①

3º ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΣΤΗΝ ΑΡΜΟΝΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ.

Φράγκος Αναστάσιος, ΑΜ: 1112201900239.

Παρατηρήσεις / Σχόλια: 1. χ_I : είναι η δείκτρια του I. 2. $f_A := \frac{1}{\lambda(A)}\int_A$, όταν φυσικά $\lambda(A)<\infty$ και $\lambda(A)\neq 0$. 3. $\Re(z)$: Το πραγματικό μέρος του μιγαδικού z. 4. $\Im(z)$: Το μιγαδικό μέρος του μιγαδικού z. 5. $f_n \to f$ η ακολουθία f_n συγκ. ομοιόμορφα σε f.

Άσκηση 1: Έστω $0<a\leq\pi$ και $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}$ η συνάρτηση $f(x)=\chi_{[-a,a]}(x)$.

(α) Αποδείξτε ότι $\hat{f}(0)=\frac{a}{\pi}$ και $\hat{f}(k)=\frac{\sin(ka)}{\pi k}$ αν $k\neq 0$.

(β) Αποδείξτε ότι για κάθε $x\in[-\pi,\pi]\setminus\{\pm a\}$ ισχύει:

$$\chi_{[-a,a]}(x)=\frac{a}{\pi}+\sum_{k\neq 0}\frac{\sin(ka)}{\pi k}e^{ikx}$$

(γ) Υπολογίστε τα αθροίσματα:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(ka)}{k} \quad \text{και} \quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin^2(ka)}{k^2}$$

Λύση:

(α) Για κάθε $k\neq 0$ ορίζεται ο k-οστός συντελεστής Fourier:

$$\hat{f}(k):=f_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}\,dx$$

και για $k=0$:

$$\hat{f}(0):=f_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$$

Στην προκειμένη άσκηση, αν $f:=\chi_{[-a,a]}$, $0<a\leq\pi$ έχουμε:

- $\hat{f}(k)=f_{-\pi}^{\pi}\chi_{[-a,a]}e^{-ikx}\,dx \overset{*}{=} \frac{1}{2\pi}\int_{-a}^{a}e^{-ikx}\,dx$

$$=\frac{1}{2\pi}\left[\int_{-a}^{a}\cos(kx)\,dx + i\cancel{\int_{-a}^{a}\sin(kx)\,dx}\right]$$ 0 διότι η $\sin kx$ είναι περιττή.

$$=\frac{1}{2\pi}\left[2\int_{0}^{a}\cos kx\,dx\right]$$ διότι η $\cos kx$ είναι άρτια.

$=\sin ka/\pi k$, εάν φυσικά $k\neq 0$.

⊛ Φυσικά το * δικαιολογείται

$$\bullet\ \hat{f}(0) = \int_{-\pi}^{\pi} \chi_{[-a,a]}(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-a}^{a} 1\,dx$$

$$= \frac{a}{\pi}$$

(β) Η συνάρτηση $f=\chi_{[-a,a]}$ είναι συνεχώς παραγωγίσιμη στο σύνολο $[-\pi,\pi]\setminus\{\pm a\}$, μάλιστα $m\in\mathbb{N}$ φορές, $\forall m\in\mathbb{N}$.

Ειδικότερα, $S_n(f,x)\longrightarrow f(x)\quad \forall x\in[-\pi,\pi]\setminus\{\pm a\}$.

Επομένως,

$$\lim_n S_n(f,x) = f(x) = \chi_{[-a,a]}(x) \Rightarrow$$

$$\chi_{[-a,a]}(x) \overset{⊛}{=} \frac{a}{\pi} + \sum_{k\in\mathbb{Z}^*} \frac{\sin(ka)}{k\pi} e^{ikx}$$

⊛ αφού $S_n(f,x) = \frac{a}{\pi} + \sum_{\substack{k=-n\\ k\neq 0}}^{n} \frac{\sin(ka)}{k\pi} e^{ikx}$

(γ) Εφόσον $0\in[-a,a]$ $(a>0)$, στη σχέση του υποερωτήματος (β) αντικαθιστούμε $x\mapsto 0$ και έχουμε:

$$1 = \chi_{[-a,a]}(0) = \frac{a}{\pi} + \sum_{k\in\mathbb{Z}^*} \frac{\sin(ka)}{\pi k}$$

Επειδή επιπλέον $\sum_{k\in\mathbb{Z}^*} \frac{\sin(ka)}{\pi k} = 2\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{\sin(ka)}{\pi k}$,

ισχύει:

$$1 = \frac{a}{\pi} + 2\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{\sin(ka)}{\pi k}$$

Δηλαδή:

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{\sin(ka)}{\pi k} = 2\left(1-\frac{a}{\pi}\right)$$

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{\sin(ka)}{k} = 2\pi - 2a$$

Για την απόδειξη του $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^2(ka)}{k^2}$ κάνουμε πρώτα μια προετοιμασία.

<u>ΛΗΜΜΑ:</u> Έστω $\mathcal{F}$ ο γραμμικός ισομετρικός ισομορφισμός $\mathcal{F}: L^2 \twoheadrightarrow \ell^2(\mathbb{Z})$ ο οποίος ορίζεται ως εξής: $f \mapsto (\hat{f}(k))_{k\in\mathbb{Z}}$.

Τότε αληθεύει:

$$\|f\|_2^2 = \langle f, f \rangle_{L^2} = \langle \mathcal{F}f, \mathcal{F}f \rangle_{\ell^2}$$

Δ

Ειδικότερα, στην περίπτωσή μας, για $f := \chi_{[-a,a]}$, η f είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμη. Επομένως,

$$\|\chi_{[-a,a]}\|_2^2 = \langle \mathcal{F}f, \mathcal{F}f \rangle_{\ell^2} = \left\langle \left(\overbrace{\frac{\sin(-ka)}{-\pi k}}^{\text{εν. για κάθε } k}, \frac{a}{\pi}, \overbrace{\frac{\sin ka}{\pi k}}^{\text{εν. για κάθε } k.} \right)_{k\in\mathbb{N}}, \left(\frac{\sin(-ka)}{-\pi k}, \frac{a}{\pi}, \frac{\sin ka}{\pi k} \right)_{k\in\mathbb{N}} \right\rangle_{\ell^2}$$

$$\Rightarrow \|\chi_{[-a,a]}\|_2^2 = \frac{a^2}{\pi^2} + 2 \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{\sin^2 ka}{\pi^2 k^2}.$$

Όπου $\|\chi_{[-a,a]}\|_2^2$ είναι το τετράγωνο της 2-νόρμας στον χώρο L^2, της $\chi_{[-a,a]}$ και $\langle \mathcal{F}f, \mathcal{F}f \rangle_{\ell^2}$ είναι το εσωτερικό γινόμενο στον ℓ^2, το οποίο υπολογίζεται στην εικόνα της $f = \chi_{[-a,a]}$ μέσω του $\mathcal{F}$.

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ:</u> Η 2-νόρμα $\|\cdot\|_2$ του χώρου Hilbert L^2 ορίζεται μέσω του εσωτερικού γινομένου

$$\langle f, g \rangle_{L^2} := \int_{-\pi}^{\pi} f\bar{g}$$

(είναι δηλαδή επαγόμενη νόρμα του $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2}$).

Επομένως, $\forall f \in L^2$:

$$\|f\|_2^2 := \langle f, f \rangle_{L^2} = \fint_{-\pi}^{\pi} f \bar{f} \, d\lambda = \fint_{-\pi}^{\pi} |f|^2 \, d\lambda .$$

Ειδικά για την περίπτωση της $f := \chi_{[-a,a]}$:

$$\|f\|_2^2 = \fint_{-\pi}^{\pi} \chi_{[-a,a]} \, d\lambda = \frac{a}{\pi}$$

Τελικά λοιπόν:

$$\frac{a}{\pi} = \|\chi_{[-a,a]}\|_2^2 = \langle \mathcal{F} f, \mathcal{F} f \rangle_{\ell^2} = \frac{a^2}{\pi^2} + 2 \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{\sin^2(ka)}{\pi^2 k^2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{a\pi - a^2}{2} = \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{\sin^2(ka)}{k^2} .$$

$\square$

Άσκηση 3: Έστω $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$ μια τριγωνομετρική σειρά και $S_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}$, $n \in \mathbb{N}$. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν $f \in C(\mathbb{T})$ και υπακολουθία $\{S_{k_n}\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ τέτοια ώστε

$$\|f - S_{k_n}\|_\infty \longrightarrow 0.$$

Αποδείξτε ότι, για κάθε $k \in \mathbb{Z}$:

$$c_k = \fint_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} \, dx$$

<u>Λύση</u>: Για τη λύση της άσκησης, δείχνουμε το ακόλουθο ΛΗΜΜΑ:

<u>ΛΗΜΜΑ</u>: $\hat{S_n}(k) = c_k \quad \forall k \in \mathbb{Z}$, εφόσον φυσικά $|n| \geq |k|$.

Απόδ. του λήμματος: Πράγματι, παρατηρούμε ότι:

$$\hat{S_n}(k) = \fint_{-\pi}^{\pi} S_n(x) e^{-ikx}$$

$$= \fint_{-\pi}^{\pi} \sum_{\ell=-n}^{n} c_\ell e^{+i\ell x} e^{-ikx} \, dx$$

$$= \sum_{\ell=-n}^{n} c_\ell \fint_{-\pi}^{\pi} e^{-i(k-\ell)x} \, dx$$

Επειδή $\displaystyle\fint_{-\pi}^{\pi} e^{-i(k-\ell)x}\,dx = \chi_{\{k=\ell\}}(\ell)$ (5)

Έπεται ότι: $\displaystyle\widehat{S_n}(k) = \sum_{\ell=-n}^{n} c_\ell \chi_{\{k=\ell\}}(\ell) = c_k.$

$\triangle$

Όσον αφορά την άσκηση, γράφουμε:

$$\left| \fint_{-\pi}^{\pi} \left(S_{\tilde{n}}(x) - f(x)\right) e^{-ikx}\,dx \right| \leq$$

$$\leq \fint_{-\pi}^{\pi} \left|S_{\tilde{n}}(x) - f(x)\right| dx$$
$$\leq \fint_{-\pi}^{\pi} \left\|S_{\tilde{n}}(x) - f(x)\right\|_\infty dx$$
$$= \left\|S_{\tilde{n}}(x) - f(x)\right\|_\infty \xrightarrow{\tilde{n}} 0$$

όπου $\tilde{n} = k_n$ για κάποιο k_n (τυχόν δηλαδή k_n)

και δείχνουμε έτσι ότι:

$$\fint_{-\pi}^{\pi} S_{\tilde{n}}(x) e^{-ikx}\,dx \xrightarrow{n} \fint_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx}\,dx$$

Επειδή τώρα $\displaystyle\fint_{-\pi}^{\pi} S_n(x) e^{-ikx} = \widehat{S_n}(k) = c_k$, όταν $|n| \geq |k|$,

τελικά η $\displaystyle\fint_{-\pi}^{\pi} S_n(x) e^{-ikx}\,dx$ είναι σταθερή και ίση με c_k.

Επομένως, $\displaystyle\fint_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx}\,dx = c_k.$

$\square$

Άσκηση 5:

(α) Έστω ακολουθία μιγαδικών αριθμών τέτοια ώστε $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| < \infty$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $f \in C(\mathbb{T})$ τέτοια ώστε $\hat{f}(k) = a_k$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$.

(β) Αποδείξτε ότι δεν υπάρχει $f \in C(\mathbb{T})$ τέτοια ώστε $\hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{k}}$ $\forall k \in \mathbb{N}$

(γ) Χρησιμοποιώντας το (α), αποδείξτε ότι υπάρχει $f \in C(\mathbb{T})$ τέτοια ώστε $\hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{k}}$ για άπειρους το πλήθος $k \in \mathbb{N}$.

Πριν προχωρήσουμε στη λύση, κάνουμε μερικές υπενθυμίσεις από τη μιγαδική ανάλυση:

Θεώρημα: (ομοιόμορφης σύγκλισης του Weierstrass): Στο http://users.uoa.gr/~sma1900239/files/analysis/compan.pdf σελ. 58, Θεώρημα (6.8).

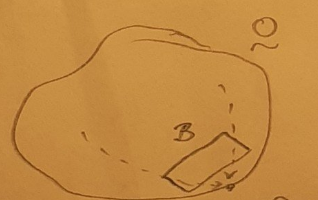
Έστω $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία συναρτήσεων τέτοια ώστε $|f_n(z)| \leq M_n$. Εάν η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$ συγκλίνει, τότε η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ συγκλίνει ομοιόμορφα.

Δ

Πρόταση: Έστω Ω ανοικτό σύνολο και $f \in A(\Omega)$ μια αναλυτική συνάρτηση του Ω η οποία συγκλίνει ομοιόμορφα στο Ω (ως σειρά). Τότε, υπάρχει συνεχής επέκταση της f στο $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$.

Ιδέα της απόδειξης:

Προς άτοπο, επιλέγουμε $\omega \in \partial\Omega$ στο οποίο μια επέκταση της f είναι ασυνεχής. Ενδιαφέρον έχει η περίπτωση όπου η προσέγγιση του ω από δύο "γραμμές" $\beta(z)$, $\gamma(z)$ δίνει διαφορετικό, πεπερασμένο όριο.



$\omega \in \partial\Omega$

Επιλέγουμε B "αρκετά κοντά στο ω", τέτοιο ώστε:

$$\sup_{\gamma(z),\, \beta(z') \in B} \left| f\circ\gamma(z) - f\circ\beta(z') \right| > \varepsilon$$

για κάποιο $\varepsilon > 0$. Για το ίδιο $\varepsilon > 0$, λόγω της ομοιόμορφης σύγκλισης το B μπορεί να επιλεγεί μάλιστα έτσι ώστε:

$$\sup_{z, z' \in B} \left| f(z) - f(z') \right| < \varepsilon$$

Όμως: $$\sup_{\gamma(z),\, \beta(z') \in B} \left| f\circ\gamma(z) - f\circ\beta(z') \right| \leq \sup_{z, z' \in B} \left| f(z) - f(z') \right| < \varepsilon.$$

(άτοπο).

Δ

Λύση: (α) Θεωρούμε την απεικόνιση

$$I_1 : \ell^1(\mathbb{Z}) \longrightarrow (\mathbb{T} \to \mathbb{C})$$

$$\text{με} \quad (a_k)_{k\in\mathbb{Z}} \longmapsto \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{+ikt}$$

Εφόσον η ακολουθία $(a_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ είναι αθροίσιμη η I_1 έχει πράγματι νόημα: Η $\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{+ikt} = F(t)$ συγκλίνει για κάθε $t \in \mathbb{T}$, αφού $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k e^{+ikt}| = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k| < \infty$.

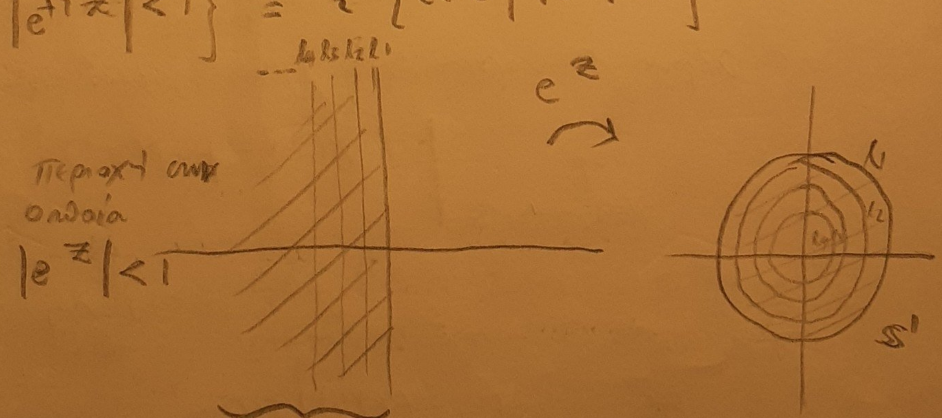
Θα δείξουμε ότι $I_1(\ell^1(\mathbb{Z})) \subseteq C(\mathbb{T})$.

Πράγματι ο εγκλεισμός ισχύει, και για να το αποδείξουμε από εργαζόμαστε ως εξής:

Η $F(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{+ikz}$ είναι αναλυτική ως σύνθεση αναλυτικών*, στο σύνολο του οποίου $\{ z \in \mathbb{C} \mid |e^{-ikz}| < 1 \}$.

Δηλαδή το σύνολο:

$$\Omega := \{ z \in \mathbb{C} \mid |e^{+iz}| < 1 \} = i\,\{ z \in \mathbb{C} \mid |e^{z}| < 1 \} = iH_0 = \mathbb{C} \setminus \mathbb{C}^+$$



$$H_0 = \{ z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) < 0 \}$$

Όπου $\mathbb{C}^+ = \{ z \in \mathbb{C} \mid \Im(z) \geq 0 \}$

Ισχυρισμός: Στο Ω η $F(z)$ συγκλίνει ομοιόμορφα.

Πράγματι, από το Θεώρημα (κριτήριο ομοιόμορφης σύγκλισης του Weierstrass)

* Των $\Sigma |a_k| z^k$, e^{ix}.

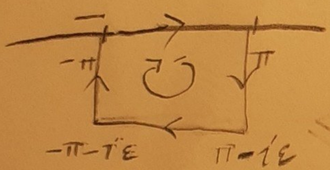
$$|a_k e^{ikz}| \le |a_k|\, |e^{ikz}| \overset{\text{από } \tilde{\Omega}}{\le} |a_k|$$

και η $\sum |a_k|$ συγκλίνει.

Από την Πρόταση, υπάρχει συνεχής επέκταση της F στο $\overline{\tilde{\Omega}}$, έστω η $\tilde{F}$. Ειδικότερα, η $\tilde{F}|_{\mathbb{R}}$ είναι συνεχής.

Η $\tilde{F}$ είναι αναλυτική στο Ω, οπότε ειδικότερα ολόμορφη.

Άρα, για κάθε $\varepsilon > 0$ (είτε μεγάλο είτε μικρό)



$$0 = \int_{\gamma^*} \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{ikz} e^{-ilz}\, dz, \quad l \in \mathbb{Z}$$

όπου $\gamma^* = [-\pi, \pi] \cup [\pi, \pi - i\varepsilon] \cup [\pi - i\varepsilon, -\pi - i\varepsilon] \cup [-\pi - i\varepsilon, -\pi]$

Υπολογίζοντας τα ολοκληρώματα στα επιμέρους τμήματα της γ^*:

- $$\int_{[\pi, \pi - i\varepsilon]} \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{ikz} e^{-ilz}\, dz \overset{(*)}{=}$$
  $$= \int_{[-\pi, -\pi - i\varepsilon]} a_k e^{ikz} e^{-ilz}\, dz$$

(*) με αλλαγή μεταβλητής $z \mapsto z + 2\pi$.

- Έπεται ότι:

$$\int_{[-\pi - i\varepsilon, \pi - i\varepsilon]} \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{ikz} e^{-ilz}\, dz$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{ikz}}_{\tilde{F}|_{\mathbb{R}}} e^{-ilz}\, dz =: \widehat{\tilde{F}|_{\mathbb{R}}}(l)$$

Τώρα, το ευθύγραμμο τμήμα $[-\pi - i\varepsilon, \pi - i\varepsilon]$ περιέχεται στο Ω και η $\tilde{F}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο Ω (ως σειρά).

Άρα:

$$\int_{[-\pi-i\varepsilon,\, \pi-i\varepsilon]} \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{ikz} e^{-ilz}\, dz$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \int_{[-\pi-i\varepsilon,\, \pi-i\varepsilon]} e^{ikz} e^{-ilz}\, dz = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \chi_{\{k=l\}}(k)$$

$$= a_l.$$

και (κατ' επέκταση):

$$\widehat{\tilde{F}|_{\mathbb{R}}}(l) = a_l.$$

Τέλος, θεωρούμε την ακολουθία

$$(\underbrace{\ldots, 0, 0, 0}_{-\mathbb{N}\cup\{0\}}, \underbrace{a_1, a_2, \ldots}_{\mathbb{N}})$$ και, σύμφωνα με όσα δείξαμε,

υπάρχει $\tilde{F}|_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ τέτοια ώστε:

$$\widehat{\tilde{F}|_{\mathbb{R}}}(l) = 0 \quad \forall\, l \in -\mathbb{N}\cup\{0\}$$

και

$$\widehat{\tilde{F}|_{\mathbb{R}}}(l) = a_l, \ \forall\, l \in \mathbb{N}.$$

Οπότε έτσι αποδεικνύεται το ζητούμενο.

(γ) Το γ είναι άμεση συνέπεια του (α): Αρκεί να βρούμε ακολουθία s_k τέτοια ώστε:

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} 1/\sqrt{s_k} < \infty$$

Επιλέγουμε λοιπόν $s_k = k^4$ και έχουμε το ζητούμενο.

$$a_k := \left(\frac{1}{\sqrt{k}} \chi\{k = s_k\}\right)_{k\in\mathbb{N}}$$

(β) Θεώρημα: (σύγκλισης του Weierstrass)

Στον ίδιο σύνδεσμο, σελίδα 58, θεώρημα 6.8.

Έστω $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία ολομόρφων συναρτήσεων του $(\Omega \to \mathbb{C})$.
Εάν $f_n \to_o f$ στα συμπαγή υποσύνολα του Ω, τότε $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ και η σύγκλιση $f'_n \to f'$ είναι ομοιόμορφη στα συμπαγή υποσύνολα του Ω.

Με ισοδύναμη διατύπωση: αν η $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ συγκλίνει ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσ. του Ω, τότε $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \in \mathcal{O}(\Omega)$ και
$\sum_{n=1}^{\infty} f_n' = \left[\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right]'$. Επιπλέον η $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'$ συγκλ. ομοιόμορφα.

Δ

<u>Πρόταση:</u> Στην τάξη έχουμε δείξει ότι:

Αν $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$, η

$G(x) = F(x) - \hat{f}(0)x$ έχει συντελεστές Fourier:

$$\hat{G}(k) = \frac{\hat{f}(k)}{ik}.$$

Δ

Έστω $f \in C(\mathbb{T})$ με $\hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{k}}$. Επειδή
$\hat{G}(k) = \frac{1}{ik^{3/2}}$, η $\sum_{k\in\mathbb{Z}^*} \hat{G}(k)e^{ik(\cdot)}$ συγκλίνει ομοιόμορφα. Από το Θεώρημα (σύγκλισης του Weierstrass)

$$\sum_{k\in[-n,n]\setminus\{0\}} \hat{G}(k)\,e^{ik(\cdot)} \xrightarrow{\circledast}_o G$$ ⊛ Επειδή $\sum_{k\in\mathbb{Z}^*} |\hat{G}(k)| < \infty$

⊛ όπου εδώ γίνεται χρήση τη Πρότασης. ⊛ $\Downarrow$ Weierstrass & παραγώγιση

$$\sum_{k\in[-n,n]\setminus\{0\}} \hat{f}(k)\,e^{ik(\cdot)} \longrightarrow_o f$$

Τώρα παρατηρούμε ότι στο $x = 2\pi$:

$$\sum_{k\in[-n,n]\setminus\{0\}} \frac{1}{\sqrt{k}} e^{ik2\pi} = \sum_{k\in[-n,n]\setminus\{0\}} \frac{1}{\sqrt{k}} \longrightarrow_o f(2\pi)$$

Αυτό είναι άτοπο, αφού $\sum 1/\sqrt{k} \to \infty$. Άρα δεν υπάρχει $f \in C(\mathbb{T})$ με

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{k}}\,.$$

Άσκηση 9: Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, φραγμένη 2π-περιοδική συνάρτηση η οποία είναι αύξουσα κ' μη αρνητική στο $[-\pi,\pi)$. Δ.Ο. υπάρχει $M>0$ τέτοιο ώστε $|a_k(f)| \le \frac{M}{k}$ και $|b_k(f)| \le \frac{M}{k}$ για κάθε $k \geq 1$.

<u>Λύση:</u> Θεωρούμε την περίπτωση μιας δείκτριας συνάρτησης $f = \chi_I$, $I = [A, a]$ διάστημα του $[-\pi,\pi)$.

Εξετάζουμε την περίπτωση των $a_k(f)$. Τα $b_k(f)$ γίνονται ανάλογα:

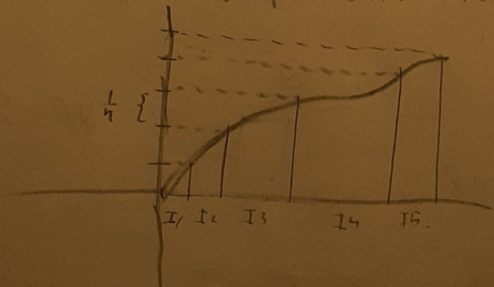
$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx = \int_I f(x)\cos kx\,dx$$
$$= \int_I \left(-\frac{\sin kx}{k}\right)' dx$$
$$\leq \frac{1}{k}$$

Στην συνέχεια, θεωρούμε απλές μετρήσιμες συναρτήσεις $S_n(x)$ της μορφής:

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k \chi_{I_k}$$

όπου I_k είναι διαδοχικά (ξένα) διαστήματα, που αποτελούν διαμέριση του $[-\pi,\pi)$ και είναι τα $f(I_k)$ είναι ισομήκη.

Η επιλογή αυτών των απλών μετρήσιμων συναρτήσεων είναι τέτοια ώστε οι προσεγγίζουσες συναρτήσεις της των S_n να είναι (και) οι αύξουσες οι οποίες είναι φραγμένες



$I_k = [{}^kA_1, {}^kA_2]$

Εξετάζουμε την περίπτωση των $a_k(f)$. Τα $b_k(f)$ φράσσονται ανάλογα:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{k=1}^{n} c_k \chi_{I_k}\right)\cos kx$$
$$= \sum_{k=1}^{n} c_k \int_{{}^kA_1}^{{}^kA_2} \cos kx \leq \sum_{k=1}^{n} \|f\|_\infty \int_{{}^kA_1}^{{}^kA_2} \cos kx = \|f\|_\infty \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx$$
$$\leq \|f\|_\infty \frac{1}{k}.$$

~~[illegible] χρήση της περίπτωσης των δ[illegible].~~

Τέλος, θεωρούμε τη γενική περίπτωση: θεωρούμε δηλαδή μια αύξουσα, φραγμένη $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η οποία και 2π-περιοδική.

Μπορεί να βρεθεί ακολουθία κλιμακωτών $S_n \nearrow f$ όπως στο προηγούμενο βήμα. Κατ' επέκταση: $\|S_k - f\|_\infty \leq \frac{1}{k}$ και

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - S_k(x)| \sin kx \, dx \leq \frac{1}{k}$$

$$\Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| \sin kx \, dx - \int_{-\pi}^{\pi} |S_k(x)| \sin kx \, dx \leq \frac{1}{k}$$

$$\Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx - \int_{-\pi}^{\pi} S_k(x) \sin kx \, dx \leq \frac{1}{k}$$

$$\Rightarrow \hat{f}(k) - \widehat{S_k}(k) \leq \frac{1}{k}$$

και από το προηγούμενο βήμα:

$$\hat{f}(k) \leq \frac{1}{k} + \|S_k\|_\infty \frac{1}{k} \leq \frac{1}{k}\left(1 + \|f\|_\infty\right).$$

Η περίπτωση των $b_k(f)$ γίνεται με ανάλογο τρόπο.

Άσκηση 2. Έστω $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n \in \{-1, 1\}$. Ορίζουμε $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ με $f(x) = \sum_{k=1}^{n} \epsilon_k e^{ikx}$. Δείξτε ότι

$$\|f\|_\infty = \max\{|f(x)| : x \in [0, 2\pi]\} \geq \sqrt{n}.$$

<u>Λύση</u>: Καταρχάς παρατηρούμε ότι:

$$\hat{f}(k) = \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{t=1}^{n} \epsilon_t e^{itx} e^{-ikx} \begin{cases} = \epsilon_k & \text{για κάθε } k \in [n]. \\ = 0 & \text{για κάθε } k \in \mathbb{Z} \setminus [n] \end{cases}$$

κι επιπλέον ότι η f είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμη (δηλ. $f \in L^2$).

Εφόσον $f \in L^2$, από την Parseval:

$$\|f\|_{L^2}^2 = \|(\hat{f}(k))_k\|_{\ell^2}^2 = \sum_{k=1}^{n} \epsilon_k^2 = n.$$

Για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη, θεωρούμε το ακόλουθο λήμμα:

<u>ΛΗΜΜΑ</u>: Για κάθε τετραγωνικά ολοκληρώσιμη f:

$$\|f\|_\infty \geq \|f\|_2$$

<u>Απόδ</u>: Πράγματι, η απόδειξη είναι υπόθεση "πράξεων":

$$\|f\|_\infty = \|f\|_\infty \int_{-\pi}^{\pi} d\lambda \geq \|f\|_2 = \int_{-\pi}^{\pi} |f|^2 \, d\lambda$$

Δ

Δεδομένου του λήμματος, έχουμε το ζητούμενο:

$$\|f\|_\infty^2 \geq \|f\|_{2}^2 = n$$

$$\underline{\|f\|_\infty \geq \sqrt{n}}$$

Άσκηση 7: Έστω $s_1 < s_2 < \dots < s_n < s_{n+1} < \dots$ γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών. Για κάθε $m \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $f_m : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ με:

$$f_m(x) = \frac{1}{m} \sum_{n=1}^{m} e^{i s_n x}$$

(α) Αποδείξτε ότι:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f_{k^2}(x)|^2 \, dx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty$$

(β) Αποδείξτε ότι: αν $k^2 \leq m < (k+1)^2$ τότε:

$$\left| f_m(x) - \frac{k^2}{m} f_{k^2}(x) \right| \leq \frac{2}{\sqrt{m}}$$

(γ) Αποδείξτε ότι $f_m(x) \to 0$ σχεδόν παντού.

Λύση: (α) Κατ' αρχάς παρατηρούμε για τους συντελεστές Fourier των f_m ότι:

$$\widehat{f_m}(k) = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{m} \sum_{n=1}^{m} e^{+i s_n x} \right) e^{-ikx}$$

$$= \frac{1}{m} \sum_{n=1}^{m} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(s_n - k)x} \, dx$$

$$= \frac{1}{m} \sum_{n=1}^{m} \chi\{s_n = k\} = \frac{1}{m}.$$

Δηλαδή:

$$\widehat{f_m}(k) = \begin{cases} \frac{1}{m}, & k \in [m] \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

Επειδή όμως καθεμία από τις f_m είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμη, από την Parseval:

$$\|f_{k^2}\|_{L^2}^2 = \|(\widehat{f_{k^2}}(k))_k\|_{\ell^2}^2 = \sum_{n=1}^{k^2} \left(\frac{1}{k^2} \right)^2 = \sum_{n=1}^{k^2} \frac{1}{k^4} = \frac{1}{k^2}$$

κι επομένως:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f_{k^2}(x)|^2 \, dx = \sum_{k=1}^{\infty} \|f_{k^2}\|_{L^2}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty$$

(β) Γράφουμε:

$$\left|f_m(x) - \frac{k^2}{m} f_{k^2}(x)\right| = \left|\frac{1}{m}\sum_{n=1}^{m} e^{isnx} - \frac{1}{m}\sum_{n=1}^{k^2} e^{isnx}\right|$$

$$= \left|\frac{1}{m}\sum_{n=k^2+1}^{m} e^{isnx}\right| \le \frac{1}{m}\sum_{n=k^2+1}^{m} |e^{isnx}| \le \frac{2k}{m}$$

κι επειδή $k^2 \le m$:

$$\left|f_m(x) - \frac{k^2}{m} f_{k^2}(x)\right| \le \frac{2}{\sqrt{m}}$$

(γ) Καθεμία από τις f_m είναι στον L^2, οπότε αν δείξουμε ότι η ακολουθία $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ είναι Cauchy, θα υπάρχει συνάρτηση $f = \lim_m f_m$ στον L^2, η οποία θα είναι όριο των f_m (λόγω της πληρότητας του L^2). Γι' αυτήν την f θα αληθεύει:

$$\hat{f}_m(k) \longrightarrow \hat{f}(k), \text{ δηλαδή}$$

$$\frac{1}{m} \xrightarrow{m} \hat{f}(k) \Rightarrow \hat{f}(k) = 0 \quad \forall k.$$

Έτσι θα έχουμε το ζητούμενο, αφού: $\hat{f}(k) = 0 \Rightarrow f(x) = 0$ σ.π. και

$$f_m \longrightarrow \lim_m f_m = 0 \text{ σ.π.}$$

Ισχυρισμός: Η $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ είναι ακολουθία Cauchy.

Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ τ.ω. $\frac{2}{\sqrt{m}} < \varepsilon \Rightarrow \frac{2}{\varepsilon} < \sqrt{m} \Rightarrow$
$\Rightarrow \left(\frac{2}{\varepsilon}\right)^2 < m$, οπότε: Επιλέγουμε $k \in \mathbb{N}$ τ.ω. $k^2 \le m < (k+1)^2$ και:

- Εάν $m = k^2$:

$$|f_{m+1}(x) - f_m(x)|$$

$$\le \left|f_{m+1}(x) - \frac{k^2}{m+1} f_{k^2}(x)\right| + \left|\frac{k^2}{m+1} f_{k^2}(x) - f_{k^2}(x)\right| \le \frac{2}{\sqrt{m+1}} + \frac{1}{m+1} \le \varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{4} \longrightarrow 0$$

Εάν $m \neq k^2$ αλλά $k^2 < m < (k+1)^2$:

$$\left| f_{m+1}(x) - f_m(x) \right| \leq \left| f_{m+1}(x) - \frac{k^2}{m} f_m(x) \right| + \left| \frac{k^2}{m} f_m(x) - f_m(x) \right|$$

$$\leq \frac{2}{\sqrt{m}} + \left| \frac{k^2 - m}{m} \right| \left| f_m(x) \right| \leq \frac{2}{\sqrt{m}} + \left| \frac{k^2 - m}{m} \right|$$

$$\leq \frac{2}{\sqrt{m}} + \frac{2k+1}{m} \leq \frac{2}{\sqrt{m}} + \frac{2}{\sqrt{m}} + \frac{1}{m} \leq 2\varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{4} \to 0$$

Σε κάθε περίπτωση, η $(f_m)_m$ είναι βασική.