

# 691. Διδακτική των Μαθηματικών Ι

Παρουσίαση 2<sup>η</sup> (δεν θα παρουσιαστεί)

Α. Φράγκος

Δευτέρα 24 Οκτωβρίου 2022

# Τι θα διαπραγματευτούμε

Υποθέτουμε ότι διδάσκουμε στην Α' γυμνασίου. Δίνονται οι ακόλουθες πρώτες δύο τιμές μιας ακολουθίας (μοτίβου).



- Μια προσπάθεια συνέχισης της ακολουθίας (εύρεση «του» μοτίβου).
- Διάφοροι τρόποι για τον υπολογισμό κάποιου χαρακτηριστικού του μοτίβου (ποιού;).
- Διαπίστωση ότι υπάρχουν διάφορα μοτίβα με αυτές τις δύο πρώτες τιμές.
- Δραστηριότητα τεσσάρων ερωτημάτων και απαντήσεις.

## Συνέχιση της ακολουθίας

Κατ' αρχάς πρέπει να γίνει αντιληπτό ότι αυτό που αναγνωρίζουμε εμείς ως μοτίβο είναι μια «λογική συνέχιση». Καλό θα ήταν προτούτερα να δωθούν παραδείγματα μοτίβων:

- Με γεωμετρικά σχήματα που επαναλαμβάνονται,
- Με γεωμετρικά σχήματα που μεγενθύνονται (κι αυτό μπορεί να θεωρηθεί μοτίβο),
- Ακόμη ίσως να γίνει μια νύξη στους περιοδικούς δεκαδικούς (δεν είναι όλα τα μοτίβα γεωμετρικά).

Η συνέχιση ενός μοτίβου είναι κατά κάποιον τρόπο μια **μαντεψιά**. Μπορεί να γίνει η εξής δραστηριότητα: αφού έχει δειχθεί ένα μοτίβο, ο καθηγητής να κρύψει από έναν όρο της ακολουθίας και έπειτα να ρωτήσει τους μαθητές πώς το μοτίβο θα συνεχιζόταν. Μετά, μπορεί να τους ζητήσει να συνεχίσουν διαφορετικά το μοτίβο, όπως ενδεχομένως θα το έκανε κάποιος που δεν είχε δει πώς συνεχίζεται. *Είναι λάθος ο δεύτερος τρόπος;*

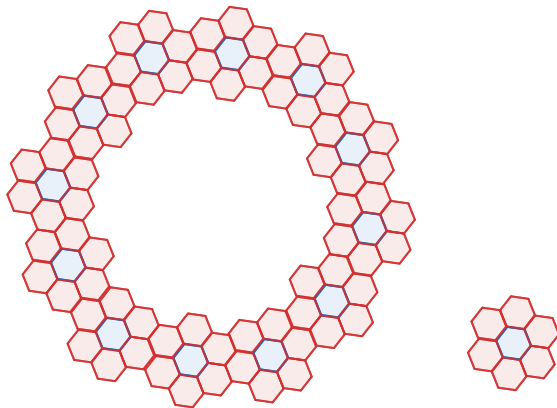
Στο τέλος μπορεί καθένας από τους μαθητές ατομικά να συνεχίσει ένα «άγνωστο μοτίβο». Στην τάξη θα συγκριθούν οι διαφορετικές απόψεις.

## Συνεχίζοντας το μοτίβο που δόθηκε

Παρατηρώντας το συγκεκριμένο μοτίβο που δόθηκε: Πώς θα συνεχίζαμε το μοτίβο; Δεν θα πρέπει να δοθεί μοναδική απάντηση, προφανώς. Πέρα από τα «φανερά» μοτίβα, ίσως θα έπρεπε να επιστήσουμε την προσοχή των μαθητών σε ιδιάζοντα μοτίβα όπως τα ακόλουθα:

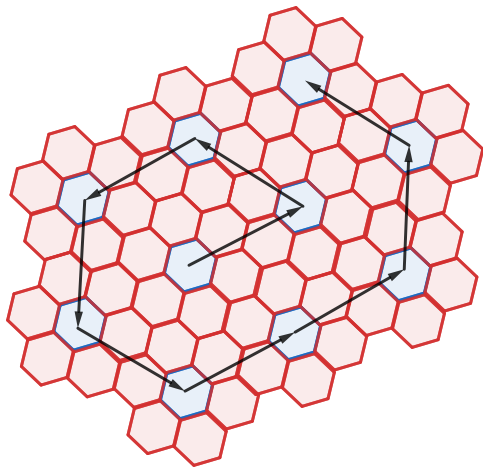
Σημείωση εκ των υστέρων! Στα παρακάτω δύο (2) σχήματα έπρεπε να υπάρχει επικάλυψη δύο εξαγώνων ανά κυψέλη. Παρουσιάζονται σχήματα χωρίς επικάλυψη, η ιδέα όμως είναι ίδια.

# Μοτίβο número 1



Σε αυτό το μοτίβο, αφού ολοκληρωθεί ένας κύκλος ξεκινά επόμενος.

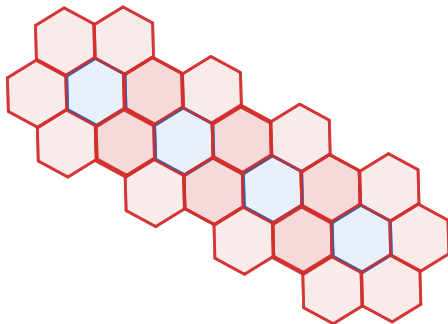
## Μοτίβο número 2



Ψηφίδωση του επιπέδου.



Φυσικά η μελέτη αυτών των μοτίβων ίσως δεν ενδείκνυται για αυτήν την τάξη, οπότε προς το παρόν θα επικεντρωθούμε στο παρακάτω απλό μοτίβο.



Αφού έχουμε κατασταλάξει στο συγκεκριμένο μοτίβο, είναι σημαντικό να διερευνηθούν κάποια στοιχεία του, αλλά τι στοιχεία του; Ακόμη κι αν το μοτίβο είναι δεδομένο, το τι κανείς μπορεί να μελετήσει είναι κι αυτό υποκειμενικό. Ενδεικτικά:

- Μπορεί να υπολογιστεί το πλήθος όλων των εξαγώνων,
- Το πλήθος των κόκκινων μόνο,
- Το πλήθος των κυψελών,
- Το πλήθος των «διπλών εξαγώνων»: Παρατηρήστε ότι κάθε κυψέλη απαρτίζεται από τρία τμήματα, που καθένα από αυτά είναι δύο ενωμένα εξάγωνα.

# Υπολογισμός των κόκκινων εξαγώνων

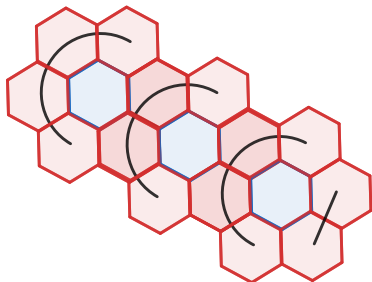
Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να υπολογίσουμε τα κόκκινα  
εξάγωνα. Εφόσον ο υπολογισμός θα πρέπει να γίνει σε κάπως πιο  
αφειρημένο επίπεδο, ουσιαστικά αυτό που αποσκοπούμε είναι  
κάποιου είδους σύγκριση. Για παράδειγμα, αν τα μπλε είναι τόσα,  
τα κόκκινα είναι τόσα.

Αυτού του είδους η σύγκριση, ακόμη κι αν δεν γίνεται συμβολικά,  
αποτελεί αφαιρετική σκέψη και συνεπώς εισάγει (με πρόημο  
τρόπο) αλγεβρικές μεθόδους στους μαθητές.

## Ένας τρόπος από τους πολλούς

Στην συγκεκριμένη περίπτωση οι μαθητές μπορούν να παρατηρήσουν ότι η δομή επικαλύπτεται από τόσες τετράδες κόκκινων εξαγώνων όσα είναι τα μπλε εξάγωνα, κι επίσης υπολείπονται δύο κόκκινα εξάγωνα. Οπότε γίνεται (όχι αυστηρά) η εξαγωγή του τύπου:

$$\text{Κόκκινα} = 4 \cdot \text{Μπλε} + 2$$



## Άλλοι τρόποι

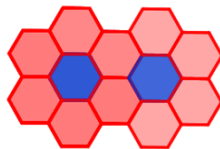
Υπάρχουν κι άλλοι τρόποι για να εξαχθεί ο ίδιος τύπος.

Ενδεικτικά:

- Διαχωρισμός των κόκκινων εξαγώνων σε δύο  $\sigma^x \sigma^y$  λίγες, που ουσιαστικά αποτελούν (κατά κάποιον τρόπο) τις πάνω και κάτω γραμμές της δομής.
- Μέτρηση όλων των κόκκινων γύρω από κάθε μπλε, κι έπειτα αφαίρεση των επικαλύψεων.
- Παρατήρηση του μοτίβου  $2 + 2 + 2 + 2 + \dots + 2$ , βλέποντας τις στήλες.

# Δραστηριότητα

Δίνεται η αρχή ενός μοτίβου:



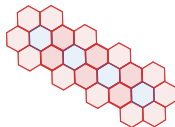
### Δραστηριότητα:

- Γιατί δεν είναι αυτό ένα μοτίβο; Μπορείτε να βρείτε ένα μοτίβο που να έχει αυτήν την αρχή;
- Υπάρχει κι άλλο μοτίβο εκτός αυτού που βρήκατε; Αν ναι, ποιο είναι;
- Τι σχέση έχει σε ποιο βήμα του μοτίβου είμαστε με το πλήθος των μπλε εξαγώνων σε αυτό το βήμα (ασχοληθείτε με ένα από τα μοτίβα);
- Τι σχέση έχει το πλήθος των κόκκινων εξαγώνων με το πλήθος των μπλε; Τι σχέση έχει το πλήθος των κόκκινων εξαγώνων με τον αριθμό του βήματος στο οποίο είμαστε;

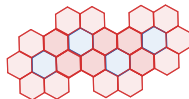
**Σημείωση:** Γενικά δεν περιμένουμε τύπους στις απαντήσεις. Περιμένουμε όμως να βρεθούν σχέσεις, ακόμη κι αν αυτές δεν εκφράζονται μέσω τύπων.

# Αναμενόμενες λύσεις

- Το παραπάνω σχήμα δεν είναι μοτίβο, γιατί έχει μόνο δύο όρους. Είναι η αρχή ενός μοτίβου, όχι ένα μοτίβο<sup>1</sup>. Ένα μοτίβο με αυτήν την αρχή είναι αυτό που προχωράει μ' αυτόν τον τρόπο (4ο βήμα, κι έχει άπειρα βήματα):



- Υπάρχει κι άλλο μοτίβο εκτός από αυτό που βρήκαμε. Για παράδειγμα, αυτό που προχωράει έτσι (4ο βήμα/άπειρα):

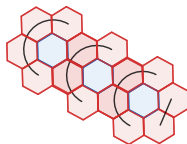


---

<sup>1</sup>Εκτός κι αν κανείς θεωρήσει το «κενό μοτίβο» ένα μοτίβο. Εδώ δεν το κάνουμε αυτό.



- Παρατηρούμε ότι σε κάθε βήμα προστίθεται κι ένα μπλε εξάγωνο, οπότε όσα βήματα έχουμε, τόσα μπλε εξάγωνα έχουμε.
- Παρατηρούμε ότι κάθε βήμα του μοτίβου μπορεί να καλυφθεί με τον εξής τρόπο:



γύρω από κάθε μπλε τετράγωνο τοποθετούνται 4 κόκκινα, και στο τέλος του μοτίβου περισσεύουν δύο κόκκινα. Οπότε έχουμε 4 φορές τα μπλε και 2. Επειδή τα μπλε είναι όσα τα βήματα, έχουμε ότι τα κόκκινα είναι 4 φορές τα βήματα και 2.