

Aula 2 - Excitação Harmônica, Ressonância e Amortecimento

1. Força Dinâmica Harmônica: conceito e equação de movimento Quando uma estrutura sofre a ação de uma força que varia no tempo de forma periódica, dizemos que está sob excitação harmônica. Para um sistema de 1 GDL, a equação diferencial é:

$$M \ddot{u}(t) + c \dot{u}(t) + k u(t) = p_0 \sin(\omega t)$$

onde M é a massa equivalente, c o amortecimento viscoso, k a rigidez, p_0 a amplitude da força e ω a frequência de excitação.

Definimos ainda: - Frequência natural: $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{M}}$ e $f_n = \frac{\omega_n}{2\pi}$ - Razão de amortecimento: $\zeta = \frac{c}{2\sqrt{kM}}$ - Razão de frequência: $r = \frac{\omega}{\omega_n}$

2. Resposta em regime permanente e fator de amplificação A resposta após o transitório é harmônica com a mesma frequência da excitação, mas com amplitude e fase diferentes. A amplitude U do deslocamento em regime permanente é:

$$U = \frac{p_0/k}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}} \Rightarrow \text{FA} = \frac{U}{p_0/k}$$

O ângulo de fase φ entre a força e o deslocamento é:

$$\tan \varphi = \frac{2\zeta r}{1-r^2}$$

Observações práticas em estruturas de concreto: - Para $r \ll 1$, o comportamento é quase estático (FA ≈ 1). - Perto de $r = 1$ (ressonância), o amortecimento controla a amplitude. Em concreto armado, ζ típico está entre 2% e 5%. - Para $r \gg 1$, o deslocamento decai, mas a resposta de aceleração pode crescer.

3. Exemplo numérico aplicado Considere um pórtico representado por $M = 10\,000$ kg, $k = 2 \times 10^7$ N/m e $\zeta = 5\%$. Uma força dinâmica $p_0 = 10\,000$ N atua com $\omega = \omega_n$.

- $\omega_n = \sqrt{k/M} = \sqrt{2 \times 10^7 / 10^4} = \sqrt{2000} \approx 44,72$ rad/s, $f_n \approx 7,12$ Hz
- Em ressonância ($r = 1$), $\text{FA} = \frac{1}{2\zeta} = \frac{1}{0,10} = 10$
- Deslocamento estático $= p_0/k = 10,000 / 2 \times 10^7 = 5 \times 10^{-4}$ m
- Deslocamento dinâmico $U = 10 \times 5 \times 10^{-4} = 5 \times 10^{-3}$ m = 5 mm

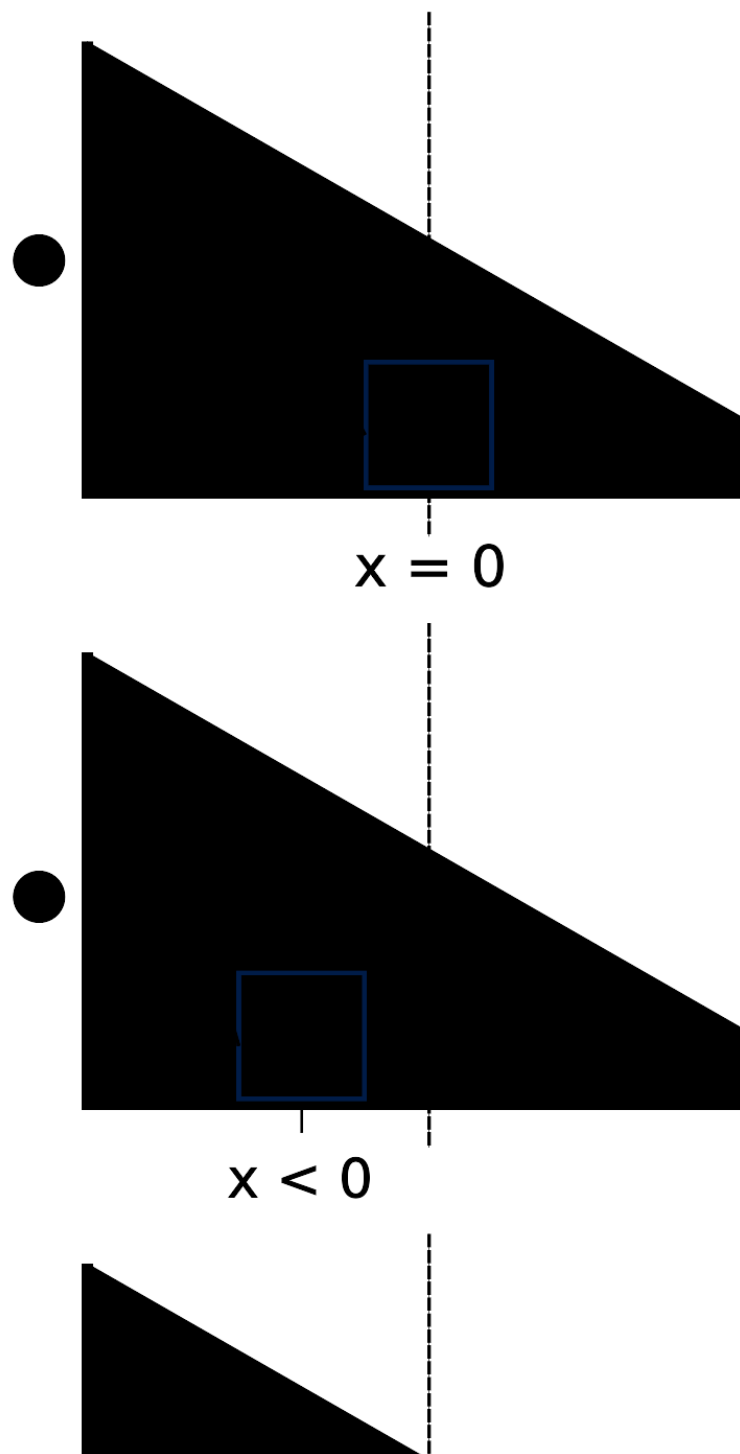


Figure 1: Oscilador harmônico sob força senoidal

Conclusão: um leve amortecimento limita a amplitude, mas perto da ressonância ainda ocorrem deslocamentos significativamente maiores que os estáticos.

4. Excitação por base (sismos e máquinas) Quando a base se move, como em um sismo, a entrada é um deslocamento de base $y(t)$ e a variável de interesse é o deslocamento relativo $u_r(t)$ da massa em relação à base.

$$M \ddot{u}_r + c \dot{u}_r + k u_r = -M \ddot{y}(t)$$

Ideias-chave: - Em análise sísmica, trabalhamos com espectros de resposta (deslocamento, velocidade, pseudo-aceleração). O pico de pseudo-aceleração S_a aproxima a força inercial máxima $F_{in} \approx M S_a$. - Para máquinas, isoladores (molas e amortecedores) são projetados para operar com $r > \sqrt{2}$ visando reduzir transmissibilidade de forças ao apoio.

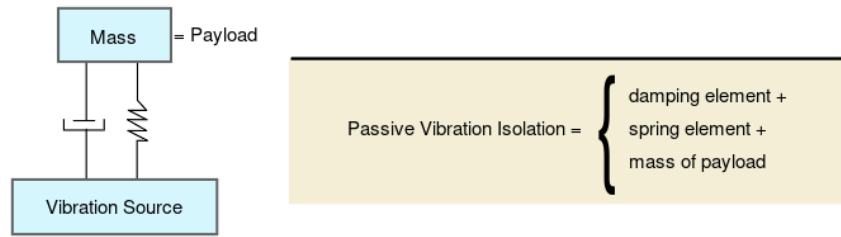


Figure 2: Esquema de isolamento/base excitada

5. Vento, desprendimento de vórtices e pilares esbeltos Além de rajadas aleatórias, o vento pode induzir vibrações por desprendimento periódico de vórtices. A frequência de shedding f_s é estimada por $f_s = St \frac{U}{D}$, com $St \approx 0,2$ para seções circulares, U a velocidade do vento e D a dimensão característica. Evite $f_s \approx f_n$ para não excitar ressonância transversal em pilares e mastros.

Medidas de projeto: - Ajustar rigidez e massa para deslocar f_n . - Aumentar amortecimento com dispositivos ou detalhes construtivos. - Usar chanfros, aletas ou rugosidade para alterar o escoamento e reduzir St efetivo.

6. Boas práticas e checklist de projeto

- Identificar ω_n , ζ e principais fontes de excitação (sismo, vento, máquinas, tráfego).
- Verificar razão r para cenários críticos; se $r \approx 1$, avaliar FA e respostas de deslocamento/aceleração.
- Para equipamentos sensíveis, checar transmissibilidade e adotar isolamento quando necessário.
- Considerar limites de conforto ao invés de apenas resistência (vibração de pisos, passarelas, escritórios).

7. Atividade prática sugerida Observe uma estrutura de concreto do seu cotidiano (prédio, ponte, passarela, laje, etc.) e procure identificar situações em que vibrações podem ser percebidas (ex: pessoas pulando em lajes, veículos passando em pontes, máquinas funcionando próximas a estruturas). Anote: - O tipo de estrutura e o local observado. - O que pode causar vibração naquele elemento (tráfego, vento, máquinas, etc.). - Se é possível perceber vibrações (pelo tato, objetos tremendo, ruídos, etc.). - Relacione, com base no conteúdo da aula, como fatores como frequência natural, ressonância e amortecimento podem influenciar a vibração percebida. Se possível, tire uma foto (opcional) e anexe ao seu relatório.

8. Pontos-chave

- A ressonância ocorre quando $\omega \approx \omega_n$ e o amortecimento controla a amplitude máxima.
- Excitação por base (sísmica) acopla a resposta à aceleração do terreno; o uso de espectros facilita o dimensionamento.
- Em pilares esbeltos, verificar efeitos de vento e shedding para evitar vibrações excessivas e fadiga.