1ο Φυλλάδιο Ασκήσεων - Αναλυτική Θεωρία Αριθμών

Αναστάσιος Φράγκος: ΑΜ 1112201900239 Κυριακή, 13 Μαρτίου 2022

Συμβολισμοί - Παρατηρήσεις

1. $[n] := [1, n] \cap \mathbb{N}$ **2.** Εάν A είναι ένα σύνολο, $|A|$ είναι η πληθικότητά του **3.** χ_A είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση του συνόλου A

Άσκηση 1 – (01 στο φυλλάδιο). Έστω $d(n)$ το πλήθος των θετικών διαιρετών του n (με άλλα λόγια, $d(n) = \sum_{d|n} = (u * u)(n)$). Αποδείξτε ότι:

$$\prod_{t|n} t = n^{d(n)/2}$$

και ότι:

$$\sum_{k|n} d(k)^3 = \Big(\sum_{k|n} d(k)\Big)^2$$

■

Πρόταση (1.1): *Έστω n ένας φυσικός αριθμός. Ισχύουν οι ακόλουθοι τύποι για τα αθροίσματα αριθμών, τετραγώνων και κύβων:*

(α) *Για τα αθροίσματα αριθμών:*

$$\sum_{k\in[n]} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

(β) *Για τα αθροίσματα τετραγώνων:*

$$\sum_{k\in[n]} k^2 = \frac{n(n+1)^2 - n(n+1)/2}{3}$$

(γ) *Για τα αθροίσματα κύβων:*

$$\sum_{k\in[n]} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

Η εν λόγω πρόταση δεν θα αποδειχθεί. Μια ιδέα πάντως της απόδειξης είναι η ακόλουθη: Έστω $A_s(n)$ η αριθμητική συνάρτηση του αθροίσματος των n πρώτων διαδοχικών $s-$δυνάμεων (δηλαδή $A_s(n) = \sum_{k\in[n]} k^s$). Επειδή:

$$(k+1)^{s+1} = \sum_{t=0}^{s+1} \binom{s+1}{t} k^t = k^{s+1} + \sum_{t=0}^{s} \binom{s+1}{t} k^t \Rightarrow (k+1)^{s+1} - k^{s+1} = \sum_{t=0}^{s} \binom{s+1}{t} k^t$$

αθροίζοντας για τα διάφορα $k \in [n]$, έπεται ότι:

$$\sum_{k\in[n]} \left[(k+1)^{s+1} - k^{s+1}\right] = \sum_{k\in[n]} \sum_{t=0}^{s} \binom{s+1}{t} k^t \Rightarrow (n+1)^{s+1} - 1 = \sum_{t=0}^{s} \binom{s+1}{t} A_t(n)$$

Οπότε κάθε κλειστός τύπος του $A_s(n)$ εξαρτάται αναδρομικά από τους τύπους των $A_t(n),\ t \in [s-1]$. Μια εναλλακτική, γεωμετρική απόδειξη για το **(β)** μπορεί να βρεθεί στο:

http://users.uoa.gr/~sma1900239/files/others/gnt.pdf, στη σελίδα 32.

(Μην δώσετε πολύ σημασία στα υπόλοιπα βέβαια - ήμουν μικρός και έγραφα αηδίες. Δεν είναι καλογραμμένα.)

Λήμμα (1.1): *Οι αριθμητικές συναρτήσεις:*

$$D(n) = \sum_{k|n} d(k)^3 \ \textit{\textbf{και}}\ \Delta(n) = \Big(\sum_{k|n} d(k)\Big)^2$$

είναι πολλαπλασιαστικές. Μάλιστα, εάν m, n είναι δύο φυσικοί αριθμοί για τους οποίους $(m, n) = 1$, ισχύουν:

$$D(nm) = D(n)D(m) = \Delta(n)\Delta(m) = \Delta(nm)$$

Απόδειξη: Η μέθοδος που θα ακολουθήσουμε για την απόδειξη του συγκεκριμένου θα βασιστεί στο γεγονός ότι η πολλαπλασιαστικότητα σε δυνάμεις πρώτων συνεπάγεται την πολλαπλασιαστικότητα γενικά. Δηλαδή, εάν f είναι μια αριθμητική συνάρτηση και p^k, q^l είναι δύο δυνάμεις πρώτων με την f να παίρνει την τιμή $f(p^k q^l) = f(p^k)f(q^l)$ στο γινόμενό τους, τότε είναι πολλαπλασιαστική.

Έστω p, q δύο πρώτοι και p^k, q^l δύο δυνάμεις αυτών. Επειδή υπάρχουν ακριβώς $s+1$ διαιρέτες του p^s για τα διάφορα $0 \le s \le k$, από την **Πρόταση (1.1)** έπεται ότι:

$$D(p^k) = \sum_{s=0}^{k}(s+1)^3 = \left(\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right)^2 \ \textbf{και}\ \Delta(p^k) = \left(\sum_{s=0}^{k}(s+1)\right)^2 = \left(\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right)^2$$

Αντίστοιχα, ισχύουν φυσικά και οι:

$$D(q^l) = \sum_{s=0}^{k}(s+1)^3 = \left(\frac{(l+1)(l+2)}{2}\right)^2 \ \textbf{και}\ \Delta(q^k) = \left(\sum_{s=0}^{k}(s+1)\right)^2 = \left(\frac{(l+1)(l+2)}{2}\right)^2$$

Όσον αφορά τις τιμές των αριθμητικών συναρτήσεων στο γινόμενο $p^k q^l$, για χάρην εύκολης διατύπωσης εισάγουμε τον συμβολισμό:

Ορισμός 1 Έστω $A = \left(a_{i,j}\right)_{i,j}$ ένας πίνακας του $\mathbb{C}^{a,b}$. Ορίζουμε ως άθροισμα του πίνακα την ποσότητα:

$$\sum A := \sum_{i\in[a]}\sum_{j\in[b]} a_{i,j}$$

και παρατηρούμε ότι:

$$\Delta(p^k q^l) = \left(\sum \begin{pmatrix} d(1) & d(p) & \cdots & d(p^k) \\ d(q) & d(pq) & \cdots & d(p^k q) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d(q^l) & d(pq^l) & \cdots & d(p^k q^l) \end{pmatrix}\right)^2$$

Επειδή για τα διάφορα i, j έχουμε $d(p^j q^i) = (j+1)(i+1)$, έπεται:

$$\Delta(p^k q^l) = \left(\sum \begin{pmatrix} 1\cdot 1 & 2\cdot 1 & \cdots & (k+1)\cdot 1 \\ 1\cdot 2 & 2\cdot 2 & \cdots & (k+1)\cdot 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1(l+1) & 2(l+1) & \cdots & (k+1)(l+1) \end{pmatrix}\right)^2$$

κι αν αθροίσουμε πρώτα στις στήλες:

$$\Delta(p^k q^l) = \left(\sum_{s\in[k+1]} s\Big(\sum_{t\in[l+1]} t\Big)\right)^2 = \left(\frac{(k+1)(k+2)(l+1)(l+2)}{2\cdot 2}\right)^2 = \Delta(p^k)\Delta(q^l)$$

το οποίο συνεπάγεται την πολλαπλασιαστικότητα της D.

Όσον αφορά την αριθμητική συνάρτηση Δ, ακολουθούμε διαδικασία ανάλογη - την εκτιμούμε σε γινόμενο δύο δυνάμεων πρώτων p^k, q^l και την παριστούμε με άθροισμα πίνακα:

$$D(p^k q^l) = \sum \begin{pmatrix} d(1)^3 & d(p)^3 & \cdots & d(p^k)^3 \\ d(q)^3 & d(pq)^3 & \cdots & d(p^k q)^3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d(q^l)^3 & d(pq^l)^3 & \cdots & d(p^k q^l)^3 \end{pmatrix}$$

Επειδή για τα διάφορα i, j έχουμε $d(p^j q^i) = (j+1)(i+1)$, έπεται:

$$D(p^k q^l) = \sum \begin{pmatrix} 1^3\cdot 1^3 & 2^3\cdot 1^3 & \cdots & (k+1)^3\cdot 1^3 \\ 1^3\cdot 2^3 & 2^3\cdot 2^3 & \cdots & (k+1)^3\cdot 2^3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1^3(l+1)^3 & 2^3(l+1)^3 & \cdots & (k+1)^3(l+1)^3 \end{pmatrix}$$

κι αν αθροίσουμε πρώτα στις στήλες:

$$D(p^k q^l) = \sum_{s\in[k+1]} s^3 \Big(\sum_{t\in[l+1]} t^3 \Big) = \left(\frac{(k+1)(k+2)}{2} \right)^2 \cdot \left(\frac{(l+1)(l+2)}{2} \right)^2 = D(p^k)D(q^l)$$

το οποίο συνεπάγεται την πολλαπλασιαστικότητα της Δ. Από τη διαδικασία της απόδειξης μάλιστα προκύπτει ότι για κάθε δύο σχετικά πρώτους m, n:

$$D(mn) = D(m)D(n) = \Delta(m)\Delta(n) = \Delta(mn)$$

(Να σημειωθεί ότι η περίπτωση όπου κάποιο από τα m, n είναι 1 δεν καλύπτεται από την απόδειξη - είναι όμως κάτι τετριμμένο).

□

Λύση: Όσον αφορά το πρώτο σκέλος, θεωρούμε το γινόμενο $\prod_{t|n} t$ και παρατηρούμε ότι *εν γένει* - όταν δηλαδή ο n δεν είναι τέλειο τετράγωνο - οι διαιρέτες του έρχονται σε ζεύγη $t, \dfrac{n}{t}$. Σε αυτήν την μη γενική περίπτωση, κανείς παρατηρεί ότι:

$$\prod_{t|n} t = \prod_{\substack{t|n \\ t<\sqrt{n}}} t \cdot \prod_{\substack{t|n \\ t>\sqrt{n}}} \frac{n}{t} = n^{d(n)/2}$$

Το 'λεπτό' σημείο έγκειται στο τι συμβαίνει αν ο n είναι τέλειο τετράγωνο, αφού δεν είναι δυνατόν κανείς να πάρει $d(n)/2$ ζεύγη διαιρετών που πολλαπλασιαζόμενοι δίνουν n. Εάν ο n είναι τέλειο τετράγωνο, όλοι οι διαιρέτες t του n ορίζουν *διακεκριμένο* διαιρέτη $\dfrac{n}{t}$ εάν και μόνο αν $t \neq \sqrt{n}$. Κανείς λοιπόν μπορεί να κατασκευάσει $\big(d(n)-1\big)/2$ ζεύγη διαιρετών που πολλαπλασιαζόμενοι δίνουν n, και θα περισσεύει ένα $\sqrt{n}$. Η γενική περίπτωση έχει ως εξής:

$$\prod_{t|n} t = \Big[\prod_{\substack{t|n \\ t<\sqrt{n}}} t \Big] \cdot \Big[\prod_{\substack{t|n \\ t>\sqrt{n}}} \frac{n}{t} \Big] \cdot \big(\sqrt{n} - \sqrt{n}\chi_{T^c}(n)\big) = n^{(d(n)-\chi_T(n))/2+\chi_T(n)/2} = n^{d(n)/2}$$

όπου T είναι το σύνολο $T = \{n \mid n = k^2 \text{ με } k \in \mathbb{N}\}$ και χ_Σ είναι η δείκτρια συνάρτηση του συνόλου Σ.

Όσον αφορά το δεύτερο σκέλος, από το **Λήμμα (1.1)** προκύπτει ότι:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ D(n) = \Delta(n)$$

αφού οι αριθμοί $n, 1$ είναι σχετικά πρώτοι. Επομένως:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k|n} d(k)^3 = \Big(\sum_{k|n} d(k)\Big)^2$$

□

Ουσιαστικά στην προηγούμενη λύση η δυσκολία βρίσκεται στην απόδειξη της πολλαπλασιαστικότητας των D, Δ. Κανείς θα μπορούσε να αποφύγει την 'επίπονη' διαδικασία παρατηρώντας ότι:

- Η $u \equiv 1$ είναι (πλήρως) πολλαπλασιατική συνάρτηση,
- Η d είναι πολλαπλασιαστική συνάρτηση ως γινόμενο Dirichlet πολλαπλασιαστικών συναρτήσεων ($d = u * u$),
- Κάθε δύναμη πολλαπλασιαστικής συνάρτησης είναι πολλαπλασιαστική συνάρτηση,
- Βάσει των παραπάνω, οι $D = d^3 * u$ και $\Delta = (d * u)^2$ είναι πολλαπλασιαστικές συναρτήσεις.

Άσκηση 2 – (02 στο φυλλάδιο). Η συνάρτηση J_k του Jordan γενικεύει τη συνάρτηση φ του Euler και ορίζεται από την:

$$J_k(n) = n^k \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p^k}\right)$$

Αποδείξτε ότι:

$$J_k(n) = \sum_{d|n} \mu(d) \left(\frac{n}{d}\right)^k \quad \textbf{και} \quad n^k = \sum_{d|n} J_k(d)$$

■

Λύση: Οι δύο τύποι που ζητείται να βρεθούν είναι μεταξύ τους ισοδύναμοι, οπότε για την λύση της άσκησης αρκεί να αποδειχθεί ένας εξ αυτών.

$$J_k = \mu * N^k \Leftrightarrow J_k * u = N^k$$

(χρησιμοποιείται ότι $\mu^{-1} = u$).

Συγκεκριμένα, θα αποδείξουμε τη σχέση $J_k = \mu * N^k \Rightarrow J_k(n) = \sum_{d|n} \mu(d) \left(\frac{n}{d}\right)^k$, για την οποία θα χρειαστούμε το ακόλουθο λήμμα:

Λήμμα 2.1: *Έστω P ένα μιγαδικό, μονικό πολυώνυμο βαθμού ν και a_i, $i \in [\nu]$ οι ρίζες του. Το P είναι της μορφής:*

$$P(z) = \prod_{i\in[\nu]} (z - a_i) = \sum_{I\subseteq[\nu]} \frac{(-1)^{|I|} z^{\nu-|I|}}{\prod_{j\in I} a_j}$$

Απόδ. του λήμματος: Πράγματι, κάνοντας τους πολλαπλασιασμούς στο γινόμενο $\prod_{i\in[\nu]}(z - a_i)$, προκύπτει ότι:

$$P(z) = 1 + \sum_{i_1\in[\nu]} \frac{-1 \cdot z^{\nu-1}}{a_{i_1}} + 1 + \sum_{i_1,i_2\in[\nu]} \frac{+1 \cdot z^{\nu-2}}{a_{i_1} a_{i_2}} + \cdots = \sum_{I\subseteq[\nu]} \frac{(-1)^{|I|} z^{\nu-|I|}}{\prod_{j\in I} a_j}$$

Δεδομένου του λήμματος, το $J_k(n)$ παίρνει τη μορφή:

$$J_k(n) = \sum_{I\subseteq[s(n)]} \frac{(-1)^{|I|} z^{s(n)-|I|}}{\prod_{j\in I} p_j}, \text{ όπου } s(n) \text{ είναι το πλήθος των πρώτων διαιρετών του } n = \prod_{j\in[s(n)]} p_j^{\lambda_j},\ \lambda_j \in \mathbb{N}$$

Ειδικότερα, εξ ορισμού της μ:

$$J_k(n) = n^k \sum_{I\subseteq[s(n)]} \frac{\mu\left(\prod_{j\in I} p_j\right)}{\prod_{j\in I} (p_j)^k} = n^k \sum_{d|n} \frac{\mu(d)}{d^k}$$

αφού για διαιρέτες d του n οι οποίοι δεν είναι γινόμενο διακεκριμένων πρώτων (σε δύναμη 1) έχουν $\mu(d) = 0$. Ισοδύναμα λοιπόν έχουμε ότι:

$$J_k(n) = n^k \sum_{d|n} \frac{\mu(d)}{d^k} = \sum_{d|n} \mu(d) \left(\frac{n}{d}\right)^k$$

Άσκηση 3 – (03 στο φυλλάδιο). Ορίζουμε $\sigma(n) = \sum_{d|n} d$, το άθροισμα των διαιρετών του n. Αποδείξτε ότι η σ είναι πολλαπλασιαστική και βρείτε την Dirichlet αντίστροφή της. Επιπλέον, δείξτε ότι:

$$\sum_{k|n} \sigma(k) \varphi\left(\frac{n}{k}\right) = nd(n), \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}$$

Λύση: Η σ μπορεί ισοδύναμα να γραφεί ως γινόμενο Dirichlet $\sigma = N * u$, όπου $N(n) = n$ και $u \equiv 1$. Επειδή οι N, u είναι πλήρως πολλαπλασιαστικές συναρτήσεις (ειδικότερα πολλαπλασιαστικές), το γινόμενο Dirichlet αυτών είναι πολλαπλασιαστική συνάρτηση.

Όσον αφορά την αντίστροφη Dirichlet της σ, θα χρησιμοποιήσουμε ότι η αντίστροφη Dirichlet f^{-1} μιας πλήρους πολλαπλασιαστικής συνάρτησης είναι η μf. Συγκεκριμένα για την N, η N^{-1} είναι ακριβώς η μN.

Συνοπτικά, εάν η f είναι πλήρως πολλαπλασιαστική συνάρτηση:

$$N * \mu N = \sum_{k|n} k \cdot \mu\left(\frac{n}{k}\right) f\left(\frac{n}{k}\right) = f(n) \sum_{k|n} \mu\left(\frac{n}{k}\right) = f(n) I(n) = f(1)\chi_{\{1\}}(n) = 1\chi_{\{1\}}(n) = I(n)$$

κι επειδή $f * \mu f = \mu f * f$, έπεται ότι $f * \mu f = \mu f * f = I$, δηλαδή η μf είναι μια αντίστροφη Dirichlet της f. Η αντίστροφη όμως μιας αριθμητικής συνάρτησης είναι μοναδική, επομένως $\mu f = f^{-1}$.

Έχουμε λοιπόν με αυτά ότι:

$$\sigma = N * u \Rightarrow \sigma^{-1} = N^{-1} * u^{-1} = \mu N * \mu$$

Όσον αφορά το δεύτερο μέρος της άσκησης, ο ζητούμενος τύπος παρίσταται ισοδύναμα μέσω γινομένων Dirichlet στη μορφή $\sigma * \varphi = Nd$. Ξεκινώντας λοιπόν απο τη γνωστή σχέση $\varphi = \mu * N$, θα αποδείξουμε την ισοδύναμη Dirichlet μορφή της ζητούμενης σχέσης.

$$\varphi = \mu * N \Rightarrow \sigma * \varphi = (N * u) * (\mu * N) = N * (u * \mu) * N = N * N$$

Επειδή όμως η N είναι πλήρως πολλαπλασιαστική:

$$(N * N)(n) = \sum_{k|n} N(k) N\left(\frac{n}{k}\right) = N(n) \sum_{k|n} = N(n)d(n)$$

Το οποίο αποδεικνύει τον τύπο $\sigma * \varphi = Nd$.

Άσκηση 4 – (04 στο φυλλάδιο). Αποδείξτε ότι:

$$\sum_{\substack{(k,n)=1 \\ k\in[n]}} k = \frac{n\varphi(n)}{2}$$

■

Λύση: Έστω k ένας φυσικός αριθμός μικρότερος του n. Εάν ο k είναι σχετικά πρώτος προς τον n, ο αριθμός $n-k \in [n]$ είναι επίσης σχετικά πρώτος προς τον n. Αυτό διότι αν υπήρχε κοινός διαιρέτης $d > 1$ των $n-k$ και n, αυτός θα διαιρούσε τη διαφορά $n-(n-k)$, η οποία είναι ο k.

Επειδή δεν είναι δυνατόν οι k, $n-k$ να ταυτίζονται (αν ταυτιζόνταν, $k = n-k \Rightarrow 2k = n \Rightarrow k|n$), μπορούμε να εκφράσουμε ισοδύναμα το ζητούμενο άθροισμα στα $\varphi(n)/2$ ζεύγη σχετικά πρώτων φυσικών προς το n, την μορφής $(k, n-k)$ με $k < n-k$, ως εξής:

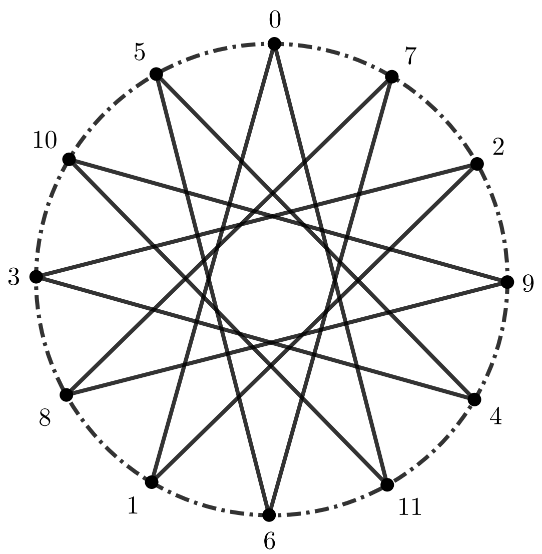
$$\sum_{(k,n-k)\in\mathfrak{D}_n} \big(k + (n-k)\big) = \sum_{(k,n-k)\in\mathfrak{D}_n} n, \text{ όπου } \mathfrak{D}_n = \big\{(k,\ n-k) \in \mathbb{N}^2 \mid (k, n-k) = 1 \text{ και } k < n-k\big\}$$

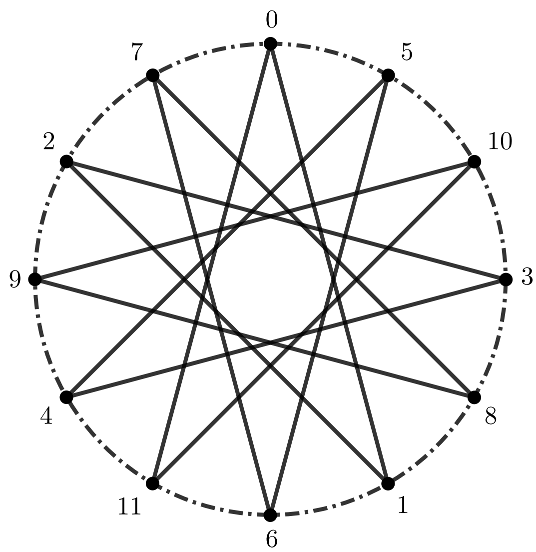
Επειδή το $\mathfrak{D}_n$ έχει πληθικότητα $\varphi(n)/2$, έχουμε τη ζητούμενη σχέση:

$$\sum_{\substack{(k,n)=1 \\ k\in[n]}} k = \frac{n\varphi(n)}{2}$$

Κανείς θα μπορούσε να προσεγγίσει διαφορετικά το συγκεκριμένο πρόβλημα - κάπως γεωμετρικότερα. Έστω ένας κύκλος στην περιφέρεια του οποίου έχουν τοποθετηθεί ομοιόμορφα n σημεία. Στον κύκλο αυτόν κανείς μπορεί να δημιουργήσει "διαδρομές βήματος k", δηλαδή κλειστές πολυγωνικές γραμμές που διατρέχουν τα n σημεία ανά k.

Στο παρακάτω σχήμα εικονίζονται οι διαδρομές βημάτων 5 και 7 αντίστοιχα, στον κύκλο των 12 σημείων.





Η συνάρτηση φ στο n, γεωμετρικά αναπαριστά το πλήθος των βημάτων $k \leq n$ που κατασκευάζουν διαδρομές στον κύκλο των n σημείων, οι οποίες διατρέχουν και τα n σημεία του.

Θεωρούμε λοιπόν το ακόλουθο ερώτημα:

Ποιό είναι το άθροισμα των μηκών των διαδρομών που διατρέχουν όλα τα σημεία ενός κύκλου n σημείων;

το οποίο είναι ισοδύναμο με το αρχικό μας ερώτημα, και θα διερευνήσουμε αυτό αντί του αρχικού. Να σημειωθεί εδώ ότι το μήκος στην περίπτωσή μας νοείται με την εξής έννοια: εάν A και B είναι δύο σημεία στον κύκλο των n σημείων, η (ευθύγραμμη) διαδρομή από το A στο B έχει μήκος όσο το βήμα του χρειάζεται ώστε κανείς να μεταφερθεί από το A στο B.

Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι διαθέτουμε μια διαδρομή βήματος k σε κύκλο n σημείων, η οποία διέρχεται από καθένα από τα n σημεία του κύκλου. Η φορά διαγραφής αυτής της διαδρομής μπορεί να είναι (χωρίς βλάβη της γενικότητας) αριστερόστροφη, οπότε εάν η ίδια τροχιά διαγραφεί δεξιόστροφα, προκύπτει μια νέα διαδρομή η οποία διέρχεται από καθένα από τα n σημεία. Η τελευταία είναι ουσιαστικά η διαδρομή βήματος $n-k$.

Για κάθε λοιπόν $s < n$, θεωρούμε δ_s τη διαδρομή βήματος s, η οποία ξεκινά από ένα συγκεκριμένο σημείο του κύκλου και διέρχεται από καθένα από τα n σημεία του. Παρατηρούμε ότι:

$$\sum_{\substack{k<n \\ (k,n)=1}} nk = \sum_{\substack{k<n \\ (k,n)=1}} \text{Μήκος}(\delta_k) = \sum_{\substack{k<n-k \\ (k,n)=1}} \Big[\text{Μήκος}(\delta_k) + \text{Μήκος}(\delta_{n-k})\Big] = \sum_{\substack{k<n-k \\ (k,n)=1}} \big[nk + n(n-k)\big] = n^2 \frac{\varphi(n)}{2}$$

ή ισοδύναμα:

$$\sum_{\substack{(k,n)=1 \\ k\in[n]}} k = \frac{n\varphi(n)}{2}$$

Άσκηση 5 – (08 στο φυλλάδιο).

α. Έστω $f \not\equiv 0$ μία πλήρως πολλαπλασιαστική συνάρτηση. Αποδείξτε ότι:

$$(f \cdot g)^{-1} = f \cdot g^{-1} \qquad (*)$$

για κάθε αριθμητική συνάρτηση g με $g(1) \neq 0$.

β. Αποδείξτε ότι αν η f είναι πολλαπλασιαστική και η ($*$) ισχύει για την $g = \mu^{-1}$, τότε η f είναι πλήρως πολλαπλασιαστική.

■

$\boxed{\text{α.}}$ *Λύση:* Έστω $f \not\equiv 0$ μια πλήρως πολλαπλασιαστική συνάρτηση και g μια αριθμητική συνάρτηση με $g(1) \neq 0$. Παρατηρούμε ότι:

$$\big[(f \cdot g^{-1}) * (f \cdot g)\big](n) = \sum_{d|n} \left[(f \cdot g^{-1})(d)(f \cdot g)\left(\frac{n}{d}\right)\right] = \sum_{d|n} f(d) f\left(\frac{n}{d}\right) g^{-1}(d) g\left(\frac{n}{d}\right)$$

Επειδή η f είναι πλήρως πολλαπλασιαστική, $f(d)f\left(\frac{n}{d}\right) = f(n)$:

$$\sum_{d|n} \left[(f \cdot g^{-1})(d)(f \cdot g)\left(\frac{n}{d}\right)\right] = \sum_{d|n} f(d) f\left(\frac{n}{d}\right) g^{-1}(d) g\left(\frac{n}{d}\right) = f(n) \sum_{d|n} g^{-1}(d) g\left(\frac{n}{d}\right) = f \cdot (g^{-1} * g)$$

κι επειδή η g^{-1} είναι η αντίστροφη Dirichlet της g:

$$\sum_{d|n} \left[(f \cdot g^{-1})(d)(f \cdot g)\left(\frac{n}{d}\right)\right] = f(n) \cdot (g^{-1} * g)(n) = f(n) I(n) = f(n)\chi_{\{1\}}(n) = \chi_{\{1\}}(n) = I(n)$$

Αυτό ουσιαστικά δείχνει ότι η $f \cdot g^{-1}$ είναι η αντόστροφη Dirichlet της $f \cdot g$, αφού ο πολλαπλασιασμός Dirichlet είναι αντιμεταθετικός.

$\boxed{\beta.}$ *Λύση:* Ήδη γνωρίζουμε ότι η f είναι πολλαπλασιαστική συνάρτηση, οπότε εάν $n = \prod_i p_i^{a_i}$ είναι μία ανάλυση τυχόντος n σε πρώτους παράγοντες:

$$f(n) = f\Big(\prod_i p_i^{a_i}\Big) = \prod_i f(p_i^{a_i})$$

Για να αποδείξουμε λοιπόν την πλήρη πολλαπλασιαστικότητα, αρκεί να δείξουμε ότι για πρώτο p και για κάθε δύναμη αυτού p^a ισχύει $f(p^a) = \big(f(p)\big)^a$ και επιπλέον $f(1) = 1$. Το $f(1) = 1$ όμως έπεται σχετικά άμεσα, αφού διαφορετικά η f δεν θα διέθετε αντίστροφο Dirichlet ($f \equiv 0$).

Υπο την υπόθεση ότι η μf αποτελεί αντίστροφη Dirichlet της f, έχουμε ότι για κάθε δύναμη πρώτου p^a:

$$\big((\mu f) * f\big)(p^a) = I(p^a) = 0 \text{ (διότι } p^a > 1)$$

ή ισοδύναμα:

$$\sum_{d|p^a} \mu(d) f(d) f\left(\frac{p^a}{d}\right) = 0$$

Στο σημείο αυτό παρατηρούμε ότι κάθε διαιρέτης d του p^a είναι της μορφής p^k για τα διάφορα $k+1 \in [a+1]$, κι επομένως η συνάρτηση του Möbius μηδενίζεται σε κάθε $d = p^k,\ k \geq 2$. Έτσι το εν λόγω άθροισμα εκφυλίζεται σε 2 όρους:

$$0 = \sum_{d|p^a} \mu(d) f(d) f\left(\frac{p^a}{d}\right) = \mu(1) f(1) f(p^a) + \mu(p) f(p) f\left(\frac{p^a}{p}\right) = f(p^a) - f(p) f(p^{a-1})$$

κι επομένως $f(p^a) = f(p) f(p^{a-1})$, για κάθε πρώτο p και για κάθε δύναμη αυτού p^a. Επαγωγικά λοιπόν προκύπτει η σχέση $f(p^a) = \big(f(p)\big)^a$ και κατ' επέκταση το ζητούμενο.

Άσκηση 6 – (09 στο φυλλάδιο). Ορίζουμε $\nu(1) = 0$ και για $n > 1$ ορίζουμε $\nu(n)$ να είναι το πλήθος των διακεκριμένων πρώτων παραγόντων του n. Αποδείξτε ότι αν $f = \mu * \nu$, τότε $f(n) \in \{0, 1\}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. ■

Λύση: Γνωρίζουμε ότι η αντίστροφη Dirichlet της μ είναι η u, οπότε μπορούμε να μετασχηματίσουμε τη σχέση $f = \mu * \nu$ στη $\nu = f * u$.

Ορίζουμε τώρα συνάρτηση $g : \mathbb{N} \to \{0, 1\}$ ως εξής:

$$g(n) = \begin{cases} 1, & \text{εάν ο } n \text{ είναι πρώτος} \\ 0, & \text{εάν ο } n \text{ είναι σύνθετος} \end{cases}$$

και παρατηρούμε ότι:

$$(g * u)(n) = \sum_{\substack{d \text{ πρώτος} \\ d|n}} = \nu(n) \Rightarrow g * u = \nu$$

Επομένως, $g * u = f * u \Rightarrow g = f$, το οποίο αποδεικνύει ότι $f(n) \in \{0, 1\}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.