691. Διδακτική των Μαθηματικών Ι

Παρουσίαση 4^{η} (δεν θα παρουσιαστεί)

Α. Φράγκος

Δευτέρα 08 Νοεμβρίου 2022

Τι θα διαπραγματευτούμε

Μια φορά κι έναν καιρό, στη μακρινή χώρα της Δανίας, ζούσε ο μικρός Ahmed. Ο Ahmed - παρά τη μικρή ηλικία του -[1] είχε μια εξαιρετική ιδέα όσον αφορά την εύρεση (κάποιων) πυθαγόρειων τριάδων.[2] Εμείς εδώ:

- Δείχνουμε ότι καλά τα έλεγε ο Ahmed,
- Γενικεύουμε το αποτέλεσμά του,
- Αναζητούμε έναν τρόπο με τον οποίον οι μαθητές θα μπορούν στο πλαίσιο κάποιων μαθημάτων να ερμηνεύσουν διαισθητικά (εποπτική απόδειξη) το αποτέλεσμα του Ahmed,
- Φτιάχνουμε ένα φύλλο εργασίας για φίλους εργασίας.

[1] Αντίστοιχη Γ' γυμνασίου.

[2] Στην eclass, μάθημα 5.

Η ιδέα του Ahmed

Συμβολικά, η ιδέα του Ahmed ήταν η εξής:

- Θεωρήστε έναν περιττό αριθμό $2n + 1$. Το τετράγωνο αυτού είναι $(2n + 1)^2$.
- Διαιρέστε το $(2n + 1)^2$ με το δύο και θεωρήστε τα δύο ακέραια μέρη:

$$a = \left\lfloor \frac{(2n+1)^2}{2} \right\rfloor \ \textbf{και} \ b = \left\lceil \frac{(2n+1)^2}{2} \right\rceil$$

Τότε $b^2 = a^2 + (2n + 1)^2$.

Ουσιαστικά εδώ ο Ahmed γράφει μια ταυτολογία (μπορεί να επαληθευτεί με αλγεβρικές πράξεις), αλλά ίσως δεν το συνειδητοποιεί. Είναι βέβαια αξιοθαύμαστο πώς κατέληξε στον τύπο μόνο με παρατηρήσεις.

Ας δούμε γιατί ο τύπος ισχύει: Υπολογίζοντας (με πράξεις) τους a, b έχουμε:

$$a = \left\lfloor \frac{4n^2+4n+1}{2} \right\rfloor = 2n^2+2n$$

και

$$b = \left\lceil \frac{4n^2+4n+1}{2} \right\rceil = 2n^2+2n+1$$

Οπότε:

$$a^2+(2n+1)^2 = 4n^4+8n^3+8n^2+4n+1 = b^2$$

(⋆) Απλούστερα, επειδή η σχέση:

$$\forall k \in \mathbb{N},\ (k+1)^2 = k^2 + 2k + 1$$

αληθεύει και το τετράγωνο περιττού είναι περιττός, εάν θεωρήσουμε το συγκεκριμένο k για το οποίο $2k+1 = (2n+1)^2$ τότε:

$$\underbrace{\left(\frac{(2n+1)^2-1}{2}+1\right)^2}_{={\color{red}\left\lceil \frac{(2n+1)^2}{2} \right\rceil^2}} = \underbrace{\left(\frac{(2n+1)^2-1}{2}\right)}_{={\color{blue}\left\lfloor \frac{(2n+1)^2}{2} \right\rfloor^2}} + (2n+1)^2$$

Δηλαδή ${\color{red}b^2} = {\color{blue}a^2} + (2n+1)^2$.

Γενικευμένος Ahmed

Τιμητικά λοιπόν διατυπώνουμε το ακόλουθο:

Θεώρημα (Μέθοδος Ahmed):

Για κάθε φυσικό n υπάρχουν φυσικοί $a < b$ με διαφορά 1 και $b^2 = a^2 + (2n+1)^2$. Δηλαδή υπάρχουν πυθ. τριάδες με την υποτείνουσα να διαφέρει 1 από μια κάθετο.

και το γενικεύουμε:

Θεώρημα (Γενικευμένη μέθοδος Ahmed):

Για κάθε δύο φυσικούς a, δ υπάρχουν φυσικοί $a < b$ με διαφορά δ και $b^2 = a^2 + (3\delta)^2$. Δηλαδή υπάρχουν πυθ. τριάδες με την υποτείνουσα να διαφέρει δ από μια κάθετο.

Για να αποδείξουμε το Θεώρημα, παίρνουμε έμπνευση από το $(\star)$.

Κάπως σύντομα, εάν υπάρχουν τέτοια a, b τότε $b = a + \delta$ και:

$$(a+\delta)^2 = a^2 + 2a\delta + \delta^2$$

Οπότε εάν $a = 4\delta$:

$$b^2 = a^2 + 9\delta^2 = a^2 + (3\delta)^2$$

Έχοντας πάρει την ιδέα, για κάθε δ θέτουμε $a = 4\delta$ και $b = a + \delta$, και έχουμε:

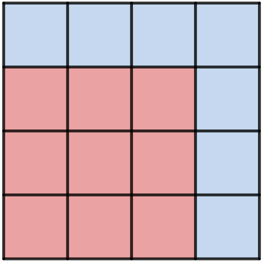
$$b^2 = a^2 + (3\delta)^2$$

Παρατήρηση:

Στη θέση του 3δ μπορεί να μπει οποιοδήποτε περιττό πολλαπλάσιο $(\lambda\delta \neq \delta)$ του δ.

Αποδείξεις με σχήματα

Μπορούμε εποπτικά να δείξουμε γιατί υπάρχουν πυθαγόριες τριάδες που η υποτείνουσα διαφέρει 1 από την μια κάθετο. Γι' αυτό χρησιμοποιούμε το γνωστό επιχείρημα κατασκευής τέλειων τετραγώνων από τέλεια τετράγωνα. Δοθέντος ενός τετραγώνου (με εμβαδόν τετράγωνο φυσικού k), μπορούμε να προσαρτήσουμε κατάλληλα σε σχήμα γάμμα $2k+1$ μοναδιαία τετράγωνα και να κατασκευάσουμε τετράγωνο εμβαδού $(k+1)^2$.



Επομένως, εάν δοθεί κάποιος περιττός $2n+1$, μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα γάμμα εμβαδού $2k+1=(2n+1)^2$ και (κάπως αντίστροφα τώρα) να προσαρτήσουμε κατάλληλα τετράγωνο εμβαδού k^2. Το προκύπτον τετράγωνο έχει εμβαδόν $(k+1)^2$, οπότε εποπτικά δείχνουμε ότι:

$$(k+1)^2 = k^2 + (2n+1)^2$$

Δηλαδή:

$$\left\lceil \frac{(2n+1)^2}{2} \right\rceil^2 = \left\lfloor \frac{(2n+1)^2}{2} \right\rfloor^2 + (2n+1)^2$$

Παρατήρηση

Ο τρόπος του Ahmed δεν είναι γενικός, με την έννοια ότι δεν βρίσκονται όλες οι πυθαγόριες τριάδες μ' αυτόν τον τρόπο. Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα (Γενικευμένη μάθοδος Ahmed), μπορούμε να δείξουμε ότι:

Παρατήρηση

Δεν είναι όλες οι πυθαγόριες τριάδες της μορφής $b = a + 1, a, 2n + 1$, όπως αυτές εξασφαλίζονται μέσω της μεθόδου Ahmed.

Φύλλος αδελφικός

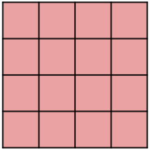
Άσκηση:

- Θυμηθείτε ότι το εμβαδόν ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου με πλευρές α, β δίνεται από τον τύπο $\alpha \cdot \beta$, για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$. Στην ειδική περίπτωση που τα α, β είναι φυσικοί , τι αναπαριστά το εμβαδόν αυτό σε σχέση με το πλήθος των μοναδιαίων τετραγώνων που «χωρούν» στο παραλληλόγραμο;
- Κατασκευάστε διάφορα τετράγωνα χρησιμοποιώντας μοναδιαία τετράγωνα.
- Κατασκευάστε ένα τετράγωνο χρησιμοποιώντας μοναδιαία τετράγωνα. Πώς μπορείτε, χρησιμοποιώντας αυτό το τετράγωνο και μοναδιαία τετράγωνα, να φτιάξετε το αμέσως μεγαλύτερο τετράγωνο; (εννοείται μεγαλύτερο τετράγωνο με πλευρές φυσικούς).

- Έχοντας το μεγαλύτερο τετράγωνο του παραπάνω ερωτήματος, μπορείτε να φτιάξετε το αμέσως μεγαλύτερο; (όπως στο προηγούμενο ερώτημα).
- Κάποιος σας δίνει έναν περιττό αριθμό $2k+1$. Μπορείτε από το τετράγωνο εμβαδού k^2, προσθέτοντας $2k+1$ μοναδιαία τετράγωνα, να κατασκευάσετε τετράγωνο εμβαδού $(k+1)^2$;
- Εάν ο $2k+1$ ήταν τέλειο τετράγωνο, συνηστούν οι αριθμοί

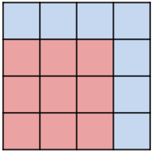
$$k+1,\ k,\ \sqrt{2k+1}$$

πυθαγόρια τριάδα;

- Το εμβαδόν του παραλληλογράμμου είναι το πλήθος των μοναδιαίων τετραγώνων που χωρούν σ' αυτό.[3]
- 
- Έχοντας ένα τετράγωνο από μοναδιαία τετράγωνα πλευράς k, μπορούμε να προσθέσουμε $2k$ μοναδιαία τετράγωνα υπό τη μορφή δύο ορθογώνιων δομών $1 \cdot k$, $k \cdot 1$, εφαπτόμενα σε δύο κάθετες πλευρές του τετραγώνου.

[3] Με κάλυψη - ψηφίδωση του παραλληλογράμμου.

Το προκύπτον σχήμα είναι σχεδόν τετράγωνο, μόνο του λείπει ένα μοναδιαίο τετράγωνο. Το προσθέτουμε κατάλληλα.



Αυτό που προκύπτει είναι ένα μεγαλύτερο τετράγωνο, και μάλιστα το αμέσως μεγαλύτερο, αφού έχει πλευρά $k + 1$.

- Την ίδια διαδικασία μπορούμε να την ξανα-εφαρμόσουμε στο μεγαλύτερο τετράγωνο.
- Ας ξαναδούμε το προ-προηγούμενο ερώτημα: Τα μοναδιαία τετράγωνα που προσθέσαμε για να μεγαλώσουμε το τετράγωνο πλευράς k ήταν $2k + 1$. Οπότε η απάντηση είναι ναι.

- Από τα προηγούμενα βλέπουμε ότι:

$$(k+1)^2 = {\color{red}k^2} + {\color{blue}2k+1}$$

Επειδή τα $(k+1)^2, {\color{red}k^2}$ είναι τέλεια τετράγωνα, εάν και το ${\color{blue}2k+1}$ είναι τέλειο τετράγωνο, οι τρεις αριθμοί:

$$k+1,\ k,\ \sqrt{2k+1}$$

συνηστούν πυθαγόρια τριάδα.