*ΆΦραγκος, 10/07/2021*

# Αμφισυνεχείς και αμφιμονοσήμαντες απεικονίσεις του: $(\mathbb{R} \to \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\})$

| **Συμβολισμοί:** |
| --- |
| **1.**$S(x, r) = \{\tilde{x} \in A \mid d(\tilde{x}, x) < r\}$ **2.**$B(x, r) = \{\tilde{x} \in A \mid d(\tilde{x}, x) \le r\}$ **3.**$\widehat{T_C}(a, b)$ : το τόξο που ορίζεται από τα $a, b$ στον κύκλο $C$. |

Δεν είναι δυνατόν να βρεθεί απεικόνηση $\varphi$ του $(\mathbb{R} \to \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\} = C)$, η οποία να είναι συγχρόνως *αμφιμονοσήμαντη* και *αμφισυνεχής*. Μάλιστα θα δείξουμε (συνοπτικά) ότι το εξής θα συμβαίνει: εάν υποθέσουμε το αμφιμονοσήμαντο συνάρτησης, θα αποκλείεται η συνέχεια, ενώ αν υποθέσουμε την συνέχεια της αντίστροφης, θα αποκλείεται το επί.

*Απόδειξη:*

**I.** Ας υποθέσουμε ότι η $\varphi$ είναι μία αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση του $(\mathbb{R} \to C)$.

Η $\varphi$ δεν είναι δυνατόν να είναι συνεχής συνάρτηση, αφού μπορεί να βρεθεί μια φθίνουσα ακολουθία κλειστών συνόλων $A_i$ με $diamA_i \to 0$ του $C$ τα οποία έχουν πάντοτε απροσδιόριστα μεγάλους πραγματικούς αριθμούς, και άρα στο σημείο του $\bigcap_i A_i$ η $\varphi$ δεν γίνεται να είναι συνεχής. Το ότι το $\bigcap_i A_i$ είναι μονοσύνολο προκύπτει από το θεώρημα των Cantor - Fréchet. Η επιλογή των $A_i$ μπορεί να γίνει χωρίζοντας το $A_1 = C$ σε δύο ίσα τόξα $\widehat{T_C}\left((1, 0), \left(\cos\dfrac{\pi}{2}, \sin\dfrac{\pi}{2}\right)\right)$, $\overline{\left[\widehat{T_C}\left((1, 0), \left(\cos\dfrac{\pi}{2}, \sin\dfrac{\pi}{2}\right)\right)\right]_C^c}$ και διαλέγοντας όποιο από αυτά (έστω το $A_2$) έχει απροσδιόριστα μεγάλους πραγματικούς αριθμούς. Η διαδικασία συνεχίζεται επαγωγικά χωρίζοντας το $A_i$ σε δύο ίσα τόξα και επιλέγοντας το $A_{i+1}$.

**II.** Ας υποθέσουμε ότι η $\varphi$ είναι μία $1-1$ συνάρτηση του $(\mathbb{R} \to C)$ με συνεχή αντίστροφη.

Εφόσον η $\varphi^{-1}$ είναι συνεχής, τα σύνολα $\varphi\big((-x, x)\big)$ θα είναι όλα τους ανοικτά, και άρα τα $\big[\varphi\big((-x, x)\big)\big]_C^c$ θα είναι κλειστά.

Εάν $y$ είναι ένας αριθμός μεγαλύτερος του $x$, θα ισχύει ότι $\big[\varphi\big((-x, x)\big)\big]_C^c \supseteq \big[\varphi\big((-y, y)\big)\big]_C^c$. Πράγματι, θα το δείξουμε με άτοπο:

$$\big[\varphi\big((-y, y)\big)\big]_C^c \not\subseteq \big[\varphi\big((-x, x)\big)\big]_C^c \Rightarrow \exists z \in \big[\varphi\big((-y, y)\big)\big]_C^c - \big[\varphi\big((-x, x)\big)\big]_C^c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z \in \big[\varphi\big((-y, y)\big)\big]_C^c \textbf{ και } z \in \varphi\big((-x, x)\big) \overset{x \le y}{\Longrightarrow} z \in \big[\varphi\big((-y, y)\big)\big]_C^c \textbf{ και } z \in \varphi\big((-y, y)\big)$$

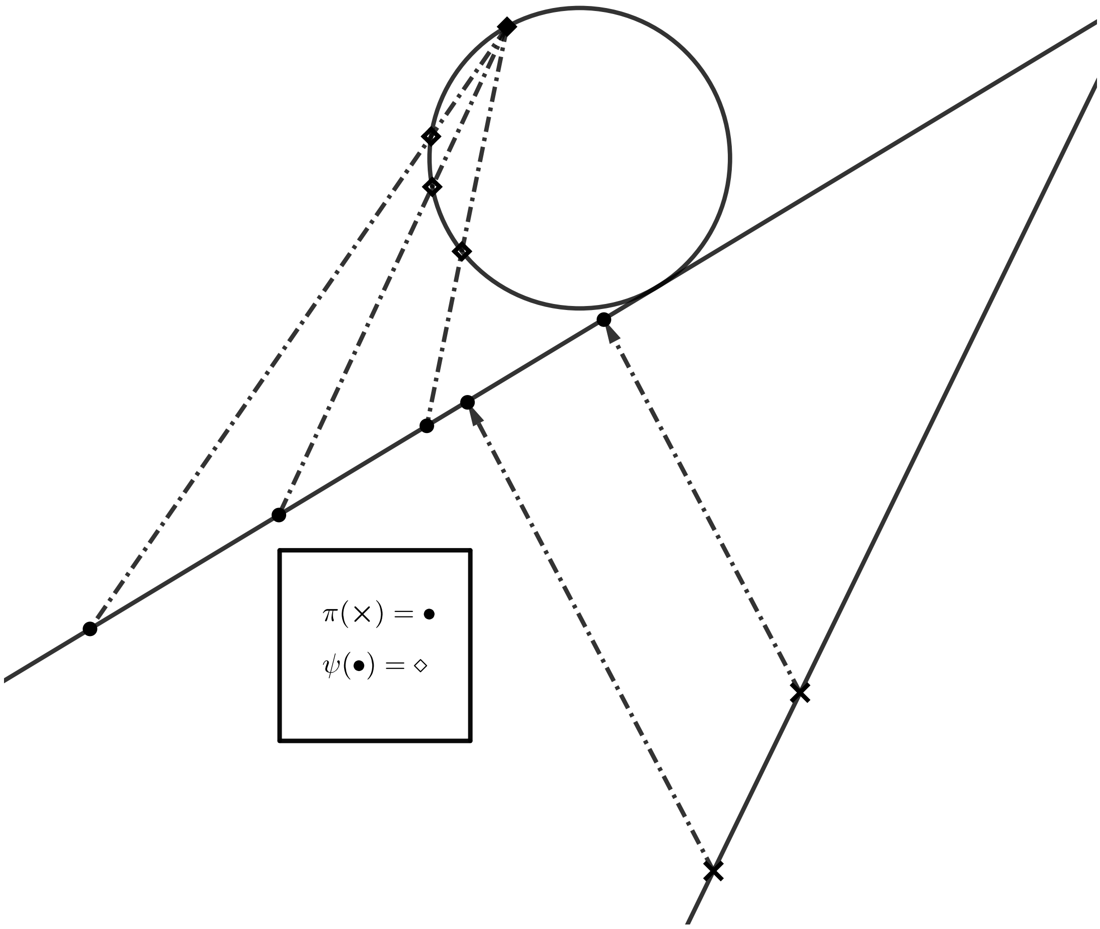
Αυτό είναι προφανώς άτοπο.

Με αυτά έχουμε ουσιαστικά δείξει ότι η ακολυθία $\left(\big[\varphi\big((-x, x)\big)\big]_C^c\right)_{x \in \mathbb{N}}$ είναι μία φθίνουσα ακολουθία κλειστών συνόλων. Επομένως, από το θεώρημα των Cantor - Fréchet:

$$[\varphi(\mathbb{R})]_C^c = \bigcap_{x \in \mathbb{N}} \big[\varphi\big((-x, x)\big)\big]_C^c \supseteq \{\overset{\infty}{x}\}$$

όπου $\overset{\infty}{x}$ είναι ένας πραγματικός αριθμός. Αυτό δείχνει ότι η $\varphi$ δεν είναι επί.

**Παράδειγμα ($1-1$, συνεχής, αλλά όχι επί):** *Το αντίστοιχο της στερεογραφικής προβολής στο επίπεδο:*




Θεωρούμε τον κύκλο $C$ στο επίπεδο και $\varepsilon$ μια του εφαπτομένη ευθεία. Ορίζουμε τις εξής δύο απεικονήσεις:

- Έστω $\zeta$ μία ευθεία του επιπέδου $\mathbb{R}^2$. Ορίζουμε την απεικόνηση $\Pi(\zeta) = \pi_\zeta : \zeta \to \varepsilon$ ως:

$$\pi_\zeta(x) = \varepsilon^\perp(x) \cap^* \varepsilon$$

  όπου $\varepsilon^\perp(x)$ είναι η κάθετη προς την $\varepsilon$ που διέρχεται από το $x$ και η σχέση $\cap^*$ είναι μία σχέση που για κάθε δύο σχήματα $\alpha, \beta$ με το πολύ 1 σημείο τομής, ορίζεται ως:

$$\cap^* : \alpha \cap^* \beta = \begin{cases} \emptyset, & \text{εάν δεν υπάρχει σημείο τομής,} \\ \text{το μοναδικό τους σημείο τομής, αν αυτές τέμνονται} \end{cases}$$

- Έστω $A$ το (μοναδικό) σημείο του $C$ με την μέγιστη απόσταση από την $\varepsilon$. Ορίζουμε την απεικόνιση $\psi : \varepsilon \to C$ ως:

$$\psi(x) = [Ax - \{A\}] \cap^* C$$

Παρατηρούμε ότι η απεικόνιση που ορίζεται ως $\psi \circ \big(\Pi(\zeta)(x)\big)$ είναι $1-1$, συνεχής και επί του $C - \{A\} \neq C$.

# ΜΕΓΑΛΟ ΤΗΣ ΓΝΩΣΗΣ ΚΕΝΟ

*Αυτή η σελίδα είναι αφιερωμένη σε όσα πράγματα ακόμη δεν γνωρίζω.*

# Ορισμός της πολυμεταβλητής συνέχειας σε παραμετροποιημένες καμπύλες

**Ορισμός:** Συνέχεια συναρτήσεων $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$:
*Έστω $f$ μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}^m$, με $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Η $f$ θα καλείται συνεχής στο $B \subseteq A$ εάν το ακόλουθο αληθεύει:*

$$\forall \vec{x}_0 \in B,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 :\ \forall \vec{x} \in S(\vec{x}_0, \delta) \cap B,\ ||f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0)|| < \varepsilon$$

*ή απλούστερα, με συμβολισμό ορίων θα μπορούσαμε να γράψουμε:*

$$\forall \vec{x}_0 \in B,\ \lim_{x \to x_0} ||f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0)|| = 0 \Leftrightarrow \forall \vec{x}_0 \in B,\ \lim_{x \to x_0} f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0)$$

Στην περίπτωση μιας παραμετροποιημένης καμπύλης $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^3$, ο ορισμός παίρνει την ακόλουθη μορφή:

> *Για κάθε $t \in [0,1]$, για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $\tilde{t} \in (t - \delta, t + \delta) \cap [0,1]$ να ισχύει $||\gamma(\tilde{t}) - \gamma(t)|| < \varepsilon$.*

*Ερώτηση για τους ορισμούς:* Εάν έχουμε μια καμπύλη $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ η οποία τέμνει τον εαυτό της σε μοναδικό σημείο $\gamma(t_0) = \gamma(t_1) = x$ με $t_0, t_1 \notin \{0,1\}$, τότε η καμπύλη αυτή μπορεί να θεωρηθεί θυλιά ή μόνο ο αντίστοιχος περιορισμός της $\gamma|_{[\min\{t_0,t_1\}, \max\{t_0,t_1\}]}$;