Θεωρία Συνόλων

Ασκήσεις, Μέρος I

Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Φράγκος Αναστάσιος: AM1112201900239

Άσκηση 1: *Έστω A, B σύνολα. Εάν $A =_c B$, να δειχθεί ότι:*

$$\mathcal{P}(A) =_c \mathcal{P}(B)$$

Εφόσον τα σύνολα A και B είναι ισοπληθικά, θα υπάρχει αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση από κάποιο από αυτά στο άλλο. Ειδικότερα, θα υπάρχει $f : A \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow B$.

Ορίζουμε μία απεικόνιση F τέτοια ώστε κάθε στοιχείο τυχόντος υποσυνόλου (C) του A να στέλνεται στην αντίστοιχη τιμή του μέσω της f. Ορίζουμε δηλαδή $F : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(B)$ με $C \mapsto f(C)$.

Η συνάρτηση αυτή F είναι αμφιμονοσήμαντη. Καταρχάς είναι $1-1$ διότι εάν $C \neq D$, είναι δυνατόν να βρεθεί στοιχείο $x \in C - D$. Το στοιχείο $f(x)$ θα βρεθεί εντός του $f(C)$, αλλά όχι εντός του $f(D)$, καθώς εάν $f(x) \in f(D)$ θα σήμαινε ότι $\exists y \in D : f(x) = f(y) \overset{f\ 1-1}{\Longrightarrow} x = y \Rightarrow x \in D$, το οποίο είναι άτοπο. Επομένως $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y) \Rightarrow f$ είναι $1-1$. Η f είναι επίσης επί, καθώς εάν D είναι οποιοδήποτε υποσύνολο του B, σε καθένα από τα στοιχεία του εφαρμόζεται η αντίστροφη απεικόνιση f^{-1} και επομένως το σύνολο $f^{-1}(D) = C$ έχει την ιδιότητα $F(C) = D$.

Άσκηση 2: *Έστω A, B, X, Y σύνολα τέτοια ώστε $A =_c X$ και $B =_c Y$. Δείξτε ότι:*

2.1 $A \times B =_c X \times Y$

2.2 $(A \to B) =_c (X \to Y)$

2.3 Ισχύει ότι $A \cup B =_c X \cup Y$; Δώστε μία ικανή συνθήκη ώστε η προηγούμενη ισοπληθικότητα να ισχύει.

Εφόσον $A =_c X$ και $B =_c Y$, θεωρούμε $T_{A,X}, T_{B,Y}$ να είναι δύο αμφιμονοσήμαντες απεικονίσεις από το σύνολο A στο X και από το σύνολο B στο Y αντίστοιχα.

2.1 Θεωρούμε T την απεικόνιση μέσω της οποίας κάθε διατεταγμένο ζεύγος $(\alpha, \beta) \in A \times B$ στέλνεται στο ζεύγος $\big(T_{A,X}(\alpha), T_{B,Y}(\beta)\big) \in X \times Y$. Η απεικόνιση αυτή T είναι αμφιμονοσήμαντη, αφού είναι $1-1$ και επί κατά συντεταγμένες[1], επομένως $A \times B =_c X \times Y$.

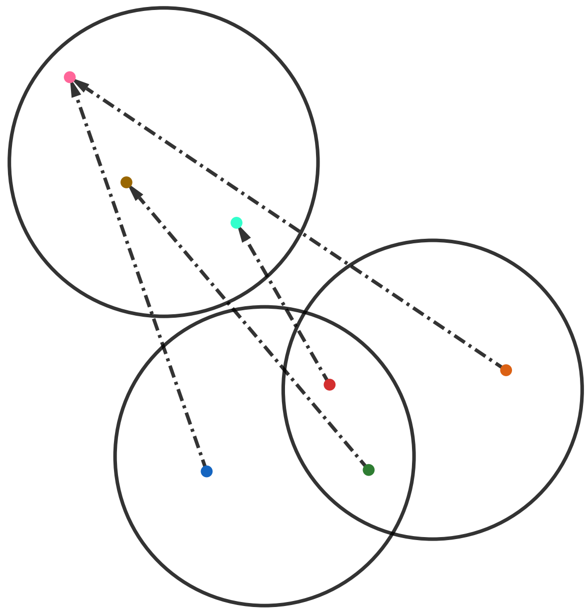
2.2 Θεωρούμε T την απεικόνιση μέσω της οποίας κάθε συνάρτηση $f : A \to B$ στέλνεται στην συνάρτηση $g : X \to Y$ για την οποία ισχύει $g(T_{A,X}) = T_{B,Y}$. Ισχυριζόμαστε ότι η απεικόνιση T είναι αμφιμονοσήμαντη.

Πράγματι, καταρχάς είναι $1-1$. Εάν $f_1, f_2 : A \to B$ είναι συναρτήσεις $f_1 \neq f_2$, θα μπορεί να βρεθεί a τέτοιο ώστε $b_1 = f_1(a) \neq f_2(a) = b_2$. Μέσω της T προκύπτουν συναρτήσεις $g_1, g_2 : X \to Y$ στις οποίες $g_1(T_{A,X}(a)) = T_{B,Y}(b_1) \neq T_{B,Y}(b_2) = g_2(T_{A,X}(a))$, με την ανισοτική σχέση να έπεται από το γεγονός ότι η $T_{B,Y}$ είναι $1-1$ συνάρτηση. Επομένως οι εικόνες επίσης διαφέρουν και έτσι από την ισοδυναμία $f_1 \neq f_2 \Rightarrow T(f_1) = g_1 \neq g_2 = T(f_2)$ συνάγουμε η T είναι $1-1$.

Η T επίσης είναι επί συνάρτηση. Πράγματι, έστω τυχαία συνάρτηση $g : X \to Y$. Ορίζουμε μία συνάρτηση $f : A \to B$ τέτοια ώστε για κάθε τιμή $g(a) = b$ να ισχύει $f : T^{-1}_{A,X}(a) \mapsto T^{-1}_{B,X}(b)$. Η f έχει την ιδιότητα $T(f) = g$, αφού $f(T^{-1}_{A,X}(a)) = T^{-1}_{B,Y}(b) \mapsto g(T_{A,X} \circ T^{-1}_{A,X}(a))[= g(a)] = T_{B,Y} \circ T^{-1}_{B,Y}(b)[= b]$

2.3 Η ισοπληθικότητα $A \cup B =_c X \cup Y$ δεν ισχύει πάντοτε. Ως αντιπαράδειγμα θεωρούμε τα εξής σύνολα: $A = \{{\color{blue}\bullet}, {\color{green}\bullet}, {\color{red}\bullet}\}, B = \{{\color{green}\bullet}, {\color{red}\bullet}, {\color{orange}\bullet}\}$ και $X = Y = \{{\color{cyan}\bullet}, {\color{brown}\bullet}, {\color{pink}\bullet}\}$

[1] Αλλιώς θα μπορούσαμε να πούμε ότι η T είναι αμφιμονοσήμαντη αφού η απεικόνηση $\widehat{T} : (x, y) \mapsto (T^{-1}_{A,X}(x), T^{-1}_{B,Y}(y))$ είναι η αντίστροφη της T από το $X \times Y$ στο $A \times B$.



Παρά το ότι οι σχέσεις ισοπληθικότητας $A =_c X$ και $B =_c Y$ ισχύουν, παρατηρούμε ότι $|A \cup B| = 4 \neq 3 = |X \cup Y|$, δηλαδή ισχύει ότι:

$$A \cup B \neq_c X \cup Y$$

Μια ικανή συνθήκη ώστε η $A \cup B =_c X \cup Y$ να ισχύει είναι η συνθήκη:

$$A \cap B = \emptyset \text{ και } X \cap Y = \emptyset$$

Εάν αυτή ισχύει, τότε θεωρούμε $f : A \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow X$ και $g : B \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow Y$ καθώς επίσης και την συνάρτηση $F : A \cup B \to X \cup Y$ που ορίζεται ως εξής:

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & \text{εάν } x \in A \\ g(x), & \text{εάν } x \in B \end{cases}$$

Η F είναι $1-1$ διότι αν $x \neq y$ με $x, y \in A$, η f είναι $1-1$ και επομένως $F(x) \neq F(y)$. Εάν $x \neq y$ με $x \in A$ και $y \in B$, τότε $f(x) \in X$ και $g(y) \in Y$· επειδή X, Y ξένα, $F(x) \neq F(y)$. Σε κάθε περίπτωση λοιπόν, $x \neq y \Rightarrow F(x) \neq F(y)$, και άρα η F είναι $1-1$.

Η F είναι επί διότι εάν $y \in X \cup Y$, λόγω της ξένης ένωσης, το y θα είναι είτε εντός του X είτε εντός του Y. Εάν είναι εντός του X, η εικόνα του $f^{-1}(y)$ μέσω της F είναι το y. Εάν είναι εντός του Y, η εικόνα του $g^{-1}(y)$ μέσω της F είναι το y. Σε κάθε περίπτωση, η F είναι επί.

Άσκηση 3: *Δείξτε ότι η συνάρτηση $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ με:*

$$f(m, n) = 2^m(2n + 1) - 1$$

είναι μία $1-1$ και επί αντιστοιχία μεταξύ των συνόλων $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ και $\mathbb{N}$.

Παρατήρηση: Εαν x είναι αριθμός άρτιος, τότε η αναπαράστασή του (εάν υπάρχει) $2^m(2n + 1) - 1$ έχει υποχρεωτικά $m = 0$, διαφορετικά ο x θα ήταν περιττός. Εάν ο x είναι αριθμός περιττός, απαιτήται και πάλι η αναπαράστασή του (εάν υπάρχει) να έχει υποχρεωτικά $m > 0$, διαφορετικά ο x θα ήταν άρτιος.

Για να δείξουμε ότι η f είναι αμφιμονοσήμαντη, θα δείξουμε ότι έχει αντίστροφο συνάρτηση. Πράγματι, έστω x να είναι τυχαίος φυσικός αριθμός.

Εάν ο x είναι άρτιος, από την 'παρατήρηση' υποχρεωτικά έχει $m = 0$. Όμως για $m = 0$, ο x παίρνει την μορφή $x = 1 \cdot (2n + 1) - 1 = 2n$, η οποία ορίζεται μονοσήμαντα.

Εάν ο x είναι περιττός, θα γράφεται στην μορφή $2\kappa - 1$. Για τον προσδιορισμό του κ έχουμε την εξίσωση $2\kappa - 1 = 2^m(2n + 1) - 1$, από την οποία προκύπτει ότι $\kappa = 2^{m-1}(2n + 1)$ (από την 'παρατήρηση' έχουμε ότι $m > 0$, επομένως ο εκθέτης $m - 1$ έχει νόημα). Εάν ο κ είναι περιττός, θα πρέπει $m = 1$, και από αυτό είναι άμεσο ότι ο κ ορίζεται μονοσήμαντα. Εάν ο κ είναι άρτιος, έπεται ότι $m > 1$. Σε αυτήν την περίπτωση διαιρούμε τον αριθμό κ με την μεγαλύτερη δύναμη του 2 (έστω 2^δ) και παίρνουμε ότι $\frac{\kappa}{2^\delta} = 2n + 1$. Ο αριθμός $\frac{\kappa}{2^\delta}$ ορίζεται μονοσήμαντα, άρα και ο $\kappa = 2^\delta(2n+1)$. Επειδή ο κ ορίζεται μονοσήμαντα και ο $x = 2\kappa - 1$ ορίζεται μονοσήμαντα.

Έτσι λοιπόν η απεικόνιση:

$$g(x) = \begin{cases} \left(0, \dfrac{x}{2}\right), x \propto 2 \\ \left(\dfrac{x+1}{2^{max\{\delta : 2^\delta | (x+1)\}}}, \left[\dfrac{x+1}{2^{max\{\delta : 2^\delta | (x+1)\}}} - 1 \right] \Big/ 2 \right), x \not\propto 2 \end{cases}$$

είναι η αντίστροφη της f συνάρτηση.

Άσκηση 4: *Δείξτε ότι για κάθε σύνολο A ισχύει:*

$$\mathcal{P}(A) =_c (A \to \{0,1\})$$

Έστω $F : (A \to \{0,1\}) \to \mathcal{P}(A)$ να είναι η συνάρτηση που απεικονίζει $(A \to \{0,1\}) \ni f \mapsto \{a \in A \mid f(a) = 1\} \in \mathcal{P}(A)$. Θα δείξουμε ότι η συνάρτηση αυτή F είναι αμφιμονοσήμαντη.

Η F είναι $1-1$ συνάρτηση. Εάν $f \neq g$ είναι 2 συναρτήσεις του συνόλου $(A \to \{0,1\})$, επειδή διαφέρουν μεταξύ τους, θα υπάρχει $a \in A$ τέτοιο ώστε $f(a) \neq g(a)$. Υποθέτουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $f(a) = 1 = g(a)+1$. Μετά την επίδραση της F, το σύνολο $F(f)$ θα περιέχει το a, ενώ το $F(g)$ δεν θα το περιέχει, και συνεπώς $F(f) \neq F(g)$. Αυτό μας δείχνει ότι η F είναι $1-1$ συνάρτηση.

Η F είναι επίσης επί. Θεωρούμε C να είναι ένα τυχαίο υποσύνολο σύνολο του A. Για κάθε $a \in A$, θεωρούμε την συνάρτηση δ_C η οποία ορίζεται ως:

$$\delta_C(a) = \begin{cases} 1, a \in C \\ 0, a \notin C \end{cases}$$

Η συνάρτηση αυτή δ_C έχει την ιδιότητα $F(\delta_c) = C$, και επομένως η F είναι μία συνάρτηση επί.

Άσκηση 5: *Δείξτε ότι για κάθε φυσικό αριθμό $n \geq 2$ ισχύει:*

$$\mathbb{R}^n =_c \mathbb{R}$$

Αρχικά θα δείξουμε την ισοπληθικότητα για $n = 2$.

Θεωρούμε συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathcal{P}(\mathbb{Q})$ η οποία ορίζεται ως εξής:

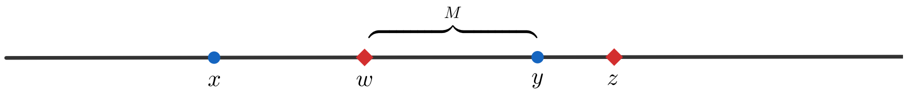
$$f(x,y) = \begin{cases} \Big((-\infty, x] \cup [y, \infty)\Big) \cap \mathbb{Q}, \text{ εάν } x < y \\ [y,x] \cap \mathbb{Q} \text{ εάν } x \geq y \end{cases}$$

Ισχυριζόμαστε ότι η συνάρτηση αυτή f είναι μονομορφισμός. Πράγματι, εάν $(x,y) \neq (z,w)$ είναι δύο διατεταγμένα ζεύγη στον $\mathbb{R}^2$, διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

5.1 Τα $(x,y),(z,w)$ διαφέρουν αλλά διατηρείται η διάταξη. Δηλαδή $(x,y) \neq (z,w)$ και $\Big[(x \leq y, z \leq w)$ ή $(x \geq y, z \geq w)\Big]$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι ισχύει $x \leq y, z \leq w$ και επίσης ότι η διαφοροποίηση γίνεται (τουλάχιστον) στην πρώτη συντεταγμένη. Σε αυτήν την περίπτωση, το σύνολο $M = \big(min\{x,z\}, min\{y,w,max\{x,z\}\}\big)$ είναι μη κενό και όχι μονοσύνολο, επομένως λόγω της πυκνότητας των ρητών μπορεί να βρεθεί ρητός (q) εντός του. Επιπλέον παρατηρούμε ότι το σύνολο M θα έχει κενή τομή με κάποιο από τα $f(x,y), f(z,w)$ και θα είναι υποσύνολο του άλλου, επομένως το q θα ανήκει αποκλειστικά σε ένα από τα δύο σύνολα $f(x,y), f(z,w)$. Από αυτό έπεται ότι $f(x,y) \neq f(z,w)$, και συνεπώς ότι f είναι $1-1$.

Σχήμα 1

5.2 Τα $(x,y),(z,w)$ διαφέρουν και δεν διατηρείται η διάταξη. Δηλαδή $(x,y) \neq (z,w)$ και $\Big[(x \leq y, z \geq w)$ ή $(x \geq y, z \leq w)\Big]$. Και πάλι χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $x \leq y, z \geq w$ και επίσης ότι η διαφοροποίηση γίνεται (τουλάχιστον) στην πρώτη συντεταγμένη. Σε αυτήν την περίπτωση το σύνολο $M = \big(maxA, minA\big)$, όπου $A = \{x,y,z,w\} - \big\{min\{x,y,z,w\}, max\{x,y,z,w\}\big\}$ είναι μη κενό και όχι μονοσύνολο, επομένως, λόγω της πυκνότητας των ρητών μπορεί να βρεθεί ρητός (q) εντός του . Επιπλέον, το σύνολο M θα έχει κενή τομή με κάποιο από τα $f(x,y), f(z,w)$ και θα είναι υποσύνολο του άλλου, επομένως το q θα ανήκει αποκλειστικά σε ένα από τα δύο σύνολα $f(x,y), f(z,w)$. Από αυτό έπεται ότι $f(x,y) \neq f(z,w)$, και συνεπώς ότι f είναι $1-1$.



Σχήμα 2

Σε κάθε περίπτωση, η f είναι μονομορφισμός και συνεπώς $\mathbb{R}^2 \leq_c \mathcal{P}(\mathbb{Q}) =_c \mathcal{P}(\mathbb{N}) =_c \mathbb{R}$, με την προτελευταία ισότητα να προκύπτει από την 'Άσκηση 1.'. Για να αποδείξουμε ισοπληθικότητα τελικά, χρειαζόμαστε (σύμφωνα με το θεώρημα $Schroder - Bernstein$) να αποδείξουμε και την αντίστροφη ανισότητα, οπότε θα χρειαστεί να θεωρήσουμε ακόμη μία συνάρτηση. Συγκεκριμένα θεωρούμε $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$:

$$g(x) = (x, x)$$

Η συνάρτηση αυτή g προφανώς είναι μονομορφισμός, επομένως $\mathbb{R} \leq_c \mathbb{R}^2$. Με αυτό αποδεικνύουμε ότι $\mathbb{R}^2 =_c \mathbb{R}$.

Για την γενική περίπτωση, θεωρούμε ότι για τυχαίο φυσικό $n > 2$ ισχύει η ισοπληθικότητα $\mathbb{R}^n =_c \mathbb{R}$. Εφόσον η ισοπληθικότητα αυτή αληθεύει, θα υπάρχει $F : \mathbb{R}^n \rightarrowtail\!\!\!\!\rightarrow \mathbb{R}$. Ορίζουμε τώρα μία νέα συνάρτηση ως εξής:

$$\Phi : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R} \text{ με } \Phi(x_1, x_2, \cdots, x_n, x_{n+1},) = F\big(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, f(x_n, x_{n+1})\big)$$

Η συνάρτηση Φ είναι αμφιμονοσήμαντη, αφού οι F και f είναι $1-1$ και επί. Επομένως $\mathbb{R}^{n+1} =_c \mathbb{R}$. Αυτό αποδεικνύει το ζητούμενο.

Άσκηση 6: *Δείξτε ότι για οποιαδήποτε σύνολα A, B, C ισχύει:*

$$\big((A \times B) \to C\big) =_c \big(A \to (B \to C)\big)$$

Θεωρούμε την απεικόνιση $F : \big((A \times B) \to C\big) \to \big(A \to (B \to C)\big)$ η οποία στέλνει κάθε συνάρτηση $f : A \times B \to C$ στην συνάρτηση $g : A \to (B \to C)$ που ορίζεται ως $g(a) = f(a, x)$. Η F θα δείξουμε ότι είναι μία απεικόνιση αμφιμονοσήμαντη.

Η F είναι $1-1$ συνάρτηση. Πράγματι, έστω $f_1 \neq f_2 : A \times B \to C$. Επειδή οι συναρτήσεις δεν ταυτίζονται, θα υπάρχει ένα ζεύγος (a, b) στο οποίο οι τιμές τους θα διαφέρουν. Επιπλέον, οι εικόνες των f_1, f_2 θα είναι συναρτήσεις της μορφής $g_1(a) = f_1(a, x)$ και $g_2(a) = f_2(a, x)$, οπότε αν $x = b$, παρατηρούμε ότι οι $f_1(a, b), f_2(a, b)$ δεν ταυτίζονται. Επειδή αυτές δεν ταυτίζονται, το ίδιο θα πρέπει να συμβαίνει και για τις g_1, g_2. Επομένως $g_1 \neq g_2$ και η F είναι $1-1$.

Η F είναι συνάρτηση επί. Πράγματι, έστω τυχαία $g : A \to (B \to C)$ με $g(a) : B \to C$. Θεωρούμε την συνάρτηση f ως $f(a, b) = g(a)(b)$ και παρατηρούμε ότι αυτή η συνάρτηση πράγματι έχει την ιδιότητα $F(f) = g$ και επιπλέον $f : A \times B \to C$. Άρα η F είναι συνάρτηση επί.

Από το γεγονός πλέον ότι η F είναι αμφιμονοσήμαντη, έπεται η ισοπληθικότητα.

Άσκηση 7: *Έστω A, B, C σύνολα τέτοια ώστε $A \cap B = \emptyset$. Αποδείξτε ότι:*

$$\big((A \cup B) \to C\big) =_c (A \to C) \times (B \to C)$$

Εφόσον $A \cap B = \emptyset$, θεωρούμε την συνάρτηση $F : (A \to C) \times (B \to C) \to \big((A \cup B) \to C\big)$ η οποία ορίζεται ως εξής:

$$F(f, g)(x) = \begin{cases} f(x), x \in A \\ g(x), x \in B \end{cases}$$

Η F θα δείξουμε ότι είναι αμφιμονοσήμαντη.

Πράγματι, είναι $1-1$, αφού εάν $(f, g) \neq (h, w)$ είναι 2 ζεύγη συναρτήσεων, θα διαφέρουν σε τουλάχιστον 1 συντεταγμένη. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, θεωρούμε ότι διαφέρουν στην πρώτη· θα υπάρχει λοιπόν $a \in A : f(a) \neq h(a)$ και από αυτό συμπαιρένουμε ότι οι αντίστοιχες εικόνες τις F θα διαφέρουν. Άρα η F είναι $1-1$.

Παρατήρηση: Υπάρχει περίπτωση να μην μπορούν να βρεθούν τέτοια διακεκριμένα ζεύγη συναρτήσεων, εάν συμβαίνει $A, B = \emptyset$. Σε αυτήν την περίπτωση η ισοπληθικότητα είναι όμως τετριμμένη.

Η F είναι επίσης επί. Εάν h είναι μία συνάρτηση $h : A \cup B \to C$, ορίζουμε το ζεύγος συναρτήσεων (f, g)

τέτοιο ώστε $f(x) = h(x), x \in A$ και $g(x) = h(x), x \in B$. Το ζεύγος αυτό έχει την ιδιότητα $F(f, g) = h$, και συνεπώς η F είναι επί. Αυτό δείχνει τελικά την ισοπληθικότητα.

Άσκηση 8: *Δείξτε ότι για οποιαδήποτε σύνολα A, B, C ισχύει:*

$$(A \to B \times C) =_c (A \to B) \times (A \to C)$$

Θεωρούμε την συνάρτηση $F : (A \to B \times C) \to (A \to B) \times (A \to C)$ η οποία στέλνει κάθε συνάρτηση $f : A \to B \times C$ στο διατεταγμένο ζεύγος συναρτήσεων $(g, h), g : A \to B, h : A \to C$ και ορίζεται ως εξής:

$$F(f) = \big(f_1, f_2\big)$$

όπου f_1, f_2 είναι η πρώτη και η δεύτερη συντεταγμένη της f αντίστοιχα. Θα δείξουμε ότι η F είναι αμφιμονοσύμαντη.

Η F είναι $1-1$. Εάν f, w είναι δύο διαφορετικές συναρτήσεις, θα υπάρχει $a \in A$ στο οποίο οι δύο τους θα διαφέρουν. Εάν διαφέρουν στο a, θα διαφέρουν ως προς κάποια τους συντεταγμένη, και επομένως $F(f)(a) \neq F(w)(a)$. Από αυτό προκύπτει $F(f) \neq F(w)$, αφού αυτές διαφέρουν σε ένα τουλάχιστον σημείο.

Η F είναι επίσης επί. Εάν (g, h) είναι τυχόν ζεύγος συναρτήσεων, θεωρούμε f την απεικόνιση που ορίζεται ως $f(x) = (g(x), h(x))$. Η απεικόνιση αυτή έχει την ιδιότητα $F(f) = (g, h)$, και επομένως η F θα είναι μία συνάρτηση επί.

Άσκηση 9: *Αποδείξτε ότι το σύνολο $(\mathbb{N} \to \mathbb{R})$, που περιέχει όλες τις ακολουθίες πραγματικών αριθμών είναι ισοπληθικό με το $\mathbb{R}$. Δηλαδή:*

$$(\mathbb{N} \to \mathbb{R}) =_c \mathbb{R}$$

Για την επίλυση αυτής της άσκησης θα χρειαστούμε μερικές ιδιότητες των πραγματικών και φυσικών αριθμών καθώς και κάποια λήμματα τα οποία θα αποδείξουμε:

Αρχή 1.: Αρχή Αρχιμήδη-Ευδόξου: *Για οποιουσδήποτε 2 θετικούς, μη μηδενικούς πραγματικούς αριθμούς $x < y$ υπάρχει ένας φυσικός $Feynman$ τέτοιος ώστε $(Feynman) \cdot x > y$*

Αρχή 2.: Αρχή ελαχίστου: *Κάθε μη κενό υποσύνολο των φυσικών έχει ελάχιστο*

Λήμμα 1.: Προσέγγιση πραγματικών αριθμών με δεκαδικές ακολουθίες: *Για κάθε θετικό πραγματικό αριθμό x υπάρχει αναδρομική ακολουθία $\big(a(n)\big)_{n \in \mathbb{N}}$ της μορφής:*

$$\begin{aligned} &a(0) \in \mathbb{N} \\ &a(1) = a(0) + \frac{k_2}{10}, k_1 \in \{0, 1, \cdots, 9\} \\ &\qquad\qquad \vdots \\ &a(n) = a(n-1) + \frac{k_n}{10^n}, k_n \in \{0, 1, \cdots, 9\} \end{aligned}$$

που συγκλίνει στον αριθμό x.

Απόδ. του Λήμματος 1.: Εάν ο x είναι φυσικός, τότε η τετριμμένη ακολουθία $\big(a(n)\big)_{n \in \mathbb{N}} = (x, 0, 0, \cdots)$ συγκλίνει στο x. Έστω λοιπόν ο x να μην είναι φυσικός. Σε αυτήν την περίπτωση, από την 'Αρχή 1.', θα υπάρχει φυσικός κ τέτοιος ώστε $\kappa > x$. Από την 'Αρχή 2.', μπορεί να βρεθεί ελάχιστος τέτοιος κ, αφού το σύνολο $\{\kappa \in \mathbb{N} \mid \kappa > x\}$ είναι μη κενό υποσύνολο των φυσικών. Επομένως, εάν κ είναι ο ελάχιστος αυτός φυσικός, έχουμε ότι $\kappa - 1 < x < \kappa$. Ορίζουμε ως $a(0) = \kappa - 1$ και χωρίζουμε το τμήμα $(\kappa - 1, \kappa)$ σε δέκα ισομήκη τμήματα:

$$(\kappa - 1, \kappa - 1 + 1/10], (\kappa - 1 + 1/10, \kappa - 1 + 2/10], \cdots, (\kappa - 1 + 9/10, \kappa)$$

Το x αναγκαστικά θα βρίσκεται σε ένα από αυτά τα σύνολα. Έστω λοιπόν ότι βρίσκεται στο $(k_1 - 1)-$οστό διάστημα. Ορίζουμε $a(1) = k - 1 + \dfrac{k_1}{10}$. Εάν ο αριθμός x είναι κάποιο άκρο των διαστημάτων που προαναφέρθηκαν, θέτουμε όλες τις υπόλοιπες τιμές της ακολουθίας 0. Διαφορετικά επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία στο διάστημα στο οποίο βρίσκεται στο x. Με αυτόν τον τρόπο είναι εμφανές ότι κάθε τιμή της ακολουθίας $a(n)$ απέχει το πολύ $\dfrac{1}{10^n}$ από τον αριθμό x, επομένως θα πρέπει $a(n) \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} x$. Αυτό αποδεικνύει το λήμμα.

Επιπλέον, είναι φανερό ότι με αυτόν τον τρόπο το x μπορεί να γραφεί με μοναδικό τρόπο ως:

$$x = a(0) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{k_i}{10^i}$$

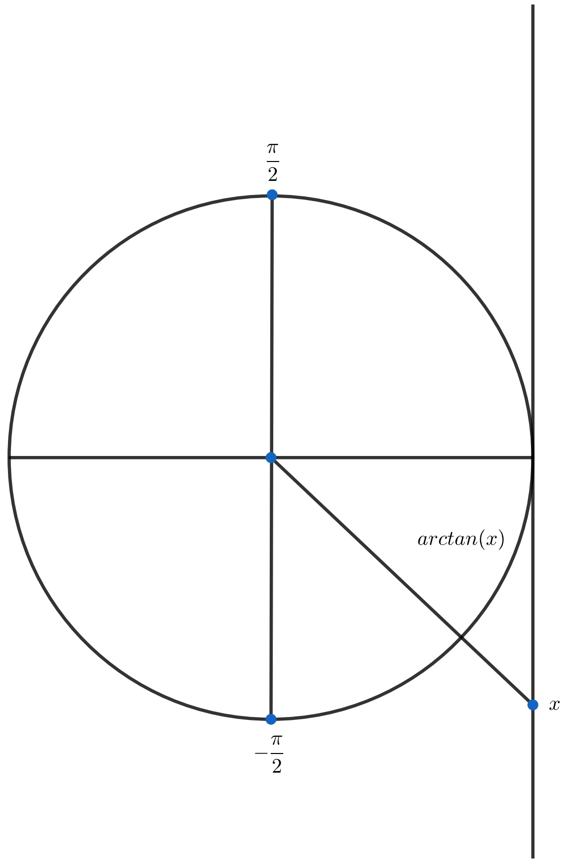
Λήμμα 2.: Ισοπληθικότητα $\mathbb{R}$ και $(0,1)$: *Το σύνολο των πραγματικών αριθμών είναι ισοπληθικό με το* $(0,1)$

Απόδ. του Λήμματος 2.: Θεωρούμε την συνάρτηση:

$$F(x) = \frac{\frac{\pi}{2} + arctan(x)}{\pi}$$

Η συνάρτηση αυτή είναι $1-1$ και επί από το σύνολο των πραγματικών αριθμών στο υποσύνολό τους $(0,1)$. Επομένως ισχύει η ισοπληθικότητα:

$$\mathbb{R} =_c (0,1)$$



Λήμμα 3.: Ισοπληθικότητα $\mathbb{N}$ και $\mathbb{N}^n$: *Για κάθε φυσικό n ισχύει η ισοπληθικότητα* $\mathbb{N} =_c \mathbb{N}^n$

Απόδ. του Λήμματος 3.: Από την 'Άσκηση 3.' έχουμε δείξει ότι υπάρχει αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση από το $\mathbb{N}^2$ στο $\mathbb{N}$, έστω f. Υποθέτουμε ότι για κάποιον φυσικό n υπάρχει μία $\Phi : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ και θα δείξουμε ότι $\mathbb{N}^{n+1}, \mathbb{N}$ είναι ισοπληθικά. Πράγματι, η απεικόνιση:

$$T : T(x_1, x_2, \cdot, x_n, x_{n+1}) = \\ = \Phi\big(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, f(x_n, x_{n+1})\big)$$

είναι αμφιμονοσήμαντη, αφού καθεμία από τις f, Φ είναι αμφιμονοσήμαντες.

Λύση της άσκησης: Αρχικά θα δείξουμε ότι $\mathbb{R} \leq_c (\mathbb{N} \to \mathbb{R})$.

Θεωρούμε την συνάρτηση Φ_1 η οποία στέλνει κάθε αριθμό $x \in \mathbb{R}$ στην τελικά μηδενική ακολουθία $(x, 0, 0, 0, \cdots)$. Δηλαδή:

$$\Phi : \mathbb{R} \to (\mathbb{N} \to \mathbb{R}) \text{ με } \Phi(x) = (x, 0, 0, 0, \cdots)$$

Η Φ είναι προφανώς μονομορφισμός, αφού αυτές οι τελικά μηδενικές ακολουθίες εξαρτόνται αποκλειστικά και μόνο από την μεταβλητή x, στην πρώτη συντεταγμένη. Η ύπαρξη του μονομορφισμού Φ μας δηλώνει την ανισότητα που ψάχναμε:

$$\mathbb{R} \leq_c (\mathbb{N} \to \mathbb{R})$$

Σχηματικά η πρώτη ανισότητα αποδεικνύεται ως εξής:

$$\mathbb{R} \overset{\Phi_1}{\rightarrowtail} (\mathbb{N} \to \mathbb{R})$$

Για να ολοκληρωθεί η απόδειξη, θα δείξουμε επίσης την αντίστροφη ανισότητα $(\mathbb{N} \to \mathbb{R}) \leq_c \mathbb{R}$.

Από το 'Λήμμα 2.' γνωρίζουμε ότι $(0,1) =_c \mathbb{R}$. Από την 'Άσκηση 2.,2.2' για κάθε 4 σύνολα $A =_c X, B =_c Y$ ισχύει $(A \to B) =_c (X \to Y)$. Επομένως, εάν $A = X = \mathbb{N}$ και $B = \mathbb{R}, Y = (0,1)$ προκύπτει ότι:

$$(\mathbb{N} \to \mathbb{R}) =_c (\mathbb{N} \to (0,1))$$

Εφόσον ισχύει η ισοπληθικότητα μεταξύ αυτών των 2 συνόλων, θα μπορεί να βρεθεί γενικότερα μονομορφισμός από το πρώτο στο δεύτερο, έστω Ψ_1.

Ας θεωρήσουμε τώρα μία τυχούσα ακολουθία a του $(\mathbb{N} \to (0,1))$, η οποία ορίζεται ως:

$$a = \big(a(0), a(1), a(2), a(3), \cdots\big)$$

Από το 'Λήμμα 1', σε συνδιασμό με το γεγονός ότι κάθε $a(n)$ είναι στο $(0,1)$, καθένας από τους $a(n)$ θα έχει μοναδική αναπαράσταση:

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{k_i}{10^i}$$

Με αυτά υπ' όψιν, θεωρούμε για κάθε ακολουθία a τον άπειρο πίνακα:

$$K = \begin{pmatrix} k_{1,1} & k_{1,2} & k_{1,3} & \cdots \\ k_{2,1} & k_{2,2} & k_{2,3} & \cdots \\ k_{3,1} & k_{3,2} & k_{3,3} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

ο οποίος περιέχει κατακόρυφα τις δεκαδικές αναπαραστάσεις των όρων της ακολουθίας a:

$$a(n) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{k_{i,n}}{10^i}$$

Από το 'Λήμμα 3.', υπάρχει ισοπληθικότητα μεταξύ των χώρων $\mathbb{N}^2$ και $\mathbb{N}$, επομένως μπορεί να βρεθεί ένας ισομορφισμός G τέτοιος ώστε $G(n) = (i,j)$ και επίσης απεικόνιση $G_a(n) = (i,j,k_{i,j})$ από τους φυσικούς στο $\mathbb{N}^3$. Θεωρούμε επιπλέον την απεικόνιση Ψ_2 η οποία στέλνει κάθε ακολουθία $a \in (\mathbb{N} \to (0,1))$ στην απεικόνιση $G_a \in (\mathbb{N} \to \mathbb{N}^3)$. Η Ψ_2 είναι $1-1$, αφού εάν a, b είναι δύο διακεκριμμένες ακολουθίες, θα διαφέρουν σε τουλάχιστον 1 σημείο. Επομένως οι αντίστοιχοι πίνακες K θα διαφέρουν σε 1 τουλάχιστον στήλη, άρα και οι G_a, G_b θα διαφέρουν. Επομένως η Ψ_2 είναι μονομορφισμός.

Από το 'Λήμμα 3.' γνωρίζουμε ότι $\mathbb{N} =_c \mathbb{N}^3$. Από την ''Ασκηση 2.,2.2' για κάθε 4 σύνολα $A =_c X, B =_c Y$ ισχύει $(A \to B) =_c (X \to Y)$. Επομένως, εάν $A = X = \mathbb{N}$ και $B = \mathbb{N}^3, Y = \mathbb{N}$ προκύπτει ότι:

$$(\mathbb{N} \to \mathbb{N}^3) =_c (\mathbb{N} \to \mathbb{N})$$

Λόγω της ισοπληθικότητας και πάλι είναι δυνατόν να επιλεχθεί μονομορφισμός Ψ_3 από το πρώτο στο δεύτερο.

Ακόμη θεωρούμε Ψ_4 τον μονομορφισμό ο οποίος στέλνει κάθε ακολουθία $a \in (\mathbb{N} \to \mathbb{N})$ στο σύνολο $\{(1, a(1)), (2, a(2)), \cdots\} \in \mathcal{P}(\mathbb{N}^2)$. Τέλος, λόγω της ''Ασκησης 1' και του 'Λήμματος 3', επειδή τα $\mathbb{N}$ και $\mathbb{N}^2$ είναι ισοπληθικά, μπορεί να βρεθεί μονομορφισμός Ψ_5 από το $\mathcal{P}(\mathbb{N}^2)$ στο $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, και επειδή $\mathcal{P}(\mathbb{N}) =_c \mathbb{R}$, μπορεί να βρεθεί μονομορφισμός Ψ_6 από το πρώτο στο δεύτερο.

Έτσι λοιπόν η απεικόνιση $\Psi_6 \circ \Psi_5 \circ \Psi_4 \circ \Psi_3 \circ \Psi_2 \circ \Psi_1 : (\mathbb{N} \to \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ είναι μονομορφισμός σαν σύνθεση τέτοιων και συνεπώς $(\mathbb{N} \to \mathbb{R}) \leq_c \mathbb{R}$.

Σχηματικά η δεύτερη ανισότητα αποδεικνύεται ως εξής:

$$(\mathbb{N} \to \mathbb{R}) \overset{\Psi_1}{\rightarrowtail} (\mathbb{N} \to (0,1)) \overset{\Psi_2}{\rightarrowtail} (\mathbb{N} \to \mathbb{N}^3) \overset{\Psi_3}{\rightarrowtail} (\mathbb{N} \to \mathbb{N}) \overset{\Psi_4}{\rightarrowtail} \mathcal{P}(\mathbb{N}^2) \overset{\Psi_5}{\rightarrowtail} \mathcal{P}(\mathbb{N}) \overset{\Psi_6}{\rightarrowtail} \mathbb{R}$$

Από το θεώρημα $Schroder - Bernstein$ έπεται τελικά η ισοπληθικότητα.

Άσκηση 10: *Θέτουμε*

$$\mathcal{C}[0,1] = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \mid f \text{ συνεχής}\}$$

Να αποδείξετε ότι το σύνολο $\mathcal{C}[0,1]$ είναι ισοπληθικό με το $\mathbb{R}$.

Λήμμα: *Κάθε συνεχής συνάρτηση f καθορίζεται πλήρως από τις τιμές της στους ρητούς.*

Απόδ. του Λήμματος: Διαλέγουμε ακολουθία ρητών $\big(x_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ του πεδίου ορισμού της f η οποία συγκλίνει σε άρρητο x. Επειδή συγκλίνει στο x και η f είναι συνεχής, θα πρέπει $lim f(x_n) = f(x)$. Επομένως, εάν:

$$f(x) = \begin{cases} g(x), x \in \mathbb{Q} \\ h(x), x \in \mathbb{Q}^c_{\mathbb{R}} \end{cases}$$

τότε $g = h$.

Λύση της άσκησης: Λόγω του 'Λήμματος', κάθε συνεχής συνάρτηση f του $\mathcal{C}[0,1]$ έρχεται σε $1-1$ αντιστοιχία με ακολουθία a του $(\mathbb{Q}\cap[0,1]\to\mathbb{R})$. Επίσης ισχύει και αντίστροφα, ότι κάθε ακολουθία του $(\mathbb{Q}\cap[0,1]\to\mathbb{R})$ έρχεται σε $1-1$ αντιστοιχία με συνάρτηση f του $\mathcal{C}[0,1]$, επομένως υπάρχει ισομορφισμός μεταξύ των $\mathcal{C}[0,1]$ και $(\mathbb{Q}\cap[0,1]\to\mathbb{R})$, έστω Φ_1.

Με την σειρά του το σύνολο $(\mathbb{Q}\cap[0,1]\to\mathbb{R})$ είναι ισοπληθικό με το $(\mathbb{N}\to\mathbb{R})$, αφού από την ''Ασκηση 2, *2.2*', για κάθε 4 σύνολα $A =_c X, B =_c Y$, ισχύει η ισοπληθικότητα $(A\to B) =_c (X\to Y)$, επομένως εάν $A = \mathbb{Q}\cap[0,1], X = \mathbb{N}$ και $B = Y = \mathbb{R}$, έπεται η ισοπληθικότητα $(\mathbb{Q}\cap[0,1]\to\mathbb{R}) =_c (\mathbb{N}\to\mathbb{R})$. Διαλέγουμε λοιπόν Φ_2 να είναι μία αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση από το πρώτο στο δεύτερο.

Τέλος, από την ''Ασκηση 11' το σύνολο $(\mathbb{N}\to\mathbb{R})$ είναι ισοπληθικό με το $\mathbb{R}$, άρα θα μπορεί να βρεθεί ισομορφισμός $\Phi_3 : (\mathbb{N}\to\mathbb{R}) \rightarrowtail\!\!\!\!\rightarrow \mathbb{R}$.

Θεωρώντας την σύνθεση τώρα $\Phi = \Phi_3\circ\Phi_2\circ\Phi_1$, παρατηρούμε ότι είναι ισομορφισμός ως σύνθεση τέτοιων, από το σύνολο $\mathcal{C}[0,1]\to\mathbb{R}$. Επομένως η ισοπληθικότητα $\mathcal{C}[0,1] =_c \mathbb{R}$ ισχύει.

$$\mathcal{C}[0,1] \overset{\Phi_1}{\rightarrowtail\!\!\!\!\rightarrow} (\mathbb{Q}\to\mathbb{R}) \overset{\Phi_2}{\rightarrowtail\!\!\!\!\rightarrow} (\mathbb{N}\to\mathbb{R}) \overset{\Phi_3}{\rightarrowtail\!\!\!\!\rightarrow} \mathbb{R}$$

Άσκηση 11: *Θέτουμε*

$$\mathcal{M}[0,1] = \{f : [0,1]\to\mathbb{R} \mid f \text{ μονότονη}\}$$

Να αποδείξετε ότι το σύνολο $\mathcal{M}[0,1]$ *είναι ισοπληθικό με το* $\mathbb{R}$.

Λήμμα: *Κάθε μονότονη συνάρτηση έχει αριθμήσιμο πλήθος ασυνεχειών*

Απόδ. του Λήμματος: Έστω ότι η f εμφανίζει υπεραριθμίσημο πλήθος ασυνεχειών και έστω x να είναι σημείο στο οποίο η μονότονη συνάρτηση εμφανίζει ασυνέχεια της μορφής $f(x-)\neq f(x+)$. Θεωρούμε για κάθε τέτοιο x στο οποίο η f εμφανίζει ασυνέχεια το σύνολο Δ_x να είναι το ανοικτό υποδιάστημα του $\mathbb{R}$ το οποίο ορίζεται από τα 2 άκρα $f(x-), f(x+)$. Επειδή η f είναι μονότονη, τα Δ_x είναι μεταξύ τους ανά 2 ξένα. Οπότε πλέον η ξένη, υπεραριθμήσιμη ένωση $\bigcup\Delta_x$ είναι ένωση ανοικτών διαστημάτων και επίσης υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Αυτό δεν είναι δυνατόν να συμβαίνει, αφού κάθε ξένη ένωση ανοικτών διαστημάτων του $\mathbb{R}$ είναι αριθμήσιμη.

Παρατήρηση: Το ότι πράγματι κάθε ξένη ένωση ανοικτών διαστημάτων του $\mathbb{R}$ είναι αριθμήσιμη θα αποδειχθεί στην ''Ασκηση 12'.

Λύση της Άσκησης: Από το 'Λήμμα', εφόσον κάθε μονότονη συνάρτηση f έχει αριθμήσιμο πλήθος ασυνεχειών, θα έχει επίσης αριθμήσιμο πλήθος συνεχών συνηστωσών f_i, για τις οποίες ισχύει:

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), x\in A_1 \\ f_2(x), x\in A_2 \\ f_3(x), x\in A_3 \\ \quad\vdots \end{cases}$$

Θεωρούμε για κάθε συνεχή συνηστώσα f_i, την συνεχή συνάρτηση $\bar{f}_i$ η οποία ορίζεται ως:

$$\bar{f}_i(x) = \begin{cases} f_i(a+), x\in[0,a] \\ f_i(x), x\in(a,b) \\ f_i(b-), x\in[b,1] \end{cases}$$

Με βάση τώρα την ''Ασκηση 10', θα αντιστοιχίσουμε κάθε μονότονη συνάρτηση f στην ακολουθία $(\Phi(f_1),\Phi(f_2),\cdots)$ του $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = (\mathbb{N}\to\mathbb{R})$, όπου Φ είναι η αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση της ''Ασκησης 10'. Επειδή στην ''Ασκηση 9' έχει δειχθεί ότι $(\mathbb{N}\to\mathbb{R}) =_c \mathbb{R}$, ουσιαστικά εδώ έχουμε δείξει ότι υπάρχει μονομορφισμός[2] από το σύνολο $\mathcal{M}[0,1]$ στο σύνολο $\mathbb{R}$ και οπότε ισχύει η ανισοτική σχέση $\mathcal{M}[0,1]\leq_c\mathbb{R}$.

Για την αντίστροφη ανισότητα, θεωρούμε απεικόνιση Ψ η οποία αντιστοιχεί σε κάθε πραγματικό αριθμό α την μονότονη συνάρτηση $f(x) = x-\alpha, Df = [0,1]$. Η Ψ είναι $1-1$ διότι το $x-\alpha$ είναι πολυώνυμο που εξαρτάται μόνον από τον σταθερό του όρο. Επομένως, $\mathbb{R}\leq_c\mathcal{M}[0,1]$.

[2] Βασικά αυτός είναι ειδικότερα ισομορφισμός, αλλά για χάρην ευκολίας εμείς θα χρησιμοποιήσουμε το θ. *Schroder – Bernstein*

Από το θεώρημα $Schroder - Bernstein$ έπεται τελικά η ισοπληθικότητα.

Άσκηση 12: *Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει υπεραριθμήσιμη οικογένεια από ξένα ανά δύο ανοικτά διαστήματα στον $\mathbb{R}$.*

Έστω A ένα ανοικτό σύνολο του $\mathbb{R}$. Επειδή το A είναι ανοικτό, μπορεί να βρεθούν 2 πραγματικοί x_A, y_A οι οποίοι θα ορίζουν $[x_A, y_A]$ υποσύνολο του A. Λόγω της πυκνότητας των ρητών, μεταξύ των x_A, y_A θα μπορεί να βρεθεί ένας ρητός q_A, που θα ανήκει επίσης στο A, αφού το $[x_A, y_A]$ είναι υποσύνολο του A.

Εάν λοιπόν τώρα $\bar{A}$ είναι ένα σύνολο ξένων, ανοικτών διαστημάτων του $\mathbb{R}$, θεωρούμε την συνάρτηση $\Phi : \bar{A} \to \mathbb{Q}$, η οποία σε κάθε $A \in \bar{A}$ αντιστοιχεί έναν ρητό της μορφής q_A. Η συνάρτηση αυτή είναι μονομορφισμός, αφού τα $A \in \bar{A}$ είναι μεταξύ τους ξένα και κάθε ρητός q_A ανήκει στο αντίστοιχό του $A \in \bar{A}$. Επομένως, $\bar{A} \leq_c \mathbb{Q} =_c \mathbb{N}$, δηλαδή κάθε οικογένεια ανοικτών, ξένων υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ είναι αριθμήσιμη.

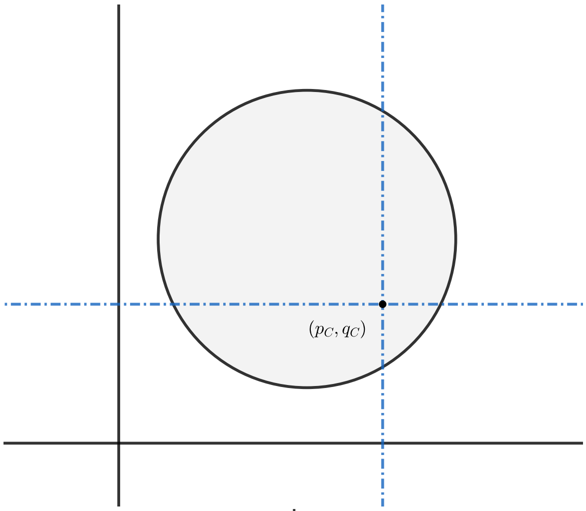
Άσκηση 13:

13.1 Έστω A ένα σύνολο από κυκλικούς δίσκους. στο καρτεσιανό επίπεδο, οι οποίοι ανά δύο δεν τέμνονται. Αποδείξτε ότι το A είναι αριθμήσιμο.

13.2 Έστω B ένα σύνολο από κύκλους στο επίπεδο, οι οποίοι ανά δύο δεν τέμνονται. Είναι κατ΄ ανάγκη το B αριθμήσιμο;

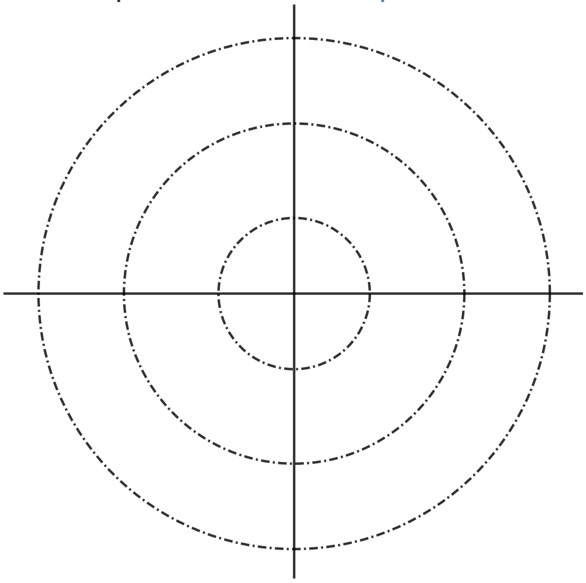
13.3 Έστω C ένα σύνολο από καμπύλες του σχήματος $\mathcal{8}$ που ανά δύο δεν τέμνονται. Είναι κατ΄ ανάγκη το C αριθμήσιμο;

13.1 Έστω C ένας κυκλικός δίσκος στο επίπεδο. Κάθε σημείο (x, y) εντός αυτού του δίσκου θα πρέπει να έχει φραγμένες συντεταγμένες x και y, εξ ορισμού του κυκλικού δίσκου. Λόγω της πυκνότητας των ρητών διαλέγουμε λοιπόν p_C έναν ρητό μεταξύ των φραγμάτων της πρώτης συντεταγμένης και q_C έναν ρητό μεταξύ των φραγμάτων της δεύτερης συντεταγμένης, έτσι ώστε το σημείο (p_C, q_C) να είναι ένα σημείο του κυκλικού δίσκου.



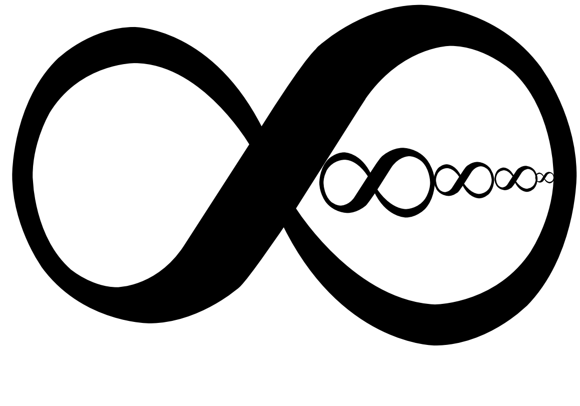
Εάν τώρα $\bar{C}$ είναι μία οικογένεια μη τεμνόμενων κυκλικών δίσκων, η συνάρτηση $\Phi(C) = (p_C, q_C)$ είναι ένας μονομορφισμός $\bar{C} \rightarrowtail \mathbb{Q}$, επομένως η $\bar{C}$ είναι αριθμήσιμη.

13.2 Ένα σύνολο B από κύκλους του επιπέδου δεν είναι κατ΄ ανάγκη αριθμήσιμο.



Για παράδειγμα, εάν B είναι το σύνολο των ομόκεντρων κύκλων με κέντρο το $O = (0, 0)$, η απεικόνιση $\Phi : B \to \mathbb{R}, \Phi(C) = C \wedge Ox$, όπου $C \wedge Ox$ είναι το σημείο τομής του C με τον θετικό ημιάξονα των x, είναι ένας ισομορφισμός από το σύνολο B στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

Επομένως, το σύνολο B είναι ισοπληθικό με το $\mathbb{R}$ και άρα γενικότερα είναι υπεραριθμήσιμο.



13.3 Το σύνολο των σχημάτων $\mathcal{8}$ στο επίπεδο είναι κατ' ανάγκη αριθμήσιμο. Για να αποδείξουμε όμως κάτι τέτοιο πρώτα αποδεικνύουμε το παρακάτω 'Λήμμα':

Λήμμα: Υπάρχει αριθμήσιμο πλήθος τελικά μηδενικών ακολουθιών του $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} = (\mathbb{N} \to \mathbb{N})$.

Απόδ. του Λήμματος: Έστω ότι κάθε απαρίθμηση του συνόλου των τελικά μηδενικών ακολουθιών δεν απαριθμεί όλες τις τελικά μηδενικές ακολουθίες.

Θεωρούμε επίσης μία απαρίθμηση A των τελικά μηδενικών ακολουθιών η οποία για κάθε $n \in \mathbb{N}$ περιέχει όλες τις δυνατές ακολουθίες μήκους n. Η απαρίθμηση αυτή είναι πράγματι απαρίθμηση (ισοπληθική με το $\mathbb{N}$), αφού το σύνολο A_n των ακολουθιών μήκους n είναι ισοπληθικό με το $\mathbb{N}^n =_c \mathbb{N}$ και επίσης:

$$A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$$

το A είναι αριθμήσιμη ένωση αριθμήσιμων συνόλων. Εάν η A δεν απαριθμέι πλήρως τις τελικά μηδενικές ακολουθίες, θα υπάρχει μία τελικά μηδενική ακολουθία που δεν θα ανήκει στο A. Επειδή όμως είναι τελικά μηδενική, θα έχει μήκος, έστω n· εξ ορισμού του A, θα πρέπει να ανήκει σε αυτό. Καταλήγουμε λοιπόν σε άτοπο, και συνεπώς οι τελικά μηδενικές ακολουθίες είναι αριθμήσιμες.

Λύση της Άσκησης: Δύο οκτάρια στο επίπεδο μπορεί να βρίσκονται στις εξής σχετικές θέσεις: είτε το πρώτο είναι εντός (ενός) λοβού του δεύτερου, είτε τα 2 οκτάρια είναι σε διαφορετικές περιοχές.

Ισχυριζόμαστε ότι το πλήθος των οκταριών που μπορούν να βρίσκονται εντός των λοβών ενός τυχαίου οκταριού έχουν αριθμήσιμο πλήθος. Πράγματι, θεωρούμε οκτάρια εντός ενός λοβού (ενός άλλου οκταριού) τα οποία βρίσκονται όλα τους σε διαφορετικές περιοχές εντός του λοβού. Το πλήθος των οκταριών αυτών είναι αριθμήσιμο, αφού ισοδύναμα οι 2 κυκλικοί δίσκοι καθενός οκταριού δεν πρέπει να τέμνονται με κανέναν άλλον κυκλικό δίσκο άλλου οκταριού[3]. Θεωρούμε λοιπόν μία απαρίθμησή τους και επαναλαμβάνουμε την διαδικασία σε κάθε οκτάρι του λοβού. Επαγωγικά, με αυτόν τον τρόπο, προκύπτει ότι κάθε οκτάρι εντός του λοβού έρχεται σε $1-1$ αντιστοιχία με τις τελικά μηδενικές ακολουθίες του $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ $\Big($Η $(0,0,0,\cdots)$ αντιστοιχεί στο αρχικό οκτάρι και κάθε άλλη ακολουθία $(a_1, a_2, \cdots, a_n, 0, \cdots)$ αντιστοιχεί στο εξής οκτάρι: εντός του αρχικού οκταριού, εντός του a_1 κατά σειρά οκταριού στον λοβό του αρχικού, εντός του a_2 κατά σειρά οκταριού στον λοβό του a_1 οκταριού, $\cdots$ εντός του a_{n-1} κατά σειρά οκταριού στον λοβό του a_{n-2} οκταριού, βρήσκουμε το οκτάρι κατά σειρά a_n στον λοβό του a_{n-1} οκταριού· το τελευταίο είναι το επιθυμητό οκτάρι$\Big)$. Από το 'Λήμμα' το πλήθος των ακολουθιών είναι αριθμήσιμο, άρα και τα οκτάρια.

Εάν τα οκτάρια είναι σε διαφορετικές θέσεις στο επιπεδο, όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως, θα πρέπει να έχουν πλήθος αριθμήσιμο. Εάν κάθε οκτάρι από αυτά έχει εντός του και άλλα οκτάρια, σύμφωνα με το προηγούμενο σημείο, το πλήθος αυτών είναι αριθμήσιμο, άρα και η όλη διάταξη πάλι θα έχει αριθμήσιμο πλήθος οκταριών. Σε κάθε περίπτωση, το πλήθος των (συνολικών) οκταριών είναι αριθμήσιμο.

Άσκηση 14: *Έστω S αριθμήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι υπάρχει πραγματικός αριθμός c τέτοιος ώστε ο $s + c$ να είναι υπερβατικός για κάθε $s \in S$.*

Λήμμα: *Το σύνολο των υπερβατικών αριθμών είναι υπεραριθμήσιμο.*

Απόδ. του Λήμματος: Αρκεί να δειχθεί ότι το σύνολο των αλγεβρικών αριθμών ($\mathbb{A}$) είναι αριθμήσιμο.

Για κάθε πολυώνυμο $P(x) = \sum_{i \in [n]} a_i x^i \in \mathbb{N}[x]$ θεωρούμε R_P να είναι το σύνολο των ριζών του $P(x)$. Επειδή το P είναι πολυώνυμο, κάθε τέτοιο σύνολο θα έχει το πολύ $d^\circ P = n$ στοιχεία, δηλαδή γενικότερα είναι αριθμήσιμο. Το σύνολο των πολυωνύμων είναι αριθμήσιμο, αφού καθένα τους έρχεται σε $1-1$ και επί αντιστοιχία με τις τελικά μηδενικές ακολουθίες του $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, το οποίο είναι σύνολο αριθμήσιμο ('Άσκηση 13, *13.3*, Λήμμα'). Άρα, η ένωση:

$$\bigcup_{P \in \mathbb{N}[x]} R_P = \mathbb{A}$$

[3]Αυτό προκύπτει από το σημείο *13.1* της Άσκησης 13

είναι αριθμήσιμη ως αριθμήσιμη ένωση αριθμήσιμων συνόλων και περιέχει ακριβώς τα στοιχεία του $\mathbb{A}$. Από αυτό έπεται το ζητούμενο.

Λύση της Άσκησης: Έστω $S = \{s_1, s_2, \cdots\}$ να είναι το αριθμήσιμο σύνολο της εκφώνισης. Για κάθε $c \in \mathbb{R}$ θεωρούμε το σύνολο:

$$U_c = \{s_1 + c, s_2 + c, \cdots\}$$

Υποθέτουμε προς άτοπο ότι το σύνολο αυτό ποτέ του δεν απαρτίζεται από υπερβατικούς. Δηλαδή για κάθε c το U_c περιέχει έστω και έναν αλγεβρικό. Για κάθε αλγεβρικό αριθμό $s_i + c$ του U_c θα υπάρχει αριθμήσιμο πλήθος αριθμών c_k για τους οποίους ισχύει $s_k + c_k = s_i + c$, αφού το σύνολο S είναι αριθμήσιμο. Τώρα για κάθε αλγεβρικό $s_i + c$, θεωρούμε το σύνολο:

$$\bigcup_k \{s_k + c_k\} = \{s_i + c\}$$

Επειδή το πλήθος των c είναι υπεραριθμήσιμο, μπορούμε να διαλέξουμε έναν d τέτοιος ώστε να μην ταυτίζεται με κανέναν από τους αριθμούς c_k. Με αυτόν τον d υπ΄ όψιν επαναλαμβάνουμε την διαδικασία που περιγράφηκε παραπάνω και κατασκευάζουμε για κάθε αλγεβρικό $s_i + d$ το σύνολο:

$$\bigcup_k \{s_k + d_k\} = \{s_i + d\}$$

Εδώ και πάλι μπορούμε να επιλέξουμε αριθμό e που δεν θα ταυτίζεται με κανέναν από τους c_k, d_k και να θεωρήσουμε για κάθε αλγεβρικό $s_i + e$ το σύνολο:

$$\bigcup_k \{s_k + e_k\} = \{s_i + e\}$$

Συνεχίζοντας με όμοιο τρόπο, θα έπιλεγεί τελικά αριθμήσιμο σύνολο $\mathcal{A}$ πραγματικών αριθμών, αφού είτε θα επιλεγούν όλοι οι αλγεβρικοί αριθμοί είτε ένα γνήσιο υποσύνολό τους.

Αφού λοιπόν 'τελειώσει' η διαδικασία επιλογής των αλγεβρικών (όπως προαναφέρθηκε), διαλέγουμε έναν αριθμό z να είναι διαφορετικός από όλες τους προηγούμενους $c_k, d_k, e_k, f_k, g_k, \cdots$. Η επιλογή το z μπορεί να γίνει, αφού το σύνολο $\mathcal{R} = \{c_k, d_k, e_k, f_k, g_k, \cdots\} = \{c_k\} \cup \{d_k\} \cup \{e_k\} \cup \{f_k\} \cup \{g_k\} \cup \cdots$ είναι αριθμήσιμο ως αριθμήσιμη ένωση αριθμήσιμων συνόλων (αριθμήσιμη ένωση διότι οι αλγεβρικοί είναι αριθμήσιμοι και αριθμήσιμων συνόλων επειδή οι $c_k, d_k, e_k, f_k, g_k, \cdots$ είναι αριθμήσιμες ακολουθίες) και το πλήθος των c είναι υπεραριθμήσιμο.

Ο αριθμός αυτός z θα έχει την ιδιότητα ότι κάθε στοιχείο του U_z είναι υπερβατικός, αφού εάν $s_i + z$ ήταν αλγεβρικός, ο z θα έπρεπε να ανήκει στο σύνολο $\mathcal{R}$ που κατασκευάσαμε προηγουμένως[4]. Με αυτό καταλήγουμε σε άτοπο, και συνεπώς αποδεικνύουμε το ζητούμενο.

[4] Εάν δεν άνηκε, θα μπορούσαμε να επεκτείνουμε το σύνολο $\mathcal{A}$ με την γνωστή διαδικασία ώστε ο z να ανήκει στο $\mathcal{R}$