

Métodos numéricos para la valoración de opciones en los precios de cierre de la empresa Duke Energy Corporation

S. A. Areiza, A. F. Parra, E. Serna y F. H. Marin

Resumen— Se aplican métodos numéricos para valorar opciones europeas tipo Call sobre precios de cierre de Duke Energy Corporation modelados como Movimiento Browniano Geométrico. Primero, se verifica que la serie cumpla supuestos de MBG mediante PACF, exponente de Hurst, dimensión fractal, pruebas de normalidad y de heterocedasticidad. Luego, se estiman parámetros del modelo y se generan trayectorias para pronóstico, evaluando el error MAPE (1,24 % promedio). Finalmente, se valoran opciones con Black-Scholes, Monte Carlo, árboles binomiales y diferencias finitas, comparando precisión y tiempos de cómputo. Resultados indican que el MBG es adecuado para este activo y que los diferentes métodos numéricos muestran un rendimiento equilibrado entre precisión y eficiencia computacional.

Palabras clave— Black-Scholes, Call Europeo, Duke Energy Corporation, Movimiento Browniano Geométrico, Valoración de Opciones.

I. INTRODUCCIÓN

EN los mercados financieros modernos, la modelación de activos como materias primas, acciones, divisas y tasas de interés, así como la valoración precisa de instrumentos derivados como las opciones, se ha convertido en un componente esencial para la gestión efectiva del riesgo y la toma de decisiones estratégicas tanto dentro de una organización o empresa, como individualmente. Estos instrumentos financieros permiten a las empresas, inversionistas y gestores de portafolio anticiparse a escenarios de posible incertidumbre, protegerse frente a eventos adversos y aprovechar oportunidades de mercado de manera más eficiente.

Un activo financiero derivado es un instrumento cuyo valor se basa en el precio de otro activo subyacente [1]. Particularmente, las opciones ofrecen el derecho o posibilidad de comprar o vender un activo en una fecha futura a un precio acordado, proporcionando herramientas de cobertura (hedging), especulación y arbitraje [2]. Su uso se ha expandido

tanto en mercados desarrollados como emergentes debido a su capacidad para mitigar riesgos relacionados con la volatilidad de precios, tipos de cambio, tasas de interés y eventos económicos globales [3].

En este contexto, contar con métodos matemáticos y computacionales sólidos que permitan estimar el valor de una opción de forma precisa es fundamental y puede volverse en una ventaja para la toma de decisiones a nivel organizacional. Si bien la fórmula de Black-Scholes [4] es uno de los pilares teóricos para la valoración de opciones europeas bajo ciertas condiciones ideales, en la práctica se recurre frecuentemente a métodos numéricos como la simulación de Monte Carlo, árboles binomiales o esquemas de diferencias finitas [5] para abordar casos más complejos o condiciones de mercado que no se ajustan perfectamente a los supuestos originales [6].

Además, el uso de estos métodos requiere de una adecuada modelación de la dinámica del activo subyacente. En especial, el Movimiento Browniano Geométrico (MBG), se ha convertido en el modelo estándar para representar la evolución estocástica de los precios de activos financieros, dada su consistencia empírica y su solidez matemática. Este modelo es el punto de partida para muchas técnicas modernas de valoración, siendo especialmente útil cuando se combina con métodos computacionales intensivos para realizar pronósticos o simular escenarios futuros [7].

El presente trabajo tiene como objetivo aplicar y comparar distintos métodos numéricos para valorar opciones europeas tipo Call, evaluando su precisión y eficiencia al proyectar la evolución de un activo financiero real, en este caso, la acción de Duke Energy Corporation (DUK), modelada como un MBG. Se parte del análisis de una serie histórica de precios de cierre del activo diariamente desde el 15 de mayo de 2023 hasta el 9 de mayo del 2025, y se realizan simulaciones de precios futuros mediante Monte Carlo con 10000 trayectorias. Luego, se estima el error de predicción usando el MAPE y se valoran las opciones utilizando cuatro enfoques diferentes: la fórmula de Black-Scholes, simulación Monte Carlo, árboles binomiales y diferencias finitas explícitas, comparando los resultados obtenidos para distintas fechas de maduración $T \in \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}\}$ y varios precios de ejercicio K derivados de las trayectorias simuladas.

Esta comparación no solo permitirá evaluar el comportamiento de los métodos desde un punto de vista técnico, sino que también ilustrará la importancia práctica de una valoración

S. A. Areiza pertenece a la escuela de ciencias aplicadas e ingeniería, universidad Eafit, Medellín, Colombia (e-mail: saareizat@eafit.edu.co).

A. F. Parra pertenece a la escuela de ciencias aplicadas e ingeniería, universidad Eafit, Medellín, Colombia (e-mail: afdparra@eafit.edu.co).

E. Serna pertenece a la escuela de ciencias aplicadas e ingeniería, universidad Eafit, Medellín, Colombia (e-mail: esernar1@eafit.edu.co).

F. H. Marin Parra pertenece a la escuela de ciencias aplicadas e ingeniería, universidad Eafit, Medellín, Colombia (e-mail: fmarinsa@eafit.edu.co).

precisa en el contexto financiero real, donde las decisiones de cobertura y especulación deben ser tomadas bajo incertidumbre, volatilidad y limitaciones de información [8]. En última instancia, comprender y aplicar estos modelos contribuye a una gestión de riesgos más efectiva, una asignación de capital más eficiente y una mayor resiliencia financiera frente a choques inesperados [9].

La estructura del documento se describe como sigue: la Sección II entabla todos los modelos matemáticos, pruebas estadísticas y métodos numéricos, necesarios para la valoración de opciones. La descripción y propuesta de la metodología empleada para la modelación y simulación se encuentra en la Sección III. Posteriormente, se muestran en conjuntos de gráficas y tablas, haciendo énfasis en el análisis de los resultados para la Sección IV. Las conclusiones de la investigación se pueden encontrar en la sección V.

II. MARCO TEÓRICO

A. Movimiento Browniano Geométrico

Considere la ecuación diferencial estocástica asociada al precio X_t , continuo en el intervalo $[0, T]$, dada por

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dB_t, \quad X_0 = x > 0 \quad (1)$$

donde $\mu \in \mathbb{R}$ denota el rendimiento esperado (drift) y $\sigma > 0$ la volatilidad del activo. La variable B_t corresponde a un movimiento browniano estándar unidimensional, con distribución $\mathcal{N}(0, t)$ en el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. En el ámbito financiero, la constante μ representa el rendimiento promedio que se espera obtener por unidad de tiempo, mientras que σ modela la incertidumbre (variabilidad) intrínseca en la evolución del precio.

El proceso definido por la ecuación anterior se conoce como Movimiento Browniano Geométrico (MBG), el cual satisface dos propiedades clave: tiene un crecimiento exponencial estocástico, manteniendo así que X_t tome valores no negativos, y los incrementos entre valores sigue una distribución normal.

En sentido de Itô, la solución exacta a este proceso estocástico está dada por

$$X_t = X_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma B_t}, \quad t \in [0, T]$$

De este modo, el factor $\exp(-\frac{1}{2}\sigma^2 t)$ ajusta el término de deriva para que la expectativa $\mathbb{E}[X_t] = X_0 e^{\mu t}$ coincida con la interpretación financiera de rendimiento medio acumulado.

Desde la perspectiva práctica, el MBG sirve de base para diversos modelos de valoración de derivados, pues su tajante supuestos, drift constante, volatilidad constante y ausencia de saltos, facilitan el desarrollo de fórmulas cerradas (por ejemplo, Black–Scholes).

B. Solución numérica

La resolución exacta del MBG es útil para valorar opciones europeas bajo supuestos ideales, pero resulta necesario disponer de métodos numéricos cuando se requiere simular múltiples trayectorias para estimaciones de Monte Carlo.

Para ello, siguiendo el esquema de Euler–Maruyama [10], para una partición uniforme $0 = t_1 < t_2 < \dots < t_n = T$ del intervalo $[0, T]$, considere las aproximaciones

$$\begin{aligned} \int_{t_{i-1}}^{t_i} X_u du &\approx X_{t_{i-1}}(t_i - t_{i-1}) \\ \int_{t_{i-1}}^{t_i} X_u dB_u &\approx X_{t_{i-1}}(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) \end{aligned}$$

De (1) se obtiene

$$X_{t_i} - X_{t_{i-1}} = \mu \int_{t_{i-1}}^{t_i} X_u du + \sigma \int_{t_{i-1}}^{t_i} X_u dB_u$$

definiendo $\Delta t = t_i - t_{i-1}$ y $\Delta B_i = B_{t_i} - B_{t_{i-1}}$, la aproximación numérica es

$$X_{t_i} \approx X_{t_{i-1}} + \mu X_{t_{i-1}} \Delta t + \sigma X_{t_{i-1}} \Delta B_i$$

Donde, ΔB_i se puede simular como $\sqrt{\Delta t} \varepsilon_{t_i}$ con

$\varepsilon_{t_i} \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Por tanto, la solución numérica para (1) es:

$$X_{t_i} = X_{t_{i-1}} + \mu X_{t_{i-1}} \Delta t + \sigma X_{t_{i-1}} \sqrt{\Delta t} \varepsilon_{t_{i-1}} \quad (2)$$

C. Retornos instantáneos

En el ámbito financiero, el término “retorno” se refiere a la ganancia (o pérdida) total que un activo genera durante un periodo de tiempo específico. Existen varias maneras de cuantificarlo: retornos simples, retornos logarítmicos, retornos porcentuales, etc. Para un modelo de tiempo continuo, como los es el MBG, los retornos instantáneos son los más adecuados.

Dado el esquema numérico (2) del apartado anterior, en cada paso i , se definen los retornos instantáneos por [11]

$$r_{t_i} = \frac{X_{t_i} - X_{t_{i-1}}}{X_{t_{i-1}}} = \mu \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} \varepsilon_{t_{i-1}} \quad (3)$$

De esta forma, los momentos de r_{t_i} quedan expresados como:

$$\mathbb{E}[r_{t_i}] = \mu \Delta t, \quad \text{Var}[r_{t_i}] = \sigma^2 \Delta t$$

Gracias a la propiedad $\varepsilon_{t_i} \sim \mathcal{N}(0, 1)$, se observa que

$$r_{t_i} \sim \mathcal{N}(\mu \Delta t, \sigma^2 \Delta t)$$

Estas relaciones permiten estimar los parámetros μ y σ a partir de datos históricos observados en intervalos discretos. Por ejemplo, dado un conjunto de N retornos r_{t_1}, \dots, r_{t_N} las estimaciones por momentos para μ y σ resultan:

$$\hat{\mu} = \frac{\bar{r}}{\Delta t}, \quad \hat{\sigma} = \sqrt{\frac{\widehat{\text{Var}}[r]}{\Delta t}} \quad (4)$$

donde \bar{r} y $\widehat{\text{Var}}[r]$ son la media y varianza muestral de r_{t_i} , respectivamente.

Finalmente, se puede despejar el término de difusión y dejarlo expresado como:

$$\sigma \sqrt{\Delta t} \varepsilon_{t_{i-1}} = r_{t_i} - E[r_{t_i}] \quad (5)$$

Las expresiones (3) y (5) son necesarias para verificar los supuestos del modelo, los cuales se pondrán a prueba con ayuda de la siguiente sección.

D. Test Estadísticos

Para garantizar que la serie histórica de precios efectivamente se ajusta a un MBG antes de aplicar la fórmula de Black–Scholes, resulta esencial poner a prueba varios aspectos fundamentales del modelo [12]. En primer lugar, la discretización del MBG mediante el esquema de Euler–Maruyama en (2) implica que, en cada paso, el valor actual depende exclusivamente del precio inmediatamente anterior; por lo tanto, debe demostrarse que no existe autocorrelación significativa en rezagos superiores a uno. En segundo lugar, la serie original de precios debe mostrar un comportamiento de crecimiento (decrecimiento) consistente, indicando una clara tendencia. Esta es una característica importante del MBG.

Asimismo, los retornos instantáneos definidos en (3) deben ajustarse a una distribución normal, pues la hipótesis de normalidad resulta clave para la validez estadística del MBG en tiempo continuo. Finalmente, el término de difusión (5) asume volatilidad constante a lo largo del tiempo; por tanto, conviene verificar que no exista heterocedasticidad condicional en los residuos de los retornos, ya que la presencia de varianza condicional no constante invalidaría el supuesto de volatilidad fija.

1) *Función de autocorrelación parcial*: La función de autocorrelación parcial o PACF por sus siglas en inglés, es una herramienta utilizada en series de tiempo para medir la correlación entre una serie y sus propios valores rezagados, controlando la influencia de otros rezagos intermedios [13]. Teniendo en cuenta una serie de tiempo Z_t , la autocorrelación de k rezagos, denotado por $\alpha(k)$, mide la correlación entre Z_1 y Z_{k+1} eliminando la dependencia lineal de Z_2 hasta Z_k .

Los $\alpha(k)$ de una serie estacionaria se define como

$$\alpha(1) = \text{Corr}(Z_1, Z_2) = \rho(1)$$

$$\alpha(k) = \text{Corr}(Z_{k+1} - P_{1,k}(Z_{k+1}), Z_1 - P_{1,k}(Z_1)), \quad k \geq 2$$

donde $P_{1,k}(X)$ es la proyección de X en el espacio abarcado por $\{Z_1, Z_k\}$ definido por

$$P_{1,k}(X) = \beta_0 + \sum_{i=1}^k \beta_i Z_i$$

$$\sum_{i=0}^k \beta_i E[Z_i Z_j] = E[X Z_j], \quad j = 0, \dots, k$$

Actualmente existen diversos algoritmos para calcular cada $\alpha(k)$ [14]. Por otra parte, cuando se grafica $\alpha(k)$ versus su rezago k , se obtiene el PACF (también llamado correlograma) el cual muestra valores entre -1 y 1, con intervalos de confianza para indicar si un $\alpha(k)$ es estadísticamente significativo.

2) *Exponente de Hurst*: El exponente de Hurst, atribuido a Harold Edwin Hurst, cuantifica el carácter de aleatoriedad y persistencia en una serie temporal mediante una medida de autocorrelación de largo plazo. Este estadístico H toma valores $0 < H < 1$, y, según su magnitud, revela información sobre la dinámica de los datos.

- Si $H = 0.5$ el proceso se comporta como un movimiento browniano estándar, lo que implica independencia entre incrementos y ausencia de memoria de largo plazo.

- Si $0.5 < H < 1$ la serie exhibe autocorrelaciones positivas (persistencia), de modo que los incrementos tienden a mantener la dirección del movimiento anterior. Esta propiedad se asocia con tendencias prolongadas en los precios financieros, ya que los movimientos alcistas o bajistas suelen reproducirse en el corto plazo.
- Si $0 < H < 0.5$ la serie muestra autocorrelaciones negativas (antipersistencia), lo que indica reversión a la media: los aumentos suelen ir seguidos de disminuciones y viceversa.

Dada una serie de tiempo X_1, \dots, X_n , H se puede estimar usando el método de los rangos re-escalados, medido como:

- 1) Calcular la media muestral \bar{X} de la serie $\{X_t\}$.
- 2) Generar la serie de tiempo ajustada $Y_t = X_t - \bar{X}$.
- 3) Hallar la serie de desviación acumulada

$$Z_t = \sum_{i=0}^t Y_i, \quad t = 1, \dots, n$$

- 4) Obtener la serie de rangos

$$R_t = \sup_{1 \leq i \leq t} Z_t - \inf_{1 \leq i \leq t} Z_t, \quad t = 1, \dots, n$$

- 5) Crear la serie de desviaciones estándar

$$S_t = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=0}^t (X_i - \bar{X})^2}, \quad t = 1, \dots, n$$

- 6) Calcular los rangos re-escalados

$$\frac{R_t}{S_t} \propto n^H$$

de modo que el gradiente de la gráfica de $\log(\frac{R_t}{S_t})$ versus $\log(n)$ es igual a H [15], [16].

3) *Dimensión Fractal*: La dimensión fractal D suele utilizarse para describir cuantitativamente superficies fractales [17] y para describir la complejidad de los fractales [18]. Por otra parte, D contiene información sobre la estructura geométrica de una serie temporal en múltiples escalas, proporcionando información sobre la irregularidad local de la trayectoria [19].

La literatura reporta múltiples algoritmos para estimar D en series temporales. El que método que se emplea en este trabajo es el denominado box-counting (conteo de cajas), en donde se realizan los siguientes pasos

- 1) Superponer sobre el gráfico de la serie temporal una cuadrícula de cajas de lado ε .
- 2) Contar el número de cajas $N(\varepsilon)$ que contienen al menos un punto de la trayectoria $\{(t_i, X_{t_i})\}$.
- 3) Repetir para diferentes valores de ε y ajustar la relación

$$N(\varepsilon) \propto \varepsilon^{-D}$$

Se puede encontrar D como el gradiente de la gráfica $\log N(\varepsilon)$ frente a $\log(1/\varepsilon)$. Aunque sencillo, este método puede sobreestimar D en series con ruido y requiere gran cantidad de datos para robustez estadística.

Un término que relaciona el exponente de Hurst y la dimensión fractal se denomina exponente espectral S , también

conocido como medida de Hausdorff, mediante la siguiente dimensión [19]. Se define como sigue

$$S = 2H + 1 = 5 - 2D$$

De esta expresión se desprende la siguiente relación

$$D + H = 2 \quad (6)$$

Esto nos da otra idea de la dimensión fractal, donde valores de $D = 1.5$ es un movimiento brownian, $1 < D < 1.5$ muestra un proceso de tendencia y $1.5 < D < 2$ es un proceso de reversión a la media.

En definitiva, H puede entenderse como un descriptor de las correlaciones globales, mientras que D puede entenderse como una descripción de la estructura local a escala fina.

4) Test de normalidad:

- **Jarque-Bera:** se fundamenta en la premisa de que la muestra consiste en observaciones independientes e idénticamente distribuidas, con momentos de tercer y cuarto orden finitos. La hipótesis nula es una hipótesis conjunta de que la asimetría y el exceso de curtosis son nulos (asimetría = 0 y curtosis = 3). El estadístico de prueba se define como

$$JB = \frac{n}{6} \left(S^2 + \frac{(K - 3)^2}{4} \right)$$

donde n representa el tamaño de la muestra, S el coeficiente de asimetría muestral y K la curtosis muestral. Dado que, bajo la hipótesis nula, JB se aproxima a una distribución χ^2 con dos grados de libertad, valores altos de este estadístico conducen al rechazo de la normalidad [20]

- **Kolmogorov-Smirnov:** asume una muestra de observaciones independientes extraídas de una distribución continua. En su versión clásica, se emplea cuando la función de distribución teórica $F(x)$ es completamente especificada (por ejemplo, la normal estándar), de modo que no requiere estimación de parámetros. La hipótesis nula establece que la distribución empírica acumulada $F_n(x)$ coincide con $F(x)$ en todos los puntos, frente a la alternativa de que exista al menos un punto donde difieran. El estadístico de prueba se define como

$$D_n = \sup_x |F_n(x) - F(x)|$$

D_n converge asintóticamente a la distribución de Kolmogórov, la cual cuenta con tablas de valores críticos para muestras grandes [21].

- **Anderson-Darling:** el método parte del supuesto de que las observaciones son independientes y proceden de una distribución continua cuyas características (media, varianza u otros parámetros) pueden estar especificados o estimados a partir de la muestra. En este contraste, la hipótesis nula indica que los datos siguen precisamente la función de distribución teórica $F(x)$ mientras que la hipótesis alternativa plantea cualquier desviación en la forma de la curva acumulada. El estadístico de prueba se expresa como

$$A^2 = -n - S$$

donde $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \dots \leq x_{(n)}$ son los datos ordenados y

$$S = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{2i-1}{n} [\ln(F(x_i)) + \ln(1 - F(x_{n+1-i}))]$$

Valores elevados de A^2 sugieren un ajuste deficiente a la distribución propuesta. Si los parámetros de F se obtienen mediante estimación (por ejemplo, media y varianza de la normal), se utilizan tablas corregidas para la versión paramétrica [22].

- **Lilliefors:** Esta prueba es una modificación de la prueba de Kolmogorov-Smirnov, el cual toma en cuenta una distribución normal y con media y varianza estimados a partir de la muestra. En este caso, la hipótesis nula plantea que la muestra procede de una normal con parámetros desconocidos μ y σ mientras que la alternativa indica la falta de normalidad aún después de ajustar dichos parámetros. El estadístico de prueba se define como

$$D_n^* = \sup_x \left| F_n(x) - \Phi \left(\frac{x - \hat{\mu}}{\hat{\sigma}} \right) \right|$$

donde Φ es la función de distribución de la normal estándar y $\hat{\mu}$ y $\hat{\sigma}$ son la media y desviación estándar muestrales. Debido a que la estimación de parámetros altera la distribución de D_n^* , se emplean tablas específicas de Lilliefors para determinar valores críticos [23].

- **Otros:** Para complementar las pruebas cuantitativas de normalidad, resulta útil emplear visualizaciones empíricas de la distribución. El gráfico Q-Q (quantile-quantile) compara, punto por punto, los cuantiles muestrales con los cuantiles de una distribución normal teórica. Cuando los puntos se alinean cerca de la diagonal, se evidencia un ajuste adecuado a la normalidad; desviaciones sistemáticas de la línea recta indican asimetría o colas pesadas en los datos.

En presencia de valores atípicos que afectan la normalidad, el diagrama de caja (boxplot) permite identificar dichos outliers de forma clara. Si el porcentaje de observaciones extremas es reducido (por ejemplo, inferior al 5 % de la muestra), puede justificarse su eliminación para mejorar la aproximación normal en contextos de modelación práctica. No obstante, esta decisión debe basarse en criterios objetivos de corte (límites de bigotes del boxplot) y documentarse adecuadamente para asegurar la reproducibilidad del análisis.

5) Test de heterocedasticidad condicional auto-regresiva: El test de heterocedasticidad condicional autorregresiva (ARCH test) fue propuesto originalmente por [24] como método para detectar la presencia de varianza condicional no constante en los residuos de un modelo de series temporales. Este contraste parte del supuesto de que los errores h_t de una especificación de regresión (por ejemplo, de un modelo AR) pueden presentar heterocedasticidad dinámica de la forma

$$h_t = \sigma_t \varepsilon_t, \quad \varepsilon \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

donde la varianza condicional σ_t^2 evoluciona según un modelo ARCH de orden q :

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i h_{t-i}^2$$

con $\alpha_0 > 0, \alpha_i \geq 0$. Bajo esta parametrización, la hipótesis nula del test ARCH (H_0), establece que no existe efecto ARCH en la serie, es decir,

$$H_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_q = 0$$

lo cual equivale a asumir varianza condicional constante ($\sigma_t^2 = \alpha_0$). La hipótesis alternativa (H_1) postula que al menos uno de los coeficientes α_i es distinto de cero, lo que indica heterocedasticidad condicional.

Para implementar el test, primero se ajusta un modelo lineal (por ejemplo, regresión OLS o AR) y se obtienen los residuos \hat{h}_t . A continuación, se calcula la serie de cuadrados \hat{h}_t^2 y se estima la siguiente regresión auxiliar

$$\hat{h}_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \hat{h}_{t-i}^2$$

El estadístico de prueba se basa en el coeficiente de regresión R^2 de esta regresión auxiliar y se define como

$$ARCH = nR^2$$

donde n es el número de observaciones utilizadas. Bajo la hipótesis nula, $ARCH \sim \chi_q^2$ asintóticamente. Así, valores suficientemente grandes de ARCH conducen al rechazo de H_0 en favor de la presencia de efectos ARCH.

6) Test de White: Propuesto originalmente por [25] el test de White se utiliza para detectar heterocedasticidad en un modelo de regresión lineal sin necesidad de especificar la forma funcional de la varianza. Este test parte del supuesto de que el modelo de regresión está correctamente especificado en su media y que los residuos tienen media cero. Las hipótesis del test son

$$H_0 : \sigma_t^2 = \sigma^2$$

$$H_1 : \sigma_t^2 \text{ no es constante}$$

El test se basa en una regresión auxiliar de los residuos al cuadrado sobre los regresores originales, sus cuadrados y productos cruzados. El estadístico se define como:

$$White = nR^2$$

donde n es el tamaño de la muestra y R^2 es el coeficiente de determinación de la regresión auxiliar. Bajo H_0 este estadístico sigue una distribución chi-cuadrado χ_m^2 donde m es el número de regresores en la regresión auxiliar. Valores altos del estadístico indican heterocedasticidad.

7) Volatilidad histórica con ventana acumulativa: La volatilidad histórica se define como la desviación estándar de los retornos de un activo, estimada sobre un conjunto de observaciones pasadas. Cuando se emplea una ventana acumulativa, el cálculo se realiza de modo secuencial: para cada periodo t_i se computa la desviación estándar de todos los retornos disponibles desde el inicio del muestreo hasta t_i . Formalmente,

si denotamos por $\{r_1, r_2, \dots, r_N\}$, la serie de retornos, la volatilidad empírica acumulada en el instante i se define como

$$\hat{\sigma}_i = \sqrt{\frac{1}{i-1} \sum_{j=1}^i (r_j - \bar{r}_i)^2}, \quad \bar{r}_i = \frac{1}{i} \sum_{j=1}^i r_j \quad (7)$$

De esta forma, $\hat{\sigma}_i$ cuantifica la dispersión de todos los retornos hasta el tiempo i y gradualmente incorpora nuevos datos para ajustar su valor hasta el instante T . Por otra parte, como se desea conocer la volatilidad en un horizonte de tiempo, es necesario dividir (7) por Δt .

Aunque existen diferentes pruebas para concluir cuando σ_t es homocedástico, es suficiente con graficar $\hat{\sigma}_i / \Delta t$ contra cada instante i . Si la volatilidad fuera constante, la curva se estabilizaría en torno a un valor fijo. De lo contrario, si tiene comportamientos aleatorios, sugiere presencia de heterocedasticidad.

E. Mundo neutral al riesgo

En el contexto de valoración de derivados, el **mundo neutral al riesgo** es una construcción probabilística que permite valorar activos financieros suponiendo que todos los inversionistas son indiferentes al riesgo. En este marco, el valor esperado descontado de un activo coincide con su precio actual, es decir, todos los activos crecen, en promedio, a la tasa libre de riesgo r .

Bajo la medida de probabilidad neutral al riesgo \mathbb{P}^* , se asume que el precio del activo subyacente S_t sigue un MBG, pero con tasa de crecimiento igual a r en lugar de la tasa esperada de retorno μ . Es decir, la dinámica estocástica de S_t bajo \mathbb{P}^* es:

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dB_t^*, \quad (8)$$

donde B_t^* es un movimiento browniano estándar bajo la medida \mathbb{P}^* , y σ es la volatilidad del activo.

Este cambio de medida se justifica mediante el teorema de Girsanov, el cual permite transformar la medida original \mathbb{P} , donde el activo crece a tasa μ , a una nueva medida \mathbb{P}^* bajo la cual el crecimiento esperado es r , haciendo que el mercado sea libre de oportunidades de arbitraje.

La ecuación diferencial estocástica (8) es el punto de partida para deducir la ecuación de valoración de derivados en el marco de Black-Scholes.

F. Fórmula de Black-Scholes

La ecuación de Black-Scholes-Merton en derivadas parciales describe la evolución del valor de un derivado financiero $f(S, t)$ en función del tiempo y del precio del activo subyacente S . Para deducir esta ecuación, se parte del supuesto de que el precio del activo sigue un MBG como en (1) para $X_t = S_t$.

Aplicando la fórmula de Itô al valor del derivado $f(S_t, t)$, se obtiene:

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \mu S_t \frac{\partial f}{\partial S_t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S_t^2} \right) dt + \sigma S_t \frac{\partial f}{\partial S_t} dB_t. \quad (9)$$

Se construye un portafolio Π apropiado de tal modo que el tenedor de este tenga una posición corta en un derivado y una posición larga de una cantidad $\frac{\partial f}{\partial S_t}$ de partes del activo. De este modo, el valor del portafolio está dado por:

$$\Pi = -f + \frac{\partial f}{\partial S_t} S_t \rightarrow \Delta \Pi = -\Delta f + \frac{\partial f}{\partial S_t} \Delta S_t \quad (10)$$

Usando (2) con $\Delta S_t = S_{t_i} - S_{t_{i-1}}$ y (9) discretizada en (10) discretizada ($\Delta \Pi$) se elimina el término estocástico, y el portafolio se vuelve libre de riesgo durante el tiempo Δt . De tal manera, su rendimiento debe igualar la tasa libre de riesgo r como $\Delta \Pi = r \Pi \Delta t$, así:

$$\Delta \Pi = \left(-\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S_t^2} \sigma^2 S_t^2 \right) \Delta t = r(-f + \frac{\partial f}{\partial S_t} \Delta S_t) \Delta t. \quad (11)$$

Igualando ambos lados y reordenando se obtiene la EDP de Black-Scholes-Merton:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + r S_t \frac{\partial f}{\partial S_t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S_t^2} = r f. \quad (12)$$

Esta ecuación es la base para valorar diversos instrumentos derivados, incluyendo opciones europeas.

G. Métodos numéricos

1) **Fórmula de valoración de opciones de Black-Scholes:** La fórmula de Black-Scholes proporciona una solución cerrada para valorar opciones del tipo europeo sobre activos que no reparten dividendos. En particular, el precio en el tiempo cero de una opción call está dado por:

$$f_{\text{call}} = S_0 N(d_1) - K e^{-rT} N(d_2), \quad (13)$$

donde:

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}, \quad (14)$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}. \quad (15)$$

Aquí, S_0 es el precio del activo subyacente en el tiempo inicial, K es el precio de ejercicio de la opción, r es la tasa de interés libre de riesgo, σ la volatilidad del activo y T el tiempo hasta la maduración. La función $N(x)$ representa la función de distribución acumulada de una variable aleatoria normal estándar, es decir, $N \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

Esta fórmula es utilizada como referencia para evaluar la precisión de otros métodos numéricos implementados en este trabajo.

2) **Simulación Monte-Carlo:** Para valorar opciones usando simulación Monte Carlo, se considera el principio de valoración de riesgo neutral utilizando simulaciones del activo subyacente.

El procedimiento es el siguiente:

- 1) Tome M simulaciones de la dinámica de precios para S_t en un mundo de riesgo neutral según el tiempo de expiración de la opción.
- 2) Calcule el *pay-off* del derivado en cada trayectoria.

- 3) Calcule la media de los *pay-off* de cada trayectoria para estimar el valor esperado en un mundo de riesgo neutral.
- 4) Descuento el *pay-off* esperado a la tasa de interés libre de riesgo para obtener una estimación del valor del derivado en el tiempo cero.

Para las simulaciones de la dinámica de precios del activo, se obtiene un mejor resultado si se toma el proceso solución discretizado de la ecuación diferencial homogénea, en lugar de la aproximación numérica de Euler, ya que esta última es convergente únicamente cuando $\Delta t \rightarrow 0$, mientras que la primera es válida para cualquier Δt .

Considere la dinámica de precios del activo S_t como la ecuación (1):

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t. \quad (16)$$

Para efectos de la valoración en riesgo neutral, el retorno esperado μ se reemplaza por la tasa de interés libre de riesgo r , como se hizo en (8)

La solución discretizada de (8) toma la forma:

$$S_{t+1} = S_t e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)\Delta t + \sigma(B_{t+\Delta t} - B_t)}, \quad (17)$$

y para propósitos computacionales suele utilizarse la forma:

$$S_{t+1} = S_t e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\varepsilon_t}, \quad (18)$$

donde $\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

3) **Método de árboles binomiales:** El método de árboles binomiales modela la evolución del precio de un activo subyacente S (que no paga dividendos) como un proceso discreto. El tiempo hasta el vencimiento T se divide en N pasos de igual duración $\Delta t = T/N$. En cada paso, el precio puede subir un factor u o bajar un factor d , generando un árbol recombinante de precios.

Una elección común de los parámetros es:

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}, \quad d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}},$$

donde σ es la volatilidad del activo. La probabilidad de subida bajo la medida de riesgo neutro es:

$$p = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d},$$

donde r es la tasa libre de riesgo.

El precio del activo en el nodo (i, j) , correspondiente al tiempo $t = i\Delta t$ con j subidas, se obtiene como:

$$S_{i,j} = S_0 u^j d^{i-j}.$$

Para una opción call europea con precio de ejercicio K , el valor en los nodos terminales (N, j) es:

$$f_{N,j} = \max(S_{N,j} - K, 0).$$

Luego, el valor de la opción se calcula por retroceso:

$$f_{i,j} = e^{-r\Delta t} [p f_{i+1,j+1} + (1-p) f_{i+1,j}],$$

para $i = N-1, \dots, 0$. El valor inicial $f_{0,0}$ corresponde al precio actual de la opción.

Este método es eficiente y flexible para valorar opciones europeas bajo supuestos básicos de no arbitraje y mercados completos.

4) *Método de diferencias finitas explícito*: Este método resuelve la ecuación (12) discretizando el dominio en una malla y aproximando las derivadas mediante diferencias finitas. La forma explícita permite calcular iterativamente los valores futuros a partir de los presentes.

Se define una malla rectangular con pasos temporales $\Delta t = \frac{T}{N}$ y espaciales $\Delta S = \frac{S_{\max}}{M}$, para valores de tiempo $t_i = i\Delta t$ y precios del subyacente $S_j = j\Delta S$, donde $i = 0, 1, \dots, N$, $j = 0, 1, \dots, M$. En este estudio se toma $S_{\max} = 2 \cdot K$.

La ecuación en diferencias finitas explícitas para $f_{i,j}$, que representa el valor de la opción en el nodo (i, j) , queda como:

$$f_{i,j} = a_j f_{i+1,j-1} + b_j f_{i+1,j} + c_j f_{i+1,j+1},$$

donde los coeficientes son:

$$\begin{aligned} a_j &= \frac{\Delta t}{1 + r\Delta t} \left(\frac{1}{2} \sigma^2 j^2 - \frac{rj}{2} \right), \\ b_j &= \frac{\Delta t}{1 + r\Delta t} \left(\frac{1}{\Delta t} - \sigma^2 j^2 \right), \\ c_j &= \frac{\Delta t}{1 + r\Delta t} \left(\frac{1}{2} \sigma^2 j^2 + \frac{rj}{2} \right). \end{aligned}$$

Las condiciones de frontera para una opción call del tipo europeo son:

- **Condición terminal** (al vencimiento T):

$$f_{N,j} = \max(S_j - K, 0), \quad \text{para } j = 0, 1, \dots, M.$$

- **Condición de frontera inferior** ($S = 0$, es decir $j = 0$):

$$f_{i,0} = 0, \quad \text{para } i = 0, 1, \dots, N.$$

- **Condición de frontera superior** ($S = S_{\max}$, es decir $j = M$):

$$f_{i,M} = S_{\max} - K e^{-r(T-t_i)}, \quad \text{para } i = 0, 1, \dots, N.$$

III. METODOLOGÍA

El software utilizado para toda la investigación fue MATLAB R2024b. Algunas pruebas estadísticas (PACF, contrastes de normalidad y test ARCH) se ejecutaron con funciones nativas del entorno, mientras que las ecuaciones estocásticas y los métodos numéricos (Euler–Maruyama, simulación Monte Carlo, etc.) se programaron. Para el cálculo del exponente de Hurst se empleó la implementación disponible en [26] y para la dimensión fractal se utilizó el programa de [27], ambos siguiendo las descripciones matemáticas expuestas en la sección anterior. Con el fin de reducir tiempos de cómputo en las simulaciones numéricas, se habilitó procesamiento en paralelo sobre una CPU AMD Ryzen™ 5 5500 6 núcleos, 12 hilos a @ 3.6GHz y una GPU Radeon™ RX 6600 de 8 GB.

La serie histórica de precios de cierre de Duke Energy Corporation se descargó desde Yahoo Finance <https://finance.yahoo.com/quote/DUK/> entre las fechas 15/05/2023 y 9/05/2025. Inicialmente, se había considerado extender el muestreo hasta el 15/05/2025 pero se descartó debido a una caída atípica del activo el 9 de mayo asociada a un evento puntual que se describe más adelante. Para todas las pruebas se adoptó una frecuencia diaria equivalente

a $\Delta t = 1/252$. Antes de ejecutar los tests formales, se elaboraron gráficas descriptivas de precios y retornos, además de señalar noticias relevantes que expliquen movimientos bruscos al alza o a la baja de precio del activo.

A continuación, se verificaron los supuestos del MBG. Primero, se calculó la función PACF para comprobar que no existiera autocorrelación significativa en rezagos superiores a uno. Luego, se estimaron el exponente de Hurst y la dimensión fractal para garantizar la presencia de tendencia. Después se extraen los retornos instantáneos como se definieron en (3) y se contrató su normalidad con los test previamente mencionados, normalizando los retornos para el caso del test KS. Finalmente, se evaluó la homocedasticidad de los residuos de la difusión con los 3 test mencionados. Los resultados se resumen en tablas y gráficos que ilustran los estadísticos obtenidos y los p-valores correspondientes.

Comprobados los supuestos de MBG, se estiman los parámetros del modelo según la expresión (4). Con estos valores, se generaron 1 000 trayectorias de precios mediante simulación para ser contrastados con los datos reales, midiendo así el rendimiento del modelo con el Error absoluto medio porcentual (MAPE). Se consideró que el modelo ofrece buena precisión cuando el MAPE promedio se ubicó por debajo del 5 %.

Finalmente, se llevó a cabo la valoración de opciones financieras del tipo Call Europeas. Para ello, se utilizaron tanto la fórmula cerrada de Black-Scholes como los métodos numéricos programados previamente, aprovechando la estimación de la volatilidad obtenida mediante el modelo de MBG. La tasa libre de riesgo considerada fue $r = 0.05$, y el precio inicial del activo correspondió al último valor registrado en la serie temporal.

Se seleccionaron cinco precios de ejercicio $K = \{K_1, K_2, K_3, K_4, K_5\}$ y cuatro tiempos de maduración $T = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}\}$ años. Posteriormente, se compararon los resultados obtenidos con los precios dados por la fórmula de Black-Scholes, evaluando el error relativo de cada método numérico respecto a la solución analítica. Además del análisis de precisión, se midieron los tiempos de cómputo de cada método para evaluar su eficiencia computacional. Los resultados obtenidos se presentan en tablas, con 2 cifras significativas para el valor de la opción.

IV. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

A. Descripción de los datos

Duke Energy Corporation (NYSE: DUK) es una de las compañías de energía más grandes de Estados Unidos, con sede en Charlotte, Carolina del Norte. Fundada en 1904, opera en los sectores de generación, transmisión y distribución de electricidad, y suministra energía a más de 8 millones de clientes en seis estados del sureste y medio oeste del país. La empresa también participa en el negocio del gas natural y está en proceso de transición hacia fuentes más limpias, invirtiendo en energía solar, eólica y tecnologías de almacenamiento. Como activo bursátil, DUK representa una acción defensiva dentro del sector de servicios públicos (“utilities”), tradicionalmente asociada a rendimientos estables

y dividendos atractivos, lo que la convierte en una opción común para inversores conservadores que buscan seguridad en periodos de alta volatilidad del mercado.

La serie analizada corresponde al precio histórico de las acciones de este activo financiero cuya evolución se muestra en la Figura 1. En ella se aprecian fluctuaciones típicas de activos bursátiles, incluyendo picos pronunciados, mínimos destacados y posibles cambios de régimen, especialmente hacia el final del periodo observado.

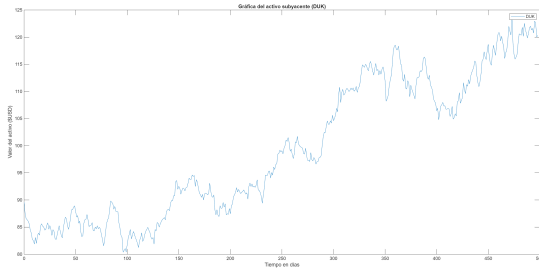


Fig. 1. Gráfica del activo (DUK)

Durante dicho período, las acciones de DUK mostraron un comportamiento con tendencia ascendente, pasando de niveles cercanos a los \$82 USD en mayo de 2023 a alcanzar máximos superiores a los \$120 USD en marzo de 2025. Este crecimiento sostenido refleja una mejora en las perspectivas del negocio, apoyada por el avance de la transición energética y asociaciones estratégicas. Entre los eventos más relevantes que podrían haber influido en estos movimientos destacan:

- 29 de mayo de 2024: Duke Energy anunció acuerdos con Amazon, Google y Microsoft para desarrollar nuevas tarifas que fomenten tecnologías libres de carbono como reactores modulares pequeños y almacenamiento de energía. Esta noticia reforzó la posición de la empresa en la transición energética [28].
- 4 de diciembre de 2024: El Ayuntamiento de Carrboro, Carolina del Norte, demandó a Duke Energy por su presunta participación en una campaña de desinformación climática, lo que podría tener implicaciones reputacionales y regulatorias [29].
- 13 de enero de 2025: Se anunció el nombramiento de Harry Sideris como nuevo CEO, quien asumió el cargo en abril de ese año, sucediendo a Lynn Good tras más de dos décadas. Este cambio generó expectativas positivas sobre el rumbo estratégico de la empresa [30].
- 28 de febrero de 2025: Duke anunció una inversión de \$521 millones en nuevas plantas solares en Florida, lo que añade cerca de 300 MW a la red, contribuyendo a la diversificación energética y posibles reducciones de costos a largo plazo [31].
- 9 de mayo de 2025: Un evento curioso captó la atención mediática cuando una serpiente provocó un apagón en Durham, NC, dejando sin electricidad a casi 10.000 personas. Si bien el impacto financiero fue limitado, resalta la vulnerabilidad de la infraestructura [32].

A continuación, se presenta un resumen estadístico básico del activo en la Tabla I:

TABLA I
RESUMEN ESTADÍSTICO BÁSICO DEL ACTIVO (FIGURA 1)

Estadística	Valor
Valor mínimo	80.4050
Valor máximo	124.0500
Media	99.2826
Mediana	97.0851
Moda	83.4540
Varianza	162.1753
Desviación estándar	12.7348
Curtosis	1.5919
Asimetría	0.2385

Estos valores sugieren una ligera asimetría positiva y una curtosis inferior a 3, lo que indica colas más ligeras que una normal. Finalmente, en la Figura 2, se incluye el histograma de los precios donde tendió a agruparse sobre dos zonas principales: un grupo de cotizaciones alrededor de 85–90 USD (la barra más alta) y un segundo grupo en torno a 110–115 USD, lo cual sugiere que hubo un tramo inicial con precios relativamente bajos y un tramo posterior con una elevación clara en el valor del activo; en conjunto, el gráfico revela que, aunque los precios oscilaron entre aproximadamente 80 y 125 USD, los días más frecuentes se concentraron en esos dos rangos.

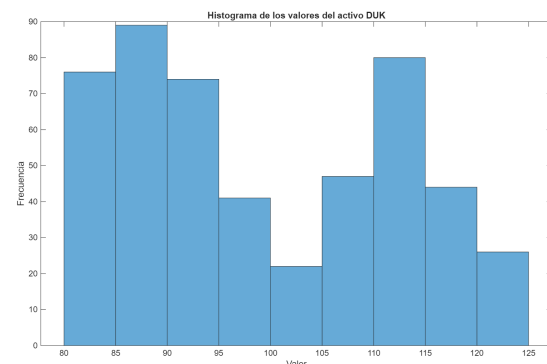


Fig. 2. Histograma de los valores del activo (DUK)

B. Indicadores y pruebas estadísticas

La Figura 3 muestra la función de autocorrelación parcial (PACF) de la serie de precios del activo. Se observa que únicamente el primer rezago presenta correlación significativa, lo cual es consistente con el comportamiento de un MBG.

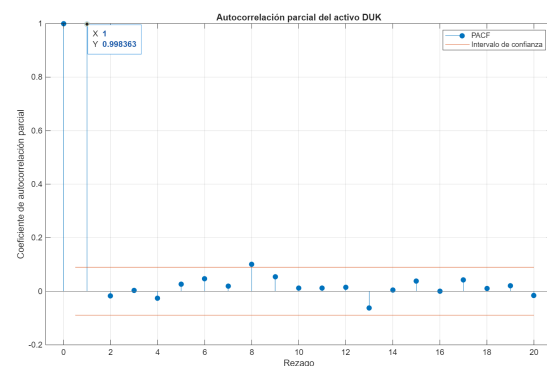


Fig. 3. Autocorrelación parcial de los valores del activo (DUK)

En cuanto a la geometría de la serie, se calcularon los siguientes indicadores:

TABLA II
MEDIDAS GEOMÉTRICAS DE LA SERIE

Medida	Dimensión Fractal (D)	Exponente de Hurst (H)	D+H
Valor	1.4136	0.4731	1.8867

Estos valores confirman la relación teórica entre dimensión fractal D y exponente de Hurst H , dada por $D + H \approx 2$. Adicionalmente, como $1 < D < 1.5$ podemos confirmar que este es un proceso de tendencia, como se espera de un MB.

A continuación se estudian los retornos instantáneos (3), graficados en la Figura 4. Se observa una serie centrada en cero, con posibles valores atípicos.

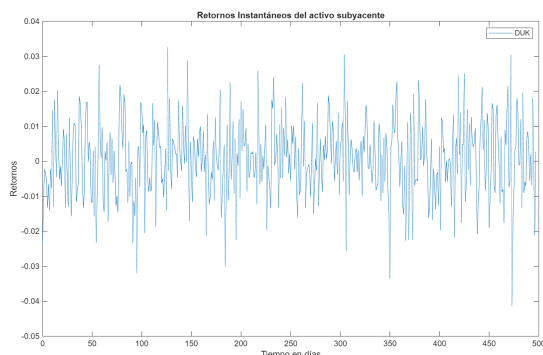


Fig. 4. Gráfico de los retornos instantáneos del activo (DUK)

La estadística descriptiva básica de los retornos se presenta a continuación en la Tabla III:

TABLA III
ESTADÍSTICOS DESCRIPTIVOS BÁSICOS DE LOS RETORNOS INSTANTÁNEOS DEL ACTIVO (DUK)

Estadístico	Valor
Valor mínimo	-0.0413
Valor máximo	0.0325
Media	0.0007
Mediana	0.0008
Moda	-0.0413
Varianza	0.0001
Desviación estándar	0.0110
Curtosis	3.3179
Asimetría	-0.0924

Adicionalmente, en la Figura 5 se observa que los retornos no presentan correlación significativa en ningún rezago, lo cual es consistente con el comportamiento esperado bajo la hipótesis de un MB.

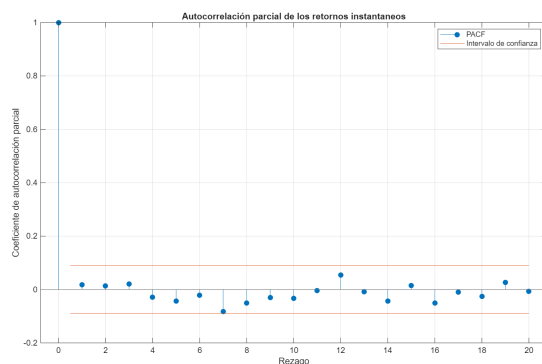


Fig. 5. Función de autocorrelación parcial (PACF) de los retornos

El histograma de los retornos (Figura 6) sugiere una posible distribución normal, hipótesis que se apoya también en el QQ-plot (Figura 7). El diagrama de cajas (Figura 8) muestra que la presencia de valores atípicos es moderada. En caso de ser necesario, se puede considerar la eliminación de hasta el 5% de los datos extremos para garantizar las pruebas de normalidad.

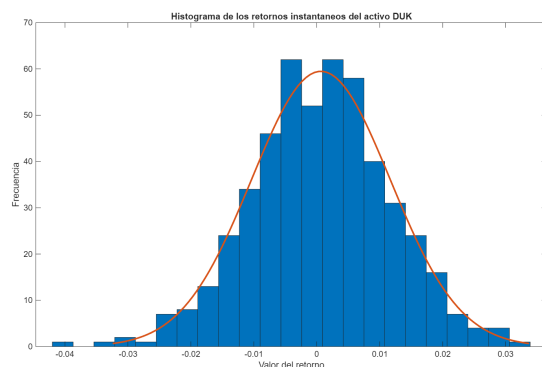


Fig. 6. Histograma de los retornos instantáneos del activo (DUK)

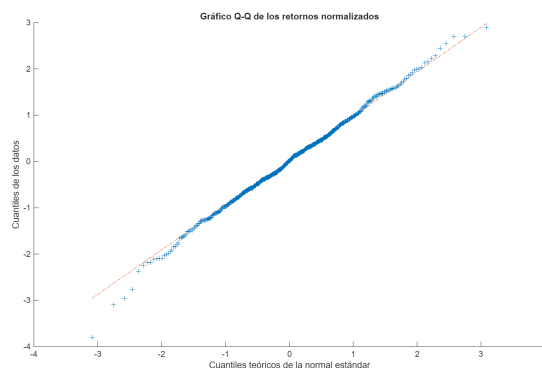


Fig. 7. QQ-plot de los retornos instantáneos del activo (DUK)

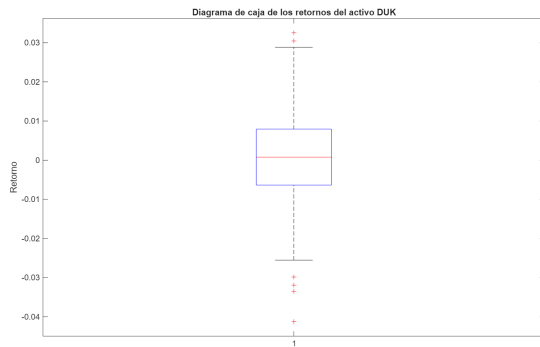


Fig. 8. Diagrama de caja de los retornos instantáneos del activo (DUK)

Se realizaron cuatro pruebas de normalidad, cuyos resultados se resumen en la Tabla IV:

TABLA IV

RESULTADOS DE PRUEBAS DE NORMALIDAD SOBRE LOS RETORNOS DEL ACTIVO DUK

Prueba	Rechazar H_0
Jarque-Bera	No
Kolmogorov-Smirnov	No
Anderson-Darling	No
Lilliefors	No

Ninguna de estas pruebas rechazó la hipótesis nula de normalidad a un nivel de significancia del 5%.

Pruebas de homocedasticidad: Para verificar si la varianza de los retornos es constante (homocedasticidad), se aplicó el test de ARCH sobre los residuos centrados, obteniéndose un valor $h = 0$, lo que indica que no hay evidencia de heterocedasticidad condicional. Adicionalmente, se analizó la función de autocorrelación parcial (PACF) de los retornos al cuadrado con el fin de detectar posibles efectos ARCH. Como se muestra en la Figura 9, los retornos cuadráticos tampoco presentan correlaciones significativas en los rezagos, lo cual refuerza la ausencia de heterocedasticidad en los datos.

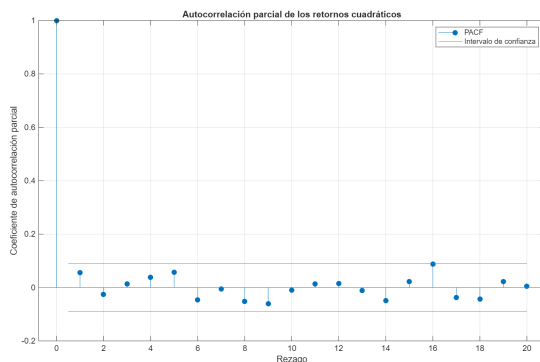


Fig. 9. Función de autocorrelación parcial (PACF) de los retornos al cuadrado

Además, se realizó el test de White, arrojando un p-valor alto ($p = 1$), lo cual también respalda la hipótesis de varianza constante. Adicionalmente, en la Figura 10 se presenta la evolución empírica de la volatilidad histórica acumulada, la cual muestra una estabilización rápida, característica de procesos con volatilidad constante, así como un MB.

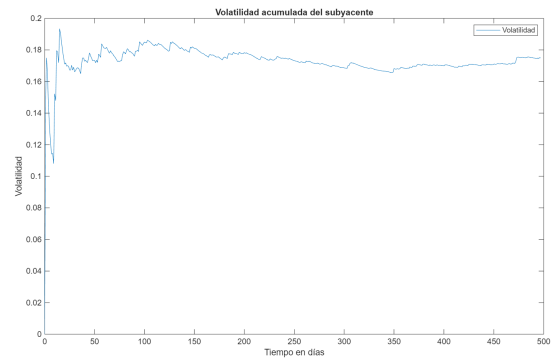


Fig. 10. Volatilidad acumulada del activo (DUK)

C. Estimación y pronóstico sobre la muestra

A partir de los retornos instantáneos se estimaron los parámetros del modelo MBG con las estimaciones encontradas en (4). Con lo cual se obtuvo:

$$\hat{\mu} = \frac{\bar{r}}{\Delta t} = 0.1643, \quad \hat{\sigma} = \sqrt{\frac{\widehat{\text{Var}}(r)}{\Delta t}} = 0.1750,$$

Con estos parámetros, se generaron 1000 trayectorias simuladas como se muestra a continuación:

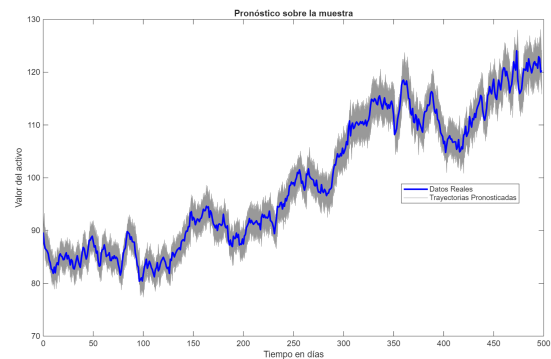


Fig. 11. Gráfica del pronóstico sobre la muestra

En la Figura 11 se muestran las trayectorias pronosticadas (en gris) junto a la trayectoria real del activo (en azul), lo que permite visualizar la dispersión alrededor del comportamiento observado.

Para evaluar la calidad del ajuste, se calculó el error porcentual absoluto medio (MAPE) de cada trayectoria respecto a los valores reales. El histograma de estos errores se presenta en la Figura 12:

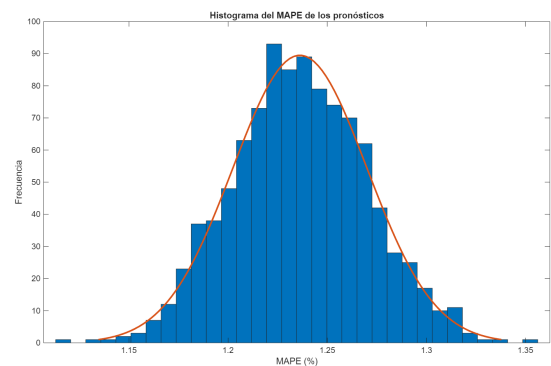


Fig. 12. Histograma del MAPE de los pronósticos sobre la muestra

Los estadísticos descriptivos del MAPE se muestra a continuación en la Tabla V:

TABLA V
ESTADÍSTICOS DESCRIPTIVOS DEL ERROR ABSOLUTO MEDIO PORCENTUAL

Estadístico	Valor
MAPE mínimo	1.1142%
MAPE medio	1.2362%
MAPE mediana	1.2357%
MAPE máximo	1.3557%

Estos resultados muestran que el modelo de movimiento browniano geoétrico logra capturar la dinámica del activo con un error porcentual bastante bajo, adecuado para nuestros fines de simulación estocástica en contextos financieros.

D. Valoración de opciones del tipo Call Europeas

Con base en la estimación previa, se realizó una proyección a futuro del precio del activo utilizando 10000 trayectorias generadas bajo el modelo MBG. Para la valoración de opciones tipo Call Europeas se consideraron cinco precios de ejercicio $K = \{K1, K2, K3, K4, K5\}$, evaluados en cuatro horizontes de maduración: $T = \{1, 1/2, 1/3, 1/4\}$ años.

Los resultados obtenidos de esta proyección se observan en la Figura 13 y se observan los valores exactos de los precios de ejercicio K en la Tabla VI.

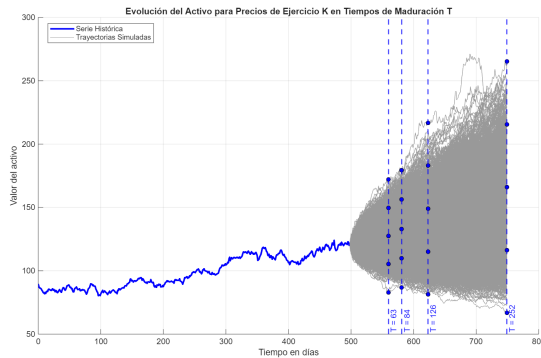


Fig. 13. Proyección del valor del activo para determinar precios de ejercicio en los diferentes tiempos de maduración

TABLA VI
PRECIOS DE EJERCICIO PARA CADA TIEMPO DE MADURACIÓN

$T \backslash K$	K1	K2	K3	K4	K5
1	66.712	116.31	165.91	215.52	265.12
1/2	81.366	115.22	149.07	182.91	216.76
1/3	86.761	109.93	133.09	156.26	179.43
1/4	83.055	105.3	127.55	149.79	172.04

Finalmente, se compararon los métodos numéricos tanto en términos de su error relativo, utilizando como referencia la solución exacta del modelo de Black-Scholes (Tabla VII), como en sus respectivos tiempos de cómputo (Tabla VIII).

Los resultados sugieren que, aunque la simulación es más flexible para modelos sin solución cerrada, en contextos como el presente la fórmula de Black-Scholes sigue siendo preferible por su rapidez y precisión.

V. CONCLUSIONES

En este trabajo se pudo comprobar que el valor de la acción de la empresa DUK se puede modelar como un MBG sustentado en diferentes pruebas estadísticas, y finalmente, obteniendo un pronóstico sobre la muestra de 1.2% de MAPE promedio que confirma la posibilidad de modelar la evolución de este valor como un MBG. Posteriormente, se implementó una proyección para determinar precios de ejercicio del activo en distintos tiempos de maduración, continuando con el uso diferentes métodos numéricos para la valoración de las mismas. Algunas conclusiones de estos se mencionan a continuación.

En cuanto a los tiempos de cómputo, se observó que el método de diferencias finitas explícitas presentó los mayores tiempos de ejecución en comparación con los otros enfoques numéricos. Esta diferencia se acentúa especialmente cuando se consideran tiempos de maduración mayores (T) y precios de ejercicio más altos (K). Esto se debe a que el tamaño de la malla utilizada en este método depende directamente tanto del tiempo como del espacio: al tomarse $S_{max} = 2 \cdot K$, un valor más grande de K implica un dominio espacial más amplio, mientras que un mayor T requiere más divisiones temporales para mantener la estabilidad numérica. Como consecuencia, el número total de nodos en la malla crece significativamente, aumentando el costo computacional. Esta característica explica por qué el método de diferencias finitas, aunque preciso, resulta ser el más costoso computacionalmente entre los métodos comparados.

Otro aspecto relevante observado en el análisis es el comportamiento de los métodos numéricos cuando el precio de ejercicio K toma valores altos. En estos casos, el valor de la opción disminuye drásticamente, acercándose a cero. Por ejemplo, para $T = 1$ y $K = 265.12$, el valor de la opción según Black-Scholes es tan solo 7.69×10^{-5} . Esta situación se repite en otros horizontes como $T = 1/2, 1/3$ y $1/4$, con precios de ejercicio elevados como $K = 216.76, 179.43$ y 172.04 , donde los valores de las opciones también son cercanos a cero.

Cuando el valor de referencia (Black-Scholes) es muy pequeño, incluso pequeñas diferencias absolutas entre métodos generan errores relativos elevados, como se ve en el caso de $T = 1/2, K = 216.76$, donde el error relativo de Monte-Carlo alcanza un 32.8%, y en $T = 1/4, K = 172.04$, donde el método de diferencias finitas presenta un error relativo del 0.83%, notablemente mayor que en otros valores de K .

TABLA VII

COMPARACIÓN DE DIFERENTES MÉTODOS PARA PRECIOS DE OPCIONES Y ERRORES RELATIVOS RESPECTO A BLACK-SCHOLES

T	K	Black-Scholes	Monte Carlo			Árbol Binomial	Diferencias Finitas	ErrorRel MC %	ErrorRel BT %	ErrorRel DF %
			MC.Min	MC.Mean	MC.Max					
1	66.712	56.872	56.08	56.858	57.768	56.872	55.58	0.0245	0.00022741	2.2721
1	116.31	13.802	13.294	13.803	14.381	13.801	13.813	0.0059	0.0078964	0.0768
1	165.91	0.628	0.5173	0.6278	0.7682	0.6263	0.627	0.0386	0.27132	0.1669
1	215.52	0.0089	0	0.0088	0.0290	0.0088	0.0089	1.6889	1.0661	0.0564
1	265.12	7.6895e-05	0	7.6391e-05	0.0053	7.4185e-05	7.6679e-05	0.6544	3.5232	0.2770
1/2	81.366	40.974	40.543	40.974	41.442	40.974	41	0.0007	0.00011612	0.0635
1/2	115.22	10.574	10.19	10.568	10.956	10.575	10.573	0.0577	0.010786	0.0023
1/2	149.07	0.4485	0.3726	0.4469	0.5230	0.4483	0.4471	0.3445	0.049611	0.3058
1/2	182.91	0.0036	0	0.0035	0.0137	0.0035	0.0036	1.6391	1.0567	0.2231
1/2	216.76	1.0442e-05	0	7.0129e-06	0.0013	9.9601e-06	1.0426e-05	32.838	4.6121	0.1472
1/3	86.761	35.004	34.64	35.007	35.405	35.004	35.008	0.0096	6.6035e-05	0.0114
1/3	109.93	13.074	12.718	13.075	13.428	13.074	13.08	0.0081	0.0010165	0.0424
1/3	133.09	1.4364	1.3204	1.4352	1.5761	1.4364	1.4381	0.0894	0.0050098	0.1178
1/3	156.26	0.035	0.0178	0.0350	0.0600	0.0348	0.0353	0.0173	0.57346	0.2359
1/3	179.43	0.0003	0	0.0002	0.0033	0.0003	0.0003	2.1437	1.9874	0.3742
1/4	83.055	38.306	37.955	38.305	38.654	38.306	38.346	0.0074	2.1304e-05	0.1048
1/4	105.3	16.53	16.177	16.531	16.853	16.53	16.544	0.0055	0.0013421	0.0810
1/4	127.55	2.0546	1.9315	2.0536	2.1953	2.0553	2.0544	0.0497	0.034681	0.0485
1/4	149.79	0.0357	0.0201	0.03549	0.0579	0.0356	0.035576	0.6614	0.27845	0.4289
1/4	172.04	0.0001	0	0.00011	0.0021	0.0001	0.00011574	9.4003	2.2856	0.8256

TABLA VIII

TIEMPOS DE CÓMPUTO POR MÉTODO DE VALORACIÓN DE OPCIONES

T	K	Tiempo BS (s)	Tiempo MC (s)	Tiempo BT (s)	Tiempo DF (s)
1	66.712	0.00303	53.709	0.00450	0.495
1	116.31	0.00043	54.599	0.00188	5.933
1	165.91	0.00084	54.438	0.00112	20.015
1	215.52	0.00040	54.397	0.00128	46.417
1	265.12	0.00128	54.244	0.00241	86.386
1/2	81.366	0.00081	55.410	0.00255	0.609
1/2	115.22	7.59e-05	54.294	0.00124	2.326
1/2	149.07	0.000103	53.950	0.00087	6.842
1/2	182.91	8.74e-05	53.433	0.00079	12.285
1/2	216.76	9.43e-05	53.66	0.00139	21.487
1/3	86.761	4.11e-05	53.346	0.00084	0.440
1/3	109.93	8.36e-05	55.060	0.00082	1.157
1/3	133.09	9.98e-05	54.026	0.00081	3.049
1/3	156.26	0.00019	53.432	0.00083	4.493
1/3	179.43	0.00010	54.523	0.00089	7.286
1/4	83.055	4.29e-05	54.337	0.00080	0.343
1/4	105.3	8.16e-05	53.879	0.00079	0.799
1/4	127.55	0.00010	55.749	0.00092	1.799
1/4	149.79	8.91e-05	53.533	0.00083	3.317
1/4	172.04	8.59e-05	53.178	0.00092	4.870

REFERENCIAS

- [1] Investopedia, "Derivative definition," 2024. [Online]. Available: <https://www.investopedia.com/terms/d/derivative.asp>
- [2] International Monetary Fund (IMF), "Annex vii: Financial derivatives – bpm7 draft," 2024. [Online]. Available: <https://www.imf.org/-/media/Files/Data/Statistics/BMP7/draft-chapters/bpm7-annex7.ashx>
- [3] S. Gray and P. Joanna, "Derivados financieros," *Centro de Estudios Monetarios Latinoamericanos*, 2003. [Online]. Available: <https://www.secmca.org/DOCUMENTOS/DP/CurvasRendimiento/Bibliografia/02.pdf>
- [4] F. Black and M. Scholes, "The pricing of options and corporate liabilities," *Journal of Political Economy*, vol. 81, no. 3, pp. 637–654, 1973.
- [5] F. de Sousa Santana, "Modelo de valoración de activos financieros (CAPM) y teoría de valoración por arbitraje (APT): Un test empírico en las empresas del sector eléctrico brasileño," *Cuadernos de Contabilidad*, vol. 14, pp. 731 – 746, 12 2013. [Online]. Available: http://www.scielo.org.co/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0123-14722013000200014&nrm=iso
- [6] J. C. Hull, *Options, Futures, and Other Derivatives*, 10th ed. Pearson Education Limited, 2017.
- [7] M. L. de Prado, "Advances in financial machine learning," 2021.
- [8] ScienceDirect, "Derivative financial instrument - topics," 2024. [Online]. Available: <https://www.sciencedirect.com/topics/social-sciences/derivative-financial-instrument>
- [9] L. Miljković, "The role of financial derivatives in financial risks management," *MEST Journal*, vol. 11, pp. 97–104, 01 2023.
- [10] D. J. Higham, "An algorithmic introduction to numerical simulation of stochastic differential equations," *SIAM Review*, vol. 43, no. 3, pp. 525–546, 2001.
- [11] A. N. Akansu and M. U. Torun, *A Primer for Financial Engineering*. Elsevier Science, 2015.
- [12] R. R. Marathe and S. M. R. and, "On the validity of the geometric brownian motion assumption," *The Engineering Economist*, vol. 50, no. 2, pp. 159–192, 2005.
- [13] P. J. Brockwell and R. A. Davis, *Time Series: Theory and Methods*. Springer New York, NY, 1991, vol. 2.
- [14] G. E. P. Box, G. M. Jenkins, and G. C. Reinsel, *Time Series Analysis: Forecasting and Control*, 3rd ed. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1994.
- [15] I. Pilgrim and R. P. Taylor, "Fractal analysis of time-series data sets: Methods and challenges," *Intechopen*, vol. 13, 2018.
- [16] B. Qian and K. Rasheed, "Hurst exponent and financial market predictability," in *IASTED conference on Financial Engineering and Applications*. Proceedings of the IASTED International Conference. Chicago Cambridge, MA, 2004, pp. 203–209.
- [17] Z.-X. Zhang, "Chapter 4 - effect of loading rate on rock fracture," in *Rock Fracture and Blasting*, Z.-X. Zhang, Ed. Butterworth-Heinemann, 2016, pp. 89–110.
- [18] B. B. Mandelbrot, "The fractal geometry of nature/revised and enlarged edition," *New York*, 1983.
- [19] F. C. D. La Torre, J. I. González-Trejo, C. A. Real-Ramírez, and L. F. Hoyos-Reyes, "Fractal dimension algorithms and their application to time series associated with natural phenomena," *Journal of Physics: Conference Series*, vol. 475, no. 1, 2013.
- [20] C. M. Jarque and A. K. Bera, "Efficient tests for normality, homoscedasticity and serial independence of regression residuals," *Economics Letters*, vol. 6, no. 3, pp. 255–259, 1980.
- [21] A. N. Kolmogorov, "Sulla determinazione empirica di una legge di distribuzione," *Giornale dell'Istituto Italiano degli Attuari*, vol. 4, pp. 83–91, 1933.
- [22] T. W. Anderson and D. A. Darling, "Asymptotic theory of certain "goodness-of-fit" criteria based on stochastic processes," *The Annals of Mathematical Statistics*, vol. 23, no. 2, pp. 193–212, 1952.
- [23] H. W. Lilliefors, "On the kolmogorov-smirnov test for normality with mean and variance unknown," *Journal of the American Statistical Association*, vol. 62, no. 318, pp. 399–402, 1967.
- [24] R. F. Engle, "Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of united kingdom inflation," *Econometrica*, vol. 50, no. 4, pp. 987–1007, 1982.
- [25] H. White, "A heteroskedasticity-consistent covariance matrix estimator and a direct test for heteroskedasticity," *Econometrica*, vol. 48, no. 4, pp. 817–838, 1980. [Online]. Available: <http://www.jstor.org/stable/1912934>
- [26] T. Aste, "Generalized hurst exponent," MATLAB Central File Exchange, 2025, disponible en: <https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/30076-generalized-hurst-exponent>. Recuperado 1 junio 2025.
- [27] A. Han, "Fractal volatility of financial time series," MATLAB Central File Exchange, 2025, disponible en: <https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/31951-fractal-volatility-of-financial-time-series>. Recuperado 1 junio 2025.
- [28] L. Kearney, "Duke energy inks deals with amazon, google, microsoft on clean energy supply," *Reuters*, May 2024. [Online]. Available: <https://www.reuters.com/sustainability/duke-energy-signs-agreements-with-amazon-google-microsoft-clean-energy-supply-2024-05-01/>
- [29] L. Sherman and K. Peralta Soloff, "Town of carrboro sues duke energy," *Axios*, December 2024. [Online]. Available: <https://www.axios.com/local/raleigh/2024/12/04/carrboro-nc-duke-energy-lawsuit>
- [30] Reuters, "Utility firm duke energy names insider harry sideris as ceo," *Reuters*, January 2025. [Online]. Available: <https://www.reuters.com/business/utility-firm-duke-energy-names-insider-harry-sideris-ceo-2025-01-13/>
- [31] O. Unite, "Duke energy florida invests \$521 million in four new solar sites," February 2025, reddit. [Online]. Available: <https://energynews.pro/en/duke-energy-florida-invests-521-million-in-four-new-solar-sites/>
- [32] S. Kimberlee, "One snake manages to shut off power in north carolina, leaving 10,000 people in the dark," *People Magazine*, May 2025. [Online]. Available: <https://people.com/snake-causes-power-outage-10000-customers-north-carolina-11730203>