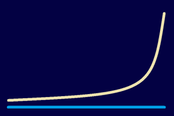
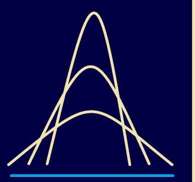
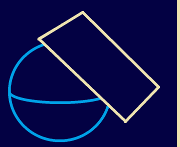
Τμήμα Μαθηματικών
Ε.Κ.Π.Α.







Η γεωμετρία πίσω από μία εξίσωση Reaction-Diffusion

Αναστάσιος Φράγκος

Για τη Λέσχη Μαθηματικών

Χειμερινό εξάμηνο 2024-25

Αθήνα, 21 Αυγούστου 2024

Περίληψη

Οι εξισώσεις Reaction-Diffusion αποτελούν χρήσιμο εργαλείο για την περιγραφή μίας μεγάλης κατηγορίας φυσικών φαινομένων, τα οποία κυμαίνονται από τη χημεία και τις διάφορες χημικές αντιδράσεις, έως την επιστήμη των υλικών και τη δημιουργία κραμάτων.

Σε αυτό το mini-course θα επικεντρωθούμε στην εξίσωση Allen-Cahn και τις γεωμετρικές ιδιότητές της. Η φυσική που υποκρύπτεται πίσω από τα μαθηματικά είναι η περιγραφή του σχηματισμού και της γεωμετρίας των κραμάτων. Αφού εισαγάγουμε βασικές έννοιες από την ανάλυση και τη γεωμετρία, ο φιλόδοξος στόχος μας θα είναι, μεταξύ άλλων, το θεώρημα των Modica-Mortola (1977) και επίσης η συσχέτιση των ελαχιστικών υπερεπιφανειών με τις λύσεις της εν λόγω εξίσωσης, μέσω του θεωρήματος των Pacard-Ritoré (2003). Σκοπεύουμε να δώσουμε μία ιδέα για την απόδειξη του θεωρήματος Modica-Mortola, αλλά όχι για το Pacard-Ritoré. Παρόλα αυτά, θα δώσουμε τα απαραίτητα γεωμετρικά εργαλεία για την απόδειξή του.

Γενικότερη κατηγορία. *Γεωμετρία, Διαφορικές εξισώσεις, Λογισμός μεταβολών, Φυσική.*

Πίνακας Περιεχομένων

Κεφάλαιο 1

Μία προεπισκόπηση

Σε πρώτο στάδιο, το φυσικό φαινόμενο που θα μας απασχολήσει σε αυτές τις παρουσιάσεις είναι η περιγραφή του διαχωρισμού των φάσεων σε ένα (εν γένει πολυμερές) κράμα, μέσω της παραβολικής εξίσωσης Allen-Cahn. Όταν αναφερόμαστε σε διαχωρισμό των φάσεων, εννοούμε τη μεταβολή του συστήματος από μία ομοιογενή κατάσταση A σε ένα μείγμα δύο στοιχείων $A_1 + A_2$.

Από μαθηματικής άποψης, η περιγραφή χωρίζεται σε δύο μέρη: Σε αυτό της διάχυσης και σε ένα δυναμικό που "αντιστέκεται" σ' αυτήν. Είναι λογικό εξάλλου να σκεφτεί κανείς ότι ένα (μονομερές) υλικό τείνει απλώς να διαχέεται στον χώρο, ενώ η ύπαρξη στοιχείων πλήθους $N \geqslant 2$ δημιουργεί μία ιδιόμορφη κατάσταση, στην οποία δεν μπορεί να υπάρξει απλώς διάχυση. Η ύπαρξη του δυναμικού περιγράφει την αλληλεπίδραση των στοιχείων. Η διάχυση περιγράφεται εν γένει από εξισώσεις της μορφής $\partial_t u = \Delta u$ (όπου $\Delta = \Delta_x$), και το δυναμικό συμβολίζεται συνήθως με $-W$, οπότε η παραβολική Allen-Cahn οφείλει να έχει τη μορφή:[1]

$$\partial_t u = \Delta u - W_u(u) \tag{1.1}$$

όπου $W_u = \partial W/\partial u$. Η ορολογία "παραβολικό" έχει σχέση με την ύπαρξη μίας παραγώγου ως προς τον χρόνο αλλά δύο παραγώγων ως προς τον χώρο. Αναμένεται λοιπόν, με μία παραβολική αλλαγή μεταβλητών $(t, x) \mapsto (t/\lambda^2, x/\lambda)$, η εξίσωση (1.1) να μείνει (σχεδόν) αναλλοίωτη [Ev10].

Για το υπόλοιπο των παρουσιάσεων, θα μας απασχολήσουν χρονικά ανεξάρτητες λύσεις της (1.1) και κατά συνέπεια θα επικεντωθούμε σε καταστάσεις "ισορροπίας", στις οποίες μας ενδιαφέρει η γεωμετρία. Για την ακρίβεια, θα μελετήσουμε την:

$$\varepsilon^2 \Delta u - W_u(u) = 0 \tag{1.2}$$

(ο ρόλος του ε θα φανεί εν μέρη αργότερα).

Για την (1.2) ορίζεται η ενέργειά της:

$$\mathscr{E}_\varepsilon(u; \Omega) = \int_\Omega \frac{\varepsilon}{2}|\nabla u|^2 + \frac{1}{\varepsilon} W(u)\, dx \tag{1.3}$$

[1]Συνηθίζεται τόσο το W όσο και το $-W$ να καλούνται δυναμικά, παρότι μόνο το $-W$ έχει τη φυσική έννοια του δυναμικού [AFS18].

η οποία φαίνεται να εμπεριέχει μίας μορφής “κινητική” ενέργεια $\varepsilon|\nabla u|^2/2$ και τη δυναμική W/ε. Βέβαια η ορολογία “κινητική ενέργεια” δεν είναι σωστή και τη χρησιμοποιούμε μονάχα για τη σύνδεση με τους τύπους της κλασικής μηχανικής. Στην πραγματικότητα δεν υπάρχει κίνηση, και η $\varepsilon|\nabla u|^2/2$ σχετίζεται με την επιφανειακή τάση. Αυτό που μπορεί να δειχθεί σχετικά με την ενέργεια (1.3) είναι το ακόλουθο γεωμετρικό αποτέλεσμα, για την περίπτωση δύο υλικών, που οφείλεται στους Modica και Mortola:

Έστω $E \subseteq \Omega$ ένα σύνολο με πεπερασμένη περίμετρο. Υπάρχει μία ακολουθία προσεγγιστικών λύσεων u_ε (στον $L^4(\Omega)$, με κάποια ομαλότητα) ούτως ώστε:

$$\lambda \cdot \operatorname{Per}(E;\Omega) = \lim_{\varepsilon\to 0} \mathscr{E}_\varepsilon(u_\varepsilon;\Omega)$$

και $u_\varepsilon \to \mathbf{1}_E - \mathbf{1}_{\Omega\setminus E}$, στον $L^1(\Omega)$. Το λ είναι ένας πραγματικός αριθμός. Επίσης, με $\operatorname{Per}(E;\Omega)$ συμβολίζουμε την περίμετρο του E και με $\mathbf{1}_A$ τη δείκτρια συνάρτηση του A.

Αυτό είναι το δύσκολο βήμα ώστε κανείς να αποδείξει ότι το συναρτησιακό της ενέργειας $\mathscr{E}_\varepsilon(\cdot;\Omega)$ $\Gamma-$συγκλίνει (ό,τι κι αν αυτό σημαίνει) σε ένα πολλαπλάσιο της περιμέτρου.

Η τελευταία ενασχόλησή μας θα είναι το θεώρημα των Pacard-Ritoré, με το οποίο στην περίπτωση των δύο υλικών εξασφαλίζεται η ύπαρξη λύσεων u_ε των (1.2) που η διεπιφάνειά τους είναι κατά προσέγγιση μία ελαχιστική υπερεπιφάνεια. Οι ελαχιστικές επιφάνειες είναι στην περίπτωση των τριών διαστάσεων κρίσιμα σημεία του συναρτησιακού του εμβαδού. Είναι, δηλαδή, επιφάνειες Σ, στις οποίες μηδενίζεται η πρώτη μεταβολή (παράγωγος) του εμβαδού, για κοντινές μεταβολές της Σ. Ισοδύναμα, είναι επιφάνειες μέσης καμπυλότητας μηδέν. Οι ελαχιστικές υπερεπιφάνειες είναι εμφυτευμένες υποπολλαπλότητες διάστασης n μίας πολλαπλότητας Riemann διάστασης $n+1$, που αποτε-λούν γενίκευση των ελαχιστικών επιφανειών.

Συγκεκριμένα, με το θεώρημα των Pacard και Ritoré έχουμε το εξής:

Έστω $(\mathscr{M}, g)$ μία $(n+1)-$διάστατη συμπαγής πολλαπλότητα Riemann χωρίς σύνορο. Έστω, επίσης, $\Sigma \subseteq \mathscr{M}$ μία μη-εκφυλισμένη, προσανατολισμένη ελαχιστική υπερεπιφάνεια με $\mathscr{M}\setminus\Sigma = \mathscr{M}^+ \cup \mathscr{M}^-$, της οποίας το κάθετο διάνυσμα (που συμφωνεί με τον προσανατολισμό) κοιτάζει προς το $\mathscr{M}^+$. Υπάρχει $\varepsilon_0 > 0$ ώστε για κάθε $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, υπάρχει λύση u_ε της αντίστοιχης (1.2), με:

$$u_\varepsilon \to \mathbf{1}_{\mathscr{M}^+} - \mathbf{1}_{\mathscr{M}^-}$$

ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα των $\mathscr{M}^+$, $\mathscr{M}^-$, καθώς $\varepsilon \to 0$. Επιπλέον, για την ενέργεια έχουμε:

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0^+\\ \varepsilon<\varepsilon_0}} \mathscr{E}_\varepsilon(u_\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathscr{H}^n(\Sigma)$$

όπου $\mathscr{H}^n(\Sigma)$ είναι το $n-$διάστατο μέτρο Hausdorff της Σ (δηλαδή, κατ' ουσίαν, ο όγκος/το εμβαδόν της Σ).

Το παραπάνω θεώρημα είναι λογικό (τουλάχιστον το κομμάτι της σύγκλισης $u_\varepsilon \to \mathbf{1}_{\mathscr{M}^+} - \mathbf{1}_{\mathscr{M}^-}$), αφού η διαίσθησή μας είναι ότι τα υλικά κινούνται με τρόπο τέτοιον ώστε να ελαχιστοποιήσουν την επιφανειακή τους τάση. Κατά συνέπεια, αναμένουμε η “συνδετική” επιφάνεια των υλικών να είναι κοντά σε κρίσιμα σημεία του συναρτησιακού του όγκου/εμβαδού.

Σκοπεύουμε να αποδείξουμε ένα μέρος του θεωρήματος Modica-Mortola, αλλά όχι το Pacard-Ritoré. Παρόλα αυτά, θα δώσουμε τα απαραίτητα γεωμετρικά εργαλεία για την απόδειξή του.

Κεφάλαιο 2

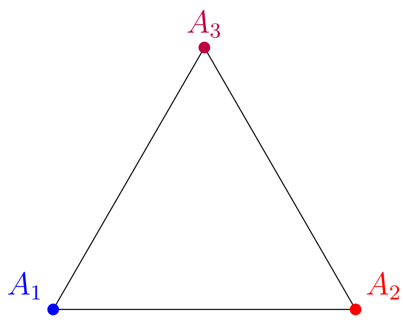
Η εξίσωση Allen-Cahn

2.1 Η προέλευση της Allen-Cahn

Είναι σημαντικό, πριν συζητήσουμε το μαθηματικό κομμάτι, να σκεφτούμε πώς μοντελοποιείται το πρόβλημα του σχηματισμού των κραμάτων, και συγκεριμένα να μελετήσουμε ποιο είναι ακριβώς το φυσικό νόημα της u. Στην περίπτωση των δύο υλικών, η u πρέπει να εκφράζει σε κάθε σημείο, με κάποιον τρόπο, πόσο υλικό A_1 υπάρχει και πόσο A_2. Αυτό το “μέτρο” μπορεί να είναι κάποιου είδους συγκέντρωση, για παράδειγμα μία προσημασμένη πυκνότητα συγκέντρωσης. Το -1 θα αντιστοιχεί στο υλικό A_1 και το 1 στο A_2. Οι ενδιάμεσες τιμές εκφράζουν τη συνύπαρξη των δύο φάσεων.

Η περίπτωση των δύο φάσεων είναι η απλούστερη και αυτή που θα μας απασχολήσει στη συνέχεια. Εάν το πλήθος των φάσεων είναι μεγαλύτερο του 2, η μία διάσταση δεν αρκεί για την περιγραφή του φαινομένου, και αυτό είναι ζήτημα γεωμετρίας.

Εάν οι τρεις φάσεις τοποθετηθούν στην ευθεία, μπορεί κανείς να μεταβεί από το A_1 στο A_3 και από το A_3 στο A_2 (ή αντίστροφα), αλλά είναι αδύνατον να μεταβεί απ’ ευθείας από το A_1 στο A_2, χωρίς να διέλθει από το A_3. Εδώ χρειαζόμαστε μία ακόμα διάσταση.



Η u έχει λοιπόν νόημα να παίρνει και διανυσματικές τιμές, αν και αυτό δεν θα μας απασχολήσει.

Προκειμένου να μελετήσουμε την προέλευση της παραβολικής εξίσωσης Allen-Cahn, θα χρειαστεί να μελετήσουμε δύο όρους, αυτόν της διάχυσης και αυτόν του δυναμικού.

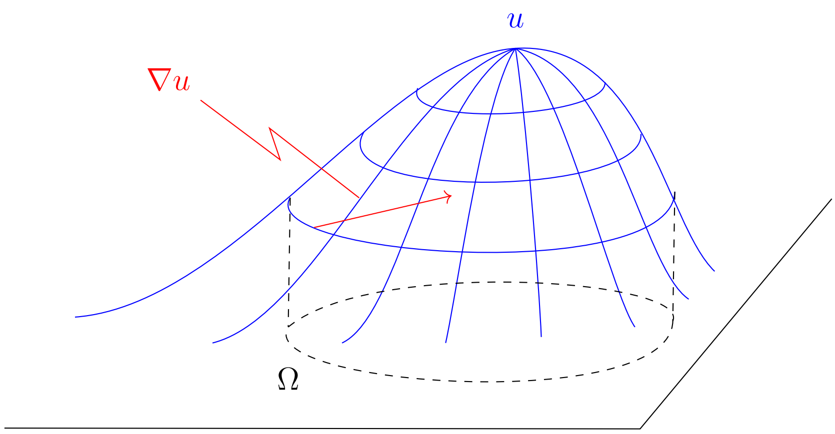
Σημειώνουμε εδώ ότι στην εισαγωγή θα ασχοληθούμε με την περίπτωση όπου ο χώρος είναι ευκλείδειος και όχι μία γενική πολλαπλότητα Riemann. Παρόλα αυτά, ό,τι θα πούμε γενικεύεται και στην περίπτωση των πολλαπλοτήτων. Για τη διάχυση, ας υποθέσουμε ότι η u είναι πυκνότητα συγκέντρωσης. Εάν Ω ένα σύνολο με αρκετά ομαλό σύνορο, η συνολική συγκέντρωση στο Ω είναι:

$$\int_{\Omega} u\ dx$$

και η μεταβολή της συγκέντρωσης $\partial_t \int_{\Omega} u\ dx$. Εάν το υλικό διαχέεται, αναμένουμε να εξέρχεται από το Ω, μέσω του συνόρου του. Δηλαδή, περιμένουμε η εκροή του υλικού να εξαρτάται από την ποσότητα:

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot \widehat{n}\ dS$$

με το F να είναι μία διανυσματική συνάρτηση που εκφράζει την εκροή από το σύνορο και $\widehat{n}$ είναι το μοναδιαίο κάθετο στο $\partial\Omega$. Εφόσον θέλουμε το υλικό να φεύγει από το Ω, μία επιλογή για το F μπορεί να είναι η $F = -\alpha\nabla u$, $\alpha > 0$.



Μάλιστα, αφού αναμένουμε η συγκέντρωση εντός του Ω να μικραίνει, πολλαπλασιάζουμε την $\int_{\partial\Omega} -\alpha\nabla u \cdot \widehat{n}\ dS$ με -1, κι έχουμε τη σχέση:

$$\partial_t \int_{\Omega} u\ dx = -\int_{\partial\Omega} -\alpha\nabla u \cdot \widehat{n}\ dS = \alpha \int_{\partial\Omega} \nabla u \cdot \widehat{n}\ dS$$

ddd και από το θεώρημα της απόκλισης του Gauss:

$$\partial_t \int_{\Omega} u\ dx = \int_{\Omega} \nabla\bullet(\nabla u)\ dx = \alpha \int_{\Omega} \Delta u\ dx$$

όπου $\nabla\bullet\Diamond$ είναι ο τελεστής της απόκλισης. Δηλαδή:

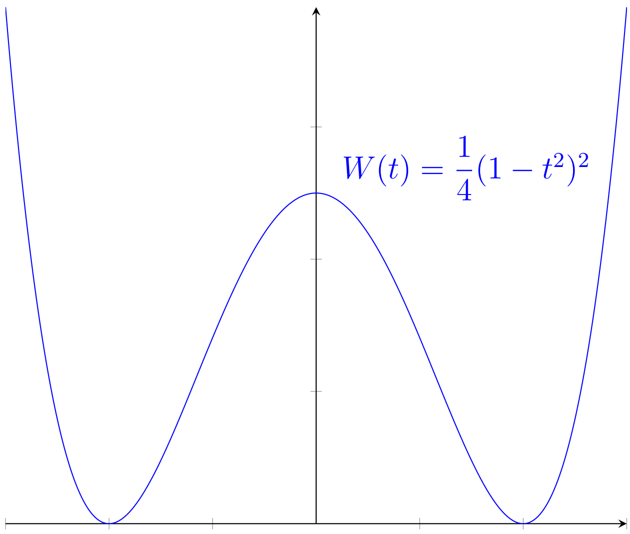
$$\int_{\Omega} \partial_t u - \alpha\Delta u\ dx = 0$$

Αφού το Ω ήταν τυχόν, έπεται ότι:

$$\partial_t u - \alpha\Delta u = 0$$

Εάν θέσουμε $\alpha = \varepsilon^2$, η εξίσωση γίνεται $\partial_t u = \varepsilon^2 \Delta u$.

Όσον αφορά το δυναμικό, θα περιοριστούμε στην περίπτωση των δύο υλικών. Η φυσική διαίσθηση είναι ότι οι φάσεις θα θέλουν να διαχωριστούν καθώς περνάει ο χρόνος, και κατά συνέπεια θα πρέπει να υπάρχει ένα δυναμικό W, το οποίο έχει δύο ελάχιστα, καθένα εκ των οποίων αντιστοιχεί σε μία φάση. Ένα τέτοιο δυναμικό είναι το $W(t) = (1-t^2)^2/4$, που έχει ελάχιστα στα -1 και 1.



Το δυναμικό τείνει να ωθήσει το ομοιογενές μείγμα σε μία κατάσταση διαχωρισμού (αρκετά λυπηρό), όπου η u θα γίνεται είτε -1 είτε 1. Από την άλλη, δεν πρέπει να ξεχνάμε την τάση των υλικών να διαχέονται, οπότε συνδυάζοντας την εξίσωση της διάχυσης με το δυναμικό, παίρνουμε την εξίσωση:

$$\partial_t u = \Delta u - W_u(u)$$

η οποία είναι η παραβολική εξίσωση Allen-Cahn. Εάν οι λύσεις είναι χρονικά ανεξάρτητες, παίρνουμε την εξίσωση Allen-Cahn:

$$\Delta u - W_u(u) = 0$$

2.2 Η Allen-Cahn μέσω gradient flows*

Η εξίσωση Allen-Cahn προκύπτει επίσης μέσω της Cahn-Hilliard, ως μία ειδική περίπτωση. Θα αναφέρουμε επιγραμματικά κάποια πράγματα μέσω των λεγόμενων gradient flows. Σημειώνουμε ότι αυτή η παράγραφος είναι στην πραγματικότητα ένα παράρτημα και μπορεί να παραληφθεί. Διάφορες έννοιες ασθενούς παραγωγισιμότητας που χρησιμοποιούνται, εάν δεν αναφέρονται εδώ, μπορούν να βρεθούν στην Παράγραφο **??**.

Η ιδέα για την εξαγωγή της διαφορικής εξίσωσης είναι να "ωθήσουμε" την u προς την κατεύθυνση που ελαχιστοποιείται η ενέργεια. Δηλαδή, η u πρέπει να ακολουθήσει την κλίση $-\nabla \mathscr{E}_\varepsilon(u;\Omega)$, στο $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, για κάποια έννοια κλίσης.

$$\partial_t u = -\nabla_{\mathscr{G}} \mathscr{E}_\varepsilon(u;\Omega)$$

Εδώ ή έννοια της κλίσης είναι αυτή του μεταβολικού διαφορικού ή του διαφορικού Gâteaux. Ο παρακάτω ορισμός που δίνουμε μπορεί να γενικευτεί σε τοπικά κυρτούς τοπολογικούς διανυσματικούς χώρους.

Ορισμός 2.1 (Διαφορικό Gâteaux). *Έστω $J : \mathscr{X} \to \mathbb{R}$ ένα συναρτησιακό σε χώρο συναρτήσεων (ή κατανομών) και u, v συναρτήσεις. Η μεταβολή του J στο u από την κατεύθυνση της v είναι η παράγωγος:*

$$\delta J(u)(v) = \frac{\delta J(u)}{\delta v} = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} J(u + tv)$$

Το διαφορικό Gâteaux είναι η συνάρτηση (ή κατανομή) $\nabla_{\mathscr{G}} J(u)$ για την οποία για κάθε v:

$$\langle \nabla_{\mathscr{G}} J(u), v \rangle = \delta J(u)(v)$$

για κάποιο εσωτερικό γινόμενο $\langle \cdot, \cdot \rangle$ του $\mathscr{X}$.

Η έννοια της μεταβολής αναλύεται σε διαφορετικό πλαίσιο στην Παράγραφο **??**.

Εν προκειμένω θα ασχοληθούμε με τον ομογενή χώρο Sobolev $\dot{H}^1(\Omega)$:

$$\dot{H}^1(\Omega) = \{u \in \mathcal{S}'(\Omega) \mid \nabla u \in L^2(\Omega)\}$$

και με τον δυϊκό του $\dot{H}^{-1}(\Omega) = \dot{H}^1_0(\Omega)'$ (με $\mathcal{S}'$ συμβολίζουμε τις tempered κατανομές, δηλαδή τις κατανομές του χώρου του Schwartz). Η έννοια της παραγώγισης της κατανομής έχει κι αυτή τη βάση της στο θεώρημα απόκλισης του Gauss (όπως έχουν και οι έννοιες στην Παράγραφο **??**). Συγκεκριμένα, για κάθε $\varphi \in \mathcal{S}(\Omega)$ θέλουμε:

$$\langle \partial_i u, \varphi \rangle = -\langle u, \partial_i \varphi \rangle$$

Με $\langle \cdot, \cdot \rangle$ συμβολίζουμε την εκτίμηση των συναρτησοειδών.

Όπως πιθανότατα θα έχετε αντιληφθεί, η εύρεση του κατάλληλου εσωτερικού γινομένου για το διαφορικό Gâteaux είναι κομβικής σημασίας για την εξίσωση Cahn-Hilliard. Παρακάτω περιγράφουμε σε βήματα την επιλογή του και την εξαγωγή της εξίσωσης.

Βήμα I: Στον χώρο $\dot{H}^{-1}(\Omega)$ θα ορίσουμε ένα εσωτερικό γινόμενο, χρησιμοποιώντας τον $L^2(\Omega)$, σε πυκνο υπόχωρο του $\dot{H}^{-1}(\Omega)$. Συγκεκριμένα:

$$\langle v_1, v_2 \rangle_{\dot{H}^{-1}(\Omega)} = \langle \nabla \varphi_{v_1}, \nabla \varphi_{v_2} \rangle_{L^2(\Omega)}$$

όπου οι $\varphi_{v_1}, \varphi_{v_2} \in \dot{H}^{-1}(\Omega)$ είναι αντιπρόσωποι των v_1, v_2, των οποίων η επιλογή θα εξηγηθεί στη συνέχεια. Αυτός ο ορισμός εσωτερικού γινομένου είναι ακριβώς αυτός που θα χρειαστεί για την κλίση του συναρτησιακού της ενέργειας.

Βήμα II: Για κάθε v (ή εν πάση περιπτώσει για v σε πυκνό υποσύνολο), υπάρχει αντιπρόσωπος φ_v ούτως ώστε το πρόβλημα συνοριακών τιμών Neumann να επιλύεται:

$$\begin{cases} -\Delta \varphi_v = v, & \text{στο } \Omega \\ \dfrac{\partial \varphi_v}{\partial \widehat{n}} = 0, & \text{στο } \partial\Omega \\ \int_\Omega \varphi_v \, dx = 0 \end{cases}$$

Αυτό μπορεί να δειχθεί από το θεώρημα Lax-Milgram, το οποίο αναφέρουμε παρακάτω. Όπως θα φανεί από τη διατύπωση, το εν λόγω θεώρημα είναι το ανάλογο του θεωρήματος αναπαράστασης του Riesz για διγραμμικές απεικονίσεις.

Θεώρημα 2.1 (Lax-Milgram). *Έστω H ένας χώρος Hilbert και $B : H \times H \to \mathbb{R}$ μία διγραμμική απεικόνιση. Υποθέτουμε ότι:*

i. Υπάρχει σταθερά $C > 0$ ούτως ώστε:

$$|B(u, v)| \leqslant C||u|| \cdot ||v||$$

ii. Υπάρχει σταθερά $c > 0$ ούτως ώστε:

$$c||u||^2 \leqslant B(u, u)$$

Έστω επίσης $F : H \to \mathbb{R}$ ένα φραγμένο συναρτησοειδές. Τότε υπάρχει μοναδικό στοιχείο $u \in H$ ούτως ώστε:

$$B(u, v) = \langle F, v\rangle, \ \forall v \in H$$

Εν προκειμένω, ορίζουμε $B : \dot{H}^1_0(\Omega) \times \dot{H}^1_0(\Omega) \to \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} B(\varphi_{v_1}, \varphi_{v_2}) = \langle \nabla\varphi_{v_1}, \nabla\varphi_{v_2}\rangle_{L^2(\Omega)} &= \int_\Omega \langle \nabla\varphi_{v_1}, \nabla\varphi_{v_2}\rangle \, dx \\ &= -\int_\Omega \Delta\varphi_{v_1} \cdot \varphi_{v_2} \, dx \end{aligned}$$

και αποδεικνύουμε τις εκτιμήσεις του θεωρήματος Lax-Milgram.

- Για την πρώτη εκτίμηση, από την ανισότητα Hölder έχουμε:

$$|B(\varphi_{v_1}, \varphi_{v_2})| \leqslant ||\nabla\varphi_{v_1}||_{L^2(\Omega)} \cdot ||\nabla\varphi_{v_2}||_{L^2(\Omega)} \leqslant C||\varphi_{v_1}||_{\dot{H}^1(\Omega)} \cdot ||\varphi_{v_2}||_{\dot{H}^1(\Omega)}$$

- Για τη δεύτερη εκτίμηση, έχουμε:

$$B(\varphi_{v_1}, \varphi_{v_1}) = ||\nabla\varphi_{v_1}||_{L^2(\Omega)}$$

  και από την ανισότητα του Poincaré, εάν $(\varphi_{v_1})_\Omega = ⨍_\Omega \varphi_{v_1} \, dx$:

$$||\varphi_{v_1}||^2_{L^2(\Omega)} = ||\varphi_{v_1} - (\varphi_{v_1})_\Omega||^2_{L^2(\Omega)} \leqslant c||\nabla\varphi_{v_1}||^2_{L^2(\Omega)} = c \cdot B(\varphi_{v_1}, \varphi_{v_1})$$

  οπότε:

$$\frac{1}{c+1}||\varphi_{v_1}||^2_{\dot{H}^1(\Omega)} \leqslant B(\varphi_{v_1}, \varphi_{v_1})$$

Εάν λοιπόν ορίσουμε:

$$F(\varphi_{v_2}) = \int_\Omega v_1\varphi_{v_2} \, dx, \ v_1 \in \dot{H}^1_0(\Omega)$$

τότε υπάρχει μοναδικό φ_{v_1} ούτως ώστε:

$$B(\varphi_{v_1}, \varphi_{v_2}) = F(\varphi_{v_2}), \quad \text{για κάθε } \varphi_{v_2} \in \dot{H}^1_0(\Omega)$$

Κατά συνέπεια, για κάθε v_1 υπάρχει φ_{v_1} ούτως ώστε $-\Delta\varphi_{v_1} = v_1$ ασθενώς. Έτσι, το εσωτερικό γινόμενο $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\dot{H}^{-1}(\Omega)}$ είναι καλά ορισμένο (σε πυκνό υπόχωρο).

Βήμα III: Για κάθε $v \in \dot{H}^1_0(\Omega)$ υπολογίζουμε:

$$
\begin{aligned}
\langle \nabla_{\mathscr{G}} \mathscr{E}_\varepsilon(u;\Omega), v\rangle &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \mathscr{E}_\varepsilon(u+tv;\Omega) \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\big(\mathscr{E}_\varepsilon(u+tv;\Omega) - \mathscr{E}_\varepsilon(u;\Omega)\big) \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \int_\Omega \frac{\varepsilon}{2} 2t\langle \nabla u, \nabla v\rangle + \int_\Omega \frac{1}{\varepsilon} W_u(u) v \; dx \\
&= \int_\Omega \varepsilon \langle \nabla u, \nabla v\rangle \; dx + \frac{1}{\varepsilon} W_u(u) v \; dx \\
&= \int_\Omega \left[-\varepsilon \Delta u + \frac{1}{\varepsilon} W_u(u)\right] v \; dx \\
&= \int_\Omega \left[\varepsilon \Delta u - \frac{1}{\varepsilon} W_u(u)\right] \Delta \varphi_v \; dx \\
&= -\int_\Omega \left\langle \nabla \left[\varepsilon \Delta u - \frac{1}{\varepsilon} W_u(u)\right], \nabla \varphi_v \right\rangle \\
&= \left\langle \nabla \left[\frac{1}{\varepsilon} W_u(u) - \varepsilon \Delta u\right], \nabla \varphi_v \right\rangle_{L^2(\Omega)} \\
&= \left\langle -\nabla \boldsymbol{\cdot} \nabla \left[\frac{1}{\varepsilon} W_u(u) - \varepsilon \Delta u\right], -\nabla \boldsymbol{\cdot} \nabla \varphi_v \right\rangle_{\dot{H}^{-1}(\Omega)} \\
&= \left\langle -\Delta \left[\frac{1}{\varepsilon} W_u(u) - \varepsilon \Delta u\right], v \right\rangle_{\dot{H}^{-1}(\Omega)}
\end{aligned}
$$

Οι παραπάνω υπολογισμοί μας επιτρέπουν να κάνουμε την ταύτιση (ασθενώς):

$$\nabla_{\mathscr{G}} \mathscr{E} = -\Delta \left[\frac{1}{\varepsilon} W_u(u) - \varepsilon \Delta u\right]$$

Κατά συνέπεια, το gradient flow γίνεται:

$$\partial_t u = \Delta \left[\frac{1}{\varepsilon} W_u(u) - \varepsilon \Delta u\right] \tag{2.1}$$

Η εξίσωση 2.1 ονομάζεται εξίσωση Cahn-Hilliard. Για την χρονικά ανεξάρτητη μορφή έχουμε την εξίσωση:

$$\Delta \left[\frac{1}{\varepsilon} W_u(u) - \varepsilon \Delta u\right] = 0$$

η οποία λύνεται εάν για παράδειγμα:

$$\frac{1}{\varepsilon} W_u(u) - \varepsilon \Delta u = 0 \Leftrightarrow \varepsilon^2 \Delta u - W_u(u) = 0$$

(αυτή είναι μία από τις πολλές περιπτώσεις για τις οποίες η 2.1 επιλύεται). Η τελευταία είναι ακριβώς η εξίσωση Allen-Cahn.

2.3 Η λύση της Allen-Cahn στη μία διάσταση

Στην απλή περίπτωση της μίας διάστασης, η εξίσωση Allen-Cahn έχει λύση που μπορεί να βρεθεί εύκολα.

Παρατηρούμε για αρχή ότι, για να βρούμε μία λύση, αρκεί να μελετήσουμε μονάχα την $\Delta u - W_u(u) = 0$ και όχι τις (1.2). Πράγματι η:

$$\varepsilon^2 \Delta u(\varepsilon x) = W_u(u(\varepsilon x))$$

είναι ισοδύναμη με την:

$$\Delta v = W_u(v) = v^3 - v$$

όπου $v(x) = u(\varepsilon x)$.

Παρατηρούμε επίσης ότι:

$$\big((v')^2 - 2W(v)\big)' = 2v' \cdot v'' - 2v' \cdot W_u(v) = 0$$

και άρα:

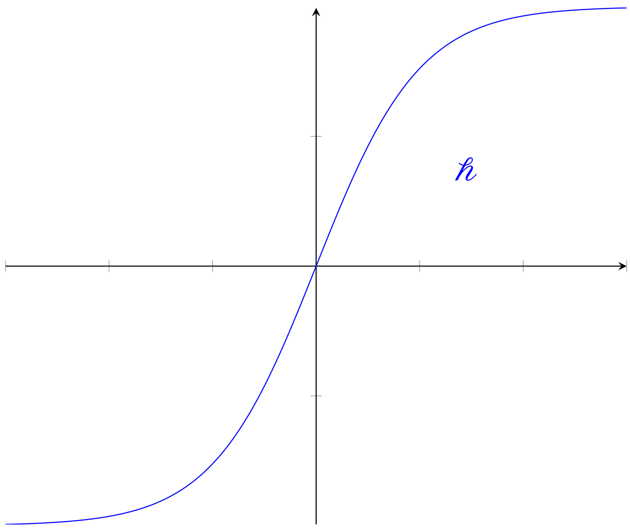
$$(v')^2 = 2W(v) + c,\ c \in \mathbb{R}$$

Για να βρούμε μία λύση, θέτουμε $c = 0$ και υποθέτουμε $v' > 0$. Έχουμε:

$$v' = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - v^2)$$

και άρα η (ετεροκλινής) λύση είναι η:

$$v(x) = \mathscr{h}(x - x_0),\ \mathscr{h}(x) = \tanh(x/\sqrt{2})$$



Η $\mathscr{h}$ έχει καλή φυσική ερμηνεία, τόσο από τη μορφή της, όσο και από την ιδιότητα της πεπερασμένης ενέργειας.

$$\mathscr{E}(v;\mathbb{R}) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2}(v')^2 + W(v)\ dx < \infty$$

Μάλιστα, μπορεί κανείς να δείξει ότι οι μόνες λύσεις με πεπερασμένη ενέργεια είναι αυτές που μόλις βρήκαμε, μαζί με τις τετριμμένες ± 1.

Παρατήρηση 2.1 (Λύσεις πεπερασμένης ενέργειας της μονοδιάστατης Allen-Cahn, $\varepsilon = 1$)**.** *Οι μόνες λύσεις πεπερασμένης ενέργειας της μονοδιάστατης Allen-Cahn, με $\varepsilon = 1$, είναι οι $v(x) = \pm\mathscr{h}(x - x_0)$ και οι $v \equiv \pm 1$.*

Απόδειξη. Όπως έχουμε δει, για κάποιο $c \in \mathbb{R}$, $(v')^2 = 2W(v) + c$. Λόγω της πεπερασμένης ενέργειας, αφού $(v')^2/2$, $W(v) > 0$, θα πρέπει να υπάρχει ακολουθία $(x_k)_k$ με:

$$x_k \to \infty,\ v'(x_k) \to 0,\ W(v(x_k)) \to 0$$

(αλλιώς σκεφτείτε τι θα συνέβαινε). Άρα $(v'(x_k))^2 - 2W(v(x_k)) \to 0$, κι αφού το c είναι σταθερό, $c = 0$.

Στη συνέχεια διακρύνουμε περιπτώσεις. Εάν $|v(0)| < 1$, τότε:

$$v' = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - v^2) \text{ ή } v' = -\frac{1}{\sqrt{2}}(1 - v^2)$$

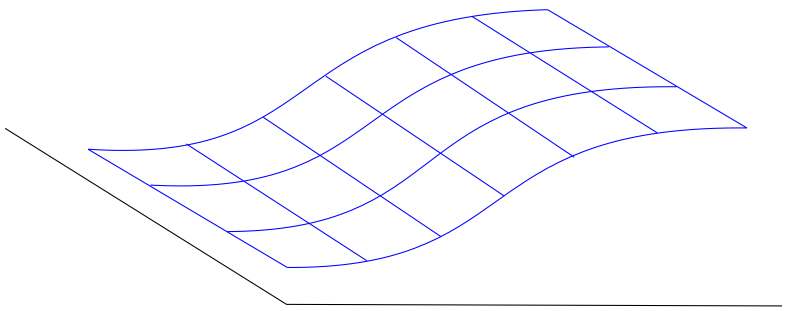
δηλαδή $v = \pm\hbar(x - x_0)$.

Εάν $|v(0)| = 1$, θα υποθέσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $v(0) = 1$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει x_1 ούτως ώστε $v(x_1) < 1$ και τότε παρατηρούμε ότι ως το x_1 η λύση είναι της μορφής $\pm\hbar(x - x_0)$. Άρα, έχει ασυνέχεια σε κάποιο σημείο του διαστήματος $(\min\{x_1, 0\}, \max\{x_1, 0\}]$, πράγμα άτοπο. Κατά συνέπεια $v \geqslant 1$. Εφόσον η μονοτονία της v αλλάζει μονάχα στα σημεία όπου $v(x) = 1$, η v πρέπει να διατηρεί τη μονοτονία της (σκεφτείτε γιατί). Εάν είναι φθίνουσα, $v \equiv 1$, ενώ εάν είναι αύξουσα, δεν έχει πεπερασμένη ενέργεια, εκτός κι αν $v \equiv 1$.

Τέλος, ασχολούμαστε με την περίπτωση $|v(0)| > 1$. Θα υποθέσουμε και πάλι, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι $v(0) > 1$. Εάν $v > 1$, τότε όπως πριν η v δεν έχει πεπερασμένη ενέργεια. Επίσης, εάν υπάρχει σημείο x_1 ούτως ώστε $v(x_1) = 1$, τότε από εκεί και πέρα $v \equiv 1$, ενώ για τα $x < x_1$ η v δεν έχει πεπερασμένη ενέργεια. $\square$

Η μονοδιάστατη λύση της Allen-Cahn έχει ανάλογο στις δύο διαστάσεις, το οποίο συνήθως ονομάζουμε μονοδιάστατη λύση στις δύο διαστάσεις. Η λύση αυτή είναι η εξής: Θεωρούμε $a \in \mathbb{S}^1$, $b \in \mathbb{R}$, και ορίζουμε:

$$v(x) = \hbar(\langle a, x\rangle - b)$$



Κεφάλαιο 3

Πολλαπλότητες και πολλαπλότητες Riemann

3.1 Τοπολογικές πολλαπλότητες και διαφορική δομή

Η μορφή των θεωρημάτων των Modica-Mortola και Pacard-Ritoré, με την οποία θα ασχοληθούμε, είναι γενική και χρησιμοποιεί πολλαπλότητες Riemann. Ο χώρος, δηλαδή, στον οποίον υπάρχει το κράμα και μελετάται η δομή του, είναι μία πολλαπλότητα Riemann. Αυτή είναι η μορφή με την οποία εμφανίστηκε ιστορικά το Pacard-Ritore στο [PR03], αλλά όχι το Modica-Mortola στο [MM77].

Στη συνέχεια θα ακολουθήσει μία μικρή εισαγωγή στις πολλαπλότητες και τη γεωμετρία Riemann. Γενικά, θα ακολουθήσουμε μία παρουσίαση όπως στα [Kü15], [dC92], [Bo86], [Fr24].

Είναι φυσιολογικό, ως γενίκευση των $\mathbb{R}^n$, να μελετήσουμε χώρους που είναι τοπικά ευκλείδειοι. Οι πολλαπλότητες είναι στην ουσία τοπικά ευκλείδειοι χώροι, μόνο που προστίθενται στον ορισμό τους μερικές επιπλέον βοηθητικές ιδιότητες, που είναι ολικές και όχι τοπικές. Αυτό βέβαια γίνεται στο πλαίσιο της ομοιότητάς τους με τους ευκλείδειους χώρους. Η πρώτη ολική ιδιότητα είναι αυτή του δεύτερου αριθμήσιμου τοπολογικού χώρου, με την οποία τα δίκτυα αντικαθίστανται από ακολουθίες και η δεύτερη του Hausdorff, με την οποία εξασφαλίζεται η μοναδικότητα των ορίων.

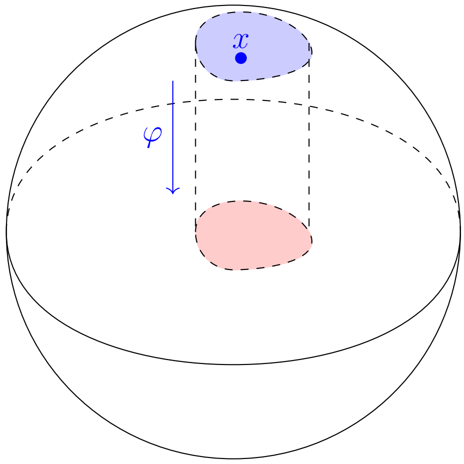
Ορισμός 3.1 (Τοπολογικές πολλαπλότητες χωρίς σύνορο)**.** *Ένας τοπολογικός χώρος* $(\mathscr{M}, \mathfrak{T})$ *θα λέγεται τοπολογική πολλαπλότητα (διάστασης* n*) εάν:*

i. *Είναι τοπικά ομοιομορφικός με τον* $\mathbb{R}^n$*. Δηλαδή για κάθε* $x \in \mathscr{M}$*, υπάρχει ανοικτή περιοχή* $U \in \mathfrak{T}$ *του* x *και τοπολογικός ομοιομορφισμός* $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$*.*

ii. *Είναι δεύτερος αριθμήσιμος. Δηλαδή, υπάρχει αριθμήσιμη βάση της* $\mathfrak{T}$*.*

iii. *Είναι Hausdorff. Δηλαδή για κάθε* $x \neq y$ *υπάρχουν* $U, V \in \mathfrak{T}$*,* $U \cap V = \emptyset$*, με* $x \in U$*,* $y \in V$*.*

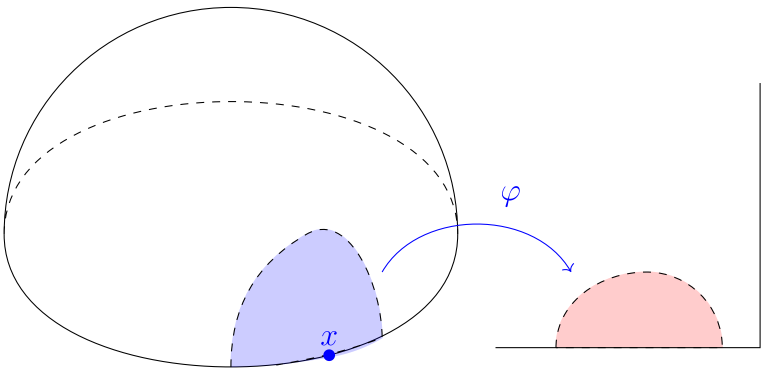
Αυτός ο ορισμός αναφέρεται στις πολλαπλότητες χωρίς σύνορο. Παραδείγματα τέτοιων πολλαπλοτήτων υπάρχουν πολλά, με το απλούστερο ίσως (μη-ευκλείδειο) παράδειγμα στον χώρο να είναι η σφαίρα $\mathbb{S}^2$.



Υπάρχουν επίσης πολλαπλότητες που έχουν σύνορο, όπως είναι το ημισφαίριο μαζί με τον ισημερινό. Για κάποιον, δηλαδή, που κατοικεί στο ημισφαίριο, υπάρχει ένα (όχι με την τοπολογική έννοια) σύνορο, που είναι ο ισημερινός. Οι πολλαπλότητες με σύνορο ορίζονται με τον ακόλουθο τρόπο:

Ορισμός 3.2 (Τοπολογικές πολλαπλότητες με σύνορο)**.** *Ένας τοπολογικός χώρος $(\mathscr{M}, \mathfrak{T})$ θα καλείται τοπολογικη πολλαπλότητα με σύνορο εάν ισχύουν οι ιδιότητες ii. και iii. του Ορισμού 3.1, και η i. έχει αντικατασταθεί από την:*

i. Για κάθε $x \in \mathscr{M}$ υπάρχει τοπικός ομοιομορφισμός είτε με το $\mathbb{R}^n$ είτε με το άνω ημιεπίπεδο $\overline{\mathbb{R}^n_+}$.*



Το σύνορο της πολλαπλότητας είναι τα σημεία αυτά που απεικονίζονται στο σύνορο του άνω ημιεπιπέδου μέσω των τοπικών ομοιομορφισμών.

Ορισμός 3.3 (Σύνορο μίας τοπολογικής πολλαπλότητας)**.** *Έστω μία πολλαπλότητα $(\mathscr{M}, \mathfrak{T})$. Ένα σημείο $x \in \mathscr{M}$ θα λέγεται συνοριακό εάν απεικονίζεται στο σύνορο του άνω ημιεπιπέδου μέσω των τοπικών ομοιομορφισμών. Το σύνορο των συνοριακών σημείων συμβολίζεται με $\operatorname{bd}\mathscr{M}$ και καλείται σύνορο της πολλαπλότητας $\mathscr{M}$.*

Πρόταση 3.1. *Για κάθε πολλαπλότητα $(\mathscr{M}, \mathfrak{T})$ ισχύουν τα εξής:*

i. Το σύνορο $\operatorname{bd}\mathscr{M}$ εφοδιάζεται με δομή τοπολογικής πολλαπλότητας, με τον περιορισμό των ομοιομορφισμών στο σύνορο $\operatorname{bd}\mathscr{M}$.

ii. Έχουμε $\operatorname{bd}\operatorname{bd}\mathscr{M} = \emptyset$ (δηλαδή το σύνορο είναι τοπολογική πολλαπλότητα χωρίς σύνορο).

Σε μία τοπολογική πολλαπλότητα ορίζονται έννοιες συνέχειας, μέσω των τοπικών ομοιομορφισμών. Θα λέμε ότι μία συνάρτηση $f : \mathscr{M} \to \mathscr{N}$ μεταξύ πολλαπλοτήτων είναι συνεχής εάν σε κάθε x η συνάρτηση (τοπική παράσταση):

$$\widetilde{f} = \psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$$

είναι συνεχής, με τις φ, ψ να είναι τοπικοί ομοιομορφισμοί των $x \in \mathscr{M}$ και $f(x) \in \mathscr{N}$ αντίστοιχα. Στην ουσία ανάγουμε τον ορισμό της συνέχειας στις πραγματικές συναρτήσεις.

Επίσης, αξίζει να παρατηρήσουμε ότι αν φ_1, φ_2 είναι ομοιομορφισμοί στην ίδια πολλαπλότητα, οι $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(U \cap V) \to \varphi_2(U \cap V)$, $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1} : \varphi_2(U \cap V) \to \varphi_1(U \cap V)$ είναι ομοιομορφισμοί, πράγμα που -σε γενικές γραμμές- δείχνει ότι υπάρχει μία έννοια "καλής μετάβασης" μεταξύ των περιοχών των ομοιομορφισμών. Αυτό είναι αναγκαίο με την εξής έννοια: Εάν θέλουμε να οριστούν έννοιες συνέχειας στις πολλαπλότητες, για παράδειγμα συναρτήσεων $f : \mathscr{M} \to \mathscr{N}$, δεν θα πρέπει να υπάρχει εξάρτηση από την επιλογή των ομοιομορφισμών με τις οποίες γράφεται η τοπική παράσταση $\widetilde{f}$.

Στις πολλαπλότητες μπορεί, επίσης, να προσδοθεί μία διαφορική δομή, με την οποία είναι δυνατόν να οριστούν έννοιες διαφορισιμότητας σε συναρτήσεις σε πολλαπλότητες.

Σημείωση: Σε όλα τα παρακάτω το "διαφορικό" μπορεί να αντικατασταθεί με το "C^k, $1 \leqslant k \leqslant \infty$".

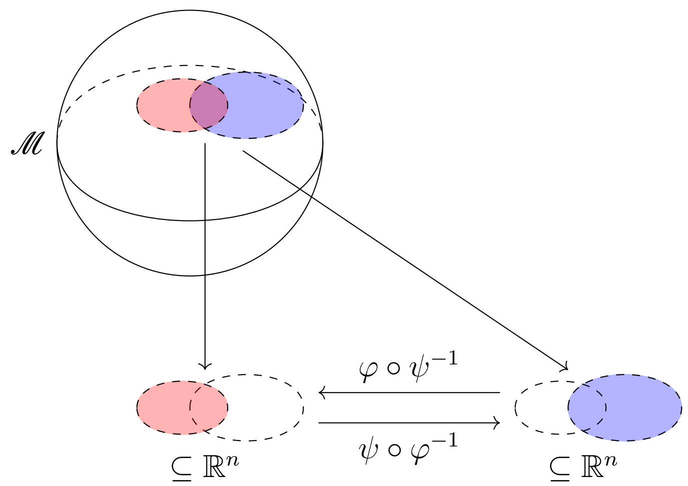
Ορισμός 3.4 (Χάρτες και διαφορικά συμβιβαστοί χάρτες)**.** *Έστω $(\mathscr{M}, \mathfrak{T})$ μία τοπολογική πολλαπλότητα.*

i. Κάθε ζεύγος (U, φ), με $U \in \mathfrak{T}$ και $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ τοπικός ομοιομορφισμός, θα καλείται χάρτης.

ii. Δύο χάρτες (U, φ), (V, ψ) λέγονται διαφορικά συμβιβαστοί εάν οι μεταβάσεις:

$$\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V) \text{ και } \varphi \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap V) \to \varphi(U \cap V)$$

είναι διαφορίσιμες. Δηλαδή, οι αλλαγές συντεταγμένων είναι διαφορίσιμες (αμφιδιαφορίσεις για την ακρίβεια).



Ορισμός 3.5 (Διαφορικοί άτλαντες και διαφορικές πολλαπλότητες)**.** *Έστω $(\mathscr{M}, \mathfrak{T})$ μία τοπολογική πολλαπλότητα.*

i. *Ένας (διαφορικός) άτλαντας $\mathscr{A}$ είναι ένα σύνολο διαφορικά συμβιβαστών χαρτών:*

$$\mathscr{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$$

που αποτελεί κάλυμμα της $\mathscr{M}$.

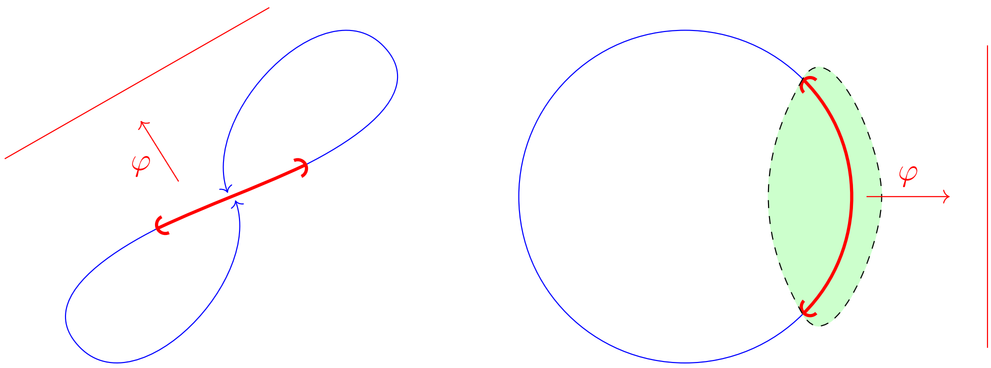
ii. *Το ζεύγος $(\mathscr{M}, \mathfrak{T}, \mathscr{A})$ θα καλείται διαφορική πολλαπλότητα. Συνήθως ο άτλαντας $\mathscr{A}$ είναι ο μεγιστικός:*

$$\mathscr{A}_{\max} = \{(U, \varphi) \mid (U, \varphi) \text{ ανά δύο διαφορικά συμβιβαστοί χάρτες της } \mathscr{M}\} \supseteq \mathscr{A}$$

Πολύ συχνά στους συμβολισμούς παραλείπουμε την τοπολογία/τους άτλαντες και γράφουμε μονάχα (για παράδειγμα) $\mathscr{M}$ για την πολλαπλότητα.

Με τους ορισμούς αυτούς υπάρχουν δύο είδη πολλαπλοτήτων: Εάν ξεκινήσουμε με μοντέλο τον χώρο $\mathbb{R}$, μπορούμε να φτιάξουμε ένα οκτάρι ή έναν κύκλο. Η ουσιώδης διαφορά των δύο είναι ότι το οκτάρι έχει τοπικά την τοπολογία του $\mathbb{R}$ αλλά όχι τη σχετική τοπολογία του $\mathbb{R}^2$, ενώ ο κύκλος έχει τοπικά την τοπολογία του $\mathbb{R}$ και τη σχετική τοπολογία του $\mathbb{R}^2$. Στην πρώτη περίπτωση λέμε ότι η πολλαπλότητα είναι εμβαπτισμένη, ενώ στη δεύτερη ότι είναι εμφυτευμένη. Εμείς θα ασχοληθούμε μονάχα με εμφυτευμένες πολλαπλότητες (τις καλούμε εμφυτευμένες υποπολλαπλότητες, αφού περιέχονται σε μεγαλύτερο χώρο).

Η ορολογία "εμβαπτισμένος" δεν έχει την έννοια του "εμφυτεύω", και συνεπώς οι δύο λέξεις δεν έχουν το ίδιο νόημα. Η λέξη εμβάπτιση εδώ χρησιμοποιείται με την έννοια της αλλαγής ονόματος/ονοματοδοσίας. Και πράγματι, το οκτάρι είναι στην ουσία το $\mathbb{R}$, μόνο που το "βλέπουμε/βαπτίζουμε" αλλιώς.



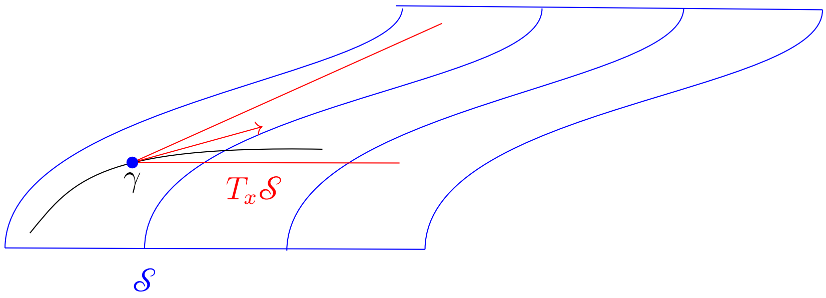
Σημείωση: Στη συνέχεια θα ασχολούμαστε με ομαλές (δηλαδή C^∞) πολλαπλότητες.

3.2 Εφαπτόμενοι χώροι και παραγωγίσεις

Πολύ βασική έννοια στις πολλαπλότητες είναι αυτή του εφαπτόμενου χώρου. Δεδομένης μίας επιφάνειας $\mathscr{S} \subseteq \mathbb{R}^3$, συνηθίζεται να δίνεται ο ορισμός του εφαπτόμενου χώρου (επιπέδου) σε ένα σημείο $p \in \mathscr{M}$:

$$T_x\mathscr{S} = \{(p, u) \in \{p\} \times \mathbb{R}^3 \mid \exists \text{ διαφορ. καμπύλη } \gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathscr{S} \text{ με } \gamma(0) = p, \gamma'(0) = u\}$$

Την ιδέα αυτή θα χρησιμοποιήσουμε για να γενικεύσουμε τον ορισμό. Μόνο για αρχή, είναι σημαντικό να παρατηρήσουμε ότι εδώ προϋποτίθεται η ύπαρξη/εμφύτευση της πολλαπλότητας (επιφάνειας) σε έναν μεγαλύτερο χώρο, μία κατάσταση που είναι ασυνήθης γενικά στις πολλαπλότητες.



Γενικότερα, χωρίς να προϋποτίθεται οποιουδήποτε είδους εμφύτευση, ορίζουμε το ακόλουθο:

Ορισμός 3.6 (Εφαπτόμενοι χώροι - Γεωμετρική μορφή). *Εστω $\mathscr{M}$ μία πολλαπλότητα και $x \in \mathscr{M}$. Ορίζουμε τον εφαπτόμενο χώρο της $\mathscr{M}$ στο x ως εξής:*

$$T_x\mathscr{M} = \Big\{(x,u) \in \{x\} \times \mathbb{R}^n \mid \exists \text{διαφορ. καμπύλη } \gamma : (-\varepsilon,\varepsilon) \to \mathscr{M} \text{ με } \gamma(0) = x \text{ και } \partial_{t=0}(\varphi \circ \gamma) = u, \text{ για κάποιον τοπικό χάρτη } (U,\varphi) \text{ του } x\Big\}$$

Εναλλακτικά (και ισοδύναμα):

$$T_x\mathscr{M} = \Big\{ {}^{\gamma}\!/_{\sim_x} \mid \gamma : (-\varepsilon,\varepsilon) \to \mathscr{M} \text{ διαφορ. καμπύλη με } \gamma(0) = x\Big\}$$

όπου $\gamma \sim_x \zeta$ εάν $\partial_{t=0}(\varphi \circ \gamma) \parallel \partial_{t=0}(\varphi \circ \zeta)$ για κάποιον χάρτη (U,φ) του x.

Ένας ακόμη τρόπος να οριστεί ο εφαπτόμενος χώρος είναι μέσω παραγωγίσεων. Είναι βοηθητικό κανείς να ταυτίζει τα στοιχεία του εφαπτόμενου χώρου με τις "κατά κατεύθυνση παραγώγους". Διαισθητικά (στους $\mathbb{R}^n$) αυτή η αντιστοιχία μπορεί να γίνει, αφού κάθε κατά κατεύθυνση παράγωγος αντιστοιχεί σε ένα διάνυσμα, και κάθε διάνυσμα σε μία κατά κατεύθυνση παράγωγο. Η γενική περίπτωση χρειάζεται περισσότερη αιτιολόγηση, αλλά δεν θα αναφερθούμε εδώ [Fr24].

Ορισμός 3.7 (Εφαπτόμενοι χώροι και παραγωγίσεις). *Έστω $\mathscr{M}$ μία πολλαπλότητα και $x \in \mathscr{M}$. Μία συνάρτηση $u_x : C^\infty(\mathscr{M};\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ θα λέγεται παραγώγιση εάν:*

i. Είναι γραμμική.

ii. Ικανοποιεί τον κανόνα του Leibnitz:

$$u_x(f \cdot g) = u_x(f) \cdot g(x) + f(x) \cdot u_x(g), \ f,g \in C^\infty(\mathscr{M};\mathbb{R})$$

Επίσης, ισοδύναμα μπορούμε να ορίσουμε τον εφαπτόμενο χώρο ως εξής:

$$T_x\mathscr{M} = \{u_x : C^\infty(\mathscr{M};\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \mid u_x \text{ παραγώγιση στο } x\}$$

Εάν έχουμε μία συνάρτηση $F : \mathscr{M} \to \mathscr{N}$, υπάρχει μία φυσιολογική συνάρτηση μεταξύ των αντίστοιχων χώρων, που είναι η προώθηση.

Ορισμός 3.8 (Προώθηση). *Έστω $\mathscr{M}, \mathscr{N}$ δύο πολλαπλότητες, $x \in \mathscr{M}$ και $F \in C^\infty(\mathscr{M};\mathscr{N})$. Η προώθηση της F είναι ο γραμμικός τελεστής:*

$$F_* : T_x\mathscr{M} \to T_{F(x)}\mathscr{N} \text{ με } F_*(u_x)(\Diamond) = u_x(\Diamond \circ F)$$

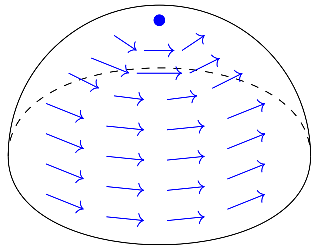
Εάν οι $\mathscr{M}, \mathscr{N}$ είναι δύο επιφάνειες στον $\mathbb{R}^3$, μία τέτοια συνάρτηση, μεταξύ των εφαπτόμενων χώρων, είναι το διαφορικό της F. Η προώθηση είναι στην ουσία το διαφορικό, εάν "περάσουμε" στην τοπική παράσταση.

Πρόταση 3.2 (Τοπική έκφραση της προώθησης). *Έστω $\mathscr{M}$, $\mathscr{N}$ δύο πολλαπλότητες, $x \in \mathscr{M}$ και $F : \mathscr{M} \to \mathscr{N}$. Εάν (U,φ), (V,ψ) είναι τοπικοί χάρτες των x και $F(x)$ αντίστοιχα, τότε η F_* σε τοπικές συντεταγμένες εκφράζεται μέσω του πίνακα:*

$$\left({}^{\partial(\psi \circ F \circ \varphi^{-1})_i}\!\Big/_{\partial x_j} \right)_{i,j=1}^{n,m}$$

3.3 Διανυσματικά πεδία και ροές

Εάν κανείς κατασκευάσει σε μία πολλαπλότητα μία συλλογή εφαπτόμενων διανυσμάτων (δηλαδή παραγωγίσεων), ώστε σε κάθε σημείο να αντιστοιχεί ένα διάνυσμα, φτιάχνει ένα διανυσματικό πεδίο, με την προϋπόθεση να υπάρχει μία ομαλή μεταβολή μεταξύ των διανυσμάτων.



Προκειμένου να μελετηθεί αυτή η έννοια της ομαλής μετάβασης μεταξύ διανυσμάτων, χρειάζεται να οριστεί ένας χώρος που περιέχει όλα τα πιθανά εφαπτόμενα διανύσματα. Προσέξτε ότι δεν μπορούμε εν γένει να πούμε "το $u \in T_x\mathscr{M}$ απέχει λίγο από το $v \in T_y\mathscr{M}$", εάν $x \neq y$, απλώς επειδή τα διανύσματα u, v δεν ανήκουν στον ίδιο χώρο. Δεν υφίσταται, για παράδειγμα, κάποιου είδους ποσότητα $u - v$. Ορίζουμε λοιπόν το ακόλουθο:

Ορισμός 3.9 (Εφαπτόμενη δέσμη)**.** *Έστω $\mathscr{M}$ μία πολλαπλότητα. Ορίζουμε την εφαπτόμενη δέσμη:*

$$T\mathscr{M} = \coprod_{x \in \mathscr{M}} T_x\mathscr{M} = \bigcup_{x \in \mathscr{M}} (\{x\} \times T_x\mathscr{M})$$

Η εφαπτόμενη δέσμη μπορεί να αποκτήσει δομή πολλαπλότητας, κι επομένως θα μπορούν να οριστούν έννοιες ομαλότητας και συνέχειας. Για να κατανοήσουμε την ιδέα, ας θεωρήσουμε ότι η $\mathscr{M}$ είναι κάποιος ευκλείδειος χώρος. Για κάθε $u, v \in T\mathscr{M}$, ενδεχομένως κανείς θα μπορούσε να πει ότι τα u, v είναι κοντά εάν τα $x_u = \pi_1(u)$, $x_v = \pi_1(v)$ είναι κοντά, κι επίσης τα $u = \pi_2(u)$, $v = \pi_2(v)$ (καταχρηστικά τα συμβολίζουμε με το ίδιο γράμμα) είναι κοντά. Με π_1 συμβολίζουμε τον περιορισμό στην $\mathscr{M}$ και με π_2 τον "περιορισμό" στους $T_p\mathscr{M}$ (δεδομένου του p). Δηλαδή, δύο εφαπτόμενα διανύσματα είναι κοντά εάν το σημείο εφαρμογής τους είναι κοντά και τα διανύσματα είναι κοντά, εάν μεταφερθούν ώστε να έχουν κοινή αρχή.

Αυτή είναι η ιδέα με την οποία κανείς κατασκευάζει δομή πολλαπλότητας στην εφαπτόμενη δέσμη $T\mathscr{M}$.

Θεώρημα 3.1 (Η $C^\infty-$δομή της εφαπτόμενης δέσμης)**.** *Έστω $\mathscr{M}$ μία πολλαπλότητα διάστασης n και $T\mathscr{M}$ η εφαπτόμενη δέσμη της. Υπάρχει $C^\infty-$δομή στην $T\mathscr{M}$ που την καθιστά πολλαπλότητα διάστασης $2n$, και τον περιορισμό $\pi : T\mathscr{M} \to \mathscr{M}$, $C^\infty-$συνάρτηση. Οι χάρτες δηλαδή (των (p, u_p)) είναι της μορφής:*

$$\Phi(q, u_q) = \left(\varphi_1(q), \cdots, \varphi_n(q), u_q^1, \cdots, u_q^n\right)$$

όπου:

i. Ο (U, φ) είναι χάρτης του $p \cong (\varphi_1(p), \cdots, \varphi_n(p))$.

ii. Ισχύει:

$$u_q(\Diamond) = \sum_{i=1}^{n} u_q^i \frac{\partial(\Diamond \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i}\Big|_{\varphi(q)} \cong (u_q^1, \cdots, u_q^n)$$

Τα διανυσματικά πεδία μπορούν να οριστούν ως μία ομαλή επιλογή εφαπτόμενων διανυσμάτων από την $T\mathscr{M}$.

Ορισμός 3.10 (Διανυσματικά πεδία). *Έστω $\mathscr{M}$ μία πολλαπλότητα. Θα καλούμε μία συνάρτηση $X \in C^\infty(\mathscr{M}; T\mathscr{M})$ διανυσματικό πεδίο εάν είναι $C^\infty-$τομή της $T\mathscr{M}$. Δηλαδή αν $\pi \circ X = \mathrm{id}$.*

$$\begin{tikzcd} \mathscr{M} \arrow[r, "X"] \arrow[dr, "\mathrm{id}"'] & T\mathscr{M} \arrow[d, "\pi"] \\ & \mathscr{M} \end{tikzcd}$$

Αυτή είναι η τυπική κατασκευή των διανυσματικών πεδίων. Ένας πιο φιλικός χαρακτηρισμός για το τι είναι διανυσματικό πεδίο θα ακολουθήσει στην επόμενη πρόταση.

Σημείωση: Αρκετές φορές θα συμβολίζουμε τα βασικά διανυσματικά πεδία:

$$E_i(p) = \frac{\partial \Diamond}{\partial x_i}\Big|_p = \frac{\partial(\Diamond \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i}\Big|_{\varphi(p)}$$

Τότε, τα εφαπτόμενα διανύσματα παίρνουν την απλή μορφή:

$$u_p = \sum_{i=1}^n u_p^i \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p = \sum_{i=1}^n u_p^i E_i(p)$$

Πρόταση 3.3 (Χαρακτηρισμός των διανυσματικών πεδίων). *Έστω $\mathscr{M}$ μία πολλαπλότητα και X ένα διανυσματικό πεδίο. Το X παίρνει τη μορφή:*

$$X(p) = \sum_{i=1}^n X^i(p) \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p = \sum_{i=1}^n X^i(p) E_i(p), \text{ με } X^i \in C^\infty(\mathscr{M}; \mathbb{R})$$

Αντιστρόφως, κάθε τέτοια μορφή είναι διανυσματικό πεδίο.

Τα διανυσματικά πεδία στη φυσική συνήθως αντιπροσωπεύουν πεδία δυνάμεων. Κατά συνέπεια, είναι φυσιολογικό κανείς να ασχοληθεί και με κινήσεις πάνω στην πολλαπλότητα, δηλαδή με ροές.

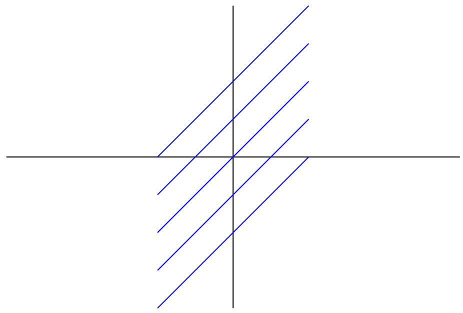
Ας θεωρήσουμε μία $C^\infty-$συνάρτηση $\Theta : \mathbb{R} \times \mathscr{M} \to \mathscr{M}$, που έχει ως ορίσματα τον "χρόνο" ($t \in \mathbb{R}$) και τη "θέση" ($p \in \mathscr{M}$), και που κατά κάποιον τρόπο εκφράζει τη "μεταφορά υλικού". Σε χρόνο 0 αναμένουμε ότι δεν έχει υπάρξει κάποια "μεταφορά υλικού", αφού τη στιγμή εκκίνησης αυτή υλοποιούνται οι αρχικές μας συνθήκες. Οπότε μπορούμε να θεωρήσουμε $\Theta(0, p) = p$. Από την άλλη, σε χρόνο $t + s$ έχουμε τη ροή $\Theta(t + s, p)$, η οποία -αν αυτή ορίζεται με λογικό τρόπο- θα πρέπει να μπορεί να βρεθεί μελετώντας την μεταφορά πρώτα σε χρόνο t, κι έπειτα σε χρόνο s μονάδες μετά το t, από το σημείο $\Theta(t, p)$. Δηλαδή $\Theta(t + s, p) = \Theta\big(s, \Theta(t, p)\big)$.

Η έννοια της ροής μελετάται και στα δυναμικά συστήματα, με διαφορετική ορολογία (οι συναρτήσεις Θ λέγονται συναρτήσεις μετάβασης, και συνήθως έχουν και κάποιον αρχικό χρόνο t_0, ενδεχομένως διαφορετικό του μηδενός).

Παράδειγμα ροής (λόγου χάρη προς μία κατεύθυνση $v = (v_1, v_2)$) στον $\mathbb{R}^2$ είναι η:

$$\Theta\big(t, (x_1, x_2)\big) = (x_1 + tv_1, x_2 + tv_2)$$

Εδώ η μεταφορά του υλικού γίνεται σε παράλληλες προς το v ευθείες.



Ορισμός 3.11 (Διαφορικές ροές). *Έστω $\mathscr{M}$ μία πολλαπλότητα και $\Theta : \mathbb{R} \times \mathscr{M} \to \mathscr{M}$ μία $C^\infty-$συνάρτηση. Η Θ θα καλείται διαφορική ροή εάν:*

i. Για κάθε $p \in \mathscr{M}$, $\Theta(0, p) = p$.

ii. Για κάθε $t, s \in \mathbb{R}$ και $p \in \mathscr{M}$, $\Theta(t + s, p) = \Theta\big(s, \Theta(t, p)\big)$.

Πολλές φορές γράφουμε $\Theta_t(p) = \Theta(t, p)$. Εάν αντί για $\mathbb{R}$ έχουμε κάποιο διάστημα $(-\varepsilon, \varepsilon)$ και αντί για $\mathscr{M}$ έχουμε ένα ανοικτό U, ονομάζουμε τη ροή τοπική (οι ιδιότητες i., ii. τροποποιούνται όπως χρειάζεται για να βγάζουν νόημα).

Η αντιστοιχία διανυσματικών πεδίων και τοπικών ροών επιτυγχάνεται μέσω των ολοκληρωτικών καμπυλών και του απειροστικού γεννήτορα.

Ορισμός 3.12 (Ολοκληρωτικές καμπύλες και ο απειροστικός γεννήτορας). *Έστω $\mathscr{M}$ μία πολλαπλότητα.*

i. Μία καμπύλη $\gamma : I \to \mathscr{M}$ λέγεται ολοκληρωτική καμπύλη του διανυσματικού πεδίου X εάν ακολουθεί τις γραμμές του διανυσματικού πεδίου. Δηλαδή εάν:

$$\gamma_* \left(\frac{d}{dt}\Big|_t \right) = X\big(\gamma(t)\big)$$

ii. Εάν $\Theta : \mathbb{R} \times \mathscr{M} \to \mathscr{M}$ είναι μία διαφορική ροή, ο απειροστικός της γεννήτορας είναι το διανυσματικό πεδίο:

$$\Theta^\alpha(p)(f) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}\Big(f\big(\Theta_{\Delta t}(p)\big) - f\big(\Theta_0(p)\big)\Big) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}\Big(f\big(\Theta_{\Delta t}(p)\big) - f(p)\Big)$$

το οποίο αντιπροσωπεύει τη μεταβολή της ροής.

Θεώρημα 3.2 (Συσχέτιση διανυσματικών πεδίων και διαφορικών ροών). *Έστω $\mathscr{M}$ μία πολλαπλότητα.*

i. Έστω Θ μία διαφορική ροή (τοπική ή όχι). Οι τροχιές:

$$\gamma(t) = \Theta(t, p)$$

είναι ολοκληρωτικές καμπύλες του Θ^α.

ii. Για κάθε διανυσματικό πεδίο X υπάρχει μία τοπική διαφορική ροή Θ (ολική ενδέχεται να μην υπάρχει) ώστε $\Theta^\alpha = X$ και $\Theta(0, p) = p$, σε κάποια περιοχή U.

Κομβικό ρόλο παίζουν επίσης οι αγκύλες Lie των διανυσματικών πεδίων. Πρώτα ορίζουμε τη σύνθεση των διανυσματικών πεδίων X, Y. Ορίζουμε δηλαδή:

$$XY(p)(f) = X(p)(Y(\Diamond)(f))$$

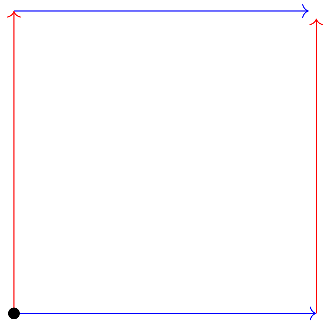
Η XY δεν είναι εν γένει διανυσματικό πεδίο, κι αυτό οφείλεται στην ύπαρξη δευτέρων παραγώγων. Προκειμένου να πάρουμε διανυσματικό πεδίο που αντιστοιχεί στη σύνθεση, ορίζουμε την αγκύλη Lie.

Ορισμός 3.13 (Αγκύλη Lie). *Έστω $\mathscr{M}$ μία πολλαπλότητα και X, Y δύο διανυσματικά πεδία. Ορίζουμε την αγκύλη Lie:*

$$[X, Y] = XY - YX$$

Έχει ενδιαφέρον να συγκρίνει κανείς τα διανυσματικά πεδία και τις ροές τους με την αγκύλη Lie. Για παράδειγμα, εάν έχουμε $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$ δύο βασικά διανυσματικά πεδία και Φ, Θ τις αντίστοιχες τοπικές (και όχι ολικές) ροές, ξεκινώντας από ένα σημείο p, δεν έχει σημασία η σειρά της σύνθεσης στις ροές. Δηλαδή, ακολουθώντας την Φ κι έπειτα τη Θ, φτάνουμε στο ίδιο σημείο με το να ακολουθήσουμε πρώτα τη Θ κι έπειτα τη Φ.

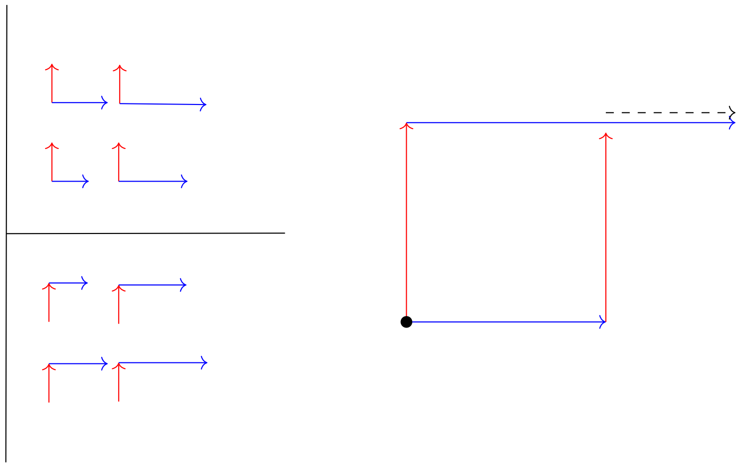
$$\Theta(s, \Phi(t, p)) = \Phi(t, \Theta(s, p))$$



Εάν $[X, Y] = 0$, τότε αυτό που μπορεί κανείς να δείξει είναι η ανεξαρτησία της διαδρομής σε τοπικές ροές. Λέμε ότι τα διανυσματικά πεδία X, Y μετατίθενται εάν $[X, Y] = 0$.

Υπάρχουν επίσης διανυσματικά πεδία που δεν μετατίθενται, όπως είναι τα $X = (x^2 + y^2)\partial/\partial x$, $Y = \partial/\partial y$ στο επίπεδο.

$$[X, Y] = 2y\frac{\partial}{\partial x} + (x^2 + y^2)\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} - (x^2 + y^2)\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} = 2y\frac{\partial}{\partial x}$$



Το διανυσματικό πεδίο $[X, Y]$ είναι ένα μέτρο του πόσο τα X, Y απέχουν από το να μετατίθενται.

Προκειμένου να ασχοληθούμε ουσιωδώς με γεωμετρία πάνω σε πολλαπλότητες, θα χρειαστούμε μίας μορφής εσωτερικό γινόμενο στους εφαπτόμενους χώρους, που είναι η μετρική Riemann. Στο [Fr24] εξηγείται γιατί η μετρική Riemann είναι απαραίτητη, εάν κανείς θέλει να μελετήσει όγκους, κι επίσης στα [Kü15], [dC92] πώς ορίζεται η καμπυλότητα.

3.4 Η δομή Riemann

Η μετρική Riemann στις πολλαπλότητες είναι μία συλλογή εσωτερικών γινομένων στους εφαπτόμενους χώρους, που μεταβάλλονται ομαλά, καθώς το σημείο εφαρμογής αλλάζει. Αυτή η έννοια ομαλότητας συνήθως περιγράφεται, όπως και στα διανυσματικά πεδία, δηλαδή ορίζοντας έναν χώρο-δέσμη κι έπειτα παίρνοντας τομή. Προκειμένου να απλοποιήσουμε τη διαδικασία, θα μεταβούμε απ' ευθείας σε έναν ορισμό όπως της Πρότασης 3.3.

Σημειώνουμε ότι, εάν $\{(dx_k)_p\}_k$ είναι μία δυϊκή βάση της $\{\partial/\partial x_k|_p\}_k$, ορίζεται το τανυστικό γινόμενο:

$$(dx_i)_p \otimes d(x_j)_p \left(\frac{\partial}{\partial x_k}\bigg|_p, \frac{\partial}{\partial x_\ell}\bigg|_p \right) = \delta_{i,k}\delta_{j,\ell}$$

Ορισμός 3.14 (Μετρικές Riemann και πολλαπλότητες Riemann)**.** *Έστω $\mathscr{M}$ μία πολλαπλότητα. Μία μετρική Riemann είναι ένα συμμετρικό $2-$τανυστικό πεδίο, δηλαδή μία συνάρτηση g με τις ιδιότητες:*

i. Για κάθε $u, v \in T_p\mathscr{M}$, $g(p)(u,v) = g(x)(v,u)$.

ii. Για κάθε $v \in T_p\mathscr{M}$, $g(p)(v,v) \geqslant 0$, με την ισότητα μόνο όταν $v = 0$.

iii. Η $g(p)$ γράφεται:

$$g(p) = \sum_{i,j=1}^{n} g_{i,j}(p)(dx_i)_p \otimes (dx_j)_p$$

με τις $g_{i,j}$ να είναι $C^\infty-$συναρτήσεις. Επίσης, η $\{(dx_k)_p\}_k$ είναι η δυϊκή βάση της $\{\partial/\partial x_k|_p\}_k$.

Το ζεύγος $(\mathscr{M}, g)$ θα καλείται πολλαπλότητα Riemann.

Στη γεωμετρία Riemann αποδεικνύεται το εξής:

Θεώρημα 3.3. *Έστω $\mathscr{M}$ μία πολλαπλότητα. Υπάρχει (όχι μοναδική) μετρική Riemann στην $\mathscr{M}$.*

Σημείωση: Πολλές φορές, όταν η μετρική Riemann υπονοείται, γράφουμε:

$$\langle X(p), Y(p) \rangle \text{ αντί } g(p)(X(p), Y(p))$$

όπου τα X, Y είναι διανυσματικά πεδία.

3.5 Συναλλοίωτη παράγωγος και συνοχές

Στη συνέχεια θα μας απασχολήσουν θέματα που αφορούν τη καμπυλότητα στις πολλαπλότητες Riemann. Στις εμφυτευμένες υποπολλαπλότητες στον $\mathbb{R}^n$, βασική προϋπόθεση για τη μελέτη της καμπυλότητας, τουλάχιστον τμηματικά, είναι η μελέτη της δεύτερης παραγώγου των καμπυλών. Δηλαδή, η μελέτη της μεταβολής της ταχύτητας. Παρακάτω θα προσπαθήσουμε να ασχοληθούμε με το αντίστοιχο πλαίσιο στις πολλαπλότητες Riemann, που είναι η μελέτη της μεταβολής των διανυσματικών πεδίων.

Η διαίσθηση που θα οδηγήσει στους ορισμούς βρίσκεται στην περίπτωση των εμφυτευμένων υποπολλαπλοτήτων στον $\mathbb{R}^n$, και είναι η πρώτη που θα μας απασχολήσει.

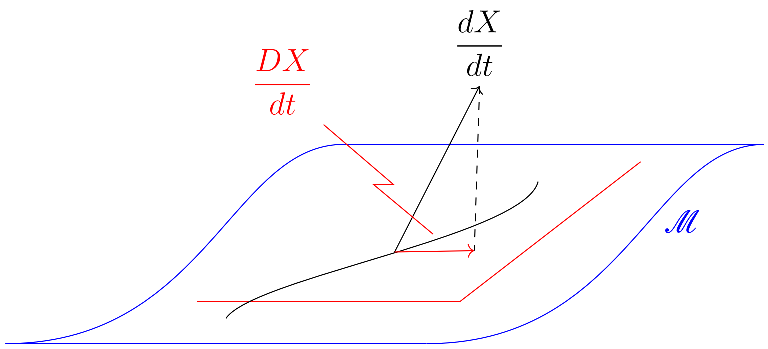
Εστω $\mathscr{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ μία εμφυτευμένη υποπολλαπλότητα διάστασης $m < n$. Θεωρούμε μία καμπύλη $\gamma : I \to \mathscr{M}$ και επίσης ορίζουμε X το πεδίο ταχυτήτων της, που είναι ένα διανυσματικό πεδίο κατά μήκος της γ. Με τη δεύτερη παράγωγο της γ, παίρνουμε άλλο ένα διανυσματικό πεδίο Y κατά μήκος της γ. Το Y περιέχει την "πληροφορία" για τη καμπυλότητα στην περίπτωση της εμφυτευμένης υποπολλαπλότητας, αλλά όχι γενικά. Το πρόβλημα έγκειται στο γεγονός ότι ο ορισμός ο ίδιος προϋποθέτει με πολύ άμεσο τρόπο την εμφύτευση, ώστε να υπάρχει το διανυσματικό πεδίο Y εκτός πολλαπλότητας.

Θα προσπαθήσουμε να βρούμε, στην περίπτωση των εμφυτευμένων υποπολλαπλοτήτων, έναν τρόπο έκφρασης της δεύτερης παραγώγου (δηλαδή της παραγώγου του X) που δεν θα προϋποθέτει την ύπαρξη "εξωτερικού χώρου" με τόσο άμεσο τρόπο. Ίσως αυτός ο ορισμός να μπορεί μετέπειτα να γενικευτεί στην περίπτωση των πολλαπλοτήτων Riemann.

Γράφουμε το $Y = dX/dt$ στη μορφή $Y = \pi(Y) + \pi^{\perp}(Y)$, όπου π είναι η προβολή $\pi(Y(p)) : T_p\mathbb{R}^n \to T_p\mathscr{M}$ και $\pi^{\perp}$ η προβολή $\pi^{\perp}(Y(p)) : T_p\mathbb{R}^n \to T_p^{\perp}\mathscr{M}$. Δηλαδή η πρώτη προβάλλει το διάνυσμα στους εφαπτόμενους χώρους της πολλαπλότητας και η δεύτερη στους αντίστοιχους κάθετους. Αφού οι κάθετες συνηστώσες προκαλούν εν γένει πρόβλημα, ορίζουμε:

$$\frac{DX}{dt} = \pi(Y) = \pi\left(\frac{dX}{dt}\right)$$

(άλλος συμβολισμός είναι ο D_tX). Η νέα αυτή παράγωγος ονομάζεται συναλλοίωτη παράγωγος του X κατά μήκος της γ.



Οι ιδιότητες με τις οποίες θα οριστεί η συναλλοίωτη παράγωγος γενικά, όπως και η έννοια της συνοχής, συνοψίζονται στο παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 3.4 (Ιδιότητες της συναλλοίωτης παραγώγου σε εμφυτευμένες πολλαπλότητες). *Έστω $\mathscr{M}$ μία εμφυτευμένη υποπολλαπλότητα στον $\mathbb{R}^n$ και X_1, X_2 δύο διανυσματικά πεδία κατά μήκος μίας καμπύλης $\gamma : I \to \mathscr{M}$ (όχι κατ' ανάγκη η ταχύτητα της γ). Τότε:*

$$\frac{D}{dt}(X_1 + X_2) = \frac{DX_1}{dt} + \frac{DX_2}{dt}$$

και:

$$\frac{D}{dt}\big(f(t)X_1(t)\big) = \frac{df}{dt}X_1(t) + f(t)\frac{DX_1}{dt}, \; f \in C^1(I; \mathbb{R})$$

Τέλος, εάν Y είναι ένα διανυσματικό πεδίο και X το πεδίο της ταχύτητας της γ, η ποσότητα DY/dt εξαρτάται από το πεδίο ταχυτήτων X, και φυσικά από το Y, αλλά όχι από την γ. Δηλαδή, εάν $\gamma(t_0) = p$, τότε η $DY/dt|_{t=t_0}$ δεν εξαρτάται από την γ, αλλά από το σημείο p και από την ταχύτητα $X(p)$.

Ιδιαιτέρως η τελευταία ιδιότητα έχει ενδιαφέρον, και μας προϊδεάζει ότι υπάρχει ένας γενικός τελεστής ∇, που κωδικοποιεί όλες τις κατά κατεύθυνση παραγώγους. Διαισθητικά, $\nabla_{d\gamma/dt} Z = DY/dt$, $Z(\gamma(t)) = Y(t)$. Αυτός θα είναι ο τελεστής ∇ της συνοχής, και η ποσότητα $\nabla_X Y$ θα σημαίνει την κατά κατεύθυνση παράγωγο του Y κατά μήκος του X.

Ορισμός 3.15 (Συνοχή). *Έστω $(\mathscr{M}, g)$ μία πολλαπλότητα Riemann. Ορίζουμε ως συνοχή κάθε συνάρτηση $\nabla : (X, Y) \mapsto \nabla_X Y$ με τις ιδιότητες:*

i C^1-γραμμικότητα στην πρώτη μεταβλητή:

$$\nabla_{fX_1+gX_2} Y = f\nabla_{X_1} Y + g\nabla_{X_2} Y$$

ii. Κανόνας του Leibnitz στη δεύτερη μεταβλητή:

$$\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(\cdot)(f)Y$$

iii. Γραμμικότητα στη δεύτερη μεταβλητή:

$$\nabla_X(Y_1 + Y_2) = \nabla_X Y_1 + \nabla_X Y_2$$

όπου τα X, Y, X_1, X_2, Y_1, Y_2 είναι διανυσματικά πεδία και $f \in C^1(\mathscr{M}; \mathbb{R})$.

Μέσω της συνοχής, που είναι γενική έννοια, περιοριζόμενοι σε καμπύλες θα εξάγουμε τη συναλλοίωτη παράγωγο.

Θεώρημα 3.5 (Συναλλοίωτη παράγωγος). *Έστω $(\mathscr{M}, g)$ μία πολλαπλότητα Riemann με συνοχή ∇. Υπάρχει μία γενική έννοια συναλλοίωτης παραγώγου κατά μήκος της γ, που είναι μοναδική δεδομένης της συνοχής ∇. Δηλαδή, ο τελεστής αυτός D/dt ικανοποιεί τις ιδιότητες:*

i. Γραμμικότητα:

$$\frac{D}{dt}(Y_1 + Y_2) = \frac{DY_1}{dt} + \frac{DY_2}{dt}$$

ii. Κανόνας του Leibnitz:

$$\frac{D}{dt}(fY_1) = \frac{df}{dt} Y_1 + f\frac{DY_1}{dt}$$

Γενικά τα Y_1, Y_2 είναι διανυσματικά πεδία κατά μήκος της γ και $f \in C^1(I; \mathbb{R})$.

iii. Συμβατότητα με τη συνοχή ∇:

$$\frac{DY}{dt} = \nabla_X Z$$

Το Y με το Z σχετίζονται ως εξής $Z(\gamma(t)) = Y(t)$. Δηλαδή το Y είναι διανυσματικό πεδίο κατά μήκος της γ που έχει προκύψει από το Z, και X είναι το πεδίο ταχυτήτων $X = d\gamma/dt$.

Οι λεπτομέρειες που δικαιολογούν ότι αυτοί οι ορισμοί είναι καλοί μπορούν να βρεθούν στο [Bo86].

Ένα "μικρό" τεχνικό ζήτημα είναι το ότι οι συνοχές ενδεχομένως δεν συμπεριφέρονται καλά στο εσωτερικό γινόμενο (δεν ισχύει δηλαδή ο κανόνας του Leibnitz για τα εσωτερικά γινόμενα). Αυτό διορθώνεται με το ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα 3.6 (Υπαρξη Levi-Civita συνοχής). *Για κάθε πολλαπλότητα Riemann $(\mathscr{M}, g)$ υπάρχει μοναδική συνοχή Levi-Civita, δηλαδή συνοχή με τις ιδιότητες:*

i. Συμμετρία:

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$$

(οπότε τότε $\nabla_{E_i} E_j - \nabla_{E_j} E_i = [E_i, E_j] = 0$, πράγμα που δικαιολογεί την ορολογία της συμμετρίας).

ii. Συμβατότητα με τη μετρική g:

$$X\langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle$$

Τα X, Y, Z είναι διανυσματικά πεδία.

Σημείωση: Από εδώ και στο εξής θα χρησιμοποιούμε Levi-Civita συνοχές.

Με την έννοια της συναλλοίωτης παραγώγου μπορούν να οριστούν οι έννοιες παράλληλης μετατόπισης πάνω σε μία πολλαπλότητα. Μπορούμε, δηλαδή, να μεταφέρουμε εφαπτόμενα διανύσματα πάνω σε μία πολλαπλότητα, με τρόπο που σέβεται τη γεωμετρία. Για τους κάτοικους της πολλαπλότητας, η κίνηση αυτή γίνεται όντως παράλληλα, ενώ για τους "εξωτερικούς" παρατηρητές ενδεχομένως όχι (σκεφτείτε το παράδειγμα της σφαίρας).

Θα λέμε ότι ένα διανυσματικό πεδίο Y κατά μήκος μίας καμπύλης $\gamma : I \to \mathbb{R}$ είναι παράλληλο εάν $DY/dt \equiv 0$. Δηλαδή, ένα διανυσματικό πεδίο Y είναι παράλληλο εάν δεν κάνει στροφές πάνω στην πολλαπλότητα και διατηρεί σταθερό μήκος.

Οι γεωδαισιακές σχετίζονται με την παράλληλη μεταφορά με τον εξής τρόπο: Πρέπει να είναι "ευθείες" στην πολλαπλότητα, με την έννοια ότι δεν στρίβουν ή αλλάζουν ταχύτητα. Δηλαδή, είναι καμπύλες γ με:

$$\frac{D}{dt}\frac{d\gamma}{dt} \equiv 0$$

3.6 Καμπυλότητα, μέση καμπυλότητα και καμπυλότητα Ricci

Τώρα είμαστε σε θέση να διερευνήσουμε την έννοια της καμπυλότητας. Υπενθυμίζουμε ότι στη γεωμετρία των επιφανειών $\mathscr{S} \subseteq \mathbb{R}^3$, κομβικό ρόλο παίζει ο τελεστής σχήματος:

$$S_p : T_p\mathscr{S} \to T_p\mathscr{S},\ S_p(u) = -(\nabla_Y \widehat{n})_p = -u^1\frac{\partial \widehat{n}}{\partial x} - u^2\frac{\partial \widehat{n}}{\partial y}$$

όπου το Y είναι διανυσματικό πεδίο με $Y(p) = u$ και $\widehat{n}$ το μοναδιαίο κάθετο διανυσματικό πεδίο. Ο τελεστής σχήματος δίνει, επίσης, τη δεύτερη θεμελιώδη μορφή στις επιφάνειες, μέσω του τύπου:

$$\mathrm{II}(u, v) = \langle S_p(u), v\rangle \widehat{n}$$

η οποία ορίζεται από τον πίνακα:

$$\begin{pmatrix} \mathcal{L} & \mathcal{M} \\ \mathcal{M} & \mathcal{N} \end{pmatrix}$$

όπου:

$$\mathcal{L} = -\left\langle \frac{\partial \widehat{n}}{\partial x}, \frac{\partial \varphi^{-1}}{dx} \right\rangle,\ \mathcal{M} = -\left\langle \frac{\partial \widehat{n}}{\partial x}, \frac{\partial \varphi^{-1}}{dy} \right\rangle,\ \mathcal{N} = -\left\langle \frac{\partial \widehat{n}}{\partial y}, \frac{\partial \varphi^{-1}}{dy} \right\rangle$$

Το θεώρημα που θα ακολουθήσει, θα δικαιολογήσει τον ορισμό της καμπυλότητας Riemann. Υπενθυμίζουμε, επίσης, την πρώτη θεμελιώδη μορφή:

$$\mathrm{I}(u, v) = \langle u, v \rangle$$

που ορίζεται από τον πίνακα:

$$\begin{pmatrix} \mathcal{E} & \mathcal{F} \\ \mathcal{F} & \mathcal{G} \end{pmatrix}$$

όπου:

$$\mathcal{E} = \left\langle \frac{\partial \varphi^{-1}}{\partial x}, \frac{\partial \varphi^{-1}}{\partial x} \right\rangle, \ \mathcal{F} = \left\langle \frac{\partial \varphi^{-1}}{\partial x}, \frac{\partial \varphi^{-1}}{\partial y} \right\rangle, \ \mathcal{G} = \left\langle \frac{\partial \varphi^{-1}}{\partial y}, \frac{\partial \varphi^{-1}}{\partial y} \right\rangle$$

Θεώρημα 3.7 (Συσχέτιση της καμπυλότητας με τη μετάθεση των συνοχών)**.** *Έστω $\mathscr{S} \subseteq \mathbb{R}^3$ μία επιφάνεια. Ισχύουν τα εξής δύο:*

$$\mathcal{L}\mathcal{N} - \mathcal{M}^2 = \langle \nabla_{E_1}\nabla_{E_2}E_2 - \nabla_{E_2}\nabla_{E_1}E_2, E_1 \rangle$$

και:

$$\mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2 = \langle E_1, E_1 \rangle \langle E_2, E_2 \rangle - \langle E_1, E_2 \rangle^2$$

Κατά συνέπεια, η καμπυλότητα Gauss γίνεται:

$$K = \frac{\mathcal{L}\mathcal{N} - \mathcal{M}^2}{\mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2} = \frac{\langle \nabla_{E_1}\nabla_{E_2}E_2 - \nabla_{E_2}\nabla_{E_1}E_2, E_1 \rangle}{\langle E_1, E_1 \rangle \langle E_2, E_2 \rangle - \langle E_1, E_2 \rangle^2}$$

Το παραπάνω θεώρημα υποδεικνύει ότι η ποσότητα:

$$\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z$$

είναι σημαντική για τη μελέτη της καμπυλότητας. Αυτό λοιπόν που θα μας απασχολήσει είναι το μέτρο του πόσο μετατίθενται οι συνοχές, προκειμένου να κατανοήσουμε τη καμπυλότητα. Μάλιστα, για εντελώς τεχνικούς λόγους, θα μελετήσουμε την:

$$\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$$

Αυτό δεν αλλάζει τη διαίσθηση, αφού ούτως ή άλλως $\nabla_{[E_1,E_2]}E_2 = 0$ και:

$$\nabla_{E_1}\nabla_{E_2}E_2 - \nabla_{E_2}\nabla_{E_1}E_2 = \nabla_{E_1}\nabla_{E_2}E_2 - \nabla_{E_2}\nabla_{E_1}E_2 - \nabla_{[E_1,E_2]}E_2$$

Ορισμός 3.16 (Καμπυλότητα Riemann)**.** *Έστω $(\mathscr{M}, g)$ μία πολλαπλότητα Riemann. Ορίζουμε την καμπυλότητα Riemann:*

$$\mathrm{R}(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$$

Επίσης, θα ορίσουμε έναν ακόμη τελεστή που έχει σχέση με τη καμπυλότητα, που συχνά επίσης καλείται καμπυλότητα Riemann.

$$\mathrm{Rm}(X, Y, Z, W) = \langle \mathrm{R}(X, Y)Z, W \rangle$$

Με αυτούς τους ορισμού, μπορεί να οριστεί η τμηματική καμπυλότητα Gauss ως προς τα επίπεδα $\mathscr{P}_p = \mathrm{span}\{X(p), Y(p)\}$:

$$K(\mathscr{P}) = \frac{\mathrm{Rm}(X, Y, Y, X)}{\langle X, X \rangle \langle Y, Y \rangle - \langle X, Y \rangle^2}$$

Ιδιαιτέρως, θα μας απασχολήσει και η μέση καμπυλότητα εμφυτευμένων υποπολλαπλοτήτων, στο θεώρημα των Pacard-Ritoré. Η εμφάνιση της μέσης καμπυλότητας έγκειται στο γεγονός ότι οι ελαχιστικές επιφάνειες είναι αυτές ακριβώς που έχουν μέση καμπυλότητα μηδέν. Ο ορισμός της μέσης καμπυλότητας (ως διάνυσμα), τουλάχιστον στην περίπτωση των επιφανειών, έχει ως εξής:

$$H(p) = \frac{1}{2}\Big(\mathrm{II}\big(E_1(p), E_1(p)\big) + \mathrm{II}\big(E_2(p), E_2(p)\big)\Big) \in T_p^{\perp}\mathscr{S} \tag{3.1}$$

Γενικά, εάν η εμφυτευμένη υποπολλαπλότητα $\mathscr{M} \subseteq \overline{\mathscr{M}}$ είναι διάστασης n και συνδιάστασης N, μπορούμε να εκμεταλευτούμε τη σχέση (3.1) και να δώσουμε τον ορισμό που θα ακολουθήσει, αφού πρώτα ορίσουμε τη δεύτερη θεμελιώδη μορφή σε τυχούσα συνδιάσταση.

Όσον αφορά τη δεύτερη θεμελιώδη μορφή στις επιφάνειες, έχουμε ορίσει:

$$\mathrm{II}(u,v) = \langle S_p(u), v\rangle = -\langle (\nabla_Y \widehat{n})_p, v\rangle \widehat{n},\ Y(p) = u$$

Από γεωμετρικής άποψης υπάρχει μία καλύτερη μορφή του ίδιου ορισμού, που θα δούμε αμέσως. Θεωρούμε Y, V δύο διανυσματικά πεδία με $Y(p) = u$, $V(p) = v$ και από τον κανόνα του Leibnitz:

$$\mathrm{II}(u,v) = -\langle (\nabla_Y \widehat{n})_p, v\rangle \widehat{n} = -u\langle \widehat{n}, v\rangle \widehat{n} + \langle \widehat{n}, (\nabla_Y V)_p\rangle \widehat{n}$$

Ο πρώτος όρος είναι μηδέν, αφού $v \perp \widehat{n}$. Ο δεύτερος είναι ακριβώς η προβολή $\pi^{\perp}(\nabla_Y V)_p$, στον κάθετο χώρο $T_p^{\perp}\mathscr{S}$. Δηλαδή:

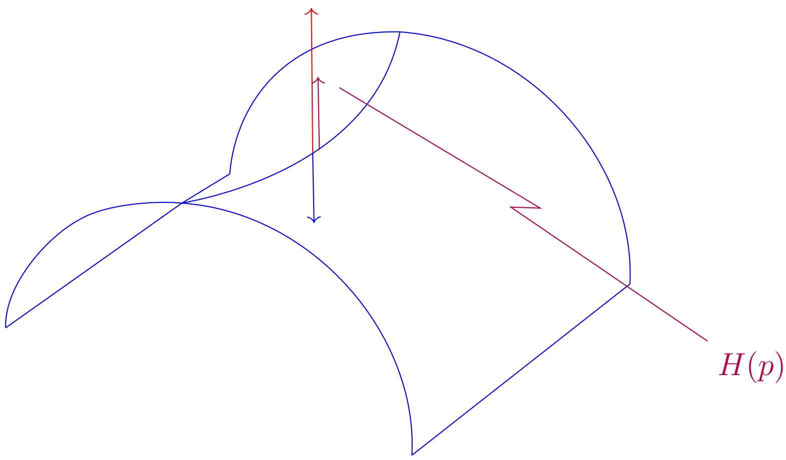
$$\mathrm{II}(u,v) = \pi^{\perp}(\nabla_Y V)_p,\ Y(p) = u,\ V(p) = v$$

Ορισμός 3.17 (Δεύτερη θεμελιώδης μορφή και μέση καμπυλότητα)**.** *Έστω μία εμφυτευμένη υποπολλαπλότητα $\mathscr{M} \subseteq \overline{\mathscr{M}}$ είναι διάστασης n και συνδιάστασης N. Ορίζουμε τη δεύτερη θεμελιώδη μορφή:*

$$\mathrm{II}(u,v) = \pi^{\perp}(\nabla_Y V)_p,\ Y(p) = u,\ V(p) = v$$

όπου $\pi^{\perp}$ είναι η προβολή στον κάθετο χώρο $T_p^{\perp}\mathscr{M}$. Ορίζουμε επίσης τη μέση καμπυλότητα:

$$H(p) = \frac{1}{n}\sum_k \mathrm{II}\big(E_k(p), E_k(p)\big) \in T_p^{\perp}\mathscr{M}$$



Ένα τελευταίο είδος καμπυλότητας που θα μας απασχολήσει είναι η καμπυλότητα Ricci. Επειδή η καμπυλότητα Ricci προϋποθέτει την έννοια του ίχνους, θα ασχοληθούμε πρώτα με αυτό. Επί τη ευκαιρία, επειδή οι έννοιες της απόκλισης $\nabla\bullet$ και της Laplace-ιανής Δ ορίζονται μέσω του ίχνους, πριν την καμπυλότητα Ricci είναι λογικό να παρεμβληθούν οι ορισμοί τους ως δύο χρήσιμες εφαρμογές.

Η ιδέα για τον ορισμό του ίχνους έρχεται από την εξής απλή παρατήρηση: Εάν A είναι μία γραμμική συνάρτηση με:

$$A(x,y) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

τότε:

$$\mathrm{Tr}(A) = \alpha + \delta = \left\langle \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle + \left\langle \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Ορισμός 3.18 (Ίχνος). *Έστω $(\mathscr{M}, g)$ μία πολλαπλότητα Riemann. Εάν A είναι ένας τελεστής με $A_p : T_p\mathscr{M} \to T_p\mathscr{M}$, ορίζουμε:*

$$\mathrm{Tr}(A_p) = \sum_k \langle A_p E_k(p), E_k(p) \rangle$$

Με το ίχνος μπορεί να οριστεί άμεσα ο τελεστής της απόκλισης, εφορμώντας από τον γνωστό τύπο του απειροστικού λογισμού $\nabla\bullet f = \sum_k \partial f / \partial x_k = \sum_k \langle (\nabla f) e_k, e_k \rangle$.

Ορισμός 3.19 (Απόκλιση). *Έστω $(\mathscr{M}, g)$ μία πολλαπλότητα Riemann και Y ένα διανυσματικό πεδίο. Ορίζουμε την απόκλιση:*

$$\nabla^g \bullet Y = \mathrm{Tr}(\nabla_\Diamond Y) = \mathrm{Tr}(X \mapsto \nabla_X Y) = \sum_k \langle \nabla_{E_k} Y, E_k \rangle$$

(ή απλά $\nabla\bullet Y$, εάν η μετρική υπονοείται).

Επίσης, μπορεί να οριστεί η Laplace-ιανή, που καλείται τελεστής Laplace-Beltrami. Η ιδέα πίσω από τον ορισμό είναι η σχέση $\nabla\bullet\nabla = \Delta$, και προϋποθέτει την ύπαρξη του τελεστή της κλίσης. Σημειώνουμε ότι η συνήθης γραφή της κλίσης είναι $\mathrm{grad}\ f$ αντί του ∇f που χρησιμοποιούμε στον απειροστικό λογισμό. Παρόλα αυτά, θεωρούμε ότι δεν θα υπάρξει σύγχυση, εάν χρησιμοποιήσουμε τον συμβολισμό ∇f, και ότι θα είναι ευκολότερη εποπτικά η σύνδεση των τύπων με τον απειροστικό λογισμό.

Ορισμός 3.20 (Κλίση και ο τελεστής Laplace-Beltrami). *Έστω $(\mathscr{M}, g)$ μία πολλαπλότητα Riemann και $f \in C^\infty(\mathscr{M}; \mathbb{R})$. Ορίζουμε την κλίση ∇f (ασυνήθης συμβολισμός) ως το διανυσματικό πεδίο που ικανοποιεί τη σχέση:*

$$\langle \nabla f, X \rangle_p = X(p)(f), \text{ για κάθε διανυσματικό πεδίο } X$$

Επίσης ορίζουμε τον τελεστή Laplace-Beltrami:

$$\Delta_g f = \nabla^g \bullet \nabla f = \mathrm{Tr}\ \nabla_\Diamond(\nabla f) = \mathrm{Tr}(X \mapsto \nabla_X \nabla f) = \sum_k \langle \nabla_{E_k} \nabla f, E_k \rangle$$

(ή απλά Δf, εάν η μετρική υπονοείται).

Μάλιστα, ο τελεστής Laplace-Beltrami ορίζεται και με λιγότερη ομαλότητα. Με αυτόν τον ορισμό μπορούμε να κατανοήσουμε τους όρους τις εξίσωσης $\Delta u - W_u(u) = 0$ σε μία πολλαπλότητα Riemann.

Φυσικά δεν πρέπει να ξεχνάμε τον στόχο μας, που είναι ο ορισμός της καμπυλότητας Ricci. Η καμπυλότητα Ricci ήταν ένα από τα βασικά μαθηματικά εργαλεία που οδήγησε τελικά στη λύση της εικασίας του Poincaré[1], από τη δουλειά των Hamilton και Perelman.

Δεν θα αναλύσουμε τη διαισθητική και γεωμετρική ερμηνεία του τελεστή Ricci. Θα αναφέρουμε μονάχα ότι η ιδέα είναι η περιγραφή της παραμόρφωσης ενός σχήματος, καθώς κινείται σε γεωδαισιακές.

Ορισμός 3.21 (Καμπυλότητα Ricci)**.** *Έστω $(\mathscr{M}, g)$ μία πολλαπλότητα Riemann. Ορίζουμε τη καμπυλότητα Ricci:*

$$\begin{aligned} \mathrm{Ric}(Y, Z) &= \mathrm{Tr}\big(\mathrm{R}(\Diamond, Y)Z\big) = \mathrm{Tr}\big(X \mapsto \mathrm{R}(X, Y)Z\big) \\ &= \sum_k \langle \mathrm{R}(E_k, Y)Z, E_k \rangle \end{aligned}$$

[1] Η εικασία, που πλέον είναι θεώρημα, είναι σε γενικές γραμμές η εξής: Κάθε τοπολογική πολλαπλότητα διάστασης 3 χωρίς σύνορο, που είναι συμπαγής, συνεκτική και έχει τετριμμένη θεμελιώδη ομάδα, είναι ομοιομορφική με την $\mathbb{S}^2$.

Κεφάλαιο 4

Ελαχιστικές (υπερ-) επιφάνειες

4.1 Η πρώτη μεταβολή του εμβαδού

Οι ελαχιστικές υπερεπιφάνειες είναι στην ουσία επιφάνειες που τοπικά ελαχιστοποιούν το εμβαδόν. Σε αυτήν την παράγραφο θα μελετήσουμε τα κρίσιμα σημεία του συναρτησιακού του εμβαδού/όγκου και θα δώσουμε τον ορισμό των ελαχιστικών υπερεπιφανειών χρησιμοποιώντας τη μέση καμπυλότητα. Θα δούμε, δηλαδή, ότι είναι λογικό ελαχιστική υπερεπιφάνεια να σημαίνει εμφυτευμένη υποπολλαπλότητα διάστασης n και συνδιάστασης N με μέση καμπυλότητα $H \equiv 0$.

Ας υποθέσουμε ότι $(\Sigma, g) \subseteq (\mathscr{M}, \overline{g})$ είναι μία εμφυτευμένη υποπολλαπλότητα διάστασης n και συνδιάστασης N. Μεταβάλλοντας λίγο την Σ, μέσω κάποιας ροής Θ, θέλουμε το εμβαδόν/όγκος να μην αυξάνεται. Θέλουμε, δηλαδή:

$$\mathscr{H}^n(\Sigma) \leqslant \mathscr{H}^n\big(\Theta_t(\Sigma)\big)$$

το οποίο σημαίνει ότι το συναρτησιακό του όγκου έχει τοπικό ελάχιστο. Δηλαδή:

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \mathscr{H}^n\big(\Theta_t(\Sigma)\big) = 0$$

Η παραπάνω ποσότητα συνηθίζεται να καλείται πρώτη μεταβολή του εμβαδού/όγκου.

Η έννοια της (πρώτης) μεταβολής είναι συνήθης σε προβλήματα λογισμού μεταβολών. Το γενικότερο πλαίσιο έχει ως εξής: Έστω ότι έχουμε ένα συναρτησιακό J, από έναν χώρο (συνήθως συναρτήσεων) στο $\mathbb{R}$. Μεταβάλλοντας ως προς κάποια κατεύθυνση τ τα ορίσματα του J, παίρνουμε τις διάφορες συναρτήσεις του t:

$$J\big(\tau_t(f)\big)$$

Εάν το J έχει τοπικό ακρότατο στο f_0, τότε για κάθε μεταβολή τ του f_0:

$$\delta J(\tau) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} J\big(\tau_t(f_0)\big) = 0$$

Με το επόμενο θεώρημα θα συσχετίσουμε την πρώτη μεταβολή του εμβαδού/όγκου με τη μέση καμπυλότητα. Θα χρειαστούμε μόνο, πριν τη διατύπωσή του, την έννοια της εφαπτόμενης απόκλισης. Με τον συμβολισμό $\nabla^{\overline{g}} = \overline{\nabla}$, εάν X είναι ένα διανυσματικό πεδίο κατά μήκος της Σ (αλλά όχι αναγκαστικά εφαπτόμενο στην Σ), ορίζουμε:

$$\overline{\nabla}^{\top}\bullet X = \sum_{E_k \| \Sigma} \langle \overline{\nabla}_{E_k} X, E_k \rangle$$

όπου το σύμβολο $E_k \parallel \Sigma$ σημαίνει διανυσματικά πεδία που παράγουν τους εφαπτόμενους χώρους της Σ και είναι παράλληλα της Σ στα σημεία "επαφής" με τη Σ.

Θεώρημα 4.1 (Η πρώτη μεταβολή του εμβαδού). *Έστω $(\Sigma, g) \subseteq (\mathscr{M}, \overline{g})$ μία υπερεπιφάνεια χωρίς σύνορο. Θεωρούμε Θ μία ροή στην $\mathscr{M}$ με $X = \Theta^{\alpha} \in C_c^{\infty}(\mathscr{M}; T\mathscr{M})$, και $\Theta_t(\Sigma)$ τη μεταβολή της Σ μέσω αυτής της ροής. Για την πρώτη μεταβολή του συναρτησιακού του εμβαδού/όγκου $\delta\mathscr{H}^n(\Theta) = d/dt|_{t=0}\mathscr{H}^n(\Theta_t)$ από την κατεύθυνση της Θ ισχύουν οι σχέσεις:*

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \mathscr{H}^n\big(\Theta_t(\Sigma)\big) = \int_{\Sigma} \overline{\nabla}^{\top}\bullet X \, dS = -n \int_{\Sigma} \langle X, H \rangle \, dS$$

Απόδειξη. Θα δώσουμε την απόδειξη αυτού του θεωρήματος, παραλείποντας μερικές λεπτομέρειες. Σε όλα τα παρακάτω ασχολούμαστε μονάχα με την περίπτωση του ενός χάρτη, καθώς για τους περισσότερους τα επιχειρήματα είναι ανάλογα.

Βήμα I: Θα δείξουμε την ισότητα:

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \mathscr{H}^n\big(\Theta_t(\Sigma)\big) = \int_{\Sigma} \overline{\nabla}^{\top}\bullet X \, dS$$

Εδώ θα υπολογίσουμε τους συντελεστές της μετρικής ως προς τα εφαπτόμενα προς την Σ (και ορθογώνια μταξύ τους) διανυσματικά πεδία. Οπότε, μπορούμε να υποθέσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $g_{i,j} = \delta_{i,j}$ και $\nabla_{E_k} E_k = 0$ στη Σ.

Το στοιχείο του εμβαδού/όγκου της $\Theta_t(\Sigma)$, σε συνάρτηση με το εμβαδόν της Σ, γίνεται:

$$dS^t = \frac{\sqrt{\det(g^t_{i,j})_{i,j}}}{\sqrt{\det(g_{i,j})_{i,j}}} dS$$

όπου g^t είναι η μετρική Riemann στη μεταβολή $\Theta_t(\Sigma)$. Επομένως, εάν θέλουμε να υπολογίσουμε την πρώτη μεταβολή, πρέπει να υπολογίσουμε την παράγωγο:

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \frac{\sqrt{\det(g^t_{i,j})_{i,j}}}{\sqrt{\det(g_{i,j})_{i,j}}}$$

η οποία στην περίπτωσή μας (αφού $g_{i,j} = \delta_{i,j}$, $g^0 = g$) γίνεται:

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \sqrt{\det(g^t_{i,j})_{i,j}} = \frac{1}{2\sqrt{\det(g^0_{i,j})_{i,j}}} \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \det(g^t_{i,j})_{i,j} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \det(g^t_{i,j})_{i,j}$$

Αναπτύσσοντας την ορίζουσα:

$$\det(g^t_{i,j})_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} g^t_{1,k} \det(g^t_{i,j})_{i\neq 1, j\neq k}$$

παίρνουμε με παραγώγιση:

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \det(g^t_{i,j})_{i,j} = \cdots = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} g^t_{1,1} + \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \det(g^t_{i,j})_{i,j} = \cdots = \sum_{k=1}^{n} \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} g^t_{k,k}$$

Επειδή τώρα:

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} g^t_{k,k} = X\langle E_k, E_k\rangle = 2\langle \overline{\nabla}_X E_k, E_k\rangle = 2\langle \overline{\nabla}_{E_k} X, E_k\rangle$$

έπεται:

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \det(g^t_{i,j})_{i,j} = \sum_{E_k \| \Sigma} \langle \overline{\nabla}_{E_k} X, E_k\rangle = \overline{\nabla}^{\top} \bullet X$$

δηλαδή:

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \mathscr{H}^n\big(\Theta_t(\Sigma)\big) = \int_\Sigma \overline{\nabla}^{\top} \bullet X \; dS$$

Βήμα II: θα δείξουμε την ισότητα:

$$\int_\Sigma \overline{\nabla}^{\top} \bullet X \; dS = -n \int_\Sigma \langle X, H\rangle \; dS$$

Εάν γράψουμε $X = X^{\top} + X^{\perp}$, όπου το $X^{\top}$ είναι παράλληλο στην Σ και το $X^{\perp}$ κάθετο, τότε:

$$\int_\Sigma \overline{\nabla}^{\top} \bullet X^{\top} \; dS = 0$$

και κατά συνέπεια:

$$\int_\Sigma \overline{\nabla}^{\top} \bullet X \; dS = \int_\Sigma \overline{\nabla}^{\top} \bullet X^{\perp} \; dS$$

Θεωρούμε $\{\widehat{n}_k\}_{k=1}^N$ μία οικογένεια μοναδιαίων κάθετων διανυσματικών πεδίων στη Σ, που παράγει τους κάθετους χώρους. Γράφουμε διαδοχικά τα εξής:

$$\begin{aligned}
\overline{\nabla}^{\top} \bullet X^{\perp} &= \overline{\nabla}^{\top} \bullet \left(\sum_k \langle X, \widehat{n}_k\rangle \widehat{n}_k \right) \\
&= \sum_\lambda \left\langle \overline{\nabla}_{E_\lambda} \sum_k \langle X, \widehat{n}_k\rangle \widehat{n}_k, E_\lambda \right\rangle \\
&= \sum_{k,\lambda} \big\langle E_\lambda \langle X, \widehat{n}_k\rangle \widehat{n}_k + \langle X, \widehat{n}_k\rangle \overline{\nabla}_{E_\lambda} \widehat{n}_k, E_\lambda \big\rangle \\
&= \sum_{k,\lambda} \langle X, \widehat{n}_k\rangle \langle \overline{\nabla}_{E_\lambda} \widehat{n}_k, E_\lambda\rangle
\end{aligned}$$

Επειδή όμως:

$$\langle \overline{\nabla}_{E_\lambda} \widehat{n}_k, E_\lambda\rangle = E_\lambda \langle \widehat{n}_k, E_\lambda\rangle - \langle \widehat{n}_k, \overline{\nabla}_{E_\lambda} E_\lambda\rangle = -\langle \widehat{n}_k, \overline{\nabla}_{E_\lambda} E_\lambda\rangle \widehat{n}_k$$

έχουμε:

$$\begin{aligned}
\overline{\nabla}^{\top} \bullet X^{\perp} &= -\sum_{k,\lambda} \langle X, \widehat{n}_k\rangle \langle \overline{\nabla}_{E_\lambda} E_\lambda, \widehat{n}_k\rangle \\
&= -\sum_k \langle X, \widehat{n}_k\rangle \left\langle \sum_\lambda \overline{\nabla}_{E_\lambda} E_\lambda, \widehat{n}_k \right\rangle \\
&= -\sum_k \left\langle \langle X, \widehat{n}_k\rangle \widehat{n}_k, \left\langle \sum_\lambda \overline{\nabla}_{E_\lambda} E_\lambda, \widehat{n}_k \right\rangle \widehat{n}_k \right\rangle \\
&= -n\langle X, H\rangle
\end{aligned}$$

Έτσι λοιπόν:

$$\int_\Sigma \overline{\nabla}^{\top} \bullet X \; dS = -n \int_\Sigma \langle X, H\rangle \; dS$$

□

Από το Θεώρημα 4.1 έχουμε ως πόρισμα την εξής πρόταση, που συνδέει την τοπική ελαχιστοποίηση του εμβαδού/όγκου με τη μέση καμπυλότητα.

Πρόταση 4.1 (Τοπική ελαχιστοποίηση και μέση καμπυλότητα)**.** *Έστω $(\Sigma, g) \subseteq (\mathscr{M}, \overline{g})$ μία υπερεπιφάνεια χωρίς σύνορο. Θεωρούμε τις εξής τρεις συνθήκες:*

i. Για κάθε ανοικτό $U \Subset \mathscr{M}$, $U \cap \Sigma \Subset \Sigma$ και για κάθε μεταβολή $\mathscr{N}$ με $U \cap \mathscr{N} \Subset \mathscr{N}$, $\Sigma \backslash U = \mathscr{N} \backslash U$, έχουμε:

$$\mathscr{H}^n(\Sigma) \leqslant \mathscr{H}^n(\mathscr{N})$$

Δηλαδή, εάν μεταβάλλουμε μία μικρή περιοχή $U \cap \Sigma$ της Σ, το εμβαδόν/ο όγκος πάντα αυξάνεται.

ii. Ισχύει:

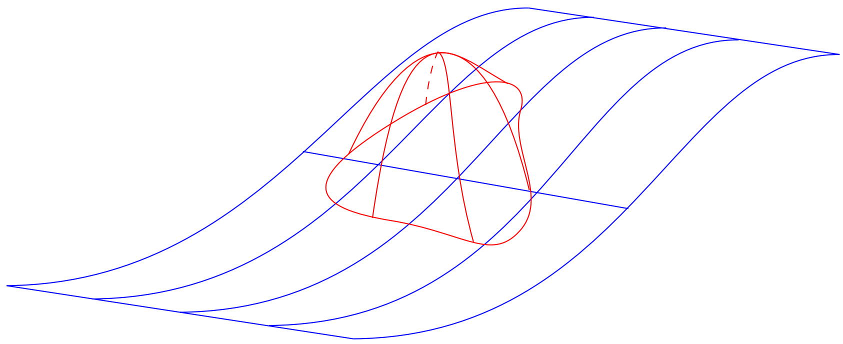
$$\int_\Sigma \overline{\nabla}^\top \bullet X \, dS = 0$$

για κάθε μεταβολή Θ της Σ με $X = \Theta^\alpha \in C_c^\infty(\mathscr{M}; T\mathscr{M})$.

iii. Στην Σ έχουμε $H \equiv 0$.

iv. Το συναρτησιακό το εμβαδού έχει κρίσιμο σημείο στο Σ.

Ισχύουν τότε οι συνεπαγωγές i. $\Rightarrow$ ii. $\Leftrightarrow$ iii. $\Leftrightarrow$ iv.



Ορισμός 4.1 (Ελαχιστικές υπερεπιφάνειες)**.** *Έστω (Σ, g) μία εμφυτευμένη υποπολλαπλότητα στην $(\mathscr{M}, \overline{g})$. Θα λέμε ότι η Σ είναι ελαχιστική υπερεπιφάνεια εάν $H \equiv 0$ στο $\Sigma \backslash \mathrm{bd}\Sigma$. Σύμφωνα με την Πρόταση 4.1, οι ελαχιστικές υπερεπιφάνειες είναι κρίσιμα σημεία του συναρτησιακού του εμβαδού/όγκου.*

4.2 Ολομορφική αναπαράσταση και μερικά παραδείγματα ελαχιστικών επιφανειών

Από εδώ και στο εξής θα περιορίσουμε τη μελέτη μας σε επιφάνειες Σ (όχι κατ' ανάγκη εμφυτευμένες) στον $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, ή ιδιαιτέρως στον $\mathbb{R}^3$, που έχουν παραμετρική μορφή. Μας ενδιαφέρουν δηλαδή επιφάνειες της μορφής $\Sigma = \{f(x,y)\}$, $(x,y) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^2$.

Θα δείξουμε ότι υπάρχει μία σχέση μεταξύ των παραμετρικών ελαχιστικών επιφανειών και των πραγματικών/φανταστικών μερών κάποιων ολόμορφων συναρτήσεων. Πρώτα χρειαζόμαστε την ακόλουθη τεχνική πρόταση, που μπορεί να βρεθεί με την απαραίτητη λεπτομέρεια στο [Sc15].

Σημείωση: Η παρακάτω μορφή της Laplace-ιανής είναι η αναμενόμενη γενίκευση, κατά συντεταγμένες.

Πρόταση 4.2. *Έστω $(\Sigma, g) = (\{f(x,y)\}, g)$, $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$, μία παραμετρική (εμβαπτισμένη) επιφάνεια στον $\mathbb{R}^n$. Από τη μετρική της Σ προκύπτει με φυσιολογικό τρόπο μία μετρική στο Ω, έστω γ. Τότε:*

i. Έχουμε:

$$\Delta_\gamma f = nH$$

ii. Ειδικότερα, η Σ είναι παραμετρική ελαχιστική επιφάνεια εάν και μόνο αν $\Delta_\gamma f \equiv 0$.

iii. Έχουμε:

$$\Delta f = n\sqrt{\det(g_{i,j})_{i,j}}H$$

iv. Ειδικότερα, η Σ είναι παραμετρική ελαχιστική επιφάνεια εάν και μόνο αν $\Delta f \equiv 0$.

Επίσης, υπενθυμίζουμε ότι μία παραμέτριση f της Σ λέγεται σύμμορφη εάν:

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right| = \left|\frac{\partial f}{\partial x_j}\right| \text{ και } \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_i}, \frac{\partial f}{\partial x_j} \right\rangle = 0,\ i \neq j$$

Θεώρημα 4.2 (Ολομορφική αναπαράσταση). *Έστω $\Sigma = \{f(x,y)\}$ μία σύμμορφη παραμετρική επιφάνεια στον $\mathbb{R}^n$ με $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$, και απλά συνεκτικό $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$. Η Σ είναι παραμετρική ελαχιστική επιφάνεια εάν και μόνο αν $f = \Re h$ για κάποια μη-σταθερή ολόμορφη συνάρτηση $h : \Omega \to \mathbb{C}^n$ με:*

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial \Re h_k}{\partial x} + i \frac{\partial \Im h_k}{\partial x} \right)^2 \equiv 0 \text{ στο } \Omega$$

Επιπλέον, η $\Sigma^* = \{\Im h(x,y)\}$ είναι παραμετρική ελαχιστική επιφάνεια, που λέγεται συζυγής της Σ.

Απόδειξη. Η απόδειξη θα γίνει σε βήματα.

Βήμα I: Θα δείξουμε αρχικά ότι:

$$\Delta f \equiv 0 \text{ στο } \Omega \Leftrightarrow f = \Re h,\ h : \Omega \to \mathbb{C}^n \text{ ολόμορφη.} \tag{4.1}$$

($\Rightarrow$) Εδώ ουσιαστικά χρειάζεται, δεδομένης της f, να βρεθεί συνάρτηση g ούτως ώστε οι εξισώσεις Cauchy-Riemann να αληθεύουν. Δηλαδή, χρειάζεται:

$$\frac{\partial g_k}{\partial x} = -\frac{\partial f_k}{\partial y}$$
$$\frac{\partial g_k}{\partial y} = \frac{\partial f_k}{\partial x}$$

Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει διανυσματικό πεδίο $G_k = (g_k, g_k)$ με κλίση:

$$\nabla G_k = \left(-\frac{\partial f_k}{\partial y}, \frac{\partial f_k}{\partial x} \right)$$

δηλαδή υπάρχει το δυναμικό του $F_k = (-\partial f_k/\partial y, \partial f_k/\partial x)$. Άρα, για κάθε απλά συνεκτικό σύνολο B:

$$0 = \int_{\partial B} \langle \nabla G_k, d\ell \rangle = \int_{\partial B} -\frac{\partial f_k}{\partial y}\, dx + \frac{\partial f_k}{\partial x}\, dy = \int_B \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f_k}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial f_k}{\partial y}\right) dA = \int_B \Delta f_k\, dA$$

(από το θεώρημα του Green). Οι παραπάνω υπολογισμοί δείχνουν ότι μία ικανή και αναγκαία συνθήκη για την ύπαρξη της g είναι η $\Delta f \equiv 0$.

($\Leftarrow$) Η άλλη κατεύθυνση μπορεί να αποδειχθεί με τις εξισώσεις Cauchy-Riemann.

Βήμα ΙΙ: Έπειτα θα δείξουμε ότι αν $h = f + ig$, με την h να είναι ολόμορφη, η f είναι σύμμορφη. Έχουμε:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial \Re h_k}{\partial x} + i\frac{\partial \Im h_k}{\partial x}\right)^2 \equiv 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial f_k}{\partial x} + i\frac{\partial g_k}{\partial x}\right)^2 \equiv 0 \\
\Leftrightarrow \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|^2 - \left|\frac{\partial g}{\partial x}\right|^2 + 2i \cdot \left\langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial x}\right\rangle \equiv 0 \\
\Leftrightarrow \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| = \left|\frac{\partial g}{\partial x}\right| \text{ και } \left\langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial x}\right\rangle = 0 \\
\Leftrightarrow \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| = \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \text{ και } \left\langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right\rangle = 0
\end{aligned}$$

Η τελευταία συνθήκη είναι ακριβώς αυτή που εξασφαλίζει ότι η f είναι σύμμορφη παραμέτρηση.

Τέλος, η $\Sigma^* = \{\Im h(x, y)\}$ είναι κι αυτή σύμμορφη παραμετρική ελαχιστική επιφάνεια, αφού $\Im h = \Re(-ih)$. □

Με το Θεώρημα 4.2 μπορούμε να δώσουμε μερικά παραδείγματα σύμμορφων παραμετρικών ελαχιστικών επιφανειών.

Το πρώτο παράδειγμα είναι το κατενοειδές (ή αλυσοειδής επιφάνεια). Εάν:

$$h(z) = \alpha \begin{pmatrix} \cosh z \\ i \cdot \sinh z \\ z \end{pmatrix}, \ \alpha \in \mathbb{R}$$

τότε:

$$\sum_{k=1}^{3}\left(\frac{\partial \Re h_k}{\partial x} + i\frac{\partial \Im h_k}{\partial x}\right)^2 \equiv 0$$

κι άρα η $f = \Re h$ είναι σύμμορφη παραμετρική ελαχιστική επιφάνεια. Μάλιστα εάν χρησιμοποιήσουμε τις σχέσεις:

$$\begin{aligned}
\cosh(x + iy) = \cosh x \cos y + i \sinh x \sin y \\
\sinh(x + iy) = \sinh x \cos y + i \cosh x \sin y
\end{aligned}$$

προκύπτει η παραμέτρηση:

$$f(x, y) = \alpha \begin{pmatrix} \cosh x \cos y \\ -\cosh x \sin y \\ x \end{pmatrix}$$

Το δεύτερο παράδειγμα είναι το συζυγές του πρώτου, δηλαδή το ελικοειδές. Η $g = \Im h$ είναι σύμμορφη παραμετρική ελαχιστική επιφάνεια, κι όπως πριν μπορούμε να δείξουμε ότι:

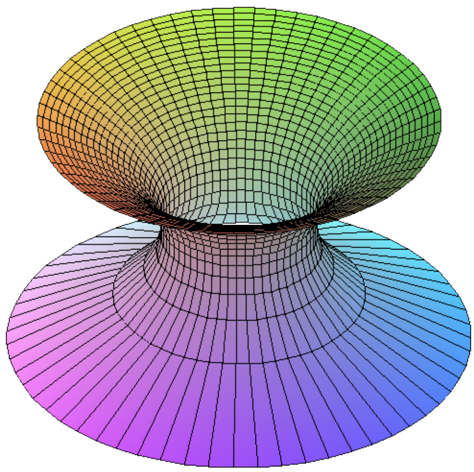
$$g(x, y) = \alpha \begin{pmatrix} \sinh x \sin y \\ \sinh x \cos y \\ y \end{pmatrix}$$

Τέλος, ένα ανεξάρτητο παράδειγμα (που είναι ενδιαφέρον λόγω της ύπαρξης αυτοτομών και της μη-προσανατολισιμότητας) είναι η επιφάνεια του Henneberg. Εδώ έχουμε:

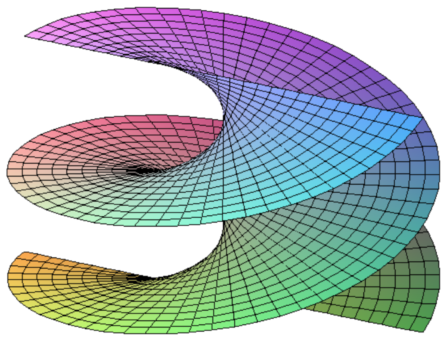
$$h(z) = \begin{pmatrix} -1 + \cosh(2z) \\ -i\big(\cosh z + 1\cosh(3z)/3\big) \\ -\sinh z + \sinh(3z)/3 \end{pmatrix}$$

και $f = \Re h$. Σε πραγματικές συντεταγμένες:

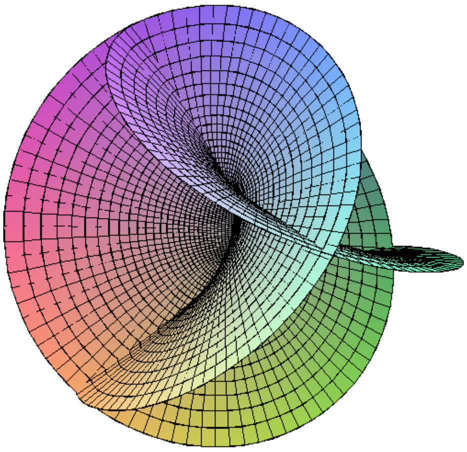
$$f(x,y) = \begin{pmatrix} -1 + \cosh(2x)\cos(2y) \\ \sinh x \sin y + \sinh(3x)\sin(3y)/3 \\ -\sinh x \cos y + \sinh(3x)\cos(3y)/3 \end{pmatrix}$$



Εικόνα 4.1: Το κατενοειδές



Εικόνα 4.2: Το ελικοειδές



Εικόνα 4.3: Η επιφάνεια του Henneberg

Κεφάλαιο 5

Ασθενείς και πολύ ασθενείς έννοιες διαφορισιμότητας

5.1 Ασθενείς παράγωγοι

Στη συνέχεια θα μελετήσουμε μία έννοια ασθενούς παραγώγισης, με την οποία θα διευρύνουμε το σύνολο των "παραγωγίσιμων" συναρτήσεων. Σημειώνουμε ότι σε όλα τα παρακάτω, οι πολλαπλότητες Riemann θα συνοδεύονται με το επιφανειακό τους μέτρο $d\sigma$, και θα είναι πλήρεις. Σε περίπτωση που υπάρχει εμφυτευμένη υποπολλαπλότητα, το επιφανειακό της μέτρο θα συμβολίζεται με dS. Πληροφορίες σχετικά με την ολοκλήρωση στις πολλαπλότητες (και γιατί η δομή Riemann είναι αναγκαία) μπορούν να βρεθούν στα [Bo86], [Fr24].

Έστω $(\mathscr{M}, g)$ μία πολλαπλότητα Riemann και $\Omega \subseteq \mathscr{M}$ ανοικτό σύνολο. Θεωρούμε μία συνάρτηση $f : \mathscr{M} \to \mathbb{R}$. Η γενίκευση που θα δώσουμε για τον ορισμό των παραγώγων στηρίζεται στο θεώρημα της απόκλισης. Για κάθε $\varphi \in C_c^\infty(\Omega;\mathbb{R})$, εάν υπάρχει αρκετή ομαλότητα στην f, έχουμε ότι:

$$\int_\Omega \nabla\bullet(f\varphi E_i)\, d\sigma = \int_{\partial\Omega} \langle f\varphi E_i, \widehat{n}\rangle\, dS = \int_{\partial\Omega} f\varphi\widehat{n}_i\, dS$$

κι επειδή $\varphi \in C_c^\infty(\Omega;\mathbb{R})$:

$$\int_\Omega \nabla\bullet(f\varphi E_i)\, d\sigma = \int_\Omega E_i(f)\varphi\, d\sigma + \int_\Omega fE_i(\varphi)\, d\sigma = 0$$

δηλαδή:

$$\int_\Omega E_i(x)(f)\varphi(x)\, d\sigma(x) = -\int_\Omega f(x)E_i(x)(\varphi)\, d\sigma(x) \tag{5.1}$$

Η ιδέα φυσικά της εξίσωσης (5.1) είναι η μεταφορά της παραγώγου από την f στη φ. Αυτή η σχέση μπορεί να οδηγήσει στον ορισμό μίας ασθενούς έννοιας παραγώγισης για συναρτήσεις $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$.

Ορισμός 5.1 (Ασθενείς παράγωγοι και χώροι Sobolev). *Έστω $(\mathscr{M}, g)$ μία πολλαπλότητα Riemann και $\Omega \subseteq \mathscr{M}$ ανοικτό σύνολο. Θεωρούμε μία συνάρτηση $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. Λέμε ότι η f έχει ασθενή παράγωγο εάν για κάθε $\varphi \in C_c^\infty(\Omega;\mathbb{R})$ ισχύει:*

$$\int_\Omega V_{i,f}\varphi\, d\sigma = -\int_\Omega fE_i(\varphi)\, d\sigma$$

για κάποια συνάρτηση $V_{i,f} \in L^1_{\text{loc}}(\Omega;\mathbb{R})$. Το σύνολο των $L^p(\Omega)-$συναρτήσεων που έχουν $L^p(\Omega)$ ασθενείς παράγωγους λέγεται χώρος Sobolev$-(1,p)$ και συμβολίζεται με $W^{1,p}(\Omega)$.

Σημείωση: Ιδίως στην περίπτωση όπου $p=2$, συμβολίζουμε $W^{1,2}(\Omega)=H^1(\Omega)$.

Μία εύκολη παρατήρηση είναι ότι η έννοια της ασθενούς παραγώγου είναι μοναδική. Μία όχι τόσο εύκολη παρατήρηση είναι ότι υπάρχουν εξαιρετικά ιδιάζουσες συναρτήσεις (για παράδειγμα, με άπειρους αριθμήσιμους πυκνούς πόλους) που είναι ασθενώς παραγωγίσιμες [Ev10].

5.2 Ασθενής κλίση και κατανομές

Ο ορισμός των χώρων Sobolev θα μπορούσε να δοθεί και με μία έννοια ασθενούς κλίσης. Η ιδέα πίσω από τον ορισμό είναι και πάλι το θεώρημα της απόκλισης: Εάν η f είναι μία αρκετά ομαλή συνάρτηση, τότε για κάθε διανυσματικό πεδίο $X \in C_c^\infty(\Omega; T\mathscr{M})$:

$$\int_\Omega \nabla \bullet (fX)\, d\sigma = \int_{\partial\Omega} f\langle X, \widehat{n}\rangle\, dS = 0$$

Επιπλέον:

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \nabla \bullet (fX)\, d\sigma &= \int_\Omega \sum_k \langle \nabla_{E_k}(fX), E_k\rangle\, d\sigma \\
&= \int_\Omega \sum_k f\langle \nabla_{E_k} X, E_k\rangle + \sum_k \langle E_k(f)X, E_k\rangle\, d\sigma \\
&= \int_\Omega f\nabla\bullet X\, d\sigma + \int_\Omega \sum_k \langle X, E_k(f)E_k\rangle\, d\sigma
\end{aligned}$$

κι από τον ορισμό της κλίσης, $\langle \nabla f, E_k\rangle = E_k(f)$, οπότε:

$$\begin{aligned}
\int_\Omega f\nabla\bullet (fX)\, d\sigma &= \int_\Omega f\nabla\bullet X\, d\sigma + \int_\Omega \sum_k \Big\langle X, \langle \nabla f, E_k\rangle E_k\Big\rangle\, d\sigma \\
&= \int_\Omega f\nabla\bullet X\, d\sigma + \int_\Omega \langle X, \nabla f\rangle\, d\sigma
\end{aligned}$$

Κατά συνέπεια:

$$\int_\Omega \langle \nabla f, X\rangle\, d\sigma = -\int_\Omega f\nabla\bullet X\, d\sigma$$

Μπορούμε, όπως πριν, να ορίσουμε την έννοια της ασθενούς κλίσης ως το (όχι κατ' ανάγκη ομαλό) διανυσματικό πεδίο Df για το οποίο:

$$\int_\Omega \langle Df, X\rangle\, d\sigma = -\int_\Omega f\nabla\bullet X\, d\sigma, \text{ για κάθε } X \in C_c^\infty(\Omega; T\mathscr{M}) \tag{5.2}$$

Μία ακόμα ασθενέστερη έννοια κλίσης είναι η κλίση με την έννοια της κατανομής. Ένας τρόπος η σχέση (5.2) να γενικευτεί ακόμα περισσότερο είναι να παρατηρήσουμε ότι η $\int_\Omega \langle Df, X\rangle\, d\sigma$ είναι στην ουσία ένα συναρτησοειδές, από τον χώρο των ομαλών διανυσματικών πεδίων με συμπαγή φορέα, προς το $\mathbb{R}$. Δηλαδή, υπάρχει ένα συναρτησοειδές[1] $T_{Df} \in C_c^\infty(\Omega; T\mathscr{M})'$ ούτως ώστε:

$$T_{Df}(X) = -\int_\Omega f\nabla\bullet X\, d\sigma,\ \ X \in C_c^\infty(\Omega; T\mathscr{M})$$

Με αυτές τις ιδέες, ο ακόλουθος ορισμός είναι λογικός.

[1] Με τόνο συμβολίζεται ο δυϊκός χώρος στη θεωρία κατανομών.

Ορισμός 5.2 (Κλίση με την έννοια της κατανομής). *Έστω $(\mathscr{M}, g)$ μία πολλαπλότητα Riemann και Ω ένα ανοικτό υποσύνολό της. Έστω επίσης $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. Λέμε ότι η f έχει κλίση με την έννοια της κατανομής εάν υπάρχει συναρτησοειδές $T_{Df} \in C_c^\infty(\Omega; T\mathscr{M})'$ ούτως ώστε για κάθε $X \in C_c^\infty(\Omega; T\mathscr{M})$ να έχουμε:*

$$T_{Df}(X) = -\int_\Omega f \nabla \bullet X \, d\sigma$$

Συμβολίζουμε καταχρηστικά:

$$T_{Df}(X) = \int_\Omega \langle Df, X \rangle \, d\sigma$$

απλώς για να υπάρχει ομοιότητα με την εξίσωση (5.2). Κατά τ' άλλα η ισότητα με ολοκλήρωμα πιθανότατα δεν έχει νόημα και δεν μπορεί να επιτευχθεί.

Σημειώνουμε, τέλος, ότι υπάρχει μία έννοια εγκλεισμού $C_c^\infty(\Omega; T\mathscr{M}) \subseteq C_c^\infty(\Omega; T\mathscr{M})'$ (ή ορθότερα $C_c^\infty(\Omega; T\mathscr{M}) \hookrightarrow C_c^\infty(\Omega; T\mathscr{M})'$), με τον εξής τρόπο: Κάθε $Y \in C_c^\infty(\Omega; T\mathscr{M})$ αντιστοιχεί στο συναρτησοειδές:

$$\int_\Omega \langle \Diamond, Y \rangle \, d\sigma : C_c^\infty(\Omega; T\mathscr{M}) \to \mathbb{R}$$

Κεφάλαιο 6

Η ενέργεια της Allen-Cahn και σύνολα πεπερασμένης περιμέτρου

6.1 Φραγμένη κύμανση και περίμετρος

Για τη $\Gamma-$σύγκλιση του συναρτησιακού της περιμέτρου στο συναρτησιακό της ενέργειας, αλλά ακόμη και για τον ορισμό της περιμέτρου χρειαζόμαστε την έννοια της κύμανσης

Στις πραγματικές συναρτήσεις η έννοια της κύμανσης σχετίζεται με την διαδρομή που διανύει το γράφημα μίας συνάρτησης στον κατακόρυφο άξονα. Δηλαδή, η ολική κύμανση σχετίζεται με την ποσότητα:

$$\int \left| \frac{df}{dx} \right| \, dx$$

αφού, πολύ πρόχειρα, η ποσότητα $|df| = |df/dx| \cdot dx$ είναι το μέτρο του κατακόρυφου άξονα. Για την γενική περίπτωση, η αντίστοιχη ποσότητα είναι η:

$$\int_{\Omega} |\nabla f| \, d\sigma$$

Εμείς θα ασχοληθούμε με την έννοια της περιμέτρου σε ένα πλαίσιο ασθενούς διαφορισιμότητας, μέσω της κλίσης με την έννοια της κατανομής.

Υπενθυμίζουμε ότι ένα μέτρο Borel μ λέγεται μέτρο Radon εάν:

i. Είναι τοπικά πεπερασμένο.

ii. Είναι εσωτερικά κανονικό, δηλαδή για κάθε ανοικτό U:

$$\mu(U) = \sup\{\mu(K) \mid K \subseteq U \text{ συμπαγές}\}$$

Ορισμός 6.1 (Συναρτήσεις φραγμένης κύμανσης)**.** *Έστω $(\mathscr{M}, g)$ μία πολλαπλότητα Riemann και $\Omega \subseteq \mathscr{M}$ ένα ανοικτό υποσύνολο. Έστω μία συνάρτηση $u \in L^1(\Omega)$ που η κλίση, με την έννοια της κατανομής, αναπαρίσταται από ένα $T\mathscr{M}-$μέτρο Radon, με την εξής έννοια: Υπάρχει $T\mathscr{M}-$μέτρο Radon, που το συμβολίζουμε κι αυτό με Du, ώστε για κάθε $X \in C_c^\infty(\Omega; T\mathscr{M})$:*

$$\int_{\Omega} \langle X, Du \rangle = -\int_{\Omega} u \nabla \cdot X \, d\sigma$$

Την ποσότητα $\langle X, Du\rangle$ κανείς μπορεί να την φαντάζεται ως ένα άθροισμα μέτρων. Εάν σε κάθε κατεύθυνση υπάρχει ένα μέτρο Radon $d\mu_k$, δηλαδή:

$$Du = \sum_k d\mu_k E_k$$

τότε:

$$\int_\Omega \langle X, Du\rangle = \sum_k \int_\Omega X^k d\mu_k$$

Εάν ολική κύμαση, δηλαδή η ποσότητα:

$$\int_\Omega |Du| = \sup\left\{\int_\Omega u\nabla\bullet X \; d\sigma \;\middle|\; X \in C_c^\infty(\Omega; T\mathscr{M}),\ ||X||_{L^\infty} \leqslant 1\right\}$$

είναι πεπερασμένη, λέμε ότι η u είναι φραγμένης κύμανσης (ο συμβολισμός του ολοκληρώματος δεν είναι τυχαίος). Το σύνολο των συναρτήσεων φραγμένης κύμανσης το συμβολίζουμε με $\mathrm{BV}(\Omega)$. Η νόρμα του χώρου είναι η:

$$||u||_{\mathrm{BV}(\Omega)} = ||u||_{L^1(\Omega)} + \int_\Omega |Du|$$

Για τα διανυσματικά μέτρα υπάρχει ολόκληρη θεωρία, αλλά εμείς θα σταθούμε μόνο στην εποπτεία και τη διαίσθηση.

Επίσης, παρατηρούμε ότι η ποσότητα $|Du|$ που ορίζεται από την:

$$\int_V |Du| = \sup\left\{\int_V u\nabla\bullet X \; d\sigma \;\middle|\; X \in C_c^\infty(V; T\mathscr{M}),\ ||X||_{L^\infty} \leqslant 1\right\},\ V \subseteq \Omega$$

είναι ένα μέτρο Radon, πράγμα που δικαιολογεί τον συμβολισμό του ολοκληρώματος.

Η διαίσθηση για τον ορισμό της περιμέτρου ενός συνόλου έχει ως εξής: Ας υποθέσουμε ότι έχουμε έναν δίσκο και χρειάζεται να υπολογίσουμε την περίμετρό του. Μπορούμε να πάρουμε μία διατομή του κύκλου, που είναι δύο σημεία, κι έπειτα δύο "συναρτήσεις" Dirac σε καθένα σημείο. Στη διατομή η "περίμετρος" είναι το ολοκλήρωμα:

$$\int_{\mathbb{R}} \delta_1 + \delta_2 \; dx$$

Εάν επαναλάβουμε αυτή τη διαδικασία για όλες τις διατομές, παίρνουμε ένα συνεχές "συναρτήσεων" Dirac κατά μήκος της περιμέτρου του δίσκου, κι αναμένουμε το μήκος της να γίνεται:

$$\int_{\mathbb{R}} \delta_{B_1(0)} \; dA$$

Αυτό το συνεχές "συναρτήσεων" Dirac, όπως και στη μονοδιάστατη περίπτωση, πρέπει να έχει προέλθει από την παράγωγο της δείκτριας συνάρτησης του δίσκου.

Ορισμός 6.2 (Περίμετρος και σύνολα Cacciopoli)**.** *Έστω E ένα Borel υποσύνολο μίας πολλαπλότητας Riemann $(\mathscr{M}, g)$. Ορίζουμε την περίμετρο του E, όταν η $\mathbf{1}_E$ έχει κλίση ως διανυσματικό μέτρο Radon, ως εξής:*

$$\mathrm{Per}(E; \Omega) = \int_\Omega |D\mathbf{1}_E|$$

Λέμε ότι το E είναι σύνολο Cacciopoli εάν $\mathrm{Per}(E; \Omega) < \infty$.

Είναι σημαντικό να διευκρινίσουμε ότι εν γένει το μέτρο Hausdorff $\mathscr{H}^{n-1}$ του συνόρου ∂E δεν είναι ίσο με την περίμετρο Per του E.

Ας περιοριστούμε προσωρινά στην περίπτωση όπου $\Omega = \mathbb{R}^n$. Το ανηγμένο σύνορο $\partial^* E$ του E είναι το σύνολο των σημείων x για τα οποία η ποσότητα:

$$\lim_{r \searrow 0} \frac{D\mathbf{1}_E\big(B_r(x)\big)}{|D\mathbf{1}_E|\big(B_r(x)\big)} \in \mathbb{R}^n$$

έχει μέτρο 1. Μάλιστα ισχύει $\partial^* E \subseteq \partial E$. Με το ακόλουθο θεώρημα θα δούμε ότι η περίμετρος του E σχετίζεται περισσότερο με το ανηγμένο σύνορο $\partial^* E$, παρά με το ∂E.

Θεώρημα 6.1 (Το θεώρημα του de Giorgi). *Έστω $E \subseteq \mathbb{R}^n$ ένα σύνολο Cacciopoli. Ισχύει ότι:*

$$\mathrm{Per}(E; \mathbb{R}^n) = \mathscr{H}^{n-1}(\partial^* E)$$

Σημείωση: Το θεώρημα του de Giorgi έχει και γενικότερη διατύπωση, σε πολλαπλότητες Riemann.

6.2 Κάτω ημισυνέχεια και $\Gamma-$σύγκλιση

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε μία οικογένεια από συναρτησιακά J_k, που συγκλίνουν σε κάποιο άλλο, έστω J. Ένα πρόβλημα στον λογισμό των μεταβολών είναι το εξής: Εάν δοθεί μία οικογένεια $\{u_k\}_k$ με όριο u, ώστε κάθε u_k να ελαχιστοποιεί το J_k, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι στο όριο το u ελαχιστοποιεί το J; Η απάντηση είναι εν γένει αρνητική.

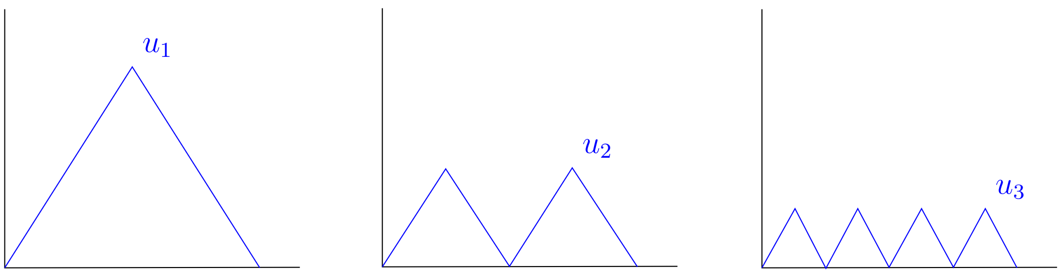
Θα δούμε το ακόλουθο παράδειγμα: Στον χώρο $H_0^1([0,1])$, των H^1-συναρτήσεων που έχουν μία έννοια μηδενισμού στο σύνορο,[1] θεωρούμε το συναρτησιακό $J : H_0^1([0,1]) \to [0,\infty]$:

$$J(u) = \int_0^1 \big(u'(t)^2 - 1\big)^2 \, dt$$

και ορίζουμε την οικογένεια των συναρτησιακών J_k:

$$J_k(u) = \begin{cases} J(u), & \text{εάν } u' \text{ σταθερή στα διάφορα } \big(i/(2k), (i+1)/(2k)\big),\ i \leqslant 2k-1 \\ \infty, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Τότε οι παρακάτω οδοντωτές συναρτήσεις u_k αποτελούν ελάχιστα των J_k.



Επίσης $u_k \to 0$ (μάλιστα ομοιόμορφα) και $J_k(v) \to J(v)$ σχεδόν παντού, για κάθε οδοντωτή ή σταθερή συνάρτηση. Όμως, προς κακή μας τύχη, η $u = 0$ δεν ελαχιστοποιεί το $J(u)$. Το πρόβλημα είναι η μορφή της σύγκλισης, και συγκεκριμένα ότι δεν έχουμε $\Gamma-$σύγκλιση, αλλά μία άλλη.

[1] Γενικά η έννοια του μηδενισμού στο σύνορο στις $W^{1,p}-$συναρτήσεις δεν είναι τετριμμένη. Μπορείτε να βρείτε πληροφορίες στο [Ev10].

Ορισμός 6.3 (Γ−σύγκλιση). *Έστω $\mathscr{X}$ ένας Hausdorff και δεύτερος (ή πρώτος) αριθμήσιμος τοπολογικός χώρος, και $J_k : \mathscr{X} \to \overline{\mathbb{R}}$ μία οικογένεια συναρτησιακών στο $\mathscr{X}$. Λέμε ότι τα J_k $\Gamma-$συγκλίνουν σε ένα $J : \mathscr{X} \to \overline{\mathbb{R}}$ εάν:*

i. Υπάρχει ασυμπτωτικό κοινό κάτω φράγμα: Για κάθε $f \in \mathscr{X}$ και κάθε ακολουθία $\{f_k\}_k$ με $f_k \to f$ στο $\mathscr{X}$, έχουμε:

$$J(f) \leqslant \liminf_{k\to\infty} J_k(f_k)$$

ii. Υπάρχουν προσεγγιστικές ακολουθίες: Για κάθε $f \in \mathscr{X}$ υπάρχει ακολουθία $\{f_k\}_k$ με $f_k \to f$ στον $\mathscr{X}$ με:

$$J(x) = \lim_{k\to\infty} J_k(f_k)$$

ή ισοδύναμα:

$$J(f) \geqslant \limsup_{k\to\infty} J_k(f_k)$$

Εάν οι J_k $\Gamma-$συγκλίνουν στην J, γράφουμε:

$$J = \Gamma\text{-}\lim_{k\to\infty} J_k \text{ ή } J_k \xrightarrow{\Gamma} J$$

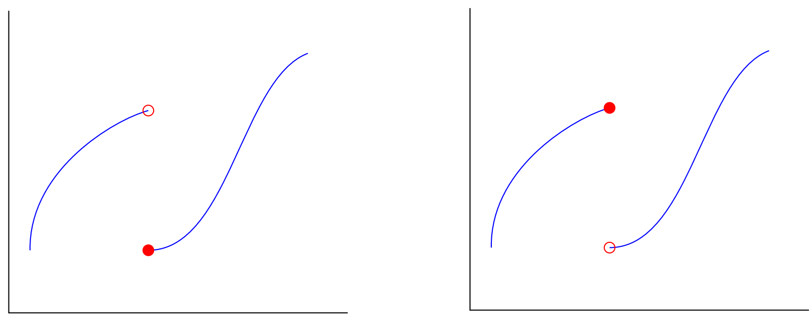
Θεώρημα 6.2 (Θεμελιώδες θεώρημα της Γ−σύγκλισης). *Έστω $\mathscr{X}$ Hausdorff και δεύτερος (ή πρώτος) αριθμήσιμος τοπολογικός χώρος, και $J_k : \mathscr{X} \to \overline{\mathbb{R}}$ μία οικογένεια συναρτησιακών στο $\mathscr{X}$. Εάν $J_k \xrightarrow{\Gamma} J$, $J : \mathscr{X} \to \overline{\mathbb{R}}$ και οι $f_k \in \mathscr{X}$ ελαχιστοποιούν τα J_k, τότε στο όριο $f_k \to f$, το J ελαχιστοποιείται.*

Όπως είδαμε και στο προηγούμενο παράδειγμα, υπάρχουν οικογένειες συναρτησιακών που συγκλίνουν, με κάποια έννοια, αλλά τα σημεία ελαχιστοποίησής τους δεν συγκλίνουν σε σημείο ελαχιστοποίησης. Υπάρχει πίσω από αυτό το φαινόμενο μία εξήγηση, που είναι η κάτω ημισυνέχεια.

Ορισμός 6.4 (Κάτω ημισυνέχεια). *Έστω $\mathscr{X}$ Hausdorff και δεύτερος (ή πρώτος) αριθμήσιμος τοπολογικός χώρος, και $J : \mathscr{X} \to \overline{\mathbb{R}}$ ένα συναρτησιακό. Λέμε ότι το J είναι κάτω ημισυνεχές εάν:*

$$f_k \to f \Rightarrow J(f) \leqslant \liminf_{k\to\infty} J(f_k)$$

Ισοδύναμα, τα διάφορα $J^{-1}\big((-\infty, t]\big)$ είναι κλειστά στον $\mathscr{X}$.



Εικόνα 6.1: Ένα παράδειγμα μίας κάτω ημισυνεχούς συνάρτησης (στα αριστερά) κι ένα μίας όχι κάτω ημισυνεχούς (στα δεξιά).

Με την παρακάτω πρόταση θα δούμε ότι το όριο πρέπει οπωσδήποτε να είναι κάτω ημισυνεχές, εάν αποσκοπούμε σε κάποια $\Gamma-$σύγκλιση. Αυτό είναι λογικό, αν σκεφτούμε συναρτησιακά που προσεγγίζουν τις J_k, και με ελάχιστα που πλησιάζουν το όχι κάτω ημισυνεχές τμήμα της J.

Πρόταση 6.1. *Έστω $\mathscr{X}$ Hausdorff και δεύτερος (ή πρώτος) αριθμήσιμος τοπολογικός χώρος, και συναρτησιακά $J_k : \mathscr{X} \to \overline{\mathbb{R}}$, $J : \mathscr{X} \to \overline{\mathbb{R}}$. Εάν $J_k \xrightarrow{\Gamma} J$, τότε το J είναι κάτω ημισυνεχές.*

6.3 Η $\Gamma-$σύγκλιση της ενέργειας στην περίμετρο

Με όλα αυτά είμαστε πλέον σε θέση να αποδείξουμε την $\Gamma-$σύγκλιση της ενέργειας σε ένα πολλαπλάσιο της περιμέτρου. Η απόδειξη θα χωριστεί σε δύο μέρη, τα οποία οφείλονται στους Modica και Mortola [MM77]. Το πρώτο σχετίζεται με το ασυμπτωτικό κοινό κάτω φράγμα της $\Gamma-$σύγκλισης, και το δεύτερο με τις προσεγγιστικές ακολουθίες. Μάλιστα το δεύτερο είναι το θεώρημα που ήδη έχουμε αναφέρει στην εισαγωγή.

Επίσης, θα χρειαστούμε την ακόλουθη πρόταση:

Πρόταση 6.2. *Έστω $(\mathscr{M}, g)$ μία πολλαπλότητα Riemann και $\Omega \subseteq \mathscr{M}$ ανοικτό υποσύνολό της. Εάν η ακολουθία $\{u_k\}_k$ του $\mathrm{BV}(\Omega)$ φράσσεται ως εξής:*

$$\sup_k ||u_k||_{\mathrm{BV}(V)} = \sup_k \left(||u_k||_{L^1(V)} + \int_V |Du_k| \right) < \infty$$

για κάθε προσυμπαγές ανοικτό V στο Ω, τότε (ενδεχομένως παίρνοντας κάποια υπακολουθία αν χρειαστεί), υπάρχει $u \in \mathrm{BV}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ ούτως ώστε:

$$u_k \xrightarrow{L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)} u \text{ και } \int_V |Du| \leqslant \liminf_{k\to\infty} \int_V |Du_k|$$

για κάθε προσυμπαγές V στο Ω.

Τώρα διατυπώνουμε και αποδεικνύουμε το πρώτο μέρος του θεωρήματος.

Θεώρημα 6.3 (Ασυμπτωτικό κοινό κάτω φράγμα για την περίμετρο)**.** *Έστω $(\mathscr{M}, g)$ μία πολλαπλότητα Riemann και $\Omega \subseteq \mathscr{M}$ ανοικτό και προσυμπαγές υποσύνολό της. Υποθέτουμε ότι $\mathscr{E}_\varepsilon(u_\varepsilon; \Omega) \leqslant C$, $C > 0$, για μία ακολουθία συναρτήσεων $u_\varepsilon \in H^1(\Omega) \cap L^4(\Omega)$. Τότε υπάρχει ακολουθία $\varepsilon_k \to 0$ και $u_0 \in \mathrm{BV}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ με $u_0(\Omega) \in \{\pm 1\}$ $d\sigma-$σχεδόν παντού και:*

$$u_{\varepsilon_k} \xrightarrow{L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)} u_0, \quad \lambda \cdot \mathrm{Per}(\{u_0 = 1\}; V) \leqslant \liminf_{n\to\infty} \mathscr{E}_{\varepsilon_k}(u_{\varepsilon_k}; V), \; \lambda > 0$$

για κάθε προσυμπαγές ανοικτό V στο Ω. Παρόμοιο αποτέλεσμα ισχύει για γενικές ακολουθίες $u_\varepsilon \to u_0$, $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$.

Απόδειξη. Η απόδειξη θα γίνει σε βήματα.

Βήμα I: Καθ' όλη τη διάρκεια της απόδειξης, καθοριστικό ρόλο παίζει η:

$$\Phi(t) = \int_0^t \sqrt{2W(s)}\, ds, \; W(t) = \frac{1}{4}(1-t^2)^2$$

Πρώτα θα δείξουμε μία χρήσιμη ανισότητα: Χρησιμοποιώντας την $2\alpha\beta \leqslant \alpha^2 + \beta^2$, γράφουμε:

$$\begin{aligned} \mathscr{E}_\varepsilon(u; \Omega) &= \int_\Omega \frac{\varepsilon}{2}|\nabla u|^2 + \frac{1}{\varepsilon} W(u)\, d\sigma \\ &\geqslant \int_\Omega \sqrt{2W(u)} |\nabla u|\, d\sigma \\ &= \int_\Omega \big|\nabla\big(\Phi(u)\big)\big|\, d\sigma \end{aligned} \tag{6.1}$$

Βήμα II: Είναι εύκολο κανείς να διαπιστώσει ότι $|\Phi(t)| \leqslant a + bW(t)$, $a, b > 0$, κι άρα:

$$\mathscr{E}_\varepsilon(u_\varepsilon;\Omega) = \int_\Omega \frac{\varepsilon}{2}|\nabla u_\varepsilon|^2 + \frac{1}{\varepsilon}W(u_\varepsilon)\, d\sigma \leqslant C \Rightarrow ||\Phi(u_\varepsilon)||_{L^1(\Omega)} \leqslant M_1,\ M_1 > 0$$

Αυτή η ανισότητα μαζί με την (6.1) μας επιτρέπουν να χρησιμοποιήσουμε την Πρόταση 6.2. Κατά συνέπεια, υπάρχει $\Phi_0 \in \mathrm{BV}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ ούτως ώστε, για μία υπακολουθία της $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$:

$$\Phi(u_{\varepsilon_k}) \xrightarrow{L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)} \Phi_0 \text{ και } \int_V |D\Phi_0| \leqslant \liminf_{k\to\infty} \int_V \big|D\big(\Phi(u_{\varepsilon_k})\big)\big|$$

για κάθε προσυμπαγές V στο Ω. Επειδή:

$$\int_V \big|D\big(\Phi(u_{\varepsilon_k})\big)\big| = \int_V \left|\sqrt{2W(u_{\varepsilon_k})}\nabla u_{\varepsilon_k}\right|\, d\sigma \leqslant \int_V \frac{\varepsilon_k}{2}|\nabla u_{\varepsilon_k}|^2 + \frac{1}{\varepsilon_k}W(u_{\varepsilon_k})\, d\sigma$$

έχουμε τελικά:

$$\int_V |D\Phi_0| \leqslant \liminf_{k\to\infty} \mathscr{E}_{\varepsilon_k}(u_{\varepsilon_k}; V)$$

Βήμα III: Παρατηρούμε ότι η Φ έχει αντίστροφο, η οποία μάλιστα είναι ομοιόμορφα συνεχής. Λόγω της ομοιόμορφης συνέχειας, έπεται η κατά μέτρο σύγκλιση των u_{ε_k} στο $u_0 = \Phi^{-1}(\Phi_0)$.

$$\sigma(\{|u_{\varepsilon_k} - u_0| \geqslant \delta\}) = \sigma\left(\left\{\left|\Phi^{-1}\big(\Phi(u_{\varepsilon_k})\big) - \Phi^{-1}(\Phi_0)\right| \geqslant \delta\right\}\right) \xrightarrow{k\to\infty} 0$$

Επιπλέον, από την ενέργεια μπορεί κανείς να δει ότι $||u_{\varepsilon_k}||_{L^4(\Omega)} \leqslant M_2$, $M_2 > 0$. Εάν λοιπόν περιοριστούμε στα συμπαγή V στο Ω, είναι γνωστό ότι η κατά μέτρο σύγκλιση μαζί με το φράγμα στην L^p-νόρμα (εδώ $1 < p = 4$) δίνουν L^1-σύγκλιση στο V. Δηλαδή $u_{\varepsilon_k} \to u_0$ στον $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$.

Βήμα IV: Η u_0 παίρνει σχεδόν παντού τις τιμές ± 1, αφού μπορούμε να γράψουμε:

$$\frac{\delta^2}{2}\sigma(\{|u_{\varepsilon_k}^2 - 1| \geqslant \delta\} \cap V) \leqslant \int_V W(u_{\varepsilon_k})\, d\sigma \leqslant C\varepsilon_k$$

για κάθε $\delta > 0$ και για κάθε συμπαγές V στο Ω.

Επιπλέον έχουμε:

$$\begin{aligned}\Phi(u_0) &= \Phi(1)\mathbf{1}_{\{u_0=1\}} + \Phi(-1)\mathbf{1}_{\{u_0=-1\}} \\ &= \big(\Phi(1) - \Phi(-1)\big)\mathbf{1}_{\{u_0=1\}} + \Phi(-1)\big(\mathbf{1}_{\{u_0=1\}} + \mathbf{1}_{\{u_0=-1\}}\big) \\ &= \big(\Phi(1) - \Phi(-1)\big)\mathbf{1}_{\{u_0=1\}} + \Phi(-1)\mathbf{1}_\Omega\end{aligned}$$

και κατά συνέπεια:

$$\int_V |D\Phi(u_0)| = \lambda \int_V |Du_0| = \lambda \cdot \mathrm{Per}(\{u_0 = 1\}; V)$$

όπου $\lambda = \Phi(1) - \Phi(-1)$, για κάθε προσυμπαγές ανοικτό V στο Ω. □

Τώρα διατυπώνουμε και αποδεικνύουμε το δεύτερο μέρος του θεωρήματος.

Θεώρημα 6.4 (Modica-Mortola και Kohn-Stenberg/Προσεγγιστικές ακολουθίες)**.** *Έστω $(\mathscr{M}, g)$ μία πολλαπλότητα Riemann, $\Omega \subseteq \mathscr{M}$ ανοικτό υποσύνολό της και $E \subseteq \Omega$ ένα σύνολο Cacciopoli στο Ω. Υπάρχει ακολουθία $u_\varepsilon \in H^1(\Omega) \cap L^4(\Omega)$ προσεγγιστικών λύσεων της Allen-Cahn με ε (1.2), ούτως ώστε:*

$$\lambda \cdot \mathrm{Per}(E;\Omega) = \lim_{\varepsilon\to 0} \mathscr{E}_\varepsilon(u_\varepsilon;\Omega),\ \lambda > 0$$

και $u_\varepsilon \to \mathbf{1}_E - \mathbf{1}_{\Omega\setminus E}$ στον $L^1(\Omega)$.

Απόδειξη. Θα σκιαγραφήσουμε ένα κομμάτι της απόδειξης, για να αποκτήσουμε μία ιδέα.

Θα ασχοληθούμε με την περίπτωση όπου το σύνορο ∂E είναι C^∞, κι οπότε τότε $\partial^* E = \partial E$. Από το θεώρημα του de Giorgi, $\mathscr{H}^{n-1}(\partial E) = \mathscr{H}^{n-1}(\partial^* E) = \mathrm{Per}(E;\Omega)$. Για την γενικότερη περίπτωση, όπου δεν υπάρχει αρκετή ομαλότητα, χρειάζεται επιδεξιότητα με διάφορες προσεγγίσεις.

Υπενθυμίζουμε τη μονοδιάστατη λύση της Allen-Cahn:

$$\hbar(x) = \tanh(x/\sqrt{2})$$

καθώς επίσης κι ότι υπάρχει μία μονοδιάστατη λύση της Allen-Cahn στο επίπεδο, που είναι ένα συνεχές μονοδιάστατων τέτοιων λύσεων γύρω από μία ευθεία.

Η μονοδιάστατη αυτή λύση είναι ενδεικτική για τη (προσεγγιστική) μορφή των λύσεων. Υπάρχουν δηλαδή λύσεις της Allen-Cahn με ε, που έχουν προσεγγιστικά τη μορφή:

$$u_\varepsilon(x) = \hbar(\mathrm{dist}(x, \partial E)/\varepsilon)$$

όπου dist είνα η προσημασμένη απόσταση από το σύνορο (δείτε στο [AFS18]). Σημειώνουμε ότι, αφού το σύνορο είναι ομαλό, η συνάρτηση της απόστασης είναι ομαλή κοντά στο ∂E, κι επίσης $|\nabla \mathrm{dist}(\lozenge, \partial E)| = 1$.

Συμβολίζουμε από εδώ και στο εξής $u_\varepsilon(x) = \not{f}(\mathrm{dist}(x, \partial E)/\varepsilon)$, για μία συνάρτηση $\not{f}$ που θα επιλεγεί στη συνέχεια. Εάν $\Sigma^t = \{\mathrm{dist}(\lozenge, \partial E) = t\}$, τότε για $t \approx 0$ γράφουμε:

$$\begin{aligned}
\mathscr{E}_\varepsilon(u_\varepsilon;\Omega) &= \int_\Omega \frac{1}{2\varepsilon}\not{f}'\big(\mathrm{dist}(x,\partial E)/\varepsilon\big)^2 + \frac{1}{\varepsilon}W\big(\not{f}(\mathrm{dist}(x,\partial E)/\varepsilon)\big)\, d\sigma \\
&= \int_{-\varepsilon K}^{\varepsilon K}\int_{\Sigma^t} \frac{1}{2\varepsilon}\not{f}'(t/\varepsilon)^2 + \frac{1}{\varepsilon}W\big(\not{f}(t/\varepsilon)\big)\, dS^t\, dt \\
&\approx \mathrm{Per}(E,\Omega)\int_{-\varepsilon K}^{\varepsilon K} \frac{1}{2\varepsilon}\not{f}'(t/\varepsilon)^2 + \frac{1}{\varepsilon}W\big(\not{f}(t/\varepsilon)\big)\, dt \\
&= \mathrm{Per}(E,\Omega)\int_{-K}^{K} \frac{1}{2}\not{f}'(t)^2 + W\big(\not{f}(t)\big)\, dt
\end{aligned}$$

και επιλέγουμε:

$$\not{f}(t) = \begin{cases} \hbar(t),\ t \in [-K, K] \\ -1,\ t < -K \\ 1,\ t > K \end{cases}$$

οπότε:

$$\mathscr{E}_\varepsilon(u_\varepsilon;\Omega) \approx \mathrm{Per}(E,\Omega)\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}\hbar'(t)^2 + W\big(\hbar(t)\big)\, dt$$

Με υπολογισμό τώρα έπεται:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}\hbar'(t)^2 + W\big(\hbar(t)\big)\, d = \Phi(1) - \Phi(-1) = \lambda$$

για τη συνάρτηση Φ του Θεωρήματος 6.3.

Προσέξτε ότι οι παραπάνω συναρτήσεις u_ε δεν είναι κατ' ανάγκη λύσεις της Allen-Cahn με ε. $\square$

Κεφάλαιο 7

Λύσεις της Allen-Cahn και εμφυτευμένες ελαχιστικές (υπερ-) επιφάνειες

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, η φυσική διαίσθηση για τη εξίσωση Allen-Cahn είναι ότι τα υλικά κινούνται με τρόπο τέτοιον, ώστε να ελαχιστοποιούν την επιφανειακή τους τάση. Κατά συνέπεια, αναμένουμε ότι η "συνδετική" επιφάνεια των υλικών είναι κοντά σε κάποια ελαχιστική επιφάνεια. Η πρώτη σημαντική ένδειξη ότι κάτι τέτοιο όντως συμβαίνει είναι το θεώρημα των del Pino-Musso-Pacard, στο οποίο κατασκευάζονται λύσεις της Allen-Cahn με ελικοειδή συμμετρία.

Πριν διατυπώσουμε αυτό το θεώρημα, θα αναφέρουμε μερικά που προηγήθηκαν (στο επόμενο θεώρημα) και που τελικά οδήγησαν σε αυτό. Όλα αυτά τα θεωρήματα σχετίζονται με τις συμμετρικές λύσεις της Allen-Cahn.

Θεώρημα 7.1 (Dang-Fife-Peletier και Gui)**.** *Στο $\mathbb{R}^2$ υπάρχει λύση της Allen-Cahn της οποίας το σύνολο μηδενισμού είναι δύο κάθετες ημιευθείες, δηλαδή το σύνολο:*

$$\mathfrak{N} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > |y|\}$$

Με παρόμοια μέθοδο μπορεί να αποδειχθεί ότι υπάρχει λύση με σύνολο μηδενισμού:

$$\mathfrak{N} = \{(r\cos\theta, r\sin\theta) \in \mathbb{R}^2 \mid r > 0,\ |\theta| < \pi/2k\}$$

Με ανακλάσεις, μπορεί να αποδειχθεί ότι υπάρχουν λύσεις με διεδρική συμμετρία.

Με παρόμοιες μεθόδους αποδεικνύετα επίσης το ακόλουθο:

Θεώρημα 7.2 (del Pino-Musso-Pacard)**.** *Θεωρούμε το ελικοειδές g_λ σε πολικές συντεταγμένες:*

$$g_\lambda(t,\theta) = \left(t\cos\theta, t\sin\theta, \frac{\lambda}{\pi}\theta\right)$$

και την ελικοειδή κίνηση στο $\mathbb{C}\times\mathbb{R}$ κατά α:

$$\mathrm{sc}_\lambda^\alpha(z,t) = \left(e^{i\alpha}z, t + \frac{\lambda}{\pi}\alpha\right)$$

Εάν $\lambda > \pi$, υπάρχει λύση της Allen-Cahn που είναι φραγμένη, έχει σύνολο μηδενισμού $\mathfrak{N} = g_\lambda(\mathbb{R}^2)$ και έχει ελικοειδή συμμετρία, δηλαδή:

$$u \circ \mathrm{sc}_\lambda^\alpha = u, \quad \text{για κάθε } \alpha \in \mathbb{R}$$

Εάν $\lambda \leqslant \pi$, δεν υπάρχουν λύσεις με σύνολο μηδενισμού το ελικοειδές.

Διατυπώνουμε τώρα το θεώρημα Pacard-Ritoré. Η πρώτη απόδειξη αυτού του θεωρήματος εμφανίστηκε στο [PR03] το 2003, και μία σημαντικά ευκολότερη στο [Pa12] το 2012. Σημειώνουμε ότι η απόδειξη είναι κατά κύρια βάση γεωμετρική και χρησιμοποιεί όλα τα γεωμετρικά αποτελέσματα που είδαμε ως τώρα.

Θεώρημα 7.3 (Pacard-Ritoré). *Έστω $(\mathscr{M}, g)$ μία συμπαγής πολλαπλότητα Riemann διάστασης $n+1$ χωρίς σύνορο. Έστω, επίσης, $\Sigma \subseteq \mathscr{M}$ μία μη-εκφυλισμένη, προσανατολισμένη ελαχιστική υπερεπιφάνεια διάστασης n, με $\mathscr{M} \backslash \Sigma = \mathscr{M}^+ \cup \mathscr{M}^-$, της οποίας το κάθετο διάνυσμα (που συμφωνεί με τον προσανατολισμό) κοιτάζει προς το $\mathscr{M}^+$. Υπάρχει $\varepsilon_0 > 0$ ώστε για κάθε $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, υπάρχει λύση u_ε της εξίσωσης Allen-Cahn με ε (1.2), με:*

$$u_\varepsilon \to \mathbf{1}_{\mathscr{M}^+} - \mathbf{1}_{\mathscr{M}^-}$$

ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα των $\mathscr{M}^+$, $\mathscr{M}^-$, καθώς $\varepsilon \to 0$. Επιπλέον, για την ενέργεια έχουμε:

$$\lim_{\substack{\varepsilon \to 0^+ \\ \varepsilon < \varepsilon_0}} \mathscr{E}_\varepsilon(u_\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{2}} \mathscr{H}^n(\Sigma)$$

Βιβλιογραφία

[AFS18] N. D. Alikakos, G. Fusco, P. Smyrnelis: *Elliptic Systems of Phase Transition Type*. Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications Vol. 91, Birkhäuser, 2018.

[Bo86] W. Boothby, *An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry*. Second Edition, Academic Press Inc. 1986.

[Ch19] O. Chodosh, *Lecture Notes on Geometric Features of the Allen-Cahn Equation*. RTG Summer School 2019, Princeton, 2019.

[dC92] M. P. do Carmo: *Riemannian Geometry*. Mathematics: Theory and Applications, Birkhäuser, Boston, 1992.

[DHS10] U. Dierkes, S. Hindebrandt, F. Sauvigny: *Minimal Surfaces*. A Series of Comprehensive Studies in Mathematics, Vol. 339, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2010.

[Ev10] L. C. Evans: *Partial Differential Equations*. Second Edition, Graduate Studies in Mathematics, Vol. 19, AMS, Providence, Rode Isand, 2010.

[Kü15] W. Kühnel: *Differential Geometry, Curves – Surfaces – Manifolds*. Third Edition, Student Mathematical Library, Vol. 77, AMS, Providence, Rode Isand, 2015.

[Li12] P. Li, *Geometric Analysis*. Cambridge studies in advanced mathematics, Vol. 137, Cambridge University Press, 2012.

[Pa12] F. Pacard, *The role of minimal surfaces in the study of the Allen-Cahn equation*. Contemporary Mathematics, 570, AMS, Providence, Rode Island, 2012.

[PR03] F. Pacard, M. Ritoré, *From the constant mean curvature hypersurfaces to the gradient theory of phase transitions*. J. Differential Geometry 64, No. 3, 2003, pp. 356-423.

[MM77] L. Modica, S. Mortola, *Un esempio di* $\Gamma^{-}-$*convergeza*. Boll. Un. Mat. Ital. B5, 14, no. 1, MR 00445362, 1977, pp. 285-299.

[Sc15] T. Schmidt, *Minimal Surfaces and Plateau's problem*. Lecture notes, Universität Hamburg, 2015.

[Fr24] A. Φράγκος, *Γεωμετρική Πλειογραμμική Άλγεβρα*. Σημειώσεις, ΕΚΠΑ, 2024