Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών
Τμήμα Μαθηματικών

Χειμερινό εξάμηνο 2022-23

Τοπολογία

Σημειώσεις Παραδόσεων

Διδάσκουσα: ***κ. Παπατριανταφύλλου Μαρία***

Επιμέλεια: *Φράγκος Αναστάσιος*

$$\emptyset, X \in \mathfrak{T}$$

$$\{A_i\}_{i=1}^{n} \subseteq \mathfrak{T} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathfrak{T}$$

$$\{A_i\}_{i\in I} \subseteq \mathfrak{T} \Rightarrow \bigcup_{i\in I} A_i \in \mathfrak{T}$$

Τελευταία ενημέρωση: 27/02/2023

Πρόλογος

Αυτές οι σημειώσεις είναι ουσιαστικά οι παραδόσεις του μαθήματος «*714. Τοπολογία*», όπως διδάχθηκε από την κ. Παπατριανταφύλλου Μαρία το χειμερινό εξάμηνο του ακαδημαϊκού έτους 2022-23. Τα μαθήματα δακτυλογραφούνταν με την σειρά, οπότε η παρουσίαση είναι χωρισμένη ανά μαθήματα και όχι ανά θεματικές.

Η θεματολογία είναι βασισμένη στο (B2) , με τη διαφορά ότι εδώ δίνεται μεγαλύτερη έμφαση στα σχήματα και τα διαγράμματα.

Μπορείτε να με ενημερώσετε για διάφορα λάθη στην διεύθυνση ηλεκτρονικού ταχυδρομείου:

afragos@email.com

Οι επισημάνσεις σας είναι πολύ σημαντικές, καθώς λάθη είναι σίγουρο ότι έχουν συμβεί.

Φ.Α.

Ευχαριστίες

Ευχαριστώ τα εξής άτομα για τις διάφορες επισημάνσεις τους:

- Βλαχοδημητρόπουλος Ι.

Συμβολισμοί

- $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, 4, \cdots\}$
- $\mathbb{Q}$ είναι το σύνολο των ρητών.
- $\mathbb{R}$ είναι το σύνολο των πραγματικών.
- $\subseteq$ είναι η σχέση του υποσυνόλου.
- $\subset$ είναι η σχέση του γνήσιου υποσυνόλου.
- Αν $X \subseteq \mathbb{R}$, $X^* := \{x \in X \mid x \neq 0\}$
- Αν $X \subseteq \mathbb{R}$, $X_+ := \{x \in X \mid x \geqslant 0\}$
- $\mathcal{P}(X) := \{A \mid A \subseteq X\}$
- $|A|$ είναι ο πληθάριθμος του συνόλου A.
- Εάν $\mathcal{A}$ είναι οικογένεια από σύνολα, $\bigcup \mathcal{A} := \bigcup_{A\in\mathcal{A}} A$
- Εάν $\mathcal{A}$ είναι οικογένεια από σύνολα, $\bigcap \mathcal{A} := \bigcap_{A\in\mathcal{A}} A$
- Σε μετρικό χώρο (M, ϱ), $B(x, r) := \{y \in M \mid \varrho(x, y) < r\}$
- Σε μετρικό χώρο (M, ϱ), $\widehat{B}(x, r) := \{y \in M \mid \varrho(x, y) \leqslant r\}$

Περιεχόμενα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Μάθημα 1

Πριν ξεκινήσουμε την περιγραφή των τοπολογικών χώρων, είναι βοηθητικό διαισθητικά να δούμε ένα γνωστό παράδειγμα τοπολογικών χώρων, τους μετρικούς και ψευδομετρικούς χώρους.

Ορισμός 1.1: (Μετρικές και μετρικοί χώροι).
I. Έστω $M \neq \emptyset$ ένα σύνολο και $\varrho : M \times M \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση με τις ιδιότητες:

i. $\forall x, y \in M,\ \varrho(x, y) \geqslant 0$

ii. $\forall x, y \in M,\ [\varrho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y]$

iii. $\forall x, y \in M,\ \varrho(x, y) = \varrho(y, x)$

iv. $\forall x, y, z \in M,\ \varrho(x, z) \leqslant \varrho(x, y) + \varrho(y, z)$

Η συνάρτηση ϱ θα καλείται μετρική στο M.
II. Έστω $M \neq \emptyset$ ένα σύνολο και ϱ μια μετρική στο M. Το διατεταγμένο ζεύγος (M, ϱ) θα καλείται μετρικός χώρος.

Εκτός από μετρική, κανείς μπορεί να ορίσει κάτι παρεμφερές της, στα μη κενά σύνολα. Τις λεγόμενες ψευδομετρικές.

Ορισμός 1.2: (Ψευδομετρικές). Έστω $M \neq \emptyset$ ένα σύνολο και $\varrho : M \times M \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση που έχει τις ιδιότητες i, iii, iv της μετρικής, και έχει στην θέση της ii την:

ii*. $\forall x, y \in M,\ [x = y \Rightarrow \varrho(x, y) = 0]$

Η ϱ καλείται ψευδομετρική στον M.

■ **Παράδειγμα 1.1:**

- Θεωρούμε $M \neq \emptyset$ τυχαίο σύνολο και τη συνάρτηση $\varrho : M \times M \to \mathbb{R}$:

$$\varrho(x, y) = \begin{cases} 1 \text{ αν } x \neq y \\ 0 \text{ αν } x = y \end{cases}$$

  Η ϱ είναι μετρική και μάλιστα ονομάζεται ≪διακριτή μετρική≫.

- Εάν πάλι $M \neq \emptyset$ είναι τυχαίο σύνολο, η συνάρτηση $d : M \times M \to \mathbb{R}$:

$$\forall x, y \in M,\ d(x, y) = 0$$

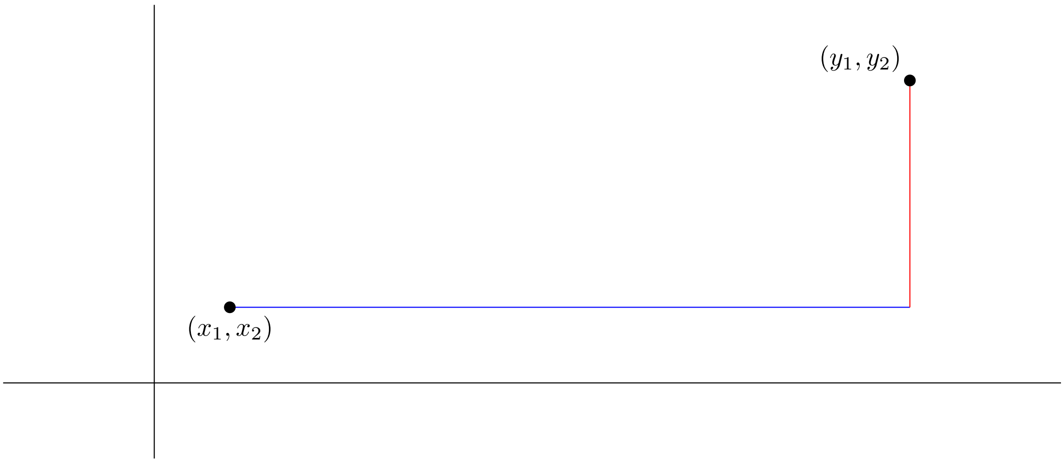
  είναι ψευδομετρική στο M και ονομάζεται ≪τετριμμένη ψευδομετρική≫.

- Ιδιαίτερο ενδιαφέρον έχουν οι ευκλείδειοι χώροι ($\mathbb{R}^n$, για τα διάφορα $n \in \mathbb{N}$) με τις λεγόμενες $k-$μετρικές. Στον $\mathbb{R}^n$ οι συναρτήσεις $d_k : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$:

$$d_k\big((x_1, \cdots, x_n), (y_1, \cdots, y_n)\big) := \sqrt[k]{\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^k}$$

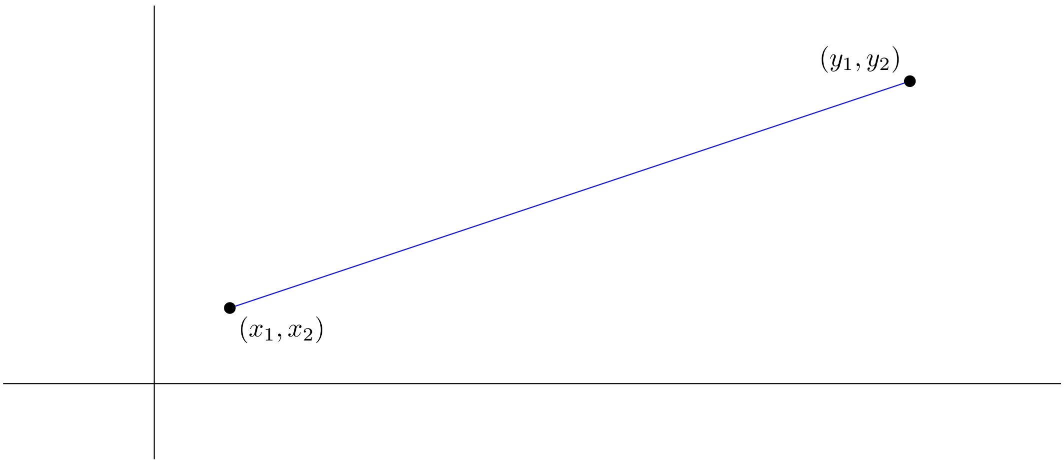
για τα διάφορα $k \in \mathbb{N}$ είναι μετρικές (αυτό το αποτέλεσμα αποδεικνύεται σε μαθήματα πραγματικής ανάλυσης). Ειδικές περιπτώσεις $k-$μετρικών είναι η μετρική του ταχυδρόμου ($k = 1$):

$$d_1\big((x_1, \cdots, x_n), (y_1, \cdots, y_n)\big) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$$



και η συνήθης απόσταση στον $\mathbb{R}^n$ ή αλλιώς ευκλείδεια μετρική ($k = 2$).

$$d_2\big((x_1, \cdots, x_n), (y_1, \cdots, y_n)\big) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2}$$



- Συνεχίζοντας στο προηγούμενο παράδειγμα, για κάθε δύο $x, y \in \mathbb{R}^n$, η ακολουθία $\big(d_k(x, y)\big)_{k\in\mathbb{N}}$ έχει όριο, το οποίο φυσικά εξαρτάται από τα x, y. Το συμβολίζουμε $\alpha(x, y)$. Η συνάρτηση τώρα $d_\infty : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$:

$$d_\infty(x, y) = \alpha(x, y)$$

αποδεικνύεται ότι είναι μετρική, και την ονομάζουμε ≪μετρική supremum≫. Μάλιστα αληθεύει ότι:

$$d_\infty(x, y) = \max\{|x_i - y_i|\}_{i=1}^{n}$$

όπου x_i, y_i είναι οι συντεταγμένες των x και y αντίστοιχα.

■

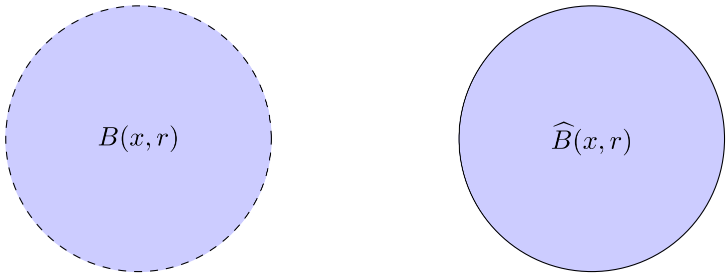
Ορισμός 1.3: (Ανοικτές και κλειστές μπάλες). Έστω (M, ϱ) ένας μετρικός χώρος, $x \in M$ και $r > 0$.
I. Ορίζουμε ως ανοικτή μπάλα με κέντρο x και ακτίνα r το σύνολο:

$$B(x, r) := \{y \in M \mid \varrho(x, y) < r\}$$

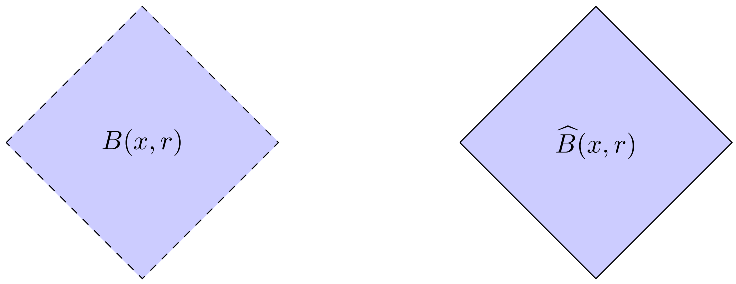
II. Ορίζουμε ως κλειστή μπάλα με κέντρο x και ακτίνα r το σύνολο:

$$\widehat{B}(x,r) := \{y \in M \mid \varrho(x,y) \leqslant r\}$$

Φυσικά (γενικά) αληθεύει ότι $x \in B(x,r) \subseteq \widehat{B}(x,r)$. Ειδικά στο επίπεδο, μετρώντας με τη συνήθη μετρική έχουμε εικόνες της μορφής:



ενώ μετρώντας με τη μετρική του ταχυδρόμου:



Ορισμός 1.4: (Ανοικτά σύνολα). Έστω (M,ϱ) μετρικός χώρος. Ένα σύνολο $A \subseteq M$ θα λέγεται ανοικτό στον μετρικό χώρο αν και μόνο αν:

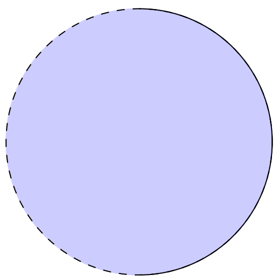
$$\forall x \in A,\ \exists \varepsilon_x > 0 :\ B(x,\varepsilon_x) \subseteq A$$

Αυτομάτως ο ορισμός των ανοικτών συνόλων δίνει ότι κάθε ανοικτό σύνολο είναι ένωση ανοικτών μπαλών (και ισχύει και το αντίστροφο).

$$A \text{ ανοικτό } \Leftrightarrow \exists \big(B(x,\varepsilon_x)\big)_x \text{ με } A = \bigcup_x B(x,\varepsilon_x)$$

Ορισμός 1.5: (Κλειστά σύνολα). Έστω (M,ϱ) μετρικός χώρος. Ένα σύνολο $A \subseteq M$ θα λέγεται κλειστό στον μετρικό χώρο αν και μόνο αν το συμπλήρωμά του $A^c = M \backslash A$ είναι ανοικτό στον μετρικό χώρο.

Παρατήρηση 1.1: Έστω ένας μετρικός χώρος (M,ϱ). Υπάρχουν σύνολα που είναι και κλειστά και ανοικτά (για παράδειγμα το $\emptyset$). Επιπλέον, εν γένει ένα σύνολο δεν είναι υποχρεωτικό να είναι ανοικτό ή κλειστό - για παράδειγμα στο επίπεδο, η ένωση μισής κλειστής μπάλας (δίσκου) με μισή ανοικτή μπάλα (η δεύτερη να μην είναι όλη εντός της πρώτης) είναι σύνολο ούτε ανοικτό ούτε κλειστό.



Στη συνέχεια παραθέτουμε ένα γνωστό θεώρημα πραγματικής ανάλυσης, στο οποίο περιγράφονται χαρακτηριστικές ιδιότητες των ανοικτών συνόλων. Οι ιδιότητες αυτές θα βοηθήσουν σε μία ≪γενίκευση≫ του ορισμού των ανοικτών συνόλων και κατ'επέκταση στον ορισμό της τοπολογίας.

Θεώρημα 1.1: Έστω (M, ϱ) μετρικός χώρος. Ορίζουμε το σύνολο των ανοικτών συνόλων του μετρικού χώρου:

$$\mathfrak{T}_\varrho = \{A \subseteq X \mid A \text{ ανοικτό}\}$$

Τα ακόλουθα αληθεύουν:

i. $\emptyset, M \in \mathfrak{T}_\varrho$

ii. Εάν $n \in \mathbb{N}$ και $\{A_i\}_{i=1}^n \subseteq \mathfrak{T}_\varrho$, τότε $\bigcap_{i=1}^n A_i \in \mathfrak{T}_\varrho$

iii. Εάν I είναι ένα αυθαίρετο σύνολο δεικτών και $\{A_i\}_{i\in I} \subseteq \mathfrak{T}_\varrho$, τότε $\bigcup_{i\in I} A_i \in \mathfrak{T}_\varrho$

Απόδειξη: Για το i., παρατηρούμε ότι το να μην ήταν ανοικτό το $\emptyset$ παραβιάζει τον ορισμό του κενού συνόλου. Εάν το M δεν ήταν ανοικτό σύνολο, για τυχόν $x \in M$ και για κάθε $r > 0$ θα ίσχυε ότι:

$$B(x, r) \nsubseteq M$$

το οποίο είναι άτοπο από τον ορισμό της μπάλας.

Για το ii., εφόσον η οικογένεια $\{A_i\}_{i=1}^n$ είναι οικογένεια ανοικτών συνόλων, για κάθε $x \in \bigcap_{i=1}^n A_i$ υπάρχουν ακτίνες r_i τέτοιες ώστε $B(x, r_i) \subseteq A_i$ (για τα διάφορα i). Θεωρώντας $r = \min\{r_i\}_{i=1}^n$, έχουμε ότι $B(x, r) \subseteq \bigcap_{i=1}^n A_i$.

Για το iii., εάν $x \in \bigcup_{i\in I} A_i$, τότε $x \in A_j$ για κατάλληλο δείκτη j. Οπότε, υπάρχει r_j τέτοιο ώστε $B(x, r_j) \subseteq A_j$ και κατ' επέκταση $B(x, r_j) \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i$.

□

Κανείς ανατρέχοντας σε διάφορες αποδείξεις της πραγματικής ανάλυσης μπορεί να δει ότι οι τρεις ιδιότητες του παραπάνω θεωρήματος αρκούν για την απόδειξη πολλών θεωρημάτων. Δηλαδή η έννοια της απόστασης δεν είναι πάντοτε αναγκαία για να εξάγουμε συμπεράσματα για τον χώρο στον οποίο βρισκόμαστε. Ο ορισμός της τοπολογίας βασίζεται σε αυτήν την παρατήρηση: δεδομένου του ορισμού της, μπορούν να αποδειχθούν διάφορα αποτελέσματα της πραγματικής ανάλυσης χωρίς να χρειάζεται να εισαχθεί κάποια έννοια απόστασης.

Ορισμός 1.6: (Τοπολογίες και τοπολογικοί χώροι). Έστω $X \neq \emptyset$ ένα σύνολο.
I. Μια τοπολογία στον X είναι μια οικογένεια $\mathfrak{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$ με τις εξής ιδιότητες:

i. $\emptyset, X \in \mathfrak{T}$

ii. Εάν $n \in \mathbb{N}$ και $\{A_i\}_{i=1}^n \subseteq \mathfrak{T}$, τότε $\bigcap_{i=1}^n A_i \in \mathfrak{T}$

iii. Εάν I είναι ένα αυθαίρετο σύνολο δεικτών και $\{A_i\}_{i\in I} \subseteq \mathfrak{T}$, τότε $\bigcup_{i\in I} A_i \in \mathfrak{T}$

II. Το διατεταγμένο ζεύγος $(X, \mathfrak{T})$ θα καλείται τοπολογικός χώρος.

Ορισμός 1.7: (Ανοικτά και κλειστά σύνολα σε τοπολογίες). Έστω $(X, \mathfrak{T})$ ένας τοπολογικός χώρος.
I. Τα στοιχεία μιας τοπολογίας $\mathfrak{T}$ θα τα ονομάζουμε ανοικτά σύνολα στον X.
II. Τα κλειστά σύνολα F στον X είναι ακριβώς αυτά για τα οποία $F^c = X \setminus F \in \mathfrak{T}$.

Παρατήρηση 1.2: Παρατηρήστε ότι $\{\emptyset, X\} \subseteq \mathfrak{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$.

Μέχρι τώρα έχουμε δει την τοπολογία με τον ορισμό της. Μερικά συγκεκριμένα παραδείγματα τοπολογιών είναι τα ακόλουθα:

■ **Παράδειγμα 1.2:**

- Η $\{\emptyset, X\}$ είναι μια τοπολογία στον X, που ονομάζεται ≪τετριμμένη τοπολογία≫.
- Το $\mathcal{P}(X)$ είναι μια τοπολογία στον X, που ονομάζεται ≪διακριτή τοπολογία≫.
- Έστω (M, ϱ) ένας μετρικός χώρος. Βάσει του **Θεωρήματος 1.1**, το σύνολο $\mathfrak{T}_\varrho$ (όπως αυτό ορίζεται στην διατύπωση του θεωρήματος) είναι τοπολογία στο M.
- Έστω $X \neq \emptyset$ ένα σύνολο και $x_0 \in X$. Το σύνολο:

  $$\mathfrak{T} = \{A \subseteq X \mid x_0 \in A\} \cup \{\emptyset\}$$

  είναι τοπολογία στον X, που ονομάζεται ≪τοπολογία του ιδιαιτέρου σημείου≫.

- Αντίστοιχα, το σύνολο:
$$\mathfrak{T} = \{A \subseteq X \mid x_0 \notin A\} \cup \{X\}$$
είναι τοπολογία στον X, που ονομάζεται «τοπολογία του εξαιρουμένου σημείου».

- Έστω $X \neq \emptyset$ ένα σύνολο. Το σύνολο:
$$\mathfrak{T} = \{A \subseteq X \mid A^c \text{ πεπερασμένο}\} \cup \{\emptyset\}$$
είναι τοπολογία στον X, που ονομάζεται «συμπεπερασμένη τοπολογία».

- Αντίστοιχα, το σύνολο:
$$\mathfrak{T} = \{A \subseteq X \mid A^c \text{ αριθμήσιμο}\} \cup \{\emptyset\}$$
είναι τοπολογία στον X, που ονομάζεται «συναριθμήσιμη τοπολογία».

■

Ο ορισμός μιας τοπολογίας έχει προϋποθέσεις που έχουν προκύψει από μια λογική μελέτη των μετρικών χώρων. Δεν εξασφαλίζεται λοιπόν ότι με τις τοπολογίες έχουμε γενικεύσει, κατά κάποιον τρόπο, τους μετρικούς χώρους. Είναι πιθανόν αυτές οι προϋποθέσεις να εξαναγκάζουν τον χώρο να έχει κάποια μετρική.

Ορισμός 1.8: (Μετρικοποιήσιμες τοπολογίες). Έστω $X \neq \emptyset$. Μια τοπολογία $\mathfrak{T}$ στο X λέγεται μετρικοποιήσιμη εάν υπάρχει μετρική ϱ τέτοια ώστε $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}_\varrho$.

Παρατήρηση 1.3: Υπάρχουν μη μετρικοποιήσιμες τοπολογίες.

Απόδειξη: Ας υποθέσουμε ότι $|X| \geqslant 2$ κι ας πάρουμε την τετριμμένη τοπολογία του X, δηλαδή την $\{\emptyset, X\}$. Ας υποθέσουμε ότι είναι μετρικοποιήσιμη. Για τυχόν $x \in X$ και για κάθε $r > 0$, η μπάλα $B(x, r)$ είναι ένα από τα σύνολα $\emptyset, X$ (αφού αυτά είναι τα μόνα ανοικτά σύνολα). Επειδή δεν είναι κενή, αναγκαστικά είναι ολόκληρος ο χώρος X. Εάν τώρα ο X δεν είναι μονοσύνολο, ένα οποιοδήποτε $x \neq y \in X$ βρίσκεται σε κάθε μπάλα $B(x, r)$ για οσοδήποτε μικρή απόσταση $r > 0$ - οπότε η απόσταση των x, y θα έπρεπε να είναι μηδενική χωρίς τα ίδια να ταυτίζονται. Αυτό παραβιάζει την ιδιότητα **ii.** της μετρικής και μας δίνει άτοπο.

Εδώ μάλιστα η εν λόγω τοπολογία είναι «επαγόμενη» μιας ψευδομετρικής (της $d \equiv 0$) και όχι μετρικής.

□

Επιστρέφοντας στο **Παράδειγμα 1.2**, η διακριτή τοπολογία του X είναι μετρικοποιήσιμη τοπολογία, με τη διακριτή μετρική. Είναι επίσης σαφές ότι κάθε μετρική τοπολογία είναι μετρικοποιήσιμη.

Για τις υπόλοιπες τοπολογίες του παραδείγματος, χρειάζεται να κάνουμε μεγαλύτερη ανάλυση για να εξάγουμε συμπεράσματα.

Πρόταση 1.1: Έστω (X, ϱ) ένας μετρικός χώρος. Τα μονοσύνολα είναι κλειστά.

Απόδειξη: Θα δείξουμε για κάθε μονοσύνολο $\{x\}$, το $\{x\}^c = X \backslash \{x\}$ είναι ανοικτό. Η περίπτωση $|X| = 1$ είναι προφανής.

Εάν $|X| \geqslant 2$, τότε για οποιοδήποτε $y \in \{x\}^c$ η απόσταση $\rho = \varrho(x, y)$ δεν είναι μηδέν. Οπότε η μπάλα $B(y, \rho/2)$ δεν τέμνει το $\{x\}$ και συνεπώς $B(y, \rho/2) \subseteq \{x\}^c$.

□

Πρόταση 1.2: Έστω (X, ϱ) ένας μετρικός χώρος με $|X| \geqslant 2$. Υπάρχουν δύο ανοικτά, μη κενά, ξένα σύνολα.

Απόδειξη: Εφόσον υπάρχουν τουλάχιστον δύο στοιχεία στον χώρο, μπορούμε να επιλέξουμε δύο, τα x, y. Εάν $\rho = \varrho(x, y)$, τα σύνολα $B(x, \rho/3),\ B(y, \rho/3)$ είναι ανοικτά, μη κενά και ξένα.

□

Πρόταση 1.3: Έστω $X = \{x\}$. Κάθε τοπολογία στον X είναι η διακριτή τοπολογία, οπότε είναι μετρικοποιήσιμη.

Απόδειξη: Για κάθε τοπολογία $\mathfrak{T}$ αληθεύουν οι εγκλεισμοί $\{\emptyset, X\} \subseteq \mathfrak{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Επειδή όμως το X είνα μονοσύνολο:

$$\mathcal{P}(X) = \big\{\emptyset, \{x\}\big\} = \{\emptyset, X\}$$

κι επομένως $\mathfrak{T} = \mathcal{P}(X)$.

□

Παρατήρηση 1.4: Έστω X ένα σύνολο και $x \neq x_0$ δύο στοιχεία του.

i. Εφοδιάζοντας τον χώρο με την τοπολογία $\mathfrak{T}^+$ του ιδιαιτέρου σημείου x_0, το σύνολο $\{x_0\}$ δεν είναι κλειστό. Επομένως, βάσει της **Πρότασης 1.1**, αυτή η τοπολογία δεν είναι μετρικοποιήσιμη.

ii. Εφοδιάζοντας τον χώρο με την τοπολογία $\mathfrak{T}^-$ του εξαιρουμένου σημείου x_0, το σύνολο $\{x\}$ δεν είναι κλειστό. Επομένως, βάσει της **Πρότασης 1.1**, αυτή η τοπολογία δεν είναι μετρικοποιήσιμη.

Απόδειξη: Θα δούμε το i., και το ii. μπορεί να γίνει αναλόγως. Εάν το $\{x_0\}$ ήταν κλειστό, τότε το $\{x_0\}^c = X \backslash \{x_0\}$ θα ήταν ανοικτό. Δηλαδή $\{x_0\}^c \in \mathfrak{T}^+$, το οποίο είναι άτοπο από τον ορισμό της εν λόγω τοπολογίας.

□

Χρησιμοποιώντας την προηγούμενη παρατήρηση, ένα παράδειγμα μη μετρικοποιήσιμης τοπολογίας είναι αυτή του Sierpiński: Έστω $X = \{a, b\}$, $\mathfrak{T}^+$ η τοπολογία του ιδιαιτέρου σημείου a και $\mathfrak{T}^-$ η τοπολογία του εξαιρουμένου σημείου b. Παρατηρούμε ότι $\mathfrak{T}^+ = \mathfrak{T}^-$ και επίσης (από την προηγούμενη παρατήρηση) ότι οι δύο (ίσες) τοπολογίες δεν είναι μετρικοποιήσιμες.

Παρατήρηση 1.5: Έστω $X \neq \emptyset$ ένα σύνολο.

i. Εάν $\mathfrak{T}$ είναι η συμπεπερασμένη τοπολογία του X:

$$(X, \mathfrak{T}) \text{ μετρικοποιήσιμος} \Leftrightarrow X \text{ πεπερασμένο}$$

ii. Ανάλογο συμπέρασμα ισχύει και για τις συναριθμήσιμες τοπολογίες. Εάν $\mathfrak{T}$ είναι η συναριθμήσιμη τοπολογία του X:

$$(X, \mathfrak{T}) \text{ μετρικοποιήσιμος} \Leftrightarrow X \text{ αριθμήσιμο}$$

Απόδειξη: Και πάλι θα ασχοληθούμε με το i.. Το ii. μπορεί να γίνει αναλόγως. Εάν το X είναι πεπερασμένο, θα αληθεύει αναγκαστικά ότι $\mathfrak{T} = \mathcal{P}(X)$. Οπότε η τοπολογία είναι μετρικοποιήσιμη (με τη διακριτή μετρική).

Εάν το X είναι άπειρο, υποθέτουμε προς άτοπο ότι είναι μετρικοποιήσιμο. Από την **Πρόταση 1.2**, υπάρχουν ανοικτά σύνολα A, B με κενή τομή, δηλαδή:

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow A \subseteq B^c$$

Επειδή το B είναι ανοικτό, το B^c είναι πεπερασμένο κι επομένως και το A. Το A^c είναι κι αυτό πεπερασμένο ως συμπλήρωμα ανοικτού, οπότε το $X = A \cup A^c$ είναι πεπερασμένο. Αυτό είναι άτοπο.

□

ΚΕΦΑΛΑΙΟ **2**

Μάθημα 2

Υπενθυμίζουμε ότι, γνωρίζοντας κατά κάποιον τρόπο «αξιωματικά» τα ανοικτά σύνολα, κανείς μπορεί να ορίσει φυσιολογικά τα κλειστά. Ένα σύνολο F λέγεται κλειστό εάν το $F^c = X \backslash F$ είναι ανοικτό. Γι' αυτά τα κλειστά σύνολα ισχύουν ιδιότητες αντίστοιχες (και όχι ίδιες) με τα ανοικτά σύνολα. Για παράδειγμα:

Πρόταση 2.1: Σε έναν τοπολογικό χώρο $(X, \mathfrak{T})$ συμβολίζουμε:

$$\mathfrak{F} = \{F \subseteq X \mid F \text{ κλειστό}\}$$

Τότε:

i. $\emptyset, X \in \mathfrak{F}$

ii. Εάν $n \in \mathbb{N}$ και $\{F_i\}_{i=1}^n \subseteq \mathfrak{F}$, τότε $\bigcup_{i=1}^n F_i \in \mathfrak{F}$

iii. Εάν I είναι ένα αυθαίρετο σύνολο δεικτών και $\{F_i\}_{i \in I} \subseteq \mathfrak{F}$, τότε $\bigcap_{i \in I} F_i \in \mathfrak{F}$

Απόδειξη: Για το i.: Έχουμε:

$$\emptyset \in \mathfrak{T} \Rightarrow \emptyset^c = X \in \mathfrak{F}$$
$$X \in \mathfrak{T} \Rightarrow X^c = \emptyset \in \mathfrak{F}$$

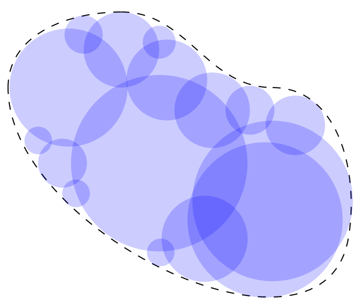
Για τα ii. και iii.: Εφαρμόζουμε τον κανόνα de Morgan για τις ενώσεις και τις τομές αντίστοιχα.

□

Στους διάφορους μετρικούς χώρους (X, ϱ) υπάρχει μια οικογένεια συνόλων $\mathcal{B} \subseteq \mathfrak{T}_\varrho$ από «εύχρηστα» ανοικτά σύνολα για την περιγραφή της τοπολογίας. Για παράδειγμα, η οικογένεια των ανοικτών μπαλών του (X, ϱ) είναι τέτοιου είδους σύνολο.

Για να γίνει περισσότερο κατανοητή αυτή η έννοια «χρησιμότητας», υπενθυμίζουμε την παρακάτω συνεπαγωγή (σε μετρικούς χώρους):

$$A \text{ ανοικτό } \Leftrightarrow \exists \big(B(x, \varepsilon_x)\big)_x \text{ με } A = \bigcup_x B(x, \varepsilon_x)$$



Διατυπώνοντας το ίδιο αλλά με κάπως διαφορετικό τρόπο, έχουμε την ακόλουθη πρόταση:

Πρόταση 2.2: Έστω (X, ϱ) ένας μετρικός χώρος. Οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες:

i. $\forall A \in \mathfrak{T}$, $\forall x \in A$, $\exists B(x, \varepsilon_x)$ τέτοιο ώστε $x \in B(x, \varepsilon_x)$ και $B(x, \varepsilon_x) \subseteq A$

ii. Κάθε ανοικτό σύνολο γράφεται ως ένωση ανοικτών μπαλών.

Γενικά λοιπόν, στους μετρικούς χώρους υπάρχουν σύνολα (οι ανοικτές μπάλες) που κατασκευάζουν όλα τα ανοικτά σύνολα. Την ίδια κατάσταση θα θέλαμε να ≪μεταφέρουμε≫ κατά κάποιον τρόπο στα ανοικτά σύνολα μιας τυχαίας (εν γένει μη μετρικοποιήσιμης) τοπολογίας. Δίνουμε λοιπόν τον ακόλουθο ορισμό:

Ορισμός 2.1: (Βάση μιας τοπολογίας). Έστω $(X, \mathfrak{T})$ ένας τοπολογικός χώρος. Ένα σύνολο $\mathcal{B} \subseteq \mathfrak{T}$ λέγεται βάση της τοπολογίας $\mathfrak{T}$ εάν και μόνο αν ισχύει η ακόλουθη συνθήκη:

≪Κάθε $A \in \mathfrak{T}$ γράφεται ως ένωση συνόλων της οικογένειας $\mathcal{B}$≫

Ο ορισμός είναι σαφώς επηρεασμένος από τους μετρικούς χώρους. Λαμβάνοντας την **Πρόταση 2.2** υπόψη, έχουμε την παρακάτω παρατήρηση:

Παρατήρηση 2.1: Έστω $(X, \mathfrak{T})$ ένας τοπολογικός χώρος και $\mathcal{B} \subseteq \mathfrak{T}$. Η οικογένεια $\mathcal{B}$ είναι βάση της τοπολογίας εάν και μόνο αν:

$$\forall A \in \mathfrak{T},\ \forall x \in A,\ \exists B_x \in \mathcal{B} \text{ τέτοιο ώστε } x \in B_x \textbf{ και } B_x \subseteq A$$

Απόδειξη: ($\Rightarrow$) Υποθέτουμε ότι η $\mathcal{B}$ είναι βάση για την τοπολογία $\mathfrak{T}$. Έστω $A \in \mathfrak{T}$ τυχόν ανοικτό σύνολο και $x \in A$. Επειδή η $\mathcal{B}$ είναι βάση για την τοπολογία, υπάρχει αυθαίρετα μεγάλο πλήθος συνόλων $\mathcal{B} \ni B_i,\ i \in I$ για τα οποία αληθεύει:

$$A = \bigcup_{i \in I} B_i$$

Εξ ορισμού τώρα της ένωσης, υπάρχει δείκτης $j_x \in I$ για τον οποίον $x \in B_{j_x}$, δηλαδή:

$$x \in B_{j_x} \subseteq \bigcup_{i \in I} B_i = A,\ \{B_i\}_{i \in I} \subseteq \mathcal{B}$$

($\Leftarrow$) Υποθέτουμε ότι:

$$\forall A \in \mathfrak{T},\ \forall x \in A,\ \exists B_x \in \mathcal{B} \text{ τέτοιο ώστε } x \in B_x \textbf{ και } B_x \subseteq A$$

Η ιδιότητα αυτή άμεσα δίνει ότι $\bigcup_{x \in A} B_x \supseteq A$ (διότι η ένωση γίνεται για κάθε $x \in A$, και $x \in B_x$). Επιπλέον $\bigcup_{x \in A} B_x \subseteq A$ (διότι $B_x \subseteq A$ για κάθε x). Ισχύει λοιπόν η ισότητα:

$$\bigcup_{x \in A} B_x = A$$

$\square$

■ **Παράδειγμα 2.1:**

- Έστω (X, ϱ) ένας μετρικός χώρος. Το σύνολο:

$$\mathcal{B} = \{B(x, r) \mid x \in X,\ r > 0\}$$

  είναι βάση της τοπολογίας $\mathfrak{T}_\varrho$.

- Έστω $(X, \mathfrak{T})$ ένας τοπολογικός χώρος και $\mathcal{B}$ μια βάση της τοπολογίας. Κάθε σύνολο $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}' \subseteq \mathfrak{T}$ είναι βάση της τοπολογίας, και ειδικότερα η $\mathfrak{T}$ είναι βάση του εαυτού της. Γενικά λοιπόν η ύπαρξη ≪μεγάλων≫ βάσεων δεν έχει ιδιαίτερο ενδιαφέρον, και γι' αυτό θα επικεντρωνόμαστε στην εύρεση της ≪μικρότερης≫ βάσης (ως προς τη σχέση του υποσυνόλου).

- Έστω $(X, \mathfrak{T}_\delta)$ με $\mathfrak{T}_\delta = \mathcal{P}(X)$ να είναι η διακριτή τοπολογία. Σε αυτήν την τοπολογία κάθε υποσύνολο του X είναι ανοικτό, οπότε η οικογένεια:

$$\mathcal{B} = \big\{\{x\} \mid x \in X\big\}$$

  αποτελεί βάση της $\mathfrak{T}_\delta$. Μάλιστα αυτή είναι η μικρότερη δυνατή βάση ως προς τη σχέση του υποσυνόλου - κάθε $\{x\}$ είναι ανοικτό και ο μόνος τρόπος να ≪παραχθεί≫ από μια βάση είναι να βρίσκεται ήδη στη βάση.

■

Στους μετρικούς χώρους μπορούμε να δουλέψουμε και κάπως αντίστροφα. Δοθείσης μιας οικογένειας ανοικτών μπαλών, κανείς μπορεί να κατασκευάσει τη (μοναδική) τοπολογία της οποίας είναι βάση. Αυτό γίνεται με τον εξής τρόπο, ορίζοντας:

$$\mathfrak{T} = \left\{ \bigcup_{x \in \mathcal{X}} \bigcup_{\varepsilon \in \mathcal{E}} B(x, \varepsilon) \;\middle|\; \mathcal{X} \subseteq X,\ \mathcal{E} \subseteq (0, \infty) \right\}$$

Γενικά όμως, εάν μας δοθεί ένα σύνολο $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$, μπορεί να κατασκευαστεί «κατάλληλη» τοπολογία της οποίας να είναι βάση; Η απάντηση είναι αρνητική.

Για παράδειγμα, σε κάθε τοπολογία $\mathfrak{T}$ το X είναι ανοικτό σύνολο, οπότε θα πρέπει να καλύπτεται από στοιχεία μιας βάσης $\mathcal{B}$. Επομένως, η $\mathcal{B}$ δεν είναι τυχαία οικογένεια, αλλά κάλυψη του X:

$$X = \bigcup \mathcal{B} = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$$

Κάθε «υποψήφιο» σύνολο στο να αποτελέσει βάση μιας τοπολογίας πρέπει να είναι κάλυψη του X.

Ας δούμε και μια άλλη απαίτηση για μια βάση. Δοθέντων δύο συνόλων $A, C \in \mathcal{B}$ σε μια βάση μιας τοπολογίας $\mathfrak{T}$, η τομή $A \cap C$ είναι ανοικτό σύνολο. Οπότε, για κάθε $x \in A \cap C$ υπάρχει $B_x \in \mathcal{B}$ τέτοιο ώστε $x \in B_x$ και $B_x \subseteq A \cap C$ (σύμφωνα φυσικά με την **Παρατήρηση 2.1**).

Κανείς μπορεί να συνεχίσει να βρίσκει διάφορες ιδιότητες που πρέπει να ικανοποιούνται από ένα σύνολο $\mathcal{B}$, εάν ευελπιστούμε ότι μπορεί να αποτελέσει βάση μιας τοπολογίας. Το παρακάτω θεώρημα μας δείχνει ότι οι δύο προηγούμενες είναι αρκετές.

Θεώρημα 2.1: Έστω $X \neq \emptyset$ και $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Η $\mathcal{B}$ είναι βάση μιας (μοναδικής) τοπολογίας $\mathfrak{T}$ εάν και μόνο αν:

i. Το $\mathcal{B}$ είναι κάλυψη του X, δηλαδή $X = \bigcup \mathcal{B}$ (αφού $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$).

ii. $\forall A, C \in \mathcal{B},\ \forall x \in A \cap C,\ \exists B_x \in \mathcal{B}$ τέτοιο ώστε $x \in B_x$ και $B_x \subseteq A \cap C$.

Απόδειξη: ($\Rightarrow$) Για το i.: Έστω $\mathcal{B}$ βάση μιας τοπολογίας $\mathfrak{T}$. Τότε $X \in \mathfrak{T}$ κι επομένως υπάρχει κάποιο πλήθος από σύνολα της $\mathcal{B}$ που κατασκευάζουν (μέσω ενώσεων) το X. Ειδικότερα, $\bigcup \mathcal{B} \supseteq X$ κι επειδή $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ έπεται τελικά ότι $\bigcup \mathcal{B} = X$.

Για το ii.: Εφαρμόζουμε την **Παρατήρηση 2.1** για το ανοικτό σύνολο $A \cap C$.

($\Leftarrow$) Ορίζουμε το σύνολο:

$$\mathfrak{T} = \left\{ \bigcup \mathcal{C} \mid \mathcal{C} \subseteq \mathcal{B} \right\}$$

και θα δείξουμε ότι αυτό είναι τοπολογία στον X.

Για την πρώτη ιδιότητα της τοπολογίας, $\emptyset = \bigcup \emptyset \in \mathfrak{T}$ κι επιπλέον (από την ιδιότητα i. του θεωρήματος) $X = \bigcup \mathcal{B} \in \mathfrak{T}$.

Για τη δεύτερη ιδιότητα της τοπολογίας, εάν $A, G \in \mathfrak{T}$, τότε:

$$A = \bigcup \mathcal{C} \textbf{ και } G = \bigcup \mathcal{D}$$

για κάποια υποσύνολα $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ του $\mathcal{B}$. Παρατηρούμε ότι:

$$\begin{aligned} A \cap G &= \left(\bigcup \mathcal{C}\right) \cap \left(\bigcup \mathcal{D}\right) \\ &= \left(\bigcup_{C \in \mathcal{C}} C\right) \cap \left(\bigcup_{D \in \mathcal{D}} D\right) \\ &= \bigcup_{C \in \mathcal{C}} \bigcup_{D \in \mathcal{D}} C \cap D \end{aligned}$$

Λόγω της ιδιότητας ii. του θεωρήματος, υπάρχει $\mathcal{V}(C \cap D) \subseteq \mathcal{B}$ τέτοιο ώστε:

$$C \cap D = \bigcup \mathcal{V}(C \cap D)$$

Οπότε μέχρι τώρα:

$$\begin{aligned} A \cap G &= \bigcup_{C \in \mathcal{C}} \bigcup_{D \in \mathcal{D}} \bigcup \mathcal{V}(C \cap D) \\ &= \bigcup \underbrace{\left(\bigcup_{C \in \mathcal{C}} \bigcup_{D \in \mathcal{D}} \mathcal{V}(C \cap D) \right)}_{\subseteq \mathcal{B}} \end{aligned}$$

Αυτά δείχνουν ότι η τομή $A \cap G$ γράφεται ως ένωση στοιχείων της $\mathcal{B}$ και συνεπώς ότι $A \cap G \in \mathfrak{T}$.

Κανονικά ο έλεγχος της δεύτερης ιδιότητας της τοπολογίας θα έπρεπε να γίνει για τυχόν πεπερασμένο πλήθος συνόλων. Είναι ισοδύναμο κανείς να ελέγξει μόνο την τομή δύο συνόλων, αφού επαγωγικά το αποτέλεσμα μεταφέρεται στην φαινομενικά πιο ≪γενική≫ περίπτωση. Από εδώ και στο εξής πολλές φορές θα ελέγχουμε τη δεύτερη ιδιότητα μόνο σε δύο σύνολα.

Για την τρίτη ιδιότητα της τοπολογίας, θεωρούμε $\mathcal{G} \subseteq \mathfrak{T}$ και θα εξετάσουμε αν η ένωση $\bigcup \mathcal{G}$ ανήκει στο $\mathfrak{T}$. Κατ' αρχάς, επειδή $\mathcal{G} \subseteq \mathfrak{T}$, κάθε $G \in \mathcal{G}$ γράφεται ως ένωση στοιχείων της $\mathcal{B}$. Δηλαδή $G = \bigcup \mathcal{V}(G)$ με $\mathcal{V}(G) \subseteq \mathcal{B}$. Επομένως:

$$\begin{aligned} \bigcup \mathcal{G} &= \bigcup_{G \in \mathcal{G}} \bigcup \mathcal{V}(G) \\ &= \bigcup \underbrace{\left(\bigcup_{G \in \mathcal{G}} \mathcal{V}(G) \right)}_{\subseteq \mathcal{B}} \end{aligned}$$

το οποίο δείχνει ότι κάθε ένωση στοιχείων της $\mathfrak{T}$ ανήκει στην $\mathfrak{T}$.

Τελικά αποδεικνύεται και το αντίστροφο. Παρατηρήστε ότι δεν έχουμε κάνει αναφορά στη μοναδικότητα της τοπολογίας. Αυτό δεν προκύπτει από το θεώρημα και ουσιαστικά χρειάζεται αυτόνομη απόδειξη.

Λήμμα 2.1: Εάν $\mathcal{B}$ είναι βάση μιας τοπολογίας $\mathfrak{T}$ του X, τότε δεν είναι βάση καμμίας άλλης τοπολογίας. ■

Απόδειξη του λήμματος: Κατ' αρχάς είδαμε ότι η $\mathcal{B}$ είναι βάση της τοπολογίας:

$$\mathfrak{T} = \left\{ \bigcup \mathcal{C} \mid \mathcal{C} \subseteq \mathcal{B} \right\}$$

Ας υποθέσουμε ότι $\mathfrak{T}'$ είναι μια άλλη τοπολογία της οποίας η $\mathcal{B}$ είναι επίσης βάση. Από τον ορισμό της τοπολογίας, παρατηρούμε ότι θα πρέπει να αληθεύει ο εγκλεισμός $\mathfrak{T} \subseteq \mathfrak{T}'$ (αφού οι αυθαίρετα μεγάλες ενώσεις στοιχείων της $\mathcal{B}$ ανήκουν στην τοπολογία $\mathfrak{T}'$ και το σύνολο αυτών των ενώσεων είναι η $\mathfrak{T}$). Εάν ο εγκλεισμός είναι γνήσιος, θα μπορεί να βρεθεί $A \in \mathfrak{T}' \setminus \mathfrak{T}$, κι επειδή η $\mathcal{B}$ είναι βάση της $\mathfrak{T}'$:

$$A = \bigcup \mathcal{C} \text{ για κάποιο } \mathcal{C} \subseteq \mathcal{B}$$

Από τον ορισμό της $\mathfrak{T}$ έπεται ότι $A \in \mathfrak{T}$, το οποίο είναι άτοπο.

△

Τώρα πλέον έχουμε ολοκληρώσει την απόδειξη.

□

2.1 Ασκήσεις

Άσκηση 2.1: Έστω $X = \mathbb{R}$. Είναι τοπολογίες τα παρακάτω υποσύνολα του $\mathcal{P}(\mathbb{R})$;

i. $\mathfrak{T}_1 = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{(-n, n) \mid n \in \mathbb{N}\}$

ii. $\mathfrak{T}_2 = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{[-n, n] \mid n \in \mathbb{N}\}$

iii. $\mathfrak{T}_3 = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{[n, \infty) \mid n \in \mathbb{N}\}$

Απάντηση: Όλα αυτά τα σύνολα είναι τοπολογίες του $\mathbb{R}$. Ας δούμε ενδεικτικά το i..

Η πρώτη ιδιότητα της τοπολογίας ισχύει εξ ορισμού του $\mathfrak{T}_1$.

Για τη δεύτερη ιδιότητα της τοπολογίας, παρατηρούμε ότι:

$$(-n, n) \cap (-m, m) = \big(-\min\{n, m\}, \min\{n, m\}\big) \in \mathfrak{T}_1$$

Αντίστοιχα, για την τρίτη ιδιότητα:

$$\bigcup_{i \in I}(-n_i, n_i) = \big(-\sup\{n_i\}_{i \in I}, \sup\{n_i\}_{i \in I}\big) \in \mathfrak{T}_1$$

Ενδέχεται $\sup\{n_i\}_{i \in I} = \infty$, αλλά αυτό δεν μας πειράζει διότι συμβατικά έχουμε ορίσει $(-\infty, \infty) := \mathbb{R}$.

$\triangle$

Σε παρόμοια πλαίσια κυμαίνεται και η επόμενη άσκηση.

Άσκηση 2.2: Έστω $X = \mathbb{N}$. Είναι τοπολογίες τα παρακάτω υποσύνολα του $\mathcal{P}(\mathbb{N})$;

i. $\mathfrak{T}_1 = \{\emptyset, \mathbb{N}\} \cup \{T_n \mid n \in \mathbb{N}\}$

ii. $\mathfrak{T}_2 = \{\emptyset, \mathbb{N}\} \cup \{T_n^c \mid n \in \mathbb{N}\}$

όπου $T_n = \{1, 2, \cdots, n\}$ και (κατ' επέκταση) $T_n^c = \{n+1, n+2, \cdots\}$.

$\triangle$

Οι $\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2$ είναι τοπολογίες. Μάλιστα η πρώτη λέγεται «τοπολογία του αρχικού τμήματος» και η δεύτερη «τοπολογία του τελικού τμήματος».

Άσκηση 2.3: Έστω $X \neq \emptyset$ σύνολο και $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Εάν $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι φθίνουσα (ως προς τη σχέση $\supseteq$) με $A_1 = X$, να δείξετε ότι το σύνολο:

$$\mathfrak{T} = \{\emptyset\} \cup \{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$$

είναι τοπολογία.

Απάντηση: Η πρώτη ιδιότητα του ορισμού της τοπολογίας ισχύει εξ ορισμού (αφού $A_1 = X$).

Για τη δεύτερη ιδιότητα, παρατηρούμε ότι:

$$\begin{aligned} \emptyset \cap A_i &= \emptyset \in \mathfrak{T} \\ A_i \cap A_j &= A_{\max\{i,j\}} \in \mathfrak{T} \end{aligned}$$

Για την τρίτη ιδιότητα: Θεωρούμε $\mathcal{A} \subseteq \mathfrak{T}$. Επειδή θα ασχοληθούμε με ενώσεις, μπορούμε να υποθέσουμε (χωρίς περιορισμό της γενικότητας) ότι το $\mathcal{A}$ δεν περιέχει κενά σύνολα, οπότε $\mathcal{A} = \{A_{k_1}, A_{k_2}, \cdots\}$ για κάποια ακολουθία $\{k_i\}_{i \in \mathbb{N}}$. Το σύνολο $K = \{k_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ έχει ελάχιστο (ως υποσύνολο των φυσικών), επομένως:

$$\bigcup \mathcal{A} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_{k_i} = A_{\min K} \in \mathfrak{T}$$

$\triangle$

Άσκηση 2.4: Είναι το σύνολο:

$$\mathfrak{T} = \{G \subseteq \mathbb{N} \ : \ \text{εάν } a \in G, \ \text{τότε για κάθε } p|a, \ p \in G\}$$

τοπολογία του $\mathbb{N}$; Είναι η διακριτή τοπολογία $\mathfrak{T}_\delta$; Είναι μετρικοποιήσιμη;

Απάντηση: Κατ' αρχάς το εν λόγω σύνολο είναι τοπολογία, και για να το δείξουμε αυτό ελέγχουμε διαδοχικά τις απαιτήσεις του ορισμού της τοπολογίας.

- $\emptyset, \mathbb{N} \in \mathfrak{T}$ εξ ορισμού.
- Εάν $G_1, G_2 \in \mathfrak{T}$, τότε για κάθε $a \in G_1 \cap G_2$ έχουμε:

$$\{p \in \mathbb{N} \,:\, p|a\} \subseteq G_1 \textbf{ και } \{p \in \mathbb{N} \,:\, p|a\} \subseteq G_2$$

  επομένως $\{p \in \mathbb{N} \,:\, p|a\} \subseteq G_1 \cap G_2$ (η περίπτωση του $\emptyset$ περιλαμβάνεται με τετριμμένο τρόπο). Αυτό μας δείχνει ότι $G_1 \cap G_2 \in \mathfrak{T}$.

- Εάν $\{G_i\}_{i \in I} \subseteq \mathfrak{T}$ και $a \in \bigcup_{i \in I} G_i$, τότε υπάρχει κάποιος $j \in I$ τέτοιος ώστε $a \in G_j$. Δηλαδή:

$$\{p \in \mathbb{N} \,:\, p|a\} \subseteq G_j \subseteq \bigcup_{i \in I} G_i$$

  Αυτό δείχνει ότι $\bigcup_{i \in I} G_i \in \mathfrak{T}$.

Η $\mathfrak{T}$ δεν είναι η διακριτή τοπολογία $\mathfrak{T}_\delta$, κι αυτό θα το δείξουμε με τον εξής τρόπο: Κάθε μονοσύνολο $\{x\}$ της διακριτής τοπολογίας είναι ανοικτό, ενώ εν προκειμένω ένα οποιοδήποτε μονοσύνολο $\{x\} \subseteq \mathbb{N}$ με $x \neq 1$ δεν ανήκει στο $\mathfrak{T}$ (σε αυτήν την τοπολογία το ≪πλησιέστερο≫ σύνολο σε μονοσύνολο που μπορούμε να βρούμε θα έχει τη μορφή $\{1\}$ ή $\{1, x\}$, όπου το x είναι πρώτος).

Η $\mathfrak{T}$ δεν είναι μετρικοποιήσιμη τοπολογία. Εάν ήταν, σύμφωνα με την **Πρόταση 1.1** κάθε μονοσύνολο $\{x\}$ θα ήταν κλειστό, δηλαδή το συμπλήρωμα $\{x\}^c = \mathbb{N} \backslash \{x\}$ θα ήταν ανοικτό. Αυτό είναι αδύνατον, αφού $2x \in \{x\}^c$ και $x \notin \{x\}^c$.

△

Άσκηση 2.5: Έστω $X \neq \emptyset$ και μη κενά $A, B \subseteq X$, $A \neq B$. Εάν γνωρίζουμε ότι το:

$$\mathfrak{T} = \{\emptyset, A, B, X\}$$

είναι τοπολογία, δείξτε ότι ικανοποιείται ακριβώς ένα από τα παρακάτω:

i. $B = A^c$

ii. $A \subset B$

iii. $B \subset A$

Απάντηση: Ένας τρόπος να αποδειχθεί αυτό είναι να μελετηθούν τα σύνολα $A \cap B$ και $A \cup B$. Το πρώτο μπορεί να είναι $\emptyset, A$ ή B, ενώ το δεύτερο A, B ή X.

Ένας άλλος τρόπος είναι να δείξουμε ότι αν οι συμμετρικές σχέσεις ii., iii. δεν ισχύουν, τότε ισχύει η i. (και πάλι θα χρησιμοποιήσουμε τα $A \cap B$, $A \cup B$ - θα πρέπει να δείξουμε ότι $A \cap B = \emptyset$ και $A \cup B = X$).

△

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Μάθημα 3

■ **Παράδειγμα 3.1:** Θεωρούμε τον χώρο $X = \mathbb{R}$ και το σύνολο:

$$\mathcal{B}_S = \big\{(a, b] \mid a, b \in \mathbb{R},\ a < b\big\}$$

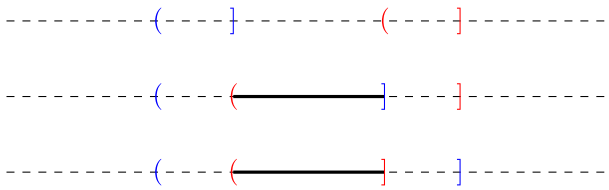
Η $\mathcal{B}_S$ είναι βάση μιας μοναδικής τοπολογίας, σύμφωνα με το **Θεώρημα 2.1**, αφού:

- Η $\mathcal{B}_S$ είναι κάλυψη του $\mathbb{R}$ (αφού $\mathbb{R} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(-n, n] \subseteq \bigcup \mathcal{B}_S$).
- Ας θεωρήσουμε δύο σύνολα $A, C \in \mathcal{B}_S$. Αντί να δείξουμε τη δεύτερη συνθήκη του **Θεωρήματος 2.1**, θα δείξουμε κάτι αρκετά ισχυρότερο, που ισχύει στην περίπτωσή μας. Το ίδιο το σύνολο $A \cap C$ ανήκει στην οικογένεια $\mathcal{B}_S$ ή είναι το κενό σύνολο.

  Πράγματι, εάν $A = (a_1, b_1]$ και $C = (a_2, b_2]$, υπάρχουν οι εξής περιπτώσεις. Εάν $a_i < b_i \leqslant a_j < b_j$, τότε $(a_1, b_1] \cap (a_2, b_2] = \emptyset$. Εάν $a_i \leqslant a_j \leqslant b_i \leqslant b_j$ ή $a_i \leqslant a_j < b_j \leqslant b_i$, τότε αντίστοιχα:

  $$(a_i, b_i] \cap (a_j, b_j] = (a_j, b_i] \in \mathcal{B}_S \ \textbf{ή}\ (a_i, b_i] \cap (a_j, b_j] = (a_j, b_j] \in \mathcal{B}_S$$

  Τους δείκτες $i \neq j$ τους χρησιμοποιούμε για να αποφύγουμε την ανάλυση συμμετρικών περιπτώσεων. Επίσης, οι διακεκριμένες περιπτώσεις για το πώς μπορούν να τέμνονται τα δύο σύνολα $(a_1, b_1]$, $(a_2, b_2]$ προκύπτουν διατάσσοντας με τους διάφορους τρόπους τα a_1, a_2, b_1, b_2 στην πραγματική ευθεία (η διάταξη του $\mathbb{R}$ είναι ολική).



Θεωρούμε $\mathfrak{T}_S$ την μοναδική τοπολογία της οποίας η $\mathcal{B}_S$ είναι βάση. Παρατηρήστε ότι η $\mathfrak{T}_S$ έχει τη μορφή:

$$\mathfrak{T}_S = \Big\{\bigcup \mathcal{C} \mid \mathcal{C} \subseteq \mathcal{B}_S\Big\}$$

Η $\mathfrak{T}_S$ ονομάζεται «τοπολογία των αριστερά ημιάνοικτων διαστημάτων». ■

Η τοπολογία $\mathfrak{T}_S$ είναι μια ενδιαφέρουσα τοπολογία με την οποία θα ασχοληθούμε και αργότερα. Κατ' αρχάς, δεν ταυτίζεται με τη συνήθη τοπολογία του $\mathbb{R}$, όταν αυτόν τον βλέπουμε σαν μετρικό χώρο με τη μετρική $\varrho(x, y) = |x - y|$: Πράγματι, $(0, 1] \in \mathfrak{T}_S \setminus \mathfrak{T}_\varrho$, οπότε $\mathfrak{T}_S \not\subseteq \mathfrak{T}_\varrho$.

Ένα από τα πράγματα που μπορεί κανείς να πει για αυτήν την νέα τοπολογία είναι ο αντίστροφος εγκλεισμός $\mathfrak{T}_S \supseteq \mathfrak{T}_\varrho$. Ας επιλέξουμε τυχόν $A \in \mathfrak{T}_\varrho$ κι ας το γράψουμε στη μορφή:

$$A = \bigcup_{i\in I}(a_i, b_i),\ \text{για αυθαίρετο σύνολο δεικτών } I$$

Η μορφή αυτή είναι δυνατόν να διατυπωθεί διότι η οικογένεια:

$$\mathcal{B} = \{B(x, \varepsilon) \mid x \in \mathbb{R},\ \varepsilon > 0\} = \left\{B\left(\frac{a+b}{2}, \frac{|a-b|}{2}\right) \,\middle|\, a, b \in \mathbb{R},\ a < b\right\} = \big\{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R},\ a < b\big\}$$

είναι βάση της τοπολογίας $\mathfrak{T}_\varrho$. Κανείς μπορεί να δείξει ότι κάθε ανοικτό σύνολο (a,b) μπορεί να γραφεί ως ένωση αριστερά ημιάνοικτων διαστημάτων, και μάλιστα:

$$(a,b) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(a, b - \frac{1}{n}\right]$$

Επομένως το ανοικτό σύνολο $A \in \mathfrak{T}_\varrho$ μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$A = \bigcup_{i\in I} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \underbrace{\left(a_i, b_i - \frac{1}{n}\right]}_{\in \mathcal{B}_S}$$

και κατ' επέκταση είναι ένωση στοιχείων της $\mathcal{B}_S$. Αυτό δείχνει ότι $A \in \mathfrak{T}_S$ και ότι $\mathfrak{T}_\varrho \subseteq \mathfrak{T}_S$.

Έχουμε αναφέρει ξανά ότι, δοθείσης μίας τοπολογίας $\mathfrak{T}$, υπάρχει μια μεγαλύτερη τοπολογία (ως προς τη σχέση του υποσυνόλου), και μάλιστα μια απ' αυτές είναι η διακριτή τοπολογία $\mathfrak{T}_\delta = \mathcal{P}(X)$. Ένα ερώτημα που είχαμε πει ότι θα μας απασχολήσει είναι η εύρεση της μικρότερης δυνατής τοπολογίας (ως προς τη σχέση του υποσυνόλου). Βέβαια ψάχνοντας γενικά και αόριστα την ≪μικρότερη≫ τοπολογία δεν έχει ιδιαίτερο νόημα - η τετριμμένη τοπολογία $\{\emptyset, X\}$ είναι τοπολογία. Αυτό που θα αναζητήσουμε είναι η μικρότερη τοπολογία που περιέχει τα στοιχεία ενός $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(X)$.

Πρόταση 3.1: Έστω X ένα μη κενό σύνολο και $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Υπάρχει τοπολογία $\mathfrak{t}$ του X που περιέχεται (ως υποσύνολο) σε όλες τις άλλες τοπολογίες του X που περιέχουν (ως υποσύνολο) την οικογένεια $\mathcal{C}$.

Απόδειξη: Θεωρούμε το σύνολο:

$$\mathcal{S} = \{\mathfrak{T} \subseteq \mathcal{P}(X) \mid \mathfrak{T} \text{ είναι τοπολογία του } X \textbf{ και } \mathcal{C} \subseteq \mathfrak{T}\} \neq \emptyset \text{ (αφού } \mathcal{P}(X) \in \mathcal{S})$$

καθώς επίσης και την τομή:

$$\mathfrak{t} = \bigcap \mathcal{S}$$

Είναι στοιχειώδες κανείς να ελέγξει ότι η $\mathfrak{t}$ είναι πράγματι τοπολογία - η τομή οσοδήποτε μεγάλου πλήθους τοπολογιών είναι τοπολογία. Οπότε, εξ ορισμού της $\mathfrak{t}$, για οποιαδήποτε άλλη τοπολογία $\mathfrak{T} \supseteq \mathcal{C}$ του X, $\mathfrak{t} \subseteq \mathfrak{T}$.

□

Συνεχίζουμε διατυπώνοντας τον ορισμό των υποβάσεων.

Ορισμός 3.1: (Υποβάσεις). Έστω $(X, \mathfrak{T})$ ένας τοπολογικός χώρος. Το σύνολο $\mathcal{C} \subseteq \mathfrak{T}$ θα καλείται υποβάση της τοπολογίας $\mathfrak{T}$ εάν και μόνο αν το σύνολο:

$$\mathcal{B} = \left\{ \bigcap_{i=1}^{n} C_i \;\middle|\; n \in \mathbb{N},\ \{C_i\}_{i=1}^{n} \subseteq \mathcal{C} \right\} \cup \{X\}$$

είναι βάση της $\mathfrak{T}$.

Δοθέντος ενός υποσυνόλου $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(X)$, υπάρχει τοπολογία της οποίας η $\mathcal{C}$ είναι υποβάση; Η απάντηση είναι καταφατική, κι αυτό θα το δείξουμε με το ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα 3.1: Έστω $X \neq \emptyset$ ένα σύνολο και $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Το σύνολο:

$$\mathcal{B} = \left\{ \bigcap_{i=1}^{n} C_i \;\middle|\; n \in \mathbb{N},\ \{C_i\}_{i=1}^{n} \subseteq \mathcal{C} \right\} \cup \{X\}$$

είναι πάντοτε βάση μοναδικής τοπολογίας.

Απόδειξη: Εδώ θα γίνει φυσικά χρήση του **Θεωρήματος 2.1**. Η $\mathcal{B}$ είναι με τετριμμένο τρόπο κάλυψη του X, αφού $X \in \mathcal{B}$. Η δεύτερη ιδιότητα είναι κι αυτή κάπως άμεση, αφού για κάθε δύο σύνολα $C, G \in \mathcal{B}$ μπορούμε να γράψουμε:

$$C = \bigcap_{i=1}^{n} C_i \textbf{ και } G = \bigcap_{j=1}^{m} G_j$$

οπότε:

$$C \cap G = \left(\bigcap_{i=1}^{n} C_i\right) \cap \left(\bigcap_{j=1}^{m} G_j\right)$$

κι αν ορίσουμε την πεπερασμένη οικογένεια $\mathcal{D} = \{C_i\}_{i=1}^{n} \cup \{G_j\}_{j=1}^{m}$, έχουμε:

$$C \cap G = \bigcap \mathcal{D} \in \mathcal{B}$$

□

$\mathfrak{T}$ Αναδιατυπώνοντας το παραπάνω θεώρημα, έχουμε ότι κάθε $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(X)$ είναι υποβάση κάποιας τοπολογίας.

Παρατήρηση 3.1: Έστω $(X, \mathfrak{T})$ τοπολογικός χώρος και $\mathcal{B}$ μια βάση της τοπολογίας. Η $\mathcal{B}$ είναι υποβάση της $\mathfrak{T}$.

Απόδειξη: Το σύνολο:

$$\mathcal{B}' = \left\{\bigcap_{i=1}^{n} B_i \;\middle|\; n \in \mathbb{N},\ \{B_i\}_{i=1}^{n} \subseteq \mathcal{B}\right\} \cup \{X\} \supseteq \mathcal{B}$$

είναι βάση της τοπολογίας $\mathfrak{T}$, από το **Παράδειγμα 2.1 (δεύτερο •)**.

□

■ **Παράδειγμα 3.2:** Για $X = \mathbb{R}$, θεωρούμε το σύνολο:

$$\mathcal{C} = \big\{(-\infty, b) \mid b \in \mathbb{R}\big\} \cup \big\{(a, \infty) \mid a \in \mathbb{R}\big\}$$

Το $\mathcal{C}$ είναι υποβάση της τοπολογίας $\mathfrak{T}_\varrho$, όπου ϱ είναι η συνήθης μετρική.

Πράγματι, παρατηρούμε ότι οι ≪πεπερασμένες τομές≫ της $\mathcal{C}$, δηλαδή το σύνολο:

$$\left\{\bigcap_{i=1}^{n} C_i \;\middle|\; n \in \mathbb{N},\ \{C_i\}_{i=1}^{n} \subseteq \mathcal{C}\right\}$$

περιέχει μόνο στοιχεία της τοπολογίας $\mathfrak{T}_\varrho$ (δηλαδή είναι υποσύνολο της $\mathfrak{T}_\varrho$). Επειδή επιπλέον:

$$\mathcal{B}' = \left\{\bigcap_{i=1}^{n} C_i \;\middle|\; n \in \mathbb{N},\ \{C_i\}_{i=1}^{n} \subseteq \mathcal{C}\right\} \cup \{\mathbb{R}\} = \mathcal{C} \cup \mathcal{B} \cup \{\mathbb{R}\} \supseteq \mathcal{B}$$

(όπου $\mathcal{B}$ είναι η οικογένεια των ανοικτών μπαλών του $(\mathbb{R}, \varrho)$), ξανά από το **Παράδειγμα 2.1 (δεύτερο •)** έπεται ότι η $\mathcal{B}'$ είναι βάση της $\mathfrak{T}_\varrho$. ■

Στη συνέχεια θα ορίσουμε τις έννοιες των εσωτερικών των συνόλων, των κλειστών θηκών και διάφορες άλλες συναφείς έννοιες, συνεχίζοντας κατά κάποιον τρόπο αυτήν την ≪γενίκευση≫ της πραγματικής ανάλυσης.

Ορισμός 3.2: (Εσωτερικό συνόλου και κλειστή θήκη) Έστω $(X, \mathfrak{T})$ ένας τοπολογικός χώρος. Για κάθε $A \subseteq X$ ορίζουμε τα εξής βοηθητικά σύνολα:

$$\mathcal{E}_A = \{G \in \mathfrak{T} \mid G \subseteq A\} \ \textbf{και}\ \mathcal{F}_A = \{F \subseteq X \mid F \text{ κλειστό και } A \subseteq F\}$$

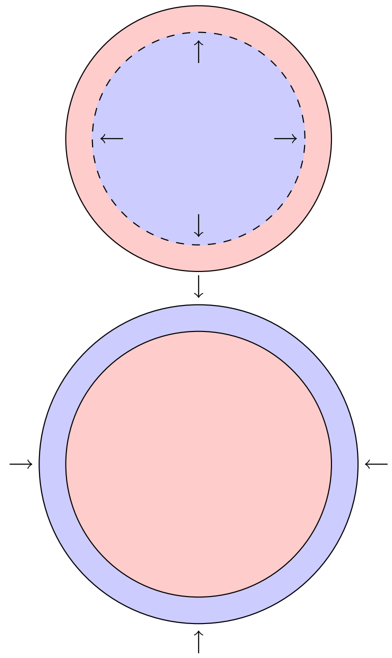
I. Ορίζουμε ως εσωτερικό του A το σύνολο:

$$A^\circ := \bigcup \mathcal{E}_A$$

II. Ορίζουμε ως κλειστή θήκη του A το σύνολο:

$$\overline{A} := \bigcap \mathcal{F}_A$$

Κανείς μπορεί να ελέγξει ότι σε έναν τοπολογικό μετρικό χώρο οι γνωστοί ορισμοί από την πραγματική ανάλυση για τα εσωτερικά και τις θήκες είναι ισοδύναμοι με αυτούς που μόλις αναφέραμε.



Προσέγγιση του εσωτερικού με ανοικτά σύνολα, ≪από μέσα≫. Επίσης, προσέγγιση της θήκης με κλειστά σύνολα, ≪από έξω≫.

Εκτός από το ότι οι ορισμοί ≪μοιάζουν≫ με τους αντίστοιχους της πραγματικής, διάφορες σχέσεις από τους μετρικούς χώρους μεταφέρονται αυτούσια και στους τοπολογικούς, όσον αφορά τα εσωτερικά συνόλων και τις θήκες τους.

Πρόταση 3.2: Έστω $(X, \mathfrak{T})$ τοπολογικός χώρος και $A, B \subseteq X$. Τότε:

i. $A^\circ \subseteq A$

ii. $A^\circ = A \Leftrightarrow A \in \mathfrak{T}$ (Ένας ακόμη χαρακτηρισμός των ανοικτών συνόλων)

iii. $(A^\circ)^\circ = A^\circ$ (Δεν έχουν νόημα ≪πολλαπλά≫ εσωτερικά)

iv. $A \subseteq B \Rightarrow A^\circ \subseteq B^\circ$ (Το εσωτερικό διατηρεί την μονοτονία)

v. $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$ (Το εσωτερικό συμπεριφέρεται καλά στις τομές)

vi. $(A \cup B)^\circ \supseteq A^\circ \cup B^\circ$ (Το εσωτερικό συμπεριφέρεται σχετικά καλά στις ενώσεις)

Απόδειξη: Για το i., για κάθε $G \in \mathcal{E}_A$ αληθεύει $G \subseteq A$. Επομένως, $\bigcup \mathcal{E}_A \subseteq A$.

Για το ii.: ($\Rightarrow$) Το A° είναι ανοικτό ως ένωση ανοικτών. Επομένως, επειδή $A^\circ = A$ έχουμε ότι και το A είναι ανοικτό.

($\Leftarrow$) Εάν το ίδιο το A είναι ανοικτό, τότε $A \in \mathcal{E}_A$. Οπότε $\bigcup \mathcal{E}_A \supseteq A$ και σε συνδυασμό με το i., $A^\circ = A$.

Για το iii.: Το A° είναι ανοικτό σύνολο, επομένως το ii. δίνει $(A^\circ)^\circ = A^\circ$.

Για το iv., εάν G είναι ένα ανοικτό σύνολο με $G \subseteq A$, τότε $G \subseteq B$. Οπότε $\mathcal{E}_A \subseteq \mathcal{E}_B$ και συνεπώς:

$$A \subseteq B \Rightarrow \bigcup \mathcal{E}_A \subseteq \bigcup \mathcal{E}_B \Rightarrow A^\circ \subseteq B^\circ$$

Για το v.: Επειδή $A^\circ \subseteq A,\ B^\circ \subseteq B$, το σύνολο $A^\circ \cap B^\circ$ περιέχεται στην τομή $A \cap B$ (ως υποσύνολο). Είναι επίσης ανοικτό, οπότε:

$$A^\circ \cap B^\circ \in \mathcal{E}_{A\cap B} \Rightarrow A^\circ \cap B^\circ \subseteq \bigcup \mathcal{E}_{A\cap B} = (A \cap B)^\circ$$

Για τον αντίστροφο εγκλεισμό, παρατηρούμε ότι το $(A \cap B)^\circ$ είναι υποσύνολο των A°, B° (αφού το εσωτερικό διατηρεί την μονοτονία), και συνεπώς $(A \cap B)^\circ \subseteq A^\circ \cap B^\circ$.

Για το vi.: Επειδή $A^\circ \subseteq A$, $B^\circ \subseteq B$, το σύνολο $A^\circ \cup B^\circ$ περιέχεται στην ένωση $A \cup B$ (ως υποσύνολο). Είναι επίσης ανοικτό, οπότε $A^\circ \cup B^\circ \in \mathcal{E}_{A\cup B} \Rightarrow A^\circ \cup B^\circ \subseteq (A \cup B)^\circ$. Η ισότητα εδώ δεν ισχύει πάντα, όπως θα δούμε με το επόμενο παράδειγμα.

□

■ **Παράδειγμα 3.3:** Στο $\mathbb{R}$ (όταν αυτό το βλέπουμε ως τον συνήθη τοπολογικό μετρικό χώρο) υπάρχουν σύνολα $A, B \subseteq \mathbb{R}$ για τα οποία:

$$(A \cup B)^\circ \supset A^\circ \cup B^\circ$$

Πράγματι, εάν $A = \mathbb{Q}$ και $B = \mathbb{Q}^c$, τότε:

$$(A \cup B)^\circ = \mathbb{R} \supset \emptyset = A^\circ \cup B^\circ$$

■

Αντίστοιχη πρόταση της **Πρότασης 3.2** έχουμε και για τις κλειστές θήκες.

Πρόταση 3.3: Έστω $(X, \mathfrak{T})$ τοπολογικός χώρος και $A, B \subseteq X$. Τότε:

i. $A \subseteq \overline{A}$

ii. $A = \overline{A} \Leftrightarrow A$ κλειστό (Ένας χαρακτηρισμός των κλειστών συνόλων)

iii. $\overline{(\overline{A})} = \overline{A}$ (Δεν έχουν νόημα «πολλαπλές» θήκες)

iv. $A \subseteq B \Rightarrow \overline{A} \subseteq \overline{B}$ (Η θήκη διατηρεί την μονοτονία)

v. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ (Η θήκη συμπεριφέρεται καλά στις ενώσεις)

vi. $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$ (Η θήκη συμπεριφέρεται σχετικά καλά στις τομές)

Απόδειξη: Οι συλλογισμοί στην απόδειξη είναι ανάλογοι αυτών στην προηγούμενη πρόταση. Ας τους ξαναγράψουμε όπως και να 'χει, για χάρη πληρότητας.

Για το i., επειδή $A \subseteq F$ για κάθε $F \in \mathcal{F}_A$, έχουμε $A \subseteq \bigcap \mathcal{F}_A$.

Για το ii.: ($\Rightarrow$) Το $\overline{A}$ είναι κλειστό σύνολο ως τομή κλειστών, επομένως το $A = \overline{A}$ θα είναι κι αυτό κλειστό.

($\Leftarrow$) Εάν το A είναι κλειστό, θα ανήκει στην οικογένεια των $\mathcal{F}_A$. Οπότε $A \supseteq \bigcap \mathcal{F}_A$ και σε συνδυασμό με το i. έχουμε την ισότητα.

Για το iii., επειδή το $\overline{A}$ είναι κλειστό σύνολο, από το ii. έχουμε τη σχέση $\overline{(\overline{A})} = \overline{A}$.

Για το iv., χρησιμοποιώντας το i. έχουμε $A \subseteq B \subseteq \overline{B}$, οπότε $\overline{B} \in \mathcal{F}_A$. Κατ' επέκταση:

$$\bigcap \mathcal{F}_A \subseteq \overline{B} \Rightarrow \overline{A} \subseteq \overline{B}$$

Για το v., και πάλι θα δείξουμε τους δύο εγκλεισμούς. Κατ' αρχάς, $A \subseteq \overline{A}$, $B \subseteq \overline{B}$, οπότε $A \cup B \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}$. Μάλιστα το σύνολο $\overline{A} \cup \overline{B}$ είναι κλειστό ως ένωση τέτοιων και άρα $\overline{A} \cup \overline{B} \in \mathcal{F}_{A\cup B}$. Αυτά δείχνουν ότι:

$$\overline{A \cup B} = \bigcap \mathcal{F}_{A\cup B} \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}$$

Για τον αντίστροφο εγκλεισμό, καθένα από τα $\overline{A}, \overline{B}$ είναι υποσύνολα του $\overline{A \cup B}$ (λόγω του ότι η θήκη διατηρεί τη μονοτονία). Επομένως $\overline{A} \cup \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$.

Για το vi., και πάλι λόγο μονοτονίας το $\overline{A \cap B}$ είναι υποσύνολο των $\overline{A}, \overline{B}$. Οπότε $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$. Η ισότητα εδώ δεν ισχύει πάντα, όπως θα δούμε με το επόμενο παράδειγμα.

□

■ **Παράδειγμα 3.4:** Στο $\mathbb{R}$ (όταν αυτό το βλέπουμε ως τον συνήθη τοπολογικό μετρικό χώρο) υπάρχουν σύνολα $A, B \subseteq \mathbb{R}$ για τα οποία:

$$\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$$

Πράγματι, εάν $A = \mathbb{Q}$ και $B = \mathbb{Q}^c$, τότε:

$$\overline{A \cap B} = \emptyset \subset \mathbb{R} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

■

Φαίνεται (κατά κάποιον τρόπο) η θήκη να είναι «δυϊκή» έννοια του εσωτερικού του συνόλου. Η παρακάτω παρατήρηση δείχνει κάπως καλύτερα αυτήν την σχέση.

Παρατήρηση 3.2: Έστω $(X, \mathfrak{T})$ ένας τοπολογικός χώρος και $A \subseteq X$. Ισχύουν οι ισοδυναμίες:

$$\begin{aligned} G \in \mathcal{E}_A &\Leftrightarrow G \in \mathfrak{T} \textbf{ και } G \subseteq A \\ &\Leftrightarrow G^c \text{ κλειστό } \textbf{και } G^c \supseteq A^c \\ &\Leftrightarrow G^c \in \mathcal{F}_{A^c} \end{aligned}$$

Πρόταση 3.4: Έστω $(X, \mathfrak{T})$ ένας τοπολογικός χώρος και $A \subseteq X$. Ισχύουν τα ακόλουθα:

i. $\overline{X \setminus A} = X \setminus A^\circ$

ii. $(X \setminus A)^\circ = X \setminus \overline{A}$

Απόδειξη: Για το i., γράφουμε:

$$X \setminus A^\circ = (A^\circ)^c = \left(\bigcup \mathcal{E}_A\right)^c = \left(\bigcup_{G \in \mathcal{E}_A} G\right)^c = \bigcap_{G \in \mathcal{E}_A} G^c \overset{\star}{=} \bigcap_{G^c \in \mathcal{F}_{A^c}} G^c = \overline{X \setminus A}$$

Στην ισότητα άστρο ($\star$) γίνεται χρήση της **Παρατήρησης 3.2**.

Για το ii., γράφουμε:

$$X \setminus \overline{A} = (\overline{A})^c = \left(\bigcap \mathcal{F}_A\right)^c = \left(\bigcap_{F \in \mathcal{F}_A} F\right)^c = \bigcup_{F \in \mathcal{F}_A} F^c \overset{\star\star}{=} \bigcup_{F^c \in \mathcal{E}_{A^c}} F^c = (X \setminus A)^\circ$$

Στην ισότητα διπλό άστρο ($\star\star$) γίνεται ξανά χρήση της **Παρατήρησης 3.2**.

$\square$

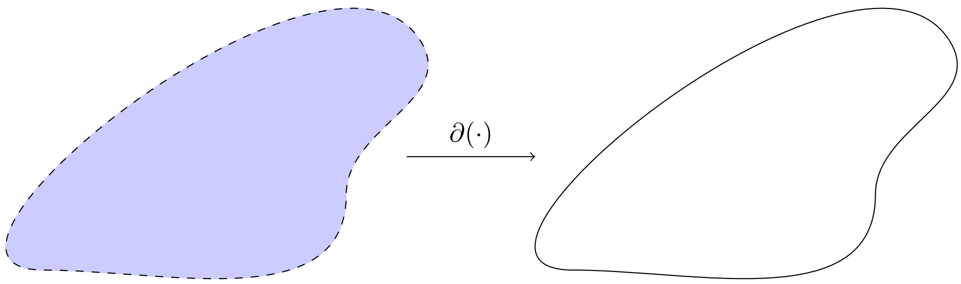
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Μάθημα 4

Συνεχιζουμε με τον ορισμό του συνόρου, που γενικεύει τον αντίστοιχο ορισμό της πραγματικής ανάλυσης.

Ορισμός 4.1: (Σύνορο συνόλου) Έστω $(X, \mathfrak{T})$ ένας τοπολογικός χώρος και $A \subseteq X$. Ορίζουμε ως σύνορο του A το σύνολο:

$$\partial A = \overline{A} \cap \overline{X \backslash A}$$



Ενδεχομένως κανείς θα ήθελε να ορίσει το σύνορο του συνόλου με κάποιον άλλον τρόπο, για παράδειγμα $\partial A = \overline{A} \backslash A^{\circ}$. Οι ορισμοί θα δείξουμε ότι εν τέλει είναι ισοδύναμοι, κι ο λόγος που χρησιμοποιούμε τον **Ορισμό 4.1** είναι καθαρά για διευκόλυνσή μας όσον αφορά τα εξής δύο πράγματα: Κατ' αρχάς μ' αυτόν τον ορισμό φαίνεται ότι δύο συμπληρωματικά σύνολα έχουν το ίδιο σύνορο, κι επιπλέον φαίνεται ότι το σύνορο είναι κλειστό, ως τομή κλειστών.

Παρατήρηση 4.1: Έστω $(X, \mathfrak{T})$ ένας τοπολογικός χώρος και $A \subseteq X$. Αληθεύουν:

- $\partial A = \partial(X \backslash A)$
- Το ∂A είναι κλειστό σύνολο.

Πρόταση 4.1: Έστω $(X, \mathfrak{T})$ ένας τοπολογικός χώρος και $A \subseteq X$. Αληθεύουν:

i. $\partial A = \overline{A} \backslash A^{\circ}$ (Ένας εναλλακτικός ορισμός)

ii. $A^{\circ} \cup \partial A = \overline{A}$ **και** $A^{\circ} \cap \partial A = \emptyset$ (Δηλαδή το εσωτερικό ενός συνόλου και το σύνορό του διαμερίζουν τη θήκη του)

iii. Τα σύνολα $A^{\circ}, \partial A, (X \backslash A)^{\circ}$ διαμερίζουν τον χώρο X.

Απόδειξη: Για το i., γράφουμε:

$$\partial A = \overline{A} \cap \overline{X \backslash A} = \overline{A} \cap (X \backslash A^{\circ}) = \overline{A} \cap (A^{\circ})^{c} = \overline{A} \backslash A^{\circ}$$

Για το ii., οι **Προτάσεις 3.2, i.** και **3.3, i.** μας δίνουν ότι $A^{\circ} \subseteq \overline{A}$. Επομένως έχουμε:

$$\overline{A} = \overline{A} \cup A^{\circ} = A^{\circ} \cup (\overline{A} \backslash A^{\circ}) = A^{\circ} \cup \partial A$$

(Θυμηθείτε τη σχέση $A \cup B = B \cup (A \backslash B)$).

Επιπλέον, η τομή $A^\circ \cap \partial A$ είναι κενή, από το i..

Για το iii., γράφουμε:
$$X = \overline{A} \cup (X \backslash \overline{A}) = A^\circ \cup \partial A \cup (X \backslash A)^\circ$$
Τα $A^\circ, \partial A$ είναι ξένα από το ii.. Επίσης, το $(X \backslash A)^\circ$ είναι ξένο με τα άλλα δύο, αφού το ίδιο είναι ίσο με το $X \backslash \overline{A}$ και η ένωση των άλλων δύο είναι το $\overline{A}$.

□

Πρόταση 4.2: Έστω $(X, \mathfrak{T})$ ένας τοπολογικός χώρος και $A, B \subseteq X$. Αληθεύουν:

i. $\partial \emptyset = \partial X = \emptyset$

ii. A κλειστό $\Leftrightarrow \partial A \subseteq A$.

iii. A ανοικτό $\Leftrightarrow \partial A \subseteq A^c$.

iv. $\partial \partial A \subseteq \partial A$

v. $A \cap B \cap \partial(A \cap B) = A \cap B \cap (\partial A \cup \partial B)$ (Αυτή η ιδιότητα είναι αξιοσημείωτη: Γενικά το σύνορο της τομής δύο συνόλων δεν συμπεριφέρεται καλά, αλλά τουλάχιστον στην τομή των συνόλων εμφανίζει μια καλή διάσπαση)

Απόδειξη: Για το i. έχουμε $\partial \emptyset = \overline{\emptyset} \backslash \emptyset^\circ = \emptyset \backslash \emptyset = \emptyset$ (γιατί το $\emptyset$ είναι ανοικτό και κλειστό). Επιπλέον, $\partial \emptyset = \partial \emptyset^c = \partial X$.

Για το ii.: ($\Rightarrow$) Έχουμε $A = \overline{A} = A^\circ \cup \partial A \supseteq \partial A$.

($\Leftarrow$) Αντιστρόφως, εάν $\partial A \subseteq A$, τότε $\overline{A} = A^\circ \cup \partial A \subseteq A^\circ \cup A = A$. Λόγω του εγκλεισμού $A \subseteq \overline{A}$ έπεται τελικά η ισότητα. Άρα το A είναι κλειστό.

Για το iii.: Εφαρμόζοντας το ii. για το συμπλήρωμα A^c:
$$A \text{ ανοικτό } \Leftrightarrow A^c \text{ κλειστό } \Leftrightarrow \partial A^c \subseteq A^c \Leftrightarrow \partial A \subseteq A^c$$
Για το iv., επειδή το ∂A είναι κλειστό σύνολο, $\partial \partial A \subseteq \partial A$ (λόγω του ii.). Η ισότητα εν γένει δεν αληθεύει, όπως θα δείξουμε με το παράδειγμα που θα ακολουθήσει μετά την απόδειξη.

Για το v.: Κάνοντας «πράξεις» στα δύο μέλη της ισότητας θα καταλήξουμε σε δύο ίσες μορφές. Για το σύνολο αριστερά:
$$\begin{aligned} A \cap B \cap \partial(A \cap B) &= A \cap B \cap \overline{A \cap B} \cap \overline{X \backslash (A \cap B)} \\ &= A \cap B \cap \overline{(A \cap B)^c} \\ &= A \cap B \cap \overline{A^c \cup B^c} \\ &= A \cap B \cap (\overline{A^c} \cup \overline{B^c}) \\ &= (A \cap B \cap \overline{A^c}) \cup (A \cap B \cap \overline{B^c}) \quad \boxed{\star} \end{aligned}$$
Για το σύνολο δεξιά:
$$\begin{aligned} A \cap B \cap (\partial A \cup \partial B) &= (A \cap B \cap \partial A) \cup (A \cap B \cap \partial B) \\ &= (A \cap B \cap \overline{A} \cap \overline{X \backslash A}) \cup (A \cap B \cap \overline{B} \cap \overline{X \backslash B}) \\ &= (A \cap B \cap \overline{A^c}) \cup (A \cap B \cap \overline{B^c}) \quad \boxed{\star} \end{aligned}$$
Επομένως, για τα δύο σύνολα ισχύει τελικά η ισότητα.

□

■ **Παράδειγμα 4.1:** Η ισότητα $\partial \partial A = \partial A$ δεν ισχύει πάντοτε. Εν γένει ισχύει ο εγκλεισμός $\partial \partial A \subseteq \partial A$, και μάλιστα στον συνήθη τοπολογικό μετρικό χώρο του $\mathbb{R}$, για $A = \mathbb{Q}$ έχουμε:
$$\partial \partial \mathbb{Q} = \partial \mathbb{R} = \emptyset \subset \mathbb{R} = \partial \mathbb{Q}$$

■

Παρατήρηση 4.2: Οι σχέσεις $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ και $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$ ισχύουν για πεπερασμένο πλήθος συνόλων (επαγωγικά κανείς μπορεί από δύο σύνολα να «περάσει» την ιδιότητα σε οσοδήποτε μεγάλο φυσικό πλήθος). Για άπειρο πλήθος συνόλων όμως, γενικά δεν ισχύουν.

Απόδειξη: Και πάλι στον συνήθη τοπολογικό μετρικό χώρο του $\mathbb{R}$, θεωρούμε την οικογένεια $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ με $A_n = (-1/n, 1/n)$. Τότε:

$$\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)^\circ = \{0\}^\circ = \emptyset \neq \{0\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n^\circ$$

Επίσης θεωρούμε την οικογένεια $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ με $B_n = [1/n, 1]$. Τότε:

$$\overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n} = \overline{(0,1]} = [0,1] \neq (0,1] = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{B_n}$$

□

Για να γίνουν περισσότερο αντιληπτές οι έννοιες του εσωτερικού, της κλειστής θήκης και του συνόρου γενικά στις τοπολογίες, ας δούμε ποιά μορφή έχουν σε γνωστές τοπολογίες αυτά τα σύνολα.

■ **Παράδειγμα 4.2:** Έστω $(X, \mathfrak{T})$ ένας τοπολογικός χώρος με την τετριμμένη τοπολογία $\mathfrak{T} = \{\emptyset, X\}$. Για τα διάφορα $A \subseteq X$ έχουμε:

$$A^\circ = \begin{cases} A, & A \in \mathfrak{T} \\ \emptyset, & A \notin \mathfrak{T} \end{cases} \qquad \overline{A} = \begin{cases} A, & A \in \mathfrak{T} \\ X, & A \notin \mathfrak{T} \end{cases} \qquad \partial A = \begin{cases} \emptyset, & A \in \mathfrak{T} \\ X, & A \notin \mathfrak{T} \end{cases}$$

Για το εσωτερικό: Επειδή τα ανοικτά σύνολα ταυτίζονται με το εσωτερικό τους, $A^\circ = A$ στην περίπτωση όπου $A \in \mathfrak{T}$.

Εάν A είναι ένα τυχαίο σύνολο που δεν είναι ανοικτό, τότε το εσωτερικό του είναι ένα ανοικτό υποσύνολό του. Επειδή το A δεν είναι ανοικτό, δεν ταυτίζεται με το X και συνεπώς το μόνο ανοικτό υποσύνολο είναι το $\emptyset$. Αυτά δείχνουν ότι $A^\circ = \emptyset$.

Για τη θήκη: Εφόσον η τοπολογία είναι τετριμμένη, τα κλειστά σύνολα είναι ακριβώς τα ανοικτά σύνολα. Επομένως, $\overline{A} = A$.

Εάν το A είναι ένα τυχαίο σύνολο που δεν είναι ανοικτό, τότε η θήκη του θα είναι ένα κλειστό υπερσύνολό του. Επειδή το μόνο κλειστό υπερσύνολό του είναι το X, έχουμε $\overline{A} = X$.

Το σύνορο είναι τετριμμένο να βρεθεί μέσω της σχέσης $\partial A = \overline{A} \backslash A^\circ$. ■

■ **Παράδειγμα 4.3:** Έστω $(X, \mathfrak{T}_\delta)$ ένας τοπολογικός χώρος με τη διακριτή τοπολογία $\mathfrak{T}_\delta = \mathcal{P}(X)$. Για τα διάφορα σύνολα $A \subseteq X$ έχουμε:

$$A^\circ = A, \ A \subseteq X \qquad \overline{A} = A, \ A \subseteq X \qquad \partial A = \emptyset, \ A \subseteq X$$

Αυτό διότι όλα τα υποσύνολα του X είναι ανοικτά, άρα και κλειστά. ■

■ **Παράδειγμα 4.4:** Έστω $(X, \mathfrak{T})$ ένας τοπολογικός χώρος με X άπειρο και $\mathfrak{T}$ την συμπεπερασμένη τοπολογία. (Εδώ δεν παίρνουμε το παράδειγμα όπου το X είναι πεπερασμένο, γιατί τότε η τοπολογία γίνεται διακριτή). Για τα διάφορα σύνολα $A \subseteq X$ έχουμε:

$$A^\circ = \begin{cases} A, & A \in \mathfrak{T} \\ \emptyset, & A \notin \mathfrak{T} \end{cases} \qquad \overline{A} = \begin{cases} A, & A^c \in \mathfrak{T} \\ X, & A^c \notin \mathfrak{T} \end{cases} \qquad \partial A = \begin{cases} X \backslash A, & A \in \mathfrak{T}, A^c \notin \mathfrak{T} \\ A, & A \notin \mathfrak{T}, A^c \in \mathfrak{T} \\ X, & A \notin \mathfrak{T}, A^c \notin \mathfrak{T} \end{cases}$$

Πριν προχωρίσουμε σε περαιτέρω ανάλυση, ας σημειώσουμε τις ισοδυναμίες:

$$A \text{ άπειρο } \Leftrightarrow A^c \notin \mathfrak{T} \ \textbf{και} \ A \text{ πεπερασμένο } \Leftrightarrow A^c \in \mathfrak{T}$$

και (αντίστοιχα):

$$A^c \text{ άπειρο } \Leftrightarrow A \notin \mathfrak{T} \ \textbf{και} \ A^c \text{ πεπερασμένο } \Leftrightarrow A \in \mathfrak{T}$$

Για το εσωτερικό: Εάν $A \in \mathfrak{T}$, τότε $A^\circ = A$.

Διαφορετικά, εάν το A δεν είναι ανοικτό, το A^c είναι άπειρο. Επομένως, εάν ψάξουμε ανοικτό υποσύνολο του A, αυτό σίγουρα θα έχει μεγαλύτερο συμπλήρωμα από το A^c - οπότε δεν υπάρχει

≪μικρότερο≫ ανοικτό, πέραν του $\emptyset$.

Για τη θήκη: Εάν το A είναι κλειστό (δηλαδή το συμπλήρωμά του είναι ανοικτό) τότε $\overline{A} = A$.

Διαφορετικά, εάν το A δεν είναι κλειστό, το συμπλήρωμά του δεν είναι ανοικτό. Επομένως το A είναι άπειρο. Τώρα κάθε κλειστό υπερσύνολο του A θα πρέπει να έχει ανοικτό συμπλήρωμα, δηλαδή το ίδιο να είναι πεπερασμένο. Αυτό δεν μπορεί να συμβαίνει (αφού το κλειστό υπερσύνολο είναι ≪μεγαλύτερο≫ του A), εκτός κι αν αυτό το υπερσύνολο ταυτίζεται με το X.

Για το σύνορο: Παρατηρούμε ότι δεν είναι δυνατόν $A \in \mathfrak{T}$ και $A^c \in \mathfrak{T}$, διότι τότε τα A^c, A θα ήταν πεπερασμένα (άρα και όλος ο χώρος X). Για όλους τους υπόλοιπους συνδυασμούς (ανήκει, δεν ανήκει), μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη σχέση $\partial A = \overline{A} \backslash A^\circ$ για να προσδιορίσουμε το σύνορο. ■

Για τη συναριθμίσιμη τοπολογία μπορεί να ακολουθηθεί παρόμοια διαδικασία.

■ **Παράδειγμα 4.5:** Έστω $(X, \mathfrak{T})$ ένας τοπολογικός χώρος με $\mathfrak{T}$ την τοπολογία του ιδιαιτέρου σημείου x_0. Για τα διάφορα $A \subseteq X$ έχουμε:

$$A^\circ = \begin{cases} A, & A \in \mathfrak{T} \\ \emptyset, & A \notin \mathfrak{T} \end{cases} \qquad \overline{A} = \begin{cases} A, & A \notin \mathfrak{T} \\ X, & A \in \mathfrak{T} \end{cases} \qquad \partial A = \begin{cases} A, & A \notin \mathfrak{T} \\ X \backslash A, & A \in \mathfrak{T} \end{cases}$$

Για το εσωτερικό: Εάν $A \in \mathfrak{T}$, τότε $A^\circ = A$.

Διαφορετικά, το x_0 δεν ανήκει στο A και κατ' επέκταση, οποιοδήποτε υποσύνολό του δεν περιέχει το x_0. Το μόνο λοιπόν ≪μικρότερο≫ ανοικτό είναι το $\emptyset$.

Για τη θήκη: Εάν το A είναι κλειστό (δηλαδή $x_0 \in A^c \Rightarrow A \notin \mathfrak{T}$) τότε $\overline{A} = A$.

Διαφορετικά, το x_0 θα ανήκει στο A και κατ' επέκταση οποιοδήποτε άλλο ≪μεγαλύτερο≫ σύνολο θα είναι ανοικτό και όχι κλειστό, πέραν του X.

Το σύνορο μπορεί να βρεθεί από τη σχέση $\partial A = \overline{A} \backslash A^\circ$. ■

Για την τοπολογία του εξαιρουμένου σημείου x_0 μπορεί να ακολουθηθεί παρόμοια διαδικασία.

■ **Παράδειγμα 4.6:** Έστω $(\mathbb{R}, \mathfrak{T}_S)$ ο τοπολογικός χώρος του **Παραδείγματος 3.1**. Εδώ τα σύνολα έχουν μια σαφώς περιπλοκότερη μορφή, οπότε θα μας ήταν πολύ δυσκολότερο να προσδιορίσουμε επακριβώς τα εσωτερικά, τις θήκες και τα σύνορά τους. Γι' αυτό θα περιοριστούμε στη βάση $\mathcal{B}_S$.

Παρατηρούμε ότι $(a, b]^c = (-\infty, a] \cup (b, \infty)$ είναι κι αυτό ανοικτό σύνολο. Αυτό διότι το (b, ∞) είναι ούτως ή άλλως ανοικτό στον συνήθη τοπολογικό μετρικό χώρο ($\mathfrak{T}_\varrho \subseteq \mathfrak{T}_S$) κι επιπλέον:

$$(-\infty, a] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (a - n, a], \text{ με } (a - n, a] \in \mathcal{B}_S$$

Οπότε κάθε στοιχείο της βάσης είναι ανοικτό και κλειστό. Άρα, για κάθε $B \in \mathcal{B}_S$:

$$B^\circ = B \qquad \overline{B} = B \qquad \partial B = \emptyset$$

■

Έχοντας ορίσει τις κλειστές θήκες, μπορούμε πλέον να μελετήσουμε πυκνά σύνολα.

Ορισμός 4.2: Έστω $(X, \mathfrak{T})$ ένας τοπολογικός χώρος και $D \subseteq X$. Το D λέγεται πυκνό εάν και μόνο αν $\overline{D} = X$.

■ **Παράδειγμα 4.7:**

- Έστω $(X, \mathfrak{T})$ ένας τοπολογικός χώρος με την τετριμμένη τοπολογία. Κάθε $A \neq \emptyset$ είναι πυκνό.
- Έστω $(X, \mathfrak{T}_\delta)$ ένας τοπολογικός χώρος με τη διακριτή τοπολογία. Το μοναδικό πυκνό σύνολο είναι το X.
- Έστω $(X, \mathfrak{T})$ ένας τοπολογικός χώρος με τη συμπεπερασμένη τοπολογία. Τα άπειρα σύνολα είναι πυκνά.

- Έστω $(X, \mathfrak{T})$ ένας τοπολογικός χώρος με την τοπολογία του ιδιαιτέρου σημείου x_0. Κάθε ανοικτό μη κενό σύνολο είναι πυκνό, και ιδιαιτέρως το $\{x_0\}$ είναι πυκνό.

■

■ **Παράδειγμα 4.8:** Έστω $(\mathbb{R}, \mathfrak{T}_S)$ ο τοπολογικός χώρος του **Παραδείγματος 3.1**. Το σύνολο $\mathbb{Q}$ είναι πυκνό.

Πράγματι, εάν $\overline{\mathbb{Q}} \neq \mathbb{R}$, τότε εξ ορισμού της θήκης:

$$\bigcap \mathcal{F}_{\mathbb{Q}} \neq \mathbb{R} \Rightarrow \exists x \in \mathbb{R} \setminus \bigcap \mathcal{F}_{\mathbb{Q}}$$

Δηλαδή μπορεί να βρεθεί $F_x \in \mathcal{F}_{\mathbb{Q}}$ (που να μην είναι όλος ο χώρος) τέτοιο ώστε $x \notin F_x \Rightarrow x \in F_x^c$. Το F_x^c είναι όμως ανοικτό σύνολο, οπότε υπάρχει κάποιο στοιχείο B_x της βάσης $\mathcal{B}_S$ τέτοιο ώστε $x \in B_x \subseteq F_x^c \Rightarrow B_x \cap F_x = \emptyset$. Επειδή το F_x περιέχει ολόκληρο το $\mathbb{Q}$, θα έχουμε $B_x \cap \mathbb{Q} = \emptyset$, το οποίο είναι άτοπο (το B_x είναι αριστερά ημιάνοικτο, μη κενό διάστημα). ■

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Μάθημα 5

Πρόταση 5.1: (Χαρακτηρισμοί για τα πυκνά σύνολα). Έστω $(X, \mathfrak{T})$ ένας τοπολογικός χώρος. Υπενθυμίζουμε ότι ένα σύνολο $D \subseteq X$ λέγεται πυκνό όταν $\overline{D} = X$. Πέρα από τον ορισμό, υπάρχουν κι άλλοι χαρακτηρισμοί για τα πυκνά σύνολα.

i. Ένα σύνολο $D \subseteq X$ είναι πυκνό $\Leftrightarrow \forall \emptyset \neq G \in \mathfrak{T},\ D \cap G \neq \emptyset$.

ii. Ένα σύνολο $D \subseteq X$ είναι πυκνό $\Leftrightarrow \forall \emptyset \neq B \in \mathcal{B},\ D \cap B \neq \emptyset$, όπου $\mathcal{B}$ είναι μια βάση της τοπολογίας.

Απόδειξη: Για το i., αποδεικνύουμε πρώτα την κατεύθυνση (⇒). Εάν προς άτοπο υπήρχε $\emptyset \neq G \in \mathfrak{T}$ τέτοιο ώστε $D \cap G \neq \emptyset$, θα είχαμε $G \subseteq D^c$. Επομένως:

$$G = G^\circ \subseteq (D^c)^\circ = (X \backslash D)^\circ = X \backslash \overline{D} \overset{\star}{=} X \backslash X = \emptyset$$

Στην ισότητα άστρο ($\star$) χρησιμοποιείται το ότι το D είναι πυκνό σύνολο. Η σχέση $G \subseteq \emptyset$ δίνει το άτοπο, αφού το G υποτέθηκε μη κενό.

Για την αντίστροφη κατεύθυνση (⇐), θεωρούμε A το σύνολο $X \backslash \overline{D}$. Το A είναι ανοικτό σύνολο (για παράδειγμα επειδή $X \backslash \overline{D} = (X \backslash D)^\circ$), οπότε είτε είναι το κενό σύνολο είτε δεν είναι (και στην τελευταία περίπτωση $D \cap A \neq \emptyset$, από την υπόθεση). Η δεύτερη συνθήκη δεν μπορεί να αληθεύει εξ ορισμού του A, οπότε αναγκαστικά:

$$A = \emptyset \Rightarrow X \backslash \overline{D} = \emptyset \Rightarrow X = \overline{D}$$

Η απόδειξη του ii. ουσιαστικά προκύπτει από το i., αφού κάθε ανοικτό σύνολο γράφεται ως ένωση στοιχείων της βάσης $\mathcal{B}$.

□

Παρατήρηση 5.1: Έστω $(X, \mathfrak{T})$ ένας τοπολογικός χώρος και $\mathcal{B} = \{B_i\}_{i \in I}$ μια βάση της τοπολογίας $\mathfrak{T}$. Για κάθε μη κενό $B_i \in \mathcal{B}$ επιλέγουμε ένα $x_i \in B_i$ και κατασκευάζουμε σύνολο:

$$D = \{x_i\}_{i \in J} \text{ (όπου } B_i = \emptyset \text{ ακριβώς όταν } i \in I \backslash J)$$

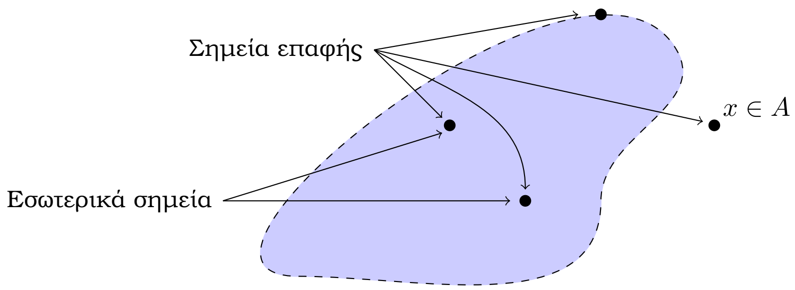
Το D είναι πυκνό σύνολο.

Απόδειξη: Είναι άμεσο από το ii. της προηγούμενης πρότασης. Εν τω μεταξύ, σε πολλά τέτοια επιχειρήματα είναι εμφανής η χρήση του αξιώματος της επιλογής - δεν θα το αναφέρουμε κάθε φορά.

□

$\mathfrak{T}$ Παρατηρήστε ότι αυτή η επιλογή των x_i είναι εν γένει άπειρη. Επομένως η κατασκευή του D (αξιωματικά μιλώντας) δεν είναι τόσο τετριμμένη και χρειάζεται το αξίωμα της επιλογής.

Ορισμός 5.1: (Εσωτερικά σημεία και σημεία επαφής). Έστω $(X, \mathfrak{T})$ ένας τοπολογικός χώρος και $A \subseteq X$, $x \in X$.
I. Το σημείο $x \in X$ θα καλείται εσωτερικό σημείο του A εάν και μόνο αν $x \in A^\circ$.
II. Το σημείο $x \in X$ θα καλείται σημείο επαφής του A εάν και μόνο αν $x \in \overline{A}$.



Μερικά σημεία επαφής και μερικά εσωτερικά σημεία σε ένα σύνολο του επιπέδου.

Εάν φανταστούμε τα ανοικτά σύνολα στους μετρικούς χώρους, θα θέλαμε (διαισθητικά) ένα σημείο x να βρίσκεται στο εσωτερικό ενός συνόλου A εάν περιέχεται σε ένα ανοικτό υποσύνολο του A. Αντίστοιχα, ένα σημείο x να βρισκεται στη θήκη του A αν το A τέμνει κάθε ανοικτό σύνολο που περιέχει το x. Με την παρακάτω πρόταση φαίνεται ότι στους τοπολογικούς χώρους αυτές οι ιδιότητες έχουν μεταβιβαστεί.

Πρόταση 5.2: Έστω $(X, \mathfrak{T})$ ένας τοπολογικός χώρος και $A \subseteq X$, $x \in X$. Τα ακόλουθα αληθεύουν:

i. $x \in A^\circ \Leftrightarrow$ Υπάρχει $G \in \mathfrak{T}$ τέτοιο ώστε $x \in G \subseteq A$.

ii. $x \in \overline{A} \Leftrightarrow$ Για κάθε $G \in \mathfrak{T}$ με $x \in G$, η τομή $G \cap A$ δεν είναι κενή.

Απόδειξη: Για το i.: ($\Rightarrow$) Εξ ορισμού του εσωτερικού A°, μπορούμε να γράψουμε:

$$x \in A^\circ \Rightarrow x \in \bigcup \mathcal{E}_A$$

Εξ ορισμού της ένωσης, υπάρχει κάποιο ανοικτό $G \in \mathcal{E}_A$ (δηλαδή ανοικτό τέτοιο ώστε $G \subseteq A$) με $x \in G$.

($\Leftarrow$) Για το αντίστροφο, παρατηρήστε ότι η προηγούμενη διαδικασία λειτουργεί και αντίστροφα.

Για το ii., ένα σημείο x της θήκης $\overline{A}$ δεν ανήκει στο σύνολο $X \backslash \overline{A}$, οπότε δεν ανήκει στο $(X \backslash A)^\circ$. Τώρα το τελευταίο είναι εσωτερικό συνόλου, οπότε με άρνηση του i., $\forall G \in \mathfrak{T},\ x \in G \nsubseteq X \backslash A$. Δηλαδή:

$$\forall G \in \mathfrak{T},\ G \cap A \neq \emptyset$$

Και πάλι παρατηρήστε ότι μπορούμε να εργαστούμε και αντίστροφα.

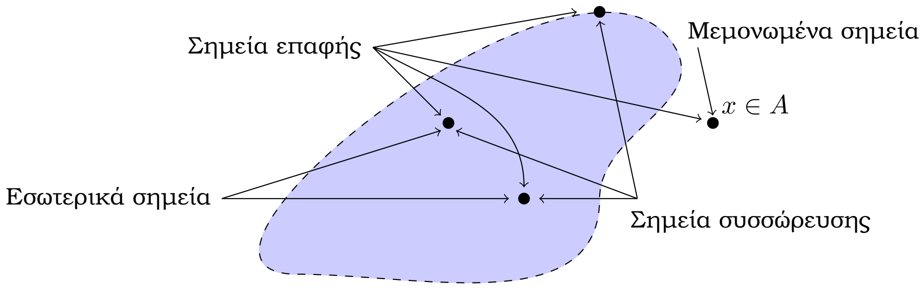
$\square$

Απομένει να ορίσουμε σημεία συσσώρευσης και μεμονωμένα σημεία σε τοπολογικούς χώρους.

Ορισμός 5.2: (Σημεία συσσώρευσης και μεμονωμένα σημεία). Έστω $(X, \mathfrak{T})$ ένας τοπολογικός χώρος και $A \subseteq X$, $x \in X$.
I. Το σημείο x λέγεται σημείο συσσώρευσης του A εάν και μόνο αν για κάθε $G \in \mathfrak{T}$ με $x \in G$, η τομή $G \cap (A \backslash \{x\})$ δεν είναι κενή. Έχοντας την **Πρόταση 5.2** υπόψη, το σημείο x είναι σημείο συσσώρευσης του A εάν και μόνο αν ανήκει στη θήκη $\overline{A \backslash \{x\}}$.
II. Το σημείο x λέγεται μεμονωμένο σημείο του A εάν ανήκει στο A και δεν είναι σημείο συσσώρευσης του A. Δηλαδή εάν υπάρχει $G \in \mathfrak{T}$ τέτοιο ώστε $G \cap A = \{x\}$.

Ορισμός 5.3: (Παράγωγο σύνολο). Έστω $(X, \mathfrak{T})$ ένας τοπολογικός χώρος και $A \subseteq X$. Το παράγωγο σύνολο του A είναι το σύνολο των σημείων συσσώρευσης του A. Συμβολίζουμε:

$$A' = \{x \in X \mid \text{το } x \text{ είναι σημείο συσσώρευσης του } A\}$$



Μερικά σημεία επαφής, εσωτερικά, συσσώρευσης και μεμωνομένα, σε ένα σύνολο του επιπέδου.

■ **Παράδειγμα 5.1:**

- Έστω $(X, \mathfrak{T}_\delta)$ ένας τοπολογικός χώρος με τη διακριτή τοπολογία. Για κάθε $A \subseteq X$ έχουμε $A' = \emptyset$.

  Πράγματι, εάν ένα $x \in X$ ήταν σημείο συσσώρευσης του A, τότε κάθε ανοικτό σύνολο που το περιέχει, αναγκαστικά θα περιέχει κι άλλα σημεία του A (πέρα από το x, αν αυτό ανήκει στο A) - όμως το $\{x\}$ είναι ανοικτό σύνολο που δεν περιέχει άλλα σημεία του A. Αυτό μας δίνει άτοπο.

- Έστω $(X, \mathfrak{T})$ ένας τοπολογικός χώρος με την τοπολογία του ιδιαιτέρου σημείου x_0 και με $|X| \geqslant 2$. Το σύνολο $A = \{x_0\}$ είναι ανοικτό. Ισχυριζόμαστε ότι $A' = X \backslash \{x_0\}$.

  Πράγματι, ένα $x_0 \neq x \in X$ ανήκει στο A' εάν και μόνο αν $x \in \overline{A \backslash \{x\}} = \overline{\{x_0\} \backslash \{x\}}$, δηλαδή εάν και μόνο αν $x \in \overline{\{x_0\}} = X$ (το οποίο ισχύει προφανώς. Επίσης, θυμηθείτε το **Παράδειγμα 4.5**). Αντίστοιχα το x_0 δεν είναι σημείο συσσώρευσης αφού $x_0 \notin \overline{\{x_0\} \backslash \{x_0\}} = \emptyset$.

■

Πρόταση 5.3: Έστω $(X, \mathfrak{T})$ ένας τοπολογικός χώρος και $A \subseteq X$. Αληθεύουν τα ακόλουθα:

i. $\overline{A} = A \cup A'$

ii. A κλειστό $\Leftrightarrow A' \subseteq A$.

Απόδειξη: Για το i., θα αποδείξουμε τους δύο εγκλεισμούς. Κάθε σημείο συσσώρευσης είναι σημείο επαφής, οπότε $A' \subseteq \overline{A}$ (από την **Πρόταση 5.2** και τον **Ορισμό 5.2, I.**). Επειδή επιπλέον $A \subseteq \overline{A}$ έχουμε τον εγκλεισμό $A \cup A' \subseteq \overline{A}$.

Για τον άλλο εγκλεισμό, ένα $x \in \overline{A}$ ανήκει στο A ή δεν ανήκει στο A. Αν δεν ανήκει στο A, τότε $x \in \overline{A} = \overline{A \backslash \{x\}}$. Αυτό δείχνει ότι $x \in A'$. Κατ' επέκταση, το x ανήκει στο A ή στο A' κι επομένως $\overline{A} \subseteq A \cup A'$.

Το ii. αποδεικνύεται από το i. σε συνδυασμό με την **Πρόταση 3.3, ii.**.

□

Είδαμε ότι σε μια τοπολογία είναι δυνατόν κανείς να ορίσει σημεία επαφής, εσωτερικά και συσσώρευσης, που (κυρίως στην πραγματική ανάλυση) είχαν μια ισχυρή γεωμετρική εικόνα. Χωρίς την χρήση αποστάσεων, μπορούμε να μελετήσουμε ≪τοπικά≫ τον χώρο, χρησιμοποιώντας τα ανοικτά σύνολα.

Ορισμός 5.4: (Περιοχές). Έστω $(X, \mathfrak{T})$ ένας τοπολογικός χώρος και $x \in X$, $A \subseteq X$, $\mathcal{B}$ μία βάση της $\mathfrak{T}$. Το σύνολο A λέγεται περιοχή του x εάν $x \in A^\circ$. Δύο άλλοι ισοδύναμοι ορισμοί είναι οι:

$$\exists G \in \mathfrak{T} \text{ με } x \in G \subseteq A$$

και:

$$\exists B \in \mathcal{B} \text{ με } x \in B \subseteq A$$

Συμβολίζουμε με $\mathcal{N}_x$ το σύνολο όλων των περιοχών του x. Εάν ο τοπολογικός χώρος δεν υπονοείται, θα συμβολίζουμε με $\mathcal{N}_x^{\mathfrak{T}}$ το εν λόγω σύνολο.

Πρόταση 5.4: Έστω $(X, \mathfrak{T})$ ένας τοπολογικός χώρος και $x \in X$. Το $\mathcal{N}_x$ έχει τις εξής ιδιότητες:

i. Κάθε περιοχή $U \in \mathcal{N}_x$ περιέχει το x (οπότε δεν είναι κενή).

ii. Εάν $U, V \in \mathcal{N}_x$, τότε και η τομή $U \cap V \in \mathcal{N}_x$.

iii. Αν $U \in \mathcal{N}_x$, κάθε υπερσύνολο $V \supseteq U$ ανήκει στο $\mathcal{N}_x$.

iv. Αληθεύει η ισοδυναμία $G \in \mathfrak{T} \Leftrightarrow \forall x \in G,\ G \in \mathcal{N}_x$ (δηλαδή τα ανοικτά σύνολα είναι περιοχές όλων των σημείων τους).

v. Αληθεύει η ισοδυναμία: $U \in \mathcal{N}_x \Leftrightarrow \exists G \in \mathcal{N}_x$ τέτοιο ώστε $G \subseteq U$ και $(\forall y \in G,\ G \in \mathcal{N}_y)$ (εδώ ουσιαστικά μπορούσαμε στην παρένθεση να γράψουμε ότι το G είναι ανοικτό - λόγω του iv.. Όμως για λόγους που θα γίνουν σαφείς αργότερα, προτιμούμε αυτήν την διατύπωση).

Απόδειξη: Το i. είναι άμεσο. Για το ii., από τον ορισμό των περιοχών, υπάρχουν ανοικτά σύνολα G_U, G_V τέτοια ώστε $x \in G_U \subseteq U$ και $x \in G_V \subseteq V$. Επειδή η τομή $G_U \cap G_V$ είναι ανοικτή και περιέχει το x, έχουμε το ζητούμενο.

Για το iii. εργαζόμαστε όπως στο ii., βρίσκοντας δηλαδή ανοικτό $G_U \subseteq U$ με $x \in G_U$.

Το iv. είναι ένας ακόμη χαρακτηρισμός για τα ανοικτά σύνολα. ($\Rightarrow$) Εάν το G είναι ανοικτό, τότε $x \in G^\circ$ για κάθε $x \in G$ (αφού $G^\circ = G$). Δηλαδή το G είναι περιοχή για κάθε σημείο του.

($\Leftarrow$) Εάν αληθεύει το δεξί μέλος της ισοδυναμίας, τότε το G είναι ένα από τα σύνολα της οικογένειας $\mathcal{E}_G$. Οπότε $G \subseteq G^\circ \Rightarrow G = G^\circ$ (αφού επιπλέον $G^\circ \subseteq G$).

Το v. προκύπτει από το iv. και την πρώτη ισοδύναμη μορφή του **Ορισμού 5.4**.

□

Οι παραπάνω ιδιότητες (i., ii., iii., v.) είναι χαρακτηριστικές για τις περιοχές, όπως θα δείξουμε στο θεώρημα που θα ακολουθήσει. Εάν μια οικογένεια συνόλων τις ικανοποιεί, τότε μπορεί να οριστεί μια τοπολογία της οποίας οι περιοχές είναι ακριβώς τα σύνολα της εν λόγω οικογένειας. Χονδρικά μιλώντας, κανείς μπορεί να κατασκευάσει την τοπολογία γνωρίζοντας τις περιοχές.

Θεώρημα 5.1: Έστω $X \neq \emptyset$ ένα σύνολο και για κάθε $x \in X$ υπάρχει μη κενή οικογένεια $N_x \subseteq \mathcal{P}(X)$ με τις ιδιότητες:

α. Εάν $U \in N_x$, τότε $x \in U$ (αντίστοιχη της προηγούμενης i.).

β. Εάν $U_1, U_2 \in N_x$, τότε $U_1 \cap U_2 \in N_x$ (αντίστοιχη της προηγούμενης ii.).

γ. Εάν $U \in N_x$ και $V \supseteq U$, τότε $V \in N_x$ (αντίστοιχη της προηγούμενης iii.).

δ. $U \in N_x \Rightarrow \exists G \in N_x$ τέτοιο ώστε $G \subseteq U$ και $(\forall y \in G,\ G \in N_y)$ (αντίστοιχη της προηγούμενης v.).

Η οικογένεια:

$$\mathfrak{T} = \{G \subseteq X \mid \forall y \in G,\ G \in N_y\}$$

είναι τοπολογία, και μάλιστα για κάθε $x \in X,\ N_x = \mathcal{N}_x^{\mathfrak{T}}$.

Απόδειξη: Αρχικά θα δείξουμε ότι η $\mathfrak{T}$ ικανοποιεί τις συνθήκες του ορισμού της τοπολογίας.

- Το $\emptyset$ και το X ανήκουν τετριμμένα στο $\mathfrak{T}$ (το πρώτο λόγω του «για κάθε» στη συνθήκη της συγκεκριμένης τοπολογίας $\mathfrak{T}$, και το δεύτερο γιατί το X είναι υπερσύνολο καθενός $G \in N_x$ και ισχύει η ιδιότητα γ.).
- Έστω ένα τυχόν $x \in U_1 \cap U_2$ με $U_1, U_2 \in \mathfrak{T}$. Τότε $U_1, U_2 \in N_x$ και από το β., $U_1 \cap U_2 \in N_x$ για το τυχόν αυτό x (άρα και για κάθε τέτοιο).
- Η ένωση αντιμετωπίζεται αναλόγως. Έστω ένα τυχόν $x \in \bigcup_{i \in I} U_i$ για αυθαίρετα μεγάλη οικογένεια $\{U_i\}_{i \in I} \subseteq \mathfrak{T}$. Το x ανήκει σε κάποιο U_j και $U_j \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$, οπότε από το γ., $\bigcup_{i \in I} U_i \in N_x$. Αυτό ισχύει για τυχόν $x \in \bigcup_{i \in I} U_i$, οπότε έχουμε το ζητούμενο.

Αυτά δείχνουν ότι η $\mathfrak{T}$ είναι τοπολογία.

Ισχυριζόμαστε ότι για κάθε $x \in X,\ N_x = \mathcal{N}_x^{\mathfrak{T}}$. Για τυχόν $x \in X$, έχουμε:

$$U \in \mathcal{N}_x^{\mathfrak{T}} \Rightarrow \exists G \in \mathfrak{T},\ x \in G \subseteq U$$

(από τον ορισμό της τοπολογίας $\mathfrak{T}$). Αν αντικαταστήσουμε το δεξί μέλος με το ισοδύναμό του, έχουμε:

$$U \in \mathcal{N}_x^{\mathfrak{T}} \Rightarrow \exists G \subseteq U \text{ τέτοιο ώστε } x \in G \textbf{ και } \forall y \in G,\ G \in N_y$$

και ιδίως για $x = y$:

$$\begin{aligned} U \in \mathcal{N}_x^{\mathfrak{T}} &\Rightarrow \exists G \in N_x \textbf{ και } G \subseteq U \\ &\overset{\gamma.}{\Rightarrow} U \in N_x \end{aligned}$$

Δηλαδή $\mathcal{N}_x^{\mathfrak{T}} \subseteq N_x$. Για τον αντίστροφο εγκλεισμό, γράφουμε:

$$U \in N_x \Rightarrow \exists G \in N_x \text{ τέτοιο ώστε } G \subseteq U \textbf{ και } (\forall y \in G,\ G \in N_y)$$

(από το δ.). Ισοδύναμα, από τον ορισμό της $\mathfrak{T}$:

$$U \in N_x \Rightarrow \exists G \in \mathfrak{T} \text{ με } x \in G \subseteq U$$

Δηλαδή $U \in \mathcal{N}_x^{\mathfrak{T}}$, το οποίο αποδεικνύει τον αντίστροφο εγκλεισμό $N_x \subseteq \mathcal{N}_x^{\mathfrak{T}}$.

$\square$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

Μάθημα 6

Ορισμός 6.1: (Βάσεις περιοχών). Έστω $(X, \mathfrak{T})$ ένας τοπολογικός χώρος και $x \in X$. Ένα σύνολο $\mathcal{B}_x \subseteq \mathcal{N}_x$ θα καλείται βάση περιοχών του x αν:

$$\forall U \in \mathcal{N}_x,\ \exists B \in \mathcal{B}_x \text{ τέτοιο ώστε } B \subseteq U$$

Εάν ο τοπολογικός χώρος δεν υπονοείται, θα συμβολίζουμε με $\mathcal{B}_x^{\mathfrak{T}}$ το εν λόγω σύνολο. Επίσης, κάθε $B \in \mathcal{B}_x$ καλείται βασική περιοχή του x.

■ **Παράδειγμα 6.1:**

- Έστω $(X, \mathfrak{T})$ τοπολογικός χώρος. Το σύνολο $\mathcal{N}_x$ είναι βάση περιοχών του x.
- Έστω $(X, \mathfrak{T})$ τοπολογικός χώρος. Το σύνολο $\mathcal{B}_x = \mathcal{N}_x \cap \mathfrak{T}$ είναι βάση περιοχών του x.
- Σε μετρικό χώρο (X, ϱ), το σύνολο $\mathcal{B}_x = \big\{B(x, \varepsilon) \mid \varepsilon > 0\big\}$ είναι βάση περιοχών του x. Το $\mathcal{B}_x$ εξακολουθεί να είναι βάση περιοχών του x, αν η συνθήκη «$\varepsilon > 0$» αντικατασταθεί από την «$\varepsilon \in \mathbb{Q} \cap (0, \infty)$» ή την «$\varepsilon \in \{1/n\}_{n\in\mathbb{N}}$».
- Σε μετρικό χώρο (X, ϱ), το σύνολο $\widehat{\mathcal{B}}_x = \big\{\widehat{B}(x, \varepsilon) \mid \varepsilon > 0\big\}$ είναι βάση περιοχών του x. Το $\widehat{\mathcal{B}}_x$ εξακολουθεί να είναι βάση περιοχών του x, αν η συνθήκη «$\varepsilon > 0$» αντικατασταθεί από την «$\varepsilon \in \mathbb{Q} \cap (0, \infty)$» ή την «$\varepsilon \in \{1/n\}_{n\in\mathbb{N}}$».
- Έστω $(X, \mathfrak{T}_\delta)$ ένας τοπολογικός χώρος με τη διακριτή τοπολογία $\mathfrak{T}_\delta$. Το $\{x\}$ είναι ένα σύνολο του συνόλου περιοχών $\mathcal{N}_x$, αφού $x \in \{x\} = \{x\}^\circ$. Μάλιστα, το $\{x\}$ πρέπει να περιέχεται σε κάθε βάση περιοχών του x, και το $\{x\}$ αρκεί για για να κατασκευαστεί μια βάση περιοχών. Δηλαδή η $\mathcal{B}_x = \big\{\{x\}\big\}$ είναι βάση περιοχών του x.

■

Όπως από περιοχές καταφέραμε να κατασκευάσουμε τις «αντίστοιχες» τοπολογίες, έτσι κι εδώ θα κατασκευάσουμε από βάσεις περιοχών τις «αντίστοιχες» τοπολογίες. Ο τρόπος με τον οποίον θα εργαστούμε θα θυμίσει πολύ την κατασκευή τοπολογιών από περιοχές.

Πρόταση 6.1: Έστω $(X, \mathfrak{T})$ ένας τοπολογικός χώρος και $x \in X$. Μια βάση περιοχών $\mathcal{B}_x$ έχει τις εξής ιδιότητες:

i. Κάθε βασική περιοχή $B \in \mathcal{B}_x$ περιέχει το x (οπότε δεν είναι κενή).

ii. Εάν $B_1, B_2 \in \mathcal{B}_x$, τότε $\exists B_3 \in \mathcal{B}_x$ τέτοιο ώστε $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.

iii. Αληθεύει η ισοδυναμία $G \in \mathfrak{T} \Leftrightarrow \forall x \in G,\ \exists B_x \in \mathcal{B}_x$ τέτοιο ώστε $B_x \subseteq G$.

iv. Για κάθε $B \in \mathcal{B}_x$ υπάρχει $x \in G \subseteq B$ τέτοιο ώστε $(\forall y \in G,\ \exists B_y \in \mathcal{B}_y$ τέτοιο ώστε $B_y \subseteq G)$ (η συνθήκη εντός της παρένθεσης είναι χαρακτηρισμός ανοικτού συνόλου. Και πάλι η διατύπωση είναι συγκεκριμένη λόγω του θεωρήματος που θα ακολουθήσει).

Απόδειξη: Το i. ισχύει. Για το ii., παρατηρούμε ότι $B_1, B_2 \in \mathcal{N}_x$ (αφού $\mathcal{B}_x \subseteq \mathcal{N}_x$) οπότε $B_1 \cap B_2 \in \mathcal{N}_x$. Από τον ορισμό των βάσεων περιοχών, υπάρχει $B_3 \in \mathcal{B}_x$ τέτοιο ώστε $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.

Για το iii., θα αναχθούμε στην **Πρόταση 5.4, iv.**. Αρκεί λοιπόν να δείξουμε την ισοδυναμία:

$$\forall x \in G,\ G \in \mathcal{N}_x \Leftrightarrow \forall x \in G,\ \exists B_x \in \mathcal{B}_x \text{ τέτοιο ώστε } B_x \subseteq G$$

Η κατεύθυνση ($\Rightarrow$) είναι άμεση από τον ορισμό των βάσεων περιοχών. Η άλλη κατεύθυνση ($\Leftarrow$) προκύπτει από την **Πρόταση 5.4, iii.**, σε συνδυασμό με το $\mathcal{B}_x \subseteq \mathcal{N}_x$.

Το iv., εάν λάβουμε υπόψη το iii., είναι μετάφραση της **Πρότασης 5.4, v.**.

□

Με τις ιδιότητες i., ii., iv. κανείς μπορεί να κατασκευάσει τοπολογία.

Θεώρημα 6.1: Έστω $X \neq \emptyset$ ένα σύνολο. Για κάθε $x \in X$ υποθέτουμε ότι υπάρχει μη κενό σύνολο $B_x \subseteq \mathcal{P}(X)$ με τις ιδιότητες:

α. Εάν $B \in B_x$, τότε $x \in B$ (αντίστοιχη της προηγούμενης i.).

β. Εάν $B, C \in \mathcal{B}_x$, τότε $\exists E \in B_x$ τέτοιο ώστε $E \subseteq B \cap C$ (αντίστοιχη της προηγούμενης ii.).

γ. $B \in B_x \Rightarrow \exists G \subseteq X$ με $x \in G \subseteq B$ και ($\forall y \in G,\ \exists C_y \in B_y$ με $C_y \subseteq G$) (αντίστοιχη της προηγούμενης iv.).

Τότε το σύνολο:

$$\mathfrak{T} = \{G \subseteq X \mid \forall x \in G,\ \exists C_x \in B_x \text{ τέτοιο ώστε } C_x \subseteq G\}$$

είναι τοπολογία, και μάλιστα για τα διάφορα $x \in X$, $B_x = \mathcal{B}_x^{\mathfrak{T}} \subseteq \mathcal{N}_x^{\mathfrak{T}}$.

Απόδειξη: Παρόμοια με την απόδειξη του **Θεωρήματος 5.1**.

□

Παρατήρηση 6.1: Έστω $(X, \mathfrak{T})$ ένας τοπολογικός χώρος και $\mathcal{B} \subseteq \mathfrak{T}$. Η $\mathcal{B}$ είναι βάση της $\mathfrak{T}$ εάν και μόνο αν $\forall x \in X,\ \mathcal{B}_x = \{B \in \mathcal{B} \mid x \in \mathcal{B}\}$ είναι βάση περιοχών του x.

Προσοχή: Κάθε βάση $\mathcal{B}$ δίνει βάσεις περιοχών $\mathcal{B}_x$ (για τα διάφορα x). Αντίστροφα, δεν προκύπτει από πουθενά ότι - δεδομένης μιας οικογένειας βάσεων περιοχών $\mathfrak{B} = \{\mathcal{B}_x\}_{x \in X}$ - το $\bigcup \mathfrak{B}$ είναι βάση της $\mathfrak{T}$. Μάλιστα εν γένει δεν είναι, γιατί στις βάσεις περιοχών ενδέχεται να υπάρχουν και μη ανοικτά σύνολα.

Ορισμός 6.2: (Μεγαλύτερες και μικρότερες τοπολογίες). Έστω $X \neq \emptyset$ ένα σύνολο και $\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2$ δύο τοπολογίες του X. Η $\mathfrak{T}_2$ θα λέγεται μεγαλύτερη (ή λεπτότερη ή ισχυρότερη) από την $\mathfrak{T}_1$ εάν $\mathfrak{T}_1 \subseteq \mathfrak{T}_2$. Αντίστοιχα, η $\mathfrak{T}_1$ θα λέγεται μικρότερη (ή χονδροειδέστερη ή ασθενέσθερη) από την $\mathfrak{T}_2$ εάν $\mathfrak{T}_1 \subseteq \mathfrak{T}_2$.

Προσέξτε ότι η διάταξη στις τοπολογίες δεν είναι ολική, όπως δεν είναι ολική η σχέση του υποσυνόλου. Το παρακάτω θεώρημα δίνει μια συνθήκη συγκρισιμότητας για τις τοπολογίες.

Θεώρημα 6.2: (Κριτήριο Hausdorff). Έστω $(X, \mathfrak{T}_1)$, $(X, \mathfrak{T}_2)$ δύο τοπολογικοί χώροι και για κάθε $x \in X$ βάσεις περιοχών $\mathcal{B}_x^{\mathfrak{T}_1}, \mathcal{B}_x^{\mathfrak{T}_2}$, ως προς τις τοπολογίες $\mathfrak{T}_1$ και $\mathfrak{T}_2$ αντίστοιχα. Αληθεύει η ισοδυναμία:

$$\mathfrak{T}_1 \subseteq \mathfrak{T}_2 \Leftrightarrow \forall x \in X,\ \forall B_1 \in \mathcal{B}_x^{\mathfrak{T}_1},\ \exists B_2 \in \mathcal{B}_x^{\mathfrak{T}_2} \text{ τέτοιο ώστε } B_2 \subseteq B_1$$

Για την απόδειξη αυτή θα χρειαστεί να εισάγουμε έναν συμβολισμό. Σε τοπολογικό χώρο $(X, \mathfrak{T})$ θα συμβολίζουμε με $\mathrm{int}_{\mathfrak{T}} A$ το εσωτερικό του A (για να γίνεται εμφανής η τοπολογία).

Απόδειξη: ($\Rightarrow$) Για τυχόν $x \in X$, και για κάθε σύνολο B_1 τέτοιο ώστε $x \in B_1 \in \mathcal{B}_x^{\mathfrak{T}_1} \subseteq \mathcal{N}_x^{\mathfrak{T}_1}$, έχουμε:

$$x \in \mathrm{int}_{\mathfrak{T}_1} B_1,\ \text{αφού } B_1 \in \mathcal{N}_x^{\mathfrak{T}_1}$$

Επειδή $\mathrm{int}_{\mathfrak{T}_1} B_1 \in \mathfrak{T}_1 \subseteq \mathfrak{T}_2$, έπεται ότι $\mathrm{int}_{\mathfrak{T}_1} B_1 \in \mathfrak{T}_2$ - ειδικότερα:

$$\mathrm{int}_{\mathfrak{T}_1} B_1 \subseteq \mathrm{int}_{\mathfrak{T}_2} B_1 \text{ και συνεπώς } x \in \mathrm{int}_{\mathfrak{T}_2} B_1$$

Άρα $B_1 \in \mathcal{N}_x^{\mathfrak{T}_2}$ κι εξ ορισμού των βάσεων περιοχών, υπάρχει $B_2 \in \mathcal{B}_x^{\mathfrak{T}_2}$ τέτοιο ώστε $B_2 \subseteq B_1$. Φυσικά αυτά ισχύουν για τυχόν x, οπότε και για κάθε x.

($\Leftarrow$) Ας θεωρήσουμε τυχόν $A \in \mathfrak{T}_1$. Από την **Πρόταση 5.4, iv.** έχουμε ότι $\forall x \in A$, $A \in \mathcal{N}_x^{\mathfrak{T}_1}$, οπότε:

$$\exists B_1 \in \mathcal{B}_x^{\mathfrak{T}_1},\ B_1 \subseteq A \text{ και από την υπόθεση } \exists B_2 \in \mathcal{B}_x^{\mathfrak{T}_2},\ B_2 \subseteq B_1 \subseteq A$$

Συμμαζεύοντας:

$$\forall x \in A,\ \exists B_2 \in \mathcal{B}_x^{\mathfrak{T}_2} \text{ τέτοιο ώστε } B_2 \subseteq A$$

κι από την **Πρόταση 6.1, iii.** έπεται $A \in \mathfrak{T}_2$. Επειδή το A ήταν τυχόν, αποδεικνύεται ο εγκλεισμός $\mathfrak{T}_1 \subseteq \mathfrak{T}_2$.

$\square$

6.1 Ασκήσεις

Άσκηση 6.1: Έστω $(X, \leqslant)$ ένα μερικά διατεταγμένο σύνολο. Ορίζουμε:

$$U \text{ ανοικτό } \Leftrightarrow [x \in U \textbf{ και } y \geqslant x \Rightarrow y \in U]$$

Δείξτε ότι το σύνολο $\mathfrak{T} = \{U \subseteq X \mid U \text{ ανοικτό}\}$ είναι τοπολογία (η εν λόγω τοπολογία ονομάζεται ≪τοπολογία της διάταξης≫).

Απάντηση: Ουσιαστικά είναι ζήτημα να ελεγθεί ο ορισμός της τοπολογίας.

- Το ότι $\emptyset, X \in \mathfrak{T}$ είναι προφανές.
- Εάν $U_1, U_2 \in \mathfrak{T}$ και $x \in U_1 \cap U_2$, τότε όλα τα $y \geqslant x$ ανήκουν στο U_1 και στο U_2 αντίστοιχα, οπότε και στην τομή $U_1 \cap U_2$. Αυτό δείχνει ότι $U_1 \cap U_2 \in \mathfrak{T}$.
- Η ένωση αντιμετωπίζεται ανάλογα.

$\triangle$

Άσκηση 6.2: Έστω $(X, \mathfrak{T}_X), (Y, \mathfrak{T}_Y)$ δύο τοπολογικοί χώροι. Θεωρούμε το σύνολο:

$$\mathfrak{T} = \{U \times V \mid U \in \mathfrak{T}_X,\ V \in \mathfrak{T}_Y\}$$

Είναι το $\mathfrak{T}$ πάντοτε τοπολογία; Είναι βάση κάποιας τοπολογίας;

Απάντηση: Η $\mathfrak{T}$ δεν είναι εν γένει τοπολογία, κι αυτό διότι δεν διατηρείται η τρίτη ιδιότητα της τοπολογίας στο γινόμενο.

Εάν $U_1 \times V_1$, $U_2 \times V_2$ είναι δύο στοιχεία του $\mathfrak{T}$, τότε το σύνολο $(U_1 \times V_1) \cup (U_2 \times V_2)$ δεν είναι γενικά ≪ορθογώνιο≫, οπότε δεν ανήκει στην $\mathfrak{T}$. Παρόλα αυτά, το **Θεώρημα 2.1** μας δίνει ότι η $\mathfrak{T}$ είναι βάση μιας τοπολογίας.

Ένα παράδειγμα στο οποίο η $\mathfrak{T}$ γίνεται τοπολογία είναι στην περίπτωση όπου τα $\mathfrak{T}_X, \mathfrak{T}_Y$ είναι οι τετριμμένες τοπολογίες.

$\triangle$

Άσκηση 6.3: Έστω $(X, \mathfrak{T})$ ένας τοπολογικός χώρος και $G \subseteq X$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

i. $G \in \mathfrak{T}$

ii. Για κάθε $A \subseteq X$ ισχύει $G \cap \overline{A} \subseteq \overline{G \cap A}$.

iii. Για κάθε $A \subseteq X$ ισχύει $\overline{G \cap \overline{A}} = \overline{G \cap A}$.

Απάντηση: (i.$\Rightarrow$ii.) Εάν $x \in G \cap \overline{A}$, θα δείξουμε ότι $x \in \overline{G \cap A}$. Ισοδύναμα, από την **Πρόταση 5.2, ii.**, αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε ανοικτό V με $x \in V$ έχουμε $V \cap (G \cap A) \neq \emptyset$.

Πράγματι, $V \cap (G \cap A) = (V \cap G) \cap A \neq \emptyset$ για τον εξής λόγο: Το $V \cap G$ είναι ανοικτό σύνολο που περιέχει το x και $x \in \overline{A}$, οπότε η μη κενή τομή είναι αποτέλεσμα της **Πρότασης 5.2, ii.**.

(ii.$\Rightarrow$iii.) Από το ii. σε συνδυασμό με το ότι οι θήκες διατηρούν την μονοτονία, έχουμε ότι $\overline{G \cap \overline{A}} \subseteq \overline{G \cap A}$. Για τον αντίστροφο εγκλεισμό, $G \cap A \subseteq G \cap \overline{A} \Rightarrow \overline{G \cap A} \subseteq \overline{G \cap \overline{A}}$.

(iii.⇒i.) Για να δείξουμε ότι το G είναι ανοικτό, εφαρμόζουμε το iii. για κατάλληλο A, και μάλιστα για $A = X\backslash G$. Πράγματι:

$$\emptyset = \overline{G \cap (X\backslash G)} = \overline{G \cap \overline{X\backslash G}} = \overline{G \cap (G^\circ)^c} = \overline{G\backslash G^\circ}$$

επομένως $G\backslash G^\circ = \emptyset \Rightarrow G = G^\circ$.

△

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

Μάθημα 7

Έστω (X,ϱ), (Y,d) μετρικοί χώροι. Υπενθυμίζουμε ότι μια συνάρτηση $f:(X,\varrho)\to(Y,d)$ είναι συνεχής στο $x\in X$ όταν για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει $\delta>0$ τέτοιο ώστε:

$$f\big(B_\varrho(x,\delta)\big)\subseteq B_d\big(f(x),\varepsilon\big)$$

Στην πραγματικότητα τα «ε» και «δ» ως αποστάσεις δεν χρειάζονται για την διατύπωση του ορισμού, ακόμη και στους μετρικούς χώρους.

$$f \text{ συνεχής } :\Leftrightarrow \forall B_d\big(f(x),\varepsilon\big),\ \exists B_\varrho(x,\delta) \text{ ώστε } f\big(B_\varrho(x,\delta)\big)\subseteq B_d\big(f(x),\varepsilon\big)$$

Το κύριο χαρακτηριστικό του ορισμού είναι η χρήση περιοχών του x. Διατυπώνουμε τον παρακάτω γενικό ορισμό:

> **Ορισμός 7.1: (Συνέχεια).** Έστω $(X,\mathfrak{T}_X),(Y,\mathfrak{T}_Y)$ δύο τοπολογικοί χώροι και $f:(X,\mathfrak{T}_X)\to(Y,\mathfrak{T}_Y)$. Η f θα λέγεται συνεχής συνάρτηση στο $x\in X$ εάν:
>
> $$\forall V\in\mathcal{N}_{f(x)}^{\mathfrak{T}_Y},\ \exists U\in\mathcal{N}_x^{\mathfrak{T}_X} \text{ ώστε } f(U)\subseteq V$$
>
> Ο ίδιος ορισμός μπορεί να διατυπωθεί με βασικές περιοχές. Επιπλέον, η f θα καλείται συνεχής αν είναι συνεχής σε κάθε $x\in X$.

> **Πρόταση 7.1:** Έστω $(X,\mathfrak{T}_X),(Y,\mathfrak{T}_Y)$ δύο τοπολογικοί χώροι και $f:(X,\mathfrak{T}_X)\to(Y,\mathfrak{T}_Y)$. Αληθεύει η ισοδυναμία:
>
> $$f \text{ συνεχής στο } x \Leftrightarrow \forall V\in\mathcal{N}_{f(x)} \text{ ισχύει } f^{-1}(V)\in\mathcal{N}_x$$
>
> Δηλαδή, κατά κάποιον τρόπο, η f αντιστρέφει περιοχές σε περιοχές.

Απόδειξη: Κατ' αρχάς ας θυμηθούμε μερικές χρήσιμες συνολοθεωρητικές σχέσεις, που δεν εξαρτώνται από τις τοπολογίες. Εάν $f:X\to Y$ είναι μια συνάρτηση και $A\subseteq X, B\subseteq Y$, τότε:

- $A\subseteq f^{-1}\big(f(A)\big)$, αφού εν γένει υπάρχουν περισσότερα στοιχεία απ' ότι αυτά του A των οποίων η εικόνα ανήκει στο $f(A)$.
- $f\big(f^{-1}(B)\big)\subseteq B$, αφού εν γένει υπάρχουν στοιχεία στο B που δεν είναι εικόνα μέσω της f.

($\Rightarrow$) Έστω ότι η f είναι συνεχής στο x. Τότε (από τον ορισμό της συνέχειας) για $V\in\mathcal{N}_{f(x)}$ υπάρχει $U\in\mathcal{N}_x$ με $f(U)\subseteq V$, δηλαδή $f^{-1}\big(f(U)\big)\subseteq f^{-1}(V)$. Από τις χρήσιμες συνολοθεωρητικές παρατηρήσεις:

$$U\subseteq f^{-1}\big(f(U)\big)=f^{-1}(V)$$

οπότε το σύνολο $f^{-1}(V)$ είναι περιοχή του x, ως υπερσύνολο περιοχής του x.

($\Leftarrow$) Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι για κάθε $V\in\mathcal{N}_{f(x)}$ έχουμε $f^{-1}(V)\in\mathcal{N}_x$. Σταθεροποιώντας ένα τέτοιο V, θέτουμε $U=f^{-1}(V)$ και θα δείξουμε ότι $U\in\mathcal{N}_x$, $f(U)\subseteq V$. Πράγματι, από την υπόθεση $U=f^{-1}(V)\in\mathcal{N}_x$ και από τις χρήσιμες συνολοθεωρητικές παρατηρήσεις $f(U)\subseteq f\big(f^{-1}(V)\big)\subseteq V$.

$\square$

■ **Παράδειγμα 7.1:**

- Έστω $(X, \mathfrak{T}_X), (Y, \mathfrak{T}_Y)$ δύο τοπολογικοί χώροι και $f : (X, \mathfrak{T}_X) \to (Y, \mathfrak{T}_Y)$. Εάν $f \equiv c \in X$ (είναι δηλαδή σταθερή συνάρτηση), τότε είναι και συνεχής.

  Πράγματι, $\forall V \in \mathcal{N}_c$, $f^{-1}(V) = X \in \mathcal{N}_x$ (για οποιοδήποτε x).

- Έστω $(X, \mathfrak{T}_\delta), (Y, \mathfrak{T}_Y)$ δύο τοπολογικοί χώροι με τον πρώτο να έχει τη διακριτή τοπολογία, και $f : (X, \mathfrak{T}_X) \to (Y, \mathfrak{T}_Y)$. Η f είναι συνεχής (δηλαδή κάθε f είναι συνεχής).

  Πράγματι, οποιαδήποτε αντίστροφη εικόνα είναι υποσύνολο του X, οπότε είναι ανοικτό σύνολο.

- Έστω $(X, \mathfrak{T}_X), (Y, \mathfrak{T}_Y)$ δύο τοπολογικοί χώροι με τον τελευταίο να έχει την τετριμμένη τοπολογία, και $f : (X, \mathfrak{T}_X) \to (Y, \mathfrak{T}_Y)$. Η f είναι συνεχής (δηλαδή κάθε f είναι συνεχής).

  Πράγματι, αν $x \in X$ είναι τυχόν και $V \in \mathcal{N}_{f(x)}$, τότε αναγκαστικά $V = Y$. Επομένως, $f^{-1}(Y) = X \in \mathcal{N}_x$.

■

Πρόταση 7.2: Έστω $(X, \mathfrak{T}_X), (Y, \mathfrak{T}_Y), (Z, \mathfrak{T}_Z)$ τοπολογικοί χώροι και δύο συνεχείς συναρτήσεις $f : (X, \mathfrak{T}_X) \to (Y, \mathfrak{T}_Y)$ και $g : (Y, \mathfrak{T}_Y) \to (Z, \mathfrak{T}_Z)$ στα σημεία $x_0 \in X$ και $f(x_0) \in Y$ αντίστοιχα. Η σύνθεση $g \circ f : (X, \mathfrak{T}_X) \to (Z, \mathfrak{T}_Z)$ είναι συνεχής στο $x_0 \in X$.

Απόδειξη: Έστω $W \in \mathcal{N}_{g \circ f(x_0)}$. Επειδή η g είναι συνεχής στο $f(x_0)$, υπάρχει $V \in \mathcal{N}_{f(x_0)}$ ώστε $g(V) \subseteq W$. Επιπλέον, η f είναι συνεχής στο x_0, οπότε υπάρχει $U \in \mathcal{N}_{x_0}$ ώστε $f(U) \subseteq V$. Τελικά:

$$U \in \mathcal{N}_{x_0} \textbf{ και } g \circ f(U) \subseteq g(V) \subseteq W$$

□

Θεώρημα 7.1: Έστω $(X, \mathfrak{T}_X), (Y, \mathfrak{T}_Y)$ δύο τοπολογικοί χώροι και μια συνάρτηση $f : X \to Y$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

i. Η f είναι συνεχής.

ii. Για κάθε $G \in \mathfrak{T}_Y$ έχουμε $f^{-1}(G) \in \mathfrak{T}_X$ (οι συνεχείς συναρτήσεις αντιστρέφουν ανοικτά σε ανοικτά).

iii. Για κάθε $F \subseteq Y$ κλειστό, το σύνολο $f^{-1}(F) \subseteq X$ είναι κλειστό (οι συνεχείς συναρτήσεις αντιστρέφουν κλειστά σε κλειστά).

iv. Για κάθε $A \subseteq X$, $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.

v. Για κάθε $B \subseteq Y$, $\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}(\overline{B})$.

vi. Για κάθε $B \subseteq Y$, $f^{-1}(B^\circ) \subseteq \left(f^{-1}(B)\right)^\circ$

Απόδειξη: (i. $\Rightarrow$ ii.) Έστω ότι η f είναι συνεχής και $G \in \mathfrak{T}_Y$. Εάν $x \in f^{-1}(G)$ είναι τυχόν σημείο, τότε $f(x) \in G$. Επειδή το G είναι ανοικτό, είναι και περιοχή του $f(x)$, οπότε από την συνέχεια της f εξασφαλίζεται η ύπαρξη μιας περιοχής U του x για την οποία $f(U) \subseteq G \Rightarrow U \subseteq f^{-1}(G)$. Τώρα η $f^{-1}(G)$ είναι περιοχή του x ως υπερσύνολο περιοχής του x, κι αυτό μάλιστα συμβαίνει για κάθε $x \in f^{-1}(G)$. Δηλαδή το $f^{-1}(G)$ είναι περιοχή κάθε σημείου του, άρα είναι ανοικτό.

(ii. $\Rightarrow$ iii.) Εάν $F \subseteq Y$ είναι ένα κλειστό σύνολο, το $Y \backslash F$ θα είναι ανοικτό σύνολο. Επομένως από το ii., το $f^{-1}(Y \backslash F)$ είναι ανοικτό κι αυτό. Επειδή $f^{-1}(Y \backslash F) = X \backslash f^{-1}(F)$, το $f^{-1}(F)$ είναι κλειστό σύνολο.

(iii. $\Rightarrow$ iv.) Έστω $A \subseteq X$. Το σύνολο $\overline{f(A)}$ είναι κλειστό σύνολο στον Y, οπότε από το ii. το $f^{-1}\left(\overline{f(A)}\right)$ είναι κλειστό στο X. Όπως και στην **Πρόταση 7.1**, κανείς μπορεί - συνολοθεωρητικά μόνο - να αποδείξει ότι $A \subseteq f^{-1}\big(f(A)\big)$ οπότε:

$$f^{-1}\left(\overline{f(A)}\right) \overset{\star}{\supseteq} f^{-1}\big(f(A)\big) \overset{\star\star}{\supseteq} A$$

(Στον εγκλεισμό ($\star$) χρησιμοποιείται ότι $\overline{f(A)} \supseteq f(A)$, και στον εγκλεισμό ($\star\star$) η συνολοθεωρητική παρατήρηση).

Τελικά:

$$\overline{f^{-1}\big(\overline{f(A)}\big)} = f^{-1}\big(\overline{f(A)}\big) \supseteq \overline{A} \Rightarrow f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$$

(iv. $\Rightarrow$ v.) Έστω $B \subseteq Y$. Εάν ορίσουμε $A = f^{-1}(B)$, από το iv. θα έχουμε:

$$f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)} \Rightarrow f\big(\overline{f^{-1}(B)}\big) \subseteq \overline{f\big(f^{-1}(B)\big)} \overset{\star}{\subseteq} \overline{B}$$

(όπου στον εγκλεισμό ($\star$) χρησιμοποιείται άλλη μια συνολοθεωρητική παρατήρηση).

Τελικά, $\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}(\overline{B})$.

(v. $\Rightarrow$ vi.) Έστω $B \subseteq Y$. Εφαρμόζουμε το v. για το σύνολο $Y \backslash B$ και έχουμε:

$$\overline{f^{-1}(Y\backslash B)} \subseteq f^{-1}(\overline{Y\backslash B}) \Rightarrow \overline{X\backslash f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}(\overline{Y\backslash B})$$

Από τον «δυϊσμό» των θηκών και των εσωτερικών έπεται το ζητούμενο.

$$X\backslash\big(f^{-1}(B)\big)^{\circ} \subseteq f^{-1}(Y\backslash B^{\circ}) = X\backslash f^{-1}(B^{\circ}) \Rightarrow \big(f^{-1}(B)\big)^{\circ} \supseteq f^{-1}(B^{\circ})$$

(vi. $\Rightarrow$ i.) Έστω $x \in X$ και $V \in \mathcal{N}_{f(x)} \Rightarrow f(x) \in V^{\circ} \Rightarrow x \in f^{-1}(V^{\circ})$. Χρησιμοποιώντας το vi. έχουμε:

$$f^{-1}(V^{\circ}) \subseteq \big(f^{-1}(V)\big)^{\circ} \Rightarrow x \in \big(f^{-1}(V)\big)^{\circ}$$

Δηλαδή $U = f^{-1}(V) \in \mathcal{N}_x$. Επειδή το V ήταν τυχόν, για κάθε $V \in \mathcal{N}_{f(x)}$ έχουμε δείξει ότι υπάρχει $U \in \mathcal{N}_x$ για το οποίο:

$$f(U) = f\big(f^{-1}(V)\big) \subseteq V$$

κι επομένως η f είναι συνεχής στο x. Όμως και το x ήταν τυχόν, οπότε η συνέχεια αποδεικνύεται παντού.

□

Έχοντας δείξει τις διάφορες ισοδυναμίες, μπορούμε να αποδείξουμε κάτι που μοιάζει κάπως «παράδοξο».

■ **Παράδειγμα 7.2:** Έστω $(X, \mathfrak{T}_1), (X, \mathfrak{T}_2)$ δύο τοπολογικοί χώροι και η συνάρτηση $\mathrm{id} : X \to X$. Η id δεν είναι κατ' ανάγκη συνεχής.

Πράγματι, η id θα είναι συνεχής εάν και μόνο αν $\forall G \in \mathfrak{T}_2$, $\mathrm{id}^{-1}(G) = G \in \mathfrak{T}_1$, δηλαδή εάν και μόνο αν $\mathfrak{T}_2 \subseteq \mathfrak{T}_1$. ■

Παρατηρώντας τα v. και vii. του **Θεωρήματος 7.1** βλέπουμε κάποιου είδους «δυϊσμό» όσον αφορά τα εσωτερικά και τις θήκες στις αντίστροφες εικόνες της f. Το iv. που αναφέρεται στην ίδια την f δεν έχει αντίστοιχη ιδιότητα για εσωτερικά - μάλιστα θα δείξουμε ότι η προφανής αντίστοιχη ιδιότητα δεν χαρακτηρίζει συνέχεια.

Ορισμός 7.2: (Ανοικτές και κλειστές απεικονίσεις). Έστω $(X, \mathfrak{T}_X), (Y, \mathfrak{T}_Y)$ δύο τοπολογικοί χώροι και $f : X \to Y$.
I. Η f θα ονομάζεται ανοικτή αν για κάθε $A \in \mathfrak{T}_X$, $f(A) \in \mathfrak{T}_Y$.
II. Αντίστοιχα, η f θα ονομάζεται κλειστή αν για κάθε $A \subseteq X$ κλειστό, το σύνολο $f(A) \subseteq Y$ είναι κλειστό.

Πρόταση 7.3: Έστω $(X, \mathfrak{T}_X), (Y, \mathfrak{T}_Y)$ δύο τοπολογικοί χώροι και $f : X \to Y$.

i. Η f είναι ανοικτή εάν και μόνο αν για κάθε $A \subseteq X$, $f(A^{\circ}) \subseteq \big(f(A)\big)^{\circ}$.

ii. Η f είναι κλειστή εάν και μόνο αν για κάθε $A \subseteq X$, $\overline{f(A)} \subseteq f(\overline{A})$.

Απόδειξη: Για το i.: ($\Rightarrow$) Επειδή η f είναι ανοικτή και το A° είναι ανοικτό, το $f(A^{\circ})$ είναι ανοικτό. Επομένως το εσωτερικό $\big(f(A)\big)^{\circ}$ είναι υπερσύνολο του άλλου ανοικτού $f(A^{\circ})$, γιατί $f(A^{\circ}) \subseteq f(A)$ και το $\big(f(A)\big)^{\circ}$ είναι το μεγαλύτερο ανοικτό υποσύνολο του $f(A)$.

($\Leftarrow$) Έστω $A \in \mathfrak{T}_X$. Τότε:

$$A = A^{\circ} \Rightarrow f(A) = f(A^{\circ}) \subseteq \big(f(A)\big)^{\circ}$$

κι επειδή εν γένει ισχύει ο εγκλεισμός $f(A) \supseteq \big(f(A)\big)^{\circ}$, το $f(A)$ ισούται με τη θήκη του (άρα είναι ανοικτό).

Το ii. αντιμετωπίζεται ανάλογα.

□

Η ιδιότητα i. της **Πρότασης 7.3** είναι η αντίστοιχη ιδιότητα για τα εσωτερικά που θα θέλαμε στο **Θεώρημα 7.1**. Μέσω της i. εκφράζονται όμως οι ανοικτές απεικονίσεις και όχι οι συνεχείς. Επίσης ξέρουμε ότι οι συνεχείς δεν ταυτίζονται με τις ανοικτές, αφού υπάρχουν παραδείγματα συνεχών που δεν είναι ανοικτές, καθώς επίσης και ανοικτών που δεν είναι συνεχείς. Για την ακρίβεια:

$$\begin{array}{ll} f \text{ συνεχής} \not\Rightarrow f \text{ ανοικτή}, & f \text{ ανοικτή} \not\Rightarrow f \text{ συνεχής} \\ f \text{ συνεχής} \not\Rightarrow f \text{ κλειστή}, & f \text{ ανοικτή} \not\Rightarrow f \text{ ανοικτή} \\ f \text{ ανοικτή} \not\Rightarrow f \text{ κλειστή}, & f \text{ κλειστή} \not\Rightarrow f \text{ ανοικτή} \end{array}$$

Στη συνέχεια θα αναφερθούμε σε απεικονίσεις που διατηρούν την τοπολογική δομή.

Ορισμός 7.3: (Ομοιομορφισμοί). Έστω $(X,\mathfrak{T}_X),(Y,\mathfrak{T}_Y)$ δύο τοπολογικοί χώροι και $f: X \to Y$. Η f θα λέγεται ομοιομορφισμός εάν είναι αμφιμονοσήμαντη και συνεχής ως προς τις δύο κατευθύνσεις (δηλαδή η ίδια να είναι συνεχής και η αντίστροφή της να είναι συνεχής).

Η ύπαρξη μιας τέτοιας $f : (X,\mathfrak{T}_X) \to (Y,\mathfrak{T}_Y)$ θα λέμε ότι καθιστά τους δύο τοπολογικούς χώρους ομοιομορφικούς και θα συμβολίζουμε $(X,\mathfrak{T}_X) \sim (Y,\mathfrak{T}_Y)$.

Ο συμβολισμός $(X,\mathfrak{T}) \sim (Y,\mathfrak{T}_Y)$ είναι εύλογος, αφού η ≪$\sim$≫ είναι σχέση ισοδυναμίας.

Παρατήρηση 7.1: Οι ομοιομορφισμοί απεικονίζουν ανοικτά σύνολα σε ανοικτά σύνολα, και ως προς τις δύο κατευθύνσεις.

Απόδειξη: Πράγματι, ας θεωρήσουμε A ένα τυχόν υποσύνολο του X. Από το **Θεώρημα 7.1**, επειδή η f^{-1} είναι συνεχής, θα έχουμε:

$$f(A) \subseteq \big(f(A)\big)^{\circ}$$

οπότε από την **Πρόταση 7.3** η f είναι ανοικτή.

Αντίστοιχα, εάν B είναι τυχόν υποσύνολο του Y, επειδή η f είναι συνεχής:

$$f^{-1}(B) \subseteq \big(f^{-1}(B)\big)^{\circ}$$

οπότε η f^{-1} είναι ανοικτή.

□

■ **Παράδειγμα 7.3:**

- Θεωρούμε τους τοπολογικούς μετρικούς χώρους $(\mathbb{R},\mathfrak{T}_\varrho), \big((-1,1),\mathfrak{T}_\varrho\big)$ με τη συνήθη μετρική, και τη συνάρτηση:

$$f: \mathbb{R} \to (-1,1) \text{ με } x \mapsto \frac{x}{1+|x|}$$

  Η f είναι $1-1$, επί, συνεχής και έχει συνεχή αντίστροφο. Οπότε $(\mathbb{R},\mathfrak{T}_\varrho) \sim \big((-1,1),\mathfrak{T}_\varrho\big)$.

- Έστω X ένα σύνολο και $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$. Θεωρούμε τους δύο τοπολογικούς χώρους $(X,\mathfrak{T}_1),(X,\mathfrak{T}_2)$, όπου $\mathfrak{T}_i$ είναι η τοπολογία του ιδιαιτέρου σημείου x_i, και τη συνάρτηση:

$$f: (X,\mathfrak{T}_1) \to (X,\mathfrak{T}_2) \text{ με } x \mapsto \begin{cases} x_1, & \text{εάν } x = x_2 \\ x_1, & \text{εάν } x = x_2 \\ x, & \text{εάν } x \notin \{x_1,x_2\} \end{cases}$$

  Η f είναι $1-1$, επί, συνεχής και έχει συνεχή αντίστροφο. Οπότε $(X,\mathfrak{T}_1) \sim (X,\mathfrak{T}_2)$.

- Έστω $(X,\mathfrak{T}_X),(Y,\mathfrak{T}_Y)$ δύο τοπολογικοί χώροι και μια συνάρτηση $f: X \to Y$. Εάν οι $\mathfrak{T}_X, \mathfrak{T}_Y$ είναι διακριτές τοπολογίες:

$$f \text{ ομοιομορφισμός } \Leftrightarrow f \text{ αμφιμονοσήμαντη } \Leftrightarrow |X| = |Y|$$

  οπότε ένας ομοιομορφισμός δεν διατηρεί κάποια ιδιαίτερη δομή (πέρα από την πληθικότητα) στους διακριτούς τοπολογικούς χώρους.

- Θεωρούμε τους τοπολογικούς χώρους $(\mathbb{R},\mathfrak{T}_S),(\mathbb{R},\mathfrak{T}_\varrho)$ και τη συνάρτηση $\mathrm{id} : (\mathbb{R},\mathfrak{T}_S) \to (\mathbb{R},\mathfrak{T}_\varrho)$. Η id δεν είναι ανοικτή, αφού το $\mathfrak{T}_S$ είναι γνήσιο υπερσύνολο του $\mathfrak{T}_\varrho$. Επομένως, σύμφωνα με την **Παρατήρηση 7.1**, δεν είναι ομοιομορφισμός. Υπάρχει άραγε άλλη συνάρτηση-ομοιομορφισμός;

■

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8

Μάθημα 8

Στη συνέχεια θα ασχοληθούμε με ακολουθίες σε τοπολογικούς χώρους. Θα δούμε ότι εν γένει δεν διατηρούν ιδιότητες από τους μετρικούς χώρους, και θα ορίσουμε την έννοια των δικτύων.

Ορισμός 8.1: (Σύγκλιση ακολουθιών). Έστω $(X, \mathfrak{T})$ ένας τοπολογικός χώρος και $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία $\mathbb{N} \to X$. Θα λέμε ότι η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει στο $x \in X$ εάν:

$$\forall V \in \mathcal{N}_x,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ τέτοιο ώστε } \forall n \geqslant n_0,\ x_n \in V$$

Σε αυτήν την περίπτωση θα συμβολίζουμε $x_n \to x$ ή $x_n \xrightarrow{n} x$.

■ **Παράδειγμα 8.1:**

- Έστω $(X, \mathfrak{T}_\delta)$ ένας διακριτός τοπολογικός χώρος και $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία του με $x_n \to x$. Επειδή το $\{x\}$ είναι ανοικτό σύνολο, είναι περιοχή του x και συνεπώς:

  $$\exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ τέτοιο ώστε } \forall n \geqslant n_0,\ x_n \in \{x\}$$

  Δηλαδή κάθε συγκλίνουσα ακολουθία είναι τελικά σταθερή.

- Θεωρούμε τον τοπολογικό χώρο $(\mathbb{N}, \mathfrak{T})$ με την συμπεπερασμένη τοπολογία $\mathfrak{T}$, και την ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (n)_{n\in\mathbb{N}}$. Για τυχόν $m \in \mathbb{N}$ έχουμε τα εξής: Εάν $V \in \mathcal{N}_m$, τότε $m \in V^\circ$, το οποίο είναι ανοικτό σύνολο και έχει (κατ' επέκταση) πεπερασμένο συμπλήρωμα. Η μορφή του συμπληρώματος μπορούμε να πούμε ότι θα είναι η $(V^\circ)^c = \{n_1 < n_2 < \cdots < n_k\}$, οπότε το στοιχείο $n_k + 1$ ανήκει στο V° όπως και κάθε επόμενό του. Θέτουμε $n_0 = n_k + 1$ και έχουμε:

  $$\text{Εάν } V \in \mathcal{N}_m,\ \text{τότε } \forall n \geqslant n_0,\ x_n = n \in V^\circ \subseteq V$$

  Δηλαδή η ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει σε κάθε $m \in \mathbb{N}$.

- Έστω $(X, \mathfrak{T})$ ένας τοπολογικός χώρος με το X να είναι υπεραριθμήσιμο και $\mathfrak{T}$ να είναι η συναριθμήσιμη τοπολογία. Θεωρούμε ότι $x_n \to x$ και θα δείξουμε ότι η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι τελικά σταθερή και ίση με x.

  Αυτό θα επιτευχθεί με άτοπο: Αν η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ δεν ήταν τελικά σταθερή και ίση με x:

  $$\forall n_0 \in \mathbb{N},\ \exists n \geqslant n_0 \text{ τέτοιο ώστε } x_n \neq x$$

  Οπότε υπάρχει μια ολόκληρη υπακολουθία $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ στοιχείων που δεν είναι το x (και πάλι εδώ χρησιμοποιείται το αξίωμα της επιλογής). Θεωρούμε το σύνολο $V = X \setminus \{x_{k_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ και παρατηρούμε ότι είναι ανοικτό (αφού έχει αριθμήσιμο συμπλήρωμα) και περιέχει το x (από την επιλογή της υπακολουθίας). Οπότε είναι περιοχή του x κι από την σύγκλιση της ακολουθίας στο x:

  $$\exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ τέτοιο ώστε } \forall n \geqslant n_0,\ x_n \in V$$

  Δηλαδή, από ένα σημείο και μετά, όλοι οι όροι της ακολουθίας περιορίζονται εντός του V, ακόμη και οι όροι της υπακολουθίας (από ένα σημείο και μετά). Αυτό είναι άτοπο, από τον ορισμό του V.

- Θεωρούμε δύο τοπολογικούς χώρους $(\mathbb{R}, \mathfrak{T}), (\mathbb{R}, \mathfrak{T}_\varrho)$, με τον πρώτο να έχει τη συναριθμήσιμη τοπολογία και τον δεύτερο τη συνήθη μετρική τοπολογία. Η συνάρτηση $\mathrm{id} : (\mathbb{R}, \mathfrak{T}) \to (\mathbb{R}, \mathfrak{T}_\varrho)$ δεν είναι συνεχής, αφού δεν αντιστρέφει ανοικτά σε ανοικτά. Παρόλα αυτά, ισχύει κάτι που μοιάζει με την «αρχή της μεταφοράς»:

  Μια ακολουθία $x_n \to x$ στον πρώτο χώρο δείξαμε ότι είναι τελικά σταθερή, οπότε η $\mathrm{id}(x_n) = x_n$ θα είναι συγκλίνουσα και στον δεύτερο τοπολογικό χώρο.

■

Από το **Παράδειγμα 8.1 (δεύτερο •)** φαίνεται ότι στους τοπολογικούς χώρους δεν διατηρείται κατ' ανάγκη η μοναδικότητα του ορίου. Επιπλέον, από το **Παράδειγμα 8.1 (τέταρτο •)** δεν ισχύει εν γένει η αρχή της μεταφοράς με ακολουθίες. Το **Παράδειγμα 8.1 (πρώτο, τρίτο •)** φαίνεται να μην είναι μεγάλο πρόβλημα κι ότι ενδεχομένως δεν θα επηρεάσει σημαντικά την μελέτη των τοπολογικών χώρων, όμως υπάρχει πρόβλημα στον ορισμό των κλειστών θηκών και των παράγωγων συνόλων με ακολουθίες (όπως κάναμε στην πραγματική ανάλυση). Ας περιοριστούμε στο τρίτο σημείο:

Έστω $x \in X$ και τυχαίο $V \in \mathcal{N}_x$. Επειδή $V \cap \big(X \setminus \{x\}\big) \neq \emptyset$, έχουμε $x \in \overline{X \setminus \{x\}}$, δηλαδή το x είναι σημείο συσσώρευσης του $X \setminus \{x\}$. Παρόλα αυτά, το x δεν μπορεί να προσεγγιστεί με ακολουθίες του $X \setminus \{x\}$, αφού κάθε συγκλίνουσα ακολουθία είναι τελικά σταθερή.

Εν συνεχεία θα ορίσουμε τις αντίστοιχες «ακολουθίες» σε τοπολογικούς χώρους, τα λεγόμενα δίκτυα. Αυτά θα γενικεύσουν την έννοια της ακολουθίας και θα βοηθήσουν στην ανάπτυξη αποτελεσμάτων από την πραγματική ανάλυση, όπως χαρακτηρισμούς σημείων επαφής και συσσώρευσης, και συνέχειας μέσω δικτύων μέσω μιας αντίστοιχης «αρχής μεταφοράς». Πριν απ' αυτά όμως, θα ορίσουμε μια βασική έννοια:

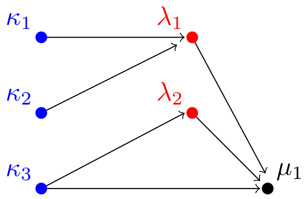
Ορισμός 8.2: (Κατευθυνόμενα σύνολα). Έστω Λ ένα σύνολο και $\leq$ μια σχέση στο $\Lambda \times \Lambda$. Το διατεταγμένο ζεύγος $(\Lambda, \leq)$ θα καλείται κατευθυνόμενο σύνολο εάν:

i. Η $\leq$ είναι αυτοπαθής. Δηλαδή $\forall \lambda \in \Lambda,\ \lambda \leq \lambda$.

ii. Η $\leq$ είναι μεταβατική. Δηλαδή $\forall \kappa, \lambda, \mu \in \Lambda$ με $\kappa \leq \lambda,\ \lambda \leq \mu$ θα αληθεύει και $\kappa \leq \mu$.

iii. Για κάθε $\kappa, \lambda \in \Lambda$, υπάρχει $\mu \in \Lambda$ τέτοιο ώστε $\kappa \leq \mu$ και $\lambda \leq \mu$. Δηλαδή ενδέχεται δύο στοιχεία να μην συγκρίνονται, αλλά σίγουρα υπάρχει ένα τρίτο που να συγκρίνεται με τα άλλα δύο.

Όπως και στις μερικές διατάξεις, συμβολίζουμε με διάγραμμα (ουσιαστικά με ένα κατευθυνόμενο γράφημα) τις σχέσεις μεταξύ των στοιχείων του Λ. Εάν $\kappa \leq \lambda$, οι κορυφές κ, λ συνδέονται με προσανατολισμένη ακμή (ή προσανατολισμένο μονοπάτι), από το κ στο λ. Συνηθίζεται τα «μικρότερα» στοιχεία να τα σχεδιάζουμε αριστερά σε σχέση με τα «μεγαλύτερα».



■ **Παράδειγμα 8.2:**

- Κάθε ολικά διατεταγμένο σύνολο είναι κατευθυνόμενο. Για παράδειγμα, τα $(\mathbb{N}, \leqslant)$, $(\mathbb{Z}, \leqslant)$, $(\mathbb{Q}, \leqslant)$, $(\mathbb{R}, \leqslant)$ είναι κατευθυνόμενα σύνολα.

- Έστω X ένα σύνολο και $\Lambda = \mathcal{P}(X)$. Οι σχέσεις που ορίζονται για κάθε $A, B \in \Lambda$ ως εξής:

$$A \leq_1 B \Leftrightarrow A \subseteq B$$
$$A \leq_2 B \Leftrightarrow A \supseteq B$$

  ορίζουν κατευθυνόμενα σύνολα $(\Lambda, \leq_1), (\Lambda, \leq_2)$.

- Έστω $(X, \mathfrak{T})$ ένας τοπολογικός χώρος, $x \in X$ και $\Lambda = \mathcal{N}_x$. Το σύνολο $(\Lambda, \leq)$ όπου:

$$\forall U, V \in \Lambda,\ (U \leq V \Leftrightarrow U \supseteq V)$$

  είναι κατευθυνόμενο σύνολο. Μάλιστα μπορούμε να αντικαταστήσουμε το $\mathcal{N}_x$ με $\mathcal{B}_x$.

■

Ορισμός 8.3: (Δίκτυα). Έστω $(X, \mathfrak{T})$ ένας τοπολογικός χώρος και $(\Lambda, \leq)$ ένα κατευθυνόμενο σύνολο. Ονομάζουμε δίκτυο στο X με σύνολο δεικτών Λ κάθε απεικόνιση $p : \Lambda \to X$. Θα συμβολίζουμε την p με $(p_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, όπως κάναμε και στις ακολουθίες.

Ορισμός 8.4: (Σύγκλιση δικτύων). Έστω $(X, \mathfrak{T})$ ένας τοπολογικός χώρος και $(p_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ ένα δίκτυο στον X. Θα λέμε ότι το $(p_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ συγκλίνει στο $p \in X$ εάν:

$$\forall V \in \mathcal{N}_p,\ \exists \lambda_0 \in \Lambda \text{ τέτοιο ώστε } \forall \lambda \geq \lambda_0,\ p_\lambda \in V$$

Συμβολίζουμε $p_\lambda \to p$ ή $p_\lambda \xrightarrow{\lambda} p$.

■ **Παράδειγμα 8.3:**

- Με το **Παράδειγμα 8.2 (πρώτο •)** υπόψη, οι ακολουθίες είναι δίκτυα. Επιπλέον η σύγκλιση των ακολουθιών συμπίπτει με την σύγκλιση δικτύων.
- Όπως στο **Παράδειγμα 8.1 (πρώτο •)**, εάν $(X, \mathfrak{T}_\delta)$ είναι διακριτός τοπολογικός χώρος και $p_\lambda \to p \in X$, τότε το δίκτυο $(p)_{\lambda\in\Lambda}$ είναι τελικά σταθερό και ίσο με p.
- Έστω $(X, \mathfrak{T})$ τοπολογικός χώρος με την τετριμμένη τοπολογία και $(p_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ ένα δίκτυο στον X. Το $(p_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ συγκλίνει σε κάθε $p \in X$.

Παρατήρηση 8.1: Έστω $(X, \mathfrak{T})$ τοπολογικός χώρος και $x \in X$. Θεωρούμε το κατευθυνόμενο σύνολο $(\mathcal{N}_x, \leq)$, όπου $\leq = \supseteq$, και για κάθε $V \in \mathcal{N}_x$ διαλέγουμε $p_V \in V \supseteq \{x\}$. Κατασκευάζουμε δίκτυο $(p_V)_{V\in\mathcal{N}_x}$ και ισχυριζόμαστε ότι $p_V \to x$.

Απόδειξη: Πράγματι, έστω $U \in \mathcal{N}_x$. Για κάθε $V \geq U$ (δηλαδή $V \subseteq U$) έχουμε $p_V \in V \subseteq U$, άρα $p_V \in U$. □

Έχοντας ορίσει τα δίκτυα και την σύγκλιση αυτών, μπορούμε να ξεκινήσουμε την ανάπτυξη των αποτελεσμάτων.

Πρόταση 8.1: Έστω $(X, \mathfrak{T})$ τοπολογικός χώρος και $x \in X$, $A \subseteq X$. Αληθεύει η ισοδυναμία:

$$x \in \overline{A} \Leftrightarrow \text{ Υπάρχει δίκτυο } (p_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \text{ του } A \text{ τέτοιο ώστε } p_\lambda \to x$$

■

Απόδειξη: ($\Rightarrow$) Έστω $x \in \overline{A}$. Για κάθε περιοχή $V \in \mathcal{N}_x$ η τομή $V \cap A$ δεν είναι κενή. Με τρόπο παρόμοιο όπως στην **Παρατήρηση 8.1**, διαλέγοντας $p_V \in V \cap A$ και κατασκευάζοντας δίκτυο $(p_V)_{V\in\mathcal{N}_x}$, έχουμε $p_V \to x$.

($\Leftarrow$) Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει δίκτυο $(p_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ του Λ ώστε $p_\lambda \to x$. Λόγω της σύγκλισης, για κάθε $V \in \mathcal{N}_x$ υπάρχει $\lambda_0 \in \Lambda$ τέτοιο ώστε για κάθε $\lambda \geq \lambda_0$ να έχουμε $p_\lambda \in V$. Επειδή $p_\lambda \in A$, η τομή $V \cap A$ δεν είναι κενή και το ζητούμενο προκύπτει από την **Πρόταση 5.2**. □

Πόρισμα της προηγούμενης πρότασης είναι το ακόλουθο:

Πρόταση 8.2: Έστω $(X, \mathfrak{T})$ τοπολογικός χώρος και $A \subseteq X$. Τότε:

i. A κλειστό $\Leftrightarrow$ Για κάθε συγκλίνον δίκτυο $(p_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, $p_\lambda \to x$ του A, το «όριο» x (που εξαρτάται από το δίκτυο) ανήκει στο A.

ii. $x \in A' \Leftrightarrow$ Υπάρχει δίκτυο $(p_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ του $A \backslash \{x\}$ τέτοιο ώστε $p_\lambda \to x$.

Θεώρημα 8.1: (Αρχή της μεταφοράς με δίκτυα). Έστω $(X, \mathfrak{T}_X), (Y, \mathfrak{T}_Y)$ δύο τοπολογικοί χώροι και μια απεικόνιση $f : X \to Y$.

$$\text{Η } f \text{ είναι συνεχής } \Leftrightarrow \text{ Για κάθε δίκτυο } (p_\lambda)_{\lambda\in\Lambda},\ p_\lambda \to p \text{ του } X \text{ έχουμε } f(p_\lambda) \to f(p)$$

Απόδειξη: ($\Rightarrow$) Έστω $(p_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ ένα δίκτυο του X με $p_\lambda \to p$. Επειδή η f είναι συνεχής, για κάθε $V \in \mathcal{N}_{f(p)}$ υπάρχει $U \in \mathcal{N}_p$ τέτοιο ώστε $f(U) \subseteq V$. Επειδή επιπλέον το δίκτυο είναι συγκλίνον, υπάρχει $\lambda_0 \in \Lambda$ τέτοιο ώστε για κάθε $\lambda \geq \lambda_0$ να έχουμε $p_\lambda \in U$, δηλαδή $f(p_\lambda) \in V$. Αυτά δείχνουν ότι $f(p_\lambda) \to f(p)$.

($\Leftarrow$) Υποθέτουμε προς άτοπο ότι η f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο $x_0 \in X$. Από την άρνηση του ορισμού της συνέχειας σ' αυτό το σημείο:

$$\exists V \in \mathcal{N}_{f(x_0)} \text{ τέτοιο ώστε } \forall U \in \mathcal{N}_{x_0},\ f(U) \not\subseteq V$$

δηλαδή $f(U) \cap V^c \neq \emptyset$. Για κάθε τέτοιο U επιλέγουμε στοιχείο $p_U \in f(U) \cap V^c$ και κατασκευάζουμε δίκτυο $(p_U)_{U \in \mathcal{N}_{x_0}}$ για το οποίο:

$$p_U \to x_0 \text{ αλλά } f(p_U) \not\to f(x_0)$$

Αυτό μας δίνει το άτοπο και κατ' επέκταση τη συνέχεια της f.

$\square$

Ορισμός 8.5: (Ομοτελικά σύνολα). Έστω $(\Lambda, \leq)$ ένα κατευθυνόμενο σύνολο και $N \subseteq \Lambda$. Το N λέγεται ομοτελικό του Λ εάν $\forall \lambda \in \Lambda$, $\exists \nu \in N$ τέτοιο ώστε $\lambda \leq \nu$.

Ορισμός 8.6: (Αύξουσες συναρτήσεις μεταξύ κατευθυνόμενων συνόλων και υποδίκτυα). Έστω $(M, \leq_M), (\Lambda, \leq_\Lambda)$ δύο κατευθυνόμενα σύνολα.
I. Μια συνάρτηση $\varphi : M \to \Lambda$ λέγεται αύξουσα εάν ισχύει η συνεπαγωγή:

$$\mu_1 \leq_M \mu_2 \Rightarrow \varphi(\mu_1) \leq_\Lambda \varphi(\mu_2)$$

II. Έστω δύο δίκτυα $p : \Lambda \to X$, $q : M \to X$. Θα λέμε ότι το q είναι υποδίκτυο του p εάν υπάρχει συνάρτηση $\varphi : M \to \Lambda$ τέτοια ώστε:

i. Η φ να είναι αύξουσα.

ii. Το σύνολο $\varphi(M)$ είναι ομοτελικό του Λ.

iii. $q = p \circ \varphi$.

$$\begin{tikzcd} \Lambda \arrow[r, "p"] & X \\ M \arrow[u, "\varphi"] \arrow[ur, "q"'] & \end{tikzcd}$$

■ **Παράδειγμα 8.4:**

- Θεωρούμε το κατευθυνόμενο σύνολο $(\mathbb{N}, \leqslant)$ και ένα $M \subseteq \mathbb{N}$. Το M είναι ομοτελικό εάν και μόνο αν είναι άπειρο, δηλαδή εάν και μόνο αν δεν είναι φραγμένο.

- Έστω $(X, \mathfrak{T})$ ένας τοπολογικός χώρος, $x \in X$ και $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{N}_x$. Το $\mathcal{B}$ είναι ομοτελικό του $\mathcal{N}_x$ εάν και μόνο αν είναι βάση περιοχών του x.

- Έστω $(\Lambda, \leq)$ ένα κατευθυνόμενο σύνολο και $\lambda_0 \in \Lambda$. Το σύνολο $M = \{\lambda \in \Lambda \mid \lambda \geq \lambda_0\}$ είναι ομοτελικό του Λ.

- Κάθε υπακολουθία μιας ακολουθίας είναι υποδίκτυο. Προσοχή: Τα υποδίκτυα μιας ακολουθίας δεν είναι κατ' ανάγκη υπακολουθίες.

- Έστω M ένα ομοτελικό σύνολο του $(\Lambda, \leq)$. Το $(M, \leq|_M)$ είναι κατευθυνόμενο σύνολο.

  Πράγματι, αυτό που χρειάζεται να ελέγξουμε είναι η ιδιότητα iii. των κατευθυνόμενων συνόλων: Για $\mu_1, \mu_2 \in M$, επειδή το Λ είναι κατευθυνόμενο, υπάρχει $\lambda \in \Lambda$ με $\mu_1, \mu_2 \leq \lambda$. Τώρα το M είναι ομοτελικό του Λ, οπότε υπάρχει $\mu \in M$ τέτοιο ώστε $\mu_1, \mu_2 \leq \lambda \leq \mu$.

- Έστω M ένα ομοτελικό σύνολο του $(\Lambda, \leq)$, και $(p_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ένα δίκτυο του Λ. Το $(p_\mu)_{\mu \in M}$ είναι υποδίκτυο του $(p_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$.

  Πράγματι, η συνάρτηση εμφύτευσης $\varphi = \mathrm{i} : M \hookrightarrow \Lambda$ είναι αύξουσα, το $\varphi(M) = M$ είναι ομοτελικό στο Λ, και $(p_\mu)_{\mu \in M} = (p_{\varphi(\mu)})_{\mu \in M}$.

■

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9

Μάθημα 9

Παρατήρηση 9.1: Έστω $(X, \mathfrak{T})$ ένας τοπολογικός χώρος και $x \in X$. Ας θεωρήσουμε $(p_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ ένα δίκτυο στον X για το οποίο $p_\lambda \not\to x$. Τότε, από την άρνηση του ορισμού της σύγκλισης:

$$\exists V \in \mathcal{N}_x \text{ τέτοιο ώστε } \underbrace{\forall \lambda \in \Lambda,\ \exists \mu_\lambda \geq \lambda}_{(\star)} \text{ με } p_{\mu_\lambda} \notin V$$

Εάν λοιπόν κατασκευάσουμε το σύνολο $M_V = \{\mu_\lambda \in \Lambda \mid p_{\mu_\lambda} \notin V\}$, η σχέση άστρο $(\star)$ μας δίνει ότι είναι ομοτελικό του Λ, και από το **Παράδειγμα 8.4 (έκτο •)** το $(p_{\mu_\lambda})_{\mu_\lambda \in M_V}$ είναι υποδίκτυο της $(p_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$. Δηλαδή υπάρχει υποδίκτυο $(p_{\mu_\lambda})_{\mu_\lambda \in M_V}$ της $(p_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ για το οποίο $p_{\mu_\lambda} \notin V$.

Φυσικά αληθεύει και το αντίστροφο, δηλαδή εάν υπάρχει «μη συγκλίνον» υποδίκτυο προς το x, τότε το δίκτυο δεν συγκλίνει στο x. Αυτό θα το ξαναδούμε στην επόμενη πρόταση.

$\mathfrak{T}$ Προσοχή: Το υποδίκτυο που παίρνουμε στην **Παρατήρηση 9.1** *δεν* είναι της μορφής $p \circ \mu(\lambda)$, όπου $\mu : \Lambda \to \Lambda,\ \lambda \mapsto \mu_\lambda$. Ενδέχεται αν $\lambda_1 \leq \lambda_2$ να μην αληθεύει $\mu(\lambda_1) = \mu_{\lambda_1} \leq \mu_{\lambda_2} = \mu(\lambda_2)$.

Αυτό που εξασφαλίζει το **Παράδειγμα 8.4 (έκτο •)** είναι το υποδίκτυο $p_{\mu_\lambda} = p \circ \mathrm{i}_{M_V}$, όπου η $\mathrm{i}_{M_V} : M_V \hookrightarrow \Lambda$ είναι συνάρτηση εμφύτευσης.

Πρόταση 9.1: Έστω $(X, \mathfrak{T})$ τοπολογικός χώρος, $(p_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ δίκτυο στον X και $x \in X$. Αληθεύει η ισοδυναμία:

$$p_\lambda \to x \Leftrightarrow \text{Για κάθε υποδίκτυο } (p_{\varphi(\mu)})_{\mu\in M} \text{ έχουμε } p_{\varphi(\mu)} \to x$$

Απόδειξη: Ουσιαστικά στην **Παρατήρηση 9.1** δείξαμε ότι:

$$p_\lambda \not\to x \Leftrightarrow \text{Υπάρχει υποδίκτυο } (p_{\varphi(\mu)})_{\mu\in M} \text{ τέτοιο ώστε } p_{\varphi(\mu)} \not\to x$$

Οπότε με άρνηση:

$$p_\lambda \to x \Leftrightarrow \text{Για κάθε υποδίκτυο } (p_{\varphi(\mu)})_{\mu\in M} \text{ έχουμε } p_{\varphi(\mu)} \to x$$

Ας αιτιολογίσουμε μόνο λίγο παραπάνω γιατί η ύπαρξη ενός μη συγκλίνοντος υποδικτύου (προς το x) δείχνει ότι το δίκτυο δεν συγκλίνει (προς το x). Εάν $p_{\varphi(\mu)} \not\to x$, τότε υπάρχει μια περιοχή $V \in \mathcal{N}_x$ τέτοια ώστε για κάθε $\mu \in M$ υπάρχει $k_\mu \geq \mu$ με $p_{\varphi(k_\mu)} \notin V$.

Θεωρούμε τώρα τυχαίο $\lambda \in \Lambda$ κι επειδή το $\varphi(M)$ είναι ομοτελικό του Λ, υπάρχει $\varphi(\mu) \geq \lambda$. Γι' αυτό το μ υπάρχει (όπως πριν) το αντίστοιχο k_μ, και από την μονοτονία της φ, $\varphi(k_\mu) \geq \varphi(\mu) \geq \lambda$. Μάλιστα, γι' αυτό το $\varphi(k_\mu)$ έχουμε $p_{\varphi(k_\mu)} \notin V$.

Δηλαδή υπάρχει μια περιοχή $V \in \mathcal{N}_x$ τέτοια ώστε για κάθε $\lambda \in \Lambda$ υπάρχει ένα μεγαλύτερο στοιχείο στο οποίο αν το δίκτυο p εκτιμηθεί, η εικόνα δεν ανήκει στο V. Δηλαδή $p_\lambda \not\to x$.

$\square$

Στη συνέχεια θα ορίσουμε οριακά σημεία δικτύων και θα περιγράψουμε ιδιότητές τους που μοιάζουν με τις αντίστοιχες ιδιότητες των οριακών σημείων ακολουθιών.

Ορισμός 9.1: (Οριακά σημεία δικτύων). Έστω $(X,\mathfrak{T})$ ένας τοπολογικός χώρος, $(p_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ υποδίκτυο στον X και $x \in X$. Λέμε ότι το x είναι οριακό σημείο του δικτύου $(p_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ εάν:

$$\forall V \in \mathcal{N}_x,\ \forall \lambda \in \Lambda,\ \exists \mu \geq \lambda \text{ τέτοιο ώστε } p_\mu \in V$$

Όπως και για τα οριακά σημεία στις ακολουθίες, ίσως να μπορεί να εισαχθεί ένας ισοδύναμος ορισμός μέσω υποδικτύων. Πράγματι, διατυπώνουμε το ακόλουθο:

Θεώρημα 9.1: Έστω $(X,\mathfrak{T})$ ένας τοπολογικός χώρος, $(p_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ υποδίκτυο στον X και $x \in X$. Το σημείο x είναι οριακό του $(p_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ εάν και μόνο αν υπάρχει υποδίκτυο $(p_{\varphi(\mu)})_{\mu\in M}$ με $p_{\varphi(\mu)} \to x$.

Απόδειξη: ($\Rightarrow$) Ουσιαστικά για την εύρεση του υποδικτύου θα χρειαστεί να οριστεί «κατάλληλο σύνολο δεικτών». Οπότε για αρχή αποδεικνύουμε το παρακάτω λήμμα:

Λήμμα 9.1: Το σύνολο $M = \big\{(U,\lambda) \in \mathcal{N}_x \times \Lambda \,\big|\, p_\lambda \in U\big\}$ είναι κατευθυνόμενο σύνολο, με τη διάταξη $\leq$, όπου:

$$(U_1,\lambda_1) \leq (U_2,\lambda_2) :\Leftrightarrow U_1 \supseteq U_2 \textbf{ και } \lambda_1 \leq \lambda_2$$

■

Απόδειξη: Ουσιαστικά χρειάζεται να ελέγξουμε την τρίτη ιδιότητα των κατευθυνόμενων συνόλων (οι υπόλοιπες είναι σχετικά άμεσες). Θεωρούμε $(U_1,\lambda_1),(U_2,\lambda_2) \in M$ και θα αναζητήσουμε $(U_3,\lambda_3) \geq (U_1,\lambda_1),(U_2,\lambda_2)$.

Ορίζουμε $U_3 = U_1 \cap U_2$ και παρατηρούμε ότι η περιοχή $U_3 \in \mathcal{N}_x$ είναι μικρότερη από τις άλλες δύο. Επίσης, επειδή το Λ είναι κατευθυνόμενο σύνολο, υπάρχει $\lambda \geq \lambda_1,\lambda_2$. Είναι το (U_3,λ) το στοιχείο που αναζητούσαμε; Η αλήθεια είναι πως εν γένει όχι, αφού ενδέχεται $(U_3,\lambda) \notin M$.

Γνωρίζουμε όμως ότι το x είναι οριακό σημείο, οπότε υπάρχει ένα $\lambda_3 \geq \lambda$ τέτοιο ώστε $p_\lambda \in U_3$. Για το (U_3,λ_3) τώρα έχουμε:

$$(U_3,\lambda_3) \in M \textbf{ και } (U_3,\lambda_3) \geq (U_1,\lambda_1),(U_2,\lambda_2)$$

οπότε το M είναι κατευθυνόμενο.

△

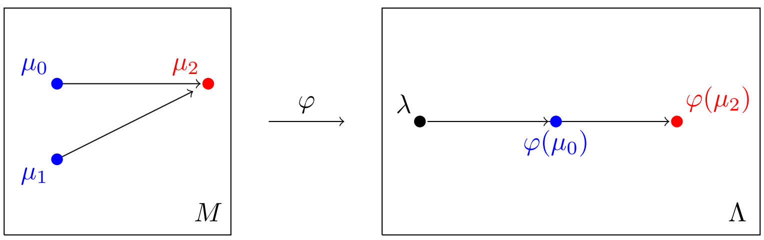
Έχοντας αποδείξει το λήμμα, ορίζουμε τη συνάρτηση $\varphi : M \to \Lambda,\ (U,\lambda) \mapsto \lambda$ και έχουμε:

- Η φ είναι αύξουσα: Πράγματι, εξ' ορισμού του M, $(U_1,\lambda_1) \leq (U_2,\lambda_2) \Rightarrow \lambda_1 \leq \lambda_2 \Rightarrow \varphi\big((U_1,\lambda_1)\big) \leq \varphi\big((U_2,\lambda_2)\big)$.
- Το $\varphi(M)$ είναι ομοτελικό του Λ. Για κάθε $\lambda \in \Lambda$ το (X,λ) ανήκει στο M, οπότε $\varphi\big((X,\lambda)\big) = \lambda \geq \lambda$.

Επομένως η συνάρτηση $p\circ\varphi : M \to X$ είναι υποδίκτυο του p. Το μόνο που μένει να δείξουμε είναι ότι $p\circ\varphi\big((U,\lambda)\big) \to x$.

Θεωρούμε $V \in \mathcal{N}_x$. Επειδή το x είναι οριακό σημείο, υπάρχει $\lambda_0 \in \Lambda$ με $p_{\lambda_0} \in V$, δηλαδή $(V,\lambda_0) \in M$. Για κάθε $(U,\lambda) \geq (V,\lambda_0)$ παίρνουμε $p_\lambda \in U \subseteq V$, δηλαδή $p_\lambda = p\circ\varphi\big((U,\lambda)\big) \in V$. Αυτό δείχνει τη ζητούμενη σύγκλιση.

($\Leftarrow$) Υποθέτουμε ότι υπάρχει υποδίκτυο $q = p\circ\varphi : M \to \Lambda \to X$ του p με $q_\mu \to x$. Θα δείξουμε ότι το x είναι οριακό σημείο του p. Δηλαδή θα δείξουμε ότι για κάθε $V \in \mathcal{N}_x$ και για κάθε $\lambda \in \Lambda$ υπάρχει $\nu \geq \lambda$ ώστε $p_\nu \in V$.



Θεωρούμε $V \in \mathcal{N}_x$ και $\lambda \in \Lambda$. Επειδή το σύνολο $\varphi(M)$ είναι ομοτελικό στο Λ, υπάρχει $\mu_0 \in M$ τέτοιο ώστε $\varphi(\mu_0) \geq \lambda$. Επιπλέον, επειδή το x είναι όριο της $q = p\circ\varphi$, υπάρχει μ_1 τέτοιο ώστε για κάθε $\mu \geq \mu_1$

να αληθεύει $p \circ \varphi(\mu) \in V$.

Το M είναι κατευθυνόμενο σύνολο, οπότε μπορεί να βρεθεί $\mu_2 \geq \mu_0, \mu_1$. Επειδή η φ είναι αύξουσα, $\lambda \leq \varphi(\mu_0) \leq \varphi(\mu_2)$ κι επειδή $\mu_2 \geq \mu_1$ έχουμε $p \circ \varphi(\mu_2) \in V$. Δηλαδή, αν $\nu = \varphi(\mu_2)$:

$$\nu \geq \lambda \textbf{ και } p(\nu) = p_\nu \in V$$

Τα $V \in \mathcal{N}_x$, $\lambda \in \Lambda$ ήταν τυχαία, οπότε έχει δειχθεί ότι:

$$\forall V \in \mathcal{N}_x,\ \forall \lambda \in \Lambda,\ \exists \nu \geq \lambda \text{ με } p_\nu \in V$$

□

Προς το παρόν θα σταματήσουμε την μελέτη των δικτύων και θα επανέλθουμε σε θέματα συνέχειας.

Ας θεωρήσουμε X ένα σύνολο και $\big((Y_i, \mathfrak{T}_i)\big)_{i \in I}$ μια οικογένεια τοπολογικών χώρων. Δεδομένων απεικονίσεων $f_i : X \to Y_i,\ i \in I$, υπάρχει τοπολογία στον X που να καθιστά όλες τις f_i συνεχείς; Η μελέτη «ταυτόχρονης» συνέχειας δεν είναι παράλογη, αφού θυμηθείτε ότι στις πραγματικές πολυμεταβλητές/διανυσματικές συναρτήσεις, μια $f = (f_1, \cdots, f_n)$ είναι συνεχής εάν και μόνο αν καθεμία από τις f_i είναι συνεχής.

Η απάντηση στο αν τέτοια τοπολογία υπάρχει είναι πάντοτε θετική: Λαμβάνοντας υπόψη το **Θεώρημα 7.1, ii.**, μια απ' αυτές είναι η διακριτή τοπολογία $\mathfrak{T}_\delta$. Πάντως στην τοπολογία με την οποία θα εφοδιάσουμε το X δεν χρειάζονται τόσα πολλά ανοικτά σύνολα, αρκεί να περιέχεται η οικογένεια:

$$\mathcal{C} = \bigcup_{i \in I} \{f_i^{-1}(G) \mid G \in \mathfrak{T}_i\}$$

Οπότε, η μικρότερη δυνατή τοπολογία με τη ζητούμενη ιδιότητα είναι αυτή που εξασφαλίζει η **Πρόταση 3.1**. Δηλαδή η μικρότερη τοπολογία που περιέχει το $\mathcal{C}$ ως υποβάση.

Ορισμός 9.2: (Αρχικές τοπολογίες). Έστω X ένα σύνολο και $\big((Y_i, \mathfrak{T}_i)\big)_{i \in I}$ μια οικογένεια τοπολογικών χώρων. Επίσης θεωρούμε απεικονίσεις $f_i : X \to Y_i,\ i \in I$. Ονομάζουμε αρχική (ή ασθενή) τοπολογία που προκύπτει από την οικογένεια $(f_i)_{i \in I}$ την τοπολογία με υποβάση:

$$\mathcal{C} = \bigcup_{i \in I} \{f_i^{-1}(G) \mid G \in \mathfrak{T}_i\}$$

Αφού η $\mathcal{C}$ είναι υποβάση αυτής της τοπολογίας, το σύνολο:

$$\mathcal{B} = \left\{ \bigcap_{i=1}^{n} C_i \;\middle|\; n \in \mathbb{N},\ \{C_i\}_{i=1}^{n} \subseteq \mathcal{C} \right\} \cup \{X\}$$

είναι βάση της τοπολογίας. Η ίδια η τοπολογία έχει τη μορφή:

$$\mathfrak{T} = \left\{ \bigcup \mathcal{A} \mid \mathcal{A} \subseteq \mathcal{B} \right\}$$

Πρόταση 9.2: Έστω $(Y_i, \mathfrak{T}_i)$ μια οικογένεια τοπολογικών χώρων, $(f_i : X \to Y_i)_{i \in I}$ μια οικογένεια συναρτήσεων και $\mathfrak{T}_X$ η αρχική τοπολογία του X που προκύπτει από την οικογένεια $(f_i)_{i \in I}$. Εάν $(Z, \mathfrak{T}_Z)$ είναι τοπολογικός χώρος και $g : Z \to X$, τότε:

$$f_i \circ g \text{ συνεχείς για τα διάφορα } i \in I \Leftrightarrow g \text{ συνεχής}$$

Απόδειξη: ($\Rightarrow$) Εάν οι $f_i \circ g$ είναι συνεχείς, τότε για κάθε $i \in I$ και για κάθε $G \in \mathfrak{T}_i$:

$$\mathfrak{T}_Z \ni (f_i \circ g)^{-1}(G) = g^{-1}\big(f_i^{-1}(G)\big)$$

(Χρησιμοποιούμε το **Θεώρημα 7.1, ii.**). Αυτό μας δείχνει ότι η g^{-1} απεικονίζει υποβασικά σύνολα σε ανοικτά. Επειδή οι αντίστροφες εικόνες δρουν καλά πάνω σε τομές και ενώσεις, η g αντιστρέφει βασικά σύνολα σε ανοικτά, και κατ' επέκταση αντιστρέφει ανοικτά σε ανοικτά. Άρα είναι συνεχής.

($\Leftarrow$) Αν η g είναι συνεχής, επειδή καθεμία από τις f_i είναι συνεχής, από την **Πρόταση 7.2** οι $f_i \circ g$ είναι συνεχείς.

□

Πρόταση 9.3: Έστω $(Y_i, \mathfrak{T}_i)$ μια οικογένεια τοπολογικών χώρων, $(f_i : X \to Y_i)_{i\in I}$ μια οικογένεια συναρτήσεων και $\mathfrak{T}_X$ η αρχική τοπολογία του X που προκύπτει από την οικογένεια $(f_i)_{i\in I}$. Εάν $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ είναι δίκτυο στον X και $x \in X$, τότε:

$$x_\lambda \to x \Leftrightarrow \forall i \in I,\ f_i(x_\lambda) \to f_i(x)$$

Απόδειξη: ($\Rightarrow$) Καθεμία από τις f_i είναι συνεχής, οπότε από το **Θεώρημα 8.1** αν $x_\lambda \to x$ τότε $f_i(x_\lambda) \to f_i(x)$.

($\Leftarrow$) Υποθέτουμε ότι $f_i(x_\lambda) \to f_i(x)$ για κάθε $i \in I$. Θεωρούμε $V \in \mathcal{N}_x$ και τότε $x \in V^\circ \in \mathfrak{T}_X$. Δηλαδή το x ανήκει σε μια ένωση βασικών συνόλων, άρα σε κάποιο βασικό σύνολο B. Εξ' ορισμού τώρα της αρχικής τοπολογίας, το B γράφεται:

$$x \in B = \bigcap_{k=1}^{n} f_{i_k}^{-1}(G_{i_k}),\ \text{όπου } G_{i_k} \in \mathfrak{T}_{i_k}$$

και κατ' επέκταση, για κάθε k:

$$x \in f_{i_k}^{-1}(G_{i_k}) \Rightarrow f_{i_k}(x) \in G_{i_k}$$

το οποίο δείχνει ότι το G_{i_k} είναι περιοχή το $f_{i_k}(x)$. Λόγω της σύγκλισης του $f_{i_k}(x_\lambda)$, υπάρχει $\lambda_k \in \Lambda$ τέτοιο ώστε για κάθε $\lambda \geq \lambda_k$ να έχουμε $f_{i_k}(x_\lambda) \in G_{i_k}$.

Επιλέγοντας για τους διάφορους δείκτες k ένα $\lambda_0 \geq \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ (αυτό μπορεί να επιτευχθεί επαγωγικά, επειδή το Λ είναι κατευθυνόμενο), έπεται ότι για κάθε $\lambda \geq \lambda_0$:

$$\forall k \in \{1, \cdots, n\},\ f_{i_k}(x_\lambda) \in G_{i_k} \Rightarrow \forall k \in \{1, \cdots, n\},\ x_\lambda \in f_{i_k}^{-1}(G_{i_k})$$

δηλαδή:

$$\forall \lambda \geq \lambda_0,\ x_\lambda \in \bigcap_{k=1}^{n} f_{i_k}^{-1}(G_{i_k}) = B \subseteq V^\circ \subseteq V$$

Επειδή το $V \in \mathcal{N}_x$ επιλέχθηκε τυχαία, αληθεύει η σύγκλιση $x_\lambda \to x$.

$\square$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 10

Μάθημα 10

Ειδική περίπτωση ασθενούς τοπολογίας είναι η ακόλουθη: Έστω $(X, \mathfrak{T})$ τοπολογικός χώρος, $A \subseteq X$ και $\mathrm{i}_A : A \hookrightarrow X$ η συνάρτηση εμφύτευσης. Το A μπορεί να εφοδιαστεί με την αρχική τοπολογία $\mathfrak{T}_A$ που προέρχεται από την (τετριμμένη) οικογένεια (i_A).

Ορισμός 10.1: (Σχετικές τοπολογίες). Έστω $(X, \mathfrak{T})$ τοπολογικός χώρος, $A \subseteq X$ και $\mathrm{i}_A : A \hookrightarrow X$ η συνάρτηση εμφύτευσης. Η αρχική τοπολογία $\mathfrak{T}_A$ ονομάζεται σχετική τοπολογία του A που προέρχεται από την $\mathfrak{T}$.

Η τοπολογία αυτή έχει υποβάση:

$$\mathcal{C} = \left\{ \mathrm{i}_A^{-1}(G) \mid G \in \mathfrak{T} \right\}$$

(από τον **Ορισμό 9.2**). Επειδή όμως $\mathrm{i}_A^{-1}(G) = \{x \in A \mid \mathrm{i}_A(x) \in G\} = A \cap G$, έπεται:

$$\mathcal{C} = \left\{ A \cap G \mid G \in \mathfrak{T} \right\}$$

και περνώντας στα βασικά σύνολα $B = \bigcap_{k=1}^n C_k,\ \{C_k\}_{k=1}^n \subseteq \mathcal{C}$:

$$B = \bigcap_{k=1}^{n} C_k = \bigcap_{k=1}^{n} A \cap G_k = A \cap \left(\bigcap_{k=1}^{n} G_k \right)$$

Τώρα το $\bigcap_{k=1}^n G_k$ είναι ανοικτό σύνολο (έστω G) ως πεπερασμένη τομή τέτοιων, επομένως $B = A \cap G$. Παρατηρήστε ότι αυτό εξισώνει την οικογένεια $\mathcal{C}$ των υποβασικών συνόλων με την οικογένεια $\mathcal{B}$ των βασικών συνόλων.

Μάλιστα η ίδια η τοπολογία ταυτίζεται με τα προηγούμενα δύο σύνολα. Ένα τυχόν στοιχείο $U \in \mathfrak{T}_A$ γράφεται $U = \bigcup_{k \in I} B_k$ για αυθαίρετα μεγάλη οικογένεια $\{B_k\}_{k \in I} \subseteq \mathcal{B}$ και:

$$U = \bigcup_{k \in I} B_k = \bigcup_{k \in I} A \cap G_k = A \cap \left(\bigcup_{k \in I} G_k \right)$$

Το $\bigcup_{k \in I} G_k$ είναι ανοικτό σύνολο G, επομένως $U = A \cap G$. Έχουμε λοιπόν την ακόλουθη παρατήρηση:

Παρατήρηση 10.1: Έστω $(X, \mathfrak{T})$ ένας τοπολογικός χώρος, $A \subseteq X$ και $\mathfrak{T}_A$ η σχετική τοπολογία του A που προέρχεται από την $\mathfrak{T}$. Η υποβάση $\mathcal{C} = \left\{ A \cap G \mid G \in \mathfrak{T} \right\}$ της σχετικής τοπολογίας ταυτίζεται με την αντίστοιχη βάση $\mathcal{B}$ καθώς και με την τοπολογία $\mathfrak{T}_A$. Δηλαδή:

$$\mathcal{C} = \mathcal{B} = \mathfrak{T}_A$$

Αυτό είναι εξάλλου κάτι που θα θέλαμε, κατ' αναλογία με τα σχετικώς ανοικτά σύνολα στους μετρικούς χώρους.

Πρόταση 10.1: Έστω $(X, \mathfrak{T})$ ένας τοπολογικός χώρος, $A \subseteq X$ και $\mathfrak{T}_A$ η σχετική τοπολογία του A που προέρχεται από την $\mathfrak{T}$. Τα ακόλουθα αληθεύουν:

i. Εάν $(Z, \mathfrak{T}_Z)$ είναι τοπολογικός χώρος και:

$$(Z, \mathfrak{T}_Z) \xrightarrow{g} (A, \mathfrak{T}_A) \xrightarrow{\mathrm{i}_A} (X, \mathfrak{T})$$

τότε η g είναι συνεχής εάν και μόνο αν η $\mathrm{i}_A \circ g$ είναι συνεχής. Δηλαδή η g είναι «συνεχής στην τοπολογία $\mathfrak{T}$» εάν και μόνο αν είναι «συνεχής στη σχετική τοπολογία $\mathfrak{T}_A$».

ii. Ένα δίκτυο $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ στο A συγκλίνει σε ένα $x \in A$ ως προς την $\mathfrak{T}_A$ εάν και μόνο αν το $\big(\mathrm{i}_A(x_\lambda)\big)_{\lambda\in\Lambda} = (x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ συγκλίνει στο x ως προς την $\mathfrak{T}$.

iii. Ένα $G \subseteq A$ είναι ανοικτό στην $\mathfrak{T}_A \Leftrightarrow$ Υπάρχει $U \in \mathfrak{T}$ με $G = A \cap U$ (αυτό το ξαναείδαμε, προστίθεται για λόγους πληρότητας).

iv. Ένα $F \subseteq A$ είναι κλειστό στην $\mathfrak{T}_A \Leftrightarrow$ Υπάρχει K κλειστό στην $\mathfrak{T}$ με $F = A\cap K$ (είναι το αντίστοιχο του iii. για κλειστά σύνολα).

v. Εισάγουμε τον εξής συμβολισμό: Με $\mathrm{cl}_{\mathfrak{T}}S$ θα συμβολίζουμε τη κλειστή θήκη του S στην τοπολογία $\mathfrak{T}$. Με τον συμβολισμό υπόψη, για κάθε $B \subseteq A$ έχουμε $\mathrm{cl}_{\mathfrak{T}_A}B = A \cap \mathrm{cl}_{\mathfrak{T}}B$.

vi. Για κάθε $x \in A$, $\mathcal{N}_x^{\mathfrak{T}_A} = \{A \cap U \mid U \in \mathcal{N}_x^{\mathfrak{T}}\}$.

Απόδειξη: Το i. προκύπτει από την **Πρόταση 9.2**.

Το ii. είναι συνέπεια της **Πρότασης 9.3**.

Το iii. το αποδείξαμε στην **Παρατήρηση 10.1**.

Το iv. αποδεικνύεται από το iii., δουλεύοντας με συμπληρώματα. Εάν το F είναι κλειστό στην $\mathfrak{T}_A$, το $A\backslash F$ είναι ανοικτό στην $\mathfrak{T}_A$, και από το iii:

$$\exists U \in \mathfrak{T},\ A\backslash F = A \cap U$$

Δηλαδή:

$$F = A\backslash(A\backslash F) = A\backslash(A\cap U) = A \cap \big(X\backslash(A\cap U)\big) = A \cap \big((X\backslash A) \cup (X\backslash U)\big) = A \cap (X\backslash U)$$

με το $K = X\backslash U$ να είναι ανοικτό στην $\mathfrak{T}$.

Για το v, θα αποδείξουμε τους δύο εγκλεισμούς. Κατ' αρχάς $B \subseteq A$ (από την υπόθεση) και $B \subseteq \mathrm{cl}_{\mathfrak{T}}B$ (το οποίο ισχύει γενικά), οπότε $B \subseteq A \cap \mathrm{cl}_{\mathfrak{T}}B$.

Επιπλεόν, $B \subseteq \mathrm{cl}_{\mathfrak{T}_A}B$ και από το iv., $\mathrm{cl}_{\mathfrak{T}_A}B = A \cap K \subseteq K$ με το K να είναι κλειστό στην $\mathfrak{T}$. Δηλαδή $B \subseteq K$ και άρα $\mathrm{cl}_{\mathfrak{T}}B \subseteq K$. Τέμνοντας με A έχουμε τον αντίστροφο εγκλεισμό και κατ' επέκταση το ζητούμενο.

$$A \cap \mathrm{cl}_{\mathfrak{T}}B \subseteq A \cap K = \mathrm{cl}_{\mathfrak{T}_A}B$$

Για το vi., θα αποδείξουμε και πάλι τους δύο εγκλεισμούς. Κατ' αρχάς, για κάθε $U \in \mathcal{N}_x^{\mathfrak{T}}$, $x \in \mathrm{int}_{\mathfrak{T}}U$, οπότε σε συνδυασμό με το ότι $x \in A$ έπεται $x \in A \cap \mathrm{int}_{\mathfrak{T}}U$. Το τελευταίο είναι ένα ανοικτό σύνολο στο A και μάλιστα περιέχει το x, οπότε $A \cap \mathrm{int}_{\mathfrak{T}}U \in \mathcal{N}_x^{\mathfrak{T}_A}$. Κατ' επέκταση $A \cap \mathrm{int}_{\mathfrak{T}}U \subseteq A \cap U \in \mathcal{N}_x^{\mathfrak{T}_A}$. Αυτό δείχνει ότι $\{A \cap U \mid U \in \mathcal{N}_x^{\mathfrak{T}}\} \subseteq \mathcal{N}_x^{\mathfrak{T}_A}$.

Για τον άλλον εγκλεισμό, θεωρούμε $V \in \mathcal{N}_x^{\mathfrak{T}_A}$. Τότε $x \in \mathrm{int}_{\mathfrak{T}_A}V$ κι από το iii. υπάρχει $G \in \mathfrak{T}$ τέτοιο ώστε $\mathrm{int}_{\mathfrak{T}_A}V = A \cap G$, δηλαδή $x \in G$. Ορίζουμε $U = V \cup G$ και παρατηρούμε ότι αυτή είναι ανοικτή περιοχή του x στην τοπολογία $\mathfrak{T}$, αφού $x \in G$ και το G είναι ανοικτό στην $\mathfrak{T}$.

Ισχυριζόμαστε ότι $A \cap U = V$. Πράγματι:

$$A \cap U = A \cap (V \cup G) = (A \cap V) \cup (A \cap G) = V \cup \mathrm{int}_{\mathfrak{T}_A}V = V$$

οπότε $\mathcal{N}_x^{\mathfrak{T}_A} \subseteq \{A \cap U \mid U \in \mathcal{N}_x^{\mathfrak{T}}\}$.

□

Παρατήρηση 10.2: Έστω $(X, \mathfrak{T})$ ένας τοπολογικός χώρος, $A \subseteq X$, $\mathfrak{T}_A$ η σχετική τοπολογία του A και $B \subseteq A$. Αντίστοιχη ιδιότητα της v. της **Πρότασης 10.1** δεν υπάρχει για εσωτερικά. Δηλαδή εν γένει:

$$\mathrm{int}_{\mathfrak{T}_A}B \neq A \cap \mathrm{int}_{\mathfrak{T}}B$$

Παρόλα αυτά, αληθεύει $\mathrm{int}_{\mathfrak{T}}B \subseteq \mathrm{int}_{\mathfrak{T}_A}B$.

Απόδειξη: Πράγματι, επειδή $\mathrm{int}_{\mathfrak{T}}B \in \mathfrak{T}$, έχουμε $A \cap \mathrm{int}_{\mathfrak{T}}B \in \mathfrak{T}_A$. Μάλιστα, επειδή $\mathrm{int}_{\mathfrak{T}}B \subseteq B \subseteq A$ έχουμε $\mathrm{int}_{\mathfrak{T}}B \in \mathfrak{T}_A$ κι επομένως:

$$\mathrm{int}_{\mathfrak{T}}B \subseteq B \Rightarrow \mathrm{int}_{\mathfrak{T}}B = \mathrm{int}_{\mathfrak{T}_A}\mathrm{int}_{\mathfrak{T}}B \subseteq \mathrm{int}_{\mathfrak{T}_A}B$$

Η ισότητα εν γένει δεν ισχύει, κι ένα παράδειγμα στο οποίο ο εγκλεισμός είναι γνήσιος είναι το $X = \mathbb{R}$, $A = B = \mathbb{Q}$. Τότε:

$$\emptyset = \mathrm{int}_{\mathfrak{T}}\mathbb{Q} \subset \mathrm{int}_{\mathfrak{T}_{\mathbb{Q}}}\mathbb{Q} = \mathbb{Q}$$

□

■ **Παράδειγμα 10.1:** Έστω $(X, \mathfrak{T})$ τοπολογικός χώρος, $A \subseteq X$, και $\mathfrak{T}_A$ η σχετική τοπολογία του A που προέρχεται από την $\mathfrak{T}$.

- Εάν το A είναι ανοικτό:
$$\mathfrak{T}_A = \{A \cap G \mid G \in \mathfrak{T}\} = \{G \in \mathfrak{T} \mid G \subseteq A\}$$
- Για τυχόν $A \subseteq X$, εάν $\mathcal{B}$ είναι βάση της $\mathfrak{T}$, τότε το σύνολο $\{A \cap B \mid B \in \mathcal{B}\}$ είναι βάση της σχετικής τοπολογίας.
- Αντίστοιχα, εάν $\mathcal{C}$ είναι υποβάση της $\mathfrak{T}$, το σύνολο $\{A \cap C \mid C \in \mathcal{C}\}$ είναι υποβάση της σχετικής τοπολογίας.

■

Πρόταση 10.2: Έστω $X \neq \emptyset$, $A \subseteq X$, $\big((Y_i, \mathfrak{T}_i)\big)_{i \in I}$ οικογένεια τοπολογικών χώρων και $(f_i : X \to Y_i)_{i \in I}$ οικογένεια απεικονίσεων. Θεωρούμε το X ως τοπολογικό χώρο, εφοδιασμένο με την αρχική τοπολογία $\mathfrak{T}$ που προκύπτει από την οικογένεια $(f_i)_{i \in I}$.

Ορίζουμε $\mathfrak{T}_1$ τη σχετική τοπολογία του A που ορίζεται από την $\mathfrak{T}$, κι επίσης $\mathfrak{T}_2$ την αρχική τοπολογία του A που προκύπτει από την οικογένεια $(f_i \circ \mathrm{i}_A)_{i \in I}$, όπου $\mathrm{i}_A : A \hookrightarrow X$ είναι η συνάρτηση εμφύτευσης. Ισχύει $\mathfrak{T}_1 = \mathfrak{T}_2$.

$$\begin{tikzcd}
(X, \mathfrak{T}) \arrow[r, "f_i"] & (Y_i, \mathfrak{T}_i) \\
(A, \mathfrak{T}_1) \arrow[u, hook, "\mathrm{i}_A"] \arrow[r, equal] & (A, \mathfrak{T}_2) \arrow[u, "f_i \circ \mathrm{i}_A"']
\end{tikzcd}$$

Απόδειξη: Από τον ορισμό της, η τοπολογία $\mathfrak{T}$ έχει υποβάση $\bigcup_{i \in I}\{f_i^{-1}(G) \mid G \in \mathfrak{T}_i\}$. Επομένως, η $\mathfrak{T}_1$ έχει υποβάση $\bigcup_{i \in I}\{\mathrm{i}_A^{-1} \circ f_i^{-1}(G) \mid G \in \mathfrak{T}\}$.

Αντίστοιχα (από τον ορισμό της) η τοπολογία $\mathfrak{T}_2$ έχει υποβάση:

$$\bigcup_{i \in I}\big\{(f_i \circ \mathrm{i}_A)^{-1}(G) \mid G \in \mathfrak{T}\big\} = \bigcup_{i \in I}\{\mathrm{i}_A^{-1} \circ f_i^{-1}(G) \mid G \in \mathfrak{T}\}$$

δηλαδή οι δύο τοπολογίες έχουν την ίδια υποβάση. Επομένως έχουν και ίδια βάση (προερχόμενη από την υποβάση), και το ζητούμενο έπεται από το **Λήμμα 2.1**.

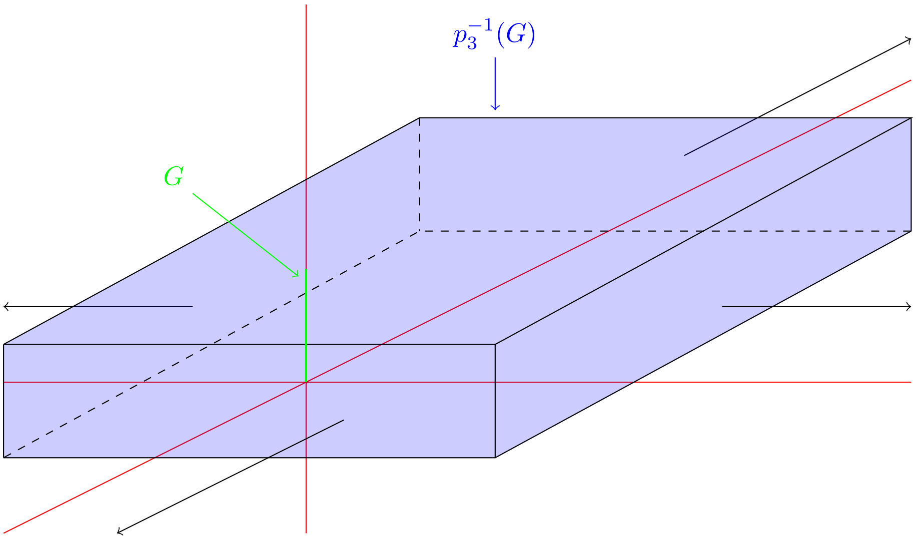
□

Ορισμός 10.2: (Προβολές και τοπολογίες γινόμενα). Έστω $\big((X_i, \mathfrak{T}_i)\big)_{i \in I}$ οικογένεια τοπολογικών χώρων και X το γινόμενο:

$$X = \prod_{i \in I} X_i := \Big\{x : I \to \bigcup_{i \in I} X_i \mid x(i) \in X_i,\ i \in I\Big\}$$

Για κάθε $j \in I$ ορίζουμε τη συνάρτηση προβολής $p_j : X \to X_j,\ x \mapsto x(j)$ στην $j-$συνιστώσα, κι επίσης θεωρούμε $\mathfrak{T}_\gamma$ την αρχική τοπολογία της οικογένειας των προβολών $(p_i)_{i \in I}$. Η $\mathfrak{T}_\gamma$ ονομάζεται τοπολογία γινόμενο (ή καρτεσιανή τοπολογία).

Από τον ορισμό της, η καρτεσιανή τοπολογία $\mathfrak{T}_\gamma$ είναι η μικρότερη τοπολογία που κάνει κάθε προβολή p_i συνεχή. Επιπλέον, η $\mathfrak{T}_\gamma$ έχει υποβάση $\mathcal{C} = \bigcup_{i\in I}\{p_i^{-1}(G) \mid G \in \mathfrak{T}_i\}$. Παρατηρήστε ότι ένα στοιχείο x ανήκει σε ένα υποβασικό σύνολο $p_i^{-1}(G)$ εάν και μόνο αν $p_i(x) \in G_i$, δηλαδή $x_i \in G_i$ (οι υπόλοιπες συντεταγμένες είναι «ελεύθερες»).



Ένα παράδειγμα στον χώρο $\mathbb{R}^3$, για την προβολή p_3 στον άξονα των z. Το μπλε χωρίο είναι μια άπειρη λωρίδα (όσον αφορά τα x, y).

■ **Παράδειγμα 10.2:** Θεωρούμε τους δύο τοπολογικούς χώρους $(X_1, \mathfrak{T}_1) = (X_2, \mathfrak{T}_2) = (\mathbb{R}, \mathfrak{T}_\varrho)$. Για $(a, b) \subseteq X_1$ και $p_1 : X_1 \times X_2 \to X_1$, το σύνολο $p_1^{-1}\big((a, b)\big)$ έχει τη μορφή:

$$p_1^{-1}\big((a,b)\big) = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x \in (a, b)\}$$

δηλαδή είναι μια λωρίδα. ■

Ορισμός 10.3: (Κανονική βάση μιας τοπολογίας γινόμενο). Έστω τοπολογικοί χώροι $(X_i, \mathfrak{T}_i)$, $i \in I$. Θεωρούμε το γινόμενο $X = \prod_{i\in I} X_i$ εφοδιασμένο με την τοπολογία γινόμενο $\mathfrak{T}_\gamma$. Γνωρίζουμε ότι η οικογένεια $\mathcal{C} = \bigcup_{i\in I}\{p_i^{-1}(G) \mid G \in \mathfrak{T}_i\}$ είναι υποβάση της $\mathfrak{T}_\gamma$, και κατ' επέκταση το σύνολο:

$$\mathcal{B} = \left\{ \bigcap_{i=1}^{n} C_i \;\middle|\; n \in \mathbb{N},\ \{C_i\}_{i=1}^{n} \subseteq \mathcal{C} \right\} \cup \{X\}$$

είναι βάση της τοπολογίας. Το ονομάζουμε κανονική βάση της τοπολογίας γινόμενο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 11

Μάθημα 11

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε μερικά ήδη γνωστά αποτελέσματα για να διατυπώσουμε τα παρακάτω:

Πρόταση 11.1: Έστω $\big((X_i, \mathfrak{T}_i)\big)_{i\in I}$ οικογένεια τοπολογικών χώρων και $(X = \prod_{i\in I} X_i, \mathfrak{T}_\gamma)$ ο τοπολογικός χώρος του γινομένου με την τοπολογία γινόμενο.

i. Θεωρούμε τις απεικονίσεις:

$$(Z, \mathfrak{T}_Z) \xrightarrow{g} (A, \mathfrak{T}_A) \xrightarrow{p_i} (X_i, \mathfrak{T}_i)$$

όπου $(p_i)_{i\in I}$ είναι η οικογένεια των προβολών. Η g είναι συνεχής εάν και μόνο αν οι $p_i \circ g,\ i \in I$ είναι συνεχείς.

ii. Εάν $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ είναι δίκτυο στον X και $x \in X$:

$$(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \to x \Leftrightarrow \forall i \in I,\ p_i(x_\lambda) \to p_i(x)$$

iii. Έστω $A_i \subseteq X_i$ και $A = \prod_{i\in I} A_i$. Θεωρούμε $\mathfrak{T}_1$ τη σχετική τοπολογία στο A που προέρχεται από την τοπολογία γινόμενο $\mathfrak{T}_\gamma$, καθώς επίσης και $\mathfrak{T}_2$ την τοπολογία γινόμενο που προκύπτει από τις $p_i \circ \mathrm{i}_A$ (όπου $\mathrm{i}_A : A \hookrightarrow X$). Τότε $\mathfrak{T}_1 = \mathfrak{T}_2$.

Απόδειξη: Το i. αποδεικνύεται από την **Πρόταση 10.1**, το ii. από την **Πρόταση 9.3** και το iii. από την **Πρόταση 10.2**.

$\square$

Παρατήρηση 11.1: Έστω $\big((X_i, \mathfrak{T}_i)\big)_{i\in I}$ οικογένεια τοπολογικών χώρων και $(X = \prod_{i\in I} X_i, \mathfrak{T}_\gamma)$ ο τοπολογικός χώρος του γινομένου με την τοπολογία γινόμενο. Θεωρούμε επίσης $A_i \subseteq X_i$ και έχουμε:

$$\overline{\prod_{i\in I} A_i} = \prod_{i\in I} \overline{A_i}$$

Απόδειξη: Θα αποδείξουμε τους δύο εγκλεισμούς. Κατ' αρχάς, για τυχόντα $B_i \subseteq X_i$ ισχύουν οι ισοδυναμίες:

$$x \in \prod_{i\in I} B_i \Leftrightarrow \forall i \in I,\ x_i \in B_i \Leftrightarrow \forall i \in I,\ x \in p_i^{-1}(B_i) \Leftrightarrow x \in \bigcap_{i\in I} p_i^{-1}(B_i)$$

και ιδιαίτερα, για $B_i = \overline{A_i}$:

$$\prod_{i\in I} \overline{A_i} = \bigcap_{i\in I} p_i^{-1}(\overline{A_i})$$

Τώρα επειδή καθένα από τα $\overline{A_i}$ είναι κλειστό και οι p_i συνεχείς, το $p_i^{-1}(\overline{A_i})$ είναι κλειστό (**Θεώρημα 7.1, iii.**. Επιπλέον, οι p_i είναι συνεχείς εξ ορισμού της $\mathfrak{T}_\gamma$). Δηλαδή το $\prod_{i\in I} \overline{A_i}$ είναι κλειστό (ως τομή κλειστών) και κατ' επέκταση:

$$\overline{\prod_{i\in I} A_i} \subseteq \prod_{i\in I} \overline{A_i}$$

Για τον άλλον εγκλεισμό, θεωρούμε $x \in \prod_{i\in I} \overline{A_i}$. Το x ανήκει στο $\prod_{i\in I} \overline{A_i}$ εάν και μόνο αν $\forall i \in I,\ x_i \in \overline{A_i}$, δηλαδή εάν και μόνο αν $\forall i \in I,\ \forall G_i \in \mathfrak{T}_i$ έχουμε $A_i \cap G_i \neq \emptyset$.

Θα δείξουμε ότι $x \in \overline{\prod_{i\in I} A_i}$. Εάν $G \in \mathfrak{T}_\gamma$ με $x \in G$, τότε το x ανήκει σε κάποιο βασικό σύνολο $B \subseteq G$ της τοπολογίας $\mathfrak{T}_\gamma$. Το βασικό αυτό σύνολο (εξ ορισμού των βασικών συνόλων της κανονικής βάσης της τοπολογίας) έχει τη μορφή:

$$B = \prod_{i\in I} B_i, \text{ όπου } B_i = \begin{cases} X_i, & \text{όταν } i \neq i_k \\ G_{i_k}, & \text{όταν } i = i_k \end{cases}$$

για πεπερασμένη οικογένεια δεικτών $\{i_k\}_{k=1}^n \subseteq I$. Επομένως:

$$\left(\prod_{i\in I} A_i\right) \cap B = \left(\prod_{i\in I} A_i\right) \cap \left(\prod_{i\in I} B_i\right) = \prod_{i\in I} A_i \cap B_i$$

Γενικά τώρα ισχύει $x_i \in X_i,\ i \neq i_k$, κι επειδή $x \in \prod_{i\in I} \overline{A_i}$, θα έχουμε $A_{i_k} \cap G_{i_k} \neq \emptyset$. Δηλαδή:

$$\left(\prod_{i\in I} A_i\right) \cap B = \prod_{i\in I} A_i \cap B_i \neq \emptyset$$

κι άρα:

$$\emptyset \neq \left(\prod_{i\in I} A_i\right) \cap B \subseteq \left(\prod_{i\in I} A_i\right) \cap G \Rightarrow \left(\prod_{i\in I} A_i\right) \cap G \neq \emptyset$$

Αυτό σύμφωνα με την **Πρόταση 5.2, ii.** δίνει $x \in \overline{\prod_{i\in I} A_i}$. Άρα:

$$\prod_{i\in I} \overline{A_i} \subseteq \overline{\prod_{i\in I} A_i}$$

□

Λήμμα 11.1: Έστω $\big((X_i, \mathfrak{T}_i)\big)_{i\in I}$ οικογένεια τοπολογικών χώρων και ο τοπολογικός χώρος $(X = \prod_{i\in I} X_i, \mathfrak{T}_\gamma)$ εφοδιασμένος με την τοπολογία γινόμενο. Παρατηρήστε ότι για $A, B \subseteq X$ και τυχούσα $f : X \to X_i$ *δεν* αληθεύει εν γένει ότι $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$. Όμως, αν $\{B_j\}_{j\in J}$ είναι οικογένεια κανονικών βασικών συνόλων, τότε:

$$p_i\Big(\bigcup_{j\in J} B_j\Big) = \bigcup_{j\in J} p_i(B_j)$$

■

Απόδειξη: Πράγματι, γράφουμε:

$$B_j = \prod_{i\in I} B_{j,i}, \text{ όπου } B_{j,i} = \begin{cases} X_i, & \text{όταν } i \neq i_k \\ G_{j,i_k}, & \text{όταν } i = i_k \end{cases}$$

για πεπερασμένη οικογένεια δεικτών $\{i_k\}_{k=1}^n \subseteq I$, και έχουμε:

$$p_i\Big(\bigcup_{j\in J} B_j\Big) = \bigcup_{j\in J} B_{j,i} = \bigcup_{j\in J} p_i(B_j)$$

□

Παρατήρηση 11.2: Έστω $\big((X_i, \mathfrak{T}_i)\big)_{i\in I}$ οικογένεια τοπολογικών χώρων και ο τοπολογικός χώρος $(X = \prod_{i\in I} X_i, \mathfrak{T}_\gamma)$ εφοδιασμένος με την τοπολογία γινόμενο. Οι προβολές $p_i : X \to X_i$ είναι ανοικτές, αλλά όχι κατ' ανάγκη κλειστές.

Απόδειξη: Για να αποδείξει κανείς ότι οι p_i είναι ανοικτές χρειάζεται να ελέγξει αν τα κανονικά βασικά σύνολα απεικονίζονται σε ανοικτά σύνολα, λόγω του **Λήμματος 11.1**. Εάν λοιπόν B είναι ένα κανονικό βασικό σύνολο τότε (από την μορφή του):

$$p_i(B) = B_i, \text{ όπου } B_i = \begin{cases} X_i \text{ ή} \\ G_i \in \mathfrak{T}_i \end{cases}$$

Θυμηθείτε ότι ένα κανονικό βασικό σύνολο έχει τη μορφή:

$$B = \prod_{i \in I} B_i, \text{ όπου } B_i = \begin{cases} X_i, & \text{όταν } i \neq i_k \\ G_{i_k}, & \text{όταν } i = i_k \end{cases}$$

για πεπερασμένη οικογένεια δεικτών $\{i_k\}_{k=1}^n \subseteq I$. Επομένως το $p_i(B)$ είναι ανοικτό.

Δεν είναι κατ' ανάγκη κλειστές, κι ένα παράδειγμα στο επίπεδο είναι το ακόλουθο: Το γράφημα της συνάρτησης $1/(\cdot) : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ είναι κλειστό στο $\mathbb{R}^2$, αλλά η προβολή του $p_1\Big(\mathrm{Gr}\big(1/(\cdot)\big)\Big) = \mathbb{R}^*$ δεν είναι κλειστό σύνολο στο $\mathbb{R}$.

□

Ας θεωρήσουμε δύο τοπολογικούς χώρους $(X, \mathfrak{T}_X), (Y, \mathfrak{T}_Y)$ οι οποίοι είναι μετρικοποιήσιμοι - δηλαδή $\mathfrak{T}_X = \mathfrak{T}_{\varrho_X}$ και $\mathfrak{T}_Y = \mathfrak{T}_{\varrho_Y}$ για κάποιες μετρικές $\varrho_X : X \times X \to \mathbb{R}$, $\varrho_Y : Y \times Y \to \mathbb{R}$. Είναι η (αντίστοιχη) τοπολογία γινόμενο $\mathfrak{T}_\gamma$ μετρικοποιήσιμη; Η απάντηση που θα δώσουμε είναι θετική (γι' αυτό το πεπερασμένο γινόμενο), πρώτα όμως ας δείξουμε το εξής βασικό αποτέλεσμα:

Πρόταση 11.2: Η μετρική τοπολογία $\mathfrak{T}_{\varrho_X}$ έχει βάση $\mathcal{B}_X = \{B_{\varrho_X}(x, \varepsilon) \mid x \in X,\ \varepsilon > 0\}$ και αντίστοιχα, η μετρική τοπολογία $\mathfrak{T}_{\varrho_Y}$ έχει βάση $\mathcal{B}_Y = \{B_{\varrho_Y}(y, \varepsilon) \mid y \in Y,\ \varepsilon > 0\}$ **(Παράδειγμα 2.1 (πρώτο •))**. Ισχυριζόμαστε ότι το σύνολο:

$$\mathcal{B} = \{B(x, \varepsilon) \times B(y, \varepsilon) \mid (x, y) \in X \times Y,\ \varepsilon > 0\}$$

είναι βάση της τοπολογίας γινόμενο $\mathfrak{T}_\gamma$.

Απόδειξη: Ας θεωρήσουμε $G \in \mathfrak{T}_\gamma$ με $(x, y) \in G$. Υπάρχει κανονικό βασικό σύνολο B που να περιέχεται στο G, και μάλιστα (από τη μορφή των κανονικών βασικών συνόλων) γράφεται ως γινόμενο δύο ανοικτών συνόλων στις επιμέρους «συντεταγμένες» τοπολογίες. Δηλαδή:

$$B = U \times V \subseteq G, \text{ με } U \in \mathfrak{T}_{\varrho_X},\ V \in \mathfrak{T}_{\varrho_Y}$$

Τώρα για καθένα από τα U, V μπορούν να βρεθούν ακτίνες $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ ώστε $x \in B(x, \varepsilon_x) \subseteq U$, $y \in B(y, \varepsilon_y) \subseteq V$, οπότε αν θέσουμε $\varepsilon = \min\{\varepsilon_x, \varepsilon_y\}$ θα έχουμε $(x, y) \in B(x, \varepsilon) \times B(y, \varepsilon) \subseteq G$.

Επιπλέον η $\mathcal{B}$ είναι προφανώς κάλυψη του $X \times Y$, οπότε το **Θεώρημα 2.1** γνωρίζουμε ότι το εν λόγω σύνολο είναι βάση μοναδικής τοπολογίας του $X \times Y$. Επιπλέον, κάθε στοιχείο του $\mathcal{B}$ είναι στοιχείο της κανονικής βάσης της $\mathfrak{T}_\gamma$, αφού:

$$B(x, \varepsilon) \times B(y, \varepsilon) = \big(B(x, \varepsilon) \times Y\big) \cap \big(X \times B(y, \varepsilon)\big) = p_X^{-1}\big(B(x, \varepsilon)\big) \cap p_Y^{-1}\big(B(y, \varepsilon)\big)$$

όπου οι $p_X : X \times Y \to X$ και $p_Y : X \times Y \to Y$ είναι προβολές. Επομένως το $\mathcal{B}$ είναι υποσύνολο της κανονικής βάσης, και κατά συνέπεια η τοπολογία $\mathfrak{T}$ που αυτό ορίζει περιέχεται στην καρτεσιανή ($\mathfrak{T} \subseteq \mathfrak{T}_\gamma$).

Επιπλέον, τα σύνολα:

$$\bigcup_{y \in Y} B(x, \varepsilon) \times B(y, \varepsilon) = B(x, \varepsilon) \times Y \textbf{ και } \bigcup_{x \in X} B(x, \varepsilon) \times B(y, \varepsilon) = X \times B(y, \varepsilon)$$

ανήκουν στην τοπολογία $\mathfrak{T}$, οπότε οι p_X, p_Y είναι συνεχείς και ως προς την τοπολογία $\mathfrak{T}$. Ομως η $\mathfrak{T}_\gamma$ είναι η μικρότερη μ' αυτήν την ιδιότητα, κι έτσι ισχύει και ο άλλος εγκλεισμός ($\mathfrak{T} \supseteq \mathfrak{T}_\gamma$).

□

Παρατήρηση 11.3: Από την απόδειξη της **Πρότασης 11.2** δεν προκύπτει απλά ότι η $\mathcal{B} = \{B(x, \varepsilon) \times B(y, \varepsilon) \mid (x, y) \in X \times Y,\ \varepsilon > 0\}$ είναι βάση της τοπολογίας γινόμενο των τοπολογικών μετρικών χώρων $(X, \mathfrak{T}_{\varrho_X}), (Y, \mathfrak{T}_{\varrho_Y})$, αλλά επιπλέον $(X \times Y, \mathfrak{T}_\gamma) = (X \times Y, \mathfrak{T}_\varrho)$, όπου $\varrho := \max\{\varrho_X, \varrho_Y\}$.

Φαίνεται ότι η μετρικοποιησιμότητα μπορεί να μεταφέρεται σε πεπερασμένα γινόμενα τοπολογικών μετρικών χώρων. Παρακάτω θα δούμε ότι μεταφορά μπορεί να γίνει και στην περίπτωση αριθμήσιμου γινομένου.

Θεώρημα 11.1: Έστω $(X_i, \mathfrak{T}_i)_{i \in \mathbb{N}}$ μια (αριθμήσιμη) οικογένεια μετρικοποιήσιμων τοπολογικών χώρων. Ο τοπολογικός χώρος γινόμενο $(X = \prod_{i=1}^{\infty} X_i, \mathfrak{T}_\gamma)$ είναι μετρικοποιήσιμος.

Απόδειξη: Μπορούμε να θεωρήσουμε τους τοπολογικούς χώρους $(X_i, \mathfrak{T}_i)$ τοπολογικούς μετρικούς χώρους, με $\mathfrak{T}_i = \mathfrak{T}_{\varrho_i}$ για μετρικές $\varrho_i : X_i \times X_i \to \mathbb{R}$. Γνωρίζουμε ότι οι μετρικές $\tilde{\varrho}_i : X_i \times X_i \to [0, 1)$ με:

$$\tilde{\varrho}_i := \frac{\varrho_i}{1 + \varrho_i}$$

είναι ισοδύναμες των αντίστοιχων ϱ_i, επομένως οι τοπολογικοί χώροι $(X_i, \mathfrak{T}_i) = (X_i, \mathfrak{T}_{\varrho_i})$ και $(X_i, \mathfrak{T}_{\tilde{\varrho}_i})$ ταυτίζονται.

Ορίζουμε $\varrho : X \times X \to \mathbb{R}$:

$$\varrho(x, y) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \tilde{\varrho}_k(x_k, y_k), \text{ όπου } x = (x_k)_{k=1}^{\infty}, \ y = (y_k)_{k=1}^{\infty}$$

και παρατηρούμε ότι η ϱ ορίζεται καλά. Επιπλέον, είναι υπόθεση ρουτίνας να επαληθευτεί ότι είναι μετρική.

Θα δείξουμε ότι η αντίστοιχη τοπολογία $\mathfrak{T}_\varrho$ που ορίζει η ϱ είναι η καρτεσιανή τοπολογία $\mathfrak{T}_\gamma$. Κατ' αρχάς θα δείξουμε ότι οι διάφορες $m-$προβολές $p_m : X \to X_m$ είναι συνεχείς ως προς την $\mathfrak{T}_\varrho$, οπότε $\mathfrak{T}_\gamma \subseteq \mathfrak{T}_\varrho$ (αφού η $\mathfrak{T}_\gamma$ είναι η μικρότερη μ' αυτήν την ιδιότητα).

Έστω $\varepsilon > 0$ και $x = (x_k)_{k=1}^{\infty} \in X$. Για $\delta = \varepsilon/2^m$ και για κάθε $y = (y_k)_{k=1}^{\infty} \in X$ με $\varrho(x, y) < \delta$ έχουμε:

$$\varrho(x, y) < \delta \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \tilde{\varrho}_k(x_k, y_k) < \delta \Rightarrow \frac{1}{2^m} \tilde{\varrho}_m(x_m, y_m) < \frac{\varepsilon}{2^m} \Rightarrow \tilde{\varrho}_m(x_m, y_m) < \varepsilon$$

Επειδή $p_m(x) = x_m$ και $p_m(y) = y_m$, το ζητούμενο έπεται.

Για τον αντίστροφο εγκλεισμό, θεωρώντας $G \in \mathfrak{T}_\varrho$ θα δείξουμε ότι $G \in \mathfrak{T}_\gamma$. Αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $x \in G$, υπάρχει κανονικό βασικό σύνολο B τέτοιο ώστε $x \in B \subseteq G$ (έτσι το G θα είναι περιοχή κάθε σημείου του, άρα θα είναι ανοικτό στην $\mathfrak{T}_\gamma$).

Επειδή $G \in \mathfrak{T}_\varrho$, για κάθε $x = (x_k)_{k=1}^{\infty} \in G$ θα υπάρχει ακτίνα $\varepsilon > 0$ τέτοια ώστε $x \in B_\varrho(x, \varepsilon) \subseteq G$. Επιλέγουμε τώρα αριθμό $\ell \in \mathbb{N}$ τέτοιον ώστε $1/2^\ell < \varepsilon/2$ και θέτουμε:

$$B = \bigcap_{k=1}^{\ell} p_k^{-1}\big(B_{\tilde{\varrho}_k}(x_k, \varepsilon/2)\big)$$

Το B είναι κανονικό βασικό σύνολο με $x \in B$. Τέλος, για τυχόν $y = (y_k)_{k=1}^{\infty} \in B$ έχουμε $\tilde{\varrho}_n(x_n, y_n) < \varepsilon/2$ και:

$$\begin{aligned}
\varrho(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \tilde{\varrho}_n(x_n, y_n) = \sum_{k=1}^{\ell} \frac{1}{2^k} \tilde{\varrho}_n(x_n, y_n) + \sum_{k=\ell+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \tilde{\varrho}_n(x_n, y_n) \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{\ell} \frac{1}{2^k} \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{k=\ell+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} + \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=\ell+1}^{\infty} \frac{1}{2^{k-\ell}} \\
&= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}$$

το οποίο δείχνει ότι $x \in B \subseteq B_\varrho(x, \varepsilon) \subseteq G$, άρα $x \in B \subseteq G$.

$\square$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 12

Μάθημα 12

Με την **Πρόταση 11.2** και το **Θεώρημα 11.1** δείξαμε ότι αριθμήσιμο γινόμενο μετρικοποιήσιμων τοπολογικών χώρων είναι μετρικοποιήσιμος τοπολογικός χώρος. Ισχύει το ίδιο για την υπεραριθμήσιμη περίπτωση; Η απάντηση εν γένει είναι όχι, εκτός από ορισμένες εξαιρετικά τετριμμένες περιπτώσεις.

Για παράδειγμα, εάν $\big((X_i, \mathfrak{T}_i)\big)_{i\in I}$ είναι μία υπεραριθμήσιμη οικογένεια διακριτών τοπολογικών χώρων με $X_i = \{x_i\}$ (δηλαδή τα X_i είναι μονοσύνολα), τότε το γινόμενο είναι μετρικοποιήσιμος τοπολογικός χώρος με τη διακριτή τοπολογία γινόμενο.

Θα δείξουμε ότι σε περιπλοκότερες περιπτώσεις τοπολογικών χώρων η μετρικοποιησιμότητα στο υπεραριθμήσιμο γινόμενο είναι ανέφικτη.

Παρατήρηση 12.1: Ένας τοπολογικός χώρος $(X, \mathfrak{T})$ είναι μη τετριμμένος εάν και μόνο αν υπάρχει ανοικτό σύνολο $U \in \mathfrak{T}$ τέτοιο ώστε $\emptyset \subset U \subset X$.

Πρόταση 12.1: Έστω $\big((X_i, \mathfrak{T}_i)\big)_{i\in I}$ μια υπεραριθμήσιμη οικογένεια μη τετριμμένων τοπολογικών χώρων. Τότε η τοπολογία γινόμενο $(X = \prod_{i\in I} X_i, \mathfrak{T}_\gamma)$ δεν είναι μετρικοποιήσιμη.

Απόδειξη: Θα αποδείξουμε την πρόταση με άτοπο. Έστω ότι υπάρχει μετρική $\varrho : X \times X \to \mathbb{R}$ στην τοπολογία γινόμενο που ορίζει ακριβώς τα στοιχεία της τοπολογίας γινόμενο (δηλαδή $\mathfrak{T}_\varrho = \mathfrak{T}_\gamma$).

Από την **Παρατήρηση 12.1** υπάρχουν σύνολα $U_i \in \mathfrak{T}_i$ τέτοια ώστε $\emptyset \subset U_i \subset X_i$. Επιλέγουμε για κάθε i ένα U_i και ορίζουμε το σύνολο $\prod_{i\in I} U_i$. Σ' αυτό επιλέγουμε στοιχείο $x = (x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} U_i$, εφόσον καθένα από τα U_i δεν είναι κενά, και παρατηρούμε ότι $\forall i \in I,\ x_i = p_i(x) \Rightarrow \forall i \in I,\ x \in p_i^{-1}(U_i)$.

Επειδή τα σύνολα $p_i^{-1}(U_i)$ είναι υποβασικά της τοπολογίας γινόμενο, είναι ανοικτά. Κατ' επέκταση υπάρχει $n_i \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $B(x, 1/n_i) \subseteq p_i^{-1}(U_i)$. Συμμαζεύοντας (για τα διάφορα $i \in I$) υπάρχει συνάρτηση $\varphi : I \to \mathbb{N}$ με $i \mapsto n_i$. Επειδή το I είναι υπεραριθμήσιμο σύνολο, η αντίστροφη εικόνα $\varphi^{-1}(\mathbb{N})$ είναι υπεραριθμήσιμο σύνολο, και κατ' επέκταση κάποιο σύνολο $\varphi^{-1}\big(\{n\}\big)$ είναι υπεραριθμήσιμο - παρατηρήστε ότι:

$$I = \varphi^{-1}(\mathbb{N}) = \varphi^{-1}\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{n\}\Big) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \varphi^{-1}\big(\{n\}\big)$$

με το I να είναι υπεραριθμήσιμο σύνολο και η ένωση είναι αριθμήσιμη. Επίσης θυμηθείτε ότι η αριθμήσιμη ένωση αριθμήσιμων συνόλων είναι σύνολο αριθμήσιμο, οπότε δεν είναι δυνατόν όλα τα $\varphi\big(\{n\}\big)$ να είναι αριθμήσιμα.

Μ' αυτόν τον τρόπο έχει αποδειχθεί ότι υπάρχουν υπεραριθμήσιμα στο πλήθος σύνολα U_i για τα οποία $B(x, 1/n) \subseteq p_i^{-1}(U_i)$. Μάλιστα, $i \in \varphi^{-1}\big(\{n\}\big)$.

Επειδή το $B(x, 1/n)$ είνα ανοικτό σύνολο στην τοπολογία $\mathfrak{T}_\gamma$ και $x \in B(x, 1/n)$, υπάρχει κανονικό βασικό σύνολο $x \in B \subseteq B(x, 1/n) \subseteq p_i^{-1}(U_i),\ i \in \varphi^{-1}\big(\{n\}\big)$. Το B έχει τη μορφή:

$$B = \prod_{i\in I} B_i, \text{ όπου } B_i = \begin{cases} X_i,\ i \neq i_k \\ G_i,\ i = i_k \end{cases}$$

για πεπερασμένη οικογένεια δεικτών $\{i_k\}_{k=1}^m \subseteq I$ και $G_i \in \mathfrak{T}_i$. Επιπλέον, επειδή $p_i(B) = B_i$ και $p_i(B) \subseteq U_i$ έχουμε $B_i \subseteq U_i \subset X$ για $i \in \varphi^{-1}\big(\{n\}\big)$ - δηλαδή τα B_i διαφέρουν από τα X_i για άπειρους δείκτες και όχι για πεπερασμένους. Αυτό είναι άτοπο.

□

Ας θεωρήσουμε μια οικογένεια συναρτήσεων $\{f\}_{i\in I}$. Κατ' αναλογία με τις αρχικές τοπολογίες - στις οποίες εφοδιάζαμε χώρους που λειτουργούσαν ως «πεδία ορισμού» των f_i - μπορούμε να εφοδιάσουμε τους χώρους που λειτουργούν ως «πεδία τιμών» με κατάλληλη τοπολογία ώστε οι f_i να γίνονται συνεχείς.

Κατ' αρχάς, εάν $\big(f_i : (X_i, \mathfrak{T}_i) \to Y\big)_{i\in I}$ είναι η εν λόγω οικογένεια συναρτήσεων, εφοδιάζοντας το Y με την τετριμμένη τοπολογία καθεμία από τις f_i γίνεται συνεχής (**Παράδειγμα 7.1 (τρίτο •)**). Επομένως τοπολογία του πεδίου τιμών που να εξασφαλίζει τη συνέχεια των f_i υπάρχει, και το ερώτημά μας είναι κατά πόσο μπορεί να «μεγαλώσει».

Λήμμα 12.1: Έστω $(X, \mathfrak{T}_X)$ ένας τοπολογικός χώρος και μια συνάρτηση $f : (X, \mathfrak{T}_X) \to Y$. Ορίζουμε:

$$\mathfrak{T}_Y = \{V \subseteq Y \mid f^{-1}(V) \in \mathfrak{T}_X\}$$

και ισχυριζόμαστε ότι:

i. Η $\mathfrak{T}_Y$ είναι τοπολογία.

ii. Εάν το Y εφοδιαστεί με την $\mathfrak{T}_Y$ η f γίνεται συνεχής.

iii. Η $\mathfrak{T}_Y$ είναι η μεγαλύτερη τοπολογία (ως προς τη σχέση του υποσυνόλου) για την οποία ισχύει το ii..

■

Απόδειξη: Το i. μπορεί να ελεγχθεί μέσω του ορισμού των τοπολογιών. Επιπλέον ο ορισμός της $\mathfrak{T}_Y$ είναι τέτοιος ώστε να ισχύει το ii.. Όσον αφορά το iii., εάν η $f : (X, \mathfrak{T}_X) \to (Y, \mathfrak{T})$ είναι συνεχής (για μια ενδεχομένως διαφορετική τοπολογία $\mathfrak{T}$), τότε για κάθε ανοικτό $V \in \mathfrak{T}$ έχουμε $f^{-1}(V) \in \mathfrak{T}_X$. Δηλαδή:

$$\mathfrak{T} \subseteq \{V \subseteq Y \mid f^{-1}(V) \in \mathfrak{T}_X\} = \mathfrak{T}_Y$$

□

Με το **Λήμμα 12.1** υπόψη, παίρνουμε το ακόλουθο:

Πρόταση 12.2: Έστω $\big((X_i, \mathfrak{T}_i)\big)_{i\in I}$ οικογένεια τοπολογικών χώρων και οικογένεια συναρτήσεων $\big(f_i : (X_i, \mathfrak{T}_i) \to Y\big)_{i\in I}$. Εάν $(\mathfrak{T}_Y)_i$ είναι οι τοπολογίες που καθιστούν την εκάστοτε f_i συνεχή (όπως αυτές εξασφαλίζονται από το **Λήμμα 12.1**), τότε η τοπολογία $\bigcap_{i\in I}(\mathfrak{T}_Y)_i$ είναι η μεγαλύτερη τοπολογία που κάνει κάθε f_i συνεχή.

Απόδειξη: Υποθέτουμε ότι η $\mathfrak{T}$ είναι μια τοπολογία που κάνει κάθε f_i συνεχή. Είναι προφανές ότι η $\bigcap_{i\in I}(\mathfrak{T}_Y)_i$ είναι τοπολογία που καθιστά καθεμία f_i συνεχή, οπότε θα δείξουμε μονάχα ότι $\bigcap_{i\in I}(\mathfrak{T}_Y)_i \supseteq \mathfrak{T}$.

Εάν $V \in \mathfrak{T}$, τότε για κάθε $i \in I$, $f_i^{-1}(V) \in \mathfrak{T}_i$, οπότε από τον ορισμό των $(\mathfrak{T}_Y)_i$, $V \in (\mathfrak{T}_Y)_i$. Δηλαδή $V \in \bigcap_{i\in I}(\mathfrak{T}_Y)_i$, το οποίο δείχνει τον ζητούμενο εγκλεισμό.

□

Ορισμός 12.1: (Τελικές τοπολογίες). Έστω $\big((X_i, \mathfrak{T}_i)\big)_{i\in I}$ οικογένεια τοπολογικών χώρων και οικογένεια συναρτήσεων $\big(f_i : (X_i, \mathfrak{T}_i) \to Y\big)_{i\in I}$. Η τοπολογία της **Πρότασης 12.2** με την οποία εφοδιάζεται ο Y (και κάνει όλες τις f_i συνεχείς) καλείται τελική τοπολογία του Y που προέρχεται από την οικογένεια $(f_i)_{i\in I}$. Ειδικότερα, η εν λόγω τοπολογία έχει τη μορφή:

$$\bigcap_{i\in I}\{V \subseteq Y \mid f_i^{-1}(V) \in \mathfrak{T}_i\}$$

Πρόταση 12.3: Έστω $\big((X_i, \mathfrak{T}_i)\big)_{i\in I}$ οικογένεια τοπολογικών χώρων και οικογένεια συναρτήσεων $\big(f_i : (X_i, \mathfrak{T}_i) \to Y\big)_{i\in I}$. Εφοδιάζουμε τον Y με τη τελική τοπολογία $\mathfrak{T}_Y$ που προέρχεται από την οικογένεια $(f_i)_{i\in I}$ και έχουμε τα ακόλουθα:

i. Ένα $F \subseteq Y$ είναι κλειστό εάν και μόνο αν τα $f_i^{-1}(F)$ είναι κλειστά στις αντίστοιχες $\mathfrak{T}_i$ (για κάθε $i \in I$).

ii. Εάν $(Z, \mathfrak{T}_Z)$ είναι τοπολογικός χώρος και $g : (Y, \mathfrak{T}_Y) \to (Z, \mathfrak{T}_Z)$ είναι συνάρτηση, τότε:

$$g \text{ συνεχής } \Leftrightarrow g \circ f_i \text{ συνεχείς (εννοείται για κάθε } i \in I)$$

Απόδειξη: Για το i., επειδή το F είναι κλειστό στην $\mathfrak{T}_Y$, το $Y \backslash F$ θα είναι ανοικτό. Επομένως:

$$Y \backslash F \in \mathfrak{T}_Y \Leftrightarrow \forall i \in I,\ f_i^{-1}(Y \backslash F) \in \mathfrak{T}_i \Leftrightarrow X_i \backslash f_i^{-1}(F) \in \mathfrak{T}_i$$

Δηλαδή το F είναι κλειστό εάν και μόνο αν τα $f_i^{-1}(F)$ είναι κλειστά, στις αντίστοιχες τοπολογίες.

Για το ii., έχουμε τις ισοδυναμίες:

$$\begin{aligned}\overbrace{\forall W \in \mathfrak{T}_Z,\ g^{-1}(W) \in \mathfrak{T}_Y}^{(\star)} &\Leftrightarrow \forall W \in \mathfrak{T}_Z,\ \forall i \in I,\ f_i^{-1} \circ g^{-1}(W) \in \mathfrak{T}_i \\ &\Leftrightarrow \underbrace{\forall W \in \mathfrak{T}_Z,\ \forall i \in I,\ (g \circ f_i)^{-1}(W) \in \mathfrak{T}_i}_{(\star\star)}\end{aligned}$$

με την πρόταση άστρο $(\star)$ να ισοδυναμεί με τη συνέχεια της g και την πρόταση διπλό άστρο $(\star\star)$ να ισοδυναμεί με τη συνέχεια των $g \circ f_i$.

□

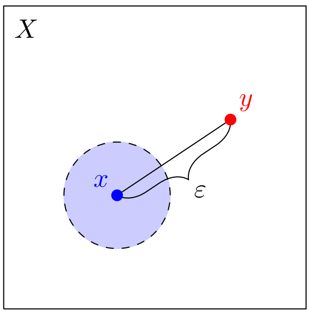
Μια ειδική περίπτωση τελικών τοπολογιών είναι οι τοπολογικοί χώροι πηλίκα. Ας θεωρήσουμε $(X, \mathfrak{T}_X)$ έναν τοπολογικό χώρο στον οποίο υπάρχει μια επιπρόσθετη δομή υπό τη μορφή μιας σχέσης ισοδυναμίας «$\sim$». Συμβολίζουμε με $[x] = \{y \in X \mid x \sim y\} \subseteq X$ την κλάση ισοδυναμίας του στοιχείου x και ορίζουμε το σύνολο πηλίκο:

$$\tilde{X} = {}^{X}/_{\sim} := \{[x] \mid x \in X\}$$

Από τον X στο πηλίκο $\tilde{X}$ υπάρχει η συνάρτηση $\pi : X \to \tilde{X},\ x \mapsto [x]$, η οποία ονομάζεται κανονική προβολή του X. Η τελική τοπολογία του $\tilde{X}$ που ορίζεται από την (τετριμμένη) οικογένεια (π) λέγεται τοπολογία πηλίκο.

Ορισμός 12.2: (Τοπολογίες πηλίκα). Θεωρούμε έναν τοπολογικό χώρο $(X, \mathfrak{T}_X)$ με σχέση ισοδυναμίας $(\sim)$. Η τελική τοπολογία του χώρου πηλίκο ${}^{X}/_{\sim}$ που προέρχεται από την τετριμμένη οικογένεια (π) - όπου π είναι η κανονική προβολή του X - ονομάζεται τοπολογία πηλίκο.

Στη συνέχεια θα ασχοληθούμε με διάφορες έννοιες διαχωρισιμότητας, κατ' αρχάς όμως ας προσπαθήσουμε να διερευνήσουμε τι μπορεί να σημαίνει διαχωρισιμότητα σ' έναν τοπολογικό χώρο. Σε έναν μετρικό χώρο (X, ϱ) θεωρούμε δύο διαφορετικά σημεία $x, y \in X$.



Εάν ε είναι η απόσταση $\varrho(x, y)$, για οποιοδήποτε $0 < \delta < \varepsilon$ η (ανοικτή) μπάλα $B(x, \delta)$ περιέχει το x αλλά όχι το y. Κατά μία έννοια, το y διαχωρίστηκε από την «περιοχή» του X.

Αυτού του είδους ο διαχωρισμός δεν επιτυγχάνεται σε όλους τους τοπολογικούς χώρους. Για παράδειγμα, σ' έναν τετριμμένο τοπολογικό χώρο $(X, \mathfrak{T})$ με $|X| \geqslant 2$, το μόνο μη κενό ανοικτό σύνολο είναι το ίδιο το X. Δίνουμε τώρα τον ακόλουθο ορισμό:

Ορισμός 12.3: (T_1 τοπολογικοί χώροι). Ένας τοπολογικός χώρος $(X, \mathfrak{T})$ λέγεται T_1 χώρος εάν για κάθε $(x, y) \in X \times X$ με $x \neq y$ υπάρχει $U \in \mathfrak{T}$ τέτοιο ώστε $x \in U \not\ni y$.

Παρατήρηση 12.2:

- Εναλλάσσοντας τη σειρά των x, y στο διατεταγμένο ζεύγος του **Ορισμού 12.3**, μπορεί να βρεθεί $V \in \mathfrak{T}$ τέτοιο ώστε $y \in V \not\ni x$.
- Το ανοικτό σύνολο του **Ορισμού 12.3** μπορεί να αντικατασταθεί με περιοχή του x, κι αυτή με τη σειρά της με βασική περιοχή του x.

Παρακάτω θα ακολουθήσουν χαρακτηρισμοί των T_1 χώρων, που θα δώσουν μια ιδέα του πώς μοιάζει ένας T_1 χώρος.

Πρόταση 12.4: Έστω $(X, \mathfrak{T})$ ένας τοπολογικός χώρος. Τα ακόλουθα ισοδυναμούν:

i. Ο χώρος $(X, \mathfrak{T})$ είναι T_1.

ii. Κάθε μονοσύνολο στον $(X, \mathfrak{T})$ είναι κλειστό.

iii. Για κάθε $x \in X$ αληθεύει $\bigcap_{V \in \mathcal{N}_x} V = \{x\}$.

Απόδειξη: (i. $\Rightarrow$ ii.) Ισοδύναμα θα δείξουμε ότι για κάθε μονοσύνολο $\{x\} \subseteq X$, το $X \backslash \{x\}$ είναι ανοικτό. Εφόσον ο χώρος είναι T_1, για κάθε $y \in X \backslash \{x\}$ υπάρχει $V \in \mathfrak{T}$ με $y \in V \not\ni x$, δηλαδή υπάρχει ανοικτή περιοχή του y που δεν τέμνει το $\{x\}$, για κάθε y. Επομένως το $X \backslash \{x\}$ είναι περιοχή κάθε σημείου του και κατ' επέκταση είναι ανοικτό.

(ii. $\Rightarrow$ iii.) Θεωρούμε τυχόν $x \in X$. Κατ' αρχάς είναι φανερό ότι $\{x\} \subseteq \bigcap_{V \in \mathcal{N}_x} V$, επομένως αυτό που πρέπει να δειχθεί είναι ο άλλος εγκλεισμός $\{x\} \supseteq \bigcap_{V \in \mathcal{N}_x} V$.

Έστω λοιπόν $x \neq y \in \bigcap_{V \in \mathcal{N}_x} V$. Το x ανήκει στο σύνολο $X \backslash \{y\}$, το οποίο (από το ii.) είναι ανοικτό. Επειδή το y δεν ανήκει στην ανοικτή περιοχή (του x) $X \backslash \{y\}$, δεν θα ανηκει ούτε στην τομή $\bigcap_{V \in \mathcal{N}_x} V$. Αυτό δείχνει ότι η εν λόγω τομή είναι το πολύ το μονοσύνολο $\{x\}$ (δηλαδή είναι το $\emptyset$ ή το $\{x\}$), οπότε σε συνδυασμό με τα προηγούμενα αποδεικνύεται η ισότητα $\bigcap_{V \in \mathcal{N}_x} V = \{x\}$.

(iii. $\Rightarrow$ i.) Θεωρούμε δύο στοιχεία $x \neq y$ του X. Λόγω του iii., $\bigcap_{V \in \mathcal{N}_x} V = \{x\}$ και (κατ' επέκταση) $y \notin \bigcap_{V \in \mathcal{N}_x} V$. Δηλαδή υπάρχει $V \in \mathcal{N}_x$ τέτοιο ώστε $y \notin V$. Το σύνολο V° είναι ένα ανοικτό σύνολο που περιέχει το x και δεν περιέχει το y, οπότε διαχωρίζει κατά μια έννοια τα x, y σύμφωνα με το αξίωμα T_1.

□

■ **Παράδειγμα 12.1:**

- Κάθε τοπολογικός μετρικός χώρος $(X, \mathfrak{T}_\varrho)$ είναι T_1 χώρος.
- Έστω $(X, \mathfrak{T}_1), (X \mathfrak{T}_2)$ δύο τοπολογικοί χώροι με τον δεύτερο να έχει λεπτότερη τοπολογία ($\mathfrak{T}_1 \subseteq \mathfrak{T}_2$). Εάν ο $(X, \mathfrak{T}_1)$ είναι T_1 χώρος, τότε και ο $(X, \mathfrak{T}_2)$ είναι T_1 χώρος. Πράγματι, αυτό είναι άμεση συνέπεια του ορισμού των T_1 χώρων.
- Έστω $(X, \mathfrak{T})$ ένας τοπολογικός χώρος με την συμπεπερασμένη τοπολογία. Κάθε πεπερασμένο σύνολο είναι κλειστό, αφού τα ανοικτά σύνολα είναι ακριβώς αυτά τα σύνολα που έχουν πεπερασμένο συμπλήρωμα, και τα συμπληρώματα ανοικτών συνόλων είναι κλειστά σύνολα. Κατ' επέκταση τα μονοσύνολα είναι κλειστά, κι από την **Πρόταση 12.4, ii.** ο χώρος $(X, \mathfrak{T})$ είναι T_1.
- Έστω $(X, \mathfrak{T})$ ένας T_1 τοπολογικός χώρος. Σύμφωνα με την **Πρόταση 12.4, ii.**, τα μονοσύνολα είναι κλειστά, άρα και τα πεπερασμένα σύνολα είναι κλειστά. Όλα τα σύνολα που έχουν πεπερασμένο συμπλήρωμα είναι ανοικτά (ως συμπλήρωμα κλειστών), και κατ' επέκταση η $\mathfrak{T}$ είναι μια τοπολογία λεπτότερη της (αντίστοιχης) συμπεπερασμένης τοπολογίας του ίδιου χώρου.

■

Παρατήρηση 12.3: Από το **Παράδειγμα 12.1 (τέταρτο •)**, η συμπεπερασμένη τοπολογία είναι η ≪μικρότερη≫ τοπολογία που κάνει έναν χώρο T_1.

Πρόταση 12.5:

i. Έστω $(X, \mathfrak{T}_X), (Y, \mathfrak{T}_Y)$ δύο τοπολογικοί χώροι και μια συνάρτηση $g : (Y, \mathfrak{T}_Y) \to (X, \mathfrak{T}_X)$ συνεχής και $1-1$. Εάν ο $(X, \mathfrak{T}_X)$ είναι T_1 χώρος, τότε και ο $(Y, \mathfrak{T}_Y)$ είναι T_1 χώρος.

ii. Εάν $(X, \mathfrak{T}_X)$ είναι ένας T_1 τοπολογικός χώρος, $A \subseteq X$ και $(A, \mathfrak{T}_A)$ είναι ο τοπολογικός χώρος με τη σχετική τοπολογία του A, τότε ο $(A, \mathfrak{T}_A)$ είναι T_1 χώρος.

iii. Έστω $\big((X_i, \mathfrak{T}_i)\big)_{i \in I}$ μία οικογένεια τοπολογικών χώρων που είναι T_1. Το γινόμενο $(X = \prod_{i \in I} X_i, \mathfrak{T}_\gamma)$ με την καρτεσιανή τοπολογία είναι T_1 χώρος.

Απόδειξη: Για το i.: Θεωρούμε δύο στοιχεία $y_1 \neq y_2$ του Y, κι επειδή η g είναι $1-1$, $g(y_1) \neq g(y_2)$. Ο X είναι T_1 χώρος και τα $g(y_1), g(y_2)$ ανήκουν σ' αυτόν, επομένως υπάρχει ανοικτό $G \in \mathfrak{T}_X$ τέτοιο ώστε $g(y_1) \in G \not\ni g(y_2)$. Αντιστρέφοντας, το σύνολο $g^{-1}(G) \subseteq Y$ είναι ανοικτό (λόγω της συνέχειας της g) και επιπλέον $y_1 \in g^{-1}(G) \not\ni y_2$. Αυτά δείχνουν ότι ο $(Y, \mathfrak{T}_Y)$ είναι T_1.

Το ii. είναι υποπερίπτωση του i..

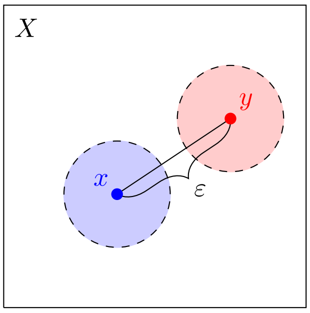
Για το iii.: Θεωρούμε $x = (x_i)_{i \in I} \neq y = (y_i)_{i \in I}$ δύο στοιχεία του $X = \prod_{i \in I} X_i$. Επειδή $x \neq y$, υπάρχει δείκτης $j \in I$ τέτοιος ώστε $x_j \neq y_j$, κι επειδή ο X_j είναι T_1, υπάρχει $G_j \in \mathfrak{T}_j$ τέτοιο ώστε $x_j \in G_j \not\ni y_j$. Αντιστρέφοντας μέσω της προβολής p_j, το σύνολο $p_j^{-1}(G_j)$ είναι ανοικτό σύνολο (λόγω της συνέχειας της p_j) και $x \in p_j^{-1}(G_j) \not\ni y$. Αυτά δείχνουν ότι ο $(X, \mathfrak{T}_\gamma)$ είναι T_1.

□

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 13

Μάθημα 13

Στους μετρικούς χώρους (X, ϱ) υπάρχουν ισχυρότερες έννοιες διαχωρισιμότητας από την T_1. Με την T_1 επιτυγχάναμε τον διαχωρισμό ενός σημείου y από περιοχή του x - μπορούμε όμως να διαχωρισουμε περιοχή του x, όχι απλώς από το y, αλλά από περιοχή του y.



Για παράδειγμα, εάν $\varepsilon = \varrho(x, y)$ τα σύνολα $B(x, \varepsilon/3),\ B(y, \varepsilon/3)$ είναι ανοικτά, ξένα, το πρώτο περιέχει το x και το δεύτερο το y. Δίνουμε λοιπόν τον ακόλουθο ορισμό:

Ορισμός 13.1: **(T_2 τοπολογικοί χώροι).** Ένας τοπολογικός χώρος $(X, \mathfrak{T})$ λέγεται T_2 χώρος εάν για κάθε $x, y \in X$ με $x \neq y$ υπάρχουν ανοικτά σύνολα $U, V \in \mathfrak{T}$ τέτοια ώστε $x \in U,\ y \in V$ και $U \cap V = \emptyset$. Διαφορετικά οι χώροι T_2 λέγονται και χώροι Hausdorff.

■ **Παράδειγμα 13.1:**

- Οι τοπολογικοί μετρικοί χώροι $(X, \mathfrak{T}_\varrho)$ είναι T_2 χώροι.
- Υπάρχουν τοπολογικοί χώροι που είναι T_1 αλλά όχι T_2. Για παράδειγμα, οι τοπολογικοί χώροι $(X, \mathfrak{T})$, όπου το X είναι άπειρο και η $\mathfrak{T}$ η συμπεπερασμένη τοπολογία.

  Το ότι οι εν λόγω χώροι είναι T_1 το έχουμε δει στο **Παράδειγμα 12.1 (τρίτο •)**. Δεν είναι όμως T_2 χώροι: αν ήταν, θα υπήρχαν δύο ανοικτά, ξένα σύνολα U, V, οπότε $U \subseteq V^c$. Επειδή το V είναι ανοικτό, το V^c είναι πεπερασμένο, άρα και το U. Επειδή το U είναι ανοικτό, το U^c είναι πεπερασμένο, δηλαδή το $X = U \cup U^c$ είναι πεπερασμένο. Αυτό είναι άτοπο.

■

Παρατήρηση 13.1: Κάθε T_2 τοπολογικός χώρος είναι και T_1 (αυτό προκύπτει από τους ορισμούς των αξιωμάτων T_1, T_2).

Πρόταση 13.1: Έστω $(X, \mathfrak{T})$ ένας τοπολογικός χώρος. Τα παρακάτω ισοδυναμούν:

i. Ο χώρος $(X, \mathfrak{T})$ είναι T_2.

ii. Για κάθε $x, y \in X$ με $x \neq y$ υπάρχει $U \in \mathcal{N}_x$ με $y \notin \overline{U}$.

iii. Για κάθε $x \in X$ έχουμε $\bigcap_{U \in \mathcal{N}_x} \overline{U} = \{x\}$.

Απόδειξη: (i. $\Rightarrow$ ii.) Θεωρούμε δύο στοιχεία $x \neq y$ του X. Λόγω της ιδιότητας T_2, θα υπάρχουν ανοικτά, ξένα σύνολα U, V τέτοια ώστε $x \in U,\ y \in V$. Θα δείξουμε ότι το U είναι σύνολο τέτοιο ώστε $y \notin \overline{U}$.

Πράγματι, εάν $y \in \overline{U}$, τότε για κάθε $H \in \mathcal{N}_y$ θα έχουμε $U \cap H \neq \emptyset$, και ειδικότερα για $H = V$, έπεται $U \cap V \neq \emptyset$. Αυτό είναι άτοπο.

(ii. $\Rightarrow$ iii.) Επειδή για κάθε $U \in \mathcal{N}_x$ ισχύει $U \subseteq \overline{U}$ και ο X είναι T_2, από την **Παρατήρηση 13.1** και την **Πρόταση 12.4, iii.** έπεται:

$$\{x\} = \bigcap_{U \in \mathcal{N}_x} U \subseteq \bigcap_{U \in \mathcal{N}_x} \overline{U}$$

Για τον αντίστροφο εγκλεισμό, θεωρούμε $y \in \bigcap_{U \in \mathcal{N}_x} \overline{U}$ με $x \neq y$. Τότε $y \in \overline{U}$ για κάθε $U \in \mathcal{N}_x$, πράγμα που αντιβαίνει στο ii..

(iii. $\Rightarrow$ i.) Θεωρούμε δύο στοιχεία $x \neq y$ του X. Λόγω του iii., $y \notin \bigcap_{U \in \mathcal{N}_x} \overline{U}$, οπότε υπάρχει $U_0 \in \mathcal{N}_x$ τέτοιο ώστε $y \notin \overline{U_0}$. Επειδή $y \notin \overline{U_0}$, έχουμε $y \in X \backslash \overline{U_0}$, κι από τον δυϊσμό θηκών και εσωτερικών, $y \in (X \backslash U_0)^\circ$. Τα σύνολα U_0°, $(X \backslash U_0)^\circ$ περιέχουν τα x και y αντίστοιχα, είναι ανοικτά και $U_0^\circ \cap (X \backslash U_0)^\circ = \emptyset$ (διότι $U_0^\circ \cap (X \backslash U_0)^\circ = U_0^\circ \cap (X \backslash \overline{U_0}) \subseteq U_0^\circ \cap (X \backslash U_0^\circ) = \emptyset$). Αυτά δείχνουν ότι ο X είναι T_2 χώρος.

□

Παρατήρηση 13.2:

- Έστω $(X, \mathfrak{T}_1), (X\mathfrak{T}_2)$ δύο τοπολογικοί χώροι με τον δεύτερο να έχει λεπτότερη τοπολογία ($\mathfrak{T}_1 \subseteq \mathfrak{T}_2$). Εάν ο $(X, \mathfrak{T}_1)$ είναι T_2 χώρος, τότε και ο $(X, \mathfrak{T}_2)$ είναι T_2 χώρος. Πράγματι, αυτό είναι άμεση συνέπεια του ορισμού των T_2 χώρων.
- Ειδικότερα, ο τοπολογικός χώρος των αριστερά ημιάνοικτων διαστημάτων $(\mathbb{R}, \mathfrak{T}_S)$ είναι T_2 χώρος, αφού ο συνήθης τοπολογικός μετρικός χώρος $(\mathbb{R}, \mathfrak{T}_\varrho)$ έχει $\mathfrak{T}_\varrho \subseteq \mathfrak{T}_S$.

Πρόταση 13.2: Τα ακόλουθα αληθεύουν:

i. Έστω $(X, \mathfrak{T}), (Y, \mathfrak{T}_Y)$ δύο τοπολογικοί χώροι και $g : (Y, \mathfrak{T}_Y) \to (X, \mathfrak{T}_X)$ συνεχής και $1-1$ απεικόνιση. Εάν ο $(X, \mathfrak{T}_X)$ είναι T_2, τότε και ο $(Y, \mathfrak{T}_Y)$ είναι T_2.

ii. Εάν ο $(X, \mathfrak{T}_X)$ είναι T_2 χώρος, $A \subseteq X$ και $(A, \mathfrak{T}_A)$ είναι ο τοπολογικός χώρος με τη σχετική τοπολογία, τότε ο $(A, \mathfrak{T}_A)$ είναι T_2 χώρος.

iii. Εάν $\big((X_i, \mathfrak{T}_i)\big)_{i \in I}$ είναι οικογένεια T_2 χώρων, τότε ο τοπολογικός χώρος γινόμενο $(X = \prod_{i \in I} X_i, \mathfrak{T}_\gamma)$ με την καρτεσιανή τοπολογία είναι T_2 χώρος.

Απόδειξη: Για το i.: Θεωρούμε $y_1 \neq y_2$ στον χώρο Y. Επειδή η g είναι $1-1$ έχουμε $g(y_1) \neq g(y_2)$, κι επειδή ο X είναι T_2 χώρος, υπάρχουν ξένα $U, V \in \mathfrak{T}_X$ τέτοια ώστε $f(y_1) \in U$ και $f(y_2) \in V$. Αντιστρέφοντας, τα σύνολα $g^{-1}(U), g^{-1}(V)$ είναι ανοικτά, ξένα, το πρώτο περιέχει το y_1 και το δεύτερο το y_2. Αυτά δείχνουν ότι ο $(Y, \mathfrak{T}_Y)$ είναι T_2 χώρος.

Το ii. είναι υποπερίπτωση του i..

Για το iii.: Έστω $x = (x_i)_{i \in I} \neq y = (y_i)_{i \in I}$ δύο στοιχεία του $\prod_{i \in I} X_i$. Εφόσον δεν ταυτίζονται, υπάρχει δείκτης $j \in I$ τέτοιος ώστε $x_j \neq y_j$, και επειδή ο X_j είναι T_2, υπάρχουν ανοικτά και ξένα σύνολα $U_j, V_j \in \mathfrak{T}_j$ με $x_j \in U_j$ και $y_j \in V_j$. Αντιστρέφοντας μέσω της προβολής p_j, τα σύνολα $p_j^{-1}(U_j), p_j^{-1}(V_j)$ είναι ανοικτά, ξένα, το πρώτο περιέχει το x και το δεύτερο το y. Αυτά δείχνουν ότι ο χώρος $(X, \mathfrak{T}_\gamma)$ είναι T_2.

□

Έχουμε δει (για παράδειγμα, στο **Παράδειγμα 8.1 (δεύτερο •)**. Θυμηθείτε επίσης ότι μια ακολουθία είναι δίκτυο) ότι ένα συγκλίνον δίκτυο εν γένει δεν έχει μοναδικό όριο. Στην περίπτωση όμως των T_2 χώρων, η μοναδικότητα του ορίου είναι κάτι που μπορεί να εξασφαλιστεί. Μάλιστα θα δείξουμε ότι αυτό ακριβώς είναι αυτό που λείπει σε τοπολογικούς χώρους στους οποίους δεν εξασφαλίζεται η μοναδικότητα του ορίου, αποδεικνύοντας την ισοδυναμία:

Θεώρημα 13.1: Ένας χώρος $(X, \mathfrak{T})$ είναι T_2 εάν και μόνο αν κάθε συγκλίνον δίκτυο του X έχει μοναδικό όριο.

Απόδειξη: ($\Rightarrow$) Έστω $(X, \mathfrak{T})$ ένας T_2 χώρος και $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ένα συγκλίνον δίκτυο προς τα $x \neq y$.

Αφού $x \neq y$ και ο X είναι T_2, υπάρχουν ξένα $U, V \in \mathfrak{T}$ με $x \in U$ και $y \in \mathfrak{T}$. Λόγω της σύγκλισης της υπακολουθίας:

$$\exists \lambda_x \in \Lambda \text{ τέτοιο ώστε } \forall \lambda \geq \lambda_x,\ x_\lambda \in U \in \mathcal{N}_x$$
$$\exists \lambda_y \in \Lambda \text{ τέτοιο ώστε } \forall \lambda \geq \lambda_y,\ x_\lambda \in V \in \mathcal{N}_y$$

οπότε διαλέγοντας $\lambda_0 \geq \lambda_x, \lambda_y$, έχουμε:

$$\forall \lambda \geq \lambda_0,\ x_\lambda \in U \cap V$$

Αυτό είναι άτοπο, αφού $U \cap V = \emptyset$. Καταλήγουμε στο ότι $x = y$.

($\Leftarrow$) Εάν ο χώρος X είναι T_2, τότε υπάρχουν $x \neq y$ για τα οποία κάθε ζεύγος $G, H \in \mathfrak{T}$ με το πρώτο να περιέχει το x, το δεύτερο το y, έχει μη κενή τομή $G \cap H \neq \emptyset$.

Θέτουμε $\Lambda = \mathcal{N}_x \times \mathcal{N}_y$ και ορίζουμε σχέση $\leq$:

$$(U, V) \leq (U', V') \Leftrightarrow U \supseteq U' \text{ και } V \supseteq V'$$

η οποία καθιστά το $(\Lambda, \leq)$ κατευθυνόμενο σύνολο. Για κάθε $\lambda = (U, V) \in \Lambda$, τα U, V αποτελούν περιοχές των x και y αντίστοιχα, επομένως $x \in U^\circ$ και επίσης $y \in V^\circ$. Από την υπόθεση, η τομή $U^\circ \cap V^\circ$ δεν είναι κενή, άρα ούτε η $U \cap V$. Διαλέγουμε στην τελευταία στοιχείο $p_\lambda \in U \cap V$ και κατασκευάζουμε το αντίστοιχο δίκτυο, για τα διάφορα $\lambda \in \Lambda$. Θα δείξουμε ότι $p_\lambda \to x$, και κανείς μπορεί αναλόγως να δείξει ότι $p_\lambda \to y$ (δηλαδή το όριο δεν είναι μοναδικό). Αυτό θα μας δώσει άτοπο, επομένως θα πρέπει ο χώρος να είναι T_2.

Έστω $U_0 \in \mathcal{N}_x$. Θέτουμε $\lambda_0 = (U_0, X) \in \Lambda$ και παρατηρούμε ότι για $\lambda = (U, V) \geq \lambda_0$, $(U, V) \geq (U_0, X)$, δηλαδή $U \subseteq U_0$ και $V \subseteq X$ (το οποίο είναι αδιάφορο, αφού ούτως ή άλλως $V \subseteq X$). Οπότε $p_\lambda \in U \cap V \subseteq U_0 \cap X = U_0$, και έχουμε δείξει μ' αυτά ότι:

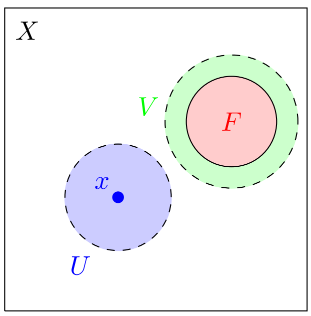
$$\forall U_0 \in \mathcal{N}_x,\ \exists \lambda_0 \in \Lambda \text{ τέτοιο ώστε } \forall \lambda \geq \lambda_0,\ p_\lambda \in U_0$$

δηλαδή $p_\lambda \to x$.

□

Επόμενο βήμα είναι η μελέτη διαχωρισιμότητας σημείου από κλειστό σύνολο (το ένα εν των δύο σημείων του αξιώματος T_2 έχει αντικατασταθεί ουσιαστικά από κλειστό σύνολο).

> **Ορισμός 13.2: (T_3 τοπολογικοί χώροι).** Ένας τοπολογικός χώρος $(X, \mathfrak{T})$ λέγεται T_3 χώρος εάν για κάθε $x \in X$ και $F \subseteq X$ κλειστό με $x \notin F$ υπάρχουν ανοικτά σύνολα $U, V \in \mathfrak{T}$ με $x \in U$, $F \subseteq V$ και $U \cap V = \emptyset$. Διαφορετικά οι T_3 χώροι λέγονται και κανονικοί.



> **Πρόταση 13.3:** Έστω $(X, \mathfrak{T})$ τοπολογικός χώρος. Τα ακόλουθα ισοδυναμούν:
>
> i. Ο χώρος $(X, \mathfrak{T})$ είναι T_3.
>
> ii. Για κάθε $x \in X$ και για κάθε κλειστό F με $x \notin F$, υπάρχει $U \in \mathcal{N}_x$ τέτοιο ώστε $\overline{U} \cap F = \emptyset$.
>
> iii. Για κάθε $x \in X$ και για κάθε $U \in \mathcal{N}_x$ υπάρχει $V \in \mathcal{N}_x$ με $\overline{V} \subseteq U$.
>
> iv. Για κάθε $x \in X$ και για κάθε κλειστό F με $x \notin F$ υπάρχουν $G, H \in \mathfrak{T}$ τέτοια ώστε $x \in G$, $F \subseteq H$ και $\overline{G} \cap \overline{H} = \emptyset$.

Απόδειξη: (i. $\Rightarrow$ ii.) Θεωρούμε $x \in X$ και κλειστό F με $x \notin F$. Εφόσον ο X είναι T_3 χώρος, υπάρχουν $U, V \in \mathfrak{T}$ με $x \in U$, $F \subseteq V$ και $U \cap V = \emptyset$. Το ανοικτό σύνολο U είναι περιοχή του x, και μάλιστα θα δείξουμε ότι έχει την ιδιότητα $\overline{U} \cap V = \emptyset$. Πράγματι, εάν η τομή δεν ήταν κενή, θα υπήρχε κάποιο $y \in \overline{U} \cap V$. Επειδή $y \in \overline{U}$, κάθε ανοικτή περιοχή του y τέμνει το U, και ειδικότερα η V τέμνει το U. Αυτό είναι άτοπο.

(ii. $\Rightarrow$ iii.) Έστω $x \in X$ και $U \in \mathcal{N}_x$. Εφόσον το U είναι περιοχή του x, έχουμε $x \in U^\circ$ και το x δεν ανήκει στο κλειστό σύνολο $X \backslash U^\circ$. Από το ii., υπάρχει περιοχή $V \in \mathcal{N}_x$ τέτοια ώστε $\overline{V} \cap F = \emptyset$. Δηλαδή:

$$\overline{V} \cap (X \backslash U^\circ) = \emptyset \Rightarrow \overline{V} \subseteq U^\circ \Rightarrow \overline{V} \subseteq U$$

(Μάλιστα εδώ το V είναι συμπαγώς περιεχόμενο στο U, δηλαδή $V \Subset U :\Leftrightarrow \overline{V} \subseteq U^\circ$).

(iii. $\Rightarrow$ iv.) Έστω $x \in X$ και $F \subseteq X$ κλειστό με $x \notin F$. Το σύνολο $X \backslash F$ είναι ανοικτή περιοχή του x, οπότε (από το iii.) υπάρχει $V \in \mathcal{N}_x$ με $\overline{V} \subseteq X \backslash F$. Μάλιστα, η ανοικτή περιοχή $V^\circ \in \mathcal{N}_x$ έχει την ιδιότητα $\overline{V^\circ} \subseteq \overline{V} \subseteq X \backslash F$.

Για την ανοικτή περιοχή $V^\circ \in \mathcal{N}_x$ εφαρμόζουμε και πάλι το iii., οπότε βρίσκουμε $W \in \mathcal{N}_x$ με $\overline{W} \subseteq V^\circ$. Παρατηρούμε ότι το ανοικτό σύνολο W° περιέχει το x, και επίσης $X \backslash \overline{V^\circ} \supseteq X \backslash (X \backslash F) = F$, με το $X \backslash \overline{V^\circ}$ να είναι ανοικτό σύνολο. Θέτουμε $G = W^\circ$ και $H = X \backslash \overline{V^\circ}$, και έχουμε:

$$\overline{G} \cap \overline{H} = \overline{W^\circ} \cap \overline{X \backslash \overline{V^\circ}} \subseteq V^\circ \cap \overline{X \backslash V^\circ} = V^\circ \cap (X \backslash V^\circ) = \emptyset$$

(iv. $\Rightarrow$ i.) Άμεσο, από τον ορισμό του T_3.

□

Παρατήρηση 13.3: Από την **Πρόταση 13.3, iii.** έπεται η ισοδυναμία: ένας χώρος $(X, \mathfrak{T})$ είναι T_3 εάν και μόνο αν κάθε $x \in X$ έχει βάση περιοχών από κλειστά.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 14

Μάθημα 14

■ **Παράδειγμα 14.1:**

- Κάθε τοπολογικός μετρικός χώρος $(X, \mathfrak{T}_\varrho)$ είναι T_3. Πράγματι, από την **Παρατήρηση 13.3**, για κάθε $x \in X$ το σύνολο $\{\widehat{B}(x, \varepsilon) \mid \varepsilon > 0\}$ είναι βάση περιοχών του x από κλειστά.

- Έστω $X = \{a, b, c\}$, $|X| = 3$. Θεωρούμε το σύνολο $\mathfrak{T} = \big\{\emptyset, \{a\}, \{b, c\}, X\big\}$ και παρατηρούμε (με πεπερασμένο έλεγχο) ότι είναι τοπολογία στον X. Μάλιστα τα ανοικτά σύνολα είναι ακριβώς τα κλειστά σύνολα.

  Ο $(X, \mathfrak{T})$ δεν είναι T_1 χώρος, αφού τα b, c δεν διαχωρίζονται. Δεν είναι ούτε T_2 χώρος, αφού ισχύει η **Παρατήρηση 13.1**.

  Είναι όμως T_3 χώρος, κι αυτό μπορούμε να το δείξουμε με πεπερασμένο έλεγχο.

- Υπάρχουν τοπολογίες που δεν είναι T_3, αλλά είναι T_2. Θεωρούμε τον συνήθη τοπολογικό μετρικό χώρο $(\mathbb{R}, \mathfrak{T}_\varrho)$ και το σύνολο $A = \{1/n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Ορίζουμε $\mathcal{C} = \mathfrak{T}_\varrho \cup \{A^c\}$ και $\mathfrak{T}$ τη μοναδική τοπολογία με υποβάση την $\mathcal{C}$. Εφόσον η $\mathcal{C}$ είναι υποβάση της $\mathfrak{T}$, η (αντίστοιχη) βάση $\mathcal{B}$ της $\mathfrak{T}$ είναι το σύνολο των πεπερασμένων τομών στοιχείων της $\mathcal{C}$ (μαζί με το X), οπότε έχει τη μορφή:

  $$\mathcal{B} = \mathfrak{T}_\varrho \cup \{U \cap A^c \mid U \in \mathfrak{T}_\varrho\}$$

  Παίρνοντας ενώσεις στοιχείων της $\mathcal{B}$:

  $$\mathfrak{T} = \{U_1 \cup (U_2 \cap A^c) \mid U_1, U_2 \in \mathfrak{T}_\varrho\}$$

  λαμβάνουμε την ανωτέρω μορφή της τοπολογίας και παρατηρούμε ότι $\mathfrak{T} \supseteq \mathfrak{T}_\varrho$. Θα δείξουμε ότι το $0 \notin A$ δεν διαχωρίζεται από το κλειστό (στην $\mathfrak{T}$) σύνολο A.

  Πράγματι, εάν ο διαχωρισμός ήταν δυνατός, θα υπήρχαν ανοικτά σύνολα $U = U_1 \cup (U_2 \cap A^c), V = V_1 \cup (V_1 \cap A^c) \in \mathfrak{T}$ (εννοείται με $U_1, U_2, V_1, V_2 \in \mathfrak{T}_\varrho$) τέτοια ώστε $x \in U$, $A \subseteq V$ και $U \cap V = \emptyset$. Στεκόμαστε στο ότι $0 \in U$:

  $$0 \in U \Leftrightarrow \big[0 \in U_1 \textbf{ ή } [0 \in U_2 \textbf{ ή } 0 \in A^c]\big] \Leftrightarrow [x \in U_1 \textbf{ ή } x \in U_2]$$

  Εάν $0 \in U_1$, επειδή η ακολουθία $1/n$ συγκλίνει στο 0 (στη χονδροειδέστερη τοπολογία $\mathfrak{T}_\varrho$), θα υπάρχει ένας δείκτης $n_1 \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε για κάθε $n \geqslant n_1$, $1/n_1 \in U_1 \subseteq U$. Επιπλέον όλοι οι όροι $1/n$ ανήκουν στο $A \subseteq V$, οπότε η τομή $U \cap V$ είναι κάθε άλλο παρά κενή. Αυτό είναι άτοπο, το οποίο επιβάλλει $0 \in U_2$.

  Εάν $0 \in U_2$, επειδή η ακολουθία $1/n$ συγκλίνει στο 0 (στη χονδροειδέστερη τοπολογία $\mathfrak{T}_\varrho$), θα υπάρχει ένας δείκτης $n_2 \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε για κάθε $n \geqslant n_2$, $1/n_2 \in U_2$. Γράφοντας το $V = V_1 \cup (V_2 \cap A^c) = V_1 \cup (V_2 \backslash A)$, παρατηρούμε ότι $A \subseteq V \Rightarrow A \subseteq V_1$. Δηλαδή όλα τα $1/n$ βρίσκονται εντός του V_1, και ειδικότερα μετά του n_2 οι $1/n$ βρίσκονται εντός των U_2, V_1, άρα εντός της τομής $U_2 \cap V_1$. Η τομή $U_2 \cap V_1$ είναι ανοικτό σύνολο στην $\mathfrak{T}_\varrho$ και το εσωτερικό $\mathrm{int}_{\mathfrak{T}_\varrho} A$ είναι κενό, οπότε δεν μπορεί να περιέχει κανένα ανοικτό - ειδικότερα $U_2 \cap V_1 \nsubseteq A$.

  Υπάρχει λοιπόν $x \in U_2$, $x \in V_1$, $x \notin A$, δηλαδή:

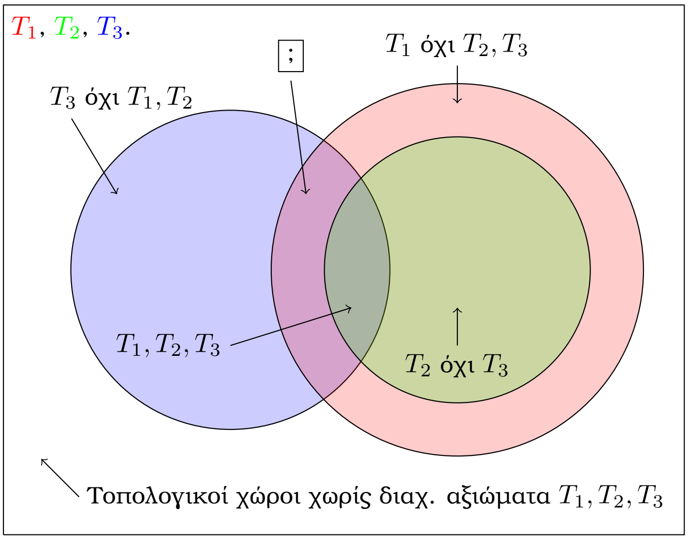
  $$[x \in U_2 \backslash A = U_2 \cap A^c \textbf{ και } x \in V_1] \Rightarrow [x \in U \textbf{ και } x \in V] \Rightarrow x \in U \cap V$$

Αυτό είναι και πάλι άτοπο, αφού $U \cap V = \emptyset$. Καταλήγουμε στο ότι ο χώρος $(\mathbb{R}, \mathfrak{T})$ δεν είναι T_3. Είναι όμως T_2, αφού ο χώρος $(\mathbb{R}, \mathfrak{T}_\varrho)$ είναι T_2 και $\mathfrak{T} \supseteq \mathfrak{T}_\varrho$ (**Παρατήρηση 13.2 (πρώτο •)**).

■

Παρατήρηση 14.1: Μέχρι τώρα έχουμε δει τα εξής:

- Υπάρχουν τοπολογίες χωρίς διαχωριστικά αξιώματα T_1, T_2, T_3 (για παράδειγμα, οι τετριμμένες τοπολογίες).
- Υπάρχουν τοπολογίες που είναι T_1 αλλά όχι T_2, ούτε T_3. Στο **Παράδειγμα 13.1 (δεύτερο •)** είδαμε ότι ο τοπολογικός χώρος $(X, \mathfrak{T})$ - όπου το X είναι άπειρο και $\mathfrak{T}$ η συμπεπερασμένη τοπολογία - είναι T_1 αλλά όχι T_2 χώρος. Μάλιστα δεν είναι ούτε T_3 χώρος, αφού κάθε δύο ανοικτά σύνολα κατ' ανάγκη τέμνονται (το επιχείρημα το είδαμε και πάλι στο **Παράδειγμα 13.1 (δεύτερο •)**).
- Υπάρχουν T_3 χώροι που δεν είναι T_1, ούτε T_2 (**Παράδειγμα 14.1 (δεύτερο •)**).
- Υπάρχουν T_2 χώροι που δεν είναι T_3 (**Παράδειγμα 14.1 (τρίτο •)**).
- Υπάρχουν χώροι που είναι T_1, T_2 και T_3 (για παράδειγμα, οι μετρικοποιήσιμοι τοπολογικοί χώροι).



Δεν έχουμε εξετάσει τις τοπολογίες που είναι συγχρόνως T_1 και T_3. Υπάρχουν άραγε τοπολογίες που είναι T_1 και T_3 αλλά όχι T_2; Η απάντηση είναι αρνητική. Εάν ένας τοπολογικός χώρος είναι T_1, τα μονοσύνολά του είναι κλειστά. Εάν είναι και T_3, κάθε $x \neq y$ διαχωρίζεται από το $\{y\}$, δηλαδή από το y - οπότε ο χώρος είναι και T_2.

Θεώρημα 14.1: Έστω $(X, \mathfrak{T}_X), (Y, \mathfrak{T}_Y)$ δύο τοπολογικοί χώροι με τον δεύτερο να είναι T_3, κι επίσης μια συνάρτηση $f : (X, \mathfrak{T}_X) \to (Y, \mathfrak{T}_Y)$. Εάν D είναι ένα πυκνό σύνολο στον X και για κάθε $x \in X$ η $f|_{D \cup \{x\}}$ είναι συνεχής, τότε και η f (χωρίς περιορισμούς) είναι συνεχής.

Απόδειξη: Για να αποδείξουμε τη συνέχεια, θα χρησιμοποιήσουμε την αρχή της μεταφοράς με δίκτυα.

Βήμα Ι: Έστω προς άτοπο ότι για κάποιο συγκλίνον δίκτυο $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ προς το x έχουμε $f(x_\lambda) \not\to f(x)$. Από την άρνηση του ορισμού της σύγκλισης, υπάρχει κάποιο $V_0 \in \mathcal{N}_{f(x)}$ τέτοιο ώστε για κάθε $\mu \in \Lambda$ να υπάρχει $\mu' \geq \mu$ με $f(x_{\mu'}) \notin V_0$. Αυτό το V_0 θα το θεωρήσουμε κλειστό, αφού ο χώρος είναι T_3 και (σύμφωνα με την **Παρατήρηση 13.3**) υπάρχει βάση περιοχών από κλειστά σύνολα.

Βήμα ΙΙ: Εφόσον η $f|_{D \cup \{x\}}$ είναι συνεχής, για κάθε $V \in \mathcal{N}_{f(x)}$ υπάρχει $U \in \mathcal{N}_x$ τέτοιο ώστε $f\big(U \cap (D \cup \{x\})\big) \subseteq V$ (δείτε την **Παρατήρηση 10.1** σε συνδυασμό με τον ορισμό της συνέχειας). Ειδικότερα, για το V_0 υπάρχει U_0 μ' αυτήν την ιδιότητα, το οποίο χωρίς βλάβη της γενικότητας θα υποθέσουμε ανοικτό (γιατί γενικά τα επιχειρήματα θα μπορούσαν να διατυπωθούν για το U_0°). Επειδή $U_0 \in \mathcal{N}_x$, $f(U_0 \cap D) \subseteq V_0$ το οποίο δεν εξαρτάται από το εκάστοτε x.

Βήμα ΙΙΙ: Επειδή τώρα $x_\lambda \to x$, για την περιοχή $U_0 \in \mathcal{N}_x$ υπάρχει $\lambda_0 \in \Lambda$ τέτοιο ώστε για κάθε $\lambda \geq \lambda_0$ να ισχύει $x_\lambda \in U_0$.

Βήμα IV: Για $\mu = \lambda_0$ υπάρχει $\lambda_1 \geq \lambda_0$ ώστε να αληθεύει $f(x_{\lambda_1}) \notin V_0$ - δηλαδή $f(x_{\lambda_1}) \in V_0^c$ και το V_0^c είναι ανοικτή περιοχή του $f(x_{\lambda_1})$ (αυτό από το **Βήμα I**). Επιπλέον, $x_{\lambda_1} \in U_0$.

Βήμα V: Η $f|_{D\cup\{x_{\lambda_1}\}}$ είναι συνεχής στο x_{λ_1}, οπότε για την (ανοικτή) περιοχή V_0^c του $f(x_{\lambda_1})$ υπάρχει $U_1 \in \mathcal{N}_{x_{\lambda_1}}$ τέτοιο ώστε $f\big(U_1 \cap (D \cup \{x_{\lambda_1}\})\big) \subseteq V_0^c$, δηλαδή $f(U_1 \cap D) \subseteq V_0^c$. Το U_1 και πάλι μπορεί να υποτεθεί ανοικτό.

Παρατηρήστε τώρα ότι $x_{\lambda_1} \in U_0$ (αφού $\lambda_1 \geq \lambda_0$) και $x_{\lambda_1} \in U_1$ (αφού $U_1 \in \mathcal{N}_{x_{\lambda_1}}$), επομένως $U_0 \cap U_1 \neq \emptyset$. Τώρα το $U_0 \cap U_1$ είναι ανοικτό σύνολο, οπότε από την **Πρόταση 5.1, i.**, $(U_0 \cap U_1) \cap D \neq \emptyset$. Αυτό είναι άτοπο, αφού $f(U_0 \cap D) \subseteq V_0$, $f(U_1 \cap D) \subseteq V_0^c$ και:

$$\emptyset \neq f(U_0 \cap U_1 \cap D) \subseteq f(U_0 \cap D) \cap f(U_1 \cap D) \subseteq V_0 \cap V_0^c = \emptyset$$

□

Πρόταση 14.1: Τα ακόλουθα αληθεύουν:

i. Έστω $(X, \mathfrak{T}_X), (Y, \mathfrak{T}_Y)$ δύο τοπολογικοί χώροι με τον πρώτο να είναι T_3. Εάν υπάρχει ομοιομορφισμός $f : (X, \mathfrak{T}_X) \to (Y, \mathfrak{T}_Y)$, τότε και ο $(Y, \mathfrak{T}_Y)$ είναι T_3.

ii. Έστω $(X, \mathfrak{T})$ ένας τοπολογικός χώρος, $A \subseteq X$ και $(A, \mathfrak{T}_A)$ ο χώρος με τη σχετική τοπολογία του A. Εάν ο $(X, \mathfrak{T})$ είναι T_3, τότε και ο $(A, \mathfrak{T}_A)$ είναι T_3.

iii. Έστω $\big((X_i, \mathfrak{T}_i)\big)_{i\in I}$ μια οικογένεια T_3 χώρων. Ο χώρος γινόμενο $(X = \prod_{i\in I} X_i, \mathfrak{T}_\gamma)$ με την τοπολογία γινόμενο είναι T_3 χώρος.

Απόδειξη: Για το i.: Έχουμε δει στις **Προτάσεις 12.5, i., 13.2, i.** ότι οι συνεχείς αντίστροφες εικόνες μεταβιβάζουν τις ιδιότητες των T_1, T_2. Για το T_3 δεν ισχύει το ίδιο, και γι' αυτό χρειάζεται μια συνάρτηση που να μεταφέρει ολόκληρη τη δομή του τοπολογικού χώρου, άρα ένας ομοιομορφισμός.

Για το ii. θεωρούμε F ένα κλειστό σύνολο στην $\mathfrak{T}_A$ και ένα $x \notin F$. Εφόσον το F είναι κλειστό στην $\mathfrak{T}_A$, θα υπάρχει κλειστό σύνολο K στην $\mathfrak{T}$ τέτοιο ώστε $F = A \cap K$. Επειδή $x \notin F$, τότε $x \notin K$. Από την ιδιότητα T_3 του χώρου $(X, \mathfrak{T})$, υπάρχουν ανοικτά και ξένα $U, V \in \mathfrak{T}$ τέτοια ώστε $x \in U$ και $K \subseteq V$. Τώρα παρατηρούμε ότι $x \in U \cap A$ (αφού επιπλέον $x \in A$), $F = K \cap A \subseteq V \cap A$ και $(U \cap A) \cap (V \cap A) = \emptyset$ (αφού τα U, V είναι ξένα) με τα $U \cap A, V \cap A$ να είναι ανοικτά στην $\mathfrak{T}_A$. Αυτό αποδεικνύει το T_3 του $(A, \mathfrak{T}_A)$.

Για το iii.: Χρησιμοποιώντας την **Πρόταση 13.3, iii.**, αρκεί να δειχθεί ότι για κάθε $x = (x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} X_i$ και για κάθε $U \in \mathcal{N}_x$ υπάρχει $V \in \mathcal{N}_x$ ούτως ώστε $\overline{V} \subseteq U$.

Σταθεροποιούμε λοιπόν ένα τέτοιο x, και για κάθε $U \in \mathcal{N}_x$ έχουμε $x \in U^\circ$ (το οποίο είναι ανοικτό σύνολο). Υπάρχει επομένως κανονικό βασικό σύνολο B τέτοιο ώστε $x \in B \subseteq U^\circ$. Γενικά το B έχει τη μορφή (όπως εξάλλου έχουμε δει αρκετές φορές):

$$B = \bigcap_{k=1}^{n} p_{i_k}^{-1}(G_{i_k}) = \prod_{i\in I} B_i$$

όπου η οικογένεια $\{i_k\}_{k=1}^n$ είναι πεπερασμένη, τα $G_{i_k} \in \mathfrak{T}_{i_k}$ είναι ανοικτά και:

$$B_i = \begin{cases} X_i, \ i \neq i_k \\ B_i, i = i_k \end{cases}$$

(εάν θέλετε να διασαφηνίσετε τη μορφή των κανονικών βασικών συνόλων, ανατρέξτε στην απόδειξη της **Παρατήρησης 11.1**). Παρατηρούμε τώρα ότι $x_{i_k} \in G_{i_k} \in \mathcal{N}_{x_{i_k}}^{\mathfrak{T}_{i_k}}$ με τους χώρους $(X_i, \mathfrak{T}_i)$ να είναι T_3. Χρησιμοποιώντας την **Πρόταση 13.3, iii.**, υπάρχει $V_{i_k} \in \mathcal{N}_{x_{i_k}}^{\mathfrak{T}_{i_k}}$ με $\overline{V_{i_k}} \subseteq G_{i_k}$. Ορίζουμε το σύνολο:

$$V = \bigcap_{k=1}^{n} p_{i_k}^{-1}(V_{i_k}) = \prod_{i\in I} A_i, \text{ όπου } A_i = \begin{cases} X_i, \ i \neq i_k \\ V_i, \ i = i_k \end{cases}$$

το οποίο είναι υποσύνολο του B.

$$V = \bigcap_{k=1}^{n} p_{i_k}^{-1}(V_{i_k}) \overset{\star}{\subseteq} \bigcap_{k=1}^{n} p_{i_k}^{-1}(G_{i_k}) = B$$

(ο εγκλεισμός στο άστρο ($\star$) αληθεύει από τον ορισμό των V_{i_k}). Παίρνοντας θήκη, παρατηρούμε ότι:

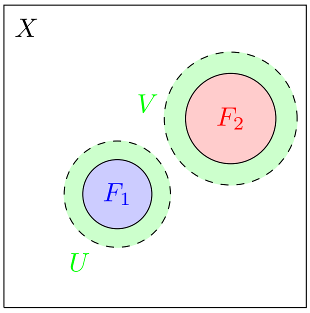
$$\overline{V} = \overline{\prod_{i\in I} A_i} \overset{\star}{=} \prod_{i\in I} \overline{A_i} = \bigcap_{k=1}^{n} p_{i_k}^{-1}(\overline{V_{i_k}}) \overset{\star\star}{\subseteq} \bigcap_{k=1}^{n} p_{i_k}^{-1}(G_{i_k}) = B$$

όπου η ισότητα άστρο ($\star$) δικαιολογείται από την **Παρατήρηση 11.1** και ο εγκλεισμός διπλό άστρο ($\star\star$) από τον ορισμό των V_{i_k}. Αυτό δίνει το ζητούμενο, αφού $B \subseteq U^\circ \subseteq U$ και $x \in V$.

$\square$

Μπορούμε εν συνεχεία να προσωρίσουμε σε ακόμη ένα διαχωριστικό αξίωμα, το λεγόμενο T_4. Στους T_3 τοπολογικούς χώρους ήταν δυνατός ο «διαχωρισμός» σημείου από κλειστό σύνολο. Στους T_4 χώρους θα διαχωρίζουμε κλειστά σύνολα μεταξύ τους.

Ορισμός 14.1: **(T_4 τοπολογικοί χώροι).** Ένας τοπολογικός χώρος $(X, \mathfrak{T})$ θα λέγεται T_4 εάν για κάθε δύο κλειστά σύνολα $F_1, F_2 \subseteq X$ με $F_1 \cap F_2 = \emptyset$ υπάρχουν ανοικτά σύνολα $U, V \in \mathfrak{T}$ τέτοια ώστε $F_1 \subseteq U$, $F_2 \subseteq V$ και $U \cap V = \emptyset$. Οι T_4 τοπολογικοί χώροι λέγονται αλλιώς φυσιολογικοί.



Παρατήρηση 14.2: Εάν ένας χώρος είναι T_1 και T_4, τότε είναι και T_3. Πράγματι, εάν τα κλειστά σύνολα διαχωρίζονται και τα μονοσύνολα είναι κλειστά, τότε για κάθε κλειστό F και για κάθε $x \notin F$, το $\{x\}$ διαχωρίζεται από το F - επομένως το x διαχωρίζεται από το F.

Πρόταση 14.2: Οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες:

i. Ο τοπολογικός χώρος $(X, \mathfrak{T})$ είναι T_4.

ii. Για κάθε δύο κλειστά, ξένα σύνολα $F_1, F_2 \subseteq X$ υπάρχει ανοικτό σύνολο $U \in \mathfrak{T}$ με $F_1 \subseteq U$ και $\overline{U} \cap F_2 = \emptyset$.

iii. Για κάθε κλειστό $F \subseteq X$ και για κάθε $U \in \mathfrak{T}$ με $F \subseteq U$ υπάρχει $V \in \mathfrak{T}$ τέτοιο ώστε $F \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U$.

iv. Για κάθε δύο κλειστά, ξένα $F_1, F_2 \subseteq X$, υπάρχουν $U, V \in \mathfrak{T}$ με $F_1 \subseteq U$, $F_2 \subseteq V$ και $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$.

Απόδειξη: Ανάλογη της απόδειξης της **Πρότασης 13.3**.

$\square$

Πρόταση 14.3: Έστω $(X, \mathfrak{T})$ ένας τοπολογικός χώρος με την εξής ιδιότητα: Για κάθε κλειστό σύνολο $F \subseteq X$ υπάρχει συνεχής $f : X \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $F = f^{-1}(\{0\})$ (εννοείται ότι ο χώρος $\mathbb{R}$ θεωρείται με τη συνήθη μετρική τοπολογία). Ο χώρος $(X, \mathfrak{T})$ είναι T_4.

Απόδειξη: Έστω $F_1, F_2 \subseteq X$ κλειστά και ξένα σύνολα. Λόγω της προαναφερθείσας ιδιότητας του τοπολογικού χώρου, υπάρχουν συναρτήσεις $f_1, f_2 : X \to \mathbb{R}$ τέτοιες ώστε:

$$F_1 = f_1^{-1}(\{0\}) \textbf{ και } F_2 = f_2^{-1}(\{0\})$$

Ορίζουμε $\varphi : X \to \mathbb{R}$ μέσω του τύπου:

$$\varphi(x) = \frac{|f_1(x)|}{|f_1(x)| + |f_2(x)|}$$

και παρατηρούμε ότι είναι καλά ορισμένη, αφού $f_1(x) = f_2(x) = 0 \Leftrightarrow x \in F_1 \cap F_2 = \emptyset$. Επίσης είναι συνεχής ως σύνθεση συνεχών και $\varphi(X) \subseteq [0, 1]$, με $\varphi(F_1) = \{0\}$, $\varphi(F_2) = \{1\}$. Λόγω συνέχειας, αντιστρέφει ανοικτά σύνολα σε ανοικτά σύνολα, και κατ' επέκταση τα σύνολα:

$$U = \varphi^{-1}\big((-\infty, 1/2)\big),\ V = \varphi^{-1}\big((1/2, \infty)\big)$$

είναι ανοικτά. Αυτό δείχνει το T_4 του χώρου, αφού $F_1 \subseteq U$, $F_2 \subseteq V$ και $U \cap V = \emptyset$.

$\square$

Παρατήρηση 14.3: Από την **Πρόταση 14.3** προκύπτει ότι κάθε μετρικός χώρος είναι T_4. Μάλιστα, για κάθε κλειστό F η αντίστοιχη συνάρτηση f είναι η συνάρτηση απόστασης $f(\cdot) = \mathrm{dist}(\cdot, F)$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 15

Μάθημα 15

15.1 Ασκήσεις

Άσκηση 15.1: Έστω $(X,\mathfrak{T}_1)$, $(X,\mathfrak{T}_2)$ δύο τοπολογικοί χώροι με την δεύτερη τοπολογία να είναι λεπτότερη ($\mathfrak{T}_1 \subseteq \mathfrak{T}_2$). Στα παρακάτω θα συμβολίζουμε με $\partial_{\mathfrak{T}}$ το σύνορο στην τοπολογία $\mathfrak{T}$.

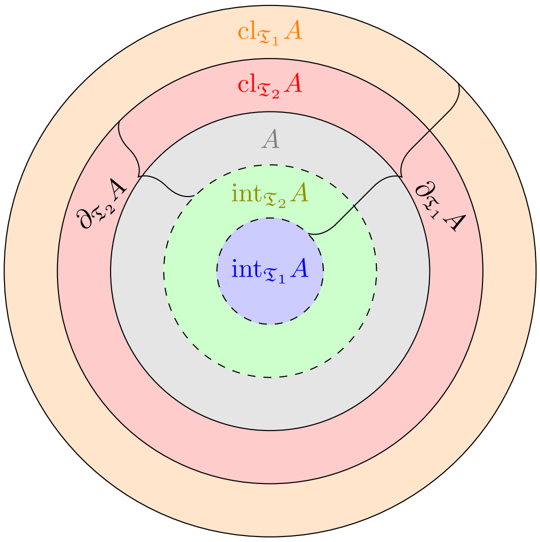
Για $A \subseteq X$, να συγκρίνετε τα σύνολα:

i. $\operatorname{int}_{\mathfrak{T}_1} A$, $\operatorname{int}_{\mathfrak{T}_2} A$.

ii. $\operatorname{cl}_{\mathfrak{T}_1} A$, $\operatorname{cl}_{\mathfrak{T}_2} A$.

iii. $\partial_{\mathfrak{T}_1} A$, $\partial_{\mathfrak{T}_2} A$.

Απάντηση:



Για το i.: Ορίζουμε τα δύο σύνολα:

$$(\mathcal{E}_A)_1 = \{G \in \mathfrak{T}_1 \mid G \subseteq A\} \text{ **και** } (\mathcal{E}_A)_2 = \{G \in \mathfrak{T}_2 \mid G \subseteq A\}$$

για τα οποία ισχύει $(\mathcal{E}_A)_1 \subseteq (\mathcal{E})_2$. Από τον **Ορισμό 3.2, I.** έχουμε:

$$\operatorname{int}_{\mathfrak{T}_1} A = \bigcup (\mathcal{E}_A)_1 \text{ **και** } \operatorname{int}_{\mathfrak{T}_2} A = \bigcup (\mathcal{E}_A)_2$$

οπότε $\operatorname{int}_{\mathfrak{T}_1} A \subseteq \operatorname{int}_{\mathfrak{T}_2} A$.

Για το ii.: Ορίζουμε τα σύνολα:

$$(\mathcal{F}_A)_1 = \{F \subseteq X \mid F \text{ κλειστό στην } \mathfrak{T}_1,\ F \subseteq A\} \text{ **και** } (\mathcal{F}_A)_2 = \{F \subseteq X \mid F \text{ κλειστό στην } \mathfrak{T}_2,\ F \subseteq A\}$$

για τα οποία ισχύει $(\mathcal{F}_A)_1 \subseteq (\mathcal{F})_2$ (αν υπάρχουν περισσότερα ανοικτά, θα υπάρχουν και περισσότερα συμπληρώματα ανοικτών κι άρα περισσότερα κλειστά). Από τον **Ορισμό 3.2, II.** έχουμε:

$$\mathrm{cl}_{\mathfrak{T}_1} A = \bigcap (\mathcal{F}_A)_1 \ \textbf{και}\ \mathrm{cl}_{\mathfrak{T}_2} A = \bigcap (\mathcal{F}_A)_2$$

οπότε $\mathrm{cl}_{\mathfrak{T}_1} A \supseteq \mathrm{cl}_{\mathfrak{T}_2} A$.

Για το **iii.**, εφαρμόζοντας τη σχέση $\partial_{\mathfrak{T}_1} A = (\mathrm{cl}_{\mathfrak{T}_1} A)\backslash(\mathrm{int}_{\mathfrak{T}_1} A)$, $\partial_{\mathfrak{T}_2} A = (\mathrm{cl}_{\mathfrak{T}_2} A)\backslash(\mathrm{int}_{\mathfrak{T}_2} A)$ παίρνουμε $\partial_{\mathfrak{T}_1} A \supseteq \partial_{\mathfrak{T}_2} A$.

△

Άσκηση 15.2: Θεωρούμε ένα μη κανό διάστημα $I = [a, b] \subseteq R$ και μια φραγμένη συνάρτηση $f : I \to \mathbb{R}$. Θεωρούμε επίσης το σύνολο:

$$\mathfrak{P} = \{P \mid P \text{ διαμέριση του } I\}$$

καθώς και τη σχέση $P \leq Q :\Leftrightarrow P \subseteq Q$. Δείξτε ότι το σύνολο $(\mathfrak{P}, \leq)$ είναι κατευθυνόμενο. Επιπλέον, για κάθε διαμέριση $P = \{a = p_1, p_2, \cdots, p_{|P|} = b\}$ ορίζουμε τους δύο αριθμούς:

$$L(f, P) = \sum_{i=1}^{|P|-1} (p_{i+1} - p_i) \cdot \inf_{\xi_i \in [p_i, p_{i+1}]} f(\xi_i)$$

και:

$$U(f, P) = \sum_{i=1}^{|P|-1} (p_{i+1} - p_i) \cdot \sup_{\xi_i \in [p_i, p_{i+1}]} f(\xi_i)$$

Δείξτε ότι τα $\big(L(f, P)\big)_{P \in \mathfrak{P}}$ και $\big(U(f, P)\big)_{P \in \mathfrak{P}}$ είναι δίκτυα, κι επίσης ότι η σύγκλιση:

$$L(f, P), U(f, P) \to I(f)$$

(εάν τα $L(f, P), U(f, P)$ συγκλίνουν στον ίδιο αριθμό $I(f)$) ταυτίζεται με τη σύγκλιση του ολοκληρώματος.

Απάντηση: Σχετικά άμεση.

△

Άσκηση 15.3: Έστω $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ δίκτυο στον τοπολογικό χώρο $(X, \mathfrak{T})$ και $(x_{\varphi(\mu)})_{\mu \in M}$ ένα υποδίκτυο. Εάν το $x \in X$ είναι οριακό σημείο του υποδικτύου, δείξτε ότι είναι επίσης οριακό σημείο του $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$.

Απάντηση πρώτη: Από τον ορισμό των οριακών σημείων, για κάθε περιοχή $V \in \mathcal{N}_x$ και για κάθε $\mu_0 \in M$ υπάρχει $\mu \geq \mu_0$ ούτως ώστε $x_{\varphi(\mu)} \in V$.

Θα δείξουμε ότι το x είναι οριακό σημείο για το δίκτυο $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$, δηλαδή ότι για κάθε $V \in \mathcal{N}_x$ και για κάθε $\lambda_0 \in \Lambda$ υπάρχει $\lambda \geq \lambda_0$ τέτοιο ώστε $x_\lambda \in V$. Πράγματι, επειδή το $\varphi(M)$ είναι ομοτελικό στο Λ, υπάρχει μ_0 ούτως ώστε $\varphi(\mu_0) \geq \lambda_0$, και τότε επειδή το x είναι οριακό σημείο, υπάρχει $\mu \geq \mu_0 \Rightarrow \varphi(\mu) \geq \lambda_0$ (εδώ χρησιμοποιείται και η μονοτονία της φ) με $x_{\varphi(\mu)} \in V$. Ο δείκτης $\varphi(\mu)$ είναι το ζητούμενο λ.

Απάντηση δεύτερη: Αξιοποιώντας το **Θεώρημα 9.1**, επειδή το x είναι οριακό σημείο του $(x_{\varphi(\mu)})_{\mu \in M}$, υπάρχει υποδίκτυο $(x_{\varphi \circ \psi(\kappa)})_{\kappa \in K}$ το οποίο συγκλίνει στο x.

$$x_{\varphi \circ \psi(\cdot)} : K \xrightarrow{\psi} M \xrightarrow{\varphi} \Lambda \xrightarrow{x} X$$

Είναι τετριμμένο κανείς να δείξει ότι το $(x_{\varphi \circ \psi(\kappa)})_{\kappa \in K}$ είναι υποδίκτυο και του $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$, οπότε ξανά από το **Θεώρημα 9.1** το x είναι οριακό σημείο του $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$.

△

Άσκηση 15.4: Έστω $(X, \mathfrak{T}_1), (X, \mathfrak{T}_2)$ δύο τοπολογικοί χώροι. Δείξτε την ισοδυναμία:

$$\mathfrak{T}_1 \subseteq \mathfrak{T}_2 \Leftrightarrow \text{ Για κάθε δίκτυο } (x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}, \text{ εάν } x_\lambda \to x \text{ στον } (X, \mathfrak{T}_2), \text{ τότε } x_\lambda \to x \text{ στον } (X, \mathfrak{T}_1)$$

Απάντηση πρώτη: ($\Rightarrow$) Εάν $x_\lambda \to x$ στον $(X, \mathfrak{T}_2)$, τότε για κάθε $U \in \mathcal{N}_x^{\mathfrak{T}_1} \Rightarrow \mathrm{int}_{\mathfrak{T}_1} U \in \mathcal{N}_x^{\mathfrak{T}_1}$ έχουμε $\mathrm{int}_{\mathfrak{T}_1} \in \mathfrak{T}_2$, αφού $\mathfrak{T}_1 \subseteq \mathfrak{T}_2$. Οπότε $\mathrm{int}_{\mathfrak{T}_1} \subseteq U \in \mathcal{N}_x^{\mathfrak{T}_2}$ και (κατ' επέκταση) υπάρχει $\lambda_0 \in \Lambda$ τέτοιο ώστε για κάθε $\lambda \geq \lambda_0$ να ισχύει $x_\lambda \in U$. Δηλαδή:

$$\forall U \in \mathcal{N}_x^{\mathfrak{T}_1},\ \exists \lambda_0 \in \Lambda \text{ τέτοιο ώστε } \forall \lambda \geq \lambda_0 :\ x_\lambda \in U$$

οπότε $x_\lambda \to x$ στον $(X, \mathfrak{T}_1)$.

($\Leftarrow$) Αρκεί να δειχθεί ότι κάθε ανοικτό σύνολο G στην $\mathfrak{T}_1$ είναι ανοικτό και στην $\mathfrak{T}_2$, και γι' αυτό αρκεί κάθε κλειστό σύνολο F στην $\mathfrak{T}_1$ να είναι κλειστό και στην $\mathfrak{T}_2$. Έστω λοιπόν F ένα κλειστό σύνολο στην $\mathfrak{T}_1$. Για κάθε δίκτυο $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ στον F με $x_\lambda \to x$ στον $(X, \mathfrak{T}_2)$, από την υπόθεση έχουμε $x_\lambda \to x$ και στον $(X, \mathfrak{T}_1)$. Οπότε $x \in F$, αφού το F είναι κλειστό στην $\mathfrak{T}_1$ (**Πρόταση 8.2, i.**).

Απάντηση δεύτερη: Αρκεί να αποδείξουμε την ισοδυναμία:

$$\mathfrak{T}_1 \subseteq \mathfrak{T}_2 \Leftrightarrow \mathrm{id}_X : (X\mathfrak{T}_2) \to (X, \mathfrak{T}_1) \text{ είναι συνεχής}$$

Πράγματι, δεδομένης της ιδοδυναμίας, από την αρχή της μεταφοράς με δίκτυα (**Θεώρημα 8.1**):

$$\mathrm{id}_X : (X\mathfrak{T}_2) \to (X, \mathfrak{T}_1) \text{ είναι συνεχής } \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \text{ Για κάθε δίκτυο } (x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}, \text{ εάν } x_\lambda \to x \text{ στον } (X, \mathfrak{T}_2), \text{ τότε } x_\lambda \to x \text{ στον } (X, \mathfrak{T}_1)$$

οπότε η ισοδυναμία της άσκησης αληθεύει. Θα αποδείξουμε λοιπόν τη «συνδετική» ισοδυναμία. Η κατεύθυνση ($\Leftarrow$) είναι προφανής, αφού οι συνεχείς απεικονίσεις αντιστρέφουν ανοικτά σε ανοικτά. Για την ισοδυναμία ($\Rightarrow$) δεδομένου του ότι $\mathfrak{T}_1 \subseteq \mathfrak{T}_2$, ελέγχουμε αν η id_X αντιστρέφει ανοικτά σε ανοικτά.

$\triangle$

Άσκηση 15.5: Έστω ένας τοπολογικός χώρος $(X, \mathfrak{T})$ με το X να είναι άπειρο και η τοπολογία $\mathfrak{T}$ συμπεπερασμένη. Θεωρούμε μια συνεχή συνάρτηση $f : (X, \mathfrak{T}) \to (\mathbb{R}, \mathfrak{T}_\varrho)$ (ο δεύτερος τοπολογικός χώρος είναι με τη συνήθη μετρική τοπολογία) και ζητείται να δειχθεί ότι η f είναι σταθερή.

Απάντηση: Ας υποθέσουμε προς άτοπο ότι η f δεν είναι σταθερή, οπότε υπάρχουν $y, z \in f(X)$ με $y \neq z$. Υποθέτουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $y < z$ και επιλέγουμε $y < r < z$. Τότε τα σύνολα:

$$f^{-1}\big((-\infty, r)\big),\ f^{-1}\big((r, \infty)\big)$$

είναι ανοικτά, μη κενά και ξένα στον X. Αυτό είναι άτοπο, αφού από την απόδειξη της **Παρατήρησης 1.5, i.** σε άπειρους χώρους με τη συμπεπερασμένη τοπολογία δεν υπάρχουν ξένα, μη κενά, ανοικτά σύνολα.

$\triangle$

Άσκηση 15.6: Έστω τρεις τοπολογικοί χώροι $(X, \mathfrak{T}_X), (Y, \mathfrak{T}_Y), (Z, \mathfrak{T}_Z)$ και δύο συναρτήσεις $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$. Δείξτε ότι:

i. Αν οι f, g είναι ανοικτές, τότε και η $g \circ f$ είναι ανοικτή.

ii. Αν η $g \circ f$ είναι ανοικτή και η g συνεχής και $1-1$, τότε η f είναι ανοικτή.

iii. Αν η $g \circ f$ είναι ανοικτή και η f συνεχής και επί, τότε η g είναι ανοικτή.

Απάντηση: Το i. είναι εφαρμογή του ορισμού της ανοικτής συνάρτησης.

Για το ii., για κάθε $A \subseteq X$ ανοικτό το σύνολο, το $g \circ f(A)$ είναι ανοικτό. Επειδή η g είναι συνεχής, το σύνολο $g^{-1} \circ g \circ f(A)$ είναι ανοικτό. Επειδή είναι $1-1$, το εν λόγω σύνολο ταυτίζεται με το $f(A)$.

Για το iii., για κάθε $B \subseteq Y$ ανοικτό σύνολο, επειδή η f είναι συνεχής, το $f^{-1}(B)$ είναι ανοικτό. Επειδή η $g\circ f$ είναι ανοικτή, το σύνολο $g\circ f\circ f^{-1}(B)$ είναι ανοικτό, κι επειδή η f είναι επί, $g\circ f\circ f^{-1}(B) = g(B)$.

(Ίσως χρειαστεί να ανατρέξετε στις χρήσιμες συνολοθεωρητικές παρατηρήσεις της απόδειξης της **Πρότασης 7.1**).

$\triangle$

Άσκηση 15.7: Θεωρούμε τον χώρο $(\mathbb{R}, \mathfrak{T}_\varrho)$ με τη συνήθη μετρική τοπολογία. Να βρείτε τη σχετική τοπολογία των:

$$\mathbb{Z}, \qquad A = \left\{\frac{1}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}\right\}, \qquad B = A \cup \{0\}$$

Απάντηση: Για το $\mathbb{Z}$.: Τα μονοσύνολα $\{z\} \subseteq \mathbb{Z}$ είναι σχετικώς ανοικτά, αφού $\{z\} \cap (z-1/2, z+1/2) = \{z\}$, με το $(z-1/2, z+1/2)$ να είναι ανοικτό στο $\mathbb{R}$. Οπότε $\mathfrak{T}_\mathbb{Z} = (\mathfrak{T}_\delta)_\mathbb{Z}$ (δηλαδή είναι διακριτή τοπολογία).

Για το A, παρατηρούμε ότι επιχειρήματα ανάλογα του προηγούμενου μπορούν να εφαρμοστούν κι εδώ. Οπότε $\mathfrak{T}_A = (\mathfrak{T}_\delta)_A$.

Για το B: Για κάθε στοιχείο $1/n$ (όπως και στο ii.) το σύνολο $\mathcal{B}_{1/n} = \big\{\{1/n\}\big\}$ είναι βάση περιοχών του $1/n$. Αντίστοιχα για το 0, το σύνολο:

$$\mathcal{B}_0 = \{B \cap (-\varepsilon, \varepsilon) \mid \varepsilon > 0\} = \big\{\{0\} \cup \{1/n\}_{n \geq n_\varepsilon} \;\big|\; n_\varepsilon \in \mathbb{N}\big\}$$

είναι βάση περιοχών του 0. Γνωρίζοντας τις βάσεις περιοχών, η τοπολογία προέρχεται από το **Θεώρημα 2.1**.

$\triangle$

Άσκηση 15.8:

i. Έστω $(X, \mathfrak{T})$ ένας τοπολογικός χώρος και το σύνολο $\Delta_X = \{(x,x) \mid x \in X\} \subseteq X \times X$ (το οποίο ονομάζεται και διαγώνιος του $X \times X$). Αληθεύει η ισοδυναμία:

$$\Delta_X \text{ κλειστό } \Leftrightarrow \text{ Για κάθε δίκτυο } (x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \text{ του } X \text{ με } x_\lambda \to a, b \text{ έπεται } a = b$$

και μάλιστα, από το **Θεώρημα 13.1**:

$$\Delta_X \text{ κλειστό } \Leftrightarrow \text{ Ο χώρος } (X, \mathfrak{T}) \text{ είναι } T_2$$

ii. Εάν $(X, \mathfrak{T})$ είναι ένας τοπολογικός χώρος με άπειρο X και συμπεπερασμένη τοπολογία, τότε το Δ_X είναι πυκνό στο $X \times X$ (εννοείται με την τοπολογία γινόμενο $\mathfrak{T}_\gamma$).

Απάντηση: Για το i.: Το Δ_X είναι κλειστό στο $X \times X$ εάν και μόνο αν για κάθε δίκτυο $(x_\lambda, x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ του Δ_X με $(x_\lambda, x_\lambda) \to (a,b)$ έχουμε $(a,b) \in \Delta_X$. Δηλαδή εάν και μόνο αν $a = b$.

Για το ii.: Το σύνολο Δ_X θα είναι πυκνό εάν και μόνο αν για κάθε ανοικτό σύνολο $G \in \mathfrak{T}_\gamma \backslash \{\emptyset\}$ έχουμε $G \cap \Delta_X \neq \emptyset$. Ισοδύναμα, το G μπορεί να αντικατασταθεί από κάποιο κανονικό βασικό σύνολο $B \neq \emptyset$.

Γράφουμε $B = U \times V$ (όπου φυσικά $U, V \in \mathfrak{T}$) και επειδή η τοπολογία είναι συμπεπερασμένη, μπορούμε να γράψουμε:

$$U^c = \{u_1, \cdots, u_n\} \text{ και } V^c = \{v_1, \cdots, v_m\}$$

Επειδή τώρα το X είναι άπειρο, η ένωση $U^c \cup V^c$ δεν τον εξαντλεί (δηλαδή $X \neq U^c \cup V^c$) οπότε υπάρχει κάποιο $z \notin U^c \cup V^c \Rightarrow z \in U \cap V$. Αυτό δείχνει ότι $(z,z) \in (U \times V) \cap \Delta_X$ και κατ' επέκταση $B \cap \Delta_X \neq \emptyset$.

$\triangle$

Άσκηση 15.9: Έστω δύο τοπολογικοί χώροι $(X, \mathfrak{T}_X), (Y, \mathfrak{T}_Y)$ και μια συνεχής απεικόνιση $f : X \to Y$. Δείξτε ότι $\mathrm{Gr}(f) \sim X$ (ο χώρος $X \times Y$ εφοδιάζεται με την τοπολογία γινόμενο).

Απάντηση: Θέτουμε:

$$\varphi : (X, \mathfrak{T}_X) \rightarrowtail\!\!\!\!\rightarrow \big(\mathrm{Gr}(f), (\mathfrak{T}_\gamma)_{\mathrm{Gr}(f)}\big)$$

με $\varphi(x) = \big(x, f(x)\big)$ και την τοπολογία $(\mathfrak{T}_\gamma)_{\mathrm{Gr}(f)}$ να είναι η σχετική τοπολογία του $\mathrm{Gr}(f)$ που προέρχεται από την καρτεσιανή $\mathfrak{T}_\gamma$. Η φ είναι αμφιμονοσήμαντη. Ισχυριζόμαστε ότι είναι και συνεχής με συνεχή αντίστροφο.

Θεωρούμε λοιπόν τον εγκλεισμό:

$$(X, \mathfrak{T}_X) \overset{\varphi}{\rightarrowtail\!\!\!\!\rightarrow} \big(\mathrm{Gr}(f), (\mathfrak{T}_\gamma)_{\mathrm{Gr}(f)}\big) \overset{\mathrm{i}}{\hookrightarrow} (X \times Y, \mathfrak{T}_\gamma)$$

και (σύμφωνα με την **Πρόταση 10.1, i.**) η φ είναι συνεχής εάν και μόνο αν η $\mathrm{i} \circ \varphi$ είναι συνεχής. Βάσει της **Πρότασης 11.1, i.**, η $\mathrm{i} \circ \varphi$ είναι συνεχής εάν και μόνο αν οι $p_X \circ \mathrm{i} \circ \varphi$, $p_Y \circ \mathrm{i} \circ \varphi$ είναι συνεχείς. Παρατηρούμε τώρα ότι:

$$p_X \circ \mathrm{i} \circ \varphi(x) = p_X \circ \mathrm{i}\big(x, f(x)\big) = p_X\big(x, f(x)\big) = x$$

οπότε η $p_X \circ \mathrm{i} \circ \varphi$ είναι συνεχής. Επιπλέον:

$$p_Y \circ \mathrm{i} \circ \varphi(x) = p_Y \circ \mathrm{i}\big(x, f(x)\big) = p_Y\big(x, f(x)\big) = f(x)$$

οπότε η $p_Y \circ \mathrm{i} \circ \varphi$ είναι συνεχής, και κατ' επέκταση η φ είναι συνεχής.

Τέλος, η αντίστροφη φ^{-1} είναι η συνάρτηση $\big(x, f(x)\big) \mapsto x$ οπότε είναι περιορισμός της p_X (δηλαδή $\varphi^{-1} = p_X|_{\mathrm{Gr}(f)}$). Ως περιορισμός συνεχούς είναι κι αυτή συνεχής.

Αποδεικνύεται ότι η φ είναι ομοιομορφισμός και ότι $\mathrm{Gr}(f) \sim X$.

$\triangle$

Άσκηση 15.10: Έστω $\left(X_i, \mathfrak{T}_i\right)_{i\in I}$ μια οικογένεια τοπολογικών χώρων και $(X = \prod_{i\in I} X_i, \mathfrak{T}_\gamma)$ ο τοπολογικός χώρος γινόμενο με την τοπολογία γινόμενο. Σταθεροποιούμε ένα $x = (x_i)_{i\in I} \in X$ και ορίζουμε:

$$D = \{y = (y_i)_{i\in I} \mid y_i \neq x_i \text{ για πεπερασμένο πλήθος δεικτών } i\}$$

Δείξτε ότι το D είναι πυκνό.

Απάντηση: Θα δείξουμε ότι για κάθε κανονικό βασικό σύνολο $B \neq \emptyset$ έχουμε $B \cap D = \emptyset$ (αυτό αρκεί για να δείξουμε το ζητούμενο - το ξαναείδαμε στην απάντηση της **Άσκησης 15.8, ii.**). Το B έχει τη μορφή:

$$B = \bigcap_{k=1}^{n} p_{i_k}^{-1}(G_{i_k}) = \prod_{i\in I} B_i$$

όπου η οικογένεια $\{i_k\}_{k=1}^{n} \subseteq I$ είναι πεπερασμένη, τα σύνολα G_{i_k} είναι ανοικτά, μη κενά, και:

$$B_i = \begin{cases} X_i, \ i \neq i_k \\ G_i, \ i = i_k \end{cases}$$

Το ότι τα G_{i_k} είναι μη κενά προκύπτει από το ότι το B δεν είναι κενό, σε συνδυασμό με την πρώτη γραφή του. Κατασκευάζουμε τώρα στοιχείο $z = (z_i)_{i\in I}$ ως εξής:

$$z_i = \begin{cases} x_i, \ i \neq i_k \\ \text{Κάποιο στοιχείο } z_i \in G_i, \ \text{όταν } i = i_k \end{cases}$$

και παρατηρούμε ότι $y \in D$. Επιπλέον (κι αυτό φαίνεται καλύτερα από τη δεύτερη μορφή του B), $y \in B$, δηλαδή $y \in B \cap D \neq \emptyset$.

△

Άσκηση 15.11: Στον συνήθη τοπολογικό μετρικό χώρο $(\mathbb{R}, \mathfrak{T}_\varrho)$, περιγράψτε την αρχική τοπολογία που ορίζουν στο X οι οικογένειες συναρτήσεων:

i. $F = (f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \equiv c \in \mathbb{R})$ (σταθερές συναρτήσεις).

ii. $F = (\mathrm{id})$

iii. $F = (f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ συνεχής})$

iv. $F = (\chi_{(0,\infty)})$ όπου $\chi_{(0,\infty)}(x) = 1$ αν $x > 0$ και 0 αλλιώς.

iv. $F = (\chi_{(a,\infty)} \mid a \in \mathbb{R})$ όπου $\chi_{(a,\infty)}(x) = 1$ αν $x > a$ και 0 αλλιώς.

Απάντηση: Υπενθυμίζουμε ότι η αρχική τοπολογία που προέρχεται από την οικογένεια $(f_i)_{i\in I}$ είναι η τοπολογία με υποβάση:

$$\mathcal{C} = \bigcup_{i\in I} \{f_i^{-1}(G) \mid G \in \mathfrak{T}_\varrho\}$$

Για το i., η εν λόγω υποβάση είναι η:

$$\mathcal{C} = \bigcup_{f\equiv c} \{f^{-1}(G) \mid G \in \mathfrak{T}_\varrho\}$$

με τα σύνολα $f^{-1}(G)$ να είναι κενά ή το $\mathbb{R}$. Αν $c \in G$, τότε $f^{-1}(G) = \mathbb{R}$ ενώ αν $c \neq G$, τότε $f^{-1}(G) = \emptyset$. Αυτά δείχνουν ότι:

$$\mathcal{C} = \{\emptyset, \mathbb{R}\}$$

κι άρα η προκύπτουσα τοπολογία είναι η τετριμμένη.

Για το ii. έχουμε:

$$\mathcal{C} = \{\mathrm{id}^{-1}(G) \mid G \in \mathfrak{T}_\varrho\} = \{G \mid G \in \mathfrak{T}_\varrho\} = \mathfrak{T}_\varrho$$

κι άρα η προκύπτουσα τοπολογία είναι η $\mathfrak{T}_\varrho$.

Για το iii., η υποβάση έχει τη μορφή:

$$\mathcal{C} = \bigcup_{f\in F} \{f^{-1}(G) \mid G \in \mathfrak{T}_\varrho\} \overset{\star}{\supseteq} \{\mathrm{id}^{-1}(G) \mid G \in \mathfrak{T}_\varrho\} = \mathfrak{T}_\varrho$$

με τον εγκλεισμό άστρο ($\star$) να δικαιολογείται από το γεγονός ότι η id είναι συνεχής. Επειδή εν γένει $\mathcal{C} \subseteq \mathfrak{T}_\varrho$, έχουμε την ισότητα. Η προκύπτουσα τοπολογία είναι η $\mathfrak{T}_\varrho$.

Για το iv: Για τα διάφορα ανοικτά σύνολα $G \in \mathfrak{T}_\varrho$ έχουμε:

$$\chi^{-1}_{(0,\infty)}(G) = \begin{cases} \emptyset, \text{ εάν } 0,1 \notin G \\ (-\infty, 0], \text{ εάν } 0 \in G, 1 \notin G \\ (0,\infty), \text{ εάν } 0 \notin G, 1 \in G \\ \mathbb{R}, \text{ εάν } 0,1 \in G \end{cases}$$

οπότε:

$$\mathcal{C} = \{\emptyset, (-\infty, 0], (0,\infty), \mathbb{R}\}$$

παρατηρούμε ότι η προκύπτουσα βάση είναι ίδια με την υποβάση, κι επίσης η προερχόμενη τοπολογία ταυτίζεται μ' αυτήν.

Το v. είναι ανάλογο του iv.. Η υποβάση λοιπόν έχει τη μορφή:

$$\mathcal{C} = \bigcup_{a\in\mathbb{R}} \{\chi^{-1}_{(a,\infty)}(G) \mid G \in \mathbb{R}\} = \bigcup_{a\in\mathbb{R}} \{\emptyset, (-\infty, a], (a,\infty), \mathbb{R}\}$$

Η αντίστοιχη βάση $\mathcal{B}$ της τοπολογίας προέρχεται από πεπερασμένες τομές στοιχείων της $\mathcal{C}$ κι έχει τη μορφή:

$$\mathcal{B} = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{(a,b] \mid a < b\} \cup \{(-\infty, a], (a,\infty) \mid a \in \mathbb{R}\}$$

Η $\mathcal{B}$ περιέχει τη βάση των αριστερά ημιάνοικτων διαστημάτων, πράγμα που δείχνει ότι η προκύπτουσα τοπολογία είναι υπερσύνολο της τοπολογίας των αριστερά ημιάνοικτων διαστημάτων. Επιπλέον η $\mathcal{B}$ είναι υποσύνολο της τοπολογίας των αριστερά ημιάνοικτων διαστημάτων, κι άρα η προκύπτουσα τοπολογία είναι υποσύνολο της τοπολογίας των αριστερά ημιάνοικτων διαστημάτων. Αποδεικνύεται έτσι ότι η πρκύπτουσα τοπολογία είναι η $\mathfrak{T}_S$.

$\triangle$

Άσκηση 15.12: Θεωρούμε $\big((X_i, \mathfrak{T}_{X_i})\big)_{i\in I}$, $\big((Y_i, \mathfrak{T}_{Y_i})\big)_{i\in I}$ δύο οικογένειες τοπολογικών χώρων και μια οικογένεια $(f_i : X_i \to Y_i)_{i\in I}$ συνεχών συναρτήσεων. Να εξετάσετε αν η απεικόνιση $f : \prod_{i\in I} X_i \to \prod_{i\in I} Y_i$ που ορίζεται ως εξής:

$$f(x) = \big(f_i(x_i)\big)_{i\in I}, \text{ με } x = (x_i)_{i\in I}$$

είναι συνεχής (εννοείται ότι οι χώροι γινόμενα θεωρούνται με τις καρτεσιανές τοπολογίες).

Απάντηση πρώτη: Κάνοντας χρήση της αρχής της μεταφοράς με δίκτυα, αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε δίκτυο $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ του $\prod_{i\in I} X_i$ με $x_\lambda \to x$ ισχύει $f(x_\lambda) \to f(x)$.

Γράφουμε $x_\lambda = (x_{\lambda,i})_{i\in I}$ και $x = (x_i)_{i\in I}$, κι επειδή $x_\lambda \to x$, έχουμε $x_{\lambda,i} \to x_i$ (**Πρόταση 11.1, ii.**). Καθεμία από τις f_i είναι συνεχής, οπότε από την αρχή της μεταφοράς $f_i(x_{\lambda,i}) \to f_i(x_i)$. Χρησιμοποιώντας ξανά την **Πρόταση 11.1, ii.** έχουμε το ζητούμενο:

$$\big(f_i(x_{\lambda,i})\big)_{i\in I} \to \big(f_i(x_i)\big)_{i\in I} \Leftrightarrow f(x_\lambda) \to f(x)$$

Απάντηση δεύτερη: Θα δείξουμε ότι η f αντιστρέφει ανοικτά σύνολα σε ανοικτά σύνολα, και μάλιστα για τον σκοπό αυτό αρκεί να δείξουμε ότι αντιστρέφει βασικά σε ανοικτά. Θεωρούμε λοιπόν κανονικό βασικό σύνολο $V \subseteq \prod_{i\in I} Y_i$, το οποίο κατά τα γνωστά το γράφουμε στη μορφή:

$$V = \bigcap_{k=1}^{n} p^{-1}_{i_k}(V_{i_k})$$

όπου $V_{i_k} \in \mathfrak{T}_{i_k}$. Εάν $x = (x_i)_{i\in I}$, έχουμε τις ισοδυναμίες:

$$x \in f^{-1}(V) \Leftrightarrow f(x) \in V \Leftrightarrow \forall k,\ f_{i_k}(x_{i_k}) \in V_{i_k} \Leftrightarrow \forall k,\ x_{i_k} \in f^{-1}_{i_k}(V_{i_k})$$

Δηλαδή:

$$\forall x,\ [x \in f^{-1}(V) \Leftrightarrow \forall k,\ x \in f^{-1}_{i_k}(V_{i_k})] \text{ από το οποίο έπεται } f^{-1}(V) = \bigcap_{k=1}^{n} f^{-1}_{i_k}(V_{i_k})$$

Οι f_{i_k} είναι συνεχείς και τα V_{i_k} ανοικτά, οπότε και τα $f_{i_k}^{-1}(V_{i_k})$ είναι ανοικτά. Τέμνοντάς τα, και το $f^{-1}(V)$ είναι ανοικτό.

Απάντηση τρίτη: Παρατηρούμε ότι:

$$p_i \circ f(x) = f_i(x_i) = f_i \circ p_i(x)$$

Καθεμία από τις f_i είναι συνεχείς και (φυσικά) οι προβολές p_i είναι συνεχείς. Συνθέτοντας, οι $f_i \circ p_i$ είναι συνεχείς, οπότε και οι $p_i \circ f$, για τα διάφορα $i \in I$. Από την **Πρόταση 11.1, i.** η f είναι συνεχής συνάρτηση.

$\triangle$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 16

Μάθημα 16

■ **Παράδειγμα 16.1:**

- Θεωρούμε τον τοπολογικό χώρο $\big(X = \{a,b,c\}, \mathfrak{T} = \big\{\emptyset, \{a\}, \{b,c\}, X\big\}\big)$ (με $|X| = 3$). Στο **Παράδειγμα 14.1 (δεύτερο •)** είδαμε ότι δεν είναι ούτε T_1 χώρος, ούτε T_2. Είναι όμως T_3 και T_4, πράγμα που μπορούμε να επιβεβαιώσουμε με πεπερασμένο έλεγχο.

- Έστω $(X = \{a,b,c\}, \mathfrak{T})$ με $|X| = 3$, εφοδιασμένο με την τοπολογία του εξαιρουμένου σημείου c. Τότε:
$$\mathfrak{T} = \big\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}, X\big\}$$
και τα κλειστά σύνολα ανήκουν στην οικογένεια:
$$\mathfrak{F} = \big\{\emptyset, \{c\}, \{a,c\}, \{b,c\}, X\big\}$$
Ο εν λόγω τοπολογικός χώρος είναι T_4 με κάπως τετριμμένο τρόπο - εάν F_1, F_2 είναι κλειστά και ξένα σύνολα, τότε αναγκαστικά κάποιο εξ αυτόν είναι κενό (αφού όλα τα υπόλοιπα μη κενά περιέχουν το c). Αν χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέσουμε ότι $F_1 = \emptyset$, τότε τα F_1, F_2 διαχωρίζονται από το $\emptyset$ και το X. Ο χώρος δεν είναι T_3, αφού το a με το $\{c\}$ δεν μπορούν να διαχωριστούν.

■

Παρατήρηση 16.1: Συμπληρώνουμε την **Παρατήρηση 14.1** με τα ακόλουθα:

- Εάν ένας τοπολογικός χώρος είναι T_1 και T_4, τότε είναι T_3 (**Παρατήρηση 14.2**).
- Υπάρχουν τοπολογικοί χώροι που είναι T_3 και T_4 αλλά όχι T_1, T_2 (**Παράδειγμα 16.1 (πρώτο •)**).
- Υπάρχουν τοπολογικοί χώροι που είναι T_4 αλλά όχι T_3 (**Παράδειγμα 16.1 (δεύτερο •)**).

Πρόταση 16.1: Έστω $(X, \mathfrak{T})$ ένας T_4 τοπολογικός χώρος και $A \subseteq X$ ένα κλειστό σύνολο. Τότε ο χώρος $(A, \mathfrak{T}_A)$ με τη σχετική τοπολογία είναι κι αυτός T_4. Να σημειωθεί ότι το αποτέλεσμα αυτό ισχύει για κλειστό A - στους T_1, T_2, T_3 τοπολογικούς χώρους η ιδιότητα μεταβιβαζόταν στις σχετικές τοπολογίες χωρίς αυτήν την επιπλέον υπόθεση.

Απόδειξη: Ας θεωρήσουμε δύο κλειστά, ξένα σύνολα F_1, F_2 στην $\mathfrak{T}_A$. Από την **Πρόταση 10.1, iv.** υπάρχουν κλειστά σύνολα K_1, K_2 στην $\mathfrak{T}$ ούτως ώστε $F_1 = K_1 \cap A$, $F_2 = K_2 \cap A$.

Επειδή το A είναι κλειστό, τα $K_1 \cap A$, $K_2 \cap A$ είναι κλειστά (και ξένα) και στην $\mathfrak{T}$, επομένως από την ιδιότητα T_4 του X:
$$\exists U, V \in \mathfrak{T},\ F_1 \subseteq U,\ F_2 \subseteq V \text{ **και** } U \cap V = \emptyset$$
Αν θέσουμε $U' = U \cap A$, $V' = V \cap A$, τα U', V' θα είναι ανοικτά, ξένα σύνολα στη σχετική τοπολογία του A που διαχωρίζουν τα F_1, F_2. Οπότε ο χώρος $(A, \mathfrak{T}_A)$ είναι κι αυτός T_4.

□

Θεώρημα 16.1: (Λήμμα της συρρίκνωσης). Έστω $(X, \mathfrak{T})$ ένας T_4 τοπολογικός χώρος και $\{U_i\}_{i=1}^n$ μια πεπερασμένη ανοικτή κάλυψη του X. Τότε υπάρχει ανοικτή κάλυψη $\{V_i\}_{i=1}^m$ του X με $m = n$ και $\overline{V_i} \subseteq U_i$. Η οικογένεια $\{V_i\}_{i=1}^n$ λέγεται συρρίκνωση της $\{U_i\}_{i=1}^n$.

Απόδειξη: Ο χώρος X γράφεται:

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} U_i = U_1 \cup \left(\bigcup_{i=2}^{n} U_i \right)$$

οπότε το $X \backslash \left(\bigcup_{i=2}^n U_i\right)$ είναι κλειστό και περιέχεται στο ανοικτό U_1 (παρατηρήστε ότι αν $A \cup B = X$ τότε $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c = \emptyset \Rightarrow A^c \subseteq B$). Από την **Πρόταση 14.2, iii.** μπορεί να βρεθεί ανοικτό σύνολο V_1 ούτως ώστε:

$$X \backslash \left(\bigcup_{i=2}^{n} U_i \right) \subseteq V_1 \subseteq \overline{V_1} \subseteq U_1$$

Αντικαθιστούμε τώρα την οικογένεια $\{U_1\}_{i=1}^n$ από την $\{V_1\} \cup \{U_i\}_{i=2}^n$, και συνεχίζουμε επαγωγικά. Αφού όλα τα U_i αντικατασταθούν, η οικογένεια $\{V_i\}_{i=1}^n$ θα αποτελεί κάλυψη του X, αφού (επαγωγικά θα έχουμε βρει):

$$X \backslash \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} V_i \right) \subseteq V_n \subseteq \overline{V_n} \subseteq U_n$$

δηλαδή $X \backslash \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} V_i\right) \subseteq V_n \Rightarrow X = \bigcup_{i=1}^n V_i$.

□

Παρατήρηση 16.2: Υπάρχει το ερώτημα αν η απόδειξη του προηγούμενο λήμματος «περνάει» στην αριθμήσιμη περίπτωση. Η απάντηση εν γένει είναι αρνητική: Στον συνήθη τοπολογικό χώρο $(\mathbb{R}, \mathfrak{T}_\varrho)$ θεωρούμε την κάλυψη από σύνολα $U_n = (-n, n)$ και ορίζουμε $V_n = (-1/2, 1/2)$. Η προηγούμενη απόδειξη εφαρμόζει σε κάθε «πεπερασμένο» βήμα, και μάλιστα για κάθε m το σύνολο $\{V_1, \cdots, V_m, U_{m+1}, \cdots\}$ αποτελεί κάλυψη του $\mathbb{R}$. Παρόλα αυτά, το $\{V_1, V_2, \cdots\}$ δεν αποτελεί κάλυψη του $\mathbb{R}$.

Μπορεί η απόδειξη να μην μεταφέρεται (τουλάχιστον αυτούσια) στην αριθμήσιμη περίπτωση, πάντως το αποτέλεσμα ισχύει, θεωρώντας τοπικά πεπερασμένες καλύψεις $\{U_1, U_2, \cdots\}$ - δηλαδή καλύψεις όπου κάθε x ανήκει σε πεπερασμένο το πλήθος σύνολα U_n.

Στη συνέχεια θα αναφερθούμε στο λήμμα του Urisohn, το οποίο (σε μια απλούστερη εκδοχή) έχουμε δει στην πραγματική ανάλυση.

Θεώρημα 16.2: (Λήμμα του Urisohn). Έστω $(X, \mathfrak{T})$ ένας T_4 τοπολογικός χώρος και $A, B \subseteq X$ κλειστά και ξένα σύνολα. Υπάρχει συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$ (ο $\mathbb{R}$ θεωρείται με τη συνήθη μετρική τοπολογία) η οποία είναι συνεχής με $f(A) = \{0\}$ και $f(B) = \{1\}$ (μάλιστα $f(X) \subseteq [0, 1]$).

Απόδειξη: Η απόδειξη είναι εκτενής και θα γίνει σε βήματα. Η ιδέα είναι να κατασκευαστούν διάφορα ανοικτά U ούτως ώστε $A \subseteq U \subseteq \overline{U} \subseteq B^c$. Σε καθένα $x \in X$ θα δίνεται μια τιμή $f(x)$ που θα εξαρτάται από τα U στα οποία το x ανήκει.

Βήμα I: Για αρχή θα κατασκευάσουμε ένα σύνολο δεικτών, που θα χρησιμεύσει για τη σήμανση των διάφορων $U = U(d)$. Ορίζουμε:

$$\begin{aligned}
\Delta_0 &= \{0, 1\} \\
\Delta_1 &= \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{2} = 1\right\} \\
\Delta_2 &= \left\{0, \frac{1}{4}, \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{4}{4} = 1\right\} \\
&\vdots \\
\Delta_n &= \left\{\frac{k}{2^n} \;\middle|\; k \in \{1, \cdots, 2^n\}\right\} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

κι επίσης $\Delta = \bigcup_{n=1}^\infty \Delta_n$. Το Δ είναι πυκνό στο $[0, 1]$, οπότε αν ορίσουμε $D = \Delta \cup (1, \infty)$, το D θα είναι πυκνό στο $[0, \infty)$.

Βήμα II: Στη συνέχεια θα κατασκευάσουμε τα σύνολα $\big(U(d)\big)_{d\in D}$. Στα επόμενα λοιπόν θα θεωρούμε ότι $d \in D$.

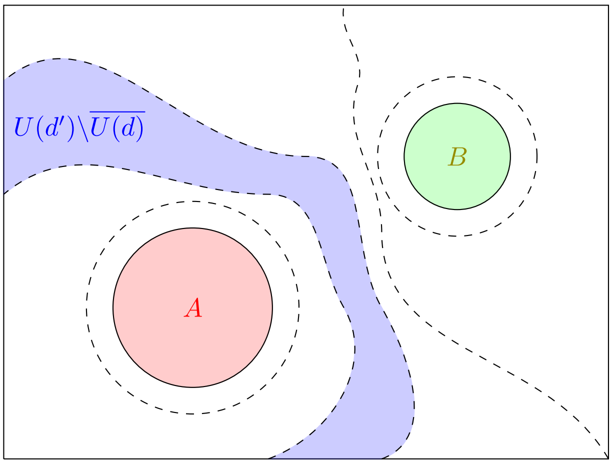
Εάν $d > 1$, ορίζουμε $U(d) = X$. Επιπλέον ορίζουμε $U(1) = B^c$.

Εάν $d \in \Delta$, υπάρχει κάποιος φυσικός $n \in \mathbb{N}$ ούτως ώστε $d \in \Delta_n$. Σε αυτήν την περίπτωση θα ορίσουμε επαγωγικά τα $U(d)$:

- Για $n = 1$ θα ορίσουμε τα $U(d)$ με $d \in \Delta_1 \backslash \{1\} = \{0\}$.Επειδή ο χώρος $(X, \mathfrak{T})$ είναι T_4, υπάρχει ανοικτό σύνολο $U(0)$ τέτοιο ώστε:
$$A \subseteq U(0) \subseteq \overline{U(0)} \subseteq U(1)$$
(αυτό φυσικά από την **Πρόταση 14.2, iii.** - θα την χρησιμοποιούμε συχνά σε αυτήν την απόδειξη, δεν θα το αναφέρουμε όμως καθε φορά από εδώ και στο εξής).

- Για $n = 2$ θα ορίσουμε τα $U(d)$ με $d \in \Delta_2 \backslash \Delta_1 = \{1/2\}$. Από το T_4 του χώρου, υπάρχει ανοικτό $U(1/2)$ τέτοιο ώστε:
$$U(0) \subseteq U(1/2) \subseteq \overline{U(1/2)} \subseteq U(1)$$

- Εάν τα διάφορα σύνολα $U(d)$ έχουν οριστεί για δείκτες $d \in \Delta_n$, θα ορίσουμε τα $U(d)$ με $d \in \Delta_{n+1} \backslash \Delta_n$. Παρατηρούμε ότι τα διάφορα $d \in \Delta_{n+1} \backslash \Delta_n$ είναι ακριβώς τα $k/2^{n+1}$ για τα οποία το k είναι περιττός - πράγματι, αν ήταν άρτιος, θα μπορούσαμε (κάνοντας απλοποίηση αριθμητή και παρονομαστή με το 2) να αναχθούμε σε στοιχείο του Δ_n. Για κάθε περιττό $k < 2^{n+1}$ έχουμε λοιπόν ότι:
$$\frac{k-1}{2^{n+1}}, \frac{k+1}{2^{n+1}} \in \Delta_n, \text{ οπότε τα αντίστοιχα } U\left(\frac{k-1}{2^{n+1}}\right), U\left(\frac{k+1}{2^{n+1}}\right) \text{ έχουν οριστεί (επαγωγικά)}$$
Ξανά από το T_4 του χώρου, βρίσκουμε σύνολα:
$$\overline{U\left(\frac{k-1}{2^{n+1}}\right)} \subseteq U\left(\frac{k}{2^{n+1}}\right) \subseteq \overline{U\left(\frac{k}{2^{n+1}}\right)} \subseteq U\left(\frac{k+1}{2^{n+1}}\right)$$
Μάλιστα τα σύνολα που βρίσκουμε εμφανίζουν κάποια μονοτονία: $d \leqslant d' \Rightarrow U(d) \subseteq U(d')$.



Βήμα III: Για κάθε $x \in X$ ορίζουμε $D_x = \{d \in D \mid x \in U(d)\}$. Είναι ίσως φανερό ότι $D_x \neq \emptyset$, σφού προηγουμένως ορίσαμε $U(d) = X$ για $d > 1$ - οπότε σίγουρα $(1, \infty) \subseteq D_x$. Ορίζουμε τώρα συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$ μέσω του τύπου:
$$f(x) = \inf D_x$$
και παρατηρούμε ότι επειδή $(1, \infty) \subseteq D_x$ (παίρνοντας infimum) $1 = \inf(1, \infty) \geqslant f(x)$. Επιπλέον, με ανάλογο σκεπτικό, επειδή $D_x \subseteq [0, \infty)$ θα έχουμε $f(x) \geqslant 0$. Δηλαδή $f(X) \subseteq [0, 1]$.

Τώρα αν $x \in A$, επειδή $x \in U(0)$ και $U(0) \subseteq U(d)$ για κάθε d, έπεται $f(x) = 0$. Επομένως $f(A) = \{0\}$. Αν πάλι $x \in B$, τότε $x \notin B^c = U(1)$, κι επειδή για κάθε $d \in \Delta$ έχουμε $U(d) \subseteq U(1)$, το x δεν ανήκει σε κανένα $U(d)$, $d \in \Delta$. Οπότε $d > 1$ και $D_x = (1, \infty) \Rightarrow f(x) = 1$. Από αυτό έπεται ότι $f(B) = \{1\}$.

Βήμα IV: Αυτό που μένει να αποδειχθεί είναι η συνέχεια της f. Θεωρούμε λοιπόν τυχαίο $x \in X$ και δείχνουμε τα εξής δύο πράγματα:

- Εάν $x \in \overline{U(d)}$, τότε $f(x) \leqslant d$. Πράγματι, αν $x \in \overline{U(d)}$ τότε $x \in U(d')$ για κάθε $d' > d$. Έχουμε λοιπόν ότι $D_x \supseteq (d, \infty)$ κι επομένως $f(x) \leqslant d$.

- Εάν $x \notin U(d)$, τότε $f(x) \geqslant d$. Πράγματι, αν $x \notin U(d)$ τότε $x \notin U(d')$ για κάθε $d' < d$. Οπότε $D_x \subseteq (d, \infty)$ και $f(x) \geqslant d$.

Για να δείξουμε τη συνέχεια της f, αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ανοικτή περιοχή U ούτως ώστε:

$$f(U) \subseteq \big(f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon\big)$$

Εφόσον το D είναι πυκνό στο $[0, \infty)$, επιλέγουμε d, d' τέτοια ώστε $f(x) - \varepsilon < d < f(x) < d' < f(x) + \varepsilon$. Τότε το σύνολο $U = U(d') \backslash \overline{U(d)}$ είναι ανοικτό και μάλιστα περιέχει το x. Πράγματι, εφόσον $f(x) < d'$, το **δεύτερο** • δίνει ότι $x \in U(d')$ (αφού αν δεν άνηκε η ανισότητα θα αντιστρεφόταν). Επιπλέον, εφόσον $f(x) > d$, το **πρώτο** • δίνει ότι $x \notin \overline{U(d)}$, δηλαδή τελικά $x \in U(d') \backslash \overline{U(d)}$. Από τον ορισμό του U παρατηρήστε ότι:

$$f(U) \subseteq (d, d') \subseteq \big(f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon\big)$$

οπότε το U είναι το ζητούμενο ανοικτό που αποδεικνύει την συνέχεια της f.

□

Ένα θεώρημα που ουσιαστικά προκύπτει μέσω του λήμματος του Urisohn είναι το ακόλουθο, το οποίο θα παραθέσουμε χωρίς απόδειξη.

Θεώρημα 16.3: (Θεώρημα επέκτασης του Tietze). Έστω ένας T_4 τοπολογικός χώρος $(X, \mathfrak{T})$, $K \subseteq X$ κλειστό σύνολο και $f : K \to \mathbb{R}$ συνεχής (το K εφοδιάζεται με τη σχετική τοπολογία, το $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική τοπολογία). Τότε υπάρχει $g : X \to \mathbb{R}$ συνεχής επέκταση της f στο X. Δηλαδή η g είναι συνεχής στο X και $g|_K = f$.

Ιδιαιτέρως, αν $f(K) \subseteq [a, b]$, τότε $g(X) \subseteq [a, b]$.

Μια απόδειξη μπορεί να βρεθεί στο (B2, Θεώρημα 5.4.14).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 17

Μάθημα 17

Με το **Θεώρημα 16.2** (Λήμμα του Urisohn) δείξαμε ότι σε κάθε T_4 τοπολογικό χώρο $(X, \mathfrak{T})$, για κάθε δύο κλειστά και ξένα σύνολα A, B μπορεί να βρεθεί συνεχής συνάρτηση $f : X \to [0,1]$ με την ιδιότητα $f(A) = \{0\}$, $f(B) = \{1\}$. Μάλιστα από την **Πρόταση 14.3** μπορεί να αποδειχθεί και το αντίστροφο, δηλαδή αν υπάρχει για κάθε δύο κλειστά, ξένα σύνολα A, B συνάρτηση με την ιδιότητα $f(A) = \{0\}$, $f(B) = \{1\}$, τότε ο χώρος $(X, \mathfrak{T})$ είναι T_4.

Γεννάται το ερώτημα μήπως ανάλογη ισοδυναμία μπορεί να εμφανιστεί στους T_3 τοπολογικούς χώρους. Ισχύει, για παράδειγμα, η ακολουθη ισοδυναμία;

$(X, \mathfrak{T})$ είναι $T_3 \Leftrightarrow \forall x \in X$, $\forall F \subseteq X$ κλειστό με $x \notin F$, $\exists f : X \to [0,1]$ συνεχής με $f(x) = 0$, $f(F) = \{1\}$

Η απάντηση εν γένει είναι αρνητική, το οποίο οδηγεί σε μια κατηγορία τοπολογικών χώρων που βρίσκεται εννοιολογικά «ανάμεσα» στους T_3 χώρους και στους T_4. Αυτό το ανάμεσα βέβαια *δεν* σημαίνει εγκλεισμό.

> **Ορισμός 17.1: ($T_{3\frac{1}{2}}$ τοπολογικοί χώροι).** Ένας τοπολογικός χώρος $(X, \mathfrak{T})$ λέγεται $T_{3\frac{1}{2}}$ (τρία και ένα δεύτερο) εάν για κάθε $x \in X$ και για κάθε κλειστό $F \subseteq X$ με $x \in F$ υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f : X \to [0,1]$ τέτοια ώστε $f(x) = 0$, $f(F) = \{1\}$.
>
> Αλλιώς οι $T_{3\frac{1}{2}}$ τοπολογικοί χώροι ονομάζονται τελείως κανονικοί.

Παρατήρηση 17.1: Εάν ένας τοπολογικός χώρος είναι T_1 και T_4, τότε τα μονοσύνολα είναι κλειστά (T_1) και συνεπώς διαχωρίζονται από τα κλειστά σύνολα μέσω συνεχούς συνάρτησης (T_4). Δηλαδή τα σημεία διαχωρίζονται μέσω συνεχούς συνάρτησης από τα κλειστά σύνολα, το οποίο δείχνει ότι αν ένας χώρος είναι T_1 και T_4 τότε είναι και $T_{3\frac{1}{2}}$.

> **Πρόταση 17.1:**
>
> i. Εάν ένας τοπολογικός χώρος είναι ομοιομορφικός με $T_{3\frac{1}{2}}$ τοπολογικό χώρο, είναι κι αυτός $T_{3\frac{1}{2}}$.
>
> ii. Εάν $(X, \mathfrak{T})$ είναι ένας $T_{3\frac{1}{2}}$ τοπολογικός χώρος και $A \subseteq X$, τότε ο χώρος $(A, \mathfrak{T}_A)$ με τη σχετική τοπολογία είναι $T_{3\frac{1}{2}}$.
>
> iii. Εάν $\big((X_i, \mathfrak{T}_i)\big)_{i \in I}$ είναι μια οικογένεια $T_{3\frac{1}{2}}$ τοπολογικών χώρων, ο χώρος γινόμενο $(X = \prod_{i \in I} X_i, \mathfrak{T}_\gamma)$ με την τοπολογία γινόμενο είναι κι αυτός $T_{3\frac{1}{2}}$.

Απόδειξη: Το i μπορεί να αποδειχθεί σχετικά άμεσα.

Για το ii: Θεωρούμε $x \in A$ κι ένα κλειστό σύνολο F στη σχετική τοπολογία με $x \notin F$. Εφόσον το F είναι κλειστό στη σχετική τοπολογία, θα υπάρχει (όπως έχουμε δει) κλειστό σύνολο K στην $\mathfrak{T}$ τέτοιο ώστε $F = K \cap A$. Μάλιστα, επειδή $x \notin F$ και $x \in A$, αναγκαστικά $x \notin K$.

Εφόσον τώρα ο $(X, \mathfrak{T})$ είναι $T_{3\frac{1}{2}}$ χώρος, θα υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f : X \to [0,1]$ τέτοια ώστε $f(x) = 0$, $f(K) = \{1\}$. Κατά συνέπεια, περιοριζόμενοι στο A η συνάρτηση $g = f|_A = f \circ \mathrm{i}_A$ έχει την ιδιότητα $g(x) = 0$, $g(F) = \{1\}$. Μάλιστα είναι και συνεχής, ως περιορισμός συνεχούς - βέβαια για να δικαιολογηθεί πλήρως η συνέχεια της g χρειάζεται να χρησιμοποιηθεί η **Πρόταση 10.2**.

Για το ii: Θεωρούμε $x = (x_i) \in X$ και $F \subseteq X$ κλειστό σύνολο με $x \notin F$. Τότε το σύνολο F^c είναι ανοικτό και περιέχει το x, το οποίο σημαίνει ότι μπορεί να βρεθεί ένα κανονικό βασικό σύνολο B με $x \in B$. Γράφουμε κατά τα γνωστά:

$$B = \bigcap_{k=1}^{n} p_{i_k}^{-1}(G_{i_k}),\ G_{i_k} \in \mathfrak{T}_{i_k}$$

και παρατηρούμε ότι επειδή $x \in B$, έχουμε $x_{i_k} \in G_{i_k} \Leftrightarrow x \notin X_{i_k} \backslash G_{i_k}$. Το $X_{i_k} \backslash G_{i_k}$ είναι κλειστό και δεν περιέχει το x, οπότε από το $T_{3\frac{1}{2}}$ των εκάστοτε συντεταγμένων χώρων X_i, υπάρχουν συνεχείς συναρτήσεις $f_k : X_{i_k} \to [0,1]$ με την ιδιότητα $f_k(x_{i_k}) = 0$, $f_k(X_{i_k} \backslash G_{i_k}) = \{1\}$.

Ορίζουμε $f : X \to [0,1]$ μέσω του τύπου:

$$f(y) = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} f_k(y_{i_k})$$

η οποία είναι συνεχής ως μέγιστο πεπερασμένων στο πλήθος συνεχών συναρτήσεων. Εδώ παρατηρείστε ότι το μέγιστο δύο συνεχών συναρτήσεων (έστω $a(y)$, $b(y)$) που παίρνουν πραγματικές τιμές, μπορεί να λάβει τη μορφή:

$$\max\{a,b\}(y) = \frac{1}{2}\big(|a(y) - b(y)| + a(y) + b(y)\big)$$

οπότε είναι συνεχής συνάρτηση ως σύνθεση των συνεχών a, b, $1/2 \cdot (|t - s| + t + s)$. Επαγωγικά κανείς δείχνει ότι μέγιστο πεπερασμένων τέτοιων συναρτήσεων είναι συνεχής συνάρτηση. Χρειάζεται μόνο να δείξουμε ότι $f(x) = 0$ και ότι $f(F) = \{1\}$. Κατ' αρχάς, επειδή $f_k(x_{i_k}) = 0$ για κάθε k, θα αληθεύει ότι $f(x) = \max_k f_k(x_{i_k}) = 0$. Εάν $y \in F$, τότε $y \in F^c \supseteq B$. Από τη μορφή του B (ως τομή αντιστρόφων προβολών ανοικτών) υπάρχει κάποιος δείκτης k_0 ούτως ώστε:

$$y \notin p_{i_{k_0}}^{-1}(G_{i_{k_0}}) \Rightarrow y_{i_{k_0}} \notin G_{i_{k_0}} \Rightarrow y_{i_{k_0}} \in X_{i_{k_0}} \backslash G_{i_{k_0}}$$

δηλαδή $f_{k_0}(y) = 1$, από τον ορισμό των f_k. Επειδή καθεμία από τις f_k φράσσεται από το 1, η f στο y παίρνει μέγιστη τιμή την $f_{k_0}(y) = 1$. Αναλυτικότερα:

$$1 \geqslant f(y) = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} f_k(y_{i_k}) \geqslant f_{k_0}(y_{i_{k_0}}) = 1$$

□

■ **Παράδειγμα 17.1:**

- Ο χώρος $(\mathbb{R}, \mathfrak{T}_S)$ εφοδιασμένος με την τοπολογία των αριστερά ημιάνοικτων διαστημάτων είναι T_1 και T_4, Οπότε από την **Παρατήρηση 17.1** είναι και $T_{3\frac{1}{2}}$.

- Ο χώρος γινόμενο $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathfrak{T}_\gamma)$ με την τοπολογία γινόμενο μπορεί να αποδειχθεί ότι δεν είναι T_4 (δεν θα το δείξουμε - στο (B1, 10.28 Παράδειγμα) υπάρχει αναλυτική απόδειξη). Αυτός είναι και ο λόγος που δεν διατυπώθηκε πρόταση ανάλογη των **Προτάσεων 12.5, iii., 13.2, iii., 14.1, iii.** για T_4 χώρους. Επειδή αυτός ο χώρος έχει συντεταγμένες $T_{3\frac{1}{2}}$ τοπολογικούς χώρους, από την **Πρόταση 17.1, iii.** είναι $T_{3\frac{1}{2}}$ χώρος.

- Υπάρχουν επίσης τοπολογικοί χώροι οι οποίοι είναι $T_{3\frac{1}{2}}$ αλλά όχι T_3, το οποίο δείχνει ότι η κλάση των $T_{3\frac{1}{2}}$ τοπολογικών χώρων είναι γνήσια μεγαλύτερη της κλάσης των T_3 τοπολογικών χώρων. Παραδείγματα τέτοιων χώρων μπορούν να βρεθούν στα (B3, §33, Exercise 11), (M1), (M2).

■

Παρατήρηση 17.2: Συμπληρώνουμε την **Παρατήρηση 16.1** με τα ακόλουθα:

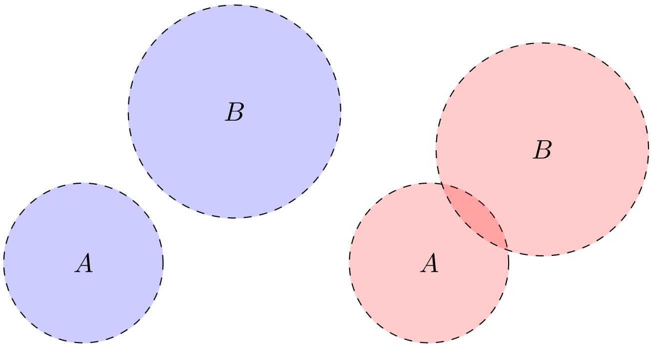
- Κάθε T_1 και T_4 τοπολογικός χώρος είναι $T_{3\frac{1}{2}}$ (**Παρατήρηση 17.1**).
- Υπάρχουν τοπολογικοί χώροι που είναι $T_{3\frac{1}{2}}$ αλλά όχι T_4 (**Παράδειγμα 17.1 (δεύτερο •)**).
- Υπάρχουν τοπολογικοί χώροι που είναι $T_{3\frac{1}{2}}$ χωρίς να είναι T_3. (**Παράδειγμα 17.1 (τρίτο •)**).

Στη συνέχεια θα αναφερθούμε σε διάφορες έννοιες συνεκτικότητας.

Ορισμός 17.2: (Συνεκτικοί τοπολογικοί χώροι).
I. Ένας τοπολογικός χώρος $(X, \mathfrak{T})$ λέγεται συνεκτικός εάν και μόνο αν *δεν* υπάρχουν ανοικτά, μη κενά, ξένα σύνολα A, B τέτοια ώστε $A \cup B = X$.

Ισοδύναμα, ένας τοπολογικός χώρος είναι συνεκτικός αν δεν υπάρχει μη κενό κλειστάνοικτο σύνολο (πέραν του ίδιου του X) σ' αυτόν (κλειστάνοικτο: κλειστό και ανοικτό ταυτόχρονα, στα αγγλικά clopen).

II. Επίσης θα λέμε ότι ένα υποσύνολο $A \subseteq X$ είναι συνεκτικό εάν ο χώρος $(A, \mathfrak{T}_A)$ με τη σχετική τοπολογία είναι συνεκτικός.



Ένα παράδειγμα ενός μη συνεκτικού (μπλε) κι ένα παράδειγμα ενός συνεκτικού χώρου (κόκκινο).

■ **Παράδειγμα 17.2:**

- Ο τοπολογικός χώρος $(\mathbb{Q}, \mathfrak{T}_{\mathbb{Q}})$ με τη σχετική τοπολογία από το $\mathbb{R}$ δεν είναι συνεκτικός τοπολογικός χώρος. Πράγματι, τα σύνολα $A = (-\infty, \sqrt{2}) \cap \mathbb{Q}$, $B = (\sqrt{2}, \infty) \cap \mathbb{Q}$ είναι ανοικτά, μη κενά, ξένα και διαμερίζουν το $\mathbb{Q}$.
- Θεωρούμε έναν τοπολογικό χώρο $(X, \mathfrak{T})$ εφοδιασμένο με την τοπολογία του ιδιαιτέρου σημείου $x_0 \in X$. Σ' αυτήν την περίπτωση δεν υπάρχουν ανοικτά και ξένα σύνολα, οπότε με τετριμμένο τρόπο ο χώρος καθίσταται συνεκτικός.
- Ο χώρος $(\mathbb{R}, \mathfrak{T}_S)$ με την τοπολογία των αριστερά ημιάνοικτων διαστημάτων δεν είναι συνεκτικός. Πράγματι, για κάθε a τα σύνολα $(-\infty, a]$, (a, ∞) είναι ανοικτά, μη κενά, ξένα και διαμερίζουν το $\mathbb{R}$.

■

Πρόταση 17.2: Ένας τοπολογικός χώρος $(X, \mathfrak{T})$ είναι συνεκτικός εάν και μόνο αν κάθε συνεχής $f : (X, \mathfrak{T}) \to (\{0, 1\}, \mathfrak{T}_\delta)$ είναι σταθερή (ο τελευταίος χώρος εφοδιάζεται με τη διακριτή τοπολογία).

Απόδειξη: ($\Rightarrow$) Αρχικά ας παρατηρήσουμε το ακόλουθο: Εάν η $f : (X, \mathfrak{T}) \to (\{0, 1\}, \mathfrak{T}_\delta)$ είναι συνεχής, τα σύνολα $A = f^{-1}(\{0\})$, $B = f^{-1}(\{1\})$ είναι κλειστάνοικτα και:

$$A \cap B = f^{-1}(\{0\} \cap \{1\}) = \emptyset \text{ **και** } A \cup B = X \text{ αφού } \forall x \in X,\ f(x) = 0 \text{ **ή** } 1$$

Επειδή ο χώρος είναι συνεκτικός, τα μόνα κλειστάνοικτα σύνολα είναι το $\emptyset$ και το X. Οπότε αναγκαστικά κάποιο από τα A, B ταυτίζεται με το X. Υποθέτουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $A = X$ και τότε έχουμε $f(x) = 0$ για κάθε $x \in X$ - δηλαδή η f είναι σταθερή.

($\Leftarrow$) Ας υποθέσουμε προς άτοπο ότι υπάρχουν ανοικτά, μη κενά, ξένα σύνολα A, B με $A \cup B = X$. Ορίζουμε:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{εάν } x \in A \\ 0, & \text{εάν } x \notin A \text{ (δηλαδή αν } x \in B) \end{cases}$$

Ισχυριζόμαστε ότι η χ_A είναι συνεχής. Πράγματι, για τα διάφορα ανοικτά $\mathfrak{T}_\delta = \big\{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\big\}$ θα δείξουμε ότι η αντίστροφη εικόνα είναι ανοικτό σύνολο στην $\mathfrak{T}$.

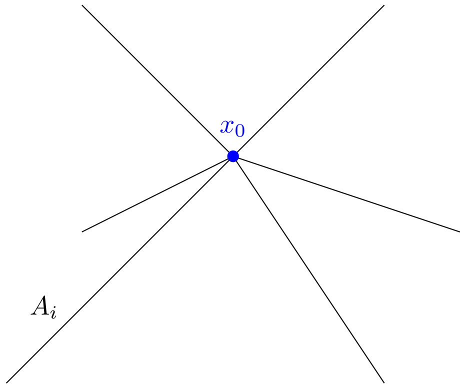
- $\chi_A^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \mathfrak{T}$
- $\chi_A^{-1}(\{0\}) = B \in \mathfrak{T}$
- $\chi_A^{-1}(\{1\}) = A \in \mathfrak{T}$
- $\chi_A^{-1}(\{0, 1\}) = X \in \mathfrak{T}$

Παρόλα αυτά η χ_A δεν είναι σταθερή, και καταλήγουμε σε άτοπο.

□

Πρόταση 17.3: Έστω $(X, \mathfrak{T})$ ένας τοπολογικός χώρος και $\{A_i\}_{i\in I}$ μια συλλογή συνεκτικών συνόλων με $\bigcap_{i\in I} A_i \neq \emptyset$. Τότε και το $\bigcup_{i\in I} A_i$ είναι συνεκτικό.

Απόδειξη: Εφόσον η τομή είναι μη κενή, μπορεί να επιλεγεί $x_0 \in \bigcap_{i\in I} A_i$.



Έστω $f : \bigcup_{i\in I} A_i \to \{0,1\}$ μια συνεχής απεικόνιση (όπως στην **Πρόταση 17.2**). Επειδή καθένα από τα A_i είναι συνεκτικό, από την **Πρόταση 17.2** καθεμία από τις $f|_{A_i}$ είναι σταθερή. Μάλιστα, επειδή $x_0 \in A_i$, θα έχουμε $f|_{A_i} \equiv f|_{A_i}(x_0) = f(x_0)$ για κάθε $i \in I$. Αυτό δείχνει ότι $f \equiv f(x_0)$. Χρησιμοποιώντας για ακόμη μια φορά την **Πρόταση 17.2**, αποδεικνύεται ότι το $\bigcup_{i\in I} A_i$ είναι συνεκτικό.

□

Πρόταση 17.4: Έστω $(X, \mathfrak{T})$ ένας τοπολογικός χώρος και $A, B \subseteq X$.

i. Εάν $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$ και το A είναι συνεκτικό, τότε και το B είναι συνεκτικό.

ii. Ως συνέπεια του i., εάν το A είναι συνεκτικό, τότε και το $\overline{A}$ είναι συνεκτικό.

Απόδειξη: Ουσιαστικά χρειάζεται να αποδειχθεί το i., κι από αυτό έπειτα μπορεί να εξαχθεί το ii.. Παρακάτω θα θεωρούμε τα σύνολα A, B μη κενά, απλώς για να αποφύγουμε τετριμμένες περιπτώσεις.

Θεωρούμε $f : B \to \{0,1\}$ συνεχή συνάρτηση (και πάλι όπως στην **Πρόταση 17.2**) και τον περιορισμό αυτής $f|_A$ ο οποίος είναι σταθερός, από την **Πρόταση 17.2**.

Ας υποθέσουμε ότι $f(A) = \{\delta\}$ με $\delta \in \{0,1\}$. Τότε $\overline{f(A)} = \{\delta\}$ και $f(\overline{A}) \subseteq \{\delta\}$, αφού η f είναι συνεχής σε υπερσύνολο του A και ισχύει το **Θεώρημα 7.1, iv.**. Μάλιστα, επειδή $f(A) \subseteq f(\overline{A})$, αναγκαστικά $f(\overline{A}) = \{\delta\}$.

Επειδή εν γένει (λόγω της $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$) οι εγκλεισμοί:

$$f(A) \subseteq f(B) \subseteq f(\overline{A})$$

ισχύουν, αποδεικνύεται ότι $\{\delta\} \subseteq f(B) \subseteq \{\delta\}$ και κατ' επέκταση ότι $f(B) = \{\delta\}$ (δηλαδή η f είναι σταθερή). Μέσω της **Πρόταση 7.2** αποδεικνύεται η συνεκτικότητα του B.

□

Παρατήρηση 17.3: Η αντίστροφη κατεύθυνση στην **Πρότασης 17.4, ii.** δεν αληθεύει. Για παράδειγμα, στον συνήθη τοπολογικό μετρικό χώρο $(\mathbb{R}, \mathfrak{T}_\varrho)$ έχουμε $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, χωρίς το $\mathbb{Q}$ να είναι συνεκτικό.

Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι ο $(\mathbb{R}, \mathfrak{T}_\varrho)$ είναι συνεκτικός - πριν απ' αυτό όμως θα χρειαστούμε ένα λήμμα.

Λήμμα 17.1: Για κάθε $a < b$ το πραγματικό διάστημα $[a, b]$ είναι συνεκτικό στον συνήθη τοπολογικό μετρικό χώρο $(\mathbb{R}, \mathfrak{T}_\varrho)$. ■

Απόδειξη: Υποθέτουμε προς άτοπο ότι ένα διάστημα $[a, b]$ δεν είναι συνεκτικό. Τότε θα υπάρχουν A, B ανοικτά, μη κενά, ξένα σύνολα τέτοια ώστε $A \cup B = [a, b]$. Εφόσον $A \subseteq [a, b]$ το A είναι φραγμένο και υπάρχει πραγματικό supremum $s = \sup A$, το οποίο ανήκει στο A αφού το τελευταίο είναι κλειστάνοικτο (άρα και κλειστό).

Έστω $s < b$. Σ' αυτήν την περίπτωση υπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε $(s - \varepsilon, s + \varepsilon) \subseteq [a, b]$. Εν τω μεταξύ το A είναι ανοικτό στο $[a, b]$, οπότε υπάρχει $U \in \mathfrak{T}_\varrho$ τέτοιο ώστε $A = U \cap [a, b]$. Επειδή $s \in A$, είναι δυνατόν να βρεθεί $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $(s - \delta, s + \delta) \subseteq U$. Επιλέγοντας $\eta = \min\{\varepsilon, \delta\}$, έχουμε καταφέρει $(s - \eta, s + \eta) \subseteq U \cap [a, b] = A$. Αυτό δίνει αντίφαση, αφού $s + \eta \in A$, $s < s + \eta$ και $s = \sup A$.

Αναγκαστικά λοιπόν $s = b$. Με παρόμοιο τρόπο μπορεί να δειχθεί ότι $\sup B = b$ και ότι $\sup B \in B$. Δηλαδή $A \cap B \supseteq \{b\}$, το οποίο είναι άτοπο στην επιλογή των A, B.

Καταλήγουμε στο ότι κάθε διάστημα $[a, b]$ με $a < b$ είναι συνεκτικό.

□

Θεώρημα 17.1: Ο συνήθης τοπολογικός μετρικός χώρος $(X, \mathfrak{T}_\varrho)$ είναι συνεκτικός.

Απόδειξη: Καθένα από τα διαστήματα $[-n, n]$, $n \in \mathbb{N}$ είναι συνεκτικό, από το **Λήμμα 17.1**. Επειδή η τομή $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}[-n, n]$ δεν είναι κενή, η **Πρόταση 17.3** δίνει ότι το $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}[-n, n] = \mathbb{R}$ είναι συνεκτικό.

□

Παρατήρηση 17.4: Ένα $A \subseteq \mathbb{R}$ είναι συνεκτικό εάν και μόνο αν είναι διάστημα.

Απόδειξη: Εδώ τα μονοσύνολα είναι συνεκτικά και τα θεωρούμε ως (κλειστά) διαστήματα με το ίδιο άκρο. Επιπλέον το κενό σύνολο είναι (ανοικτό) διάστημα με ίδια άκρα. Για να μην πέφτουμε σε τετριμμένες περιπτώσεις, θα εξαιρέσουμε από την απόδειξη αυτού του είδους σύνολα.

($\Rightarrow$) Εάν το A δεν είναι διάστημα, τότε υπάρχουν $x, y \in A$ με $x < y$ και $x < z < y$ με $z \notin A$. Τώρα τα σύνολα $(-\infty, z)$, (z, ∞) είναι ανοικτά στο $\mathbb{R}$, οπότε τα αντίστοιχα $(-\infty, z) \cap A$, $(z, \infty) \cap A$ είναι ανοικτά στο A, και μη κενά αφού το πρώτο περιέχει το x και το δεύτερο το y. Τέμνοντας, παρατηρούμε ότι:

$$\big((-\infty, z) \cap A\big) \cap \big((z, \infty) \cap A\big) = \emptyset$$

και ενώνοντας:

$$\big((-\infty, z) \cap A\big) \cap \big((z, \infty) \cap A\big) = \big(\mathbb{R} \setminus \{z\}\big) \cap A = A$$

(η τελευταία ισότητα δικαιολογείται από το ότι $z \notin A$). Αυτά δείχνουν ότι το A δεν είναι συνεκτικό. Οπότε οπωσδήποτε ένα συνεκτικό σύνολο είναι διάστημα, αφού αν δεν ήταν δεν θα ήταν συνεκτικό.

($\Leftarrow$) Η άλλη κατεύθυνση είναι άμεση συνέπεια του **Λήμματος 17.1**.

□

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 18

Μάθημα 18

Πρόταση 18.1: Έστω δύο τοπολογικοί χώροι $(X, \mathfrak{T}_X)$, $(Y, \mathfrak{T}_Y)$. Εάν ο πρώτος είναι συνεκτικός και υπάρχει συνεχής απεικόνιση $f : (X, \mathfrak{T}_X) \to (Y, \mathfrak{T}_Y)$, τότε το $f(X) \subseteq Y$ είναι συνεκτικό υποσύνολο του Y.

Απόδειξη: Η απόδειξη θα γίνει με άτοπο. Εάν λοιπόν το $f(X)$ δεν είναι συνεκτικό, υπάρχει συνάρτηση $g : f(X) \to \{0, 1\}$ συνεχής και όχι σταθερή (άρα επί του $\{0, 1\}$). Τώρα παρατηρούμε ότι η σύνθεση $g \circ f$:

$$g \circ f : X \xrightarrow{f} f(X) \xrightarrow{g} \{0, 1\}$$

είναι συνεχής και επί, αφού η g είναι επί. Αυτό είναι άτοπο, διότι η $g \circ f$ είναι μια συνεχής συνάρτηση $X \to \{0, 1\}$ στον συνεκτικό χώρο X.

□

Ως πόρισμα της παραπάνω πρότασης παίρνουμε τις ακόλουθες δύο προτάσεις.

Πρόταση 18.2: (Θεώρημα ενδιαμέσων τιμών). Εάν $(X, \mathfrak{T})$ είναι συνεκτικός τοπολογικός χώρος και $f : (X, \mathfrak{T}) \to (\mathbb{R}, \mathfrak{T}_\varrho)$ είναι συνεχής (προς τον συνήθη τοπολογικό μετρικό χώρο), τότε το σύνολο $f(X)$ είναι διάστημα.

Απόδειξη: Από την **Πρόταση 18.1** έπεται ότι το $f(X)$ είναι συνεκτικό, κι από το **Λήμμα 17.1** ότι είναι διάστημα.

□

Πρόταση 18.3: Έστω $\big((X_i, \mathfrak{T}_i)\big)_{i\in I}$ μια οικογένεια τοπολογικών χώρων και $(X = \prod_{i\in I}, \mathfrak{T}_\gamma)$ ο χώρος γινόμενο με την καρτεσιανή τοπολογία. Εάν ο τελευταίος είναι συνεκτικός, τότε καθένας από τους $(X_j, \mathfrak{T}_j)$, $j \in I$ είναι συνεκτικός.

Απόδειξη: Πράγματι, για κάθε $j \in I$ η προβολή $p_j : \prod_{i\in I} X_i \to X_j$ είναι συνεχής συνάρτηση με εικόνα $p_j(\prod_{i\in I} X_i) = X_j$. Το ζητούμενο προκύπτει από την **Πρόταση 18.1**.

□

Το αντίστροφο στην **Πρόταση 18.3** ισχύει και το δείχνουμε με το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 18.1: Έστω $\big((X_i, \mathfrak{T}_i)\big)_{i\in I}$ μια οικογένεια συνεκτικών τοπολογικών χώρων. Ο χώρος γινόμενο $(\prod_{i\in I}, \mathfrak{T}_\gamma)$ με την καρτεσιανή τοπολογία είναι κι αυτός συνεκτικός.

Απόδειξη: Η απόδειξη είναι μακροσκελής και θα γίνει σε βήματα.

Βήμα I: Κατ' αρχάς θα δείξουμε το ζητούμενο στην περίπτωση δύο τοπολογικών χώρων $(X, \mathfrak{T}_X)$, $(Y, \mathfrak{T}_Y)$ (οπότε επαγωγικά θα το έχουμε δείξει για πεπερασμένο πλήθος τοπολογικών χώρων). Για κάθε $x \in X$ θεωρούμε τη συνάρτηση $f_x : Y \to X \times Y$ με $y \mapsto (x, y)$, και ισχυριζόμαστε ότι είναι συνεχής. Πράγματι, από την **Πρόταση 11.1, i.** αρκεί να δείξουμε ότι οι συνθέσεις με τις προβολές είναι συνεχείς. Η $p_X \circ f_x$ είναι συνεχής αφού:

$$p_X \circ f_x(y) = p_X(x, y) = x \text{ (σταθερή)}$$

και η $p_Y \circ f_x$ είναι συνεχής αφού:

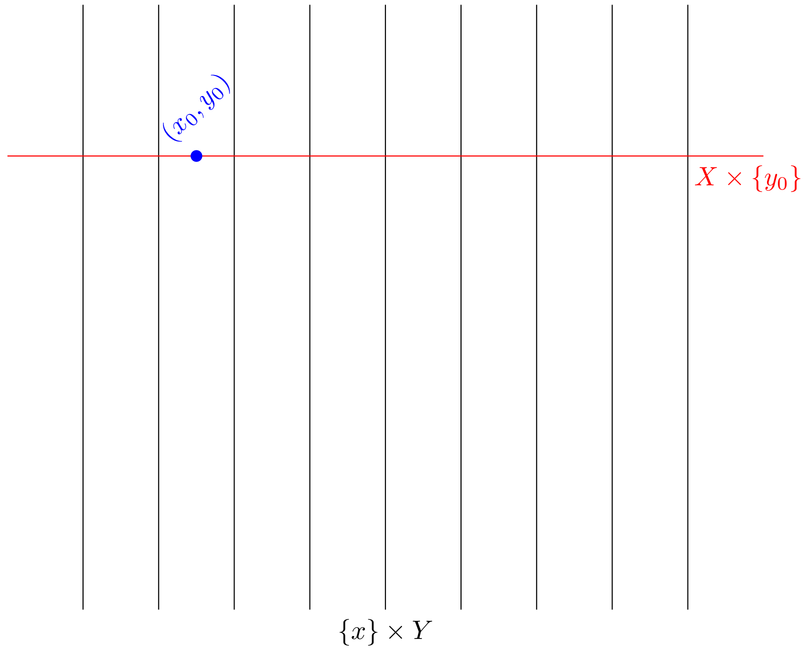
$$p_Y \circ f_x(y) = p_Y(x, y) = y = \mathrm{id}(y)$$

Από την **Πρόταση 18.1** η εικόνα $f_x(Y)$ είναι συνεκτικός υπόχωρος του $X \times Y$, δηλαδή το σύνολο $\{x\} \times Y$ είναι συνεκτικός υπόχωρος του $X \times Y$. Με ανάλογο τρόπο κανείς δείχνει ότι, για σταθεροποιημένο y, το σύνολο $X \times \{y\}$ είναι συνεκτικός υπόχωρος του $X \times Y$.

Σταθεροποιούμε $(x_0, y_0) \in X \times Y$ και για κάθε $x \in X$ ορίζουμε:

$$A_x = (\{x\} \times Y) \cup (X \times \{y_0\})$$

Καθένα από τα A_x είναι συνεκτικό ως ένωση συνεκτικών που δεν έχουν κενή τομή $(\{x\} \times Y) \cap (X \times \{y_0\}) \supseteq \{(x_0, y_0)\}$ (**Πρόταση 17.3**).



Επειδή $X \times Y = \bigcup_{x \in X} A_x$, από την **Πρόταση 17.3** το $X \times Y$ είναι συνεκτικό, εφόσον η τομή δεν είναι κενή μιας και $\bigcap_{x \in X} A_x \supseteq \{(x_0, y_0)\}$.

Βήμα ΙΙ: Για τυχαίο πλήθος τοπολογικών χώρων $(X_i, \mathfrak{T}_i)$, $i \in I$, σταθεροποιούμε $z = (z_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} X_i$ και για κάθε πεπερασμένο $J \subseteq I$ ορίζουμε:

$$X_J = \left\{ x = (x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} X_i \;\middle|\; x_i = z_i \text{ για κάθε } i \notin J \right\}$$

Τώρα, από το **Βήμα Ι** ο χώρος γινόμενο $\prod_{j \in J} X_j$ είναι συνεκτικός. Επιπλέον η απεικόνιση:

$$F : \prod_{j \in J} X_j \to \prod_{i \in I} X_i \text{ με } x \mapsto y \text{ όπου } y_i = \begin{cases} x_j, & i = j \in J \\ z_i, & i \notin J \end{cases}$$

είναι συνεχής με εικόνα $F(\prod_{j \in J} X_j) = X_J$, οπότε καθένας από τους X_J είναι συνεκτικός (βάσει της **Πρότασης 18.1**). Το ότι η F είναι συνεχής προκύπτει από το γεγονός ότι οι διάφορες προβολές p_i είναι σταθερές ή ταυτοτικές, σε συνδυασμό φυσικά με την **Πρόταση 11.1, i.**.

Βήμα ΙΙΙ: Για κάθε πεπερασμένο $J \subseteq I$ έχουμε $z \in X_J$, οπότε η τομή:

$$\bigcap_{\substack{J \subseteq I \\ J \text{ πεπερ.}}} X_J \supseteq \{z\}$$

δεν είναι κενή. Από την **Πρόταση 17.3** η ένωση:

$$Y = \bigcup_{\substack{J \subseteq I \\ J \text{ πεπερ.}}} X_J$$

είναι συνεκτικό υποσύνολο του $\prod_{i\in I} X_i$. Μάλιστα από την **Πρόταση 17.4, ii.** το $\overline{Y}$ είναι επίσης συνεκτικό.

Βήμα IV: Ισχυριζόμαστε ότι $\overline{Y} = \prod_{i\in I} X_i$ - εάν ο ισχυρισμός αληθεύει, τότε το γινόμενο $\prod_{i\in I} X_i$ θα είναι συνεκτικός χώρος.

Θα δείξουμε ότι το Y είναι πυκνό, δηλαδή ότι για κάθε κανονικό βασικό σύνολο $B \neq \emptyset$ αληθεύει $B \cap Y \neq \emptyset$. Γράφουμε κατά τα γνωστά:

$$B = \bigcap_{k=1}^{n} p_{i_k}^{-1}(G_{i_k}),\ G_{i_k} \in \mathfrak{T}_{i_k}$$

και ονομάζουμε $J = \{i_k\}_{k=1}^n$. Τέμνεται το X_J με το B; Εάν η απάντηση είναι καταφατική, επειδή εξ' ορισμού του X_J είναι υποσύνολο του Y, τότε και τα B, Y θα τέμνονται. Εξετάζουμε πότε ένα y ανήκει στο B:

$$\begin{aligned} y \in B \Leftrightarrow y &\in \bigcap_{k=1}^{n} p_{i_k}^{-1}(G_{i_k}) \\ &\Leftrightarrow \forall k,\ y \in p_{i_k}^{-1}(G_{i_k}) \\ &\Leftrightarrow \forall k,\ y_{i_k} \in G_{i_k} \end{aligned}$$

Εάν επιπλέον $y \in X_J$, τότε $y_i = z_i$ για κάθε $i \neq i_k$ (για τα διάφορα k). Οπότε αν επιλέξουμε ένα στοιχείο y τέτοιο ώστε:

$$y_i = \begin{cases} z_i, \text{ εάν } i \notin J = \{i_k\}_{k=1}^n \\ y_i \in G_i, \text{ εάν } i \in J = \{i_k\}_{k=1}^n \end{cases}$$

τότε $y \in X_J \cap B$. Οπότε η τομή $B \cap Y$ δεν είναι κενή, το οποίο αποδεικνύει ότι το Y είναι πυκνό. Δηλαδή $\overline{Y} = \prod_{i\in I} X_i$.

□

Συνεχίζουμε με μερικές ακόμη έννοιες συνεκτικότητας.

Ορισμός 18.1: (Συνεκτικές συνηστώσες). Έστω $(X, \mathfrak{T})$ ένας τοπολογικός χώρος και $A \subseteq X$. Το $A \subseteq X$ λέγεται συνεκτική συνηστώσα εάν είναι συνεκτικό και *δεν* υπάρχει συνεκτικό $B \subseteq X$ με $B \supset A$.

Ισοδύναμα, για κάθε συνεκτικό $B \supseteq A$ έχουμε $B = A$.

Παρατήρηση 18.1: Έστω $(X, \mathfrak{T})$ τοπολογικός χώρος. Για κάθε $x \in X$, το $\{x\}$ είναι συνεκτικό, και κατά συνέπεια η οικογένεια:

$$\mathcal{A}_x = \{A \subseteq X \mid A \text{ συνεκτικό},\ x \in A\}$$

δεν είναι κενή. Μάλιστα $\bigcap \mathcal{A}_x \supseteq \{x\}$ και (από την **Πρόταση 17.3**) το σύνολο $\bigcup \mathcal{A}_x$ είναι συνεκτικό. Είναι επίσης συνεκτική συνηστώσα, από τον ορισμό του.

Ορισμός 18.2: (Συνεκτικές συνηστώσες σημείων). Έστω $(X, \mathfrak{T})$ ένας τοπολογικός χώρος και $x \in X$. Θεωρούμε το σύνολο:

$$\mathcal{A}_x = \{A \subseteq X \mid A \text{ συνεκτικό},\ x \in A\}$$

και ορίζουμε το συνεκτικό σύνολο:

$$C_x = \bigcup \mathcal{A}_x = \bigcup_{A \in \mathcal{A}_x} A$$

το οποίο περιέχει το x. Το C_x καλείται συνεκτική συνηστώσα του x στον τοπολογικό χώρο $(X, \mathfrak{T})$.

Από τον ορισμό του το C_x είναι το μεγαλύτερο συνεκτικό σύνολο στον τοπολογικό χώρο $(X, \mathfrak{T})$ (ως προς τη σχέση του υποσυνόλου) που περιέχει το x.

Πρόταση 18.4: Έστω $(X, \mathfrak{T})$ ένας τοπολογικός χώρος και $x, y \in X$.

i. Για κάθε x το σύνολο C_x είναι κλειστό.

ii. Εάν $y \in C_x$, τότε $C_y = C_x$.

iii. Εάν $C_x \neq C_y$, τότε $C_x \cap C_y = \emptyset$.

Απόδειξη: Για το i.: Εξ ορισμού της η C_x είναι συνεκτικό σύνολο, οπότε από την **Πρόταση 17.4, ii.** το $\overline{C_x}$ είναι επίσης συνεκτικό σύνολο. Επειδή το C_x είναι το μεγαλύτερο συνεκτικό σύνολο που περιέχει το x, έχουμε $C_x = \overline{C_x}$.

Για το ii.: Επειδή το C_y είναι το μεγαλύτερο συνεκτικό σύνολο που περιέχει το y και το C_x είναι συνεκτικό, $C_x \subseteq C_y$. Επειδή $y \in C_x$, υπάρχει συνεκτικό σύνολο A τέτοιο ώστε $x, y \in A$, και κατ' επέκταση $x \in C_y$. Το τελευταίο δείχνει και τον αντίστροφο εγκλεισμό $C_y \subseteq C_x$, αφού το C_x είναι το μεγαλύτερο συνεκτικό σύνολο που περιέχει το x.

Για το iii.: Εάν $C_x \cap C_y \neq \emptyset$, τότε υπάρχει $z \in C_x \cap C_y$. Από το ii. έχουμε $C_x = C_z = C_y$, το οποίο δείχνει ότι $C_x = C_y$. Με αντιθετο-αντιστροφή αποδεικνύεται το iii..

□

Πόρισμα της **Πρότασης 18.4** είναι η ακόλουθη πρόταση:

Πρόταση 18.5: Έστω $(X, \mathfrak{T})$ ένας τοπολογικός χώρος. Το σύνολο $\{C_x \mid x \in X\}$ αποτελεί διαμέριση του X, η οποία ορίζει μια σχέση ισοδυναμίας:

$$x \sim y :\Leftrightarrow C_x = C_y$$

Απόδειξη: Από την **Πρόταση 18.4, iii.** έπεται ότι το σύνολο $\{C_x \mid x \in X\}$ είναι διαμέριση του X.

Αφού είναι διαμέριση, μπορούμε να ορίσουμε μια σχέση ισοδυναμίας:

$$x \sim y :\Leftrightarrow C_x = C_y$$

Η ≪$\sim$≫ είναι πράγματι σχέση ισοδυναμίας:

- Είναι αυτοπαθητική: Επειδή $C_x = C_x$, έχουμε $x \sim x$.
- Είναι συμμετρική: Αν $x \sim y$ τότε $C_x = C_y \Rightarrow C_y = C_x$ και τότε $y \sim x$.
- Είναι μεταβατική: Αν $x \sim y$ και $y \sim z$ τότε $C_x = C_y = C_z$ και τότε $C_x = C_z \Rightarrow x \sim z$.

και η κλάση ${}^{x}/_{\sim}$ του x είναι ακριβώς η C_x.

□

Ορισμός 18.3: (Καμπύλες και κατά τόξα συνεκτικότητα). ,
I. Έστω $(X, \mathfrak{T})$ ένας τοπολογικός χώρος και $x, y \in X$. Μια καμπύλη από το x στο y είναι μια συνεχής απεικόνιση $f : [0,1] \to X$ με $f(0) = x$ και $f(1) = y$.
II. Ένας τοπολογικός χώρος $(X, \mathfrak{T})$ λέγεται κατά τόξα συνεκτικός εάν για κάθε $x, y \in X$ υπάρχει καμπύλη από το x στο y.

Παρατήρηση 18.2: Εάν ένας χώρος $(X, \mathfrak{T})$ είναι κατά τόξα συνεκτικός, τότε είναι και συνεκτικός.

Απόδειξη: Εάν προς άτοπο δεν είναι συνεκτικός, τότε υπάρχουν ανοικτά, μη κενά, ξένα A, B τέτοια ώστε $A \cup B = X$. Επιλέγουμε $a \in A$, $b \in B$ και καμπύλη $f : [0,1] \to X$ με $f(0) = a$ και $f(1) = b$. Γι' αυτήν την f τα σύνολα $f^{-1}(A)$, $f^{-1}(B)$ είναι ανοικτά (επειδή η f είναι συνεχής και τα A, B ανοικτά), μη κενά (αφού $0 \in f^{-1}(A)$, $1 \in f^{-1}(B)$) και ξένα (αφού τα A, B είναι ξένα). Επειδή:

$$f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) = f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(X) = [0,1]$$

καταλήγουμε στο ότι ο χώρος $[0,1]$ δεν είναι συνεκτικός, το οποίο είναι άτοπο.

□

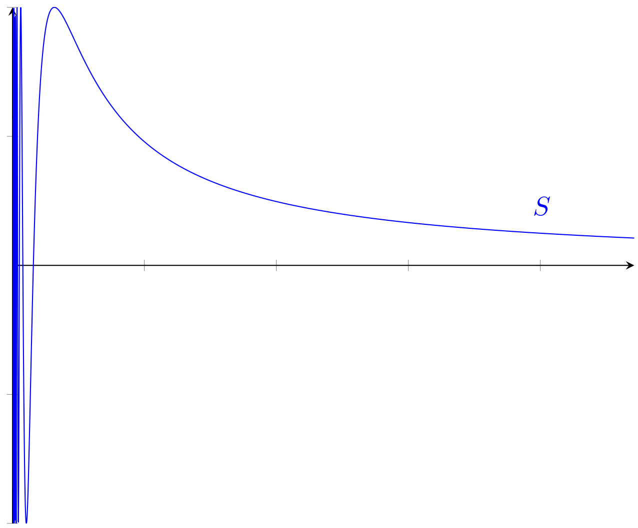
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 19

Μάθημα 19

■ **Παράδειγμα 19.1:**

- Κάθε διάστημα είναι συνεκτικό και κατά τόξα συνεκτικό.
- Το $\mathbb{Q}$ δεν είναι συνεκτικό, οπότε ούτε κατά τόξα συνεκτικό.
- Σε κάθε χώρο $\mathbb{R}^n$ οι μπάλες (είτε ανοικτές είτε κλειστές) είναι κατά τόξα συνεκτικά σύνολα.
- Στον $\mathbb{R}$ (με τη συνήθη μετρική τοπολογία) τα κατά τόξα συνεκτικά σύνολα ταυτίζονται με τα συνεκτικά σύνολα. Για να το δείξουμε αυτό, αρκεί να δείξουμε ότι κάθε συνεκτικό σύνολο είναι κατά τόξα συνεκτικό σύνολο. Επειδή στο $\mathbb{R}$ τα συνεκτικά σύνολα είναι ακριβώς τα διαστήματα, για κάθε a, b μπορούμε να ορίσουμε $f(t) = b + (a - b)t$, $t \in [0, 1]$. Η f είναι καμπύλη από το a στο b.
- Από το $\mathbb{R}^2$ κι έπειτα υπάρχουν παραδείγματα συνεκτικών συνόλων που δεν είναι κατά τόξα συνεκτικά. Ένα πολύ γνωστό προκύπτει από την «ημιτονοειδή καμπύλη του τοπολόγου» (topologist's sine curve), δηλαδή από το σύνολο:

$$S = \big\{ \big(t, \sin(1/t)\big) \mid t \in (0, 1) \big\}$$



Το S είναι κατά τόξα συνεκτικό, κι άρα συνεκτικό σύνολο. Μάλιστα, λόγω της συνεκτικότητάς του, και το $\overline{S} = S \cup (\{0\} \times [-1, 1])$ θα είναι συνεκτικό σύνολο. Μπορεί κανείς όμως να δείξει ότι το $\overline{S}$ δεν είναι κατά τόξα συνεκτικό.

Εάν υποθέσουμε προς άτοπο ότι το $\overline{S}$ είναι κατά τόξα συνεκτικό, τότε για $s_0 \in S$ θα υπάρχει καμπύλη $\tilde{f} : [0, 1] \to \overline{S}$ με $\tilde{f}(1) = s_0$ και $\tilde{f}(0) = (0, 0)$. Ορίζουμε τώρα συνάρτηση:

$$f = \tilde{f}|_{\tilde{f}^{-1}(S)}$$

η οποία είναι συνεχής ως περιορισμός συνεχούς απεικόνισης. Επειδή $f(a) \in S$ για κάθε $a \in \tilde{f}^{-1}(S)$, μπορούμε να γράψουμε:

$$f(a) = \big(t_a, \sin(1/t_a)\big)$$

Ορίζουμε g μέσω του τύπου $a \mapsto t_a$ και επίσης G:

$$G\big(a, \sin(1/a)\big) = \big(g(a), \sin(1/g(a))\big) = f(a)$$

Η g είναι συνεχής απεικόνιση: Πράγματι, αν δεν ήταν, η G δεν θα ήταν συνεχής (και το πρόβλημα έγκειται για παράδειγμα στην πρώτη συντεταγμένη), οπότε ούτε η ίδια η f θα ήταν συνεχής.

Παρατηρούμε ότι για κάποιο $\varepsilon > 0$ θα έχουμε $g(\varepsilon) \neq 0$, αφού η g είναι συνεχής και $f(1) = \tilde{f}(1) = s_0 \neq (0,0)$. Επιλέγουμε:

$$0 < \frac{2}{(2n+1)\pi} < g(\varepsilon)$$

και λόγω της **Πρότασης 18.2** υπάρχει $0 < a_1 < \varepsilon$ ούτως ώστε:

$$g(a_1) = \frac{2}{(2n+1)\pi}$$

Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία και βρίσκουμε $0 < a_2 < a_1$ τέτοιο ώστε:

$$0 < g(a_2) = \frac{2}{(2(n+1)+1)\pi} < g(a_1)$$

και φυσικά συνεχίζουμε επαγωγικά, κατασκευάζοντας ακολουθία $(a_\ell)_{\ell=1}^{\infty}$. Η εν λόγω ακολουθία είναι φραγμένη και φθίνουσα, οπότε συγκλίνει σε κάποιο $0 \leqslant a_\infty < \varepsilon$. Από την άλλη όμως η ακολουθία $\big(\sin(1/g(a_\ell))\big)_{\ell=1}^{\infty}$ είναι εναλλάσσουσα ± 1, οπότε δεν συγκλίνει. Δηλαδή το υπο-όριο:

$$\lim_{a_\ell \to a_\infty} \tilde{f}(a_\ell) = \Big(\lim_{a_\ell \to a_\infty} g(a_\ell), \lim_{a_\ell \to a_\infty} \sin(1/g(a_\ell))\Big)$$

δεν υπάρχει, παρά τη συνέχεια της $\tilde{f}$. Αυτό οδηγεί σε άτοπο.

Πρόταση 19.1: Έστω $(X, \mathfrak{T})$ ένας τοπολογικός χώρος. Η σχέση:

$$x \sim_p y \Leftrightarrow \text{ Υπάρχει καμπύλη } f : [0,1] \to X \text{ με } f(0) = x,\ f(1) = y$$

όπου $x, y \in X$, είναι σχέση ισοδυναμίας.

Απόδειξη: Πράγματι, αν $x, y, z \in X$:

- Είναι αυτοπαθής: Μέσω της σταθερής συνάρτησης $f \equiv x$ αποδεικνύεται ότι $x \sim_p x$.
- Είναι συμμετρική: Εάν $x \sim_p y$, τότε υπάρχει καμπύλη f από το x στο y. Παρατηρούμε ότι η $f(1-\cdot)$ είναι καμπύλη από το y στο x, επομένως $y \sim_p x$.
- Είναι μεταβατική: Εάν $x \sim_p y$ και $y \sim_p z$, τότε υπάρχουν καμπύλες f, g από το x στο y και από το y στο z αντίστοιχα. Ορίζουμε τη συνάρτηση:

$$h(t) = \begin{cases} f(2t), \text{ εάν } t \in [0, 1/2] \\ g(2t-1), \text{ εάν } t \in (1/2, 1] \end{cases}$$

και παρατηρούμε ότι αυτή είναι συνεχής καμπύλη από το x στο y, οπότε $x \sim_p z$. Η ιδέα της κατασκευής της h είναι απλή και έχει, πέρα από μαθηματικό ενδιαφέρον, και φυσική ερμηνεία. Αναζητούμε μια καμπύλη h από το x στο z - γνωρίζοντας καμπύλες από το x στο y και από το y στο z - την οποία μπορούμε να διανύσουμε «σε χρόνο 1». Ο «χρόνος» αυτός είναι φυσική απαίτηση που εκφράζει (μαθηματικά μιλώντας) ότι το πεδίο ορισμού της h είναι το $[0,1]$. Διανύουμε λοιπόν την καμπύλη από το x στο y (έστω f) με διπλάσια ταχύτητα (οπότε υπολογίζουμε στο $2t$), κι έπειτα διανύουμε την υπόλοιπη διαδρομή (έστω g) ξανά με διπλάσια ταχύτητα, προσέχοντας αυτήν την φορά ότι στην αρχή της φτάνουμε σε χρόνο $1/2$ και όχι σε 0 (οπότε υπολογίζουμε στο $2t-1$).

■

Ορισμός 19.1: (Κατά τόξα συνεκτικές συνηστώσες). Έστω $(X, \mathfrak{T})$ ένας τοπολογικός χώρος. Ένα κατά τόξα συνεκτικό σύνολο $A \subseteq X$ λέγεται κατά τόξα συνεκτική συνηστώσα αν δεν υπάρχει άλλο κατά τόξα συνεκτικό B με $B \supset A$.

Ισοδύναμα, για κάθε κατά τόξα συνεκτικό B με $B \supseteq A$ ισχύει $B = A$.

Ορισμός 19.2: (Κατά τόξα συνεκτικές συνηστώσες σημείων). Έστω $(X, \mathfrak{T})$ ένας τοπολογικός χώρος και $x \in X$. Η κλάση:

$$C_x^p = {}^{x}/{\sim_p}$$

ονομάζεται κατά τόξα συνεκτική συνηστώσα του x στον τοπολογικό χώρο $(X, \mathfrak{T})$, και είναι η μεγαλύτερη (ως προς τη σχέση του υποσυνόλου) κατά τόξα συνεκτική συνηστώσα που περιέχει το x.

Παρατήρηση 19.1: Έστω $(X, \mathfrak{T})$ ένας τοπολογικός χώρος. Αξίζει κανείς να παρατηρήσει ότι, εφόσον το C_x^p είναι κατα τόξα συνεκτικό σύνολο, θα είναι και συνεκτικό. Επομένως $C_x^p \subseteq C_x$.

Επιπλέον, καθένα σύνολο C_x μπορεί να διαμεριστεί από κατά τόξα συνεκτικές συνηστώσες.

Ορισμός 19.3: (Τοπική και τοπική κατά τόξα συνεκτικότητα). Έστω $(X, \mathfrak{T})$ ένας τοπολογικός χώρος.
I. Ο τοπολογικός χώρος θα λέγεται τοπικά συνεκτικός στο $x \in X$ εάν υπάρχει βάση περιοχών $\mathcal{B}_x$ του x από συνεκτικά σύνολα.
II. Ο τοπολογικός χώρος θα λέγεται τοπικά κατά τόξα συνεκτικός στο $x \in X$ εάν υπάρχει βάση περιοχών $\mathcal{B}_x$ του x από κατά τόξα συνεκτικά σύνολα.
III. Ο τοπολογικός χώρος λέγεται τοπικά συνεκτικός εάν για κάθε $x \in X$ είναι τοπικά συνεκτικός στο x.
IV. Ο τοπολογικός χώρος λέγεται τοπικά κατά τόξα συνεκτικός εάν για κάθε $x \in X$ είναι τοπικά κατά τόξα συνεκτικός στο x.

Παρατήρηση 19.2: Φυσικά ένα τοπικά κατά τόξα συνεκτικό σύνολο είναι τοπικά συνεκτικό (απόρροια της **Παρατήρησης 18.2**).

■ **Παράδειγμα 19.2:**

- Στο $\mathbb{R}$ το σύνολο $(0, 1) \cup (2, 3)$ δεν είναι συνεκτικό, είναι όμως τοπικά κατά τόξα συνεκτικό.
- Το $\mathbb{Q}$ δεν είναι ούτε τοπικά συνεκτικό. Οπότε δεν είναι συνεκτικό, κατά τόξα συνεκτικό, τοπικά συνεκτικό, τοπικά κατά τόξα συνεκτικό.

■

Πρόταση 19.2: Έστω $(X, \mathfrak{T})$ ένας τοπικά κατά τόξα συνεκτικός τοπολογικός χώρος. Κάθε κατά τόξα συνεκτική συνηστώσα είναι ανοικτή.

Απόδειξη: Έστω C^p μια κατά τόξα συνεκτική συνηστώσα του X. Παρατηρούμε ότι για κάθε $x \in C^p$, $C^p = C_x^p$.

Για κάθε $x \in X$ υπάρχει βάση περιοχών $\mathcal{B}_x$ από κατά τόξα συνεκτικά σύνολα, και ειδικά για τα $x \in C^p = C_x^p$ θα έχουμε $B \subseteq C_x^p$ για κάθε $B \in \mathcal{B}_x$ (μιας και το C_x^p είναι το μεγαλύτερο κατά τόξα συνεκτικό σύνολο που περιέχει το X). Το τελευταίο δείχνει ότι το C^p είναι περιοχή κάθε σημείου του, οπότε βάσει της **Πρότασης 6.1, iii.** είναι ανοικτό σύνολο.

□

Θεώρημα 19.1: Έστω $(X, \mathfrak{T})$ ένας τοπικά κατά τόξα συνεκτικός τοπολογικός χώρος. Οι συνεκτικές συνηστώσες ταυτίζονται με τις κατά τόξα συνεκτικές συνηστώσες.

Απόδειξη: Από την **Παρατήρηση 19.1**, για κάθε $x \in X$ αληθεύει ο εγκλεισμός $C_x^p \subseteq C_x$. Υποθέτουμε τώρα ότι τα δύο σύνολα δεν ταυτίζονται, οπότε το σύνολο $C_x \backslash C_x^p$ είναι μη κενό. Γράφουμε τότε:

$$C_x \backslash C_x^p = \bigcup_{y \in C_x \backslash C_x^p} C_y^p$$

και παρατηρούμε ότι:

$$C_x = C_x^p \cup \Big(\bigcup_{y \in C_x \setminus C_x^p} C_y^p \Big)$$

Αυτό είναι άτοπο, αφού από την **Πρόταση 19.2** τα C_x^p, $\bigcup_{y \in C_x \setminus C_x^p} C_y^p$ είναι ανοικτά και το C_x δεν γράφεται ως ένωση ανοικτών, μη κενών, ξένων συνόλων.

$\square$

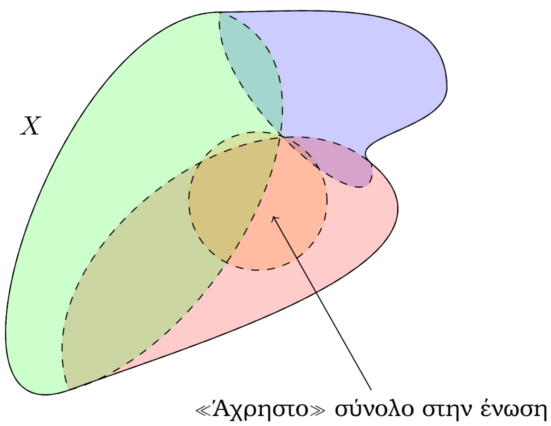
Η επόμενη έννοια με την οποία θα ασχοληθούμε είναι η συμπάγεια.

Ορισμός 19.4: (Συμπαγείς τοπολογικοί χώροι). Ένας τοπολογικός χώρος $(X, \mathfrak{T})$ λέγεται συμπαγής εάν κάθε ανοικτή κάλυψη $\{U_i\}_{i \in I}$ έχει πεπερασμένη υποκάλυψη $\{U_{i_k}\}_{k=1}^n$. Δηλαδή εάν:

$$X = \bigcup_{i \in I} U_i$$

τότε υπάρχει πεπερασμένη υποοικογένεια $\{U_{i_k}\}_{k=1}^n$ ούτως ώστε:

$$X = \bigcup_{k=1}^{n} U_{i_k}$$



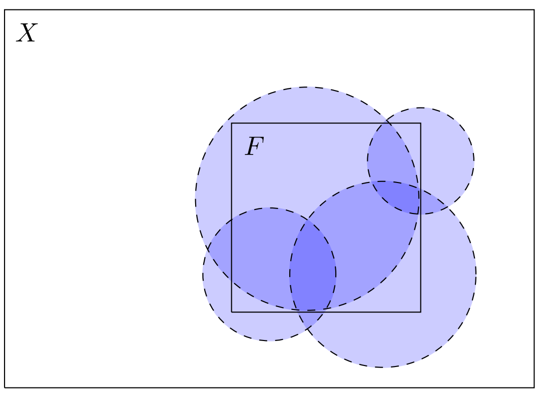
Πρόταση 19.3: Έστω $(X, \mathfrak{T})$ ένας τοπολογικός χώρος και $F \subseteq X$. Τότε ο χώρος $(F, \mathfrak{T}_F)$ με τη σχετική τοπολογία είναι συμπαγής εάν και μόνο αν για κάθε ανοικτή κάλυψη $\{U_i\}_{i \in I}$ του F στην $\mathfrak{T}$ υπάρχει πεπερασμένη υποκάλυψη $\{U_{i_k}\}_{k=1}^n$. Δηλαδή εάν:

$$F \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i, \; U_i \in \mathfrak{T}$$

τότε υπάρχει πεπερασμένη υποοικογένεια $\{U_{i_k}\}_{k=1}^n$ ούτως ώστε:

$$F \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} U_{i_k}$$

Απόδειξη:



($\Rightarrow$) Έστω ότι ο $(F, \mathfrak{T}_F)$ είναι συμπαγής. Θεωρούμε $\{U_i\}_{i\in I}$ μια ανοικτή κάλυψη του F στην $\mathfrak{T}$ και ορίζουμε $V_i = U_i \cap F$. Εφόσον η $\{U_i\}_{i\in I}$ είναι κάλυψη του F στην $\mathfrak{T}$, η $\{V_i\}$ είναι κάλυψη του F στην $\mathfrak{T}_F$. Επειδή ο F είναι συμπαγής, υπάρχει πεπερασμένη υποκάλυψη $\{V_{i_k}\}_{k=1}^n$, κι επειδή εν γένει $U_i \supseteq V_i$, η $\{U_{i_k}\}_{k=1}^n$ είναι επίσης κάλυψη του F.

($\Leftarrow$) Ας θεωρήσουμε $\{V_i\}_{i\in I}$ μια ανοικτή κάλυψη του F στην $\mathfrak{T}_F$. Λόγω της μορφής των ανοικτών συνόλων στις σχετικές τοπολογίες, μπορούν να βρεθούν ανοικτά $U_i \in \mathfrak{T}$ ούτως ώστε $V_i = U_i \cap F$, και κατά συνέπεια:

$$F \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i$$

Από την υπόθεση υπάρχει πεπερασμένη υποκάλυψη $\{U_{i_k}\}_{k=1}^n$, η οποία με τη σειρά της ορίζει πεπερασμένη υποκάλυψη $\{V_{i_k}\}_{k=1}^n$ (αφού $V_i = U_i \cap F$).

□

Πρόταση 19.4: Έστω $(X, \mathfrak{T})$ ένας συμπαγής τοπολογικός χώρος και $F \subseteq X$ ένα κλειστό σύνολο. Το F είναι συμπαγές σύνολο.

Απόδειξη: Θεωρούμε $\{U_i\}_{i\in I}$ μια ανοικτή κάλυψη του F στην $\mathfrak{T}$. Επειδή το F είναι κλειστό, το σύνολο F^c θα είναι ανοικτό, και κατά συνέπεια η οικογένεια:

$$\{U_i\}_{i\in I} \cup \{F^c\}$$

αποτελεί ανοικτή κάλυψη του X. Επειδή ο X είναι συμπαγής, υπάρχει πεπερασμένη υποκάλυψη $\{U_{i_k}\}_{k=1}^n \cup \{F^c\}$ - εδώ παρατηρήστε ότι το F^c ενδέχεται να μην χρειάζεται να προστεθεί, το προσθέτουμε όμως για να μην βλάψουμε τη γενικότητα της περίπτωσης. Τότε λοιπόν:

$$F \subseteq X = \left(\bigcup_{k=1}^n U_{i_k}\right) \cup F^c$$

δηλαδή $F \subseteq \bigcup_{k=1}^n U_{i_k}$, αφού $F \nsubseteq F^c$. Αυτά δείχνουν τη συμπάγεια του F, σύμφωνα με την **Πρόταση 19.3**.

□

Ορισμός 19.5: (Ιδιότητα των πεπερασμένων τομών). Λέμε ότι μια οικογένεια συνόλων $\{F_i\}_{i\in I}$ έχει την ιδιότητα των πεπερασμένων τομών εάν όλες οι πεπερασμένες τομές δεν είναι κενές. Δηλαδή αν για κάθε πεπερασμένη υποοικογένεια $\{F_{i_k}\}_{k=1}^n$:

$$\bigcap_{k=1}^n F_{i_k} \neq \emptyset$$

Πρόταση 19.5: Ένας τοπολογικός χώρος $(X, \mathfrak{T})$ είναι συμπαγής εάν και μόνο αν για κάθε οικογένεια $\{F_i\}_{i\in I}$ κλειστών υποσυνόλων του X που έχει την ιδιότητα των πεπερασμένων τομών αληθεύει:

$$\bigcap_{i\in I} F_i \neq \emptyset$$

Απόδειξη: ($\Rightarrow$) Έστω μια οικογένεια $\{F_i\}_{i\in I}$ κλειστών υποσυνόλων του X που έχει την ιδιότητα των πεπερασμένων τομών. Υποθέτουμε προς άτοπο ότι:

$$\bigcap_{i\in I} F_i = \emptyset, \text{ δηλαδή } \bigcup_{i\in I} F_i^c = X$$

Τα F_i είναι κλειστά, οπότε η οικογένεια $\{F_i^c\}_{i\in I}$ αποτελεί ανοικτή κάλυψη του X. Επειδή ο X είναι συμπαγής, υπάρχει πεπερασμένη υποκάλυψη $\{F_{i_k}^c\}_{k=1}^n$ του X, το οποίο είναι άτοπο αφού:

$$\bigcup_{k=1}^n F_{i_k}^c = X \Rightarrow \bigcap_{k=1}^n F_{i_k} = \emptyset$$

(⇐) Έστω $\{U_i\}_{i\in I}$ μια ανοικτή κάλυψη του X. Τα σύνολα U_i είναι ανοικτά, οπότε τα U_i^c είναι κλειστά. Η οικογένεια $\{U_i^c\}_{i\in I}$ δεν έχει την ιδιότητα των πεπερασμένων τομών, αφού:

$$\bigcup_{i\in I} U_i = X \Rightarrow \bigcap_{i\in I} U_i^c = \emptyset$$

οπότε υπάρχει κάποια πεπερασμένη υποοικογένεια $\{U_{i_k}^c\}_{k=1}^n$ ούτως ώστε:

$$\bigcap_{k=1}^n U_{i_k}^c = \emptyset$$

Δηλαδή:

$$\bigcup_{k=1}^n U_{i_k} = X$$

το οποίο αποδεικνύει ότι η κάλυψη $\{U_i\}_{i\in I}$ έχει πεπερασμένη υποκάλυψη $\{U_{i_k}\}_{k=1}^n$.

□

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 20

Μάθημα 20

Θεώρημα 20.1: Ένας χώρος $(X, \mathfrak{T})$ είναι συμπαγής εάν και μόνο αν κάθε δίκτυο έχει οριακό σημείο.

Χρησιμοποιώντας το **Θεώρημα 9.1** αποδεικνύεται επιπλέον ότι ο χώρος είναι συμπαγής εάν και μόνο αν κάθε δίκτυο έχει συγκλίνον υποδίκτυο.

Απόδειξη: ($\Rightarrow$) Έστω $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ ένα δίκτυο στον X. Για κάθε $\mu \in \Lambda$ ορίζουμε τα «τελικά τμήματα»:

$$S_\mu = \overline{\{x_\lambda \mid \lambda \geq \mu\}}$$

τα οποία συνηστούν μια οικογένεια από κλειστά σύνολα, από τον ορισμό τους. Επιπλέον:

$$\mu_1 \leq \mu_2 \Rightarrow S_{\mu_1} \supseteq S_{\mu_2}$$

Η οικογένεια $\{S_\mu\}_{\mu\in\Lambda}$ έχει την ιδιότητα των πεπερασμένων τομών, λόγω αυτής της μονοτονίας. Πράγματι, για κάθε πεπερασμένο πλήθος $\{S_{\mu_k}\}_{k=1}^n$ μπορεί να βρεθεί $\mu \geq \mu_1, \cdots, \mu_n$, και λόγω μονοτονίας:

$$S_\mu \subseteq S_{\mu_1}, \cdots, S_{\mu_n}, \text{ δηλαδή } \emptyset \neq S_\mu \subseteq \bigcap_{k=1}^n S_{\mu_k}$$

Επειδή τώρα ο χώρος είναι συμπαγής, βάσει της **Πρότασης 19.5**:

$$\bigcap_{\mu\in\Lambda} S_\mu \neq \emptyset$$

Φαίνεται ότι κάθε $x \in \bigcap_{\mu\in\Lambda}^n S_\mu$ θα αποτελεί οριακό σημείο του υποδικτύου - θα το δείξουμε ευθύς αμέσως. Εάν $U \in \mathcal{N}_x$ και $\mu \in \Lambda$, τότε $x \in S_\mu = \overline{\{x_\lambda \mid \lambda \geq \mu\}}$. Από τον χαρακτηρισμό των κλειστών θηκών με τομές ανοικτών (**Πρόταση 5.2, ii.**), $U^\circ \cap \{x_\lambda \mid \lambda \geq \mu\} \neq \emptyset$. Δηλαδή $U \cap \{x_\lambda \mid \lambda \geq \mu\} \neq \emptyset$ και κατ' επέκταση υπάρχει $\lambda \geq \mu$ με $x_\lambda \in U$.

($\Leftarrow$) Θα δείξουμε ότι κάθε οικογένεια κλειστών συνόλων με την ιδιότητα των πεπερασμένων τομών έχει μη κενή τομή, οπότε από την **Πρόταση 19.5** θα έχει αποδειχθεί η συμπάγεια του X.

Έστω $\{F_i\}_{i\in I}$ μια οικογένεια από κλειστά με την ιδιότητα των πεπερασμένων τομών. Για κάθε πεπερασμένο $J \subseteq I$ επιλέγουμε:

$$x_J \in \bigcap_{j\in J} F_j$$

(εφόσον τα διάφορα $\bigcap_{j\in J} F_j$ δεν είναι κενά) και κατασκευάζουμε δίκτυο $(x_J)_{J\subseteq I,\ J \text{ πεπερ.}}$. Για να ορίσουμε βέβαια καλά το δίκτυο χρειαζόμαστε ένα κατευθυνόμενο σύνολο, το οποίο κατασκευάζουμε τώρα: Ορίζουμε:

$$\Lambda = \{J \subseteq I \mid J \text{ πεπερασμένο}\}$$

και τη σχέση $J_1 \leq J_2 :\Leftrightarrow J_1 \subseteq J_2$. Το σύνολο $(\Lambda, \leq)$ είναι κατευθυνόμενο και το εν λόγω δίκτυο γίνεται $(x_J)_{J\in\Lambda}$.

Από την υπόθεση το δίκτυο αυτό έχει οριακό σημείο, έστω x, επομένως για κάθε $U \in \mathcal{N}_x$ και για κάθε πεπερασμένο $J_0 \subseteq I$, υπάρχει $J \geq J_0$ με $x_J \in U$. Ειδικότερα, για κάθε $i \in I$, αν ορίσουμε $J_0 = \{i\}$ τότε υπάρχει $J \geq J_0 = \{i\}$ τέτοιο ώστε $x_J \in U$.

Υπενθυμίζουμε ότι $x_J \in \bigcap_{j \in J} F_j$ και $J \geq J \Rightarrow J \supseteq J_0 \Rightarrow i \in J$, οπότε:

$$x_J \in \bigcap_{j \in J} F_j \subseteq F_i$$

Αυτό δείχνει ότι για κάθε $i \in I$ έχουμε $U \cap F_i \neq \emptyset$, δηλαδή $x \in \overline{F_i}$ (αφού τα $U \in \mathcal{N}_x$ ήταν τυχόντα, οι περιοχές είναι υπερσύνολο των ανοικτών περιοχών, και ισχύει η **Πρόταση 5.2, ii.**). Τα διάφορα F_i είχαν εξ αρχής υποτεθεί κλειστά, οπότε στην πραγματικότητα έχουμε δείξει ότι:

$$x \in F_i \text{ για κάθε } i \in I \Rightarrow x \in \bigcap_{i \in I} F_i$$

το οποίο ήταν το ζητούμενο (η τομή δεν είναι κενή).

□

Πόρισμα του **Θεωρήματος 20.1** είναι το ακόλουθο.

Παρατήρηση 20.1: Εάν ένας τοπολογικός χώρος $(X, \mathfrak{T})$ είναι T_2 και $K \subseteq X$ είναι ένα συμπαγές υποσύνολο, τότε το K είναι κλειστό.

Απόδειξη: Έστω $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ένα δίκτυο του K το οποίο συγκλίνει σε $x \in X$. Το x είναι το μοναδικό όριο του δικτύου διότι ο X είναι T_2 χώρος (**Θεώρημα 13.1**). Κατ' επέκταση το x είναι το μοναδικό οριακό σημείο. Το **Θεώρημα 20.1** εξασφαλίζει ότι το x ανήκει στο K, αφού ο χώρος K είναι συμπαγής και το $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ έχει οριακό σημείο στο K. Μέσω της **Πρότασης 8.2, i.** αποδεικνύεται ότι το K είναι κλειστό.

□

Παρατήρηση 20.2: Ως τώρα έχουμε δει ότι αν ένας τοπολογικός χώρος $(X, \mathfrak{T})$ είναι συμπαγής, τότε τα κλειστά είναι συμπαγή (**Πρόταση 19.4**). Επίσης είδαμε ότι αν είναι T_2, τότε τα συμπαγή είναι κλειστά (**Παρατήρηση 20.1**). Οπότε σε έναν T_2 και συμπαγή τοπολογικό χώρο τα κλειστά σύνολα ταυτίζονται με τα συμπαγή.

Πρόταση 20.1: Έστω $(X, \mathfrak{T})$ ένας συμπαγής τοπολογικός χώρος και $K \subseteq X$.

i. Έστω $F \subseteq X$. Εάν για κάθε $x \in K$ τα x και F διαχωρίζονται από ανοικτά, τότε και τα K, F διαχωρίζονται από ανοικτά. (Αυτή η ιδιότητα μοιάζει με την T_4, δεν προϋποθέτει όμως τα K, F να είναι κλειστά).

ii. Εάν ο $(X, \mathfrak{T})$ είναι T_2 χώρος και $F \subseteq X$ συμπαγές με $K \cap F = \emptyset$, τα K, F διαχωρίζονται από ανοικτά.

iii. Εάν ο $(X, \mathfrak{T})$ είναι T_3 και το $F \subseteq X$ είναι κλειστό με $K \cap F = \emptyset$, τα K, F διαχωρίζονται από ανοικτά.

Απόδειξη: Για το **i.**: Υποθέτουμε ότι για κάθε $x \in K$ υπάρχουν ανοικτά U_x, V_x τέτοια ώστε:

$$x \in U_x, \ F \subseteq V_x \ \textbf{και} \ U_x \cap V_x = \emptyset$$

Μαζεύοντας για τα διάφορα $x \in K$, η οικογένεια $\{U_x\}_{x \in K}$ αποτελεί κάλυψη του συμπαγούς K - οπότε υπάρχει πεπερασμένη υποκάλυψη $\{U_{x_k}\}_{k=1}^n$. Ορίζουμε $U = \bigcup_{k=1}^n U_{x_k}$, το οποίο είναι ανοικτό σύνολο.

Θέτουμε $V = \bigcap_{k=1}^n V_{x_k}$ και παρατηρούμε ότι αυτό είναι ανοικτό σύνολο, κι επιπλέον $F \subseteq V$. Ισχυριζόμαστε ότι $U \cap F = \emptyset$, οπότε τα U, V είναι ανοικτά σύνολα που διαχωρίζουν τα K, F. Πράγματι, εάν $z \in U \cap V$, τότε:

$$z \in U_{x_k} \text{ για κάποιο } k \ \textbf{και} \ z \in V_{x_\ell} \text{ για όλα τα } \ell$$

Αυτό είναι άτοπο, αφού για $\ell = k$ έχουμε $U_{x_k} \cap V_{x_k} \neq \emptyset$.

Για το **ii.**: Έστω $x \in K$. Για κάθε $y \in F$ τα x, y δεν ταυτίζονται (αφού $K \cap F \neq \emptyset$). Λόγω του T_2 του χώρου μπορούν να βρεθούν $U_y, V_y \in \mathfrak{T}$ τέτοια ώστε:

$$x \in U_y, \ y \in V_y \ \textbf{και} \ U_y \cap V_y = \emptyset$$

και μαζεύοντας για τα διάφορα $y \in F$, το σύνολο $\{V_y\}_{y \in F}$ αποτελεί κάλυψη του F. Επειδή το F είναι συμπαγές, υπάρχει πεπερασμένη υποκάλυψη $\{V_{y_k}\}_{k=1}^n$. Ορίζουμε λοιπόν $V = \bigcup_{k=1}^n V_{y_k}$.

Επιπλέον, θεωρούμε το σύνολο $U = \bigcap_{k=1}^{n} U_{y_k}$, το οποίο εξ ορισμού του περιέχει το x. Μάλιστα τα U, V είναι ξένα, αφού αν υπήρχε $z \in U \cap V$, τότε (όπως και στην απόδειξη του i.) θα καταλήγαμε σε άτοπο. Επειδή τα U, V είναι ξένα, έχουμε δείξει ότι για κάθε $x \in K$ τα x και F διαχωρίζονται από ανοικτά. Από το i. και τα K, F διαχωρίζονται από ανοικτά σύνολα.

Για το iii.: Λόγω του T_3 του χώρου για κάθε $x \in K$ τα x, F διαχωρίζονται από ανοικτά. Από το i. έπεται ότι και τα K, F διαχωρίζονται από ανοικτά.

□

Με βάση την προηγούμενη πρόταση μπορούμε να αποδείξουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα.

Πρόταση 20.2: Εάν ένας τοπολογικός χώρος $(X, \mathfrak{T})$ είναι T_2 και συμπαγής, τότε είναι και T_4.

Απόδειξη: Έστω F_1, F_2 δύο κλειστά και ξένα σύνολα. Από την **Πρόταση 19.4** τα F_1, F_2 είναι συμπαγή, κι από την **Πρόταση 20.1, ii.** διαχωρίζονται από ανοικτά.

□

Πρόταση 20.3: Έστω $(X, \mathfrak{T}_X)$, $(Y, \mathfrak{T}_Y)$ δύο τοπολογικοί χώροι εκ των οποίων ο πρώτος είναι συμπαγής. Εάν $f : (X, \mathfrak{T}_X) \to (Y, \mathfrak{T}_Y)$ είναι συνεχής απεικόνιση, τότε το $f(X)$ είναι συμπαγές σύνολο.

Απόδειξη: Ας θεωρήσουμε $\{V_i\}_{i \in I}$ ένα ανοικτό κάλυμμα του $f(X)$. Τότε το $\{f^{-1}(V_i)\}_{i \in I}$ θα είναι ανοικτή κάλυψη του συμπαγούς X, οπότε υπάρχει πεπερασμένη υποκάλυψη $\{f^{-1}(V_{i_k})\}_{k=1}^{n}$. Η τελευταία δίνει μία κάλυψη $\{V_{i_k}\}_{k=1}^{n}$ του $f(X)$, που είναι υποκάλυψη της $\{V_i\}_{i \in I}$.

□

Πρόταση 20.4: (Θεώρημα μέγιστης-ελάχιστης τιμής). Έστω $(X, \mathfrak{T})$ ένας συμπαγής τοπολογικός χώρος και $f : X \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση (εννοείται το $\mathbb{R}$ εφοδιάζεται με τη συνήθη μετρική τοπολογία). Τότε η f παίρνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή.

Απόδειξη: Κατ' αρχάς από την **Πρόταση 20.3** το σύνολο $f(X) \subseteq \mathbb{R}$ είναι συμπαγές, οπότε είναι και κλειστό (**Παρατήρηση 20.1**). Θα δείξουμε ότι κάθε συμπαγές σύνολο στον $\mathbb{R}$ είναι φραγμένο, οπότε το $f(X)$ θα είναι κλειστό και φραγμένο.

Πράγματι, εάν υπήρχε σύνολο συμπαγές και όχι φραγμένο, η $\{(-n, n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ θα ήταν μια ανοικτή κάλυψή του που δεν έχει πεπερασμένη υποκάλυψη.

Εφόσον το $f(X)$ είναι φραγμένο, υπάρχουν οι αριθμοί $\inf f(X)$, $\sup f(X)$. Επιλέγουμε δύο ακολουθίες $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ και $(m_n)_{n \in \mathbb{N}}$ του $f(X)$ τέτοιες ώστε:

$$\mu_n \to \inf f(X),\ m_n \to \sup f(X)$$

κι επειδή το $f(X)$ είναι κλειστό, $\inf f(X)$, $\sup f(X) \in f(X)$. Εδώ να σημειωθεί ότι η επιλογή των ακολουθιών είναι δυνατή από τον ορισμό των inf, sup. Αυτά δείχνουν ότι $\inf f(x) = \min f(X)$ και $\sup f(X) = \max f(X)$.

□

Θεώρημα 20.2: Έστω $(X, \mathfrak{T}_X)$ ένας συμπαγής τοπολογικός χώρος και $(Y, \mathfrak{T}_Y)$ ένας T_2. Εάν μια $f : X \to Y$ είναι συνεχής και αμφιμονοσήμαντη, τότε και η f^{-1} είναι συνεχής. Οπότε η f είναι ομοιομορφισμός.

Απόδειξη: Βάσει του **Θεωρήματος 7.1, iii.**, η f^{-1} είναι συνεχής εάν και μόνο αν η f είναι κλειστή. Θεωρούμε λοιπόν ένα $K \subseteq X$ κλειστό σύνολο. Επειδή ο χώρος είναι συμπαγής, το K θα είναι κι αυτό συμπαγές (**Πρόταση 19.4**). Επειδή η f είναι συνεχής, το $f(K)$ θα είναι συμπαγές (**Πρόταση 20.3**). Επειδή ο Y είναι T_2, το $f(K)$ θα είναι κλειστό (**Παρατήρηση 20.1**), οπότε αποδεικνύεται ότι η f είναι κλειστή.

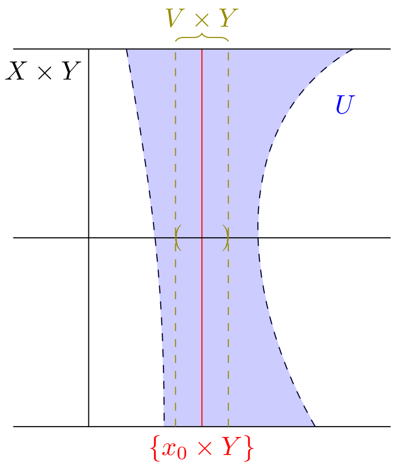
□

Λήμμα 20.1: (Λήμμα του σωλήνα). Έστω $(X, \mathfrak{T}_X)$, $(Y, \mathfrak{T}_Y)$ δύο τοπολογικοί χώροι με τον δεύτερο να είναι συμπαγής. Αν $x_0 \in X$ και $U \subseteq X \times Y$ είναι ένα ανοικτό σύνολο στην τοπολογία γινόμενο $\mathfrak{T}_\gamma$ με $\{x_0\} \times Y \subseteq U$, τότε υπάρχει ανοικτή περιοχή V του x_0 τέτοια ώστε:

$$\{x_0\} \times Y \subseteq V \times Y \subseteq U$$

■

Απόδειξη:



Για κάθε $y \in Y$ το (x_0, y) ανήκει στο «νήμα» $\{x_0\} \times Y$, οπότε και στο U. Βρίσκουμε λοιπόν κανονικό βασικό σύνολο:

$$V_y \times W_y \subseteq U,\ V_y \in \mathfrak{T}_X,\ W_y \in \mathfrak{T}_Y$$

τέτοιο ώστε $(x_0, y) \in V_y \times W_y$. Μαζεύοντας για τα διάφορα $y \in Y$, η οικογένεια $\{W_y\}_{y \in Y}$ είναι ανοικτή κάλυψη του Y, οπότε μπορεί να βρεθεί πεπερασμένη υποκάλυψη $\{W_{y_k}\}_{k=1}^n$ λόγω της συμπάγειας του χώρου Y. Παρατηρούμε τότε ότι:

$$\{x_0\} \times Y \subseteq V_y \times \bigcup_{k=1}^{n} W_{y_k} \subseteq U$$

οπότε θέτοντας $V = \bigcap_{k=1}^n V_{y_k}$, το V είναι ανοικτή περιοχή του x_0 και επιπλέον:

$$\{x_0\} \times Y \subseteq V \times Y \subseteq U$$

Πράγματι, αν $(x, y) \in V \times Y$, τότε υπάρχει $W_{y_{k_0}}$ με $y \in W_{y_{k_0}}$, και κατά συνέπεια υπάρχει $V_{y_{k_0}} \times W_{y_{k_0}}$ ούτως ώστε $(x, y) \in V_{y_{k_0}} \times W_{y_{k_0}}$. Οπότε:

$$(x, y) \in V \times Y \subseteq V_{y_{k_0}} \times W_{y_{k_0}} \subseteq U$$

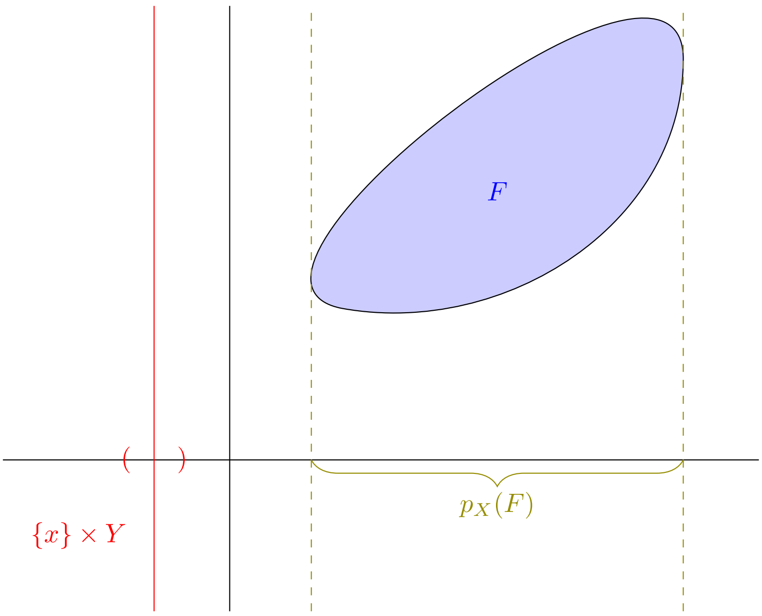
□

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 21

Μάθημα 21

Πρόταση 21.1: Έστω $(X, \mathfrak{T}_X)$, $(Y, \mathfrak{T}_Y)$ δύο τοπολογικοί χώροι με τον δεύτερο να είναι συμπαγής. Τότε η προβολή $p_X : X \times Y \to X$ είναι κλειστή.

Απόδειξη: Έστω $F \subseteq X \times Y$ κλειστό σύνολο (στην τοπολογία γινόμενο). Θα δείξουμε ότι το $p_X(F) \subseteq X$ είναι κλειστό.



Αρκεί να δείξουμε γι' αυτό ότι το $X \backslash p_X(F)$ είναι ανοικτό. Θεωρούμε λοιπόν $x \in X \backslash p_X(F)$. Για κάθε $y \in Y$ θα έχουμε $(x, y) \notin F$, δηλαδή $\{x\} \times Y \subseteq F^c$. Επειδή το F είναι κλειστό, το F^c είναι ανοικτό, κι από το **Λήμμα 20.1** υπάρχει ανοικτό $V \in \mathcal{N}_x^{\mathfrak{T}_X}$ ούτως ώστε:

$$\{x\} \times Y \subseteq V \times Y \subseteq F^c$$

Επιπλέον θα δείξουμε ότι $V \subseteq X \backslash p_X(F)$. Πράγματι, διαφορετικά θα υπήρχε $z \in V$ με $z \notin X \backslash p_X(F)$, δηλαδή θα υπήρχε $z \in V$ και $z \in p_X(F)$.

Αυτό είναι άτοπο, αφού αν $z \in p_X(F)$ τότε θα υπάρχει $y \in Y$ με $(z, y) \in F$, οπότε:

$$F \ni (z, y) \in V \times Y \subseteq F^c$$

□

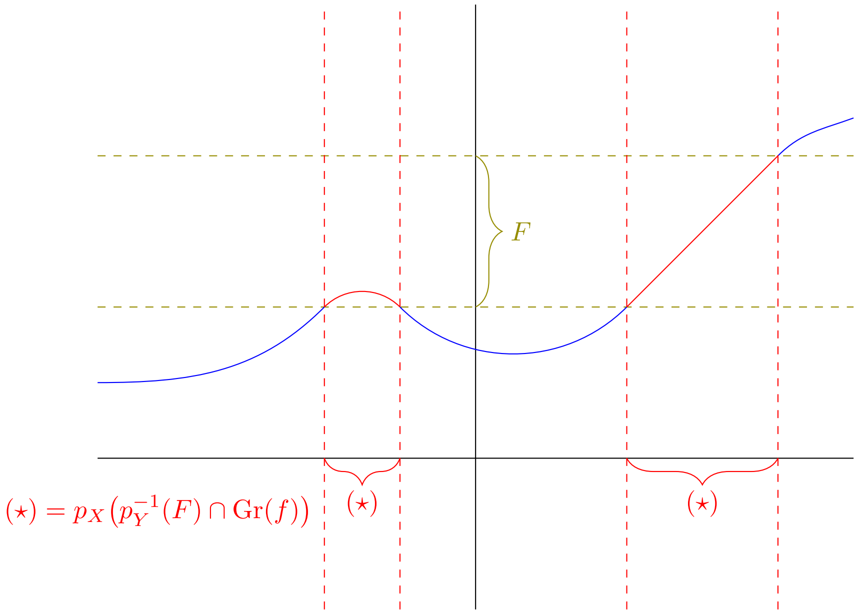
Πρόταση 21.2: Έστω $(X, \mathfrak{T}_X)$, $(Y, \mathfrak{T}_Y)$ δύο τοπολογικοί χώροι εκ των οποίων ο δεύτερος είναι συμπαγής και T_2. Μια απεικόνιση $f : X \to Y$ είναι συνεχής εάν και μόνο αν το γράφημά της $\mathrm{Gr}(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in X\}$ είναι κλειστό στο $X \times Y$ (εννοείται με την τοπολογία γινόμενο).

Απόδειξη: ($\Rightarrow$) Έστω $\big((x_\lambda, f(x_\lambda))\big)_{\lambda\in\Lambda}$ ένα δίκτυο στο $\mathrm{Gr}(f)$ με $(x_\lambda, f(x_\lambda)) \to (x, y)$. Λόγω της προηγούμενης σύγκλισης θα έχουμε $x_\lambda \to x$ και $f(x_\lambda) \to y$. Επειδή επιπλέον η f είναι συνεχής, $f(x_\lambda) \to f(x)$, κι επειδή ο χώρος Y είναι T_2 το όριο είναι μοναδικό (**Θεώρημα 13.1**) - οπότε $f(x) = y$. Αυτό δείχνει ότι $(x, y) \in \mathrm{Gr}(f)$ και κατ' επέκταση ότι το $\mathrm{Gr}(f)$ είναι κλειστό.

($\Leftarrow$) Θα δείξουμε ότι η f είναι συνεχής δείχνοντας ότι αντιστρέφει τα κλειστά σε κλειστά. Έστω λοιπόν $F \subseteq Y$ κλειστό. Λόγω της συνέχειας της προβολής, το $p_Y^{-1}(F)$ θα είναι κλειστό (στη σχετική τοπολογία), οπότε και το $p_Y^{-1}(F) \cap \mathrm{Gr}(f)$ (ως τομή κλειστών). Επιπλέον από την **Πρόταση 21.1** το σύνολο:

$$p_X\big(p_Y^{-1}(F) \cap \mathrm{Gr}(f)\big)$$

είναι κλειστό. Ισχυριζόμαστε ότι $f^{-1}(F) = p_X\big(p_Y^{-1}(F) \cap \mathrm{Gr}(f)\big)$, οπότε το $f^{-1}(F)$ είναι κλειστό.



Πράγματι:

$$\begin{aligned}
x \in p_X\big(p_Y^{-1}(F) \cap \mathrm{Gr}(f)\big) &\Leftrightarrow \exists y \in Y \text{ με } (x, y) \in p_Y^{-1}(F) \cap \mathrm{Gr}(f) \\
&\Leftrightarrow \exists y \in Y \text{ με } (x, y) \in p_Y^{-1}(F) \textbf{ και } (x, y) \in \mathrm{Gr}(f) \\
&\Leftrightarrow x \in f^{-1}(F)
\end{aligned}$$

□

Πρόταση 21.3: Δύο τοπολογικοί χώροι $(X, \mathfrak{T}_X)$, $(Y, \mathfrak{T}_Y)$ είναι συμπαγείς εάν και μόνο αν ο χώρος πηλίκο $(X \times Y, \mathfrak{T}_\gamma)$ είναι συμπαγής. Με επαγωγή μπορεί να αποδειχθεί ανάλογο αποτέλεσμα για πεπερασμένο πλήθος τοπολογικών χώρων.

Απόδειξη: ($\Rightarrow$) Θα αποδείξουμε αυτήν την κατεύθυνση κάνοντας χρήση του **Θεωρήματος 20.1**.

Έστω $\big((x_\lambda, y_\lambda)\big)_{\lambda\in\Lambda}$ ένα δίκτυο στον $X \times Y$. Το $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ είναι ένα δίκτυο στον συμπαγή χώρο X, οπότε από το **Θεώρημα 20.1** υπάρχει συγκλίνον υποδίκτυο $(x_{\varphi(\mu)})_{\mu\in M}$, $x_{\varphi(\mu)} \to x$.

Τώρα το δίκτυο $(y_{\varphi(\mu)})_{\mu\in M}$ βρίσκεται στον συμπαγή χώρο Y, οπότε ξανά από το **Θεώρημα 20.1** βρίσκουμε συγκλίνον υποδίκτυο $(y_{\varphi\circ\psi(\kappa)})_{\kappa\in K}$, $y_{\varphi\circ\psi(\kappa)} \to y$. Είναι φανερό ότι το υποδίκτυο $(x_{\varphi\circ\psi(\kappa)})_{\kappa\in K}$ συγκλίνει στο x - αφού είναι υποδίκτυο συγκλίνοντος δικτύου προς το x. Κατά συνέπεια το δίκτυο $\big((x_{\varphi\circ\psi(\kappa)}, y_{\varphi\circ\psi(\kappa)})\big)_{\kappa\in K}$, που είναι υποδίκτυο του $\big((x_\lambda, y_\lambda)\big)_{\lambda\in\Lambda}$, συγκλίνει στο (x, y), κι από το **Θεώρημα 20.1** αποδεικνύεται η συμπάγεια του χώρου γινόμενο.

(⇐) Αυτή η κατεύθυνση είναι συνέπεια της **Πρότασης 20.3**, μιας κάθε προβολή είναι συνεχής και επί.

□

Γενικά αληθεύει η παραπάνω ισοδυναμία για αυθαίρετο πλήθος τοπολογικών χώρων; Η απάντηση είναι καταφατική. Κατ' αρχάς, η αντίστροφη κατεύθυνση ισχύει πάντα, σύμφωνα με την ακόλουθη παρατήρηση.

Παρατήρηση 21.1: Έστω $\left(X_i, \mathfrak{T}_i\right)_{i\in I}$ μια οικογένεια τοπολογικών χώρων. Εάν ο χώρος γινόμενο $(\prod_{i\in I} X_i, \mathfrak{T}_\gamma)$ είναι συμπαγής, καθένας από τους επιμέρους συντεταγμένους τοπολογικούς χώρους $(X_i, \mathfrak{T}_i)$ είναι συμπαγής.

Απόδειξη: Η παρατήρηση είναι συνέπεια της **Πρότασης 20.3**, μιας κάθε προβολή είναι συνεχής και επί.

□

Η ευθεία κατεύθυνση στη γενική περίπτωση είναι δύσκολο να αποδειχθεί και είναι συνέπεια του ακόλουθου σημαντικού θεωρήματος, το οποίο θα παραθέσουμε χωρίς απόδειξη.

Θεώρημα 21.1: (Θεώρημα του Tychonoff). Έστω $\left(X_i, \mathfrak{T}_i\right)_{i\in I}$ μια οικογένεια τοπολογικών χώρων. Οι τοπολογικοί χώροι $(X_i, \mathfrak{T}_i)$ είναι συμπαγείς εάν και μόνο αν ο χώρος γινόμενο $(\prod_{i\in I} X_i, \mathfrak{T}_\gamma)$ είναι συμπαγής.

Μια απόδειξη μπορεί να βρεθεί στο (B2, Θεώρημα 7.3.4).

Στη συνέχεια θα ασχοληθούμε με διάφορες έννοιες διαχωρισιμότητας σε τοπολογικούς χώρους.

Ορισμός 21.1: (Διαχωρίσιμοι τοπολογικοί χώροι). Ένας τοπολογικός χώρος $(X, \mathfrak{T})$ καλείται διαχωρίσμος εάν υπάρχει αριθμήσιμο πυκνό σύνολο $D \subseteq X$.

■ **Παράδειγμα 21.1:**

- Ο $(\mathbb{R}, \mathfrak{T}_\varrho)$ με τη συνήθη μετρική τοπολογία είναι διαχωρίσιμος, διότι το $\mathbb{Q}$ είναι αριθμήσιμο και πυκνό.
- Ο $(\mathbb{R}, \mathfrak{T}_S)$ με την τοπολογία των αριστερά ημιάνοικτων διαστημάτων είναι διαχωρίσιμος, διότι το $\mathbb{Q}$ είναι αριθμήσιμο και πυκνό.
- Στον διακριτό τοπολογικό χώρο $(\mathbb{R}, \mathfrak{T}_\delta)$ το μόνο πυκνό σύνολο είναι το $\mathbb{R}$, οπότε ο χώρος δεν είναι διαχωρίσιμος.
- Γενικότερα, κάθε διακριτός τοπολογικός χώρος $(X, \mathfrak{T}_\delta)$ με υπεραριθμήσιμο X δεν είναι διαχωρίσιμος.

■

Πρόταση 21.4: Έστω $(X, \mathfrak{T})$ ένας διαχωρίσμος τοπολογικός χώρος.

i. Για κάθε ανοικτό $A \subseteq X$, ο $(A, \mathfrak{T}_A)$ με τη σχετική τοπολογία είναι διαχωρίσιμος.

ii. Κάθε συνεχής εικόνα του X είναι διαχωρίσιμη. Δηλαδή, εάν $f : X \to Y$ είναι συνεχής προς τον τοπολογικό χώρο $(Y, \mathfrak{T}')$, τότε ο χώρος $(f(X), \mathfrak{T}'_{f(X)})$ (με τη σχετική τοπολογία) είναι διαχωρίσμος.

Απόδειξη: Για το i.: Έστω D ένα αριθμήσιμο πυκνό σύνολο. Εφόσον $\mathrm{cl}_{\mathfrak{T}} D = X$, για κάθε ανοικτό σύνολο A θα έχουμε $A \cap D = \emptyset$ (**Πρόταση 5.2, ii.**). Αν δείξουμε ότι το αριθμήσιμο σύνολο $A \cap D$ είναι πυκνό στο A, θα έχουμε δείξει το ζητούμενο.

Έστω $U \subseteq A$ ανοικτό στο A. Γράφουμε $U = A \cap V$ για κάποιο ανοικτό $V \in \mathfrak{T}$ και παρατηρούμε ότι επειδή το A είναι ανοικτό στο X, και το $U = A \cap V$ θα είναι ανοικτό στο X. Έτσι λοιπόν, αφού επιπλέον το D είναι πυκνό, $U \cap D = U \cap (A \cap D) \neq \emptyset$. Η πρώτη ισότητα δικαιολογείται από το ότι $U \subseteq A$.

Για το ii.: Έστω $f : (X, \mathfrak{T}) \to (Y, \mathfrak{T}')$ μια συνεχής συνάρτηση. Εάν το D είναι πυκνό στο X, θα δείξουμε ότι το $f(D)$ είναι πυκνό στο $f(X)$. Πράγματι:

$$f(X) = f(\mathrm{cl}_{\mathfrak{T}} D) \overset{\star}{\subseteq} \mathrm{cl}_{\mathfrak{T}'} f(D)$$

όπου ο εγκλεισμός άστρο ($\star$) δικαιολογείται από το ότι η f είναι συνεχής (**Θεώρημα 7.1, iv.**).

$\square$

Πρόταση 21.5:

i. Έστω $(X, \mathfrak{T})$ ένας διαχωρίσιμος τοπολογικός χώρος. Εάν $(V_i)_{i\in I}$ είναι μια οικογένεια ανοικτών, μη κενών, ξένων ανά δύο συνόλων, τότε $|I| \leqslant |\mathbb{N}|$.

ii. Έστω $\big((X_i, \mathfrak{T}_i)\big)_{i\in I}$ μια οικογένεια τοπολογικών χώρων με τον χώρο γινόμενο $(\prod_{i\in I} X_i, \mathfrak{T}_\gamma)$ να είναι διαχωρίσιμος. Τότε καθένας από τους $(X_i, \mathfrak{T}_i)$ είναι διαχωρίσιμος.

iii. Έστω $(X_1, \mathfrak{T}_1)$, $(X_2, \mathfrak{T}_2)$ δύο διαχωρίσιμοι τοπολογικοί χώροι. Τότε και ο χώρος γινόμενο $(X_1 \times X_2, \mathfrak{T}_\gamma)$ είναι διαχωρίσιμος.

Απόδειξη: Για το i.: Έστω $D \subseteq X$ ένα αριθμήσιμο και πυκνό σύνολο. Για κάθε $i \in I$, επειδή τα V_i είναι ανοικτά, $V_i \cap D \neq \emptyset$. Οπότε είναι δυνατόν να επιλεγεί ένα $d_i \in V_i \cap D$ για κάθε δείκτη $i \in I$, και να κατασκευαστεί συνάρτηση:

$$f : I \to D \text{ με } i \mapsto d_i$$

Η f είναι $1-1$ απεικόνιση διότι τα V_i είναι ξένα. Οπότε $|I| = |f(I)| \leqslant |D| = |\mathbb{N}|$.

Για το ii.: Οι διάφορες προβολές $\prod_{i\in I} X_i \to X_j$ είναι συνεχείς και επί, οπότε από την **Πρόταση 21.4, ii.** έχουμε το ζητούμενο.

Για το iii.: Έστω D_1, D_2 δύο αριθμήσιμα πυκνά σύνολα του X_1 και του X_2 αντίστοιχα. Τότε:

$$\overline{D_1} \times \overline{D_2} = X_1 \times X_2$$

κι επειδή $\overline{D_1} \times \overline{D_2} = \overline{D_1 \times D_2}$ (**Παρατήρηση 11.1**):

$$\overline{D_1 \times D_2} = X_1 \times X_2$$

Δηλαδή το $D_1 \times D_2$ είναι πυκνό, και με τετριμμένο τρόπο αριθμήσιμο.

$\square$

Το αποτέλεσμα **iii.** στην **Πρόταση 21.5** μπορεί με επαγωγή να γενικευτεί για πεπερασμένα γινόμενα. Στο ακόλουθο θεώρημα θα δούμε ότι κανείς είναι δυνατόν να δείξει ότι το γινόμενο το πολύ $|\mathbb{R}|$ το πλήθος διαχωρίσιμων τοπολογικών χώρων είναι διαχωρίσιμος τοπολογικός χώρος.

Θεώρημα 21.2: Έστω $\big((X_i, \mathfrak{T}_i)\big)_{i\in I}$ μια οικογένεια διαχωρίσιμων τοπολογικών χώρων. Αν $|I| \leqslant |\mathbb{R}|$, τότε ο χώρος γινόμενο $(\prod_{i\in I} X_i, \mathfrak{T}_\gamma)$ είναι κι αυτός διαχωρίσιμος.

Απόδειξη: Εφόσον $|I| \leqslant |\mathbb{R}|$, θα υπάρχει κάποια $f : I \to \mathbb{R}$ η οποία είναι $1-1$. Στα παρακάτω κανονικά θα έπρεπε να χρησιμοποιήσουμε κατάλληλα τα στοιχεία του $f(I)$, για απλοποίηση όμως θα κάνουμε τη σύμβαση $I \subseteq \mathbb{R}$ (κατά μία έννοια, ταυτίζουμε το I με το $f(I)$).

Βήμα I: Για κάθε X_i θεωρούμε ένα αριθμήσιμο πυκνό σύνολο D_i (μιας και οι χώροι $(X_i, \mathfrak{T}_i)$ είναι διαχωρίσιμοι) το οποίο το γράφουμε στη μορφή:

$$D_i = \{d_{i,k} \mid k \in \mathbb{N}\}$$

Βήμα II: Για τα διάφορα $n \in \mathbb{N}$ θεωρούμε τις διάφορες $n-$άδες $(I_1, \cdots, I_n)$ ανοικτών μη κενών, ξένων διαστημάτων (του $\mathbb{R}$) με ρητά άκρα. Το πλήθος των $n-$άδων αυτών είναι αριθμήσιμο, αφού το σύνολο:

$$J = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left\{(I_1, \cdots, I_k, \cdots, I_n) \;\middle|\; I_k \subseteq R \text{ ξένα διαστήματα ρητών άκρων}\right\}$$

έχει πληθικότητα το πολύ $\sum_{n\in\mathbb{N}} |(\mathbb{N}^2)^n| = |\mathbb{N}|$ και είναι άπειρο (το $\mathbb{N}^2$ εμφανίζεται διότι κάθε διάστημα I_k καθορίζεται από δύο ρητά άκρα και οι ρητοί έχουν την πληθικότητα του $\mathbb{N}$). Επίσης, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, θεωρούμε όλα τα διανύσματα της μορφής:

$$\big(n, (I_1, \cdots, I_n), (m_1, \cdots, m_n)\big)$$

όπου $(I_1, \cdots, I_n) \in J$ και $(m_1, \cdots, m_n) \in \mathbb{N}^n$. Και πάλι μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι το σύνολο:

$$K = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left\{\big(n, (I_1, \cdots, I_n), (m_1, \cdots, m_n)\big) \;\middle|\; (I_1, \cdots, I_n) \in J,\ (m_1, \cdots, m_n) \in \mathbb{N}^n\right\}$$

είναι αριθμήσιμο, αφού έχει πληθικότητα $\sum_{n\in\mathbb{N}} |J| \cdot |\mathbb{N}^n| = |\mathbb{N}|$.

Βήμα III: Σταθεροποιούμε ένα στοιχείο $z = (z_i)_{i\in I}$ στο γινόμενο $\prod_{i\in I} X_i$, και για κάθε επιλογή $\big(n, (I_1, \cdots, I_n), (m_1, \cdots, m_n)\big) \in K$ αντιστοιχούμε:

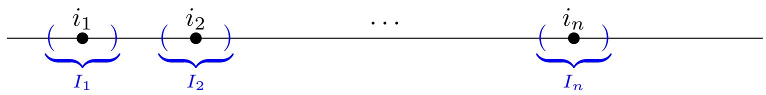
$$\big(n, (I_1, \cdots, I_n), (m_1, \cdots, m_n)\big) \overset{\varphi}{\mapsto} x = (x_i)_{i\in I}, \text{ όπου } x_i = \begin{cases} d_{i,m_k}, \text{ εάν } \exists k \in \{1, \cdots, n\} \text{ με } i \in I_k \\ z_i, \text{ αλλιώς} \end{cases}$$

Το σύνολο D όλων αυτών των x είναι αριθμήσιμο (από την κατασκευή του K και των x) κι εμείς θα ισχυριστούμε ότι είναι και πυκνό.

Βήμα IV: Το D είναι πυκνό σύνολο. Για να το δείξουμε αυτό, θα αποδείξουμε ότι για κάθε κανονικό βασικό, μη κενό, σύνολο B, η τομή $B \cap D$ δεν είναι κενή. Για τυχόν κανονικό βασικό σύνολο B, γράφουμε κατά τα γνωστά:

$$B = \bigcap_{k=1}^{n} p_{i_k}^{-1}(G_{i_k})$$

για πεπερασμένη οικογένεια $\{i_k\}_{k=1}^{n} \subseteq I$ δεικτών και ανοικτά $G_{i_k} \in \mathfrak{T}_{i_k}$. Έπειτα θεωρούμε ανοικτά, ξένα, μη κενά διαστήματα ρητών άκρων I_k γύρω από καθένα i_k.



Επειδή τα G_{i_k} είναι ανοικτά στους εκάστοτε χώρους $(X_{i_k}, \mathfrak{T}_{i_k})$ και τα D_{i_k} είναι πυκνά στους ίδιους χώρους, τα σύνολα $G_{i_k} \cap D_{i_k}$ δεν θα είναι κενά. Μάλιστα (αν ανατρέξετε στο **Βήμα I**) ένα στοιχείο εντός της τομής $G_{i_k} \cap D_{i_k}$ είναι της μορφής d_{i_k,m_k}. Δηλαδή υπάρχει $d_{i_k,m_k} \in G_{i_k}$. Μαζεύοντας για τα διάφορα $i_k,\ k \in \{1, \cdots, n\}$, κατασκευάζουμε το διάνυσμα:

$$\big(n, (I_1, \cdots, I_n), (m_1, \cdots, m_n)\big)$$

το οποίο απεικονίζεται σ' ένα στοιχείο x μέσω της φ. Αυτό το x από τον ορισμό του και τον ορισμό της φ θα ανήκει στο $\bigcap_{k=1}^{n} p_{i_k}^{-1}(G_{i_k})$, δηλαδή στο B. Με τετριμμένο τρόπο ανήκει και στο D, πράγμα που αποδεικνύει ότι το σύνολο $B \cap D$ δεν είναι κενό.

$\square$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 22

Μάθημα 22

Στο **Θεώρημα 21.2** δείξαμε ότι σχετικά «μικρό» ($|I| \leqslant |\mathbb{R}|$) γινόμενο διαχωρίσμων τοπολογικών χώρων είναι διαχωρίσμος τοπολογικός χώρος. Το επόμενο αποτέλεσμα ουσιαστικά μας δείχνει ότι κανείς δεν μπορεί να περιμένει να βρει ιδιάζουσες περιπτώσεις μεγάλων διαχωρίσιμων τοπολογικών χώρων, με την επιπλέον υπόθεση του T_2.

Πρόταση 22.1: Έστω μια οικογένεια T_2 τοπολογικών χώρων $\big((X_i, \mathfrak{T}_i)\big)_{i\in I}$ με $|X_i| \geqslant 2$. Εάν ο χώρος γινόμενο $(\prod_{i\in I} X_i, \mathfrak{T}_\gamma)$ είναι διαχωρίσμος, τότε $|I| \leqslant |\mathbb{R}|$.

Απόδειξη: Εφόσον έχουμε υποθέσει ότι $|X_i| \geqslant 2,\ i \in I$, υπάρχουν στοιχεία $x_i, y_i \in X_i$ με $x_i \neq y_i$. Λόγω του αξιώματος T_2 των χώρων, είναι δυνατόν να βρεθούν ανοικτά σύνολα $U_i, V_i \in \mathfrak{T}_i \backslash \{\emptyset\}$ τέτοια ώστε $x_i \in U_i$, $y_i \in V_i$ και $U_i \cap V_i \neq \emptyset$. Αυτά τα U_i, V_i θα τα χρησιμοποιήσουμε στη συνέχεια.

Εφόσον ο χώρος $\prod_{i\in I} X_i$ είναι διαχωρίσμος, θα υπάρχει ένα αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολό του D. Ορίζουμε απεικόνιση $\varphi : I \to \mathcal{P}(D)$ μέσω του τύπου:

$$\varphi(i) = D \cap p_i^{-1}(U_i)$$

και ισχυριζόμαστε ότι είναι $1-1$. Αν αποδείξουμε ότι είναι $1-1$, τότε θα έχουμε δείξει ότι $|I| \leqslant |\mathcal{P}(D)| \leqslant |\mathcal{P}(\mathbb{N})| \leqslant |\mathbb{R}|$.

Έστω $i, j \in I$ με $i \neq j$. Θα δείξουμε ότι $\varphi(i) \neq \varphi(j)$ δείχνοντας ότι $\varphi(i)\backslash\varphi(j) \neq \emptyset$. Γράφουμε:

$$\begin{aligned}\varphi(i)\backslash\varphi(j) &= \big(D \cap p_i^{-1}(U_i)\big)\backslash\big(D \cap p_j^{-1}(U_j)\big)\\ &= D \cap \big(p_i^{-1}(U_i)\backslash p_j^{-1}(U_j)\big)\\ &= D \cap p_i^{-1}(U_i) \cap (p_j^{-1}(U_j))^c\end{aligned}$$

κι επειδή $U_j \cap V_j = \emptyset \Rightarrow V_j \subseteq U_j^c$ έχουμε $p_j^{-1}(V_j) \subseteq p_j^{-1}(U_j^c) = (p_j^{-1}(U_j))^c$. Οπότε:

$$D \cap p_i^{-1}(U_i) \cap (p_j^{-1}(U_j))^c \supseteq D \cap p_i^{-1}(U_i) \cap p_j^{-1}(V_j) \overset{\star}{\neq} \emptyset$$

Η ανισότητα άστρο ($\star$) ισχύει με κάπως τετριμμένο τρόπο, αφού $x_i \in U_i$, $y_j \in V_j$ και τότε:

$$\prod_{k\in I} \tilde{X}_k \subseteq p_i^{-1}(U_i) \cap p_j^{-1}(V_j), \quad \text{όπου} \begin{cases}\tilde{X}_k = \{x_i\}, \text{ εάν } k = i\\ \tilde{X}_k = \{y_i\}, \text{ εάν } k = j\\ \tilde{X}_k = X_k, \text{ αλλιώς}\end{cases}$$

Δηλαδή αποδεικνύεται τελικά ότι $\varphi(i)\backslash\varphi(j) \neq \emptyset$.

□

Το παρακάτω αποτέλεσμα στη βιβλιογραφία διατυπώνεται συνήθως ως «λήμμα», γιατί για παράδειγμα χρησιμεύει στην απόδειξη του **Παραδείγματος 17.1 (δεύτερο •)**. Στη δική μας ανάλυση δεν θα το χρησιμοποιήσουμε πουθενά, θα το αναφέρουμε όμως ως λήμμα.

Λήμμα 22.1: (Λήμμα του Jones). Έστω $(X, \mathfrak{T})$ ένας διαχωρίσιμος T_4 τοπολογικός χώρος και $F \subseteq X$ ένα κλειστό σύνολο του οποίου η σχετική τοπολογία είναι διακριτή. Τότε $|F| < |\mathbb{R}|$. ■

Απόδειξη: Εφόσον ο χώρος $(F, \mathfrak{T}_F)$ είναι διακριτός (με τη σχετική τοπολογία), κάθε υποσύνολό του $A \subseteq F$ θα είναι κλειστάνοικτο (ειδικότερα κλειστό). Κατά συνέπεια το A γράφεται $A = F \cap K$ για κάποιο κλειστό K στην $\mathfrak{T}$ (**Παρατήρηση 10.1**) και, εφόσον το F είναι κλειστό στην $\mathfrak{T}$, το A θα είναι κλειστό στην $\mathfrak{T}$.

Επομένως, για κάθε κλειστό $A \subseteq X$, τα σύνολα A, $F \backslash A$ είναι κλειστά στην $\mathfrak{T}$. Λόγω του T_4 του χώρου, υπάρχουν ανοικτά σύνολα U_A, V_A ούτως ώστε $A \subseteq U_A$, $F \backslash A \subseteq V_A$ και $U_A \cap V_A = \emptyset$.

Επιπλέον ο χώρος $(X, \mathfrak{T})$ είναι διαχωρίσμος, το οποίο εξασφαλίζει την ύπαρξη αριθμήσιμου πυκνού συνόλου $D \subseteq X$.

Με αυτά υπόψη μπορούμε να ορίσουμε απεικόνιση $\varphi : \mathcal{P}(F) \to \mathcal{P}(D)$ μέσω του τύπου:

$$\varphi(A) = D \cap U_A$$

Εάν αποδείξουμε το $1-1$ της φ, τότε θα έχουμε δείξει ότι $|\mathcal{P}(F)| \leqslant |\mathcal{P}(D)| \leqslant |\mathcal{P}(\mathbb{N})| = |\mathbb{R}|$. Επειδή $|F| < |\mathcal{P}(F)|$, θα έχουμε ότι $|F| < |\mathbb{R}|$.

Έστω $A, B \subseteq F$ με $A \neq B$. Θα υποθέσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $A \backslash B \neq \emptyset$ (εξάλλου η άλλη περίπτωση είναι συμμετρική). Θα αποδείξουμε το $1-1$ της φ δείχνοντας ότι $\varphi(A) \backslash \varphi(B) \neq \emptyset$. Γράφουμε:

$$\begin{aligned} \varphi(A) \backslash \varphi(B) &= (D \cap U_A) \backslash (D \cap U_B) \\ &= D \cap (U_A \backslash U_B) \\ &= D \cap U_A \cap U_B^c \end{aligned}$$

κι επειδή $U_B \cap V_B = \emptyset$, $V_B \subseteq U_B^c$. Επομένως:

$$\begin{aligned} D \cap U_A \cap U_B^c &\supseteq D \cap U_A \cap V_B \\ &\supseteq D \cap A \cap (F \backslash B) \\ &\supseteq D \cap A \cap F \cap B^c \\ &\overset{\star}{=} D \cap A \cap B^c \\ &= D \cap (A \backslash B) \\ &\overset{\star\star}{\neq} \emptyset \end{aligned}$$

όπου η ισότητα άστρο ($\star$) δικαιολογείται από το ότι $A, B \subseteq F$ και η ανισότητα διπλό άστρο ($\star\star$) από την υπόθεση που κάναμε στην αρχή.

□

Στη συνέχεια θα αναφερθούμε σε περιπλοκότερες ≪συνθήκες αριθμησιμότητας≫, σε σχέση με τη διαχωρισιμότητα. Ξεκινούμε με την έννοια των πρώτων αριθμήσιμων χώρων:

Ορισμός 22.1: (Πρώτοι αριθμήσιμοι χώροι). Ένας τοπολογικός χώρος $(X, \mathfrak{T})$ θα λέγεται πρώτος αριθμήσιμος εάν για κάθε $x \in X$ υπάρχει βάση περιοχών $\mathcal{B}_x$ η οποία είναι αριθμήσιμη.

■ **Παράδειγμα 22.1:**

- Οι μετρικοί χώροι είναι πρώτοι αριθμήσιμοι, και μάλιστα για κάθε x το σύνολο $\mathcal{B}_x = \{B(x, 1/n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ είναι αριθμήσιμη βάση περιοχών.

- Έστω $(X, \mathfrak{T})$ ένας τοπολογικός χώρος και $A \subseteq X$. Ο τοπολογικός χώρος με τη σχετική τοπολογία, $(A, \mathfrak{T}_A)$, είναι πρώτος αριθμήσιμος.

- Εάν $(X, \mathfrak{T}_X)$, $(Y, \mathfrak{T}_Y)$ είναι πρώτοι αριθμήσιμοι τοπολογικοί χώροι και $(x, y) \in X \times Y$, τότε αν $\mathcal{B}_x = \{U_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ και $\mathcal{B}_x = \{V_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ είναι αριθμήσιμες βάσεις περιοχών για τα x, y, το σύνολο:

$$\mathcal{B}_{(x,y)} = \{U_k \times V_\ell \mid k, \ell \in \mathbb{N}\}$$

  είναι αριθμήσιμη βάση περιοχών του (x, y).

- Έστω $(X, \mathfrak{T}_\delta)$ ένας διακριτός τοπολογικός χώρος. Για κάθε $x \in X$ το σύνολο $\mathcal{B}_x = \big\{\{x\}\big\}$ είναι αριθμήσιμη βάση περιοχών (μάλιστα πεπερασμένη).

■

Με την ιδιότητα της πρώτης αριθμησιμότητας κανείς μεταβιβάζει επιπλέον ιδιότητες μετρικών χώρων σε τοπολογικούς χώρους. Στους μετρικούς χώρους για κάθε x υπάρχει η βάση περιοχών $\mathcal{B}_x = \{B(x, 1/n) \mid n \in \mathbb{N}\}$, της οποίας τα στοιχεία εμφανίζουν κάποια μονοτονία (συγκεκριμένα η ακολουθία $\big(B(x,1/n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φθίνουσα). Εάν ένας τοπολογικός χώρος είναι πρώτος αριθμήσιμος, αυτή η ιδιότητα εξασφαλίζεται για κάθε x του χώρου.

Λήμμα 22.2: Έστω $(X, \mathfrak{T})$ ένας πρώτος αριθμήσιμος τοπολογικός χώρος και $x \in X$. Αν $\mathcal{B}_x = \{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι αριθμήσιμη βάση περιοχών του x, τότε υπάρχει αριθμήσιμη βάση περιοχών $\mathcal{C}_x = \{C_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ του x, η οποία είναι φθίνουσα. ■

Απόδειξη: Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $C_n = \bigcap_{k=1}^n B_k$. Το σύνολο C_n περιέχει το x (αφού τα B_k περιέχουν το x) και είναι ανοικτό (αφού τα B_k είναι ανοικτά και η τομή πεπερασμένη). Επιπλέον η ακολουθία $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φθίνουσα.

Για να δείξουμε ότι το σύνολο $\mathcal{C}_x$ όλων αυτών των C_n είναι βάση περιοχών, θα κάνουμε χρήση του **Ορισμού 6.1**. Έστω λοιπόν $U \in \mathcal{N}_x$. Επειδή η $\mathcal{B}_x$ είναι βάση περιοχών του x, θα υπάρχει κάποιο $B_n \subseteq U$. Επειδή τώρα $C_n \subseteq B_n$, έχουμε δείξει ότι υπάρχει $C_n \subseteq U$.

□

Με το **Λήμμα 22.2** υπόψη μπορούμε να αποδείξουμε ότι, όπως και στους μετρικούς χώρους, στους πρώτους αριθμήσιμους χώρους τα δίκτυα (κατά μία έννοια) μπορούν να αντικατασταθούν από ακολουθίες.

Πρόταση 22.2: Έστω $(X, \mathfrak{T})$ ένας πρώτος αριθμήσιμος τοπολογικός χώρος.

i. Για κάθε $A \subseteq X$ αληθεύει η ισοδυναμία $x \in \overline{A} \Leftrightarrow$ Υπάρχει ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ του A με $x_n \to x$.

ii. Εάν $(Y, \mathfrak{T}')$ είναι τοπολογικός χώρος, μια συνάρτηση $f : (X, \mathfrak{T}) \to (Y, \mathfrak{T}')$ είναι συνεχής εάν και μόνο αν για κάθε ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ του X με $x_n \to x$ έχουμε $f(x_n) \to f(x)$.

Απόδειξη: Για το i.: Από την **Πρόταση 8.1** αποδεικνύεται η κατεύθυνση ($\Leftarrow$), αφού κάθε ακολουθία είναι δίκτυο.

Για την κατεύθυνση ($\Rightarrow$), θεωρούμε $x \in \overline{A}$ και αριθμήσιμη βάση περιοχών $\mathcal{C}_x$, όπως αυτή εξασφαλίζεται από το **Λήμμα 22.2**. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ το σύνολο $C_n \cap A$ δεν είναι κενό, οπότε μπορεί να επιλεγεί $x_n \in C_n \cap A$ και να κατασκευαστεί ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ του A.

Θα δείξουμε ότι $x_n \to x$. Πράγματι, αν $U \in \mathcal{N}_x$, τότε υπάρχει κάποιο $n_0 \in \mathbb{N}$ ούτως ώστε $C_{n_0} \subseteq U$ (μιας και το $\mathcal{C}_x$ είναι βάση περιοχών). Από την μονοτονία της $\mathcal{C}_x$, για κάθε $n \geqslant n_0$ έχουμε $x_n \in C_n \subseteq C_{n_0} \subseteq U$, το οποίο αποδεικνύει την σύγκλιση $x_n \to x$.

Για το ii.: Από το **Θεώρημα 8.1** αποδεικνύεται η κατεύθυνση ($\Rightarrow$).

Για την άλλη κατεύθυνση ($\Leftarrow$), υποθέτουμε προς άτοπο ότι η f δεν είναι συνεχής σε κάποιο x. Τότε υπάρχει $V \in \mathcal{N}_{f(x)}$ με $f^{-1}(V) \notin \mathcal{N}_x$ και κατά συνέπεια, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $C_n \not\subseteq f^{-1}(V)$ - τα C_n είναι περιοχές του x όπως στο **Λήμμα 22.2**. Άρα, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, υπάρχει $x_n \in C_n \setminus f^{-1}(V)$. Επειδή $x_n \in C_n$, κανείς μπορεί να δείξει (για παράδειγμα όπως στο i.) ότι $x_n \to x$. Από την άλλη βέβαια $x_n \notin f^{-1}(V) \Rightarrow f(x_n) \notin V$, το οποίο δείχνει ότι $f(x_n) \not\to f(x)$. Αυτό είναι άτοπο.

□

Πρόταση 22.3: Έστω $(X, \mathfrak{T})$ ένας πρώτος αριθμήσιμος, διαχωρίσιμος και T_2 τοπολογικός χώρος. Τότε $|X| \leqslant |\mathbb{R}|$.

Απόδειξη: Ο χώρος $(X, \mathfrak{T})$ είναι διαχωρίιμος, επομένως υπάρχει αριθμήσιμο πυκνό σύνολο $D \subseteq X$. Από τον **Ορισμό 4.2** σε συνδυασμό με την **Πρόταση 22.2, i.** συμπαιραίνουμε ότι για κάθε $x \in X$ υπάρχει ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ του D με $x_n \to x$.

Για κάθε $x \in X$ επιλέγουμε μία τέτοια ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και ορίζουμε $\varphi : X \to D^{\mathbb{N}}$ μέσω του τύπου $\varphi(x) = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Αν δείξουμε ότι η φ είναι $1-1$ τότε θα έχουμε δείξει ότι $|X| \leqslant |D^{\mathbb{N}}| \leqslant |\mathbb{N}^{\mathbb{N}}| = |\mathbb{R}|$.

Εάν λοιπόν για κάποια $x, y \in X$ έχουμε $\varphi(x) = \varphi(y)$, τότε $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, και κατά συνέπεια οι δύο ακολουθίες έχουν τα ίδια οριακά σημεία. Επειδή ο χώρος είναι T_2 και οι ακολουθίες συγκλίνουν, από το **Θεώρημα 13.1** έπεται ότι $x = y$. Δηλαδή η φ είναι $1-1$.

□

Πρόταση 22.4: Έστω $(X, \mathfrak{T})$, $(Y, \mathfrak{T}')$ δύο τοπολογικοί χώροι με τον πρώτο να είναι πρώτος αριθμήσιμος. Έστω επιπλέον $f : (X, \mathfrak{T}) \to (Y, \mathfrak{T}')$ μια συνεχής, ανοικτή και επί απεικόνιση. Τότε ο $(Y, \mathfrak{T}')$ είναι κι αυτός πρώτος αριθμήσιμος.

Απόδειξη: Έστω $y \in Y$. Εφόσον η f είναι επί, υπάρχει κάποιο x ούτως ώστε $y = f(x)$. Επειδή ο χώρος X είναι διαχωρίσιμος, υπάρχει αριθμήσιμη βάση περιοχών $\mathcal{B}_x = \{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ του X. Επειδή η f είναι ανοικτή, το σύνολο $\{f(B_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι αριθμήσιμη οικογένεια περιοχών του $f(x)$, κι εμείς στη συνέχεια θα δείξουμε ότι το εν λόγω σύνολο αποτελεί επίσης βάση περιοχών του $f(x)$.

Πράγματι, για κάθε $V \in \mathcal{N}_{f(x)}$, λόγω της συνέχειας της f, έχουμε $f^{-1}(V) \in \mathcal{N}_x$. Επειδή η $\mathcal{B}_x$ είναι βάση περιοχών του X, θα υπάρχει κάποιο $B_n \subseteq f^{-1}(V)$, δηλαδή $f(B_n) \subseteq f \circ f^{-1}(V) \subseteq V$, το οποίο αποδεικνύει ότι η $\{f(B_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι αριθμήσιμη βάση περιοχών του $f(x)$.

Εφόσον το $y = f(x) \in Y$ ήταν τυχόν, αποδεικνύεται ότι ο χώρος $(Y, \mathfrak{T}')$ είναι πρώτος αριθμήσιμος.

□

Στη συνέχεια θα ασχοληθούμε με ακόμη μία έννοια αριθμησιμότητας, τη δεύτερη αριθμησιμότητα.

Ορισμός 22.2: (Δεύτεροι αριθμήσιμοι χώροι). Ένας τοπολογικός χώρος $(X, \mathfrak{T})$ θα λέγεται δεύτερος αριθμήσιμος εάν υπάρχει αριθμήσιμη βάση $\mathcal{B}$ της $\mathfrak{T}$.

■ **Παράδειγμα 22.2:**

- Εάν ένας τοπολογικός χώρος είναι δεύτερος αριθμήσιμος, τότε είναι και πρώτος αριθμήσιμος.[1]
- Εάν $(X, \mathfrak{T})$ είναι ένας δεύτερος αριθμήσιμος τοπολογικός χώρος και $A \subseteq X$, ο χώρος $(A, \mathfrak{T}_A)$ με τη σχετική τοπολογία είναι κι αυτός δεύτερος αριθμήσιμος.
- Εάν $(X, \mathfrak{T}_X)$, $(Y, \mathfrak{T}_Y)$ είναι δύο δεύτεροι αριθμήσιμοι τοπολογικοί χώροι, τότε το γινόμενό τους $(X \times Y, \mathfrak{T}_\gamma)$ είναι δεύτερος αριθμήσιμος τοπολογικός χώρος.
- Εάν $\big((X_i, \mathfrak{T}_i)\big)_{i\in\mathbb{N}}$ είναι οικογένεια δεύτερων αριθμήσιμων τοπολογικών χώρων, τότε το γινόμενό τους $(\prod_{i\in\mathbb{N}} X_i, \mathfrak{T}_\gamma)$ είναι δεύτερος αριθμήσιμος τοπολογικός χώρος (η απόδειξη γίνεται όπως στο **Παράδειγμα 22.2, τρίτο •**).
- Ένας διακριτός τοπολογικός χώρος $(X, \mathfrak{T}_\delta)$ είναι δεύτερος αριθμήσιμος εάν και μόνο αν το X είναι αριθμήσιμο. Αυτό μας δείχνει ότι η συνθήκη της δεύτερης αριθμησιμότητας είναι αρκετά ισχυρή ώστε να μην ικανοποιείται από όλους τους μετρικούς χώρους.
- Ο συνήθης τοπολογικός μετρικός χώρος $(\mathbb{R}, \mathfrak{T}_\varrho)$ είναι δεύτερος αριθμήσιμος και έχει βάση:

$$\mathcal{B} = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{Q},\ a < b\}$$

- Ο τοπολογικός χώρος $(\mathbb{R}, \mathfrak{T}_S)$ με την τοπολογία των αριστερά ημιάνοικτων διαστημάτων είναι πρώτος αριθμήσιμος αλλά όχι δεύτερος αριθμήσιμος (Β2, Παράδειγμα 8.3.3 (β)).

■

[1] Πιθανότατα τα μαθηματικά είναι το μόνο μέρος που αν κανείς είναι δεύτερος είναι και πρώτος.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 23

Μάθημα 23

Πρόταση 23.1: Εάν ένας τοπολογικός χώρος $(X, \mathfrak{T})$ είναι δεύτερος αριθμήσιμος, τότε είναι διαχωρίσιμος.

Απόδειξη: Υποθέτουμε ότι η $\mathcal{B} = \{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μια αριθμήσιμη βάση του χώρου, στην οποία (χωρίς βλάβη της γενικότητας) έχουμε επιλέξει $B_n \neq \emptyset$, $n \in \mathbb{N}$. Εφόσον $B_n \neq \emptyset$, για κάθε δείκτη $n \in B_n$ υπάρχει στοιχείο $x_n \in B_n$. Αν επιλέξουμε τέτοια $x_n \in B_n$ για τα διάφορα $x_n \in B_n$, τότε θα έχουμε κατασκευάσει ένα σύνολο:

$$D = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

που είναι αριθμήσιμο. Από την **Παρατήρηση 5.1**, το D είναι πυκνό.

□

Στους τοπολογικούς μετρικούς χώρους η έννοια της δεύτερης αριθμησιμότητας και της διαχωρισιμότητας ταυτίζονται.

Πρόταση 23.2: Εάν $(X, \mathfrak{T}_\varrho)$ είναι ένας τοπολογικός μετρικός χώρος, αληθεύει η ισοδυναμία:

$$(X, \mathfrak{T}_\varrho) \text{ δεύτερος αριθμήσιμος } \Leftrightarrow (X, \mathfrak{T}_\varrho) \text{ διαχωρίσιμος}$$

Απόδειξη: $(\Rightarrow)$ Από την **Πρόταση 23.1** έπεται αυτή η κατεύθυνση.

$(\Leftarrow)$ Υποθέτουμε ότι το σύνολο $D = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι πυκνό. Κατασκευάζουμε το σύνολο:

$$\mathcal{B} = \left\{B(x_n, q) \mid n \in \mathbb{N},\ q \in \mathbb{Q}_+^*\right\}$$

το οποίο είναι αριθμήσιμο, και ισχυριζόμαστε ότι είναι βάση της τοπολογίας. Πράγματι, αν $U \in \mathfrak{T}_\varrho$ και $x \in U$, τότε υπάρχει $B(x, \varepsilon)$ ούτως ώστε $B(x, \varepsilon) \subseteq U$. Τώρα το D είναι πυκνό και το $B(x, \varepsilon)$ ανοικτό, το οποίο εξασφαλίζει την ύπαρξη κάποιου στοιχείου $x_n \in D \cap B(x, \varepsilon)$. Επιπλέον μπορεί να επιλεγεί αρκετά μικρή ακτίνα $q \in \mathbb{Q}_+^*$ ώστε $B(x_n, q) \subseteq B(x, \varepsilon)$, κι έτσι έχουμε αποδείξει ότι το $\mathcal{B}$ είναι βάση της τοπολογίας.

□

Πρόταση 23.3: Έστω $(X, \mathfrak{T})$ ένας δεύτερος αριθμήσιμος τοπολογικός χώρος και $(G_i)_{i\in I}$ μία οικογένεια ανοικτών συνόλων. Ορίζουμε $G = \bigcup_{i\in I} G_i$ και θα δείξουμε ότι υπάρχει αριθμήσιμο σύνολο $J \subseteq I$ με $G = \bigcup_{j\in J} G_j$.

Απόδειξη: Θεωρούμε $\mathcal{B}$ μια αριθμήσιμη βάση της τοπολογίας, κι ορίζουμε το σύνολο:

$$\mathcal{B}_G = \{B \in \mathcal{B} \mid \exists i \in I \text{ με } B \subseteq G_i\}$$

το οποίο είναι αριθμήσιμο (αφού $\mathcal{B}_G \subseteq \mathcal{B}$). Επιπλέον:

$$G = \bigcup \mathcal{B}_G = \bigcup_{B\in\mathcal{B}_G} B$$

Αν τώρα διαλέξουμε για κάθε $B \in \mathcal{B}_G$ ένα $i_B \in I$ τέτοιο ώστε $B \subseteq G_{i_B}$, μπορούμε να κατασκευάσουμε το αριθμήσιμο σύνολο:

$$J = \{i_B \mid B \in \mathcal{B}_G\}$$

για το οποίο:

$$G = \bigcup_{B \in \mathcal{B}_G} B \overset{\star}{\subseteq} \bigcup_{j \in J} G_j \subseteq \bigcup_{i \in I} G_i = G$$

Ο εγκλεισμός άστρο ($\star$) αληθεύει διότι $B \subseteq G_{i_B}$ και $i_B \in J$. Κατά συνέπεια:

$$G = \bigcup_{j \in J} G_j$$

□

Συνεχίζουμε με ακόμη μια έννοια αριθμησιμότητας, αυτή των χώρων Lindelöf.

Ορισμός 23.1: (Χώροι Lindelöf). Ένας τοπολογικός χώρος $(X, \mathfrak{T})$ λέγεται χώρος Lindelöf εάν κάθε ανοικτή κάλυψη του X έχει αριθμήσιμη υποκάλυψη.

Μάλιστα η ανοικτή κάλυψη μπορεί να αντικατασταθεί από κάλυψη από βασικά σύνολα.

Η έννοια των χώρων Lindelöf μοιάζει με αυτήν των συμπαγών τοπολογικών χώρων, μόνο σ' αυτήν την περίπτωση η υποκάλυψη είναι αριθμήσιμη και όχι πεπερασμένη.

■ **Παράδειγμα 23.1:**

- Ένας διακριτός τοπολογικός χώρος $(X, \mathfrak{T}_\delta)$ είναι Lindelöf εάν και μόνο αν το X είναι αριθμήσιμο σύνολο.
- Έστω $(X, \mathfrak{T})$ ένας τοπολογικός χώρος και $A \subseteq X$. Ο χώρος $(A, \mathfrak{T}_A)$ με τη σχετική τοπολογία είναι Lindelöf εάν και μόνο αν για κάθε ανοικτή κάλυψή του στον $(X, \mathfrak{T})$ υπάρχει αριθμήσιμη υποκάλυψη.

■

Πρόταση 23.4: Έστω $(X, \mathfrak{T})$ ένας Lindelöf τοπολογικός χώρος και $(Y, \mathfrak{T}')$ ένας τοπολογικός χώρος. Τα ακόλουθα αληθεύουν:

i. Αν το $F \subseteq X$ είναι κλειστό, ο αντίστοιχος χώρος $(F, \mathfrak{T}_F)$ με την σχετική τοπολογία είναι Lindelöf.

ii. Έστω $f : X \to Y$ συνεχής απεικόνιση. Ο χώρος $\big(f(X), \mathfrak{T}'_{f(X)}\big)$ με τη σχετική τοπολογία είναι Lindelöf.

Απόδειξη: Για το i.: Πράγματι θεωρούμε $\{U_i\}_{i \in I}$ μία ανοικτή κάλυψη του F, την οποία επεκτείνουμε σε κάλυψη του X προσαρτώντας το $X \backslash F$. Εφόσον ο χώρος X είναι Lindelöf, υπάρχει αριθμήσιμη υποκάλυψη $\{U_{i_k}\}_{k \in \mathbb{N}} \cup \{X \backslash F\}$, και κατά συνέπεια η $\{U_{i_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ είναι αριθμήσιμη υποκάλυψη του F.

Για το ii.: Εάν $\{V_i\}_{i \in I}$ είναι μία ανοικτή κάλυψη του $f(X)$, τότε η $\big\{U_i = f^{-1}(V_i)\big\}_{i \in I}$ θα είναι μία ανοικτή κάλυψη του X. Αυτό διότι:

$$\bigcup_{i \in I} U_i = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(V_i) = f^{-1}\Big(\bigcup_{i \in I} V_i\Big) = f^{-1} \circ f(X) \supseteq X$$

κι επιπλέον η f αντιστρέφει ανοικτά σε ανοικτά (αφού είναι συνεχής).

Για την κάλυψη $\{U_i\}_{i \in I}$ - εφόσον ο X είναι Lindelöf - μπορεί να βρεθεί αριθμήσιμη υποκάλυψη $\{U_{i_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$.

Ισχυριζόμαστε ότι το σύνολο $\{V_{i_k})\}_{k \in \mathbb{N}}$ είναι ανοικτή κάλυψη του $f(X)$. Πράγματι, αρκεί να δείξουμε ότι καλύπτει το $f(X)$.

$$\bigcup_{k \in \mathbb{N}} V_{i_k} \supseteq \bigcup_{k \in \mathbb{N}} f \circ f^{-1}(V_{i_k}) = f\Big(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} f^{-1}(V_{i_k})\Big) = f\Big(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} U_{i_k}\Big) = f(X)$$

□

Πρόταση 23.5: Εάν ένας τοπολογικός χώρος $(X, \mathfrak{T})$ είναι δεύτερος αριθμήσιμος, τότε είναι Lindelöf.

Απόδειξη: Έστω $\mathcal{B}$ μια αριθμήσιμη βάση της τοπολογίας και $\{U_i\}_{i \in I}$ μία ανοικτή κάλυψη του X. Για κάθε U_i θεωρούμε σύνολο $\mathcal{V}(U_i) \subseteq \mathcal{B}$ τέτοιο ώστε $U_i = \bigcup \mathcal{V}(U_i)$ και γράφουμε:

$$X = \bigcup_{i \in I} \bigcup \mathcal{V}(U_i) = \bigcup \underbrace{\bigcup_{i \in I} \mathcal{V}(U_i)}_{\subseteq \mathcal{B}}$$

Από αυτό έπεται ότι το X γράφεται ως αριθμήσιμη ένωση ανοικτών (μάλιστα βασικών) συνόλων.

□

Στην **Πρόταση 23.2** δείξαμε ότι στους τοπολογικούς μετρικούς χώρους η έννοια των δεύτερων αριθμήσιμων χώρων ταυτίζεται μ' αυτήν των διαχωρίσιμων χώρων. Στην επόμενη πρόταση θα δείξουμε ότι ταυτίζεται επίσης με την έννοια των χώρων Lindelöf.

Πρόταση 23.6: Εάν $(X, \mathfrak{T}_\varrho)$ είναι ένας τοπολογικός μετρικός χώρος, αληθεύει η ισοδυναμία:

$$(X, \mathfrak{T}_\varrho) \text{ δεύτερος αριθμήσιμος } \Leftrightarrow (X, \mathfrak{T}_\varrho) \text{ Lindelöf}$$

Απόδειξη: ($\Rightarrow$) Αυτή η κατεύθυνση είναι συνέπεια της **Πρότασης 23.5**.

($\Leftarrow$) Για την άλλη κατεύθυνση, θα δείξουμε ότι ο χώρος είναι διαχωρίσιμος, οπότε από την **Πρόταση 23.2** θα έχουμε αποδείξει το ζητούμενο.

Εφόσον ο $(X, \mathfrak{T}_\varrho)$ είναι τοπολογικός μετρικός χώρος, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ το σύνολο:

$$\big\{B(x, 1/n) \mid x \in X\big\}$$

είναι κάλυψη του X. Επειδή είναι και Lindelöf, υπάρχει αριθμήσιμη υποκάλυψη:

$$\big\{B(x_n(k), 1/n) \mid x_n(k) \in X, \ k \in \mathbb{N}\big\}$$

Ορίζουμε $D_n = \{x_n(k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ καθώς επίσης και το αριθμήσιμο σύνολο:

$$D = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n$$

Ισχυριζόμαστε ότι το D είναι πυκνό. Έστω λοιπόν $U \in \mathfrak{T}_\varrho \backslash \{\emptyset\}$ και βασικό σύνολο $B(y, \varepsilon) \subseteq U$. Επιλέγουμε $n_0 \in \mathbb{N}$ με $1/n_0 < \varepsilon$ και - επειδή το $\big\{B(x_{n_0}(k), 1/n_0) \mid x_{n_0}(k) \in X, \ k \in \mathbb{N}\big\}$ είναι κάλυψη του X - υπάρχει κάποιο $B(x_{n_0}(k_0), 1/n_0)$ ούτως ώστε $y \in B(x_{n_0}(k_0), 1/n_0)$. Επομένως $\varrho(x_{n_0}(k_0), y) < 1/n_0 < \varepsilon$ και τότε $x_{n_0}(k_0) \in B(y, \varepsilon)$. Αυτό δείχνει ότι η τομή:

$$U \cap D \supseteq B(y, \varepsilon) \cap D \supseteq \{x_{n_0}(k_0)\}$$

δεν είναι κενή, οπότε το D είναι πυκνό κι ο χώρος είναι διαχωρίσιμος.

□

Παρατήρηση 23.1: Με τις **Προτάσεις 23.1, 23.2, 23.5, 23.6** έχουμε δείξει το ακόλουθο διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
& \text{Δεύτεροι αριθμήσιμοι χώροι} \arrow[dl] \arrow[d, shift right] \arrow[dr, shift left] & \\
\text{Πρώτοι αριθμήσιμοι χώροι} & \text{Διαχωρίσιμοι χώροι} \arrow[u, shift right, red, "\text{μ.χ.}"'] & \text{Χώροι Lindelöf} \arrow[ul, shift left, red, "\text{μ.χ.}"']
\end{tikzcd}$$

Τα κόκκινα βέλη ($\color{red}\to$) ισχύουν εν γένει σε τοπολογικούς μετρικούς χώρους.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 24

Μάθημα 24

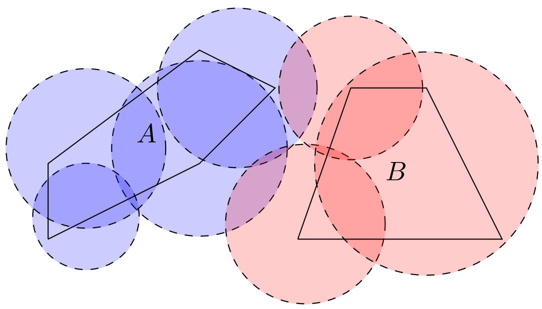
Θεώρημα 24.1: Κάθε T_3 και Lindelöf τοπολογικός χώρος $(X, \mathfrak{T})$ είναι και T_4.

Απόδειξη: Έστω $A, B \subseteq X$ δύο κλειστά και ξένα σύνολα. Εφόσον ο χώρος X είναι T_3, για κάθε $x \in A$ το x δεν ανήκει στο B και κατά συνέπεια υπάρχει $U_x \in \mathfrak{T}$ τέτοιο ώστε $x \subseteq U_x$ και $\overline{U_x} \cap B = \emptyset$ (**Πρόταση 13.3, ii.**). Αντίστοιχα, για κάθε $y \in B$ υπάρχει $V_y \in \mathfrak{T}$ τέτοιο ώστε $y \subseteq V_y$ και $\overline{V_y} \cap A = \emptyset$.

Τα σύνολα $\{U_x\}_{x \in A}$ και $\{V_y\}_{y \in B}$ αποτελούν ανοικτές καλύψεις των A και B αντίστοιχα. Επειδή από την **Πρόταση 23.4, i.** οι A, B είναι Lindelöf, υπάρχουν οι αντίστοιχες αριθμήσιμες υποκαλύψεις:

$$\{U_{x_k}\}_{k \in \mathbb{N}} \text{ **και** } \{V_{y_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$$

Εν τω μεταξύ εμείς επιθυμούμε - προκειμένου να δείξουμε το T_4 του χώρου - να διαχωρίσουμε τα A, B με ανοικτά σύνολα. Μήπως οι καλύψεις αυτές οδηγήσουν σε σύνολα $A \subseteq \bigcup_{k \in \mathbb{N}} U_{x_k}$ και $B \subseteq \bigcup_{k \in \mathbb{N}} V_{y_k}$ που διαχωρίζουν τα A και B; Εν γένει η απάντηση είναι όχι, οπότε θα χρειαστεί να δουλέψουμε λίγο περισσότερο με τις εν λόγω καλύψεις πριν καταλήξουμε στο ζητούμενο.



Οι καλύψεις του ενός συνόλου δεν τέμνουν το άλλο. Παρόλα αυτά, οι καλύψεις τέμνονται μεταξύ τους.

Έτσι λοιπόν, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε:

$$U_n = U_{x_n} \setminus \Big(\bigcup_{k=1}^{n} \overline{V_{y_k}} \Big) \text{ **και** } U = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n$$

και αντίστοιχα:

$$V_n = V_{y_n} \setminus \Big(\bigcup_{k=1}^{n} \overline{U_{x_k}} \Big) \text{ **και** } V = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n$$

Κατ' αρχάς παρατηρούμε ότι τα U, V είναι (από τον ορισμό τους) ανοικτά.

Επιπλέον, $A \subseteq U$, $B \subseteq V$. Πράγματι, αν $x \in A \subseteq \bigcup_{k \in \mathbb{N}} U_{x_k}$ τότε υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ με $x \in U_{x_n}$. Δηλαδή:

$$x \notin \bigcup_{k=1}^{n} \overline{V_{y_k}} \Rightarrow x \in U_{x_n} \setminus \bigcup_{k=1}^{n} \overline{V_{y_k}}, \text{ αφού } \overline{V_y} \cap A = \emptyset \text{ για κάθε } y \in B$$

Κατά συνέπεια $x \in U_n \subseteq U \Rightarrow A \subseteq U$. Ανάλογα αποδεικνύεται ο εγκλεισμός $B \subseteq V$.

Τέλος, αν δείξουμε ότι $U \cap V = \emptyset$, θα έχουμε αποδείξει ότι τα A, B διαχωρίζονται από ανοικτά (κι άρα ο χώρος θα είναι T_4). Υποθέτουμε προς άτοπο ότι $U \cap V \neq \emptyset$. Σ' αυτήν την περίπτωση, γράφοντας:

$$\emptyset \neq \Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n\Big) \cap \Big(\bigcup_{m\in\mathbb{N}} V_m\Big) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\bigcup_{m\in\mathbb{N}} U_n \cap V_m$$

βλέπουμε ότι υπάρχουν n, m με $U_n \cap V_m \neq \emptyset$. Δηλαδή, εάν χωρίς βλάβη της γενικότητας $m \leqslant n$:

$$\begin{aligned}\emptyset \neq U_n \cap V_m &= \Big(U_{x_n} \setminus \bigcup_{k=1}^{n} \overline{V_{y_k}}\Big) \cap \Big(V_{y_m} \setminus \bigcup_{k=1}^{m} \overline{U_{x_m}}\Big) \\ &\subseteq \Big(U_{x_n} \setminus \bigcup_{k=1}^{m} \overline{V_{y_k}}\Big) \cap V_{y_m} = \emptyset\end{aligned}$$

το οποίο είναι άτοπο.

□

24.1 Ασκήσεις

Άσκηση 24.1: Έστω $(X, \mathfrak{T})$ ένας τοπολογικός χώρος και $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μία ακολουθία του X τέτοια ώστε $x_n \to x \in X$. Τότε το σύνολο $K = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \cup \{x\}$ είναι συμπαγές.

Απάντηση: Έστω $\{U_i\}_{i\in I}$ μία ανοικτή κάλυψη του K. Εφόσον $x \in K$, υπάρχει κάποιος δείκτης $i_0 \in I$ ούτως ώστε $x \in U_{i_0}$ (δηλαδή το εν λόγω σύνολο είναι ανοικτή περιοχή του x). Τώρα $x_n \to x$, οπότε υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geqslant n_0$, $x_n \in U_{i_0}$. Κατά συνέπεια:

$$K = \{x_1, \cdots, x_{n_0-1}\} \cup \{x_{n_0}, \cdots\} \cup \{x\} \subseteq \{x_1, \cdots, x_{n_0-1}\} \cup U_{i_0}$$

Αυτό σχεδόν ολοκληρώνει την απόδειξη. Επειδή $x_1, \cdots, x_{n_0-1} \in K$ και η $\{U_i\}_{i\in I}$ είναι κάλυψη του X, μπορούν να βρεθούν σύνολα $U_{i_1}, \cdots, U_{i_{n_0-1}}$ που να τα περιέχουν, οπότε είναι δυνατόν να γραφεί:

$$K \subseteq \bigcup_{k=0}^{n_0-1} U_{i_k}$$

το οποίο ολοκληρώνει την απόδειξη.

△

ΚΕΦΑΛΑΙΟ **25**

Μάθημα 25

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 26

Για παραπάνω μελέτη

Βιβλιογραφία:

(B1) [(88)] Νεγρεπόντης Σ., Ζαχαριάδης Θ., Καλαμίδας Ν., Φαρμάκη Β.: ***Γενική Τοπολογία και Συναρτησιακή Ανάλυση***, (Συμμετρία, 1997)

(B2) [(2)] [(86)] [(109)] [(116)] Γραπερίτης Μ.: *Σημειώσεις Γενικής Τοπολογίας*, (ΕΚΠΑ, σημειώσεις ΠΠΣ, 2013)

(B3) [(88)] Munkres J.: ***Topology***, (Pearson Modern Classic, 2018)

Μελέτες:

(M1) [(88)] Mysior A.: *A Regular Space which is not Completely Regular*, (Proceedings of the American Mathematical Society, 1981)

(M2) [(88)] Raha B. A..: *An Example of a Regular Space that is not Completely Regular*, (Proc. Indian Acad. Sci. (Math Sci.) Vol. 102, No. 1, 1992)

Ευρετήριο