Θεωρία Συνόλων

Ασκήσεις, Μέρος ΙΙΙ

Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Φράγκος Αναστάσιος: ΑΜ1112201900239

Άσκηση 1: *Αποδείξτε τις παρακάτω ιδιότητες για τις πράξεις στο σύνολο ω των φυσικών αριθμών:*

1.1 Επιμεριστική ιδιότητα:

$$(\forall n, m, k \in \omega)[n \cdot (m+k) = n \cdot m + n \cdot k]$$

1.2 Η πράξη του πολλαπλασιασμού στους φυσικούς αριθμούς είναι προσεταιριστική. Δηλαδή:

$$(\forall n, m, k \in \omega)[(n \cdot m) \cdot k = n \cdot (m \cdot k)]$$

1.1 Θεωρούμε N, M, K να είναι 3 σύνολα πληθικότητας n, m και k αντίστοιχα, με την επιπλέον υπόθεση ότι τα M, K είναι ξένα[1]. Ισχυριζόμαστε ότι ισχύει η ισοπληθικότητα μεταξύ των συνόλων $N \times (M \cup K), (N \times M) \cup (N \times K)$. Πράγματι, ισχύει η ισότητα των δύο:

Εάν $(a, b) \in N \times (M \cup K)$, τότε $a \in N$ και $b \in M \cup N$, ή αλλιώς $a \in N$ και $[b \in M$ ή $b \in N]$. Δηλαδή, $[a \in N$ και $b \in M]$ ή $[a \in N$ και $b \in K] \Rightarrow (a, b) \in (N \times M) \cup (N \times K)$. Επομένως, $N \times (M \cup K) \subseteq (N \times M) \cup (N \times K)$.

Αντίστοιχα, εάν $(a, b) \in (N \times M) \cup (N \times K)$, τότε $a \in N$ και $[b \in M$ ή $b \in K]$. Δηλαδή $a \in N$ και $b \in M \cup N \Rightarrow (a, b) \in N \times (M \cup K)$. Επομένως, $N \times (M \cup K) \supseteq (N \times M) \cup (N \times K)$.

Τελικά έχουμε την ισότητα $N \times (M \cup K) = (N \times M) \cup (N \times K)$ και συνεπώς το ζητούμενο.

1.2 Θεωρούμε N, M, K να είναι 3 σύνολα πληθικότητας n, m και k αντίστοιχα. Ισχυριζόμαστε ότι ισχύει η ισοπληθικότητα μεταξύ των συνόλων $(N \times M) \times K,\ N \times (M \times K)$. Πράγματι, έστω στοιχεία a, b, c στα N, M, K αντίστοιχα. Θεωρούμε την συνάρτηση f η οποία για κάθε ζεύγος $\big((a, b), c\big)$ αντιστοιχεί το ζεύγος $\big(a, (b, c)\big)$. Αυτή η συνάρτηση είναι αμφιμονοσήμαντη, αφού η αντίστροφή της είναι η g, η οποία αντιστοιχεί κάθε $\big(a, (b, c)\big)$ στο $\big((a, b), c\big)$.

Άσκηση 2: *Έστω κ, λ πληθάριθμοι. Αποδείξτε ότι:*

$$\kappa \cdot \lambda = 0 \Leftrightarrow \kappa = 0 \text{ ή } \lambda = 0$$

Έστω K, Λ δύο σύνολα με πληθαρίθμους κ και λ αντίστοιχα. Εάν $\kappa \cdot \lambda = 0$, τότε $|K \times \Lambda| = 0$, ή ισοδύναμα $K \times \Lambda = \emptyset$. Ισχυριζόμαστε ότι τουλάχιστον ένα από τα K, Λ είναι το κενό σύνολο. Πράγματι, εάν κανένα από αυτά δεν ήταν κενό, τότε θα υπήρχε $a \in K$ και $b \in \Lambda$. Δηλαδή θα υπήρχε $(a, b) \in K \times \Lambda$, το οποίο είναι άτοπο. Δείξαμε λοιπόν ότι $K = \emptyset$ ή $\Lambda = \emptyset \Rightarrow \kappa = 0$ ή $\lambda = 0$.

Άσκηση 3: *Αποδείξτε ότι $\mathfrak{c}^{\mathfrak{c}} = 2^{\mathfrak{c}}$ (όπου $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$ είναι ο πληθάριθμος του συνεχούς).*

Εφόσον $\mathfrak{c} = |\mathbb{R}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$ και $|\mathbb{N}| = \aleph_0$, θα πρέπει $\mathfrak{c} \geq \aleph_0$. Επειδή ακόμη $\aleph_0 \geq 2$, έπεται η ανισοτική σχέση $\mathfrak{c}^{\mathfrak{c}} \geq 2^{\mathfrak{c}}$.

Για να δείξουμε τελικά την ισοπληθικότητα, θα πρέπει να δείξουμε και την αντίστροφη ανισότητα. Θεωρούμε λοιπόν την συνάρτηση $M : (\mathbb{R} \to \mathbb{R}) \to (\mathbb{R}^2 \to \{0, 1\})$, οποία σε κάθε $f \in (\mathbb{R} \to \mathbb{R})$ αντιστοιχεί την συνάρτηση $g \in (\mathbb{R}^2 \to \{0, 1\})$, που ορίζεται ως:

$$g(x, y) = \begin{cases} 0, & (x, y) \notin f \\ 1, & (x, y) \in f \end{cases}$$

και παρατηρούμε ότι αυτή είναι μονομορφισμός. Πράγματι, αν $f_1 \neq f_2 \in (\mathbb{R} \to \mathbb{R})$, αυτές θα διαφέρουν σε ένα τουλάχιστον σημείο, έστω στο a. Επομένως, $(a, f_2(a)) \notin f_1$ και $(a, f_2(a)) \in f_2$. Από αυτό έπεται ότι $M(f_1)(a, f_2(a)) = 0$ και $M(f_2)(a, f_2(a)) = 1$, οπότε κατ' επέκταση $M(f_1) \neq M(f_2)$.

Από το Μέρος: '**Μέρος I**' των ασκήσεων, και συγκεκριμένα στην Άσκηση: '**Άσκηση 2, *2.2***', έχουμε δείξει ότι ισχύει η ισοπληθικότητα:

$$(A \to B) =_c (X \to Y), \text{ όταν } A =_c X \text{ και } B =_c Y$$

Επειδή επιπλέον από την Άσκηση: '**Άσκηση 5**' του ίδιου μέρους έχουμε βρει ότι $\mathbb{R}^2 =_c \mathbb{R}$, στην περίπτωσή μας θα πρέπει να ισχύει:

$$(\mathbb{R}^2 \to \{0, 1\}) =_c (\mathbb{R} \to \{0, 1\})$$

[1] Η υπόθεση αυτή είναι δυνατόν να γίνει: παράδειγμα τριών τέτοιων συνόλων είναι τα $n, k \times \{0\}, l \times \{1\}$

Επομένως, ο προηγούμενος μονομορφισμός M μας δείχνει ουσιαστικά ότι $(\mathbb{R} \to \mathbb{R}) \leq_c (\mathbb{R} \to \{0,1\})$, ή ισοδύναμα ότι $\mathfrak{c}^{\mathfrak{c}} \leq 2^{\mathfrak{c}}$.

Αυτό αποδεικνύει το ζητούμενο, ότι δηλαδή $\mathfrak{c}^{\mathfrak{c}} = 2^{\mathfrak{c}}$.

Άσκηση 4: *Έστω κ πληθάριθμος τέτοιος ώστε $\kappa > 1$ και $\kappa \cdot \kappa = \kappa$. Αποδείξτε ότι $2^{\kappa} = \kappa^{\kappa}$.*

Έστω σύνολο K το οποίο έχει πληθάριθμο κ. Για να δείξουμε την ισότητα $2^{\kappa} = \kappa$, ισοδύναμα θα δείξουμε την ισοπληθικότητα των συνόλων:

$$(K \to K) =_c (K \to \{0,1\})$$

Για τον σκοπό αυτό θεωρούμε την συνάρτηση $M : (K \to K) \to (K^2 \to \{0,1\})$, η οποία αντιστοιχεί σε κάθε $f \in (K \to K)$ την συνάρτηση $g \in (K^2 \to \{0,1\})$, που ορίζεται ως:

$$g(x,y) = \begin{cases} 0, & (x,y) \notin f \\ 1, & (x,y) \in f \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι αυτή είναι μία αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση.

Πράγματι, η συνάρτηση $\tilde{M} : (K^2 \to \{0,1\}) \to (K \to K)$ η οποία σε κάθε συνάρτηση $g \in (K^2 \to \{0,1\})$ αντιστοιχεί την $f \in (K \to K)$, που ορίζεται ως:

$$f(x) = y \Leftarrow g(x,y) = 1$$

είναι η αντίστροφη απεικόνιση της M. Αυτό δείχνει την ισοπληθικότητα:

$$(K^2 \to \{0,1\}) =_c (K \to K)$$

Από το Μέρος: '**Μέρος I**' των ασκήσεων, και συγκεκριμένα στην Άσκηση: '**Άσκηση 2, *2.2***', έχουμε δείξει ότι ισχύει η ισοπληθικότητα:

$$(A \to B) =_c (X \to Y), \text{ όταν } A =_c X \text{ και } B =_c Y$$

Επειδή επιπλέον $\kappa \cdot \kappa = \kappa$, θα πρέπει να αληθεύει η ισοπληθικότητα $K \times K =_c K$, και κατ' επέκταση ότι:

$$(K \to \{0,1\}) =_c (K \to K)$$

Άσκηση 5: *Σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις, βρείτε πληθαρίθμους κ, λ, μ για να αποδείξετε ότι οι παρακάτω συνεπαγωγές **δεν** ισχύουν:*

5.1 $\kappa < \lambda \Rightarrow \kappa + \mu < \lambda + \mu$

5.2 $\kappa < \lambda \Rightarrow \kappa \cdot \mu < \lambda \cdot \mu$

5.3 $\kappa < \lambda \Rightarrow \kappa^{\mu} < \lambda^{\mu}$

5.4 $\kappa < \lambda \Rightarrow \mu^{\kappa} < \mu^{\lambda}$

5.1 Δεν ισχύει για $\kappa = \aleph_0,\ \lambda = \mathfrak{c},\ \mu = 2^{\mathfrak{c}}$.

Πράγματι, ισχύει ότι $\aleph_0 < \mathfrak{c}$ και επιπλέον ισχυριζόμαστε ότι $\aleph_0 + 2^{\mathfrak{c}} = \mathfrak{c} + 2^{\mathfrak{c}}$. Αυτό διότι:

$$2^{\mathfrak{c}} \leq \aleph_0 + 2^{\mathfrak{c}} \leq 2^{\mathfrak{c}} + 2^{\mathfrak{c}} = 2^{\mathfrak{c}+1} = 2^{\mathfrak{c}}$$

$$2^{\mathfrak{c}} \leq \mathfrak{c} + 2^{\mathfrak{c}} \leq 2^{\mathfrak{c}} + 2^{\mathfrak{c}} = 2^{\mathfrak{c}+1} = 2^{\mathfrak{c}}$$

5.2 Δεν ισχύει για $\kappa = \aleph_0,\ \lambda = \mathfrak{c},\ \mu = 2^{\mathfrak{c}}$.

Πράγματι, ισχύει ότι $\aleph_0 < \mathfrak{c}$ και επιπλέον ισχυριζόμαστε ότι $\aleph_0 \cdot 2^{\mathfrak{c}} = \mathfrak{c} \cdot 2^{\mathfrak{c}}$. Αυτό διότι:

$$2^{\mathfrak{c}} \leq \aleph_0 \cdot 2^{\mathfrak{c}} \leq 2^{\mathfrak{c}} \cdot 2^{\mathfrak{c}} = 2^{2\mathfrak{c}} = 2^{\mathfrak{c}}$$

$$2^{\mathfrak{c}} \leq \mathfrak{c} \cdot 2^{\mathfrak{c}} \leq 2^{\mathfrak{c}} \cdot 2^{\mathfrak{c}} = 2^{2\mathfrak{c}} = 2^{\mathfrak{c}}$$

5.3 Δεν ισχύει για[2] $\kappa = \aleph_0,\ \lambda = \mathfrak{c},\ \mu = \aleph_0$.

[2] Μια ευκολότερη, περισσότερο τετριμμένη περίπτωση είναι αυτή όπου $\kappa, \lambda \neq \mu = 0$

Πράγματι, αυτό έχει δειχθεί στο Μέρος '**Μέρος Ι**' των ασκήσεων, και συγκεκριμένα στην Άσκηση: '**Άσκηση 9**', αφού το αποτέλεσμα της άσκησης έδειξε ότι $(\mathbb{N} \to \mathbb{R}) =_c \mathbb{R}$ και επιπλέον κατά την διάρκεια της απόδειξης βρέθηκε μονομορφισμός $\Psi : \Psi_6 \circ \Psi_5 \circ \Psi_4 \circ \Psi_3 \circ \Psi_2 \circ \Psi_1$:

$$(\mathbb{N} \to \mathbb{R}) \overset{\Psi_1}{\rightarrowtail} (\mathbb{R} \to [0,1]) \overset{\Psi_2}{\rightarrowtail} (\mathbb{N} \to \mathbb{N}^3) \overset{\Psi_3}{\rightarrowtail} (\mathbb{N} \to \mathbb{N}) \overset{\Psi_4}{\rightarrowtail} \mathcal{P}(\mathbb{N}^2) \overset{\Psi_5}{\rightarrowtail} \mathcal{P}(\mathbb{N}) \overset{\Psi_6}{\rightarrowtail} \mathbb{R}$$

οπότε:

$$(\mathbb{N} \to \mathbb{R}) =_c (\mathbb{N} \to \mathbb{N}) =_c \mathbb{R}$$

5.4 Δεν ισχύει για $\kappa = 1,\ \lambda = 2,\ \mu = 1$ $(1^1 = 1^2)$.

Άσκηση 6: *Έστω κ μη μηδενικός πληθάριθμος. Αποδείξτε ότι δεν υπάρχει σύνολο που να έχει ως στοιχεία όλα τα σύνολα με πληθάριθμο κ.*

Εφόσον $\kappa \neq 0$, κάθε σύνολο K με πληθάριθμο κ θα έχει τουλάχιστον 1 στοιχείο. Έστω K ένα σύνολο με πληθάριθμο κ και $a \in K$ ένα στοιχείο του. Υποθέτουμε προς άτοπο ότι η κλάση $[\![A \mid set(A),\ |K| = \kappa]\!]$ είναι σύνολο. Επειδή είναι σύνολο, το υποσύνολό της:

$$[\![(K - \{a\}) \cup \{b\} \mid b \in \mathcal{W}]\!] \subseteq [\![A \mid set(A),\ |A| = \kappa]\!],\ \text{όπου } \mathcal{W} \text{ ο κόσμος των αντικειμένων}$$

θα είναι επίσης σύνολο. Θεωρούμε τέλος την συνάρτηση f που ορίζεται ως:

$$f(X) = \begin{cases} b, & \text{εάν } X = (K - \{a\}) \cup \{b\} \\ a, & \text{εάν } X = K \end{cases}$$

και υπό τις υποθέσεις μας θα πρέπει να ισχύει ότι το:

$$f\Big[[\![(K - \{a\}) \cup \{b\} \mid b \in \mathcal{W}]\!]\Big] = \mathcal{W}$$

είναι σύνολο. Αυτό είναι όμως άτοπο.

Άσκηση 7: *Έστω κ πληθάριθμος. Ορίζουμε το κ! ως:*

$$\kappa! = card\{f \mid f \text{ είναι μετάθεση του } K\}$$

όπου K είναι ένα σύνολο με πληθάριθμο κ. Αποδείξτε ότι το κ! είναι καλά ορισμένο, δηλαδή είναι ανεξάρτητο από την επιλογή του συνόλου K.

Έστω K, L δύο σύνολα με πληθάριθμο κ. Θεωρούμε, εφόσον έχουν τον ίδιο πληθάριθμο, την αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση από το ένα στο άλλο: $\hat{f} : K \to L$ και επίσης την απεικόνιση F η οποία στέλνει κάθε συνάρτηση $f \in (K \to K)$ στην συνάρτηση $g \in (L \to L)$. Η g ορίζεται ως:

$$(x, f(x)) \in f \Rightarrow (\hat{f}(x), \hat{f} \circ f(x)) \in g$$

Καταρχάς να δικαιολογηθεί ότι η g είναι συνάρτηση στο $(L \to L)$. Πράγματι, επειδή η $\hat{f}$ είναι επί συνάρτηση, όλες οι τιμές του L ανήκουν στην εικόνα της. Επιπλέον, επειδή η f είναι συνάρτηση και η $\hat{f}$ είναι συνάρτηση του $(L \to L)$, η g θα πρέπει να είναι επίσης συνάρτηση του $(L \to L)$.

Ισχυριζόμαστε ότι η F είναι $1-1$. Πράγματι, εάν $f_1, f_2 \in (K \to K)$ είναι 2 συναρτήσεις που διαφέρουν, θα διαφέρουν σε ένα σημείο, έστω στο $a \in K$. Επομένως:

$$(a, f_1(a)) \neq (a, f_2(a)) \overset{\hat{f}\ 1-1}{\Longrightarrow} F(f_1) \ni (\hat{f}(a), \hat{f} \circ f_1(a)) \neq (\hat{f}(a), \hat{f} \circ f_2(a)) \in F(f_2)$$

και από αυτό έπεται ότι $F(f_1) \neq F(f_2) \Rightarrow$ η F είναι $1-1$. Το $1-1$ της F μας δίνει την ανισότητα των πληθικοτήτων:

$$card\{f \mid f \text{ είναι μετάθεση του } K\} \leq card\{f \mid f \text{ είναι μετάθεση του } K\}$$

Εφόσον η κατεύθυνση της $\hat{f}$ δεν έπαιξε ρόλο στην διαδικασία της απόδειξης, τα ίδια επειχειρήματα μπορούν να εφαρμοστούν και στην αντίστροφη κατεύθυνση. Επομένως:

$$card\{f \mid f \text{ είναι μετάθεση του } K\} \geq card\{f \mid f \text{ είναι μετάθεση του } K\}$$

Από το Θεώρημα $Schröder - Bernstein$, προκύπτει τελικά η ισοπληθικότητα των 2 συνόλων. Οπότε το $\kappa!$ είναι ανεξάρτητο της επιλογής των συνόλων.

Άσκηση 8: *Στο σύνολο $\omega \times \omega$ ορίζουμε την σχέση $\mathfrak{R}$ ως εξής:*

$$(a,b)\mathfrak{R}(c,d) \Leftrightarrow (2a+1)2^d \leq (2c+1)2^b$$

όπου '$\leq$' είναι η συνήθης διάταξη στους φυσικούς αριθμούς. Αποδείξτε ότι η παραπάνω σχέση είναι ολική διάταξη στο $\omega \times \omega$. Είναι η σχέση '$\mathfrak{R}$' καλή διάταξη;

Καταρχάς δείχνουμε ότι είναι διάταξη:

i. Είναι ανακλαστική: Ισχύει ότι $(2a+1)2^b = (2a+1)2^b$, άρα ειδικότερα $(2a+1)2^b \leq (2a+1)2^b$ και συνεπώς $(a,b)\mathfrak{R}(a,b)$.

ii. Είναι αντισυμμετρική: Εάν $(2a+1)2^d \leq (2c+1)2^b$ **και** $(2c+1)2^b = (2a+1)2^d$, τότε $(2a+1)2^d = (2c+1)2^b$. Επειδή κάθε άρτιος αριθμός είναι πρώτος προς κάθε περιττό, ειδικότερα θα πρέπει $2a+1 = 2c+1$ **και** $2^d = 2^b \Rightarrow a = c\ , b = d \Rightarrow (a,b) = (c,d)$.

iii. Είναι μεταβατική: Εάν $(2a+1)2^d \leq (2c+1)2^b$ **και** $(2c+1)2^f \leq (2e+1)2^d$, τότε:

$$(2a+1)2^d 2^f \leq (2c+1)2^b 2^f \leq (2e+1)2^b 2^d \Rightarrow (2a+1)2^f \leq (2e+1)2^b$$

Δηλαδή εάν $(a,b)\mathfrak{R}(c,d)$ **και** $(c,d)\mathfrak{R}(e,f)$, τότε $(a,b)\mathfrak{R}(e,f)$.

Εφόσον οι αριθμοί $\alpha a, b, c, d$ είναι φυσικοί, το ίδιο θα συμβαίνει και για τους $(2a+1)2^d, (2c+1)2^b$. Επειδή το σύνολο ω εφοδιασμένο με την διάταξη '$\leq$' είναι ολικά διατεταγμένο, θα ισχύει:

$$(2a+1)2^d \leq (2c+1)2^b \textbf{ ή } (2c+1)2^b \leq (2a+1)2^d$$

Επομένως η '$\mathfrak{R}$' είναι ολική διάταξη.

Εάν η '$\mathfrak{R}$' δεν είναι καλή διάταξη, τότε θα υπάρχει γνησίως φθίνουσα ακολουθία διατεταγμένων ζευγών. Ισοδύναμα, θα υπάρχει γνησίως φθίνουσα ακολουθία αριθμών της μορφής $(2a+1)2^b$, οι οποίοι είναι φυσικοί. Αυτό έρχεται σε αντίθεση με την αρχή της άπειρης καθόδου και συνεπώς θα πρέπει η διάταξη '$\mathfrak{R}$' να είναι καλή διάταξη.

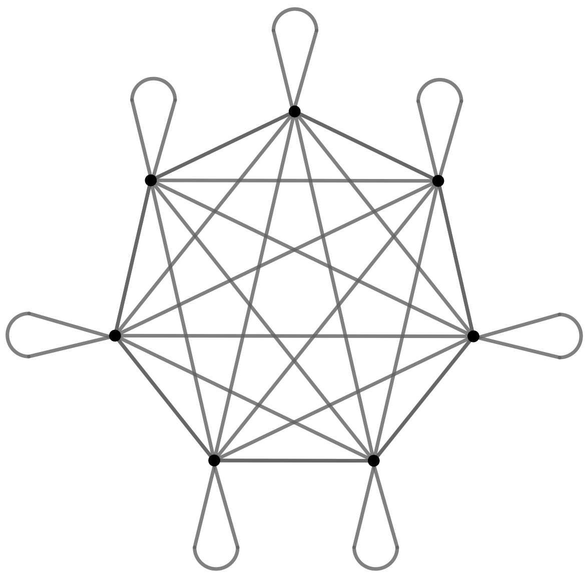
Άσκηση 9: *Έστω S ένα πεπερασμένο σύνολο με n στοιχεία και $\mathfrak{R} \subseteq S \times S$ μία ολική διάταξη στο S. Υπολογίστε το πλήθος των στοιχείων του συνόλου $\mathfrak{R}$.*

Κατασκευάζουμε ένα γράφημα $G = (V,E)$ με τον εξής τρόπο:

- Το σύνολο κορυφών (V) ταυτίζεται με το S,
- Το σύνολο ακμών (E) είναι ακριβώς το $\big\{\{a,b\} \mid (a,b) \in \mathfrak{R}\big\}$.

Εφόσον η σχέση $\mathfrak{R}$ είναι ολική διάταξη, οποιαδήποτε 2 στοιχεία του S είναι συγκρίσιμα, και άρα το γράφημα G είναι πλήρες. Δεν είναι όμως απλό διότι υπάρχουν (ακριβώς και μόνο) οι θηλιές $\{a,a\} = \{a\}, \forall a \in V$. Θεωρούμε λοιπόν το παραγόμενο γράφημα: $G' = \big(V, E - \bigcup_{a\in S}\{\{a\}\}\big)$ και παρατηρούμε ότι είναι απλό και πλήρες. Επειδή είναι απλό και πλήρες, θα έχει ακριβώς $\dfrac{|V|(|V|-1)}{2}$ ακμές. Άρα το G έχει $\dfrac{|V|(|V|-1)}{2} + |V| = \dfrac{|V|(|V|+1)}{2}$ ακμές. Τέλος, επειδή $|V| = |S| = n$ και $|E| = |\mathfrak{R}| = \dfrac{|V|(|V|+1)}{2}$, έχουμε ότι:

$$|\mathfrak{R}| = \frac{n(n+1)}{2}$$



Σχήμα 1: *Ένα μη απλό, πλήρες γράφημα με 7 κορυφές.*

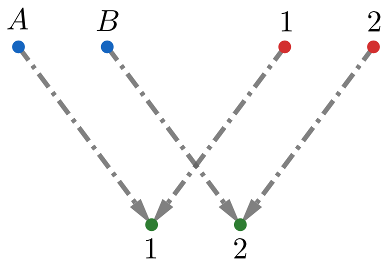
Άσκηση 10: *Έστω $(P, \leq_p)$ και $(Q, \leq_Q)$ δύο μερικά διατεταγμένοι χώροι και $f : P \to Q$ μία συνάρτηση τέτοια ώστε:*

$$x <_P y \Rightarrow f(x) <_Q f(y)$$

για κάθε $x, y \in P$.

10.1 Μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η f είναι $1-1$;

10.2 Μπορούμε να συμπεράνουμε ότι $x <_P y \Leftrightarrow f(x) <_Q f(y)$;



Σχήμα 1: *Μια περίπτωση όπου η συνάρτηση δεν είναι ενεικονική.*

10.1 Ενδέχεται να μην είναι $1-1$. Υποθέτουμε ότι $P = \{A, B, 1, 2\}$, $Q = \{1, 2 = n\}$, $A \leq_P B$, $1 \leq_P 2$ και $1 \leq_Q 2$. Η συνάρτηση f για τη οποία ισχύει:

$$f = \begin{bmatrix} A \mapsto 1 \\ B \mapsto 2 \\ 1 \mapsto 1 \\ 2 \mapsto 2 \end{bmatrix}$$

έχει την ιδιότητα της εκφώνησης αλλά δεν είναι $1-1$.

Το συμπέρασμα θα ίσχυε εάν οι χώροι ήταν ολικά διατεταγμένοι. Επίσης ισχύει εάν η συνάρτηση περιοριστεί στις αλυσίδες του διατεταγμένου χώρου $(P, \leq_P)$.

10.2 Και πάλι, η αντίστροφη κατεύθυνση είναι κάτι που δεν ισχύει. Στο παράδειγμα που αναφέρθηκε προηγουμένως (στο προηγούμενο ερώτημα), έχουμε ότι $f(A) = 1 \leq_Q f(2) = 2$ αλλά τα $A, 2$ δεν είναι συγκρίσιμα στον P.

Άσκηση 11: *Έστω A ένα σύνολο και $\mathfrak{R}$ μία σχέση στο A. Ορίζουμε την σχέση $\mathfrak{R}^{-1}$ ως εξής:*

$$\mathfrak{R}^{-1} = \{(u, v) \in A \times A \mid (v, u) \in \mathfrak{R}\}$$

Δείξτε ότι εάν $\mathfrak{R}$ είναι μερική διάταξη, τότε και η $\mathfrak{R}^{-1}$ είναι επίσης μερική διάταξη.

Δείχνουμε ότι:

- Είναι αυτοπαθής: Πράγματι, ισχύει ότι:

$$u\mathfrak{R}u \Rightarrow (u, u) \in \mathfrak{R} \Rightarrow (u, u) \in \mathfrak{R}^{-1} \Rightarrow u\mathfrak{R}^{-1}u$$

- Είναι αντισυμμετρική: Εάν $u\mathfrak{R}^{-1}v$ **και** $v\mathfrak{R}^{-1}u$, τότε $v\mathfrak{R}u$ **και** $u\mathfrak{R}v$. Επειδή η $\mathfrak{R}$ είναι μερική διάταξη, $u = v$.
- Είναι μεταβατική: Εάν $u\mathfrak{R}^{-1}v$ **και** $v\mathfrak{R}^{-1}w$, τότε $v\mathfrak{R}u$ **και** $w\mathfrak{R}v$. Επειδή η $\mathfrak{R}$ είναι μερική διάταξη, $w\mathfrak{R}u$. Τελικά, $u\mathfrak{R}^{-1}w$

Άσκηση 12: *Για κάθε ακέραιο $n \in \mathbb{N}^*$, συμβολίζουμε με $f(n)$ το πλήθος των διαφορετικών ανά 2 πρώτων παραγόντων του n. Στο σύνολο $\mathbb{N}^*$ ορίζουμε την εξής διμελή σχέση:*

$$(\forall m, n \in \mathbb{N}^*)\big[m\mathfrak{R}n :\Leftrightarrow m = n \text{ ή } [f(m) = f(n) \text{ και } m < n]\big]$$

Αποδείξτε ότι η παραπάνω διμελής σχέση είναι καλή διάταξη στον $\mathbb{N}^*$. Σχεδιάστε μία εικόνα για τον καλά διατεταγμένο χώρο $\mathbb{N}^*$.

Κατ' αρχάς δείχνουμε ότι είναι μερική διάταξη:

- Είναι αυτοπαθής: Εξ ορισμού ισχύει $m\mathfrak{R}m$, αφού $m = m$.
- Είναι αντισυμμετρική: Εάν $m\mathfrak{R}n$ **και** $n\mathfrak{R}m$, τότε $m = n$ **ή** $\big[m > n$ **και** $m < n\big]$. Η δεύτερη περίπτωση δεν γίνεται να ισχύει, οπότε $m = n$.
- Είναι μεταβατική: Εάν $m\mathfrak{R}n$ **και** $n\mathfrak{R}p$, τότε $f(m) = f(n) = f(p)$ **και** $m \leq n \leq p$. Εάν $m = n$ **ή** $n = p$, είναι άμεσο ότι $m\mathfrak{R}p$. Διαφορετικά, ισχύει $m < p$ και συνεπώς $m\mathfrak{R}p$.

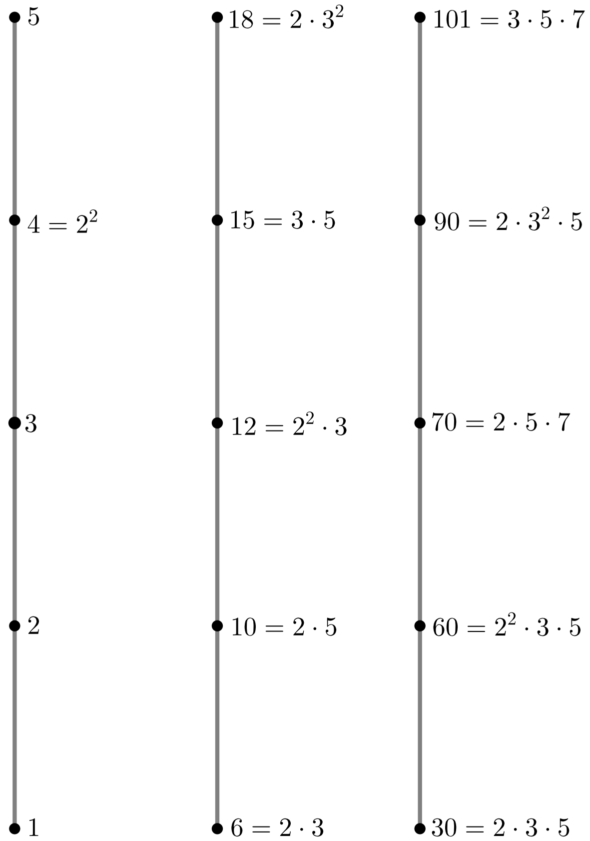
Η διάταξη αυτή είναι επίσης καλή διάταξη. Δηλαδή δεν υπάρχει άπειρη ακολουθία $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ του $\mathbb{N}^*$ διαφορετικών ανά 2 στοιχείων για την οποία ισχύει:

$$\cdots \Re x_{i+1} \Re x_i \Re \cdots \Re \cdots \Re x_2 \Re x_1 \Re x_0$$

Πράγματι, εάν τέτοια ακολουθία (συγκρίσιμων ανά 2) στοιχείων υπήρχε, τότε θα ίσχυε:

$$f(x_1) = f(x_2) = \cdots = f(x_i) = f(x_{i+1}) = \cdots \ \textbf{και} \ x_0 > x_1 > x_2 > \cdots > x_i > x_{i+1} > \cdots$$

το οποίο είναι άτοπο, αφού δεν υπάρχει γνωσίως φθίνουσα ακολουθία φυσικών, από την αρχή της άπειρης καθόδου.



Σχήμα 2: *Το διάγραμμα Hasse της καλής διάταξης* $\Re$.

Άσκηση 13: *Αν P, Q είναι μερικά διατεταγμένοι χώροι, αποδείξτε ότι και το άθροισμά τους $P +_o Q$ είναι μερικά διατεταγμένος χώρος.*

Πράγματι, θα δείξουμε ότι η διάταξη:

$$\leq_o: (i,j) \leq_o (k,l) \Leftrightarrow i \leq j \ \textbf{ή} \ [i = j = 0 \ \textbf{και} \ j \leq_P k] \ \textbf{ή} \ [i = j = 1 \ \textbf{και} \ j \leq_Q k]$$

είναι μερική διάταξη.

- Είναι αυτοπαθής: Πράγματι, ισχύει $j \leq_P j$ και $j \leq_Q j \Rightarrow (i,j) \leq_o (i,j)$, για $i \in \{0,1\}$.
- Είναι αντισυμμετρική: Εάν $(i,j) \leq_o (k,l)$ **και** $(k,l) \leq_o (i,j)$, τότε θα πρέπει οπωσδήποτε $i = k$.
  - ◇ Αν $i = k = 0$, τότε $j \leq_P l$ **και** $l \leq_P j \Rightarrow i = k, \ j = l \Rightarrow (i,j) = (k,l)$.
  - ◇ Αν $i = k = 1$, τότε $j \leq_Q l$ **και** $l \leq_Q j \Rightarrow i = k, \ j = l \Rightarrow (i,j) = (k,l)$.
- Είναι μεταβατική: Έστω $(i,j) \leq_o (k,l)$ **και** $(k,l) \leq_o (m,n)$.
  - ◇ Αν $i = k = m = 0$, τότε $j \leq_P l \leq_P n \Rightarrow j \leq n \Rightarrow (i,j) \leq_o (m,n)$.
  - ◇ Αν $i = k = m = 1$, τότε $j \leq_Q l \leq_Q n \Rightarrow j \leq n \Rightarrow (i,j) \leq_o (m,n)$.
  - ◇ Αν $i = k = m - 1 = 0$, τότε εξ ορισμού $(i,j) \leq_o (m,n)$.
  - ◇ Αν $i = k - 1 = m - 1 = 0$, τότε εξ ορισμού $(i,j) \leq_o (m,n)$.

Άσκηση 14: *Αν $P =_o P'$ και $Q =_o Q'$, δείξτε ότι $P +_o Q =_o P' +_o Q'$.*

Εφόσον οι χώροι P, P' είναι όμοιοι, θα υπάρχει αμφιμονοσήμαντη $\pi : P \rightarrowtail\!\!\!\!\rightarrow P'$ η οποία διατηρεί τις διατάξεις. Ανάλογα, επειδή Q, Q' είναι όμοιοι, θα υπάρχει αμφιμονοσήμαντη $\sigma : Q \rightarrowtail\!\!\!\!\rightarrow Q'$ η οποία διατηρεί τις διατάξεις. Θεωρούμε την απεικόνιση $\psi : P +_o Q \to P' +_o Q'$ η οποία ορίζεται ως:

$$\psi(a, x) = \begin{cases} (a, \pi(x)), & \text{εάν } a = 0 \\ (a, \sigma(x)), & \text{εάν } a = 1 \end{cases}$$

και ισχυριζόμαστε ότι πρώτον είναι αμφιμονοσήμαντη και κατά δεύτερον ότι διατηρεί τις διατάξεις (δηλ. είναι ομοιότητα).

Είναι αμφιμονοσήμαντη, αφού η απεικόνιση:

$$\bar{\psi}(a, x) = \begin{cases} (a, \pi^{-1}(x)), & \text{εάν } a = 0 \\ (a, \sigma^{-1}(x)), & \text{εάν } a = 1 \end{cases}$$

είναι η αντίστροφή της.

[Πράγματι:

$$\psi \circ \bar{\psi}(a, x) = \begin{Bmatrix} (a, \pi \circ \pi^{-1}(x)), & \text{εάν } a = 0 \\ (a, \sigma \circ \sigma^{-1}(x)), & \text{εάν } a = 1 \end{Bmatrix} = (a, x)$$

και:

$$\bar{\psi} \circ \psi(a, x) = \begin{Bmatrix} (a, \pi^{-1} \circ \pi(x)), & \text{εάν } a = 0 \\ (a, \sigma^{-1} \circ \sigma(x)), & \text{εάν } a = 1 \end{Bmatrix} = (a, x)$$

]

Επιπλέον διατηρεί τις διατάξεις, καθώς:

- Αν $(a, x) \leq_o (b, y)$, τότε:
  - ⋄ Αν $a = b = 0$, $x \leq_P y \Rightarrow \pi(x) \leq'_P \pi(y) \Rightarrow (a, \pi(x)) \leq'_o (b, \pi(y)) \Rightarrow \psi(a, x) \leq'_o \psi(b, y)$.
  - ⋄ Αν $a = b = 1$, $x \leq_Q y \Rightarrow \sigma(x) \leq'_Q \sigma(y) \Rightarrow (a, \sigma(x)) \leq'_o (b, \sigma(y)) \Rightarrow \psi(a, x) \leq'_o \psi(b, y)$.
  - ⋄ Αν $a = b - 1 = 0$, τότε εξ ορισμού $(a, \pi(x)) \leq_o (b, \sigma(x)) \Rightarrow \psi(a, x) \leq'_o \psi(b, y)$.

Αυτά τα δύο, το ότι είναι αμφιμονοσήμαντη και διατηρεί τις διατάξεις, δείχνουν ότι η ψ είναι ομοιότητα και κατ' επέκταση ότι $P +_o Q =_o P' +_o Q'$.

Άσκηση 15: *Αν U και V είναι καλά διατεταγμένοι χώροι, δείξτε ότι και το άθροισμά τους $U +_o V$ είναι καλά διατεταγμένος χώρος.*

Από την Άσκηση: "**Άσκηση 13.**", ο χώρος $U +_o V$ είναι μερικά διατεταγμένος. Οπότε, αρκεί να δείξουμε ότι δεν υπάρχει γνησίως φθίνουσα ακολουθία της μορφής:

$$\cdots \leq_o (a_{i+1}, x_{i+1}) \leq_o (a_i, x_i) \leq_o \cdots \leq_o (a_1, x_1) \leq_o (a_0, x_0)$$

Προς άτοπο υποθέτουμε ότι τέτοια ακολουθία υπάρχει και διακρύνουμε τις εξής 3 περιπτώσεις:

Εάν $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = 0$, τότε ισοδύναμα έχουμε ότι $\cdots \leq_U x_{i+1} \leq_U x_i \leq_U \cdots \leq_U x_1 \leq_U x_0$. Αυτό δεν είναι δυνατόν να συμβαίνει, αφού ο U είναι καλά διατεταγμένος.

Εάν $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = 1$, τότε ισοδύναμα έχουμε ότι $\cdots \leq_V x_{i+1} \leq_V x_i \leq_V \cdots \leq_V x_1 \leq_V x_0$. Αυτό δεν είναι δυνατόν να συμβαίνει, αφού ο V είναι καλά διατεταγμένος.

Εάν υπάρχει δείκτης $k \in \mathbb{N}$ για τον οποίο ισχύει $a_k \neq a_{k-1}$, υποθέτουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $a_{k-1} = 1$ και παρατηρούμε ότι $\forall n \geq k$ ισχύει $a_n = 0$. Αυτό διότι αν το αντίθετο συνέβαινε, θα είχαμε έναν n για τον οποίον $(a_n = 1, x_n) \leq_o (a_k = 0, x_k)$ (άτοπο στον ορισμό της διάταξης '$\leq_o$'). Κατασκευάζουμε λοιπόν μία νέα ακολουθία $(b_n, y_n) = (a_{k+n}, x_{k+n})$ και αναγόμαστε στην πρώτη περίπτωση.

Σε κάθε περίπτωση, καταλήγουμε σε άτοπο, και συνεπώς θα πρέπει ο χώρος $U +_o V$ να είναι καλά διατεταγμένος.

Άσκηση 16: *Δείξτε ότι:*

$$\{0\} +_o \mathbb{N} =_o \mathbb{N} \neq_o \mathbb{N} +_o \{0\}$$

Συνεπώς, το άθροισμα 2 καλά διατεταγμένων χώρων δεν έχει (απαραίτητα) την αντιμεταθετική ιδιότητα.

Δείχνουμε ότι $\{0\} +_o \mathbb{N} =_o \mathbb{N}$.

Πράγματι, η απεικόνιση $\pi : \{0\} +_o \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ που ορίζεται ως:

$$\pi(a, x) = \begin{cases} 0, \text{ εάν } a = 0 \\ x + 1, \text{ εάν } a = 1 \end{cases}$$

είναι ομοιότητα. Είναι αμφιμονοσήμαντη αφού η:

$$\sigma(x) = \begin{cases} (0, 0), \text{ εάν } x = 0 \\ (1, x - 1), \text{ εάν } x \neq 0 \end{cases}$$

είναι η αντίστροφή της. Επιπλέον, διατηρούνται οι διατάξεις, αφού:

- Αν $(a, x) \leq_o (b, y)$:
  - ⋄ Αν $a = b = 0$, τότε $\pi(a, x) = \pi(b, y) = 0 \Rightarrow 0 \leq 0$.
  - ⋄ Αν $a = b - 1 = 0$, τότε $\pi(a, x) = 0 \leq \pi(b, y) = y + 1 \Rightarrow 0 \leq y$.
  - ⋄ Αν $a = b = 1$, τότε $\pi(a, x) = x + 1 \leq \pi(b, y) = y + 1 \Rightarrow x \leq y$.

Δείχνουμε ότι $\mathbb{N} +_o \{0\} \neq_o \mathbb{N}$.

Εάν υπήρχε ομοιότητα μεταξύ αυτών των 2 συνόλων, έστω $\pi : \mathbb{N} +_o \{0\} \rightarrowtail\!\!\!\!\!\twoheadrightarrow \mathbb{N}$, το διατεταγμένο ζεύγος $(1, 0)$ θα απεικονίζοταν σε έναν φυσικό αριθμό ο οποίος θα ήταν το μέγιστο όλων των φυσικών. Αυτό διότι:

$$(a, x) \leq (1, 0) \Rightarrow \pi(a, x) \leq \pi(1, 0), \text{ όπου } a \in \{0, 1\} \text{ και η } \pi \text{ είναι επί}$$

Κάτι τέτοιο είναι όμως άτοπο, αφού το σύνολο των φυσικών δεν είναι άνω φραγμένο.