Aula 3 – Sistemas de Múltiplos Graus de Liberdade (MGL): Análise Modal e Superposição

1. Equações de movimento em forma matricial Estruturas reais (pórticos, treliças, lajes) possuem vários graus de liberdade. No domínio linear, modelamos como:

$$\mathbf{M}\,\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\,\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\,\mathbf{u} = \mathbf{p}(t)$$

onde $\mathbf{M}$ é a matriz de massa, $\mathbf{C}$ a matriz de amortecimento, $\mathbf{K}$ a matriz de rigidez e $\mathbf{u}(t)$ o vetor de deslocamentos generalizados.

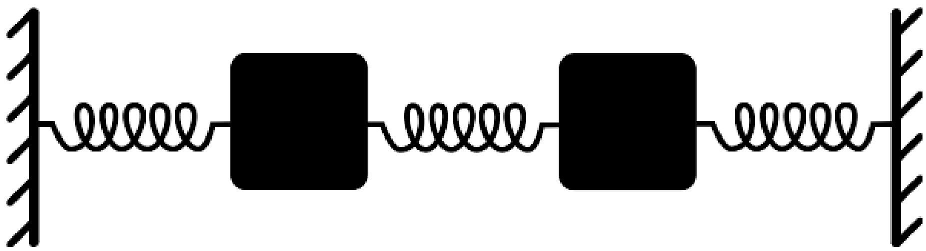

Figure 1: Osciladores acoplados (MGL) – diagrama conceitual

2. Autovalores e autovetores: modos próprios Desprezando o amortecimento para a análise modal clássica ($\mathbf{C} = \mathbf{0}$) e assumindo solução livre $\mathbf{u}(t) = \phi\, e^{i\omega t}$, obtemos o problema de autovalor generalizado:

$$(\mathbf{K} - \omega^2\,\mathbf{M})\,\phi = \mathbf{0}$$

Cada autovalor ω_n^2 produz uma frequência natural ω_n e um autovetor $\phi^{(n)}$ (forma modal). Propriedades úteis: - Ortogonalidade com massa: $\phi^{(m)T}\,\mathbf{M}\,\phi^{(n)} = 0$ para $m \neq n$. - Ortogonalidade com rigidez: $\phi^{(m)T}\,\mathbf{K}\,\phi^{(n)} = 0$ para $m \neq n$. - Normalização por massa unitária: escolher $\phi^{(n)T}\,\mathbf{M}\,\phi^{(n)} = 1$.

Visualmente, formas modais representam "padrões" de vibração. Exemplos ilustrativos:

Modos de vibração de uma membrana (analogia visual)

Figure 2: Modos de vibração de uma membrana (analogia visual)

3. Coordenadas modais, fatores de participação e massas modais Expanda a resposta como combinação dos modos:

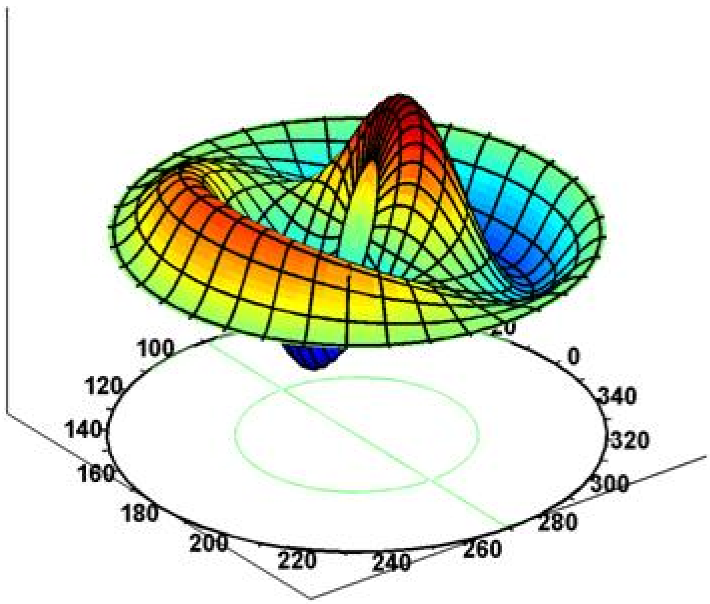

Figure 3: Forma modal de prato circular com linhas nodais

Viga em balanço excitada no modo 2 (exemplo)

Figure 4: Viga em balanço excitada no modo 2 (exemplo)

$\mathbf{u}(t) = \sum_{n=1}^{N} \phi^{(n)} q_n(t)$. Substituindo nas equações e usando ortogonalidade, desacoplamos o sistema em N EDOs escalares para as coordenadas modais $q_n(t)$.

Fator de participação Γ_n mede o quanto a excitação generalizada "projeta" no modo n. A massa modal efetiva associada indica a fração de massa total mobilizada por cada modo. Na prática, escolhemos modos até acumular, por exemplo, >90% de massa efetiva em cada direção.

4. Superposição modal e truncamento; combinações SRSS/CQC Após obter $q_n(t)$ (por resposta harmônica, espectral ou histórico temporal), reconstruímos $\mathbf{u}(t)$ por superposição. Para esforços solicitantes no domínio sísmico (espectro elástico), combina-se contribuições modais via: - SRSS (square root of sum of squares), adequado para modos bem separados. - CQC (complete quadratic combination), mais acurado quando há acoplamento/atrito modal por frequências próximas e amortecimento.

Referência visual para espectros de resposta (sísmico):

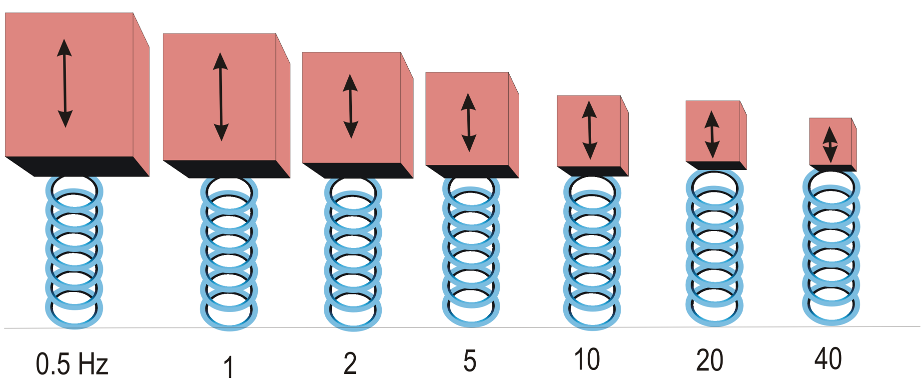

Figure 5: Exemplo de espectro de resposta – deslocamento/velocidade/aceleração

5. Exemplo numérico resumido (2 GDL) Considere um sistema de 2 massas ligadas por molas (como no diagrama de osciladores acoplados). Dados $\mathbf{M} = \mathrm{diag}(m, m)$ e $\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}$. Resolva $\det(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) = 0$ para obter ω_1, ω_2 e os vetores $\phi^{(1)}, \phi^{(2)}$. Em seguida, normalize por massa e calcule Γ_n para uma excitação uniforme $\mathbf{p}(t) = [p\ p]^T \sin \omega t$.

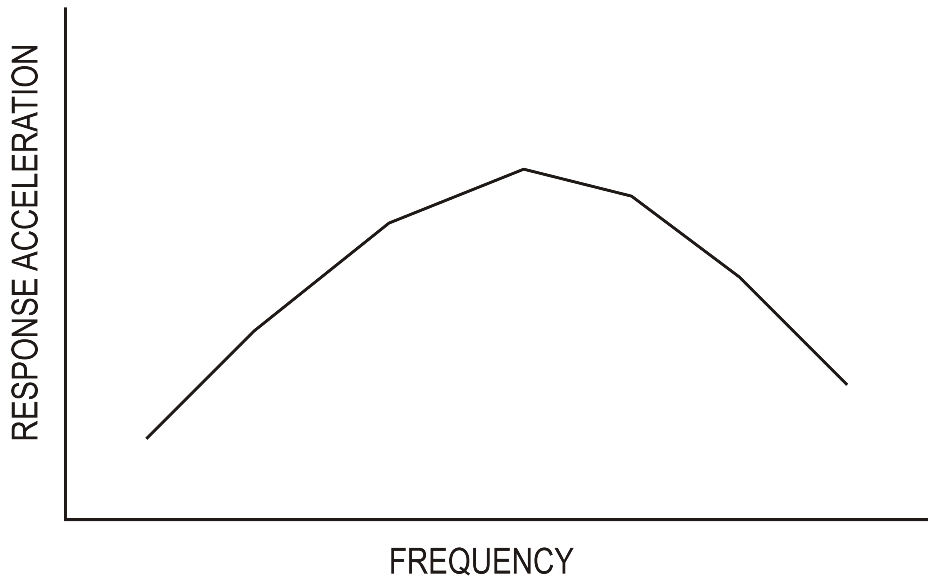

Figure 6: Curvas espectrais complementares

Discussão: o primeiro modo tem massas em fase; o segundo, fora de fase. A excitação "uniforme" tende a participar mais do primeiro modo.

6. Conforto em pisos e diretrizes práticas Além de verificação de resistência, verifique vibração e conforto (aceleração RMS, faixas de frequência) conforme normas e guias de projeto. Em pavimentos de concreto com academias ou escritórios, garanta frequência natural fora das faixas críticas de atividade e avalie amortecimento adicional via elementos não estruturais.

Checklist rápido: - Extraia ω_n, $\phi^{(n)}$, Γ_n e massas modais efetivas. - Trunque quando a massa efetiva acumulada for suficiente para o fenômeno de interesse. - Em análise sísmica, use espectro de projeto e combine por SRSS/CQC. - Para vento/maquinário, cheque transmissibilidade e evite coincidência f_força $\approx f_n$ relevante.

7. Atividade prática sugerida Observe um edifício ou estrutura de concreto em seu cotidiano (pode ser o prédio da faculdade, um viaduto, passarela, etc.). Identifique situações em que vibrações podem ser percebidas (ex: pessoas caminhando em passarelas, veículos passando em pontes, máquinas funcionando em lajes). Anote: - O tipo de estrutura observada e o local. - O que pode causar vibração naquele elemento (tráfego, vento, máquinas, etc.). - Se é possível perceber vibrações (pelo tato, objetos tremendo, ruídos, etc.). - Discuta, com base no conteúdo da aula, por que algumas estruturas vibram mais que outras e como fatores como massa, rigidez e amortecimento podem influenciar essa percepção. Se possível, tire uma foto (opcional) e anexe ao seu relatório.

8. Pontos-chave

- MGL se resolvem eficientemente por análise modal; modos desacoplam a dinâmica.
- Fatores de participação e massas modais guiam truncamento e interpretação física.
- SRSS/CQC são essenciais para combinar respostas modais sob excitação sísmica.