ΆΦραγκος, 22/07/2021

Σχέσεις ισοδυναμίας μεταξύ θηλειών και 'Ομοτοπία'

Συμβολισμοί:

1. $\coprod$: συμβολίζει την ξένη ένωση. **2.** $(A \to B) := B^A$ **3.** $\widehat{a}$: είναι η κλάση ισοδυναμίας του a ως προς κάποια σχέση ισοδυναμίας.

Τα παρακάτω είναι παρόμοια με αυτά που υπάρχουν στο σύγγραμμα που μας δώθηκε.

Ορισμός: *Ομοτοπία*
Έστω μια οικογένεια $(f_i)_{i\in I}$ απεικονήσεων $f_i : A \to \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής με την εξής έννοια:

$$\text{Η επαγώμενη συνάρτηση } F : I \times A \to \mathbb{R},\ F(i,x) = f_i(x) \text{ είναι συνεχής.}$$

Η οικογένεια $(f_i(x))_{i\in I}$ θα ονομάζεται 'ομοτοπία'.

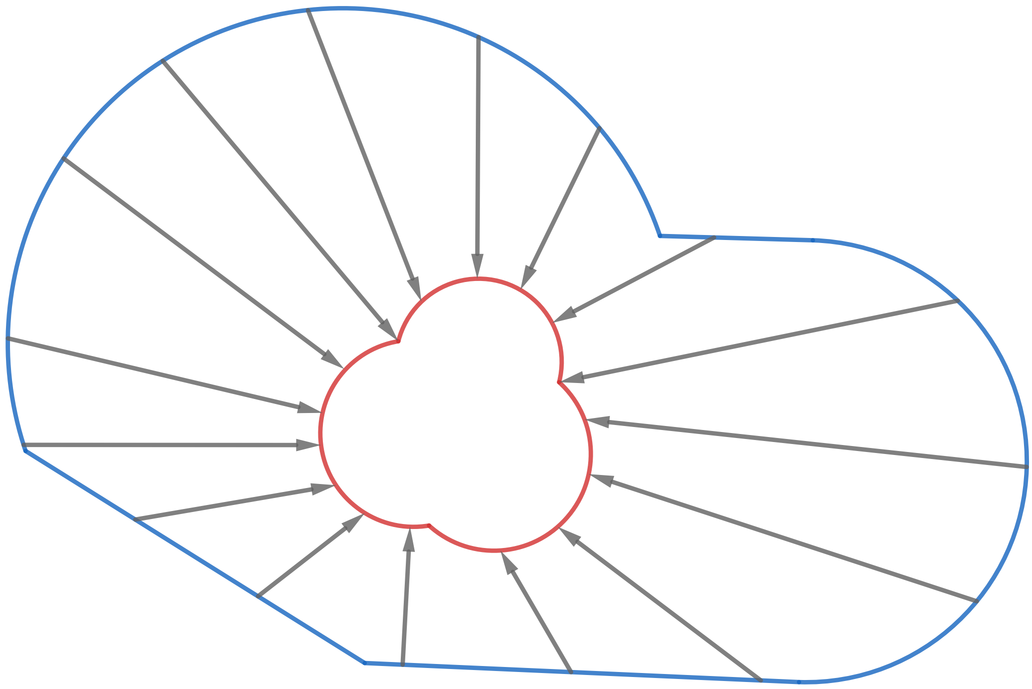
Για να ορίσουμε μια σχέση ισοδυναμίας μεταξύ δύο θηλειών, θα ακολουθήσουμε την εξής λογική: Εάν $I = [0,1]$, τότε η A θα είναι ισοδύναμη της B (και θα συμβολίζουμε $A \asymp B$) όταν μπορεί να βρεθεί ομοτοπία $(f_i)_{i\in[0,1]}$ τέτοια ώστε η επαγόμενή της συνάρτηση $F : [0,1] \times A \to B$ να έχει την ιδιότητα:

$$F(0,A) = A,\ F(1,A) = B$$

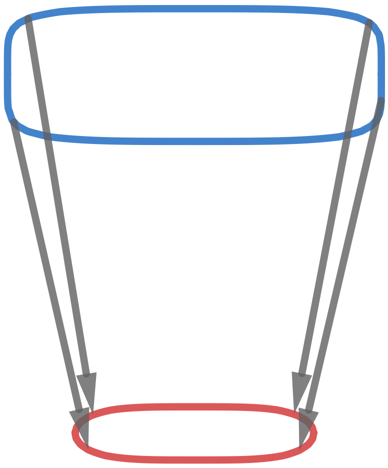
Δηλαδή:

$$A \asymp B :\Leftrightarrow \text{υπάρχει ομοτοπία με επαγόμενη συνάρτηση } F \text{ τέτοια ώστε } F(0,A) = A \textbf{ και } F(1,A) = B$$

Ουσιαστικά η ισοδυναμία προκύπτει από μια διαδικασία συνεχούς 'παραμόρφωσης' της μίας καμπύλης έτσι ώστε να συμπέσει επί της άλλης.



Μπορούμε να δώσουμε και έναν εναλλακτικό αλλά ισοδύναμο ορισμό της ισοδυναμίας. Αυτός θα παρουσιαστεί παρακάτω.



Ορισμός: ***Κύλινδρος μιας απεικόνησης***
Έστω f μια συνεχής απεικόνηση του $(A \to B)$. Θεωρούμε μια σχέση ισοδυναμίας '$\sim$' η οποία ορίζεται ως:

$$(0, x) \sim f(x)$$

Τον χώρο - πηλίκο:

$$M_f = \left[\left([0,1] \times A\right) \coprod B \middle/ \sim \right]$$

τον ονομάζουμε 'κύλινδρο' της απεικόνισης f.

Πλέον λοιπόν θα θεωρούμε ότι δύο θηλιές A, B είναι ισοδύναμες (και θα γράφουμε $A \asymp B$) εάν υπάρχει απεικόνηση $\tilde{F} : A \to B$ η οποία ορίζεται ως $\tilde{F}(x) = F(1, x)$ (όπου F είναι η επαγόμενη της ομοτοπίας $(f_i)_{i \in [0,1]}$), η οποία έχει την ιδιότητα: $\exists \widehat{C} \in M_{\tilde{F}} : \ \left(\{0\} \times A\right) \cup B = \widehat{C}$.

Δηλαδή:

$$A \asymp B :\Leftrightarrow \exists \tilde{F}(\cdot) = F(1, \cdot) : A \to B \text{ με } F \text{ επαγόμενη ομοτοπίας, τέτοια ώστε } \exists \widehat{C} \in M_{\tilde{F}} : \ \left(\{0\} \times A\right) \cup B = \widehat{C}$$

Πρόταση: Η '$\asymp$' είναι πράγματι μια σχέση ισοδυναμίας.

- *Είναι αυτοπαθής:* Πράγματι, εάν $(0, x) \sim id(x) = x$, τότε $\left(\{0\} \times A\right) \coprod A \in M_{id}$, το οποίο είναι συμμετρικό ως προς A.

- *Είναι συμμετρική:* Έστω $A \asymp B$. Πράγματι, εάν F' είναι η συνάρτηση $F'(t, x) = X$, με X να είναι τέτοιο ώστε $F(1 - t, X) = x$, παρατηρούμε ότι:

  $$F'(0, B) = B, \ F'(1, B) = A$$

  Επομένως, $B \asymp A$.

- *Είναι μεταβατική:* Έστω $A \asymp B$ και $B \asymp \Gamma$. Θεωρούμε F, G τις επαγόμενες των αντίστοιχων ομοτοπιών συναρτήσεις και επίσης την συνάρτηση $H : [0,1] \times A \to B$:

  $$H(t, x) = \begin{cases} F(2t, x), 2t \leq 1 \\ G\big(2t - 1, F(1, x)\big), 2t > 1 \end{cases}$$

  Παρατηρούμε ότι η H έχει τις επιθυμητές ιδιότητες:

  $$H(0, A) = F(0, A) = A, \ H(1, A) = G\big(1, F(1, A)\big) = G(1, B) = \Gamma$$

  και συνεπώς $A \asymp \Gamma$.