1ο Φυλλάδιο Ασκήσεων - Θεωρία Μέτρου

Αναστάσιος Φράγκος: ΑΜ 1112201900239 Σάββατο, 24 Οκτωβρίου 2021

Συμβολισμοί - Παρατηρήσεις

B^c_A : Είναι το συμπλήρωμα του B στο A. Δηλαδή, το $B - A,\ B \subseteq A$.
$(A \to B)$: Είναι το σύνολο των συναρτήσεων $A \to B$. Δηλαδή, το B^A.
$[n] := [1, n] \cap \mathbb{N}$.

Άσκηση 1 – (03 στο φυλλάδιο).

(α) Έστω (X, d) ένας μετρικός χώρος. Αποδείξτε ότι κάθε κλειστό υποσύνολο του X είναι G_δ σύνολο και κάθε ανοικτό υποσύνολο του X είναι F_σ σύνολο.

(β) Δώστε παράδειγμα G_δ συνόλου $A \subseteq \mathbb{R}$ που δεν είναι F_σ σύνολο.

(γ) Δώστε παράδειγμα Borel συνόλου $A \subseteq \mathbb{R}$ που δεν είναι ούτε G_δ ούτε F_σ σύνολο.

(δ) Έστω A, B δύο κλειστά υποσύνολα του $\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι το σύνολο $A + B := \{a + b \mid (a, b) \in A \times B\}$ δεν είναι απαραίτητα κλειστό. Δείξτε όμως ότι είναι πάντα F_σ.

■

(α) *Λύση:* Έστω K ένα κλειστό σύνολο στο X. Θεωρούμε την ακολουθία συνόλων $(K_i)_{i\in\mathbb{N}}$ η οποία ορίζεται ως:

$$K_n = \bigcup_{x \in \partial K} S(x, 1/n)$$

Τα σύνολα K_n είναι ανοικτά ως ένωση τέτοιων και επιπλέον:

$$\bigcap_{i\in\mathbb{N}} [K^\circ \cup K_i] = K$$

Οπότε το K είναι ένα G_δ σύνολο.

Αυτό αρκεί να δείξει ότι επίσης κάθε ανοικτό σύνολο είναι F_σ, μέσω του **Λήμματος 1.1** που θα αποδειχθεί στο (β).

□

(β) **Λήμμα 1.1:** *Έστω $A \subseteq X$ ένα F_σ σύνολο. Τότε το σύνολο A^c_X είναι G_δ.*

Απόδειξη: Έστω ότι η ακολουθία $(K_i)_{i\in\mathbb{N}}$ κλειστών συνόλων κατασκευάζει το σύνολο A, με την έννοια: $A = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} K_i$. Το λήμμα προκύπτει άμεσα με χρήση των κανόνων De Morgan:

$$A^c_X = \left[\bigcup_{i\in\mathbb{N}} K_i\right]^c_X = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} (K_i)^c_X$$

αφού τα συμπληρώματα κλειστών συνόλων είναι ανοικτά σύνολα.

△

Λύση: Το σύνολο των ρητών αποτελεί F_σ σύνολο, αλλά όχι G_δ. Πράγματι, εάν $(q_i)_{i\in\mathbb{N}}$ είναι μια αρίθμηση των ρητών, $\mathbb{Q} = \bigcup_{i\in\mathbb{N}}\{q_i\}$, με τα $\{q_i\}$ να αποτελούν κλειστά σύνολα - οπότε το εν λόγω σύνολο είναι F_σ.

Τα σύνολα $\mathbb{Q}$ και $\mathbb{Q}^c_\mathbb{R} = \bigcap_{i\in\mathbb{N}}\{q_i\}^c_\mathbb{R}$ μαζί συνηστούν το $\mathbb{R}$. Εάν το $\mathbb{Q}$ ήταν ένα G_δ σύνολο, τότε θα υπήρχε ακολουθία ανοικτών συνόλων $(g_i)_{i\in\mathbb{N}}$ τέτοια ώστε $\mathbb{Q} = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} g_i$. Σε αυτό το σημείο παρατηρούμε ότι:

$$\mathbb{R} = \left[\bigcap_{i\in\mathbb{N}}\{q_i\}^c_\mathbb{R}\right]^c_\mathbb{R} \cup \left[\bigcap_{i\in\mathbb{N}} g_i\right]^c_\mathbb{R} = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \left[\{q_i\} \cup (g_i)^c_\mathbb{R}\right]$$

Επομένως, από το θεώρημα του Baire, κάποιο από τα $\left[\{q_i\} \cup (g_i)^c_{\mathbb{R}}\right]^\circ$ δεν είναι κενό, το οποίο συνεπάγεται ότι κάποιο από τα $[(g_i)^c_{\mathbb{R}}]^\circ$ δεν είναι κενό. Επειδή $\mathbb{Q}^c_{\mathbb{R}} = \bigcup_{i\in\mathbb{N}}(g_i)^c_{\mathbb{R}}$, το σύνολο των αρήτων θα περιείχε ένα διάστημα μη 'μηδενικού μήκους' (δηλ. $\#[a,b] \geq 2$). Αυτό είναι άτοπο, αφού η πυκνότητα των ρητών θα μας έδινε έναν ρητό στο σύνολο $(g_i)^c_{\mathbb{R}}$, άρα και στο $\mathbb{Q}^c_{\mathbb{R}}$. Οπότε το $\mathbb{Q}$ δεν είναι G_δ.

Σύμφωνα με το **Λήμμα 1.1**, το σύνολο των αρρήτων είναι G_δ σύνολο, αλλά όχι F_σ.

$\square$

$\boxed{\text{(γ)}}$ *Λύση:* Έστω $A, B \subseteq \mathbb{R}$ δύο ανοικτά, ξένα σύνολα με μη κενό εσωτερικό. Έστω επίσης $(q_i)_{i\in\mathbb{N}}$ μια αρίθμηση των ρητών.

Θεωρούμε την ακολουθία $(G_i)_{i\in\mathbb{N}}$ υποσυνόλων του $\mathbb{R}$, η οποία ορίζεται ως:

$$G_n = A - \{q_n\}$$

Επίσης θεωρούμε την ακολουθία $(H_i)_{i\in\mathbb{N}}$ υποσυνόλων του $\mathbb{R}$, η οποία ορίζεται ως:

$$H_n = \{q_n\} \cap B$$

Παρατηρούμε ότι το σύνολο $A - \mathbb{Q} = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} G_i$ είναι G_δ και το $\mathbb{Q} \cap B = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} H_i$ είναι F_σ. Επίσης παρατηρούμε ότι τα $A - \mathbb{Q}$, $\mathbb{Q} \cap B$ είναι ξένα και ανήκουν στην Borel$-\sigma-$άλγεβρα $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Θεωρούμε το σύνολο $S = [A - \mathbb{Q}] \cup [B \cap \mathbb{Q}]$ και ισχυριζόμαστε ότι αυτό ανήκει στην $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Για να δείξουμε ότι πράγματι ανήκει στην $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, θα αποδείξουμε το επόμενο γενικότερο αποτέλεσμα:

Λήμμα 1.2: *Έστω $\mathcal{F}$ και $\mathcal{T}$ τα σύνολα των κλειστών και αντίστοιχα ανοικτών υποσυνόλων του συνόλου $X \neq \emptyset$. Τότε ισχύει:*

$$\sigma(\mathcal{F}) = \sigma(\mathcal{T})$$

Απόδειξη: Πράγματι, εφόσον η $\sigma(\mathcal{T})$ είναι $\sigma-$άλγεβρα:

$$\forall t \in \mathcal{T} \Rightarrow t^c_X \in \sigma(\mathcal{T}) \Rightarrow \mathcal{F} \subseteq \sigma(\mathcal{T}) \Rightarrow \sigma(\mathcal{F}) \subseteq \sigma(\mathcal{T})$$

Ακολουθώντας ανάλογη διαδικασία για την $\sigma(\mathcal{F})$, έπεται ότι $\sigma(\mathcal{T}) \subseteq \sigma(\mathcal{F})$, και κατ' επέκταση $\sigma(\mathcal{F}) = \sigma(\mathcal{T})$.

$\triangle$

Επομένως το S ανήκει στην $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, αφού γράφεται ως ένωση αριθμήσιμης τομής ανοικτών και αριθμήσιμης ένωσης κλειστών.

Το S δεν είναι ούτε F_σ, ούτε G_δ, αφού αν ήταν F_σ, το $A - \mathbb{Q}$ θα ήταν F_σ, κι αν ήταν G_δ, το $B \cap \mathbb{Q}$ θα ήταν G_δ.

$\square$

$\boxed{\text{(δ)}}$ *Λύση:* Έστω $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \big[0, 1 - 1/(2n)\big]$ και $B = \big[1 + 1/(2n), 2\big]$. Παρατηρούμε ότι:

$$A + B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \big[2 + 1/(2n), 3 - 1/(2n)\big] = (2, 3)$$

το οποίο είναι ανοικτό σύνολο.

Παρόλα αυτά, θα δείξουμε ότι το $A + B$ είναι πάντοτε F_σ. Πράγματι, ένα τυχόν κλειστό σύνολο K στο $\mathbb{R}$ γράφεται πάντα σαν αριθμήσιμη ένωση ξένων διαστημάτων, με αριθμήσιμο πλήθος σημείων συγκλινουσών ακολουθιών. Συγκεκριμένα, υπάρχει ϖ αριθμήσιμο υποσύνολο των συγκλινουσών ακολουθιών του $(\mathbb{N} \to \mathbb{R})$, και $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}, (b_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ακολουθίες τέτοιες ώστε $a_i < b_i < a_{i+1}$, έτσι ώστε:

$$K = \left[\bigcup_{i\in\mathbb{N}} [a_i, b_i]\right] \cup \left[\bigcup_{s\in\varpi} s(\mathbb{N}) \cup \{\lim s\}\right] = \bigcup_{(i,s)\in\mathbb{N}\times\varpi} \Big[[a_i, b_i] \cup s(\mathbb{N}) \cup \{\lim s\}\Big]$$

Θα αποδείξουμε ότι το άθροισμα ενός κλειστού συνόλου $[a, b]$ με τα σημεία μιας συγκλίνουσας ακολουθίας $(s_i)_{i\in\mathbb{N}}$ είναι ένα κλειστό σύνολο. Πράγματι:

$$[a, b] + \Big[s(\mathbb{N}) \cup \{\lim s\}\Big] = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} [a + s_i, b + s_i]$$

Επειδή η $(s_i)_{i\in\mathbb{N}}$ είναι συγκλίνουσα, θα υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $|s_{n+1} - s_k| < b - a$, για κάθε $n \geq k$. Υποθέτουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας (και για να γίνουν κάπως πιο υποφερτοί οι συμβολισμοί) ότι $s_n \geq 0$ για

$n \geq k$. Έχουμε λοιπόν ότι:

$$[a,b] + \Big[s(\mathbb{N}) \cup \{\lim s\}\Big] = \left[\bigcup_{i<k}[a+s_i, b+s_i]\right] \cup \left[\bigcup_{i\geq k}[a+s_k, b+s_i]\right] \cup [a+\lim s, b+\lim s]$$

Το σύνολο $\bigcup_{i\geq k}[a+s_k, b+s_i]$ είναι πάντοτε κλειστό, εκτός κι αν $\sup s(\mathbb{N}_{\geq k}) = \lim s$. Σε αυτήν όμως την περίπτωση, το σύνολο $\Big[\bigcup_{i\geq k}[a+s_k, b+s_i]\Big] \cup [a+\lim s, b+\lim s] = [a+s_k, b+\lim s]$ είναι κλειστό.

Έπεται λοιπόν ότι το $[a,b] + \big[s(\mathbb{N}) \cup \{\lim s\}\big]$ είναι ένα κλειστό σύνολο, ως πεπερασμένη ένωση τέτοιων.

Τέλος, εάν A, B είναι δύο κλειστά υποσύνολα των πραγματικών, μπορούμε να θεωρήσουμε (σύμφωνα με την προηγούμενη παρατήρηση) $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$, $(b_j)_{j\in\mathbb{N}}$ δύο ακολουθίες κλειστών συνόλων, τέτοιες ώστε τα στοιχεία τους να είναι:

- είτε υποδιαστήματα τα οποία είναι ξένα μεταξύ των άλλων υποδιαστημάτων στην ακολουθία,
- είτε εικόνες συγκλινουσών ακολουθιών, μαζί με το όριό τους.

και επιπλέον οι ίδιες να δημιουργούν τα A, B, με την έννοια: $A = \bigcup_i a_i,\ B = \bigcup_j b_j$. Γράφοντας το άθροισμα των A και B:

$$A + B = \left[\bigcup_i a_i\right] \cup \left[\bigcup_j b_j\right] = \bigcup_i \bigcup_j a_i \cup b_j = \bigcup_{i,j} a_i \cup b_j$$

παρατηρούμε ότι η ποσότητα $a_i \cup b_j$ είναι πάντοτε κλειστό σύνολο, λόγω της προηγούμενης παρατήρησης, του γεγονότος ότι η ένωση δύο κλειστών διαστήματων είναι κλειστό σύνολο, και του ότι η ένωση των εικόνων δύο ακολουθιών είναι κλειστό σύνολο.

Με άλλα λόγια, το $A + B$ είναι F_σ σύνολο.

● Η απόδειξη του ότι το $\rho = [a,b] + \big[s(\mathbb{N}) \cup \{\lim s\}\big]$ είναι κλειστό σύνολο δεν συμπεριέλαβε την περίπτωση όπου ένα υποδιάστημα γίνεται ημιευθεία. Αυτό δεν είναι μεγάλο πρόβλημα, αφού η ίδια διαδικασία θα μπορούσε να εφαρμοστεί στο σύνολο $\rho - [c, \infty) - (-\infty, d]$ για κάποια $c, d \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

□

Άσκηση 2 – (06 στο φυλλάδιο). Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου με $\mu(X) < \infty$. Έστω $(A_i)_{i\in I}$ οικογένεια ξένων συνόλων στην $\mathcal{A}$, με $\mu(A_i) > 0$ για κάθε $i \in I$. Αποδείξτε ότι το I είναι το πολύ άπειρο αριθμήσιμο. ■

Λήμμα 2.1: *Στο σύνολο $\mathbb{R}$ δεν υπάρχει υπεραριθμήσιμη ακολουθία $(B_i)_{i\in I}$ ανοικτών συνόλων τα οποία είναι μεταξύ τους ξένα.*

Απόδειξη: Πράγματι, εφόσον είναι ανοικτά, σε καθένα απ' αυτά υπάρχει ένα μη κενό, ανοικτό διάστημα (διότι οι ανοικτές μπάλες στο $\mathbb{R}$ είναι ανοικτά διαστήματα). Από την πυκνότητα των ρητών, σε καθένα από αυτά τα ανοικτά διαστήματα υπάρχει ένας ρητός, άρα και καθένα από τα σύνολα της ακολουθίας περιέχει ρητό.

Θεωρούμε την συνάρτηση $f : \{B_i \mid i \in I\} \to \mathbb{Q}$ η οποία ορίζεται ως:

$$f : B_i \mapsto q_i,\ \text{όπου } q_i \text{ είναι ένας ρητός στο } B_i$$

Η f είναι ένας μονομορφισμός, αφού τα B_i είναι ξένα. Επομένως:

$$\#I = \#\{B_i \mid i \in I\} = \#f[\{B_i \mid i \in I\}] \leq \#\mathbb{Q}$$

Επειδή το $\mathbb{Q}$ είναι αριθμήσιμο, το I είναι αριθμήσιμο, και κατ' επέκταση η ακολουθία $(B_i)_{i\in I}$ είναι αριθμήσιμη. △

Λύση: Θεωρούμε για κάθε σύνολο A_i ένα τυχαίο, ανοικτό υποδιάστημα (a_i, b_i) στο $\mathbb{R}$, τέτοιο ώστε $b_i - a_i = \mu(A_i)$. Υποθέτουμε προς άτοπο ότι το I είναι υπεραριθμήσιμο.

Σύμφωνα με το **Λήμμα 2.1**, η ακολουθία $\big((a_i, b_i)\big)_{i\in I}$ περιέχει μη ξένα σύνολα. Ισχυριζόμαστε ότι η επιλογή των διαστημάτων $[a_i, b_i]$ μπορεί να είναι τέτοια ώστε να αποτελεί υπεραριθμήσιμο κάλυμμα του $\mathbb{R}$. Πράγματι, εάν για μια ακολουθία $\big([a_i,b_i]\big)_{i\in I}$ υπάρχει ένα διάστημα $[a,b]$ το οποίο δεν καλύπτεται από αυτήν, επιλέγουμε ένα σύνολο $[a_j,b_j]$ τέτοιο ώστε:

$$[a_j,b_j] \subseteq \bigcup_{i\in I-\{j\}} [a_i,b_i]$$

Τέτοιο διάστημα υπάρχει, αφού αν δεν υπήρχε, τα σύνολα της μορφής του $(a_j,b_j) - \bigcup_{i\in I-\{j\}}(a_i,b_i)$ θα συνιστούσαν υπεραριθμίσιμη ακολουθία ανοικτών, ξένων ανά 2 συνόλων. Μάλιστα, υπάρχουν υπεραριθμήσιμα στο πλήθος τέτοια σύνολα, της μορφής του $[a_j,b_j]$.

Εάν $b-a \leq b_j - a_j$, τότε το σύνολο:

$$[a, a+b_j-a_j] \cup \left[\bigcup_{i\in I-\{j\}} [a_i,b_i]\right]$$

περιέχει το $[a,b]$.

Εάν $b-a > b_j-a_j$, διαλέγουμε μια υπεραριθμήσιμη οικογένεια διαστημάτων $\big([a_i,b_i]\big)_{i\in J}$ της μορφής του $[a_j,b_j]$, και παρατηρούμε ότι:

$$\exists \tilde{J} \subset J : \sum_{i\in\tilde{J}} |b_i-a_i| > b-a, \text{ αφού } \sum_{i\in J}|b_i-a_i| = \infty$$

Τότε το σύνολο:

$$\left[a, \sum_{i\in\tilde{J}} a_i\right] \cup \left[\bigcup_{i\in I-\tilde{J}} [a_i,b_i]\right]$$

περιέχει το $[a,b]$.

● Ενδεχομένως δεν φαίνεται από τον προηγούμενο συμβολισμό, αλλά ουσιαστικά εδώ έχουν τοποθετηθεί τα σύνολα της $\big([a_i,b_i]\big)_{i\in J}$ 'στην σειρά', 'το ένα μετά το άλλο'.

Εάν υπάρχει μενομωμένο σημείο a του συμπληρώματος $\big[\bigcup_{i\in I}[a_i,b_i]\big]^c$, τότε και πάλι το σύνολο:

$$[a, a+b_j-a_j] \cup \left[\bigcup_{i\in I-\{j\}} [a_i,b_i]\right]$$

περιέχει το a.

Σε κάθε περίπτωση λοιπόν, τα $[a_i,b_i]$ μπορούν να επιλεγούν έτσι ώστε η ακολουθία $\big([a_i,b_i]\big)_{i\in I}$ να αποτελεί υπεραριθμήσιμο κάλυμμα του $\mathbb{R}$.

Τέλος, για μία αρίθμηση των ρητών $(q_i)_{i\in\mathbb{N}}$, θεωρούμε συνάρτηση $\varphi : \mathbb{Q} \to \{A_i \mid i \in I\}$ η οποία ορίζεται ως:

$$\varphi(q_1) = A_{j(1)}, \text{ έτσι ώστε } q_1 \in [a_{j(1)}, b_{j(1)}]$$
$$\varphi(q_n) = \begin{cases} \varphi(q_k), \text{ εάν } q_n \in [a_{j(k)}, b_{j(k)}], \text{ για } k<n \\ A_{j(n)}, \text{ έτσι ώστε } q_n \in [a_{j(n)}, b_{j(n)}], \text{ σε διαφορετική περίπτωση} \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι τα σύνολα της οικογένειας $\big([a_i,b_i]\big)_{i\in\{i \mid A_i\in\varphi[\mathbb{Q}]\}}$ είναι ξένα και αποτελούν κάλυμμα του $\mathbb{R}$. Επιπλέον, επειδή η φ είναι επί του $\varphi[\mathbb{Q}]$, έπεται ότι $\#\varphi[\mathbb{Q}] \leq \#\mathbb{Q}$, και συνεπώς η οικογένεια $\varphi[\mathbb{Q}]$ είναι αριθμήσιμη.

Στον μετρίσιμο λοιπόν χώρο $(X,\mathcal{A})$, το σύνολο $\bigcup_{s\in\varphi[\mathbb{Q}]} s$ ανήκει στην $\sigma-$άλγεβρα $\mathcal{A}$. Επειδή το μ είναι μέτρο:

$$\mu\Big(\bigcup_{s\in\varphi[\mathbb{Q}]} s\Big) = \sum_{s\in\varphi[\mathbb{Q}]} \mu(s) = \sum_{A_j=s\in\varphi[\mathbb{Q}]} (b_j-a_j) = \infty$$

Αυτό είναι άτοπο αφού $\forall x\in X,\ \mu(x) \leq \mu(X) < \infty$. Επομένως άρεται η υπόθεση ότι το I είναι υπεραριθμήσιμο.

$\square$

Μια μικρή ιστορία

Αφού κατάφερα να βρω τη λύση (;) αυτή που παρατέθηκε, είχα σε ένα βαθμό απογοητευτεί από το πόσο μακροσκελής είναι. Οπότε κατά μια έννοια αμάρτησα και έψαξα σε διάφορα forums στο διαδίκτυο ανάλογα θέματα. Οι λύσεις που βρήκα ήταν κατά πολύ εξυπνότερες από την δική μου - μια που μου έκανε ιδιαίτερη εντύπωση είναι η ακόλουθη:

Σημείωση: Η λύση που ακολουθεί δεν είναι δημιούργημά μου.

Θεωρούμε για κάθε ρητό q το σύνολο $M_q = \{A_i \mid \mu(A_i) \geq q\}$. Παρατηρούμε ότι εάν το I είναι υπεραριθμήσιμο, κάποιο από τα M_q είναι υπεραριθμίσημο. Εάν $q > 0$, τότε μια οποιαδήποτε αριθμήσιμη ένωση στοιχείων του M_q δίνει σύνολο με άπερο μέτρο. Εάν $q = 0$, υπάρχει άλλος ένας ρητός p τέτοιος ώστε το σύνολο p να είναι υπεραριθμήσιμο, αφού αν το αντίθετο συνέβαινε, το σύνολο $\emptyset = \left[M_0 - M_p\right|_{\mathbb{Q}\ni p\to 0}$ θα ήταν υπεραριθμήσιμο. Και πάλι λιπόν, μια οποιαδήποτε αριθμήσιμη ένωση στοιχείων του M_p δίνει σύνολο με άπερο μέτρο.

Άσκηση 3 – (07 στο φυλλάδιο). Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου τέτοιος ώστε για κάθε $\emptyset \neq E \in \mathcal{A}$ ισχύει $0 < \mu(E) < \infty$. Για κάθε $x \in X$, ορίζουμε:

$$f(x) = \inf\{\mu(E) \mid E \in \mathcal{A},\ x \in E\}$$

Αποδείξτε ότι για κάθε $x \in X$ υπάρχει μοναδικό σύνολο $A_x \in \mathcal{A}$ τέτοιο ώστε $x \in A_x$ και $\mu(A_x) = f(x)$. Αποδείξτε επίσης ότι αν $x, y \in X$, τότε είτε $A_y = A_x$ ή $A_x \cap A_y = \emptyset$. ■

Λύση: Παρατηρούμε ότι το σύνολο $\{\mu(E) \mid E \in \mathcal{A},\ x \in E\}$ είναι φραγμένο, αφού $\forall E:\ 0 \leq \mu(E) \leq \mu(X) < \infty$.

Υποθέτουμε ότι το σύνολο $\{\mu(E) \mid E \in \mathcal{A},\ x \in E\}$ είναι κλειστό από κάτω, επομένως υπάρχει $\tilde{E} \in \mathcal{A}$ τέτοιο ώστε $\inf\{\mu(E) \mid E \in \mathcal{A},\ x \in E\} = \mu(\tilde{E})$.

Υποθέτουμε ότι δεν υπάρχει τέτοιο $\tilde{E}$ και θα καταλήξουμε σε άτοπο. Θεωρούμε $a = \inf\{\mu(E) \mid E \in \mathcal{A},\ x \in E\}$ και επίσης μια ακολουθία συνόλων $(E_i)_{i\in\mathbb{N}}$, τέτοια ώστε:

$$x \in E_n,\ \mu(E_n) \leq a + \frac{1}{n}$$

Παρατηρούμε ότι το σύνολο $\tilde{E} = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} E_i \supseteq \{x\}$ ανήκει στην $\sigma-$άλγεβρα $\mathcal{A}$, και επιπλέον:

$$a \leq \mu(\tilde{E}) \leq \lim_{\mathbb{N}\ni n\to\infty} a + \frac{1}{n} = a$$

Αυτό είναι άτοπο, αφού $\tilde{E} \in \{\mu(E) \mid E \in \mathcal{A},\ x \in E\}$ και $\mu(\tilde{E}) = a$.

Σε κάθε λοιπόν περίπτωση, το σύνολο $\{\mu(E) \mid E \in \mathcal{A},\ x \in E\}$ έχει ελάχιστο στοιχείο $\mu(\tilde{E})$, για κάποιο $\tilde{E} \in \mathcal{A},\ x \in \tilde{E}$. Θέτουμε σε κάθε περίπτωση $A_x = \tilde{E}$.

Έστω x, y δύο στοιχεία του X. Εάν $y \in A_x$, τότε $\mu(A_y) \leq \mu(A_x)$. Αναλόγως για το x, $\mu(A_x) \leq \mu(A_y)$ και συνεπώς $\mu(A_x) = \mu(A_y)$. Εάν τα $A_x,\ A_y$ δεν ταυτίζονται, τότε το σύνολο $A_y \cap A_x$ είναι μη κενό, έχει θετικό μέτρο, περιέχει το x και έχει μέτρο μικρότερο του $\mu(A_x) = \inf\{\mu(E) \mid E \in \mathcal{A},\ x \in E\}$. Αυτό είναι άτοπο, και συνεπώς $A_x = A_y$. Εάν $y \notin A_x$, τότε εάν $A_x \cap A_y \supseteq \{z\}$, έπεται από τους προηγούμενους συλλογισμούς ότι $A_x = A_z = A_y \Rightarrow A_x = A_y \Rightarrow y \in A_x$. Αυτό είναι άτοπο, και συνεπώς $A_x \cap A_y = \emptyset$.

□

Άσκηση 4 – (05 στο φυλλάδιο). Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας πλήρης χώρος μέτρου και $A, B, N \subseteq X$. Αποδείξτε ότι:

(α) Αν $\mu(N) = 0$ και $A \cup N \in \mathcal{A}$, τότε $A \in \mathcal{A}$.

(β) Αν $A \in \mathcal{A}$ και $\mu(A \triangle B) = 0$, τότε $B \in \mathcal{A}$ και $\mu(A) = \mu(B)$.

■

$\boxed{\text{(α)}}$ **Λήμμα 4.1:** *Εάν $A, B \in \mathcal{A}$, τότε $B - A \in \mathcal{A}$.*

Απόδειξη: Πράγματι, αρκεί να παρατηρήσουμε ότι το σύνολο A_X^c ανήκει στο $\mathcal{A}$, οπότε και το $B \cap A_X^c$ ανήκει στο $\mathcal{A}$. Επειδή $B - A = B \cap A_X^c$, το ζητούμενο έπεται.

$\triangle$

Λύση: Παρατηρούμε ότι το σύνολο $A - N$ ανήκει στο $\mathcal{A}$, αφού $[A \cup N] - N = A - N$ και $A \cup N,\ N \in \mathcal{A}$. Επίσης παρατηρούμε ότι:

$$A - N \subseteq A \subseteq A \cup N \text{ και } \mu\big([A \cup N] - [A - N]\big) = \mu(N) = 0$$

Επειδή ο χώρος μέτρου είναι πλήρης, το A ανήκει στο $\mathcal{A}$.

$\boxed{\text{(β)}}$ *Λύση:* Εφόσον τα σύνολα $A,\ A \triangle B$ ανήκουν στο $\mathcal{A}$, το σύνολο $A \triangle B - A = B - [A \cap B]$ ανήκει στο $\mathcal{A}$. Επειδή τα σύνολα $A \triangle B,\ B - [A \cap B]$ ανήκουν στο $\mathcal{A}$, το σύνολο $A \triangle B - \big[B - [A \cap B]\big] = A - [A \cap B]$ ανήκει στο $\mathcal{A}$.

Επειδή το μ είναι μέτρο και τα $A - [A \cap B],\ B - [A \cap B]$ ξένα:

$$0 = \mu(A \triangle B) = \mu\Big(\big(A - [A \cap B]\big) \cup \big(B - [A \cap B]\big)\Big) = \mu\big(A - [A \cap B]\big) + \mu\big(B - [A \cap B]\big)$$

Το μέτρο κάθε συνόλου είναι μη αρνητικό, επομένως $\mu\big(A - [A \cap B]\big) = \mu\big(B - [A \cap B]\big) = 0$.

Το σύνολο $A \cap B$ ανήκει στο $\mathcal{A}$, αφού τα $A,\ A - [A \cap B]$ ανήκουν στο $\mathcal{A}$ και $A - \big[A - [A \cap B]\big] = A \cap B$. Επίσης το B ανήκει στο $\mathcal{A}$, αφού $B = \big[B - [A \cup B]\big] \cup [A \cap B]$. Επομένως, $\mu(A) = \mu(A \cap B)$ και $\mu(B) = \mu(A \cap B)$, από το οποίο έπεται ότι $\mu(A) = \mu(B)$.

$\square$

Άσκηση 5 – (09 στο φυλλάδιο). Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου. Λέμε ότι το μ είναι ημιπεπερασμένο εάν για κάθε $A \in \mathcal{A}$ με $\mu(A) = \infty$ υπάρχει $B \in \mathcal{A}$ με $B \subset A$ και $0 < \mu(B) < \infty$.

(α) Αποδείξτε ότι κάθε $\sigma-$πεπερασμένο μέτρο είναι ημιπεπερασμένο και δώστε παράδειγμα μέτρου που δεν είναι ημιπεπερασμένο.

(β) Αν το μ είναι ημιπεπερασμένο, αποδείξτε ότι για κάθε $c > 0$ και για κάθε $E \in \mathcal{A}$ με $\mu(E) = \infty$ υπάρχει $F \subset E,\ F \in \mathcal{A}$, τέτοιο ώστε $c < \mu(F) < \infty$.

$\blacksquare$

$\boxed{\text{(α)}}$ *Λύση:* Έστω $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ οικογένεια συνόλων τέτοια ώστε:

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i = X,\ \mu(A_i) < \infty$$

Έστω επίσης E ένα σύνολο τέτοιο ώστε $\mu(E) = \infty$ (εάν τέτοιο E δεν υπάρχει, το αποτέλεσμα είναι τετριμμένο). Ισχυριζόμαστε ότι υπάρχει A_i μη μηδενικού μέτρου τέτοιο ώστε $A_i \cap E \neq \emptyset$. Πράγματι, εάν το αντίθετο συνέβαινε, είτε δεν θα υπήρχε A_i με την προηγούμενη ιδιότητα (άτοπο αφού η ένωση των A_i είναι ο χώρος X), ή όλα τα μέτρα αυτών των A_i είναι 0 (άτοπο γιατί η προσθετικότητα του μέτρου θα έδινε μέτρο 0 στο E). Το σύνολο λοιπόν $A_i \cap E$ ανήκει στην $\sigma-$άλγεβρα $\mathcal{A}$ ως τομή συνόλων στην $\mathcal{A}$, έχει θετικό μέτρο, είναι υποσύνολο του E, και επιπλέον $\mu(A_i \cap E) \leq \mu(A_i) < \infty$. Αυτό αποδεικνύει ότι κάθε $\sigma-$πεπερασμένο μέτρο είναι ημιπεπερασμένο.

Θεωρούμε $X = \big\{\emptyset, \{\emptyset\}\big\}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$ και ένα μέτρο $\mu : \mathcal{A} \to \{0, 1, \infty\}$ τέτοιο ώστε:

$$\mu :\ \emptyset \mapsto 0,\ \{\emptyset\} \mapsto 1,\ \big\{\{\emptyset\}\big\} \mapsto \infty,\ \big\{\emptyset, \{\emptyset\}\big\} \mapsto \infty$$

(Η μορφή των συνόλων δεν έχει τόσο μεγάλη σημασία - θα αρκούσαν τα $X,\ A,\ X - A,\ \emptyset$, όπου $\emptyset \subset A \subset X$).

Το $\mathcal{A}$ είναι σίγουρα $\sigma-$άλγεβρα, ως δυναμοσύνολο του χώρου. Το μ είναι μέτρο, αφού:

- $\mu(\emptyset) = \emptyset$.
- $\mu(\bigcup_{i \in \mathbb{N}}) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(A_i)$, για ξένα ανά δύο A_i.

Ο χώρος μέτρου $(X, \mathcal{A}, \mu)$ δεν είναι χώρος με ημιπεπερασμένο μέτρο, αφού το σύνολο $\big\{\{\emptyset\}\big\}$ δεν έχει υποσύνολο μη μηδενικού, πεπερασμένου μέτρου.

$\square$

$\boxed{\text{(β)}}$ *Λύση:* Έστω E ένα σύνολο στο $\mathcal{A}$ τέτοιο ώστε $\mu(E) = \infty$. Θεωρούμε S το σύνολο όλων των ακολουθιών του $\mathcal{P}(E) \cap \mathcal{A}$ που κατασκευάζονται με τον εξής τρόπο:

- Εφόσον το μ είναι ημιπεπερασμένο, υπάρχει $\mathcal{A} \ni E_1 \subset E$ τέτοιο ώστε $\mu(E_1) < \infty$.
- Το σύνολο $E - E_1$ ανήκει στο $\mathcal{A}$, λόγω του **Λήμματος 4.1**. Επιπλέον, λόγω της προσθετικότητας του μέτρου, $\mu(E - E_1) + \mu(E_1) = \infty \Rightarrow \mu(E - E_1) = \infty$.
- Εφόσον το μ είναι ημιπεπερασμένο, υπάρχει $\mathcal{A} \ni E_n \subset E - \bigcup_{i\in[n-1]} E_i$ τέτοιο ώστε $\mu(E_n) < \infty$.
- Το σύνολο $E - \bigcup_{i\in[n]} E_i$ ανήκει στο $\mathcal{A}$, λόγω του **Λήμματος 4.1**. Επιπλέον, λόγω της προσθετικότητας του μέτρου, $\mu\left(E - \bigcup_{i\in[n]} E_i\right) + \mu\left(\bigcup_{i\in[n]} E_i\right) = \infty \Rightarrow \mu\left(E - \bigcup_{i\in[n]} E_i\right) = \infty$.

Θεωρούμε $\gamma = \sup\{\limsup \mu(s_i) \mid s \in S\}$ και παρατηρούμε ότι εάν $\gamma = \infty$, το ζητούμενο έχει αποδειχθεί. Πράγματι, σε αυτήν την περίπτωση, για κάθε $M + \dfrac{1}{M} > 0$, υπάρχει $s \in S$ τέτοιο ώστε $\limsup \mu(s_i) \geq M + \dfrac{1}{M}$. Επιλέγουμε (από τον ορισμό του $\limsup$) σύνολο s_j της s, τέτοιο ώστε $\mu(s_j) > M + \dfrac{1}{M} - \dfrac{1}{M} = M$. Εάν η διαδικασία έχει πραγματοποιηθεί για $M = c > 0$, το σύνολο s_j έχει μέτρο $\mu(s_j) > c$.

Υποθέτουμε ότι $0 < \gamma < \infty$ και θα καταλήξουμε σε άτοπο.

Εάν υπάρχει σύνολο s_j της ακολουθίας s, για κάποια ακολουθία s, τέτοιο ώστε $\mu(s_j) = \gamma$, τότε για ένα σύνολο $s_k \neq s_i$, παρατηρούμε ότι $s_k \cup s_j \in \mathcal{A},\ s_k \cap s_i = \emptyset$ και επίσης $\mu(s_k \cup s_j) = \mu(s_k) + \mu(s_j) > \gamma$. Αυτό είναι άτοπο. Επομένως τέτοιο s_j δεν υπάρχει.

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ επιλέγουμε ${}^n s \in S$ τέτοια ώστε $\limsup \mu({}^n s_i) > \gamma - \dfrac{1}{n}$ και έπειτα ένα σύνολο ${}^n s_{i(n)} \in {}^n s(\mathbb{N})$ τέτοιο ώστε $\mu({}^n s_{i(n)}) > \gamma - \dfrac{1}{n}$. (Όλες αυτές οι επιλογές μπορούν να γίνουν, από τους ορισμούς των $\sup$, $\limsup$). Παρατηρούμε ότι το σύνολο $\bigcup_{i=1}^\infty {}^n s_{i(n)}$ έχει πάντοτε μέτρο:

$$\gamma \leq \mu\Big(\bigcup_{i=1}^\infty {}^n s_{i(n)}\Big) \leq \infty$$

αφού $\mu({}^n s_{i(n)}) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \gamma$. Εάν το μέτρο είναι ∞, επειδή καθένα από τα ${}^n s_{i(n)}$ έχει πεπερασμένο μέτρο, αποδεικνύουμε άμεσα την άσκηση, κι επομένως αυτή η περίπτωση δεν μας ενδιαφέρει. Εάν το μέτρο είναι πεπερασμένο, το σύνολο $\bigcup_{i=1}^\infty {}^n s_{i(n)} \subset E$ μπορεί να αποτελέσει αρχικό όρο μιας ακολουθίας του S, και συνεπώς:

$$\exists s \in S:\ \bar{s} = \bigcup_{i=1}^\infty {}^n s_{i(n)} = s_1 \Rightarrow \exists \bar{s} = s_1, s \in S:\ \mu(\bar{s}) = \gamma$$

Αυτό είναι άτοπο του αντίστοιχου αποτελέσματος που αποδείχθηκε προηγουμένως.

Σε κάθε περίπτωση, $\gamma = \infty$ και το ζητούμενο αποδεικνύεται.

□

Άσκηση 6 – (04 στο φυλλάδιο). Έστω $(X, \mathcal{A})$ μετρήσιμος χώρος και $\mathcal{D}$ οικογένεια μέτρων στην $\mathcal{A}$ με την εξής ιδιότητα:

$$\text{Εάν } \mu_1, \mu_2 \in \mathcal{D}, \text{ τότε } \exists \mu_3 \in \mathcal{D}:\ \mu_3 \geq \max\{\mu_1, \mu_2\}$$

Ορίζουμε:

$$\nu(A) = \sup\{\mu(A) \mid \mu \in \mathcal{D}\}$$

Αποδείξτε ότι το ν είναι μέτρο στην $\mathcal{A}$. ■

Απόδειξη: Πράγματι, το ν είναι μέτρο αφού:

- $\nu(\emptyset) = \sup\{\emptyset\} = 0$.
- Εάν $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ είναι μια ακολουθία ξένων συνόλων:

$$\sup\left\{\sum_{i=1}^\infty \mu(A_i) \mid \mu \in \mathcal{D}\right\} \leq \sum_{i=1}^\infty \sup\{\mu(A_i) \mid \mu \in \mathcal{D}\}$$

  Επιπλέον, ισχύει ότι:

$$\forall n \in \mathbb{N}:\ \sum_{i=1}^n \sup\{\mu(A_i) \mid \mu \in \mathcal{D}\} = \sup\left\{\sum_{i=1}^n \mu(A_i) \mid \mu \in \mathcal{D}\right\} \leq \sup\left\{\sum_{i=1}^\infty \mu(A_i) \mid \mu \in \mathcal{D}\right\}$$

και συνεπώς:

$$\forall n \in \mathbb{N}: \ \sum_{i=1}^{n} \sup\{\mu(A_i) \mid \mu \in \mathcal{D}\} \leq \sup\left\{\sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \;\middle|\; \mu \in \mathcal{D}\right\} \leq \sum_{i=1}^{\infty} \sup\{\mu(A_i) \mid \mu \in \mathcal{D}\}$$

Από το τελευταίο έπεται ότι:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \nu(A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \sup\{\mu(A_i) \mid \mu \in \mathcal{D}\} = \sup\left\{\sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \;\middle|\; \mu \in \mathcal{D}\right\} = \nu\Big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\Big)$$

$\square$