Εθνικό και Καποδιστριακό Παν. Αθηνών, Τμ. Μαθηματικών

Εισαγωγή στην Τοπολογία

Φράγκος Αναστάσιος

$$\emptyset, X \in \mathfrak{T}$$

$$\{A_i\}_{i=1}^{n} \subseteq \mathfrak{T} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathfrak{T}$$

$$\{A_i\}_{i\in I} \subseteq \mathfrak{T} \Rightarrow \bigcup_{i\in I} A_i \in \mathfrak{T}$$

——— 2024 Τελευταία ενημέρωση: ——— 2024

Η γραμματοσειρά που χρησιμοποιήθηκε είναι η Κέρκης. Περισσότερες πληροφορίες μπορείτε να βρείτε εδώ:

http://iris.math.aegean.gr/kerkis/

ΑΒΓΔΕΖΗΘΙΚΛΜΝΞΟΠΡΣΤΥΦΧΨΩ

αβγδεζηϑικλμνξοπρστυφχψω

ΑΒΓΔΕΖΗΘΙΚΛΜΝΞΟΠΡΣΤΥΦΧΨΩ

αβγδεζηϑικλμνξοπρστυφχψω

ΑΒΓΔΕΖΗΘΙΚΛΜΝΞΟΠΡΣΤΥΦΧΨΩ

αβγδεζηϑικλμνξοπρστυφχψω

ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ

abcdedghijklmnopqrstuvwxyz

BCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ

abcdedghijklmnopqrstuvwxyz

ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ

abcdedghijklmnopqrstuvwxyz

0123456789,./:“”()[]{}<>-!#$%&*

*0123456789,./:“”()[]<>{}-!#$%&**

0123456789,./:“”()[]<>{}-!#$%&*

Το μέγεθος της γραμματοσειράς επιτρέπει εκτύπωση σε Α5 ή Β5.

Πρόλογος

ddddd

Περιεχόμενα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Τοπολογίες και ανοικτά σύνολα

1.1 Τοπολογίες και βάσεις

Οι τοπολογικοί χώροι εμφανίζονται στα μαθηματικά με πολύ φυσιολογικό τρόπο, για τη μελέτη της στοιχειώδους γεωμετρία ενός χώρου, χωρίς να υπεισέρχεται κάποια συγκεκριμένη μετρική δομή. Οι εφαρμογές τους, όπως θα γίνει φανερό στα επόμενα κεφάλαια (και ιδίως στα 6,7 και 8) είναι πολλές και θεμελιώδεις.

Πριν ξεκινήσουμε την περιγραφή τους, είναι βοηθητικό διαισθητικά να δούμε ένα γνωστό παράδειγμα τοπολογικών χώρων, τους μετρικούς και ψευδομετρικούς χώρους.

Ορισμός 1.1: (Μετρικές και μετρικοί χώροι).
I. Έστω $M \neq \emptyset$ ένα σύνολο και $\varrho : M \times M \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση με τις ιδιότητες:

i. $\forall x, y \in M,\ \varrho(x,y) \geqslant 0$

ii. $\forall x, y \in M,\ [\varrho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y]$

iii. $\forall x, y \in M,\ \varrho(x,y) = \varrho(y,x)$

iv. $\forall x, y, z \in M,\ \varrho(x,z) \leqslant \varrho(x,y) + \varrho(y,z)$

Η συνάρτηση ϱ θα καλείται μετρική στο M.
II. Έστω $M \neq \emptyset$ ένα σύνολο και ϱ μια μετρική στο M. Το διατεταγμένο ζεύγος (M, ϱ) θα καλείται μετρικός χώρος.

Όσον αφορά τις ψευδομετρικές, ορίζουμε:

Ορισμός 1.2: (Ψευδομετρικές). Έστω $M \neq \emptyset$ ένα σύνολο και $\varrho : M \times M \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση που έχει τις ιδιότητες **i**, **iii**, **iv** της μετρικής, και έχει στην θέση της **ii** την:

ii*. $\forall x, y \in M,\ [x = y \Rightarrow \varrho(x,y) = 0]$

Η ϱ καλείται ψευδομετρική στον M.

■ **Παράδειγμα 1.1:**

- Θεωρούμε $M \neq \emptyset$ τυχαίο σύνολο και τη συνάρτηση $\varrho : M \times M \to \mathbb{R}$:

$$\varrho(x,y) = \begin{cases} 1 \text{ αν } x \neq y \\ 0 \text{ αν } x = y \end{cases}$$

Η ϱ είναι μετρική και μάλιστα ονομάζεται «διακριτή μετρική».

- Εάν πάλι $M \neq \emptyset$ είναι τυχαίο σύνολο, η συνάρτηση $d : M \times M \to \mathbb{R}$:

$$\forall x, y \in M,\ d(x, y) = 0$$

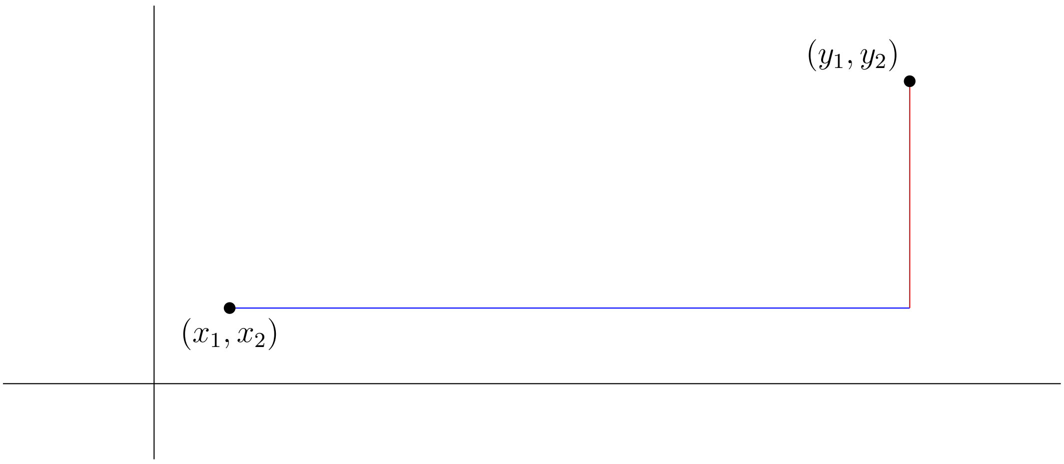
είναι ψευδομετρική στο M και ονομάζεται «τετριμμένη ψευδομετρική».

- Ιδιαίτερο ενδιαφέρον έχουν οι ευκλείδειοι χώροι ($\mathbb{R}^n$, για τα διάφορα $n \in \mathbb{N}$), με τις λεγόμενες $k-$μετρικές. Στον $\mathbb{R}^n$ οι συναρτήσεις $d_k : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$:

$$d_k\big((x_1, \cdots, x_n), (y_1, \cdots, y_n)\big) := \sqrt[k]{\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^k}$$

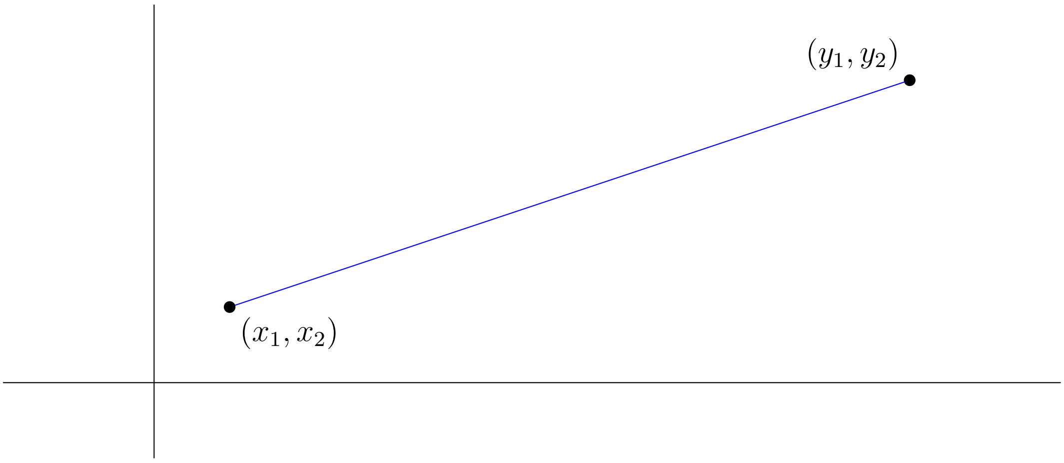
για τα διάφορα $k \in \mathbb{N}$ είναι μετρικές (αυτό το αποτέλεσμα αποδεικνύεται σε μαθήματα πραγματικής ανάλυσης). Ειδικές περιπτώσεις $k-$μετρικών είναι η μετρική του ταχυδρόμου ($k = 1$):

$$d_1\big((x_1, \cdots, x_n), (y_1, \cdots, y_n)\big) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$$



και η συνήθης απόσταση στον $\mathbb{R}^n$ ή αλλιώς ευκλείδεια μετρική ($k = 2$).

$$d_2\big((x_1, \cdots, x_n), (y_1, \cdots, y_n)\big) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2}$$



- Συνεχίζοντας στο προηγούμενο παράδειγμα, για κάθε δύο $x, y \in \mathbb{R}^n$, η ακολουθία $\big(d_k(x,y)\big)_{k\in\mathbb{N}}$ έχει όριο, το οποίο φυσικά εξαρτάται από τα x, y. Το συμβολίζουμε $\alpha(x,y)$. Η συνάρτηση τώρα $d_\infty : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$:

$$d_\infty(x,y) = \alpha(x,y)$$

αποδεικνύεται ότι είναι μετρική, και την ονομάζουμε «μετρική supremum». Μάλιστα αληθεύει ότι:

$$d_\infty(x,y) = \max\{|x_i - y_i|\}_{i=1}^n$$

όπου x_i, y_i είναι οι συντεταγμένες των x και y αντίστοιχα.

■

Ορισμός 1.3: (Ανοικτές και κλειστές μπάλες). Έστω (M,ϱ) ένας μετρικός χώρος, $x \in M$ και $r > 0$.

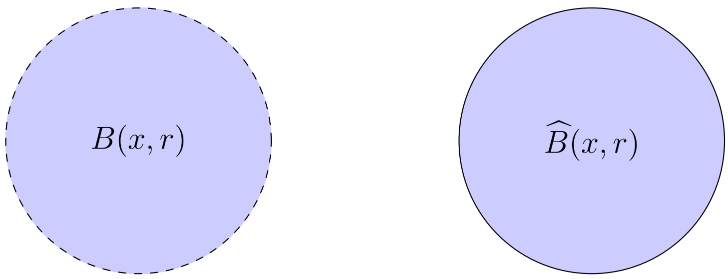
I. Ορίζουμε ως ανοικτή μπάλα με κέντρο x και ακτίνα r το σύνολο:

$$B(x,r) := \{y \in M \mid \varrho(x,y) < r\}$$

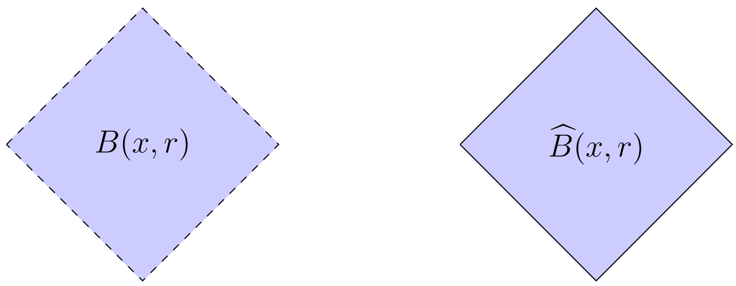
II. Ορίζουμε ως κλειστή μπάλα με κέντρο x και ακτίνα r το σύνολο:

$$\widehat{B}(x,r) := \{y \in M \mid \varrho(x,y) \leqslant r\}$$

Φυσικά (γενικά) αληθεύει ότι $x \in B(x,r) \subseteq \widehat{B}(x,r)$. Ειδικά στο επίπεδο, μετρώντας με τη συνήθη μετρική έχουμε εικόνες της μορφής:



ενώ μετρώντας με τη μετρική του ταχυδρόμου:



Ορισμός 1.4: (Ανοικτά σύνολα). Έστω (M,ϱ) μετρικός χώρος. Ένα σύνολο $A \subseteq M$ θα λέγεται ανοικτό στον μετρικό χώρο αν και μόνο αν:

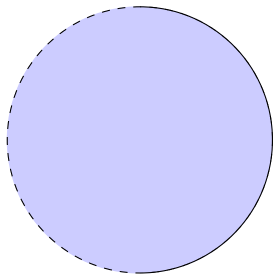
$$\forall x \in A,\ \exists \varepsilon_x > 0 :\ B(x,\varepsilon_x) \subseteq A$$

Αυτομάτως ο ορισμός των ανοικτών συνόλων δίνει ότι κάθε ανοικτό σύνολο είναι ένωση ανοικτών μπαλών (και ισχύει και το αντίστροφο).

$$A \text{ ανοικτό } \Leftrightarrow \exists \big\{B(x,\varepsilon_x)\big\}_x \text{ με } A = \bigcup_x B(x,\varepsilon_x)$$

Ορισμός 1.5: (Κλειστά σύνολα). Έστω (M, ϱ) μετρικός χώρος. Ένα σύνολο $A \subseteq M$ θα λέγεται κλειστό στον μετρικό χώρο αν και μόνο αν το συμπλήρωμά του $A^c = M \backslash A$ είναι ανοικτό στον μετρικό χώρο.

Παρατήρηση 1.1: Έστω ένας μετρικός χώρος (M, ϱ). Υπάρχουν σύνολα που είναι και κλειστά και ανοικτά (για παράδειγμα το $\emptyset$). Επιπλέον, εν γένει ένα σύνολο δεν είναι υποχρεωτικό να είναι ανοικτό ή κλειστό - για παράδειγμα στο επίπεδο, η ένωση μισής κλειστής μπάλας (δίσκου) με μισή ανοικτή μπάλα (η δεύτερη να μην είναι όλη εντός της πρώτης) είναι σύνολο ούτε ανοικτό ούτε κλειστό.



Στους μετρικούς χώρους (M, ϱ) η τοπολογία είναι το σύνολο όλων των ανοικτών υποσυνόλων του M. Εάν θέλουμε να περιγράψουμε τα ανοικτά σύνολα σε χώρους χωρίς απαραιτήτως μετρική δομή, δεν έχουμε άλλη επιλογή από το να δουλέψουμε αξιωματικά με αυτά.

Με το ακόλουθο θεώρημα της πραγματικής ανάλυσης, θα περιγράψουμε χαρακτηριστικές ιδιότητες των ανοικτών συνόλων, οι οποίες θα βοηθήσουν σε μία γενίκευσή τους, και κατ'επέκταση στον ορισμό της τοπολογίας.

Θεώρημα 1.1: (Ιδιότητες των μετρικών τοπολογικών χώρων). Έστω (M, ϱ) μετρικός χώρος. Ορίζουμε την τοπολογία του M ως το σύνολο των ανοικτών υποσυνόλων του μετρικού χώρου, δηλαδή:

$$\mathfrak{T}_\varrho = \{A \subseteq X \mid A \text{ ανοικτό}\}$$

Τα ακόλουθα αληθεύουν:

i. $\emptyset, M \in \mathfrak{T}_\varrho$

ii. Εάν $n \in \mathbb{N}$ και $\{A_i\}_{i=1}^n \subseteq \mathfrak{T}_\varrho$, τότε $\bigcap_{i=1}^n A_i \in \mathfrak{T}_\varrho$

iii. Εάν I είναι ένα αυθαίρετο σύνολο δεικτών και $\{A_i\}_{i\in I} \subseteq \mathfrak{T}_\varrho$, τότε $\bigcup_{i\in I} A_i \in \mathfrak{T}_\varrho$

Απόδειξη: Για το i., παρατηρούμε ότι το να μην είναι ανοικτό το $\emptyset$ παραβιάζει τον ορισμό του κενού συνόλου. Εάν το M δεν είναι ανοικτό σύνολο, για τυχόν $x \in M$ και για κάθε $r > 0$ θα ίσχυει ότι:

$$B(x, r) \nsubseteq M$$

το οποίο είναι άτοπο από τον ορισμό της μπάλας.

Για το ii., εφόσον η οικογένεια $\{A_i\}_{i=1}^n$ είναι οικογένεια ανοικτών συνόλων, για κάθε $x \in \bigcap_{i=1}^n A_i$ υπάρχουν ακτίνες r_i τέτοιες ώστε $B(x, r_i) \subseteq A_i$ (για τα διάφορα i). Θεωρώντας $r = \min\{r_i\}_{i=1}^n$, έχουμε ότι $B(x, r) \subseteq \bigcap_{i=1}^n A_i$.

Για το iii., εάν $x \in \bigcup_{i\in I} A_i$, τότε $x \in A_j$ για κατάλληλο δείκτη j. Οπότε, υπάρχει r_j τέτοιο ώστε $B(x, r_j) \subseteq A_j$ και κατ' επέκταση $B(x, r_j) \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i$.

□

Κανείς ανατρέχοντας σε διάφορες αποδείξεις της πραγματικής ανάλυσης, μπορεί να δει ότι οι τρεις ιδιότητες του παραπάνω θεωρήματος αρκούν για την απόδειξη διαφόρων θεωρημάτων. Η έννοια της απόστασης δεν είναι πάντοτε αναγκαία για να εξάγουμε συμπεράσματα για τον χώρο στον οποίο βρισκόμαστε, κι οπότε ορισμός της τοπολογίας που θα δώσουμε είναι φυσιολογικό να βασίζεται στις τρεις ιδιότητες του Θεωρήματος 1.1.

Ορισμός 1.6: (Τοπολογίες και τοπολογικοί χώροι). Έστω $X \neq \emptyset$ ένα σύνολο.
I. Μια τοπολογία στον X είναι μια οικογένεια $\mathfrak{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$ με τις εξής ιδιότητες:

i. $\emptyset, X \in \mathfrak{T}$

ii. Εάν $n \in \mathbb{N}$ και $\{A_i\}_{i=1}^n \subseteq \mathfrak{T}$, τότε $\bigcap_{i=1}^n A_i \in \mathfrak{T}$

iii. Εάν I είναι ένα αυθαίρετο σύνολο δεικτών και $\{A_i\}_{i\in I} \subseteq \mathfrak{T}$, τότε $\bigcup_{i\in I} A_i \in \mathfrak{T}$

II. Το διατεταγμένο ζεύγος $(X, \mathfrak{T})$ θα καλείται τοπολογικός χώρος.

Ορισμός 1.7: (Ανοικτά και κλειστά σύνολα σε τοπολογίες). Έστω $(X, \mathfrak{T})$ ένας τοπολογικός χώρος.
I. Τα στοιχεία μιας τοπολογίας $\mathfrak{T}$ θα τα ονομάζουμε ανοικτά σύνολα στον X.
II. Τα κλειστά σύνολα F στον X είναι ακριβώς αυτά για τα οποία $F^c = X \backslash F \in \mathfrak{T}$.

Παρατήρηση 1.2: Παρατηρήστε ότι $\{\emptyset, X\} \subseteq \mathfrak{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$.

Μέχρι τώρα έχουμε δει την τοπολογία με τον ορισμό της. Μερικά συγκεκριμένα παραδείγματα τοπολογιών είναι τα ακόλουθα:

■ **Παράδειγμα 1.2:**

- Η $\{\emptyset, X\}$ είναι μια τοπολογία στον X, που ονομάζεται «τετριμμένη τοπολογία».
- Το $\mathcal{P}(X)$ είναι μια τοπολογία στον X, που ονομάζεται «διακριτή τοπολογία».
- Έστω (M, ϱ) ένας μετρικός χώρος. Βάσει του Θεωρήματος 1.1, το σύνολο $\mathfrak{T}_\varrho$ (όπως αυτό ορίζεται στην διατύπωση του θεωρήματος) είναι τοπολογία στο M.
- Έστω $X \neq \emptyset$ ένα σύνολο και $x_0 \in X$. Το σύνολο:
$$\mathfrak{T} = \{A \subseteq X \mid x_0 \in A\} \cup \{\emptyset\}$$
είναι τοπολογία στον X, που ονομάζεται «τοπολογία του ιδιαιτέρου σημείου».
- Αντίστοιχα, το σύνολο:
$$\mathfrak{T} = \{A \subseteq X \mid x_0 \notin A\} \cup \{X\}$$
είναι τοπολογία στον X, που ονομάζεται «τοπολογία του εξαιρουμένου σημείου».
- Έστω $X \neq \emptyset$ ένα σύνολο. Το σύνολο:
$$\mathfrak{T} = \{A \subseteq X \mid A^c \text{ πεπερασμένο}\} \cup \{\emptyset\}$$
είναι τοπολογία στον X, που ονομάζεται «συμπεπερασμένη τοπολογία».
- Αντίστοιχα, το σύνολο:
$$\mathfrak{T} = \{A \subseteq X \mid A^c \text{ αριθμήσιμο}\} \cup \{\emptyset\}$$
είναι τοπολογία στον X, που ονομάζεται «συναριθμήσιμη τοπολογία».

■

Ο ορισμός των τοπολογικών χώρων προήλθε από την ενασχόλησή μας με τους μετρικούς χώρους, και μάλιστα από αρκετά χαρακτηριστικές ιδιότητες των ανοικτών συνόλων σε αυτούς. Είναι αναγκαίο λοιπόν να εξασφαλιστεί ότι αυτή ήταν πράγματι μία γενίκευση, δηλαδή ότι υπάρχουν μετρικοί χώροι στους οποίους καμία μετρική δομή (συμβατή με την τοπολογία) δεν μπορεί να προστεθεί.

Ορισμός 1.8: (Μετρικοποιήσιμες τοπολογίες). Έστω $X \neq \emptyset$. Μια τοπολογία $\mathfrak{T}$ στο X λέγεται μετρικοποιήσιμη εάν υπάρχει μετρική ϱ τέτοια ώστε $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}_\varrho$.

Παρατήρηση 1.3: Υπάρχουν μη μετρικοποιήσιμες τοπολογίες.

Απόδειξη: Ας υποθέσουμε ότι $|X| \geqslant 2$ κι ας πάρουμε την τετριμμένη τοπολογία του X, δηλαδή την $\{\emptyset, X\}$. Ας υποθέσουμε ότι είναι μετρικοποιήσιμη. Για τυχόν $x \in X$ και για κάθε $r > 0$, η μπάλα $B(x,r)$ είναι ένα από τα σύνολα $\emptyset, X$ (αφού αυτά είναι τα μόνα ανοικτά σύνολα). Επειδή δεν είναι κενή, αναγκαστικά είναι ολόκληρος ο χώρος X. Εάν τώρα ο X δεν είναι μονοσύνολο, ένα οποιοδήποτε $x \neq y \in X$ βρίσκεται σε κάθε μπάλα $B(x,r)$ για οσοδήποτε μικρή απόσταση $r > 0$ - οπότε η απόσταση των x, y θα έπρεπε να είναι μηδενική χωρίς τα ίδια να ταυτίζονται. Αυτό παραβιάζει την ιδιότητα ii. της μετρικής και μας δίνει άτοπο.

□

Επιστρέφοντας στο Παράδειγμα 1.2, η διακριτή τοπολογία του X είναι μετρικοποιήσιμη τοπολογία, με τη διακριτή μετρική. Είναι επίσης σαφές ότι κάθε μετρική τοπολογία είναι μετρικοποιήσιμη.

Για τις υπόλοιπες τοπολογίες του παραδείγματος, χρειάζεται να κάνουμε μεγαλύτερη ανάλυση για να εξάγουμε συμπεράσματα.

Πρόταση 1.1: Έστω (X, ϱ) ένας μετρικός χώρος. Τα μονοσύνολα είναι κλειστά.

Απόδειξη: Θα δείξουμε για κάθε μονοσύνολο $\{x\}$, το $\{x\}^c = X \setminus \{x\}$ είναι ανοικτό. Η περίπτωση $|X| = 1$ είναι προφανής.

Εάν $|X| \geqslant 2$, τότε για οποιοδήποτε $y \in \{x\}^c$ η απόσταση $\rho = \varrho(x,y)$ δεν είναι μηδέν. Οπότε η μπάλα $B(y, \rho/2)$ δεν τέμνει το $\{x\}$, και συνεπώς $B(y, \rho/2) \subseteq \{x\}^c$.

□

Πρόταση 1.2: Έστω (X, ϱ) ένας μετρικός χώρος με $|X| \geqslant 2$. Υπάρχουν δύο ανοικτά, μη κενά, ξένα σύνολα.

Απόδειξη: Εφόσον υπάρχουν τουλάχιστον δύο στοιχεία στον χώρο, μπορούμε να επιλέξουμε δύο, τα x, y. Εάν $\rho = \varrho(x,y)$, τα σύνολα $B(x, \rho/3),\ B(y, \rho/3)$ είναι ανοικτά, μη κενά και ξένα.

□

Πρόταση 1.3: Έστω $X = \{x\}$. Κάθε τοπολογία στον X είναι η διακριτή τοπολογία, οπότε είναι μετρικοποιήσιμη.

Απόδειξη: Για κάθε τοπολογία $\mathfrak{T}$ αληθεύουν οι εγκλεισμοί $\{\emptyset, X\} \subseteq \mathfrak{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Επειδή όμως το X είνα μονοσύνολο:

$$\mathcal{P}(X) = \big\{\emptyset, \{x\}\big\} = \{\emptyset, X\}$$

κι επομένως $\mathfrak{T} = \mathcal{P}(X)$.

□

Παρατήρηση 1.4: Έστω X ένα σύνολο και $x \neq x_0$ δύο στοιχεία του.

i. Εφοδιάζοντας τον χώρο με την τοπολογία $\mathfrak{T}^+$ του ιδιαιτέρου σημείου x_0, το σύνολο $\{x_0\}$ δεν είναι κλειστό. Επομένως, βάσει της Πρότασης 1.1, αυτή η τοπολογία δεν είναι μετρικοποιήσιμη.

ii. Εφοδιάζοντας τον χώρο με την τοπολογία $\mathfrak{T}^-$ του εξαιρουμένου σημείου x_0, το σύνολο $\{x\}$ δεν είναι κλειστό. Επομένως, βάσει της Πρότασης 1.1, αυτή η τοπολογία δεν είναι μετρικοποιήσιμη.

Απόδειξη: Θα δούμε το i., και το ii. μπορεί να γίνει αναλόγως. Εάν το $\{x_0\}$ ήταν κλειστό, τότε το $\{x_0\}^c = X \backslash \{x_0\}$ θα ήταν ανοικτό. Δηλαδή $\{x_0\}^c \in \mathfrak{T}^+$, το οποίο είναι άτοπο από τον ορισμό της εν λόγω τοπολογίας.

□

Παρατήρηση 1.5: Έστω $X \neq \emptyset$ ένα σύνολο.

i. Εάν $\mathfrak{T}$ είναι η συμπεπερασμένη τοπολογία του X:

$$(X, \mathfrak{T}) \text{ μετρικοποιήσιμος} \Leftrightarrow X \text{ πεπερασμένο}$$

ii. Ανάλογο συμπέρασμα ισχύει και για τις συναριθμήσιμες τοπολογίες. Εάν $\mathfrak{T}$ είναι η συναριθμήσιμη τοπολογία του X:

$$(X, \mathfrak{T}) \text{ μετρικοποιήσιμος} \Leftrightarrow X \text{ αριθμήσιμο}$$

Απόδειξη: Και πάλι θα ασχοληθούμε με το i.. Το ii. μπορεί να γίνει αναλόγως. Εάν το X είναι πεπερασμένο, θα αληθεύει αναγκαστικά ότι $\mathfrak{T} = \mathcal{P}(X)$. Οπότε η τοπολογία είναι μετρικοποιήσιμη (με τη διακριτή μετρική).

Εάν το X είναι άπειρο, υποθέτουμε προς άτοπο ότι είναι μετρικοποιήσιμο. Από την Πρόταση 1.2, υπάρχουν ανοικτά σύνολα A, B με κενή τομή, δηλαδή:

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow A \subseteq B^c$$

Επειδή το B είναι ανοικτό, το B^c είναι πεπερασμένο κι επομένως και το A. Το A^c είναι κι αυτό πεπερασμένο ως συμπλήρωμα ανοικτού, οπότε το $X = A \cup A^c$ είναι πεπερασμένο. Αυτό είναι άτοπο.

□

Όσον αφορά τα κλειστά σύνολα στους τοπολογικούς χώρους (όπως και στους μετρικούς), γνωρίζοντας τα ανοικτά σύνολα, ορίσαμε φυσιολογικά τα κλειστά. Ένα σύνολο F λέγεται κλειστό εάν το $F^c = X \backslash F$ είναι ανοικτό. Γι' αυτά τα κλειστά σύνολα ισχύουν ιδιότητες αντίστοιχες (και όχι ίδιες) με τα ανοικτά σύνολα. Χαρακτηριστική είναι η ακόλουθη πρόταση:

Πρόταση 1.4: Σε έναν τοπολογικό χώρο $(X, \mathfrak{T})$ συμβολίζουμε:

$$\mathfrak{F} = \{F \subseteq X \mid F \text{ κλειστό}\}$$

Τότε:

i. $\emptyset, X \in \mathfrak{F}$

ii. Εάν $n \in \mathbb{N}$ και $\{F_i\}_{i=1}^n \subseteq \mathfrak{F}$, τότε $\bigcup_{i=1}^n F_i \in \mathfrak{F}$

iii. Εάν I είναι ένα αυθαίρετο σύνολο δεικτών και $\{F_i\}_{i\in I} \subseteq \mathfrak{F}$, τότε $\bigcap_{i\in I} F_i \in \mathfrak{F}$

Απόδειξη: Για το i.: Έχουμε:

$$\emptyset \in \mathfrak{T} \Rightarrow \emptyset^c = X \in \mathfrak{F}$$
$$X \in \mathfrak{T} \Rightarrow X^c = \emptyset \in \mathfrak{F}$$

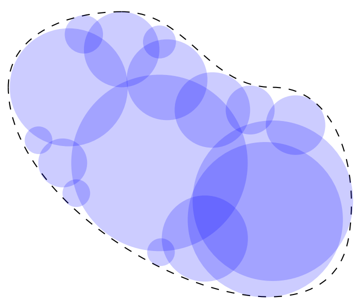
Για τα ii. και iii.: Εφαρμόζουμε τον κανόνα de Morgan για τις ενώσεις και τις τομές αντίστοιχα.

□

Στους διάφορους μετρικούς χώρους (X,ϱ) υπάρχει μια οικογένεια συνόλων $\mathcal{B} \subseteq \mathfrak{T}_\varrho$ από «εύχρηστα» ανοικτά σύνολα για την περιγραφή της τοπολογίας. Για παράδειγμα, η οικογένεια των ανοικτών μπαλών του (X,ϱ) είναι τέτοιου είδους σύνολο.

Για να γίνει περισσότερο κατανοητή αυτή η έννοια «χρησιμότητας», υπενθυμίζουμε την παρακάτω συνεπαγωγή (σε μετρικούς χώρους):

$$A \text{ ανοικτό } \Leftrightarrow \exists \big\{B(x,\varepsilon_x)\big\}_x \text{ με } A = \bigcup_x B(x,\varepsilon_x)$$



Διατυπώνοντας το ίδιο, αλλά με κάπως διαφορετικό τρόπο, έχουμε την ακόλουθη πρόταση:

Πρόταση 1.5: Έστω (X,ϱ) ένας μετρικός χώρος. Οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες:

i. $\forall A \in \mathfrak{T}, \forall x \in A, \exists B(x,\varepsilon_x)$ τέτοιο ώστε $x \in B(x,\varepsilon_x)$ και $B(x,\varepsilon_x) \subseteq A$

ii. Κάθε ανοικτό σύνολο γράφεται ως ένωση ανοικτών μπαλών.

Γενικά λοιπόν, στους μετρικούς χώρους υπάρχουν σύνολα (οι ανοικτές μπάλες) που κατασκευάζουν όλα τα ανοικτά σύνολα. Την ίδια κατάσταση θα θέλαμε να μεταφέρουμε, κατά κάποιον τρόπο, στα ανοικτά σύνολα μιας τυχαίας (εν γένει μη μετρικοποιήσιμης) τοπολογίας. Δίνουμε λοιπόν τον ακόλουθο ορισμό:

Ορισμός 1.9: (Βάση μιας τοπολογίας). Έστω $(X,\mathfrak{T})$ ένας τοπολογικός χώρος. Ένα σύνολο $\mathcal{B} \subseteq \mathfrak{T}$ λέγεται βάση της τοπολογίας $\mathfrak{T}$ εάν και μόνο αν ισχύει η ακόλουθη συνθήκη:

«Κάθε $A \in \mathfrak{T}$ γράφεται ως ένωση συνόλων της οικογένειας $\mathcal{B}$»

Ο ορισμός είναι σαφώς επηρεασμένος από τους μετρικούς χώρους. Λαμβάνοντας την Πρόταση 1.5 υπόψη, έχουμε την παρακάτω παρατήρηση:

Παρατήρηση 1.6: Έστω $(X, \mathfrak{T})$ ένας τοπολογικός χώρος και $\mathcal{B} \subseteq \mathfrak{T}$. Η οικογένεια $\mathcal{B}$ είναι βάση της τοπολογίας εάν και μόνο αν:

$$\forall A \in \mathfrak{T},\ \forall x \in A,\ \exists B_x \in \mathcal{B} \text{ τέτοιο ώστε } x \in B_x \text{ και } B_x \subseteq A$$

Απόδειξη: ($\Rightarrow$) Υποθέτουμε ότι η $\mathcal{B}$ είναι βάση για την τοπολογία $\mathfrak{T}$. Έστω $A \in \mathfrak{T}$ τυχόν ανοικτό σύνολο και $x \in A$. Επειδή η $\mathcal{B}$ είναι βάση για την τοπολογία, υπάρχει αυθαίρετα μεγάλο πλήθος συνόλων $\mathcal{B} \ni B_i,\ i \in I$ για τα οποία αληθεύει:

$$A = \bigcup_{i \in I} B_i$$

Εξ ορισμού τώρα της ένωσης, υπάρχει δείκτης $j_x \in I$ για τον οποίον $x \in B_{j_x}$, δηλαδή:

$$x \in B_{j_x} \subseteq \bigcup_{i \in I} B_i = A,\ \{B_i\}_{i \in I} \subseteq \mathcal{B}$$

($\Leftarrow$) Υποθέτουμε ότι:

$$\forall A \in \mathfrak{T},\ \forall x \in A,\ \exists B_x \in \mathcal{B} \text{ τέτοιο ώστε } x \in B_x \text{ και } B_x \subseteq A$$

Η ιδιότητα αυτή άμεσα δίνει ότι $\bigcup_{x \in A} B_x \supseteq A$ (διότι η ένωση γίνεται για κάθε $x \in A$, και $x \in B_x$). Επιπλέον $\bigcup_{x \in A} B_x \subseteq A$ (διότι $B_x \subseteq A$ για κάθε x). Ισχύει λοιπόν η ισότητα:

$$\bigcup_{x \in A} B_x = A$$

□

■ **Παράδειγμα 1.3:**

- Έστω (X, ϱ) ένας μετρικός χώρος. Το σύνολο:

  $$\mathcal{B} = \{B(x, r) \mid x \in X,\ r > 0\}$$

  είναι βάση της τοπολογίας $\mathfrak{T}_\varrho$.

- Έστω $(X, \mathfrak{T})$ ένας τοπολογικός χώρος και $\mathcal{B}$ μια βάση της τοπολογίας. Κάθε σύνολο $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}' \subseteq \mathfrak{T}$ είναι βάση της τοπολογίας, και ειδικότερα η $\mathfrak{T}$ είναι βάση του εαυτού της. Γενικά λοιπόν η ύπαρξη «μεγάλων» βάσεων δεν έχει ιδιαίτερο ενδιαφέρον και γι' αυτό θα επικεντρωνόμαστε στην εύρεση της «μικρότερης» βάσης (ως προς τη σχέση του υποσυνόλου).

- Έστω $(X, \mathfrak{T}_\delta)$ με $\mathfrak{T}_\delta = \mathcal{P}(X)$ να είναι η διακριτή τοπολογία. Σε αυτήν την τοπολογία κάθε υποσύνολο του X είναι ανοικτό, οπότε η οικογένεια:

  $$\mathcal{B} = \big\{\{x\} \mid x \in X\big\}$$

  αποτελεί βάση της $\mathfrak{T}_\delta$. Μάλιστα αυτή είναι η μικρότερη δυνατή βάση ως προς τη σχέση του υποσυνόλου - κάθε $\{x\}$ είναι ανοικτό και ο μόνος τρόπος να «παραχθεί» από μια βάση είναι να βρίσκεται ήδη στη βάση.

■

Στους μετρικούς χώρους μπορούμε να δουλέψουμε και κάπως αντίστροφα. Δοθείσης της οικογένειας των ανοικτών μπαλών, κανείς μπορεί να κατασκευάσει τη (μοναδική) τοπολογία της οποίας είναι βάση. Αυτό γίνεται με τον εξής τρόπο, ορίζοντας:

$$\mathfrak{T} = \left\{ \bigcup_{x \in \mathcal{X}} \bigcup_{\varepsilon \in \mathcal{E}} B(x, \varepsilon) \;\middle|\; \mathcal{X} \subseteq X,\ \mathcal{E} \subseteq (0, \infty) \right\}$$

Γενικά όμως, εάν μας δοθεί ένα σύνολο $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$, μπορεί να κατασκευαστεί κατάλληλη τοπολογία της οποίας να είναι βάση; Η απάντηση είναι αρνητική.

Για παράδειγμα, σε κάθε τοπολογία $\mathfrak{T}$ το X είναι ανοικτό σύνολο, οπότε θα πρέπει να καλύπτεται από στοιχεία μιας βάσης $\mathcal{B}$. Επομένως η $\mathcal{B}$ δεν είναι τυχαία οικογένεια, αλλά κάλυψη του X:

$$X = \bigcup \mathcal{B} = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$$

Κάθε «υποψήφιο» σύνολο στο να αποτελέσει βάση μιας τοπολογίας πρέπει να είναι κάλυψη του X.

Ας δούμε και μια άλλη απαίτηση για μια βάση. Δοθέντων δύο συνόλων $A, C \in \mathcal{B}$ σε μια βάση μιας τοπολογίας $\mathfrak{T}$, η τομή $A \cap C$ είναι ανοικτό σύνολο. Οπότε, για κάθε $x \in A \cap C$ υπάρχει $B_x \in \mathcal{B}$ τέτοιο ώστε $x \in B_x$ και $B_x \subseteq A \cap C$ (σύμφωνα φυσικά με την Παρατήρηση).

Κανείς μπορεί να συνεχίσει να βρίσκει διάφορες ιδιότητες που πρέπει να ικανοποιούνται από ένα σύνολο $\mathcal{B}$, εάν ευελπιστούμε ότι μπορεί να αποτελέσει βάση μιας τοπολογίας. Το παρακάτω θεώρημα μας δείχνει ότι οι δύο προηγούμενες είναι αρκετές.

Θεώρημα 1.2: Έστω $X \neq \emptyset$ και $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Η $\mathcal{B}$ είναι βάση μιας (μοναδικής) τοπολογίας $\mathfrak{T}$ εάν και μόνο αν:

i. Το $\mathcal{B}$ είναι κάλυψη του X, δηλαδή $X = \bigcup \mathcal{B}$ (αφού $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$).

ii. $\forall A, C \in \mathcal{B},\ \forall x \in A \cap C,\ \exists B_x \in \mathcal{B}$ τέτοιο ώστε $x \in B_x$ και $B_x \subseteq A \cap C$.

Απόδειξη: ($\Rightarrow$) Για το i.: Έστω $\mathcal{B}$ βάση μιας τοπολογίας $\mathfrak{T}$. Τότε $X \in \mathfrak{T}$ κι επομένως υπάρχει κάποιο πλήθος από σύνολα της $\mathcal{B}$ που κατασκευάζουν (μέσω ενώσεων) το X. Ειδικότερα, $\bigcup \mathcal{B} \supseteq X$ κι επειδή $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ έπεται τελικά ότι $\bigcup \mathcal{B} = X$.

Για το ii.: Εφαρμόζουμε την Παρατήρηση 1.1 για το ανοικτό σύνολο $A \cap C$.

($\Leftarrow$) Ορίζουμε το σύνολο:

$$\mathfrak{T} = \left\{ \bigcup \mathcal{C} \mid \mathcal{C} \subseteq \mathcal{B} \right\}$$

και θα δείξουμε ότι αυτό είναι τοπολογία στον X.

Για την πρώτη ιδιότητα της τοπολογίας, $\emptyset = \bigcup \emptyset \in \mathfrak{T}$ κι επιπλέον (από την ιδιότητα i. του θεωρήματος) $X = \bigcup \mathcal{B} \in \mathfrak{T}$.

Για τη δεύτερη ιδιότητα της τοπολογίας, εάν $A, G \in \mathfrak{T}$, τότε:

$$A = \bigcup \mathcal{C} \text{ και } G = \bigcup \mathcal{D}$$

για κάποια υποσύνολα $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ του $\mathcal{B}$. Παρατηρούμε ότι:

$$\begin{aligned} A \cap G &= \left(\bigcup \mathcal{C}\right) \cap \left(\bigcup \mathcal{D}\right) \\ &= \left(\bigcup_{C \in \mathcal{C}} C\right) \cap \left(\bigcup_{D \in \mathcal{D}} D\right) \\ &= \bigcup_{C \in \mathcal{C}} \bigcup_{D \in \mathcal{D}} C \cap D \end{aligned}$$

Λόγω της ιδιότητας ii. του θεωρήματος, υπάρχει $\mathcal{V}(C \cap D) \subseteq \mathcal{B}$ τέτοιο ώστε:

$$C \cap D = \bigcup \mathcal{V}(C \cap D)$$

Οπότε μέχρι τώρα:

$$\begin{aligned} A \cap G &= \bigcup_{C \in \mathcal{C}} \bigcup_{D \in \mathcal{D}} \bigcup \mathcal{V}(C \cap D) \\ &= \bigcup \underbrace{\left(\bigcup_{C \in \mathcal{C}} \bigcup_{D \in \mathcal{D}} \mathcal{V}(C \cap D) \right)}_{\subseteq \mathcal{B}} \end{aligned}$$

Αυτά δείχνουν ότι η τομή $A \cap G$ γράφεται ως ένωση στοιχείων της $\mathcal{B}$ και συνεπώς ότι $A \cap G \in \mathfrak{T}$.

$\mathfrak{T}$ Κανονικά ο έλεγχος της δεύτερης ιδιότητας της τοπολογίας θα έπρεπε να γίνει για τυχόν πεπερασμένο πλήθος συνόλων. Είναι ισοδύναμο κανείς να ελέγξει μόνο την τομή δύο συνόλων, αφού επαγωγικά το αποτέλεσμα μεταφέρεται στην φαινομενικά πιο «γενική» περίπτωση. Από εδώ και στο εξής, πολλές φορές θα ελέγχουμε τη δεύτερη ιδιότητα μόνο σε δύο σύνολα.

Για την τρίτη ιδιότητα της τοπολογίας, θεωρούμε $\mathcal{G} \subseteq \mathfrak{T}$ και θα εξετάσουμε αν η ένωση $\bigcup \mathcal{G}$ ανήκει στο $\mathfrak{T}$. Κατ' αρχάς, επειδή $\mathcal{G} \subseteq \mathfrak{T}$, κάθε $G \in \mathcal{G}$ γράφεται ως ένωση στοιχείων της $\mathcal{B}$. Δηλαδή $G = \bigcup \mathcal{V}(G)$ με $\mathcal{V}(G) \subseteq \mathcal{B}$. Επομένως:

$$\begin{aligned} \bigcup \mathcal{G} &= \bigcup_{G \in \mathcal{G}} \bigcup \mathcal{V}(G) \\ &= \bigcup \underbrace{\left(\bigcup_{G \in \mathcal{G}} \mathcal{V}(G) \right)}_{\subseteq \mathcal{B}} \end{aligned}$$

το οποίο δείχνει ότι κάθε ένωση στοιχείων της $\mathfrak{T}$ ανήκει στην $\mathfrak{T}$.

Τελικά αποδεικνύεται και το αντίστροφο. Παρατηρήστε ότι δεν έχουμε κάνει αναφορά στη μοναδικότητα της τοπολογίας. Αυτό δεν προκύπτει από το θεώρημα και ουσιαστικά χρειάζεται αυτόνομη απόδειξη.

Λήμμα 1.1: Εάν $\mathcal{B}$ είναι βάση μιας τοπολογίας $\mathfrak{T}$ του X, τότε δεν είναι βάση καμμίας άλλης τοπολογίας. ■

Απόδειξη του λήμματος: Κατ' αρχάς είδαμε ότι η $\mathcal{B}$ είναι βάση της τοπολογίας:

$$\mathfrak{T} = \left\{ \bigcup \mathcal{C} \mid \mathcal{C} \subseteq \mathcal{B} \right\}$$

Ας υποθέσουμε ότι $\mathfrak{T}'$ είναι μια άλλη τοπολογία της οποίας η $\mathcal{B}$ είναι επίσης βάση. Από τον ορισμό της τοπολογίας, παρατηρούμε ότι θα πρέπει να αληθεύει ο εγκλεισμός $\mathfrak{T} \subseteq \mathfrak{T}'$ (αφού οι αυθαίρετα μεγάλες ενώσεις στοιχείων της $\mathcal{B}$ ανήκουν στην τοπολογία $\mathfrak{T}'$ και το σύνολο αυτών των ενώσεων είναι η $\mathfrak{T}$). Εάν ο εγκλεισμός είναι γνήσιος, θα μπορεί να βρεθεί $A \in \mathfrak{T}' \backslash \mathfrak{T}$, κι επειδή η $\mathcal{B}$ είναι βάση της $\mathfrak{T}'$:

$$A = \bigcup \mathcal{C} \text{ για κάποιο } \mathcal{C} \subseteq \mathcal{B}$$

Από τον ορισμό της $\mathfrak{T}$ έπεται ότι $A \in \mathfrak{T}$, το οποίο είναι άτοπο.

△

Τώρα πλέον έχουμε ολοκληρώσει την απόδειξη.

□

1.2 Βασική γεωμετρία των ανοικτών συνόλων

Επίσης, υπάρχουν δύο καλλιγραφικές γραμματοσειρές:

Ορισμός 1.10: (qwe). wafb

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Συνέχεια και δίκτυα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Διαχωριστικά αξιώματα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Συνεκτικότητα και συμπάγεια

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Αριθμησιμότητα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

Πολλαπλότητες

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

Τοπολογικοί γραμμικοί χώροι και ασθενείς* τοπολογίες

7.1 Τοπολογικοί γραμμικοί χώροι

7.2 Ασθενείς* τοπολογίες

ΚΕΦΑΛΑΙΟ **8**

Στοιχεία αλγεβρικής τοπολογίας

8.1 Τοπολογία πηλίκο

8.2 Επισυνάψεις και συμπλέγματα κελιών

8.3 Ομοτοπίες και η θεμελιώδης ομάδα

8.4 Η θεμελιώδης ομάδα του κύκλου

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9

Ασκήσεις

Βιβλιογραφία

[Ha] Hatcher A.: ***Algebraic Topology*** (Cambridge University Press, 2001)

[Mu] Munkres J.: ***Topology*** (Pearson Education Limited, 2014)

[My] Mysior A.: ***A Regular Space which is not Completely Regular***, (Proceedings of the American Mathematical Society, 1981)

[Ra] Raha B. A..: ***An Example of a Regular Space that is not Completely Regular***, (Proc. Indian Acad. Sci. (Math Sci.) Vol. 102, No. 1, 1992)

[Γι] Γιαννόπουλος Α.: ***Μεταπτυχιακή Ανάλυση ΙΙ*** (Σημειώσεις ΠΜΣ ΕΚΠΑ, 2007)

[Γρ] Γραπερίτης Μ.: ***Σημειώσεις Γενικής Τοπολογίας*** (Σημειώσεις ΠΠΣ ΕΚΠΑ, 2013)

[ΝΖΚΦ] Νεγρεπόντης Σ., Ζαχαριάδης Θ., Καλαμίδας Ν., Φαρμάκη Β.: ***Γενική Τοπολογία και Συναρτησιακή Ανάλυση*** (Συμμετρία, 1997)

[Συ] Συκιώτης Μ.: ***Αλγεβρική Τοπολογία*** (Σημειώσεις ΠΜΣ ΕΚΠΑ, 2023)

[Φρ1] Φράγκος Α.: ***Γεωμετρική Πλειογραμμική Άλγεβρα*** (Σημειώσεις ΠΜΣ ΕΚΠΑ, 2024)

[Φρ2] Φράγκος Α.: ***Τοπολογία - Σημειώσεις παραδόσεων*** (Σημειώσεις ΠΠΣ ΕΚΠΑ, από τις διαλέξεις της κ. Παπατριανταφύλλου, 2023)

Ευρετήριο

Σημειώσεις για το μάθημα «*714. Τοπολογία*»