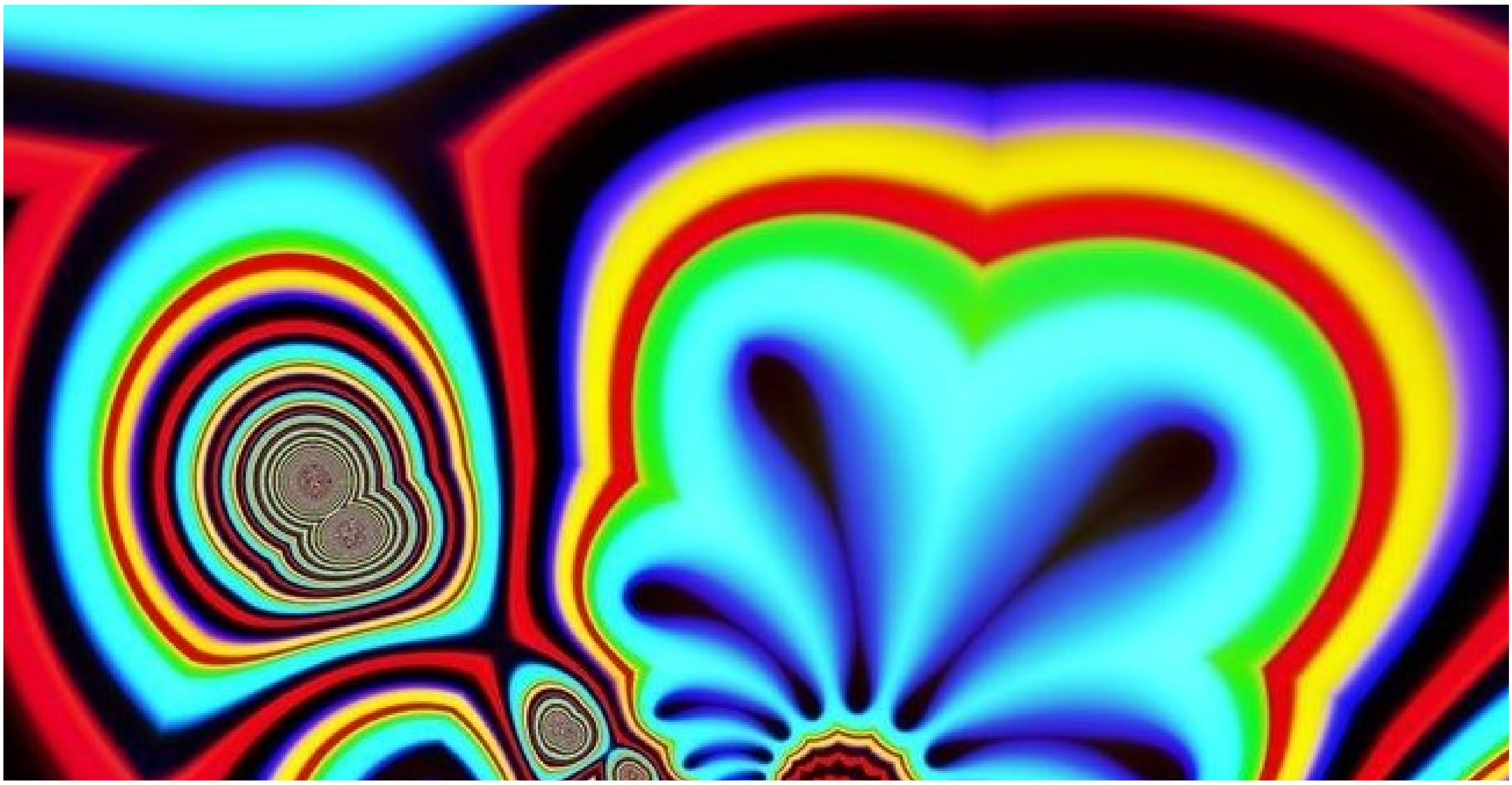
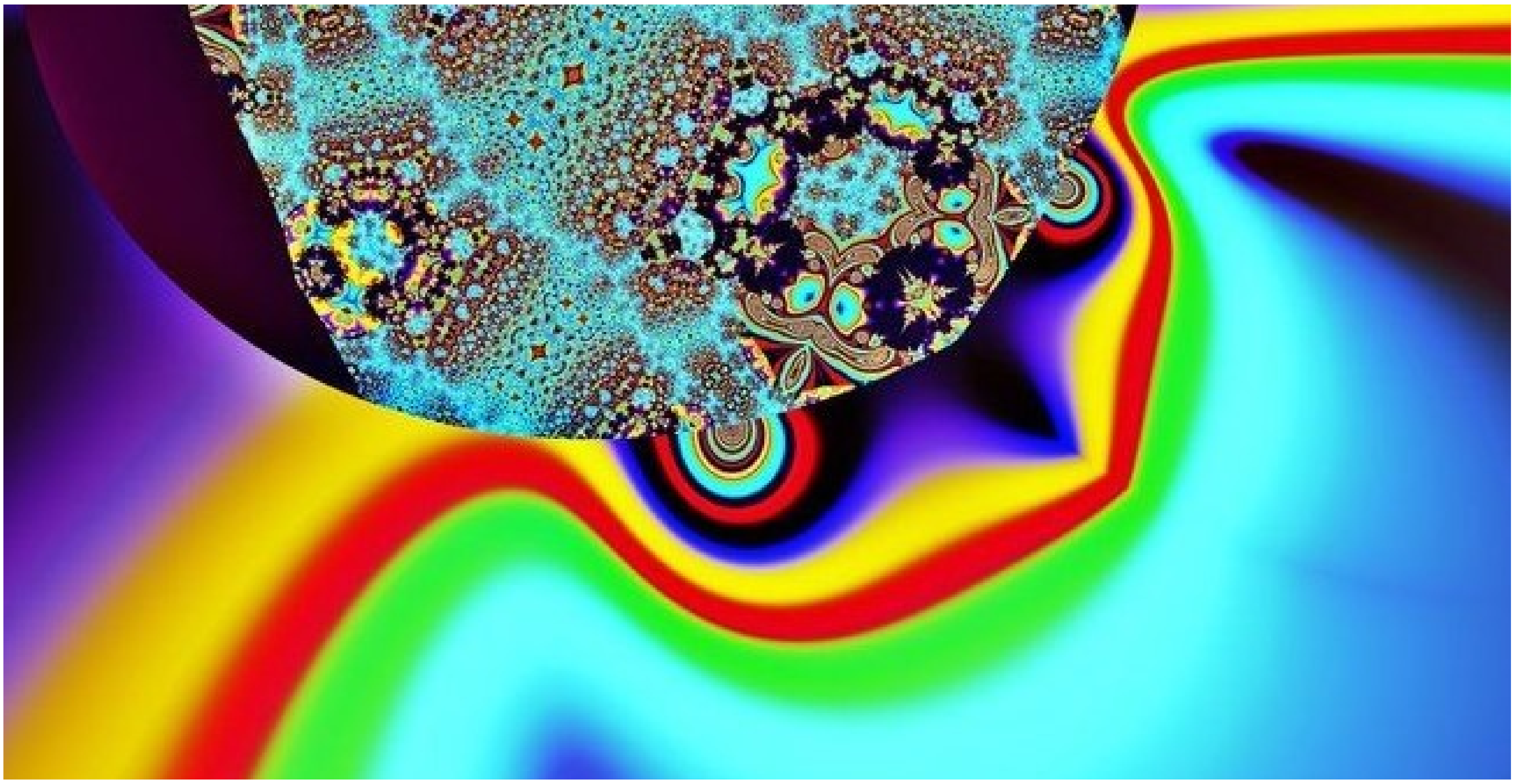


Πρόχειρες σημειώσεις στη Μιγαδική Ανάλυση Ι

Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών, Τμήμα Μαθηματικών

Διδάσκων: Χατζηαφράτης Τηλέμαχος

22 Φεβρουαρίου 2022 **Επιμέλεια: Φράγκος Αναστάσιος**



Συμβολισμοί	
1. $\|\|\cdot\|\|_2$: Είναι η ευκλείδεια νόρμα ενός διανύσματος στον $\mathbb{R}^k$.	**2.** $\Re(z)$: Το πραγματικό μέρος του μιγαδικού αριθμού z.
3. $\Im(z)$: Το φανταστικό μέρος του μιγαδικού αριθμού z.	**4.** $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} - \{0\}$
5. $\mathbb{C}^+ := \{z \in \mathbb{C} \mid \Im(z) \geq 0\}$	**6.** $(A \to B)$: Το σύνολο των συναρτήσεων της μορφής $A \to B$.
7. $\underrightarrow{OA}$: Το σύνολο των σημείων της ημιευθείας με αρχή το O, που διέρχεται από το A.	**8.** $S(a,r) := \{x \in X \mid d(x,a) < r\}$, όπου (X,d) είναι ένας μετρικός χώρος.
9. $B(a,r) := \{x \in X \mid d(x,a) \leq r\}$, όπου (X,d) είναι μετρικός χώρος.	**10.** $f : A \twoheadrightarrow B$: Η συνάρτηση f είναι επί του B.
11. $\#A$: Ο πληθάριθμος του συνόλου A.	**12.** $[n] := [1,n] \cap \mathbb{N}$
13. ∂A: Είναι το σύνορο του συνόλου A.	**14.** $\operatorname{sign}(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$

Σημείωση: Το παρόν έγγραφο είναι ουσιαστικά (πολύ συνοπτικά) οι σημειώσεις του μαθήματος 'Μιγαδική Ανάλυση Ι', όπως αυτό διδάχθηκε το χειμερινό εξάμηνο του 2021-22, από τον κ. Χατζηαφράτη Τηλέμαχο. Να σημειωθεί ότι υπάρχουν αρκετές προσθήκες και τροποποιήσεις, καθώς επίσης λείπουν παραδείγματα και ασκήσεις.

Οι πρώτες μορφές αυτών των σημειώσεων θα έχουν σχεδόν σίγουρα αρκετά λάθη. Θα είμαι λοιπόν ευγνώμων σε όποιον αναγνώστη με ενημερώσει για κάποια από αυτά, μέσω της διεύθυνσης ηλ. ταχυδρομείου: afragos@email.com

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Το σύνολο των μιγαδικών

1.1 Γενικοί ορισμοί

Ορισμός 1.1 – Αλγεβρικό σώμα. Ένα αλγεβρικό σώμα είναι μια δομή $(F, \oplus, \odot)$, με τις πράξεις $\oplus, \odot$ πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού αντίστοιχα, τέτοια ώστε:

- Η δομή $(F, \oplus, \ominus)$ να μεταθετικός δακτύλιος, δηλαδή:
  - $F \neq \emptyset$
  - Η πράξη $\oplus$ είναι καλά ορισμένη, αντιμεταθετική, προσαιτεριστική.
  - Υπάρχει ουδέτερο στοιχείο ($\mathbf{0}_F$) της $\oplus$.
  - Υπάρχει για κάθε $f \in F$ το αντίθετό του ($-f$), ως προς την $\oplus$.
  - Η $\odot$ είναι καλά ορισμένη, αντιμεταθετική, προσαιτεριστική.
  - Η πράξη $\odot$ είναι επιμεριστική ως προς $\oplus$.
- Υπάρχει ουδέτερο στοιχείο ($\mathbf{1}_F$) της $\odot$.
- Υπάρχει για κάθε $f \in F - \{\mathbf{0}_F\}$ το αντίθετό του (f^{-1}), ως προς την $\odot$.
- Το σύνολο F δεν ταυτίζεται με το $\{\mathbf{0}_F\}$.

Παρατήρηση 1.1 Στον προηγούμενο ορισμό δεν ταυτίζουμε την έννοια του σώματος με αυτήν του διαιρετικού δακτυλίου. Για εμάς ένας διαιρετικός δακτύλιος είναι (εν γένει) μη αντιμεταθετικός.

Ορισμός 1.2 – Το σύνολο των μιγαδικών. Ορίζουμε την αλγεβρική δομή των μιγαδικών $\mathbb{C}$ έτσι ώστε:

- $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$
- Υπάρχουν δύο πράξεις ($\oplus, \odot$), πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού, οι οποίες καθιστούν τη δομή $(\mathbb{C}, \oplus, \odot)$ ένα αλγεβρικό σώμα και ορίζονται με τον εξής τρόπο:
  - $(a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d)$
  - $(a, b) \odot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$
  - $\mathbf{1}_{\mathbb{C}} = (1, 0)$

● Παρατηρούμε ότι το στοιχείο $(0, 1)$ έχει την ιδιότητα $(0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -\mathbf{1}_{\mathbb{C}}$. Αυτό το στοιχείο θα το ονομάζουμε *μιγαδική μονάδα* και τα το συμβολίζουμε με i.

Άσκηση: Δείξτε ότι οι πράξεις $\oplus, \odot$ πράγματι καθιστούν τη δομή $(\mathbb{C}, \oplus, \odot)$ ένα σώμα.

Παρατήρηση 1.2 Κάθε αριθμός του $\mathbb{C}$ μπορεί να γραφεί ως $(a, 0) \oplus [(b, 0) \odot (0, 1)]$.

Απόδειξη: Πράγματι, αρκεί να παρατηρήσουμε ότι:

$$(a, b) = (a, 0) \oplus (0, b) = (a, 0) \oplus [(b, 0) \odot (0, 1)]$$

Ορισμός 1.3 – Πραγματικά και μιγαδικά μέρη. Έστω $z \in \mathbb{C}$. Το z πάντοτε γράφεται στη μορφή $z = (a, 0) \oplus [(b, 0) \odot i]$, όπου $a, b \in \mathbb{R}$. Ορίζουμε *πραγματικό μέρος του* z τον αριθμό $\Re(z) = ||(a, 0)||_2 = a$, και ως *φανταστικό μέρος του* z τον αριθμό $\Im(z) = ||(b, 0)||_2 = b$.

Παρατήρηση 1.3 Κάθε αριθμός (a, b) του $\mathbb{C}$ έχει ως πολλαπλασιαστικό αντίστροφο τον αριθμό:

$$\left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right)$$

Απόδειξη: Πράγματι, εξ' ορισμού του πολλαπλασιασμού:

$$\left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}.\right) \odot (a, b) = \left(\frac{a^2}{a^2+b^2} + \frac{b^2}{a^2+b^2}, \frac{-ab}{a^2+b^2} + \frac{ba}{a^2+b^2}\right) = (1, 0)$$

Από τη μεταθετικότητα της $\odot$ έπεται το ζητούμενο.

Παρατήρηση 1.4 Στο σύνολο $\mathbb{C}$ δεν μπορεί να βρεθεί ολική διάταξη που να διατηρεί τις πράξεις $\oplus, \odot$.

Ορισμός 1.4 – Μέτρο μιγαδικού αριθμού. Έστω $z \in \mathbb{C}$. Το z έχοντας μορφή διανύσματος, έχει ένα μέτρο $||z||_2$. Ορίζουμε λοιπόν ως μέτρο του μιγαδικού z τον θετικό πραγματικό αριθμό:

$$|z| := ||z||_2 = \sqrt{\Re(z)^2 + \Im(z)^2}$$

Από εδώ και στο εξής, στη γραφή των μιγαδικών αριθμών θα κάνουμε τους εξής συμβιβασμούς:

- Τις πράξεις $\oplus, \odot$ μεταξύ των μιγαδικών θα τις συμβολίζουμε απλώς με $+, \cdot$.
- Κάθε μιγαδικό αριθμό (a, b) θα τον γράφουμε ως $a + bi$, παραποιώντας τη γραφή $(a, 0) + [(b, 0) \cdot (0, 1)]$ της **Παρατήρησης 1.2**. Και φυσικά, περιπτώσεις της μορφής $(a, -b)$ θα γράφονται ως $a - bi$.

Ορισμός 1.5 – Συζυγής μιγαδικός αριθμός. Ορίζουμε ως συζυγή μιγαδικό αριθμό του z το σημείο $\bar{z}$, το οποίο είναι το συμμετρικό του z ως προς την ευθεία xx'. Ειδικότερα, $\bar{z} = \Re(z) - \Im(z)i$.

■**Πρόταση 1.1 – Ιδιότητες της συζυγίας.** Για κάθε (ενδεχομένως μη μηδενικούς) μιγαδικούς αριθμούς $z = (x, y) = x + iy$ και w ισχύουν οι σχέσεις:

- $\overline{(\bar{z})} = z$
- $z \cdot \bar{z} = x^2 - (iy)^2 = |z|^2$
- $\bar{z}^2 = (x^2 - y^2) - 2xyi = \overline{z^2}$
- $\dfrac{1}{\bar{z}} = \dfrac{x+iy}{x^2+y^2} = \overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)}$
- $\bar{z}^n = \overline{z^n}, \ n \in \mathbb{N}$
- $\bar{z} \cdot \bar{w} = \overline{z \cdot w}$
- $\bar{z} + \bar{w} = \overline{z + w}$
- $\dfrac{\bar{z}}{\bar{w}} = \overline{\left(\dfrac{z}{w}\right)}$

■

1.2 Η γεωμετρία των μιγαδικών αριθμών

Κάθε μιγαδικός αριθμός μπορεί να αναπαρασταθεί ως σημείο του συνήθους καρτεσιανού επιπέδου, επομένως και ως ένα διάνυσμα μιας αρχής O και με πέρας το εν λόγω σημείο. Το σημείο O θα θεωρηθεί να ταυτίζεται με το σημείο μηδενικών συντεταγμένων, δηλαδή με το $O = (0, 0)$.

Επομένως κάθε μιγαδικός αριθμός z θα μπορεί να αναπαρασταθεί με χρήση *πολικών* συντεταγμένων στο επίπεδο. Ακριβέστερα, παρατηρούμε ότι το διάνυσμα z σχηματίζει μια γωνία θ_z με τον άξονα των xx', και επίσης έχει μέτρο $\rho_z = |z|$. Οπότε ισοδύναμα μπορεί να αναπαρασταθεί ως:

$$z = \big(\rho_z \cos(\theta_z), \rho_z \sin(\theta_z)\big) = \rho_z[\cos(\theta_z) + i\sin(\theta_z)]$$

Η αναγραφή των μιγαδικών αριθμών με πολικές συντεταγμένες θα καλείται *τριγωνομετρική μορφή* του μιγαδικού αριθμού.

Ορισμός 1.6 – Όρισμα μιγαδικού αριθμού. Η γωνία θ_z του μιγαδικού αριθμού z δεν είναι μονοσήμαντα ορισμένη. Ειδικότερα, κάθε πραγματικός αριθμός στο σύνολο:

$$\left\{2\kappa\pi + \arccos\left(\frac{\Re(z)}{|z|}\right) \,\middle|\, \kappa \in \mathbb{Z}\right\}$$

μπορεί να χρησιμοποιηθεί στην τριγωνομετρική αναπαράσταση του αριθμού.

Για να εξασφαλιστεί λοιπόν το μονοσήμαντο της γωνίας, ορίζουμε τη συνάρτηση:

$$\arg : \mathbb{C}^* \to (-\pi, \pi] \text{ ως } z \overset{\arg}{\mapsto} \begin{cases} \arccos\left(\dfrac{\Re(z)}{|z|}\right), \text{ εάν } z \in \mathbb{C}^+ \\ -\arg(\bar{z}), \text{ εάν } z \in \mathbb{C} - \mathbb{C}^+ \end{cases}$$

Όπου $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{\mathbf{0}_{\mathbb{C}}\}$ και $\mathbb{C}^+ = \{z \in \mathbb{C} \mid \Im(z) \geq 0\}$. Η τριγωνομετρική μορφή του z για $\theta_z = \arg(z)$ είναι μονοσήμαντη. Αυτή η ιδιότητα θα δειχθεί με την παρατήρηση που ακολουθεί.

Παρατήρηση 1.5 Η συνάρτηση $\arg : \mathbb{C}^* \to (-\pi, \pi]$ έχει αμφιμοσήμαντο περιορισμό $\arg|_D$, όπου $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. Ως πόρισμα, κάθε αριθμός $z \in \mathbb{C}$ έχει μοναδική τριγωνομετρική αναπαράσταση με $\theta_z = \arg(z)$.

Απόδειξη: Για κάθε $\theta \in [0, \pi]$ επιλέγουμε σημείο $z \in D \cap \mathbb{C}^+$ τέτοιο ώστε $\widehat{(1,0)z} = \theta$. Αντίστοιχα, για κάθε $\theta \in (-\pi, 0)$ επιλέγουμε σημείο $z \in D \cap [\mathbb{C} - \mathbb{C}^+]$ τέτοιο ώστε $\widehat{(1,0)z} = \theta$. Ορίζουμε τη συνάρτηση $\psi(\theta) = z$ και παρατηρούμε ότι αυτή αποτελεί αντίστροφη της $\arg$. Αυτό δείχνει το αμφιμονοσήμαντο της $\arg|_D$.

Το πόρισμα είναι άμεση συνέπεια του γεγονότος ότι $\forall z \in \mathbb{C} :\ z = |z| \cdot \dfrac{z}{|z|}$ και $\dfrac{z}{|z|} \in D$.

Θεώρημα 1.1 – Τύπος του de Moivre. Έστω $z \in \mathbb{C}$. Τότε ισχύει, για κάθε φυσικό αριθμό n, ο τύπος:

$$z^n = |z|^n \big[\cos(n \cdot \arg(z)) + i \sin(n \cdot \arg(z))\big]$$

Απόδειξη: Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή στο n.

Για το 1, ο τύπος ισχύει τετριμμένα.

Υποθέτουμε ότι για κάποιο n ο τύπος ισχύει, και θα δείξουμε ότι ισχύει και για το $n+1$:

$$z^{n+1} = z^n \cdot z = |z|^n \big[\cos(n \cdot \arg(z)) + i \sin(n \cdot \arg(z))\big] \cdot |z| \big[\cos(\arg(z)) + i \sin(\arg(z))\big] =$$

$$= |z|^{n+1} \Big[\cos(n \cdot \arg(z)) \cdot \cos(\arg(z)) - \sin(n \cdot \arg(z)) \cdot \sin(\arg(z)) + i\big(\cos(n \cdot \arg(z)) \cdot \sin(\arg(z)) + \sin(n \cdot \arg(z)) \cdot$$

$$\cdot \cos(\arg(z))\big)\Big] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z^{n+1} = |z|^{n+1} \Big[\cos\big((n+1) \cdot \arg(z)\big) + i \sin\big((n+1) \cdot \arg(z)\big)\Big]$$

1.3 Πολυωνυμικές εξισώσεις στο μιγαδικό επίπεδο

Θεώρημα 1.2 – Λύσεις των μιγαδικών τριωνύμων. Έστω $P(z) = z^2 + c_1 z + c_2 \in \mathbb{C}[z]$. Η πολυωνυμική εξίσωση $P(z) = 0$ έχει τουλάχιστον μία λύση στο $\mathbb{C}$.

Για την απόδειξη του εν λόγω θεωρήματος, θα χρειαστούμε το ακόλουθο λήμμα:

Λήμμα 1.1 Οι δευτεροβάθμιες πολυωνυμικές εξισώσεις της μορφής $z^2 = a + bi$ έχουν λύσεις στο $\mathbb{C}$. ■

Απόδ. του λήμματος: Θεωρούμε $z = x + iy,\ (x, y) \in \mathbb{R}^2$ και αναπτύσσουμε την πολυωνυμική εξίσωση σε:

$$x^2 - y^2 + 2xyi = a + bi \Rightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases}$$

Εάν $b = 0$, η περίπτωση ανάγεται στους πραγματικούς αριθμούς. Εάν $b \neq 0 \Rightarrow x, y \neq 0$, οπότε η ποσότητα $y = \dfrac{b}{2x}$ έχει νόημα. Με αντικατάσταση στο προκύπτον σύστημα παίρνουμε την ακόλουθη δευτεροβάθμια εξίσωση ως προς x^2:

$$x^4 - \frac{b^2}{4} = ax^2 \Rightarrow x^4 - ax^2 - b^2 = 0$$

η οποία έχει λύσεις:

$$x^2 = \frac{a \pm \sqrt{a^2+b^2}}{2} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}$$

Για το y, παρατηρούμε (κι αυτό για να αποφύγουμε τις πολλές πράξεις) ότι $x = \dfrac{b}{2y}$ και επιπλέον ότι $y^2 - x^2 = -a$. Οπότε εφαρμόζουμε συμμετρικά τον τύπο του x για a το $-a$, και λαμβάνουμε τελικά ότι:

$$y = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}$$

Έπεται πλέον η γενική λύση της πολυωνιμικής εξίσωσης:

$$z = \begin{cases} \pm\left[\sqrt{\dfrac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} + i\cdot\sqrt{\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\right], & \text{εάν } b \geq 0 \\ \pm\left[\sqrt{\dfrac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} - i\cdot\sqrt{\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\right], & \text{εάν } b < 0 \end{cases}$$

Απόδ. του θεωρήματος: Η απόδειξη, δεδομένου του **Λήμματος 1.1**, είναι ανάλογη της περίπτωσης των πραγματικών δευτεροβάθμιων εξισώσεων. Πολύ συνοπτικά, παρατηρούμε ότι:

$$0 = z^2 + c_1 z + c_2 = z^2 + 2\cdot\frac{c_1}{2} + \frac{c_1^2}{4} + c_2 - \frac{c_1^2}{4} \Rightarrow \left(z+\frac{c_1}{2}\right)^2 = \frac{c_1^2}{4} - c_2$$

Θεώρημα 1.3 – n−οστές μιγαδικές ρίζες. Στο μιγαδικό επίπεδο $\mathbb{C}$ κάθε εξίσωση:

$$z^n = w. \text{ με } w \in \mathbb{C}^*,\ n \in \mathbb{N}$$

έχει ακριβώς n διακεκριμένες μιγαδικές λύσεις, οι οποίες για $n = 2$ σχηματίζουν διάμετρο στον κύκλο $(O,\ \sqrt[n]{|w|})$, και για $n \geq 3$ κανονικό $n-$γωνο, στον ίδιο κύκλο.

Απόδειξη: Από τον τύπο του de Moivre προκύπτει ότι το σύνολο:

$$\left\{\sqrt[n]{|w|}\left[\cos\left(\frac{2k\pi + \arg(w)}{n}\right) + i\cdot\sin\left(\frac{2k\pi+\arg(w)}{n}\right)\right]\ \middle|\ k+1 \in [n]\right\}$$

που έχει πληθικότητα n, απαρτίζεται από λύσεις της εξίσωσης.

Παρατήρηση 1.6 Έστω $f \in \mathbb{R}[z]$ και $s \in \mathbb{C}$ μία λύση της $f(z) = 0$. Τότε η $\bar{s}$ είναι λύση της $f(z) = 0$.

Απόδειξη: Πράγματι, παρατηρούμε ότι αν $f(z) = a_0 + \sum_{i\in[\deg(f)]} a_i z^i$, τότε:

$$f(\bar{s}) = a_0 + \sum_{i\in[\deg(f)]} a_i \bar{s}^i = a_0 + \sum_{i\in[\deg(f)]} a_i \overline{s^i} = \overline{a_0} + \sum_{i\in[\deg(f)]} \overline{a_i s^i} = \overline{a_0 + \sum_{i\in[\deg(f)]} a_i s^i} = \bar{0} = 0$$

Να σημειωθεί ότι το γεγονός $f \in \mathbb{R}[z]$ έπαιξε καθοριστικό ρόλο στην απόδειξη. Παρόμοιο αποτέλεσμα δεν θα ίσχυε για $f \in \mathbb{C}[z]$.

Ορολογία 1.1 – Συνεπτυγμένη κυβική μορφή. Συνεπτυγμένη κυβική μορφή καλείται κάθε μονικό τριτοβάθμιο πολυώνυμο του $\mathbb{R}[z]$, του οποίου ο συντελεστής του x^2 είναι 0.

■**Πρόταση 1.2** Για κάθε τριτοβάθμιο πολυώνυμο $f(z) = az^3 + bz^2 + cz + d$ υπάρχει συνάρτηση / μετασχηματισμός T που οδηγεί με $1-1$ τρόπο σε συνεπτυγμένη κυβική μορφή. ■

Απόδειξη: Πράγματι, εάν $f(z) = az^3 + bz^2 + cz + d$, ο μετασχηματισμός αυτός είναι ο λεγόμενος 'μετασχηματισμός Tschirnhaus', ο οποίος ορίζεται ως:

$$T : z \mapsto z - \frac{b}{3a}$$

Άσκηση: Δείξτε ότι ο μετασχηματισμός Tschirnhaus πράγματι οδηγεί σε συνεπτυγμένη κυβική μορφή.

Θεώρημα 1.4 – Λύσεις των κυβικών εξισώσεων και η μέθοδος Cardano. Έστω $P(z) = z^3+c_1z^2+c_2z+c_3 \in \mathbb{R}[z]$. Η πολυωνυμική εξίσωση $P(z) = 0$ έχει τρεις (όχι κατ' ανάγκη διακεκριμμένες) πραγματικές λύσεις, ή δύο συζυγείς μιγαδικές και μία πραγματική.

Απόδειξη: Η απόδειξη θα γίνει με τη μέθοδο του Cardano. Δεδομένης της **Πρότασης 1.2**, αρκεί να δειχθεί ότι κάθε P^* σε συνεπτυγμένη κυβική μορφή ικανοποιεί το θεώρημα.

Έστω λοιπόν η πολυωνυμική εξίσωση $P^*(z) = z^3 + az + b = 0$. Θεωρούμε τον μετασχηματισμό $z = u + v$ με $uv = -a/3$ και η συνεπτυγμένη μορφή $P^*(z) = 0$ γίνεται:

$$0 = P^*(u+v) = (u+v)^3 + a(u+v) + b = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 + a(u+v) + b =$$

$$= u^3 - a(u+v) + a(u+v) + v^3 + b = u^3 - \frac{a^3}{27} \cdot \frac{1}{u^3} + b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u^6 + bu^3 - \frac{a^3}{27} = 0$$

το οποίο είναι τριώνυμο ως προς u^3. Το τριώνυμο αυτό έχει λύσεις:

$$u^3 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 + \frac{4}{27}a^3}}{2}$$

Γνωρίζοντας την u^3, η v^3 μπορεί να προδιοριστεί:

$$v^3 = \frac{-b \mp \sqrt{b^2 + \frac{4}{27}a^3}}{2}$$

Χωρίς λοιπόν βλάβη της γενικότητας (κι αυτό λόγω συμμετρίας), μπορούμε να υποθέσουμε ότι:

$$u^3 = \frac{-b + \sqrt{b^2 + \frac{4}{27}a^3}}{2}$$

$$v^3 = \frac{-b - \sqrt{b^2 + \frac{4}{27}a^3}}{2}$$

Καθεμία από τις προηγούμενες εξισώσεις έχει μια λύση στους πραγματικούς, και μάλιστα αυτές είναι οι:

$$\operatorname{sign}(u^3) \cdot \sqrt[3]{|u^3|},\ \operatorname{sign}(v^3) \cdot \sqrt[3]{|v^3|}$$

Ας υποθέσουμε λοιπόν s την πραγματική ρίζα της $u^3 = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 + \frac{4}{27}a^3}}{2}$ και t την πραγματική ρίζα της $v^3 = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 + \frac{4}{27}a^3}}{2}$. Σύμφωνα με το **Θεώρημα 1.3 - n−οστές μιγαδικές ρίζες**, οι άλλες δύο μιγαδικές λύσεις των εξισώσεων των u, v βρίσκονται στις άλλες δύο κορυφές των ισοσκελών τριγώνων με κορυφές s και t αντίστοιχα, τα οποίο είναι εγγεγραμμένα στους κύκλους $(O, |s|)$ και $(O, |t|)$ αντίστοιχα. Συγκεκριμένα:

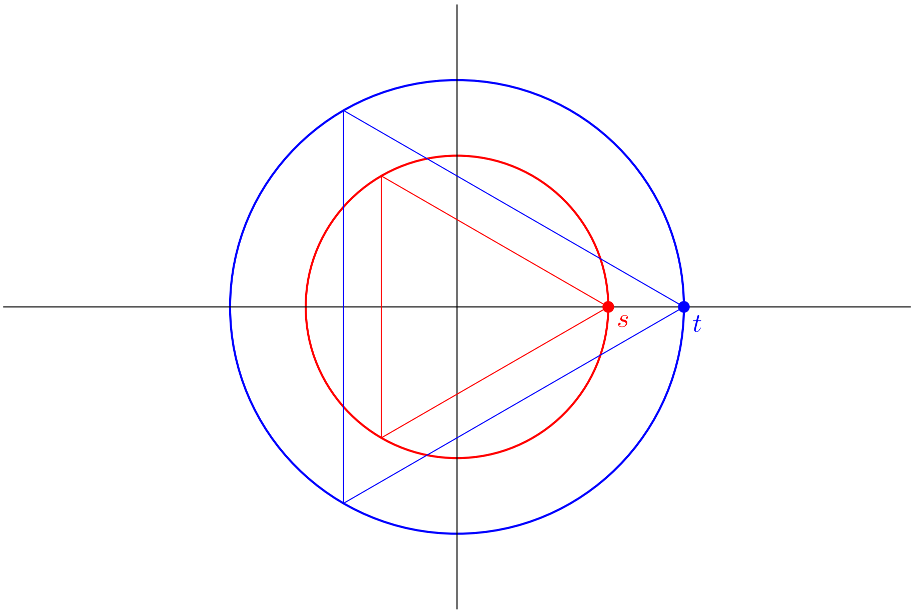
$$u = \begin{cases} 1 \cdot s \\ \left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) \cdot s \\ \left(-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) \cdot s \end{cases}$$

$$v = \begin{cases} 1 \cdot t \\ \left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) \cdot t \\ \left(-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) \cdot t \end{cases}$$

Σε αυτό το σημείο πρέπει να παρατηρηθεί ότι δεν δίνουν όλοι οι 9 συνδυασμοί των u, v λύσεις της εξίσωσης $z^3 + az + b = 0$ (δηλ. $u + v = z,\ uv = -a/3$). Συγκεκριμένα, μόνο οι ακόλουθες αποτελούν λύσεις της εν λόγω εξίσωσης:

$$\begin{aligned} z_0 &= s + t \\ z_1 &= \left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) \cdot s + \left(-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) \cdot t \\ z_2 &= \left(-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) \cdot s + \left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) \cdot t \end{aligned}$$

Μάλιστα, $z_0 \in \mathbb{R}$ και $z_1 = \bar{z}_2 \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$ (ο συμβολισμός $\mathbb{R}$ αντί $\mathbb{R} \times \{0\}$ είναι καταχρηστικός και θα χρησιμοποιείται συχνά. Ορθότερα θα έπρεπε να είχε γραφεί $\mathbb{C} - [\mathbb{R} \times \{0\}]$).



1.4 Επεκτάσεις στο μιγαδικό επίπεδο

Ορισμός 1.7 – Επέκταση της εκθετικής. Θεωρούμε τη συνάρτηση $E : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ που ορίζεται ως:

$$E : z \mapsto e^{\Re(z)} \left[\cos(\Im(z)) + i \sin(\Im(z)) \right]$$

Η συνάρτηση αυτή έχει ανάλογες ιδιότητες της πραγματικής εκθετικής. Συγκεκριμένα, οι ιδιότητες είναι γενίκευση των αντίστοιχων της πραγματικής εκθετικής.

1. Η E είναι επί του $\mathbb{C}^*$.
2. $E(z \cdot w) = E(z) + E(w)$
3. $E|_{\mathbb{R}} = \exp = e^{(\cdot)}$

Απόδειξη:

$\boxed{1.}$ Πράγματι, η $e^{(\cdot)}$ είναι επί του $\mathbb{R}^+$ και η $\cos(\cdot) + i\sin(\cdot)$ είναι επί του $\partial S(0, 1)$.

$\boxed{2.}$ Ισχύει ότι:

$$E(z \cdot w) = e^{\Re(z \cdot w)} \left[\cos(\Im(z \cdot w)) + i \sin(\Im(z \cdot w)) \right] = e^{\Re(z)} e^{\Re(w)} \left[\cos(\Im(z) + \Im(w)) + i \sin(\Im(z) + \Im(w)) \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E(z \cdot w) = E(z) + E(w)$$

$\boxed{3.}$ Πράγματι, $E|_{\mathbb{R}} = e^{(\cdot)} \left[\cos(\mathbf{0}_{(\mathbb{R} \to \mathbb{R})}) + i \sin(\mathbf{0}_{(\mathbb{R} \to \mathbb{R})}) \right] = e^{(\cdot)}$, όπου $\mathbf{0}_{(\mathbb{R} \to \mathbb{R})}$ είναι το μηδενικό στοιχείο του χώρου συναρτήσεων $(\mathbb{R} \to \mathbb{R})$.

Παρατήρηση 1.7 Η E δεν είναι $1-1$ συνάρτηση, αφού $E(z) = E(z + 2k\pi i)$, $\forall k \in \mathbb{Z}$.

- Η συνήθης εκθετική συνάρτηση $e^{(\cdot)}$ των πραγματικών μπορεί να θεωρηθεί περιορισμός της E. Επομένως, από εδώ και στο εξής θα συμβολίζουμε $E =: \exp$ και θα θεωρούμε ότι $e^{(\cdot)} = \exp|_{\mathbb{R}}$.

Παρατήρηση 1.8 – Ο τύπος του Euler (πραγματική μορφή). Εάν $i\theta$ είναι ένας μιγαδικός αριθμός με $\theta \in \mathbb{R}$, ο τύπος της $\exp$ στο $i\theta$ μας δίνει τον γνωστό τύπο του Euler:

$$\exp(i\theta) = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$$

Ορισμός 1.8 – Επέκταση του λογαρίθμου. Ο συνήθης λογάριθμος ως πραγματική συνάρτηση, ορίζεται ως αντίστροφη συνάρτηση της πραγματικής εκθετικής. Παρόμοια διαδικασία δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί στο μιγαδικό επίπεδο για τον ορισμό του λογαρίθμου, απλούστατα διότι η συνάρτηση $\exp$ δεν είναι $1-1$. Η εξίσωση λοιπόν ως προς z, για $w \in \mathbb{C}^*$:

$$\exp(z) = w = |w|\big[\cos(\theta_w) + i\sin(\theta_w))\big], \text{ όπου } \theta_w = \arg(w)$$

αναμένεται να έχει παραπάνω από μία λύσεις. Ειδικότερα:

$$z \in \exp^{-1}(w) = \big\{\log(|w|) + (2k\pi + \theta_w)\cdot i \mid k \in \mathbb{Z}\big\}$$

Θεωρούμε γι' αυτόν τον λόγο ως συνάρτηση - λογάριθμο $L : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ στους μιγαδικούς, μόνο τον κλάδο:

$$L(w) = \log(|w|) + i\theta_w$$

Οπότε, από εδώ και στο εξής οι εξισώσεις της μορφής $\exp(z) = w$ θα επιλύονται ως:

$$\exp(z) = w \Rightarrow z = L(w) \mod (2\pi i)$$

- Με ακριβώς ανάλογο τρόπο, η συνήθης λογαριθμική συνάρτηση $\log(\cdot)$ των πραγματικών μπορεί να θεωρηθεί περιορισμός της L. Επομένως, από εδώ και στο εξής θα συμβολίζουμε $L =: \log$ και θα θεωρούμε ότι ο συνήθης πραγματικός λογάριθμος είναι ακριβώς η συνάρτηση $\log|_{\mathbb{R}_+^*}$.

Παρατήρηση 1.9 Έστω Λ να είναι το σύνολο $\Lambda = \{z \in \mathbb{C} \mid \Im(z) \in (-\pi, \pi]\}$. Η συνάρτηση $\exp|_\Lambda : \Lambda \to \mathbb{C}^*$ είναι αμφιμονοσήμαντη, αφού υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση $\log : \mathbb{C}^* \to \Lambda$. Η ίδια παρατήρηση μας δίνει ότι η συνάρτηση του μιγαδικού λογαρίθμου είναι αμφιμονοσήμαντη.

Παρατήρηση 1.10 Υπάρχουν εν γένει περισσότεροι από έναν $w \in \mathbb{C}$ τέτοιοι ώστε η εξίσωση ως προς w:

$$\log\big(\exp(w)\big) = z \ \big(\text{ή ισοδύναμα } \exp(w) = \exp(z)\big)$$

να επιλύεται. Αυτό διότι η $\exp$ δεν είναι $1-1$, και ειδικότερα κάθε αριθμός w της μορφής $w = z \mod (2\pi i)$ ικανοποιεί την παραπάνω εξίσωση. Εν γένει λοιπόν, η σχέση:

$$\log\big(\exp(z)\big) = z$$

δεν αληθεύει, παρά μόνο αν η $\exp$ βρίσκεται σε χωρίο τέτοιο ώστε να αποτελεί αντίστροφο συνάρτηση της $\log$. Δηλαδή η σχέση αληθεύει μόνο στο χωρίο Λ, σύμφωνα με την **Παρατήρηση 1.9**.

Αντίθετα, η εξίσωση ως προς w:

$$\exp\big(\log(w)\big) = z \ \big(\text{ή ισοδύναμα } \log(w) = \log(z)\big)$$

έχει μοναδική λύση την $w = z$. Αυτό φυσικά έπεται από το $1-1$ της συνάρτησης του μιγαδικού λογαρίθμου.

Ορισμός 1.9 – Επέκταση της n−οστής ρίζας. Έστω $n \in \mathbb{N}$. Ορίζουμε για κάθε $z \in \mathbb{C}$ ως $n-$οστή μιγαδική ρίζα την ποσότητα:

$$\sqrt[n]{z} := \sqrt[n]{|z|} \cdot \exp\left(i \cdot \frac{2k\pi + \arg(z)}{n}\Big|_{k=0}\right) = \sqrt[n]{|z|} \cdot \exp\left(i \cdot \frac{\arg(z)}{n}\right)$$

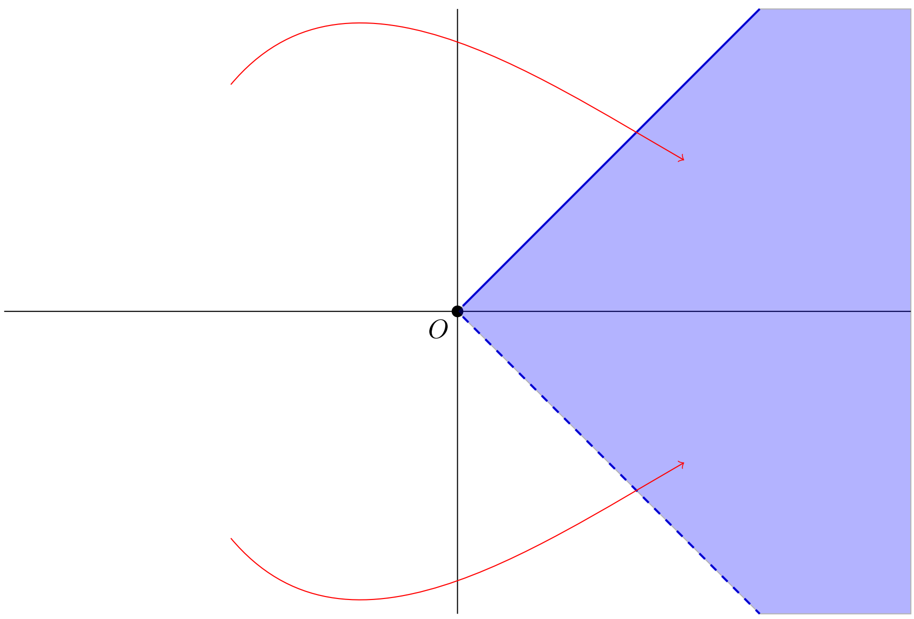
Ουσιαστικά ορίζουμε ως $n-$οστή ρίζα του z τον μιγαδικό αριθμό αυτό w για τον οποίο $w^n = z$ και στο πολύγωνο ($n-$γωνο) των λύσεων, συναντάται πρώτος με αριστερόστροφο προσανατολισμό.

Παρατήρηση 1.11 – Η γεωμετρία της n−οστής ρίζας. Η $n-$οστή ρίζα ως συνάρτηση του z είναι ένας $1-1$ και επί μετασχηματισμός του μιγαδικού επιπέδου $\mathbb{C}$ προς τη γωνία $\angle\left[\left(\cos\frac{\pi}{n}, \sin\frac{\pi}{n}\right) O \left(\cos\frac{\pi}{n}, -\sin\frac{\pi}{n}\right)\right] \cup \overrightarrow{O\left(\cos\frac{\pi}{n}, \sin\frac{\pi}{n}\right)}$, όπου $\overrightarrow{O\left(\cos\frac{\pi}{n}, \sin\frac{\pi}{n}\right)}$ είναι η πλευρά / ημιευθεία της γωνίας που διέρχεται από τα σημεία O, $\left(\cos\frac{\pi}{n}, \sin\frac{\pi}{n}\right)$.

Απόδειξη: Πράγματι, ο τύπος του de Moivre μας εξασφαλίζει το επί της συνάρτησης:

$$\sqrt[n]{\cdot} : \mathbb{C} \to \angle\left[\left(\cos\frac{\pi}{n}, \sin\frac{\pi}{n}\right) O \left(\cos\frac{\pi}{n}, -\sin\frac{\pi}{n}\right)\right] \cup O\,\overrightarrow{\left(\cos\frac{\pi}{n}, \sin\frac{\pi}{n}\right)}$$

Όσον αφορά το $1-1$, εάν u, v είναι δύο μιγαδικοί που ικανοποιούν την εξίσωση ως προς w, $w^n = z$, τότε αυτοί βρίσκονται στο ίδιο πολύγωνο ($n-$γωνο) λύσεων. Εξ' ορισμού της ρίζας, $u = v$.



Ορισμός 1.10 – Επέκταση της εκθετικής με γενική βάση. Έστω $a \in \mathbb{C}^*$. Για κάθε $z \in \mathbb{C}$, ορίζουμε:

$$a^z := \exp\left(z \log(a)\right)$$

■**Πρόταση 1.3** Για την εκθετική συνάρτηση όπως ορίστηκε στη γενική της μορφή, ισχύουν οι ιδιότητες:

- Εάν $n \in \mathbb{N}$, τότε $a^{1/n} = \exp\left(\frac{\log|a|}{n} + \frac{i \cdot \arg(a)}{n}\right) = \sqrt[n]{|a|} \cdot \exp\left(\frac{i \cdot \arg(a)}{n}\right) = \sqrt[n]{a}$.
- Εάν $n \in \mathbb{N}$, τότε $a^n = \overbrace{a \cdot \ldots \cdot a}^{n}$.
- Εάν $n \in \mathbb{N}$, τότε $a^{-n} = \overbrace{\frac{1}{a} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{a}}^{n}$

■

Άσκηση: Αποδείξτε την προαναφερθείσα πρόταση.

Παρατήρηση 1.12 Οι επεκτάσεις των εκθετικών συναρτήσεων αποτελούν γενίκευση της πραγματικής περίπτωσης, αλλά δεν μεταβιβάζουν όλες τις ιδιότητες της πραγματικής περίπτωσης σε οποιουσδήποτε μιγαδικούς αριθμούς. Για παράδειγμα, η σχέση:

$$(\alpha^\beta)^\gamma = \alpha^{\beta\gamma}$$

δεν ισχύει για κάθε $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$.

Απόδειξη: Η απόδειξη του συγκεκριμένου θα μπορούσε απλώς να γίνει με ένα αντιπαράδειγμα. Συγκεκριμένα, αρκεί να παρατηρήσουμε ότι $[\exp(2\pi i)]^{1/2} = 1^{1/2} = 1$ αλλά $\exp\left(\frac{2\pi i}{2}\right) = \exp(\pi i) = -1$.

Εμείς εδώ θα ακολουθήσουμε μια άλλη διαδικασία, που θα μας δώσει μια μεγαλύτερη οικογένεια αριθμών $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ που δεν ικανοποιούν την εν λόγω σχέση.

Βήμα Ι: Υποθέτουμε προς άτοπο ότι η σχέση $(\alpha^\beta)^\gamma = \alpha^{\beta\gamma}$ ισχύει για κάθε $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$. Θεωρούμε $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ τέτοια ώστε $\alpha^\beta \neq 1$ και παρατηρούμε ότι $\log(\alpha^\beta) \neq 0$.

Βήμα ΙΙ: Έστω $\gamma \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $\overbrace{-\pi - \min\left\{0, \arg\left(\log(\alpha^\beta)\right)\right\}}^{\gamma_1} < \arg(\gamma) < \overbrace{\pi - \max\left\{0, \arg\left(\log(\alpha^\beta)\right)\right\}}^{\gamma_2}$. Παρατηρούμε ότι εάν η σχέση $(\alpha^\beta)^\gamma = \alpha^{\beta\gamma}$ αληθεύει, τότε:

$$\exp\left(\gamma \log(\alpha^\beta)\right) = \exp\left(\log(\alpha^{\beta\gamma})\right) \Rightarrow \gamma \log(\alpha^\beta) = \log(\alpha^{\beta\gamma}) + 2k\pi i, \text{ για κάποιο } k \in \mathbb{Z}$$

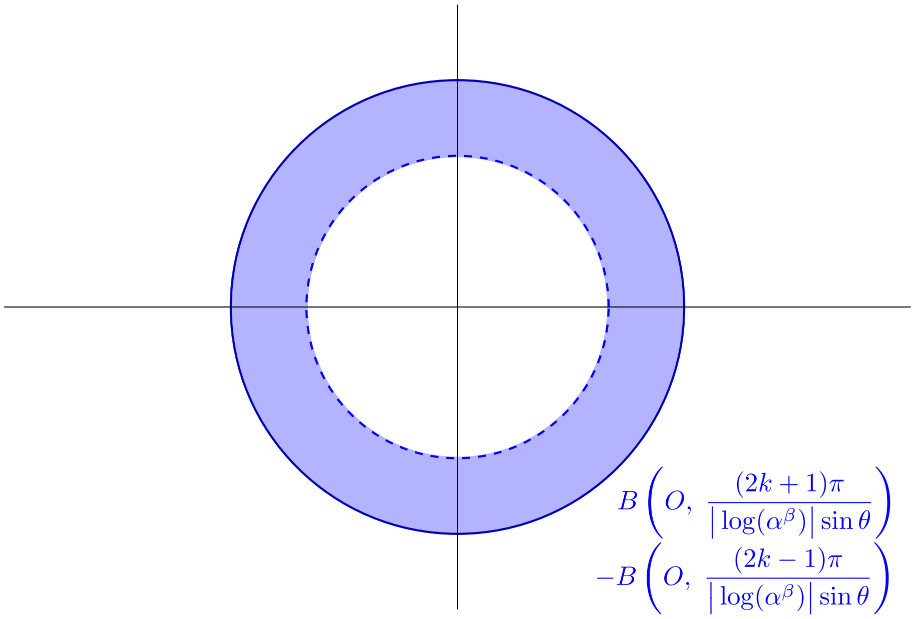
Βήμα ΙΙΙ: Επειδή $\Im\left[\log(\alpha^{\beta\gamma})\right] \in (-\pi, \pi]$, έπεται ότι $\Im\left[\log(\alpha^{\beta\gamma}) + 2k\pi i\right] \in \left((2k-1)\pi, (2k+1)\pi\right]$. Εάν $\theta = \arg\left(\gamma \log(\alpha^\beta)\right)$, τότε παρατηρούμε ότι $\theta \neq 0$, αφού $\theta = \arg(\gamma) + \arg\left(\log(\alpha^\beta)\right)$. Επίσης παρατηρούμε ότι:

$$\Im\Big(\gamma \log(\alpha^\beta)\Big) = \left|\gamma \log(\alpha^\beta)\right| \sin\theta = |\gamma| \cdot \left|\log(\alpha^\beta)\right| \cdot \sin\theta \in \left((2k-1)\pi, (2k+1)\pi\right]$$

Έπεται από την τελευταία σχέση ότι:

$$\frac{(2k-1)\pi}{\left|\log(\alpha^\beta)\right| \sin\theta} < |\gamma| \leq \frac{(2k+1)\pi}{\left|\log(\alpha^\beta)\right| \sin\theta}$$

το οποίο είναι άτοπο, αφού $\gamma \in B\left(O, \frac{(2k+1)\pi}{\left|\log(\alpha^\beta)\right| \sin\theta}\right) - B\left(O, \frac{(2k-1)\pi}{\left|\log(\alpha^\beta)\right| \sin\theta}\right) \subset \{\gamma \mid \arg(\gamma) \in (\gamma_1, \gamma_2)\}$.



Θεώρημα 1.5 – Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας. Κάθε πολυωνυμική εξίσωση $P(z) = 0$, όπου $P \in \mathbb{C}[z]$ είναι μη σταθερό πολυώνυμο, έχει τουλάχιστον μία λύση στο $\mathbb{C}$. Με διαφορετική διατύπωση, το σώμα των μιγαδικών αριθμών $\mathbb{C}$ είναι αλγεβρικά κλειστό.

Απόδειξη: Έστω $P \in \mathbb{C}[z]$ ένα μιγαδικό πολυώνυμο, το οποίο γράφεται ως:

$$z^n + \sum_{k+1\in[n]} c_k z^k, \text{ με } c_k \in \mathbb{C}$$

Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι η μελέτη αρκεί να περιοριστεί στα μονικά πολυώνυμα, αφού ο μη μηδενικός μεγιστοβάθμιος συντελεστής μπορεί να διαιρέσει τα δύο μέλη της πολυωνυμικής εξίσωσης και να προσδώσει εξίσωση με μονικό πολυώνυμο μόνο.

Εφόσον κάθε όρος του πολυωνύμου είναι ουσιαστικά ένα διάνυσμα στο $\mathbb{R}^2$, μπορούμε εφαρμόζοντας την τριγωνική ανισότητα, να πάρουμε ότι:

$$|P(z)| \geq |z|^n - \sum_{k+1\in[n]} c_k |z|^k = |z|^n \left[1 - \sum_{k+1\in[n]} \frac{c^k}{|z|^{n-k}}\right]$$

Παρατηρούμε ότι καθώς $|z| \to \infty$, ισχύει $|P(z)| \to \infty$. Επομένως, θα υπάρχει ένας αριθμός $r_0 \in \mathbb{R}_+^*$ τέτοιος ώστε:

$$\forall z \in \mathbb{C},\ |z| > r_0 :\ |P(z)| > |P(w)| > 0, \text{ όπου } w \in \mathbb{C} :\ P(w) \neq 0$$

Θεωρούμε τον πραγματικό αριθμό $\mu = \min |P|[B(O, r_0)]$. Ο αριθμός μ υπάρχει, αφού το σύνολο $B(O, r_0)$ είναι συμπαγές στο $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ και η διανυσματική συνάρτηση $|P| : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής. Ένα γνωστό λοιπόν θεώρημα δίνει, αξιοποιώντας τις δύο παρατηρήσεις, ότι υπάρχει ελάχιστο στοιχείο μ το συνόλου $|P|[B(O, r_0)]$. Το γεγονός ότι $\forall z \in B(O, r_0)^c$ ισχύει $|P(z)| > |P(w)| \geq \mu$ εξασφαλίζει ότι κάθε άλλη τιμή της συνάρτησης εκτός του $B(O, r_0)$ δεν μπορεί να γίνεται μικρότερη του μ. Επομένως, το μ είναι επίσης το ελάχιστο στοιχείο του συνόλου $|P|[\mathbb{C}]$.

Εφόσον λοιπόν $\mu = \min |P|[\mathbb{C}]$, υπάρχει αριθμός $z_0 \in \mathbb{C}$ τέτοιος ώστε $|P|(z_0) = \mu$. Ισχυριζόμαστε ότι $P(z_0) = 0$.

Προς άτοπο υποθέτουμε ότι $P(z_0) \neq 0$ και θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$Q(z) = \frac{|P(z + z_0)|}{|P(z_0)|} = 1 + \sum_{k\in[n]} a_k z^k$$

Ο σταθερός όρος 1 προκύπτει από το γεγονός ότι $Q(0) = 1$. Για τη συνάρτηση Q ισχύει $Q(z) \geq 1$, αφού το $|P(z_0)|$ είναι ελάχιστο.

Θεωρούμε κ τον ελάχιστο φυσικό αριθμό για τον οποίο $a_\kappa \neq 0$. Εάν $\zeta \in \mathbb{C}$ είναι ένας αριθμός τέτοιος ώστε $\zeta^\kappa = -\dfrac{|a_\kappa|}{a_\kappa}$, τότε η τιμή του Q υπολογιζόμενη στον αριθμό $r\zeta$, όπου $r > 0$, δίνει:

$$\begin{aligned}
|Q(r\zeta)| &= \Big|1 + \overbrace{a_\kappa r^\kappa \zeta^\kappa}^{-|a_\kappa| r^\kappa} + \sum_{\kappa<k\leq n} a_k r^k \zeta^k\Big| \\
&\leq \big|1 - |a_\kappa| r^\kappa\big| + \sum_{\kappa<k\leq n} |a_k r^k \zeta^k|
\end{aligned}$$

Διαλέγουμε ακτίνα $0 < r < r_1 \in \mathbb{R}_+^*$ αρκετά μικρή, τέτοια ώστε $1 - |a_\kappa| r^\kappa > 0$, και κατ' επέκταση $\big|1 - |a_\kappa| r^\kappa\big| = 1 - |a_\kappa| r^\kappa$.

$$\begin{aligned}
|Q(r\zeta)| &\leq 1 - |a_\kappa| r^\kappa + \sum_{\kappa<k\leq n} |a_k r^k \zeta^k| \\
&= 1 - |a_\kappa| r^\kappa + \sum_{\kappa<k\leq n} |a_k r^k| \\
&= 1 - r^\kappa \left(|a_\kappa| - \sum_{\kappa<k\leq n} |a_k r^{k-\kappa}| \right)
\end{aligned}$$

Και πάλι, μπορούμε να διαλέξουμε ακτίνα $0 < r < r_2 \leq r_1 \in \mathbb{R}_+^*$ τέτοια ώστε $|a_\kappa| - \sum_{\kappa<k\leq n} |a_k r^{k-\kappa}| = \theta > 0$. Κατ' επέκταση:

$$Q(r\zeta) \leq 1 - r^\kappa \theta < 1 \Rightarrow Q(r\zeta) < 1$$

Αυτό είναι προφανώς άτοπο, το οποίο σημαίνει ότι $P(z_0) = 0$. Το θεώρημα λοιπόν αποδεικνύεται.

Παρατήρηση 1.13 Κάθε μη σταθερό πολυώνυμο $P \in \mathbb{C}[z]$ ορίζει πολυωνυμική εξίσωση $P(z) = 0$ με ακριβώς $\deg(P)$ λύσεις στο $\mathbb{C}$ (όχι κατ' ανάγκη διαφορετικές).

Απόδειξη: Η απόδειξη γίνεται με επαγωγή στον βαθμό του πολυωνύμου P. Για $\deg(P) = 1$ ισχύει τετριμμένα. Εάν η παρατήρηση ισχύει για κάθε $\deg(P) = n > 1$, ένα τυχόν πολυώνυμο P^* με βαθμό $n + 1$ έχει μια τουλάχιστον λύση ρ. Επομένως, γράφεται στη μορφή $P^*(z) = (z - \rho)P(z)$, με το $P(z)$ να είναι βαθμού n. Από την επαγωγική υπόθεση, η εξίσωση $P(z) = 0$ έχει ακριβώς n λύσεις, κι έτσι η $P^*(z) = 0$ έχει $n + 1$ λύσεις. Το ζητούμενο λοιπόν αποδεικνύεται.

Παρατήρηση 1.14 Κάθε μη σταθερό, μονικό πολυώνυμο $P \in \mathbb{C}[z]$ μπορεί να γραφεί στη μορφή:

$$P(z) = \prod_{k\in[\deg(P)]} (z - \rho_k), \text{ όπου } \rho_k \text{ είναι οι ρίζες του}$$

σύμφωνα με την **Παρατήρηση 1.12**. Κάνοντας τους πολλαπλασιασμούς, έπεται ότι αν $P = z^n + \sum_{k+1\in[n]} c_k z^k$, ισχύουν οι σχέσεις:

- $c_{n-1} = \sum_{k_1\in[n]} \rho_{k_1}$
- $c_{n-2} = \sum_{1<k_1<k_2\leq n} \rho_{k_1}\rho_{k_2}$
- $c_{n-3} = \sum_{1<k_1<k_2<k_3\leq n} \rho_{k_1}\rho_{k_2}\rho_{k_3}$

$\vdots$

- $c_{n-\kappa} = \sum_{1<k_1<k_2<\cdots<k_\kappa\leq n} \rho_{k_1}\rho_{k_2}\cdots\rho_{k_\kappa}$

$\vdots$

- $c_0 = \rho_1\rho_2\cdots\rho_n = \prod_{k\in[n]} \rho_k$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Ολόμορφες συναρτήσεις

2.1 Γενικά

Ορισμός 2.1 – Η έννοια της μιγαδικής παραγώγου. Έστω f μια συνάρτηση $f:\Omega\to\mathbb{C}$ με $\Omega\subseteq\mathbb{C}$. Θα λέμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $a\in\mathbb{C}$ εάν το όριο:

$$\lim_{z\to a}\frac{f(z)-f(a)}{z-a}$$

υπάρχει στο $\mathbb{C}$. Εάν η f είναι παραγωγίσιμη στο a, ορίζουμε ως παράγωγο στο a (και συμβολίζουμε $f'(a)$), το όριο αυτό.

Ορισμός 2.2 – Ολόμορφες συναρτήσεις. Έστω f μια συνάρτηση $f:\Omega\to\mathbb{C}$ με το $\Omega\subseteq\mathbb{C}$ να είναι ανοικτό σύνολο. Θα λέμε ότι η f είναι ολόμορφη στο Ω εάν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο του Ω. Το σύνολο των ολομόρφων συναρτήσεων του $(\Omega\to\mathbb{C})$ θα το συμβολίζουμε με $\mathcal{O}(\Omega)$.

■**Πρόταση 2.1**

- Η συνάρτηση $z\mapsto\bar{z}$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0, αφού:
$$\lim_{z\to 0}\frac{\bar{z}}{z}=\lim_{z\to 0}\frac{\bar{z}^2}{|z|^2}=\lim_{z\to 0}\widehat{\bar{z}}^2$$
προσεγγίζοντας το 0 από δύο διαφορετικές ευθείες που διέρχονται από το 0 (και άρα που έχουν διαφορετικές κλίσεις), το όριο παίρνει διαφορετικές τιμές. Επομένως δεν ορίζεται.
- Η συνάρτηση $z\mapsto\bar{z}$ δεν είναι παραγωγίσιμη σε κανένα $c\in\mathbb{C}$, αφού:
$$\lim_{z\to c}\frac{\bar{z}-\bar{c}}{z-c}=\lim_{z-c\to 0}\frac{\overline{z-c}^2}{|z-c|^2}=\lim_{z-c\to 0}\widehat{\overline{z-c}}^2$$
- Η ταυτοτική συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο, αφού:
$$\lim_{z\to c}\frac{z-c}{z-c}=1$$
- Κατ' επέκταση, το σύνολο των ολόμορφων συναρτήσεων $\Omega\to\mathbb{C}$, $\Omega\subseteq\mathbb{C}$ δεν είναι κενό και δεν ταυτίζεται με το σύνολο όλων των μιγαδικών συναρτήσεων.

■

Παρατήρηση 2.1 Εάν μια συνάρτηση $f:\Omega\to\mathbb{C}$ είναι παραγωγίσιμη στο $a\in\Omega$, τότε είναι συνεχής στο a.

Απόδειξη: Πράγματι:

$$\lim_{z\to c}[f(z)-f(c)]=\lim_{z\to c}\left[\frac{f(z)-f(c)}{z-c}\cdot(z-c)\right]=f'(a)\lim_{z\to c}(z-c)=0$$

■**Πρόταση 2.2** Για τη μιγαδική παράγωγο ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες:

- $(f+g)'(z)=f'(z)+g'(z)$
- $(f\cdot g)'(z)=f'(z)\cdot g(z)+f(z)\cdot g'(z)$
- $\left({}^{f}/_{g}\right)'(z)=\dfrac{f'(z)g(z)-f(z)g'(z)}{g(z)^2}$, όπου $g(z)\neq 0$.
- $(f\circ g)'(z)=f'\big(g(z)\big)\cdot g'(z)$, όπου $g:\Theta\twoheadrightarrow\Omega$, $\Theta,\Omega\subseteq\mathbb{C}$ και $f:\Omega\to\mathbb{C}$ (το σύμβολο '$\twoheadrightarrow$' συμβολίζει το επί).

■

Άσκηση: Αποδείξτε την προηγούμενη πρόταση.

2.2 Εξισώσεις Cauchy - Riemann

Θεώρημα 2.1 – Εξισώσεις Cauchy - Riemann. Έστω συνάρτηση $f : \Omega \to \mathbb{C}$, $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, η οποία γράφεται ως:

$$f(x,y) = \Re_f(x,y) + \Im_f(x,y) \cdot i, \text{ με } \Re_f, \Im_f : \Omega \to \mathbb{R} \text{ και } z = (x,y) \in \mathbb{C}$$

Ουσιαστικά οι συναρτήσεις $\Re_f, \Im_f$ αποτελούν το πραγματικό και το φανταστικό μέρος της f αντίστοιχα - δηλαδή $\Re_f(x,y) = \Re[f(x,y)]$ και $\Im_f(x,y) = \Im[f(x,y)]$. Εάν $c \in \Omega$, τότε ισχύει η ισοδυναμία:

$$\text{Η } f \text{ έχει μιγαδική παράγωγο στο } c \Leftrightarrow \text{ οι } \Re_f, \Im_f \text{ είναι διαφορίσιμες και επιπλέον:}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \Re_f}{\partial x}\Big|_c &= \frac{\partial \Im_f}{\partial y}\Big|_c \\ \frac{\partial \Re_f}{\partial y}\Big|_c &= -\frac{\partial \Im_f}{\partial x}\Big|_c \end{aligned} \right\}$$

Απόδειξη: Σε όλα τα παρακάτω θα συμβολίζουμε $z = (x,y) \in \mathbb{C}$ και $f(x,y) = \Re_f(x,y) + i\Im_f(x,y)$.

($\Rightarrow$) Εάν η μιγαδική παράγωγος υπάρχει σε ένα σημείο $c = (a,b) \in \mathbb{C}$, τότε το ακόλουθο όριο υπάρχει:

$$f'(c) = \lim_{z \to c} \frac{f(z) - f(c)}{z - c} \Leftrightarrow \lim_{z \to c} \frac{f(z) - f(c) - f'(c)(z-c)}{z - c} = 0$$

Ορίζουμε $\mathcal{E}(z) = f(z) - f(c) - f'(c)(z-c)$ και παρατηρούμε ότι:

$$\frac{\mathcal{E}(z)}{z-c} \xrightarrow{z \to c} 0 \Leftrightarrow \left|\frac{\mathcal{E}(z)}{z-c}\right| \xrightarrow{z \to c} 0 \Leftrightarrow \left|\frac{\mathcal{E}(z)}{|z-c|}\right| \xrightarrow{z \to c} 0 \Leftrightarrow \frac{\mathcal{E}(z)}{|z-c|} \xrightarrow{z \to c} 0$$

Επιπλέον, για $f'(c) = (A,B) \in \mathbb{C}$, παρατηρούμε ότι:

$$f(z) = f(c) + f'(c)(z-c) + \mathcal{E}(z) \Rightarrow \begin{cases} \Re_f(x,y) = \Re(f(a,b)) + A(x-a) - B(y-b) + \Re(\mathcal{E}(x,y)) \\ \Im_f(x,y) = \Im(f(a,b)) + B(x-a) + A(y-b) + \Im(\mathcal{E}(x,y)) \end{cases}$$

Επειδή $\dfrac{\mathcal{E}(z)}{|z-c|} \xrightarrow{z \to c} 0$, έπεται ότι:

$$\frac{\Re(\mathcal{E}(z))}{|z-c|} \xrightarrow{z \to c} 0 \text{ και } \frac{\Im(\mathcal{E}(z))}{|z-c|} \xrightarrow{z \to c} 0$$

Δηλαδή οι συναρτήσεις $\Re_f$, $\Im_f$ είναι διαφορίσιμες στο c. Μάλιστα:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Re_f}{\partial x}\Big|_c &= \lim_{x \to a} \frac{\Re_f(x,y) - \Re(f(a,b))}{|x-a|} = \lim_{x \to a} \frac{A(x-a) - B(b-b) + \Re(\mathcal{E}(x,b))}{|x-a|} = A \\ \frac{\partial \Re_f}{\partial y}\Big|_c &= \lim_{y \to b} \frac{\Re_f(x,y) - \Re(f(a,b))}{|y-b|} = \lim_{y \to b} \frac{A(a-a) - B(y-b) + \Re(\mathcal{E}(a,y))}{|y-b|} = -B \\ \frac{\partial \Im_f}{\partial x}\Big|_c &= \lim_{x \to a} \frac{\Im_f(x,y) - \Im(f(a,b))}{|x-a|} = \lim_{x \to a} \frac{B(x-a) + A(b-b) + \Im(\mathcal{E}(x,b))}{|x-a|} = B \\ \frac{\partial \Im_f}{\partial y}\Big|_c &= \lim_{y \to b} \frac{\Im_f(x,y) - \Im(f(a,b))}{|y-b|} = \lim_{y \to b} \frac{B(a-a) + A(y-b) + \Im(\mathcal{E}(a,y))}{|y-b|} = A \end{aligned}$$

($\Leftarrow$) Εάν οι $\Re_f$, $\Im_f$ είναι διαφορίσιμες, τότε υπάρχουν συναρτήσεις δ και η αντίστοιχα, τέτοιες ώστε:

$$\begin{aligned} \Re_f(x,y) &= \Re_f(a,b) + A(x-a) - B(y-b) + \delta(x,y) \\ \Im_f(x,y) &= \Im_f(a,b) + B(x-a) + A(y-b) + \eta(x,y) \end{aligned}$$

και επιπλέον:

$$\frac{\delta(z)}{|z-c|} \xrightarrow{z \to c} 0 \text{ και } \frac{\eta(z)}{|z-c|} \xrightarrow{z \to c} 0$$

Τα A και B αντίστοιχα είναι οι τιμές $\dfrac{\partial \Re_f}{\partial x}\Big|_c$ και $\dfrac{\partial \Im_f}{\partial x}\Big|_c$. Εφόσον $f(z) = \Re_f(z) + i\Im_f(z)$, ο τύπος της f ισοδύναμα γίνεται:

$$f(z) = f(c) + (A + Bi)(z-c) + \delta(z) + i\eta(z)$$

Θέτοντας $\mathcal{E}(z) = \delta(z) + i\eta(z)$, έχουμε ότι $\dfrac{\mathcal{E}(z)}{|z-c|} \xrightarrow{z\to c} 0 \Leftrightarrow \dfrac{\mathcal{E}(z)}{z-c} \xrightarrow{z\to c} 0$ και επιπλέον:

$$\lim_{z\to c} \frac{f(z) - f(c) - (A+Bi)(z-c) + \mathcal{E}(z)}{z-c} = 0 \Leftrightarrow \lim_{z\to c} \frac{f(z)-f(c)}{z-c} = A + Bi$$

Επομένως η μιγαδική παράγωγος στο c υπάρχει και μάλιστα είναι η τιμή $f'(c) = A + Bi$.

Παρατήρηση 2.2 Από το προηγούμενο θεώρημα έπεται ότι εάν μια συνάρτηση $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ με $f(z) = \Re_f(z) + i\Im_f(z)$, $\Re_f, \Im_f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ έχει μιγαδική παράγωγο στο $c \in \mathbb{C}$, τότε:

$$f'(c) = \frac{\partial \Re_f}{\partial x}\Big|_c + i\frac{\partial \Im_f}{\partial x}\Big|_c$$

Παρατήρηση 2.3 Οι συναρτήσεις $\exp$, $\log|_{\mathbb{C} - \underrightarrow{Ox'}}$ είναι ολόμορφες στο $\mathbb{C}$.

Απόδειξη: Όσον αφορά την $\exp(z) = e^{\Re(z)}\big[\cos(\Im(z)) + i\sin(\Im(z))\big]$, παρατηρούμε ότι για κάθε $z = (x, y) \in \mathbb{C}$ ισχύει το κριτήριο Cauchy - Riemann:

$$\left\{ \begin{array}{c} \dfrac{\partial e^x \cos(y)}{\partial x}\Big|_c = e^x\cos(y) = \dfrac{\partial e^x \sin(y)}{\partial y}\Big|_c \\ \dfrac{\partial e^x \cos(y)}{\partial y}\Big|_c = -e^x\sin(y) = -\dfrac{\partial e^x \sin(y)}{\partial x}\Big|_c \end{array} \right\}$$

Οπότε η $\exp$ είναι παντού ολόμορφη. Μάλιστα, από την **Παρατήρηση 2.2**:

$$\exp'(x,y) = \frac{\partial e^x \cos(y)}{\partial x}\Big|_{(x,y)} + i\frac{\partial e^x \sin(y)}{\partial x}\Big|_{(x,y)} = \exp(x,y)$$

Όσον αφορά τη συνάρτηση του λογαρίθμου, για κάθε $c \in \mathbb{C} - \underrightarrow{Ox'}$ ισχύει:

$$\lim_{z\to c} \frac{\log z - \log c}{z - c} = \lim_{z\to c} \left[1 \Big/ \frac{\exp(\log(z)) - \exp(\log(c))}{\log(z) - \log(c)} \right] = \frac{1}{\exp(\log(c))} = \frac{1}{c}$$

Οπότε η συνάρτηση $\log$ είναι ολόμορφη στο $\mathbb{C} - \underrightarrow{Ox'}$. Μάλιστα αυτό είναι το μεγαλύτερο σύνολο ως προς τη σχέση του υποσυνόλου, για το οποίο ο λογάριθμος $\log$ έχει μιγαδική παράγωγο, μιας και στο $\underrightarrow{Ox'}$ ο λογάριθμος δεν είναι συνεχής συνάρτηση.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Δυναμοσειρές

3.1 Γενικά

Ορισμός 3.1 – Δυναμοσειρές. Ως (τυπική) μιγαδική δυναμοσειρά ορίζουμε κάθε 'απειρόβαθμο' ή μη πολυώνυμο με μιγαδικούς συντελεστές. Δηλαδή κάθε συνάρτηση της μορφής:

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$$

όπου $(a_k)_{k=0}^{\infty}$ είναι μία ακολουθία μιγαδικών αριθμών. Συμβολίζουμε το σύνολο των (τυπικών) μιγαδικών δυναμοσειρών με:

$$\mathbb{C}[[z]] = \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \;\middle|\; a \in (\mathbb{N}_0 \to \mathbb{C}) \right\}$$

Παρατήρηση 3.1 Οι δυναμοσειρές κέντρου $c \in \mathbb{C}$, είναι τα 'απειρόβαθμα' η μη πολυώνυμα της μορφής:

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-c)^k, \; a \in (\mathbb{N}_0 \to \mathbb{C})$$

που ανήκουν στα αντίστοιχα σύνολα $\mathbb{C}[[z-c]]$. Δεν είναι όλες οι δυναμοσειρές κέντρου c τυπικές δυναμοσειρές, κι ένα αντίστοιχο παράδειγμα είναι το ακόλουθο:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (z+1)^k$$

το οποίο δεν έχει πεπερασμένο σταθερό όρο στο $\mathbb{C}[[z]]$. Επομένως, ανήκει μεν στο $\mathbb{C}[[z+1]]$, αλλά όχι στο $\mathbb{C}[[z]]$.

Παρατήρηση 3.2 Έστω $\big((a_k, b_k)\big)_{k \in \mathbb{N}}$ μια ακολουθία μιγαδικών αριθμών (a_k, b_k). Τότε η ακόλουθη ισοδυναμία αληθεύει:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k + ib_k \text{ συγκλίνει } \Leftrightarrow \text{ οι } \sum_{k=0}^{\infty} a_k, \; \sum_{k=0}^{\infty} b_k \text{ συγκλίνουν.}$$

Απόδειξη:

($\Rightarrow$) Υποθέτουμε ότι η σειρά $\sum_{k=0}^{\infty} [a_k + ib_k]$ συγκλίνει. Εάν s_k είναι η σειρά των μερικών αθροισμάτων της, τότε υπάρχει $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}$ τέτοιο ώστε $s_k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \alpha + i\beta$. Γράφοντας ισοδύναμα την ακολουθία των μερικών αθροισμάτων ως $s_k = \sum_{j=0}^{k} a_j + i \sum_{j=0}^{k} b_j$, παρατηρούμε ότι:

$$\sum_{j=0}^{k} a_j + i \sum_{j=0}^{k} b_j \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \alpha + i\beta \Rightarrow \sum_{j=0}^{k} a_j \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \alpha, \; \sum_{j=0}^{k} b_j \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \beta$$

Έτσι λοιπόν, οι σειρές $\sum_{k=0}^{\infty} a_k, \; \sum_{k=0}^{\infty} b_k$ συγκλίνουν στα α και β αντίστοιχα.

($\Leftarrow$) Έστω s_k, t_k να είναι οι σειρές των μερικών αθροισμάτων των $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ και $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ αντίστοιχα, οι οποίες συγκλίνουν στα α και β. Παρατηρούμε ότι:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k + ib_k = \sum_{k=0}^{n} a_k + i \sum_{k=0}^{n} b_k = s_n + t_n$$

Επομένως, η $\sum_{k=0}^{\infty}[a_k + ib_k]$ συγκλίνει και μάλιστα τον μιγαδικό αριθμό $\alpha + i\beta$.

Παρατήρηση 3.3 Μια γεωμετρική σειρά $\sum_{k=0}^{\infty} a^k,\ a \geq 0$ συγκλίνει αν και μόνο αν ο λόγος της a είναι αυστηρά μικρότερος του 1.

Απόδειξη: Πράγματι, η σειρά των μερικών αθροισμάτων $s_n = \sum_{k=0}^{n} a^k = \dfrac{a^{n+1}-1}{a-1},\ a \geq 0$ συγκλίνει αν και μόνο αν $a < 1$. Μάλιστα, το όριό της είναι το $\dfrac{1}{1-a}$.

Θεώρημα 3.1 – Ύπαρξη ακτίνας σύγκλισης δυναμοσειράς. Έστω $P \in \mathbb{C}[[z]]$ μια μιγαδική δυναμοσειρά της μορφής:

$$P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$$

Τότε υπάρχει ένας αριθμός $R \in [0, \infty]$, τέτοιος ώστε στον δίσκο $S(0, R)$ η P να συγκλίνει απολύτως και στη περιοχή $[B(0, R)]^c_{\mathbb{C}}$ να αποκλίνει.

Μάλιστα, αυτό το R έχει τη μορφή:

$$R := \sup\{r \geq 0 \mid (|c_k|r^k)_{k\in\mathbb{N}} \text{ φραγμένη}\}$$

Απόδειξη: Κατ'αρχάς παρατηρούμε ότι το supremum υπάρχει, αφού για $r = 0$ η $(|c_k|r^k)_{k\in\mathbb{N}}$ είναι πάντοτε φραγμένη.

Η περίπτωση όπου $R = 0$ είναι τετριμμένη. Εάν $0 < R$, κάθε πραγματικός αριθμός $R \geq r_0 \geq 0$ δίνει ακολουθία $(|c_k r_0^k|)_{k\in\mathbb{N}}$ η οποία είναι φραγμένη, έστω από έναν θετικό αριθμό M. Παρατηρούμε ότι για $|z| < r_0$:

$$|c_k z^k| = |c_k| r_0^k \cdot \left[\frac{|z|}{r_0}\right]^k \leq M \cdot \left[\frac{|z|}{r_0}\right]^k$$

Και κατ' επέκταση:

$$0 \leq \sum_{k=0}^{\infty} |c_k z^k| \leq \sum_{k=1}^{\infty} M \left[\frac{|z|}{r_0}\right]^k = M \Bigg/ 1 - \left[\frac{|z|}{r_0}\right]^k$$

Επειδή η τελευταία συγκλίνει και η πρώτη είναι σειρά αύξοντων μερικών αθροισμάτων (περιέχει μόνο θετικούς όρους), η $\sum_{k=0}^{\infty} |c_k z^k|$ συγκλίνει για κάθε $|z| < r_0$. Επειδή το εν λόγω αποτέλεσμα ισχύει για κάθε $R \geq r_0 \geq 0$, για κάθε $|z| < R$ η σειρά συγκλίνει.

Για να ολοκληρωθεί η απόδειξη, θα δείξουμε ότι αν $|z| > R$, η σειρά αποκλίνει. Πράγματι, το R είναι το supremum των θετικών αριθμών r, για τους οποίους η ακολουθία $(|c_k|r^k)_{k\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένη. Επομένως, για $|z| > R$, υπάρχουν άπειροι όροι της $(|c_k z^k|)_{k\in\mathbb{N}}$ οι οποίοι είναι μεγαλύτεροι του 1 (αφού αν το αντίθετο συνέβαινε, η ακολουθία προφανώς θα φράσσοταν από το $1 + \max\{|c_k z^k| > 1\}$) και συνεπώς:

$$\sum_{k=0}^{\infty} |c_k z^k| \geq \sum_{k\in\{k\ :\ |c_k z^k|>1\}} |c_k z^k| \geq \sum_{k\in\{k\ :\ |c_k z^k|>1\}} = \#\{k\ :\ |c_k z^k| > 1\} = \infty$$

Παρατήρηση 3.4 – Κριτήριο λόγου για μιγαδικές δυναμοσειρές. Έστω $P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ μια τυπική μιγαδική δυναμοσειρά. Εάν $\left|\dfrac{c_k}{c_{k+1}}\right| \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} R$, τότε το R αποτελεί την ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς P.

Ως γενίκευση, σε οποιαδήποτε άλλη δυναμοσειρά $Q \in \mathbb{C}[[z-a]],\ a \in \mathbb{C}$, εφαρμόζει το εν λόγω κριτήριο.

Απόδειξη: Αρχικά υποθέτουμε ότι το R δεν είναι άπειρο. Για $|z| < R$ παρατηρούμε ότι εφαρμόζει το κριτήριο του λόγου για πραγματικές σειρές, αφού:

$$\left|\frac{c_{k+1} z^{k+1}}{c_k z^k}\right| = \frac{|c_{k+1}| \cdot |z|}{|c_k|} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \frac{|z|}{R} < 1$$

Επομένως, η σειρά $\sum_{k=0}^{\infty} |c_k z^k|$ συγκλίνει. Εάν δε $|z| > R$, τότε ο προαναφερθής λόγος είναι μεγαλύτερος της μονάδας, οπότε $|c_k z^k| \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \infty$. Αυτό δίνει ότι η σειρά αποκλίνει, αφού εάν συνέκλινε, $|c_k z^k| \to 0$.

Εάν το R είναι άπειρο, για κάθε (σταθερό) $z \in \mathbb{C}$, η ποσότητα $\dfrac{|c_{k+1}| \cdot |z|}{|c_k|}$ τείνει στο $0 < 1$, οπότε και πάλι εφαρμόζει το κριτήριο του λόγου για πραγματικές σειρές. Η σειρά λοιπόν $\sum_{k=0}^{\infty} |c_k z^k|$, σε αυτήν την περίπτωση συγκλίνει για κάθε μιγαδικό z.

Τα προαναφερθέντα επιχειρήματα παραμένουν αναλλοίωτα στην περίπτωση όπου το z έχει αντικατασταθεί από το $z - a,\ a \in \mathbb{C}$, οπότε το αποτέλεσμα γενικεύεται: σε οποιαδήποτε άλλη δυναμοσειρά $Q \in \mathbb{C}[[z-a]],\ a \in \mathbb{R}$, εφαρμόζει το εν λόγω κριτήριο.

Παρατήρηση 3.5 – Εναλλακτική μορφή της ακτίνας σύγκλισης. Έστω $P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ μια τυπική μιγαδική δυναμοσειρά. Η ποσότητα $R = \dfrac{1}{\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|}}$ αποτελεί την ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς P, όταν αυτή ορίζεται στο $[0, \infty]$ (σε αυτό το σημείο θα κάνουμε τη σύμβαση ότι $\dfrac{1}{0} = \infty$ και $\dfrac{1}{\infty} = 0$).

Ως γενίκευση, σε οποιαδήποτε άλλη δυναμοσειρά $Q \in \mathbb{C}[[z-a]],\ a \in \mathbb{C}$, η ακτίνα σύγκλισης μπορεί να βρεθεί ανάλογα.

Απόδειξη: Υποθέτουμε ότι $R \notin \{0, \infty\}$ (οι περιπτώσεις όπου $R = 0$ ή ∞ είναι τετριμμένες). Για:

$$|z| < \frac{1}{\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|}} \Rightarrow \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k z^k|} < 1$$

θεωρούμε έναν θετικό, πραγματικό αριθμό μ τέτοιον ώστε $0 < \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k z^k|} < \mu < 1$. Λόγω της προηγούμενης ανισότητας, η ακολουθία $(\sqrt[k]{|c_k z^k|})_{k\in\mathbb{N}}$ είναι τελικά (έστω έπειτα ενός n) φραγμένη από το μ. Ισοδύναμα, κάθε όρος της ακολουθίας $(|c_k z^k|)_{k\in\mathbb{N}}$ δεν ξεπερνά το μ^k, και επειδή η σειρά $\sum_{k=n}^{\infty} \mu^k$ συγκλίνει, η σειρά $\sum_{k=n}^{\infty} |c_k z^k| \leq \sum_{k=n}^{\infty} \mu^k$ επίσης θα συγκλίνει. Οι όροι ως τον $n-$οστό είναι στο πλήθος πεπερασμένοι, οπότε και η σειρά $\sum_{k=0}^{\infty} |c_k z^k|$ συγκλίνει.

Τέλος, εάν:

$$|z| > \frac{1}{\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|}} \Rightarrow \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k z^k|} > 1$$

θεωρούμε έναν θετικό, πραγματικό αριθμό μ τέτοιον ώστε $\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k z^k|} > \mu > 1$. Λόγω της προηγούμενης ανισότητας, η ακολουθία $(\sqrt[k]{|c_k z^k|})_{k\in\mathbb{N}}$ έχει άπειρους όρους κάτω φραγμένους από το μ. Ισοδύναμα, υπάρχει υπακολουθία $(|c_{k(s)} z^{k(s)}|)_{s\in\mathbb{N}}$ με όρους που ξεπερνούν το $\mu > 1$. Μάλιστα, η υπακολουθία μπορεί να επιλεγεί συγκλίνουσα, αφού κάθε ακολουθία στο $\mathbb{R}^2 =: \mathbb{C}$ έχει συγκλίνουσα υπακολουθία. Επειδή $\mu > 1$, το $c_{k(s)} z^{k(s)}$ απειρίζεται καθώς $s \to \infty$. Επομένως και η σειρά $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ αποκλίνει, αφού αν αντίθετα συνέκλινε, θα ίσχυε ότι $|c_k z^k| \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$ (και κατ επέκταση $|c_{k(s)} z^{k(s)}| \overset{s\to\infty}{\longrightarrow} 0$).

Τα προαναφερθέντα επιχειρήματα παραμένουν αναλλοίωτα στην περίπτωση όπου το z έχει αντικατασταθεί από το $z - a,\ a \in \mathbb{C}$, οπότε το αποτέλεσμα γενικεύεται: σε οποιαδήποτε άλλη δυναμοσειρά $Q \in \mathbb{C}[[z-a]],\ a \in \mathbb{R}$, η ακτίνα σύγκλισης μπορεί να βρεθεί ανάλογα.

■**Πρόταση 3.1** Έστω $P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-a)^k$ και $Q(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k f(k) (z-a)^k$ δύο δυναμοσειρές με $a \in \mathbb{C}$. Έστω επίσης R_P, R_Q να είναι οι ακτίνες σύγκλισής τους αντίστοιχα.

- Εάν f είναι ένα πολυώνυμο του $\mathbb{C}[k]$, τότε $R_P = R_Q$.
- Εάν $f(k) = m^k \neq 0$, τότε $R_Q = \dfrac{1}{m} \cdot R_P$.
- Γενικότερα, εάν η f είναι τέτοια ώστε $\dfrac{f(k)}{f(k+1)} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} m$, τότε $R_Q = m \cdot R_P$.

■

Άσκηση: Αποδείξτε την προηγούμενη πρόταση.

Ορισμός 3.2 – Κατά σημείο και ομοιόμορφη σύγκλιση συναρτήσεων. Έστω $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία συναρτήσεων της μορφής $A \to \mathbb{C},\ A \subseteq \mathbb{C}$ και επίσης μια συνάρτηση $\varphi : A \to \mathbb{C}$.

Κατά σημείο σύγκλιση: Εάν για κάθε $z \in A$, $\varphi_n(z) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \varphi(z)$, θα λέμε ότι η $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει κατά σημείο στην φ, και θα συμβολίζουμε:

$$\varphi_n \to \varphi$$

Ομοιόμορφη σύγκλιση: Εάν $\sup_{z\in A}|\varphi_n(z)-\varphi(z)| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, θα λέμε ότι η $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην φ, και θα συμβολίζουμε:

$$\varphi_n \to_o \varphi$$

Παρατήρηση 3.6 Έστω $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία συνεχών συναρτήσεων της μορφής $A \to \mathbb{C},\ A \subseteq \mathbb{C}$ και επίσης μια συνάρτηση $\varphi : A \to \mathbb{C}$. Εάν $\varphi_n \to_o \varphi$, τότε η φ είναι συνεχής συνάρτηση.

Απόδειξη: Έστω $\varepsilon > 0$. Λόγω της ομοιόμορφης σύγκλισης $\varphi_n \to_o \varphi$, υπάρχει ένα $\tilde{n} \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για κάθε $n \geq \tilde{n}$ να αληθεύει ότι:

$$\sup_{z\in A}|\varphi_n(z)-\varphi(z)| < \frac{\varepsilon}{3} \Rightarrow |\varphi_n(z)-\varphi(z)| < \frac{\varepsilon}{3},\ \text{για κάθε } z \in A$$

Έστω τυχαίο σημείο $a \in A$. Επειδή κάθε συνάρτηση φ_n είναι συνεχής σε αυτό το a, για κάποιο $\delta > 0$ και για κάθε $z \in A$ για το οποίο $|z-a| < \delta$:

$$|\varphi_n(z)-\varphi_n(a)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Εάν λοιπόν θεωρήσουμε $n \geq \tilde{n}$ και $z \in A$ τέτοιο ώστε $|z-a| < \delta$, τότε:

$$|\varphi(z)-\varphi(a)| \leq |\varphi(z)-\varphi_n(z)| + |\varphi_n(z)-\varphi_n(a)| + |\varphi_n(a)-\varphi(a)| < 3\cdot\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

Αυτό δείχνει ότι η φ είναι συνεχής στο a. Επειδή το a ήταν τυχόν σημείο στο A, αποδεικνύεται η συνέχεια της φ στο A.

Θεώρημα 3.2 – Κριτήριο ομοιόμορφης σύγκλισης του Weierstrass. Έστω $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία συναρτήσεων τέτοια ώστε $|\varphi_k(z)| \leq M_k$. Εάν η σειρά $\sum_{k=0}^{\infty} M_k$ συγκλίνει, τότε η σειρά $\sum_{k=0}^{\infty}|\varphi_k(z)|$ συγκλίνει ομοιόμορφα.

Απόδειξη: Παρατηρούμε η σειρά $\sum_{k=0}^{\infty}\varphi_k(z)$ συγκλίνει απολύτως, αφού η σειρά $\sum_{k=0}^{\infty}|\varphi_k(z)|$ περιέχει θετικούς όρους και φράσσεται ως εξής:

$$\sum_{k=0}^{\infty}|\varphi_k(z)| \leq \sum_{k=0}^{\infty} M_k$$

Η τελευταία σειρά συγκλίνει, οπότε και η πρώτη συγκλίνει (κατά σημείο).

Για κάθε λοιπόν $z \in A$ θα δείξουμε ότι η σύγκλιση δεν είναι απλώς κατά σημείο, αλλά και ομοιόμορφη. Έχουμε λοιπόν ότι:

$$\sup_{z\in A}\left|\sum_{k=0}^{n}|\varphi_k(z)| - \sum_{k=0}^{\infty}|\varphi_k(z)|\right| = \sup_{z\in A}\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}|\varphi_k(z)|\right| \leq \sup_{z\in A}\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}M_k\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty}M_k\right|$$

Επειδή η σειρά $\sum_{k=0}^{\infty}M_k$ συγκλίνει, η σειρά των μερικών αθροισμάτων της $\sum_{k=0}^{n}M_k$ συγκλίνει. Κατ' επέκταση, η 'ουρά' της σειράς είναι συγκλίνουσα προς το 0 (δηλαδή $\sum_{n+1}^{\infty}M_k \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$). Συνεπώς:

$$\sup_{z\in A}\left|\sum_{k=0}^{n}|\varphi_k(z)| - \sum_{k=0}^{\infty}|\varphi_k(z)|\right| \leq \left|\sum_{k=n+1}^{\infty}M_k\right| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Αυτό δείχνει ότι η σειρά $\sum_{k=0}^{\infty}|\varphi_k(z)|$ συγκλίνει ομοιόμορφα.

■**Πρόταση 3.2** Εάν μια (δυναμο)σειρά $\sum_{k=0}^{\infty}|c_k z^k|$ συγκλίνει ομοιόμορφα, τότε και η $\sum_{k=0}^{\infty}c_k z^k$ συγκλίνει ομοιόμορφα. Κατ' επέκταση, υπό τις υποθέσεις του **Θεωρήματος 3.2 - Κριτήριο ομοιόμορφης σύγκλισης του Weierstrass**, εξασφαλίζεται ότι η σειρά $\sum_{k=0}^{\infty}\varphi_k(z)$ συγκλίνει ομοιόμορφα. ■

Θεώρημα 3.3 – Θεώρημα παραγώγισης δυναμοσειρών. Έστω $P(z) = \sum_{k=0}^{\infty}c_k z^k \in \mathbb{C}[[z]]$ μια δυναμοσειρά με ακτίνα σύγκλισης R. Η P είναι ολόμορφη στο (ανοικτό) σύνολο $S(0,R)$.

Ως γενίκευση, κάθε δυναμοσειρά $\sum_{k=0}^{\infty}c_k(z-a)^k \in \mathbb{C}[[z-a]],\ a \in \mathbb{C}$ με ακτίνα σύγκλισης R είναι ολόμορφη στο $S(a,R)$.

Απόδειξη:

Βήμα I: Η σειρές $\sum_{k=0}^{\infty}c_k z^k$ και $\sum_{k=1}^{\infty}kc_k z^{k-1}$ έχουν την ίδια ακτίνα σύγκλισης R. Πράγματι έστω ότι R

είναι η ακτίνα σύγκλισης της πρώτης. Από την **Παρατήρηση 3.4**, επειδή $\left|\dfrac{kc_k}{(k+1)c_{k+1}}\right| = \left|\dfrac{k}{k+1}\right| \cdot \left|\dfrac{c_k}{c_{k+1}}\right| \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} R$, η ακτίνα σύγκλισης της πρώτης ταυτίζεται με αυτή της δεύτερης.

Βήμα II: Έστω a ένα τυχαίο σημείο του A. Επιλέγουμε $|a| < r < R$ και για κάθε $a \neq z$ τέτοιο ώστε $|z| < r$ παρατηρούμε ότι:

$$\frac{f(z)-f(a)}{z-a} = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k - \sum_{k=0}^{\infty} c_k a^k}{z-a} = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z^k - a^k)}{z-a} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k [z^{k-1} + az^{k-2} + \cdots + a^{k-1}]$$

Βήμα III: Θα δείξουμε ότι η σύγκλιση $\sum_{k=1}^{\infty} c_k [z^{k-1} + az^{k-2} + \cdots + a^{k-1}]$ είναι ομοιόμορφη, και κατ' επέκταση ότι η σειρά είναι συνεχής συνάρτηση. Πράγματι, παρατηρούμε ότι:

$$|c_k[z^{k-1} + az^{k-2} + \cdots + a^{k-1}]| \leq |c_k| \cdot [|z|^{k-1} + |a| \cdot |z|^{k-2} + \cdots + |a|^{k-1}] \leq k|c_k| \cdot r^{k-1}$$

Εφόσον $r < R$, η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} k|c_k| \cdot r^{k-1}$ συγκλίνει. Από το **Θεώρημα 3.2 - Κριτήριο ομοιόμορφης σύγκλισης του Weierstrass** έχουμε ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} c_k [z^{k-1} + az^{k-2} + \cdots + a^{k-1}]$ συγκλίνει ομοιόμορφα, και από την **Παρατήρηση 3.6**, είναι ειδικότερα συνεχής συνάρτηση.

Βήμα IV: Εφόσον η $\sum_{k=1}^{\infty} c_k [z^{k-1} + az^{k-2} + \cdots + a^{k-1}]$ είναι συνεχής συνάρτηση, έπεται ότι:

$$\lim_{z\to a} \frac{f(z)-f(a)}{z-a} = \lim_{z\to a} \sum_{k=1}^{\infty} c_k [z^{k-1} + az^{k-2} + \cdots + a^{k-1}] = \sum_{k=1}^{\infty} kc_k a^{k-1}$$

Τέλος, επειδή οι δίσκοι $S(0,r)$ (για τα διάφορα $r < R$) καλύπτουν όλον τον δίσκο $S(0,R)$, σε κάθε σημείο του $S(0,R)$ η σειρά είναι παραγωγίσιμη. Επομένως, είναι ολόμορφη στο $S(0,R)$. Μάλιστα η απόδειξη επιπλέον δίνει ότι:

$$\frac{d}{dz} \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k = \sum_{k=1}^{\infty} kc_k z^{k-1}$$

Ανάλογη απόδειξη μπορεί να εφαρμοστεί για δυναμοσειρές του $\mathbb{C}[[z-a]]$, επομένως το αποτέλεσμα γενικεύεται: κάθε δυναμοσειρά $\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-a)^k \in \mathbb{C}[[z-a]],\ a \in \mathbb{C}$ με ακτίνα σύγκλισης R είναι ολόμορφη στο $S(a,R)$. Βέβαια η επανάληψη της απόδειξης δεν είναι αναγκαία, αφού το εν λόγω αποτέλεσμα θα μπορούσε να προκύψει με εφαρμογή του κανόνα της σύνθεσης.

Παρατήρηση 3.7 Από το **Θεώρημα 3.3 - Θεώρημα παραγώγισης δυναμοσειρών** έπεται ότι κάθε δυναμοσειρά $P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-a)^k \in \mathbb{C}[[z-a]],\ a \in \mathbb{C}$ με ακτίνα σύγκλισης R είναι απείρως παραγωγίσιμη στο $S(a,R)$.

3.2 Επεκτάσεις στο μιγαδικό επίπεδο

Παρατήρηση 3.8 – Η εκθετική συνάρτηση ως δυναμοσειρά. Η εκθετική συνάρτηση μπορεί να αναλυθεί σε δυναμοσειρά, και ειδικότερα:

$$\exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!},\ z \in \mathbb{C}$$

Απόδειξη: Έστω $E(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{z^k}{k!}$. Παρατηρούμε ότι:

$$[E(z)\cdot\exp(-z)]' = E'(z)\cdot\exp(-z) - E(z)\cdot\exp'(-z) = \exp(-z)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^{k-1}}{(k-1)!} - \exp(-z)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!} = 0$$

κι επομένως $[E(z)\cdot\exp(-z)]' = 0 \Rightarrow E(z)\cdot\exp(-z) = c,\ c \in \mathbb{C}$. Επειδή $E(0)\cdot\exp(0) = 1\cdot 1$, έπεται ότι $c = 1$, και κατ' επέκταση ότι:

$$E(z)\cdot\exp(-z) = 1 \Rightarrow E(z) = \frac{1}{\exp(-z)} = \exp(z)$$

Ορισμός 3.3 – Μιγαδικά ημίτονα και συνημίτονα.
I. *Μιγαδικό ημίτονο:* Ως μιγαδική επέκταση του ημιτόνου ορίζουμε την επέκταση της δυναμοσειράς του ημιτόνου

της πραγματικής περίπτωσης. Ορίζουμε δηλαδή:

$$\forall z \in \mathbb{C}: \ \sin(z) := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

II. *Μιγαδικό συνημίτονο:* Ως μιγαδική επέκταση του συνημιτόνου ορίζουμε την επέκταση της δυναμοσειράς του συνημιτόνου της πραγματικής περίπτωσης. Ορίζουμε δηλαδή:

$$\forall z \in \mathbb{C}: \ \cos(z) := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!}$$

Παρατήρηση 3.9 – Ο τύπος του Euler (μιγαδική μορφή). Από τον ορισμό της επέκτασης του ημιτόνου και του συνημιτόνου στο μιγαδικό επίπεδο, σε συνδυασμό με την αναλυτική μορφή της εκθετικής συνάρτησης, προκύπτουν τα εξής δύο (εννοείται για κάθε μιγαδικό z):

I.

$$\exp(iz) = \cos(z) + i \cdot \sin(z)$$

II.

$$\cos(z) = \frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2}, \ \sin(z) = \frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i}$$

Παρατήρηση 3.10 Οι (μιγαδικές) συναρτήσεις $\sin, \cos$ είναι επί του $\mathbb{C}$.

Απόδειξη: Η απόδειξη θα περιοριστεί στην περίπτωση του συνημιτόνου, μιας και για το ημίτονο μπορεί να ακολουθηθεί εντελώς ανάλογη απόδειξη.

Αρκεί να αποδείξουμε ότι για κάθε μιγδικό $w \in \mathbb{C}$ η εξίσωση $\cos(z) = w$ έχει τουλάχιστον μια λύση ως προς z. Πράγματι:

$$\begin{aligned}
\cos(z) = w &\Rightarrow \exp(iz) + \exp(-iz) = 2w \\
&\Rightarrow \exp(iz)^2 - 2w\exp(iz) + 1 = 0 \\
&\Rightarrow \exp(iz) = w \pm \sqrt{w^2 - 1} \\
&\Rightarrow iz = \log(w \pm \sqrt{w^2-1}) \mod (2\pi i) \\
&\Rightarrow z = -i \cdot \log(w \pm \sqrt{w^2-1}) \mod (2\pi)
\end{aligned}$$

Παρατήρηση 3.11

- Η συνάρτηση $\dfrac{1}{z}$ αναλύεται σε δυναμοσειρά σε κάθε σύνολο $S(a, |a|), \ a \in \mathbb{C}$, και μάλιστα:

$$\frac{1}{z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{a^{k+1}} (z-a)^k, \ z \in S(a, |a|)$$

- Ο λογάριθμος είναι αναλυτική συνάρτηση σε κάθε σύνολο της μορφής $S(a, |a|)$ που δεν τέμνει την ημιευθεία $\underrightarrow{Ox'}$. Μάλιστα:

$$\log(z) = \log(a) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)a^{k+1}} (z-a)^k$$

Απόδειξη:

Για το πρώτο σημείο (•): Έστω $z \in S(a, |a|) \Rightarrow |z-a| < |a|$. Παρατηρούμε ότι $\left| \dfrac{z-a}{-a} \right| < 1$, οπότε από την **Παρατήρηση 3.3**, η σειρά $\sum_{k=0}^{\infty} \left[\dfrac{z-a}{-a} \right]^k$ συγκλίνει. Μάλιστα:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{z-a}{-a} \right]^k = 1 \Big/ 1 - \frac{z-a}{-a} = \frac{-a}{-a-z+a} = \frac{a}{z} \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{a^{k+1}} (z-a)^k = \frac{1}{z}$$

Για το δεύτερο σημείο (•): Από το **Θεώρημα 3.3 - Θεώρημα παραγώγισης δυναμοσειρών**, η δυναμοσειρά:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)a^{k+1}}(z-a)^k + c,\ c \in \mathbb{C}$$

έχει παράγωγο:

$$\frac{d}{dz}\left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)a^{k+1}}(z-a)^k + c\right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{a^{k+1}}(z-a)^k = \frac{1}{z} = \frac{d\log}{dz}\Big|_z$$

Επομένως:

$$\log(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)a^{k+1}}(z-a)^k + c,\ \text{για κάποιο } c \in \mathbb{C}$$

Για $z = a$ η προηγούμενη σχέση δίνει ότι $\log(a) = c$, κι επομένως το ζητούμενο έπεται:

$$\log(z) = \log(a) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)a^{k+1}}(z-a)^k$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Ολοκληρωτικός λογισμός

4.1 Γενικά

Ορισμός 4.1 – Μιγαδικό ολοκλήρωμα. Έστω $g : [\vec{a}, \vec{b}] \to \mathbb{C}$ μια συνάρτηση ορισμένη στο ευθύγραμμο τμήμα $[\vec{a}, \vec{b}] := \{\vec{a} + t \cdot (\vec{b} - \vec{a}) \mid t \in [0, 1]\}$. Υποθέτουμε επιπλέον ότι οι συναρτήσεις $\Re g, \Im g$ είναι κατά Riemann ολοκληρώσιμες και ορίζουμε:

$$\int_{[\vec{a},\vec{b}]} g(z)dz := \int_{[\vec{a},\vec{b}]} \Re g(z)dz + i \cdot \int_{[\vec{a},\vec{b}]} \Im g(z)dz$$

■**Πρόταση 4.1** Εάν μία συνάρτηση $g : [a, b] \to \mathbb{C},\ a, b \in \mathbb{C}$ είναι ολοκληρώσιμη με τη μιγαδική έννοια, τότε:

$$\left| \int_{[a,b]} g(z)dz \right| \leq \int_{[a,b]} |g(z)|dz$$

■

Απόδειξη: Η πρόταση, παρά το ότι φαίνεται τετριμμένη και είναι αναμενόμενη, με τους υπάρχοντες ορισμούς χρειάζεται ένα τέχνασμα για να αποδειχθεί. Συγκεκριμένα, η ποσότητα $\int_{[a,b]} g(z)dz$ μπορεί να θεωρηθεί μιγαδικός αριθμός, επομένως υπάρχει γωνία θ τέτοια ώστε:

$$\int_{[a,b]} g(z)dz = \left| \int_{[a,b]} g(z)dz \right| \cdot \exp(i\theta) \Rightarrow \left| \int_{[a,b]} g(z)dz \right| = \int_{[a,b]} g(z)dz \cdot \exp(-i\theta)$$

Από τον ορισμό όμως του μιγαδικού ολοκληρώματος:

$$\left| \int_{[a,b]} g(z)dz \right| = \left[\int_{[a,b]} \Re g(z)dz + i \cdot \int_{[a,b]} \Im g(z)dz \right] \cdot \exp(-i\theta)$$

Επειδή το αριστερό μέλος είναι πραγματικός αριθμός, $\int_{[a,b]} \Im g(z)dz = 0$ και κατ' επέκταση:

$$\left| \int_{[a,b]} g(z)dz \right| = \int_{[a,b]} \Re g(z)dz \cdot \exp(-i\theta)$$

Το ζητούμενο είναι πλέον σχετικά άμεσο να δειχθεί.

$$\left| \int_{[a,b]} g(z)dz \right| = \left| \int_{[a,b]} \Re g(z)dz \right| \cdot |\exp(-i\theta)| = \left| \int_{[a,b]} \Re g(z)dz \right| \leq \int_{[a,b]} |\Re g(z)|dz \leq \int_{[a,b]} |g(z)|dz$$

Να σημειωθεί ότι η προτελευταία ανισότητα είναι γνωστή, αφού ουσιαστικά επικαλούμαστε την πραγματική περίπτωση.

Παρατήρηση 4.1 Έστω $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια οικογένεια ολοκληρώσιμων μιγαδικών συναρτήσεων του $([a, b] \to \mathbb{C}),\ a, b \in \mathbb{C}$, τέτοια ώστε $g_n \to_o g$, για κάποια $g : [a, b] \to \mathbb{C}$. Τότε επιπλέον ισχύει:

$$\int_{[a,b]} g_n(z)dz \to \int_{[a,b]} g(z)dz$$

Απόδειξη: Θεωρούμε τη συνάρτηση $u(t) = a + t \cdot (b - a)$. Οι συναρτήσεις $\Re(g_n \circ u)$ και $\Im(g_n \circ u)$ συγκλίνουν ομοιόμορφα στις $\Re(g \circ u)$ και $\Im(g \circ u)$ αντίστοιχα. Επομένως, για τις πραγματικές συναρτήσεις $\Re(g_n \circ u)$ και $\Im(g_n \circ u)$ ισχύουν:

$$\int_{[a,b]} \Re g_n(z)dz = \int_{[0,1]} \Re(g_n \circ u(t))\ dt \to \int_{[0,1]} \Re(g \circ u(t))\ dt = \int_{[a,b]} \Re g(z)\ dz$$
$$\int_{[a,b]} \Im g_n(z)dz = \int_{[0,1]} \Im(g_n \circ u(t))\ dt \to \int_{[0,1]} \Im(g \circ u(t))\ dt = \int_{[a,b]} \Im g(z)\ dz$$

Από τον ορισμό του μιγαδικού ολοκληρώματος, προκύπτει το ζητούμενο.

> **Ορισμός 4.2 – Αναλυτικές συναρτήσεις.** Έστω Ω ένα ανοικτό υποσύνολο του μιγαδικού επιπέδου. Το σύνολο των αναλυτικών συναρτήσεων του Ω είναι το σύνολο:
>
> $$\mathcal{A}(\Omega) := \big\{ f : \Omega \to \mathbb{C} \mid \forall S(a,r) \subseteq \Omega \text{ η } f \text{ αναλύεται σε δυναμοσειρά} \big\}$$
>
> Εάν μια f ανήκει στο $\mathcal{A}(\Omega)$, θα καλείται αναλυτική στο Ω.

Θεώρημα 4.1 Έστω φ, g δύο μιγαδικές συναρτήσεις του $([0,1] \to \mathbb{C})$. Η απεικόνιση:

$$\int_{[0,1]} \frac{\varphi(t)}{g(t)-z}\, dt$$

πάντοτε είναι αναλυτική στο $\mathbb{C} - g([a,b])$.

Απόδειξη: Για κάθε $a \in \mathbb{C} - g([0,1])$ θεωρούμε $r = \operatorname{dist}\big(a, g([0,1])\big)$. Για $|z-a| < r$, παρατηρούμε ότι $|g(t)-a| \geq r$, και κατ' επέκταση $\dfrac{|z-a|}{|g(t)-a|} < 1$. Η δυναμοσειρά λοιπόν $\sum_{k=0}^{\infty} \left[\dfrac{z-a}{g(t)-a}\right]^k$ συγκλίνει, και μάλιστα:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{z-a}{g(t)-a}\right]^k = 1 \Bigg/ \frac{z-a}{g(t)-a} = \frac{g(t)-a}{g(t)-z} \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{1}{(g(t)-a)^{k+1}} \cdot (z-a)^k\right]^k = \frac{1}{g(t)-z}$$

Από την τελευταία σχέση έχουμε:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi(t)}{(g(t)-a)^{k+1}}(z-a)^k = \frac{\varphi(t)}{g(t)-z} \Rightarrow \int_{[0,1]} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi(t)}{(g(t)-a)^{k+1}}(z-a)^k\right] dt = \int_{[0,1]} \frac{\varphi(t)}{g(t)-z} dt$$

Εάν στο προηγούμενο μπορούσε να γίνει η εναλλαγή του αθροίσματος - ολοκληρώματος, το ζητούμενο θα αποδεικνύοταν. Εν συνεχεία λοιπόν θα δείξουμε ότι αυτή η εναλλαγή είναι δυνατόν να συμβεί.

Η σύγκλιση της $\sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{\varphi(t)}{(g(t)-a)^{k+1}}(z-a)^k$ είναι ομοιόμορφη, αφού:

$$\left|\frac{\varphi(t)(z-a)^k}{(g(t)-a)^{k+1}}\right| \leq \sup|\varphi|([0,1]) \cdot \frac{|z-a|^k}{r^{k+1}} = \frac{\max|\varphi|([0,1])}{r^{k+1}} \cdot |z-a|^k$$

και η σειρά $\sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{\max|\varphi|([0,1])}{r^{k+1}} \cdot |z-a|^k$ συγκλίνει. Από το κριτήριο λοιπόν του Weierstrass προκύπτει η ομοιόμορφη σύγκλιση. Να παρατηρηθεί ότι το $\sup|\varphi|([0,1])$ είναι πράγματι $\max|\varphi|([0,1])$, αφού η πραγματική συνάρτηση $|\varphi|$ είναι ορισμένη σε συμπαγές διάστημα.

Εφόσον η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη, από την **Παρατήρηση 4.1** έχουμε ότι:

$$\int_{[0,1]} \left[\sum_{k=0}^{n} \frac{\varphi(t)}{(g(t)-a)^{k+1}}\right] dt \to \int_{[0,1]} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi(t)}{(g(t)-a)^{k+1}}\right] dt$$

Επειδή επιπλέον:

$$\int_{[0,1]} \left[\sum_{k=0}^{n} \frac{\varphi(t)}{(g(t)-a)^{k+1}}\right] dt = \sum_{k=0}^{n} \int_{0,1} \frac{\varphi(t)}{(g(t)-a)^{k+1}} dt$$

ισχύει η ακόλουθη σύγκλιση σειρών:

$$\sum_{k=0}^{n} \int_{[0,1]} \frac{\varphi(t)}{(g(t)-a)^{k+1}} dt \to \int_{[0,1]} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi(t)}{(g(t)-a)^{k+1}}\right] dt$$

Ειδικότερα λοιπόν ισχύει ότι:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \int_{[0,1]} \frac{\varphi(t)}{(g(t)-a)^{k+1}} dt = \int_{[0,1]} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi(t)}{(g(t)-a)^{k+1}}\right] dt$$

Αυτό μας δείχνει ότι η εναλλαγή των ολοκληρωμάτων είναι εφικτή.

Εφόσον η εναλλαγή αυτή είναι δυνατόν να συμβεί, στη σχέση:

$$\int_{[0,1]} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi(t)}{(g(t)-a)^{k+1}} (z-a)^k \right] dt = \int_{[0,1]} \frac{\varphi(t)}{g(t)-z} dt$$

εναλλάσουμε το άθροισμα με το ολοκλήρωμα και παρατηρούμε ότι:

$$\int_{[0,1]} \frac{\varphi(t)}{g(t)-z} dt = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{[0,1]} \frac{\varphi(t)}{(g(t)-a)^{k+1}} (z-a)^k dt = \sum_{k=0}^{\infty} \overbrace{\int_{[0,1]} \frac{\varphi(t)}{(g(t)-a)^{k+1}} dt}^{c_k} (z-a)^k$$

Αυτά εν τέλει αποδεικνύουν ότι η απεικόνιση $\displaystyle\int_{[0,1]} \frac{\varphi(t)}{(g(t)-a)^{k+1}}$ είναι αναλυτική στο $\mathbb{C} - g([0,1])$.

4.2 Επικαμπύλια μιγαδικά ολοκληρώματα

Ορισμός 4.3 – Καμπύλες. Έστω $s : I \to \mathbb{C}$ μία συνεχής συνάρτηση με πεδίο ορισμού το (πραγματικό) διάστημα I. Η εικόνα $\tilde{\gamma} = s(I)$ κάθε τέτοιας s θα ονομάζεται καμπύλη στο μιγαδικό επίπεδο.

Ορισμός 4.4 – Παραμετρίσεις καμπυλών. Έστω $\tilde{\gamma}$ μια καμπύλη στο μιγαδικό επίπεδο $\mathbb{C}$. Μια συνεχής συνάρτηση $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ τέτοια ώστε $\gamma([a, b]) = \tilde{\gamma}$ θα καλείται παραμέτριση της καμπύλης $\tilde{\gamma}$. Επιπλέον, για κάθε παραμέτριση $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ μιας καμπύλης $\tilde{\gamma}$, θα συμβολίζουμε με $[\gamma]$ το σύνολο $[a, b]$ (δηλαδή το πεδίο ορισμού της γ).

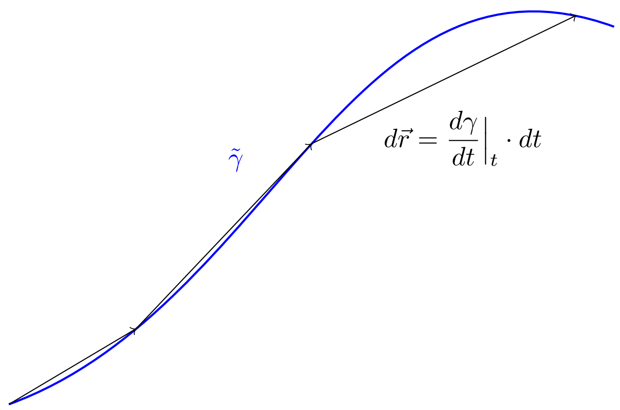
Προσοχή: Κανείς χρησιμοποιώντας διαφορετικό ορισμό, μπορεί να ορίσει ως (παραμετρημένη) καμπύλη στο χώρο μια συνεχή απεικόνιση $\gamma : I \to \mathbb{C}$, όπου το I είναι πραγματικό διάστημα. Στην παρουσίασή μας δεν θα χρησιμοποιήσουμε αυτήν την προσέγγιση, απλώς για να γίνεται σαφής ο ρόλος της παραμέτρισης της καμπύλης. Ο προσανατολισμός από την πλευρά του, θα θεωρείται μια σχέση ισοδυναμίας μεταξύ (διαφορετικών) παραμετρήσεων.

Θεώρημα 4.2 – Μήκος καμπυλών του μιγαδικού επιπέδου. Έστω $\tilde{\gamma}$ μια καμπύλη στο μιγαδικό επίπεδο και $\gamma : [\gamma] \to \mathbb{C}$ μια παραμέτρισή της. Το μήκος της $\tilde{\gamma}$ είναι ακριβώς:

$$\ell(\tilde{\gamma}) = \int_{[\gamma]} \left| \frac{d\gamma}{dt}\Big|_t \right| dt$$

στην περίπτωση όπου η παράγωγος της παραμέτρισης υπάρχει.

Διαισθητική ερμηνεία: Ουσιαστικά το μήκος της καμπύλης αποτελεί το ολοκλήρωμα $\int_{\tilde{\gamma}} |d\vec{r}| = \int_{\tilde{\gamma}} dr$, όπου $d\vec{r}$ είναι τα στοιχειώδη τμήματα που προσεγγίζουν την καμπύλη $\tilde{\gamma}$.



Παρατηρούμε ότι:

$$d\vec{r} = \gamma(t+dt) - \gamma(t) = \frac{\gamma(t+dt) - \gamma(t)}{dt} \cdot dt = \frac{d\gamma}{dt}\Big|_t \cdot dt$$

οπότε το μήκος της καμπύλης ισοδύναμα μπορεί να γραφεί ως:

$$\ell(\tilde{\gamma}) = \int_{\tilde{\gamma}} |d\vec{r}| = \int_{[\gamma]} \left| \frac{d\gamma}{dt}\Big|_t \cdot dt \right| = \int_{[\gamma]} \left| \frac{d\gamma}{dt}\Big|_t \right| \, dt$$

Ορισμός 4.5 – Επικαμπύλια μιγαδικά ολοκληρώματα. Έστω $\tilde{\gamma}$ μία καμπύλη στο μιγαδικό επίπεδο, γ μία παραγωγίσιμη παραμέτρισή της (η οποία ουσιαστικά προσδιορίζει και τον προσανατολισμό της $\tilde{\gamma}$) και f μία ολοκληρώσιμη συνάρτηση $f : \tilde{\gamma} \to \mathbb{C}$. Ως επικαμπύλιο ολοκλήρωμα στην καμπύλη $\tilde{\gamma}$ με βάρος f ορίζουμε το ολοκλήρωμα:

$$\int_{\tilde{\gamma}} f(z) \, dz := \int_{[\gamma]} f \circ \gamma(t) \cdot \frac{d\gamma}{dt}\Big|_t \, dt$$

Παρατήρηση 4.2 Η ανισότητα της **Πρότασης 4.1** αληθεύει και στα επικαμπύλια ολοκληρώματα.

$$\left| \int_{\tilde{\gamma}} f(z) \, dz \right| = \left| \int_{[\gamma]} f \circ \gamma(t) \cdot \frac{d\gamma}{dt}\Big|_t \, dt \right| \leq \int_{[\gamma]} \left| f \circ \gamma(t) \cdot \frac{d\gamma}{dt}\Big|_t \right| \, dt = \int_{\tilde{\gamma}} |f(z)| \, dz$$

Παρατήρηση 4.3 Έστω $\tilde{\gamma}$ μια καμπύλη, γ μία παραγωγίσιμη παραμέτρισή της και $f : \tilde{\gamma} \to \mathbb{C}$ μία ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Η ακόλουθη ανισότητα αληθεύει:

$$\left| \int_{\tilde{\gamma}} f(z) \, dz \right| \leq \left[\sup_{z \in \tilde{\gamma}} |f(z)| \right] \cdot \ell(\tilde{\gamma})$$

Απόδειξη: Πράγματι, ισχύει ότι:

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\tilde{\gamma}} f(z) \, dz \right| &= \left| \int_{[\gamma]} f \circ \gamma(t) \cdot \frac{d\gamma}{dt}\Big|_t \, dt \right| \\
&\leq \int_{[\gamma]} |f \circ \gamma(t)| \cdot \left| \frac{d\gamma}{dt}\Big|_t \right| \, dt \\
&\leq \left[\sup_{t \in [\gamma]} |f \circ \gamma(t)| \right] \cdot \ell(\tilde{\gamma}) \\
&= \left[\sup_{z \in \tilde{\gamma}} |f(z)| \right] \cdot \ell(\tilde{\gamma})
\end{aligned}$$

Ορισμός 4.6 – Επικαμπύλια ολοκληρώματα και διαφορικές μορφές. Έστω $\tilde{\gamma}$ μία καμπύλη και $f = (\Re f, \Im f) : \tilde{\gamma} \to \mathbb{C}$ μία ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Γράφοντας το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα στην $\tilde{\gamma}$ με βάρος f:

$$\int_{\tilde{\gamma}} (\Re f, \Im f) \, dz$$

και το στοιχειώδες μήκος dz ως $dz = (dx, dy)$, μπορούμε ουσιαστικά να αναπαραστήσουμε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα στη μορφή:

$$\int_{\tilde{\gamma}} (\Re f, \Im f) \cdot (dx, dy) = \int_{\tilde{\gamma}} \Re f \, dx + \Im f \, dy$$

Αντίστοιχα μπορούμε να γενικεύσουμε την έννοια του επικαμπυλίου ολοκληρώματος, στην περίπτωση όπου το βάρος γίνεται $F = (P, Q) : \tilde{\gamma} \to \mathbb{C}^2$. Ορίζουμε λοιπόν:

$$\int_{\tilde{\gamma}} F(z) \, dz = \int_{\tilde{\gamma}} (P, Q) \cdot (dx, dy) = \int_{\tilde{\gamma}} P \, dx + Q \, dy := \int_{\tilde{\gamma}} \Re P \, dx + \Re Q \, dy + i \cdot \int_{\tilde{\gamma}} \Im P \, dx + \Im Q \, dy$$

Θεώρημα 4.3 – Το θεμελιώδες θεώρημα του απειροστικού λογισμού για τα μιγαδικά επικαμπύλια ολοκληρώματα. Έστω $\tilde{\gamma}$ μια καμπύλη με παραγωγίσιμη παραμέτριση γ, Ω ένα ανοικτό σύνολο τέτοιο ώστε $\tilde{\gamma} \subset \Omega \subseteq \mathbb{C}$, και $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Εάν $[\gamma] = [a, b]$, τότε:

$$\int_{\tilde{\gamma}} f'(z) \, dz = f \circ \gamma(b) - f \circ \gamma(a)$$

Απόδειξη: Είναι συνέπεια του αντίστοιχου θεωρήματος της πραγματικής περίπτωσης, αφού:

$$\int_{\tilde{\gamma}} f'(z) \, dz = \int_{[\gamma]} f' \circ \gamma(t) \cdot \frac{d\gamma}{dt}\Big|_t \, dt = \int_{[\gamma]} \frac{d[f \circ \gamma]}{dt}\Big|_t \, dt = f \circ \gamma(b) - f \circ \gamma(a)$$

Ορισμός 4.7 – Μερικές ιδιότητες των καμπυλών. Έστω $\tilde{\gamma}$ μια καμπύλη και γ μία παραμέτρισή της.

- Εάν η παραμέτριση γ είναι $1-1$, θα ονομάζουμε την καμπύλη $\tilde{\gamma}$ απλή. Με γεωμετρική σκοπιά, η καμπύλη $\tilde{\gamma}$ δεν είναι αυτοτεμνόμενη.
- Αντιθέτως, εάν η παραμέτριση γ δεν είναι $1-1$, θα ονομάζουμε την καμπύλη $\tilde{\gamma}$ μη απλή. Η καμπύλη $\tilde{\gamma}$ λοιπόν είναι αυτοτεμνόμενη σε αυτήν την περίπτωση.
- Εάν η παραμέτριση γ είναι απείρως παραγωγίσιμη (δηλαδή $\gamma \in C^{\infty}([\gamma])$) τότε η καμπύλη $\tilde{\gamma}$ θα καλείται λεία.
- Εάν το σύνορο ∂A ενός συνεκτικού συνόλου $A \subseteq \mathbb{C}$ αποτελείται από πεπερασμένες στο πλήθος απλές, μη τεμνόμενες, κλειστές καμπύλες, θα λέμε ότι το ∂A είναι ομαλό.

Ορισμός 4.8 Έστω $A \subseteq \mathbb{C}$ ένα σύνολο με ομαλό σύνορο $\partial A = \bigcup_{k\in[n]} \tilde{\gamma}_k$, όπου $\tilde{\gamma}_k$ είναι απλές, μη τεμνόμενες, κλειστές καμπύλες και $n \in \mathbb{N}$. Ορίζουμε για κάθε ολοκληρώσιμη συνάρτηση $f : A \to \mathbb{C}$:

$$\int_{\partial A} f(z)\, dz := \sum_{k\in[n]} \sigma_{\tilde{\gamma}_k} \int_{\tilde{\gamma}_k} f(z)\, dz$$

όπου $\sigma_{\tilde{\gamma}_k} \in \{\pm 1\}$ εξαρτάται από τον προσανατολισμό της καμπύλης. Ειδικότερα είναι $+1$ αν η καμπύλη έχει αριστερόστροφο προσανατολισμό και -1 αν η καμπύλη έχει δεξιόστροφο προσανατολισμό (εξαρτάται δηλαδή από το αν, όταν τη διατρέχουμε στο εξωτερικό της, βρίσκεται στα αριστερά μας ή στα δεξιά μας).

Θεώρημα 4.4 – Θεώρημα του Green. Έστω Ω ένα ανοικτό σύνολο, $A \subset \Omega$ ένα ανοικτό, συνεκτικό και φραγμένο σύνολο με ομαλό σύνορο, και $f = (\Re f, \Im f) : \Omega \to \mathbb{C}$ μία συνάρτηση τέτοια ώστε $\Re f, \Im f \in C^1(\Omega)$. Ισχύει ότι:

$$\int_{\partial A} f(z)\, dz = \iint_A \frac{\partial \Im f}{\partial x} - \frac{\partial \Re f}{\partial y}\, dxdy$$

Απόδειξη: Το θεώρημα είναι ουσιαστικά ακριβώς αυτό της πραγματικής περίπτωσης.

Θεώρημα 4.5 – Θεώρημα του Cauchy. Έστω Ω ένα ανοικτό σύνολο και $A \subset \Omega$ ένα σύνολο στο οποίο εφαρμόζει το **Θεώρημα 4.4 - Θεώρημα του Green**. Εάν f είναι μία συνάρτηση τέτοια ώστε $f \in \mathcal{O}(A) \cap C^1(\Omega)$, τότε:

$$\int_{\partial A} f(z)\, dz = 0$$

Απόδειξη: Κατ' αρχάς θα δείξουμε ότι οι συναρτήσεις $\Re f, \Im f$ είναι πράγματι C^1 στο Ω (δηλαδή $\Re f, \Im f \in C^1(\Omega)$). Εφόσον η f είναι C^1 στο Ω, για κάθε $a \in \Omega$:

$$\lim_{z\to a} \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_z = \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_a \Rightarrow \lim_{z\to a} \left(\frac{\partial \Re f}{\partial x}\Big|_z, \frac{\partial \Im f}{\partial x}\Big|_z \right) = \left(\frac{\partial \Re f}{\partial x}\Big|_a, \frac{\partial \Im f}{\partial x}\Big|_a \right)$$

και από την κατά συντεταγμένες σύγκλιση:

$$\lim_{z\to a} \frac{\partial \Re f}{\partial x}\Big|_z = \frac{\partial \Re f}{\partial x}\Big|_a \ \textbf{και} \ \lim_{z\to a} \frac{\partial \Im f}{\partial x}\Big|_z = \frac{\partial \Im f}{\partial x}\Big|_a$$

Οπότε οι $\frac{\partial \Re f}{\partial x}, \frac{\partial \Im f}{\partial x}$ είναι συνεχείς. Αναλόγως μπορεί να δειχθεί ότι οι $\frac{\partial \Re f}{\partial y}, \frac{\partial \Re f}{\partial y}$ είναι συνεχείς και κατ' επέκταση ότι οι $\Re f, \Im f$ είναι C^1 στο Ω.

Όσον αφορά το εν λόγω επικαμπύλιο ολοκλήρωμα, αυτό μπορεί να γραφεί στην ακόλουθη μορφή:

$$\int_{\partial A} f(z)\, dz = \int_{\partial A} f(x,y)\, dx + i \cdot f(x,y)\, dy$$

εάν μεταβλητή ολοκλήρωσης θεωρηθεί η $z = x + iy$ και το στοιχειώδες μήκος $dz = dx + idy$. Αναλύοντας την f σε πραγματικά και φανταστικά μέρη, μπορεί να παρθεί ότι:

$$\begin{aligned}\int_{\partial A} (\Re f + i \cdot \Im f)\, dx + i \cdot (\Re f + i \cdot \Im f)\, dy &= \int_{\partial A} (\Re f + i \cdot \Im f)\, dx + (i \cdot \Re f - \Im f)\, dy \\ &= \int_{\partial A} \Re f\, dx - \Im f\, dy + i \cdot \int_{\partial A} \Im f\, dx + \Re f\, dy\end{aligned}$$

Σε καθένα από τα ολοκληρώματα εφαρμόζουμε το **Θεώρημα 4.4 - Θεώρημα του Green**. Έπεται ότι:

$$\begin{aligned}\int_{\partial A} \Re f\ dx - \Im f\ dy + i \cdot \int_{\partial A} \Im f\ dx + \Re f\ dy &= \iint_A -\frac{\partial \Im f}{\partial x} - \frac{\partial \Re f}{\partial y}\ dxdy + i \cdot \iint_A \frac{\partial \Re f}{\partial x} - \frac{\partial \Im f}{\partial y}\ dxdy \\ &= \iint_A 0\ dxdy + i \cdot \iint_A 0\ dxdy \\ &= 0\end{aligned}$$

Στη δεύτερη ισότητα να σημειωθεί ότι χρησιμοποιήθηκαν οι εξισώσεις Cauchy - Riemann. Αυτό δίνει ουσιαστικά το ζητούμενο αποτέλεσμα.

Λήμμα 4.1 – Πλήθος περιστροφών μιας καμπύλης γύρω από σημείο. Έστω $\tilde{\gamma}$ μία κλειστή καμπύλη τέτοια ώστε $0 \notin \tilde{\gamma}$. Η ποσότητα:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{\gamma}} \frac{1}{z}\ dz$$

είναι ακέραιος αριθμός και εκφράζει πόσες φορές η καμπύλη $\tilde{\gamma}$ έχει περιστρεφεί (αριστερόστροφα) γύρω από το 0. Να σημειωθεί ότι αν η καμπύλη περιστρέφεται αριστερόστροφα και δεξιόστροφα γύρω από το 0, ο εν λόγω αριθμός εκφράζει τη διαφορά των αριστερόστροφων περιστροφών μείον των δεξιόστροφων.

Ως γενίκευση, η ποσότητα:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{\gamma}} \frac{1}{z-a}\ dz$$

είναι ακέραιος αριθμός και εκφράζει πόσες φορές η καμπύλη $\tilde{\gamma}$ έχει περιστρεφεί (αριστερόστροφα) γύρω από τον μιγαδικό αριθμό $a \in \mathbb{C} - \tilde{\gamma}$. ■

Πρώτη απόδειξη:

Βήμα Ι: Έστω ότι η καμπύλη $\tilde{\gamma}$ είναι ένας κύκλος $\partial S(0,r)$, με παραμέτριση $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$. Προσεγγίζοντας την $\tilde{\gamma}$ με καμπύλες της μορφής $\big(\gamma([a+1/n, b-1/n])\big)_{n\in\mathbb{N}}$, παρατηρούμε ότι:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{\gamma}} \frac{1}{z}\ dz = \frac{1}{2\pi i} \cdot \lim_{n\to\infty} \int_{\gamma([a+1/n,b-1/n])} \frac{1}{z}\ dz$$

Σε καθεμία από τις καμπύλες $\gamma([a+1/n, b-1/n])$ ο λογάριθμος μπορεί να οριστεί χωρίς πρόβλημα. Μάλιστα αποτελεί σε αυτές τις καμπύλες παράγουσα συνάρτηση της $\frac{1}{z}$. Επομένως:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{\gamma}} \frac{1}{z}\ dz = \frac{1}{2\pi i} \cdot \lim_{n\to\infty} \Big[\log\big(\gamma(b-1/n)\big) - \log\big(\gamma(a+1/n)\big) \Big]$$

Επειδή $\log\big(\gamma(b-1/n)\big) \xrightarrow{n\to\infty} \log\big(\gamma(a)\big) + 2\pi i$, το ζητούμενο σε αυτήν την υποπερίπτωση έπεται:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{\gamma}} \frac{1}{z}\ dz = \frac{1}{2\pi i} \cdot 2\pi i = 1$$

Βήμα ΙΙ: Έστω $\tilde{\gamma}$ μία απλή καμπύλη με το 0 στο εσωτερικό της. Επιλέγουμε αρκετά μικρό κύκλο $\partial S(0,r)$ γύρω από το 0, τέτοιον ώστε να περιέχεται στο χωρίο που ορίζει η $\tilde{\gamma}$. Εφαρμόζοντας το **Θεώρημα 4.5 - Θεώρημα του Cauchy** έπεται ότι:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{\gamma}} \frac{1}{z}\ dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S(0,r)} \frac{1}{z}\ dz = 1$$

Βήμα ΙΙΙ: Έστω $\tilde{\gamma}$ μια απλή, κλειστή καμπύλη που δεν περιέχει το 0 στο εσωτερικό της. Επιλέγουμε p, q δύο σημεία της καμπύλης $\tilde{\gamma}$ και κατασκευάζουμε καμπύλη $\tilde{\psi}$ τέτοια ώστε να περιέχει το 0 στο εσωτερικό της, να έχει ομοιόμορφο προσανατολισμό και στην $\tilde{\psi}$, στο κοινό τμήμα της $\tilde{\gamma}$ με την $\tilde{\psi}$ (δηλαδή μεταξύ των p, q), να έχει προσανατολισμό αντίθετο από αυτόν της $\tilde{\gamma}$. Παρατηρούμε ότι:

$$1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{\gamma}\cup\tilde{\psi}} \frac{1}{z}\ dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{\gamma}} \frac{1}{z}\ dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{\psi}} \frac{1}{z}\ dz \Rightarrow \frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{\gamma}} \frac{1}{z}\ dz = 0$$

(Αξίζει να παρατηρηθεί ότι, επειδή η $\tilde{\psi}$ περιέχει το 0 στο εσωτερικό της, η $\tilde{\gamma} \cup \tilde{\psi}$ επίσης το περιέχει).

Βήμα IV: Παρατηρούμε ότι, είτε η καμπύλη $\tilde{\gamma}$ είναι απλή είτε όχι, διαμερίζεται σε τμήματα της $\tilde{\gamma}$, τα οποία είναι απλές καμπύλες, με ομοιόμορφο προσανατολισμό. Πράγματι, εάν η καμπύλη $\tilde{\gamma}$ ήταν αυτοτεμνόμενη σε μοναδικό σημείο $\gamma(s) = \gamma(s')$ (όπου γ είναι μια παραμέτριση), τότε θεωρούμε τις καμπύλες $\tilde{\gamma}' = \gamma([s,s'])$, $\tilde{\gamma}^* = \big[\tilde{\gamma} - \gamma([s,s'])\big] \cup \{\gamma(s)\}$ και παρατηρούμε ότι αυτές είναι απλές. Μάλιστα ο προσανατολισμός τους είναι ομοιόμορφος. Η γενική περίπτωση γίνεται με επαγωγή.

Βήμα V: Σε κάθε κλειστή καμπύλη $\tilde{\eta}$ που είναι τμήμα της $\tilde{\gamma}$ και δεν περιέχει το σημείο 0 στο εσωτερικό της, από το **Βήμα III** έπεται ότι:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\tilde{\eta}} \frac{1}{z}\, dz = 0$$

Βήμα VI: Από το προηγούμενο βήμα έπεται ότι:

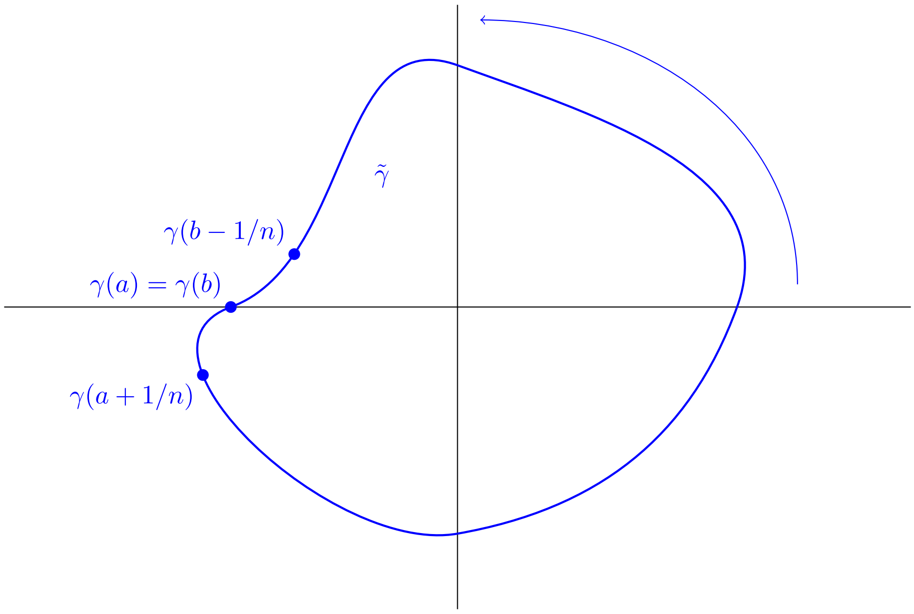
$$\int_{\tilde{\gamma}} \frac{1}{z}\, dz = \sum_{\tilde{\psi}} \int_{\tilde{\psi}} \frac{1}{z}\, dz = \sum_{\tilde{\psi}} \delta_{\tilde{\psi}}(0)$$

όπου $\tilde{\psi}$ είναι τμήματα της $\tilde{\gamma}$ τα οποία είναι απλές, κλειστές καμπύλες, με ομοιόμορφο προσανατολισμό και με το 0 στο εσωτερικό τους (η ύπαρξη αυτών εξασφαλίζεται από το **Βήμα IV**). Μάλιστα, εάν μια $\tilde{\psi}$ περιστρέφεται αριστερόστροφα γύρω από το 0 έχουμε $\delta_{\tilde{\psi}}(0) = 1$, ενώ αν περιστρέφεται δεξιόστροφα $\delta_{\tilde{\psi}}(0) = -1$. Με αυτό ουσιαστικά αποδεικνύουμε τις ζητούμενες ιδιότητες του δείκτη στροφής γύρω από το 0.

Βήμα VII: Για την γενική περίπτωση (γύρω από τυχόν $a \in \mathbb{C}$), εφαρμόζουμε τη μεταφορά $z - a$ και αναγόμαστε στην περίπτωση περί του μηδενός.

Δεύτερη απόδειξη - διαισθητικότερη:

Βήμα I: Ας υποθέσουμε προσωρινά ότι η καμπύλη μας $\tilde{\gamma}$ είναι απλή, τέμνει την $\underrightarrow{Ox'}$ σε ένα σημείο, έχει αριστερόστροφο πρσανατολισμό και το 0 στο εσωτερικό της. Θεωρούμε γ μία παραμέτριση της καμπύλης $\tilde{\gamma}$, τέτοια ώστε $[\gamma] = [a,b]$ και επιπλέον $\gamma(a) = \gamma(b) \in \underrightarrow{Ox'}$.



Στην καμπύλη $\tilde{\gamma}$ δεν ορίζεται ο μιγαδικός λογάριθμος, διότι σε αυτήν υπάρχουν σημεία (ειδικότερα ένα) τα οποία ανήκουν στην ημιευθεία $\underrightarrow{Ox'}$, στην οποία ο λογάριθμος δεν ορίζεται. Θεωρούμε λοιπόν την οικογένεια καμπυλών $\big(\gamma([a+1/n, b-1/n])\big)_{n\in\mathbb{N}}$, η οποία προσεγγίζει την γ:

$$\lim_{n\to\infty} \gamma([a+1/n, b-1/n]) = \gamma([a,b]) = \tilde{\gamma}$$

και παρατηρούμε ότι το ζητούμενο ολοκλήρωμα μπορεί ισοδύναμα να εκφραστεί ως:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\tilde{\gamma}} \frac{1}{z}\, dz = \frac{1}{2\pi i} \cdot \lim_{n\to\infty} \int_{\gamma([a+1/n, b-1/n])} \frac{1}{z}\, dz$$

Σε καθεμία από της καμπύλες $\gamma([a+1/n, b-1/n])$ ο λογάριθμος μπορεί να οριστεί χωρίς πρόβλημα. Μάλιστα αποτελεί σε αυτές τις καμπύλες παράγουσα συνάρτηση της $\dfrac{1}{z}$. Επομένως:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\tilde{\gamma}} \frac{1}{z}\, dz = \frac{1}{2\pi i} \cdot \lim_{n\to\infty} \big[\log\big(\gamma(b-1/n)\big) - \log\big(\gamma(a+1/n)\big)\big]$$

Επειδή $\log\big(\gamma(b-1/n)\big) \xrightarrow{n\to\infty} \log\big(\gamma(a)\big) + 2\pi i$, το ζητούμενο σε αυτήν την υποπερίπτωση έπεται:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\tilde{\gamma}} \frac{1}{z}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\cdot 2\pi i = 1$$

Βήμα ΙΙ: Εάν η καμπύλη είναι απλή, με αριστερόστροφο προσανατολισμό, δεν τέμνει την $\underrightarrow{Ox'}$ και δεν περιέχει το 0 στο εσωτερικό της, το εν λόγο ολοκλήρωμα ισούται με 0, αφού:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\tilde{\gamma}} \frac{1}{z}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\cdot\left[\log\big(\gamma(b)\big) - \log\big(\gamma(a)\big)\right] = 0$$

Οπότε και πάλι ο τύπος σε αυτήν την υποπερίπτωση ισχύει.

Βήμα ΙΙΙ: Έστω ότι η καμπύλη είναι απλή, με αριστερόστροφο προσανατολισμό και με το 0 είτε στο εσωτερικό της είτε στο εξωτερικό της. Για οσοδήποτε μεγάλο πλήθος σημείων τομής της $\tilde{\gamma}$ με την $\underrightarrow{Ox'}$, ο τύπος εξακολουθεί να ισχύει.

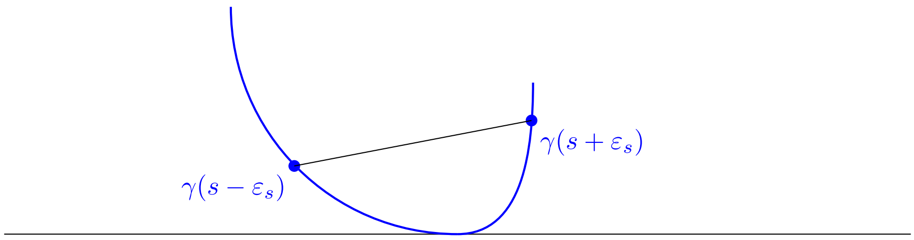
Πράγματι, εάν η καμπύλη τέμνει την $\underrightarrow{Ox'}$ αλλά δεν τη διαπερνά (δηλαδή 'εφάπτεται') σε σημείο $\gamma(s)$, τότε σε κάποιο διάστημα $[s-\varepsilon_s, s+\varepsilon_s]$ στο οποίο δεν υπάρχει άλλο σημείο τομής με την $\underrightarrow{Ox'}$, το ολοκλήρωμα της $\frac{1}{z}$ μπορεί να γίνει:

$$\int_{\gamma_s} \frac{1}{z}\,dz = \lim_{n\to\infty}\int_{\gamma_s^*(n)} \frac{1}{z}\,dz,\ \text{όπου } \gamma_s = \gamma([s-\varepsilon_s, s+\varepsilon_s]),\ \gamma_s^*(n) = \gamma([s-\varepsilon_s, s-1/n]\cup[s+1/n, s+\varepsilon_s])$$

κι άρα:

$$\int_{\gamma_s} \frac{1}{z}\,dz = \log\big(\gamma(s+\varepsilon_s)\big) - \log\big(\gamma(s-\varepsilon_s)\big)$$

Το τμήμα λοιπόν $\gamma([s-\varepsilon_s, s+\varepsilon_s])$ της καμπύλης είναι δυνατόν να αντικατασταθεί με ένα ευθύγραμμο τμήμα της μορφής $[\gamma(s-\varepsilon_s), \gamma(s+\varepsilon_s)]$ και στην προκύπτουσα καμπύλη το ολοκλήρωμα θα είναι ίσο με το ολοκλήρωμα στην αρχική καμπύλη. Το τμήμα $[\gamma(s-\varepsilon_s), \gamma(s+\varepsilon_s)]$ δεν τέμνει την ημιευθεία $\underrightarrow{Ox'}$, οπότε με τη διαδικασία αυτή ουσιαστικά άρουμε την περίπτωση στην οποία η καμπύλη εφάπτεται της ημιευθείας.



Η προηγούμενη ανάλυση δείχνει ότι μπορούμε να αγνοήσουμε τα σημεία στα οποία η καμπύλη εφάπτεται της ημιευθείας - αγνοούμε επομένως αυτά τα σημεία. Εάν η $\tilde{\gamma}$ τέμνει την $\underrightarrow{Ox'}$ και τη διαπερνά (δηλαδή δεν 'εφάπτεται'), τότε και πάλι μπορούμε να θεωρήσουμε $\gamma(s)$ το σημείο τομής και ένα τμήμα της καμπύλης (έστω το $\gamma([s-\varepsilon_s, s+\varepsilon_s])$) το οποίο δεν τέμνει την ημιευθεία σε άλλο σημείο πέρα από το $\gamma(s)$. Ακολουθώντας επιχειρήματα ανάλογα του **Βήματος Ι**, μπορεί να προκύψει ότι:

$$\int_{\gamma_s} \frac{1}{z}\,dz = 2\sigma_s\pi i + \left[\log\big(\gamma(s+\varepsilon_s)\big) - \log\big(\gamma(s-\varepsilon_s)\big)\right],\ \text{όπου } \gamma_s = \gamma([s-\varepsilon_s, s+\varepsilon_s])$$

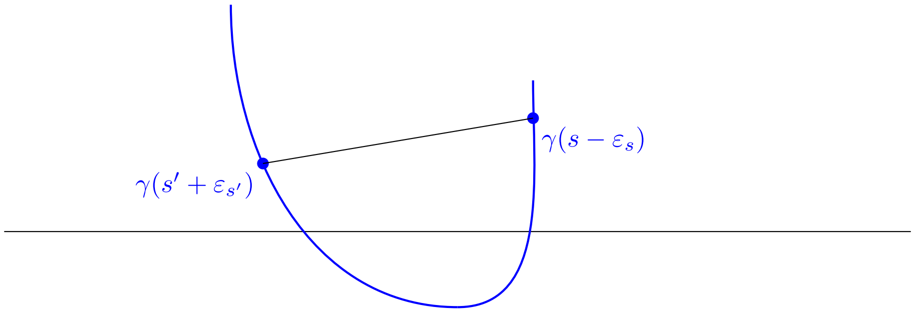
Το $\sigma_s \in \{\pm 1\}$ είναι αριθμός που εξαρτάται από τον προσανατολισμό του τμήματος γ_s. Ειδικότερα, εάν το γ_s έχει αριστερόστροφο προσανατολισμό είναι $+1$ και εάν έχει δεξιόστροφο είναι -1.

Ας υποθέσουμε ότι το πλήθος των σημείων τομής της $\tilde{\gamma}$ με την $\underrightarrow{Ox'}$ είναι $2n+\tau$, $\tau\in\{0,1\}$. Παίρνοντας τα σημεία τομής σε ζεύγη, παρατηρούμε ότι για όλα τα τμήματα γ_s που τέμνουν την $\underrightarrow{Ox'}$ στο $\gamma(s)$ (ενδεχομένως πλην ενός) θα υπάρχει άλλο ένα τμήμα της $\tilde{\gamma}$, έστω το $\gamma_{s'}$, στο οποίο το $\gamma(s')$ είναι το σημείο τομής με την ημιευθεία $\underrightarrow{Ox'}$, και το τμήμα έχει αντίθετο προσανατολισμό σε σχέση με το γ_s. Μάλιστα, το $\gamma_{s'}$ μπορεί να παρθεί έτσι ώστε μεταξύ των $\gamma_s, \gamma_{s'}$ να μην υπάρχει σημείο τομής με την ημιευθεία. Έχουμε λοιπόν με αυτά ότι:

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_s\cup\gamma_{s'}\cup\gamma_{s,s'}} \frac{1}{z}\,dz &= \int_{\gamma_s}\frac{1}{z}\,dz + \int_{\gamma_s'}\frac{1}{z}\,dz + \int_{\gamma_{s,s'}}\frac{1}{z}\,dz \\
&= 2\sigma_s\pi i + \left[\log\big(\gamma(s+\varepsilon_s)\big) - \log\big(\gamma(s-\varepsilon_s)\big)\right] + \\
&\quad + 2(-\sigma_s)\pi i + \left[\log\big(\gamma(s'+\varepsilon_{s'})\big) - \log\big(\gamma(s'-\varepsilon_{s'})\big)\right] + \\
&\quad + \left[\log\big(\gamma(s'-\varepsilon_{s'})\big) - \log\big(\gamma(s+\varepsilon_s)\big)\right] \\
&= \log\big(\gamma(s+\varepsilon_{s'})\big) - \log\big(\gamma(s-\varepsilon_s)\big)
\end{aligned}$$

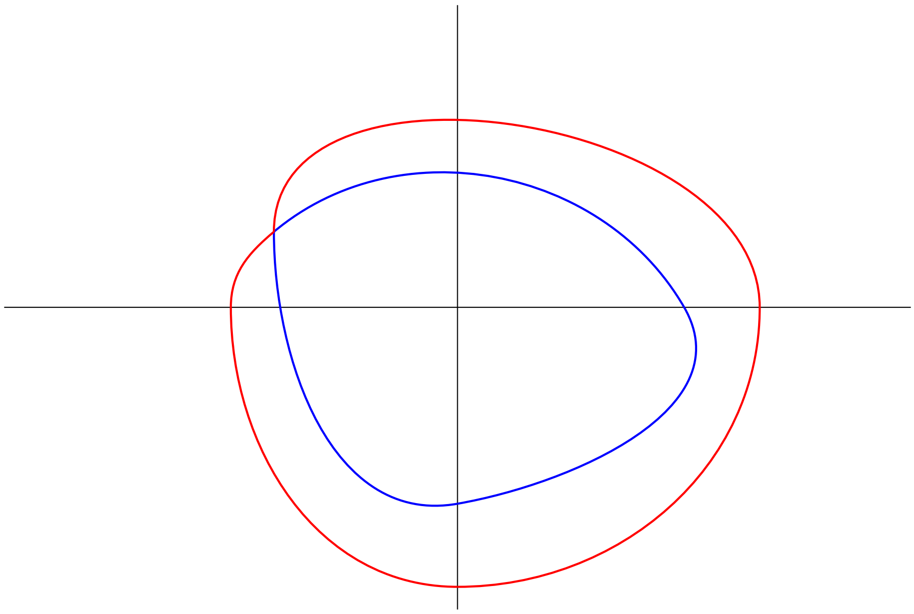
όπου $\gamma_s = \gamma([s-\varepsilon_s, s+\varepsilon_s])$, $\gamma_{s'} = \gamma([s'-\varepsilon_{s'}, s'+\varepsilon_{s'}])$ και $\gamma_{s,s'}$ είναι το ενδιάμεσο τμήμα $\gamma([s+\varepsilon_s, s'-\varepsilon_s'])$ (χωρίς βλάβη της γενικότητας έχουμε υποθέσει ότι $s < s'$).

Το τμήμα λοιπόν $\gamma([s-\varepsilon_s, s'+\varepsilon_{s'}])$ της καμπύλης είναι δυνατόν να αντικατασταθεί με ένα ευθύγραμμο τμήμα της μορφής $[\gamma(s-\varepsilon_s), \gamma(s+\varepsilon_s)]$ και στην προκύπτουσα καμπύλη το ολοκλήρωμα θα είναι ίσο με το ολοκλήρωμα στην αρχική καμπύλη. Το τμήμα $[\gamma(s-\varepsilon_s), \gamma(s+\varepsilon_s)]$ δεν τέμνει την ημιευθεία $\underrightarrow{Ox'}$, οπότε με τη διαδικασία αυτή ουσιαστικά άρουμε την περίπτωση στην οποία η καμπύλη τέμνει την ημιευθεία χωρίς να εφάπτεται.



Βήμα IV: Όσα αναφέρθηκαν στα προηγούμενα βήματα ισχύουν με τρόπο ανάλογο σε καμπύλες με δεξόστροφο προσανατολισμό.

Βήμα V: Στην περίπτωση όπου η καμπύλη δεν είναι απλή, τη χωρίζουμε σε απλές καμπύλες της μορφής $\gamma([s_k, s_{k+1}])$, όπου s_k, s_{k+1} είναι διαδοχικά σημεία στα οποία η παραμέτριση γ παύει να είναι $1-1$. Δηλαδή $\gamma(s_k) = \gamma(s_{k+1})$ και για κάθε $s_k < t_k < t_{k+1} < s_{k+1}$ ισχύει ότι $\gamma(t_k) \neq \gamma(t_{k+1})$. Σε καθεμία από τις προκύπτουσες καμπύλες μπορούν να εφαρμοστούν τα **Βήματα I, II, III, IV**, οπότε το ζητούμενο αποδεικνύεται στη γενική περίπτωση.



Όσον αφορά την περιστροφή της καμπύλης γύρω από ένα τυχαίο σημείο $a \in \mathbb{C} - \tilde{\gamma}$, με τη μεταφορά $z-a$ της καμπύλης, προκύπτει το ακόμη γενικότερο αποτέλεσμα:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\tilde{\gamma}} \frac{1}{z-a}\,dz \in \mathbb{Z}$$

Ορισμός 4.9 – Δείκτης στροφής μιας καμπύλης. Ορίζουμε ως δείκτη στροφής της $\tilde{\gamma}$ γύρω από το $a \in \mathbb{C} - \tilde{\gamma}$ τον αριθμό:

$$\delta_{\tilde{\gamma}}(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\tilde{\gamma}} \frac{1}{z}\,dz$$

Σύμφωνα με το **Λήμμα 4.1 - Πλήθος περιστροφών μιας καμπύλης γύρω από σημείο** ο αριθμός είναι ακέραιος. Μάλιστα, εκφράζει πόσες φορές η καμπύλη $\tilde{\gamma}$ έχει περιστρεφεί (αριστερόστροφα) γύρω από το a. Να σημειωθεί ότι αν η καμπύλη περιστρέφεται αριστερόστροφα και δεξιόστροφα γύρω από το a, ο εν λόγω αριθμός εκφράζει τη διαφορά των αριστερόστροφων περιστροφών μείον των δεξιόστροφων.

Θεώρημα 4.6 – Ο τύπος του Cauchy. Έστω Ω ένα ανοικτό σύνολο και $A \subset \Omega$ ένα σύνολο στο οποίο εφαρμόζει το **Θεώρημα 4.4 - Θεώρημα του Green**. Έστω επίσης μία συνάρτηση $f \in \mathcal{O}(A) \cap C^1(\Omega)$ και z ένα σημείο στο A. Ισχύει ότι:

$$\int_{\partial A} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = 2\pi i \cdot f(z)$$

Απόδειξη: Εφόσον το A είναι ανοικτό σύνολο, μπορεί να βρεθεί δίσκος $B(z, \varepsilon)$ τέτοιος ώστε $B(z, \varepsilon) \subset A$. Ορίζουμε $A_\varepsilon = A - B(z, \varepsilon)$ και παρατηρούμε ότι το A_ε είναι σύνολο στο οποίο μπορεί να εφαρμοστεί το **Θεώρημα 4.4 - Θεώρημα του Green**. Επιπλέον, η $\dfrac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ είναι C^1 συνάρτηση του ζ στο $\Omega - B(z, \varepsilon)$, επομένως από το **Θεώρημα 4.5 - Θεώρημα του Cauchy**:

$$\int_{\partial A_\varepsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, dz = 0$$

Επειδή $\partial A_\varepsilon = \partial A \cup \partial B(z, \varepsilon)$:

$$\int_{\partial A} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, dz - \int_{\partial B(z,\varepsilon)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, dz = 0 \Rightarrow \int_{\partial A} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, dz = \int_{\partial B(z,\varepsilon)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, dz$$

Εάν λοιπόν αποδειχθεί ότι:

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\partial B(z,\varepsilon)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = 2\pi i \cdot f(z)$$

το ζητούμενο θα έχει δειχθεί. Η σύγκλιση αυτή ισχύει αφού:

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\partial B(z,\varepsilon)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - 2\pi i \cdot f(z) \right| &= \left| \int_{\partial B(z,\varepsilon)} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}\, d\zeta \right| \\
&\le \sup_{\zeta \in \partial B(z,\varepsilon)} \left| \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} \right| \cdot \ell(\partial B(z, \varepsilon)) \\
&\le \frac{\sup_{\zeta \in \partial B(z,\varepsilon)} |f(\zeta) - f(z)|}{\varepsilon} \cdot 2\pi\varepsilon \\
&= 2\pi \cdot \sup_{\zeta \in \partial B(z,\varepsilon)} |f(\zeta) - f(z)|
\end{aligned}$$

και η ποσότητα $\sup_{\zeta \in \partial B(z,\varepsilon)} |f(\zeta) - f(z)|$ συγκλίνει στο 0 καθώς $\varepsilon \to 0^+$. Να σημειωθεί ότι στην πρώτη ισότητα έγινε χρήση του **Λήμματος 4.1 - Πλήθος περιστροφών μιας καμπύλης γύρω από σημείο**.

Ορισμός 4.10 – Πυρήνας του Cauchy. Σύμφωνα με το **Θεώρημα 4.6 - Ο τύπος του Cauchy**, ολόμορφες και C^1 συναρτήσεις σε ανοικτά σύνολα A στα οποία το θεώρημα του Green ισχύει, μπορούν να πάρουν τη μορφή:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial A} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$$

Κατά μία έννοια, η ποσότητα ${}^{1}\!/_{(\zeta - z)}$ παράγει την $f(z)$. Δίνεται λοιπόν γι' αυτόν τον λόγο η ονομασία 'πυρήνας του Cauchy' στην ποσότητα ${}^{1}\!/_{(\zeta - z)}$.

Θεώρημα 4.7 – Συσχέτιση αναλυτικών και ολομόρφων συναρτήσεων. Έστω μία συνάρτηση f η οποία είναι ολόμορφη σε έναν δίσκο $S(a, r)$. Εάν στον ίδιο δίσκο είναι C^1, τότε είναι και αναλυτική σε αυτόν.

Ως γενίκευση, εάν Ω είναι ένα ανοικτό σύνολο και $f \in \mathcal{O}(\Omega) \cap C^1(\Omega)$, τότε επιπλέον $f \in \mathcal{A}(\Omega)$.

Απόδειξη: Έστω z ένας οποιοσδήποτε μιγαδικός αριθμός στον $S(a, r)$ και $\zeta \in \partial S(a, r)$. Ισχύει ότι $|\zeta - a| = r$ και $|z - a| < r$, επομένως ο λόγος $\dfrac{z - a}{\zeta - a}$ είναι μικρότερος της μονάδας. Από την **Παρατήρηση 3.3**, η σειρά:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{z - a}{\zeta - a} \right]^k = {}^{1}\Big/_{1 - \frac{z - a}{\zeta - a}} = \frac{\zeta - a}{\zeta - z}$$

συγκλίνει. Κατ' επέκταση:

$$\frac{1}{\zeta - z} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(\zeta - \alpha)^{k+1}} \cdot (z-a)^k \Rightarrow \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{k+1}} \cdot (z-a)^k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{\partial S(a,r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \int_{\partial S(a,r)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{k+1}} \cdot (z-a)^k \, d\zeta$$

Από το **Θεώρημα 4.6 - Ο τύπος του Cauchy** έπεται ότι:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S(a,r)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{k+1}} \cdot (z-a)^k \, d\zeta$$

Εάν η εναλλαγή του αθροίσματος με το ολοκλήρωμα είναι εφικτή, το ζητούμενο αποδεικνύεται, αφού τότε ισοδύναμα μπορούμε να παραστήσουμε το $f(z)$ ως:

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \overbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S(a,r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{k+1}} \, d\zeta}^{c_k} \cdot (z-a)^k = \sum_{k=1}^{\infty} c_k (z-a)^k$$

Για να αποδείξουμε την εν λόγω εναλλαγή, δείχνουμε ότι η σύγκλιση:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{k+1}} \cdot (z-a)^k \to \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{k+1}} \cdot (z-a)^k$$

είναι ομοιόμορφη. Πράγματι, από το **Θεώρημα 3.3 - Κριτήριο ομοιόμορφης σύγκλισης του Weierstrass**:

$$\left| \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{k+1}} \cdot (z-a) \right| \leq \frac{\sup_{\zeta \in \partial S(a,r)} |f(\zeta)|}{r^{k+1}} \cdot |z-a|^k = \frac{\sup_{\zeta \in \partial S(a,r)} |f(\zeta)|}{r} \cdot \left[\frac{|z-a|}{r} \right]^k$$

οι όροι τις σειράς φράσσονται (κατ' απόλυτη τιμή) από όρους μιας άλλης σειράς:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sup_{\zeta \in \partial S(a,r)} |f(\zeta)|}{r} \cdot \left[\frac{|z-a|}{r} \right]^k = \frac{\sup_{\zeta \in \partial S(a,r)} |f(\zeta)|}{r} \cdot \left[1 \Big/ 1 - \frac{|z-a|}{r} \right]$$

η οποία συγκλίνει. Επομένως αποδεικνύεται η ζητούμενη ομοιόμορφη σύγκλιση. Από την **Παρατήρηση 4.1**, εφόσον η ομοιόμορφη σύγκλιση έχει αποδειχθεί, είναι δυνατή η εναλλαγή αθροίσματος - ολοκληρώματος.

Εάν Ω είναι ένα τυχόν ανοικτό σύνολο, σε κάθε δίσκο του $S(a,r) \subseteq \Omega$ η f είναι ολόμορφη και C^1, επομένως εφαρμόζεται το θεώρημα όπως έχει αποδειχθεί ως τώρα. Η f λοιπόν αναλύεται σε δυναμοσειρά σε κάθε δίσκο του Ω και κατ' επέκταση είναι αναλυτική σε όλο το Ω.

- Έστω Ω ένα ανοικτό σύνολο και $f : \Omega \to \mathbb{C}$ μία συνάρτηση. Έχει δειχθεί από το **Θεώρημα 3.3 - Θεώρημα παραγώγισης δυναμοσειρών** ότι εάν η f είναι αναλυτική στο Ω, τότε είναι ολόμορφη σε αυτό. Επιπλέον, από το **Θεώρημα 4.7 - Συσχέτιση αναλυτικών και ολομόρφων συναρτήσεων** εάν η f είναι ολόμορφη και C^1 στο Ω, τότε είναι αναλυτική. Μπορεί να δειχθεί μάλιστα κάτι ισχυρότερο, ότι η f αρκεί να είναι ολόμορφη για να αποδειχθεί ότι υπάρχει ανάλυσή της σε δυναμοσειρά. Βέβαια, η απόδειξη του συγκεκριμένου δεν ανήκει στα πλαίσια αυτής της παρουσίασης.

  Η έννοιες λοιπόν της αναλυτικότητας και της ολομορφίας είναι ταυτόσημες σε ανοικτά σύνολα.

  Εάν το Ω είναι ανοικτό σύνολο: $f \in \mathcal{O}(\Omega) \Leftrightarrow f \in \mathcal{A}(\Omega)$

Λήμμα 4.2 – Θεώρημα του Liouville. Έστω $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ μία ολόμορφη συνάρτηση σε όλο το μιγαδικό επίπεδο $\mathbb{C}$ η οποία είναι φραγμένη από κάποιο $M > 0$. Η f είναι σταθερή συνάρτηση. ■

Απόδειξη: Η f ως ολόμορφη συνάρτηση στο $\mathbb{C}$ είναι ολόμορφη συνάρτηση σε κάθε δίσκο $S(0,r)$ Αναλύεται λοιπόν σε κάθε δίσκο $S(0,r)$ σε δυναμοσειρά:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$$

Μάλιστα, από την απόδειξη του **Θεωρήματος 4.7 - Συσχέτιση αναλυτικών και ολομόρφων συναρτήσεων**, οι συντελεστές c_k παίρνουν τη μορφή:

$$c_k = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial S(a,r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{k+1}}\,d\zeta \Rightarrow |c_k| \leq \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\sup_{\zeta\in\partial S(0,r)}|f(\zeta)|}{r^{k+1}}\cdot \ell(\partial S(0,r)) \leq \frac{M}{r^k}$$

Αφήνοντας $r\to\infty$, οι δίσκοι $S(0,r)$ προσεγγίζουν όλο το μιγαδικό επίπεδο και οι συντελεστές c_k προσεγγίζουν το 0, για κάθε $k\geq 1$. Η f λοιπόν είναι σταθερή, αφού γράφεται στη μορφή $f(z)=c_0$.

Παρατήρηση 4.4 – Μια δεύτερη απόδειξη του Θεμελιώδους Θεωρήματος της Άλγεβρας. Με τη χρήση του **Λήμματος 4.2 - Θεώρημα του Liouville** μπορεί να αποδειχθεί το Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας.

Απόδειξη: Έστω $P(z) = z^n + \sum_{k=0}^{n-1} c_k z^k,\ n\geq 1$ ένα πολυώνυμο του $\mathbb{C}[z]$. Το P είναι ολόμορφη συνάρτηση του z σε όλο το μιγαδικό επίπεδο, κι αν προς άτοπο δεν έχει ρίζα στο $\mathbb{C}$, η συνάρτηση $\dfrac{1}{P(z)}$ είναι κι αυτή ολόμορφη σε όλο το μιγαδικό επίπεδο. Μάλιστα, η $\dfrac{1}{P(z)}$ είναι φραγμένη συνάρτηση, αφού:

$$\lim_{z\to\infty}\left|\frac{1}{P(z)}\right| = 0 \Rightarrow \exists r>0 : \forall z\in[B(0,r)]^c,\ \left|\frac{1}{P(z)}\right| < 1$$

επειδή το $B(0,r)$ είναι συμπαγές σύνολο και η $\left|\dfrac{1}{P(z)}\right|$ συνεχής, υπάρχει μέγιστη τιμή $\left|\dfrac{1}{P(z_0)}\right|$ στο $B(0,r)$. Άρα:

$$\left|\frac{1}{P(z)}\right| \leq \max\left\{1, \left|\frac{1}{P(z_0)}\right|\right\},\ \text{σε όλο το } \mathbb{C}$$

Από το **Λήμμα 4.2 - Θεώρημα του Liouville**, η $\dfrac{1}{P(z)}$ είναι σταθερή, άρα και το πολυώνυμο $P(z)$ είναι σταθερό. Αυτό είναι άτοπο.

4.3 Παράγουσες μιγαδικών συναρτήσεων

Στην περίπτωση των πραγματικών, συνεχών συναρτήσεων $f: A\to\mathbb{R}, A\subseteq\mathbb{R}$, η ύπαρξη μιας παράγουσας F της f είναι εξασφαλισμένη. Στις μιγαδικές όμως συναρτήσεις $f: A\to\mathbb{C}, A\subseteq\mathbb{C}$ κάτι τέτοιο δεν συμβαίνει - ειδικότερα, μια συνεχής συνάρτηση (ορισμένη επί ενός συνόλου A) δεν έχει κατ' ανάγκη παράγουσα στο A. Στο υποκεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε περιπτώσεις στις οποίες είναι δυνατή η ύπαρξη μιας παράγουσας συνάρτησης.

■**Πρόταση 4.2** Η συνάρτηση $\dfrac{1}{z}:\mathbb{C}^*\to\mathbb{C}$ δεν έχει παράγουσα συνάρτηση στο $\mathbb{C}^*$. Κατ' επέκταση, μια ολοκληρώσιμη (μιγαδική) συνάρτηση (ορισμένη επί ενός συνόλου A) δεν έχει κατ' ανάγκη παράγουσα στο A. ■

Απόδειξη: Εάν προς άτοπο υπήρχε παράγουσα F αυτής, τότε από το **Θεώρημα 4.3 - Το θεμελιώδες θεώρημα του απειροστικού λογισμού για τα μιγαδικά επικαμπύλια ολοκληρώματα** έπεται ότι:

$$\int_{\partial S(0,1)} \frac{1}{z}\,dz = F\circ s(b) - F\circ s(a)$$

για μία παραμέτρηση $s:[a,b]\to\mathbb{C}$ της $\partial S(0,1)$. Επειδή η καμπύλη $\partial S(0,1)$ είνα κλειστή, $s(a)=s(b)$. Επομένως:

$$\int_{\partial S(0,1)} \frac{1}{z}\,dz = 0$$

Αυτό είναι άτοπο, αφού:

$$\int_{\partial S(0,1)} \frac{1}{z}\,dz = \delta_{\partial S(0,1)}(0) = 1 \neq 0$$

Θεώρημα 4.8 Έστω $\Omega\subseteq\mathbb{C}$ ένα ανοικτό και κυρτό σύνολο και $f\in\mathcal{O}(\Omega)$. Υπάρχει σε αυτήν την περίπτωση παράγουσα συνάρτηση της f στο Ω.

Απόδειξη: Θα δείξουμε ότι σε κάθε σημείο u του Ω η f έχει παράγουσα. Θεωρούμε λοιπόν u, v, w τρία σημεία στο Ω, τέτοια ώστε να σχηματίζουν τρίγωνο $\overset{\triangle}{uvw}$ και θεωρούμε μια συνάρτηση F η οποία έχει τη μορφή:

$$F(z) := \int_{[w,z]} f(\zeta)\, d\zeta$$

Ως τρίγωνο θεωρούμε την ένωση τριών ευθυγράμμων τμημάτων, επομένως $\overset{\triangle}{uvw} = [u,v] \cup [v,w] \cup [w,u] = \partial \overset{\triangle}{uvw}$. Επειδή στο εσωτερικό καθενός τριγώνου μπορεί να εφαρμοστεί το θεώρημα του Green, από το **Θεώρημα 4.5 - Θεώρημα του Cauchy**, έχουμε ότι:

$$\int_{\overset{\triangle}{uvw}} f(\zeta)\, d\zeta = 0 \Rightarrow \int_{[w,u]} f(\zeta)\, d\zeta + \int_{[u,v]} f(\zeta)\, d\zeta + \int_{[v,w]} f(\zeta)\, d\zeta = 0 \Rightarrow F(u) - F(v) = -\int_{[u,v]} f(\zeta)\, d\zeta$$

Επομένως:

$$\frac{F(u)-F(v)}{u-v} = -\frac{1}{u-v}\int_{[u,v]} f(\zeta)\, d\zeta \Rightarrow \frac{F(u)-F(v)}{u-v} - f(u) = -\frac{1}{u-v}\int_{[u,v]} f(\zeta)\, d\zeta - f(u) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{F(u)-F(v)}{u-v} - f(u) = -\frac{1}{u-v}\int_{[u,v]} f(\zeta) - f(z)\, d\zeta \Rightarrow \frac{F(v)-F(u)}{v-u} - f(u) = \frac{1}{v-u}\int_{[u,v]} f(\zeta) - f(z)\, d\zeta$$

Με αυτά λοιπόν έχουμε ότι, καθώς το v προσεγγίζει απ' οποιαδήποτε κατεύθυνση και με οποιονδήποτε τρόπο το u:

$$\begin{aligned}\left|\frac{F(v)-F(u)}{v-u} - f(u)\right| &= \left|\frac{1}{v-u}\int_{[u,v]} f(\zeta) - f(z)\, d\zeta\right| \\ &\leq \frac{1}{|v-u|} \cdot \sup_{\zeta\in[u,v]} |f(\zeta) - f(u)| \cdot \ell([u,v]) \\ &= \sup_{\zeta\in[u,v]} |f(\zeta) - f(u)| \xrightarrow{v\to u} 0\end{aligned}$$

Η f λοιπόν έχει σε κάθε σημείο u παράγουσα, αφού:

$$\forall u \in \Omega,\ \exists F : \Omega \to \mathbb{C} : \lim_{v\to u} \frac{F(v)-F(u)}{v-u} - f(u) = 0$$

Παρατήρηση 4.5 – Θεώρημα του Morera. Η απόδειξη του **Θεωρήματος 4.8** μπορεί να εφαρμοστεί με ασθενέστερες υποθέσεις. Συγκεκριμένα, μπορούμε να δείξουμε με την ίδια απόδειξη ότι εάν Ω είναι ένα ανοικτό σύνολο, $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ και για κάθε τρίγωνο $T \subset \Omega$, $\int_T f(\zeta)\, d\zeta = 0$, τότε η f έχει παράγουσα στο Ω.

Παρατήρηση 4.6 Ουσιαστικά στην απόδειξη της **Παρατήρησης 4.5 - Θεώρημα του Morera** δεν δημιουργείται κανένα πρόβλημα εάν δεν ισχύει κατ' ανάγκη $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, αλλά ασθενέστερα, για πεπερασμένη οικογένεια σημείων $\big(\omega_k\big)_{k\in[n]}$, ισχύει $f \in \mathcal{O}\big(\Omega - \bigcup_{k\in[n]}\{\omega_k\}\big)$ και $f \in C(\Omega)$. Και πάλι κανείς (υπό τις ασθενέστερες υποθέσεις) μπορεί να δείξει ότι η f έχει παράγουσα στο Ω.

Θεώρημα 4.9 Έστω Ω ένα ανοικτό και κυρτό σύνολο, $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ και $\tilde{\gamma}$ μία κλειστή καμπύλη στο Ω. Τότε:

$$\int_{\tilde{\gamma}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = 2\pi i \cdot f(z) \cdot \delta_{\tilde{\gamma}}(z), \text{ για κάθε } z \in \Omega - \tilde{\gamma}$$

Απόδειξη: Έστω $z \in \Omega$. Θεωρούμε συνάρτηση:

$$g(\zeta) = \begin{cases} \dfrac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta - z}, \ \zeta \in \Omega - \{z\} \\ f'(z),\ \zeta = z \end{cases}$$

Η g είναι ολόμορφη συνάρτηση στο Ω, αφού για $\zeta \neq z$ ο κλάδος $\dfrac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta - z}$ είναι ολόμορφη συνάρτηση του ζ, και σε περιοχές κοντινές του z η f είναι C^∞. Από το **Θεώρημα 4.8** λοιπόν, υπάρχει παράγουσα συνάρτηση G της g. Σε συνδυασμό με το γεγονός ότι η καμπύλη $\tilde{\gamma}$ είναι κλειστή:

$$\int_{\tilde{\gamma}} g(\zeta)\, d\zeta = 0 \Rightarrow \int_{\tilde{\gamma}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \int_{\tilde{\gamma}} \frac{f(z)}{\zeta - z}\, d\zeta = f(z)\int_{\tilde{\gamma}} \frac{1}{\zeta - z}\, d\zeta = 2\pi i \cdot f(z) \cdot \delta_{\tilde{\gamma}}(z)$$

Έτσι το θεώρημα αποδεικνύεται.

Παρατήρηση 4.7 Στην προηγούμενη απόδειξη, αντί του **Θεωρήματος 4.8** θα μπορούσε να είχε γίνει χρήση της **Παρατήρησης 4.6**. Κατ' επέκταση, θα μπορούσε να είχε δειχθεί ότι η ίδια σχέση ισχύει για Ω ανοικτό και κυρτό σύνολο, $\big(\omega_k\big)_{k\in[n]}$ πεπερασμένη οικογένεια σημείων του $\Omega - \tilde{\gamma}$ και $f \in \mathcal{O}\big(\Omega - \bigcup_{k\in[n]}\{\omega_k\}\big)$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Ιδιαιτερότητες των ακεραίων συναρτήσεων

Ορισμός 5.1 – Ακεραίες συναρτήσεις. Έστω $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ μία μιγαδική συνάρτηση. Η f θα καλείται ακεραία συνάρτηση εάν $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$.

Θεώρημα 5.1 – Γενίκευση του θεωρήματος του Liouville. Έστω $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ μία ακεραία συνάρτηση τέτοια ώστε:

$$\forall z \in \mathbb{C} : |f(z)| \leq A + B|z|^m, \text{ για κάποια } A, B > 0 \text{ και } m \in \mathbb{N}_0$$

Τότε η f είναι πολυώνυμο βαθμού το πολύ m.

Απόδειξη: Εφόσον η f είναι ολόμορφη στο ανοικτό σύνολο $\mathbb{C}$, υπάρχει ανάλυσή της σε δυναμοσειρά:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$$

Μάλιστα, από την απόδειξη του **Θεωρήματος 4.7 - Συσχέτιση αναλυτικών και ολομόρφων συναρτήσεων**, οι συντελεστές c_k παίρνουν τη μορφή:

$$c_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S(a,r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{k+1}}\, d\zeta \Rightarrow |c_k| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\sup_{\zeta \in \partial S(0,r)} |f(\zeta)|}{r^{k+1}} \cdot \ell(\partial S(0,r)) \leq \frac{A + Br^m}{r^k}$$

Αφήνοντας $r \to \infty$, οι δίσκοι $S(0,r)$ προσεγγίζουν όλο το μιγαδικό επίπεδο και οι συντελεστές c_k προσεγγίζουν το 0, για κάθε $k \geq m+1$. Η f λοιπόν είναι πολυώνυμο το πολύ βαθμού m, αφού γράφεται στη μορφή:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{m} c_k z^k$$

Παρατήρηση 5.1 Το προηγούμενο θεώρημα αποτελεί γενίκευση του **Λήμματος 4.2 - Θεώρημα του Liouville**, αφού για $m = 0$ η f φράσσεται από σταθερό πολυώνυμο.

Παρατήρηση 5.2 Έστω $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ μία ακεραία συνάρτηση τέτοια ώστε:

$$\forall z \in \mathbb{C} : |f(z)| \leq B|z|^m, \text{ για κάποια } B > 0 \text{ και } m \in \mathbb{N}_0$$

Από το **Θεώρημα 5.1 - Γενίκευση του θεωρήματος του Liouville** εξασφαλίζεται ότι η f είναι πολυώνυμο βαθμού το πολύ m, αφού $|f(z)| \leq 1 + B|z|^m$. Θα δείξουμε σε αυτήν την ειδική περίπτωση ότι η f είναι είτε μηδενική, είτε μονώνυμο βαθμού m.

Απόδειξη: Έστω $f(z) = \sum_{k=0}^{m} c_k z^k$ η αναγραφή της f ως πολυώνυμο. Από την υπόθεση ισχύει ότι:

$$\Big| \sum_{k=0}^{m} c_k z^k \Big| \leq B|z|^m$$

επομένως αν αφεθεί $z \to 0$, θα έχουμε ότι $|c_0| \leq 0 \Rightarrow c_0 = 0$. Εφόσον $c_0 = 0$, έπεται η ακόλουθη ανισότητα:

$$\Big| \sum_{k=1}^{m} c_k z^k \Big| \leq B|z|^m \Rightarrow \Big| \sum_{k-1=0}^{m-1} c_k z^k \Big| \leq B|z|^{m-1},\ z \neq 0$$

Αφήνοντας και πάλι $z \to 0$, έπεται ότι $|c_1| \leq 0 \Rightarrow c_1 = 0$. Συνεχίζουμε επαγωγικά την διαδικασία έως το $m-1$, κι αποδεικνύουμε ότι $c_k = 0$ για κάθε $k \leq m-1$. Το ίδιο το c_m δεν εξασφαλίζεται ότι είναι 0, αφού η ανίστοιχη ανισότητα γι' αυτό (μέσω της επαγωγικής διαδικασίας) είναι η $|c_m| \leq B$.

Έτσι λοιπόν, η f είναι είτε μηδενική (εάν $c_m = 0$), είτε μονώνυμο βαθμού m (εάν $c_m \neq 0$).

■**Πρόταση 5.1** Το **Θεώρημα 5.1 - Γενίκευση του θεωρήματος του Liouville** καθώς και η **Παρατηρήση 5.2** μπορούν να γενικευτούν σε παριπτώσεις όπου $m \geq 0$ και όχι κατ' ανάγκη ακέραιος. Μάλιστα, οι αποδείξεις εφαρμόζουν σχεδόν απαράλακτες.

- Αναδιατύπωση του **Θεωρήματος 5.1 - Γενίκευση του θεωρήματος του Liouville**: Έστω $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ μία ακεραία συνάρτηση τέτοια ώστε:

$$\forall z \in \mathbb{C} : |f(z)| \leq A + B|z|^m, \text{ για κάποια } A, B > 0 \text{ και } m \geq 0$$

  Τότε η f είναι πολυώνυμο βαθμού το πολύ $\lfloor m \rfloor$.

- Αναδιατύπωση της **Πρότασης 5.2**: Έστω $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ μία ακεραία συνάρτηση τέτοια ώστε:

$$\forall z \in \mathbb{C} : |f(z)| \leq B|z|^m, \text{ για κάποια } B > 0 \text{ και } m \geq 0$$

  Από τη γενίκευση του **Θεωρήματος 5.1 - Γενίκευση του θεωρήματος του Liouville** εξασφαλίζεται ότι η f είναι πολυώνυμο βαθμού το πολύ $\lfloor m \rfloor$, αφού $|f(z)| \leq 1 + B|z|^m$. Σε αυτήν την ειδική περίπτωση, η f είναι είτε μηδενική, είτε μονώνυμο βαθμού $\lfloor m \rfloor$.

■

Άσκηση: Αποδείξτε την προαναφερθείσα πρόταση.

Παρατήρηση 5.3 Έστω f μία ακεραία συνάρτηση τέτοια ώστε $\Re f \geq 0$. Η f είναι σταθερή συνάρτηση.

Απόδειξη: Θεωρούμε $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ τη συνάρτηση με τύπο:

$$g(z) = \exp\big(-f(z)\big) = e^{-\Re f(z)}\big(\cos\big(-\Im f(z)\big) + i \cdot \sin\big(-\Im f(z)\big)\big)$$

Η g είναι ολόμορφη συνάρτηση (άρα και ακεραία), κι επιπλέον:

$$|g(z)| = \left|e^{-\Re f(z)}\big(\cos\big(-\Im f(z)\big) + i \cdot \sin\big(-\Im f(z)\big)\big)\right| = \left|e^{-\Re f(z)}\right| = e^{-\Re f(z)} \leq 1$$

Από το **Λήμμα 4.2 - Θεώρημα του Liouville**, η g είναι σταθερή συνάρτηση. Κατ' επέκταση, η f είναι σταθερή συνάρτηση.

Παρατήρηση 5.4 Έστω $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ μια ακεραία συνάρτηση τέτοια ώστε $f(\mathbb{C}) \subseteq \mathbb{C} - \underrightarrow{Ox'}$. Η f είναι σταθερή συνάρτηση.

Απόδειξη: Για κάθε $w = r\exp(i\theta) \in \mathbb{C} - \underrightarrow{Ox'}$, παρατηρούμε ότι η ρίζα $\sqrt{w} = \sqrt{r\exp(i\theta)} = \sqrt{r} \cdot \exp(i\theta/2)$ ανήκει στο δεξιό ημιεπίπεδο $\{z \mid \Re(z) \geq 0\}$, αφού:

$$-\pi < \theta = \arg(w) \leq \pi \Rightarrow -\pi/2 < \theta/2 = \arg(w)/2 \leq \pi/2$$

Κατ' επέκταση, $\Re(w) \geq 0$. Εάν λοιπόν $w = f(z)$, η σύνθεση $\sqrt{f(z)}$ ορίζει $\Re\sqrt{f(z)} \geq 0$. Από την **Παρατήρηση 5.3** έπεται ότι η συνάρτηση $\sqrt{f}$ είναι σταθερή, άρα και η f είναι σταθερή.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

Ανωμαλίες και ρίζες

6.1 Γενικά

Ορισμός 6.1 – Μεμονωμένες ανωμαλίες. Έστω $f : A \to \mathbb{C}$, $A \subseteq \mathbb{C}$, τέτοια ώστε $f \in \mathcal{O}\big(S(a,r) - \{a\}\big)$ για κάποιο $a \in A$. Κάθε τέτοιο σημείο a θα καλείται σημείο μεμονωμένης ανωμαλίας της συνάρτησης f.

Ορισμός 6.2 – Επουσιώδεις ανωμαλίες, πόλοι και ουσιώδεις ανωμαλίες. Έστω $f : A \to \mathbb{C}$, $A \subseteq \mathbb{C}$ και a ένα σημείο μεμονωμένης ανωμαλίας της.

I. *Επουσιώδης ανωμαλία*: Το a θα καλείται σημείο επουσιώδους ανωμαλίας της $f \in \mathcal{O}\big(S(a,r) - \{a\}\big)$ εάν υπάρχει $\zeta_a \in \mathbb{C}$ τέτοιος ώστε η:

$$\bar{f}(z) = \begin{cases} f(z), \text{ εάν } z \in S(a,r) - \{a\} \\ \zeta_a, \text{ εάν } z = a \end{cases}$$

να αποτελεί ολόμορφη επέκταση της f στο $S(a,r)$ (δηλαδή $\bar{f} \in \mathcal{O}\big(S(a,r)\big)$).

II. *Πόλος:* Εάν για την f ισχύει:

$$\lim_{z \to a} f(z) = \infty$$

τότε καλούμε το a πόλο της f.

III. *Ουσιώδης ανωμαλία:* Εάν η f στο a δεν παρουσιάζει ούτε επουσιώδη ανωμαλία ούτε πόλο, θα λέμε ότι το a είναι σημείο ουσιώδους ανωμαλίας.

Θεώρημα 6.1 – Χαρακτηρισμός των πόλων. Μια συνάρτηση $f \in \mathcal{O}\big(S(a,r) - \{a\}\big)$ έχει πόλο στο a εάν και μόνο αν υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ και $g \in \mathcal{O}\big(S(a,r)\big),\ g(a) \neq 0$ τέτοια ώστε:

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^m}$$

Απόδειξη: ($\Rightarrow$): Επιλέγουμε $\delta > 0$ τέτοιο ώστε η συνάρτηση f στο $S(a,\delta) - \{a\}$ να μην μηδενίζεται και ορίζουμε:

$$h(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{f(z)},\ z \in S(a,\delta) - \{a\} \\ 0,\ z = a \end{cases}$$

Η h είναι συνεχής στο a, αφού $\lim_{z \to a} h(z) = 0 = h(a)$. Επιπλέον, επειδή $f \in \mathcal{O}\big(S(a,r) - \{a\}\big)$ η h είναι επίσης ολόμορφη στο $S(a,\delta) - \{a\}$. Η **Παρατήρηση 4.6** λοιπόν εφαρμόζει κι άρα η h έχει παράγουσα H στο $S(a,\delta)$, η οποία ως ολόμορφη είναι αναλυτική κι επομένως απείρως παραγωγίσιμη. Αυτό ουσιαστικά μας δείχνει ότι η h είναι ολόμορφη στο $S(a,\delta)$ κι άρα αναλυτική, οπότε κατ' επέκταση μπορεί να γραφεί στο $S(a,r)$ ως:

$$h(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-a)^k$$

Επειδή όμως το $z - a$ διαιρεί το h (διότι $h(a) = 0$):

$$\exists m \in \mathbb{N} :\ h(z) = (z-a)^m \sum_{k=m}^{\infty} c_k (z-a)^{k-m}$$

Η συνάρτηση $l(z) = \sum_{k=m}^{\infty} c_k (z-a)^{k-m}$ είναι αναλυτική στο $S(a,\delta)$, άρα και ολόμορφη σε αυτό. Κατ' επέκταση, η $\dfrac{1}{l}$ είναι ολόμορφη στο $S(a,\delta)$.

Ορίζουμε τώρα:

$$g(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{l(z)}, \ z \in S(a,\delta) \\ f(z)(z-a)^m, \ z \in S(a,r) - S(a,\delta) \end{cases}$$

και παρατηρούμε ότι αυτή είναι ολόμορφη στο $S(a,r)$. Επιπλέον, εξ' ορισμού της g, θα πρέπει $g(a) \neq 0$ και:

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^m}$$

($\Leftarrow$) Η αντίστροφη κατεύθυνση είναι σχετικά άμεση.

Ορισμός 6.3 – Τάξη πόλου. Έστω $f \in \mathcal{O}\big(S(a,r) - \{a\}\big)$ η οποία στο a εμφανίζει πόλο. Ο μοναδικός φυσικός m που εξασφαλίζεται από το **Θεώρημα 6.1 - Χαρακτηρισμός των πόλων** ονομαζεται τάξη του πόλου.

Θεώρημα 6.2 – Του Riemann, των επουσιωδών ανωμαλιών. Έστω $f \in \mathcal{O}\big(S(a,r) - \{a\}\big)$ η οποία είναι φραγμένη σε περιοχή του a. Τότε το a αποτελεί σημείο επουσιώδους ανωμαλίας της συνάρτησης f.

Απόδειξη: Υποθέτουμε ότι σε περιοχή κοντινή του a η f φράσσεται από το M και θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$\varphi(z) = \begin{cases} (z-a)f(z), \ \text{εάν } z \in S(a,r) - \{a\} \\ 0, \ \text{εάν } z = a \end{cases}$$

Η φ είναι συνεχής στο a, αφού για z σε περιοχή του a, $|\varphi(z)| = |(z-a)f(z)| \leq M \cdot |z-a| \to 0 = \varphi(a)$.

Επιπλέον, η φ ολόμορφη στο $S(a,r) - \{a\}$, επομένως η **Παρατήρηση 4.6** εφαρμόζει. Άρα η φ έχει παράγουσα Φ στο $S(a,r)$, η οποία ως ολόμορφη είναι αναλυτική, κι επομένως απείρως παραγωγίσιμη. Αυτό ουσιαστικά μας δείχνει ότι η φ είναι ολόμορφη στο $S(a,r)$ κι άρα αναλυτική. Κατ' επέκταση, μπορεί να γραφεί στο $S(a,r)$ ως:

$$\varphi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-a)^k$$

Επειδή όμως το $z-a$ διαιρεί το φ (διότι $\varphi(a) = 0$):

$$\exists m \in \mathbb{N}: \ \varphi(z) = (z-a)^m \sum_{k=m}^{\infty} c_k (z-a)^{k-m}$$

Τελικά λοιπόν, για $z \in S(a,r) - \{a\}$ έχουμε:

$$\varphi(z) = (z-a)^m \sum_{k=m}^{\infty} c_k (z-a)^{k-m} = (z-a)f(z) \Rightarrow f(z) = (z-a)^{m-1} \sum_{k=m}^{\infty} c_k (z-a)^{k-m}$$

Η συνάρτηση $(z-a)^{m-1} \sum_{k=m}^{\infty} c_k (z-a)^{k-m}$ ορίζεται στο $S(a,r) - \{a\}$, έχει όμως ολόμορφη επέκταση στο $S(a,r)$. Αυτό αποδεικνύει το ζητούμενο.

Παρατήρηση 6.1 Έστω $f \in \mathcal{O}\big(S(a,r) - \{a\}\big)$, η οποία στο σημείο μεμονωμένης ανωμαλίας a έχει πόλο (κάποιας τάξης). Τότε η συνάρτηση $\dfrac{1}{f}$ έχει επουσιώδη ανωμαλία στο a.

Απόδειξη: Κατ' αρχάς η $\dfrac{1}{f(z)}$ είναι ολόμορφη συνάρτηση στο $S(a,r) - \{a\}$. Εφόσον η f έχει πόλο στο a, τότε $\lim_{z \to a} \dfrac{1}{f(z)} = 0$. Κατ' επέκταση, η $\dfrac{1}{f}$ είναι φραγμένη σε περιοχή κοντινή του a. Από το **Θεώρημα 6.2 - Του Riemann, των επουσιωδών ανωμαλιών** έπεται ότι η $\dfrac{1}{f}$ έχει επουσιώδη ανωμαλία στο a.

Θεώρημα 6.3 – Του Casorati. Έστω $f \in \mathcal{O}\big(S(a,r) - \{a\}\big)$, η οποία εμφανίζει στο a ουσιώδη ανωμαλία. Τότε για κάθε $r \geq \varepsilon > 0$, το $f\big(S(a,\varepsilon) - \{a\}\big)$ είναι πυκνό στο $\mathbb{C}$.

Απόδειξη: Έστω $r \geq \varepsilon > 0$. Προς άτοπο υποθέτουμε ότι υπάρχει δίσκος $S(w,\delta)$ τέτοιος ώστε $S(w,\delta) \cap f\big(S(a,\varepsilon) - \{a\}\big) = \emptyset$ και θα καταλήξουμε σε άτοπο.

Εφόσον $S(w,\delta) \cap f\big(S(a,r) - \{a\}\big) = \emptyset$, για κάθε $z \in S(a,\varepsilon) - \{a\}$ θα ισχύει $|f(z) - w| \geq \delta \Rightarrow \dfrac{1}{|f(z) - w|} \leq \dfrac{1}{\delta}$.

Επομένως, από το **Θεώρημα 6.2 - Του Riemann, των επουσιωδών ανωμαλιων**, η $\dfrac{1}{f(z)-w}$ έχει επουσιώδη ανωμαλία στο a. Υπάρχει λοιπόν (ολόμορφη) επέκταση του πηλίκου και κατ' επέκταση το όριο $L = \lim_{z\to a} \dfrac{1}{f(z)-w}$ υπάρχει.

Έστω λοιπόν $L = 0$. Τότε:

$$\lim_{z\to a} \frac{1}{f(z)-w} = 0 \Rightarrow \lim_{z\to a} f(z) = \infty$$

το οποίο είναι άτοπο, αφού η ανωμαλία στο a είναι ουσιώδης κι όχι πόλος.

Εάν διαφορετικά $L \neq 0$, τότε:

$$\lim_{z\to a} \frac{1}{f(z)-w} = L \Rightarrow \lim_{z\to a} f(z) = w + \frac{1}{L}$$

το οποίο είναι άτοπο, αφού η ανωμαλία στο a είναι ουσιώδης κι όχι επουσιώδης.

■**Πρόταση 6.1** Έστω $f, g \in \mathcal{O}\big(S(a,r)\big)$ δύο συναρτήσεις με $f(a) = g(a) = 0$ και πολλαπλότητα στο a τάξεως m και n αντίστοιχα.

- Εάν $m \geq n$, η $\dfrac{f}{g}$ εμφανίζει στο a επουσιώδη ανωμαλία.
- Εάν $m < n$, η $\dfrac{f}{g}$ έχει πόλο στο a τάξεως $n-m$.

Απόδειξη: Πράγματι, αμφότερες οι συναρτήσεις είναι ολόμορφες, οπότε και αναλυτικές στο $S(a,r)$. Επομένως, αντίστοιχα για την πρώτη και δεύτερη περίπτωση, έχουμε:

$$\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{(z-a)^m \sum_{k=m}^{\infty} c_k (z-a)^{k-m}}{(z-a)^n \sum_{k=n}^{\infty} v_k (z-a)^{k-n}} = (z-a)^{m-n} \cdot \frac{\sum_{k=m}^{\infty} c_k (z-a)^{k-m}}{\sum_{k=n}^{\infty} v_k (z-a)^{k-n}} \text{ με } m \geq n$$

και:

$$\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{(z-a)^m \sum_{k=m}^{\infty} c_k (z-a)^{k-m}}{(z-a)^n \sum_{k=n}^{\infty} v_k (z-a)^{k-n}} = \frac{1}{(z-a)^{n-m}} \cdot \frac{\sum_{k=m}^{\infty} c_k (z-a)^{k-m}}{\sum_{k=n}^{\infty} v_k (z-a)^{k-n}} \text{ με } m < n$$

Και στις δύο περιπτώσεις η ποσότητα $T(z) = \dfrac{\sum_{k=m}^{\infty} c_k (z-a)^{k-m}}{\sum_{k=n}^{\infty} v_k (z-a)^{k-n}}$ μπορεί να οριστεί σε ολόκληρο τον δίσκο $S(a,r)$ και μάλιστα αποτελεί σε αυτόν ολόμορφη συνάρτηση. Επιπλέον, $T(a) \neq 0$.

Για την πρώτη περίπτωση, οι $(z-a)^{m-n}$ και $T(z)$ ορίζονται στο $S(a,r)$ και μάλιστα αποτελούν σε αυτό ολόμορφες συναρτήσεις. Το γινόμενο λοιπόν $(z-a)^{m-n}T(z)$ είναι ολόμορφη στο $S(a,r)$ και μάλιστα:

$$\forall z \in S(a,r) - \{a\}, \ \frac{f(z)}{g(z)} = (z-a)^{m-n}T(z)$$

Άρα, η $(z-a)^{m-n}T(z)$ αποτελεί ολόμορφη επέκταση της $\dfrac{f}{g}$ στο $S(a,r)$. Κατ' επέκταση, το μεμονωμένο σημείο a αποτελεί σημείο επουσιώδους ανωμαλίας της $\dfrac{f}{g}$.

Για τη δεύτερη περίπτωση, η $\dfrac{f}{g}$ στο $S(a,r) - \{a\}$ παίρνει τη μορφή:

$$\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{T(z)}{(z-a)^{n-m}}$$

με την $T(z)$ να αποτελεί ολόμορφη συνάρτηση στο $S(a,r)$ και επιπλέον $T(a) \neq 0$. Από το **Θεώρημα 6.1 - Χαρακτηρισμός των πόλων**, η $\dfrac{f}{g}$ έχει στο a πόλο τάξεως $n-m$. ■

6.2 Αναπτύγματα Laurent

Με το **Θεώρημα 4.7 - Συσχέτιση αναλυτικών και ολόμορφων συναρτήσεων** δείξαμε ότι κάθε ολόμορφη συνάρτηση f σε ανοικτό σύνολο Ω είναι δυνατόν να αναλυθεί σε δυναμοσειρά σε κάθε δίσκο του Ω. Το αποτέλεσμα αυτό, παρά την χρησιμότητά του σε προαναφερθήσες αποδείξεις, έχει κάποια σημεία που χρήζουν προσοχής. Ιδιαίτερα, δεν υπάρχει (εν γένει) ενιαία ανάλυση σε δυναμοσειρά σε όλο το ανοικτό σύνολο Ω, παρά μόνο στους δίσκους του. Για παράδειγμα, εάν υποθέσουμε ότι μια τυχούσα συνάρτηση f είναι ολόμορφη σε έναν δίσκο $S(a,r)$, εκεί σίγουρα αναλύεται σε δυναμοσειρά. Εάν διαφορετικά η f ήταν ολόμορφη σε έναν 'τρύπιο' δίσκο $S(a,r)-\{a\}$, δεν εξασφαλίζεται η ενιαία αναγραφή της f ως δυναμοσειρά - ακόμη λοιπόν και η αφαίρεση ενός σημείου δημιουργεί προβλήματα. Σκοπός των αναπτυγμάτων Laurent είναι να δωθεί ενιαίο ανάπτυγμα (όχι κατ' ανάγκη σε δυναμοσειρά, αλλά σε κάτι που μοιάζει με δυναμοσειρά) για περισσότερες περιπτώσεις ανοικτών συνόλων Ω.

Ορισμός 6.4 – Αναπτύγματα Laurent. Ως ανάπτυγμα Laurent ορίζουμε κάθε άθροισμα (άπειρο ή μη) ρητών πολυωνύμων του $\mathbb{C}(z)$, της μορφής:

$$L(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(z-a)^k=\Big[\sum_{k=-\infty}^{-1} c_k\frac{1}{(z-a)^{-k}}\Big]+\Big[\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-a)^k\Big]$$

[*Υπενθύμιση:* Το σύνολο $\mathbb{F}(z)$ είναι το σύνολο όλων των συναρτήσεων ${}^{P}\!/_{Q}$, όπου P και Q είναι δύο πολυώνυμα του z με συντελεστές από το $\mathbb{F}$].

Ορισμός 6.5 – Κύριο μέρος ενός αναπτύγματος Laurent. Το τμήμα $\sum_{k=-\infty}^{-1} c_k(z-a)^k$ μιας σειράς Laurent:

$$L(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(z-a)^k=\Big[\sum_{k=-\infty}^{-1} c_k\frac{1}{(z-a)^{-k}}\Big]+\Big[\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-a)^k\Big]$$

ονομάζεται κύριο μέρος της L και συμβολίζεται με $K_a^L(z)$. Ουσιαστικά το κύριο μέρος του αναπτύγματος είναι αυτό που διαφοροποιεί το ανάπτυγμα Laurent από μια δυναμοσειρά.

Παρατήρηση 6.2 Έστω $f\in\mathcal{O}\big(S(a,r)-\{a\}\big)$ η οποία στο a εμφανίζει πόλο. Η f στον 'τρύπιο' δίσκο $S(a,r)-\{a\}$ έχει ένα ανάπτυγμα Laurent (υπάρχει δηλαδή ένα ανάπτυγμα Laurent στο $S(a,r)-\{a\}$ με το οποίο η f ισούται).

Απόδειξη: Από το **Θεώρημα 6.1 - Χαρακτηρισμός των πόλων** υπάρχει ολόμορφη $g\in\mathcal{O}\big(S(a,r)-\{a\}\big)$, $g(a)\neq 0$ και $m\in\mathbb{N}$ τέτοια ώστε:

$$f(z)=\frac{g(z)}{(z-a)^m}$$

Η g ως ολόμορφη στο $S(a,r)$ είναι αναλυτική, επομένως:

$$f(z)=\frac{\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-a)^k}{(z-a)^m}=\Big[\sum_{k=0}^{m-1} c_k(z-a)^{k-m}\Big]+\Big[\sum_{k=m}^{\infty} c_k(z-a)^{k-m}\Big]$$

Το τελευταίο είναι ανάπτυγμα Laurent, οπότε το ζητούμενο αποδεικνύεται.

Θεώρημα 6.4 Έστω $f:\Omega\to\mathbb{C}$ μια συνάρτηση η οποία έχει ανάπτυγμα Laurent:

$$f(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(z-a)^k$$

σε ένα ανοικτό σύνολο $\Omega\supset S(a,r)-\{a\}$. Τότε:

$$\int_{\partial S(a,r)} f(z)\,dz=2\pi i c_{-1}$$

Απόδειξη: Παρατηρούμε ότι το μέρος $\sum_{k\neq -1} c_k(z-a)^k$ του αναπτύγματος Laurent έχει παράγουσα συνάρτηση, αφού καθένας από τους όρους του αθροίσματος έχει παράγουσα συνάρτηση. Επομένως:

$$\int_{\partial S(a,r)} f(z)\,dz=\int_{\partial S(a,r)}\sum_{k\neq -1} c_k(z-a)^k\,dz+\int_{\partial S(a,r)} c_{-1}\frac{1}{z-a}\,dz=\int_{\partial S(a,r)} c_{-1}\frac{1}{z-a}\,dz$$

Τελικά λοιπόν έχουμε:

$$\int_{\partial S(a,r)} f(z)\, dz = \int_{\partial S(a,r)} c_{-1} \frac{1}{z-a}\, dz = 2\pi i c_{-1}$$

το οποίο είναι το ζητούμενο αποτέλεσμα (ουσιαστικά εφαρμόζουμε το **Θεώρημα 4.6 - Ο τύπος του Cauchy** στον 'τρύπιο' δίσκο $S(a,r) - \{a\}$).

Ορισμός 6.6 – Ολοκληρωτικό υπόλοιπο. Έστω $f : A \to \mathbb{C},\ A \subseteq \mathbb{C}$ μια συνάρτηση η οποία αναλύεται σε ανάπτυγμα Laurent.

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z-a)^k$$

Η ποσότητα c_{-1} καλείται ολοκληρωτικό υπόλοιπο της f περί του a και συμβολίζεται με:

$$c_{-1} =: \mathrm{Res}(f,a)$$

Η ποσότητα $\mathrm{Res}(f,a)$ ορθά καλείται ολοκληρωτικό υπόλοιπο, αφού βάσει του **Θεωρήματος 6.4** είναι κατά μία έννοια αυτό που 'υπολείπεται' κατά την ολοκλήρωση σε κλειστή καμπύλη. Σε επόμενες προτάσεις θα αποδείξουμε παραλαγές του εν λόγω θεωρήματος, σε περιπτώσεις όπου η καμπύλη ολοκλήρωσης και το σύνολο στο οποίο υπάρχει ανάπτυγμα Laurent γίνονται περιπλοκότερα.

Θεώρημα 6.5 – Των ολοκληρωτικών υπολοίπων. Έστω Ω ένα ανοικτό και συνεκτικό σύνολο με σύνορο απλή καμπύλη και $(\omega_k)_{k\in[n]}$ μια πεπερασμένη οικογένεια σημείων του Ω. Εάν $f \in \mathcal{O}\big(\Omega - \bigcup_{k\in[n]}\{\omega_k\}\big)$ και στα σημεία μεμονωμένης ανωμαλίας ω_k η f έχει πόλους, τότε για κάθε κλειστή καμπύλη $\tilde{\gamma} \subseteq \Omega - \bigcup_{k\in[n]}\{\omega_k\}$ που περιέχει τα $\omega_k,\ k \in [n]$ στο εσωτερικό της:

$$\int_{\tilde{\gamma}} f(z)\, dz = 2\pi i \cdot \sum_{k\in[n]} \mathrm{Res}(f,\omega_k)\delta_{\tilde{\gamma}}(\omega_k)$$

Απόδειξη: Θα αποδείξουμε το εν λόγω θεώρημα με επαγωγή.

Για τη βάση της επαγωγής, ουσιαστικά χρειάζεται να αποδείξουμε μια γενίκευση του **Θεωρήματος 6.4**, στην περίπτωση όπου η καμπύλη ολοκλήρωσης είναι περιπλοκότερη. Ακολουθούμε τη διαδικασία της απόδειξης του **Θεωρήματος 6.4** έως το σημείο:

$$\int_{\tilde{\gamma}} f(z)\, dz = \int_{\tilde{\gamma}} c_{-1} \frac{1}{z-\omega}\, dz$$

Επειδή $\displaystyle\int_{\tilde{\gamma}} \frac{1}{z-\omega}\, dz = 2\pi i \delta_{\tilde{\gamma}}(\omega)$, έπεται η βάση της επαγωγής:

$$\int_{\tilde{\gamma}} f(z)\, dz = 2\pi i \cdot c_{-1}\delta_{\tilde{\gamma}}(\omega) = 2\pi i \cdot \mathrm{Res}(f,\omega)\delta_{\tilde{\gamma}}(\omega)$$

Υποθέτουμε ότι η υπόθεση ισχύει για τον φυσικό αριθμό n (το n αντιπροσωπεύει πλήθος μεμονωμένων ανωμαλιών) και θα δείξουμε ότι ισχύει και για το $n+1$.

Έστω $\tilde{\gamma}$ μια καμπύλη σε ανοικτό και συνεκτικό σύνολο Ω, η οποία δεν διέρχεται από τα σημεία μεμονωμένης ανωμαλίας $\omega_k,\ k \in [n+1]$. Χωρίζουμε το συνεκτικό σύνολο Ω σε δύο επιμέρους (ξένα) συνεκτικά σύνολα με τον εξής τρόπο: φέρουμε μια ευθεία ε που τέμνει το Ω, έτσι ώστε ένα σημείο ω_j να βρίσκεται στην μία 'πλευρά' της ευθείας, και τα υπόλοιπα $\omega_k,\ k \neq j$ από την άλλη. Αυστηρότερα, εάν $\mathcal{H}(\omega_j, \varepsilon)$ είναι το ημιεπίπεδο που ορίζεται από την ευθεία ε και το σημείο ω_j, ορίζουμε:

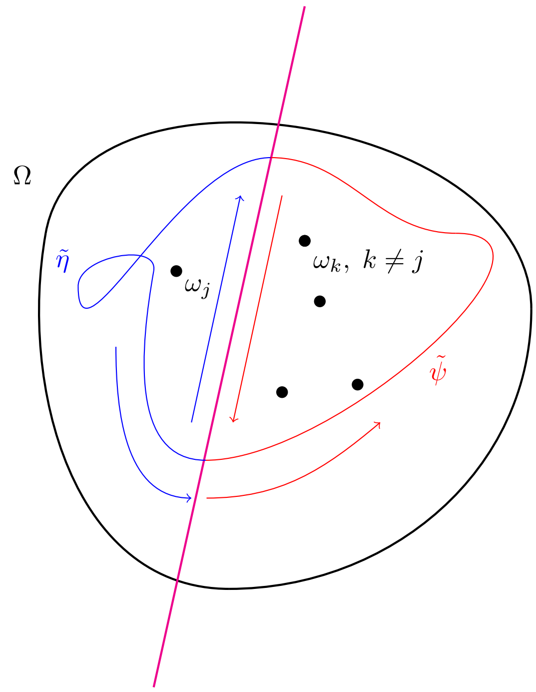
$$H = \mathcal{H}(\omega_j,\varepsilon) \cap \Omega \textbf{ και } \Psi = \Omega - H$$

όπου ω_j είναι, κατά μία έννοια, το 'απομεμονωμένο σημείο'. Παρατηρούμε ότι τα σύνολα H και Ψ είναι ξένα, συνεκτικά και μαζί συνιστούν το Ω.

● Πριν συνεχίσουμε στην απόδειξη, να σημειωθεί ότι μια τέτοια τομή του συνόλου Ω είναι διαισθητικά αναμενόμενη, δεν είναι όμως προφανής. Στο λήμμα, μετά την απόδειξη, θα δωθεί μια ιδέα για το πώς ένας τέτοιος ισχυρισμός μπορεί να αποδειχθεί.

Ορίζουμε επίσης δύο καμπύλες $\tilde{\eta}$ και $\tilde{\psi}$ ως εξής: η καμπύλη $\tilde{\eta}$ είναι το τμήμα της καμπύλης $\tilde{\gamma}$ το οποίο βρίσκεται στο H, μαζί με όσα τμήματα της ε χρειάζονται ώστε να γίνει κλειστή καμπύλη - φυσικά αναλόγως ορίζεται η καμπύλη

$\tilde{\psi}$ στο Ψ. Στο σημείο αυτό βέβαια χρειάζεται να οριστούν σωστά οι προσανατολισμοί αυτών των καμπυλών. Οι προσανατολισμοί των τμημάτων $\tilde{\eta} - \varepsilon, \tilde{\psi} - \varepsilon$ των καμπυλών $\tilde{\eta}$ και $\tilde{\psi}$ αντίστοιχα είναι τέτοιοι ώστε να συμφωνούν με τον προσανατολισμό της $\tilde{\gamma}$ - εξάλλου, τα τμήματα αυτά αποτελούν και τμήμα της καμπύλης $\tilde{\gamma}$. Στα τμήματα της ε των καπυλών $\tilde{\eta}$ και $\tilde{\gamma}$, ορίζουμε τον προσανατολισμό έτσι ώστε να είναι ομοιόμορφος παντού σε καθεμία καμπύλη (για παράδειγμα, παντού αριστερόστροφος) και παρατηρούμε ότι εάν ένα τμήμα της $\tilde{\eta}$ βρίσκεται στην ε, τότε το ίδιο τμήμα στην $\tilde{\psi}$ έχει αντίθετο προσανατολισμό (αυτό θα χρειαστεί κατά την ολοκλήρωση). Σχηματικά δηλαδή, έχουμε περιπτώσεις της μορφής:



Επειδή τα σύνολα H και Ψ είναι συνεκτικά και περιέχουν 1 ή n σημεία μεμονωμένης ανωμαλίας στα οποία η f έχει πόλο, αντίστοιχα από τη βάση της επαγωγής και την επαγωγική υπόθεση, το θεώρημα ισχύει για τα σύνολα H και Ψ. Επομένως:

$$\int_{\tilde{\eta}} f(z)\, dz = 2\pi i \cdot \mathrm{Res}(f, \omega_j)\delta_{\tilde{\eta}}(\omega_j) \textbf{ και } \int_{\tilde{\psi}} f(z)\, dz = 2\pi i \cdot \sum_{k\in[n+1]-\{j\}} \mathrm{Res}(f, \omega_k)\delta_{\tilde{\psi}}(\omega_k)$$

Το ζητούμενο λοιπόν έπεται, αφού $\delta_{\tilde{\eta}}(\omega_j) = \delta_{\tilde{\gamma}}(\omega_j),\ \delta_{\tilde{\psi}}(\omega_k) = \delta_{\tilde{\gamma}}(\omega_k)$ κι επιπλέον:

$$\int_{\tilde{\eta}} f(z)\, dz + \int_{\tilde{\psi}} f(z)\, dz = \int_{\tilde{\gamma}} f(z)\, dz$$

Άρα:

$$\int_{\tilde{\gamma}} f(z)\, dz = 2\pi i \cdot \sum_{k\in[n+1]} \mathrm{Res}(f, \omega_k)\delta_{\tilde{\gamma}}(\omega_k)$$

Το θεώρημα λοιπόν αποδεικνύεται με επαγωγή.

Λήμμα 6.1 Έστω Ω ένα συνεκτικό σύνολο με σύνορο απλή καμπύλη και $(\omega_k)_{k\in[n]}$ μια πεπερασμένη οικογένεια σημείων του. Υπάρχει ευθεία ε τέτοια ώστε να χωρίζει το Ω σε δύο συνεκτικά σύνολα H, Ψ τέτοια ώστε να έχουν σύνορο απλή καμπύλη, $H = \mathcal{H}(\omega_j, \varepsilon) \cap \Omega$ για κάποιο $j \in [n]$ και $\Psi = \Omega - H \supseteq \bigcup_{k\in[n]-\{j\}}\{\omega_k\}$. ■

Ιδέα της απόδειξης: Αρχικά ορίζουμε για κάθε $t \in [n]$ τις συναρτήσεις $S_t : \bigcup_{k\in[n]}\{\omega_k\} \to \mathbb{R},\ S_t(\omega_r) = |\omega_r - \omega_t|$ (οι συναρτήσεις S_t ουσιαστικά μετρούν την απόσταση του ω_t από τα υπόλοιπα σημεία ω_r).

Έπειτα επιλέγουμε το $t \in [n]$ αυτό για το οποίο η ποσότητα $\max\{S_t(\omega_r) \mid r \in [n]\}$ μεγιστοποιείται (ουσιαστικά επιλέγουμε το σημείο ω_t για το οποίο η μέγιστη απόσταση από τα υπόλοιπα σημεία ω_r μεγιστοποιείται).

Τέλος, επιλέγουμε t_1, t_2 τέτοια ώστε οι αποστάσεις $S_t(\omega_{t_1}),\ S_t(\omega_{t_2})$ να γίνονται 'ελάχιστες' με την εξής έννοια:

$$\forall r \in [n] - \{t_1, t_2\},\ S_t(\omega_{t_1}) \leq S_t(\omega_r) \textbf{ και } S_t(\omega_{t_2}) \leq S_t(\omega_r)$$

Ορίζουμε ε την ευθεία η οποία διέρχεται από τα μέσα μ_1, μ_2 των ευθυγράμμων τμημάτων $[\omega_t, \omega_{t_1}]$ και $[\omega_t, \omega_{t_2}]$, και παρατηρούμε ότι αυτή είναι η ζητούμενη ευθεία.

> **Παρατήρηση 6.3** Στην απόδειξη του **Θεωρήματος 6.5 - Των ολοκληρωτικών υπολοίπων** δεν αποδείξαμε (για χάρη απλούστευσης στην απόδειξη) ένα σημαντικό κομμάτι στη βάση της επαγωγής. Ειδικότερα, γιατί δεν βλάπτει να υποθέσουμε ότι η f έχει ανάπτυγμα Laurent στο Ω, όταν υπάρχει μοναδικό σημείο μεμονωμένης ανωμαλίας στο Ω. Αυτό να σημειώσουμε ότι εν γένει δεν ισχύει - δηλαδή δεν είναι εξασφαλισμένη η ύπαρξη ενός αναπτύγματος Laurent σε οποιοδήποτε ανοικτό σύνολο. Θα δείξουμε λοιπόν ότι στην περίπτωσή μας, είτε υπάρχει ενιαίο ανάπτυγμα Laurent είτε όχι, η απόδειξη δεν αλλάζει σημαντικά.

Ιδέα της απόδειξης: Έστω ω να είναι το σημείο μεμονωμένης ανωμαλίας. Το τρωτό σημείο βρίσκεται ουσιαστικά στην περίπτωση όπου δεν υπάρχει ενιαίο ανάπτυγμα Laurent στο Ω.

Βήμα I: Κατ' αρχάς παρατηρούμε ότι, είτε η καμπύλη $\tilde{\gamma}$ είναι απλή είτε όχι, η $\tilde{\gamma}$ διαμερίζεται σε τμήματά της τα οποίο είναι απλές καμπύλες, με ομοιόμορφο προσανατολισμό. Πράγματι, εάν η καμπύλη $\tilde{\gamma}$ ήταν αυτοτεμνόμενη σε μοναδικό σημείο $\gamma(s) = \gamma(s')$ (όπου γ είναι μια παραμέτριση), τότε θεωρούμε τις καμπύλες $\tilde{\gamma}' = \gamma([s, s'])$, $\left[\tilde{\gamma}^* = [\tilde{\gamma} - \gamma([s, s'])\right] \cup \{\gamma(s)\}$ και παρατηρούμε ότι αυτές είναι απλές. Μάλιστα ο προσανατολισμός τους είναι ομοιόμορφος. Η γενική περίπτωση γίνεται με επαγωγή.

Βήμα II: Παρατηρούμε ότι το τμήμα $\tilde{\gamma}^*$ μπορεί να επιλεγεί έτσι ώστε το ω να βρίσκεται στο εσωτερικό του.

Βήμα III: Σε κάθε κλειστή καμπύλη $\tilde{\eta}$ που είναι τμήμα της $\tilde{\gamma}$ και δεν περιέχει το σημείο ανωμαλίας ω στο εσωτερικό της, υπάρχει κοντινή περιοχή $\tilde{\eta} \subseteq \Omega^* \subseteq \Omega - \{\omega\}$, στην οποία η f είναι ολόμορφη. Κατ' επέκταση, η f έχει παράγουσα συνάρτηση (από το **Θεώρημα 4.8**) κι επομένως:

$$\int_{\tilde{\eta}} f(z)\, dz = 0$$

Βήμα IV: Από το προηγούμενο βήμα έπεται ότι:

$$\int_{\tilde{\gamma}} f(z)\, dz = \sum_{\tilde{\psi}} \sigma_{\tilde{\psi}} \int_{\tilde{\psi}} f(z)\, dz$$

όπου $\tilde{\psi}$ είναι τμήματα της $\tilde{\gamma}$, όπως το $\tilde{\gamma}^*$ - δηλαδή απλές, κλειστές καμπύλες, με ομοιόμορφο προσανατολισμό και με το ω στο εσωτερικό τους. Το $\sigma_{\tilde{\psi}} \in \{\pm 1\}$ εξαρτάται από τον προσανατολισμό της εκάστοτε καμπύλης.

Βήμα V: Θεωρούμε έναν αρκετά μικρό κύκλο $\partial S(\omega, r)$ τέτοιον ώστε ο δίσκος $S(\omega, r)$ να περιέχεται στο χωρίο που ορίζει μια τυχαία $\tilde{\psi}$ (η $\tilde{\psi}$ είναι όπως στο προηγούμενο βήμα). Επιπλέον, ορίζουμε τον προσανατολισμό του να είναι αντίστροφος από αυτόν της $\tilde{\psi}$. Από το **Θεώρημα 4.5 - Θεώρημα του Cauchy** στο χωρίο X που περικλείεται από την $\tilde{\psi}$ και την $\partial S(\omega, r)$:

$$\int_{\partial X} f(z)\, dz = 0 \Rightarrow \int_{\tilde{\psi}} f(z)\, dz = \int_{\partial S(\omega, r)} f(z)\, dz$$

Βήμα VI: Από τα **Βήματα IV** και **V** προκύπτει ότι:

$$\int_{\tilde{\gamma}} f(z)\, dz = \delta_{\tilde{\gamma}}(\omega) \cdot \int_{\partial S(\omega, r)} f(z)\, dz$$

Ο υπολογισμός λοιπόν του ολοκληρώματος στην $\tilde{\gamma}$ ανάγεται στον υπολογισμό του ολοκληρώματος στην $\partial S(\omega, r)$. Επειδή στο χωρίο $S(\omega, r) - \{\omega\}$ έχει εξασφαλιστεί η ύπαρξη αναπτύγματος Laurent (**Παρατήρηση 6.2**), αποδεικνύεται το ζητούμενο.

■**Πρόταση 6.2** Εάν η f είναι ολόμορφη σε ένα ανοικτό σύνολο Ω και ω είναι μια ρίζα πολλαπλότητας m, τότε η $\dfrac{f'}{f}$ εμφανίζει πόλο στο ω και $\operatorname{Res}\left(\dfrac{f'}{f}, \omega\right) = m$. ■

Απόδειξη: Εφόσον στο ω η f έχει ρίζα πολλαπλότητας m, υπάρχει ολόμορφη συνάρτηση φ τέτοια ώστε $\varphi \in \mathcal{O}(\Omega)$, $\varphi(\omega) \neq 0$ και $f(z) = (z - \omega)^m \varphi(z)$. Επομένως:

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m(z - \omega)^{m-1}\varphi(z) + (z - \omega)\varphi'(z)}{(z - \omega)^m \varphi(z)} = \frac{m}{z - \omega} + \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}, \text{ με } \frac{\varphi'}{\varphi} \in \mathcal{O}(\Omega)$$

Επειδή $\lim_{z \to \omega} \dfrac{f'(z)}{f(z)} = \lim_{z \to \omega} \left[\dfrac{m}{z - \omega} + \dfrac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}\right] = \infty$, η $\dfrac{f'}{f}$ εμφανίζει στο ω πόλο. Για να βρούμε το ολοκληρωτικό υπόλοιπο της $\dfrac{f'}{f}$ περιοριζόμαστε σε περιοχή του ω στην οποία η ύπαρξη αναπτύγματος Laurent είναι εξασφαλισμένη. Συγκεκριμένα, θεωρούμε έναν 'τρύπιο' δίσκο $S(\omega, r) - \{\omega\}$, για κατάλληλη ακτίνα r. Σύμφωνα με το **Θεώρημα 6.4** έχουμε ότι:

$$\operatorname{Res}\left(\frac{f'}{f}, \omega\right) = \int_{\partial S(\omega,r)} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = \int_{\partial S(\omega,r)} \frac{m}{z-\omega}\, dz + \int_{\partial S(\omega,r)} \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}\, dz = m \int_{\partial S(\omega,r)} \frac{1}{z-\omega}\, dz = m$$

Παρατήρηση 6.4 Έστω Ω ένα ανοικτό σύνολο, K ένα συνεκτικό υποσύνολό του με σύνορο απλή καμπύλη, και $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Εάν όλες οι ρίζες της f βρίσκονται εντός του K, το πλήθος ϖ των ριζών της f είναι ακριβώς:

$$\varpi = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz$$

Οι ρίζες δεν είναι κατ' ανάγκη διακεκριμένες, αλλά καθεμία προσμετράται τόσες φορές όσες η πολλαπλότητά της.

Απόδειξη: Έστω ότι στα σημεία $\omega_k \in K,\ k \in [n]$ η f έχει ρίζες πολλαπλότητας $m_k,\ k \in [n]$. Τότε η ποσότητα $\dfrac{f'}{f}$ αποτελεί ολόμορφη συνάρτηση στο $\Omega - \bigcup_{k\in[n]}\{\omega_k\}$ και μάλιστα στα ω_k εμφανίζει πόλους. Επιπλέον, $\operatorname{Res}\left(\dfrac{f'}{f}, \omega_k\right) = m_k$.

Από το **Θεώρημα 6.5 - Των ολοκληρωτικών υπολοίπων** έπεται ότι:

$$\int_{\partial K} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = 2\pi i \cdot \sum_{k\in[n]} \operatorname{Res}\left(\frac{f'}{f}, \omega_k\right) = 2\pi i \cdot \sum_{k\in[n]} m_k$$

Επειδή $\sum_{k\in[n]} m_k = \varpi$, έχουμε ότι:

$$\varpi = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz$$

Θεώρημα 6.6 – Του Rouché. Έστω $f, g \in \mathcal{O}\big(S(a, r+\delta r)\big),\ \delta r > 0$ τέτοιες ώστε:

$$|g(\zeta)| < |f(\zeta)| \text{ για κάθε } \zeta \in \partial S(a, r)$$

Τότε οι συναρτήσεις $f, f+g$ έχουν τον ίδιο αριθμό ριζών στον δίσκο $S(a, r)$ (μετρώντας φυσικά κάθε ρίζα τόσες φορές όσες η πολλαπλότητά της).

Απόδειξη: Η απόδειξη του συγκεκριμένου θεωρήματος θα γίνει σε βήματα.

Βήμα I: Για κάθε $t \in [0,1]$ ορίζουμε τη συνάρτηση:

$$\varpi(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(a,r)} \frac{f'(\zeta) + t g'(\zeta)}{f(\zeta) + t g(\zeta)}\, d\zeta$$

και παρατηρούμε ότι αυτή είναι καλά ορισμένη, αφού $|f(\zeta) + tg(\zeta)| \geq |f(\zeta)| - t|g(\zeta)| \geq |f(\zeta)| - |g(\zeta)| > 0$ (ειδικότερα, ο παρονομαστής δεν γίνεται 0). Επίσης, από την **Παρατήρηση 6.4**, η ποσότητα $\varpi(t)$ είναι μη αρνητικός ακέραιος και εκφράζει το πλήθος των ριζών της $f + tg$ (εννοείται ως προς ζ).

Βήμα II: Η συνάρτηση $\varpi(t)$ μπορεί να πάρει τη μορφή:

$$\text{Εάν } s \in [0,1]:\ |\varpi(t) - \varpi(s)| = \frac{|t-s|}{2\pi} \cdot \left| \int_{\partial B(a,r)} \frac{f(\zeta)g'(\zeta) - f'(\zeta)g(\zeta)}{\big(f(\zeta) + tg(\zeta)\big)\big(f(\zeta) + sg(\zeta)\big)}\, d\zeta \right|, \text{ για κάθε } t \in [0,1]$$

Πράγματι, κανείς αναπτύσσοντας με τον ορισμό την ποσότητα $|\varpi(t) - \varpi(s)|$, μπορεί να καταλήξει στον εν λόγω τύπο (δεν υπάρχει τέχνασμα, παρά μόνο πράξεις).

Βήμα III: Επειδή $|f| > |g|$, ισχύουν οι ανισότητες:

$$|f + tg| \geq |f| - t|g| > (1-t)|g| \textbf{ και } |f + sg| \geq |f| - s|g| > (1-s)|g|$$

Επομένως:

$$|f + tg| \cdot |f + sg| > (1-t)(1-s)|g|^2 \geq 0$$

κι επειδή η ανισότητα είναι γνήσια, υπάρχει $\mu > 0$ τέτοιο ώστε $|f(\zeta)+tg(\zeta)|\cdot|f(\zeta)+sg(\zeta)| > \mu > 0$ (ομοιόμορφα για όλα τα ζ, αφού αν υπήρχαν άπειροι όροι πλησίον του 0, λόγο της συνέχειας του αριστερού μέλους, θα υπήρχε $z \in \partial B(a,r)$ στο οποίο το κάτω φράγμα θα πιανόταν).

Βήμα IV: Στην σχέση του **Βήματος II** χρησιμοποιούμε την ανισότητα του **Βήματος III** και έχουμε ότι:

$$|\varpi(t)-\varpi(s)| \leq \frac{|t-s|}{2\pi}\cdot\left|\int_{\partial B(a,r)} \frac{f(\zeta)g'(\zeta)-f'(\zeta)g(\zeta)}{\mu}\,d\zeta\right| = \frac{|t-s|}{2\pi}\cdot\frac{2\pi r^2}{\mu}\sup_{\zeta\in\partial B(a,r)}|f(\zeta)g'(\zeta)-f'(\zeta)g(\zeta)| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\varpi(t)-\varpi(s)| \leq \left[\frac{r^2}{\mu}\sup_{\zeta\in\partial B(a,r)}|f(\zeta)g'(\zeta)-f'(\zeta)g(\zeta)|\right]\cdot|t-s|$$

Η $\varpi(t)$ είναι λοιπόν Lipschitz συνεχής συνάρτηση του t, οπότε είναι ειδικότερα συνεχής. Να σημειωθεί ότι το supremum είναι πραγματικός αριθμός, αφού η συνάρτηση εντός του είναι συνεχής στο συμπαγές σύνολο $\partial B(a,r)$.

Βήμα V: Επειδή η $\varpi(t)$ λαμβάνει μη αρνητικές ακέραιες τιμές και είναι συνεχής, είναι σταθερή συνάρτηση. Επομένως, $\varpi(0)=\varpi(1)$ και κατ' επέκταση το πλήθος των ριζών της f ισούται με το πλήθος των ριζών της $f+g$ στο $S(a,r)$.

Παρατήρηση 6.5 Από την απόδειξη του **Θεωρήματος 6.6 - Του Rouché** στην πραγματικότητα έπεται κάτι ισχυρότερο: για κάθε $t\in[0,1]$, οι συναρτήσεις f και $f+tg$ έχουν το ίδιο πλήθος ριζών στον δίσκο $S(a,r)$. Επιπλέον, η απόδειξη μπορεί να τροποποιηθεί έτσι ώστε το σύνολο στο οποίο οι f και g είναι ολόμορφες να είναι ανοικτό, με σύνορο το οποίο είναι απλή και κλειστή καμπύλη.

Παρατήρηση 6.6 Έστω P, Q δύο μιγαδικά πολυώνυμα με βαθμούς $\deg Q \geq 2+\deg P$ και $Q(z)\neq 0$ στο $\mathbb{R}$. Τότε:

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{P(z)}{Q(z)}\,dz = 2\pi i\cdot\sum_{\substack{Q(\omega)=0\\ \Im(\omega)>0}} \operatorname{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)},\omega\right)$$

Απόδειξη: Έστω $[-r,r]$ ένα (συμμετρικό προς το 0) ευθύγραμμο τμήμα του $\mathbb{R}$. Έστω επίσης C_r το ημικύκλιο διαμέτρου $[-r,r]$, το οποίο βρίσκεται στο άνω ημιεπίπεδο $\mathbb{C}^+$. Ορίζουμε D_r το χωρίο που ορίζει η καμπύλη $[-r,r]\cup C_r$ και από το **Θεώρημα 6.5 - Των ολοκληρωτικών υπολοίπων**, έχουμε ότι:

$$\int_{[-r,r]} \frac{P(z)}{Q(z)}\,dz + \int_{C_r} \frac{P(z)}{Q(z)}\,dz = 2\pi i\cdot\sum_{\substack{Q(\omega)=0\\ \omega\in D_r}} \operatorname{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)},\omega\right)$$

Επιπλέον, επειδή $\deg Q \geq 2+\deg P$, υπάρχει $M>0$ τέτοιος ώστε $\left|\frac{P(z)}{Q(z)}\right| \leq \frac{M}{r^2}$.

$$\left|\int_{C_r} \frac{P(z)}{Q(z)}\,dz\right| \leq 2\pi r\cdot\sup_{z\in C_r}\left|\frac{P(z)}{Q(z)}\right| = \frac{2\pi r M_r}{r^2} = \frac{2\pi M}{r}$$

Αφήνοντας λοιπόν $r\to\infty$, το προηγούμενο ολοκλήρωμα μηδενίζεται. Επιπλέον, για αρκετά μεγάλη ακτίνα $r>r_0$ οι ρίζες ω, $\Im(\omega)>0$ του Q βρίσκονται όλες τους εντός του D_r. Κατ' επέκταση, $\{\omega \mid Q(\omega)=0\}\cap D_r \overset{r\to\infty}{\longrightarrow} \{\omega \mid Q(\omega)=0,\ \Im(\omega)>0\}$ και:

$$\int_{[-r,r]} \frac{P(z)}{Q(z)}\,dz \overset{r\to\infty}{\longrightarrow} 2\pi i\cdot\sum_{\substack{Q(\omega)=0\\ \Im(\omega)>0}} \operatorname{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)},\omega\right)$$

Το ζητούμενο λοιπόν αποδεικνύεται:

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{P(z)}{Q(z)}\,dz = 2\pi i\cdot\sum_{\substack{Q(\omega)=0\\ \Im(\omega)>0}} \operatorname{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)},\omega\right)$$

Παρατήρηση 6.7 Έστω P, Q δύο μιγαδικά πολυώνυμα με βαθμούς $\deg Q \geq 1 + \deg P$ και $Q(z) \neq 0$ στο $\mathbb{R}$. Εάν $\lambda > 0$, τότε:

$$\int_{\mathbb{R}} \exp(i\lambda z)\frac{P(z)}{Q(z)}\, dz = 2\pi i \cdot \sum_{\substack{Q(\omega)=0 \\ \Im(\omega)>0}} \operatorname{Res}\left(\exp(i\lambda z)\frac{P(z)}{Q(z)}, \omega\right)$$

Απόδειξη: Έστω $[-r, r]$ ένα (συμμετρικό προς το 0) ευθύγραμμο τμήμα του $\mathbb{R}$. Έστω επίσης C_r το ημικύκλιο διαμέτρου $[-r, r]$, το οποίο βρίσκεται στο άνω ημιεπίπεδο $\mathbb{C}^+$ και D_r το χωρίο που ορίζει η καμπύλη $[-r, r] \cup C_r$.

Μπορούμε με σκεπτικό ανάλογο της απόδειξης της **Παρατήρησης 6.6** να δείξουμε ότι:

$$\forall z \in C_r,\ \left|\exp(i\lambda z)\frac{P(z)}{Q(z)}\right| \leq 2\pi M\left|\exp\big(i\lambda|z|(\cos\arg(z) + i\sin\arg(z))\big)\right| = 2\pi M\exp\big(-\lambda r\sin\arg(z)\big)$$

Ισοδύναμα, εάν παραστήσουμε το z ως $z = |z|\exp(it) = r\exp(it)$ θα έχουμε ότι:

$$\forall t \in [0, \pi],\ \left|\exp\big(i\lambda r\exp(it)\big)\frac{P\big(r\exp(it)\big)}{Q\big(r\exp(it)\big)}\right| \leq 2\pi M\exp\big(-\lambda r\sin(t)\big)$$

Επομένως:

$$\left|\int_{C_r}\exp(i\lambda z)\frac{P(z)}{Q(z)}\, dz\right| \leq \int_{[0,\pi]} 2\pi M\exp\big(-\lambda r\sin(t)\big)\, dt = 2\pi M\int_{[0,\pi]}\exp\big(-\lambda r\sin(t)\big)\, dt$$

Ουσιαστικά σε αυτό το σημείο (μιμούμενοι την απόδειξη της **Παρατήρησης 6.6**) θα θέλαμε να δείξουμε ότι το προαναφερθέν ολοκλήρωμα συγκλίνει στο 0. Γι' αυτό ισχυριζόμαστε ότι:

$$\int_{[0,\pi]}\exp\big(-\lambda r\sin(t)\big)\, dt \leq \frac{\pi}{\lambda r}$$

Πράγματι, κατ' αρχάς παρατηρούμε ότι:

$$\int_{0,\pi}\exp\big(-\lambda r\sin(t)\big)\, dt = 2\int_{0,\pi/2}\exp\big(-\lambda r\sin(t)\big)\, dt$$

και έπειτα, χρησιμοποιώντας την ανισότητα $\sin(t) \geq \dfrac{2t}{\pi}$ στο $[0, \pi/2]$, δείχνουμε ότι:

$$\int_{[0,\pi/2]}\exp\big(-\lambda r\sin(t)\big)\, dt \leq \int_{[0,\pi/2]}\exp\left(-\lambda r\frac{2t}{\pi}\right) dt = \frac{\pi}{2\lambda r}\big(1 - \exp(-\lambda r)\big) < \frac{\pi}{2\lambda r}$$

Με αυτό λοιπόν η ζητούμενη ανισότητα αποδεικνύεται:

$$\int_{[0,\pi]}\exp\big(-\lambda r\sin(t)\big)\, dt = 2\int_{0,\pi/2}\exp\big(-\lambda r\sin(t)\big)\, dt \leq \frac{\pi}{\lambda r}$$

(μάλιστα αποδεικνύεται η γνήσια ανισότητα). Με την ανισότητα υπ' όψιν, μπορεί πλέον να δειχθεί ότι:

$$\left|\int_{C_r}\exp(i\lambda z)\frac{P(z)}{Q(z)}\, dz\right| \leq 2\pi M\int_{[0,\pi]}\exp\big(-\lambda r\sin(t)\big)\, dt \leq \frac{2\pi^2 M}{\lambda r} \overset{r\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Τέλος, από το **Θεώρημα 6.5 - Των ολοκληρωτικών υπολοίπων** έχουμε ότι:

$$\int_{\mathbb{R}}\exp(i\lambda z)\frac{P(z)}{Q(z)}\, dz + \int_{C_r}\exp(i\lambda z)\frac{P(z)}{Q(z)}\, dz = 2\pi i \cdot \sum_{\substack{Q(\omega)=0 \\ \omega\in D_r}} \operatorname{Res}\left(\exp(i\lambda z)\frac{P(z)}{Q(z)}, \omega\right)$$

και από την σύγκλιση που μόλις δείξαμε:

$$\int_{[-r,r]}\exp(i\lambda z)\frac{P(z)}{Q(z)}\, dz \overset{r\to\infty}{\longrightarrow} 2\pi i \cdot \sum_{\substack{Q(\omega)=0 \\ \Im(\omega)>0}} \operatorname{Res}\left(\exp(i\lambda z)\frac{P(z)}{Q(z)}, \omega\right)$$

Το ζητούμενο λοιπόν αποδεικνύεται.

$$\int_{\mathbb{R}}\exp(i\lambda z)\frac{P(z)}{Q(z)}\, dz = 2\pi i \cdot \sum_{\substack{Q(\omega)=0 \\ \Im(\omega)>0}} \operatorname{Res}\left(\exp(i\lambda z)\frac{P(z)}{Q(z)}, \omega\right)$$

■**Πρόταση 6.3 – Δακτύλιος σύγκλισης σε σειρές Laurent.** Έστω:

$$L(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(z-a)^k = \overbrace{\Big[\sum_{k=-\infty}^{-1} c_k \frac{1}{(z-a)^{-k}}\Big]}^{K_a^L(z)} + \overbrace{\Big[\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-a)^k\Big]}^{L(z)-K_a^L(z)=A_a^L(z)}$$

μια σειρά Laurent. Εφαρμόζοντας στο κύριο μέρος της L τον μετασχηματισμό $w = \dfrac{1}{z-a}$, παρατηρούμε ότι αυτό λαμβάνει μορφή δειναμοσειράς:

$$K_a^L(z) = K(w) = \sum_{k=-\infty}^{-1} c_k w^{-k}$$

Κατ' επέκταση, ορίζεται γι' αυτό μια ακτίνα σύγκλισης, η οποία βάσει του **Θεωρήματος 3.1 - Ύπαρξη ακτίνας σύγκλισης δυναμοσειράς** και της **Παρατήρησης 3.5 - Εναλλακτική μορφή της ακτίνας σύγκλισης** παίρνει τη μορφή:

$$\rho = \sup\{r \geq 0 \mid (|c_k| r^{-k})_{k\leq -1} \text{ φραγμένη}\} = \frac{1}{\limsup_{k\leq -1} \sqrt[-k]{|c_k|}}$$

Το κύριο λοιπόν μέρος συγκλίνει για $|w| < \rho$, ή ισοδύναμα:

$$\frac{1}{|z-a|} < \rho \Leftrightarrow |z-a| > \frac{1}{\rho}$$

Όσον αφορά το μέρος $A_a^L(z)$ της L που είναι δυναμοσειρά, κι αυτό έχει μια ακτίνα σύγκλισης R η οποία ορίζεται ως:

$$R = \sup\{r \geq 0 \mid (|c_k| r^{k})_{k\geq 0} \text{ φραγμένη}\} = \frac{1}{\limsup_{k\geq 0} \sqrt[k]{|c_k|}}$$

Στον δακτύλιο λοιπόν $S(a,R) - B(a,1/\rho)$, η σειρά Laurent L συγκλίνει. ■

> **Θεώρημα 6.7 – Ανάπτυγμα Laurent ολομόρφων συναρτήσεων, σε δακτυλίους.** Έστω $D(a,r,R) = S(a,R) - B(a,r)$ ένας δακτύλιος και $f \in \mathcal{O}\big(D(a,r,R)\big)$. Τότε, η f έχει ενιαίο ανάπτυγμα Laurent σε ολόκληρο τον δακτύλιο $D(a,r,R)$.

Απόδειξη: Η απόδειξη αυτή θα γίνει σε βήματα.

Βήμα I: Εάν $r = 0$, ο δακτύλιος $D(a,r,R)$ εκφυλίζεται στον 'τρύπιο' δίσκο $S(a,R) - \{a\}$. Σε τέτοια όμως σύνολα το θεώρημα έχει αποδειχθεί (**Παρατήρηση 6.2**). Επιπλέον, η περίπτωση όπου $D(a,r,R) = \emptyset$ είναι τετριμμένη. Υποθέτουμε λοιπόν ότι $\emptyset \neq D(a,r,R) \neq S(a,R) - \{a\}$.

Βήμα II: Έστω $z \in D(a,r,R)$ καθώς επίσης και δύο ακτίνες ρ, P τέτοιες ώστε $r < \rho < |z-a| < P < R$ (δηλαδή $z \in D(a,\rho,P)$). Εφαρμόζοντας το **Θεώρημα 4.6 - Ο τύπος του Cauchy** στον δακτύλιο $D(a,\rho,P)$ έχουμε ότι:

$$2\pi i \cdot f(z) = \int_{\partial D(a,\rho,P)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \int_{\partial S(a,P)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - \int_{\partial S(a,\rho)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial S(a,P)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial S(a,\rho)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$$

Βήμα III: Η ποσότητα $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\partial S(a,\rho)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$ μπορεί να αναλυθεί σε κύριο μέρος αναπτύγματος Laurent. Πράγματι, εάν $|\zeta - a| = \rho < |z-a|$:

$$\left|\frac{\zeta - a}{z-a}\right| < 1$$

κι επομένως:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{\zeta - a}{z-a}\right]^k = \frac{\frac{\zeta - a}{z-a}}{1 - \frac{\zeta - a}{z-a}} = \frac{\zeta - a}{z - \zeta}$$

Έπεται λοιπόν ότι:

$$\frac{1}{\zeta - z} = -\frac{1}{\zeta - a}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{\zeta - a}{z-a}\right]^k \Rightarrow \int_{\partial S(a,\rho)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = -\int_{\partial S(a,\rho)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - a}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{\zeta - a}{z-a}\right]^k\, d\zeta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial S(a,\rho)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta = -\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{\infty}\int_{\partial S(a,\rho)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - a}\left[\frac{\zeta - a}{z-a}\right]^k d\zeta = \sum_{k=1}^{\infty}\left[-\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial S(a,\rho)} \frac{f(\zeta)(\zeta-a)^k}{\zeta - a}\,d\zeta\right]\cdot\frac{1}{(z-a)^k}$$

Βήμα III: Με παρόμοιο τρόπο μπορούμε να δείξουμε ότι η ποσότητα $\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial S(a,P)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta$ μπορεί να αναλυθεί σε δυναμοσειρά. Ουσιαστικά και στα δύο αυτά βήματα ακολουθούμε (σε γενικές γραμμές) την απόδειξη του **Θεωρήματος 4.7 - Συσχέτιση αναλυτικών και ολομόρφων συναρτήσεων**. Σε αυτήν να σημειωθεί ότι μπορεί να βρεθεί αιτιολόγηση για την εναλλαγή των ολοκληρωμάτων με τα αθροίσματα.

Η f λοιπόν έχει ανάπτυγμα Laurent σε ολόκληρο τον δακτύλιο $D(a,r,R)$, αν αφεθεί $\rho \to r$ και $P \to R$.

■**Πρόταση 6.4 – Μεμονωμένες ανωμαλίες και αναπτύγματα Laurent.** Έστω $f \in \mathcal{O}\big(S(a,r) - \{a\}\big)$ μια συνάρτηση. Επειδή το σύνολο $S(a,r) - \{a\}$ είναι δίσκος $D(a,0,r)$, από το **Θεώρημα 6.7 - Ανάπτυγμα Laurent ολομόρφων συναρτήσεων, σε δακτυλίους**, η f έχει ανάπτυγμα Laurent:

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z-a)^k$$

Για την f ισχύουν τα ακόλουθα:

- Εάν $c_k = 0$ για κάθε $k < -m$ και $c_{-m} \neq 0$, τότε η f έχει στο a πόλο τάξεως $m > 0$.
- Εάν $c_k = 0$ για κάθε $k < 0$, τότε η f παρουσιάζει στο a επουσιώδη ανωμαλία.
- Εάν δεν υπάρχει $m \in \mathbb{Z}$ τέτοιο ώστε για κάθε $k < m$ να ισχύει $c_k = 0$, τότε στο a η f παρουσιάζει ουσιώδη ανωμαλία.

■

Απόδειξη:

Για το πρώτο σημείο (•): Παρατηρούμε ότι:

$$f(z) = \frac{1}{(z-a)^m}\overbrace{\sum_{k\geq -m} c_k (z-a)^{k-m}}^{g(z)}, \text{ με } g \in \mathcal{O}\big(S(a,r)\big) \text{ και } g(a) \neq 0$$

Από την **Παρατήρηση 6.2** έπεται το ζητούμενο.

Για το δεύτερο σημείο (•): Η απόδειξη είναι σχετικά άμεση.

Για το τρίτο σημείο (•): Εδώ θα χρειαστεί να παρατηρήσουμε ότι ισχύουν και οι αντίστροφες κατευθύνσεις στα προηγούμενα σημεία (•). Με την παρατήρηση υπ' όψιν, εάν δεν υπάρχει $m \in \mathbb{Z}$ τέτοιο ώστε για κάθε $k < m$ να ισχύει $c_k = 0$, τότε δεν ισχύει κανένα από τα προηγούμενα δύο σημεία (•). Κατ' επέκταση, η f δεν έχει ούτε πόλο ούτε επουσιώδη ανωμαλία στο a - οπότε έχει ουσιώδη ανωμαλία.

Παρατήρηση 6.8 – Συντελεστές δυναμοσειρών και αναπτυγμάτων Laurent. Έστω:

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z-a)^k$$

μια δυναμοσειρά και:

$$L(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z-a)^k = \Big[\sum_{k=-\infty}^{-1} c_k \frac{1}{(z-a)^{-k}}\Big] + \Big[\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-a)^k\Big]$$

μια σειρά Laurent η οποία στο a έχει πόλο τάξης m. Για τους συντελεστές b_k και c_k ισχύει:

- $b_k = \frac{1}{k!}F^{[k]}(a)$, όπου $F^{[k]}$ είναι η $k-$οστή μιγαδική παράγωγος και $k \in \mathbb{N}_0$.
- $c_k = \lim_{z\to a}\left[\frac{1}{(k+m)!}\big[(z-a)^m L(z)\big]^{[k+m]}\right]$, όπου $k \in \mathbb{Z} \cap [m, \infty)$.

Απόδειξη: Όσον αφορά τους συντελεστές b_k, ουσιαστικά μπορούμε να φανταστούμε τη δυναμοσειρά F ως ένα (ενδεχομένως απειρόβαθμο) πολυώνυμο. Για να βρούμε τον $k-$οστό στη σειρά συντελεστή, παραγωγίζουμε k φορές ώστε η σειρά που θα προκύψει να έχει σταθερό όρο το b_k. Έπειτα, εκτιμώντας στο a, εξαλείφουμε όλους τους συντελεστές εκτός από τον σταθερό όρο πολλαπλασιασμένο με $k!$. Επομένως:

$$b_k = \frac{1}{k!}F^{[k]}(a)$$

Όσον αφορά τους συντελεστές c_k, η διαδικασία που αναφέρθηκε στις δυναμοσειρές δεν μπορεί να επαναληφθεί. Αυτό φυσικά γιατί κατά την διαδοχική παραγώγιση δεν εξαλείφεται το κύριο μέρος K_a^L, εάν αυτό δεν είναι μηδενικό. Από την **Πρόταση 6.4 - Μεμονωμένες ανωμαλίες και αναπτύγματα Laurent** κάθε συντελεστής c_k, $k < -m$ στο ανάπτυγμα Laurent είναι μηδενικός. Ειδικότερα, πολλαπλασιάζοντας την L με $(z-a)^m$ προκύπτει μια μορφή δυναμοσειράς - μάλιστα είναι δυναμοσειρά που στο a έχει επουσιώδη ανωμαλία.

Επομένως, εάν κανείς ξεχνούσε την επουσιώδη ανωμαλία της $(z-a)^m L(z)$ (αυστηρότερα, αν έπαιρνε την ολόμορφη επέκταση της $(z-a)^m L(z)$), εφαρμόζοντας το πρώτο σημείο (•) θα προέκυπτε ότι:

$$c_k = \frac{1}{(k+m)!}\big[(z-a)^m L(z)\big]^{[k+m]}\Big|_{z=a}$$

Όμως, η $(z-a)^m L(z)$ δεν ορίζεται στο a. Επομένως η προαναφερθείσα διαδικασία θα γίνει σε κοντινές περιοχές του a. Δηλαδή:

$$c_k = \lim_{z\to a}\left[\frac{1}{(k+m)!}\big[(z-a)^m L(z)\big]^{[k+m]}\right]$$

Λήμμα 6.2 Έστω φ μια μιγαδική συνάρτηση ορισμένη σε ένα ανοικτό σύνολο Ω. Εάν στον δίσκο $S(a,r)\subset\Omega$ η f παίρνει τη μορφή:

$$\forall z\in S(a,r),\ \varphi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial S(a,r)}\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta$$

τότε $f \in \mathcal{O}\big(S(a,r)\big)$. ■

Απόδειξη: Ουσιαστικά μπορούμε σε γενικές γραμμές να ακολουθήσουμε την απόδειξη του **Θεωρήματος 4.7 - Συσχέτιση αναλυτικών και ολομόρφων συναρτήσεων** και θα έχουμε το ζητούμενο αποτέλεσμα.

Λήμμα 6.3 – Ο τύπος του Cauchy για παραγώγους. Έστω φ μια μιγαδική συνάρτηση, ολόμορφη σε ανοικτό σύνολο Ω. Για κάθε $z\in\Omega$, εάν $z\in S(a,r)\subset\Omega$, η $\varphi^{[n]}$ παίρνει τη μορφή:

$$\varphi^{[n]}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\partial S(a,r)}\frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\,d\zeta$$

■

Απόδειξη: Έστω $z\in\Omega$ και $z\in S(a,r)\subset\Omega$. Η φ στο $S(z,\rho)$, $\rho < r - |z-a|$ είναι ολόμορφη, οπότε έχει ανάλυση σε δυναμοσειρά, έστω την:

$$\varphi(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(\zeta - z)^k$$

Από την **Παρατήρηση 6.8 - Συντελεστές δυναμοσειρών και αναπτυγμάτων Laurent** έχουμε ότι $b_n = \dfrac{1}{n!}\varphi^{[n]}(z)$. Επιπλέον, επειδή:

$$\frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(\zeta - z)^{k-n-1}$$

από το **Θεώρημα 6.5 - Των ολοκληρωτικών υπολοίπων** έχουμε ότι:

$$\int_{\partial S(z,\rho)}\frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\,d\zeta = \int_{\partial S(z,\rho)}\sum_{k=0}^{\infty} b_k(\zeta - z)^{k-n-1}\,d\zeta = 2\pi i b_n = \frac{2\pi i}{n!}\varphi^{[n]}(z)$$

Τέλος, η $\dfrac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}$ είναι ολόμορφη στο $D = S(a,r) - B(z,\rho)$, οπότε από το **Θεώρημα 4.5 - Θεώρημα του Cauchy**, μπορεί να προκύψει ότι:

$$\int_{\partial D}\frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\,d\zeta = 0 \Rightarrow \int_{\partial S(a,r)}\frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\,d\zeta = \int_{\partial S(z,\rho)}\frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\,d\zeta = \frac{2\pi i}{n!}\varphi^{[n]}(z)$$

Αυτό δίνει το ζητούμενο αποτέλεσμα.

Θεώρημα 6.8 – Της σύγκλισης του Weierstass. Έστω $\left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία ολομόρφων συναρτήσεων του $(\Omega \to \mathbb{C})$. Εάν:

$$f_n \to_o f$$

στα συμπαγή υποσύνολα του Ω, τότε $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ και η σύγκλιση $f_n' \to f'$ είναι ομοιόμορφη στα συμπαγή υποσύνολα του Ω.

Με ισοδύναμη διατύπωση (για σειρές), εάν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ συγκλίνει ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα του Ω, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ αποτελεί ολόμορφη συνάρτηση στο Ω και $\sum_{n=1}^{\infty} f_n' = [\sum_{n=1}^{\infty} f_n]'$. Επιπλέον, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'$ συγκλίνει ομοιόμορφα.

Απόδειξη: Έστω $B(a,r)$ ένας τυχών δίσκος και $z \in B(a,r) \subset \Omega$. Από το **Θεώρημα 6.5 - Των ολοκληρωτικών υπολοίπων**, μπορούμε να παραστήσουμε κάθε $f_n(z)$ ως:

$$f_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B(a,r)} \frac{f_n(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$$

Επειδή το σύνολο $\partial B(a,r)$ είναι συμπαγές, οι $f_n(\zeta)$ συγκλίνουν ομοιόμορφα στην $f(\zeta)$. Κατ' επέκταση, οι $\dfrac{f_n(\zeta)}{\zeta - z}$ συγκλίνουν ομοιόμορφα στην $\dfrac{f(\zeta)}{\zeta - z}$. Από την **Παρατήρηση 4.1**:

$$\text{Για } z \in B(a,r),\ f_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B(a,r)} \frac{f_n(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \to \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B(a,r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$$

κι επειδή το $B(a,r)$ είναι συμπαγές, $f_n(z) \to f(z)$. Το όριο όμως είναι μοναδικό, επομένως:

$$f(z) = \int_{\partial B(a,r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta,\ \text{για } z \in B(a,r)$$

Σύμφωνα με το **Λήμμα 6.2** θα πρέπει $f \in \mathcal{O}\big(S(a,r)\big)$, οπότε στον δίσκο $S(a,r)$ η f είναι αναλυτική. Αυτό ισχύει φυσικά για κάθε (ανοικτό) δίσκο του Ω, αφού ο $B(a,r)$ επελέχθηκε τυχαία. Άρα $f \in \mathcal{A}(\Omega)$ και κατ' επέκταση $f \in \mathcal{O}(\Omega)$.

Μένει λοιπόν να αποδείξουμε ότι η σύγκλιση $f_n' \to f'$ είναι ομοιόμορφη. Έστω λοιπόν μια ακτίνα $\rho > r$ τέτοια ώστε $S(a,\rho) \subset \Omega$. Σύμφωνα με το **Λήμμα 6.3 - Ο τύπος του Cauchy για παραγώγους**, για την παράγωγο $(f_n - f)'$ έχουμε ότι:

$$\big(f_n(z) - f(z)\big)' = \frac{1}{\pi i}\int_{\partial S(a,\rho)} \frac{f_n(\zeta) - f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\, d\zeta,\ \text{για } z \in S(a,\rho)$$

Άρα:

$$\begin{aligned}
\text{Για } z \in B(a,r),\ |f_n'(z) - f'(z)| &= \frac{1}{\pi}\left|\int_{\partial S(a,\rho)} \frac{f_n(\zeta) - f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\, d\zeta\right| \\
&\le \frac{1}{\pi}\int_{\partial S(a,\rho)} \left|\frac{f_n(\zeta) - f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\right|\, d\zeta \\
&\le \frac{2\pi\rho}{\pi}\sup_{\zeta\in\partial S(a,\rho)}\left|\frac{f_n(\zeta) - f(\zeta)}{\zeta - z}\right| \\
&= 2\rho\sup_{\zeta\in\partial S(a,\rho)}\left|\frac{f_n(\zeta) - f(\zeta)}{\zeta - z}\right|
\end{aligned}$$

Επειδή $\zeta \in \partial S(a,\rho)$ και $z \in S(a,r)$, έχουμε ότι $|\zeta - z| \ge \rho - r$. Επομένως:

$$\text{Για } z \in B(a,r),\ |f_n'(z) - f'(z)| \le \frac{2\rho}{\rho - r}\sup_{\zeta\in\partial S(a,\rho)} |f_n(\zeta) - f(\zeta)|$$

Η σχέση αυτή ισχύει για κάθε $z \in S(a,r)$, οπότε:

$$\sup_{z\in B(a,r)} |f_n'(z) - f'(z)| \le \frac{2\rho}{\rho - r}\sup_{\zeta\in\partial S(a,\rho)} |f_n(\zeta) - f(\zeta)|$$

Το σύνολο $\partial S(a,\rho)$ είναι συμπαγές, άρα από την υπόθεσή μας η σύγκλιση $f_n \to f$ σε αυτό είναι ομοιόμορφη. Κατ' επέκταση:

$$\sup_{z\in B(a,r)} |f_n'(z) - f'(z)| \leq \frac{2\rho}{\rho - r} \sup_{\zeta\in\partial S(a,\rho)} |f_n(\zeta) - f(\zeta)| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Αυτό δείχνει ότι η σύγκλιση $f_n \to f$ είναι ομοιόμορφη στο $B(a,r)$. Φυσικά αυτό το αποτέλεσμα ισχύει για οποιονδήποτε (κλειστό) δίσκο, αφού ο $B(a,r)$ επελέχθηκε τυχαία.

Επειδή κάθε συμπαγές σύνολο K περιέχεται σε πεπερασμένο κάλυμμα δίσκων της μορφής $B(a,r)$, η σύγκλιση $f_n' \to f'$ είναι ομοιόμορφη σε κάθε συμπαγές $K \subset \Omega$.

Εάν ειδικότερα $g_n = \sum_{k=1}^{n} f_n$ και $g = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$, εφαρμόζοντας το θεώρημα όπως έχει αποδειχθεί ως τώρα (στην πρώτη του διατύπωση) για τις g_n και g, κανείς μπορεί να αποδείξει τη δεύτερη διατύπωση.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

Βιβλιογραφία

(1) Διαλέξεις του κ. Χατζηαφράτη Τ. (Χειμερινό εξάμηνο 2021-22)

(3) Churchill R.V., Brown J.W.: ***Μιγαδικές συναρτήσεις και εφαρμογές, 2η έκδοση*** (Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης)

(3) Βασιλείου Ε., Παπατριανταφύλλου Μ.: ***Σημειώσεις Διαφορικής Γεωμετρίας Καμπυλών και Επιφανειών*** (Σημειώσεις του Π.Π.Σ. για τη Διαφορική Γεωμετρία Καμπυλών και Επιφανειών)

(4) Χατζηαφράτης Τ.: ***Απειροστικός Λογισμός σε Πολλές Μεταβλητές*** (Συμμετρία)

(5) Τόλης Χ., Παβέλης Α. Φράγκος Α.: ***Απειροστικός Λογισμός ΙΙΙ, Μερικές Αποδείξεις*** (Προπτυχιακή εργασία, Απειροστικός Λογισμός ΙΙΙ)