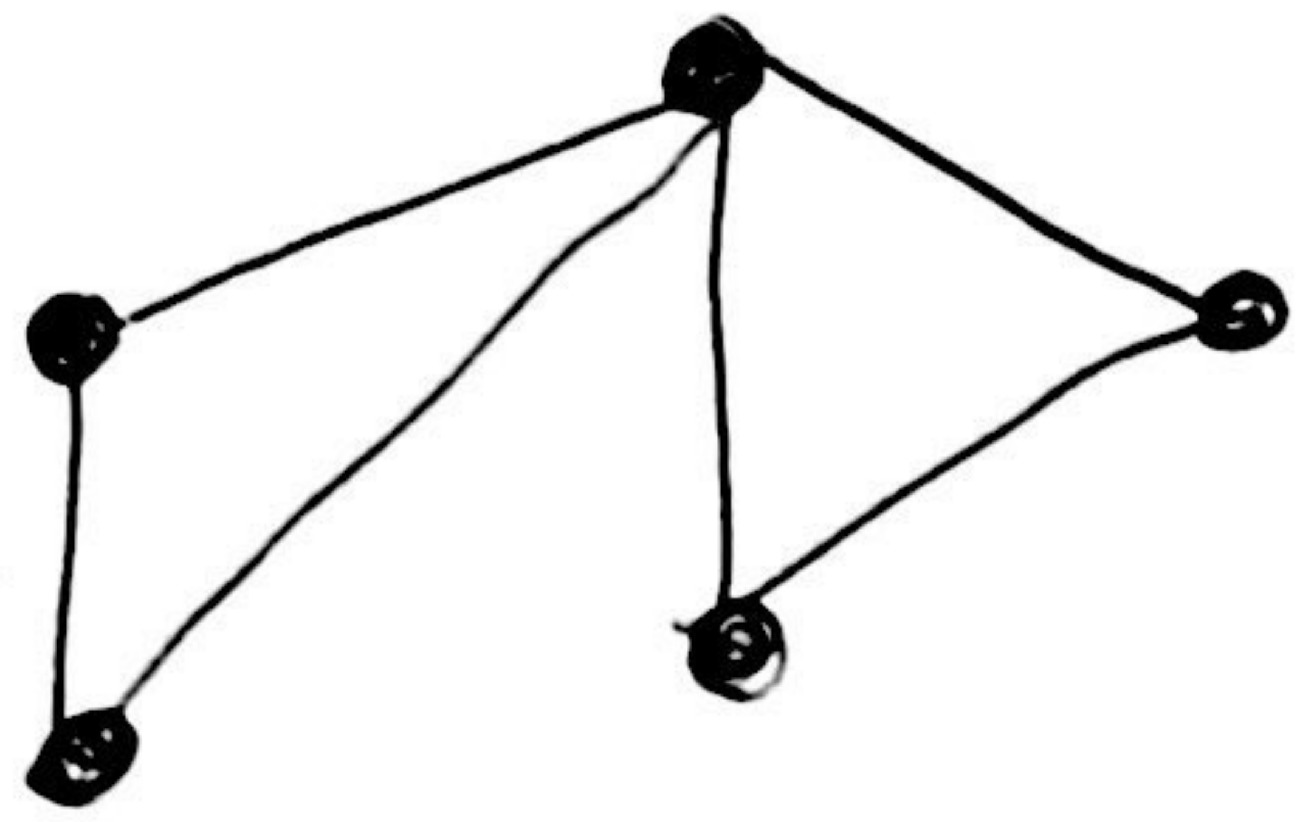
Sistemas Complexos

→ REDES COMPLEXAS

→ REDES (GRAFOS)



↳ NÓS / VÉRTICES

→ ARESTAS / LINKS / LIGAÇÕES

→ REDES SOCIAIS

- ↳ AMIGOS
- ↳ FAMÍLIAS (ÁRVORE GENEALÓGICA)
- ↳ CONTATOS SEXUAIS
- ↳ REDES VIRTUAIS
  - ↳ WHATSAPP, INSTAGRAM, TWITTER
- ↳ REDES COLABORAÇÃO EM ARTIGOS (AUTORIA DE ARTIGOS)
- ↳ COLABORAÇÃO EM FILMES

- REDES DE CONHECIMENTO

↳ www (world wide web)
  - nós - páginas
  - arestas - links

↳ SINÔNIMOS → PALAVRAS

REDES TECNOLÓGICAS

↳ TRANSPORTES

↳ TELECOMUNICAÇÕES

↳ ECONÔMICAS

REDES BIOLÓGICAS

↳ CADEIA ALIMENTAR

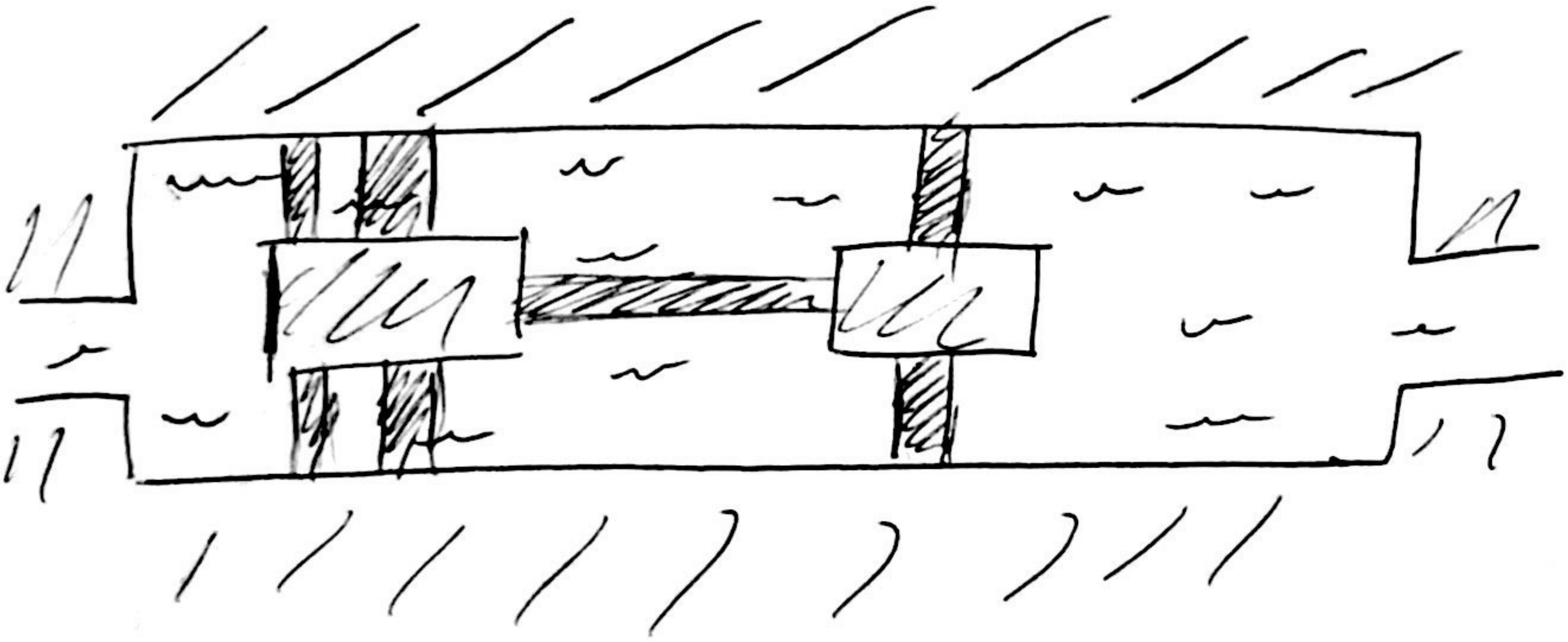
↳ REDES NEURAIS

↳ REDES DE PROTEÍNAS

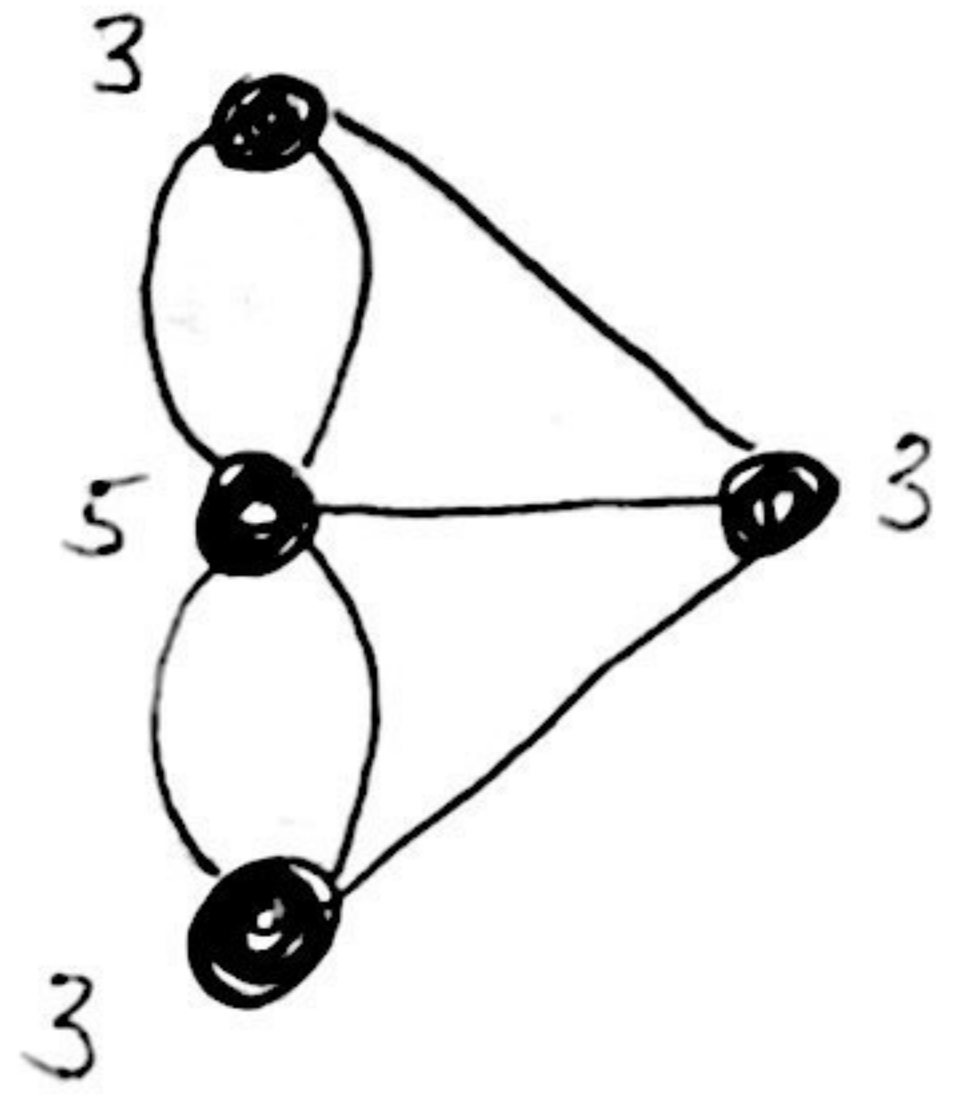
↳ REDES METABÓLICAS

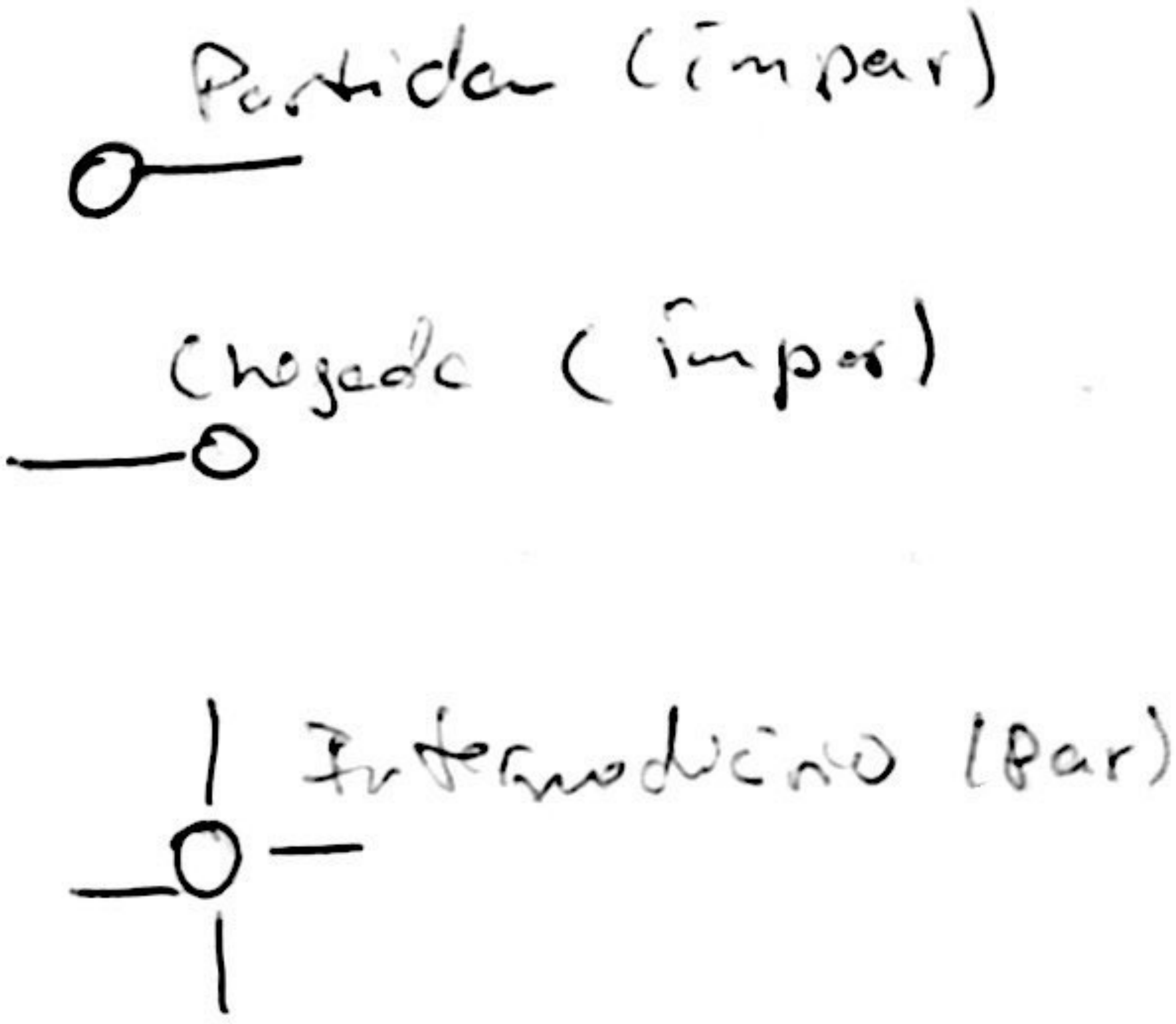
TEMOS REDES ESTÁTICAS COMO AS DE PROTEÍNAS / METABÓLICAS, MAS A MAIORIA É ABERTA E CRESCE / EVOLUI

Euler → problema das 7 pontes
1735

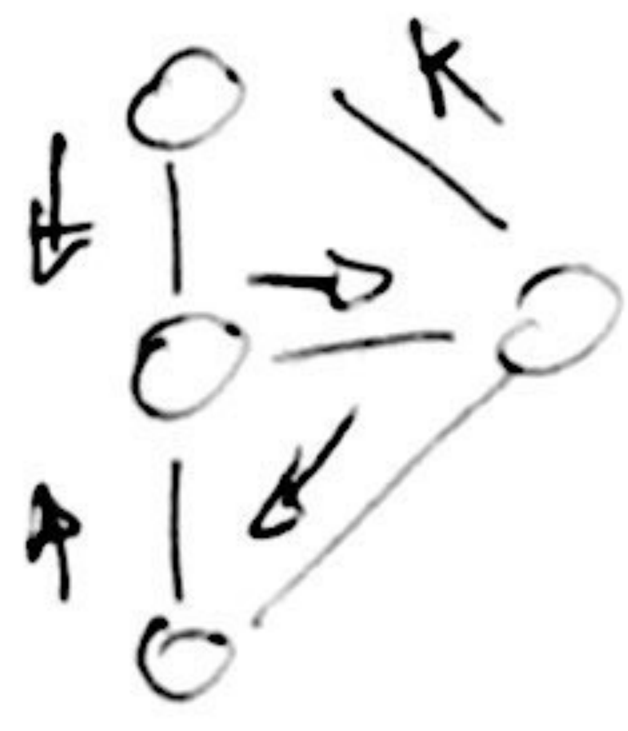


↓





Hoje:



COMO CARACTERIZAMOS UMA REDE?

→ TAMANHO: (NÓS, ARESTAS)

→ GRAU

→ DISTÂNCIA

→ AGRUPAMENTO / CLUSTERS

→ COMO SURGE? UMA REDE COM UMA DETERMINADA TOPOLOGIA / COMO EVOLUI? / QUAIS PROPRIEDADES / CARACTERÍSTICAS TOPOLÓGICAS

→ QUAL A RELAÇÃO ENTRE A ESTRUTURA E FUNÇÃO.

→ PORQUE REDES DE NATUREZAS DISTINTAS TEM PROPRIEDADES SEMELHANTES?

PALAVRAS-CHAVES

- CAPACIDADE
- ROBUSTEZ / VULNERABILIDADE À ATAQUES
- SINCRONIA / SINCRONISMO
- PROPAGAÇÃO DE INFORMAÇÃO / DOENÇAS
- PREVISIBILIDADE

CONTAS ↗

Grafo

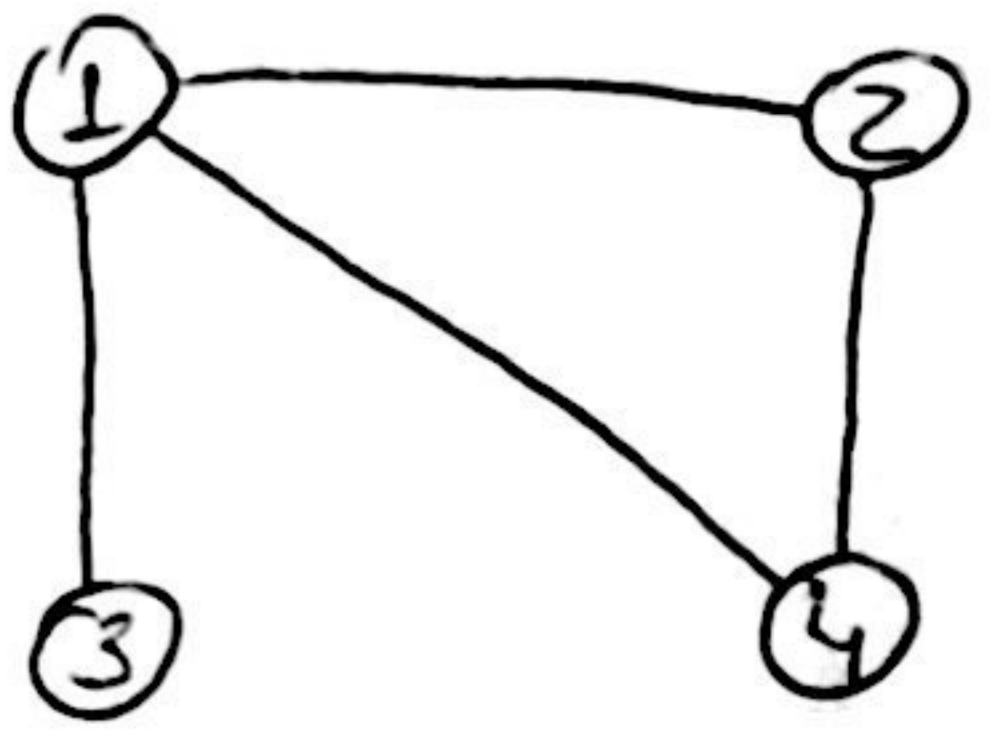
$G = (V, A)$

NÓS ARESTAS

$|V| = N$: número de nós

$|A| = M$: número de arestas

exemplo:



$N = 4$

$M = 4$

$V = \{1, 2, 3, 4\}$

$A = \{(1,2), (1,3), (1,4), (2,4)\}$

os nós i e j são adjacentes se $a = (i,j) \in A$

aresta que conecta i e j.

- no exemplo 1 e 2 são adjacentes pois $(1,2) \in A$
- (3,4) não são adjacentes pois $(3,4) \notin A$

GRAFO NÃO DIRECIONADO se (i,j) é um par não-ordenado (se i está ligado à j, implica i estar ligado à i)

GRAFO DIRECIONADO se (i,j) é um par ordenado (um caminho, como cadeia alimentar). Não tenha autoconexão e arestas simples.

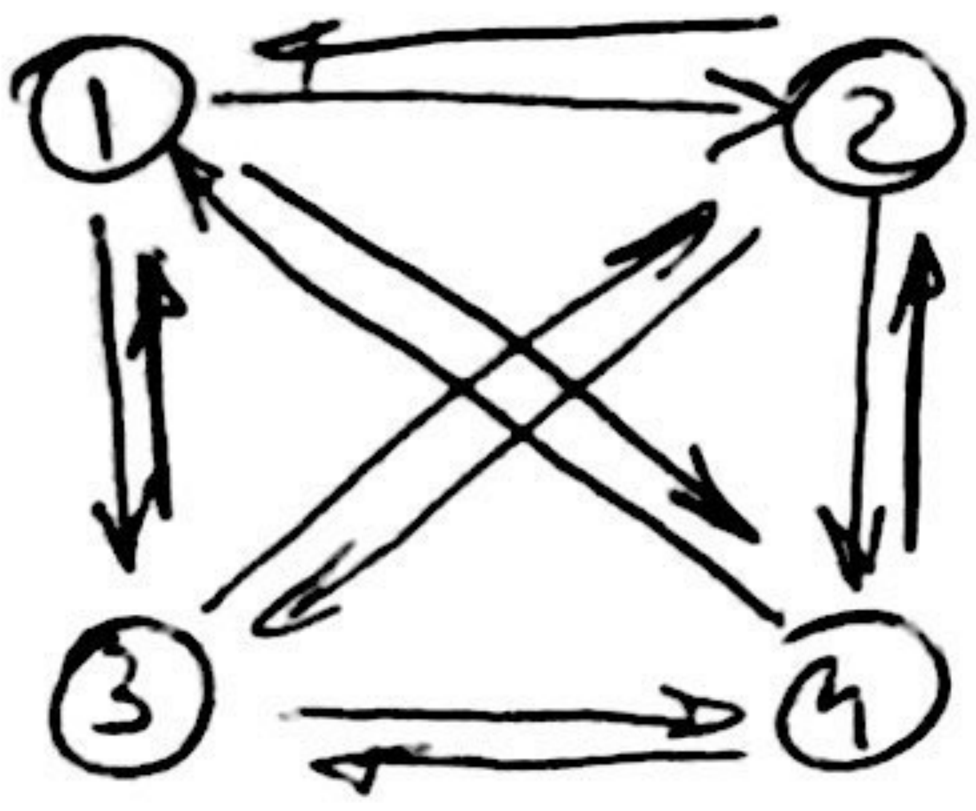
Quase sempre ↑

Qual O N° MÁXIMO DE CONEXÕES DE UM GRAFO? COM N NÓS

$$\binom{N}{2} = \frac{N!}{(N-2)2!} = \frac{N(N-1).(N-2)!}{(N-1)!\cdot 2}$$

→ $\frac{N(N-1)}{2}$ → GRAFO NÃO DIRECIONADO

P/ GRÁFICO DIRECIONADO : MÁXIMO



$$\boxed{N(N-1)}$$

→

MATRIZ DE ADJACÊNCIAS

$\overleftrightarrow{X} = \{x_{ij}\}$ → matriz quadrada

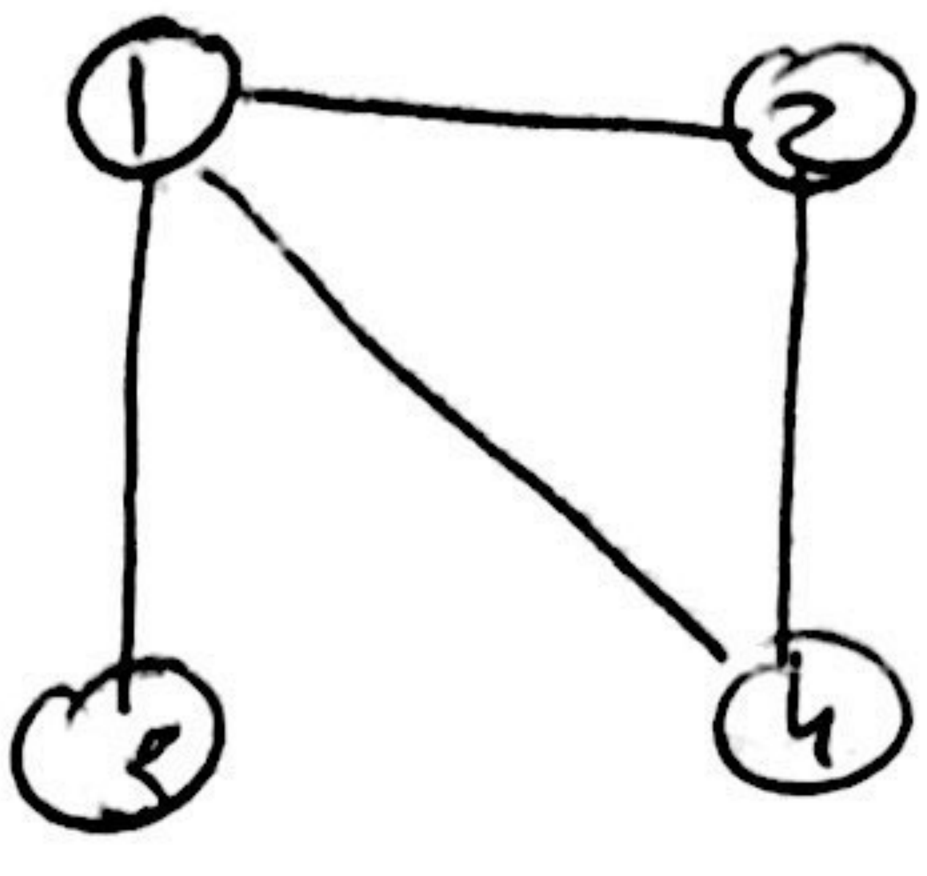
linha → vetor coluna

$x_{ij} = 1$ se $(ij) \in A$

$x_{ij} = 0$ se $(ij) \notin A$

$$\overleftrightarrow{X} = \begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

matriz simétrica



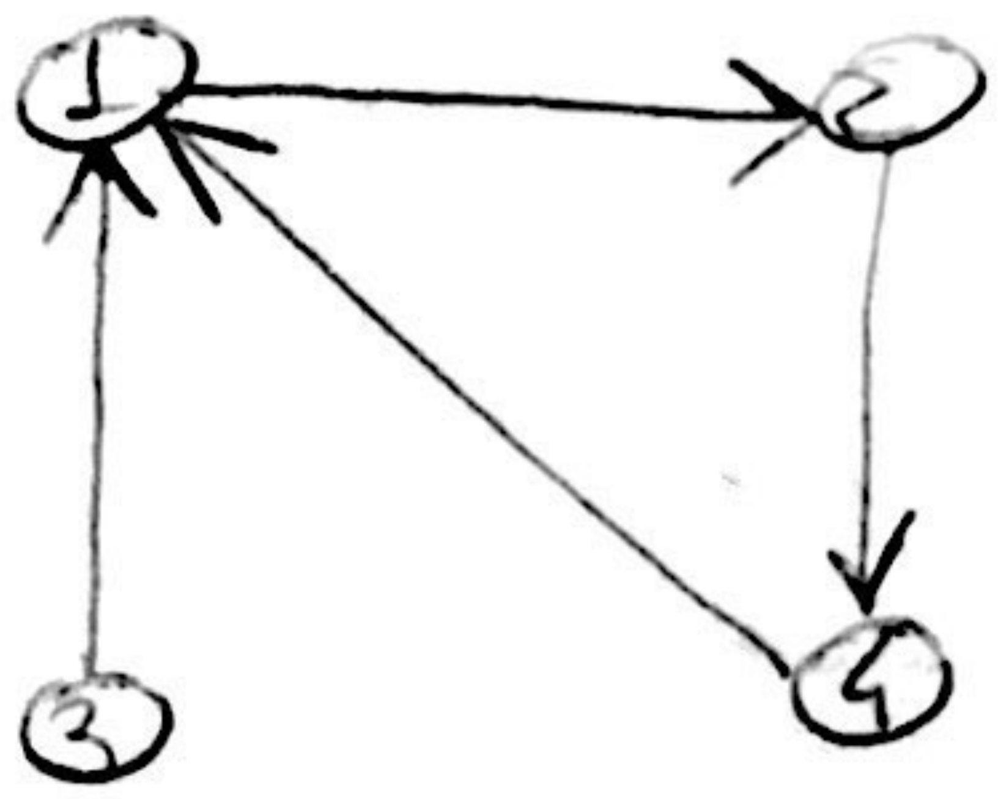
GRAFO NÃO DIRECIONADO ↑

GRAFO DIRECIONADO:

Chegada ↓

$$\overleftrightarrow{X} = \begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Partida →



Dobro de 1s

DENSIDADE DE UM GRAFO

$$D = \frac{\text{número de arestas que existem}}{\text{número máximo de arestas possível}}$$

$$D = \frac{2 \cdot M}{N(N-1)}$$ → NÃO DIRECIONADO

$$D = \frac{M}{N(N-1)}$$ → DIRECIONADO

muito menor
↓

GRAFO É DENSO : $D \sim 1$

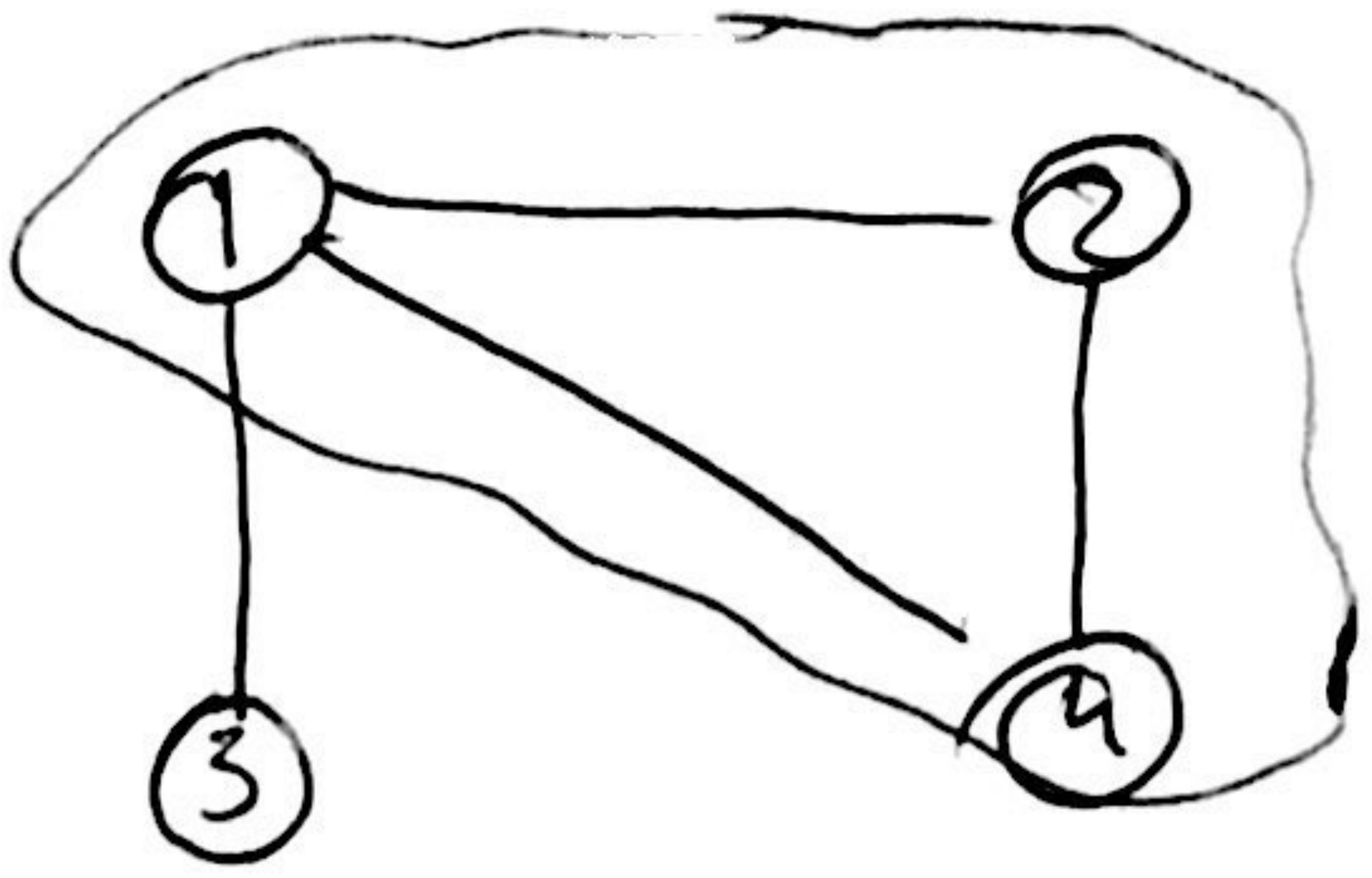
ESPARSO: $0 < \underset{\approx 0,1}{D} \ll 1$

CLIQUE: G' é um clique de G se G' é um subgrafo de G e G' é completo

Subgrafo: $G' = (V', A')$ é subgrafo de $G = (V, A)$ se $V' \subseteq V$ e $A' \subseteq A$.

Completo: Totalmente conectado.

1,2,4 é um clique.



MOTIF
FRAGMENTO: subgrafo "pequeno" do G, mas estatisticamente relevante.

DISTÂNCIA: a distância entre os nós i j é o número de arestas que compõe o caminho mais curto | l_{ij} entre os dois.

- Se i e j não estão conectados, então $l_{ij} = \infty$

$$\overleftrightarrow{L} = \{l_{ij}\}$$

NÃO DIRECIONADO

$$\overleftrightarrow{L}_{ij} = \begin{array}{c|c|c|c|c} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ \hline 3 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ \hline 4 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}$$

simétrica

DIRECIONADO

4 →

$$L_{ij} = \begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 0 & 1 & \infty & 2 \\ 2 & 2 & 0 & \infty & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 2 & \infty & 0 \end{array} \rightarrow \text{chegada}$$

↑ Partida

L médio - COMPRIMENTO MÉDIO DO CAMINHO MAIS CURTO

média dos l_{ij}

$$l_{ij} \rightarrow \langle l \rangle = \frac{\sum_{j=1}^{N} \sum_{i=1}^{N} l_{ij}}{N(N-1)}$$

sendo $i \neq j$

→ Vale p/ Dire e N Dir

$\overset{\leftrightarrow}{L}$: matriz $N \times N$

nº elementos : N^2

Diagonal principal : N

$N^2 - N = N(N-1)$

<u>Não-DIRECIONADO</u>

$$\langle l \rangle = \frac{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{N} l_{ji}}{\frac{N(N-1)}{2}}$$

↳ $\langle l \rangle = l_{12} + l_{13} + l_{14} + l_{23} + l_{24} + l_{34}$

$$\langle l \rangle = \frac{8}{6} = \frac{\overset{6}{\cancel{4}}}{3}$$ ou 13 arestas

---

E quando o $\langle l \rangle$ dará $\underline{\underline{\infty}}$?

DIÂMETRO : da: máx lij

- grafo não-direcionado conexo:
  Há caminho entre qualquer par de nós.
- grafo direcionado FORTEMENTE conexo: se existe caminho entre qualquer par de nós, respeitando o sentido das arestas.
- grafo fracamente conexo (direcionado): existe caminho entre qualquer par de nós, desconsiderando o sentido das arestas.
- grafo desconexo: não há caminho entre pelo menos um par de nós.

GRAU DO NÓ $i = k_i$

↳ número de arestas que têm i como extremidade.

$$k_i = \sum_j x_{ij} = \sum_j x_{ji}$$

↓ soma na linha da $\overleftrightarrow{X}$

↓ soma na coluna $\overleftrightarrow{X}$

sendo esta: no exemplo não-direcionado

$$\overleftrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

→ chegada

↑ partida

$k_1 = 3$

$k_2 = 2$

$k_3 = 1$

$k_4 = 2$

A

PARA GRAFOS DIRECIONADOS

→ chegada

$$\overleftrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

↑ partida

TEM QUE DIFERENCIAR GRAUS DE PARTIDAS E CHEGADAS

k^{IN} → nº arestas que chegam em i :

k^{OUT} → nº de arestas que partem do i

GRAU DE ENTRADA: $\sum_{j} x_{ji}$

GRAU DE PARTIDA: $\sum_{j} x_{ij}$

$k_1^{IN} = 2$ $k_1^{OUT} = 1$

$k_2^{IN} = 1$ $k_2^{OUT} = 1$

$k_3^{IN} = 0$ $k_3^{OUT} = 1$

$k_4^{IN} = 1$ $k_4^{OUT} = 1$

DEDUÇÃO DE EULER

$$\sum_{j=1}^{N} k_1 = 8 \text{ ou } \boxed{2M}$$

p/ direcionado tendo-se:

$$\sum_{j=i}^{N} k_i^{in} + \sum_{i=j}^{N} k_i^{out} = \boxed{2M}$$

COEFICIENTE DE AGREGAÇÃO OU CLUSTERIZAÇÃO do nó i:

número de ligações entre os vizinhos de i

$$C_i = \frac{B_i}{\binom{k_i}{2}} \longrightarrow$$

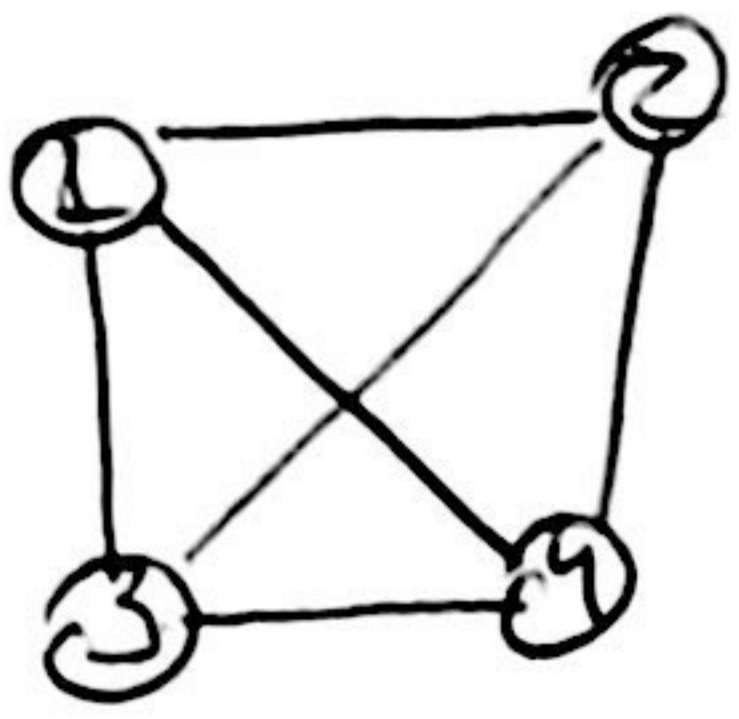
sobre o número de ~~ligações~~ máximo de ligações possíveis entre os vizinhos de i.

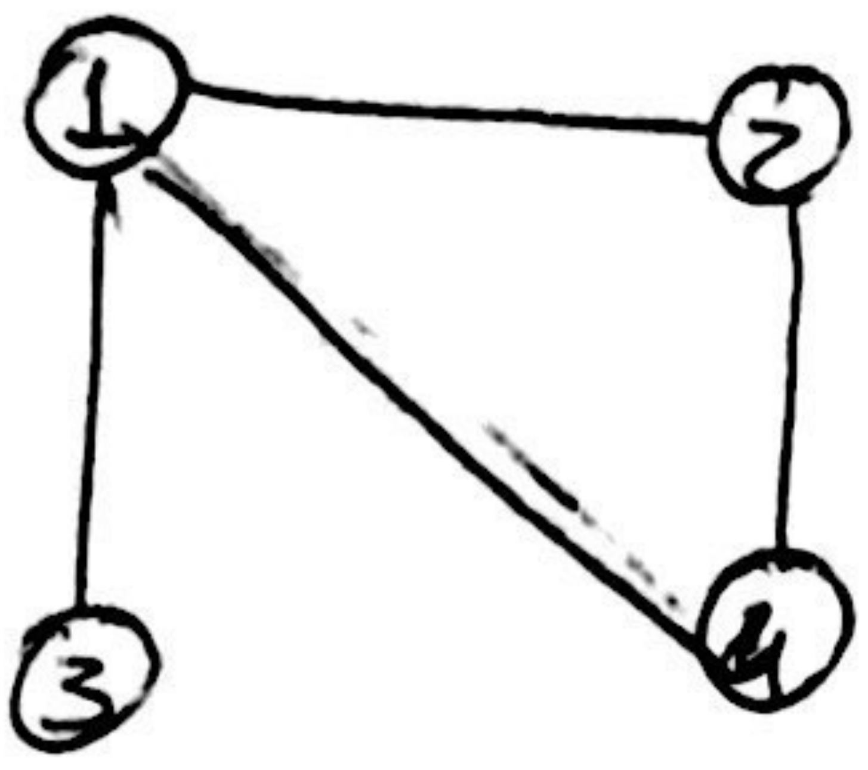
$$C_i = \frac{b_i}{\frac{k_i!}{(k_i-2)!\,2!}} \quad \text{ou} \quad \frac{2b_i}{k_i(k_i-1)}$$

Coeficiente de Clusterização médio:

$$\langle C \rangle = \frac{\sum_{i=1}^{N} c_i}{N}$$

P/ EXEMPLO NÃO-DIRECIONADO

$C_1 =$ 



$C_1 = \frac{1}{3}$ ou 0,33

$C_2 = \frac{1}{1} =$ ①

$C_3 = 0$ (grau 1)

$C_4 = \frac{1}{1} =$ ①

$$\langle C \rangle = \frac{1/3 + 1 + 0 + 1}{4} = \underline{7/12}$$

Se o nó é isolado ou é 1, $C_i = 0$

$\boxed{k_i = 0 \text{ ou } 1}$ //

a)

$$b_i = \frac{1}{2} \cdot \sum_{j=1}^{N} \sum_{l=1}^{N} \underbrace{x_{ij} x_{il} x_{li}}$$

triângulos que aprecem se um deles der zero, tudo dá 0