CENTRO UNIVERSITÁRIO SENAC

Tecnologia em Análise de Desenvolvimento de Sistemas

Matemática para Tecnologia de Informação

PROF. SARON

Polinômio = Agrupamento de monômios

Um MONÔMIO, ou um termo algébrico, é uma expressão algébrica inteira composta por uma parte literal e um coeficiente numérico, isto é, por letras e números.

Por exemplo:
$2x$ é um monômio, sendo que **2** é seu coeficiente e **x** é sua parte literal.
$5ab^2$ é um monômio, sendo que **5 é o** coeficiente, e a parte literal é **ab^2**.
xyz é um monômio, sendo que **1** é seu coeficiente e **xyz** é sua parte literal.

Polinômio = Agrupamento de monômios

Um MONÔMIO, ou um termo algébrico, é uma expressão algébrica inteira composta por uma parte literal e um coeficiente numérico, isto é, por letras e números.

Por exemplo:
2x é um monômio, sendo que **2** é seu coeficiente e **x** é sua parte literal.
5ab^2 é um monômio, sendo que **5 é o** coeficiente, e a parte literal é **ab^2**.
xyz é um monômio, sendo que **1** é seu coeficiente e **xyz** é sua parte literal.

1. Efetue as operações com monômios:

a) $a^2 - 6a^2 – 2a^2$

b) $5y^2 - (- 4y^2 + 7y^2) + (- y^2 + 9y^2 - 11y^2)$

c) $(- 7x) . (-3x)$

d) $(-5a^4bc^3) .(-b^2c) . (4a^2c)$

e) $x^7 : x^2$

f) $y^5 : y^3$

Polinômio = Agrupamento de monômios

Um MONÔMIO, ou um termo algébrico, é uma expressão algébrica inteira composta por uma parte literal e um coeficiente numérico, isto é, por letras e números.

Por exemplo:
2x é um monômio, sendo que **2** é seu coeficiente e **x** é sua parte literal.
5ab² é um monômio, sendo que **5 é o** coeficiente, e a parte literal é **ab²**.
xyz é um monômio, sendo que **1** é seu coeficiente e **xyz** é sua parte literal.

1. Efetue as operações com monômios:

a) $a^2 - 6a^2 – 2a^2 = - 7a^2$

b) $5y^2 - (- 4y^2 + 7y^2) + (- y^2 + 9y^2 - 11y^2) = - y^2$

c) $(- 7x) . (-3x) = 21 x^2$

d) $(-5a^4bc^3) .(-b^2c) . (4a^2c) = 20a^6b^3c^5$

e) $x^7 : x^2 = x^5$

f) $y^5 : y^3 = y^2$

Polinômios e Fractais

https://www.youtube.com/watch?v=XQb7GEd7Zgk&t=615s

Conceito

- Um polinômio na variável complexa x é toda expressão P(x) que puder ser reduzida à forma:

$$P(x) = a_n.x^n + a_{n-1}.x^{n-1} + a_{n-2}.x^{n-2} + \ldots + a_1.x^1 + a_0; \text{em que:}$$

$\Rightarrow a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_1, a_0 \rightarrow$ são números reais denominados coeficientes do polinômio;

$\Rightarrow$ as parcelas $\rightarrow a_n.x^n, a_{n-1}.x^{n-1}, a_{n-2}.x^{n-2}, \ldots, a_1.x^1, a_0 \rightarrow$ são os termos do polinômio;

$\Rightarrow$ os expoentes $\rightarrow$ n, n - 1, n - 2,...,1 $\rightarrow$ são números naturais

$$\begin{array}{l} P(x) = a_n.x^n + a_{n-1}.x^{n-1} + a_1.x^1 + a_0 \\ \qquad\qquad \downarrow\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow\downarrow \quad \downarrow \\ P(x) = 5.x^3 - 4 \ .x^2 \ + 7 \ .x \ + 1 \end{array}$$

Grau de um polinômio

- O grau do polinômio não nulo é o maior expoente da variável, tal que o coeficiente do respectivo termos seja diferente de zero.
- Assim, retomando os exemplos, temos:

a) $P(x) = 5x^3 - 4x^2 + 7x + 1$
P é um polinômio de grau 3 na variável x

b) $Q(y) = 3y^4 + 6y^3 + y^2 - 9y + 8$
Q é um polinômio de grau 4 na variável y

c) $R(z) = 9z^{20} - 2$
R é um polinômio de grau 20 na variável z

d) $S(a) = -a^5 + 7a^4 + 10a^2 - 6$
S é um polinômio de grau 5 na variável a

e) $T(b) = 4b - 5$
T é um polinômio de grau 1 na variável b

f) $U(x) = 7$
U é um polinômio de grau 0

Valor numérico

- Conceito – O valor numérico que um polinômio $P(x)$ assume para $x = \alpha$ é o número que se obtém substituindo x por α e efetuando os cálculos necessários.

Valor numérico

- Conceito – O valor numérico que um polinômio P(x) assume para x = α é o número que se obtém substituindo x por α e efetuando os cálculos necessários.
- Calcule o valor de P(7) e P(5):

  $P(x) = x^2 - 6x + 5$

Calcule o valor de P(7) e P(5):

$P(x) = x^2 - 6x + 5$

- Para $x = 7$:

$x = 7 \rightarrow P(7) = 7^2 - 6 \cdot 7 + 5$

$P(7) = 49 - 42 + 5$

$P(7) = 12$

Logo, o valor numérico de $P(x)$ para $x = 7$ é igual a 12.

- Para $x = 5$:

$x = 5 \rightarrow P(5) = 5^2 - 6 \cdot 5 + 5$

$P(5) = 25 - 30 + 5$

$P(5) = 0$

O valor numérico de $P(x)$ para $x = 5$ é igual a 0.

Nesse último caso, dizemos que 5 é raiz (ou zero) de $P(x)$, pois 5 é o valor que anula o polinômio, ou seja, $P(5) = 0$

Valor numérico

- Preste atenção – Se o valor numérico de um polinômio para $x = \alpha$ é igual a zero, dizemos que a é a raiz (ou zero) do polinômio, ou seja:

$$P(\alpha) = 0 \leftrightarrow \text{é raiz (ou zero) de } P(x)$$

Valor numérico

- <u>Preste atenção</u> – Se o valor numérico de um polinômio para $x = \alpha$ é igual a zero, dizemos que a é a raiz (ou zero) do polinômio, ou seja:

$$P(\alpha) = 0 \leftrightarrow \text{é raiz (ou zero) de } P(x)$$

- <u>Para você fazer</u> – Determine o valor do parâmetro k, sabendo-se que 2 é raiz (ou zero) de
- $P(x) = 5x^3 - 6x^2 - kx + 4$

Valor numérico

- Preste atenção – Se o valor numérico de um polinômio para $x = \alpha$ é igual a zero, dizemos que a é a raiz (ou zero) do polinômio, ou seja:

$$P(\alpha) = 0 \leftrightarrow \text{é raiz (ou zero) de } P(x)$$

- Para você fazer – Determine o valor do parâmetro k, sabendo-se que 2 é raiz (ou zero) de
- $P(x) = 5x^3 - 6x^2 - kx + 4$

Se $x = 2$ é raiz de $P(x)$, então $P(2) = 0$:

$0 = 5.2^3 - 6.2^2 - k.2 + 4 \rightarrow 0 = 40 - 24 - 2k + 4 \rightarrow 0 = - 2k +20 \rightarrow$

$\rightarrow 2k = 20 \rightarrow k = 10$

3) Calcule:

a) P(1) onde $P(x) = -4x^2 + 5x + 3$

b) P(1) + P(2) onde $P(x) = -4x^2 + 5x + 3$

c) P(-1) + P(2) onde $P(x) = -4x^2 + 5x + 3$

d) Q(0) onde $Q(x) = 3x^3 - 3x^2 + 5x - 6$

e) Q(1).Q(-1) onde $Q(y) = 7 - y^3 - 6y^2$

f) Q(1)/Q(-1) onde $Q(y) = 7 - y^3 - 6y^2$

Igualdade de polinômios

- Determine os valores de a, b, c e d para que os polinômios
- $P(x) = (a + 1)x^3 + 3x^2 + (c + 2)x + 3$
- $Q(x) = 6x^3 + (b - 4)x^2 + d - 5$; sejam idênticos;

Igualdade de polinômios

- Determine os valores de a, b, c e d para que os polinômios
- $P(x) = (a + 1)x^3 + 3x^2 + (c + 2)x + 3$
- $Q(x) = 6x^3 + (b – 4)x^2 + d – 5$; sejam idênticos;

$$P(x) = Q(x)$$

$$(a+1)x^3 + 3x^2 + (c+2)x + 3 = 6x^3 + (b-4)x^2 + d - 5$$

Igualdade de polinômios

- Determine os valores de a, b, c e d para que os polinômios
- $P(x) = (a + 1)x^3 + 3x^2 + (c + 2)x + 3$
- $Q(x) = 6x^3 + (b – 4)x^2 + d – 5$; sejam idênticos;

$$P(x) = Q(x)$$

$$(a+1)x^3 + 3x^2 + (c+2)x + 3 = 6x^3 + (b-4)x^2 + d - 5$$

$$(a+1) = 6 \rightarrow a = 5$$

$$3 = (b-4) \rightarrow b = 7$$

$$(c+2) = 0 \rightarrow c = -2$$

$$3 = d - 5 \rightarrow d = 8$$

$$Por\tan to$$

$$P(x) = 6x^3 + 3x^2 + 3$$

$$Q(x) = 6x^3 + 3x^2 + 3$$

4) Sejam $P(x) = (m^2 - 4)x^5 + 2x^3 - 5x^2 + (n^3 - 1)x + 1$ e $B(x) = 12x^5 + (q - 5)x^4 + 2x^3 - 5x^2 + 7x + 1$. Determine os valores de m, q e n para que os polinômios sejam idênticos.

Adição e subtração de polinômios Exemplos

Conceito

Assim, dados dois polinômios:

$$P(x) = 7x^4 + 6.x^3 + x^2 - 4x + 9$$

$$Q(x) = -x^3 + 5x^2 - 1, \textit{então}$$

denomina-se soma de P com Q o polinômio:

$$P(x) + Q(x) = (7x^4 + 6.x^3 + x^2 - 4x + 9) + (-x^3 + 5x^2 - 1)$$

$$P(x) + Q(x) = 7x^4 + (6 + (-1))x^3 + (1 + 5)x^2 + (-4x) + (9 + (-1))$$

$$P(x) + Q(x) = 7x^4 + 5x^3 + 6x^2 - 4x + 8$$

denomina-se diferença de P com Q o polinômio:

$$P(x) - Q(x) = (7x^4 + 6.x^3 + x^2 - 4x + 9) - (-x^3 + 5x^2 - 1)$$

$$P(x) - Q(x) = 7x^4 + 6.x^3 + x^2 - 4x + 9 + x^3 - 5x^2 + 1$$

$$P(x) - Q(x) = 7x^4 + 7x^3 - 4x^2 - 4x + 10$$

Multiplicação de polinômios

- A multiplicação entre polinômios é efetuada de acordo com a propriedade de distributiva da multiplicação em relação a adição.
- Observe como podemos efetuar um produto entre dois polinômios:

Sendo :

$P(x) = 2x^3 + 4x^2 + 1$

$Q(x) = x^2 + 5, \textit{então}$

$$P(x)\,.\,Q(x) = (2x^3 + 4x^2 + 1)(x^2 + 5)$$

$$P(x)\,.\,Q(x) = 2x^3.(x^2 + 5) + 4x^2.(x^2 + 5) + 1.(x^2 + 5)$$

$$P(x)\,.\,Q(x) = 2x^5 + 10x^3 + 4x^4 + 20x^2 + x^2 + 5$$

$$\boxed{P(x)\,.\,Q(x) = 2x^5 + 4x^4 + 10x^3 + 21x^2 + 5}$$

Divisão de polinômios

- A divisão entre polinômios pode ser efetuada pelo método da chaves, que consiste no mesmo processo utilizado na divisão de números inteiros.

$$\begin{array}{r|l} 11 & 4 \\ \cline{2-2} \underline{-8} & 2 \\ 3 & \end{array}$$

Na divisão do polinômio $P(x) = x^3 + 7x^2 + 15x + 9$ pelo polinômio $D(x) = x + 1$, P(x) é o dividendo, D(x) é o divisor e o resultado Q(x) é quociente e é obtido da seguinte maneira:

$$\begin{array}{l|l} P(x) & D(x) \\ \hline & Q(x) \end{array}$$

Primeiramente, procure um **monômio** que, multiplicado pelo termo de grau mais alto de D(x), tenha o termo de grau mais alto de P(x) como resultado. Esse monômio é x^2. Encontrando-o, multiplique-o por D(x) e coloque o resultado sob P(x), exatamente como se faz na divisão de números inteiros.

$$\begin{array}{l|l} x^3 + 7x^2 + 15x + 9 & x + 1 \\ \hline & \end{array}$$

Na divisão do polinômio $P(x) = x^3 + 7x^2 + 15x + 9$ pelo polinômio $D(x) = x + 1$, P(x) é o dividendo, D(x) é o divisor e o resultado Q(x) é quociente e é obtido da seguinte maneira:

$$\begin{array}{l|l} P(x) & D(x) \\ \hline & Q(x) \end{array}$$

Primeiramente, procure um **monômio** que, multiplicado pelo termo de grau mais alto de D(x), tenha o termo de grau mais alto de P(x) como resultado. Esse monômio é x^2. Encontrando-o, multiplique-o por D(x) e coloque o resultado sob P(x), exatamente como se faz na divisão de números inteiros.

$$\begin{array}{l|l} x^3 + 7x^2 + 15x + 9 & x + 1 \\ \hline & x^2 \end{array}$$

Na divisão do polinômio $P(x) = x^3 + 7x^2 + 15x + 9$ pelo polinômio $D(x) = x + 1$, P(x) é o dividendo, D(x) é o divisor e o resultado Q(x) é quociente e é obtido da seguinte maneira:

$$\begin{array}{l|l} P(x) & D(x) \\ \hline & Q(x) \end{array}$$

Primeiramente, procure um **monômio** que, multiplicado pelo termo de grau mais alto de D(x), tenha o termo de grau mais alto de P(x) como resultado. Esse monômio é x^2. Encontrando-o, multiplique-o por D(x) e coloque o resultado sob P(x), exatamente como se faz na divisão de números inteiros.

$$\begin{array}{l|l} x^3 + 7x^2 + 15x + 9 & x + 1 \\ \cline{2-2} x^3 + x^2 & x^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} x^3 + 7x^2 + 15x + 9 & x + 1 \\ \hline {\color{red} x^3 + x^2} & x^2 \end{array}$$

O resultado deve ser subtraído de P(x), por isso, os sinais do resultado da multiplicação anterior devem ser trocados.

$$\begin{array}{l|l} x^3 + 7x^2 + 15x + 9 & x + 1 \\ \hline \underline{-x^3 - x^2} & x^2 \\ 0 + 6x^2 + 15x + 9 & \end{array}$$

Repita o procedimento até que o resto possua grau menor que D(x)

$$
\begin{array}{rl}
x^3 + 7x^2 + 15x + 9 & \underline{\big|\, x + 1 \qquad} \\
\underline{-x^3 - x^2 \qquad\qquad\quad} & x^2 + 6x + 9 \\
0 + 6x^2 + 15x + 9 & \\
\underline{-6x^2 - 6x \quad} & \\
0 \;+\; 9x + 9 & \\
\underline{-9x - 9} & \\
0 &
\end{array}
$$

Divisão de polinômios

- Compare a divisão entre inteiros com a divisão entre polinômios e observe que o procedimento é análogo.
- Vamos dividir o polinômio $P(x) = 7x^3 - 6x^2 + 5x - 2$ por $D(x) = x^2 + 1$, utilizando o método da chaves:

$$
\begin{array}{rrrr|l}
7x^3 & -6x^2 & +5x & -2 & x^2+1 \\
\cline{5-5}
-7x^3 & & -7x & & 7x-6 \\
\hline
 & -6x^2 & -2x & -2 & \\
 & +6x^2 & & +6 & \\
\hline
 & & -2x & +4 &
\end{array}
$$

$$\boxed{Q(x) = 7x - 6}$$

$$\boxed{R(x) = -2x + 4}$$

$$P(x) = D(x).Q(x) + R(x)$$

$$7x^3 - 6x^2 + 5x - 2 = (x^2 + 1).(7x - 6) + (-2x + 4)$$

Divisão de Polinômio

5
MIN

Utilizando-se do método das chaves, responda:

a) Quais são os polinômios quociente e resto da divisão de:
$P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ por $D(x) = x - 3$?

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 \quad \underline{|\ x - 3\quad}$$

$$\boxed{P(x) = D(x).Q(x) + R(x)}$$

Divisão de Polinômio

Utilizando-se do método das chaves, responda:

a) Quais são os polinômios quociente e resto da divisão de:
$P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ por $D(x) = x - 3$?

$$
\begin{array}{r|l}
x^3 - 6x^2 + 11x - 6 & x - 3 \\
\cline{2-2}
-x^3 + 3x^2 \qquad\qquad & x^2 - 3x + 2 \\
\cline{1-1}
-3x^2 + 11x \qquad & \\
+3x^2 - 9x \qquad & \\
\cline{1-1}
+2x - 6 & \\
-2x + 6 & \\
\cline{1-1}
0x + 0 &
\end{array}
$$

$$P(x) = D(x).Q(x) + R(x)$$

Logo, temos $Q(x) = x^2 - 3x + 2$ e $R(x) = 0$

Caso queira mais um reforço na parte divisão polinomial...
https://www.youtube.com/watch?v=DHIdwXXVUj0&t=726s

Efetue as operações com polinômios:

a) $(16x - 7y + 4z) + (-8y + 3z - 9x)$

b) $(2x^3 - 3x^2y + 5xy^2 - 6y^3) - (7x^2 - 5x^3 + y^3 - 6xy^2)$

c) $(x + 7) \cdot (x + 5)$

d) $(y - 6) \cdot (y + 5)$

e) $(-28x^4 + 8x^2) : (4x^2)$

f) $(5x^4 + 3x^3 - 9x^2) : (3x^2)$

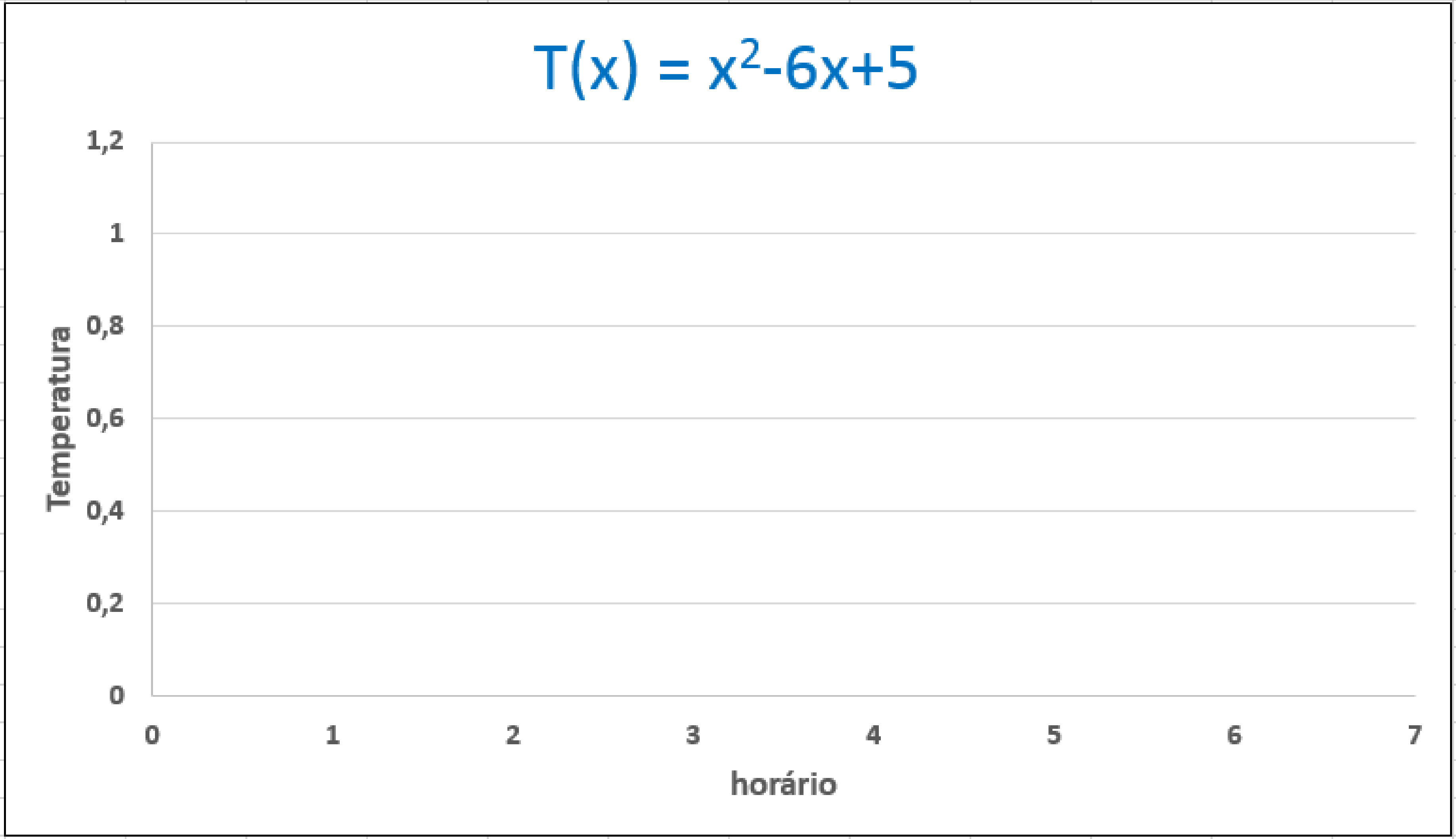
Situação problema

- Em determinadas épocas do ano, algumas cidades brasileiras apresentam temperaturas abaixo de zero grau Celsius.
- Esse é o caso, por exemplo, de São Joaquim – SC.
- Suponha que, em uma cidade, a variação da temperatura T, no decorrer do dia, esteja relacionada ao correspondente instante (ou horário) de medição x, por meio do polinômio:

$$T(x) = x^2 - 6x + 5, \text{ em que } 0 \leq x \leq 7$$

Utilização de Polinômios...

x	$T(x)= x^2-6x+5$
0	
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	



Situação problema

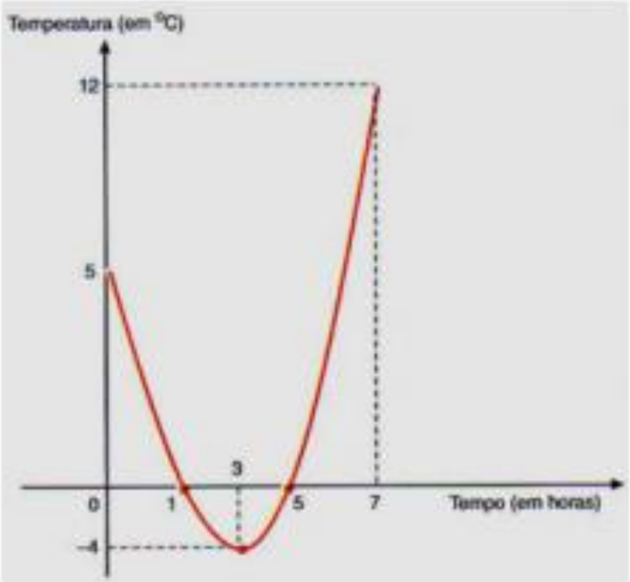
- Se não pudéssemos fazer uso do gráfico, também poderíamos responder às questões anteriores.

  $T(x) = x^2 - 6x + 5$
- Horários em que a temperatura foi igual a 0ºC: $T(x) = 0 \rightarrow x^2 - 6x + 5 = 0 \rightarrow x = 1$ hora ou $x = 5$ horas.
- Temperatura mais baixa e horário em que ela ocorreu: média entre os horários em que a temperatura for igual a 0ºC:

$$x = \frac{1+5}{2} \rightarrow x = 3 horas$$

$T(3) = 3^2 - 6.3 + 5 = -4$ºC (mais baixa)

- Temperatura às 7 horas: $T(7) = 7^2 - 6.7 + 5 = 12$ºC



Utilização de Polinômios...

https://www.youtube.com/watch?v=f7ED1pDFlng

Teoria do caos

https://www.youtube.com/watch?v=EOvLhZPevm0