3 Εφαρμογές των Βάσεων Gröbner

(Μηχανική / Γεωμετρία κατά Klein / Θεωρία Γραφημάτων)

Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Φράγκος Αναστάσιος

Από τις αγαπημένες μου φωτογραφίες: *Χιονοπόλεμος λευκών περιστεριών στην Ανταρκτική*.

Εφαρμογές στην Μηχανική

Ορισμός: ***Το Πολυώνυμο Taylor πολυμεταβλητών συναρτήσεων:***
Έστω f μία απείρως διαφορίσιμη συνάρτηση $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$. Ορίζουμε πολυώνυμο Taylor n τάξεως στο σημείο $\vec{\delta}$ το πολυώνυμο:

$$T_{n,f}(\vec{x}+\vec{\delta}) = f(\vec{\delta}) + \sum_{i\in[n]} \frac{1}{i!}\big(\vec{x}\cdot\nabla\big)^i f(\vec{\delta})$$

Παρατήρηση: ***Προσέγγιση συναρτήσεων μέσω του Πολυωνύμου Taylor:*** Είναι φανερό ότι κάθε πολυώνυμο Taylor προσεγγίζει τις τιμές της αντίστοιχης συνάρτησης από την οποία ορίζεται. Η προσέγγιση βέβαια δεν είναι πάντοτε τέλεια (ενδ. να *μην* υπάρχει σύγκλιση του πολυωνύμου προς την συνάρτηση καθώς η τάξη αυξάνει), είναι όμως αρκετά ικανοποιητική στις περισσότερες περιπτώσεις, σε περιοχές κοντινές του σημείο προσέγγισης $\vec{\delta}$. Δεδομένου ότι οι εφαρμογές που θα παρουσιαστούν λαμβάνουν χώρα σε "μικρές περιοχές" (κυρτά και φραγμένα σύνολα μικρής διαμέτρου), θα θεωρούμε ότι η προσέγγιση του πολυωνύμου Taylor είναι ικανοποιητική, χωρίς να αναλύουμε με λεπτομέριες κάθε φορά γιατί ισχύει αυτό ή πόση ακρίβεια χρειάζεται.

Πρόταση: ***Η Εξίσωση Διάχυσης της Θερμότητας στον τρισδιάστατο, Ευκλείδειο χώρο:***
I. *Συνάρτηση διάχυσης της Θερμότητας είναι κάθε συνάρτηση u, λύση της μη γραμμικής διαφορικής εξίσωσης:*

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \alpha\nabla\cdot\nabla u = 0$$

όπου α είναι η θερμική διαχυτικότητα του προβλήματος.

II. *Κάθε συνάρτηση διάχυσης της Θερμότητας είναι απείρως διαφορίσιμη. Αυτό προκύπτει, εάν γραφεί ο γενικός τύπος / γενική λύση:*

$$u(\vec{x},t) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{\sqrt{(4\pi kt)^3}} exp\left(-\frac{(\vec{x}-\vec{y})\cdot(\vec{x}-\vec{y})}{4kt}\right) u(\vec{y},0)\ dy,\ \text{όπου } k\in\mathbb{R}^*_+$$

Πρόβλημα: ***Θερμικά ευαίσθητα μέρη σε Υπολογιστικά Μηχανήματα:***
Έστω ότι ένα υπολογιστικό μηχάνημα αποτελείται από k μέρη, εκ των οποίων τα l είναι θερμικά ευαίσθητα. Δεδομένου ότι η κατασκευή πρέπει να γίνει σε χωρίο Π, να βρεθούν οι βέλτιστες θέσεις τοποθέτησης των l θερμικά ευαίσθητων μερών δεδομένου ότι:

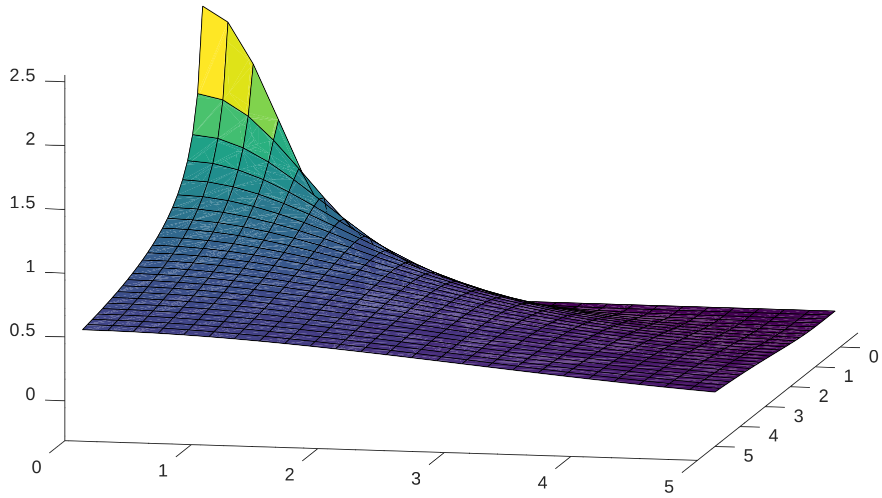
- *Τα $k-l$ θερμικά μη ευαίσθητα μέρη έχουν τοποθετηθεί στο Π,*
- *Η συνάρτηση $u_{\vec{y}}$, όπου $\vec{y}\in\{0,1\}^{k-l}$ είναι η συνάρτηση διάχυσης θερμότητας δεδομένου του ότι λειτουργούν τα μέρη για τα οποία αντιστοιχούν μονάδες στο διάνυσμα $\vec{y}$,*
- *Τα θερμικά ευαίσθητα μέρη παράγουν αμελητaία ποσά θερμότητας.*

Σύμφωνα με τον Ορισμό "**Ορισμός:** ***Το Πολυώνυμο Taylor πολυμεταβλητών συναρτήσεων***" και την Πρόταση: "**Πρόταση:** ***Η Εξίσωση Διάχυσης της Θερμότητας στον τρισδιάστατο, Ευκλείδειο χώρο***", θεωρούμε $T_{n,u_{\vec{y}}}$ τα πολυώνυμα Taylor που προσεγγίζουν τις $u_{\vec{y}}$ σε τυχαίο σημείο $\vec{\delta}$ του Π. Για να βρούμε τις βέλτιστες θέσεις τοποθέτησης, ουσιαστικά χρειάζεται να βρεθούν κοινά σημεία ελαχίστου (ή σημεία που προσεγγίζουν ελάχιστο) όλων των συναρτήσεων $u_{\vec{y}}$. Ισοδύναμα, χρειάζεται να βρεθούν τα σημεία μηδενισμού των διαφορικών των $T_{n,u_{\vec{y}}}$ (ενδεχόμενες θέσεις ακροτάτου) για τυχαίο χρόνο και έπειτα να διαπιστωθεί ποιά από αυτά αντιστοιχούν σε (τοπικό) ελάχιστο. Δηλαδή, χρειάζεται στο πρώτο βήμα να λυθεί το πολυωνυμικό σύστημα:

$$\begin{gathered}
\nabla T_{n,u_{(1,0,0,\cdots,0)}}(\vec{x},t_0) = 0 \\
\nabla T_{n,u_{(0,1,0,\cdots,0)}}(\vec{x},t_0) = 0 \\
\nabla T_{n,u_{(0,0,1,\cdots,0)}}(\vec{x},t_0) = 0 \\
\vdots \\
\nabla T_{n,u_{(1,1,0,\cdots,0)}}(\vec{x},t_0) = 0
\end{gathered}$$

$$\nabla T_{n,u_{(1,0,1,\cdots,0)}}(\vec{x},t_0) = 0$$
$$\vdots$$
$$\nabla T_{n,u_{(1,1,1,\cdots,1)}}(\vec{x},t_0) = 0$$

Για την επίλυση του πολυωνυμικού συστήματος αυτού μπορούν να χρησιμοποιηθούν οι τεχνικές που αναφέρθηκαν και αναλύθηκαν στο μάθημα, περί των βάσεων Gröbner.



Σχήμα M1: *Μία υποπερίπτωση της Εξίσωσης Διάχυσης της Θερμότητας:* $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial u}{\partial t}$. *Χρησιμοποιείται για να περιγράψει την διάχυση της θεμότητας στην μία διάσταση και στον χρόνο. Στο σχήμα εικονίζεται η* $\sqrt{\dfrac{1}{t}}exp\left(\dfrac{-x^2}{4t}\right)$, *που είναι μία λύση της διαφορικής εξίσωσης αυτής.*

Εφαρμογές στην Γεωμετρία κατά Klein

Ορισμός: ***Πραγματικά Εσωτερικά γινόμενα και Τετραγωνικές μορφές αυτών:***
I. ***Εσωτερικό γινόμενο:*** *Έστω V διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{R}$ και έστω $\mathcal{E} : V^2 \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση με τις ιδιότητες:*

- *Συμμετρικότητα:* $(\forall x, y \in V)[\mathcal{E}(x,y) = \mathcal{E}(y,x)]$
- *Διγραμμικότητα:* $(\forall x, y, z \in V, \kappa, \lambda \in \mathbb{R})\Big[[\mathcal{E}(\kappa x + \lambda y, z) = \kappa\mathcal{E}(x,z) + \lambda\mathcal{E}(y,z)] \wedge [\mathcal{E}(z, \kappa x + \lambda y) = \kappa\mathcal{E}(z,x) + \lambda\mathcal{E}(z,y)]\Big]$
- *Μη εκφυλισμός:* *Εάν $\forall y \in V$ ισχύει $\mathcal{E}(x,y) = 0$, τότε υποχρεωτικά $x = 0$*

ονομάζεται εσωτερικό γινόμενο του διανυσματικού χώρου V. Εάν η συνάρτηση αυτή $\mathcal{E}$ έχει επίσης την ιδιότητα:

- *Θετικά ορισμένη:* $(\forall x \in V)\Big[[\mathcal{E}(x,x) \geq 0] \wedge [\mathcal{E}(x,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0]\Big]$

τότε το εσωτερικό γινόμενο $\mathcal{E}$ ονομάζεται θετικά ορισμένο.

II. ***Τετραγωνικές μορφές:*** *Έστω $\mathcal{E}$ ένα εσωτερικό γινόμενο του V. Ορίζουμε ως τετραγωνική μορφή του $\mathcal{E}$ την συνάρτηση $T : V \to \mathbb{R}$ με τύπο:*

$$T(x) = \mathcal{E}(x,x)$$

Παρατήρηση: ***Η διγραμμικότητα του εσωτερικού γινομένου:*** Στην δεύτερη ιδιότητα του ορισμού "**I.**" η έννοια της διγραμμικότητας περιγράφεται ως:

$$(\forall x, y, z \in V, \kappa, \lambda \in \mathbb{R})\Big[[\mathcal{E}(\kappa x + \lambda y, z) = \kappa\mathcal{E}(x,z) + \lambda\mathcal{E}(y,z)] \wedge [\mathcal{E}(z, \kappa x + \lambda y) = \kappa\mathcal{E}(z,x) + \lambda\mathcal{E}(z,y)]\Big]$$

Κανείς όμως αν λάβει υπ' όψιν το πρώτο σημείο του ίδιου ορισμού (*Συμμετρικότητα*) μπορεί να χρησιμοποιήσει μία απλούστερη έννοια διγραμμικότητας:

$$(\forall x, y, z \in V, \kappa, \lambda \in \mathbb{R})[\mathcal{E}(\kappa x + \lambda y, z) = \kappa\mathcal{E}(x,z) + \lambda\mathcal{E}(y,z)]$$

χωρίς να δημιουργήσει ουσιαστικές αλλαγές στον ορισμό του εσωτερικού γινομένου.

Πρόταση: ***Σχέση Εσωτερικών γινομένων - Τετραγωνικών μορφών:***
Ένα εσωτερικό γινόμενο $\mathcal{E}$ στον V ορίζει μία τετραγωνική μορφή T ως:

$$T(x) = \mathcal{E}(x,x)$$

αλλά ισχύει και το αντίστροφο. Εάν κανείς γνωρίζει τον τύπο της τετραγωνικής μορφής T μπορεί να προσδιορίσει οποιαδήποτε τιμή του εσωτερικού γινομένου $\mathcal{E}$ ως εξής:

$$\mathcal{E}(x,y) = \frac{1}{2} \cdot \big(T(x+y) - T(x) - T(y)\big)$$

Πράγματι, αρκεί κανείς να παρατηρήσει ότι:

$$T(x+y) - T(x) - T(y) = \mathcal{E}(x+y, x+y) - \mathcal{E}(x,x) - \mathcal{E}(y,y) = \mathcal{E}(x,x) + 2\mathcal{E}(x,y) + \mathcal{E}(y,y) - \mathcal{E}(x,x) - \mathcal{E}(y,y) = 2\mathcal{E}(x,y)$$

Πρόταση: ***Τα Εσωτερικά γινόμενα σε Πραγματικούς Διανυσματικούς χώρους:***
Έστω $\mathcal{E}$ ένα εσωτερικό γινόμενο στον πραγματικό διανυσματικό χώρο V. Εάν $x = a_1e_1 + a_2e_2 + \cdots + a_ne_n$, $y = b_1e_1 + b_2e_2 + \cdots + b_ne_n$ είναι ένα στοιχεία του χώρου γραμμένα ως γραμμικοί συνδιασμοί των στοιχείων της βάσεως, παρατηρούμε (λόγω των ιδιοτήτων του εσωτερικού γινομένου) ότι:

$$\mathcal{E}(x,y) = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \cdot \begin{pmatrix} \mathcal{E}(e_1,e_1) & \cdots & \mathcal{E}(e_1,e_n) \\ \mathcal{E}(e_2,e_1) & \cdots & \mathcal{E}(e_2,e_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{E}(e_n,e_1) & \cdots & \mathcal{E}(e_n,e_n) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Πράγματι, αυτό προκύπτει λόγω της διγραμμικότητας του εσωτερικού γινομένου $\mathcal{E}$, με τον εξής τρόπο:

$$\mathcal{E}(x,y) = \mathcal{E}(a_1e_1 + \cdots + a_ne_n, b_1e_1 + \cdots + b_ne_n) = \sum_{i\in[n]} a_i\mathcal{E}(e_i, b_1e_1 + \cdots + b_ne_n) =$$

$$= (a_1, \cdots, a_n) \cdot \begin{pmatrix} \mathcal{E}(e_1, b_1e_1 + \cdots + b_ne_n) \\ \vdots \\ \mathcal{E}(e_n, b_1e_1 + \cdots + b_ne_n) \end{pmatrix} = (a_1, \cdots, a_n) \cdot \begin{pmatrix} \sum_{i\in[n]} b_i\mathcal{E}(e_1, e_i) \\ \vdots \\ \sum_{i\in[n]} b_i\mathcal{E}(e_n, e_i) \end{pmatrix} =$$

$$= (a_1, \cdots, a_n) \cdot \begin{pmatrix} \big(\mathcal{E}(e_1, e_1), \cdots, \mathcal{E}(e_1, e_n)\big) \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \\ \vdots \\ \big(\mathcal{E}(e_n, e_1), \cdots, \mathcal{E}(e_n, e_n)\big) \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$= (a_1, \cdots, a_n) \cdot \begin{pmatrix} \mathcal{E}(e_1, e_1) & \cdots & \mathcal{E}(e_1, e_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{E}(e_n, e_1) & \cdots & \mathcal{E}(e_n, e_n) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Παρατήρηση: ***Η μορφή των Τετραγωνικών μορφών σε Πραγματικούς Διανυσματικούς χώρους:*** Κάθε τετραγωνική μορφή σε πραγματικό διανυσματικό χώρο V παίρνει την μορφή:

$$T(x) = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \cdot \begin{pmatrix} \mathcal{E}(e_1, e_1) & \cdots & \mathcal{E}(e_1, e_n) \\ \mathcal{E}(e_2, e_1) & \cdots & \mathcal{E}(e_2, e_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{E}(e_n, e_1) & \cdots & \mathcal{E}(e_n, e_n) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

όπου $x = a_1e_1 + a_2e_2 + \cdots + a_ne_n$ είναι η αναπαράσταση του x ως γραμμικός συνδιασμός των στοιχείων μίας βάσης του V.

Παρατήρηση: ***Τετραγωνικές μορφές και πολυώνυμα:*** Κάθε τετραγωνική μορφή είναι πολυώνυμο $n = dimV$ μεταβλητών.

Ορισμός: ***Θετικά ορισμένα Εσωτερικά γινόμενα και νόρμες:***
Έστω V ένας διανυσματικός χώρος εφοδιασμένος με θετικά ορισμένο εσωτερικό γινόμενο $\mathcal{E}$. Τότε, μπορεί να οριστεί η νόρμα στον ίδιο χώρο:

$$||x|| = \sqrt{\mathcal{E}(x,x)}$$

Θεωρούμε την συνάρτηση $||x|| = \sqrt{\mathcal{E}(x,x)}$ (η οποία ορίζεται λόγω του ότι το εσωτερικό γινόμενο είναι θετικά ορισμένο) και θα δείξουμε ότι αυτή έχει όλες τις ιδιότητες μιας νόρμας.

- Είναι μη αρνητική: Πράγματι, ισχύει$\sqrt{\mathcal{E}(x,x)} \geq 0$ και επιπλέον αν $\sqrt{\mathcal{E}(x,x)} = 0$, επειδή το εσωτερικό γινόμενο είναι θετικά ορισμένο, $x = 0$.

- Είναι θετικά ομογενής: Πράγματι, αυτό είναι αποτέλεσμα της διγραμμικότητας του εσωτερικού γινομένου, αφού για κάθε πραγματικό λ:

$$||\lambda x|| = \sqrt{\mathcal{E}(\lambda x, \lambda x)} = \sqrt{\lambda^2\mathcal{E}(x,x)} = |\lambda| \cdot \sqrt{\mathcal{E}(x,x)} = |\lambda| \cdot ||x||$$

- Ισχύει η τριγωνική ανισότητα: Για να αποδειχθεί το συγκεκριμμένο, θα χρησιμοποιηθεί η ανισότητα Cauchy - Schwarz:

$$\mathcal{E}(x,y) \leq \sqrt{\mathcal{E}(x,x) \cdot \mathcal{E}(y,y)}$$

Συγκεκριμένα, υποθέτουμε x, y τυχαία στοιχεία του V. Παρατηρούμε ότι με την χρήση της ανισότητας προκύπτει:

$$||x+y||^2 = \mathcal{E}(x+y, x+y) = \mathcal{E}(x,x) + 2\mathcal{E}(x,y) + \mathcal{E}(y,y) \leq \mathcal{E}(x,x) + 2\sqrt{\mathcal{E}(x,x)\mathcal{E}(y,y)} + \mathcal{E}(y,y) =$$

$$= \left(\sqrt{\mathcal{E}(x,x)} + \sqrt{\mathcal{E}(x,x)}\right)^2 = (||x|| + ||y||)^2 \Rightarrow ||x+y|| \leq ||x|| + ||y||$$

Το οποίο είναι το ζητούμενο αποτέλεσμα.

Οπότε για να ολοκληρωθεί πλέον η απόδειξη, θα αποδειχθεί η ανισότητα Cauchy - Schwarz.

Έστω $\mathcal{E}$ ένα θετικά ορισμένο εσωτερικό γινόμενο. Ισχύει για κάθε $s, t \in V$ ότι:

$$\mathcal{E}(s-t, s-t) \geq 0 \Rightarrow \mathcal{E}(s,t) - 2\mathcal{E}(s,t) + \mathcal{E}(s,t) \geq 0 \Rightarrow 2\mathcal{E}(s,t) \leq \mathcal{E}(s,s) + \mathcal{E}(t,t)$$

Εάν συγκεκριμένα θέσουμε για τυχαία $x, y \in V$ τα s, t ως $s = \dfrac{x}{\sqrt{\mathcal{E}(x,x)}}$, $t = \dfrac{y}{\sqrt{\mathcal{E}(y,y)}}$, το ζητούμενο είναι πλέον υπόθεση πράξεων.

$$2\mathcal{E}\left(\frac{x}{\sqrt{\mathcal{E}(x,x)}}, \frac{y}{\sqrt{\mathcal{E}(y,y)}}\right) \leq \mathcal{E}\left(\frac{x}{\sqrt{\mathcal{E}(x,x)}}, \frac{x}{\sqrt{\mathcal{E}(x,x)}}\right) + \mathcal{E}\left(\frac{y}{\sqrt{\mathcal{E}(y,y)}}, \frac{y}{\sqrt{\mathcal{E}(y,y)}}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2}{\sqrt{\mathcal{E}(x,x) \cdot \mathcal{E}(y,y)}} \cdot \mathcal{E}(x,y) \leq 1 + 1 \Rightarrow \mathcal{E}(x,y) \leq \sqrt{\mathcal{E}(x,x) \cdot \mathcal{E}(y,y)}$$

Ορισμός: ***Οι Ισομετρίες μεταξύ Διανυσματικών χώρων:***
Έστω V, W διανυσματικοί χώροι με μετρικές d, b και $f : V \to W$ μία απεικόνιση η οποία έχει την ιδιότητα:

$$(\forall x, y \in V)[d(x,y) = b(f(x), f(y))]$$

Ονομάζουμε κάθε τέτοια συνάρτηση ισομετρία του V προς W.

Θεώρημα: ***Τετραγωνικές μορφές και Ισομετρίες:***
Έστω $(V, \mathcal{E}), (W, \mathcal{E}')$ διανυσματικοί χώροι εφοδιασμένοι με θετικά ορισμένα εσωτερικά γινόμενα $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$ και αντίστοιχες τετραγωνικές μορφές T, T'. Εάν $f : V \to W$ είναι γραμμική απεικόνιση και ισχύει ότι:

$$T(x) = 1 \Rightarrow T'(f(x)) = 1$$

τότε η f είναι ισομετρία του V προς W.

Απόδ. Πράγματι, εάν $|\cdot|, ||\cdot||$ είναι οι αντίστοιχες νόρμες που ορίζουν τα εσωτερικά γινόμενα, τότε:

$$||f(x)||^2 = T'(f(x)) = T'(f(|x| \cdot \widehat{x})) = |x|^2 \cdot T'(f(\widehat{x})) = |x|^2 \Rightarrow ||f(x)|| = |x|$$

Εφόσον οι νόρμες είναι ίσες, και οι επαγόμενες μετρικές επίσης θα είναι ίσες. Δηλαδή θα ισχύει:

$$(\forall x, y \in V)[|x-y| = ||f(x) - f(y)||]$$

Αυτό αποδεικνύει το ζητούμενο, ότι δηλαδή η f είναι ισομετρία του V προς W.

Θεώρημα: ***Τα Πολυωνυμικά συστήματα στην εύρεση Ισομετριών:***
Έστω $(V, \mathcal{E}), (W, \mathcal{E}')$ διανυσματικοί χώροι εφοδιασμένοι με θετικά ορισμένα εσωτερικά γινόμενα $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$ και αντίστοιχες τετραγωνικές μορφές T, T'. Έστω $f : V \to W$ είναι γραμμική απεικόνιση. Εάν το πολυωνυμικό σύστημα:

$$T(x) = 1$$

$$T'(f(x)) = 1$$

έχει σύνολο λύσεων $\mathcal{L} = \{x \in V \mid |x| = 1\}$ (όπου $|\cdot|$ η επαγόμενη νόρμα στον V), τότε η f είναι ισομετρία του V προς W.

Απόδ. Η απόδειξη είναι άμεση συνέπεια του Θεωρήματος: "**Θεώρημα:** ***Τετραγωνικές μορφές και Ισομετρίες***", αφού ισχύει ότι $\mathcal{L} = \{x \in V \mid |x| = 1\} = \{x \in V \mid T(x) = 1\}$.

Παρατήρηση: ***Οι Βάσεις Gröbner στην εύρεση Ισομετριών:*** Από το προηγούμενο Θεώρημα είναι άμεσο το ότι αρκεί το αντίστοιχο σύστημα της βάσεως Gröbner των πολυωνύμων T, T' να έχει σύνολο λύσεων $\mathcal{L} = \{x \in V \mid |x| = 1\}$.

Ορισμός: ***Οι Ορθογώνιες απεικονήσεις μεταξύ Διανυσματικών χώρων:***
I. *Έστω V, W διανυματικοί χώροι με θετικά ορισμένα εσωτερικά γινόμενα $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$ και $f : V \to W$ μία απεικόνιση η οποία έχει την ιδιότητα:*

$$(\forall x, y \in V)[\mathcal{E}(x, y) = \mathcal{E}'(f(x), f(y))]$$

Ονομάζουμε κάθε τέτοια συνάρτηση ορθογώνια του V προς W.

II. *Προκύπτει ότι κάθε ορθογώνια απεικόνηση είναι γραμμική.*

II. Κάθε ορθογώνια απεικόνιση είναι γραμμική. Αυτό προκύπτει παίρνοντας το εσωτερικό γινόμενο

$$\mathcal{E}'(f(\kappa x + \lambda y) - \kappa f(x) - \lambda f(y), f(\kappa x + \lambda y) - \kappa f(x) - \lambda f(y))$$

και δείχνοντας ότι αυτό είναι 0. Λόγω των πολλών πράξεων, η διαδικασία θα γραφεί συνοπτικά μόνο.

$$\mathcal{E}'(f(\kappa x+\lambda y), f(\kappa x+\lambda y))+\kappa^2\mathcal{E}'(f(x), f(x))+\lambda^2\mathcal{E}'(f(y), f(y))-2\kappa\mathcal{E}'(f(\kappa x+\lambda y), f(x))-2\lambda\mathcal{E}'(f(\kappa x+\lambda y), f(y))+$$

$$+2\kappa\lambda\mathcal{E}'(f(x), f(y)) =$$

$$= \mathcal{E}(\kappa x + \lambda y, \kappa x + \lambda y) + \kappa^2\mathcal{E}(x, x) + \lambda^2\mathcal{E}(y, y) - 2\kappa\mathcal{E}(\kappa x + \lambda y, x) - 2\lambda\mathcal{E}'(\kappa x + \lambda y, y) + 2\kappa\lambda\mathcal{E}(x, y) =$$

$$= \mathcal{E}(\kappa x + \lambda y - \kappa x - \lambda y, \kappa x + \lambda y - \kappa x - \lambda y) = \mathcal{E}(0, 0) = 0$$

Συμβολισμοί: ***Σύνολα Ισομετριών, Ορθογώνιων απεικονίσεων και Γραμμικών απεικονήσεων:***
Έστω V, W διανυματικοί χώροι. Θα συμβολίζουμε:

$$\mathcal{ID}(V \to W) = \{f : V \to W \mid f \text{ ισομετρία του } V \text{ προς } W\}$$

$$\mathcal{O}(V \to W) = \{f : V \to W \mid f \text{ ορθογώνια του } V \text{ προς } W\}$$

$$\mathcal{GL}(V \to W) = \{f : V \to W \mid f \text{ γραμμική από το } V \text{ προς το } W\}$$

Θεώρημα: ***Θεώρημα Ιεραρχίας Δομών:***
Έστω V, W διανυματικοί χώροι με θετικά ορισμένα εσωτερικά γινόμενα $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$ και επαγόμενες νόρμες $|\cdot|, ||\cdot||$. Ισχύει η παρακάτω ισότητα συνόλων:

$$\mathcal{O}(V \to W) = \mathcal{ID}(V \to W) \cap \mathcal{GL}(V \to W)$$

Απόδ. Θα δείξουμε τους δύο εγκλεισμούς:

$$\mathcal{O}(V \to W) \subseteq \mathcal{ID}(V \to W) \cap \mathcal{GL}(V \to W) \text{ και } \mathcal{O}(V \to W) \supseteq \mathcal{ID}(V \to W) \cap \mathcal{GL}(V \to W)$$

Για τον πρώτο εγκλεισμό, υποθέτουμε ότι f είναι μία ορθογώνια στο $\mathcal{O}(V \to W)$. Έχει δειχθεί στον Ορισμό: "**Ορισμός:** ***Οι Ορθογώνιες απεικονήσεις μεταξύ Διανυσματικών χώρων,*** **II.**" ότι $f \in \mathcal{GL}(V \to W)$.

Επιπλέον, γι' αυτήν ισχύει εξ ορισμού ότι $\forall s \in V$, $\mathcal{E}(s, s) = \mathcal{E}'(f(s), f(s))$. Ισοδύναμα κανείς μπορεί να γράψει λοιπόν για $s = x - y$ ότι $\mathcal{E}(x - y, x - y) = \mathcal{E}'(f(x) - f(y), f(x) - f(y))$ και εξ ορισμού τώρα των επαγόμενων νορμών να λάβει την σχέση $|x - y|^2 = ||f(x) - f(y)||^2 \Rightarrow |x - y| = ||f(x) - f(y)||$. Αυτό αποδεικνύει ότι $f \in \mathcal{ID}(V \to W)$.

Για τον δεύτερο εγκλεισμό, υποθέτουμε ότι f είναι ισομετρία και γραμμική. Θεωρούμε τυχαία $s, t \in V$ και παρατηρούμε ότι:

$$||f(s) - f(t)|| = |s - t| \Rightarrow ||f(s - t)|| = |s - t| \Rightarrow \mathcal{E}'(f(s - t), f(s - t)) = \mathcal{E}(s - t, s - t) \tag{1}$$

Στην σχέση (1) αντικαθιστούμε για τυχαία $x, y \in V$ μια φορά $s = x, t = 0$ και την άλλη $s = y, t = 0$. Από την αντικατάσταση αυτή, προκύπτουν οι δύο σχέσεις $\mathcal{E}'(f(x), f(x)) = \mathcal{E}(x, x)$ και $\mathcal{E}'(f(y), f(y)) = \mathcal{E}(y, y)$. Επειτα, ξανά στην σχέση (1) αντικαθιστούμε $s = x, t = y$ και σε συνδυασμό με τις δύο προηγούμενες σχέσεις παίρνουμε:

$$\mathcal{E}'(f(x-y), f(x-y)) = \mathcal{E}(x-y, x-y) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathcal{E}'(f(x), f(x)) - 2\mathcal{E}'(f(x), f(y)) + \mathcal{E}'(f(y), f(y)) = \mathcal{E}(x, x) - 2\mathcal{E}(x, y) + \mathcal{E}(y, y) \Rightarrow \mathcal{E}'(f(x), f(y)) = \mathcal{E}(x, y)$$

Αυτό αποδεικνύει ότι $f \in \mathcal{O}(V \to W)$.

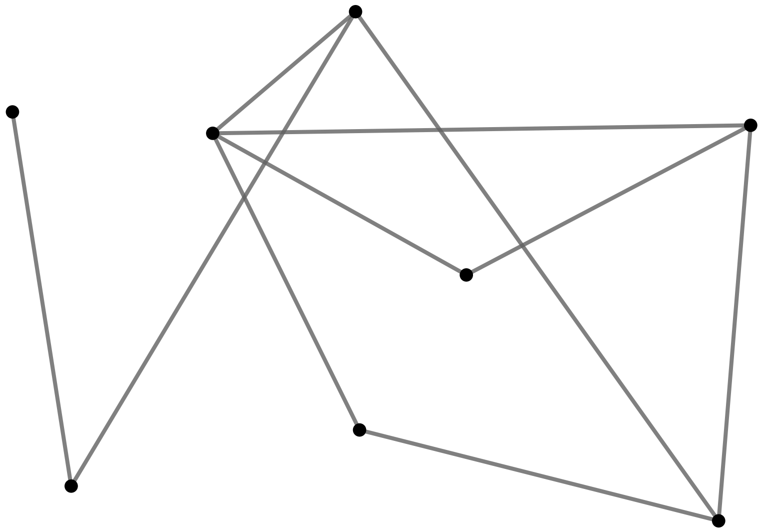
Πόρισμα: ***Τα πολυωνυμικά συστήματα και οι βάσεις Gröbner στην εύρεση Ορθογώνιων απεικονίσεων:*** Το Θεώρημα: "**Θεώρημα:** ***Τα Πολυωνυμικά συστήματα στην εύρεση Ισομετριών***" σε συνδυασμό με το Θεώρημα: "**Θεώρημα:** ***Θεώρημα Ιεραρχίας Δομών***", μας δίνουν ουσιαστικά έναν τρόπο να προσδιορίζουμε τις ορθογώνιες απεικονίσεις μεταξύ δύο διανυσματικών χώρων.

Εφαρμογές στην Θεωρία Γραφημάτων

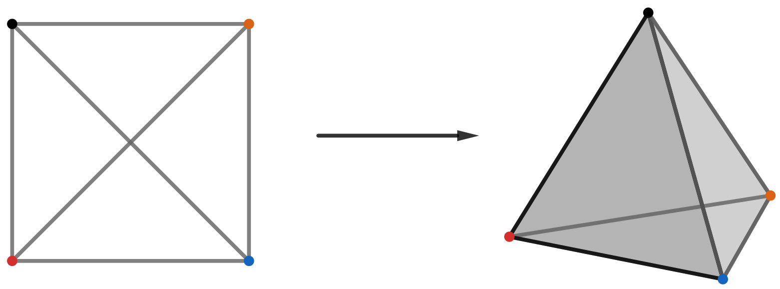
Ορισμός: ***Γραφήματα και Απλά Γραφήματα:***
I. *Έστω V ένα πεπερασμένο σύνολο στοιχείων και E ένα σύνολο που περιέχει δισύνολα (ή μονοσύνολα) με στοιχεία του V. Ονομάζουμε κάθε διατεταγμένο ζεύγος:*

$$G = (V, E)$$

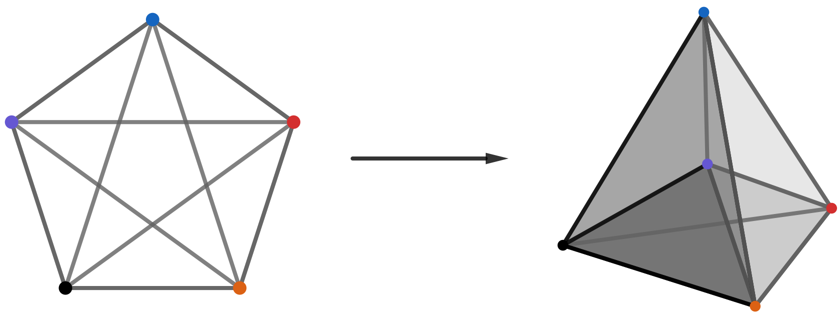
γράφημα με σύνολο κορυφών V και σύνολο ακμών E. Οι αναπαραστάσεις των γραφημάτων είναι συνήθως γεωμετρικά σχήματα, όπου τα στοιχεία x του V (κορυφές) σχεδιάζονται ως σημεία και τα στοιχεία $\{x, y\}$ του E (ακμές) σχεδιάζονται ως συνεχείς γραμμές που ενώνουν τα αντίστοιχα σημεία x και y.



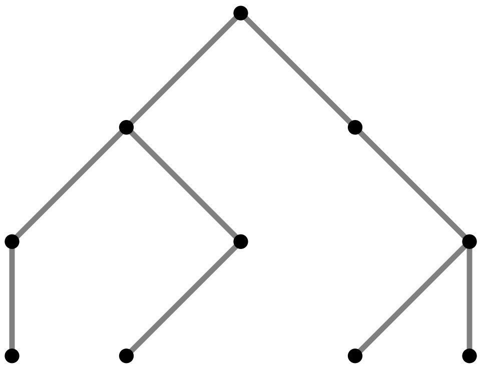
Σχήμα Γ1: *Η αναπαράσταση ενός γραφήματος με 8 κορυφές και 10 ακμές.*



Σχήμα Γ2: *Το πλήρες γράφημα 4ων κορυφών (K_4), που αναπαριστά το τετράεδρο.*

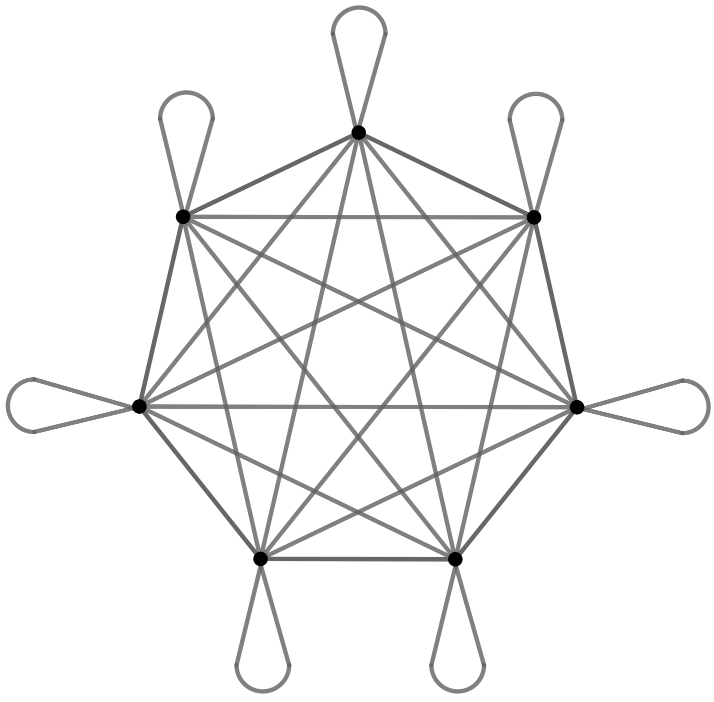


Σχήμα Γ3: *Το πλήρες γράφημα 5 κορυφών (K_5), που αναπαριστά το πεντάχωρο (5-cell), το αντίστοιχο "τετράεδρο" των 4ων διαστάσεων.*



Σχήμα Γ4: *Ένα γράφημα - δένδρο. Τα λεγόμενα "δυαδικά δενδρα" χρησιμοποιούνται εκτενώς στην πληροφορική για την γρήγορη αναζήτηση στοιχείων.*

II. *Εάν σε ένα γράφημα G το σύνολο ακμών E δεν περιέχει μονοσύνολα, το γράφημα ονομάζεται απλό. Ισοδύναμα, σε μία γεωμετρική αναπαράσταση, δεν θα υπάρχει ακμή που να συνδέει ένα σημείο με τον εαυτό του (δεν υπάρχει θηλιά). Παραδείγματα απλών γραφημάτων είναι αυτά που εικονίζονται στα σχήματα* "Σχήμα Γ1, Σχήμα Γ2, Σχήμα Γ3, Σχήμα Γ4". *Παρακάτω βρίσκεται ένα παράδειγμα* ***μη*** *απλού γραφήματος.*

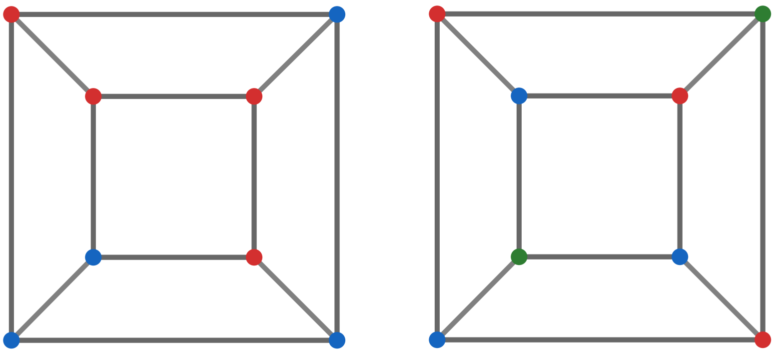


Σχήμα Γ5: *Ένα παράδειγμα ενός μη απλού γραφήματος.*

Ορισμός: ***Χρωματισμοί και Γνήσιοι Χρωματισμοί Γραφημάτων:***

I. *Έστω G ένα γράφημα με σύνολο κορυφών V και κ μία συνάρτηση $V \to [q]$. Η συνάρτηση κ ονομάζεται χρωματισμός του G με q χρώματα και κάθε αριθμός στο $[q]$ ονομάζεται χρώμα.*

II. *Έστω $G = (V, E)$ ένα γράφημα και κ ένας χρωματισμός του με q χρώματα. Εάν για κάθε δύο κορυφές x, y που ορίζουν ακμή στο E ισχύει ότι $\kappa(x) \neq \kappa(y)$, ο χρωματισμός κ ονομάζεται γνήσιος. Σε έναν τέτοιον χρωματισμό δεν υπάρχουν 2 γειτονικές κορυφές κορυφές (που συνδέονται με ακμή) οι οποίες να έχουν το ίδιο χρώμα.*



Σχήμα Γ6: *Ένας μη γνήσιος χρωματισμός του κύβου με 2 χρώματα (αριστερά) και ένας γνήσιος χρωματισμός του ίδιου με 3 χρώματα (δεξιά).*

Ορισμός: *Χρωματικός Αριθμός:*
Έστω $G = (V, E)$ ένα γράφημα και $A = \{q \in \mathbb{N} \mid \kappa : V \to [q],\ \kappa$ γνήσιος χρωματισμός$\}$. Ορίζουμε ως χρωματικό αριθμό του G τον φυσικό αριθμό:

$$\chi(G) = \min A$$

Θεώρημα: *Θεώρημα Bayer:*
Έστω $G = (V, E)$ ένα απλό γράφημα με σύνολο κορυφών $V = \{u_1, u_2, u_3, \cdots\}$. Θεωρούμε $\kappa : V \to [q]$ έναν γνήσιο χρωματισμό του G και σε κάθε χρώμα λ του $[q]$ αντιστοιχούμε τον αριθμό ξ^λ, όπου $\xi = cos\left(\frac{2\pi}{q}\right) + isin\left(\frac{2\pi}{q}\right)$ είναι μία πρωταρχική $q-$οστή ρίζα της μονάδας. Θεωρούμε τα πολυώνυμα:

$$x_i^q - 1 = 0$$

$$x_i^{q-1} + x_i^{q-2}x_j + \cdots + x_j^{q-1} = 0$$

Η μεταβλητή x_i μας δηλώνει το χρώμα της κορυφής u_i (δηλ. εάν η x_i είναι ξ^λ, το χρώμα είναι λ). Το πολυώνυμο $x_i^{q-1} + x_i^{q-2}x_j + \cdots + x_j^{q-1} = 0$ μας πληροφορεί ότι οι κορυφές u_i, u_j έχουν διαφορετικό χρώμα (δηλ. ισχύει το "ίσο με το 0" εάν και μόνο αν τα χρώματά των u_i, u_j είναι διαφοτερικά).

Απόδ. Εάν οι κορυφές u_i, u_j έχουν διαφορετικό χρώμα, τότε τα x_i, x_j είναι διαφορετικά και παίρνουν τιμές $q-$οστές ρίζες της μονάδος. Επομένως, $x_i^q - 1 = x_j^q - 1 = 0$.

Επιπλέον, επειδή τα x_i, x_j διαφέρουν, γράφοντας την ισότητα $x_i^q - x_j^q = 0$ ισοδύναμα ως:

$$x_i^q - x_j^q = (x_i - x_j) \cdot (x_i^{q-1} + x_i^{q-2}x_j + \cdots + x_j^{q-1}) = 0$$

παρατηρούμε ότι θα πρέπει να ισχύει $x_i^{q-1} + x_i^{q-2}x_j + \cdots + x_j^{q-1} = 0$

Αντίστροφα, εάν ισχύει η ισότητα $x_i^{q-1} + x_i^{q-2}x_j + \cdots + x_j^{q-1} = 0$ και επιπλέον $x_i = x_j$, θα πρέπει να ισχύει επιπλέον ότι $qx_i^{q-1} = 0$. Αυτό είναι άτοπο, αφού η x_i είναι $q-$οστή ρίζα της μονάδος, και συνεπώς ικανοποιεί την σχέση $x_i^q - 1 = 0$

Παρατήρηση: *Οι Βάσεις Gröbner στην ύπαρξη γνήσιου χρωματισμού με* q *χρώματα:* Από το Θεώρημα: "**Θεώρημα: *Θεώρημα Bayer***" έπεται ότι ένα γράφημα θα έχει γνήσιο χρωματισμό με q χρώματα εάν και μόνο αν το σύστημα των $|V| + |E|$ εξισώσεων:

$$x_i^q - 1 = 0, \text{ για κάθε κορυφή } u_i$$

$$x_i^{q-1} + x_i^{q-2}x_j + \cdots + x_j^{q-1} = 0, \text{ όπου } u_i, u_j \text{ είναι γειτονικές}$$

έχει λύση. Για την επίλυση του πολυωνυμικού συστήματος αυτού μπορούν να χρησιμοποιηθούν οι τεχνικές που αναφέρθηκαν και αναλύθηκαν στο μάθημα, περί των βάσεων Gröbner.

Παρατήρηση: ***Η εύρεση του Χρωματικού Αριθμού μέσω του Θεωρήματος Bayer:*** Σύμφωνα με την προηγούμενη Παρατήρηση: "**Παρατήρηση:** ***Οι Βάσεις Gröbner στην ύπαρξη γνήσιου χρωματισμού με*** $\mathfrak{q}$ ***χρώματα***", μπορεί κανείς, με επίλυση πολυωνυμικών συστημάτων να προσδιορίσει τον χρωματικό αριθμό $\chi(G)$ ενός γραφήματος G. Αυτή η μέθοδος ενδέχεται να μην ενδείκνυται για επίλυση με "χαρτί και μολύβι", είναι όμως κάτι που μπορεί να υπολογιστεί με ευκολία μέσω του Ηλεκτρονικού Υπολογιστή / της Τεχνιτής Νοημοσύνης.

Εφαρμογή: ***Εφαρμογή της Θεωρίας Γραφημάτων και των Βάσεων Gröbner στα Sudoku:*** Στην συνέχεια θα εξετάσουμε πώς οι μέθοδοι της Θεωρίας Γραφημάτων μαζί με τις βάσεις Gröbner μπορούν να βοηθήσουν στην μελέτη στοιχειωδών ιδιοτήτων των Sudoku. Συγκεκριμένα, θα ασχοληθούμε με τα ακόλουθα δύο:

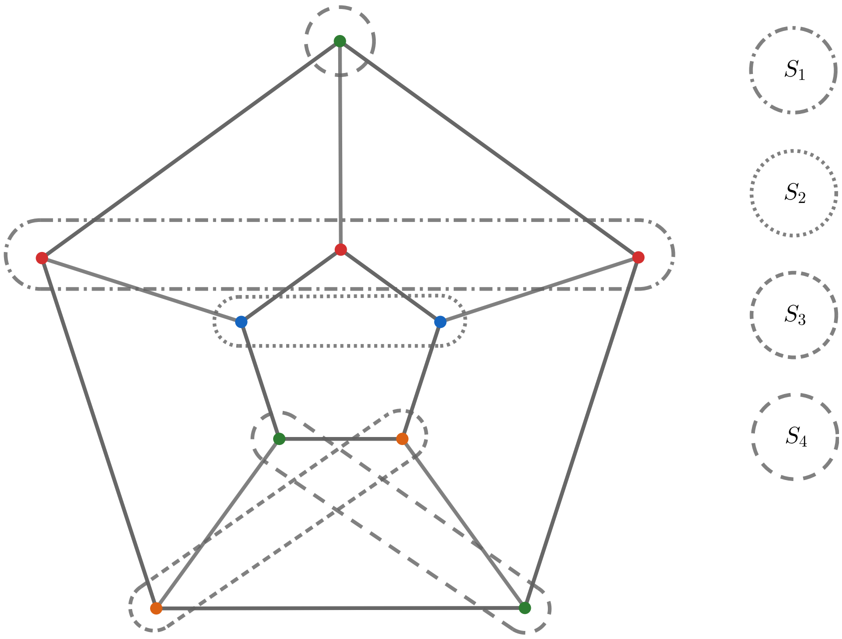
- Πώς θα βρεθεί με πόσους τρόπους είναι δυνατόν να συμπληρωθεί ένα Sudoku;
- Πώς θα βρεθεί, αν κάποια κελιά είναι αρχικά συμπληρωμένα, εάν το Sudoku επιλύεται;

Πριν όμως ξεκινήσουμε την μελέτη, θα χρειαστούμε ορισμένες βασικές έννοιες, οι οποίες θα παρουσιαστούν παρακάτω.

Ορισμός: ***Διαμερίσεις σε Ανεξάρτητα Μέρη:***
Έστω $G = (V, E)$ ένα γράφημα. Ονομάζουμε διαμέριση του G σε k ανεξάρτητα μέρη κάθε διαμέριση του V της μορφής:

$$V = \bigsqcup_{i \in [k]} S_i$$

όπου κάθε S_i δεν περιέχει κορυφές που στο G ορίζουν ακμή. Κάθε S_i ονομάζεται ανεξάρτητο μέρος της διαμέρησης.



Σχήμα Γ7: *Μία διαμέριση ενός γραφήματος σε 4 ανεξάρτητα μέρη.*

Θεώρημα: ***Το Χρωματικό Πολυώνυμο:***
Έστω $G = (V, E)$ ένα γράφημα. Η συνάρτηση που μας δείχνει πόσοι γνήσιοι χρωματισμοί του G υπάρχουν με q χρώματα είναι πολυώνυμο και μάλιστα το:

$$\chi_G(q) = \sum_{i \in [|V|]} \mathfrak{a}_i \cdot \frac{q!}{(q-i)!}$$

όπου $\mathfrak{a}_i$ είναι το πλήθος των διαμερίσεων σε i ανεξάρτητα μέρη.

Απόδ. Πράγματι, κάθε γνήσιος χρωματισμός κ του G, με $i \leq q$ χρώματα, ορίζει μία διαμέριση $\{\kappa^{-1}(x) \mid x \in [q]\} - \{\emptyset\}$ σε i ανεξάρτητα μέρη, και αντίστροφα, κάθε διαμέριση σε i ανεξάρτητα μέρη μπορεί να δώσει τουλάχιστον έναν γνήσιο χρωματισμό. Ακριβέστερα, μπορεί να δώσει $\dfrac{q!}{(q-i)!}$ γνήσιους χρωματισμούς, αφού τόσοι είναι οι τρόποι κανείς να επιλέξει ένα από τα q χρώματα για κάθε ανεξάρτητο μέρος της διαμέρισης. Επομένως, αφού υπάρχουν $\mathfrak{a}_i$ τρόποι να επιλεγεί διαμέριση σε i ανεξάρτητα μέρη, οι τρόποι επιλογής γνήσιου χρωματισμού με i χρώματα είναι ακριβώς $\mathfrak{a}_i \cdot \dfrac{q!}{(q-i)!}$. Αθροίζοντας για τα διάφορα $i \in [|V|]$, έπεται η ζητούμενη σχέση.

$$\chi_G(q) = \sum_{i \in [|V|]} \mathfrak{a}_i \cdot \frac{q!}{(q-i)!}$$

Η πρώτη μας μέριμνα θα είναι να βρούμε έναν τρόπο ικανό να υπολογίσει το πλήθος των δυνατόν Sudoku. Το πρόβλημα αυτό θα αναχθεί σε πρόβλημα της Θεωρίας Γραφημάτων με τον εξής τρόπο: Θα κατασκευάσουμε ένα γράφημα (το γράφημα Sudoku) το οποίο θα έχει κορυφές που θα αντιστοιχούν στα 81 κελιά τού Sudoku και οι ακμές του θα συνδέουν κάθε 2 κορυφές οι οποίες δεν είναι δυνατόν να συμπληρωθούν με τον ίδιο αριθμό. Με αυτήν την κατασκευή, το πρόβλημα ουσιαστικά ανάγεται στην εύρεση του πλήθους των χρωματισμών με $q \leq 9$ χρώματα. Στο “Σχήμα Σ1” εικονίζεται μία αναπαράσταση του γραφήματος Sudoku.

Παρατήρηση: ***Το πλήθος των ζητούμενων χρωμάτων:*** Ένα γράφημα Sudoku $G = (V, E)$ δεν είναι δυνατόν να χρωματιστεί με λιγότερα από 9 χρώματα. Αυτό προκύπτει από το γεγονός ότι κάθε περιοχή (όπως κάθε γραμμή και στήλη) περιέχει 9 κελιά εκ των οποίων δεν γίνεται να υπάρχουν 2 με το ίδιο χρώμα. Επομένως, δεν υπάρχουν διαμερίσεις σε $i < 9$ ανεξάρτητα μέρη και κατ' επέκταση το πολυώνυμο χ_G είναι ουσιαστικά το:

$$\chi_G(q) = \sum_{i=9}^{81} \mathfrak{a}_i \cdot \frac{q!}{(q-i)!}$$

Επιπλέον, εάν έχουμε μια διαμέριση σε 10 ή και παραπάνω μέρη, αυτή δεν ορίζει χρωματισμό με 9 χρώματα ο οποίος δεν έχει καλυφθεί στην περίπτωση της διαμέρισης σε 9 μέρη, αφού αν $\{S_1, \cdots, S_{10}\}$ είναι η διαμέριση σε 10 μέρη, χρωματίζοντας με 9 χρώματα θα υπάρχουν δύο μέρη, έστω τα S_i, S_j τα οποία θα έχουν το ίδιο χρώμα. Επομένως, η διαμέριση σε 9 μέρη $\big[\{S_1, \cdots S_{10}\} - \{S_i, S_j\}\big] \cup \{S_i \cup S_j\}$ έχει προσδώσει ήδη τον ζητούμενο χρωματισμό. Αυτό πρακτικά σημαίνει ότι για την τιμή $\chi_G(9)$ οι όροι $\mathfrak{a}_i,\ 10 \leq i \leq 81$ δεν προσφέρουν τίποτε. Τελικά:

$$\chi_G(9) = 9! \cdot \mathfrak{a}_9 = 362880 \cdot \mathfrak{a}_9$$

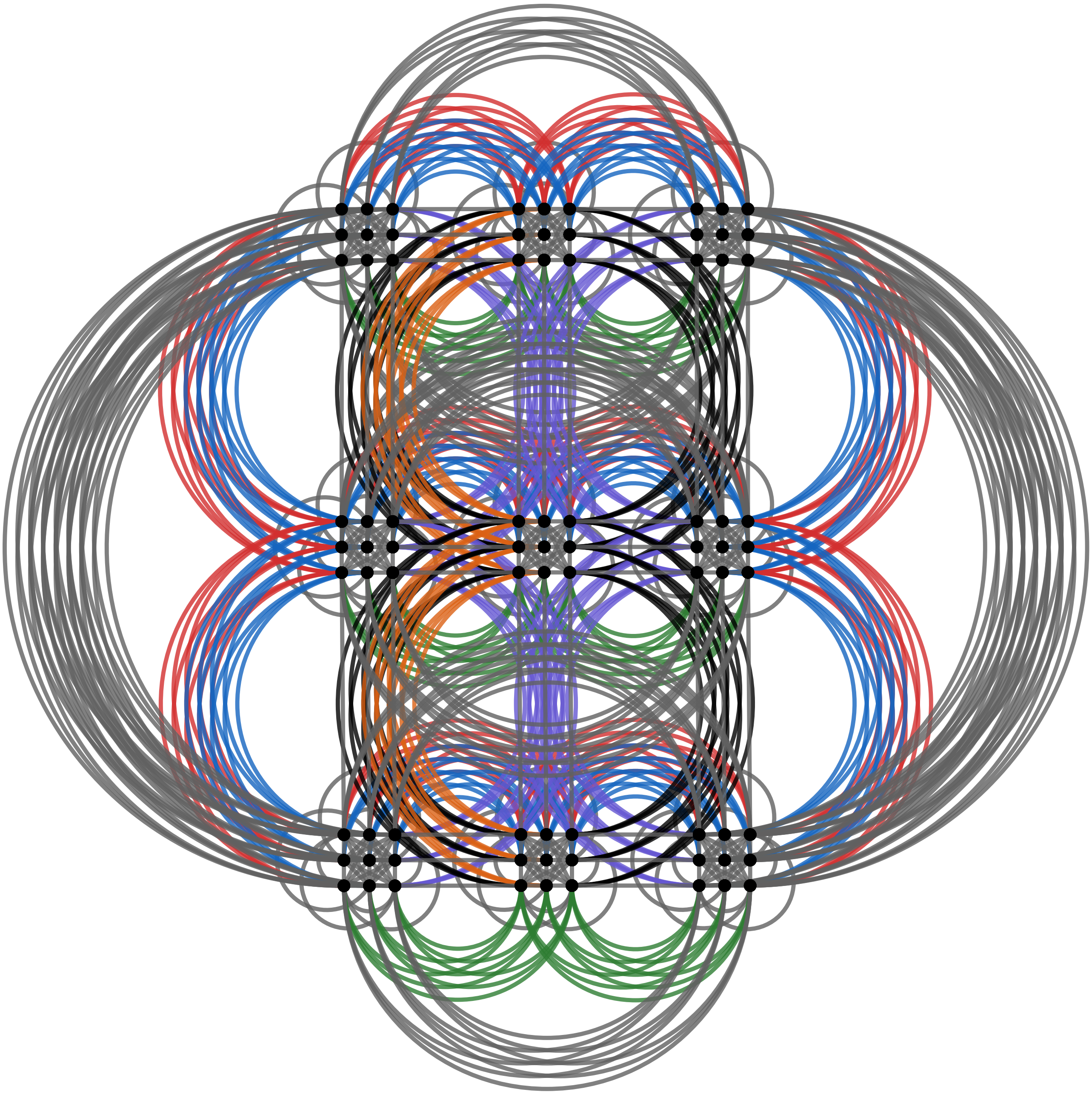
Επομένως, για να προσδιορίσουμε το πλήθος των χρωματισμών με 9 χρώματα, αρκεί να προσδιορίσουμε το πλήθος των διαμερίσεων σε 9 ανεξάρτητα μέρη. Αυτό θα γίνει με χρήση του Θεωρήματος: “**Θεώρημα:** ***Θεώρημα Bayer***”.

Πόρισμα: ***Ο προσδιορισμός του πλήθους των τρόπων συμπλήρωσης ενός Sudoku:*** [Ο παρακάτω τρόπος παρουσιάζεται αποκλειστικά και μόνο για τις ιδέες του και όχι για την πρακτικότητά του] Θεωρούμε 81 μεταβλητές $x_i,\ i \in [81]$ οι οποίες αντιστοιχούν οι καθεμία τους σε μία κορυφή u_i του γραφήματος Sudoku $G = (V, E)$. Θεωρούμε όλες τις διαμερίσεις $S = \{S_1, \cdots, S_9\}$ του $[81]$ σε 9 μέρη και θα εξετάσουμε ποιές από αυτές αποτελούνται από ανεξάρτητα μέρη. Σύμφωνα με το Θεώρημα του Bayer, θεωρούμε το σύστημα εξισώσεων:

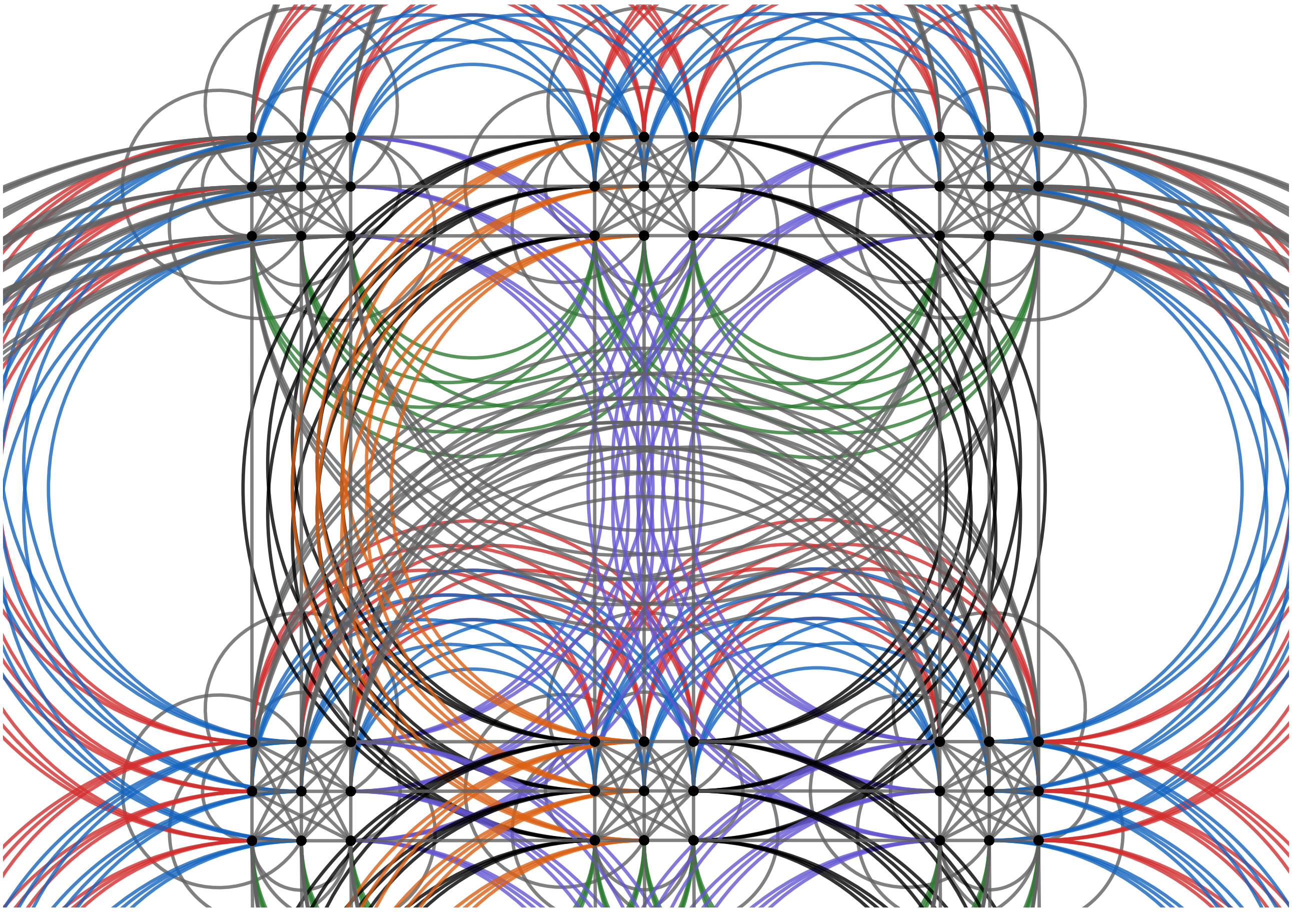
$$x_i^9 - 1 = 0, \text{ για κάθε κορυφή } u_i \text{ στο } V$$

$$x_i^8 + x_i^7 x_j + x_i^6 x_j^2 + \cdots + x_j^8 = 0, \text{ για κάθε 2 γειτονικές κορυφές } u_i, u_j \text{ στο } V$$

Και θέτουμε για τα διάφορα $i \in [9]$, $y_i = x_k$ για κάθε $x_k \in S_i$. Εάν η διαμέριση $S = \{S_1, \cdots, S_9\}$ αποτελείται από ανεξάρτητα μέρη, τότε θα είναι δυνατόν με 9 χρώματα να χρωματίσουμε τα μέρη της. Κατ' επέκταση, το άνωθεν σύστημα θα έχει λύση. Με τον τρόπο αυτό προσδιορίζουμε την τιμή $\mathfrak{a}_9$ και σύμφωνα με την Παρατήρηση: “**Παρατήρηση:** ***Το πλήθος των ζητούμενων χρωμάτων***”, το πλήθος των χρωματισμών με 9 χρώματα του γραφήματος Sudoku.



Σχήμα Σ1: *Το γράφημα Sudoku. Με μαύρες τελείες απεικονίζονται τα τετράγωνα (κελιά) του Sudoku, ενώ με τόξα κύκλων οι ακμές που υποδηλώνουν ότι τα άκρα τους δεν μπορούν να χρωματιστούν με ίδιο χρώμα, και κατεπέκταση τα αντίστοιχα κελιά δεν μπορούν να πάρουν τον ίδιο αριθμό.*



Σχήμα Σ2: *Μία κοντυνότερη εικόνα των πρώτων 6 περιοχών.*

Παρατήρηση: ***Ένας υπολογιστικά δυνατός τρόπος προσδιορισμού:*** Ο προηγούμενος τρόπος που αναφέρθηκε δεν είναι δυνατόν να εκτελεστεί (προς το παρόν) από κανέναν Ηλεκτρονικό Υπολογιστή, λόγω του τεράστιου πλήθους των διαμερίσεων του $[81]$ σε 9 μέρη. Παρακάτω, θα τροποποιήσουμε την διαδικασία όσον αφορά τον έλεγχο των διαμερίσεων, ώστε ο ζητούμενος προσδιορισμός να είναι εφικτός[1] από έναν υπολογιστή. Συγκεκριμένα:

- Ελέγχουμε μόνο τις διαμερίσεις του $[81]$ σε 9 μέρη με 9 στοιχεία. Αυτό διότι δεν είναι δυνατόν ένα σύνολο στην διαμέριση να έχει 10 ή και παραπάνω στοιχεία, αφού αν κάτι τέτοιο συνέβαινε, 2 στοιχεία τις ίδιας διαμέρισης θα βρίσκοταν στην ίδια περιοχή.

- Ελέγχουμε διαμερίσεις που κατασκευάζονται με τον εξής τρόπο:

1	2	3
2	3	4
3	4	5

Σχήμα Σ3: *Η σειρά στα στάδια επιλογής των διαμερίσεων*

Πρώτα συμπληρώνουμε την περιοχή (1) με σταθερό τρόπο και έπειτα συμπληρώνουμε, με δεδομένα τα χρώματα της (1), με τους διάφορους τρόπους τις περιοχές (2), έτσι ώστε οι τελευταίες να μην χρωματίζονται με τρόπο τέτοιο που βλάπτει τον χρωματισμό της γειτονικής (1). Συνεχίζουμε αναλόγως με τις υπόλοιπες περιοχές, έτσι ώστε να μην βλάπτεται ο χρωματισμός των περιοχών που έχουν συμπληρωθεί. Ένας τέτοιος χρωματισμός δίνει μία από τις ζητούμενες διαμερίσεις.

Παρατήρηση: ***Η επίλυση του Sudoku με συμπληρωμένα αρχικά κελιά:*** Και πάλι μπορεί μέσω του Θεωρήματος του Bayer να προσδιοριστεί εάν το σύστημα επιλύεται ή όχι. Αυτό γίνεται θεωρώντας το πολυωνυμικό σύστημα:

[1] Όχι γρήγορος, απλώς εφικτός σε εύλογο χρονικό διάστημα.

Έστω $x_1, x_2, \cdots x_k$ αντιστοιχούν στα συμπληρωμένα κελιά και έχουν τιμές $\xi^{\tau(x_i)}$:

$$x_i = \xi^{\tau(x_i)}, \text{ για } i \in [k]$$

$$x_i^9 - 1 = 0, \text{ για κάθε κορυφή } u_i \text{ στο } V - \{u_t \mid t \in [k]\}$$

$$x_i^8 + x_i^7 x_j + x_i^6 x_j^2 + \cdots + x_j^8 = 0, \text{ για κάθε 2 γειτονικές κορυφές } u_i, u_j \text{ στο } V$$

Εάν το πολυωνυμικό σύστημα έχει λύση, τότε το Sudoku με τις συμπληρωμένες αρχικές τιμές επιλύεται.