3ο Φυλλάδιο Ασκήσεων - Δακτύλιοι και Πρότυπα

Αναστάσιος Φράγκος: ΑΜ 1112201900239 Κυριακή, 09 Ιανουαρίου 2022

Συμβολισμοί - Παρατηρήσεις

1. Έστω $(R,+,\cdot)$ μια αλγεβρική δομή με πράξεις 'πρόσθεσης' και 'πολλαπλασιασμού'. Για κάθε $\emptyset \neq X \subseteq R$, ορίζουμε $(\!|X|\!) := \{r \cdot x \in R \mid (r,x) \in R \times X\}$. Εάν ειδικότερα το X αποτελείται από αριθμήσιμο πλήθος στοιχείων $x_1, x_2, x_3, \cdots$, τότε συμβολίζουμε $(\!|x_1, x_2, x_3, \cdots|\!) := (\!|X|\!)$. Εάν το X είναι κενό, κάνουμε την παραδοχή $(\!|\emptyset|\!) := \{0_R\}$.
2. $\gcd(m,n) = \{d \mid d$ είναι μέγιστος κοινός διαιρέτης των $m,n\}$.
3. $\operatorname{lcm}(m,n)$: Είναι το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των m,n.
4. $\mathbb{C} := \mathbb{R}^2$.
5. $[n] := [1,n] \cap \mathbb{N}$.
6. Εάν το A είναι σύνολο, ο πληθάριθμός του θα συμβολίζεται με $|A|$ είτε με $\#A$.
7. Έστω R δακτύλιος και $A, B \subseteq R$. Ορίζουμε:

$$A \cdot B := \left\{ \sum_{(s,t)\in I} a_s b_t \;\middle|\; a_s \in A,\ b_t \in B,\ I \subseteq |A| \times |B| \right\}$$

Επίσης, για $A \subseteq R,\ b \in R$, ορίζουμε $A \cdot b := A \cdot \{b\},\ b \cdot A := \{b\} \cdot A$.
8. Έστω R δακτύλιος και $A, B \subseteq R$. Ορίζουμε:

$$A + B := \{a + b \mid a \in A,\ b \in B\}$$

Επίσης, για $A \subseteq R,\ b \in R$, ορίζουμε $A + b := A + \{b\},\ b + A := \{b\} + A$.
9. Όλοι οι δακτύλιοι έχουν μοναδιαίο στοιχείο και οι ομομορφισμοί δακτυλίων διατηρούν τα μοναδιαία στοιχεία.
10. Στα παρακάτω ο δακτύλιος R θα είναι πάντοτε μη τετριμμένος και μεταθετικός, εκτός κι αν αναφέρεται κάτι άλλο.

Άσκηση 1

i. Να ταξινομηθούν ως προς τον ισομορφισμό οι αβελιανές ομάδες τάξης 392.

ii. Για καθεμία από τις ομάδες της προηγούμενης ταξινόμησης, να βρεθούν οι αναλλοίωτοι παράγοντες και οι στοιχειώδεις διαιρέτες.

iii. Πόσες ομάδες G στην απάντηση του i. ικανοποιούν τη σχέση $aG = \{0\}$, όπου $a = 14$;

iv. Πόσες ομάδες στην απάντηση του i. έχουν μέγιστο αριθμό στοιχείων τάξης 2;

■

Παρατήρηση 1.1: *Έστω G μία ομάδα τάξεως $n = \prod_{k\in[s]} p_i^{n_i} \in \mathbb{N}$. Γνωρίζουμε ότι η G είναι ισόμορφη με με ακριβώς μία ομάδα της μορφής:*

$$G \simeq \bigoplus_{k\in[s]} G_{p_k}$$

όπου p_k είναι πρώτοι, G_{p_k} είναι ομάδα ισόμορφη της p_k-πρωταρχικής συνιστώσας της G και έχει την μορφή:

$$G_{p_k} \simeq \bigoplus_{t\in[\delta_k]} \mathbb{Z}\Big/ (\!|p_k^{a_k(t)}|\!), \text{ όπου } \delta_k \in \mathbb{N},\ \text{η οικογένεια } \big(a_k(t)\big)_{t\in[\delta_k]} \text{ είναι φθίνουσα ως προς } t \text{ και } \sum_{t\in[\delta_k]} a_k(t) = n_k$$

Φυσικά το παρόν αποτελεί πόρισμα του Θεωρήματος Δομής ΙΙ. Να σημειωθεί επίσης ότι η ισομορφία $G_{p_k} \simeq \bigoplus_{t\in[\delta_k]} \mathbb{Z}\big/ (\!|p_k^{a_k(t)}|\!)$ μπορεί ειδικότερα να θεωρηθεί ισότητα - βέβαια αυτό δεν είναι κάτι που θα επηρεάσει ουσιαστικά το αποτέλεσμα στην άσκηση.

$\triangle$

$\boxed{\text{i.}}$ *Λύση:* Έστω G μια τυχούσα ομάδα τάξεως 392. Επειδή το 392 ισούται με $2^3 \cdot 7^2$, ουσιαστικά υπάρχουν δύο ειδών πρωταρχικές συνιστώσες - οι 2 και 7 (έστω G_2 και G_7 αντίστοιχα). Επειδή επιπλέον:

$$G_2 \in \left\{ \bigoplus_{r\in[3]} {}^{\mathbb{Z}}/_{\llparenthesis 2 \rrparenthesis},\ \left[{}^{\mathbb{Z}}/_{\llparenthesis 2 \rrparenthesis}\right] \oplus \left[{}^{\mathbb{Z}}/_{\llparenthesis 4 \rrparenthesis}\right],\ {}^{\mathbb{Z}}/_{\llparenthesis 8 \rrparenthesis} \right\}$$

και:

$$G_7 \in \left\{ \bigoplus_{r\in[2]} {}^{\mathbb{Z}}/_{\llparenthesis 7 \rrparenthesis},\ {}^{\mathbb{Z}}/_{\llparenthesis 49 \rrparenthesis} \right\}$$

από την **Παρατήρηση 1.1** έπεται ότι η G είναι ισόμορφη με κάποια G' από τις:

$$G' \in \left\{ \left[\bigoplus_{r\in[3]} {}^{\mathbb{Z}}/_{\llparenthesis 2 \rrparenthesis}\right] \oplus \left[\bigoplus_{r\in[2]} {}^{\mathbb{Z}}/_{\llparenthesis 7 \rrparenthesis}\right],\ \left[{}^{\mathbb{Z}}/_{\llparenthesis 2 \rrparenthesis}\right] \oplus \left[{}^{\mathbb{Z}}/_{\llparenthesis 4 \rrparenthesis}\right] \oplus \left[\bigoplus_{r\in[2]} {}^{\mathbb{Z}}/_{\llparenthesis 7 \rrparenthesis}\right],\ \left[{}^{\mathbb{Z}}/_{\llparenthesis 8 \rrparenthesis}\right] \oplus \left[\bigoplus_{r\in[2]} {}^{\mathbb{Z}}/_{\llparenthesis 7 \rrparenthesis}\right], \right.$$
$$\left. \left[\bigoplus_{r\in[3]} {}^{\mathbb{Z}}/_{\llparenthesis 2 \rrparenthesis}\right] \oplus \left[{}^{\mathbb{Z}}/_{\llparenthesis 49 \rrparenthesis}\right],\ \left[{}^{\mathbb{Z}}/_{\llparenthesis 2 \rrparenthesis}\right] \oplus \left[{}^{\mathbb{Z}}/_{\llparenthesis 4 \rrparenthesis}\right] \oplus \left[{}^{\mathbb{Z}}/_{\llparenthesis 49 \rrparenthesis}\right],\ \left[{}^{\mathbb{Z}}/_{\llparenthesis 8 \rrparenthesis}\right] \oplus \left[{}^{\mathbb{Z}}/_{\llparenthesis 49 \rrparenthesis}\right] \right\}$$

$\square$

$\boxed{\text{ii.}}$ *Λύση:* Εάν η συμβολισμοί μας είναι οι αντίστοιχοι της **Παρατήρησης 1.1**, στοιχειώδεις διαιρέτες μιας ομάδας G είναι οι αριθμοί $p_k^{a_k(t)}$, για τα διάφορα $k \in [s]$ και $t \in [\delta_k]$. Αντίστοιχα, οι αναλλοίωτοι παράγοντες βρίσκονται μέσω του Θεωρήματος Δομής I, και είναι οι όροι της φθίνουσας ακολουθίας:

$$\llparenthesis d_1 \rrparenthesis \supseteq \llparenthesis d_2 \rrparenthesis \supseteq \cdots \supseteq \llparenthesis d_{s'} \rrparenthesis$$

όπου η ακόλουθη ισομορφία αληθεύει:

$$G \simeq \bigoplus_{k\in[s']} {}^{\mathbb{Z}}/_{\llparenthesis d_k \rrparenthesis}$$

και καθορίζεται 'μονοσήμαντα' (ως προς συντροφικότητα) από το Θεώρημα Δομής I.

Στοιχειώδεις διαιρέτες	Αναλλοίωτοι παράγοντες
$2, 2, 2, 7, 7$	$\llparenthesis 2 \rrparenthesis \supseteq \llparenthesis 14 \rrparenthesis \supseteq \llparenthesis 14 \rrparenthesis$
$2, 4, 7, 7$	$\llparenthesis 14 \rrparenthesis \supseteq \llparenthesis 28 \rrparenthesis$
$8, 7, 7$	$\llparenthesis 7 \rrparenthesis \supseteq \llparenthesis 56 \rrparenthesis$
$2, 2, 2, 49$	$\llparenthesis 2 \rrparenthesis \supseteq \llparenthesis 2 \rrparenthesis \supseteq \llparenthesis 98 \rrparenthesis$
$2, 4, 49$	$\llparenthesis 2 \rrparenthesis \supseteq \llparenthesis 196 \rrparenthesis$
$8, 49$	$\llparenthesis 392 \rrparenthesis$

Για να αιτιολογήσουμε τους αναλλοίωτους παράγοντες, θα αναλύσουμε μόνο την περίπτωση των στοιχειωδών διαιρετών $2, 2, 2, 7, 7$. Οι υπόλοιπες θα μπορούν να γίνουν αναλόγως.

Εάν η ομάδα G είναι ισόμορφη της:

$$G \simeq \left[\bigoplus_{r\in[3]} {}^{\mathbb{Z}}/_{\llparenthesis 2 \rrparenthesis}\right] \oplus \left[\bigoplus_{r\in[2]} {}^{\mathbb{Z}}/_{\llparenthesis 7 \rrparenthesis}\right] \simeq \left[{}^{\mathbb{Z}}/_{\llparenthesis 2 \rrparenthesis}\right] \oplus \left[{}^{\mathbb{Z}}/_{\llparenthesis 2 \rrparenthesis} \oplus {}^{\mathbb{Z}}/_{\llparenthesis 7 \rrparenthesis}\right] \oplus \left[{}^{\mathbb{Z}}/_{\llparenthesis 2 \rrparenthesis} \oplus {}^{\mathbb{Z}}/_{\llparenthesis 7 \rrparenthesis}\right]$$

θα επιχειρήσουμε να τροποποιήσουμε την παραπάνω μορφή έτσι ώστε να συμφωνεί με την αντίστοιχη μορφή του Θεωρήματος Δομής I. Συγκεκριμένα, θα εφαρμόσουμε το Κινέζικο Θεώρημα σε καθεμία από τις αγκύλες και θα έχουμε εν τέλει ότι:

$$G \simeq \left[{}^{\mathbb{Z}}/_{\llparenthesis 2 \rrparenthesis}\right] \oplus \left[{}^{\mathbb{Z}}/_{\llparenthesis 14 \rrparenthesis}\right] \oplus \left[{}^{\mathbb{Z}}/_{\llparenthesis 14 \rrparenthesis}\right]$$

$\square$

$\boxed{\text{iii.}}$ Για να απαντήσουμε στο συγκεκριμένο, θα μελετήσουμε το αντίστοιχο ερώτημα 'ως προς ισομορφία' - θα βρούμε δηλαδή πόσες ομάδες της μορφής της G' έχουν την ιδιότητα $aG' = \{0\}$. Για να έχει όμως νόημα κάτι τέτοιο, θα χρειαστεί κανείς να δείξει ότι, μέσω ισομορφισμού ομάδων $\varphi : G \rightarrowtail\!\!\!\!\rightarrow G'$, αν $a \in \mathbb{Z}, g \in G$ και $a \cdot g = 0$, τότε $a \cdot \varphi(g) = 0$.

Λήμμα 1.1: *Έστω $\varphi : G \rightarrowtail\!\!\!\!\rightarrow G'$ ένας ισομορφισμός μεταξύ των ομάδων G, G'. Αν $a \in \mathbb{Z}$, $g \in G$ και $a \cdot g = 0$, τότε $a \cdot \varphi(g) = 0$.*

Απόδειξη: Κάθε ομάδα μπορεί με τετριμμένο τρόπο θα θεωρηθεί $\mathbb{Z}-$πρότυπο, κι επομένως κάθε ισομορφισμός φ μπορεί ισοδύναμα να ειδωθεί ως ισομορφισμός $\mathbb{Z}-$προτύπων. Το ζητούμενο λοιπόν είναι άμεσο.

$\triangle$

Λύση: Υπάρχει μοναδική ομάδα (ως προς τον ισομορφισμό) με την εν λόγω ιδιότητα, και μάλιστα αυτή είναι η:

$$\left[\bigoplus_{r\in[3]} {}^{\mathbb{Z}}\!/_{(\!|2|\!)}\right] \oplus \left[\bigoplus_{r\in[2]} {}^{\mathbb{Z}}\!/_{(\!|7|\!)}\right]$$

Πράγματι, για να ισχύει ο 'μηδενισμός' $14G = \{0\}$, θα πρέπει κάθε συνηστώσα του ευθέως αθροίσματος (στην αναγραφή της [ισόμορφης] ομάδας) να 'μηδενίζεται' από το 14. Θα είναι λοιπόν της μορφής $\left[\bigoplus_{r\in[h]} {}^{\mathbb{Z}}\!/_{(\!|2|\!)}\right] \oplus \left[\bigoplus_{r\in[m]} {}^{\mathbb{Z}}\!/_{(\!|7|\!)}\right]$ και κατ' επέκταση θα είναι ακριβώς η:

$$\left[\bigoplus_{r\in[3]} {}^{\mathbb{Z}}\!/_{(\!|2|\!)}\right] \oplus \left[\bigoplus_{r\in[2]} {}^{\mathbb{Z}}\!/_{(\!|7|\!)}\right]$$

$\square$

$\boxed{\text{iv.}}$ *Λύση:* Ο ισομορφισμός του υποερωτήματος i. είναι ισομορφισμός μεταξύ προσθετικών ομάδων. Μελετούμε λοιπόν και πάλι (σύμφωνα με το **Λήμμα 1.1**) το συγκεκριμένο ερώτημα 'ως προς ισομορφία'. Κάθε στοιχείο (x, y) της $G_2 \oplus G_7$ που έχει τάξη 2 ικανοποιεί τη σχέση:

$$2(x, y) = (2x, 2y) = \mathbf{0}_{G_2 \oplus G_7}$$

Ειδικότερα θα ισχύει ότι υπάρχει ακέραιος αριθμός ο οποίος είναι μισός του περιττού 7^t, $t \in \{1, 2\}$. Αυτό είναι άτοπο.

$\square$

Άσκηση 2 Έστω $M = \left[{}^{R}\!/_{(\!|p^4q|\!)}\right] \oplus \left[{}^{R}\!/_{(\!|pq^4|\!)}\right]$, R περιοχή κυρίων ιδεωδών και p, q ανάγωγα, μη συντροφικά.

i. Να βρεθεί η ακολουθία αναλλοίωτων παραγόντων του M.

ii. Αληθεύει ότι το M είναι κυκλικό $R-$πρότυπο;

iii. Ποιό είναι το πλήθος των ομομορφισμών $R-$προτύπων $M \to {}^{R}\!/_{(\!|1 + pq|\!)}$;

$\boxed{\text{i.}}$ *Λύση:* Για να βρούμε την ακολουθία των αναλλοίωτων παραγόντων του M, θα αναγράψουμε το M σε τέτοια μορφή ώστε να συμφωνεί με την 'μοναδική' (κατά συντροφικότητα) μορφή που εξασφαλίζεται από το Θεώρημα Δομής I.

$$M = \left[{}^{R}\!/_{(\!|p^4q|\!)}\right] \oplus \left[{}^{R}\!/_{(\!|pq^4|\!)}\right]$$

Συγκεκριμένα, εφαρμόζουμε το Κινέζικο Θεώρημα σε καθεμία από τις αγκύλες και παίρνουμε ότι:

$$M \simeq {}^{R}\!/_{(\!|q|\!)} \oplus {}^{R}\!/_{(\!|p^4|\!)} \oplus {}^{R}\!/_{(\!|p|\!)} \oplus {}^{R}\!/_{(\!|q^4|\!)} \simeq \left[{}^{R}\!/_{(\!|p|\!)} \oplus {}^{R}\!/_{(\!|q|\!)}\right] \oplus \left[{}^{R}\!/_{(\!|p^4|\!)} \oplus {}^{R}\!/_{(\!|q^4|\!)}\right]$$

Εφαρμόνοντας ξανά το Κινέζικο Θεώρημα σε καθεμία από τις αγκύλες, έπεται:

$$M \simeq {}^{R}\!/_{(\!|pq|\!)} \oplus {}^{R}\!/_{(\!|p^4q^4|\!)}$$

μια μορφή όπως αυτή που εξασφαλίζεται από το Θεώρημα Δομής I. Επομένως, η ακολουθία $(\!|pq|\!) \supseteq (\!|p^4q^4|\!)$ αποτελεί ακολουθία αναλλοίωτων παραγόντων του M.

$\square$

$\boxed{\text{ii.}}$ *Λύση:* Εάν προς άτοπο το M είναι κυκλικό, τότε το $\tilde{M} = {}^{R}\!/_{(\!|pq|\!)} \oplus {}^{R}\!/_{(\!|p^4q^4|\!)} \simeq M$ θα είναι κι αυτό (μέσω ισομορφισμού) κυκλικό και θα γράφεται στη μορφή:

$$\tilde{M} = {}^{R}\!/_{I}, \text{ για κάποιο υποπρότυπο } I \text{ του } R$$

Μάλιστα ισχύει ότι $I = \mathrm{Ann}_R(\tilde{M})$. Εφόσον η περιοχή R είναι κυρίων ιδεωδών και το I υποπρότυπο αυτής, το I έχει τη μορφή $(\!|d|\!)$ για κάποιο $d \in R$ (ειδικότερα ισχύει η ισότητα $d = p^4q^4$). Αυτό είναι άτοπο, αφού και οι δύο μορφές:

$$R\big/(\!|pq|\!) \oplus R\big/(\!|p^4q^4|\!) \quad \textbf{και} \quad R\big/(\!|d|\!)$$

είναι σύμφωνες με τη μορφή που δίδεται στο M μέσω του Θεωρήματος Δομής I, αλλά το πλήθος των αναλλοίωτων παραγόντων είναι διαφορετικό.

□

$\boxed{\text{iii.}}$ *Λύση:* Εφόσον $1 \in \gcd(p^4q^4, 1+pq)$ και η περιοχή R είναι κυρίων ιδεωδών, από το **Λήμμα 4.1, στο πρώτο φυλλάδιο**, $(\!|p^4q^4|\!) + (\!|1+pq|\!) = (\!|1|\!) = R$. Κατ' επέκταση:

$$\mathrm{Ann}(M) + \mathrm{Ann}\left(R\big/(\!|1+pq|\!)\right) = (\!|p^4q^4|\!) + (\!|1+pq|\!) = (\!|1|\!) = R$$

Από την **Άσκηση 9, στο πρώτο φυλλάδιο**, προκύπτει ότι κάθε ομομορφισμός είναι μηδενικός.

□

Άσκηση 3 Έστω G αβελιανή ομάδα τάξης $n = \prod_{k\in[s]} p_k^{n_k}$, όπου $p_1, \cdots, p_s$ διακεκριμένοι πρώτοι. Δείξτε τα εξής:

i. Υπάρχει σύνολο X γεννητόρων της G με $|X| \leq \sum_{k\in[s]} n_k$.

ii. Για κάθε σύνολο X γεννητόρων της G ισχύει $|X| \geq t$, όπου $d_1, \cdots, d_t$ είναι αναλλοίωτοι παράγοντες της G.

$\boxed{\text{i.}}$ *Λύση:* Αναγράφουμε την ομάδα G, σύμφωνα με την **Παρατήρηση 1.1** ως:

$$G \simeq \bigoplus_{k\in[s]} G_{p_k}$$

όπου p_k είναι πρώτοι, G_{p_k} είναι ομάδα ισόμορφη της p_k-πρωταρχικής συνηστώσας της G και έχει την μορφή:

$$G_{p_k} \simeq \bigoplus_{t\in[\delta_k]} \mathbb{Z}\big/(\!|p_k^{a_k(t)}|\!), \text{ όπου } \delta_k \in \mathbb{N}, \text{ η οικογένεια } \big(a_k(t)\big)_{t\in[\delta_k]} \text{ είναι φθίνουσα ως προς } t \text{ και } \sum_{t\in[\delta_k]} a_k(t) = n_k$$

Επιλέγουμε από κάθε συνηστώσα $\mathbb{Z}\big/(\!|p_k^{a_k(t)}|\!)$ την κλάση $\mathfrak{r}(k,t) = 1\big/(\!|p_k^{a_k(t)}|\!)$ και ορίζουμε:

$$\text{Για } n_0 = 0,\ X' = \left\{(0, 0, \cdots, 0, x_i = \mathfrak{r}(k,t), 0, \cdots, 0) \,\middle|\, \text{όπου } i = n_{k-1} + t\right\}$$

Εάν $G' = \bigoplus_{t\in[\delta_k]} \mathbb{Z}\big/(\!|p_k^{a_k(t)}|\!)$, το σύνολο X' παράγει κάθε συνηστώσα του G', κι άρα το ίδιο το G'. Εφόσον $G \simeq G'$, υπάρχει μεταξύ αυτών ισομορφισμός $\varphi : G \rightarrowtail\!\!\!\!\!\twoheadrightarrow G'$, ο οποίος απεικονίζει αντίστροφα το σύνολο γεννητόρων X' του G' σε σύνολο γεννητόρων $\varphi^{-1}(X')$ του G. Ορίζουμε λοιπόν $X = \varphi^{-1}(X')$ και έχουμε ότι:

$$|X| = |\varphi^{-1}(X')| = |X'| = \sum_{k\in[s]} \delta_\kappa \leq \sum_{k\in[s]} n_s$$

Αυτό είναι το ζητούμενο.

□

$\boxed{\text{ii}}$ Έστω $G \simeq \bigoplus_{k\in[t]} \mathbb{Z}\big/(\!|d_k|\!)$ μία γραφή του G σύμφωνα με το Θεώρημα Δομής I. Για τη λύση της άσκησης θα χρειαστούμε το ακόλουθο λήμμα:

Λήμμα 3.1: *Εάν p είναι ένας ανάγωγος παράγοντας που διαιρεί το d_1, τότε:*

$$\dim_{\mathbb{Z}_p}\left[G\big/pG\right] = t$$

Απόδειξη: Κατ' αρχάς παρατηρούμε ότι:

$$G\big/pG \simeq \left.\bigoplus_{k\in[t]} \mathbb{Z}\big/(\!|d_k|\!) \middle/ p\bigoplus_{k\in[t]} \mathbb{Z}\big/(\!|d_k|\!)\right. \simeq \bigoplus_{k\in[t]} \left.\mathbb{Z}\big/(\!|d_k|\!) \middle/ p\cdot \mathbb{Z}\big/(\!|d_k|\!)\right.$$

Εάν το ${}^{G}\big/_{pG}$ ειδωθεί ως $\mathbb{Z}_p-$πρότυπο, ορίζεται η διάσταση αυτού:

$$\dim_{\mathbb{Z}_p}\left[{}^{G}\big/_{pG}\right] = \dim_{\mathbb{Z}_p}\left[\bigoplus_{k\in[t]} {}^{\mathbb{Z}/(\!(d_k)\!)}\Big/_{p\,\cdot\,\mathbb{Z}/(\!(d_k)\!)}\right] = \sum_{k\in[t]} \dim_{\mathbb{Z}_p}\left[{}^{\mathbb{Z}/(\!(d_k)\!)}\Big/_{p\,\cdot\,\mathbb{Z}/(\!(d_k)\!)}\right]$$

επειδή το $\mathbb{Z}_p$ είναι σώμα. Στην 'τάξη' έχουμε δείξει ότι:

$$\dim_{\mathbb{Z}_p}\left[{}^{\mathbb{Z}/(\!(d_k)\!)}\Big/_{p\,\cdot\,\mathbb{Z}/(\!(d_k)\!)}\right] = \begin{cases} 0, & \text{εάν } p \nmid d_k \\ 1, & \text{εάν } p | d_k \end{cases}$$

επομένως, επειδή $p|d_1|d_2|\cdots|d_t$:

$$\forall k \in [t],\ \dim_{\mathbb{Z}_p}\left[{}^{\mathbb{Z}/(\!(d_k)\!)}\Big/_{p\,\cdot\,\mathbb{Z}/(\!(d_k)\!)}\right] = 1$$

Από αυτό εν τέλει έπεται το ζητούμενο, αφού:

$$\dim_{\mathbb{Z}_p}\left[{}^{G}\big/_{pG}\right] = \sum_{k\in[t]} = t$$

$\triangle$

<u>*Λύση:*</u> Έστω X ένα σύνολο γεννητόρων του G. Ορίζουμε το σύνολο:

$$X' = \left\{{}^{x}\big/_{pG} \mid x \in X\right\}$$

και παρατηρούμε ότι αυτό παράγει το ${}^{G}\big/_{pG}$, αφού το X παράγει το G. Κατ' επέκταση, $|X'| \geq t$. Επειδή επιπλέον $|X| \geq |X'|$, έχουμε εν τέλει ότι:

$$|X| \geq |X'| \geq t$$

$\square$

Άσκηση 4 Έστω $n = \prod_{k\in[s]} p_k^{n_s}$, όπου $p_1, \cdots, p_s$ διακεκριμένοι πρώτοι. Τότε κάθε μη μηδενικό, πεπερασμένα παραγόμενο $\mathbb{Z}_n-$πρότυπο είναι ισόμορφο με μοναδικό $\mathbb{Z}_n-$πρότυπο της μορφής:

$$\bigoplus_{k\in[s]} \mathbb{Z}_{d_k},\ \text{όπου } d_k > 1 \text{ και } d_1|d_2|\cdots|d_s|n$$

<u>*Λύση:*</u> Έστω A ένα πεπερασμένα παραγόμενο $\mathbb{Z}_n-$πρότυπο. Το A μπορεί να ειδωθεί ως $\mathbb{Z}-$πρότυπο, με τον τετριμμένο τρόπο:

$$\forall k \in \mathbb{Z},\ \forall a \in A,\ k \cdot a \rightsquigarrow {}^{k}\big/_{(\!(n)\!)} \cdot a$$

Επομένως, από το Θεώρημα Δομής Ι έπεται ότι υπάρχει γραφή του A:

$$A \simeq \left[\bigoplus_{i\in[s]} {}^{\mathbb{Z}}\big/_{(\!(d_i)\!)}\right] \oplus \mathbb{Z}^m,\ \text{με } d_1|d_2|\cdots|d_s$$

κι επειδή το A είναι πεπερασμένα παραγόμενο, $m = 0$. Ουσιαστικά το κομμάτι που απομένει είναι να 'δειχθεί' ότι η εν λόγω γραφή είναι, εκτός από ισόμορφη ως $\mathbb{Z}-$πρότυπο, ισόμορφη και ως $\mathbb{Z}_n-$πρότυπο με το A. Πράγματι, από τον τρόπο μετάβασης από τα $\mathbb{Z}$ στα $\mathbb{Z}_n-$πρότυπα, εάν φ είναι ένας ισομορφισμός ως $\mathbb{Z}-$πρότυπα, μπορούμε να ορίσουμε:

$$\forall k \in \mathbb{Z},\ \forall a \in A,\ \varphi(ka) = k\varphi(a) \rightsquigarrow \varphi\left({}^{k}\big/_{(\!(n)\!)} \cdot a\right) = {}^{k}\big/_{(\!(n)\!)} \cdot \varphi(a)$$

Το A είναι $\mathbb{Z}_n-$πρότυπο, επομένως $nA = \{0\}$ - λαμβάνοντας υπόψη τη γραφή που εξασφαλίζεται από το Θεώρημα Δομής ΙΙ, έπεται ότι:

$$n\left[\bigoplus_{i\in[s]} {}^{\mathbb{Z}}\big/_{(\!(d_i)\!)}\right] = \{0\} \Rightarrow \forall i \in [s],\ n \cdot {}^{\mathbb{Z}}\big/_{(\!(d_i)\!)} = \{0\} \Rightarrow \forall i \in [s],\ d_i | n$$

Η δομή του A είναι όμως τέτοια ώστε $d_1|d_2|\cdots|d_s$, επομένως $d_1|d_2|\cdots|d_s|n$. Τώρα λοιπόν έχει εξασφαλιστεί η αναγραφή του A όπως θα το επιθυμούσαμε:

$$A \simeq \bigoplus_{i\in[s]} \mathbb{Z}/_{(\!(d_i)\!)}, \text{ με } d_1|d_2|\cdots|d_s|n$$

□

Άσκηση 5 Να ταξινομηθούν ως προς την ομοιότητα οι πίνακες $A \in M_5(\mathbb{C})$ με $m_A(x) = (x-1)(x-2)^2$. ■

Παρατήρηση 5.1: *Έστω A ένας πίνακας του $M_n(\mathbb{K})$, όπου $n \in \mathbb{N}$ και το $\mathbb{K}$ είναι σώμα. Ο πίνακας A είναι όμοιος με μοναδικό πίνακα της (block-διαγωνίου) μορφής:*

$$\begin{pmatrix} C(d_1(x)) & & & \mathbf{O} \\ & C(d_2(x)) & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{O} & & & C(d_s(x)) \end{pmatrix}$$

όπου $d_k,\ k \in [s]$ είναι πολυώνυμα τέτοια ώστε $n = \sum_{k\in[s]} \deg d_k$ και $d_1|d_2|\cdots|d_s$, και $C(d_k(x)),\ k \in [s]$ είναι οι συνοδοί πίνακες αυτών. Επιπλέον, $m_A = \operatorname{lcm}(C(d_1), \cdots, C(d_s)) = d_s$

△

<u>*Λύση:*</u> Σύμφωνα με την **Παρατήρηση 5.1**, ο πίνακας A είναι όμοιος με μοναδικό πίνακα της (block-διαγωνίου) μορφής:

$$\begin{pmatrix} C(d_1(x)) & & & \mathbf{O} \\ & C(d_2(x)) & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{O} & & & C(d_s(x)) \end{pmatrix}$$

όπου $d_k,\ k \in [s]$ είναι πολυώνυμα τέτοια ώστε $5 = \sum_{k\in[s]} \deg d_k$ και $d_1|d_2|\cdots|d_s$, και $C(d_k(x)),\ k \in [s]$ είναι οι συνοδοί πίνακες αυτών. Κατά μία έννοια, οι δυνατές περιπτώσεις ομοιότητας εξαρτώνται αποκλειστικά από τα πολυώνυμα $d_1, \cdots, d_s$. Προσδιορίζοντας λοιπόν τα δυνατά πολυώνυμα αυτά, θα έχουμε απαντήσει στο ερώτημα.

Οι δυνατές περιπτώσεις για τα πολυώνυμα d_k είναι:

$$\begin{aligned} &d_1(x) = (x-1),\ d_2(x) = (x-1),\ d_3(x) = (x-1)(x-2)^2 \\ &d_1(x) = (x-2),\ d_2(x) = (x-2),\ d_3(x) = (x-1)(x-2)^2 \\ &d_1(x) = (x-1)(x-2),\ d_2(x) = (x-1)(x-2)^2 \\ &d_1(x) = (x-2)^2,\ d_2(x) = (x-1)(x-2)^2 \end{aligned}$$

Επομένως, όλες οι πιθανές κλάσεις ισοδυναμίας $A'/_\sim$ με $A \sim A'$, είναι αυτές με αντιπροσώπους:

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & \mathbf{O} \\ & 1 & & & \\ & & 0 & 0 & 4 \\ & & 1 & 0 & -8 \\ \mathbf{O} & & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & & & & \mathbf{O} \\ & 2 & & & \\ & & 0 & 0 & 4 \\ & & 1 & 0 & -8 \\ \mathbf{O} & & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -6 & & & \mathbf{O} \\ 1 & 3 & & & \\ & & 0 & 0 & 4 \\ & & 1 & 0 & -8 \\ \mathbf{O} & & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -4 & & & \mathbf{O} \\ 1 & 4 & & & \\ & & 0 & 0 & 4 \\ & & 1 & 0 & -8 \\ \mathbf{O} & & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

□

Άσκηση 6 Έστω $\mathbb{K}$ σώμα. Από την Γραμμική Άλγεβρα ΙΙ γνωρίζουμε ότι ένας πίνακας $A \in M_n(\mathbb{K})$ είναι:

i. Διαγωνίσιμος αν και μόνο αν το ελάχιστο πολυώνυμο $m_A(x)$ είναι γινόμενο διακεκριμένων πρωτοβάθμιων μονικών παραγόντων στο $\mathbb{K}[x]$.

ii. Τριγωνίσιμος αν και μόνο αν το $m_A(x)$ αναλύεται πλήρως στο $\mathbb{K}[x]$.

Εξηγήστε και στις δύο περιπτώσεις πώς έπεται η αντίστροφη κατεύθυνση ($\Leftarrow$) από τα αποτελέσματα του Κεφαλαίου 6. ■

Πρόταση 6.1: *Έστω $\mathbb{K}$ ένα σώμα. Έστω επίσης d ένα πολυώνυμο το οποίο αναλύεται σε γινόμενο διακεκριμένων, μονικών, πρωτοβάθμιων παραγόντων στο $\mathbb{K}[x]$ και $C(d)$ ο συνοδός πίνακας αυτού. Ο πίνακας $C(d)$ είναι διαγωνίσιμος στο $M_{\deg d}(\mathbb{K})$.*

Απόδειξη: Γνωρίζουμε ότι για το χαρακτηριστικό και ελάχιστο πολυώνυμο (έστω X_A, m_A) ενός συνοδού πίνακα $A = C(d)$ ισχύει:

$$X_A(x) = (-1)^{\deg d} d(x) \textbf{ και } m_A(x) = d(x)$$

κι επομένως, $X_A(x) = (-1)^{\deg d} m_A$. Το χαρακτηριστικό λοιπόν πολυώνυμό του είναι γινόμενο διακεκριμένων, πρωτοβάθμιων παραγόντων, κι άρα ο $C(d)$ είναι διαγωνίσιμος.

△

Πρόταση 6.2: *Έστω $\mathbb{K}$ ένα σώμα. Έστω επίσης d ένα πολυώνυμο το οποίο αναλύεται σε γινόμενο (όχι κατ' ανάγκη διακεκριμένων) μονικών, πρωτοβάθμιων παραγόντων στο $\mathbb{K}[x]$ και $C(d)$ ο συνοδός πίνακας αυτού. Ο πίνακας $C(d)$ είναι τριγωνίσιμος στο $M_{\deg d}(\mathbb{K})$.*

Απόδειξη: Κατ' αναλογία με την απόδειξη της **Πρότασης 6.1**, το χαρακτηριστικό πολυώνυμο X_A κάθε συνοδού πίνακα $A = C(d)$ (όπου το d έχει τις ιδιότητες της εκφώνησης), είναι γινόμενο (όχι κατ' ανάγκη διακεκριμένων) μονικών, πρωτοβάθμιων παραγόντων. Επομένως ο A είναι τριγωνίσιμος.

△

$\boxed{\text{i.}}$ *Λύση:* Εάν το ελάχιστο πολυώνυμο m_A ενός πίνακα A είναι γινόμενο διακεκριμένων, πρωτοβάθμιων, μονικών παραγόντων στο $\mathbb{K}[x]$, τότε η γραφή:

$$\begin{pmatrix} C(d_1(x)) & & & \mathbf{O} \\ & C(d_2(x)) & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{O} & & & C(d_s(x)) \end{pmatrix}, \text{ με } d_1|d_2|\cdots|d_s = m_A$$

που εξασφαλίζεται από την **Παρατήρηση 5.1**, έχει στη διαγώνιό της (σε block μορφή) συνοδούς πίνακες $C(d_k)$ με τα d_k να αναλύονται σε γινόμενο διακεκριμένων, μονικών, πρωτοβάθμιων παραγόντων στο $\mathbb{K}[x]$. Αυτό διότι καθένα από τα d_k διαιρεί το m_A, το οποίο αναλύεται σε γινόμενο διακεκριμένων, μονικών, προτοβάθμιων παραγόντων στο $\mathbb{K}[x]$.

Από την **Πρόταση 6.1** έπεται ότι καθένας από τους $C(d_k)$ είναι διαγωνίσιμος. Θεωρούμε λοιπόν P_k τους πίνακες αυτούς για τους οποίους οι $P_k^{-1} C(d_k) P_k$ καθίστανται σε διαγώνια μορφή και ορίζουμε:

$$P = \begin{pmatrix} P_1 & & & \mathbf{O} \\ & P_2 & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{O} & & & P_s \end{pmatrix}$$

Ο πίνακας P είναι αντιστρέψιμος (αφού $\det P = \prod_{k \in [s]} \det P_k \neq 0$) και επιπλέον ο πίνακας $P^{-1}AP$ καθίσταται διαγώνιος, αφού από τον τρόπο που ορίστηκε ο P, κάθε υποπίνακας $C(d_k)$ καθίσταται διαγώνιος.

□

$\boxed{\text{ii.}}$ *Λύση:* Εάν το ελάχιστο πολυώνυμο m_A ενός πίνακα A είναι γινόμενο διακεκριμένων, πρωτοβάθμιων, μονικών παραγόντων στο $\mathbb{K}[x]$, τότε η γραφή:

$$\begin{pmatrix} C(d_1(x)) & & & \mathbf{O} \\ & C(d_2(x)) & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{O} & & & C(d_s(x)) \end{pmatrix}, \text{ με } d_1|d_2|\cdots|d_s = m_A$$

που εξασφαλίζεται από την **Παρατήρηση 5.1**, έχει στη διαγώνιό της (σε block μορφή) συνοδούς πίνακες $C(d_k)$ με τα d_k να αναλύονται σε γινόμενο (όχι κατ' ανάγκη διακεκριμένων) μονικών, προτοβάθμιων παραγόντων στο $\mathbb{K}[x]$. Αυτό διότι καθένα από τα d_k διαιρεί το m_A, το οποίο αναλύεται σε γινόμενο (όχι κατ' ανάγκη διακεκριμένων) μονικών, προτοβάθμιων παραγόντων στο $\mathbb{K}[x]$.

Από την **Πρόταση 6.2** έπεται ότι καθένας από τους $C(d_k)$ είναι τριγωνίσιμος. Θεωρούμε λοιπόν P_k τους πίνακες αυτούς για τους οποίους οι $P_k^{-1}C(d_k)P_k$ καθίστανται σε τριγωνική μορφή και ορίζουμε:

$$P = \begin{pmatrix} P_1 & & & \mathbf{O} \\ & P_2 & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{O} & & & P_s \end{pmatrix}$$

Ο πίνακας P είναι αντιστρέψιμος (αφού $\det P = \prod_{k\in[s]} \det P_k \neq 0$) και επιπλέον ο πίνακας $P^{-1}AP$ καθίσταται τριγωνικός, αφού από τον τρόπο που ορίστηκε ο P, κάθε υποπίνακας $C(d_k)$ καθίσταται τριγωνικός.

□

Άσκηση 7 Έστω $A \in M_n(\mathbb{C})$. Χρησιμοποιώντας την κανονική μορφή Jordan, δείξτε ότι υπάρχουν $D, N \in M_n(\mathbb{C})$, όπου ο D είναι διαγωνίσιμος και ο N μηδενοδύναμος, τέτοιοι ώστε $A = D + N$ και $DN = ND$. ■

Παρατήρηση 7.1: *Έστω $\mathbb{K}$ ένα αλγεβρικά κλειστό σώμα και $A \in M_n(\mathbb{K})$. Τότε ο A είναι όμοιος με 'μοναδικό' πίνακα της μορφής:*

$$A \simeq \begin{pmatrix} J(\lambda_1,\nu_1) & & & \mathbf{O} \\ & J(\lambda_2,\nu_2) & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{O} & & & J(\lambda_s,\nu_s) \end{pmatrix}$$

όπου $\sum_{k\in[s]} \nu_k = n$ και:

$$J(\lambda_k,\nu_k) = \begin{pmatrix} \lambda_k & & & & \mathbf{O} \\ 1 & \lambda_k & & & \\ & 1 & \lambda_k & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ \mathbf{O} & & & 1 & \lambda_k \end{pmatrix} \in M_{\nu_k}(\mathbb{K})$$

Στη 'μοναδικότητα', η σειρά των υποπινάκων $J(\lambda_k,\nu_k)$ δεν λαμβάνεται υπόψη.

△

Λύση: Το $\mathbb{C}$ είναι ένα αλγεβρικά κλειστό σώμα, επομένως η **Παρατήρηση 7.1** εφαρμόζει, και ο A είναι όμοιος με μοναδικό πίνακα της μορφής:

$$A' = \begin{pmatrix} J(\lambda_1,\nu_1) & & & \mathbf{O} \\ & J(\lambda_2,\nu_2) & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{O} & & & J(\lambda_s,\nu_s) \end{pmatrix}$$

Κατ' επέκταση, υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας P τέτοιος ώστε $P^{-1}A'P = A$. Θεωρούμε τώρα τους πίνακες:

$$D(\lambda_k,\nu_k) = \begin{pmatrix} \lambda_k & & & & \mathbf{O} \\ & \lambda_k & & & \\ & & \lambda_k & & \\ & & & \ddots & \\ \mathbf{O} & & & & \lambda_k \end{pmatrix} \in M_{\nu_k}(\mathbb{K}) \textbf{ και } N(\lambda_k,\nu_k) = \begin{pmatrix} 0 & & & & \mathbf{O} \\ 1 & 0 & & & \\ & 1 & 0 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ \mathbf{O} & & & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_{\nu_k}(\mathbb{K})$$

και παρατηρούμε ότι οι $D(\lambda_k,\nu_k)$ είναι διαγώνιοι και οι $N(\lambda_k,\nu_k)$ μηδενοδύναμοι. Οι $N(\lambda_k,\nu_k)$ είναι πράγματι μηδενοδύναμοι, αφού:

$$N(\lambda_k,\nu_k)^2 = \begin{pmatrix} 0 & & & & & \mathbf{O} \\ 0 & 0 & & & & \\ 1 & 0 & 0 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ \mathbf{O} & & 1 & 0 & 0 & \end{pmatrix}$$

οπότε κανείς επαγωγικά μπορεί να δείξει ότι $D(\lambda_k,\nu_k)^{\nu_k} = \mathbf{0}_{M_{\nu_k}(\mathbb{K})}$.

Έχοντας αυτά υπόψη, ορίζουμε:

$$D' = \begin{pmatrix} D(\lambda_1,\nu_1) & & & & \mathbf{O} \\ & D(\lambda_2,\nu_2) & & & \\ & & D(\lambda_3,\nu_3) & & \\ & & & \ddots & \\ \mathbf{O} & & & & D(\lambda_s,\nu_s) \end{pmatrix}$$

και:

$$N' = \begin{pmatrix} N(\lambda_1,\nu_1) & & & & \mathbf{O} \\ & N(\lambda_2,\nu_2) & & & \\ & & N(\lambda_3,\nu_3) & & \\ & & & \ddots & \\ \mathbf{O} & & & & N(\lambda_s,\nu_s) \end{pmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι ο D' είναι διαγώνιος (αφού καθένας από τους $D(\lambda_k,\nu_k)$ είναι διαγώνιος) και ο N' είναι μηδενοδύναμος, αφού καθένας από τους $N(\lambda_k,\nu_k)$ είναι μηδενοδύναμος. Μάλιστα, $(N')^\nu = \mathbf{0}_{M_n(\mathbb{K})}$ με $\nu = \max\{\nu_k \mid k \in [s]\}$. Επιπλέον, επειδή ο πίνακας A μπορεί να γραφεί στη μορφή $A = P^{-1}A'P$:

$$A' = D' + N' \Rightarrow A = P^{-1}D'P + P^{-1}N'P$$

Ορίζουμε μια τελευταία φορά $D = P^{-1}D'P$, $N = P^{-1}N'P$ και ισχυριζόμαστε ότι:

- Ο D είναι διαγωνίσιμος. Πράγματι, είναι όμοιος με τον διαγώνιο D'.
- Ο N είναι μηδενοδύναμος. Πράγματι, $N^\nu = [P^{-1}N'P]^\nu = P^{-1}(N')^\nu P = \mathbf{0}_{M_n(\mathbb{K})}$
- Οι D και N αντιμετατίθενται. Πράγματι, αρκεί να δείξουμε ότι οι D', N' αντιμετατίθενται, και με τη σειρά του, γι' αυτό αρκεί να δείξουμε ότι οι $D(\lambda_k,\nu_k), N(\lambda_k,\nu_k)$ αντιμετατίθενται. Πράγματι, είναι υπόθεση πράξεων κανείς να δείξει ότι:

$$D(\lambda_k,\nu_k)N(\lambda_k,\nu_k) = \begin{pmatrix} 0 & & & & \mathbf{O} \\ \lambda_k & 0 & & & \\ & \lambda_k & 0 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ \mathbf{O} & & & \lambda_k & 0 \end{pmatrix} = N(\lambda_k,\nu_k)D(\lambda_k,\nu_k)$$

Το ζητούμενο λοιπόν αποδεικνύεται, αφού $A = D + N$ με D διαγωνίσιμο, N μηδενοδύναμο και $DN = ND$.

□

Άσκηση 8 Δείξτε ότι αν $A \in M_n(\mathbb{Q})$ με $A^4 = -Id_n$, τότε το n είναι πολλαπλάσιο του 4. Στη συνέχεια, ταξινομήστε ως προς ομοιότητα όλους τους παραπάνω A. ■

<u>*Λύση:*</u> Ουσιαστικά οι πίνακες της μορφής του A είναι όλοι οι πίνακες ρητών 'συντεταγμένων', οι οποίοι μηδενίζουν το πολυώνυμο $x^4 + 1 \in \mathbb{Q}[x]$.

Αρχικά δείχνουμε ότι το $x^4 + 1$ είναι ανάγωγο επί του $\mathbb{Q}[x]$. Πράγματι, επί του υπερσυνόλου $\mathbb{R}[x]$ το $x^4 + 1$ παίρνει τη μορφή:

$$x^4 + 1 = (x^2+1)^2 - 2x^2 = (x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1)$$

η οποία προφανώς δεν είναι ανάλυση στο $\mathbb{Q}[x]$, αλλά είναι στο $\mathbb{R}[x]$. Εάν υπήρχε μια επιπλέον ανάλυση στο $\mathbb{Q}[x]$, στο υπερσύνολο $\mathbb{R}[x]$ θα υπήρχαν δύο αναλύσεις του $x^4 + 1$. Αυτό είναι άτοπο.

Σύμφωνα λοιπόν με την **Παρατήρηση 5.1**, ο πίνακας A είναι όμοιος με μοναδικό πίνακα της (block-διαγωνίου) μορφής:

$$\begin{pmatrix} C(d_1(x)) & & & \mathbf{O} \\ & C(d_2(x)) & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{O} & & & C(d_s(x)) \end{pmatrix}$$

όπου $d_1|d_2|\cdots|d_s$ και $m_A = d_s$. Επειδή το m_A διαιρεί κάθε πολυώνυμο που μηδενίζει τον A, το m_A διαιρεί το x^4+1. Επειδή το τελευταίο είναι ανάγωγο, $m_A(x) = x^4+1$. Άρα, $4|n$ και η μοναδική κλάση ομοιότητας του A είναι αυτή με αντιπρόσωπο:

$$\begin{pmatrix} C(m_A(x)) & & & \mathbf{O} \\ & C(m_A(x)) & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{O} & & & C(m_A(x)) \end{pmatrix}$$

όπου:

$$C(m_A(x)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

□

Άσκηση 9 Έστω $\mathbb{K}$ σώμα. Πόσες κλάσεις συζυγίας, που αποτελούνται από στοιχεία τάξης 2, έχει η ομάδα $GL_7(\mathbb{K})$; ■

Λήμμα 9.1: *Έστω $\mathbb{K}$ ένα σώμα με $\mathrm{char}(\mathbb{K}) \neq 2$. Τότε κάθε στοιχείο $g \in \mathbb{K}$ με $g^2 = 1$ είναι ταυτοτικό ή το αντίθετο αυτού.*

Απόδειξη: Έστω $\mathrm{char}(\mathbb{K}) = 2n+1,\ n \in \mathbb{N}_0$. Τότε $g^{2n+1} = 1 \Rightarrow (g^2)^n \cdot g = 1 \Rightarrow g = 1$.

Εάν $\mathrm{char}(\mathbb{K}) = 2n,\ n \in \mathbb{N}_0 - \{1\}$, επιλέγουμε στοιχείο $a \in \mathbb{K} - \{0, 1, g\}$ και θεωρούμε $k \in \mathbb{K}$ τέτοιο ώστε $gk = a$. Ισχύει ότι:

$$g^2k^2 = a^2 \Rightarrow k^2 = a^2 \Rightarrow (k-a)(k+a) = 0 \Rightarrow k = \pm a$$

και κατ' επέκταση:

$$ga = a \textbf{ ή } g(-a) = a \Rightarrow a(g-1) = 0 \textbf{ ή } -a(g+1) = 0 \overset{a\neq 0}{\Rightarrow} g = \pm 1$$

△

<u>*Λύση:*</u> Οι κλάσεις συζυγίας της $GL_7(\mathbb{K})$ είναι ακριβώς οι κλάσεις ομοιότητας των πινάκων. Εάν δύο πίνακες A και B ανήκουν στην ίδια κλάση ομοιότητας ($A \simeq B$) και επιπλέον $A^2 = Id$, τότε $B^2 = Id$. Πράγματι, εφόσον $A \simeq B$ υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας P τέτοιος ώστε:

$$P^{-1}AP = B \Rightarrow B^2 = P^{-1}A^2P = P^{-1}P = Id$$

Επομένως αρκεί σε κάθε κλάση ομοιότητας να μελετήσουμε έναν αντιπρόσωπο για να απαντήσουμε στο εν λόγω ερώτημα.

Σύμφωνα με την **Παρατήρηση 5.1**, κάθε πίνακας $A \in GL_7(\mathbb{K})$ είναι όμοιος με πίνακα της μορφής:

$$A' = \begin{pmatrix} C(d_1(x)) & & & \mathbf{O} \\ & C(d_2(x)) & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{O} & & & C(d_s(x)) \end{pmatrix}, \text{ με } d_1|d_2|\cdots|d_s$$

Εάν κάποιος από τους συνοδούς πίνακες (έστω ο $C(d_t)$) είναι διάστασης μεγαλύτερης από 1×1, τότε $C(d_t)^2 \neq Id$, αφού το πάνω αριστερά στοιχείο του είναι 0. Επομένως, εάν ο A έχει τάξη 2, ο A' θα έχει τάξη 2 (ως όμοιός του) κι επομένως καθένας από τους συνοδούς πίνακες στην block μορφή του A' έχει τάξη 2. Καθε λοιπόν τέτοιος συνοδός είναι διάστασης 1×1, οπότε ο A' μπορεί ισοδύναμα να γραφεί ως:

$$A' = \begin{pmatrix} a & & & \mathbf{O} \\ & a & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{O} & & & a \end{pmatrix}$$

Το ερώτημα λοιπόν πόσοι πίνακες της μορφής του A' έχουν τάξη 2 είναι ισοδύναμο με το πόσα στοιχεία του $\mathbb{K}$ έχουν τάξη 2.

Εδώ θα χρησιμοποιήσουμε το **Λήμμα 9.1**. Εάν $\mathrm{char}(\mathbb{K}) = 2$, τότε κάθε κλάση ομοιότητας αποτελείται από στοιχεία τάξης 2. Εάν $\mathrm{char}(\mathbb{K}) \neq 2$, τότε από το **Λήμμα 9.1** μόνο οι κλάσεις ομοιότητας με αντιπροσώπους $-Id,\ Id$ ικανοποιούν την εν λόγω υπόθεση.

$\square$