIROS

Chama-se **conjunto dos números inteiros** — símbolo $\mathbb{Z}$ — o seguinte conjunto:

$$\boxed{\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}}$$

OBS.:

No conjunto $\mathbb{Z}$ distinguimos três subconjuntos notáveis:

$$\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, 3, ...\} = \mathbb{N}$$

(chamado conjunto dos inteiros não negativos);

$$\mathbb{Z}_- = \{0, -1, -2, -3, ...\}$$

(chamado conjunto dos inteiros não positivos);

$$\mathbb{Z}^* = \{..., -3, -2, -1, 1, 2, 3, ...\}$$

(chamado conjunto dos inteiros não nulos).

Uma importante noção que devemos ter sobre números inteiros é o conceito de divisor.

Dizemos que o inteiro *a* é **divisor** do inteiro *b* — símbolo $a \mid b$ — quando existe um inteiro *c* tal que $ca = b$.

$$a \mid b \Leftrightarrow (\exists\, c \in \mathbb{Z} \mid ca = b)$$

Exemplos:

1º)	$2 \mid 12$	pois	$6 \cdot 2 = 12$
2º)	$3 \mid -18$	pois	$(-6) \cdot 3 = -18$
3º)	$-5 \mid 20$	pois	$(-4) \cdot (-5) = 20$
4º)	$-2 \mid -14$	pois	$7 \cdot (-2) = -14$
5º)	$4 \mid 0$	pois	$0 \cdot 4 = 0$
6º)	$0 \mid 0$	pois	$1 \cdot 0 = 0$

Quando *a* é divisor de *b*, dizemos que "*b* é **divisível** por *a*" ou "*b* é **múltiplo** de *a*".

Para um inteiro a qualquer, indicamos com D(a) o conjunto de seus divisores e com M(a) o conjunto de seus múltiplos.

Exemplos:

1º) $D(2) = \{1, -1, 2, -2\}$ $M(2) = \{0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \ldots\}$

2º) $D(-3) = \{1, -1, 3, -3\}$ $M(-3) = \{0, \pm 3, \pm 6, \pm 9, \ldots\}$

3º) $D(0) = \mathbb{Z}$ $M(0) = \{0\}$

Dizemos que um número inteiro p é **primo** quando $p \neq 0, 1$ e -1 e $D(p) = \{1, -1, p, -p\}$.

Exemplos:

$2, -2, 3, -3, 5, -5, 7$ e -7 são primos.

https://www.youtube.com/watch?v=iiLN64j7gWw

Determine os seguintes números inteiros:

a) mdc $(2, 3)$

b) mdc $(-4, 6)$

c) mdc $(-6, -14)$

d) mmc $(2, 3)$

e) mmc $(-4, 6)$

f) mmc $(-6, -14)$

Respostas:

a) ± 1

b) ± 2

c) ± 1

d) ± 6

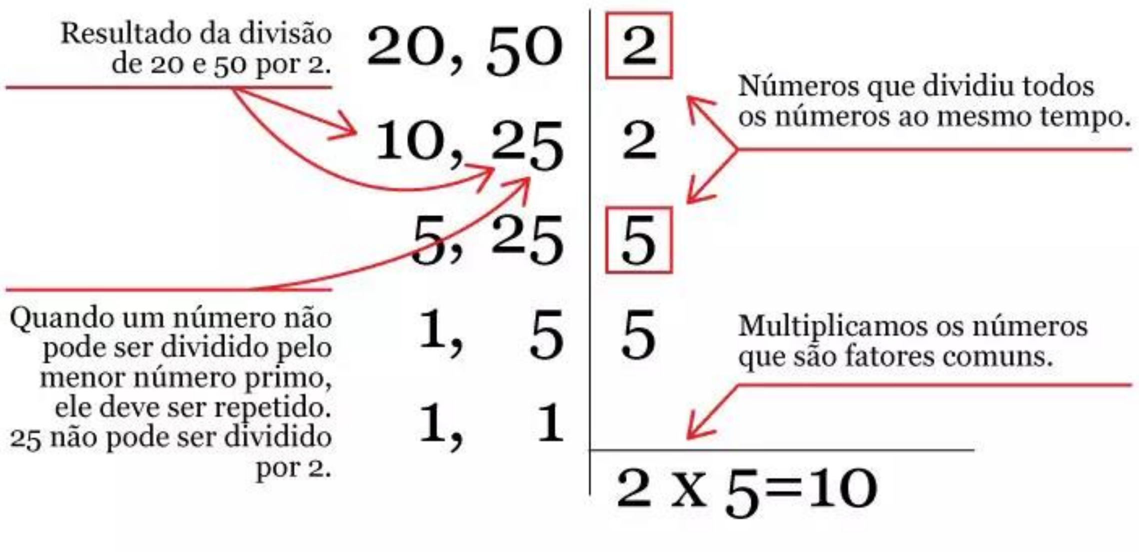
e) ± 12

f) ± 42

https://www.youtube.com/watch?v=krttBn90kh4

Máximo Divisor Comum (mdc)

O maior elemento encontrado na divisão de dois ou mais números naturais



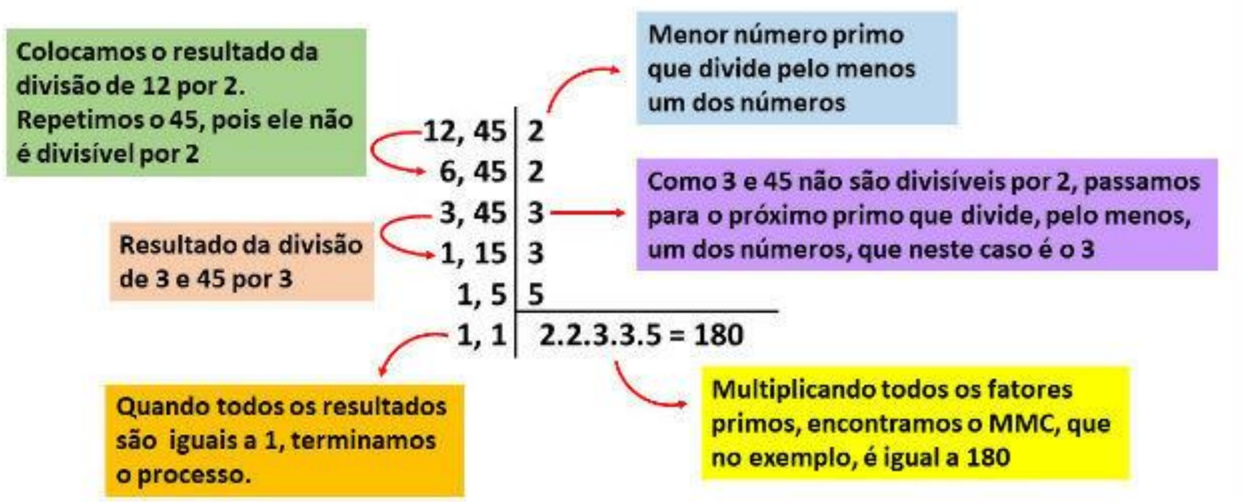
MDC (50 e 20) = 2.5 = 10

(Vunesp) Em um colégio de São Paulo, há 120 alunos na 1.ª série do Ensino Médio, 144 na 2.ª e 60 na 3.ª. Na semana cultural, todos esses alunos serão organizados em equipes, com o mesmo número de elementos, sem que se misturem alunos de séries diferentes. O número máximo de alunos que pode haver em cada equipe é igual a:

a) 7
b) 10
c) 12
d) 28
e) 30

Mínimo Múltiplo Comum (mmc)

O menor número positivo, diferente de 0 (zero), que é múltiplo ao mesmo tempo de dois ou mais números naturais)



MMC (12 e 45) = 180

Três navios fazem viagens entre dois portos. O primeiro a cada 4 dias, o segundo a cada 6 dias e o terceiro a cada 9 dias. Se esses navios partirem juntos, depois de quantos dias voltarão a sair juntos, novamente?

a) 18
b) 24
c) 36
d) 54
e) 216

Conjunto dos Números Racionais

Chama-se **conjunto dos números racionais** — símbolo $\mathbb{Q}$ — o conjunto dos pares ordenados (ou frações) $\frac{a}{b}$, em que $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{Z}^*$, para os quais adotam-se as seguintes definições:

$$Q = \{a/b \mid a, b \in Z \text{ e } b \neq 0\}.$$

1ª) igualdade: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$

2ª) adição: $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$

3ª) multiplicação: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$

No conjunto dos racionais destacamos os subconjuntos:

- $\mathbb{Q}_+$ (conjunto dos racionais não negativos);
- $\mathbb{Q}_-$ (conjunto dos racionais não positivos);
- $\mathbb{Q}^*$ (conjunto dos racionais não nulos).

OBS.:

Todo número racional pode ser escrito em forma de fração.
Exemplos:
- Decimais finitos;
- Dízimas periódicas;
- Raízes exatas;

Representação Decimal

Notemos que todo número racional $\frac{a}{b}$ pode ser representado por um número decimal. Passa-se um número racional $\frac{a}{b}$ para a forma de número decimal dividindo o inteiro *a* pelo inteiro *b*. Na passagem de uma notação para outra podem ocorrer dois casos:

1º) o número decimal tem uma quantidade finita de algarismos, diferentes de zero, isto é, é uma **decimal exata**.

Exemplos:

$$\frac{3}{1} = 3 \qquad \frac{1}{2} = 0,5 \qquad \frac{1}{20} = 0,05 \qquad \frac{27}{1\,000} = 0,027$$

2º) o número decimal tem uma quantidade infinita de algarismos que se repetem periodicamente, isto é, é uma **dízima periódica**.

Exemplos:

$\frac{1}{3} = 0{,}333... = 0{,}\overline{3}$ (período 3)

$\frac{2}{7} = 0{,}285714285714... = 0{,}285714$ (período 285714)

$\frac{11}{6} = 1{,}8333... = 1{,}8\overline{3}$ (período 3)

Podemos notar também que todo número na forma de decimal exata ou de dízima periódica pode ser convertido à forma de fração $\frac{a}{b}$ e, portanto, representa um número racional.

Quando a decimal é exata, podemos transformá-la em uma fração cujo numerador é o numeral decimal sem a vírgula e cujo denominador é o algarismo 1 seguido de tantos zeros quantas forem as casas decimais do numeral dado.

Exemplos:

$$0{,}37 = \frac{37}{100} \qquad 2{,}631 = \frac{2\,631}{1\,000} \qquad 63{,}4598 = \frac{634\,598}{10\,000}$$

Quando a decimal é uma dízima periódica, devemos procurar sua **geratriz**. Damos, a seguir, três exemplos de como obter a geratriz de uma dízima periódica.

Exemplo 1: 0,777...

$$\left.\begin{aligned} x &= 0{,}777\ldots \\ 10x &= 7{,}777\ldots \end{aligned}\right\} \Rightarrow\ 10x - x = 7 \Rightarrow x = \frac{7}{9}$$

então: $0{,}777\ldots = \dfrac{7}{9}$.

Obtenha a geratriz dos seguintes números racionais:

a) 0,32

b) 5,423423423...

a) $0,32$

$$0,32 = \frac{32}{100} \begin{matrix} :2 \\ :2 \end{matrix}$$

$$0,32 = \frac{16}{50} \begin{matrix} :2 \\ :2 \end{matrix}$$

$$0,32 = \frac{8}{25}$$

b) $5,423423423\ldots$

$$\begin{cases} -x = -5,423423\ldots \\ 1000x = 5423,423\ldots \\ \hline 999x = 5418 \end{cases}$$

$$x = \frac{5418}{999} \begin{matrix} :9 \\ :9 \end{matrix} = \frac{602}{111}$$

Tecla quebrada

Usando esta calculadora, como faço para obter o resultado da seguinte conta:

a) 1248 dividido por 5 =

b) 32,21 dividido por 4 =

$$1248 \div 5 = \frac{1248}{5} = 1248 \times \frac{1}{5} = 1248 \times 0{,}20 = 249{,}6$$

$$32{,}21 \div 4 = \frac{32{,}21}{4} = 32{,}21 \times \frac{1}{4} = 32{,}21 \times 0{,}25 = 8{,}0525$$

A pressão P e o volume V de um gás ideal mantido a uma temperatura constante satisfazem a Lei de Boyle descrita como: P x V = constante. Se aumentarmos a pressão em 25%, em quantos porcentos diminuirá o volume deste gás ideal?

$$25\% = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$$

Para um acréscimo de 25% temos:

$$1 + \frac{1}{4} = \frac{4}{4} + \frac{1}{4} = \mathbf{\frac{5}{4}}$$

$$P \times V = valor\ constante\ (y)$$

$$V = \frac{y}{P}$$

$$V = \frac{y}{P \times \frac{5}{4}}$$

$$V = \frac{y}{P} \times \frac{4}{5}$$

$$V = \frac{y}{P} \times 0{,}80$$

$$V = \frac{y}{P} \times \frac{80}{100}$$

$$\boxed{V = \frac{y}{P} \times 80\%}$$

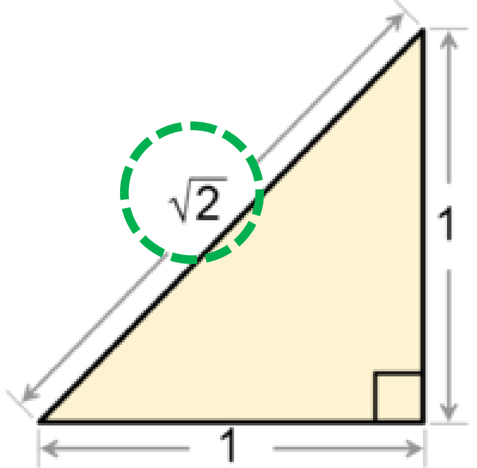
Resposta:
O volume diminuirá 20%

CONJUNTO DOS NÚMEROS IRRACIONAIS

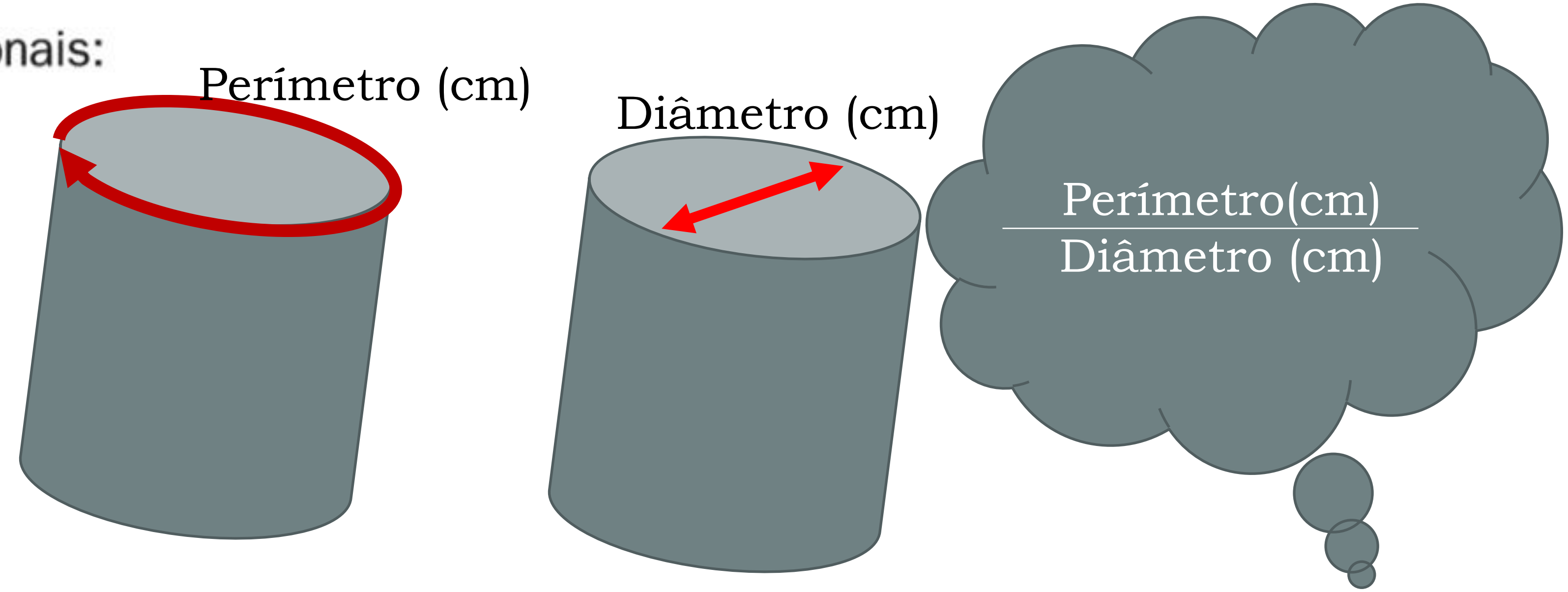
Existem números cuja representação decimal com infinitas casas decimais não é periódica. Por exemplo, o numeral decimal 0,1010010001... (em que o número de algarismos 0 intercalados entre os algarismos 1 vai crescendo) é não periódico. Ele representa um número *não* racional. Ele representa um **número irracional**.

Outros exemplos de números irracionais:

1,234567891011
6,202002000...
34.56789101112...



1,41421 35623 73095 04880 16887 24209 69807 85696 71875 37694 80731 76679 73799...



π = 3,14159265358979323846…

CONJUNTO DOS NÚMEROS REAIS

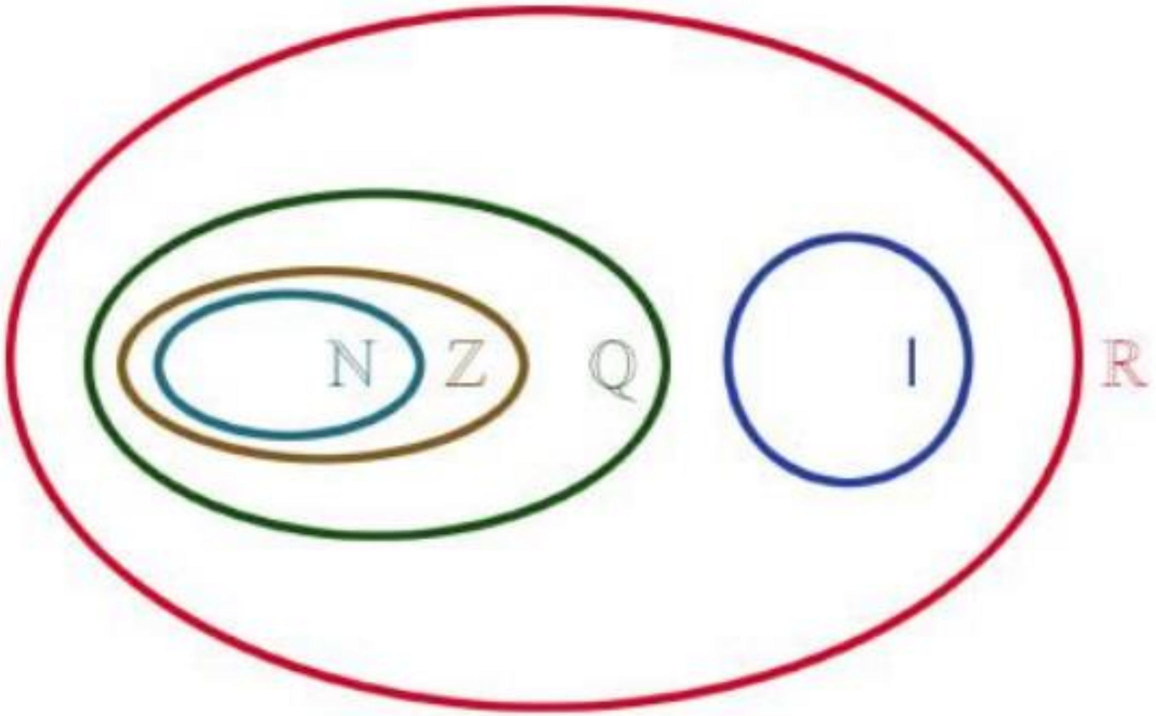
Chama-se **conjunto dos números reais** — símbolo $\mathbb{R}$ — aquele formado por todos os números com representação decimal, isto é, as decimais exatas ou periódicas (que são números racionais) e as decimais não exatas e não periódicas (que são números irracionais).

OBS.:

$\mathbb{R}_+$ (conjunto dos reais não negativos);

$\mathbb{R}_-$ (conjunto dos reais não positivos);

$\mathbb{R}^*$ (conjunto dos reais não nulos).



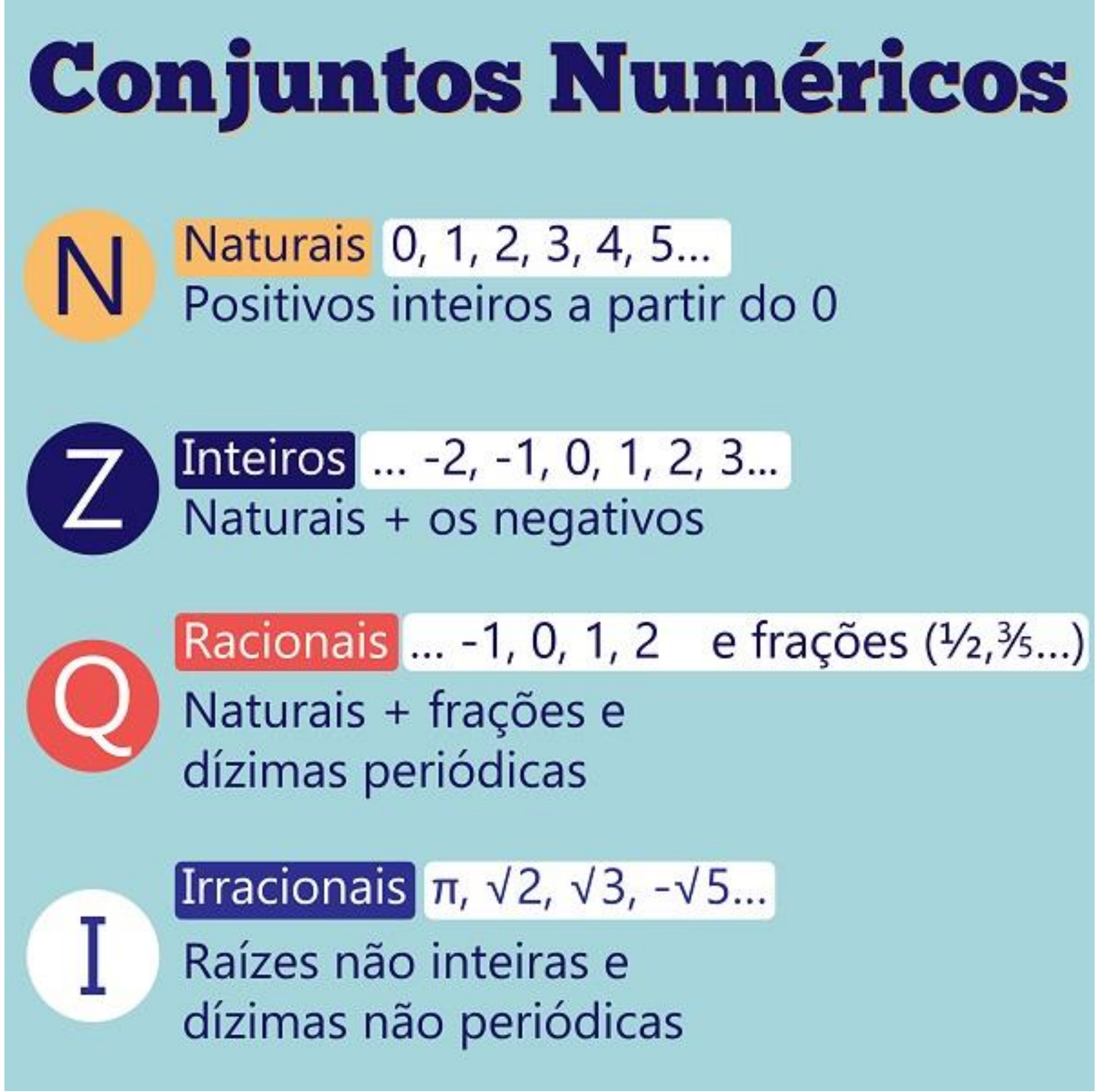
$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$ → N está contido em Z, que está contido em Q e que está contido em R

$\mathbf{I} \subset \mathbf{R}$ → I está contido em R

$\mathbf{Q} \cup \mathbf{I} = R$ → Q união com I, corresponde a R

$\mathbf{Q} \cap \mathbf{I} = \emptyset$ → Q intersecção com I, corresponde a vazio

$\mathbf{I} = \mathbf{R} - \mathbf{Q}$ → I corresponde a R, subtraído de Q



Quais das proposições abaixo são verdadeiras?

a) $3 \in \mathbb{R}$

b) $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$

c) $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$

d) $\frac{1}{2} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$

e) $\sqrt{4} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$

f) $\sqrt[3]{4} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$

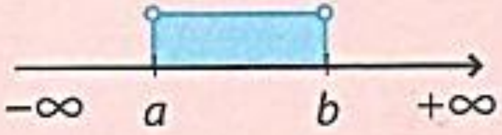
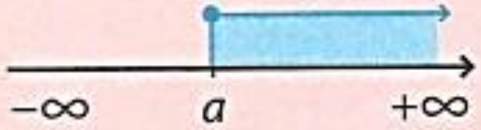
g) $\left(\sqrt{2} - 3\sqrt{3}\right) \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$

h) $\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$

i) $\frac{3\sqrt{2}}{5\sqrt{2}} \in \mathbb{Q}$

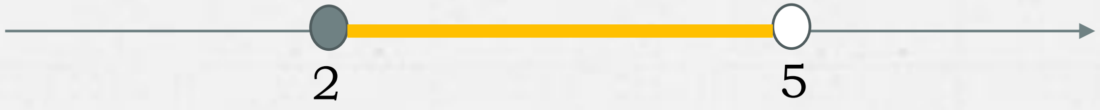
Fonte: IEZZI, G.; MURAKAMI, C. Fundamentos de matemática elementar: conjuntos funções. São Paulo: Atual, 2004. v. 1.

Intervalo de números reais

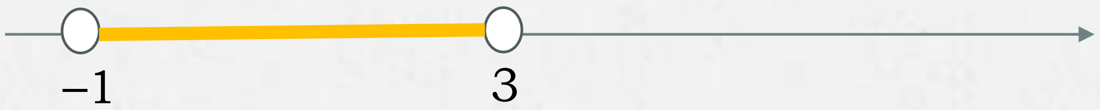
Representação por um intervalo	Representação geométrica	Representação por uma condição	Leitura
$]a, b[$		$\{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$	x maior do que a e menor do que b
$[a, b]$		$\{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x \leqslant b\}$	x maior ou igual a a e menor ou igual a b
$[a, b[$		$\{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x < b\}$	x maior ou igual a a e menor que b
$]a, b]$		$\{x \in \mathbb{R} : a < x \leqslant b\}$	x maior que a e menor ou igual a b
$[a, +\infty[$		$\{x \in \mathbb{R} : x \geqslant a\}$	x maior ou igual a a
$]-\infty, a]$		$\{x \in \mathbb{R} : x \leqslant a\}$	x menor ou igual a a

Representa geometricamente os seguintes intervalos:

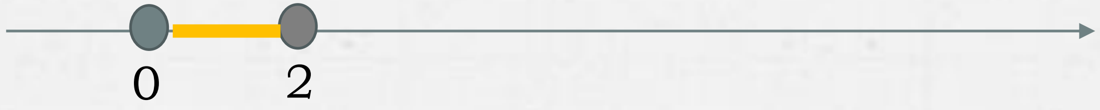
a) [2, 5[



b)]-1, 3[



c) [0, 2]



d)]-∞, 4[

e) [1, +∞[

Representa, sob a forma de intervalo de números reais, os conjuntos definidos pelas seguintes condições:

a) $\{x \in IR: x < 4\}$ $\quad]-\infty\ ,\ 4[$

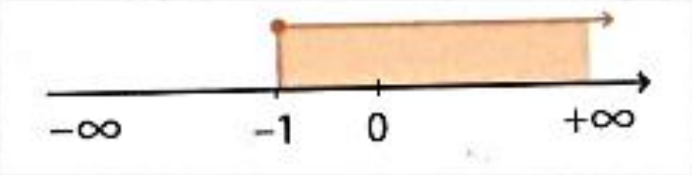
b) $\{x \in IR: x > 0\}$ $\quad]\,0\ ,\ +\infty\,[$

c) $\left\{x \in IR: -1 < x \leq \frac{1}{2}\right\}$ $\quad]-1\ ,\ \frac{1}{2}\,]$

d) $\{x \in IR: 0 \leq x < 2\}$ $\quad [\,0\ ,\ 2\,[$

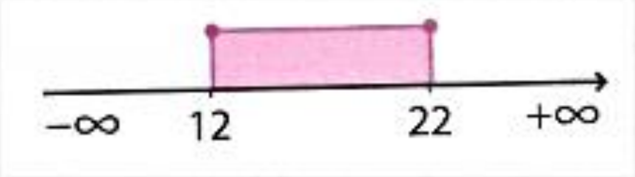
Escreve na forma de intervalo de números reais cada uma das representações geométricas seguintes:

a)



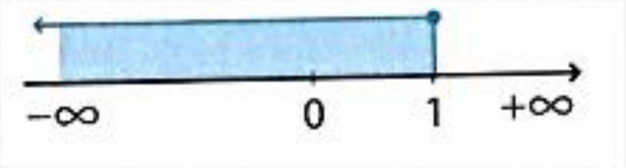
$[-1\ ,\ +\infty\ [$

b)



$[\ 12\ ,\ 22\ ]$

c)



$]-\infty\ ,\ 1\ ]$

d)

$]\ \sqrt{7}\ ,\ +\infty\ [$

e)

$]-\infty\ ,\ 40\ [$