Ασκήσεις στις Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις

Πρώτα θα αναφερθούμε σε βασικά κομμάτια θεωρίας, πριν προχωρίσουμε στις λύσεις των ασκήσεων.

Υπενθύμιση 1: (Διαφορικές εξισώσεις) Έστω Ω ένα σύνολο $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times C^1(\mathbb{R} \rightharpoonup \mathbb{R}) \times C(\mathbb{R} \rightharpoonup \mathbb{R})$. Μία συνάρτηση $F : \Omega \to \mathbb{R}$ με:

$$F(t, y(t), y'(t)) = 0 \text{ (όπου } y'(t) = (d/dt)(y)(t))$$

θα καλείται διαφορική εξίσωση. Εμείς, όταν ψάχνουμε λύσεις μίας διαφορικής εξίσωσης, αναζητούμε συναρτήσεις $y \in C^1(I \to \mathbb{R}) \subseteq C^1(\mathbb{R} \rightharpoonup \mathbb{R})$ που να ικανοποιούν την παραπάνω σχέση, όπου το I είναι διάστημα.

Εν τω μεταξύ, ας σημειώσουμε κάποια σημαντικά σημεία:

- Το σύνολο $(\mathbb{R} \rightharpoonup \mathbb{R})$ είναι το σύνολο όλων μερικών συναρτήσεων, δηλαδή:

$$(\mathbb{R} \rightharpoonup \mathbb{R}) = \left\{ f : A \to B \mid \text{ για κάποια } A, B \subseteq \mathbb{R} \right\}$$

- Το σύνολο $(I \to \mathbb{R})$ είναι το σύνολο των συναρτήσεων από το I στο $\mathbb{R}$, δηλαδή:

$$(I \to \mathbb{R}) = \mathbb{R}^I$$

- Οι προσθήκες -μπροστά απ' αυτά τα σύνολα- C, C^1, C^2 κ.ο.κ. σημαίνουν το προφανές κάθε φορά.
- Η απαίτηση $y \in C^1(I \to \mathbb{R})$ δεν είναι καθόλου περιοριστική. Οι διαφορικές εξισώσεις έχουν προκύψει από φυσικά προβλήματα, στα οποία απαιτείται κάποια ομαλότητα. Αν κανείς δεν θέλει να ασχοληθεί να συνεχώς διαφορίσιμες συναρτήσεις, συνήθως καταφεύγει σε κατανομές, δηλαδή στοιχεία του $\left(C_c^\infty(I \to \mathbb{R})\right)^*$ (του δυϊκού χώρου των λείων συναρτήσεων με συμπαγή φορέα), τα οποία δεν είναι καν πραγματικές συναρτήσεις![1] Φυσικά αυτό είναι αρκετά περίπλοκο, οπότε μένουμε στη C^1 περίπτωση.

Υπενθύμιση 2: (Εξίσωση Bernoulli) Κάθε εξίσωση της μορφής:

$$y'(t) + a(t)y(t) = b(t)y^r(t)$$

με I διάστημα, $a, b \in C(I \to \mathbb{R})$ και $r \in \mathbb{Z}$, λέγεται εξίσωση Bernoulli. Ισχύει και για $r \in \mathbb{R}$, αλλά δεν το βλέπουμε συνήθως.

Οι εξισώσεις Bernoulli λύνονται με τον ακόλουθο τρόπο:

- Εάν $r = 0$ ή $r = 1$, η εξίσωση είνα γραμμική. Έτσι λοιπόν, αν υποθέσουμε χωρίς μεγάλη βλάβη της γενικότητας, ότι $r = 0$:

$$y'(t) + a(t)y(t) = b(t)$$

Τώρα είναι γνωστή μία μέθοδος επίλυσης, που αξιοποιεί αυτό που λέμε ≪ολοκληρωτικό παράγοντα≫. Παρατηρούμε δηλαδή ότι:

$$y'(t)e^{\int a(t)} + a(t)e^{\int a(t)}y(t) = b(t)e^{\int a(t)} \Rightarrow \left(y(t)e^{\int a(t)}\right)' = b(t)e^{\int a(t)}$$

[1] Ίσως είναι γνωστό το δ του Dirac, που έρχεται φυσικά από τη μελέτη της συνάρτησης βήματος του Heaviside.

κι οπότε:

$$y(t) = e^{-\int a(t)} \cdot \left(c + \int b(t)e^{\int a(t)}\right)$$

- Εάν $r \notin \{0,1\}$, τότε με τον μετασχηματισμό $u(t) = y^{1-r}(t)$ καταφέρνουμε να μετασχηματίσουμε την εξίσωση σε γραμμική. Πράγματι, αφού:

  $$u'(t) = (1-r)y^{-r}(t)y'(t)$$

  έχουμε:

  $$y'(t) + a(t)y(t) = b(t)y(t) \Rightarrow (1-r)y^{-r}(t)y'(t) + (1-r)a(t)y^{1-r}(t) = (1-r)b(t)$$

  δηλαδή:

  $$u'(t) + (1-r)a(t)u(t) = b(t)$$

  Αυτή λύνεται όπως παραπάνω.

Υπενθύμιση 3: (διαφορικές 1-μορφές και ακριβείς διαφορικές εξισώσεις) Μία διαφορική 1-μορφή είναι στην ουσία το διαφορικό μίας συνάρτησης. Εάν $F \in \mathcal{D}(\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightharpoonup \mathbb{R})$ (διαφορίσιμη συνάρτηση), τότε το διαφορικό της είναι η συνάρτηση:

$$DF = \frac{\partial F}{\partial t}dt + \frac{\partial F}{\partial y}dy$$

και, κατά μία έννοια, είναι το πολυδιάστατο ανάλογο της παραγώγου.

Τώρα, όπως η $y'(t) = 0$ είναι μία διαφορική εξίσωση, έτσι και η $DF = 0$ είναι το πολυδιάστατο ανάλογο μίας διαφορικής εξίσωσης. Δηλαδή η:

$$\frac{\partial F}{\partial t}dt + \frac{\partial F}{\partial y}dy = 0$$

είναι μία διαφορική εξίσωση. Μάλιστα λύνεται, ανάλογα με το μονοδιάστατο ανάλογό της. Θα πρέπει, εάν το πεδίο ορισμού της F, έστω $A \subseteq \mathbb{R}^2$, είναι ανοικτό και συνεκτικό:

$$F \equiv c, \text{ όπου } c \text{ σταθερά}$$

(αυτό δεν το αποδεικνύουμε, είναι όμως λογικό). Εάν λοιπόν μας δοθεί μία εξίσωση:

$$M(t,y)dx + N(t,y)dy = 0$$

εμείς θα προσπαθούμε να βρίσκουμε συνάρτηση F ώστε:

$$M = \frac{\partial F}{\partial t} \text{ και } N = \frac{\partial F}{\partial y}$$

Σ' αυτήν την περίπτωση, αν δηλαδή τέτοια F υπάρχει, θα λέμε ότι η παραπάνω εξίσωση είναι ακριβής.

Είναι εύκολο, δεδομένης μίας διαφορικής εξίσωσης $M(t,y)dx + N(t,y)dy = 0$, να βρεθεί αυτή η F; Όχι, μάλιστα τις περισσότερες φορές καθόλου! Για να βρούμε μία συνθήκη που μας δίνει πότε μία διαφορική εξίσωση είναι ακριβής, χρειάζεται να χρησιμοποιήσουμε Αλγεβρική Τοπολογία και Γεωμετρική Ανάλυση. Αποδεικνύεται ότι:

«Εάν το σύνολο των t, έστω A, είναι συσταλτό και η 1-μορφή είναι κλειστή (δηλαδή $\partial M/\partial y = \partial N/\partial t$) τότε (και μόνο τότε) υπάρχει $F \in \mathcal{D}(\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightharpoonup \mathbb{R})$ ώστε:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = M \text{ και } \frac{\partial F}{\partial y} = N»$$

Ένα σύνολο λέγεται συσταλτό εάν μπορούμε -με συνεχή τρόπο, χωρίς να ανοιγοκλείνουμε τρύπες- να το πλάσουμε και να το κάνουμε σημείο.

Υπενθύμιση 4: (Περί δυναμοσειρών) Είναι γνωστή, από τον απειροστικό λογισμό 2, η έννοια της δυναμοσειράς. Λέμε ότι κάθε απειρόβαθμο πολυώνυμο:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (t-t_0)^n$$

αποτελεί δυναμοσειρά γύρω από το t_0. Η δυναμοσειρά αυτή μάλιστα συγκλίνει όταν $|t| < R$, όπου το R είναι η ακτίνα σύγκλισης της συναμοσειράς, που ορίζεται:

$$R := \sup\left\{R > 0 \;\middle|\; \sum_{n=0}^{\infty} a_n (R-t_0)^n \text{ συγκλίνει}\right\}$$

Επίσης είναι γνωστό ότι, δεδομένων κάποιων συνθηκών ομαλότητας, πολλές συναρτήσεις προσεγγίζονται από δυναμοσειρά, είναι δηλαδή όριο:

$$f(t) = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=0}^{N} a_n (t-t_0)^n$$

για κατάλληλους συντελεστές $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Οι απείρως παραγωγίσιμες συναρτήσεις (οι λείες) προσεγγίζονται σε αρκετές περιπτώσεις από το αντίστοιχο πολυώνυμο Taylor. Εν τω μεταξύ ας σημειώσουμε εδώ ότι κάθε αναλυτική συνάρτηση παραγωγίζεται, και η παράγωγός της είναι γενίκευση του κανόνα παραγώγισης για τα πολυώνυμα.

Τώρα, όσον αφορά τις διαφορικές εξισώσεις, μπορεί λόγω δυσκολίας στην εύρεση μίας λύσης να ζητήσουμε προσέγγισή της. Μία διαφορική εξίσωση:

$$y''(t) + f(t)y(t) + g(t)y(t) = 0$$

έχει, σε κάποιες περιπτώσεις, λύση που προσεγγίζεται από τα μερικά αθροίσματα $\sum_{n=0}^{N} a_n (t-t_0)^n$, για κάποια a_n. Για την ακρίβεια, υπάρχει το ακόλουθο θεώρημα:

«Εάν οι συναρτήσεις f και g είναι αναλυτικές γύρω από το t_0 (αναλύονται δηλαδή ως δυναμοσειρά με κέντρο t_0), τότε υπάρχει μοναδική λύση του προβλήματος αρχικών τιμών:

$$y''(t) + f(t)y(t) + g(t) = 0, \text{ με } y(t_0) = a_0,\ y'(t_0) = a_1$$

η οποία είναι αναλυτική συνάρτηση γύρω από το t_0, με ακτίνα σύγκλισης τουλάχιστον το ελάχιστο των ακτινών σύγκλισης των f, g. Μάλιστα, έχει σειρά Taylor.»

Υπενθύμιση 5: (Η εξίσωση Euler) Εξισώσεις Euler ονομάζονται οι εξισώσεις της μορφής:

$$t^2 y''(t) + aty + by = 0, \text{ όπου } a, b \in \mathbb{R} \text{ και } t > 0$$

Κάθε τέτοια εξίσωση έχει μία λύση t^r, για κάποιο $r \in \mathbb{R}$. Αυτό μπορούμε να το δούμε με μία αντικατάσταση:

$$r(r-1)t^r + art^r + bt^r = 0 \Rightarrow r^2 + (a-1)r + b = 0$$

- Εάν $\Delta > 0$, τότε υπάρχουν δύο λύσεις $r_1 \neq r_2$, και η γενική λύση είναι της μορφής:

  $$c_1 t^{r_1} + c_2 t^{r_2}$$

  μιας και οι t^{r_1}, t^{r_2} είναι γραμμικώς ανεξάρτητες.

- Εάν $\Delta = 0$, υπάρχει μία διπλή λύση r. Οπότε η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης γίνεται:

  $$c_1 t^r + c_2 (\log t) t^r$$

  αφού χρειάζεται ο χώρος των λύσεων να είναι διδιάστατος.

- Τέλος, αν $\Delta < 0$, θεωρούμε τις μιγαδικές λύσεις $r_1 = \alpha + \beta i$, $r_2 = \alpha - \beta i$, και παίρνουμε:

  $$t^\alpha \big(c_1 \cos(\beta \log t) + c_2 \sin(\beta \log t)\big)$$

Υπενθύμιση 6: (Η μέθοδος του Lagrange) Ας υποθέσουμε ότι έχουμε μία διαφορική εξίσωση:

$$y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = f(t)$$

κι επίσης ότι γνωρίζουμε τη γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς $y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = 0$. Εάν y_1, y_2 είναι δύο λύσεις της ομογενούς εξίσωσης, κάθε λύση της ομογενούς έχει τη μορφή:

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t), \text{ για } c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

αφού ο χώρος των λύσεων έχει διάσταση 2. Η παρατήρηση που έκανε ο Lagrange, και η οποία είναι πολύ ενδιαφέρουσα, είναι ότι, αν θεωρήσουμε αντί σταθερές c_1, c_2, συναρτήσεις $c_1(t), c_2(t)$, μπορούμε να βρούμε λύση της μη ομογενούς.

Πράγματι, έστω ότι υπάρχει $y(t) = c_1(t)y_1(t) + c_2(t)y_2(t)$ μία λύση της μη ομογενούς εξίσωσης. Τότε:

$$\begin{aligned}
&y(t) = c_1(t)y_1(t) + c_2(t)y_2(t)\\
&y'(t) = c_1'(t)y_1(t) + c_1(t)y_1'(t) + c_2'(t)y_2(t) + c_2 y_2'(t)\\
&y''(t) = c_1''(t) + y_1(t) + 2c_1'(t)y_1'(t) + c_1(t)y_1''(t) + c_2''(t)y_2(t) + 2c_2'(t)y_2'(t) + c_2(t)y_2''(t)
\end{aligned}$$

Με αντικατάσταση στην μη ομογενή διαφορική εξίσωση έπεται (με πολλές πράξεις):

$$(a+1)\big((c_1'y_1 + c_2'y_2) + (c_1'y_1' + c_2'y_2')\big) = f$$

Εδώ προσέξτε ότι δεν ψάχνουμε τη γενική λύση ακόμη, ψάχνουμε μία λύση. Ας βρούμε λοιπόν, για χάρη ευκολίας, μία λύση με:

$$\begin{aligned}
c_1'y_1 + c_2'y_2 &= 0\\
c_1'y_1' + c_2'\varphi_2' &= f
\end{aligned}$$

Το παραπάνω σύστημα κανείς μπορεί να το δει ως σύστημα με αγνώστους c_1', c_2'. Έχουμε λοιπόν:

$$W(\cdot) = \det\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} \neq 0$$

μιας και οι λύσεις είνα γραμμικώς ανεξάρτητες. Μάλιστα η ορίζουσα $W(t)$ χρησιμοποιείται αρκετά συχνά κι ονομάζεται ορίζουσα Wronski.

Από τον κανόνα του Crammer, παίρνουμε ουσιαστικά τα c_1', c_2' και κατά συνέπεια μία λύση. Πράγματι:

$$c_1(t) = \det\begin{pmatrix} 0 & y_2(t) \\ f(t) & y_2'(t) \end{pmatrix} \Big/ \det\begin{pmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{pmatrix} = \frac{-f(t)y_2(t)}{W(t)}$$

και:

$$c_2(t) = \det\begin{pmatrix} y_1(t) & 0 \\ y_1'(t) & f(t) \end{pmatrix} \Big/ \det\begin{pmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{pmatrix} = \frac{f(t)y_1(t)}{W(t)}$$

Ολοκληρώνοντας λοιπόν:

$$c_1(t) = -\int \frac{f(t)y_2(t)}{W(t)}\,dt$$
$$c_2(t) = \int \frac{f(t)y_1(t)}{W(t)}\,dt$$

Είναι θέμα πράξεων πλέον να ελέγξει κανείς ότι η $c_1(t)y_1(t) + c_2(t)y_2(t)$ είναι λύση της μη ομογενούς.

Μέχρι τώρα έχουμε τη γενική λύση της ομογενούς και μία λύση της μη ομογενούς. Ποιά είναι η γενική λύση της μη ομογενούς; Μπορούμε να βγάλουμε απ' ευθείας συμπεράσματα; Η απάντηση είναι όχι. Εδώ αξιοποιείται ένα θεώρημα, κατά το οποίο:

> *«Ολες οι λύσεις είναι της μορφής $y_o + y_\varepsilon$, όπου y_o είναι λύσεις της ομογενούς και y_ε μία λύση της μη ομογενούς (ειδική λύση).»*

Υπενθύμιση 7: (Γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις με την ορίζουσα Wronski) Έστω:

$$y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = 0$$

μία διαφορική εξίσωση και y_1 μία λύση της. Με τη βοήθεια της ορίζουσας Wronski, είναι δυνατόν να βρούμε μία ακόμη, γραμμικώς ανεξάρτητη, λύση y_2.

Πράγματι, εάν y_1, y_2 είναι δύο λύσεις της εν λόγω διαφορικής εξίσωσης (με την πρώτη να είναι γνωστή και την δεύτερη άγνωστη), έχουμε:

$$y_1y_2' - y_1'y_2 = W \Rightarrow \frac{y_1y_2' - y_1'y_2}{y_1^2} = \frac{W}{y_1^2}$$

δηλαδή:
$$\left(\frac{y_2}{y_1}\right)' = \frac{W}{y_1^2} \Rightarrow y_2(t) = y_1(t)\int \frac{W(t)}{y_1^2(t)}\ dt$$
Σ' αυτό το σημείο μπορεί να εφαρμοστεί ένας τύπος για την ορίζουσα Wronski, ο οποίος ονομάζεται τύπος του Liouville. Απ' αυτόν παίρνουμε:
$$y_2(t) = y_1(t)\int \frac{e^{-\int a(t)\ dt}}{y_1^2(t)}\ dt$$
Είναι ζήτημα εφαρμογής της ορίζουσας Wronski ώστε να αποδειχθεί η γραμμική ανεξαρτησία των y_1, y_2.

Υπενθύμιση 8: (Το θεώρημα Picard-Lindelof) Θεωρούμε το πρόβλημα αρχικών τιμών:
$$y'(t) = f(t,x),\ \text{με}\ y(t_0) = y_0$$
Εάν οι f, $\partial f/\partial y$ είναι συνεχείς συναρτήσεις σε ορθογώνιο:
$$H = \{(t,y)\ :\ |t-t_0| \leqslant A,\ |y-y_0| \leqslant B\}$$
με $(t_0, y_0) \in H^\circ$, τότε υπάρχει μοναδική λύση σε διάστημα της μορφής $I = [t_0-\delta, t_0+\delta]$, η οποία προσεγγίζεται ομοιόμορφα από την ακολουθία:
$$y_{n+1}(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(\xi, y_n(\xi)\big)\ d\xi$$
Άσκηση 1: Να λυθεί η διαφορική εξίσωση:
$$ty^2(t)y'(t) + y^3(t) = 1,\ t > 0$$
Λύση: Εδώ παρατηρούμε ότι, για τα $t > 0$ ώστε $y(t) \neq 0$:
$$y'(t) + \frac{1}{t}\cdot y(t) = y^{-2}(t)$$
οπότε αυτή είναι μία εξίσωση Bernoulli με $r = -2$, και λύνεται βάσει της **Υπενθύμισης 2**. Γενικά συνήθως δεν γίνεται αναφορά για το τι συμβαίνει για τα υπόλοιπά t. Είναι φανερό, λόγω συνέχειας, ότι το σύνολο $y^{-1}(\{0\})$ είναι πεπερασμένο (εφόσον η y δεν μπορεί να μηδενίζεται σε διάστημα -δεν θα ίσχυε η διαφορική εξίσωση τότε). Λόγω συνέχειας, και του πεπερασμένου του εν λόγω συνόλου, η λύση μπορεί να μεταφερθεί σε όλο το $t > 0$ (γιατί;). □

Άσκηση 2: Να βρεθεί η διαφορίσιμη συνάρτηση φ, με $\varphi(\pi/2) = 0$, για την οποία η διαφορική εξίσωση:
$$2 + y^4\sin t + \varphi(t)y^3y' = 0$$
γίνεται ακριβής. Στη συνέχεια, να λύσετε αντήν την διαφορική εξίσωση.

Λύση: Η διαφορική εξίσωση αυτή μπορεί να γραφεί ως 1-μορφή:
$$\big(2 + y^4\sin t\big)dt + \big(\varphi(t)y^3\big)dy = 0$$

Με βάση το θεώρημα που αναφέραμε στην **Υπενθύμιση 3**, πρέπει η σχέση:

$$\frac{\partial\big(2+y^4\sin t\big)}{\partial y}=\frac{\partial\big(\varphi(t)y^3\big)}{\partial t}$$

να αληθεύει (παρατηρήστε ότι στις παραγωγίσεις δεν βλέπουμε το y ως συνάρτηση του t). Δηλαδή:

$$4y^3\sin t=\varphi'(t)y^3\Rightarrow\varphi'(t)=4\sin t\Rightarrow\varphi(t)=-4\cos t+c$$

κι από την αρχική συνθήκη, $\varphi(t)=-4\cos t$.

Για να λυθεί η διαφορική εξίσωση, πρέπει να βρούμε μία συνάρτηση $F\in\mathcal{D}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}\rightharpoonup\mathbb{R})$ ώστε:

$$\frac{\partial F}{\partial t}=2+y^4\sin t \text{ και } \frac{\partial F}{\partial y}=(-4\cos t)y^3$$

Ξεκινούμε από την πρώτη σχέση, κι ολοκληρώνοντας έχουμε:

$$F(t,y)=2t-y^4\cos t+c_1(y)$$

Ανάλογα, από τη δεύτερη σχέση, ολοκληρώνοντας ως προς y:

$$F(x,y)=(-\cos t)y^4+c_2(x)$$

οπότε:

$$F(t,y)=2t-y^4\cos t$$

Από την ανάλυση που κάναμε στην **Υπενθύμιση 3**, θα πρέπει:

$$F(t,y)=2t-y^4\cos t=c\Rightarrow 2t-y^4\cos t=c$$

το οποίο είναι πεπλεγμένη λύση της ζητούμενης διαφορικής εξίσωσης. □

Άσκηση 3: Το πρόβλημα αρχικών τιμών:

$$y''(t)-2ty'(t)-y(t)=0,\quad \text{με } y(0)=1,\ y'(0)=2$$

έχει λύση της μορφής $y'(t)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^n$. Να υπολογιστούν οι συντελεστές a_n, $n\in\{0,1,2,\cdots,7\}$.

Λύση: Από τη μέθοδο επίλυσης με δυναμοσειρές (από το αντίστοιχο θεώρημα της **Υπενθύμισης 4**), οι τιμές a_0 και a_1 είναι αντίστοιχα $y(0)$, $y'(0)$. Δηλαδή, $a_0=1$, $a_1=2$.

Γενικά τώρα, εάν:

$$y(t)=\sum_{n=1}^{\infty}a_nt^n$$

είναι η λύση της εξίσωσης (όπως αυτή εξασφαλίζεται από την **Υπενθύμιση 4**), έχουμε:

$$y(t)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^n$$

$$y'(t)=\sum_{n=0}^{\infty}na_nt^{n-1}$$

$$y''(t)=\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)t^{n-2}$$

οπότε με αντικατάσταση στη διαφορική εξίσωση:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n t^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} 2na_n t^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}t^n - \sum_{n=0}^{\infty} 2na_n t^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+2)(n+1)a_{n+2} - (2n+1)a_n\right] t^n = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (n+2)(n+1)a_{n+2} - (2n+1)a_n = 0 \Rightarrow a_{n+2} = \frac{2n+1}{(n+2)(n+1)}a_n$$

Ξεκινώντας από το a_0, μπορούμε να βρούμε τα a_0, a_2, a_4, a_6, κι από το a_1 τα a_1, a_3, a_5, a_7. □

Άσκηση 4: Να λυθεί η διαφορική εξίσωση:

$$t^2y''(t) + 3ty'(t) - 3y(t) = t^2,\ t > 0$$

Λύση: Η λύση θα γίνει σε δύο μέρη. Κατ' αρχάς, θα χρειαστεί να λύσουμε την ομογενή εξίσωση:

$$t^2y''(t) + 3ty'(t) - 3y(t) = 0,\ t > 0$$

η οποία είναι Euler, βάσει της **Υπενθύμισης 5**. Έπειτα, με τη μέθοδο του Lagrange, στην **Υπενθύμιση 6**, θα βρούμε μία ειδική λύση, και κατά συνέπεια (αξιοποιώντας ένα γνωστό θεώρημα) θα έχουμε βρει τη γενική λύση της μη ομογενούς εξίσωσης.

Βήμα I: (Η επίλυση της εξίσωσης Euler) Ψάχνουμε μία λύση της μορφής t^r. Έχουμε:

$$r^2 + 2r - 3 = 0 \Rightarrow (r+3)(r-1) = 0 \Rightarrow r \in \{-3, 1\}$$

οπότε η γενική λύση είναι η:

$$c_1t^{-3} + c_2t,\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Βήμα II: (Η μέθοδος Lagrange) Θεωρούμε t^{-3}, t τις δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της ομογενούς εξίσωσης. Θα αναζητήσουμε μία λύση $c_1(t)t^{-3} + c_2(t)t$ της μη ομογενούς λύσεις, βάσει όσων είπαμε στην **Υπενθύμιση 6**. Έχουμε:

$$W(t) = \det\begin{pmatrix} t^{-3} & t \\ -3t^{-4} & 1 \end{pmatrix} = t^{-3} + 3t^{-3} = 4t^{-3}$$

και:

$$c_1(t) = -\int \frac{t^3}{W(t)}\ dt = -\int \frac{1}{4}\ dt = -t/4 + s_1 \text{ (επιλέγουμε } s_1 = 0)$$

$$c_2(t) = \int \frac{t^{-1}}{W(t)}\ dt = \int \frac{t^2}{4}\ dt = t^3/12 + s_2 \text{ (επιλέγουμε } s_2 = 0)$$

Έτσι, η γενική λύση της μη ομογενούς γίνεται:

$$c_1 t^{-3} + c_2 t - t^{-2}/4 + 1/12$$

(ως άθροισμα των ομογενών και της ειδικής λύσης). $\square$

Άσκηση 5: Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και οι ιδιοσυναρτήσεις του προβλήματος συνοριακών τιμών:

$$y''(t) + 4y'(t) - (\lambda - 4)y(t) = 0, \text{ με } y(0) = 0, \; y(2) = 0$$

Λύση: Αρχικά θα λύσουμε την εν λόγω διαφορική εξίσωση, παραβλέποντας το γεγονός ότι το λ είναι άγνωστο. Θεωρούμε την $y(t) = e^{rt}$ κι έχουμε:

$$r^2 e^{rt} + 4re^{rt} - (\lambda - 4)e^{rt} = 0$$

οπότε:

$$r^2 + 4r - (\lambda - 4) = 0 \Rightarrow r = \frac{-2 \pm 2\sqrt{\lambda}}{2} = -1 \pm \sqrt{\lambda}$$

Οι δύο λύσεις $e^{(-1-\sqrt{\lambda})t}$, $e^{(-1+\sqrt{\lambda})t}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητες (όταν $\lambda \neq 0$), και κατά συνέπεια η γενική λύση γίνεται:

$$c_1 e^{(-1-\sqrt{\lambda})t} + c_2 e^{(-1+\sqrt{\lambda})t}$$

Για $t = 0$ έχουμε $y(0) = c_1 + c_2 = 0 \Rightarrow c_1 = -c_2$, και για $t = 2$ έχουμε:

$$y(2) = c_1 e^{-2-2\sqrt{\lambda}} - c_1 e^{-2+2\sqrt{\lambda}} = c_1 \left(e^{-2-2\sqrt{\lambda}} - e^{-2+2\sqrt{\lambda}} \right) = 0$$

- Εάν $\lambda > 0$, τότε $c_1 = 0$ και $c_2 = 0$, οπότε κι εκεί η λύση εκφυλίζεται στη μηδενική.
- Εάν $\lambda < 0$, τότε συμβολίζουμε $\mu = 2\sqrt{|\lambda|}$ κι έχουμε:

  $$0 = -c_1 e^{-2} \left(e^{\mu i} - e^{-\mu i} \right) = 2i \cdot \sin \mu$$

  (αφού $(e^{\theta i} - e^{-\theta i})/(2i) = \sin\theta$). Οπότε είτε $\mu \in \{k\pi \mid k \in \mathbb{N}\}$ και $c_1 = -c_2 \in \mathbb{R}$, είτε $c_1 = -c_2 = 0$ και $\mu \notin \{k\pi \mid k \in \mathbb{N}\}$. Η γενική λύση στην πρώτη περίπτωση γίνεται:

  $$c_1 e^{(-2-k\pi)t} - c_1 e^{(-2+k\pi)t}$$

  και στη δεύτερη εκφυλιζόμαστε στο 0.

Στην περίπτωση όπου $\lambda = 0$, καταλήγουμε σε μία γνωστή εξίσωση $y''(t) + 4y'(t) = 0$. $\square$

Άσκηση 6: Να βρεθεί η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης:

$$2ty''(t) + (1 - 4t)y'(t) + (2t - 1)y(t) = e^t, \; t > 0$$

εάν είναι γνωστές δύο λύσεις $y_1(t) = te^t$ και $y_2(t) = e^t + te^t$, $t > 0$.

Λύση: Θεωρούμε τη διαφορική εξίσωση:

$$L\big(y(t)\big) = y''(t) + \frac{1-4t}{2t} y'(t) + \frac{2t-1}{2t} y(t) - \frac{e^t}{t} = 0$$

και παρατηρούμε ότι, επειδή $L(y_1) = L(y_2) = 0$:

$$L(y_2) - L(y_1) = 0 \Rightarrow (y_2 - y_1)'' + \frac{1-4t}{2t}(y_2 - y_1)' + \frac{2t-1}{2t}(y_2 - y_1)' = 0$$

Δηλαδή η $y_3(t) = (y_2 - y_1)(t) = e^t$ είναι λύση της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης. Από την **Υπενθύμιση 7**, η:

$$y_4(t) = e^t \int \frac{e^{-\int (1-4t)\ dt}}{e^t}\ dt$$

αποτελεί λύση της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης, που είναι γραμμικώς ανεξάρτητη με την y_3. Κατά συνέπεια, η γενική λύση της ομογενούς γίνεται:

$$c_1 y_3 + c_2 y_4$$

και, από μία παρατήρηση στην **Υπενθύμιση 6**, η γενική λύση της μη ομογενούς είναι:

$$c_1 y_3 + c_2 y_4 + y_1$$

(ως άθροισμα των ομογενών και μίας ειδικής). □

Άσκηση 7: Έστω το πρόβλημα αρχικών τιμών:

$$y'(t) = f(t, y) \text{ με } y(0) = 1$$

όπου $f(t, y) = t^2|y|^{1/3}$. Δείξτε ότι αν $0 < B < 1$ και $0 < A < B^{1/3}/(1+B)^{1/9}$, το Θεώρημα Picard-Lindelof εγγυάται ύπαρξη και μοναδικότητα λύσης στο ορθογώνιο $S = \{(t, y)\ :\ |t| \leqslant A,\ |y-1| \leqslant B\} \subseteq \mathbb{R}^2$.

Λύση: Η μερική παράγωγος της f ως προς y είναι η συνάρτηση:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{3} \cdot t^2 |y|^{-2/3}$$

η οποία δεν ορίζεται στην ευθεία $\{(t, y)\ :\ y = 0\}$. Επειδή $0 < B < 1$, το ορθογώνιο S δεν τέμνει την ευθεία αυτή. Επιπλέον, είναι συνεχής στο S, όπως και η f (κι αυτό προκύπτει από τους τύπους των δύο συναρτήσεων, που είναι γνωστοί). Επειδή $(0, 1) \in S^\circ$, η **Υπενθύμιση 8** δίνει το ζητούμενο.[2] □

Άσκηση 8: Δείξτε ότι, αν $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι Lipschitz συναρτήσεις, τότε οι $f_1 + f_2$, $f_1 \circ f_2$ είναι Lipschitz συναρτήσεις.

Λύση: Υποθέτουμε ότι:

$$|f_1(x) - f_1(y)| \leqslant M \cdot |x - y| \text{ και } |f_2(x) - f_2(y)| \leqslant \Lambda \cdot |x - y|$$

Από την τριγωνική ανισότητα έχουμε:

$$|(f_1 + f_2)(x) - (f_2 + f_2)(y)| \leqslant |f_1(x) - f_1(y)| + |f_2(x) - f_2(y)| \leqslant (M + \Lambda) \cdot |x - y|$$

[2] Φαίνεται ότι η λύση δεν εξαρτάται από τη σταθερά A, καθώς ούτως ή άλλως το t δεν επηρεάζει τη συνέχεια των δύο συναρτήσεων, f, $\partial f / \partial y$.

οπότε η $f_1 + f_2$ είναι Lipschitz συνάρτηση, με σταθερά Lipschitz $\leqslant M + \Lambda$. Όσον αφορά τη σύνθεση:

$$|f_1 \circ f_2(x) - f_1 \circ f_2(y)| \leqslant M \cdot |f_2(x) - f_2(y)| \leqslant M\Lambda \cdot |x - y|$$

οπότε η $f_1 \circ f_2$ είναι Lipschitz συνάρτηση, με σταθερά Lipschitz $\leqslant M\Lambda$. □

Άσκηση 9: Δίνεται η διαφορική εξίσωση:

$$y' = \mu y - y - y^3,\ \ \mu \in \mathbb{R}$$

Να προσδιοριστούν οι λύσεις ισορροπίας και τα σημεία διακλάδωσης. Επίσης, να σχεδιαστεί το διάγραμμα διακλάδωσης και να εξεταστεί η ευστάθεια των λύσεων ισορροπίας.

Λύση: Γράφουμε γι' αρχή:

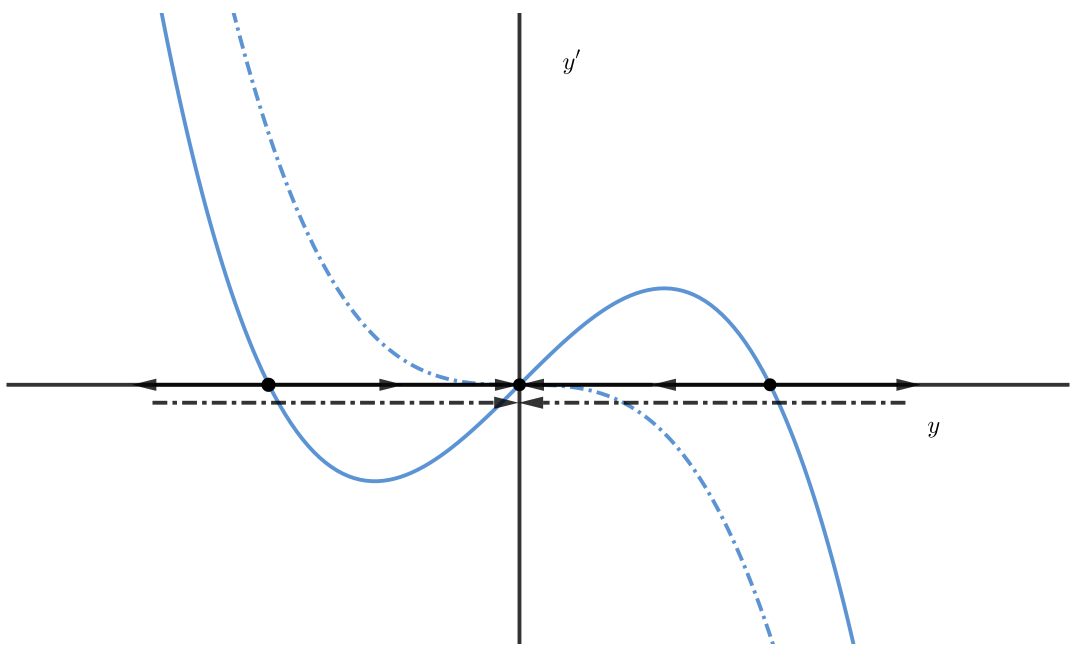
$$y' = (\mu - 1)y - y^3 = y\big((\mu - 1) - y^2\big)$$

και παρατηρούμε τα εξής:

- Εάν $y \in \{0, \pm\sqrt{\mu - 1}\}$, τότε $y' = 0$.
- Γενικά:

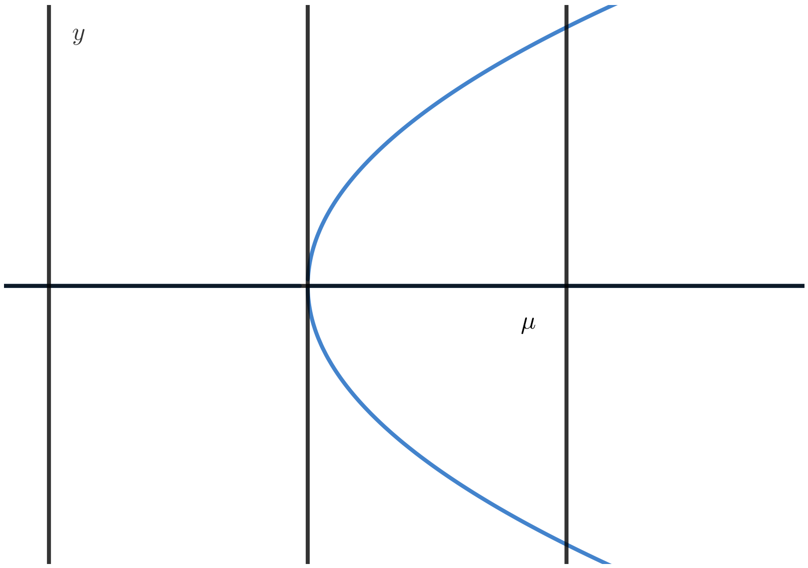
	$(-\infty, -\sqrt{\mu-1}]$	$[-\sqrt{\mu-1}, 0]$	$[0, \sqrt{\mu-1}]$	$[\sqrt{\mu-1}, \infty)$
y	$-$	$-$	$+$	$+$
$y + \sqrt{\mu-1}$	$-$	$+$	$+$	$+$
$y - \sqrt{\mu-1}$	$-$	$-$	$-$	$+$
y'	$-$	$+$	$-$	$+$
y	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Οπότε, το διάγραμμα φάσης γίνεται:



Απ' αυτό παρατηρούμε ότι τα σημεία $-\sqrt{\mu-1}$, $\sqrt{\mu-1}$ αποτελούν σημεία ασταθούς ισορροπίας, ενώ το 0 σημείο ευσταθούς ισορροπίας. Επίσης, για την τιμή $-\sqrt{\mu-1} = \sqrt{\mu-1} = 0 \Leftrightarrow \mu = 1$ η φύση της λύσης αλλάζει.

Σχεδιάζοντας το διάγραμμα διακλάδωσης:



παρατηρούμε ότι πράγματι η τιμή $\mu = 1$ αλλάζει ποιοτικά τη φύση των λύσεων. Κατά συνέπεια, είναι σημείο διακλάδωσης. $\square$

Άσκηση 10: Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών:

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y}, \text{ με } \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0$$

όπου:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}, \ \mathbf{y}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Λύση: Συμβολίζουμε $\mathrm{y} = (y_1, y_2)^T$ και γράφουμε:

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

δηλαδή:

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1 + y_2 \\ y_2' &= 5y_1 - 3y_2 \end{aligned}$$

Παραγωγίζοντας την πρώτη σχέση κι αξιοποιώντας τη δεύτερη, έχουμε:

$$y_1'' = y_1' + y_2' = y_1' + 5y_1 - 3y_2 = y_1' + 5y_1 - 3y_1' + 3y_1$$

επομένως:

$$y_1'' + 2y_1' - 8y_1 = 0$$

Αυτή είναι μία γνωστή εξίσωση, και λύνεται με τον συνήθη τρόπο, ψάχνοντας δηλαδή λύσεις της μορφής e^{rt}. Έχουμε λοιπόν:

$$r^2e^{rt} + 2re^{rt} - 8e^{rt} = 0 \Rightarrow r^2 + 2r - 8 = 0 \Rightarrow r \in \{-4, 2\}$$

κι έτσι οι e^{-4t}, e^{2t} είναι (γραμμικώς) ανεξάρτητες λύσεις. Η γενική λύση είναι η:

$$y_1(t) = c_1e^{-4t} + c_2e^{2t}$$

και, από τη σχέση των y_1, y_2:

$$y_2(t) = 4c_1e^{4t} + 2c_2e^{2t} - c_1e^{-4t} - c_2e^{2t} = 3c_1e^{4t} + c_2e^{2t}$$

Η αρχική συνθήκη θα προσδιορίσει τα c_1, c_2. Για $t = 0$:

$$\begin{aligned} y_1(0) = 1 &\Rightarrow c_1 + c_2 = 1 \\ y_2(0) = 2 &\Rightarrow 3c_1 + c_2 = 2 \end{aligned}$$

επομένως $c_1 = 1/2$ και $c_2 = 1/2$. □

Άσκηση 11: Δείξτε ότι ο πίνακας:

$$\Phi = \begin{pmatrix} 2 & \log t \\ 0 & 1/t \end{pmatrix}$$

είναι θεμελιώδης πίνακας λύσεων του συστήματος:

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1/t \end{pmatrix} \mathbf{y},\ t > 0$$

Να βρεθεί η λύση του συστήματος εάν $\mathbf{y}(1) = (1,1)^T$.

Λύση: Κατ' αρχάς ο πίνακας Φ είναι πίνακας λύσεων, αφού:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1/t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & \log t \\ 0 & 1/t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/t \\ 0 & -1/t^2 \end{pmatrix} = \Phi'$$

Υπολογίζοντας την ορίζουσα Wronski, $W = \det \Phi$, θα διαπιστώσουμε ότι οι λύσεις (οι στήλες του πίνακα Φ) είναι γραμμικώς ανεξάρτητες.

$$\det \Phi = 2/t,\ t > 0$$

Κατά συνέπεια ο πίνακας Φ είναι θεμελιώδης πίνακας λύσεων του συστήματος. Η γενική λύση, μιας και οι στήλες του Φ είναι γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις, θα λαμβάνει τη μορφή:

$$c_1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \cdot \begin{pmatrix} \log t \\ 1/t \end{pmatrix}$$

ή αλλιώς, μετά από αλλαγή των σταθερών:

$$\begin{pmatrix} c_1 + c_2 \log t \\ c_2/t \end{pmatrix}$$

Με την αρχική συνθήκη υπόψη, μπορούμε να προσδιορίσουμε τα c_1, c_2, τα οποία γίνονται $c_1 = 1$, $c_2 = 1$. $\square$

Άσκηση 12: Έστω $\psi(t)$ η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών:

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y},\ \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0, \quad \text{όπου } A \in \mathbb{R}^{n\times n},\ A + A^T = 0$$

Δείξτε ότι $||\psi(t)|| = ||\mathbf{y}_0||$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$, όπου $||\cdot||$ συμβολίζει την Ευκλείδεια νόρμα. Επιβεβαιώστε το αποτέλεσμα αυτό από τη λύση του συστήματος:

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{y},\ \mathbf{y}_0 = (a, b)$$

Λύση: θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$T_\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \text{με } T_\psi(t) = ||\psi(t)||^2 = \langle \psi(t), \psi(t) \rangle$$

και παρατηρούμε ότι είναι παραγωγίσιμη. Μάλιστα:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_\psi}{\partial t}(t) &= \langle \psi(t), \psi'(t) \rangle + \langle \psi'(t), \psi(t) \rangle \\ &= \psi^T(t)\psi'(t) + \psi'^T(t)\psi(t) \end{aligned}$$

Εάν το ψ είναι λύση του συστήματος $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$, τότε:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_\psi}{\partial t}(t) &= \psi^T(t)A\psi(t) + \psi(t)^T A^T \psi(t) \\ &= \psi^T(t)(A + A^T)\psi(t) \overset{\star}{=} 0 \end{aligned}$$

(όπου η $(\star)$ δικαιολογείται από την υπόθεση $A + A^T = 0$). Αυτό δείχνει ότι η T_ψ είναι σταθερή, δηλαδή η $||\psi(t)||$ είναι σταθερή. Λόγω της αρχικής συνθήκης έχουμε $\psi(0) = \mathbf{y}_0$, οπότε $||\psi(t)|| = ||\mathbf{y}_0||$ για όλα τα $t \in \mathbb{R}$.

Ας κάνουμε μία επαλύθευση στο σύστημα:

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{y},\ \mathbf{y}_0 = (a, b)$$

Κατ' αρχάς παρατηρούμε ότι:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

Έπειτα, θα βρούμε τη λύση του προβλήματος αρικών τιμών που δίνει το σύστημα αυτό, μαζί με την αρχική συνθήκη.

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= -y_1 \end{aligned}$$

Παραγωγίζοντας την πρώτη, έχουμε $y_1'' = y_2' = -y_1$, δηλαδή $y_1''+y_1 = 0$. Αυτή είναι γνωστή διαφορική εξίσωση (λ.χ. από την κλασική μηχανική), και έχει γενική λύση:

$$y_1(t) = c_1 \sin t + c_2 \cos t$$

και η y_2 γίνεται $y_2(t) = c_1 \cos t - c_2 \sin t$. Λαμβάνοντας υπόψη την αρχική συνθήκη:

$$\begin{aligned} c_1 \sin 0 + c_2 \cos 0 = a \\ c_1 \cos 0 - c_2 \sin 0 = b \end{aligned}$$

δηλαδή $c_1 = b$, $c_2 = a$. Τελικά, αν συμβολίσουμε $\psi(t) = (b \sin t + a \cos t, b \cos t - a \sin t)^T$:

$$||\psi(t)||^2 = b^2 \sin^2 t + 2ab \sin t \cos t + a^2 \cos^2 t + b^2 \cos^2 t - 2ab \sin t \cos t + a^2 \sin^2 t = a^2 + b^2$$

δηλαδή $||\psi(t)|| = \sqrt{a^2 + b^2} = ||(a, b)^T|| = ||\mathbf{y}_0||$. □