ΘΕΩΡΙΑ ΣΥΝΟΛΩΝ – 4ο ΠΑΚΕΤΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Φράγκος Αναστάσιος – ΑΜ: 1112201900239

Άσκηση 1: (Σ/Λ) Έστω $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{R}$ το σύνολο των αλγεβρικών αριθμών. Τότε κάθε ανοικτό διάστημα (G) στο $\mathbb{R}$ θα περιέχει ένα σημείο του $\mathbb{R} - \mathbb{A}$.

Λύση: Η πρόταση είναι σωστή.

Λήμμα: Το σύνολο $\mathbb{A}$ είναι αριθμήσιμο:

Πράγματι, ας θεωρήσουμε P ένα πολυώνυμο με ακέραιους συντελεστές ($P \in \mathbb{Z}[x]$) καθώς επίσης και το σύνολο:

$$L(P) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \text{ ρίζα του } P\}$$

Το σύνολο $L(P)$ είναι αριθμήσιμο για κάθε $P \in \mathbb{Z}[x]$, αφού είναι γνωστή η ιδιότητα

$$|L(P)| \leq deg(P)$$

Για να αποδείξουμε εν τέλει το 'λήμμα' θα δείξουμε ότι και το $\mathbb{Z}[x]$ είναι αριθμήσιμο. Με αυτό θα έχουμε ουσιαστικά δείξει ότι το σύνολο $\mathbb{A}$ γράφεται ως αριθμήσιμη ένωση αριθμήσιμων συνόλων, και άρα είναι σύνολο αριθμήσιμο:

$$\mathbb{A} = \bigcup_{P \in \mathbb{Z}[x]} L(P)$$

Το $\mathbb{Z}[x]$ είναι αριθμήσιμο, αφού έρχεται σε 1-1 και επί αντιστοιχία με τις τελικά μηδενικές ακέραιες ακολουθίες, μέσω του ισομορφισμού:

$$f : \mathbb{Z}[x] \rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow \{(a_i)_{i\in\mathbb{N}} \mid \exists j\in\mathbb{N} : \forall i \geq j,\ a_i = 0\}$$

$$f\left(p = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i\right) = (a_0, a_1, \dots, a_n, 0, 0, \dots)$$

Οι τελικά μηδενικές ακέραιες ακολουθίες (με την σειρά τους) είναι αριθμήσιμες, αφού:

- Το $\Sigma_n = \{(a_1, \dots, a_n) \mid a_i \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{Z}^n$ είναι αριθμήσιμο,

- Το πλήθος των δεικτών n στα Σ_n είναι αριθμήσιμο,

- Το $\{(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ακολ. του $\mathbb{Z} \mid \exists j\in\mathbb{N} : \forall i \geq j,\ a_i = 0\}$ ~~[illegible]~~ είναι ισοπληθικό με το:

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Sigma_n,$$ το οποίο είναι αριθμήσιμο.

Απόδειξη της άσκησης/ισχυρισμού; δεδομένου του 'λήμματος'

Έστω G ένα ανοικτό σύνολο με την ιδιότητα

$$G \cap (\mathbb{R} - A) = \emptyset.$$

Εφόσον η τομή είναι κενή και το G ανοικτό, θα υπάρχει μπάλα $B\left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \left|\frac{\alpha-\beta}{2}\right|\right) = (\alpha, \beta)$ εντός του G, η οποία επίσης θα έχει την ιδιότητα:

$$(\alpha,\beta) \cap (\mathbb{R} - A) = \emptyset$$
$$\Rightarrow (\alpha,\beta) \subseteq A$$

Δηλαδή το A περιέχει διάστημα μη μηδενικού μήκους.

Αυτό είναι άτοπο, αφού κάθε διάστημα μη μηδενικού μήκους είναι σύνολο υπεραριθμήσιμο. Αυτό διότι κάθε $(α,β) \subseteq \mathbb{R}$ έρχεται σε 1-1 και επί αντιστοιχία με το $\mathbb{R}$, μέσω του ισομορφισμού

$f:(α,β) \to \mathbb{R}$ τ.ω.

$$f(x) = \tan\left(\frac{x-α}{β-α}\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

Άσκηση 2: (Σ/Λ) Το σύνολο των αριθμητικών προόδων $s:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ είναι υπεραριθμήσιμο.

Απόδειξη: Το σύνολο αυτό (έστω H) είναι αριθμήσιμο (άρα Λ). Αυτό διότι κάθε αριθμητική πρόοδος καθορίζεται πλήρως από την αρχική της τιμή και το βήμα της. Επομένως το εν λόγω 'H' είναι ισοδύναμο με το $\mathbb{N}^2$, και άρα αριθμήσιμο.

Άσκηση 3: (Η εκφώνηση παραλείπεται).

Λύση: Τα λάθη είναι δύο ουσιαστικά

1. Για όλους τους άρρητους $p \in \mathbb{Q}^c$ δεν είναι σίγουρο ότι μπορούν να βρεθούν διακεκριμένα σύνολα ρητών άκρων που να τους περιέχουν
2. Αν $(α_p, β_p)$ είναι διάστημα ρητών άκρων, η μέση είναι και αυτή ρητός.

Άσκηση 4: (Η εκφώνηση παραλείπεται).

Η απόδειξη είναι λάθος, αφού εσφαλμένα χρησιμοποιείται ένας νόμος 'διαγραφής' δυνάμεων, ο οποίος δεν ισχύει:

$$(m^{\aleph_0})^c < (2^m)^c$$
$$\not\Rightarrow \quad m^c < 2^c$$

Για παράδειγμα, δεν ισχύει ότι:

$$\aleph_0^2 < 2^{\aleph_0}$$
$$\Rightarrow \aleph_0 < 2$$

Άσκηση 5: (Σ/Λ) Αν τα σύνολα A, B έχουν το ίδιο πλήθος αριθμήσιμων υποσυνόλων, τότε τα A, B είναι ισοπληθικά

Η πρόταση είναι λάθος:

Θα δείξουμε ότι $\{A \subseteq \mathbb{R} \mid |A| \le \aleph_0\} =_c \mathbb{R} =_c \{A \subseteq \mathbb{N} \mid |A| \le \aleph_0\}$

Πράγματι, καταρχάς $\{A \subseteq \mathbb{N} \mid |A| \le \aleph_0\} = \mathcal{P}(\mathbb{N}) = \mathbb{R}$

Θα δ.ο. $\{A \subseteq \mathbb{R} \mid |A| \le \aleph_0\} =_c \mathbb{R}$:

Πράγματι, ισχύει: $\{A\subseteq\mathbb{R} \mid |A|\le\aleph_0\} \le_c (\mathbb{N}\to\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ (1)

$\Big($διότι $|\mathbb{R}^{\mathbb{N}}| = c^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0\cdot\aleph_0} = 2^{(\aleph_0^2)} = 2^{\aleph_0} = c\Big)$

και επιπλέον $\{A\subseteq\mathbb{R} \mid |A|=\aleph_0\} \ge_c \mathbb{R}$, (2)

οπότε $\{A\subseteq\mathbb{R} \mid |A|=\aleph_0\} =_c \mathbb{R}$

(Το (1) διότι για κάθε αριθμήσιμο σύνολο $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ ορίζεται ακολουθία $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$

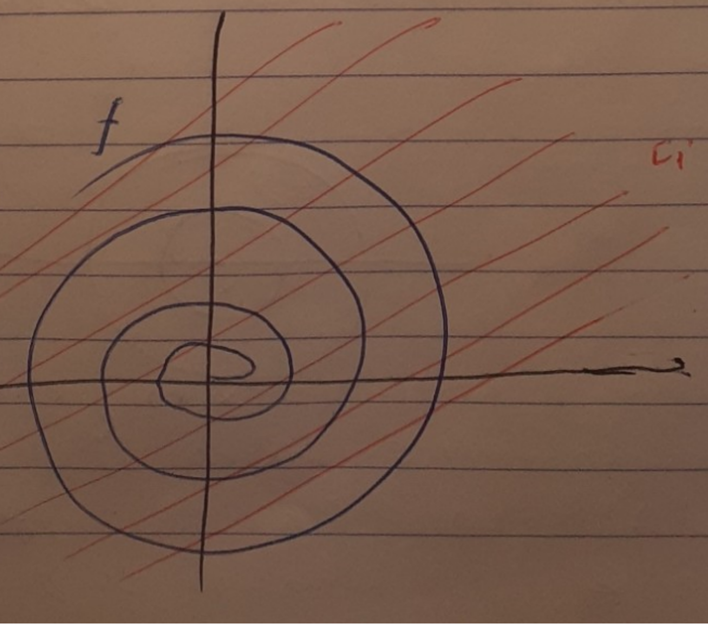
Το (2) διότι $\forall x\in\mathbb{R}$, τα $\{x\}$ ανήκουν στο $\{A\subseteq\mathbb{R} \mid |A|=\aleph_0\}$)

Άσκηση 6: Έστω C μια υπεραριθμήσιμη οικογένεια υποσυνόλων του $\mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι κάθε σύνολο που ανήκει στην C είναι υπεραριθμήσιμο. Ισχύει ότι υπάρχουν 2 σύνολα της C τα οποία έχουν μη κενή τομή;

Απάντηση: Η πρόταση είναι λάθος.

Θεωρούμε στο $\mathbb{R}^2$ την οικογένεια παράλληλων ευθειών $(\varepsilon_i)_{i\in\mathbb{R}}$ καθώς επίσης και τον ισομορφισμό $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$

Η $(\varepsilon_i)_{i\in\mathbb{R}}$ καλύπτει το $\mathbb{R}^2$, δηλαδή ισχύει η ιδιότητα: $\forall x\in\mathbb{R}^2, \exists j\in\mathbb{R}$ τ.ω. $f(\varepsilon_j)\ni x$.



Η οικογένεια $\left(f^{-1}(\mathcal{J}(\varepsilon_i))\right)_{i\in\mathbb{R}}$ είναι υπεραριθμήσιμη οικογένεια ξένων ανά 2, υπεραριθμήσιμων συνόλων που καλύπτει το $\mathbb{R}$.

(Το σύμβολο $\mathcal{J}(\varepsilon_i)$ είναι η σημειοσειρά της ε_i).
$\mathcal{J}(\varepsilon_i) = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid (x,y)$ αντιστοιχεί σε σημείο της $\varepsilon_i\}$

<u>Άσκηση 7</u>: Δείξτε ότι για κάθε αριθμήσιμο σύνολο A ισχύει $|\mathbb{R}-A| = \mathfrak{c}$

Πράγματι,

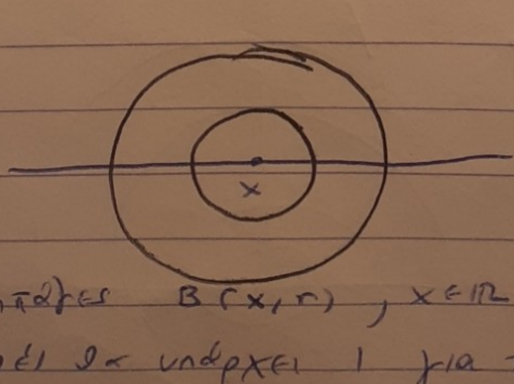
$$|\mathbb{R}| = |\mathbb{R}-A| + |A|$$
$$\mathfrak{c} = |\mathbb{R}-A| + \aleph_0$$

Αν το $|\mathbb{R}-A|$ ήταν αριθμήσιμο, τότε $\mathfrak{c} = \aleph_0$ (άτοπο). Οπότε $|\mathbb{R}-A| > \aleph_0$. Επειδή ισχύουν οι κανόνες απορρόφησης πληθαρίθμων:

$$\underline{\mathfrak{c} = |\mathbb{R}-A|}$$

<u>Άσκηση 8</u>: Έστω A ένα υπεραριθμήσιμο σύνολο θετικών πραγματικών αριθμών. Δ.Ο. $\exists\,(a_n)_{n\in\omega}$ διαφορετικών ανά 2 στοιχείων τ.ω. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$.

Λύση:

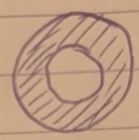


Θεωρούμε τις μπάλες $B(x,r)$, $x\in\mathbb{R}$ και ισχυριζόμαστε ότι από κάπου θα υπάρχει r για την οποία ισχύει $|B(x,r)\cap A| > \aleph_0$. Πράγματι, αν το αντίθετο συνέβαινε, καθώς $r\to\infty$, το A θα είχε αριθμήσιμο το πλήθος

στοιχείων. Επομένως, $\exists\, r_1 > 0$ τ.ω.
$B(x, r_1) \cap A$ να είναι υπεραριθμήσιμο.

Επίσης ισχυριζόμαστε ότι υπάρχει $B(x, r_2) \subseteq B(x, r_1)$ η οποία έχει [illegible] ώστε

$$B(x, r_2)^{c}_{B(x, r_1)} \cap A$$



υπεραριθμήσιμο. Πράγματι, αν το αντίθετο ίσχυε, τότε καθώς $r_2 \to r_1$, η $B(x, r_1) \cap A$ θα ήταν αριθμήσιμη.

Τελικά, $\exists\, r_1 > r_2$ τ.ω.

$$B(x, r_2)^{c}_{B(x, r_1)} \cap A$$

να είναι υπεραριθμήσιμο. Διαλέγοντας $x = 0$, θα υπάρχουν $0 < r_2 < r_1$ τ.ω.

$$B(0, r_2)^{c}_{B(x, r_1)} \cap A$$

υπεραριθμήσιμο.

Κατασκευάζουμε εν τέλει ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ διαφορετικών ανά 2 στοιχείων του $B(0, r_2)^{c}_{B(x, r)} \cap A$ και παρατηρούμε ότι:

$$\sum (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \geq \sum_{n\in\mathbb{N}} r_2 = \infty$$

Επομένως $\sum (a_n)_{n\in\mathbb{N}} = \infty$.

Άσκηση 9: (Η εκφώνηση παραλείπεται)

κατά μια έννοια, και οι 2 φοιτητές είναι σωστοί:

Ο πρώτος είναι σωστός με την έννοια ότι το λήμμα του Zorn αναφέρεται σε μεγιστικά και όχι σε μέγιστα.

Από την άλλη, ο δεύτερος είναι σωστός στην όλη ιδέα. Πράγματι, δεν υπάρχει μεγιστικό στοιχείο για κάθε αλυσίδα του εν λόγω χώρου. Αυτό διότι ενδέχεται μια από τις αλυσίδες να έχει υπεραριθμήσιμο πλήθος στοιχείων, και επομένως δεν εξασφαλίζεται ότι υπάρχει άνω φράγμα ως αριθμήσιμη ένωση αριθμήσιμων συνόλων. Ένα τέτοιο παράδειγμα υπεραριθμήσιμης αλυσίδας (που δόθηκε στην τάξη) είναι οι διατακτικοί αριθμοί έως την ω_1.

$$0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad \cdots \quad \omega \quad \omega^{+} \quad \omega^{++} \quad \omega^{+++} \quad \cdots \quad \omega_1$$

Άσκηση 10: Χρησιμοποιώντας το Λήμμα του Zorn, δ.ο. κάθε διανυσματικός χώρος έχει μια βάση.

Έστω $(V,+,\cdot)$ ένας δ.χ. επί του $\mathbb{F}$

Λύση: Θεωρούμε τον μερικώς διατεταγμένο χώρο $(\langle I \rangle, \subseteq)$ των ιδεωδών $\langle I \rangle = \langle a_i \mid i \in D \rangle$ εγοδιανυσμάτων

$$= \sum_{i \in [n]} \lambda_i a_i \quad , \lambda_i \in \mathbb{F}$$

με την μερική διάταξη του υποσυνόλου $(\subseteq)$.

Παρατηρούμε ότι $V = \langle V \rangle$, επομένως κάθε $P \in \mathrm{Chains}_{\subseteq}(\langle I \rangle)$ έχει άνω φράγμα. Άρα, υπάρχει σύμφωνα με το λήμμα του

Έχει μεγιστικό ~~στοιχείο~~ στοιχείο $\langle \hat{I} \rangle$.

Εξ ορισμού τώρα του μεγιστικού στοιχείου,

$$\langle \hat{I} \rangle \supseteq V = \langle V \rangle$$

$$\Rightarrow \underline{\langle \hat{I} \rangle = V}$$

Συνεπώς, το σύνολο $\hat{I}$ θα αποτελεί βάση του $(V,+,\cdot)$.

<u>Άσκηση 11:</u> Έστω A, B σύνολα με το A να είναι πεπερασ

$\rho \subseteq (A \times B)$ διμελής σχέση από το A στο B. Υποθ

ότι:

$$(\forall x \in A)(\exists y \in B)[x \rho y]$$

Δ.Ο. $\exists$ συνάρτηση $f: A \to B$ τέτοια ώστε

$$(\forall x \in A)[x \rho f(x)]$$

Εφόσον το A είναι πεπερασμένο, η ακόλουθη διαδικασία:

"Επιλέγουμε E τ.ω. $\forall x \in A$, $E \cap P(x)$ είναι μονοσύνολο"

Δεν χρησιμοποιεί το (AC), αφού η επιλογή των στοιχείων του E είναι πεπερασμένη.
Επομένως, η συνάρτηση:

$$f(x) = y \in E \cap P(x)$$

είναι η ζητούμενη. Η f είναι πράγματι συνάρτηση, αφού το $E \cap P(x)$ είναι μονοσύνολο.

Άσκηση 12: Έστω $(k_i)_{i\in I}$, $(\lambda_i)_{i\in I}$ οικογένειες πληθαρίθμων τέτοιες ώστε $k_i \leq \lambda_i$ $\forall i \in I$.
Αποδείξτε ότι:

- $\sum_{i\in I} k_i \leq \sum_{i\in I} \lambda_i$

- $\prod_{i\in I} k_i \leq \prod_{i\in I} \lambda_i$

Η διαδικασία της απόδειξης είναι παρόμοια και στις 2 περιπτώσεις. Θεωρούμε $\tilde{I} = succ(I) = I \cup \{\underbrace{r \in I \mid r \notin r}_{t}\}$

και εφαρμόζουμε υπερπεπερασμένη επαγωγή στον καλά διατεταγμένο χώρο $(\tilde{I}, \leq')$, όπου $\leq'$ είναι η $\leq$ στο I και για οποιοδήποτε $x \in I$ ισχύει $x \leq' t$.

Για $|I| = 1$, προφανώς ισχύει $\sum k_i \leq \sum \lambda_i$
Για $|I| = n$, δεδομένου ότι στο $n-1$ η υπόθεση ισχύει,

$$\sum_{i\in I} k_i = \sum_{i\in I-\{\max I\}} k_i + k_{\max I} \overset{\text{επαγ.}}{\underset{\text{υπόθ.}}{\leq}} \sum_{i\in I-\{\max I\}} \lambda_i + k_{\max I} \overset{\text{υπόθεση}}{\leq} \sum_{i\in I-\{\max I\}} \lambda_i + \lambda_{\max I}$$

$$\Rightarrow \sum_{i\in I} \kappa_i \le \sum_{i \in I} \lambda_i .$$

Εάν το t είναι μη οριακό σημείο, προφανώς η επαγωγή μπορεί να προχωρήσει σε αυτό το σημείο.

Αν όμως $Limit(t)$, τότε:

$$\sum_{i<t} \kappa_i = \sup\left\{ \sum_{i\in I} \kappa_i \;\middle|\; |I| = n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$\sum_{i<t} \lambda_i = \sup\left\{ \sum_{i\in I} \lambda_i \;\middle|\; |I| = n \in \mathbb{N} \right\}$$

Επειδή $\sum_{i\in I} \kappa_i \le \sum_{i\in I} \lambda_i$, τότε $\sup\left\{\sum_{i\in I}\kappa_i\right\} \le \sup\left\{\sum_{i\in I}\lambda_i\right\}$

και συνεπώς $\sum_{i<t} \kappa_i \le \sum_{i<t} \lambda_i$

$$\Rightarrow \boxed{\sum_{i\in I} \kappa_i \le \sum_{i\in I} \lambda_i}$$

Άσκηση 13: (Σ/Λ) Έστω $(\alpha_i)_{i\in I}$, $(\beta_i)_{i\in I}$ οικογένειες μη μηδενικών πληθαρίθμων τέτοιες ώστε $\alpha_i < \beta_i \ \forall i \in I$. Τότε θα ισχύει:

$$\sum_{i\in I} \alpha_i < \prod_{i\in I} \beta_i$$

Η πρόταση ισχύει και η απόδειξή της μπορεί να γίνει με μια παραλλαγή της απόδειξης του Θ. König.

Συγκεκριμένα, θεωρούμε $\pi_i : \{i\}\times\alpha_i \to \beta_i$ τους μονομορφισμούς μεταξύ των $\{i\}\times\alpha_i$, β_i [τέτοιοι υπάρχουν, αφού $\alpha_i < \beta_i$]. Θεωρούμε επίσης c μια συνάρτηση επιλογής του συνόλου:

$$\left\{ \beta_i - \pi_i(\{i\}\times\alpha_i) \;\middle|\; \beta_i - \pi_i(\{i\}\times\alpha_i) \neq \emptyset \right\}$$

και επίσης την συνάρτηση

$$f: \bigcup\{\{i\}\times a_i\}_{i\in I} \longrightarrow \times\{\beta_i\}_{i\in I}$$

(περιέχει συναρτήσεις του τύπου $I \to \bigcup\{\beta_i\}_{i\in I}$ όπου $\forall i\in I$, $f(i)\in \beta_i$)

που ορίζεται ως:

$$f(x)(i) = \begin{cases} \pi_i(x), & x \in \{i\}\times a_i \\ c(i), & x \notin \{i\}\times a_i \end{cases}$$

Η f είναι καλώς ορισμένη και 1-1, αφού αν $x \neq y \in \bigcup\{\{i\}\times a_i\}_{i\in I}$

τότε διαφέρουν i τέτοιο ώστε $x\in a_i$, $y\notin a_i$.
Αν κάτι τέτοιο δεν γίνεται, $x, y\in a_i$.

Σε κάθε περίπτωση

- $f(x)(i) = \pi_i(x) \in \pi_i(a_i)$
  $\neq c(i) = f(y)(i)$
  $c(i) \in \beta_i - \pi_i(a_i)$

- $f(x)(i) = \pi_i(x)$
  $\overset{\pi_i \text{ 1-1}}{\neq} \pi_i(y) = f(y)(i)$

Άσκηση 14: Ν.δ.ο. δεν υπάρχει πληθάριθμος m τέτοιος ώστε $\aleph_0 < 2^m < 2^{\aleph_0}$. Συγκρίνετε το αποτέλεσμα με την υπόθεση του συνεχούς.

Αν $m \in \aleph_0$, τότε $2^m < \aleph_0$

Αν $m \notin \aleph_0 \Rightarrow m \geq \aleph_0 \Rightarrow 2^m \geq 2^{\aleph_0}$ $\Big\} \Rightarrow$

για κάθε πληθάριθμο, $2^m < \aleph_0$ (ή) $2^m \geq 2^{\aleph_0}$

Η υπόθεση του συνεχούς πληροφορεί ότι δεν υπάρχουν πληθάριθμοι μεταξύ των $a, 2^a$ για κάθε a πληθάριθμο (γενικευμένη υπόθεση του συνεχούς). Το δικό μας λήμμα δείχνει ότι μεταξύ των $\aleph_0, 2^{\aleph_0}$ δεν υπάρχουν πληθάριθμοι ορισμένης μορφής.

Άσκηση 15: Έστω K, Λ δύο άπειρα σύνολα τ.ω. $K \subseteq \Lambda$. Αποδείξτε ότι:

$$(\Lambda \to K) =_c (\Lambda \to \Lambda)$$

Θα αποδείξουμε το ζητούμενο χρησιμοποιώντας το Θ. Shröder-Bernstein

- $|K| \leq |\Lambda| \Rightarrow |K|^{|\Lambda|} \leq |\Lambda|^{|\Lambda|}$
- $|\Lambda| \leq 2^{|\Lambda|} \Rightarrow |\Lambda|^{|\Lambda|} \leq 2^{(|\Lambda|^2)} \Rightarrow |\Lambda|^{|\Lambda|} \leq 2^{|\Lambda|}$

$\Big\} \overset{S-B}{\Rightarrow}$

$$|\Lambda|^{|\Lambda|} \leq 2^{|\Lambda|} \leq |K|^{|\Lambda|} \leq |\Lambda|^{|\Lambda|}$$

$$\Rightarrow |\Lambda|^{|\Lambda|} = |K|^{|\Lambda|} \Rightarrow (\Lambda \to K) =_c (\Lambda \to \Lambda)$$

Άσκηση 16: Για καθεμιά από τις ακόλουθες ανισότητες πληθαρίθμων να εξετάσετε ποιες είναι αληθείς και ποιές ψευδείς;

(a) $2^{\aleph_0} < 2020^{\aleph_0}$

(b) $\aleph_0^{2020} < \aleph_{2020}$

(c) $\aleph_0^{\aleph_0} < c^{\aleph_0}$

(d) $\aleph_{2020} \leq 2^{\aleph_{2019}}$

(a) Ισχύει η ισότητα, αφού:

$$\left.\begin{aligned} &2 < 2020 \Rightarrow 2^{\aleph_0} \leq 2020^{\aleph_0} \\ &2020 < 2^{\aleph_0} \Rightarrow 2020^{\aleph_0} \leq 2^{(\aleph_0^2)} \Rightarrow 2020^{\aleph_0} \leq 2^{\aleph_0} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2^{\aleph_0} = 2020^{\aleph_0}$$

(b) Είναι αληθής, αφού:

$$\aleph_0^{2020} = \aleph_0 < S\aleph_0 = \aleph_1 < \aleph_{2020}$$

(c) Ισχύει η ισότητα, αφού

$$\left.\begin{aligned} &c^{\aleph_0} = 2^{(\aleph_0^2)} = 2^{\aleph_0} = c \\ &\text{και επιπλέον: } \aleph_0^{\aleph_0} \geq 2^{\aleph_0} = c \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\Rightarrow c \leq \aleph_0^{\aleph_0} \leq c^{\aleph_0} = c \\ &\Rightarrow \aleph_0^{\aleph_0} = c^{\aleph_0} = c \end{aligned}$$

(d) Ισχύει η ανισότητα, αφού:

$$\aleph_{2019} < 2^{\aleph_{2019}} \Rightarrow \underbrace{\aleph_{2020}}_{= S\aleph_{2019}} \leq 2^{\aleph_{2019}}$$

Άσκηση 17: (Ίδια με την 16).

(a) $\aleph_0^2 < \aleph^{S\aleph_0}$ (b) $c^2 < c^{\aleph_0}$ (e) $2^{\aleph_{2020}} < \aleph_{2021}$

(c) $\aleph_{2020}^{2020} < \aleph_{2021}$ (d) $2^{\aleph_0} < 2^{(2^{\aleph_0})}$

(a) Αληθής:

$$\aleph_0^2 = \aleph_0 \quad \text{και} \quad \overbrace{\aleph_0^{\aleph_0} = \aleph_1}^{+} \quad \text{και} \quad \aleph_0 < \aleph_1$$

(β) Ψευδής

$$c^2 = c \quad \text{και} \quad \overbrace{c^{\aleph_0} = c}^{+} \quad \text{και} \quad c = c$$

(c) $\aleph_{2020}^{2020} = \aleph_{2020} < S\aleph_{2020} = \aleph_{2021}$

(d) $2^{\aleph_0} < 2^{(2^{\aleph_0})}$ αφού $\forall a$ πληθάριθμο, $a < 2^a$.

(e) Ψευδής, αφού:

$$\aleph_{2020} < S\aleph_{2020} = \aleph_{2021} \leq 2^{\aleph_{2020}}$$

Άσκηση 18: Έστω A ένα σύνολο με πληθάριθμο c. Θέλουμε F το σύνολο όλων των πεπερασμένων υποσυνόλων του A. Βρείτε τον πληθάριθμο του A.

Στην Άσκηση 5' έχει δειχθεί ότι

$$\{A \subseteq \mathbb{R} \mid |A| \leq \aleph_0\} = \mathfrak{c}$$

Επειδή τα σύνολα $\{x\}, x \in \mathbb{R}$ ανήκουν στο $\{A \subseteq \mathbb{R} \mid |A| < \aleph_0\}$, έπεται ότι:

$$\mathfrak{c} \leq |\{A \subseteq \mathbb{R} \mid |A| < \aleph_0\}| \leq |\{A \subseteq \mathbb{R} \mid |A| \leq \aleph_0\}| \leq \mathfrak{c}$$

Έτσι λοιπόν και το F θα έχει υπεραριθμήσιμο πλήθος υποσυνόλων, αφού η συνάρτηση:

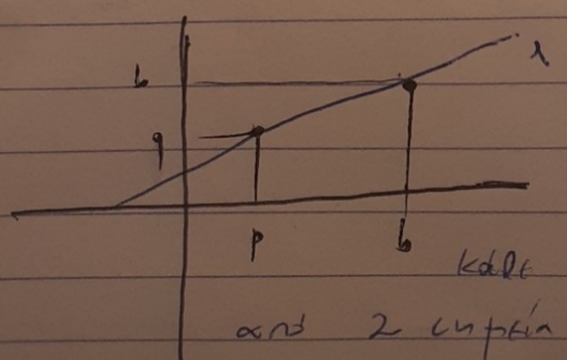
$$f : \{A \subseteq F \mid |A| < \aleph_0\} \to \{A \subseteq \mathbb{R} \mid |A| < \aleph_0\}$$

που ορίζεται ως

$$f(A) = \pi[A], \text{ όπου } \pi : F \twoheadrightarrow \mathbb{R}$$

είναι 1-1 και επί. [διότι έχει αντίστροφο την $\pi^{-1}[A]$]

Άσκηση 19: Έστω L το σύνολο των ευθειών ℓ του επιπέδου με την ιδιότητα $|\ell \cap \mathbb{Q}^2| \geq 2$. Βρείτε τον πληθάριθμο του L.



Εφόσον $|\ell \cap \mathbb{Q}^2| \geq 2$, η ℓ θα διέρχεται από 2 σημεία ρητών συντεταγμένων. Επομένως, κάθε ευθεία ℓ καθορίζεται πλήρως από 2 σημεία ρητών συντεταγμένων (4 ρητούς).

Τελικά λοιπόν: $|L| \leq |\mathbb{Q}^2 \times \mathbb{Q}^2| = |\mathbb{Q}^4| = \aleph_0$

Το L είναι απειροσύνολο, αφού κάθε $y = \alpha$ ανήκει σε αυτό. Τελικά, $|L| = \aleph_0$

Άσκηση 20: Αποδείξτε ότι το $\mathbb{R}$ μπορεί να γραφεί ως

$$\mathbb{R} = \bigcup_{i \in I} A_i$$

όπου κάθε A_i έχει πληθάριθμο $2^{\aleph_0}$, το I έχει πληθάριθμο $2^{\aleph_0}$ και τα A_i είναι ξένα ανά 2.

Η λύση βρίσκεται στην 'άσκηση 6'.

Άσκηση 21: Έστω A το σύνολο όλων των ακολουθιών $x : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ οι οποίες είναι τελικά σταθερές. Βρείτε τον $|A|$.

Κάθε τέτοια ακολουθία καθορίζεται πλήρως από τις πρώτες (μη σταθερές) τιμές της. Επομένως, μπορούμε κάθε ακολουθία $(x_1, x_2, \dots, x_n, x, x, x, \dots)$ να την αντιστοιχίσουμε σε ένα διάνυσμα n-συντεταγμένων $(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Θεωρούμε τώρα τα σύνολα

$$A_n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_k \in \mathbb{N}\}$$

και παρατηρούμε ότι όλα τους είναι αριθμήσιμα, αφού

$$A_n =_c \mathbb{N}^n =_c \mathbb{N}$$

Άρα η αριθμήσιμη ένωση αριθμήσιμων συνόλων

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$$

θα είναι αριθμήσιμη. Αυτό είναι όπως ακριβώς το σύνολο A.

Άσκηση 22: Έστω E απειροσύνολο. Δ.Ο. $\exists (E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ από ξένα ανά 2 σύνολα έτσι ώστε $|E| = |E_n|$ $\forall n \in \mathbb{N}$ και $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$.

Ισχύει ότι $|\mathbb{N} \times E| = \aleph_0 \cdot |E|$. Επειδή E είναι απειροσύνολο, μέσω των κανόνων απορρόφησης:

18

(α) Αν $|E| = \aleph_0 \Rightarrow |\mathbb{N} \times E| = \aleph_0 = |E|$

(β) Αν $|E| > \aleph_0 \Rightarrow |\mathbb{N} \times E| = |E|$

Δηλαδή σε κάθε περίπτωση, $|\mathbb{N} \times E| = |E|$.

Επομένως, μπορεί να βρεθεί αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία από το $\mathbb{N} \times E$ στο E, έστω $f : \mathbb{N} \times E \rightarrowtail\!\!\!\rightarrow E$.

Κατασκευάζουμε τώρα σύνολα με τον εξής τρόπο:

$$E_0 = \{ a \in E \mid f^{-1}(a) = (0, \bar{a}),\ \bar{a} \in E \}$$

$$E_1 = \{ a \in E \mid f^{-1}(a) = (1, \bar{a}),\ \bar{a} \in E \}$$

$$\vdots$$

$$E_n = \{ a \in E \mid f^{-1}(a) = (n, \bar{a}),\ \bar{a} \in E \}$$

$$\vdots$$

Τα σύνολα αυτά είναι ξένα ανά 2. Πράγματι, διαφορετικά θα υπήρχαν $n \neq m$ τέτοιοι ώστε

$$f(n, \bar{a}) = f(m, \bar{\bar{a}}) = a \quad (\text{άτοπο αφού } f \text{ 1-1}).$$

Η ένωση των $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ καλύπτει όλο το E, αφού η f είναι επί. Ειδικότερα, $\forall a \in E,\ \exists (n, \bar{a})$ τ.ω. $f(n, \bar{a}) = a$.

Άσκηση 23: Έστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση. Αποδείξτε ότι $\forall \varepsilon > 0$, $\exists X \subseteq \mathbb{R}$ με $X =_c \mathbb{R}$ και

$$x, y \in X \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Προς άτοπο υποθέτουμε ότι $\forall x \in X$, $\exists B(f(x), \varepsilon_x)$ τέτοια ώστε $B(f(x), \varepsilon_x) \cap f(X) = \{f(x)\}$

Θεωρούμε για όλα τα $x \in X$ αυτές τις μπάλες $B(f(x), \varepsilon_x)$ και κατασκευάζουμε μέσω αυτών την οικογένεια ανοικτών συνόλων $\mathbb{B}$ τέτοια ώστε

$B \in \mathbb{B} \Leftrightarrow$ το B κατασκευάζεται με τον εξής τρόπο:

$$\mathbb{B} = B(f(x), \overline{\varepsilon_x}), \text{ όπου } \overline{\varepsilon_x} = \inf\{\varepsilon_y \mid y \in X\}$$

Έτσι η $\mathbb{B}$ αποτελεί σύνολο ανοικτών μπαλών - υποσυνόλων του $\mathbb{R}$, κάθε τέτοιο σύνολο όμως, είναι αριθμήσιμο, επομένως $|\mathbb{B}| = \aleph_0$. Επειδή κάθε $x \in X$ ορίζει διαφορετική B εντός του $\mathbb{B}$, το σύνολο X θα έπρεπε εν τέλει να ήταν αριθμήσιμο. Αυτό είναι προφανώς άτοπο.

Άσκηση 24: Να εξετάσετε ποιές από τις παρακάτω ανισότητες διατακτικών αριθμών είναι αληθείς και ποιες ψευδείς.

(a) $2^\omega < 2020^\omega$ (b) $\omega^2 < \omega^3$ (c) $2 \cdot \omega < 2020 \cdot \omega$

(d) $2020 + \omega < \omega + 2$

20

(a) Είναι ψευδής, αφού

$$2^\omega = \sup\{2^n \mid n\in\omega\} = \omega$$
$$2020^\omega = \sup\{2020^n \mid n\in\omega\} = \omega$$

(b) Είναι αληθής, αφού $1<\omega$ και πολλαπλασιάζοντας εξ αριστερών (με ω^2):
$$\omega^2 < \omega^3$$

(c) Είναι ψευδής, αφού

$$2\cdot\omega = \sup\{2n \mid n\in\omega\} = \omega$$
$$2020\cdot\omega = \sup\{2020n \mid n\in\omega\} = \omega$$

(d) Είναι αληθής, αφού:

$$2020+\omega = \sup\{2020+n \mid n\in\omega\} = \omega$$
και επιπλέον: $\omega < \omega+1 < \omega+2$

<u>Άσκηση 25</u>: Για καθεμία από τις παρακάτω ανισότητες διατακτικών αριθμών, εξετάσετε αν είναι αληθείς ή ψευδείς.

(a) $2+\omega < 2^{2020}+\omega$ (b) $2020^\omega < 2021^\omega$

(c) $2^\omega < 2^{\omega\cdot 3}$ (d) $\omega_1+\omega < \omega+\omega_1$

(a) Είναι ψευδής, αφού:

$$2+\omega = \sup\{2+n \mid n\in\omega\} = \omega$$
$$2^{2020}+\omega = \sup\{2^{2020}+n \mid n\in\omega\} = \omega$$

(b) Είναι ψευδής, αφού:
$$2020^\omega = \sup\{2020^n \mid n\in\omega\} = \omega$$
$$2021^\omega = \sup\{2021^n \mid n\in\omega\} = \omega$$

(c) Είναι αληθής, αφού:

$$1<3 \Rightarrow \omega < \omega\cdot 3 \Rightarrow 2^{\omega} < 2^{\omega\cdot 3}$$

(d) Είναι ψευδής, αφού:

$$\left.\begin{array}{l} \omega+\omega_1 = \sup\{\omega+\eta \mid \eta\in\omega_1\} = \omega_1 \\ \text{και επίσης } \omega_1+1>\omega_1 \\ \omega_1+1<\omega_1+\omega \end{array}\right\} \Rightarrow \omega_1+\omega > \omega_1 = \omega+\omega_1$$

Άσκηση 26: Δ.ο. κάθε διατακτικός αριθμός a γράφεται στην μορφή $a=\lambda+n$, $n\in\omega$, $Limit(\lambda)$ ή $\lambda=0$.

Εάν $Limit(a)$ (ή $a=0$), τότε $a=a$. Εάν $a\in\omega \Rightarrow a=a$.
Υποθέτουμε ότι δεν ισχύει κάποια από τις προηγούμενες περιπτώσεις. Εφόσον ο a ανήκει στο $\mathcal{ON}$, θα περιέχει (θα αποτελείται από) διατακτικούς αριθμούς.

Θέτουμε λ να είναι ο μέγιστος διατακτικός ως προς την '$\in$' ο οποίος ανήκει στο σύνολο a και επίσης γι'αυτόν ισχύει $Limit(\lambda)$.

Επειδή ο a περιέχει τον λ και ο λ είναι ο μέγιστος οριακός εντός του a, ο a θα είναι κάποιος διατακτικός αριθμός επόμενος του λ (ενδεχομένως όχι άμεσα επόμενος).

Άρα,
$$\begin{aligned} a &= \overbrace{SS\cdots SS}^{n}\lambda \\ &= \overbrace{SS\cdots S}^{n-1}\lambda+1 \\ &= \cdots \\ &= \lambda+n, \text{ όπου } n\in\omega \end{aligned}$$

Άσκηση 27: Αποδείξτε ότι δεν υπάρχει ακολουθία διατακτικών αριθμών $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ τέτοια ώστε $a_n<\omega_1$ $\forall n\in\mathbb{N}$ και $\sup\{a_n \mid n\in\mathbb{N}\}=\omega_1$.

Πράγματι, αν προς άτοπο δεχτούμε ότι ισχύει το αντίθετο, τότε ο αριθμός (διατακτικός αριθμός)

$$\bigcup\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$$

θα είναι ακριβώς ο αριθμός (διατακτικός αριθμός)

$$\bigcup\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}=\sup\{a_n \mid n\in\mathbb{N}\}=\omega_1$$

όμως καθένα από τα a_n είναι σύνολο αριθμήσιμο, αφού το ω_1 είναι ο μικρότερος διατακτικός (ως προς την "$\in$") που είναι ως σύνολο υπεραριθμήσιμο. Άρα και το

$$\omega_1=\bigcup\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$$

θα είναι αριθμήσιμο σύνολο ως αριθμήσιμη ένωση αριθμήσιμων συνόλων. Αυτό είναι άτοπο.