2ο Φυλλάδιο Ασκήσεων - Θεωρία Μέτρου

Αναστάσιος Φράγκος: ΑΜ 1112201900239 Κυριακή, 21 Νοεμβρίου 2021

Συμβολισμοί - Παρατηρήσεις

1. $B\backslash A$: Είναι η συνολοθεωρητική διαφορά των B, A. Δηλαδή $B\backslash A = \{b \in B, b \notin A\}$.
2. B_A^c: Για σύνολα $A \supseteq B$, με τον εν λόγω συμβολισμό θα συμβολίζουμε το συμπλήρωμα του B στο A.
3. $(A \to B)$: Είναι το σύνολο των συναρτήσεων $A \to B$. Δηλαδή, το B^A.
4. $S(a, r) := \{x \in X \mid d(x, a) < r\}$, όπου (X, d) είναι ένας μετρικός χώρος.
5. $B(a, r) := \{x \in X \mid d(x, a) \leq r\}$, όπου (X, d) είναι ένας μετρικός χώρος.
6. $A + B := \{\alpha + \beta \mid \alpha \in A,\ \beta \in B\}$.

Άσκηση 1 – (05 στο φυλλάδιο). Εξετάστε ποιές από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς.

(α) Υπάρχει αρίθμηση $\{q_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ του $\mathbb{Q}$ τέτοια ώστε:

$$\mathbb{R} \neq \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(q_n - \frac{1}{n},\ q_n + \frac{1}{n}\right)$$

(β) Αν $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ακολουθία Lebesgue μετρήσιμων υποσυνόλων του $[0, 1]$ με $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n) = \infty$, τότε:

$$\sum_{k,n=1,\ k\neq n}^{\infty} \lambda(E_k \cap E_n) = \infty$$

■

(α) *Λύση:* Ο ισχυρισμός είναι ψευδής. Εάν τέτοια αρίθμιση των ρητών υπήρχε, τουλάχιστον ένας άρρητος a δεν θα άνηκε στο $K = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(q_n - \frac{1}{n},\ q_n + \frac{1}{n}\right)$. Ειδικότερα, ο άρρητος αυτός δεν ανήκει (για κανέναν ρητό q_n) στη μπάλα $S(q_n, 1/n)$.

$$a \notin S(q_n, 1/n) \Rightarrow a \geq q_n - \frac{1}{n} \textbf{ και } a \leq q_n + \frac{1}{n} \overset{a\in\mathbb{Q}_{\mathbb{R}}^c}{\Longrightarrow} a + \frac{1}{n} > q_n \textbf{ και } a - \frac{1}{n} < q_n \Rightarrow q_n \in S(a, 1/n)$$

Δείξαμε λοιπόν, υπό την υπόθεση ύπαρξης ενός τέτοιου συνόλου K, ότι όλοι οι ρητοί περιορίζονται εντός της μπάλας $S(a, 1)$, για κάποιον άρρητο a. Αυτό είναι προφανώς άτοπο, αφού τότε το σύνολο των ρητών θα ήταν φραγμένο.

□

(β) **Λήμμα 1.1:** *Έστω A ένα $\lambda-$μετρήσιμο σύνολο με $\lambda(A) = \alpha \in \mathbb{R}^+$. Εάν $(B_i)_{i\in\mathbb{N}}$ είναι μια οικογένεια $\lambda-$μετρήσιμων υποσυνόλων του A τέτοια ώστε $\sum_i \lambda(B_i) > \alpha + \varepsilon$ για κάποιο $\varepsilon > 0$, τότε:*

$$\sum_{i,j=1,\ i\neq j}^{\infty} \lambda(B_i \cap B_j) > \varepsilon$$

Απόδειξη: Παρατηρούμε ότι εξ ορισμού της η ακολουθία $\left(B_i\backslash \bigcup_{j\neq i} B_i \cap B_j\right)_{i\in\mathbb{N}}$ είναι ακολουθία ξένων ανά 2 συνόλων, τα οποία είναι όλα τους υποσύνολα του A. Επομένως:

$$\sum_i \lambda\Big(B_i\backslash \bigcup_{j\neq i} B_i \cap B_j\Big) \leq \alpha \Rightarrow \sum_i \left[\lambda(B_i) - \sum_{j\neq i} \lambda(B_i \cap B_j)\right] \leq \alpha \Rightarrow \sum_i \lambda(B_i) - \sum_{i\neq j} \lambda(B_i \cap B_j) \leq \alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{i\neq j} \lambda(B_i \cap B_j) \geq \sum_i \lambda(B_i) - \alpha > \alpha + \varepsilon - \alpha > \varepsilon$$

Να σημειωθεί ότι στην πρώτη συνεπαγωγή δεν υπάρχει κατ' ανάγκη ισότητα των δύο πρώτων μελών των ανισοτήτων. Η ανισότητα δε, διατηρείται λόγω της υποπροσθετικότητας του μέτρου.

Αυτά αποδεικνύουν το λήμμα.

△

Λύση: Έστω ε ένας θετικός, πραγματικός αριθμός. Επειδή $\sum_n \lambda(E_n) = \infty$, μπορούν να βρεθούν σύνολα $E_{1,i},\ i \in I_i \subset \mathbb{N}$ της οικογένειας $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, τέτοια ώστε:

$$1 + \varepsilon = \lambda([0,1]) + \varepsilon < \sum_{i\in I_i} \lambda(E_{1,i}) < \infty$$

Όπως αποδείξαμε στο **Λήμμα 1.1**, θα πρέπει να ισχύει ότι:

$$\sum_{i,j\in I_1,\ i\neq j} \lambda(E_{1,i} \cap E_{1,j}) > \varepsilon$$

Θεωρούμε εν συνεχεία την ακολουθία $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}} \backslash \{E_{1,i}\}_{i\in I_1}$ και συνεχίζουμε επαγωγικά την εύρεση συνόλων $E_{k,i} \subseteq A$ τέτοιων ώστε:

$$\sum_{i,j\in I_k,\ i\neq j} \lambda(E_{k,i} \cap E_{k,j}) > \varepsilon$$

Εξ ορισμού της πλέον η διπλή ακολουθία $(E_{k,i})_{(k,i)\in\mathbb{N}\times I_k}$ συνήσταται από ξένα ανά δύο σύνολα, και κατ' επέκταση λοιπόν:

$$S = \sum_{k\in\mathbb{N}} \left[\sum_{i,j\in I_k,\ i\neq j} \lambda(E_{k,i} \cap E_{k,j}) \right] > \sum_{k\in\mathbb{N}} \varepsilon = \infty$$

Επειδή $S \leq \sum_{i\neq j} \lambda(E_i \cap E_j)$ (το S περιέχει λιγότερους ή τους ίδιους όρους με το άθροισμα), το ζητούμενο έπεται.

□

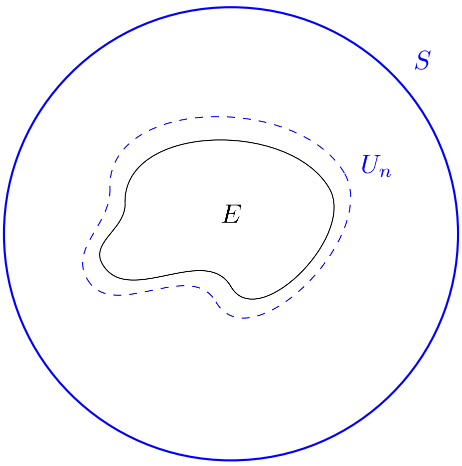
Άσκηση 2 – (06 στο φυλλάδιο). Έστω $E \subseteq \mathbb{R}^k$. Για κάθε $n \geq 1$ ορίζουμε $U_n = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \operatorname{dist}(x, E) < 1/n\}$.

(α) Αποδείξτε ότι αν το E είναι συμπαγές, τότε $\lambda(U_n) \xrightarrow{n\to\infty} \lambda(E)$.

(β) Δώστε παραδείγματα που δείχνουν ότι το συμπέρασμα του (α) δεν ισχύει για E κλειστό και μη φραγμένο ή για E ανοικτό και φραγμένο.

■

(α) *Λύση:* Εφόσον το E είναι συμπαγές σύνολο, είναι φραγμένο, κι άρα είναι δυνατόν να βρεθεί ανοικτή μπάλα $S = S(k,r)$ που το περιέχει. Παρατηρούμε ότι το σύνολο $S\backslash E$ είναι ανοικτό, και καθένα από τα $S\backslash U_n$ είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^k$ ως κλειστό και φραγμένο.



Λόγω της κανονικότητας του μέτρου Lebesgue:

$$\lambda(S\backslash E) = \sup\{\lambda(K) \mid K \text{ συμπαγές και } K \subseteq S\backslash E\}$$

Ισχυριζόμαστε ότι για κάθε συμπαγές $K \subseteq S\backslash E$ υπάρχει $S\backslash U_n$ τέτοιο ώστε $K \subseteq S\backslash U_n \subseteq S\backslash E$. Εάν αυτός ο ισχυρισμός αποδειχθεί, θα έχουμε το ζητούμενο, αφού τότε $\lambda(U_n) \xrightarrow{n\to\infty} \sup\{\lambda(K) \mid K \text{ συμπαγές και } K \subseteq S\backslash E\} = \lambda(E)$. Πράγματι λοιπόν, κάθε συμπαγές $K \subseteq S\backslash E$ είναι ξένο προς το E, οπότε ορίζει μία μη μηδενική απόσταση $\delta = \operatorname{dist}(K, E)$. Θεωρούμε αρκετά μεγάλο n τέτοιο ώστε $1/n < \delta$ και παρατηρούμε ότι $U_n \subset S\backslash K \Rightarrow K \subseteq S\backslash U_n$.

□

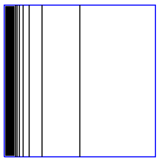
(β) *Λύση:*

- Το σύνολο $\mathbb{N}^k$ είναι κλειστό, μη φραγμένο και επιπλέον $U_n = \bigcup_{x\in\mathbb{N}^k} S(x,1/n)$. Παρατηρούμε ότι για κάθε n φυσικό:

$$\lambda(U_n) = \sum_{x\in\mathbb{N}^k} S(x,1/n) \geq \sum_{x\in\mathbb{N}^k} C(x,1/\sqrt{kn}) = \sum_{x\in\mathbb{N}^k} \left[\frac{1}{\sqrt{kn}}\right]^k = \infty \not\to \lambda(\mathbb{N}^k) = 0$$

  όπου $C(x,1/\sqrt{kn})$ είναι ο εγγεγραμμένος ανοικτός (υπερ-)κύβος ακμής n, με κέντρο x, στη μπάλα $S(x,1/n)$.

- Έστω $C(x,n)$ ο ανοικτός (υπερ-)κύβος ακμής n, με κέντρο x. Έστω επίσης τα σύνολα $S_n = \{y = (y_i) \in C\big((1/2,0,\cdots,0),1\big) \mid y_1 < 1/n\}$. Θεωρούμε:



$$E = \Big[\lim_{n\to\infty} S_1 \setminus [S_2 \setminus \cdots \setminus [S_{2n}]]\Big]^\circ$$

  Το σύνολο E είναι ανοικτό (εξ ορισμού του) και φραγμένο (και μάλιστα $E \subseteq S_1$). Επιπλέον:

$$\lambda(U_n) \geq \lambda(E) + \sum_{m=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \left[1^{k-1} \cdot \frac{2}{n}\right] \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \lambda(E) + \frac{n}{2}\cdot\frac{2}{n} = \lambda(E) + 1 > \lambda(E)$$

□

Άσκηση 3 – (02 στο φυλλάδιο). Έστω $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία υποσυνόλων του $\mathbb{R}^k$. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν ξένα ανά δύο Lebesque μετρήσιμα σύνολα E_n τέτοια ώστε $A_n \subseteq E_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αποδείξτε ότι:

$$\lambda^*\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(A_n)$$

■

Λύση: Για κάθε σύνολο A_n θεωρούμε (από τον ορισμό του εξωτερικού μέτρου λ^*) κάλυμμα $I_n(\varepsilon) = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} {}^nI_j(\varepsilon)$ από διαστήματα ${}^nI_j(\varepsilon)$, τέτοιο ώστε $\lambda\big(I_n(\varepsilon)\big) < \lambda^*(A_n) + \varepsilon$. Τα καλύμματα $I_n(\varepsilon)$ μπορούν να παρθούν μεταξύ τους ξένα, με τη διαδικασία $I_n(\varepsilon) \rightsquigarrow \bigcup_{j\in\mathbb{N}}[{}^nI_j(\varepsilon) \cap E_n]$.

Παρατηρούμε ότι:

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda^*(A_n) \leq \lambda\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n(\varepsilon/2^n)\Big) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda\big(I_n(\varepsilon/2^n)\big) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda^*(A_n) + \varepsilon$$

Επειδή η ακολουθία $\Big(\lambda\big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n(\varepsilon)\big)\Big)_{\varepsilon>0}$ είναι φθίνουσα, έπεται ότι:

$$\lambda^*\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = \inf\left\{\lambda\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n(\varepsilon)\Big) \mid \varepsilon > 0\right\} = \lim_{\varepsilon\to 0} \lambda\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n(\varepsilon)\Big) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda^*(A_n)$$

Αυτό αποδεικνύει εν τέλει το ζητούμενο.

□

Άσκηση 4 – (08 στο φυλλάδιο). Στο $[0,1]$ θεωρούμε τη σχέση ισοδυναμίας $x \sim y$ αν και μόνο αν $x - y \in \mathbb{Q}$ και στη συνέχεια ορίζουμε σύνολο $N \subset [0,1]$ που περιέχει ακριβώς ένα στοιχείο από κάθε κλάση ισοδυναμίας του ${}^{[0,1]}\!/_{\sim}$. Ορίζουμε επίσης $T = N^c_{[0,1]}$. Αποδείξτε ότι $\lambda^*(T) = 1$ και συμπεράνετε ότι:

$$\lambda^*(N \cup T) < \lambda^*(N) + \lambda^*(T)$$

■

Πρόταση 4.1: *Το σύνολο N, όπως αυτό ορίστηκε στην εκφώνηση, είναι θετικού εξωτερικού μέτρου λ^*.*

Απόδειξη: Το σύνολο N είναι υπεραριθμήσιμο, αφού αν ήταν αριθμήσιμο θα ήταν Lebesgue μετρήσιμο. Εφόσον το N είναι υπεραριθμήσιμο, υπάρχει μπάλα $S(x,r) \subseteq [0,1]$ τέτοια ώστε κάθε εσωτερική μπάλα $S(y,t) \subseteq S(x,r)$ να περιέχει υπεραριθμήσιμο πλήθος σημείων του N. Έστω τώρα ένα ανοικτό σύνολο G το οποίο αποτελεί κάλυψη του $S(x,r) \cap N$.

Ισχυριζόμαστε ότι $\lambda(G) \geq r$. Πράγματι, παρατηρούμε ότι τα σύνολα $H_n = S(x,r) \cap \bigcup_{h \in S(x,r) \cap N} S(h, 1/n)$ καλύπτουν για κάθε ακτίνα $1/n$ την μπάλα $S(x,r)$, κι επομένως $\lambda(H_n) = r$. Επιπλέον, επειδή το G είναι ανοικτό στο $\mathbb{R}$, μπορεί να γραφεί ως πεπερασμένη ένωση μπαλών $G = \bigcup_{i \leq m} S(x_i, r_i)$. Επομένως, $\lim H_n \backslash G = \emptyset$, και κατ' επέκταση $\lambda(G) = r > 0$. Αυτά αποδεικνύουν την πρόταση.

$\triangle$

Πρόταση 4.2: *Το σύνολο T, όπως αυτό ορίστηκε στην εκφώνηση, έχει εξωτερικό μέτρο $\lambda^*(T) = 1$.*

Απόδειξη: Υποθέτουμε προς άτοπο ότι το σύνολο T έχει (εξωτερικό) μέτρο μικρότερο της μονάδας, και συγκεκριμένα $\lambda^*(T) = 1 - 2\varepsilon$, για κάποιο $\varepsilon > 0$. Από τον ορισμό του εξωτερικού μέτρου λ^*, υπάρχει κάλυψη $\bigcup_j I_j$ του T (από ανοικτά διαστήματα) τέτοια ώστε:

$$\lambda^*\Big(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} I_j\Big) - \lambda^*(T) < \varepsilon \Rightarrow \lambda^*\Big(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} I_j\Big) < 1 - 2\varepsilon + \varepsilon = 1 - \varepsilon$$

Το σύνολο κάλυψης $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} I_j$ δεν είναι απλά λ^*, αλλά ειδικότερα Lebesgue μετρίσημο, αφού κάθε ανοικτό σύνολο στο $\mathbb{R}$ μπορεί να γραφεί ως αριθμήσιμη ένωση ξένων, ανοικτών διαστημάτων. Επομένως έχει βρεθεί Lebesgue μετρήσιμο σύνολο $I = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} I_j$ τέτοιο ώστε $\lambda(I) < 1 - \varepsilon$. Κατ' επέκταση, το σύνολο $I^c_{[0,1]}$ είναι Lebesgue μετρήσιμο με μέτρο $\lambda(I^c_{[0,1]}) \geq \varepsilon$.

Θεωρούμε $\{q_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ μια αρίθμηση των ρητών του $[0,1]$. Καθένα από τα σύνολα $I^c_{[0,1]} + \{q_i\}$ είναι Lebesgue μετρήσιμο με μέτρο $\lambda(I^c_{[0,1]} + \{q_i\}) = \lambda(I^c_{[0,1]}) \geq \varepsilon$, ως μεταφορά του $I^c_{[0,1]}$, και επιπλέον $I^c_{[0,1]} \subseteq T^c_{[0,1]} = N$. Επειδή τα σύνολα της μορφής $N + \{q_i\}$ είναι μεταξύ τους ξένα, τα σύνολα $I^c_{[0,1]} + \{q_i\} \subseteq N + \{q_i\}$ είναι επίσης μεταξύ τους ξένα. Επειδή είναι επιπλέον Lebesgue μετρήσιμα:

$$\lambda\Big(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} I^c_{[0,1]} + \{q_i\}\Big) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \lambda(I^c_{[0,1]}) \geq \sum_{i \in \mathbb{N}} \varepsilon = \infty$$

Αυτό είναι άτοπο, αφού το $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} I^c_{[0,1]} + \{q_i\}$ είναι υποσύνολο του $[0,2]$ και συνεπώς $\lambda\big(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} I^c_{[0,1]} + \{q_i\}\big) \leq 2$. Θα πρέπει λοιπόν αναγκαστικά $\lambda^*(T) = 1$.

$\triangle$

Λύση: Από την **Πρόταση 4.2**, $\lambda^*(T) = 1$. Επιπλέον, από την **Πρόταση 4.1**, $\lambda(N) > 0$ και συνεπώς:

$$\lambda^*(N \cup T) = \lambda([0,1]) = 1 < 1 + \lambda^*(N) = \lambda^*(N) + \lambda^*(T)$$

$\square$

Άσκηση 5 – (10 στο φυλλάδιο). Έστω μ ένα πεπερασμένο μέτρο στον μετρήσιμο χώρο $(X, \mathcal{A})$ και έστω μ^* το εξωτερικό μέτρο που επάγεται από το μ στο $\mathcal{P}(X)$. Υποθέτουμε ότι $\mu^*(E) = \mu^*(X)$ για κάποιο $E \subseteq X$.

(α) Αποδείξτε ότι αν $A, B \in \mathcal{A}$ και $A \cap E = B \cap E$, τότε $\mu(A) = \mu(B)$.

(β) Θέτουμε $\mathcal{A}_E = \{A \cap E \mid A \in \mathcal{A}\}$ και ορίζουμε $\nu(A \cap E) = \mu(A)$. Αποδείξτε ότι η $\mathcal{A}_E$ είναι $\sigma-$άλγεβρα στο E και ότι το ν είναι (καλά ορισμένο) μέτρο στην $\mathcal{A}_E$.

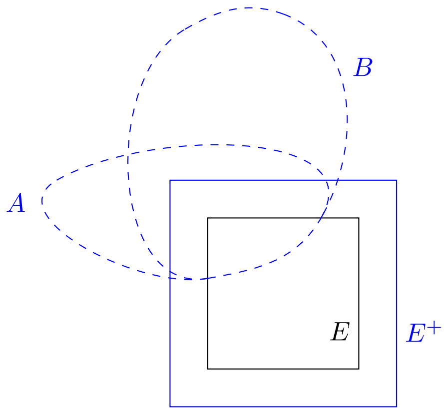
$\blacksquare$

Λήμμα 5.1: *Έστω E^+ ένα σύνολο στην $\sigma-$άλγεβρα τέτοιο ώστε $E^+ \supseteq E$. Ισχύει ότι $\mu(A \cap E^+) = \mu(B \cap E^+)$.*

Απόδειξη: Έστω K το σύνολο της μορφής $[E^+ \cap A] \backslash B$. Παρατηρούμε ότι το K είναι Lebesgue μετρήσιμο σύνολο, αφού είναι τομή των Lebesgue μετρήσιμων συνόλων A, B^c_X, E^+. Επιπλέον, εξ ορισμού του K, αυτό δεν περιέχει κανένα στοιχείο του E, αφού δεν περιέχει το $A \cap E = B \cap E$. Το σύνολο λοιπόν $E^+ \backslash K$ αποτελεί κάλυμμα του E, οπότε $\mu(X) \geq \mu(E^+ \backslash K) \geq \mu^*(E) = \mu(X) \Rightarrow \mu(E^+ \backslash K) = \mu(X)$, και για τον ίδιο λόγο $\mu(E^+) = \mu(X)$. Επειδή $\mu(X) = \mu(E^+) = \mu(E^+ \backslash K) = \mu(E^+) - \mu(K)$, έχουμε ότι $\mu(K) = 0$.

Παρόμοια διαδικασία μπορεί να εφαρμοστεί στα σύνολα της μορφής $\Lambda = [E^+ \cap B] \backslash A$, κι άρα μπορεί να αποδειχθεί ότι $\mu(\Lambda) = 0$.

Με τις δύο προηγούμενες παρατηρήσεις έχουμε ουσιαστικά δείξει ότι κάθε υποσύνολο του B που δεν είναι (δηλ. 'δεν είναι υποσύνολο του') στο $A \cap E^+$ έχει μηδενικό μέτρο, και αντίστοιχα κάθε υποσύνολο του A που δεν είναι στο $B \cap E^+$ έχει μηδενικό μέτρο. Η μόνη λοιπόν 'περιοχή' των $A \cap E^+$, $B \cap E^+$ που έχει μη μηδενικό μέτρο είναι η τομή τους. Κατ' επέκταση, $\mu(A \cap E^+) = \mu(B \cap E^+)$.



△

(α) Το X είναι στοιχείο της $\sigma-$άλγεβρας και περιέχει το E. Επομένως, από το **Λήμμα 5.1**, $\mu(A \cap X) = \mu(B \cap X)$. Επειδή τα A, B περιέχονται στο X, το ζητούμενο έπεται.

□

(β) Η $\mathcal{A}_E$ είναι $\sigma-$άλγεβρα, αφού:

- $\emptyset \in \mathcal{A}_E$: Επειδή $\emptyset \in \mathcal{A}$, τότε $\emptyset = \emptyset \cap E \in \mathcal{A}_E$.
- *Εάν $G \in \mathcal{A}_E$, τότε $G_E^c \in \mathcal{A}_E$:* Πράγματι αν $G \in \mathcal{A}_E$, υπάρχει $H \in \mathcal{A}$ τέτοιο ώστε $G = H \cap E$. Επειδή $H^c \in \mathcal{A}$, έχουμε ότι $H^c \cap E \in \mathcal{A}_E \Rightarrow G_E^c \in \mathcal{A}_E$.
- *Εάν $(G_i)_{i\in\mathbb{N}}$ είναι μια ακολουθία συνόλων της $\mathcal{A}_E$, τότε $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} G_i \in \mathcal{A}_E$:* Εάν $(G_i)_{i\in\mathbb{N}}$ είναι μια ακολουθία συνόλων της $\mathcal{A}_E$, υπάρχει ακολουθία $(H_i)_{i\in\mathbb{N}}$ της $\mathcal{A}$ τέτοια ώστε $(G_i)_{i\in\mathbb{N}} = (H_i \cap E)_{i\in\mathbb{N}}$. Επομένως:

$$\bigcap_{i\in\mathbb{N}} G_i = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} [H_i \cap E] = \Big[\bigcup_{i\in\mathbb{N}} H_i\Big] \cap E \in \mathcal{A}$$

  όπου το 'ανήκειν' προκύπτει από το γεγονός ότι η $\mathcal{A}$ είναι $\sigma-$άλγεβρα.

Το ν είναι μέτρο στην $\mathcal{A}_E$, αφού:

- $\nu(\emptyset) = 0$: Επειδή $\nu(\emptyset) = \nu(\emptyset \cap E) = \mu(\emptyset) = 0$.
- *Εάν $(G_i)_{i\in\mathbb{N}}$ είναι μια ακολουθία ξένων ανά δύο συνόλων του $\mathcal{A}_E$, τότε $\nu\big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} G_i\big) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \nu(G_i)$:* Έστω $(G_i)_{i\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία ξένων ανά δύο συνόλων του $\mathcal{A}_E$. Θεωρούμε ακολουθία $(H_i)_{i\in\mathbb{N}}$ συνόλων του $\mathcal{A}$ τέτοια ώστε $(G_i)_{i\in\mathbb{N}} = (H_i \cap E)_{i\in\mathbb{N}}$. Τα H_i δεν είναι κατ' ανάγκη ξένα, σίγουρα πάντως δεν τέμνονται στο E. Μπορούν λοιπόν μεταξύ τους να γίνουν ξένα, με τη διαδικασία $H_n \rightsquigarrow H_n \setminus \bigcup_{i<n} H_i$, έτσι ώστε οι τομές με το E να διατηρούνται. Επειδή επιπλέον η $\mathcal{A}$ είναι $\sigma-$άλγεβρα:

$$\nu\Big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} [H_i \cap E]\Big) = \nu\Big(\Big[\bigcup_{i\in\mathbb{N}} H_i\Big] \cap E\Big) = \mu\Big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} H_i\Big) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu(H_i) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \nu(H_i \cap E)$$

  όπου η τελευταία ισότητα προκύπτει από το ερώτημα (α).

□

Άσκηση 6 – (04 στο φυλλάδιο).

(α) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^k$. Αποδείξτε ότι το A είναι Lebesgue μετρήσιμο αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει Lebesgue μετρήσιμο $E \subseteq \mathbb{R}^k$ τέτοιο ώστε $\lambda^*(A \triangle E) < \varepsilon$.

(β) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^k$. Αποδείξτε ότι το A είναι Lebesgue μετρήσιμο αν και μόνο αν για κάθε $E \subseteq A$ και για κάθε $F \subseteq A^c$ ισχύει ότι $\lambda^*(E \cup F) = \lambda^*(E) + \lambda^*(F)$.

■

$\boxed{(\alpha)}$ *Λύση:* Η κατεύθυνση ($\Rightarrow$) είναι προφανής, από την εξωτερική κανονικότητα του μέτρου Lebesgue. Όσον αφορά την άλλη κατεύθυνση, θα αποδείξουμε τον ισχυρισμό για A πεπερασμένου (εξωτερικού) μέτρου Lebesgue. Εάν το A έχει μη πεπερασμένο μέτρο, τότε η ίδια διαδικασία μπορεί να εφαρμοστεί σε καθένα σύνολο ενός αριθμήσιμου καλύμματός του (έστω $I = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} I_j$, με $\lambda^*(I_j) < \infty$), το οποίο δεν το υπερβαίνει ($I = A$).

Έστω $(E_i)_{i\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία υποσυνόλων του $\mathbb{R}^k$ τέτοια ώστε $\lambda(E_n) < \dfrac{1}{n}$. Για κάθε E_n, χρησιμοποιούμε την εσωτερική κανονικότητα του μέτρου Lebesgue και βρίσκουμε (Lebesgue μετρήσιμα) σύνολα H_n τέτοια ώστε $\lambda(E_n) < \lambda(H_n) + \dfrac{1}{n}$. Παρατηρούμε ότι:

$$\lambda^*(E_i \cap A) \leq \lambda^*(E_i \cup A) = \lambda^*([H_i \cap A] \cup [H_i \triangle A]) \leq \lambda^*(H_i \cap A) + \frac{1}{n} \leq \lambda^*(E_i \cap A) + \frac{1}{n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda^*(E_i \cap A) \leq \lambda^*(E_i \cup A) \leq \lambda^*(E_i \cap A) + \frac{1}{n}$$

κι επομένως θα πρέπει να ισχύει $\lambda^*(A \cap \lim E_i) = \lambda^*(A \cup \lim E_i) = \ell$. Επειδή $A \cap E_i \subseteq A \subseteq A \cup E_i$, έχουμε ότι $\lambda^*(A) = \ell$. Τέλος, παρατηρούμε ότι $\lambda_*(A) = \lambda^*(A \cap \lim E_i) = \ell = \lambda^*(A \cup \lim E_i) = \lambda^*(A)$, οπότε $\lambda_*(A) = \lambda^*(A)$. Αυτό εν τέλει δείχνει ότι $A \in A_{\lambda^*}$, και συνεπώς το A είναι Lebesgue μετρήσιμο.

□

$\boxed{(\beta)}$ ($\Rightarrow$) Εάν το A είναι Lebesgue μετρήσιμο, τότε:

$$\lambda^*(E \cup F) = \lambda^*([E \cup F] \cap A) + \lambda^*([E \cup F] \cap A^c) = \lambda^*(E) + \lambda^*(F)$$

($\Leftarrow$) Αντιστρόφως, εάν $\lambda^*(E \cup F) = \lambda^*(E) + \lambda^*(F)$, τότε:

$$\lambda^*(E \cap F) = \lambda^*([E \cup F] \cap A) + \lambda^*([E \cup F] \cap A^c)$$

Για τυχαίο λοιπόν $K \subseteq \mathbb{R}^k$ θέτουμε $E = K \cap A$ και $F = K \cap A^c$. Από την προηγούμενη σχέση:

$$\lambda^*(K) = \lambda^*(K \cap A) + \lambda^*(K \cap A^c)$$

Το A είναι λοιπόν Lebesgue μετρήσιμο σύνολο.

□

Άσκηση 7 – (07 στο φυλλάδιο).

(α) Αποδείξτε ότι για κάθε $\varepsilon \in (0, 1)$ υπάρχει ανοικτό και πυκνό $U \subset [0, 1]$ με $\lambda(U) < \varepsilon$ και $\lambda(\partial U) > 1 - \varepsilon$.

(β) Αποδείξτε ότι υπάρχει ακολουθία $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ Lebesgue μετρήσιμων υποσυνόλων του $[0, 1]$ τέτοια ώστε όλα τα A_n να έχουν κενό εσωτερικό και η ένωσή τους μέτρο 1.

■

$\boxed{(\alpha)}$ *Λύση:* Θα δείξουμε κάτι ισχυρότερο: '*Για κάθε $\varepsilon \in (0, 1)$ υπάρχει ανοικτό και πυκνό $U \subset [0, 1]$ με $\lambda(U) = \varepsilon$ και $\lambda(\partial U) = 1 - \varepsilon$*'.

Έστω $(q_i)_{i\in\mathbb{N}}$ μια αρίθμηση των ρητών. Θεωρούμε το σύνολο $U = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} S(q_n, \varepsilon/2^n)$ και παρατηρούμε ότι αυτό είναι Lebesgue μετρήσιμο ως αριθμήσιμη ένωση τέτοιων. Επιπλέον:

$$\lambda(U) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda\big(S(q_n, \varepsilon/2^n)\big) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon$$

Το U είναι πυκνό αφού περιέχει το πυκνό σύνολο $\mathbb{Q}$, οπότε $U^c_{[0,1]} = \partial U$. Επειδή επιπλέον το U είναι Lebesgue μετρήσιμο, το $U^c_{[0,1]} = \partial U$ είναι μετρήσιμο και μάλιστα $\lambda(\partial U) = 1 - \varepsilon$.

□

$\boxed{(\beta)}$ *Λύση:* Θεωρούμε $A_n = \mathbb{Q}^c_{[0,1]} \cap [1/2^n,\ 1/2^{n+1}]$. Τα A_n δεν έχουν μη κενό εσωτερικό, αφού αν έστω και ένα από αυτά είχε μη κενό εσωτερικό, θα υπήρχε μπάλα στο $[0, 1]$ που θα αποτελούταν αποκλειστικά από άρρητους. Επιπλέον:

$$\lambda\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = \lambda\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Q}^c_{[0,1]} \cap [1/2^n,\ 1/2^{n+1}]\Big) = \lambda\Big(\mathbb{Q}^c_{[0,1]} \cup \Big[\bigcup_{n\in\mathbb{N}} [1/2^n,\ 1/2^{n+1}]\Big]\Big) = \lambda(\mathbb{Q}^c_{[0,1]}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = 1 - \lambda(\mathbb{Q} \cap [0, 1]) = 1$$

□