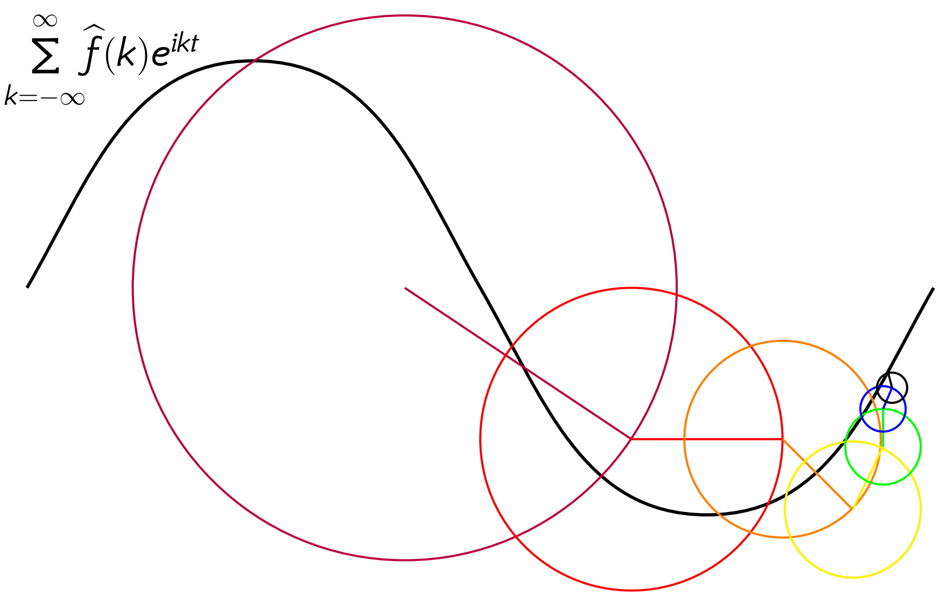
Βάσεις Schauder

Μια μικρή ανάλυση

Αναστάσιος Φράγκος

Τμήμα Μαθηματικών
Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Απρίλιος 2023



Συμπλήρωμα για το μάθημα «602. Συναρτησιακή Ανάλυση».

Η γραμματοσειρά «GFS Neohellenic» επιμελείται από τους κ. Γ. Δ. Ματθιόπουλο, κ. Α. Τσολομύτη και την Ελληνική Εταιρία Τυπογραφικών Στοιχείων (ΕΕΤΣ). Χρησιμοποιήθηκε επίσης η μαθηματική (καλλιγραφική) γραμματοσειρά «$\mathcal{Boondox}$», Michael Sharpe, University of Washington. Η στοιχειοθέτηση έγινε σε LaTeX.

ΑΒΓΔΕΖΗΘΙΚΛΜΝΞΟΠΡΣΤΥΦΧΨΩ

αβγδεζηθικλμνξοπρστυφχψω

ΑΒΓΔΕΖΗΘΙΚΛΜΝΞΟΠΡΣΤΥΦΧΨΩ

αβγδεζηθικλμνξοπρστυφχψω

ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ

abcdedghijklmnopqrstuvwxyz

ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ

abcdedghijklmnopqrstuvwxyz

$\mathscr{ABCDEFGHIJKLMNOPQRS}$
$\mathscr{TUVWXYZ}$

$\mathscr{abcdedghijklmnopqrstuv}$
$\mathscr{wxyz}$

$\mathcal{ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUV}$
$\mathcal{WXYZ}$

$\mathfrak{ABCDEFGHIJKLMNOPQRST}$
$\mathfrak{UVWXYZ}$

$\mathfrak{abcdedghijklmnopqrstuvwxyz}$

$\mathbb{ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWX}$
$\mathbb{YZ}\mathbb{1}\Bbbk$

$\Sigma\,\Pi\,\bigsqcup\,\bigcap\,\bigcup\,\int\,\lim$

Το template αυτών των σημειώσεων μπορείτε να βρείτε στον σύνδεσμο: https://afragos-math.github.io/files/latex/template-I.html (με διαφορετική γραμματοσειρά).

Πίνακας Περιεχομένων

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Βασικές έννοιες και ορισμοί

1.1 Μετρικοί χώροι

Σαφώς μία από από τις σημαντικότερες δομές που μπορεί να προσδοθεί σε έναν χώρο είναι αυτή της μετρικής. Η μετρική δίνει τη δυνατότητα μέτρισης αποστάσεων και της -τουλάχιστον σε ένα βαθμό- γεωμετρικής περιγραφής του χώρου.

Ένα από τα κύρια γεωμετρικά χαρακτηριστικά ενός χώρου που μπορούν να μελετηθούν μέσω μιας μετρικής είναι η έννοια του εσωτερικού ενός σχήματος. Επιπλέον, μέσω μετρικών είναι δυνατόν κανείς να περιγράψει με εύληπτο τρόπο έννοιες σύγκλισης και (κατά συνέπεια) προσέγγισης.

Ορισμός 1.1.1 (Μετρικοί χώροι)**.** *Έστω (X,ρ) ένα ζεύγος ενός συνόλου $X \neq \varnothing$ και μίας συνάρτησης $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$. Η ρ θα καλείται μετρική (και θα μετρά «απόσταση») εάν ικανοποιούνται οι ακόλουθες συνθήκες:*

i. Για κάθε $x,y \in X$ αληθεύει $\rho(x,y) \geqslant 0$. Μάλιστα $\rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.

ii. Για κάθε $x,y \in X$ έχουμε τη συμμετρία $\rho(x,y) = \rho(y,x)$.

iii. Για κάθε $x,y,z \in X$ ισχύει η τριγωνική ανισότητα $\rho(x,z) \leqslant \rho(x,y) + \rho(y,z)$.

Όλες αυτές οι ιδιότητες της μετρικής εκφράζουν κάποια γεωμετρική ιδέα:

- Η i. ουσιαστικά δείχνει ότι η απόσταση μετράται φυσιολογικά, ώστε δεν υπάρχουν σημεία που μεν να συμπίπτουν αλλά να είναι διαφορετικά. Επιπλέον, ένα σημείο δεν απέχει απόσταση από τον εαυτό του.

- Η ii. δείχνει ότι δεν έχει σημασία ο τρόπος μέτρισης, όσον αφορά την κατεύθυνση με την οποία γίνεται.

- Η iii. εκφράζει το ανάλογο της ιδέας ότι η μικρότερη απόσταση δύο σημείων είναι «ευθύγραμμο τμήμα». Βέβαια εδώ αυτό που διατυπώνεται -σε γενικές γραμμές- είναι ότι δεν υπάρχει «τεθλασμένη γραμμή» που να μετρά απόσταση μικρότερη αυτής του «ευθυγράμμου τμήματος».

Με την μετρική μπορούμε να ορίσουμε τα ανοικτά σύνολα, και κατ' επέκταση το εσωτερικό των συνόλων. Εδώ να σημειώσουμε ότι αυτός ο ορισμός θα μπορούσε (στην περίπτωση ενός χώρου χωρίς μετρική δομή) να δοθεί αξιωματικά, όπως γίνεται στους τοπολογικούς χώρους. Παρόλα αυτά, η μετρική εξασφαλίζει έναν φυσιολογικό τρόπο ορισμού.

Πριν δούμε όμως τον ορισμό των ανοικτών συνόλων, ας δούμε πρώτα την έννοια της μπάλας.

Ορισμός 1.1.2 (Ανοικτές και κλειστές μπάλες). *Έστω (X,ρ) ένας μετρικός χώρος και $x_0 \in X$, $r>0$. Ορίζουμε:*

i. Ανοικτή μπάλα στο x_0 με ακτίνα r το σύνολο $S(x_0,r)=\{x\in X \mid \rho(x,x_0)<r\}$.

ii. Κλειστή μπάλα στο x_0 με ακτίνα r το σύνολο $B(x_0,r)=\{x\in X \mid \rho(x,x_0)\leqslant r\}$.

Με τις ανοικτές μπάλες μπορούμε να περιγράψουμε τα εσωτερικά των σχημάτων. Θα λέμε ότι ένα σημείο a ανήκει στο εσωτερικό ενός συνόλου $A\subseteq X$ εάν υπάρχει μία «περιοχή», δηλαδή μία μπάλα $S(a,r_a)$, ούτως ώστε $a\in S(a,r_a)\subseteq A$.

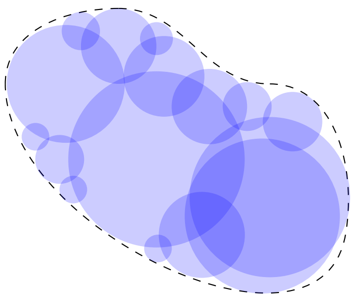
Ορισμός 1.1.3 (Εσωτερικά και ανοικτά σύνολα). *Έστω (X,ρ) ένας μετρικός χώρος, $A\subseteq X$ και $a\in A$.*

i. Λέμε ότι το a είναι εσωτερικό σημείο του A εάν υπάρχει μπάλα $S(a,r_a)$ ούτως ώστε $a\in S(a,r_a)\subseteq X$. Επιπλέον, ορίζουμε το εσωτερικό του A ως εξής:

$$A^\circ=\{x\in A \mid x \text{ εσωτερικό σημείο του } A\}$$

ii. Ένα σύνολο $G\subseteq X$ λέγεται ανοικτό εάν ταυτίζεται με το εσωτερικό του, δηλαδή αν $G=G^\circ$.

Η αντίστοιχη γεωμετρική εικόνα των ανοικτών συνόλων είναι η ακόλουθη:



Μερικές τετριμμένες περιπτώσεις ανοικτών συνόλων είναι οι διάφορες μπάλες $S(x,r)$ καθώς και το κενό σύνολο $\varnothing$.

Η ορολογία «ανοικτό» σύνολο ίσως αρχικά να μην βγάζει νόημα. Κανείς μπορεί να αναρωτηθεί τι χρειάζεται για να «κλείσει» ένα σύνολο. Την απάντηση θα δώσουμε παρακάτω. Πρώτα δίνουμε τον ορισμό του συνόρου.

Ορισμός 1.1.4 (Σύνορο ενός συνόλου). *Έστω (X,ρ) ένας μετρικός χώρος, $A\subseteq X$ και $x\in X$.*

i. Λέμε ότι το x είναι συνοριακό σημείο του A εάν κάθε μπάλα $S(x,r)$ τέμνει τόσο το A όσο και το συμπλήρωμά του $X\backslash A$.

ii. Ορίζουμε το σύνορο του A:

$$\partial A=\{x\in X \mid \text{ το } x \text{ είναι συνοριακό σημείο του } A\}$$

Το σύνορο όπως το ορίσαμε λειτουργεί ως «περίβλημα» για το σύνολο A, αφού «από την μία μεριά» περιέχει στοιχεία του A κι από την άλλη του $X\backslash A$.

Τώρα ένα ανοικτό σύνολο A δεν περιέχει κανένα σημείο του συνόρου του, εξ ορισμού του. Κατά συνέπεια, δεν έχει «περίγραμμα». Αυτή είναι η ιδέα και η λογική που χρησιμοποιούμε τον όρο «ανοικτό σύνολο». Για να κλείσουμε λοιπόν ένα σύνολο (που μπορεί να μην έχει σύνορο ή ένα τμήμα του συνόρου του), χρησιμοποιούμε την κλειστή θήκη.

Ορισμός 1.1.5 (Κλειστή θήκη και κλειστά σύνολα). *Έστω (X,ρ) ένας μετρικός χώρος και $K \subseteq X$.*

i. Ορίζουμε τη κλειστή θήκη του K:

$$\overline{K} = K \cup \partial K$$

ii. Λέμε ότι το K είναι κλειστό εάν $K = \overline{K}$.

Ίσως αυτός είναι ένας «ανορθόδοξος» τρόπος κανείς να ορίσει αυτές τις τοπολογικές έννοιες, θεωρούμε όμως ότι είναι λογικός. Αυτός είναι και ο λόγος που κάνουμε αυτήν την παρουσίαση, διότι κατά τ' άλλα αυτές οι έννοιες θα πρέπει να θεωρούνται γνωστές.

Πάντως για να μην ξεφύγουμε πολύ από τη συνηθισμένη παρουσίαση, ας παρατηρήσουμε το ακόλουθο:

Παρατήρηση 1.1.1. *Ένα σύνολο K είναι κλειστό εάν και μόνο αν το συμπλήρωμά του είναι ανοικτό. Αντίστοιχα, είναι ανοικτό εάν και μόνο αν το συμπλήρωμά του είναι κλειστό.*

Απόδειξη: Θα δείξουμε ότι ένα σύνολο K είναι κλειστό εάν και μόνο αν το συμπλήρωμά του είναι ανοικτό.

($\Rightarrow$) Για αυτήν την κατεύθυνση θα δείξουμε ότι αν $x \in X \setminus K$ τότε υπάρχει μπάλα $S(x,r_x) \subseteq X \setminus K$. Πράγματι, εφόσον το K είναι κλειστό, $K = K \cup \partial K$. Από τον ορισμό του συνόρου, στο $x \notin K$ υπάρχει μπάλα $S(x,r_x)$ ούτως ώστε $S(x,r_x) \cap K = \varnothing \Rightarrow S(x,r_x) \subseteq X \setminus K$.

($\Leftarrow$) Εάν το $X \setminus K$ είναι ανοικτό, τότε από τον ορισμό του συνόρου, $(X \setminus K) \cap \partial(X \setminus K) = \varnothing$. Εδώ κανείς αξίζει να παρατηρήσει ότι $\partial K = \partial(X \setminus K)$, και χρησιμοποιώντας τη σχέση αυτή να δει ότι $(X \setminus K) \cap \partial K = \varnothing \Rightarrow \partial K \subseteq K$. Δηλαδή $K = K \cup \partial K$, και κατά συνέπεια είναι κλειστό. □

Παρατήρηση 1.1.2. *Έστω (X,ρ) ένας μετρικός χώρος και $x_0 \in X$, $r > 0$. Η κλειστή μπάλα $B(x_0,r)$ είναι κλειστό σύνολο.*

Απόδειξη: Χρησιμοποιώντας την Παρατήρηση 1.1.1, αρκεί να δείξουμε ότι το $X \setminus B(x_0,r)$ είναι ανοικτό.

Πράγματι, έστω $y \in X \setminus B(x_0,r)$, δηλαδή $\rho(x_0,y) > r$. Ορίζουμε $r' = \rho(x_0,y) - r > 0$ και παρατηρούμε ότι $S(y,r') \subseteq X \setminus B(x_0,r)$. Αυτό συμβαίνει διότι κάθε $x \in B(x_0,r) \cap S(y,r')$ ορίζει απόσταση (μέσω της τριγωνικής ανισότητας):

$$\rho(y,x) + \rho(x,x_0) \geqslant \rho(y,x_0)$$

αλλά από την άλλη $\rho(y,x) + \rho(x,x_0) < r' + r = \rho(x_0,y)$. Αυτό αποδεικνύει ότι $B(x_0,r) \cap S(y,r') = \varnothing \Rightarrow S(y,r') \subseteq X \setminus B(x_0,r)$. □

Παρατήρηση 1.1.3. *Έστω (X,ρ) ένας μετρικός χώρος και $A \subseteq X$. Αληθεύει η σχέση:*

$$X \setminus A^{\circ} = \overline{X \setminus A}$$

Απόδειξη: ($\subseteq$) Το σύνολο $X \setminus (\overline{X \setminus A})$ είναι (εξ ορισμού του) ανοικτό και περιέχει σημεία του A. Κατά συνέπεια, από τον ορισμό του A°:

$$X \setminus (\overline{X \setminus A}) \subseteq A^{\circ} \Rightarrow \overline{X \setminus A} \supseteq X \setminus A^{\circ}$$

Παρατηρήστε ότι ένα ανοικτό υποσύνολο του A είναι στην ουσία τμήμα του εσωτερικού του A. Δηλαδή περιέχεται στο εσωτερικό A°.

($\supseteq$) Επειδή το A° είναι ανοικτό, $A^{\circ} \cap \partial A = \varnothing$, δηλαδή $\partial A \subseteq X \setminus A^{\circ}$. Παρατηρούμε επίσης ότι $X \setminus A \subseteq X \setminus A^{\circ}$, αφού εν γένει το A° είναι μικρότερο σύνολο από το A. Κατά συνέπεια:

$$\overline{X \setminus A} = (X \setminus A) \cup \partial(X \setminus A) = (X \setminus A) \cup \partial A \subseteq X \setminus A^{\circ}$$

□

Όλες αυτές οι έννοιες είναι φυσιολογικές. Κάτι που δεν είναι όμως φυσιολογικό είναι το ακόλουθο:

Παρατήρηση 1.1.4. *Υπάρχει μετρικός χώρος (X,ρ) στον οποίον δεν αληθεύει η ισότητα:*

$$B(x_0,r) = \overline{S(x_0,r)}$$

για κάποια $x_0 \in X$, $r > 0$.

Απόδειξη: Έστω X ένα οποιοδήποτε μη κενό σύνολο με $\#X \geqslant 2$. Ορίζουμε τη μετρική:

$$\delta(x,y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases}$$

και για κάποιο $x_0 \in X$ θεωρούμε τη μπάλα $S(x_0,1)$. Η $S(x_0,1)$ είναι το μονοσύνολο $\{x_0\}$. Επίσης έχει σύνορο $\partial S(x_0,1) = \varnothing$, διότι η μπάλα $S(x_0,1)$ δεν τέμνει το $X \backslash S(x_0,r)$ -δηλαδή $\overline{S(x_0,1)} = \{x_0\} = S(x_0,1)$.

Από την άλλη, $B(x_0,1) = X$, αφού όλα τα σημεία του X απέχουν απόσταση το πολύ 1 από κάθε σημείο του X. Εφόσον $\#X \geqslant 2$, καταλήγουμε στο ότι $B(x_0,r) \neq \overline{S(x_0,r)}$.

□

Επίσης, δεν είναι φυσιολογικό (διαισθητικά) το ακόλουθο:

Παρατήρηση 1.1.5. *Υπάρχει μετρικός χώρος (X,ρ) και σύνολο $A \subseteq X$ που είναι ταυτοχρόνως ανοικτό και κλειστό.*

Απόδειξη: Έστω ένα μη κενό σύνολο X και η μετρική:

$$\delta(x,y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases}$$

Είναι φανερό ότι τα μονοσύνολα $\{x\}$ είναι ανοικτά σύνολα, αφού $\{x\} = S(x,1/2)$. Επιπλέον, κάθε άλλο σύνολο A γράφεται ως ένωση μονοσυνόλων (άρα και μπαλών), και κατά συνέπεια είναι κι αυτό ανοικτό. Δηλαδή όλα τα σύνολα είναι ανοικτά. Η Πρόταση 1.1.1 μας δείχνει ότι, εκτός από ανοικτά, όλα τα σύνολα είναι και κλειστά.

□

Η παραπάνω πρόταση εξασφαλίζει την ύπαρξη μίας νέας κατηγορίας συνόλων, των κλειστάνοικτων συνόλων. Δηλαδή συνόλων που είναι ταυτοχρόνως ανοικτά και κλειστά.

Εν τω μεταξύ ακόμη και σε πολύ φυσιολογικούς χώρους κανείς μπορεί να βρει κλειστάνοικτα σύνολα. Για παράδειγμα, στον $(\mathbb{R},\rho)$ με $\rho(x,y) = |x-y|$ το $\varnothing$ είναι κλειστάνοικτο σύνολο. Είδαμε ότι είναι ανοικτό προηγουμένως, κι επίσης είναι κλειστό διότι $\partial\varnothing = \varnothing$ και $\varnothing = \varnothing \cup \partial\varnothing$. Κατά συνέπεια (Πρόταση 1.1.1) και το $\mathbb{R}$ είναι κλειστάνοικτο σύνολο.

Αξίζει να παρατηρήσει κανείς ότι η παραπάνω επιχειρηματολογία εφαρμόζει σε οποιονδήποτε μετρικό χώρο (X,ρ). Επομένως, τα $\varnothing, X$ θα είναι πάντοτε κλειστάνοικτα.

Μερικά παραδείγματα μετρικών χώρων ακολουθούν:

- Έστω X ένα μη κενό σύνολο και δ η μετρική:

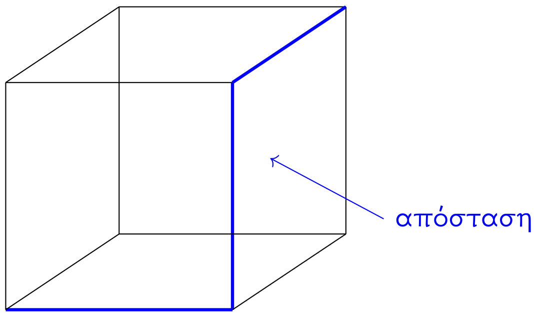
  $$\delta(x,y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases}$$

  Ο χώρος (X,δ) είναι μετρικός χώρος. Η δ καλείται διακριτή μετρική.

- Έστω $\mathscr{H}^n = (\mathbb{R}^n, \rho_{\mathscr{H}^n})$ ο $n-$διάστατος κύβος του Hamming, όπου:

  $$\rho_{\mathscr{H}^n}\big((x_1,\cdots,x_n),(y_1,\cdots,y_n)\big) = \#\{k \leqslant n \mid x_k \neq y_k\}$$

  Ο εν λόγω χώρος είναι μετρικός χώρος. Χρησιμοποιείται ιδιαιτέρως στην Αλγεβρική Θεωρία Κωδικών.



- Στον $\mathbb{R}^n$ ορίζουμε:

$$\rho\big((x_1,\cdots,x_n),(y_1,\cdots,y_n)\big)=\max\{|x_k-y_k| \mid k\leqslant n\}$$

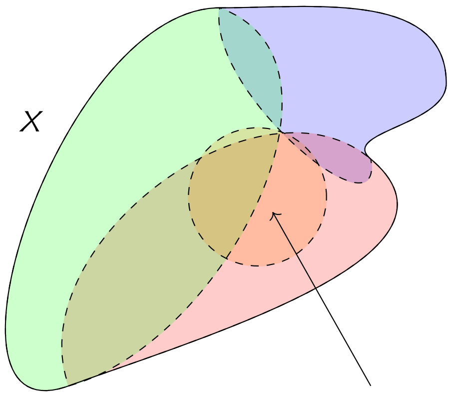
Ο χώρος $(\mathbb{R}^n,\rho)$ γίνεται μετρικός χώρος.

Μία ακόμη σημαντική έννοια στην οποία θα αναφερθούμε είναι αυτή των συμπαγών χώρων. Ένας μετρικός χώρος (X,ρ) θα λέγεται συμπαγής εάν υπάρχει πεπερασμένη ανοικτή κάλυψή του.

Ορισμός 1.1.6 (Συμπαγείς χώροι)**.** *Ένας μετρικός χώρος (X,ρ) θα λέγεται συμπαγής εάν για κάθε οικογένεια $\{U_i\}_{\imath\in I}$ ανοικτών συνόλων στον (X,ρ), υπάρχει πεπερασμένη υπο-οικογένεια $\{U_{i_k}\}_{k=1}^n$ ούτως ώστε*

$$X=\bigcup_{k=1}^n U_k$$

Κανείς έχοντας αυτήν την έννοια υπόψη, μπορεί να ορίσει τα συμπαγή υποσύνολα, ως συμπαγείς χώρους / υποσύνολα του X. Αυτή η οπτική συνήθως δεν είναι πολύ βοηθητική για να καταλάβει κανείς την εικόνα ενός συμπαγούς συνόλου, γι' αυτό θα διατυπώσουμε την επόμενη παρατήρηση.



Παρατήρηση 1.1.6. *Έστω (X,ρ) ένας μετρικός χώρος και $K\subseteq X$. Το K είναι συμπαγές (δηλαδή ο χώρος $(K,\rho|_K)$ είναι συμπαγής) εάν και μόνο αν για κάθε οικογένεια $\{V_i\}_{\imath\in I}$ ανοικτών συνόλων στον (X,ρ), υπάρχει πεπερασμένη υπο-οικογένεια $\{V_{i_k}\}_{k=1}^n$ ούτως ώστε:*

$$K\subseteq\bigcup_{k=1}^n V_k$$

Απόδειξη: $(\Rightarrow)$ Έστω $\{V_i\}_{i\in I}$ ανοικτά στον X με:

$$K\subseteq\bigcup_{i\in I} V_i$$

Θεωρούμε $U_i = V_i \cap K$ και, λόγω της συμπάγειας του K, μία υπο-οικογένεια $\{U_{i_k}\}_{k=1}^n$ ανοικτών στο K που να αποτελεί κάλυψη του K. Αρκεί εδώ να θεωρήσουμε τα ανοικτά σύνολα V_{i_k} του X για τα οποία $U_{i_k} = V_{i_k} \cap K$.

($\Leftarrow$) Ας παρατηρήσουμε αρχικά ότι αν $B \subseteq K$ είναι ένα ανοικτό σύνολο στο K, τότε υπάρχει $A \subseteq X$ ανοικτό σύνολο στο X με $B = A \cap K$. Αυτό μπορεί να δικαιολογηθεί παίρνοντας τις μπάλες $S_K(x,r_x) \subseteq K$ που κατασκευάζουν το $B \subseteq K$ και θεωρώντας τις αντίστοιχες μπάλες $S_X(x,r_x) \subseteq X$ στο X. Τότε:

$$S_K(x,r_x) = S_X(x,r_x) \cap K \Rightarrow \bigcup_{x\in B} S_K(x,r_x) = K \cap \bigcup_{x\in B} S_X(x,r_x) \Rightarrow B = K \cap A$$

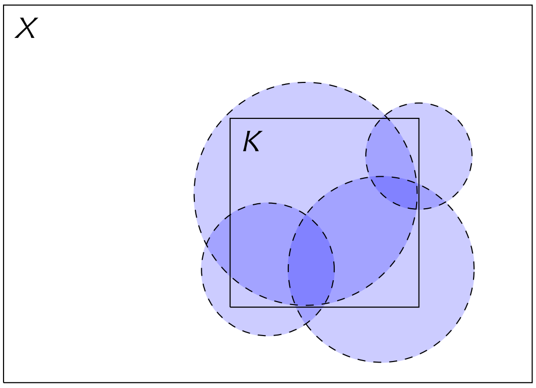
όπου $A = \bigcup_{x\in B} S_X(x,r_x)$.

Έτσι λοιπόν, αν $\{U_i\}_{i\in I}$ είναι μία ανοικτή κάλυψη του K από ανοικτά του K, υπάρχουν ανοικτά σύνολα V_i ώστε $U_i = V_i \cap X$ και (κατά συνέπεια):

$$K \subseteq \bigcup_{i\in I} V_i$$

Από την υπόθεση υπάρχει πεπερασμένη κάλυψη $\{V_{i_k}\}_{k=1}^n$, κι από την επιλογή των V_i η $\{U_{i_k}\}_{\kappa=1}^n$ είναι υποκάλυψη του K

□



Στη συνέχεια λοιπόν θα αναφερθούμε σε θέματα σύγκλισης. Η ύπαρξη μίας μετρικής σε έναν χώρο μας επιτρέπει γενικά να κάνουμε χρήσιμες προσεγγίσεις.

Ορισμός 1.1.7 (Σύγκλιση). *Έστω (X,ρ) ένας μετρικός χώρος και $(x_n)_{n=1}^\infty$ μία ακολουθία του X. Εάν υπάρχει $x \in X$ τέτοιο ώστε:*

$$\rho(x_n, x) \to 0$$

θα λέμε ότι η $(x_n)_{n=1}^\infty$ συγκλίνει στο x, και θα συμβολίζουμε $x_n \to x$.

Ο ορισμός της σύγκλισης στους μετρικούς χώρους μπορεί να μας δώσει αποτελέσματα που σχετίζονται με τη γεωμετρία (τοπολογία) του χώρου, κάτι που ίσως στην αρχή μπορεί να μην είναι φανερό.

Παρατήρηση 1.1.7. *Έστω (X,ρ) ένας μετρικός χώρος. Ένα σύνολο $K \subseteq X$ είναι κλειστό εάν και μόνο αν κάθε συγκλίνουσα ακολουθία $(y_n)_{n=1}^\infty$ του K συγκλίνει σε $y \in K$.*

Απόδειξη: ($\Rightarrow$) Εάν το σύνολο K είναι κλειστό και $y_n \to y \notin K$, γύρω από το y μπορούμε να θεωρήσουμε κατάλληλα μικρή μπάλα $S(y,r_y) \subseteq X \backslash K$. Εφόσον $\rho(y_n, y) \to 0$, τελικά όλοι οι όροι y_n βρίσκονται εντός της $S(y,r_y)$. Αυτό είναι άτοπο αφού $y_n \in K$, και κατά συνέπεια $y \in K$.

($\Leftarrow$) Υποθέτουμε προς άτοπο ότι το K δεν είναι κλειστό. Σ' αυτήν την περίπτωση υπάρχει $y \notin K$ τέτοιο ώστε για κάθε $r > 0$, $S(y,r) \nsubseteq X \backslash K$, δηλαδή $S(y,r) \cap K \neq \varnothing$. Επιλέγουμε ακολουθία $(r_n)_{n=1}^\infty = (1/2^n)_{n=1}^\infty$ και σε κάθε $S(y,r_n) \cap K$ ένα στοιχείο y_n, οπότε κατασκευάζουμε ακολουθία $(y_n)_{n=1}^\infty$, που εξ ορισμού της συγκλίνει στο y. Από την υπόθεση αυτό είναι άτοπο, αφού τότε το όριο y θα έπρεπε να ανήκει στο K.

□

Εν τω μεταξύ η απόδειξη της παραπάνω παρατήρησης δείχνει κάτι αρκετά ουσιώδες, σχετικά με τη μορφή μίας κλειστής θήκης $\overline{K}$: αποτελείται από τα όρια όλων των συγκλινουσών ακολουθιών του K.

Παρατήρηση 1.1.8. *Έστω (X, ρ) ένας μετρικός χώρος και $K \subseteq X$. Το σύνολο $\overline{K}$ μπορεί να γραφεί ως:*

$$\overline{K} = \{\lim y_n \mid (y_n)_{n=1}^{\infty} \text{ συγκλίνουσα ακολουθία του } K\}$$

Απόδειξη: Πράγματι, γράφουμε $\overline{K} = K \cup \partial K$ και διακρύνουμε περιπτώσεις. Εάν $y \in K$, τότε η σταθερή ακολουθία $(y)_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνει στο y. Αν $y \in \partial K$, γύρω από αυτό μπορούν να βρεθούν μπάλες $S(y, 1/2^n)$ που έχουν μη κενή τομή με το K. Όπως και στην απόδειξη της Παρατήρησης 1.1.7, μπορεί να βρεθεί ακολουθία του K που να συγκλίνει στο y. Αυτά δείχνουν ότι:

$$\overline{K} \subseteq \{\lim y_n \mid (y_n)_{n=1}^{\infty} \text{ συγκλίνουσα ακολουθία του } K\}$$

Από την άλλη η Παρατήρηση 1.1.7 δείχνει και τον αντίστροφο εγκλεισμό:

$$\overline{K} \supseteq \{\lim y_n \mid (y_n)_{n=1}^{\infty} \text{ συγκλίνουσα ακολουθία του } K\}$$

□

Αυτή ουσιαστικά είναι η ιδέα του ορισμού του πυκνού συνόλου, που θα δούμε αργότερα. Εάν $\overline{K} = X$, τα στοιχεία του X θα προσεγγίζονται από στοιχεία του K, σύμφωνα με την παραπάνω παρατήρηση.

Αντίστοιχη της Παρατήρησης 1.1.7 για ανοικτά σύνολα είναι η ακόλουθη:

Παρατήρηση 1.1.9. *Έστω (X, ρ) ένας μετρικός χώρος. Ένα σύνολο $A \subseteq X$ είναι ανοικτό εάν και μόνο αν κάθε συγκλίνουσα ακολουθία $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ του X που συγκλίνει σε στοιχείο $a \in A$, είναι τελικά εντός του A.*

Απόδειξη: ($\Rightarrow$) Αυτή η κατεύθυνση είναι κάπως άμεση, αφού μπορεί να βρεθεί μπάλα $S(a, r_a) \subseteq A$. Επειδή $x_n \to a$, οι x_n τελικά βρίσκονται στην $S(a, r_a)$, άρα στο A.

($\Leftarrow$) Ο απλούστερος τρόπος να γίνει αυτή η κατεύθυνση είναι μάλλον με άτοπο. Εάν το A δεν είναι ανοικτό, τότε υπάρχει $a \in A$ ούτως ώστε για κάθε $r > 0$, $S(a, r) \cap (X \backslash A) \neq \varnothing$. Δηλαδή, όπως έχουμε δει αρκετές φορές, επιλέγοντας ακτίνες $r_n = 1/2^n$ μπορούν να επιλεγούν $x_n \in S(a, r_n) \cap (X \backslash A)$ και να κατασκευαστεί ακολουθία $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ που συγκλίνει στο a, αλλά βρίσκεται συνεχώς εκτός του A. Αυτό είναι άτοπο.

□

Μέσω της σύγκλισης ακολουθιών είναι δυνατόν κανείς να εκφράσει ακόμη μία τοπολογική έννοια, τη συμπάγεια.

Παρατήρηση 1.1.10. *Ένας μετρικός χώρος (X, ρ) είναι συμπαγής εάν και μόνο αν κάθε ακολουθία $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ έχει συγκλίνουσα υπακολουθία.*

Απόδειξη: ($\Rightarrow$) Ορίζουμε γι' αρχή τα σύνολα $A_n = \{x_m \mid m \geqslant n\}$ και παρατηρούμε ότι καμία πεπερασμένη τομή $\bigcap_{k=1}^{m} \overline{A_{n_k}}$ δεν είναι κενή, αφού $\bigcap_{k=1}^{m} \overline{A_{n_k}} \supseteq \overline{A_{n_m+1}}$.

Ισχυριζόμαστε ότι $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{A_n} \neq \varnothing$: πράγματι, αν ήταν το κενό σύνολο, το:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} (X \backslash \overline{A_n})$$

θα κάλυπτε το X, από de Morgan. Από τη συμπάγεια του χώρου θα υπήρχε πεπερασμένη υποκάλυψη κι άρα πεπερασμένη κενή τομή (ξανά με de Morgan). Αυτό είναι άτοπο.

Επιλέγουμε λοιπόν $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{A_n}$. Θα ισχυριστούμε επίσης ότι υπάρχει μια ακολουθία $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ η οποία συγκλίνει στο x. Πράγματι, εφόσον $x \in \overline{A_k}$ για όλα τα k, για κάθε μπάλα $S(x, r)$ έχουμε $S(x, r) \cap A_k \neq \varnothing$. Οπότε αν επιλεγούν ακτίνες $r_k = 1/2^k$ μπορούν να βρεθούν $x_{n_k} \in S(x, r_k) \cap A_k$ και κατά συνέπεια $x_{n_k} \to x$. Αποδείχθηκε λοιπόν ότι υπάρχει μία υπακολουθία, η $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$, η οποία συγκλίνει.

($\Leftarrow$) Αυτή η κατεύθυνση είναι περίεργως αρκετά περίπλοκη. Παραπέμπεστε στο [Βα] (Θεώρημα 6.2.4). Θα χρειαστούν έννοιες πληρότητας, τις οποίες εμείς αναφέρουμε παρακάτω.

□

Επιστρέφουμε τώρα στα πυκνά σύνολα. Θα λέμε ότι ένα σύνολο είναι πυκνό σε έναν χώρο εάν κάθε στοιχείο του χώρου μπορεί να προεγγιστεί με στοιχεία του συνόλου. Με βάση λοιπόν την Παρατήρηση 1.1.8, ο ακόλουθος ορισμός είναι λογικός.

Ορισμός 1.1.8 (Πυκνά σύνολα και διαχωρίσιμοι χώροι). *Έστω (X,ρ) ένας μετρικός χώρος και $D \subseteq X$ ένα σύνολο. Θα λέμε ότι το D είναι πυκνό εάν:*

$$\overline{D} = X$$

Επίσης, ο (X,ρ) θα λέγεται διαχωρίσιμος εάν υπάρχει αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολό του.

Ένα παράδειγμα ενός πυκνού συνόλου στον $(\mathbb{R},\rho)$, $\rho(x,y) = |x-y|$, είναι το $\mathbb{Q}$. Γνωρίζουμε -για παράδειγμα από τη δεκαδική αναπαράσταση ενός αριθμού- ότι κάθε πραγματικός αριθμός προσεγγίζεται από ρητούς.

Γενικά πάντως δεν είναι όλα τα πυκνά σύνολα τόσο «περίεργα» τοπολογικά. Υπάρχουν, για παράδειγμα, ανοικτά και πυκνά σύνολα στον $\mathbb{R}$: ένα τέτοιο σύνολο είναι το:

$$D = \bigcup_{n=1}^{\infty} S(q_n, 1/2^n)$$

όπου $(q_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι μία αρίθμηση των ρητών. Τα ανοικτά και πυκνά σύνολα είναι ενδιαφέροντα και έχουν αρκετές εφαρμογές, ιδίως μέσω του θεωρήματος του Baire που θα δούμε παρακάτω.

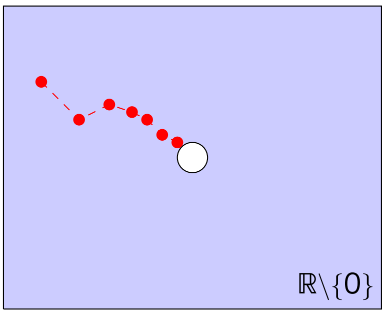
Πρώτα όμως θα εξετάσουμε έννοιες πληρότητας στους μετρικούς χώρους.

Ορισμός 1.1.9 (Βασικές ακολουθίες). *Έστω (X,ρ) ένας μετρικός χώρος και $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ μία ακολουθία του X. Θα λέμε ότι η $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι βασική εάν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n,m \geqslant n_0$ να έχουμε:*

$$\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$$

Δηλαδή, τελικά οι όροι της ακολουθίας έρχονται πολύ κοντά.

Το ότι οι όροι «πλησιάζουν» ο ένας τον άλλον δεν σημαίνει ότι η ακολουθία συγκλίνει. Στο $\mathbb{R}$ γνωρίζουμε ότι αυτό ισχύει, υπάρχει δηλαδή σημείο σύγκλισης, γενικά όμως δεν υπάρχει. Ο χώρος μπορεί να «έχει τρύπες». Εάν ο χώρος δεν έχει τρύπες, λέγεται πλήρης.



Ακόμη πάντως κι αν μία βασική ακολουθία δεν συγκλίνει, είναι πολύ κοντά στο να συγκλίνει, όπως δείχνει η ακόλουθη παρατήρηση.

Παρατήρηση 1.1.11. *Έστω (X,ρ) ένας μετρικός χώρος και $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ μία βασική ακολουθία. Εάν υπάρχει έστω και μία υπακολουθία $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ ούτως ώστε $x_{n_k} \to x \in X$, τότε $x_n \to x$.*

Απόδειξη: Πράγματι, αν δεν αληθεύει ότι $x_n \to x$, τότε υπάρχει ένα $r > 0$ ούτως ώστε τελικά $x_n \notin S(x,r)$. Αυτό είναι άτοπο, αφού στην $S(x,r)$ θα πρέπει (λόγω σύγκλισης) να βρίσκονται όροι x_{n_k}.

□

Ορισμός 1.1.10 (Πλήρεις χώροι). *Έστω (X,ρ) ένας μετρικός χώρος. Θα λέμε ότι ο (X,ρ) είνα πλήρης εάν κάθε βασική ακολουθία έχει όριο.*

Ακόμη πάντως κι αν ένας χώρος δεν είναι πλήρης, μπορεί να αποτελέσει πυκνό σύνολο για έναν πλήρη χώρο. Αυτό είναι ένα πολύ χρήσιμο θεώρημα.

Θεώρημα 1.1.1 (Πλήρωση μετρικού χώρου). *Έστω (X,ρ) ένας μετρικός χώρος. Υπάρχει χώρος πλήρης μετρικός χώρος $(\widetilde{X},\widetilde{\rho})$ ώστε ο X να εμφυτεύεται ισομετρικά σ' αυτόν (δηλαδή υπάρχει $i_X : X \hookrightarrow \widetilde{X}$ που να διατηρεί τις αποστάσεις -μια ισομετρία). Επιπλέον στον νέο χώρο το X είναι πυκνό, δηλαδή $\overline{i_X(X)} = \widetilde{X}$.*

Απόδειξη: Θεωρούμε στον χώρο:

$$X_0 = \left\{ (x_n)_{n=1}^{\infty} \in X^{\mathbb{N}} \mid (x_n)_{n=1}^{\infty} \text{ βασική ακολουθία} \right\}$$

μία σχέση ισοδυναμίας «$\sim$», η οποία ορίζεται ως εξής: για κάθε δύο ακολουθίες $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ έχουμε:

$$(x_n)_{n=1}^{\infty} \sim (z_n)_{n=1}^{\infty} :\Leftrightarrow \rho(x_n, z_n) \to 0$$

Έχοντας αυτή τη σχέση ισοδυναμίας, ορίζουμε:

$$\widetilde{X} = {X_0}\big/_{\sim}$$

Τις κλάσεις ισοδυναμίας θα τις συμβολίζουμε με $(x_n)_{n=1}^{\infty}/\sim$. Ο X μ' αυτόν τον τρόπο εμφυτεύεται στον $\widetilde{X}$, και μάλιστα κάθε $x \in X$ αντιστοιχεί στην κλάση $i_X(x) = (x, x, \cdots)/\sim$ της σταθερής ακολουθίας $(x, x, \cdots)$.

Χρειάζεται να κάνουμε τον $\widetilde{X}$ μετρικό χώρο, και μάλιστα με μία μετρική $\widetilde{\rho}$ που θα επεκτείνει την ρ (θα δούμε στη συνέχεια τι σημαίνει αυτό). Ορίζουμε $\widetilde{\rho}$:

$$\widetilde{\rho}\big((x_n)_{n=1}^{\infty}/\sim, (z_n)_{n=1}^{\infty}/\sim\big) := \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, z_n)$$

και παρατηρούμε ότι η $\widetilde{\rho}$ ορίζεται καλά. Αυτό συμβαίνει διότι οι $(x_n)_{n=1}^{\infty}, (z_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι βασικές, και κατά συνέπεια:

$$\big|\rho(x_n, z_n) - \rho(x_m, z_m)\big| \leqslant \big|\rho(x_n, x_m) + \rho(x_m, z_n) - \rho(x_m, z_n) - \rho(z_n, z_m)\big| \leqslant \rho(x_n, x_m) + \rho(z_n, z_m) \to 0$$

(οπότε είναι βασική ακολουθία πραγματικών αριθμών κι έχει όριο). Ακόμη χρειάζεται να δειχθεί ότι οι αντιπρόσωποι δεν παίζουν ρόλο στον ορισμό της $\widetilde{\rho}$, αλλά αυτό δεν είναι δύσκολο κανείς να το ελέγξει.

Επιπλέον, η $\widetilde{\rho}$ επεκτείνει την ρ με την εξής έννοια: αν $\rho(x, z) = \lambda$, τότε:

$$\widetilde{\rho}\big(i_X(x), i_X(z)\big) = \lambda$$

Ακόμη, ο $i_X(X)$ είναι πυκνός στον $\widetilde{X}$. Για να το δείξουμε αυτό, θα δείξουμε ότι για κάθε $(x_n)_{n=1}^{\infty}/\sim$ και $\varepsilon > 0$:

$$S_{\widetilde{X}}\big((x_n)_{n=1}^{\infty}/\sim, \varepsilon\big) \cap i_X(X) \neq \varnothing$$

Πράγματι, έστω $\varepsilon > 0$ και -λόγω του ότι η ακολουθία είναι βασική- ένας $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\rho(x_n, x_{n_0}) < \varepsilon/2$. Θεωρώντας την ακολουθία $(x_{n_0}, x_{n_0}, \cdots)$, παρατηρούμε ότι:

$$\widetilde{\rho}\big((x_n)_{n=1}^{\infty}/\sim, (x_{n_0}, \cdots)/\sim\big) = \lim_{n\to\infty} \rho\big(x_n, x_{n_0}\big) \leqslant \varepsilon/2 < \varepsilon$$

οπότε $(x_{n_0}, x_{n_0}, \cdots)/\sim \in S_{\widetilde{X}}\big((x_n)_{n=1}^{\infty}, \varepsilon\big) \cap i_X(X)$. Έτσι δείξαμε ότι $\overline{i_X(X)} = \widetilde{X}$.

Για να τελειώσουμε την απόδειξη, θα δείξουμε ότι ο $(\widetilde{X},\widetilde{\rho})$ είναι πλήρης, χρησιμοποιώντας με ουσιώδη τρόπο την πληρότητα του $i_X(X)$.

Έστω λοιπόν $\big((x_n^m)_{n=1}^\infty/\sim\big)_{m=1}^\infty$ μία βασική ακολουθία του $\widetilde{X}$. Εφόσον είναι βασική, μπορεί να βρεθεί $m_1\in\mathbb{N}$ ούτως ώστε για κάθε $m\geqslant m_1$:

$$\widetilde{\rho}\big((x_n^m)_{n=1}^\infty/\sim,(x_n^{m_1})_{n=1}^\infty/\sim\big)<1/2^2$$

Επιπλέον, από την πυκνότητα του $i_X(X)$, μπορεί να βρεθεί $(z_1,z_1,\cdots)/\sim$ ούτως ώστε:

$$\widetilde{\rho}\big((x_n^{m_1})_{n=1}^\infty/\sim,(z_1,z_1,\cdots)/\sim\big)<1/2^2$$

Τώρα από την τριγωνική ανισότητα και τις δύο προηγούμενες σχέσεις έπεται ότι:

$$\widetilde{\rho}\big((x_n^m)_{n=1}^\infty/\sim,(z_1,z_1,\cdots)/\sim\big)<1/2^2+1/2^2=1/2$$

Μπορούμε λοιπόν να συνεχίσουμε με παρόμοιο τρόπο, βρίσκοντας $m_2\in\mathbb{N}$ ούτως ώστε για κάθε $m\geqslant m_2$:

$$\widetilde{\rho}\big((x_n^m)_{n=1}^\infty/\sim,(x_n^{m_2})_{n=1}^\infty/\sim\big)<1/2^3$$

κι από την πυκνότητα του $i_X(X)$, ένα $(z_2,z_2,\cdots)/\sim$ ούτως ώστε:

$$\widetilde{\rho}\big((x_n^m)_{n=1}^\infty/\sim,(z_2,z_2,\cdots)/\sim\big)<1/2^3$$

Είναι φανερό τώρα -από τον ορισμό της ισοδυναμίας- ότι $(z_1,z_2,z_2\cdots)\sim(z_2,z_2,z_2,\cdots)$, οπότε από τις δύο προηγούμενες σχέσεις με τριγωνική ανισότητα έπεται:

$$\widetilde{\rho}\big((x_n^m)_{n=1}^\infty/\sim,(z_1,z_2,\cdots)/\sim\big)<1/2^3+1/2^3=1/2^2$$

Μετά απ' αυτό το βήμα κανείς μπορεί να συνεχίσει επαγωγικά. Ισχυριζόμαστε ότι το $(z_1,z_2,z_3,\cdots)/\sim=(z_n)_{n=1}^\infty/\sim$ είναι όριο της βασικής ακολουθίας $\big((x_n^m)_{n=1}^\infty/\sim\big)_{m=1}^\infty$. Πράγματι, εξ ορισμού της αυτή η ακολουθία έχει την ιδιότητα:

$$\widetilde{\rho}\big((x_n^m)_{n=1}^\infty/\sim,(z_n)_{n=1}^\infty/\sim\big)<1/2^n$$

για κάθε n, καθώς το m μεγαλώνει. Κατά συνέπεια:

$$\lim_{m\to\infty}\widetilde{\rho}\big((x_n^m)_{n=1}^\infty/\sim,(z_n)_{n=1}^\infty/\sim\big)=0\Rightarrow(x_n^m)_{n=1}^\infty/\sim\to(z_n)_{n=1}^\infty/\sim$$

□

Ένα σημαντικό αποτέλεσμα που θα δούμε -πριν το θεώρημα του Baire- είναι η αρχή του εγκυβωτισμού. Γι' αυτήν θα χρειαστούμε την έννοια της διαμέτρου.

Ορισμός 1.1.11 (Διάμετρος)**.** *Έστω (X,ρ) ένας μετρικός χώρος και $A\subseteq X$. Ορίζουμε τη διάμετρο του A:*

$$\operatorname{diam} A:=\sup\{\rho(x,y)\mid x,y\in A\}$$

και λέμε ότι το A είναι φραγμένο εάν $\operatorname{diam} A<\infty$.

Μπορούμε τώρα να διατυπώσουμε την αρχή του εγκυβωτισμού.

Πρόταση 1.1.1 (Αρχή του εγκυβωτισμού)**.** *Έστω (X,ρ) ένας μετρικός χώρος. Ο (X,ρ) είναι πλήρης εάν και μόνο αν για κάθε φθίνουσα ακολουθία κλειστών συνόλων $(K_n)_{n=1}^\infty$ με* $\operatorname{diam} K_n\to 0$ *υπάρχει $x\in X$ ώστε:*

$$\bigcap_{n=1}^\infty K_n=\{x\}$$

Απόδειξη: ($\Rightarrow$) Σε κάθε σύνολο K_n επιλέγουμε ένα στοιχείο x_n, και κατασκευάζουμε ακολουθία $(x_n)_{n=1}^\infty$.

Η ακολουθία αυτή είναι βασική ακολουθία για τον εξής λόγο: θεωρούμε $\varepsilon>0$ και (εφόσον $\operatorname{diam} K_n\to 0$) έναν δείκτη n_0 ούτως ώστε $\operatorname{diam} K_{n_0}<\varepsilon$. Εξ ορισμού της διαμέτρου, για κάθε $n,m \geqslant n_0$, επειδή $x_n \in K_n \subseteq K_{n_0}$, $x_m \in K_m \subseteq K_{n_0}$, έχουμε $\rho(x_n,x_m) < \varepsilon$. Δηλαδή η $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι βασική ακολουθία.

Από την πληρότητα λοιπόν του χώρου έπεται ότι υπάρχει κάποιο $x \in X$ τέτοιο ώστε $x_n \to x$. Ισχυριζόμαστε ότι $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$. Πράγματι, επειδή τα $X \backslash K_n$ είναι ανοικτά, το:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}(X \backslash K_n)$$

είναι ανοικτό. Από τους κανόνες de Morgan τώρα, το σύνολο:

$$X \backslash \left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(X \backslash K_n)\right) = \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$$

είναι κλειστό. Οπότε, από την Παρατήρηση 1.1.7, $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$.

($\Leftarrow$) Έστω προς άτοπο ότι υπάρχει βασική ακολουθία $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ η οποία δεν συγκλίνει. Ορίζουμε:

$$K_n = \{x_m \mid m \geqslant n\}$$

και παρατηρούμε ότι αυτά είναι κλειστά σύνολα. Πράγματι, εάν $(x_{\sigma(k)})_{k=1}^{\infty}$ είναι μία ακολουθία του K_n (όπου $\sigma : \mathbb{N} \to \{n, n+1, \cdots\}$) η οποία συγκλίνει σε $x \in X$, υπάρχει περίπτωση είτε αυτή να είναι τελικά σταθερή, είτε να μην είναι.

Αν είναι τελικά σταθερή, τότε το όριό της (προφανώς) ανήκει στο K_n. Εάν δεν είναι, από την σ μπορούν να επιλεγούν όροι $\sigma(k)$ σε γνησίως αύξουσα σειρά και να κατασκευαστεί υπακολουθία $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ (σκεφτείτε ότι σε κάθε βήμα ψάχνουμε στους δακτυλίους $S(x,1/2^{n-1}) \backslash S(x,1/2^n)$ -δεν γίνεται συνεχώς οι δείκτες $\sigma(k)$ να μειώνονται στους δακτυλίους, ούτε να έχουν «περιοδικότητα»).

Η εν λόγω υπακολουθία θα συγκλίνει στο $x \in X$. Από την Παρατήρηση 1.1.11 η $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ δεν μπορεί να περιέχει καμία συγκλίνουσα υπακολουθία, οπότε αυτό το x δεν υφίσταται. Κατά συνέπεια, μόνο τελικά σταθερές συγκλίνουσες ακολουθίες υπάρχουν στα K_n.

Εφόσον τώρα η $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι βασική, για τα K_n έχουμε $\operatorname{diam} K_n \to 0$. Από την υπόθεση υπάρχει $x \in X$ τέτοιο ώστε:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n = \{x\}$$

το οποίο είναι άτοπο: εφόσον $\operatorname{diam} K_n \to 0$, έχουμε $\rho(x_n, x) \to 0$, δηλαδή $x_n \to x$. Αυτό δεν αληθεύει εξ υποθέσεως.

$\square$

Με αυτήν την πρόταση είμαστε έτοιμοι να αποδείξουμε το θεώρημα του Baire.

Θεώρημα 1.1.2 (Θεώρημα του Baire)**.** *Έστω (X,ρ) ένας πλήρης μετρικός χώρος.*

i. Εάν $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι μία ακολουθία ανοικτών και πυκνών συνόλων του X, τότε το σύνολο:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

είναι πυκνό.

ii. Εάν $(K_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι μία ακολουθία κλειστών συνόλων ώστε $\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n = X$, τότε κάποιο από τα K_n έχει μη κενό εσωτερικό.

Απόδειξη: Για το i.: Εφόσον θέλουμε να δείξουμε ότι το $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ είναι πυκνό, στην πραγματικότητα θέλουμε να δείξουμε ότι κάθε στοιχείο $x \in X$ προσεγγίζεται από στοιχεία του $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$. Δηλαδή, θέλουμε να δείξουμε ότι για κάθε $x \in X$, $r > 0$:

$$S(x,r) \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) \neq \varnothing$$

Έστω λοιπόν $x_0 \in X$, $r_0 > 0$ και η αντίστοιχη μπάλα $S(x_0, r_0)$.

Η απόδειξη θα γίνει σε βήματα. Γι' αρχή, επειδή το A_1 είναι πυκνό, υπάρχει $x_1 \in S(x_0,r_0)\cap A_1$. Επειδή τα $S(x_0,r_0)$, A_1 είναι ανοικτά, υπάρχει μπάλα $S(x_1,r_1') \subseteq S(x_0,r_0)\cap A_1$, την οποία εμείς μπορούμε να μικρύνουμε, κατασκευάζοντας $B(x_1,r_1) \subseteq S(x_0,r_0)\cap A_1$. Μάλιστα μπορούμε να επιλέξουμε $r_1 \leqslant 1$.

Αντίστοιχα για την $S(x_1,r_1)$, μπορεί να βρεθεί $x_2 \in S(x_1,r_1)\cap A_2$ και $r_2 \leqslant 1/2$ με $B(x_2,r_2) \subseteq S(x_1,r_1)\cap A_2$.

Επαγωγικά τώρα, για την $S(x_n,r_n)$, μπορεί να βρεθεί $x_{n+1} \in S(x_n,r_n)\cap A_{n+1}$ και $r_n \leqslant 1/2^n$ με $B(x_{n+1},r_{n+1}) \subseteq S(x_n,r_n)\cap A_{n+1}$. Μ' αυτόν τον τρόπο παίρνουμε μία φθίνουσα ακολουθία κλειστών μπαλών (άρα κλειστών συνόλων):

$$B(x_1,r_1) \supseteq B(x_2,r_2) \supseteq \cdots$$

των οποίων οι διάμετροι φθίνουν ($\text{diam } B(x_n,r_n) = 2\cdot 1/2^n \to 0$). Έτσι λοιπόν, σύμφωνα με την Πρόταση 1.1.1, υπάρχει $x \in X$ ούτως ώστε:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} B(x_n,r_n) = \{x\}$$

Δηλαδή το σύνολο:

$$S(x_0,r_0)\cap\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) \supseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} B(x_n,r_n)$$

δεν είναι κενό. Αυτό αποδεικνύει τη ζητούμενη πυκνότητα.

Για το ii.: Το ii. είναι ουσιαστικά αποτέλεσμα του i. Γράφοντας $A_n = X\backslash K_n$, παρατηρούμε ότι, αν τα K_n έχουν κενό εσωτερικό:

$$\overline{A_n} = \overline{X\backslash K_n} = X\backslash K_n^\circ = X$$

Δηλαδή τα A_n είναι ανοικτά και πυκνά. Οπότε από το i., η τομή $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ είναι ανοικτό και πυκνό σύνολο, από το οποίο έπεται:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \neq \varnothing \Rightarrow X\backslash \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n \neq \varnothing$$

Αυτό είναι άτοπο.

□

Τέλος, για να κλείσουμε το κομμάτι των μετρικών χώρων, θα αναφερθούμε σε έννοιες συνέχειας. Στις πραγματικές συναρτήσεις λέγαμε ότι μία συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}, A \subseteq \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $a \in A$ εάν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ούτως ώστε για κάθε $x \in (a-\delta, a+\delta)$ να έχουμε $f\big((a-\delta,a+\delta)\big) \subseteq \big(f(a)-\varepsilon, f(a)+\varepsilon\big)$. Τώρα που διαθέτουμε απόσταση και σε γενικότερες περιπτώσεις, μπορούμε να δώσουμε τον αντίστοιχο γενικό ορισμό.

Ορισμός 1.1.12 (Συνέχεια)**.** *Έστω $(X,\rho),(Y,d)$ δύο μετρικοί χώροι και $f : X \to Y$. Θα λέμε ότι η f είναι συνεχής στο $x_0 \in X$ εάν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ούτως ώστε:*

$$f(S_X(x_0,\delta)) \subseteq S_Y(f(x_0),\varepsilon)$$

Τους δείκτες στις μπάλες τους βάζουμε για να ξεχωρίζουμε κάθε φορά σε ποιόν χώρο βρισκόμαστε.

Η συνέχεια, όπως αυτή εκφράζεται γενικά, μπορεί να περιγραφεί μέσω ακολουθιακής συνέχειας. Είναι ενδιαφέρον αποτέλεσμα, πόσο μάλλον επειδή ισχύει σε μετρικούς χώρους αλλά όχι σε τοπολογικούς χώρους γενικά -παραπέμπεστε στο [Φρ2] (Κεφάλαιο 8).

Πρόταση 1.1.2 (Αρχή της μεταφοράς)**.** *Έστω (X,ρ), (Y,d) δύο τοπολογικοί χώροι και $f : X \to Y$ μία συνάρτηση. Η f είναι συνεχής στο $x \in X$ εάν και μόνο αν για κάθε συγκλίνουσα ακολουθία $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ προς το x, η ακολουθία $\big(f(x_n)\big)_{n=1}^{\infty}$ είναι συγκλίνουσα προς το $f(x)$.*

$$x_n \to x \Rightarrow f(x_n) \to f(x)$$

Απόδειξη: (⇒) Έστω $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ μία ακολουθία του X με $x_n \to x$. Έστω $\varepsilon > 0$ και $\delta > 0$ τέτοιο ώστε (λόγω της συνέχειας της f):

$$f(S_X(x,\delta)) \subseteq S_Y(f(x),\varepsilon)$$

Εάν τώρα $x_n \to x$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για κάθε $n \geqslant n_0$ να έχουμε:

$$x_n \in S_X(x,\delta)$$

και κατά συνέπεια $f(x_n) \in S_Y(f(x),\varepsilon)$. Δηλαδή $\rho(f(x_n),f(x)) < \varepsilon$ κι άρα $f(x_n) \to f(x)$.

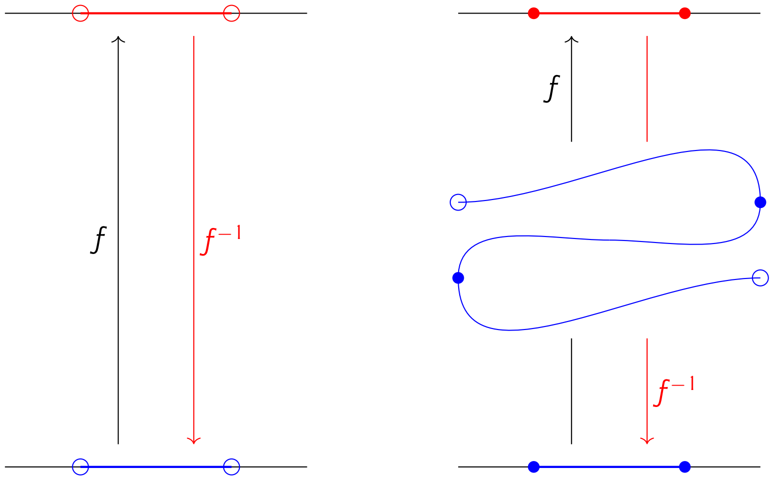
(⇐) Προς άτοπο υποθέτουμε ότι η f δεν είναι συνεχής στο x. Σ' αυτήν την περίπτωση, υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε για κάθε $\delta > 0$:

$$f(S_X(x,\delta)) \nsubseteq S_Y(f(x),\varepsilon) \Rightarrow f(S_X(x,\delta)) \setminus S_Y(f(x),\varepsilon) \neq \varnothing$$

Θεωρώντας ακτίνες $(\delta_n)_{n=1}^{\infty} = (1/2^n)_{n=1}^{\infty}$, μπορούν να επιλεγούν στοιχεία $x_n \in S_X(x,\delta_n)$ με:

$$f(x_n) \in f(S_X(x,\delta_n)) \setminus S_Y(f(x),\varepsilon)$$

οπότε $x_n \to x$ και $f(x_n) \not\to f(x)$ (αφού $\rho(f(x_n),f(x)) \geqslant \varepsilon$). Αυτό είναι άτοπο εξ υποθέσεως. □



Είναι χρήσιμο κανείς να δει την συνέχεια και κάπως τοπολογικά, χρησιμοποιώντας δηλαδή χαρακτηρισμούς με ανοικτά / κλειστά σύνολα. Θα δούμε ότι οι αντίστροφες εικόνες ανοικτών συνόλων είναι ανοικτά σύνολα, κι αντίστοιχα οι αντίστροφες εικόνες κλειστών συνόλων είναι κλειστά σύνολα, εάν και μόνο αν η απεικόνιση είναι συνεχής.

Αυτό βέβαια δεν σημαίνει ότι (λόγου χάρη) ένα ανοικτό δεν μπορεί να απεικονιστεί σε ένα κλειστό σύνολο. Στο δεύτερο σχήμα, το ανοικτό (τοπολογικά) μπλε ευθύγραμμο τμήμα μπορεί να «διπλώσει» με συνεχή τρόπο και να καταλήξει στο κλειστό κόκκινο ευθύγραμμο τμήμα. Αν όμως «διπλώσουμε» με ανάλογο τρόπο όλον τον κάτω χώρο προς τον πάνω χώρο, μπορούμε έπειτα να αναρρωτηθούμε ποιά σημεία του πρώτου χώρου έπεσαν πάνω στο κόκκινο. Οπότε γυρνώντας αντίστροφα, παίρνουμε το κλειστό (τοπολογικά) μπλε ευθύγραμμο τμήμα, κι όχι το αντίστοιχο ανοικτό.

Για να πειστείτε, μπορείτε να ζωγραφίσετε μερικές γραφικές παραστάσεις.

Πρόταση 1.1.3. *Έστω (X,ρ), (Y,d) δύο τοπολογικοί χώροι και $f : X \to Y$ μία συνάρτηση. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

i. Η f είναι συνεχής.

ii. Εάν το $A \subseteq Y$ είναι ανοικτό, τότε το $f^{-1}(A) \subseteq X$ είναι ανοικτό.

iii. Εάν το $K \subseteq Y$ είναι κλειστό, τότε το $f^{-1}(K) \subseteq X$ είναι κλειστό.

Απόδειξη: (i. ⇒ ii.) Έστω $a \in f^{-1}(A)$ (αν δεν υπάρχει, η περίπτωση είναι τετριμμένη -ενδέχεται να μην εξετάζουμε τετριμμένες περιπτώσεις αρκετές φορές). Εφόσον η f είναι συνεχής, για κάθε $\varepsilon > 0$ μπορεί να βρεθεί $\delta > 0$ με:

$$f(S_X(a,\delta)) \subseteq S_Y(f(a),\varepsilon)$$

κι επειδή το A είναι ανοικτό, αν μικρύνουμε αρκετά το ε:

$$f(S_X(a,\delta)) \subseteq S_Y(f(a),\varepsilon) \subseteq A$$

Αυτό δείχνει ότι $S_X(a,\delta) \subseteq f^{-1}(A)$ (θυμηθείτε από τη συνολοθεωρία ότι $\Sigma \subseteq f^{-1} \circ f(\Sigma)$), επομένως το $f^{-1}(A)$ είναι ανοικτό.

(ii. $\Rightarrow$ iii.) Έστω $K \subseteq Y$ ένα κλειστό σύνολο. Το $Y \backslash K$ είναι ανοικτό σύνολο, οπότε από το ii. (και την «καλή συμπεριφορά» των αντιστρόφων εικόνων στις διαφορές) έπεται το συμπέρασμα.

(iii. $\Rightarrow$ i.) Έστω $x \in X$ και $\varepsilon > 0$. Θεωρούμε το κλειστό σύνολο $Y \backslash S_Y(f(x),\varepsilon)$ κι από το iii. το:

$$f^{-1}(Y \backslash S_Y(f(x),\varepsilon)) = X \backslash f^{-1}(S_Y(f(x),\varepsilon))$$

είναι κλειστό, δηλαδή το $f^{-1}(S_Y(f(x),\varepsilon))$ είναι ανοικτό. Μάλιστα $x \in f^{-1}(S_Y(f(x),\varepsilon))$ (διότι $f(x) \in S_Y(f(x),\varepsilon)$).

Επιλέγουμε λοιπόν ανοικτή μπάλα $S_X(x,\delta) \subseteq f^{-1}(S_Y(f(x),\varepsilon))$ και παρατηρούμε τότε ότι:

$$f(S_X(x,\delta)) \subseteq S_Y(f(x),\varepsilon)$$

οπότε η f είναι συνεχής (θυμηθείτε από τη συνολοθεωρία ότι $f \circ f^{-1}(\Sigma) \subseteq \Sigma$). □

Η παραπάνω πρόταση μας επιτρέπει να μεταφέρουμε (κατά κάποιον τρόπο) την τοπολογική δομή ενός χώρου Y σε έναν άλλον χώρο X: αρκεί να βρεθεί συνεχής συνάρτηση $f : X \to Y$, η οποία να είναι αμφιμονοσήμαντη. Σ' αυτήν την ιδέα θα επεκταθούμε παρακάτω, προς το παρόν θα επανέλθουμε σε έννοιες συνέχειας για να μην χάσουμε τη ροή μας.

Μία ισχυρότερη έννοια συνέχειας είναι η λεγόμενη ομοιόμορφη συνέχεια. Στην ομοιόμορφη συνέχεια απαιτούμε οι τιμές μίας συνάρτησης να είναι περιορισμένες σε ένα μικρό 2ε διάστημα οποτεδήποτε την μελετάμε σε διάστημα μήκους 2δ. Δηλαδή, ομοιόμορφα στο πεδίο ορισμού, ένα διάστημα μήκους 2δ δίνει τιμές (μέσω της συνάρτησης) που είναι περιορισμένες σε 2ε διάστημα. Γενικότερα, στους μετρικούς χώρους τα διαστήματα αντικαθίστανται με μπάλες.

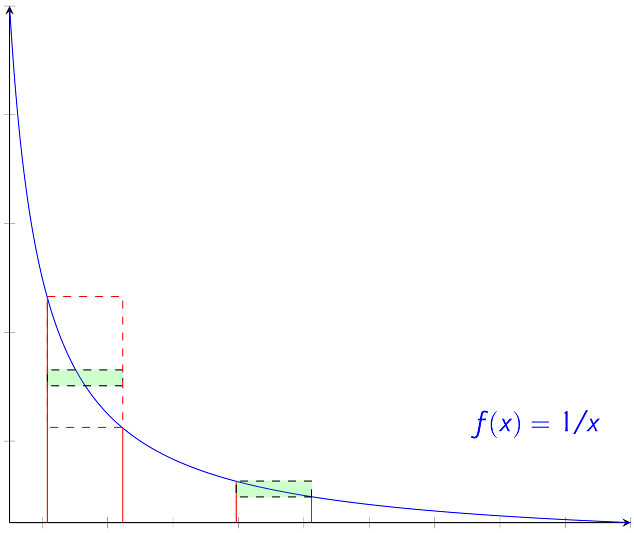
Ορισμός 1.1.13 (Ομοιόμορφη συνέχεια). *Έστω (X,ρ), (Y,d) δύο μετρικοί χώροι και $f : X \to Y$ μία συνάρτηση. Θα λέμε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής εάν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ούτως ώστε για κάθε μπάλα $S_X(x,\delta)$ να έχουμε:*

$$f(S_X(x,\delta)) \subseteq S_Y(f(x),\varepsilon)$$

Διαφορετικά κανείς μπορεί να ορίσει την ομοιόμορφη συνέχεια ως εξής: για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε για κάθε $x,z \in X$ με $\rho(x,z) < \delta$:

$$d(f(x),f(z)) < \varepsilon$$

Κάθε ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση, εξ ορισμού της, είναι συνεχής. Το αντίθετο δεν συμβαίνει γενικά: μία πραγματική συνάρτηση που δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής αλλά είναι συνεχής, είναι η $1/(\cdot)$.



Για την ομοιόμορφη συνέχεια υπάρχει χαρακτηρισμός αντίστοιχος της Πρότασης 1.1.2, δηλαδή μέσω ακολουθιών.

Πρόταση 1.1.4. *Έστω (X,ρ), (Y,d) ένας μετρικός χώρος και $f : X \to Y$ μία συνάρτηση. Η f είναι ομοιόμορφα συνεχής εάν και μόνο αν για κάθε δύο ακολουθίες $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ του X με $\rho(x_n,z_n) \to 0$, έχουμε $d(f(x_n),f(z_n)) \to 0$.*

Απόδειξη: ($\Rightarrow$) Θεωρούμε δύο ακολουθίες $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ του X με $\rho(x_n,z_n) \to 0$ κι ένα $\varepsilon > 0$. Μέσω της ομοιόμορφης συνέχειας της f είναι δυνατόν να βρεθεί $\delta > 0$ ούτως ώστε:

$$d\big(f(x),f(z)\big) < \varepsilon$$

για κάθε $x,z \in X$ με $\rho(x,z) < \delta$. Επομένως, επιλέγοντας $n_0 \in \mathbb{N}$ αρκετά μεγάλο ώστε $\rho(x_n,z_n) < \delta$ για κάθε $n \geqslant n_0$, έπεται ότι:

$$d\big(f(x_n),f(z_n)\big) < \varepsilon$$

($\Leftarrow$) Όπως συνηθίζουμε με τέτοιου είδους προτάσεις, θα δουλέψουμε με άτοπο. Εάν η f δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής, θα υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε για κάθε $\delta > 0$ υπάρχουν $x,z \in X$, $\rho(x,z) < \delta$ με $d\big(f(x),f(z)\big) \geqslant \varepsilon$.

Επιλέγοντας ακολουθία $(\delta_n)_{n=1}^{\infty} = (1/2^n)_{n=1}^{\infty}$, μπορούμε κάθε φορά να βρίσκουμε στοιχεία $x_n, z_n \in X$ με την ιδιότητα των x,z που αναφέραμε προηγουμένως. Κατά συνέπεια, κατασκευάζουμε δύο ακολουθίες $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ του X με $\rho(x_n,z_n) \to 0$ και:

$$d\big(f(x_n),f(z_n)\big) \geqslant \varepsilon$$

Αυτό είναι άτοπο, εξ υποθέσεως.

□

Η παραπάνω πρόταση εκφράζει (μεταξύ άλλων) μία πολύ σημαντική ιδιότητα των ομοιόμορφα συνεχών συναρτήσεων: οι ομοιόμορφα συνεχείς απεικονίσεις στέλνουν βασικές ακολουθίες σε βασικές ακολουθίες.

Επιστρέφοντας στην Πρόταση 1.1.3, είναι δυνατόν κανείς να έχει κάποια «ταύτιση» στην τοπολογική δομή δύο χώρων (X,ρ), (Y,d) εάν υπάρχει $f : X \to Y$ αμφιμονοσήμαντη και αμφισυνεχής. Η συνέχεια εξασφαλίζει ότι ανοικτά σύνολα του Y μεταφέρονται σε ανοικτά του X, η αντίστροφη συνέχεια ότι ανοικτά σύνολα του X μεταφέρονται σε ανοικτά του Y, και το αμφιμονοσήμαντο ότι κανένα από αυτά δεν «ξεχνιέται» στη μετάβαση.

Είναι επίσης σημαντικό η μεταφορά των ανοικτών συνόλων να γίνει από τις f, f^{-1} κι όχι από την f και κάποια άλλη g -μ' αυτόν τον τρόπο είναι δυνατόν να γίνει κάποια «ταύτιση», διαφορετικά ένα ανοικτό σύνολο μπορεί να μεταφερόταν σε ένα ανοικτό και να μην επέστρεφε στο ίδιο ανοικτό. Δίνουμε λοιπόν τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 1.1.14 (Ομοιομορφισμοί). *Έστω (X,ρ), (Y,d) δύο μετρικοί χώροι. Θα λέμε ότι οι χώροι είναι ομοιομορφικοί εάν υπάρχει ομοιομορφισμός μεταξύ τους. Δηλαδή αν υπάρχει $f: X \to Y$ η οποία είναι αμφιμονοσήμαντη και αμφισυνεχής. Συμβολίζουμε σ' αυτήν την περίπτωση $(X,\rho) \simeq (Y,d)$.*

Κάτι πολύ χαρακτηριστικό στους ομοιομορφισμούς είναι το ακόλουθο, που προκύπτει άμεσα από την Πρόταση 1.1.2.

Παρατήρηση 1.1.12. *Έστω (X,ρ), (Y,d) δύο μετρικοί χώροι και $f: X \to Y$ μία συνάρτηση. Τα ακόλουθα ισοδυναμούν:*

i. Η f είναι ομοιομορφισμός.

ii. Για κάθε $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ ακολουθία του X έχουμε $x_n \to x \Leftrightarrow f(x_n) \to f(x)$.

Απόδειξη: Και τα δύο είναι άμεση συνέπεια της Πρότασης 1.1.2.

□

Στην ειδική περίπτωση δύο ομοιομορφικών χώρων $(X,\rho) \simeq (X,d)$ με ταυτοτικό ομοιομορφισμό, λέμε ότι οι μετρικές ρ, d είναι ισοδύναμες.

Ορισμός 1.1.15 (Ισοδύναμες μετρικές). *Δύο μετρικές ρ, d σε έναν χώρο X είναι ισοδύναμες εάν:*

$$\lim_{n\to\infty}^{(X,\rho)} x_n = x \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}^{(X,d)} x_n = x$$

για κάθε ακολουθία $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ του X.

1.2 Χώροι με νόρμα

Εάν κανείς δεν διαπραγματεύεται απλώς σύνολα αλλά γραμμικούς (διανυσματικούς) χώρους, ενδέχεται μία επιπλέον «μετρική δομή» να μπορεί να προσδοθεί, υπό τη μορφή μέτρισης μέτρων διανυσμάτων.

Ορισμός 1.2.1 (Χώροι με νόρμα). *Έστω $(X,+,\cdot)$ ένας $\mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}-$διανυσματικός χώρος και $||\cdot||: X \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση. Το ζεύγος $(X,||\cdot||)$ θα λέγεται χώρος με νόρμα εάν η $||\cdot||$ είναι νόρμα, δηλαδή αν ικανοποιούνται οι ακόλουθες συνθήκες:*

i. Για κάθε $x \in X$, $||x|| \geqslant 0$. Μάλιστα $||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

ii. Για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$, $||\lambda x|| = |\lambda| \cdot ||x||$.

iii. Για κάθε $x,y \in X$ αληθεύει η τριγωνική ανισότητα $||x+y|| \leqslant ||x|| + ||y||$.

Πολλά αποτελέσματα θα τα διατυπώνουμε μόνο σε $\mathbb{R}-$διανυσματικούς χώρους, εάν είναι εμφανές πώς γίνεται η μετάβαση στους μιγαδικούς.

Έχοντας κανείς μία τέτοια δομή -εάν δηλαδή μπορεί να μετρά μέτρα διανυσμάτων- τότε έχει και μετρική δομή. Ειδικότερα:

Παρατήρηση 1.2.1. *Έστω $(X,||\cdot||)$ ένας χώρος με νόρμα. Η συνάρτηση $\rho: X \times X \to \mathbb{R}$ με τύπο:*

$$\rho(x,y) = ||x-y||$$

είναι μετρική, και κατά συνέπεια στον X μπορεί να προσδοθεί μετρική δομή.

Έχοντας τώρα μετρική δομή, μπορούμε να διατυπώσουμε το ακόλουθο:

Παρατήρηση 1.2.2. *Σε κάθε $(X, ||\cdot||)$ χώρο με νόρμα η $||\cdot||$ είναι συνεχής. Δηλαδή αν $x \in X$, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε για κάθε $y \in X$ με $||x-y|| < \delta$ να έχουμε $\big|||x|| - ||y||\big| < \varepsilon$. Ισοδύναμα, από την Πρόταση 1.1.2, για κάθε ακολουθία $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ αληθεύει η συνεπαγωγή:*

$$x_n \to x \Rightarrow ||x_n|| \to ||x||$$

Απόδειξη: Εάν $x_n \to x$, τότε εξ ορισμού της επαγόμενης μετρικής, $||x_n - x|| \to 0$. Τώρα παρατηρούμε ότι $x_n = x_n - x + x$, οπότε από την τριγωνική ανισότητα:

$$||x_n|| \leqslant ||x_n - x|| + ||x|| \Rightarrow ||x_n|| - ||x|| \leqslant ||x_n - x|| \to 0$$

Δηλαδή $||x_n|| \to ||x||$.

□

Με παρόμοιο τρόπο κανείς μπορεί να δείξει ότι οι πράξεις $+, \cdot$ του γραμμικού χώρου είναι συνεχείς, εμείς όμως δεν θα το δείξουμε.

Αυτό πάντως που είναι ενδιαφέρον είναι ότι η επαγόμενη αυτή μετρική δομή είναι περισσότερο «φυσιολογική» από μία τυχούσα μετρική. Για να το δούμε αυτό, πρώτα αντιδιαστέλλουμε το επόμενο αποτέλεσμα με την Παρατήρηση 1.1.4.

Παρατήρηση 1.2.3. *Έστω $(X, ||\cdot||)$ ένας χώρος με νόρμα. Αληθεύει ότι:*

$$B(x_0, r) = \overline{S(x_0, r)}$$

για κάθε $x_0 \in X$, $r > 0$.

Απόδειξη: ($\supseteq$) Κατ' αρχάς ο εγκλεισμός $B(x_0, r) \supseteq \overline{S(x_0, r)}$ αληθεύει, αφού (για παράδειγμα) για τα συμπληρώματα ισχύει ο αντίστροφος εγκλεισμός (επίσης, θυμηθείτε την Παρατήρηση 1.1.3).

($\subseteq$) Για τον άλλον εγκλεισμό θα δείξουμε (κι αυτό αρκεί) ότι για κάθε $x \in B(x_0, r)$ με $||x - x_0|| = r$ υπάρχει ακολουθία του $S(x_0, r)$ που το πρεσεγγίζει. Οπότε το ζητούμενο θα προκύψει από την Παρατήρηση 1.1.8.

Σε γενικές γραμμές αυτό που θα κάνουμε είναι το εξής: στο ευθύγραμμο τμήμα μεταξύ των x, x_0 θα επιλέξουμε ακολουθία σημείων του ευθυγράμμου τμήματος που θα πλησιάζει το x. Δείχνοντας ότι αυτή η ακολουθία είναι ακολουθία του $S(x_0, r)$, θα έχουμε δείξει το ζητούμενο.

Έστω λοιπόν $\mathfrak{s} = \text{span}_{[0,1]}\{x_0, x\} = \{tx_0 + (1-t)x \mid t \in [0,1]\}$ και μία ακολουθία $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ του $\mathfrak{s}$ με:

$$x_n = (1 - 1/n) \cdot x + 1/n \cdot x_0$$

ισχυριζόμαστε ότι $x_n \to x$. Πράγματι, παρατηρούμε ότι $x_n - x = 1/n \cdot (x_0 - x)$ κι επιπλέον:

$$||1/n \cdot (x_0 - x)|| = 1/n \cdot ||x_0 - x|| = 1/n \cdot r \to 0$$

Επομένως $x_n - x \to 0 \Rightarrow x_n \to x$.

Η ακολουθία $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι ακολουθία του $S(x_0, r)$. Πράγματι, παρατηρούμε ότι $x_n - x_0 = (1 - 1/n) \cdot (x - x_0)$ κι άρα:

$$||x_n - x_0|| = ||(1 - 1/n) \cdot (x_n - x_0)|| = (1 - 1/n) \cdot ||x - x_0|| = (1 - 1/n) \cdot r < r$$

Δηλαδή $x_n \in S(x_0, r)$.

□

Έπειτα θα αντιδιαστείλουμε το επόμενο αποτέλεσμα με την Παρατήρηση 1.1.5.

Παρατήρηση 1.2.4. *Έστω $(X, ||\cdot||)$ ένας χώρος με νόρμα. Ο χώρος X είναι συνεκτικός, δηλαδή δεν υπάρχουν δύο ανοικτά, μη κενά, ξένα σύνολα A, B τέτοια ώστε $X = A \cup B$. Επομένως τα μόνα κλειστάνοικτα σύνολα στον X είναι τα $\varnothing$, X.*

Απόδειξη: Ας υποθέσουμε προς άτοπο ότι τέτοια A, B υπάρχουν, καθώς και $a \in A$, $b \in B$. Ορίζουμε $\mathfrak{s}_{a,b} = \text{span}_{[0,1]}\{a, b\} = \{ta + (1-t)b \mid t \in [0,1]\}$ και θεωρούμε τη συνάρτηση $h : \mathfrak{s}_{a,b} \to [0,1]$ με τύπο:

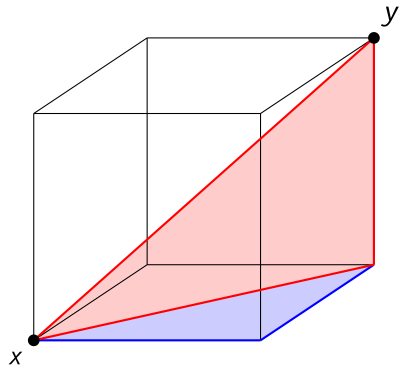
$$\mathfrak{s}_{a,b} \ni s = t_s a + (1 - t_s) b \mapsto t_s \in [0,1]$$

Η h είναι ομοιομορφισμός μεταξύ των $(\mathfrak{s}_{a,b}, ||\cdot - \cdot|||_{\mathfrak{s}_{a,b}})$ και $([0,1], |\cdot - \cdot|)$ (η $||\cdot - \cdot|||_{\mathfrak{s}_{a,b}}$ είναι η μετρική που επάγεται από τη νόρμα, αν περιοριστεί στο ευθύγραμμο τμήμα).

Επομένως, αν $\Gamma = h(A \cap \mathcal{I}_{a,b})$, $\Delta = h(B \cap \mathcal{I}_{a,b})$, τα Γ, Δ θα είναι ανοικτά, μη κενά, ξένα υποσύνολα του $[0,1]$ που το διαμερίζουν. Αυτό είναι αδύνατον, αφού κάθε υποδιάστημα του $\mathbb{R}$ είναι συνεκτικό. Τον τελευταίο ισχυρισμό μπορείτε να επιχειρήσετε να τον αποδείξετε, ή να ανατρέξετε στο [Φρ2] (Λήμμα 17.1).

$\square$

Οι χώροι με νόρμα προέκυψαν φυσιολογικά από τη μελέτη των ευκλειδείων χώρων. Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι κάθε χώρος $\mathbb{R}^n$ εφοδιάζεται με (διάφορες) νόρμες, εκ των οποίων η μία καθορίζει τη συνήθη απόσταση.



Ας ξεκινήσουμε με τη συνήθη απόσταση. Στους $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ οι συνήθεις αποστάσεις είναι $\rho(x,y) = |x-y|$ και $\rho\big((x_1,x_2),(y_1,y_2)\big) = \sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}$, εκ των οποίων η δεύτερη δικαιολογείται από το Πυθαγόρειο θεώρημα. Στον $\mathbb{R}^3$ απόσταση μπορεί να οριστεί με ανάλογο τρόπο, χρησιμοποιώντας δύο φορές το Πυθαγόρειο θεώρημα. Για παράδειγμα, εάν θέλουμε να μετρήσουμε την απόσταση των x και y στο παραπάνω σχήμα, θα εφαρμόσουμε δύο φορές το Πυθαγόρειο θεώρημα, στα μπλε και κόκκινα τρίγωνα.

$$\rho\big((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)\big) = \sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+(x_3-y_3)^2}$$

Γενικά λοιπόν στον $\mathbb{R}^n$ είναι φυσιολογικό να θέλουμε να ορίσουμε μετρική:

$$\rho\big((x_1,\cdots,x_n),(y_1,\cdots,y_n)\big) = \left(\sum_{k=1}^{n}(x_k-y_k)^2\right)^{1/2}$$

και κατά συνέπεια, τη νόρμα που συμφωνεί με αυτήν την μετρική:

$$||(x_1,\cdots,x_n)|| = \rho\big((x_1,\cdots,x_n),(0,\cdots,0)\big) = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)^{1/2}$$

Το να επαληθεύσουμε πάντως ότι η εν λόγω νόρμα πράγματι είναι νόρμα χρειάζεται λίγη δουλεία, και κυρίως την ανισότητα Cauchy-Schwarz. Εμείς εδώ δεν θα αποδείξουμε την ανισότητα Cauchy-Schwarz, διότι θα δείξουμε ότι για τα διάφορα $p \in \mathbb{N}$ οι $||\cdot||_p$:

$$||(x_1,\cdots,x_n)||_p = \left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p\right)^{1/p}$$

αποτελούν νόρμες, μέσω μιας «γενικευμένης» ανισότητας Cauchy-Schwarz, της ανισότητας Hölder.

Πριν την ανισότητα Hölder χρειάζεται να κάνουμε μία προετοιμασία.

Πρόταση 1.2.1 (Ανισότητα Young). *Έστω $x,y \in \mathbb{R}_+$ και $p,q \in \mathbb{N}$ δύο συζυγείς αριθμοί, με την εξής έννοια: $1/p + 1/q = 1$. Αληθεύει ότι:*

$$xy \leqslant \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$$

Απόδειξη: Οι αριθμοί p, q έχουν την ιδιότητα $1/p + 1/q = 1$, οπότε από το γεγονός ότι η log είναι κοίλη:

$$\log\left(\frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}\right) \geqslant \frac{1}{p}\log\, x^p + \frac{1}{q}\log\, y^q = \log(xy)$$

Επιπλέον, από τη μονοτονία της log (είναι γνησίως αύξουσα):

$$xy \leqslant \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$$

για κάθε $x, y > 0$. Αν συμπεριλάβουμε και την περίπτωση όπου $x = 0$ ή $y = 0$, παίρνουμε την προς απόδειξη σχέση.

□

Πρόταση 1.2.2 (Ανισότητα Hölder)**.** *Έστω $p, q \in \mathbb{N}$ δύο συζυγείς αριθμοί. Για κάθε $(x_1, \cdots, x_n), (y_1, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ ισχύει:*

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k y_k| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^q\right)^{1/q}$$

Απόδειξη: Εάν $(x_1, \cdots x_n)$ ή $(y_1, \cdots, y_n) = 0$, τότε η ανισότητα ισχύει με τετριμμένο τρόπο. Θα ασχοληθούμε λοιπόν με την περίπτωση όπου $(x_1, \cdots x_n)$ και $(y_1, \cdots, y_n) \neq 0$.

Παρατηρούμε ότι, διαιρώντας κάθε x_k με το αντίστοιχο «μέτρο» $\left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p} \neq 0$:

$$\sum_{k=1}^{n} \left(|x_k| \Big/ \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p} \right)^p = \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p} \sum_{k=1}^{n} |x_k|^p = 1$$

και ομοίως για τα y_k:

$$\sum_{k=1}^{n} \left(|y_k| \Big/ \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^q\right)^{1/q} \right)^q = \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} |y_k|^q} \sum_{k=1}^{n} |y_k|^q = 1$$

Με χρήση λοιπόν της ανισότητας Young στους όρους:

$$|x_k| \Big/ \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p} \text{ και } |y_k| \Big/ \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^q\right)^{1/q}$$

παίρνουμε:

$$|x_k| \Big/ \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p} \cdot \; |y_k| \Big/ \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^q\right)^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{p} \left(|x_k| \Big/ \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p} \right)^p + \frac{1}{q} \left(|y_k| \Big/ \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^q\right)^{1/q} \right)^q$$

και αθροίζοντας:

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k| \Big/ \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p} \cdot \; |y_k| \Big/ \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^q\right)^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{n} \left(|x_k| \Big/ \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p} \right)^p + \frac{1}{q} \sum_{k=1}^{n} \left(|y_k| \Big/ \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^q\right)^{1/q} \right)^q =$$

$$= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Επομένως:

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k| \Big/ \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p} \cdot \; |y_k| \Big/ \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^q\right)^{1/p} \leqslant 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} |x_k y_k| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^q\right)^{1/q}$$

το οποίο είναι το ζητούμενο.

□

Παρατήρηση 1.2.5. *Η ανισότητα Hölder στην Πρόταση 1.2.2 είναι ουσιαστικά γενίκευση της Cauchy-Schwarz. Ειδικότερα, για $p = 2$ έχουμε:*

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k y_k| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^2\right)^{1/2}$$

Με την ανισότητα Hölder μπορούμε να εξάγουμε την ανισότητα Minkowski, από την οποία θα συμπεράνουμε ότι $||\cdot||_p$ -όπως τις ορίσαμε νωρίτερα- είναι πράγματι νόρμες.

Πρόταση 1.2.3 (Ανισότητα Minkowski)**.** *Έστω* $(x_1, \cdots, x_n), (y_1, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. *Για κάθε* $p \in \mathbb{N}$ *αληθεύει ότι:*

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^p\right)^{1/p}$$

Απόδειξη: Η περίπτωση $p = 1$ είναι ουσιαστικά η τριγωνική ανισότητα (η οποία «δουλεύει» με επαγωγή). Στα επόμενα θα θεωρούμε $p \geqslant 2$, ώστε να υπάρχει συζυγής αριθμός. Θα συμβολίζουμε με q τον συζυγή αριθμό του p.

Γράφουμε:

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^p = \sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^{p-1} |x_k + y_k|$$

και χρησιμοποιώντας την τριγωνική ανισότητα:

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^p \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |x_k + y_k|^{p-1} |x_k| + \sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^{p-1} |y_k| \qquad (*)$$

Με χρήση της ανισότητας Hölder σε καθένα άθροισμα του δεξιού μέλους της $(*)$ έχουμε:

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^{p-1} |x_k| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^{q(p-1)}\right)^{1/q} \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p}$$

και αντίστοιχα:

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^{p-1} |y_k| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^{q(p-1)}\right)^{1/q} \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^p\right)^{1/p}$$

Οπότε αντικαθιστώντας στην $(*)$ έχουμε:

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^p \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^p\right)^{1/q} \left(\left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^p\right)^{1/p}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^p\right)^{1-1/q} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^p\right)^{1/p}$$

εφόσον $\sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^p \neq 0$. Εάν είναι ίσο με το 0, τετριμμένα ισχύει και πάλι η ανισότητα Minkowski. Παρατηρώντας λοιπόν ότι $1/p + 1/q = 1 \Rightarrow 1/p = 1 - 1/q$, έχουμε το ζητούμενο.

□

Παρατήρηση 1.2.6. *Για κάθε $p \in \mathbb{N}$ οι χώροι $(\mathbb{R}^n, ||\cdot||_p)$ καθίστανται χώροι με νόρμα. Οι $||\cdot||_p$ ορίζονται:*

$$||(x_1, \cdots, x_n)||_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p}$$

Απόδειξη: Οι πρώτες δύο ιδιότητες τις νόρμας μπορούν να ελεγχθούν σχετικά άμεσα. Η τριγωνική ανισότητα είναι ακριβώς η ανισότητα Minkowski της Πρότασης 1.2.3.

□

Είναι ενδιαφέρον κανείς να αναρρωτηθεί, εκπορευόμενος από τους χώρους με νόρμα $(\mathbb{R}^n, ||\cdot||_p)$, εάν είναι δυνατόν η διάσταση των χώρων «να τείνει» στο άπειρο. Γενικά φανταζόμαστε ότι η μετάβαση στις άπειρες διαστάσεις δεν θα μπορεί να γίνει εντελώς αυθαίρετα, γιατί ενδέχεται να υπάρχουν ακολουθίες $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ για τις οποίες $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p = \infty$.

Γι' αυτόν τον λόγο θα ορίσουμε τη μετάβαση των $(\mathbb{R}^n, ||\cdot||_p)$ στις άπειρες διαστάσεις μόνο στις $p-$αθροίσιμες ακολουθίες, δηλαδή μόνο στις $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ για τις οποίες $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty$.

Ορίζουμε λοιπόν τους χώρους:

$$\ell^p = \ell^p(\mathbb{N}) = \left\{ (x_k)_{k=1}^{\infty} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \;\middle|\; \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty \right\}$$

τους οποίους εφοδιάζουμε με τις $||\cdot||_{\ell^p}$, όπου:

$$||(x_k)_{k=1}^{\infty}||_{\ell^p} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\right)^p$$

Οι χώροι $(\ell^p, ||\cdot||_{\ell^p})$ γίνονται χώροι με νόρμα, σύμφωνα με την επόμενη παρατήρηση.

Παρατήρηση 1.2.7. *Οι χώροι $(\ell^p, ||\cdot||_{\ell^p})$, $p \in \mathbb{N}$, είναι χώροι με νόρμα. Δηλαδή ο ℓ^p γίνεται γραμμικός χώρος και η $||\cdot||_{\ell^p}$ νόρμα.*

Απόδειξη: Κατ' αρχάς, εάν $(x_k)_{k=1}^{\infty}$, $(y_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell^p$, τότε:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty \;\text{ και }\; \sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^p < \infty$$

οπότε τα ακόλουθα όρια υπάρχουν:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p}, \quad \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^p\right)^{1/p}$$

Έτσι λοιπόν, εφαρμόζοντας την ανισότητα Minkowski στα μερικά αθροίσματα:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^p\right)^{1/p}$$

Παίρνοντας εν τέλει όριο έχουμε:

$$\left(\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p} + \left(\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} |y_k|^p\right)^{1/p} < \infty$$

δηλαδή $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k + y_k|^p < \infty$ κι άρα $(x_k)_{k=1}^{\infty} + (y_k)_{k=1}^{\infty} = (x_k + y_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell^p$. Το ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ έχουμε $\lambda (x_k)_{k=1}^{\infty} = (\lambda x_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell^p$ είναι άμεσο να δειχθεί με πράξεις.

Τέλος, η $||\cdot||_{\ell^p}$ είναι νόρμα. Αυτό που χρειάζεται και πάλι να δειχθεί είναι η τριγωνική ανισότητα, η οποία (όπως προηγουμένως) αποδεικνύεται από την ανισότητα Minkowski, παίρνοντας όριο.

□

Στους χώρους $\mathbb{R}^n$ είναι δυνατόν να προσαρτίσουμε ακόμη μία νόρμα, την supremum νόρμα. Ορίζουμε την $||\cdot||_{\infty}$ ως εξής:

$$||(x_1, \cdots, x_n)||_{\infty} = \sup\{|x_k| \mid k \leqslant n\} = \max\{|x_k| \mid k \leqslant n\}$$

και παρατηρούμε ότι αυτή είναι πράγματι νόρμα.

Στην ουσία ο χώρος $(\mathbb{R}^n, ||\cdot||_{\infty})$ είναι «επέκταση» των $(\mathbb{R}^n, ||\cdot||_p)$, καθώς $p \to \infty$. Αυτό θα το δούμε με την επόμενη παρατήρηση:

Παρατήρηση 1.2.8. *Για κάθε* $(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ *το όριο:*

$$\lim_{p\to\infty} \ ||(x_1, \cdots, x_n)||_p = \lim_{p\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \right)^p$$

υπάρχει και ισούται με $||(x_1, \cdots, x_n)||_\infty$.

Απόδειξη: Κατ' αρχάς παρατηρούμε ότι για κάθε $k \leqslant n$:

$$|x_k| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \right)^{1/p}$$

οπότε $\sup\{|x_k| \mid k \leqslant n\} = ||(x_1, \cdots, x_n)||_\infty \leqslant ||(x_1, \cdots, x_n)||_p$, και με lim inf:

$$||(x_1, \cdots, x_n)||_\infty \leqslant \liminf_{p\to\infty} \ ||(x_1, \cdots, x_n)||_p$$

Από την άλλη, παρατηρούμε επίσης ότι:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} \sup\{|x_k| \mid k \leqslant n\}^p \right)^{1/p} \leqslant n^{1/p} \cdot \sup\{|x_k| \mid k \leqslant n\}^p$$

επομένως $||(x_1, \cdots, x_n)||_p = n^{1/p}||(x_1, \cdots, x_n)||_\infty$, και με lim sup:

$$\limsup_{p\to\infty} \ ||(x_1, \cdots, x_n)||_p \leqslant ||(x_1, \cdots, x_n)||_\infty$$

Δηλαδή $||(x_1, \cdots, x_n)||_\infty \leqslant \liminf_{p\to\infty} \ ||(x_1, \cdots, x_n)||_p \leqslant \limsup_{p\to\infty} \ ||(x_1, \cdots, x_n)||_p \leqslant ||(x_1, \cdots, x_n)||_\infty$ και το ζητούμενο αποδεικνύεται.

□

Αντίστοιχα ορίζεται και ο χώρος $\ell^\infty = \ell^\infty(\mathbb{N})$ των φραγμένων ακολουθιών, με τη νόρμα $|| \cdot ||_{\ell^\infty}$:

$$||(x_k)_{k=1}^{\infty}||_{\ell^\infty} = \sup\{|x_k| \mid k \in \mathbb{N}\}$$

Μάλιστα ισχύει Παρατήρηση ανάλογη της 1.2.8, αλλά δεν θα την αποδείξουμε καθώς η απόδειξη είναι παρόμοια.

Συνοψίζοντας, μπορούμε να δώσουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 1.2.2 (Χώροι ℓ^p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$). *Για κάθε* $1 \leqslant p < \infty$ *ορίζουμε τους χώρους με νόρμα* $(\ell^p, || \cdot ||_{\ell^p})$, *όπου:*

$$\ell^p = \ell^p(\mathbb{N}) = \left\{ (x_k)_{k=1}^{\infty} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \ \middle| \ \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty \right\}$$

και:

$$||(x_k)_{k=1}^{\infty}||_{\ell^p} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{1/p}$$

Επιπλέον, για $p = \infty$ *ορίζουμε:*

$$\ell^\infty = \ell^\infty(\mathbb{N}) = \left\{ (x_k)_{k=1}^{\infty} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \ \middle| \ \sup\{|x_k| \mid k \in \mathbb{N}\} < \infty \right\}$$

και:

$$||(x_k)_{k=1}^{\infty}||_{\ell^\infty} = \sup\{|x_k| \mid k \in \mathbb{N}\}$$

Αντίστοιχοι χώροι των ℓ^p μπορούν να οριστούν και για συναρτήσεις, με ολοκλήρωμα. Συγκεκριμένα, για $p \in \mathbb{N}$ μπορούμε να ορίσουμε τους χώρους $(L^p = L^p([0,1]), || \cdot ||_{L^p})$, όπου:

$$L^p = L^p([0,1]) = \left\{ f \in C([0,1]) \ \middle| \ \int_0^1 |f|^p < \infty \right\}$$

και η νόρμα ορίζεται με τον εξής τρόπο:

$$||f||_{L^p} = \left(\int_0^1 |f|^p\right)^{1/p}$$

Κανονικά τα σύνολα L^p έχουν διαφορετικό ορισμό, αν κανείς συμπεριλάβει μία μεγαλύτερη (της $C([0,1])$) κλάση ολοκληρώσιμων συναρτήσεων. Εξάλλου έτσι όπως ορίσαμε τα σύνολα L^p, δεν διαφοροποιούνται από το $C([0,1])$. Στην πραγματικότητα θα μπορούσαμε να είχαμε γράψει:

$$L^p = L^p([0,1]) = C([0,1])$$

οπότε οι συμβολισμοί L^p μας βοηθούν μονάχα να διακρύνουμε τη νόρμα. Ξεφεύγοντας από το $C([0,1])$ κι από τις Riemann ολοκληρώσιμες συναρτήσεις, κανονικά οι χώροι L^p ορίζονται στις Lebesgue ολοκληρώσιμες συναρτήσεις, και τότε η υπόθεση «$\int_0^1 |f|^p < \infty$» έχει νόημα. Στην παρούσα παρουσίαση θα προτιμήσουμε να μην αναφερθούμε σε Lebesgue ολοκληρωσιμότητα -παρόλα αυτά μπορείτε να ρίξετε μία ματιά στο [Γι1].

Επιπλέον δεν είναι αναγκαίο η ολοκλήρωση να γίνεται στο διάστημα $[0,1]$, μάλιστα αργότερα θα χρειαστεί να ολοκληρώσουμε σε άλλο διάστημα. Επειδή όμως κανείς εύκολα (με γραμμικό μετασχηματισμό) μπορεί να μεταβεί από τη μία περίπτωση στην άλλη, δεν θα μας απασχολεί ιδιαιτέρως το διάστημα ολοκλήρωσης.

Το ότι οι νόρμες $||\cdot||_{L^p}$ είναι πράγματι νόρμες έχει κι αυτό αρκετή δουλειά πίσω του. Παραποιώντας τις αποδείξεις των Προτάσεων 1.2.2 και 1.2.3 μπορούμε να πάρουμε τα ανάλογά τους με ολοκληρώματα.

Πρόταση 1.2.4 (Ανισότητα Hölder - ολοκληρωτική μορφή)**.** *Έστω $f,g : [0,1] \to \mathbb{C}$ συνεχείς συναρτήσεις και $p,q \in \mathbb{N}$ συζυγείς αριθμοί. Αληθεύει ότι:*

$$\int_{0,1} |fg| \leqslant \left(\int_0^1 |f|^p\right)^{1/p} \left(\int_0^1 |g|^q\right)^{1/q}$$

Πρόταση 1.2.5 (Ανισότητα Minkowski - ολοκληρωτική μορφή)**.** *Έστω $f,g : [0,1] \to \mathbb{C}$ συνεχείς συναρτήσεις και $p \in \mathbb{N}$. Αληθεύει ότι:*

$$\left(\int_{0,1} |f+g|^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\int_0^1 |f|^p\right)^{1/p} + \left(\int_0^1 |g|^p\right)^{1/p}$$

Με την ανισότητα Minkowski μπορεί να αποδειχθούν δύο πράγματα, το ότι οι διάφοροι χώροι L^p είναι γραμμικοί κι ότι οι $||\cdot||_{L^p}$ είναι νόρμες.

Παρατήρηση 1.2.9. *Έστω $p \in \mathbb{N}$. Οι χώροι $(L^p, ||\cdot||_{L^p})$ είναι χώροι με νόρμα.*

Αντίστοιχα με την περίπτωση του ℓ^∞, μπορούμε να ορίσουμε τον χώρο L^∞, με τη νόρμα $||\cdot||_{L^\infty}$:

$$||f||_{L^\infty} = \sup |f|([0,1]) \overset{*}{=} \max |f|([0,1])$$

(όπου η ισότητα άστρο $(*)$ έπεται από το ότι οι f είναι συνεχείς).

Και πάλι ο δείκτης «∞» έχει νόημα, καθώς κατά μία έννοια η νόρμα $||\cdot||_{L^\infty}$ αποτελεί «όριο» των $||\cdot||_{L^p}$.

Παρατήρηση 1.2.10. *Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ συνεχής συνάρτηση με $\sup |f|([0,1]) < \infty$ (δηλαδή $f \in L^\infty$). Τότε το όριο:*

$$\lim_{p\to\infty} ||f||_{L^p} = \lim_{p\to\infty} \left(\int_0^1 |f|^p\right)^{1/p}$$

υπάρχει και ισούται με $||f||_{L^\infty}$.

Απόδειξη: Κατ' αρχάς παρατηρούμε ότι:

$$\left(\int_0^1 |f|^p\right)^{1/p} \leqslant ||f||_{L^\infty} \int_0^1 = ||f||_{L^\infty}$$

οπότε με lim sup:

$$\limsup_{p\to\infty} ||f||_{L^p} \leqslant ||f||_{L^\infty}$$

Έστω τώρα $\varepsilon > 0$. Αν Δ_ε είναι το σύνολο $\{x \in [0,1] \mid |f(x)| > ||f||_{L^\infty} - \varepsilon\}$, τότε:

$$\left(\int_0^1 |(f|_{\Delta_\varepsilon})|^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\int_0^1 |f|^p\right)^{1/p} \Rightarrow (||f||_{L^\infty} - \varepsilon)\left(\int_0^1 1_{\Delta_\varepsilon}\right)^{1/p} \leqslant ||f||_{L^p} \Rightarrow$$

$$(||f||_{L^\infty} - \varepsilon) \cdot \mathrm{len}(\Delta_\varepsilon)^{1/p} \leqslant ||f||_{L^p}$$

όπου $\mathrm{len}(\Delta_\varepsilon)$ είναι το «μήκος» του Δ_ε (μπορείτε να δείξετε ότι είναι πεπερασμένη ένωση διαστημάτων). Με lim inf έχουμε:

$$(||f||_{L^\infty} - \varepsilon) \cdot \liminf_{p\to\infty} \mathrm{len}(\Delta_\varepsilon)^{1/p} \leqslant \liminf_{p\to\infty} ||f||_{L^p} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ||f||_{L^\infty} - \varepsilon \leqslant \liminf_{p\to\infty} ||f||_{L^p}$$

Έτσι λοιπόν για κάθε $\varepsilon > 0$ έχουμε $||f||_{L^\infty} - \varepsilon \leqslant \liminf_{p\to\infty} ||f||_{L^p} \leqslant \limsup_{p\to\infty} ||f||_{L^p} \leqslant ||f||_{L^\infty}$ κι άρα το ζητούμενο.

□

Συνοψίζοντας, μπορούμε να δώσουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 1.2.3 (Χώροι L^p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$). *Για κάθε $1 \leqslant p < \infty$ ορίζουμε τους χώρους με νόρμα $(L^p, ||\cdot||_{L^p})$, όπου:*

$$L^p = L^p([0,1]) = \left\{f \in C([0,1]) \;\middle|\; \int_0^1 |f|^p < \infty\right\} = C([0,1])$$

και:

$$||f||_{L^p} = \left(\int_0^1 |f|^p\right)^{1/p}$$

Επιπλέον, για $p = \infty$ ορίζουμε:

$$L^\infty = L^\infty([0,1]) = \{f \in C([0,1]) \mid \sup |f|([0,1]) < \infty\} = C([0,1])$$

και:

$$||f||_{L^\infty} = \sup |f|([0,1])$$

Τέλος θα αναφερθούμε στον ορισμό των χώρων Banach.

Ορισμός 1.2.4 (Χώροι Banach). *Ένας χώρος με νόρμα $(X, ||\cdot||)$ θα λέγεται χώρος Banach εάν είναι πλήρης ως προς τη μετρική που επάγεται από τη νόρμα $||\cdot||$.*

Για παράδειγμα, οι χώροι ℓ^p είναι πλήρεις χώροι με νόρμα, άρα χώροι Banach. Επιπλέον, ένας χώρος που δεν έχουμε αναφέρει ακόμη -ο χώρος $(c_0, ||\cdot||_{\ell^\infty})$ των ακολουθιών που συγκλίνουν στο 0- είναι χώρος Banach (δεν θα αποδείξουμε κανένα απ' αυτά).

1.3 Χώροι με εσωτερικό γινόμενο

Είναι δυνατόν γραμμικοί χώροι να έχουν κάποια «ισχυρότερη» γεωμετρική δομή, υπό τη μορφή μέτρισης γωνιών. Είναι ενδιαφέρον πώς δύο φαινομενικά ασυσχέτιστες έννοιες, η γωνία και η απόσταση, στην πραγματικότητα συνδέονται, κι από την πρώτη απορέει η δεύτερη.

Εμείς θα προσεγγίσουμε τη μέτριση των γωνιών με τον συνήθη τρόπο, δηλαδή μέσω των εσωτερικών γινομένων.

Ορισμός 1.3.1 (Χώροι με εσωτερικό γινόμενο). *Λέμε ότι ένα ζεύγος $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ είναι χώρος με εσωτερικό γινόμενο εάν ο $(X,+,\cdot)$ είναι $\mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}-$γραμμικός χώρος, και η συνάρτηση $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ένα εσωτερικό γινόμενο. Δηλαδή η $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ικανοποιεί τις εξής ιδιότητες:*

i. Για κάθε $x \in X$ έχουμε $\langle x,x\rangle \geqslant 0$, και μάλιστα $\langle x,x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

ii. Για κάθε $x,y \in X$ έχουμε $\langle x,y\rangle = \overline{\langle y,x\rangle}$.

iii. Η $\langle\cdot,\cdot\rangle$ είναι γραμμική ως προς την πρώτη μεταβλητή. Δηλαδή, για κάθε $x,y,z \in X$, $\lambda \in \mathbb{C}$:

$$\langle x+\lambda y, z\rangle = \langle x,z\rangle + \lambda \cdot \langle y,z\rangle$$

Παρατήρηση 1.3.1. *Με τον ορισμό που δώσαμε το εσωτερικό γινόμενο είναι αντιγραμμικό ως προς τη δεύτερη μεταβλητή, δηλαδή για κάθε $x,y,z \in X$ και $\lambda \in \mathbb{C}$:*

$$\langle x, y+\lambda z\rangle = \langle x,y\rangle + \overline{\lambda} \cdot \langle x,z\rangle$$

Αυτό προκύπτει από την ιδιότητα ii., σε συνδυασμό με την iii. Επιπλέον, στην περίπτωση $\mathbb{R}-$διανυσματικού χώρου οι ιδιότητες ii. και iii. ουσιαστικά δίνουν ότι το εσωτερικό γινόμενο είναι συμμετρικό και γραμμικό ως προς καθεμία μεταβλητή.

Μέσω των εσωτερικών γινομένων μπορούν να οριστούν γωνίες με φυσιολογικό τρόπο, ως απόροια της ανισότητας Cauchy-Schwarz για εσωτερικά γινόμενα.

Πρόταση 1.3.1 (Ανισότητα Cauchy-Schwarz για εσωτερικά γινόμενα). *Έστω $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Για κάθε $x,y \in X$ αληθεύει η ανισότητα:*

$$|\langle x,y\rangle|^2 \leqslant \langle x,x\rangle \cdot \langle y,y\rangle$$

Πριν τη απόδειξη θα κάνουμε έναν σχολιασμό ο οποίος ίσως να είναι ενδιαφέρων. Σε χώρους πεπερασμένης διάστασης κάθε εσωτερικό γινόμενο μπορεί να εκφραστεί (όπως και στον $\mathbb{R}^2$) μέσω ενός πίνακα M, και κατά συνέπεια έχει τη μορφή $\langle x,y\rangle = x \cdot M \cdot y^T = \sum_{i,j \leqslant n} x_i y_j \langle e_i, e_j\rangle$, όπου x_i, y_j είναι οι συντεταγμένες των x,y ως προς τη βάση $(e_k)_{k=1}^n$ και $n = \dim X$ (δείτε στο [Φρ1], Κεφάλαιο 6). Σ' αυτήν λοιπόν την περίπτωση (μπορεί κανείς να δείξει ότι) η παραπάνω ανισότητα είναι συνέπεια της ανισότητας Cauchy-Schwarz που ήδη έχουμε δείξει, στην Παρατήρηση 1.2.5. Στην περίπτωση των χώρων με άπειρη διάσταση όμως δεν έχει δειχθεί τίποτε, γι' αυτό η παραπάνω πρόταση πράγματι χρήζει απόδειξης.

Απόδειξη: Κατ' αρχάς θα αποδείξουμε την αντίστοιχη ανισότητα της πραγματικής περίπτωσης.

Έστω $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ένα πραγματικό εσωτερικό γινόμενο και $s,t \in X$. Λόγω της συμμετρίας και διγραμμικότητας του εσωτερικού γινομένου:

$$\langle s-t, s-t\rangle \geqslant 0 \Rightarrow \langle s,s\rangle - 2\langle s,t\rangle + \langle t,t\rangle \geqslant 0 \Rightarrow 2\langle s,t\rangle \leqslant \langle s,s\rangle + \langle t,t\rangle$$

Αφού η εν λόγω σχέση ισχύει για κάθε $s,t \in X$, θα αληθεύει και για τα:

$$s = \frac{x}{\sqrt{\langle x,x\rangle}} \text{ και } t = \frac{y}{\sqrt{\langle y,y\rangle}}$$

όταν φυσικά $x,y \neq 0$. Κατ' επέκταση:

$$2\left\langle \frac{x}{\sqrt{\langle x,x\rangle}}, \frac{y}{\sqrt{\langle y,y\rangle}} \right\rangle \leqslant \left\langle \frac{x}{\sqrt{\langle x,x\rangle}}, \frac{x}{\sqrt{\langle x,x\rangle}} \right\rangle + \left\langle \frac{x}{\sqrt{\langle x,x\rangle}}, \frac{x}{\sqrt{\langle x,x\rangle}} \right\rangle = 2$$

όπου η τελευταία ισότητα δικαιολογείται από τη γραμμικότητα του εσωτερικού γινομένου. Χρησιμοποιώντας και πάλι τη γραμμικότητα του εσωτερικού γινομένου στο αριστερό μέλος της ανισότητας, έπεται το ζητούμενο στην περίπτωση $x,y \neq 0$.

$$\frac{\langle x,y\rangle}{\sqrt{\langle x,x\rangle}\cdot\sqrt{\langle y,y\rangle}} \leqslant 1 \Rightarrow |\langle x,y\rangle|^2 \leqslant \langle x,x\rangle\cdot\langle y,y\rangle$$

Εάν το x ή το y είναι μηδέν, τότε η ανισότητα και πάλι ισχύει, μάλιστα ως ισότητα. Αν χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέσουμε $x=0$, τότε:

$$\langle x,y\rangle = \langle 0,y\rangle = \langle y-y,y\rangle = 0 \leqslant 0 = \sqrt{\langle 0,0\rangle\cdot\langle y,y\rangle} = \sqrt{\langle x,x\rangle\cdot\langle y,y\rangle}$$

Η μιγαδική περίπτωση θα προκύψει από την πραγματική, με ένα τέχνασμα. Θεωρούμε θ,φ γωνίες τέτοιες ώστε τα $x\in\mathbb{C}$ και $y\in\mathbb{C}$ περιεστραμένα κατά θ και φ αντίστοιχα να γίνονται πραγματικά (δηλαδή τα $xe^{i\theta}$, $ye^{i\varphi}$ να είναι πραγματικά). Η ανισότητα Cauchy-Schwarz της πραγματικής περίπτωσης γι' αυτά τα στοιχεία θα δώσει το ζητούμενο:

$$|\langle x,y\rangle|^2 = |\langle xe^{i\theta},ye^{i\varphi}\rangle|^2 \leqslant \langle xe^{i\theta},xe^{i\theta}\rangle\cdot\langle ye^{i\varphi},ye^{i\varphi}\rangle = \langle x,x\rangle\cdot\langle y,y\rangle$$

□

Ορίζουμε λοιπόν γωνία δύο στοιχείων ενός χώρου με εσωτερικό γινόμενο, με τον ακόλουθο τρόπο:

Ορισμός 1.3.2 (Γωνία)**.** *Έστω $(X,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Από την Πρόταση 1.3.1 έπεται ότι:*

$$-1 \leqslant \frac{\langle x,y\rangle}{\langle x,x\rangle\cdot\langle y,y\rangle} \leqslant 1$$

για κάθε $x,y\in X$. Επομένως μπορούμε να ορίσουμε γωνία των x,y τον μοναδικό αριθμό $\angle(x,y)\in[0,\pi]$ για τον οποίο:

$$\cos\,\angle(x,y) = \frac{\langle x,y\rangle}{\langle x,x\rangle\cdot\langle y,y\rangle}$$

Είναι λοιπόν σαφές ότι μέσω του εσωτερικού γινομένου μπορεί να οριστεί γωνία. Είναι επίσης ενδιαφέρουσα η ακόλουθη παρατήρηση, η οποία μπορεί να αποδειχθεί από τα προηγούμενα:

Παρατήρηση 1.3.2. *Έστω $(X,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Η συνάρτηση:*

$$||x|| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$$

είναι μία νόρμα στον X, και κατά συνέπεια ο X γίνεται χώρος με νόρμα. Επιπλέον, με πράξεις μπορείτε να επιβεβαιώσετε ότι:

$$\langle x,y\rangle = \frac{1}{4}\left(||x+y||^2 - ||x-y||^2 + i\cdot||x+iy||^2 - i\cdot||x-iy||^2\right)$$

(στην πραγματική περίπτωση ισχύει το ίδιο με 1/2, χωρίς τους φανταστικούς όρους).

Οπότε η μέτριση γωνιών εξασφαλίζει -κατά κάποιον τρόπο- και μέτριση των αποστάσεων. Μ' αυτήν την έννοια, εφόσον μία νόρμα μπορεί να δώσει μετρική, μπορούμε να έχουμε έννοιες πληρότητας σε έναν χώρο με εσωτερικό γινόμενο.

Ορισμός 1.3.3 (Χώροι Hilbert)**.** *Ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο $(X,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ λέγεται χώρος Hilbert εάν ο χώρος X με την επαγόμενη μετρική γίνεται πλήρης χώρος.*

Κατά συνέπεια, με τον προηγούμενο ορισμό υπόψη, κάθε χώρος Hilbert είναι και χώρος Banach (με την επαγόμενη νόρμα).

Με τον ορισμό της γωνίας είναι δυνατόν να διατυπώσουμε και την έννοια της καθετότητας: θα λέμε ότι δύο $x,y\in X$ είναι κάθετα εάν $\angle(x,y)=\pi/2$, και θα συμβολίζουμε $x\perp y$. Με αυτήν την έννοια καθετότητας, το Πυθαγόρειο θεώρημα μπορεί να αποδειχθεί:

Παρατήρηση 1.3.3. *Έστω $(X,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο και $x,y \in X$ κάθετα ($x \perp y$). Αληθεύει ότι $||x-y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2$, όπου $||\cdot||$ είναι η επαγόμενη νόρμα (αντίστοιχα, $||x+y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2$).*

Απόδειξη: Από τις ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου και τον ορισμό της επαγόμενης νόρμας έπεται η παρατήρηση.

□

Στα παρακάτω θα ασχοληθούμε με ορθοκανονικές βάσεις, δηλαδή «βάσεις» (με κάποια έννοια) ενός χώρου με εσωτερικό γινόμενο, τα στοιχεία της οποίας είναι ανά δύο κάθετα. Αρκετές ορθοκανονικές βάσεις ίσως είναι γνωστές, όμως σε χώρους πεπερασμένης διάστασης.

Ορισμός 1.3.4 (Ορθοκανονικές ακολουθίες και βάσεις)**.** *Έστω $(X,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο και $(e_k)_{k=1}^{\infty}$ μία οικογένεια στοιχείων του X. Θα λέμε ότι η $(e_k)_{k=1}^{\infty}$ είναι ορθοκανονική οικογένεια εάν για κάθε $k \neq m$, $\langle e_k, e_m\rangle = 0$ και για κάθε k, $\langle e_k, e_k\rangle = 1$. Επιπλέον, θα λέμε ότι μία ορθοκανονική οικογένεια $(e_k)_{k=1}^{\infty}$ είναι ορθοκανονική βάση εάν:*

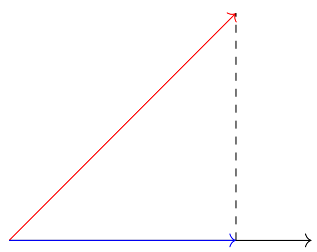
$$X = \overline{\operatorname{span}}\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$$

Δηλαδή κάθε στοιχείο του X προσεγγίζεται από πεπερασμένους γραμμικούς συνδυασμούς στοιχείων της ορθοκανονικής βάσης. Σε χώρους πεπερασμένης διάστασης $\mathbb{R}^n$, η προσέγγιση γίνεται ισότητα, δηλαδή κάθε στοιχείο $x \in \mathbb{R}^n$ γράφεται «κατά συντεταγμένες»:

$$x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k, \;\; x_k \in \mathbb{R}$$

Παρακάτω θα αναφέρουμε μία πρόταση χρήσιμη για να διαπιστώσει κανείς πότε έχουμε μία ορθοκανονική βάση σε χώρους Hilbert, κι επιπλέον να δει κάποιες βασικές ιδιότητες χώρων με ορθοκανονική βάση. Πριν απ' αυτό όμως, είναι σκόπιμο να αναφέρουμε την έννοια της προβολής.

Ας θεωρήσουμε x,y δύο μη μηδενικά στοιχεία του X. «Προβάλλοντας» το y στο x, ουσιαστικά αναζητούμε διάνυσμα αx πάνω στην ευθεία του x ώστε $y - \alpha x \perp x$.



Θέλουμε λοιπόν να βρούμε κάποιο $\alpha \in \mathbb{R}$ (ή $\mathbb{C}$, αλλά γίνεται παρόμοια) ώστε $\langle y - \alpha x, x\rangle = 0$. Επομένως:

$$\langle y, x\rangle - \alpha\langle x, x\rangle = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{\langle y, x\rangle}{\langle x, x\rangle}$$

και η προβολή γίνεται $(\langle y,x\rangle/\langle x,x\rangle)x$.

Ειδικά στην περίπτωση προβολής του y σε στοιχεία μίας ορθοκανονικής βάσης, τα εσωτερικά γινόμενα $\langle e_k, e_k\rangle$ γίνονται 1. Κατά συνέπεια το $\langle y, e_k\rangle e_k$ είναι η προβολή του y στο e_k, για τα διάφορα k.

Πρόταση 1.3.2. *Έστω $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ένας χώρος Hilbert, $||\cdot||$ η επαγόμενη νόρμα και $(e_k)_{k=1}^{\infty}$ μία ορθοκανονική ακολουθία. Τα ακόλουθα ισοδυναμούν:*

i. Η $(e_k)_{k=1}^{\infty}$ είναι ορθοκανονική βάση του X.

ii. Αν $x \in X$ με $\langle x, e_k\rangle = 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$, τότε $x = 0$.

iii. Αν $x \in X$ και $p_n(x) = \sum_{k=1}^{n}\langle x, e_k\rangle e_k$, τότε $\lim_{n\to\infty}^{||\cdot||} p_n(x) = x$ (δηλαδή $||p_n(x) - x|| \to 0$). Θα γράφουμε (υπονοόντας τα προηγούμενα):

$$x = \sum_{k=1}^{\infty}\langle x, e_k\rangle e_k$$

iv. Για κάθε $x \in X$ ισχύει η ισότητα του Parseval:

$$||x||^2 = \sum_{k=1}^{\infty}|\langle x, e_k\rangle|^2$$

η οποία (κατά μία έννοια) είναι γενίκευση του Πυθαγορείου θεωρήματος.

Απόδειξη: (i. $\Rightarrow$ ii.) Από τον ορισμό της ορθοκανονικής βάσης, $\overline{\text{span}}\{e_k\}_{k=1}^{\infty} = X$, το οποίο δείχνει ότι ο εν λόγω γραμμικός χώρος (χωρίς τη θήκη) είναι πυκνός. Βρίσκουμε λοιπόν ακολουθία $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ που να προσεγγίζει το x, κι εφόσον $\langle x, e_k\rangle = 0$ για κάθε k έχουμε $\langle x, x_k\rangle = 0$. Δηλαδή $0 = \langle x, x_k\rangle \to \langle x, x\rangle$ κι άρα $\langle x, x\rangle = 0 \Rightarrow x = 0$.

Παρατηρήστε εδώ ότι η σύγκλιση $\langle x, x_k\rangle \to \langle x, x\rangle$ δεν είναι τόσο τετριμμένη. Αληθεύει γιατί το εσωτερικό γινόμενο γράφεται συναρτήσει νορμών (Παρατήρηση 1.3.2) και οι νόρμες είναι συνεχείς (Παρατήρηση 1.2.2).

(ii. $\Rightarrow$ iii.) Κατ' αρχάς ας παρατηρήσουμε ότι $x - p_n(x) \perp p_n(x)$, διότι:

$$\langle x - p_n(x), p_n(x)\rangle = \langle x, p_n(x)\rangle - \langle p_n(x), p_n(x)\rangle$$

και:

$$\langle x, p_n(x)\rangle = \sum_{k=1}^{n}|\langle x, e_k\rangle|^2 \overset{*}{=} ||p_n(x)||^2 = \langle p_n(x), p_n(x)\rangle$$

όπου η ισότητα άστρο $(*)$ προκύπτει από διαδοχικές εφαρμογές του Πυθαγορείου θεωρήματος.

Έτσι λοιπόν, από το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:

$$||x||^2 = ||x - p_n(x)||^2 + ||p_n(x)||^2 \geqslant ||p_n(x)||^2 = \sum_{k=1}^{n}|\langle x, e_k\rangle|^2$$

και αφήνοντας $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}|\langle x, e_k\rangle|^2 = \sum_{k=1}^{\infty}|\langle x, e_k\rangle|^2 < \infty$$

Δηλαδή συγκλίνει. Τώρα αν γράψουμε:

$$||p_n(x) - p_m(x)||^2 = \sum_{k=m+1}^{n}|\langle x, e_k\rangle|^2$$

θα παρατηρήσουμε ότι η $(p_n(x))_{n=1}^{\infty}$ είναι βασική ακολουθία (αφού το άθροισμα συγκλίνει). Λόγω της πληρότητας του X, το όριο:

$$\lim_{n\to\infty}^{||\cdot||} p_n(x) = \lim_{n\to\infty}^{||\cdot||}\sum_{k=1}^{n}\langle x, e_k\rangle e_k = \sum_{k=1}^{\infty}\langle x, e_k\rangle e_k$$

υπάρχει και μάλιστα:

$$\left\langle x - \sum_{k=1}^{\infty}\langle x, e_k\rangle e_k, e_k\right\rangle \overset{*}{=} \langle x, e_k\rangle - \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\langle x, e_k\rangle\langle e_k, e_k\rangle \overset{**}{=} 0$$

όπου η ισότητα άστρο $(*)$ προκύπτει από τη συνέχεια του εσωτερικού γινομένου, και η διπλό άστρο $(**)$ από την υπόθεση. Οπότε:

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k \rangle e_k$$

(iii. $\Rightarrow$ iv.) Από τη σχέση $||x - p_n(x)|| \to 0$ (δηλαδή από το iii.) σε συνδυασμό με την $||x||^2 = ||x - p_n(x)||^2 + ||p_n(x)||^2$ έπεται ότι:

$$||x||^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_k \rangle|^2$$

(iv. $\Rightarrow$ i.) Εάν $||x|| = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k \rangle|^2$, από τη σχέση $||x||^2 = ||x - p_n(x)||^2 + ||p_n(x)||^2$ θα έχουμε $||x - p_n(x)|| \to 0$. Δηλαδή:

$$x = \lim_{n\to\infty}^{||\cdot||} \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k$$

και κατά συνέπεια $X \subseteq \overline{\text{span}}\{e_k\}_{k=1}^{\infty} \Rightarrow X = \overline{\text{span}}\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$.

□

1.4 Τελεστές

Στη συνέχεια θα δούμε την έννοια των τελεστών, και ειδικά αυτό που μας ενδιαφέρει είναι οι καλές ιδιότητες των γραμμικών τελεστών και των γραμμικών συναρτησοειδών.

Γενικά (για εμάς) τελεστής είναι οποιαδήποτε συνάρτηση $T : (X, ||\cdot||) \to (Y, |||\cdot|||)$ μεταξύ δύο χώρων με νόρμα. Οπότε μ' αυτόν τον ορισμό, οι γραμμικοί τελεστές και τα συναρτησοειδή έχουν ως ακολούθως:

Ορισμός 1.4.1 (Γραμμικοί τελεστές και γραμμικά συναρτησοειδή)**.** *Έστω $(X, ||\cdot||)$, $(Y, |||\cdot|||)$ δύο χώροι με νόρμα. Ένας τελεστής $T : X \to Y$ θα λέγεται γραμμικός εάν είναι γραμμική συνάρτηση. Λέγεται γραμμικό συναρτησοειδές εάν επιπλέον $(Y, |||\cdot|||) = (\mathbb{R}, |\cdot|)$.*

Οι γραμμικοί τελεστές (που δεν είναι μηδενικές συναρτήσεις) δεν μπορούν να είναι φραγμένες απεικονίσεις με τη συνήθη έννοια. Είναι φανερό ότι αν κάποιο $x \in X$ υπάρχει ώστε $|||T(x)||| > 0$, για τα διάφορα $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$|||T(\lambda x)||| = |\lambda| \cdot |||T(x)|||$$

και καθώς $\lambda \to \infty$ η ποσότητα $|||T(\lambda x)|||$ μεγαλώνει κι αυτή.

Ενδέχεται παρόλα αυτά η γραμμική απεικόνιση να φράσσεται με διαφορετικό τρόπο, για παράδειγμα με «γραμμικό τρόπο»:

$$|||T(x)||| \leqslant M \cdot ||x||$$

ή ακόμη και «εκθετικά»:

$$|||T(x)||| \leqslant M \cdot (e^{K\cdot||x||} - 1)$$

Δεδομένου ότι διαπραγματευόμαστε με γραμμικούς τελεστές, είναι λογικό να ασχοληθούμε με «γραμμικά» φράγματα. Θα δούμε παρακάτω ότι αυτή η έννοια φραγμένων τελεστών δίνει κάποια καλά αποτελέσματα.

Ορισμός 1.4.2 (Φραγμένοι τελεστές και νόρμα τελεστή)**.** *Έστω $(X, ||\cdot||)$, $(Y, |||\cdot|||)$ δύο χώροι με νόρμα και $T : X \to Y$ ένας γραμμικός τελεστής. Λέμε ότι ο T είναι φραγμένος εάν υπάρχει $M > 0$ ώστε:*

$$\text{Για κάθε } x \in X, \ |||T(x)||| \leqslant M \cdot ||x||$$

συμβολίζουμε με $\mathcal{B}(X, Y)$ το σύνολο των γραμμικών φραγμένων τελεστών του Y^X.

... Ο χώρος $\mathscr{B}(X,Y)$ μπορεί να γίνει χώρος με νόρμα, εάν σ' αυτόν οριστεί:

$$\text{Για κάθε } T \in \mathscr{B}(X,Y), \ ||T|| = \inf\{M > 0 \mid |||T(x)||| \leqslant M \cdot ||x||\}$$

Πρόταση 1.4.1. *Έστω $(X, ||\cdot||)$, $(Y, |||\cdot|||)$ δύο χώροι με νόρμα και $T : X \to Y$ ένας γραμμικός τελεστής. Τα ακόλουθα ισοδυναμούν:*

i. Ο T είναι συνεχής στο 0.

ii. Ο T είναι συνεχής.

iii. Ο T είναι ομοιόμορφα συνεχής.

iv. Ο T είναι φραγμένος (δηλαδή $T \in \mathscr{B}(X,Y)$).

v. Ο $T|_{S_X(0,1)}$ είναι φραγμένος (δηλαδή $T \in \mathscr{B}(S_X(0,1),Y)$).

Απόδειξη: (i. $\Rightarrow$ ii.) Αυτό ισχύει λόγω της γραμμικότητας του τελεστή. Πράγματι, αν $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι μία ακολουθία του X με $x_n \to x \in X$, τότε $x_n - x \to 0$. Λόγω της συνέχειας και της γραμμικότητας:

$$T(x_n - x) \to 0 \Rightarrow T(x_n) - T(x) \to 0 \Rightarrow T(x_n) \to T(x)$$

(ii. $\Rightarrow$ iii.) Θεωρούμε δύο ακολουθίες $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ του X ώστε $||x_n - z_n|| \to 0$, δηλαδή $x_n - z_n \to 0$. Λόγω της συνέχειας του τελεστή στο 0, $T(x_n - z_n) \to 0$, και με την γραμμικότητα $|||T(x_n) - T(z_n)||| \to 0$. Από την Πρόταση 1.1.4 έπεται η ομοιόμορφη συνέχεια του T.

(iii. $\Rightarrow$ iv.) Εφόσον ο T είναι ομοιόμορφα συνεχής, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε για κάθε $x, z \in X$ με $||x - z|| < \delta$ να έχουμε $|||T(x) - T(z)||| < 1$. Αν λοιπόν επιλέξουμε $z = (1 - \delta/2||x||) \cdot x$, θα παρατηρήσουμε ότι $||x - z|| = \delta/2 < \delta$ και κατά συνέπεια:

$$\left|\left|\left| T(x) - \left(1 - \frac{\delta}{2||x||}\right) T(x) \right|\right|\right| < 1 \Rightarrow ||T(x)|| < \frac{2}{\delta} \cdot ||x||$$

(iv. $\Rightarrow$ v.) Είναι άμεσο.

(v. $\Rightarrow$ i.) Εάν ο $T|_{S_X(0,1)}$ είναι φραγμένος, υπάρχει $M > 0$ ώστε:

$$|||T(x)||| \leqslant M \cdot ||x||, \ \ x \in S_X(0,1)$$

Λόγω της γραμμικότητας και του γεγονότος $0 \in S_X(0,1)$ έχουμε το ζητούμενο.

□

Η παραπάνω πρόταση μας δείχνει ότι στους γραμμικούς τελεστές οι έννοιες της φραγμένης, συνεχούς (σε ένα σημείο ή σε όλα) και ομοιόμορφα συνεχούς συνάρτησης ταυτίζονται. Αυτό το αποτέλεσμα είναι πολύ χαρακτηριστικό για τους γραμμικούς τελεστές και θα το επικαλούμαστε συχνά.

Παρατήρηση 1.4.1. *Έστω $(X, ||\cdot||)$, $(Y, |||\cdot|||)$ δύο χώροι με νόρμα και $T : X \to Y$ ένας φραγμένος γραμμικός τελεστής. Αληθεύει η ισότητα:*

$$||T|| = \sup T(\partial S_X(0,1)) = \sup\{|||T(x)||| \mid x \in X, \ ||x|| = 1\} = K$$

Απόδειξη: Είναι φανερό ότι για κάθε $x \in X$, $x \neq 0$:

$$\left|\left|\left| T\left(\frac{x}{||x||}\right) \right|\right|\right| \leqslant K \Rightarrow |||T(x)||| \leqslant K \cdot ||x||$$

οπότε από τον ορισμό της νόρμας τελεστή, $||T|| \leqslant K$.

Από την άλλη μεριά, για κάθε $x \in \partial S_X(0,1)$:

$$||T(x)|| \leqslant ||T|| \Rightarrow K = \sup T(\partial S_X(0,1)) \leqslant ||T||$$

οπότε $K \leqslant ||T||$. Αυτά αποδεικνύουν την παρατήρηση.

□

Έχοντας την προηγούμενη παρατήρηση υπόψη, μπορούμε να δείξουμε ένα σημαντικό θεώρημα που θα χρησιμοποιήσουμε παρακάτω (και κυρίως στο κομμάτι των σειρών Fourier). Αποτελεί θεώρημα επέκτασης, οπότε δεν πρέπει να περάσει απαρατήρητο.

Θεώρημα 1.4.1 (Συνεχής επέκταση τελεστή). *Έστω $(X, ||\cdot||)$, $(Y, |||\cdot|||)$ δύο χώροι με νόρμα εκ των οποίων ο δεύτερος είναι Banach, και D ένα πυκνό υποσύνολο του X. Ένας γραμμικός τελεστής $T : D \to Y$ είναι συνεχής εάν και μόνο αν υπάρχει μοναδική συνεχής επέκταση $\widetilde{T} : X \to Y$. Μάλιστα $||T|| = ||\widetilde{T}||$.*

Απόδειξη: Χρειάζεται να δείξουμε μόνο την κατεύθυνση ($\Rightarrow$). Κατ' αρχάς η μοναδικότητα της επέκτασης είναι συνέπεια του ότι είναι συνεχής και ο τελεστής ορίζεται σε πυκνό σύνολο. Αν $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι ακολουθία του D με $x_n \to x$, τότε λόγω συνέχειας $\widetilde{T}(x) = \lim_{n\to\infty} T(x_n)$.

Όσον αφορά την ύπαρξη της επέκτασης, θεωρούμε $x \in X$ και $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ μία ακολουθία του D που συγκλίνει στο x. Εφόσον ο τελεστής T είναι συνεχής, είναι επίσης φραγμένος. Οπότε για κάθε m, n:

$$|||T(x_n) - T(x_m)||| \leqslant ||T|| \cdot ||x_n - x_m||$$

και για αρκετά μεγάλα m, n η παραπάνω ανισότητα μας δείχνει ότι η ακολουθία $(T(x_n))_{n=1}^{\infty}$ είναι μία βασική ακολουθία στον πλήρη χώρο Y.

Θεωρούμε y_x το όριό της και ορίζουμε $\widetilde{T}(x) = y_x$. Η $\widetilde{T}$ είναι καλά ορισμένη απεικόνιση, αφού δεν εξαρτάται από την επιλογή της ακολουθίας που συγκλίνει στο x. Εάν και η $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνει στο x:

$$|||T(x_n) - T(z_n)||| \leqslant ||T|| \cdot ||x_n - z_n||$$

οπότε $T(z_n) \to y_x$.

Το ότι η $\widetilde{T} : X \to Y$, $\widetilde{T}(x) = \lim_{n\to\infty} T(x_n)$ επεκτείνει την T και είναι γραμμική είναι σχετικά άμεσο. Για να δείξουμε ότι είναι συνεχής, θα δείξουμε ότι είναι φραγμένη. Πράγματι, για κάθε x θεωρούμε ακολουθία $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ του D και γράφουμε

$$T(x_n) \leqslant ||T|| \cdot ||x_n||$$

οπότε με όριο ως προς $n \to \infty$, $\widetilde{T}(x) \leqslant ||T|| \cdot ||x||$ και (ως συνέπεια) $||\widetilde{T}|| \leqslant ||T||$.

Μάλιστα από την Παρατήρηση 1.4.1:

$$||T|| = \sup\, T(\partial S_D(0,1)) = \sup\, \widetilde{T}(\partial S_D(0,1)) \leqslant \sup\, \widetilde{T}(\partial S_X(0,1)) = ||\widetilde{T}||$$

(αφού η $\widetilde{T}$ επεκτείνει την T και $D \subseteq X$). Επομένως $||T|| = ||\widetilde{T}||$.

□

Γενικά τα θεωρήματα επέκτασης είναι μεγάλης σημασίας στην ανάλυση. Μάλιστα ένα από τα σημαντικότερα -το θεώρημα Hahn-Banach- που αφορά συναρτησοειδή θα το δούμε παρακάτω.

Πρώτα θα αναφέρουμε την έννοια του δυϊκού ενός χώρου με νόρμα.

Ορισμός 1.4.3 (Δυϊκοί χώροι). *Έστω $(X, ||\cdot||)$ ένας χώρος με νόρμα. Ορίζουμε τον δυϊκό χώρο του X:*

$$X^* = \mathscr{B}(X, \mathbb{R})$$

δηλαδή τον χώρο όλων των φραγμένων (συνεχών) συναρτησοειδών του X.

Γενικά τα συναρτησοειδή έχουν μία καλή γεωμετρική εποπτεία, η οποία συσχετίζει τα υπερεπίπεδα του X με τους πυρήνες των συναρτησοειδών.

Ορισμός 1.4.4 (Διάσταση, συνδιάσταση και υπερεπίπεδα). *Έστω X ένας γραμμικός χώρος και V ένας γραμμικός υπόχωρός του. Θα λέμε ότι ο V έχει διάσταση* $\dim V \leqslant \dim X$ *εάν υπάρχει $(v_i)_{i\in I}$, $\#I = \dim V$, ακολουθία γραμμικώς ανεξάρτητων διανυσμάτων του V ώστε για κάθε $x \in X$ υπάρχουν μοναδικά $w \in X \backslash V$ και $(\lambda_i)_{i\in I}$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$, με:*

$$x = w + \sum_{i\in I} \lambda_i v_i$$

Επίσης θα λέμε ότι ο V έχει συνδιάσταση $\operatorname{codim} V$ *εάν υπάρχει $(w_j)_{j\in J}$, $\#J = \operatorname{codim} V$, ακολουθία γραμμικώς ανεξάρτητων διανυσμάτων του $X\backslash V$ ώστε για κάθε $x \in X$ υπάρχουν μοναδικά $v \in V$ και $(a_j)_{j\in J}$, $a_j \in \mathbb{R}$, με:*

$$x = v + \sum_{j\in J} a_j w_j$$

Ο V είναι υπερεπίπεδο του X εάν έχει συνδιάσταση $\operatorname{codim} V = 1$.

Στην ουσία τα υπερεπίπεδα είναι γενίκευση των συνήθων επιπέδων του $\mathbb{R}$ (που περνούν από το 0), τα οποία είναι γραμμικοί χώροι διάστασης 2 και συνδιάστασης 1. Με την παρακάτω παρατήρηση θα δείξουμε ότι οι πυρήνες των γραμμικών συναρτησοειδών $f \in X^*$ είναι ακριβώς τα υπερεπίπεδα του αντίστοιχου χώρου X.

Παρατήρηση 1.4.2. *Έστω $(X, \|\cdot\|)$ ένας χώρος με νόρμα. Ένας υπόχωρος $V \subseteq X$ είναι υπερεπίπεδο του X εάν και μόνο αν υπάρχει $0 \not\equiv f \in X^*$ με $\operatorname{Ker} f = V$.*

Απόδειξη: ($\Rightarrow$) Αφού ο V είναι υπερεπίπεδο, έχει συνδιάσταση $\operatorname{codim} V = 1$. Δηλαδή για κάθε $x \in X$ και $w \in X\backslash V$ υπάρχουν μοναδικά $v \in V$, $a \in \mathbb{R}$ ώστε:

$$x = v + aw$$

Ορίζουμε τη συνάρτηση $f(x) = a$ και παρατηρούμε ότι είναι γραμμική, φραγμένη (αφού είναι συνεχής), κι οπότε είναι συναρτησοειδές $f \in X^*$. Μάλιστα από τον ορισμό της έχει πυρήνα $\operatorname{Ker} f = V \neq X$.

($\Leftarrow$) Αντιστρόφως, εάν υπάρχει συναρτησοειδές $0 \not\equiv f \in X^*$ με $\operatorname{Ker} f = V$ θα δείξουμε ότι ο V έχει συνδιάσταση 1.

Κατ' αρχάς, εφόσον $V = \operatorname{Ker} f \neq X$, υπάρχει $w_0 \in X\backslash V$ με $f(w_0) \neq 0$, οπότε κι ένα $w = w_0/f(w_0)$ με $f(w) = 1$. Τώρα για κάθε $x \in X$ γράφουμε:

$$x = f(x)\cdot w + \big(x - f(x)\cdot w\big)$$

και παρατηρούμε ότι $x - f(x)\cdot w \in V$, αφού $f\big(x - f(x)\cdot w\big) = 0$ και $\operatorname{Ker} f = V$. Επιπλέον αυτή η γραφή είναι μοναδική: αν υπήρχε κι άλλη, έστω $x = aw + v$, τότε:

$$0 = \big(f(x) - a\big)\cdot w + \big(x - f(x)\cdot w - v\big) \Rightarrow 0 = \big(f(x) - a\big)\cdot f(w) \Rightarrow f(x) = a$$

κι επιπλέον (από την προηγούμενη σχέση) $x - f(x)\cdot w - v = 0 \Rightarrow v = x - f(x)\cdot w$. Αυτά δείχνουν ότι $\operatorname{codim} V = 1$ και κατ' επέκταση το ζητούμενο.

$\square$

Στη συνέχεια θα αναφερθούμε στο θεώρημα Hahn-Banach και σε μερικές εφαρμογές του, εκ των οποίων κάποιες θα χρησιμοποιήσουμε αργότερα, στις βάσεις Schauder.

Λήμμα 1.4.1. *Θεωρούμε έναν γραμμικό χώρο X στον οποίον υπάρχει μία συνάρτηση $\eta : X \to \mathbb{R}$ που μοιάζει με νόρμα. Δηλαδή έχει τις ιδιότητες:*

i. Για κάθε $x \in X$, $\lambda > 0$: $\eta(\lambda x) = \lambda\cdot\eta(x)$.

ii. Για κάθε $x, y \in X$: $\eta(x + y) \leqslant \eta(x) + \eta(y)$.

Έστω επίσης $Y \subseteq X$ ένας γραμμικός υπόχωρος, $\varphi : Y \to \mathbb{R}$ μία γραμμική συνάρτηση με $\varphi(y) \leqslant \eta(y)$, $y \in Y$, ένα σταθεροποιημένο $x_0 \in X$ και $Z = \operatorname{span}(Y \cup \{x_0\}) = \{y + \lambda x_0 \mid y \in Y,\ \lambda \in \mathbb{R}\}$. Τότε υπάρχει μία συνάρτηση $\widetilde{\varphi} : Z \to \mathbb{R}$ που επεκτείνει την φ διατηρώντας το φράγμα, δηλαδή:

$$\widetilde{\varphi}|_Y = \varphi \ \text{ και } \ \widetilde{\varphi}(z) \leqslant \eta(z),\ z \in Z$$

Απόδειξη: Έστω $a \in \mathbb{R}$ και η συνάρτηση $f_a : Z \to \mathbb{R}$:

$$f_a(z) = f_a(y + \lambda x_0) = \varphi(y) + \lambda a$$

Είναι φανερό ότι κάθε συνάρτηση f_a είναι γραμμική επέκταση της φ. Διαλέγοντας κατάλληλο $a \in \mathbb{R}$, μπορούμε να βρούμε f_a που επίσης διατηρεί το φράγμα της φ.

Έστω λοιπόν $x, y \in Y$. Αληθεύει, λόγω της ιδιότητας ii. της η, ότι:

$$\varphi(x) - \varphi(y) = \varphi(x - y) \leqslant \eta(x + y) \leqslant \eta(x + x_0) + \eta(-y - x_0)$$

κι άρα:

$$-\eta(-y - x_0) - \varphi(y) \leqslant \eta(x + x_0) - \varphi(x)$$

Αυτό δείχνει ότι τα σύνολα:

$$A = \{-\eta(-y - x_0) - \varphi(y) \mid y \in Y\} \text{ και } B = \{\eta(x + x_0) - \varphi(x) \mid x \in X\}$$

είναι άνω και κάτω φραγμένα σύνολα αντίστοιχα.

Θεωρούμε λοιπόν $s = \sup A$, $t = \inf B$ κι επιλέγουμε $a \in [s, t]$. Θα δείξουμε ότι η f_a είναι κατάλληλη επέκταση, που διατηρεί το φράγμα τηνς φ. Εν τω μεταξύ παρατηρήστε ότι από τον ορισμό του a:

$$-\eta(-x - x_0) - \varphi(x) \leqslant a \leqslant \eta(x + x_0) - \varphi(x)$$

για κάθε $x \in Y$.

Εάν γράψουμε $z = y + \lambda x_0 \in Z$, για τα διάφορα $\lambda \in \mathbb{R}$ έχουμε:

- Για $\lambda = 0$: $f_a(z) = \varphi(y) \leqslant \eta(y) = \eta(z)$.
- Για $\lambda > 0$: Επειδή $a \leqslant \eta(y/\lambda + x_0) - \varphi(y/\lambda)$:

$$f_a(z) = \lambda a + \varphi(y) \leqslant \lambda \cdot \eta(y/\lambda + x_0) = \eta(\lambda x_0 + y) = \eta(z)$$

- Για $\lambda < 0$: Επειδή $-\eta(-y/\lambda - x_0) - \varphi(y/\lambda) \leqslant a$:

$$f_a(z) = \lambda a + \varphi(y) \leqslant -\lambda \cdot \eta(-y/\lambda - x_0) = \eta(\lambda x_0 + y) = \eta(z)$$

Θέτοντας λοιπόν $\widetilde{\varphi} = f_a$, αποδεικνύουμε το λήμμα.

□

Θεώρημα 1.4.2 (Hahn-Banach)**.** *Θεωρούμε έναν γραμμικό χώρος X στον οποίον υπάρχει μία συνάρτηση $\eta : X \to \mathbb{R}$ που μοιάζει με νόρμα. Δηλαδή έχει τις ιδιότητες:*

i. Για κάθε $x \in X$, $\lambda > 0 :$ $\eta(\lambda x) = \lambda \cdot \eta(x)$.

ii. Για κάθε $x, y \in X :$ $\eta(x + y) \leqslant \eta(x) + \eta(y)$.

Έστω επίσης $Y \subseteq X$ ένας γραμμικός υπόχωρος και $\varphi : Y \to \mathbb{R}$ μία γραμμική συνάρτηση με $\varphi(y) \leqslant \eta(y)$, $y \in Y$. Τότε υπάρχει $\tilde{\varphi} : X \to \mathbb{R}$ γραμμική επέκταση της φ που να διατηρεί το φράγμα, δηλαδή $\widetilde{\varphi}(x) \leqslant \eta(x)$, $x \in X$.

Απόδειξη: Για την απόδειξη θα χρειαστούμε ένα συνολοθεωρητικό αξίωμα, το λεγόμενο Λήμμα του Zorn, κατά το οποίο:

> *«Εάν $(X, \preceq)$ είναι ένα μη κενό μερικά διατεταγμένο σύνολο ώστε κάθε αλυσίδα (δηλαδή κάθε ολικά διατεταγμένο υποσύνολό του) έχει άνω φράγμα, τότε το X έχει μεγιστικό στοιχείο. Δηλαδή υπάρχει $x^\infty \in X$ τέτοιο ώστε αν $x \succeq x^\infty$, τότε $x = x^\infty$»*

Είναι γνωστό ότι το Λήμμα του Zorn είναι ισοδύναμο με το Αξίωμα της Επιλογής. Κάποιοι μαθηματικοί προσπαθούν να αποφεύγουν το Αξίωμα της Επιλογής στην ανάπτυξη αποτελεσμάτων, γιατί οδηγεί σε «παράδοξα», όπως αυτό των Banach-Tarski [BT].

Στο [DM] έχει δειχθεί ότι σε διαχωρίσιμους τοπολογικούς γραμμικούς χώρους που ικανοποιούν κάποιες ιδιότητες, το Hahn-Banach μπορεί να αποδειχθεί με χρήση υπερπεπερασμένης αναδρομής, οπότε το Αξίωμα της Επιλογής δεν χρησιμοποιείται. Επίσης, στην ίδια μελέτη αποδεικνύεται ότι το θεώρημα Hahn-Banach δεν μπορεί να αποδειχθεί σε όλους τους διαχωρίσιμους τοπολογικούς χώρους χωρίς το Αξίωμα της Επιλογής, οπότε τελικά το εν λόγω θεώρημα δεν είναι ανεξάρτητο από το αξίωμα.

Πάντως το θεώρημα Hahn-Banach είναι ένα αρκετά ισχυρό θεώρημα στη συναρτησιακή ανάλυση και ίσως -ενώπιον των αποτελεσμάτων του- δεν θα έπρεπε να μας πειράζει η χρήση του Αξιώματος της Επιλογής.

Τώρα όσον αφορά την απόδειξη, ορίζουμε:

$$\Gamma = \coprod_{\substack{Y\subseteq Z\subseteq X \\ Z \text{ γραμμικός}}} \{f_Z : Z \to \mathbb{R} \mid f_Z \text{ γραμμική που επεκτείνει την } \varphi,\ f_Z(x) \leqslant \eta(x),\ x \in X\}$$

δηλαδή:

$$\Gamma = \{(Z,f_Z) \to \mathbb{R} \mid Y \subseteq Z \subseteq X \text{ γραμμικός υπόχωρος, } f_Z : Z \to \mathbb{R} \text{ γραμμική που επεκτείνει την } \varphi, \text{ και } f_Z(x) \leqslant \eta(x),\ x \in X\}$$

Το Γ δεν είναι κενό σύνολο, αφού $(Y,\varphi) \in \Gamma$. Επίσης, σ' αυτό μπορούμε να ορίσουμε μία σχέση μερικής διάταξης ως εξής:

$$(Z_1,f_{Z_1}) \preceq (Z_2,f_{Z_2}) :\Leftrightarrow Z_1 \subseteq Z_2 \text{ και } f_{Z_2}|_{Z_1} = f_{Z_1}$$

Αν δείξουμε ότι κάθε αλυσίδα Δ του Γ είναι φραγμένη, τότε από το Λήμμα του Zorn θα υπάρχει μεγιστικό στοιχείο του X, έστω (H,f_H). Μάλιστα γι' αυτό το στοιχείο θα ισχύει $(H,f_H) = (X,f_X)$, αφού αν $H \neq X$, από το Λήμμα 1.4.1 για κάποιο $x_0 \in X \setminus H$ θα καταλήγαμε στο ότι το (H,f_H) δεν είναι μεγιστικό. Στην ουσία λοιπόν αποδεικνύουμε το θεώρημα αν δείξουμε ότι κάθε αλυσίδα είναι φραγμένη.

Εάν λοιπόν $\Delta = \{(Z_i,f_{Z_i}) \in \Gamma \mid i \in I\}$ είναι μία αλυσίδα του Γ, θέτοντας $Z = \bigcup_{i\in I} Z_i$ και $f_Z = \bigcup_{i\in I} f_{Z_i}$ παρατηρούμε ότι $(Z,f_Z) \in \Gamma$ και είναι (άνω) φράγμα του Δ (παρατηρήστε ότι η f_Z είναι συνάρτηση διότι το Δ είναι αλυσίδα, σε συνδιασμό με τον ορισμό της μερικής διάταξης).

□

Πρόταση 1.4.2 (Πόρισμα Hahn-Banach, I). *Έστω $(X,\|\cdot\|)$ ένας χώρος με νόρμα και Y ένας γραμμικός υπόχωρός του. Για κάθε $y^* \in Y^*$ υπάρχει $x^* \in X^*$ που επεκτείνει το y^* (δηλαδή $x^*|_Y = y^*$) διατηρώντας τη νόρμα (δηλαδή $\|x^*\| = \|y^*\|$).*

Απόδειξη: Έστω $y^* \in Y^*$. Θέτουμε $\eta(x) = \|y^*\| \cdot \|x\|$ και παρατηρούμε ότι αυτή η συνάρτηση ικανοποιεί της ιδιότητες της ομόνυμης η στο θεώρημα Hahn-Banach. Επιπλέον, $y^*(y) \leqslant \eta(y)$, $y \in Y$.

Από το θεώρημα Hahn-Banach υπάρχει $x^* : X \to \mathbb{R}$ που να επεκτείνει την y^* και να διατηρεί το φράγμα $x^*(x) \leqslant \eta(x) = \|y^*\| \cdot \|x\|$, $x \in X$. Επειδή η x^* είναι γραμμική, έχουμε επιπλέον ότι $|x^*(x)| \leqslant \|y^*\| \cdot \|x\|$ και κατά συνέπεια $\|x^*\| \leqslant \|y^*\|$. Αυτά δείχνουν ότι το x^* είναι γραμμικό συναρτησοειδές, αφού είναι γραμμικό και φραγμένο.

Τέλος, από την Παρατήρηση 1.4.1:

$$\|y^*\| = \sup y^*(\partial_Y S(0,1)) = \sup x^*(\partial_Y S(0,1)) \leqslant \sup x^*(\partial_X S(0,1)) = \|x^*\|$$

(αφού η x^* επεκτείνει την y^* και $Y \subseteq X$) έπεται ότι $\|y^*\| \leqslant \|x^*\|$ κι άρα $\|y^*\| = \|x^*\|$.

□

Πρόταση 1.4.3 (Πόρισμα Hahn-Banach, II). *Έστω $(X,\|\cdot\|)$ ένας χώρος με νόρμα. Τα ακόλουθα αληθεύουν:*

i. Για κάθε κλειστό γραμμικό υπόχωρο $Y \subseteq X$ και $x_0 \in X \setminus Y$ υπάρχει $x^* \in X^*$ με $\|x^*\| = 1$ και $x^*|_Y \equiv 0$, $x^*(x_0) = \inf\{\|y - x_0\| \mid y \in Y\}$.

ii. Για κάθε $0 \neq x_0 \in X$ υπάρχει $x^* \in X^*$ με $x^*(x_0) = \|x_0\| > 0$. Δηλαδή, κατά κάποιον τρόπο, τα συναρτησοειδή μπορούν να διαχωρίζουν σημεία του X, αφού για κάθε

… *δύο διαφορετικά σημεία* $x_0, y_0 \in X$ *υπάρχει συναρτησοειδές* $x^* \in X^*$ *με* $x^*(x_0 - y_0) > 0 \Rightarrow x^*(x_0) \neq x^*(y_0)$.

iii. Ένας γραμμικός χώρος $Y \subseteq X$ *είναι πυκνός εάν και μόνο αν:*

$$\text{Για κάθε } x^* \in X^* \text{ με } x^*|_Y \equiv 0 \text{ έχουμε } x^* \equiv 0$$

Απόδειξη: Για το i.: Θέτουμε $Z = \text{span}(Y \cup \{x_0\})$ και παρατηρούμε ότι κάθε $z \in Z$ γράφεται μοναδικά στη μορφή $z = y_z + \lambda_z \cdot x_0$, $\lambda_z \in \mathbb{R}$. Έτσι λοιπόν είναι δυνατόν να ορίσουμε τη συνάρτηση $z^*(z) = \lambda_z \delta$, όπου $\delta = \inf\{||y - x_0|| \mid y \in Y\}$, η οποία είναι γραμμική. Μάλιστα από την Παρατήρηση 1.4.1:

$$||z^*|| = \sup \left\{ T\left(\frac{z}{||z||}\right) \;\middle|\; 0 \neq z \in Z \right\} = \sup \left\{ \frac{T(z)}{||z||} \;\middle|\; 0 \neq z \in Z \right\} =$$

$$= \sup \left\{ \frac{\lambda_z \delta}{||y_z + \lambda_z x_0||} \;\middle|\; y_z \in Y,\ 0 \neq z \in Z \right\} = \sup \left\{ \frac{\delta}{||1/\lambda_z \cdot y_z + x_0||} \;\middle|\; y_z \in Y,\ 0 \neq z \in Z \right\} =$$

$$= \delta \Big/ \inf\{||-y + x_0|| \mid y \in Y\} = \frac{\delta}{\delta} = 1$$

Οπότε το z^* είναι γραμμικό συναρτησοειδές του Z^* με νόρμα $||z^*|| = 1$. Τώρα από την Πρόταση 1.4.2 υπάρχει συναρτησοειδές $x^* \in X^*$ που επεκτείνει το z^* και διατηρεί τη νόρμα ($||x^*|| = ||z^*|| = 1$). Επειδή $z^*|_Y \equiv 0$ και $z^*(x_0) = \delta = \inf\{||y - x_0|| \mid y \in Y\}$, το ζητούμενο συναρτησοειδές είναι το x^*.

Για το ii: Είναι συνέπεια του i., αν θέσουμε $Y = \{0\}$.

Για το iii.: Η κατεύθυνση ($\Rightarrow$) είναι προφανής. Για την άλλη κατεύθυνση ($\Leftarrow$), αν προς άτοπο υποθέσουμε ότι $\overline{Y} \subset X$, από το i. θα καταλήξουμε σε άτοπο: θα μπορεί να βρεθεί συναρτησοειδές που είναι μηδέν στον $\overline{Y}$ και όχι μηδέν σε κάποιο σημείο $x_0 \in X \backslash \overline{Y}$. □

Τα τελευταία σημαντικά θεωρήματα που θα αποδείξουμε σε αυτήν την παράγραφο είναι ουσιαστικά συνέπεια του θεωρήματος Baire (δηλαδή του Θεωρήματος 1.1.2). Αναφερόμαστε στο θεώρημα της ανοικτής απεικόνισης, του κλειστού γραφήματος και του ομοιόμορφου φράγματος, τα οποία θα διατυπώσουμε παρακάτω, μετά το ακόλουθο λήμμα.

Λήμμα 1.4.2. *Έστω* $(X, ||\cdot||)$, $(Y, |||\cdot|||)$ *δύο χώροι Banach και* $T : X \to Y$ *ένας γραμμικός, φραγμένος και επί τελεστής. Το σύνολο* $T(S_X(0,1))$ *περιέχει κάποια μπάλα* $S_Y(0,\delta)$ *(για κατάλληλο* $\delta > 0$*).*

Απόδειξη: Θεωρούμε την κάλυψη $\{k \cdot S_X(0, 1/2)\}_{k=1}^{\infty}$ του X:

$$X = \bigcup_{k=1}^{\infty} k \cdot S_X(0, 1/2)$$

η οποία, αφού ο T είναι επί, οδηγεί σε κάλυψη του Y:

$$Y = T(X) = \bigcup_{k=1}^{\infty} k \cdot T(S_X(0, 1/2))$$

Μάλιστα, αφού η κλειστή θήκη είναι εν γένει μεγαλύτερο σύνολο από τη «βάση» της:

$$Y = T(X) = \bigcup_{k=1}^{\infty} k \cdot \overline{T(S_X(0, 1/2))}$$

Από το θεώρημα του Baire τώρα, υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ούτως ώστε $k \cdot \left(\overline{T(S_X(0, 1/2))}\right)^{\circ} \neq \varnothing$, δηλαδή υπάρχει $S_Y(y_0, \delta')$ με $S_Y(y_0, \delta') \subseteq \overline{T(S_X(0, 1/2))}$.

Έστω τώρα $y \in S_Y(0, \delta')$, και (εφόσον $S_Y(y_0, \delta') \subseteq \overline{T(S_X(0, 1/2))}$), μία ακολουθία $(x_n^1)_{n=1}^{\infty}$ του $S_X(0, 1/2)$ με:

$$T(x_n) \to y + y_0 \in S_Y(y_0, \delta')$$

Επίσης, αφού $y_0 \in S_Y(y_0, \delta') \subseteq \overline{T(S_X(0,1/2))}$, μπορεί να βρεθεί μία ακολουθία $(x_n^0)_{n=1}^{\infty}$ του $S_X(0,1/2)$ με $T(x_n^0) \to y_0$, και κατα συνέπεια (θεωρώντας $x_n^2 = x_n^1 - x_n^0 \in S_X(0,1)$):

$$T(x_n^2) \to y \in S_Y(0, \delta')$$

Οπότε $y \in \overline{T(S_X(0,1))}$. Το y ήταν τυχόν, επομένως στην πραγματικότητα έχουμε δείξει ότι $S_Y(0,\delta') \subseteq \overline{T(S_X(0,1))}$.

Χρησιμοποιώντας τον εγκλεισμό $S_Y(0,\delta') \subseteq \overline{T(S_X(0,1))}$ που μόλις δείξαμε, θα αποδείξουμε ότι:

$$S_Y(0,\delta'/2) \subseteq T(S_X(0,1))$$

κι οπότε θα έχουμε το ζητούμενο αποτέλεσμα με $\delta = \delta'/2$.

Έστω λοιπόν $y \in S_Y(0,\delta'/2)$. Εφόσον $1/2 \cdot S_Y(0,\delta') = S_Y(0,\delta'/2)$, θα έχουμε από τον προηγούμενο εγκλεισμό (που δείξαμε) και τη γραμμικότητα του τελεστή ότι:

$$y \in S_Y(0,\delta'/2) \subseteq \overline{T(S_X(0,1/2))}$$

κι οπότε θα υπάρχει κάποια ακολουθία $(x_n^1)_{n=1}^{\infty}$ του $S_X(0,1/2)$ με $T(x_n^1) \to y$. Ως συνέπεια:

$$|||y - T(x_n^1)||| < \delta'/2^2$$

για αρκετά μεγάλο n. Υπάρχει λοιπόν $x_1 = x_n^1 \in S_X(0,1/2)$ τέτοιο ώστε:

$$|||y - T(x_1)||| < \delta/2^2$$

Τώρα παρατηρούμε ότι $y - T(x_1) \in S_Y(0,\delta'/2^2) \subseteq \overline{T(S_X(0,1/2^2))}$, οπότε (όπως πριν) μπορεί να βρεθεί $x_2 \in S_X(0,1/2^2)$ με:

$$|||y - T(x_1) - T(x_2)||| < \delta/2^3$$

Μάλιστα επαγωγικά μπορεί να βρεθεί ακολουθία $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, $x_n \in S_X(0,1/2^n)$, ούτως ώστε:

$$\left|\left|\left| y - \sum_{k=1}^{n} T(x_k) \right|\right|\right| < \delta'/2^{n+1}$$

Θέτουμε $z_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$. Η $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι βασική ακολουθία, αφού από τον ορισμό της:

$$||z_n - z_m|| = \left|\left| \sum_{k=m}^{n} x_k \right|\right| \leqslant \sum_{k=m}^{n} ||x_k|| \leqslant \sum_{k=m}^{n} \frac{1}{2^k} \leqslant 1/2^n$$

Εφόσον ο X είναι χώρος Banach, είναι δυνατόν να βρεθεί το όριό της $\lim_{n\to\infty}^{||\cdot||} z_n = z$. Αυτό το z θα ανήκει στη μοναδιαία μπάλα $S_X(0,1)$, αφού:

$$||z|| = \left|\left| \sum_{k=1}^{\infty} x_k \right|\right| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} ||x|| \leqslant ||x_1|| + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{2^k} = ||x_1|| + 1/2 < 1$$

και σε συνδυασμό με τη σχέση:

$$y \leftarrow \sum_{k=1}^{n} T(x_k) = T\left(\sum_{k=1}^{n} x_n\right) \to T(z)$$

έχουμε $y = T(z) \Rightarrow y \in T(S_X(0,1))$. Το y ήταν τυχόν, οπότε στην πραγματικότητα έχουμε δείξει ότι $S_Y(0,\delta'/2) \subseteq T(S_X(0,1))$.

□

Θεώρημα 1.4.3 (Θεώρημα ανοικτής απεικόνισης). *Έστω $(X, ||\cdot||)$, $(Y, |||\cdot|||)$ δύο χώροι Banach και $T : X \to Y$ ένας γραμμικός, φραγμένος και επί τελεστής. Ο T είναι επίσης ανοικτός, δηλαδή απεικονίζει ανοικτά σύνολα σε ανοικτά σύνολα.*

Απόδειξη: Η απόδειξη δεδομένου του Λήμματος 1.4.2 θα είναι σύντομη. Έστω $A \subseteq X$ ένα ανοικτό σύνολο στον X. Θα δείξουμε ότι για κάθε $y \in T(A)$ υπάρχει μπάλα $S_Y(y, \delta_y) \subseteq T(A)$, οπότε το $T(A)$ θα είναι ανοικτό.

Έστω λοιπόν $y \in T(A)$ και $x \in A$ με $T(x) = y$. Θεωρούμε $S_X(x, \varepsilon) \subseteq A$ (εφόσον το A είναι ανοικτό), κι από το Λήμμα 1.4.2 σε συνδυασμό με τη γραμμικότητα του T βρίσκουμε:

$$S_Y(0, \delta_y) \subseteq T\big(S_X(0, \varepsilon)\big) \Rightarrow S_Y(y, \delta_y) = S_Y\big(T(x), \delta_{T(x)}\big) \subseteq T\big(S_X(x, \varepsilon)\big)$$

□

Το θεώρημα ανοικτής απεικόνισης είναι πολύ χρήσιμο, καθώς στην ουσία αποδεικνύει την παρακάτω παρατήρηση:

Παρατήρηση 1.4.3. *Έστω $(X, ||\cdot||)$, $(Y, |||\cdot|||)$ δύο χώροι Banach και $T : X \to Y$ ένας γραμμικός, φραγμένος και αμφιμονοσήμαντος τελεστής. Από το θεώρημα ανοικτής απεικόνισης ο T είναι επιπλέον ανοικτή, οπότε είναι γραμμική, συνεχής, με συνεχή αντίστροφο (αφού είναι ανοικτή) κι αμφιμονοσήμαντη. Κατά συνέπεια είναι ένας ισομορφισμός.*

Θεώρημα 1.4.4 (Θεώρημα κλειστού γραφήματος)**.** *Έστω $(X, ||\cdot||)$, $(Y, |||\cdot|||)$ δύο χώροι Banach και $T : X \to Y$ ένας γραμμικός τελεστής. Αν το γράφημα:*

$$\mathrm{Gr}\ T = \{(x, T(x)) \in X \times Y \mid x \in X\}$$

είναι κλειστό στον χώρο γινόμενο $(X \times Y, ||\cdot||_\gamma)$ (όπου $||(x, y)||_\gamma = \max\{||x||, |||y|||\}$), τότε ο T είναι φραγμένος.

Απόδειξη: Το $\mathrm{Gr}\ T$ είναι κλειστός υπόχωρος του χώρου Banach $X \times Y$, οπότε είναι κι αυτός Banach.

Θεωρούμε τώρα τις δύο «κατά συντεταγμένες» προβολές $\pi_X : \mathrm{Gr}\ T \to X$, $\pi_Y : \mathrm{Gr}\ T \to Y$, οι οποίες είναι γραμμικές και φραγμένες (αφού οι ταυτοτικές είναι φραγμένες). Επιπλέον η π_X είναι αμφιμονοσήμαντη αν περιοριστεί στο γράφημα $\mathrm{Gr}\ T$.

Από την Παρατήρηση 1.4.3 έπεται ότι η $\pi_X|_{\mathrm{Gr}T}$ είναι ισομορφισμός, και κατά συνέπεια η $\pi_Y \circ \pi_X^{-1}|_{\mathrm{Gr}T} = T$ είναι φραγμένη.

□

Θεώρημα 1.4.5 (Αρχή ομοιόμορφου φράγματος)**.** *Έστω $(X, ||\cdot||)$, $(Y, |||\cdot|||)$ δύο χώροι με νόρμα, εκ των οποίων ο πρώτος είναι Banach. Έστω επίσης $(T_i)_{i \in I}$ οικογένεια φραγμένων γραμμικών τελεστών $T_i : X \to Y$ ώστε για κάθε $x \in X$:*

$$\sup_{i \in I}\ ||T_i(x)|| < \infty$$

Τότε υπάρχει $M > 0$ που να φράσσει ομοιόμορφα όλους τους T_i, δηλαδή για κάθε $i \in I$, $||T_i|| \leqslant M$.

Απόδειξη: Για τα διάφορα $n \in \mathbb{N}$ θέτουμε:

$$K_n = \{x \in X \mid \sup_{i \in I}\ ||T_i(x)|| \leqslant n\}$$

και παρατηρούμε ότι αυτά είναι κλειστά σύνολα (για παράδειγμα, μέσω ακολουθιών). Επίσης παρατηρούμε ότι $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$, κι επομένως από το θεώρημα του Baire -εφόσον ο X είναι Banach- υπάρχει κάποιο K_{n_0} με μη κενό εσωτερικό. Δηλαδή υπάρχει $S(x_0, \delta) \subseteq K_{n_0}$, από το οποίο έπεται ότι για κάθε $x \in \partial S(x_0, \delta)$, $|||T_i(x)||| \leqslant n_0$, για κάθε i. Δηλαδή, για κάθε $x \in \partial S(x_0, 1)$, $|||T_i(x)||| \leqslant \delta n_0$, για κάθε i, και κατά συνέπεια:

$$\forall x \in \partial S(0, 1),\ \ \forall i \in I,\ \ |||T_i(x + x_0)||| \leqslant \delta n_0 \Rightarrow |||T_i(x)||| \leqslant \delta n_0 + |||T_i(x_0)||| \leqslant 2\delta n_0$$

Θέτοντας $M = 2\delta n_0$ έχουμε το ζητούμενο, αφού για κάθε i:

$$||T_i|| = \sup\ T_i\big(\partial S(0, 1)\big) \leqslant M$$

□

1.5 Βάσεις Schauder

Ουσιαστικά στους χώρους με βάση Schauder έχουμε μία πολύ καλή ιδιότητα όσον αφορά την αναπαράσταση στοιχείων του χώρου. Θα δούμε ότι με τις βάσεις Schauder κανείς είναι δυνατόν να αναπαραστήσει κάθε στοιχείο μέσω μίας σειράς, έναν άπειρο γραμμικό συνδυασμό στοιχείων της βάσης.

Ορισμός 1.5.1 (Schauder βασικές ακολουθίες και βάσεις Schauder)**.** *Έστω $(X, \|\cdot\|)$ ένας χώρος Banach. Μία ακολουθία $(e_k)_{k=1}^{\infty}$, $e_k \neq 0$, του X λέγεται Schauder βασική εάν για κάθε $x \in \overline{\text{span}}\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ υπάρχει μοναδική ακολουθία $(\lambda_k)_{k=1}^{\infty}$ πραγματικών αριθμών ώστε:*

$$x = \lim_{n\to\infty}^{\|\cdot\|} \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k e_k$$

Θα λέμε ότι μία Schauder βασική ακολουθία $(e_k)_{k=1}^{\infty}$ είναι βάση Schauder εάν επιπλέον $X = \overline{\text{span}}\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ (δηλαδή κάθε στοιχείο γράφεται κατά τον παραπάνω τρόπο).

Ο παραπάνω ορισμός της βάσης Schauder ουσιαστικά μας δίνει ότι για κάθε $x \in X$ προσεγγίζεται κατά τον ακόλουθο τρόπο:

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k \right\| \to 0$$

Εάν βρισκόμαστε σε χώρο συναρτήσεων, για παράδειγμα στον L^2, αυτή η σύγκλιση (αν αληθεύει) θα σημαίνει ότι μία συνάρτηση $f \in L^2$ μπορεί να προσεγγιστεί:

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k \right\|_{L^2} = \left(\int_0^1 \left| f - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k \right|^2 \right)^{1/2} \to 0$$

(όπου $e_k \in L^2$). Αυτό σημαίνει ότι η f συγκλίνει στο άπειρο άθροισμα, δεν σημαίνει όμως -για παράδειγμα- ότι η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη (καθώς αυτό θα χρειαζόταν τη νόρμα supremum).

Επιπλέον, εάν ασχολούμασταν γενικά με Riemann ολοκληρώσιμες συναρτήσεις και όχι με συνεχείς, η f θα συνέκλινε στο άπειρο άθροισμα «σχεδόν παντού», αλλά ενδέχεται όχι παντού. Μπορεί δύο Riemann ολοκληρώσιμες συναρτήσεις να έχουν το ίδιο ολοκλήρωμα αλλά να διαφέρουν σε ένα σημείο, γι' αυτόν τον λόγο συνήθως ορίζουμε τον L^2 πάνω σε κλάσεις, που ταυτίζουν δύο συναρτήσεις αν είναι ίσες «σχεδόν παντού» (αν δεν διαπραγματευόμαστε μόνο με συνεχείς συναρτήσεις).

Βέβαια εμάς δεν θα μας απασχολήσουν οι κλάσεις, καθώς στα παραδείγματα που θα δώσουμε στην ανάλυση Fourier θα διαπραγματευτούμε με συνεχείς συναρτήσεις.

Εν τω μεταξύ κρίνουμε ότι θα είναι καλύτερο -πριν αναφέρουμε αποτελέσματα για χώρους με βάσεις Schauder- να δούμε ένα κύριο παράδειγμα μέσω της ανάλυσης Fourier, από το οποίο θα φανεί η χρησιμότητα μίας ειδικής περίπτωσης βάσης Schauder. Συγκεκριμένα θα ασχοληθούμε με σειρές Fourier στον L^2.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Οι βάσεις Schauder στην ανάλυση Fourier

2.1 Το προσεγγιστικό θεώρημα του Weierstrass

Σε αυτό το κεφάλαιο αποσκοπούμε να δείξουμε ότι υπάρχει ακολουθία Schauder στην πλήρωση του L^2, μέσω των σειρών Fourier των L^2-συναρτήσεων. Γι' αρχή θα δούμε το προσεγγιστικό θεώρημα του Weierstrass για τα μιγαδικά τριγωνομετρικά πολυώνυμα, κυρίως για να γίνει εμφανές ότι η απλή ύπαρξη μίας προσέγγισης και η συγκεκριμένη προσέγγιση μπορούν να δώσουν διαφορετικά αποτελέσματα.

Σε αυτήν την παρουσίαση θα αποδείξουμε το εν λόγω θεώρημα μέσω του «απλού» προσεγγιστικού θεωρήματος του Weierstass. Υπάρχουν κι άλλες αποδείξεις πιο σύντομες, οι οποίες χρησιμοποιούν περισσότερο τεχνικές της ανάλυσης Fourier (τα πολυώνυμα του Fejér), αλλά εμείς δεν θα τις αναφέρουμε καθώς η ανάλυση Fourier δεν είναι το κύριο κομμάτι αυτής της εργασίας. Για μία άλλη παρουσίαση λοιπόν, μπορείτε να δείτε το [Κα] (Παράγραφος 1.9) ή το [Γι1] (Παράγραφος 6.3).

Με το προσεγγιστικό θεώρημα του Weierstass για μιγαδικά τριγωνομετρικά πολυώνυμα θα δούμε ότι κάθε συνεχής συνάρτηση προσεγγίζεται -με τη νόρμα supremum- από μιγαδικά τριγωνομετρικά πολυώνυμα. Για να αποδείξουμε όμως αυτό το θεώρημα, θα αποδείξουμε πρώτα το προσεγγιστικό θεώρημα του Weierstass, κατά το οποίο μία συνεχής συνάρτηση προσεγγίζεται -με τη νόρμα supremum- από πολυώνυμα.

Η απόδειξη που θα δώσουμε βασίζεται στα πολυώνυμα του Bernstein, και κατά συνέπεια στην πραγματικότητα είναι κατά βάση πιθανοθεωρητική (αν και δεν θα το δούμε μ' αυτόν τον τρόπο). Τα πολυώνυμα του Bernstein είναι τα ακόλουθα:

Ορισμός 2.1.1 (Πολυώνυμα του Bernstein). *Κάθε πολυώνυμο της μορφής:*

$$B_{n,f}(x) = \sum_{k=0}^{n} f(k/n)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}, \text{ με } x \in [0,1]$$

όπου $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ είναι μία συνεχής συνάρτηση, καλείται πολυώνυμο Bernstein.

Παρατηρήστε ότι στην πραγματικότητα το πολυώνυμο $B_{n,f}$ είναι μία μέση τιμή (με την πιθανοτική έννοια) $\mathbb{E}[f(K/n)]$, όπου $K \sim \mathrm{Binom}(n,x)$. Εμείς δεν θα προσεγγίσουμε όμως τα πολυώνυμα μ' αυτόν τον τρόπο, ούτε την απόδειξη του θεωρήματος. Παρόλα αυτά, παραπέμπεστε στο [Be].

Λήμμα 2.1.1. *Για κάθε $x \in [0,1]$ αληθεύουν τα ακόλουθα:*

i. $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = 1$ *(συνάρτηση πιθανότητας διωνυμικής).*

ii. $\sum_{k=0}^{n} k/n\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = x$ *(μέση τιμή διωνυμικής).*

iii. $\sum_{k=0}^{n}(k/n-x)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = x(1-x)/n$ *(διασπορά διωνυμικής).*

Απόδειξη: Από τη σχέση $(1+y)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}y^k$, παραγωγίζοντας διαδοχικά, πολλαπλασιάζοντας με y και θέτοντας $y = x(1-x)$.

□

Από το παραπάνω λήμμα έπεται το ακόλουθο λήμμα:

Λήμμα 2.1.2. *Έστω $\delta > 0$ και το σύνολο $\{|k/n - x| \geqslant \delta\} = \{k \leqslant n \mid |k/n - x| \geqslant \delta\}$. Αληθεύει ότι:*

$$\sum_{k\in\{|k/n-x|\geqslant\delta\}} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} \leqslant \frac{1}{4n\delta^2}$$

(το οποίο είναι αναμενόμενο, αφού από τον νόμο των μεγάλων αριθμών η πιθανότητα μακρυά από τη μέση τιμή πρέπει να είναι μικρή).

Απόδειξη: Χρησιμοποιώντας το Λήμμα 2.1.1, iii. έχουμε ότι:

$$\sum_{k\in\{|k/n-x|\geqslant\delta\}} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} \leqslant \frac{1}{\delta^2}\sum_{k\in\{|k/n-x|\geqslant\delta\}} (k/n-x)^2\binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\delta^2}\sum_{k=0}^{n}(k/n-x)^2\binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} = \frac{x(1-x)}{n\delta^2}$$

και επειδή $-(1-2x)^2 \leqslant 0 \Rightarrow x - x^2 \leqslant 1/4$:

$$\sum_{k\in\{|k/n-x|\geqslant\delta\}} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} \leqslant \frac{1}{4n\delta^2}$$

□

Έχοντας κάνει αυτήν την προετοιμασία, μπορούμε να αποδείξουμε το προσεγγιστικό θεώρημα του Weierstrass.

Θεώρημα 2.1.1 (Προσεγγιστικό θεώρημα του Weierstrass)**.** *Για κάθε $f \in C([0,1])$ υπάρχει ακολουθία πολυωνύμων $(p_n)_{n=1}^{\infty}$ ούτως ώστε:*

$$\lim_{n\to\infty}^{\|\cdot\|_{L^\infty}} p_n = f, \ \text{δηλαδή}\ \|f - p_n\|_{L^\infty} \to 0$$

Επομένως, με κατάλληλες «συστολοδιαστολές», κάθε $f \in C([a,b])$, $a, b \in \mathbb{R}$, προσεγγίζεται από πολυώνυμα.

Απόδειξη: Έστω $f \in C([0,1])$ και $\varepsilon > 0$. Επειδή η f είναι συνεχής σε κλειστό διάστημα, είναι ομοιόμορφα συνεχής, και άρα μπορεί να βρεθεί $\delta > 0$ ώστε για κάθε $x, y \in [0,1]$ να έχουμε $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Επειδή όμως:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} x^k(1-x)^k = 1 \Rightarrow f(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} f(x)x^k(1-x)^{n-k},\ x\in[0,1]$$

έχουμε:

$$|f(x) - B_{n,f}(x)| = \left|\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\big(f(x) - f(k/n)\big)x^k(1-x)^{n-k}\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}|f(x) - f(k/n)|x^k(1-x)^{n-k}$$

Σ' αυτό το σημείο θα χρησιμοποιήσουμε το Λήμμα 2.1.2, σε συνδυασμό με τη γενική ανισότητα $|f(x) - f(k/n)| \leqslant 2\|f\|_{L^\infty}$. Έπεται λοιπόν ότι:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}|f(x) - f(k/n)|x^k(1-x)^{n-k} = \sum_{k\in\{|k/n-x|<\delta\}}\binom{n}{k}|f(x) - f(k/n)|x^k(1-x)^k +$$

$$+\sum_{k\in\{|k/n-x|\geqslant\delta\}}\binom{n}{k}|f(x) - f(k/n)|x^k(1-x)^k \leqslant \sum_{k\in\{|k/n-x|<\delta\}}\binom{n}{k}|f(x) - f(k/n)|x^k(1-x)^{n-k} + \frac{\|f\|_{L^\infty}}{2n\delta^2}$$

κι επειδή $|f(x) - f(k/n)| < \varepsilon$ όταν τα $k/n, x$ βρίσκονται $\delta-$κοντά:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} |f(x) - f(k/n)| x^k (1-x)^{n-k} < \varepsilon + \frac{||f||_{L^\infty}}{2n\delta^2}$$

Έτσι λοιπόν, για αρκετά μεγάλο n η παραπάνω ποσότητα γίνεται μικρότερη του 2ε, κι επομένως $|f(x) - B_{n,f}(x)| < 2\varepsilon$ (ανεξαρτήτως του $x \in [0, 1]$). Αυτό δείχνει την ομοιόμορφη σύγκλιση:

$$\lim_{n\to\infty}^{||\cdot||_{L^\infty}} B_{n,f} = f$$

□

2.2 Το προσεγγιστικό θεώρημα του Weierstrass για μιγαδικά τριγωνομετρικά πολυώνυμα

Σε επόμενη παράγραφο θα ασχοληθούμε με συναρτήσεις του L^2, και συγκεκριμένα με συναρτήσεις του $L^2(\mathbb{T})$.

Είδαμε στο πρώτο κεφάλαιο τον L^2 ως χώρο συνεχών συναρτήσεων, $L^2([0, 1]) = C([0, 1])$, και σ' αυτόν ορίσαμε τη νόρμα:

$$||f||_{L^2} = \left(\int_0^1 |f|^2\right)^{1/2}$$

Είπαμε επίσης ότι οι ιδιότητες του L^2 δεν εξαρτώνται και τόσο από το διάστημα στο οποίο γίνεται η ολοκλήρωση, καθώς κανείς μπορεί -με γραμμικό μετασχηματισμό- να μεταβεί από τη μία περίπτωση στην άλλη.

Για παράδειγμα, αν $f \in L^2([a, b]) = C([a, b])$, η συνάρτηση:

$$\widetilde{f}\left(\frac{x-a}{b-a}\right) = f(x)$$

είναι συνάρτηση του $L^2([0, 1])$, με νόρμα:

$$\left(\int_0^1 |\widetilde{f}(x)|^2\, dx\right)^{1/2} \overset{*}{=} \left(\frac{1}{b-a}\int_a^b |f(y)|^2\, dy\right)^{1/2}$$

(όπου στην άστρο $(*)$ γίνεται αλλαγή μεταβλητής $y = (x-a)/(b-a)$) και κατά συνέπεια ο χώρος $L^2([a, b])$ μπορεί να εφοδιαστεί με τη νόρμα:

$$||f||_{L^2([a,b])} = \left(\frac{1}{b-a}\int_a^b |f(y)|^2\, dy\right)^{1/2}$$

Αντίστοιχα, αν $\mathbb{T}$ είναι ο μοναδιαίος μιγαδικός κύκλος, μπορούμε για κάθε $f \in L^2(\mathbb{T})$ να γράψουμε:

$$\widetilde{f}(x) = f(e^{ix}), \;\; x \in [-\pi, \pi]$$

και να πάρουμε φυσιολογικά τη νόρμα:

$$||f||_{L^2(\mathbb{T})} = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |f|^2\right)^{1/2} = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\widetilde{f}|^2\right)^{1/2}$$

Εν τω μεταξύ προσέξτε ότι για να οριστεί το $L^2(\mathbb{T}) = C(\mathbb{T})$, πρέπει να υπάρχει «συνέχεια» στον μιγαδικό κύκλο, δηλαδή οι $\widetilde{f}$ να έχουν συνεχή περιοδική επέκταση. Πρέπει όταν «ξεδιπλωθούν» οι f στις $\widetilde{f}$, οι τιμές $\widetilde{f}(-\pi)$, $\widetilde{f}(\pi)$ να ταυτίζονται.

Όταν λοιπόν, για παράδειγμα, προσεγγίζουμε μία $f \in L^2(\mathbb{T})$ με πολυώνυμα $\sum_{k=0}^{n} c_k z^k$, στην πραγματικότητα προσεγγίζουμε με συναρτήσεις $\sum_{k=0}^{n} c_k e^{ikx}$, $z = e^{ix}$, την αντίστοιχη $\widetilde{f}$ (και αντιστρόφως). Μάλιστα επειδή γενικά είναι ευκολότερο να ασχολούμαστε με συναρτήσεις του $L^2([-\pi, \pi])$ που έχουν συνεχή περιοδική επέκταση παρά με συναρτήσεις του $L^2(\mathbb{T})$, θα λέμε μεν ότι $f \in L^2(\mathbb{T})$, θα εννοούμε δε ότι $f \in L^2([-\pi,\pi])$ και έχει συνεχή περιοδική επέκταση. Αντίστοιχα θα αντιμετωπίζουμε και τα υπόλοιπα σύνολα $L^p(\mathbb{T})$ και $C(\mathbb{T})$.

Επιπλέον, όταν φυσικά δεν υπάρχει πιθανότητα σύγχυσης, θα γράφουμε L^2, L^p, C (αντί $L^2(\mathbb{T})$ λόγου χάρη) χωρίς δείκτες κι άλλες λεπτομέρειες (κυρίως στις νόρμες, για να ελαφρύνουμε τον συμβολισμό).

Μερικές χρήσιμες έννοιες που θα χρησιμοποιήσουμε παρακάτω, ακολουθούν:

Ορισμός 2.2.1 (Τριγωνομετρικά πολυώνυμα και μιγαδικά τριγωνομετρικά πολυώνυμα). *Τριγωνομετρικό πολυώνυμο είναι κάθε συνάρτηση της μορφής:*

$$q(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\right), \;\; a_k, b_k \in \mathbb{R}, \;\; x \in [-\pi,\pi]$$

Επιπλέον, μιγαδικό τριγωνομετρικό πολυώνυμο είναι κάθε συνάρτηση της μορφής:

$$\mu(z) = \sum_{k=-n}^{n} c_k z^k = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx} = \mu(x), \;\; c_k \in \mathbb{C}, \;\; z \in \mathbb{T}, \;\; x \in [-\pi,\pi]$$

(καταχρηστικά συμβολίζουμε με μ και τις δύο συναρτήσεις). Θα λέμε ότι ο βαθμός είναι n, εάν αυτός είναι ο μικρότερος φυσικός για τον οποίον τέτοια αναπαράσταση υπάρχει.

Στον προηγούμενο ορισμό τα μιγαδικά τριγωνομετρικά πολυώνυμα έχουν κι αρνητικούς εκθέτες, πράγμα που κανείς ίσως να μην περίμενε. Θα δούμε ευθύς αμέσως ότι αυτός ο ορισμός είναι λογικός.

Παρατήρηση 2.2.1. *Έστω q_1, q_2 δύο τριγωνομετρικά πολυώνυμα. Η συνάρτηση:*

$$\mu(x) = q_1(x) + i \cdot q_2(x)$$

είναι ένα μιγαδικό τριγωνομετρικό πολυώνυμο.

Απόδειξη: Πράγματι, από τις σχέσεις $\sin(kx) = (e^{ikx} - e^{-ikx})/(2i)$ και $\cos(kx) = (e^{ikx} + e^{-ikx})/2$ βλέπουμε ότι υπάρχουν $c_k \in \mathbb{C}$ ώστε:

$$\mu(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}$$

□

Επίσης θα δούμε κάτι που θα θέλαμε να ισχύει: κάθε τριγωνομετρικό πολυώνυμο είναι πολυώνυμο των cos, sin. Ισχύει και το αντίστροφο, δηλαδή κάθε πολυώνυμο των cos, sin είναι τριγωνομετρικό πολυώνυμο. Για τα δείξουμε αυτά, ξεκινούμε με το ακόλουθο:

Παρατήρηση 2.2.2. *Κάθε τριγωνομετρικό πολυώνυμο q μπορεί να γραφεί στη μορφή $q(x) = p(\cos x, \sin x)$, για κάποιο πολυώνυμο p βαθμού* deg *q*.

Απόδειξη: Αυτό είναι συνέπεια των ταυτοτήτων:

$$\cos(kx) = 2^{k-1}\cos^k x + \sum_{j=0}^{k-1} a_{j,k}\cos^j x$$

και:

$$\frac{\sin(kx)}{\sin x} = 2^k \cos^k x + \sum_{j=0}^{k-1} a_{j,k}\cos^j x \Rightarrow \sin(kx) = \left(2^k \cos^k x + \sum_{j=0}^{k-1} a_{j,k}\cos^j x\right) \cdot \sin x$$

οι οποίες αποδεικνύονται επαγωγικά.

□

Ουσιαστικά λοιπόν δείξαμε ότι ο χώρος των τριγωνομετρικών πολυωνύμων βαθμού n περιέχεται στον χώρο των πολυωνύμων των cos, sin. Ειδικότερα, αν:

$$A_n = \mathrm{span}\{1, \cos x, \cos(2x), \cdots, \cos(nx), \sin x, \sin(2x), \cdots, \sin(nx)\}$$

και:

$$B_n = \mathrm{span}\{1, \cos x, \cos^2 x, \cdots, \cos^n x, \sin x, \sin x \cdot \cos x, \sin x \cdot \cos^2 x, \cdots, \sin x \cdot \cos^{n-1} x\}$$

τότε $A_n \subseteq B_n$. Για να δείξουμε την ισότητα θα κάνουμε ένα τέχνασμα: θα παρατηρήσουμε κατ' αρχάς ότι $\dim B_n \leqslant 2n+1$ (αφού το σύνολο από το οποίο παράγεται έχει τόσα στοιχεία), κι επιπλέον ότι $\dim A_n = 2n+1$ (οπότε αναγκαστικά θα πρέπει τα A_n, B_n να έχουν την ίδια διάσταση). Εφόσον τα A_n, B_n έχουν την ίδια διάσταση και το ένα περιέχεται στο άλλο, δεν μπορούν παρά να ταυτίζονται.

Γι' αυτό αρκεί να δείξουμε ότι το σύνολο $\{1, \cos x, \cos(2x), \cdots, \cos(nx), \sin x, \sin(2x), \cdots, \sin(nx)\}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητο.

Παρατήρηση 2.2.3. *Το σύνολο* $\{1, \cos x, \cos(2x), \cdots, \cos(nx), \sin x, \sin(2x), \cdots, \sin(nx)\}$ *είναι γραμμικώς ανεξάρτητο. Δηλαδή, αν:*

$$q(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\right) = 0, \ \ x \in [-\pi, \pi]$$

τότε $a_0, a_k, b_k = 0$.

Απόδειξη: Η απόδειξη είναι συνέπεια των «σχέσεων ορθογωνιότητας»:

i. Για κάθε $k \neq \lambda$, $k, \lambda \in \{0, \cdots, n\}$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) \cdot \cos(\lambda x) \ dx = 0$$

ii. Για κάθε $k \neq \lambda$, $k, \lambda \in \{1, \cdots, n\}$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx) \cdot \sin(\lambda x) \ dx = 0$$

iii. Για κάθε $k \neq \lambda$, $k \in \{0, \cdots, n\}$, $\lambda \in \{1, \cdots, n\}$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) \cdot \sin(\lambda x) \ dx = 0$$

iv. Για κάθε $k \in \{1, \cdots, n\}$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(kx) \ dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(\lambda x) \ dx = \pi \neq 0$$

οι οποίες με τη σειρά τους αποδεικνύονται από τους γνωστούς τύπους $2\cos\theta \cdot \cos\varphi = \cos(\theta - \varphi) + \cos(\theta + \varphi)$, $2\sin\theta \cdot \cos\varphi = \sin(\theta + \varphi) + \sin(\theta - \varphi)$, $2\sin\theta \cdot \sin\varphi = \cos(\theta - \varphi) - \cos(\theta + \varphi)$, $2\cos^2\theta = \cos(2\theta) + 1$, $2\sin^2\theta = 1 - \cos(2\theta)$.

□

Έτσι λοιπόν, από την προηγούμενη ανάλυσή μας, έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα:

Πρόταση 2.2.1. *Τα σύνολα των τριγωνομετρικών πολυωνύμων και των πολυωνύμων των* cos, sin, *ταυτίζονται.*

Απόδειξη: Κάθε πολυώνυμο των $\cos x, \sin x$, ανήκει στο B_n, διότι κάθε όρος $\sin^k x$ μπορεί, με διαδοχική εφαρμογή της $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, να καταλήξει μονοβάθμιο πολυώνυμο του $\sin x$, και ενδεχομένως πολυβάθμιο του $\cos x$ (με βαθμό το πολύ $k-1$ αν υπάρχει κάποιος εναπομείνων όρος sin, και το πολύ k αν δεν υπάρχει). Οπότε από τη σχέση $A_n = B_n$ έχουμε το ζητούμενο αποτέλεσμα.

□

Με αυτήν την προετοιμασία μπορούμε να προχωρίσουμε στην απόδειξη του προσεγγιστικού θεωρήματος του Weierstrass για τα μιγαδικά τριγωνομετρικά πολυώνυμα. Θα δούμε ότι στην ουσία είναι απόρροια του «απλού» προσεγγιστικού θεωρήματος του Weierstrass.

Θεώρημα 2.2.1 (Προσεγγιστικό θεώρημα του Weierstrass για μιγαδικά τριγωνομετρικά πολυώνυμα). *Για κάθε $f \in C(\mathbb{T})$ υπάρχει ακολουθία μιγαδικών τριγωνομερικών πολυωνύμων $(\mu_n)_{n=1}^{\infty}$ ούτως ώστε:*

$$\lim_{n\to\infty}^{||\cdot||_{L^\infty}} \mu_n = f, \text{ δηλαδή } ||f-\mu_n||_{L^\infty} \to 0$$

Απόδειξη: Η απόδειξη είναι εκτενής και θα γίνει σε βήματα.

Βήμα Ι: Γι' αρχή θα δείξουμε ότι αν η $f : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ είναι άρτια και παίρνει μόνο πραγματικές τιμές, τότε προσεγγίζεται από τριγωνομετρικά πολυώνυμα (όχι μιγαδικά). Ορίζουμε λοιπόν τη συνάρτηση $g : [-1,1] \to \mathbb{R}$, $g(y) = f(\arccos y)$, και παρατηρούμε ότι $g(\cos x) = f(x)$, για $x \in [0,\pi]$. Δηλαδή $g \circ \cos = f|_{[0,\pi]}$.

Η g είναι συνεχής συνάρτηση (ως σύνθεση) κι επομένως από το προσεγγιστικό θεώρημα του Weierstrass υπάρχει ακολουθία πολυωνύμων $p_n(y)$ που την προσεγγίζουν. Κατά συνέπεια:

$$||g(y)-p_n(y)||_{L^\infty} \to 0 \Rightarrow ||g(\cos x)-p_n(\cos x)||_{L^\infty} \to 0$$

κι άρα $||f|_{[0,\pi]}(x) - p_n(\cos x)||_{L^\infty} \to 0$. Εάν τώρα ορίσουμε $q_n(x) = p_n(\cos x)$, $x \in [-\pi,\pi]$, θα παρατηρήσουμε ότι τα q_n είναι τριγωνομετρικά πολυώνυμα (από την Πρόταση 2.2.1), κι επιπλέον από τα προηγούμενα:

$$||f|_{[0,\pi]}(x) - q_n|_{[0,\pi]}(x)||_{L^\infty} \to 0$$

Λόγω του ότι η f και τα q_n (από τον ορισμό τους) είναι άρτιες συναρτήσεις, παίρνουμε τελικά ότι:

$$||f-q_n||_{L^\infty} = ||f|_{[0,\pi]}(x) - q_n|_{[0,\pi]}(x)||_{L^\infty} \to 0$$

Βήμα ΙΙ: Εάν η $f : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ παίρνει μόνο πραγματικές τιμές, θα δείξουμε ότι προσεγγίζεται από τριγωνομετρικά πολυώνυμα. Ας ορίσουμε λοιπόν τις συναρτήσεις f_1, f_2 με $f_1(x) = f(x) + f(-x)$ και $f_2(x) = \big(f(x) - f(-x)\big) \cdot \sin x$. Οι συναρτήσεις αυτές έχουν περιοδική επέκταση, και κατά συνέπεια είναι στον $C(\mathbb{T})$.

Επιπλέον είναι άρτιες, πράγμα που σημαίνει ότι από το Βήμα Ι μπορούν να βρεθούν ακολουθίες τριγωνομετρικών πολυωνύμων $(q_{1,n})_{n=1}^{\infty}$, $(q_{2,n})_{n=1}^{\infty}$ ώστε:

$$||f_1 - q_{1,n}||_{L^\infty},\ ||f_2 - q_{2,n}||_{L^\infty} \to 0$$

Ορίζουμε την ακολουθία $(q_{3,n})_{n=1}^{\infty}$ ως εξής $q_{3,n}(x) = (q_{1,n}(x)\cdot \sin^2 x + q_{2,n}(x)\cdot \sin x)/2$ και παρατηρούμε ότι αποτελείται από τριγωνομετρικά πολυώνυμα. Επιπλέον:

$$|f(x)\cdot\sin^2 x - q_{3,n}(x)| \overset{*}{=} \frac{1}{2}\cdot |f_1(x)\cdot \sin^2 x + f_2(x)\cdot \sin x - q_{1,n}(x)\cdot\sin^2 x - q_{2,n}(x)\cdot \sin x| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ||f\cdot \sin^2 - q_{3,n}||_{L^\infty} \leqslant \frac{1}{2}\cdot\left(||f_1 - q_{1,n}||_{L^\infty} + ||f_2 - q_{2,n}||_{L^\infty}\right) \to 0$$

όπου η άστρο $(*)$ προκύπτει από τον ορισμό των f_1, f_2. Το τελευταίο δείχνει ότι η $f_3(x) = f_2(x)\cdot\sin^2(x)$ προσεγγίζεται από τριγωνομετρικά πολυώνυμα $q_{3,n}$.

Στα παρακάτω θα χρησιμοποιήσουμε τον προηγούμενο συλλογισμό (της προσέγγισης της f_3). Θεωρούμε f^* την περιοδική επέκταση της f και ορίζουμε τη μεταφορά της, $g(x) = f^*|_{[-\pi,\pi]}(x-\pi/2)$. Όπως και στα προηγούμενα, μπορεί να βρεθεί ακολουθία τριγωνομετρικών πολυωνύμων $(q_{4,n})_{n=1}^{\infty}$ που να προσεγγίζει τη συνάρτηση $f_4(x) = g(x)\cdot\sin^2 x$. Τα $q_{4,n}$ τα επεκτείνουμε κι αυτά σε $q_{4,n}^*$, και ορίζουμε $q_{5,n}(x) = q_{4,n}^*|_{[-\pi,\pi]}(x+\pi/2)$ (αναιρούμε τη μεταφορά).

Έτσι όπως ορίσαμε τα $q_{5,n}$, αυτά προσεγγίζουν την $f_5(x) = f(x)\cdot\cos^2(x)$ (η οποία είναι «μεταφορά» της f_4). Έτσι λοιπόν, επειδή $f_3(x) + f_4(x) = f(x)\cdot\sin^2(x) + f(x)\cdot\cos^2 x = f(x)$, αν ορίσουμε τα τριγωνομετρικά πολυώνυμα $q_n = q_{3,n} + q_{5,n}$, θα έχουμε:

$$||f-q_n||_{L^\infty} \leqslant ||f_3 - q_{3,n}||_{L^\infty} + ||f_3 - q_{3,n}||_{L^\infty} \to 0$$

Οπότε η ακολουθία τριγωνομετρικών πολυωνύμων $(q_n)_{n=1}^{\infty}$ προσεγγίζει την f.

Βήμα III: Τώρα θεωρούμε τη γενική περίπτωση μίας $f \in C(\mathbb{T})$. Αν $\Re f$, $\Im f$ είναι τα πραγματικά και φανταστικά μέρη της συνάρτησης f, τότε από το Βήμα II μπορούν να βρεθούν ακολουθίες $(q_{1,n})_{n=1}^{\infty}$, $(q_{2,n})_{n=1}^{\infty}$ που να τα προσεγγίζουν. Επομένως, αν $q_n = q_{1,n} + i \cdot q_{2,n}$:

$$||f - q_n||_{L^\infty}^2 \leqslant ||\Re f - q_{1,n}||_{L^\infty}^2 + ||\Im f - q_{2,n}||_{L^\infty}^2 \to 0$$

Από την Παρατήρηση 2.2.1 προκύπτει τελικά ότι η f προσεγγίζεται από μιγαδικά τριγωνομετρικά πολυώνυμα, με τη νόρμα supremum.

□

2.3 Σειρές Fourier

Με το προσεγγιστικό θεώρημα του Weierstrass δείξαμε ότι κάθε $f \in C(\mathbb{T})$ -δηλαδή κάθε συνεχής συνάρτηση με περιοδική επέκταση- προσεγγίζεται με μιγαδικά τριγωνομετρικά πολυώνυμα, μάλιστα με τη νόρμα supremum. Τα τριγωνομετρικά πολυώνυμα που κάνουν την προσέγγιση όμως ενδέχεται να είναι «περίπλοκα», να μην έχουν δηλαδή κάποια «καλή» μορφή.

Παρακάτω θα ασχοληθούμε με μία ειδική κατηγορία πολυωνύμων που προσεγγίζουν τις $C(\mathbb{T})-$συναρτήσεις, η οποία είναι πιο εύχρηστη αλλά προσεγγίζει με την $||\cdot||_{L^2}-$έννοια (δηλαδή όχι με τόσο καλό τρόπο). Πρώτα θα ορίσουμε τους συντελεστές αυτών των πολυωνύμων.

Ορισμός 2.3.1 (Συντελεστές Fourier)**.** *Έστω $f \in C(\mathbb{T})$ και $k \in \mathbb{Z}$. Ορίζουμε τον $k-$οστό συντελεστή Fourier της f με τον ακόλουθο τρόπο:*

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} \, dx$$

Έχοντας τους συντελεστές, μπορούμε να ορίσουμε μία ολόκληρη σειρά, την:

$$S_f(x) \approx \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k) e^{ikx}$$

η οποία όμως δεν ξέρουμε αν συγκλίνει ούτε αν προσεγγίζει με κάποιον τρόπο την f (γι' αυτό βάζουμε το σύμβολο «≈» κι όχι «=»). Η σειρά αυτή λέγεται σειρά Fourier, και τα πολυώνυμα που θα μας απασχολήσουν είναι τα μερικά αθροίσματά της.

Ορισμός 2.3.2 (Σειρές Fourier και τα μερικά αθροίσματά τους)**.** *Έστω $f \in C(\mathbb{T})$. Η σειρά:*

$$S_f(x) \approx \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k) e^{ikx}$$

ονομάζεται σειρά Fourier της f, και τα μερικά αθροίσματά της:

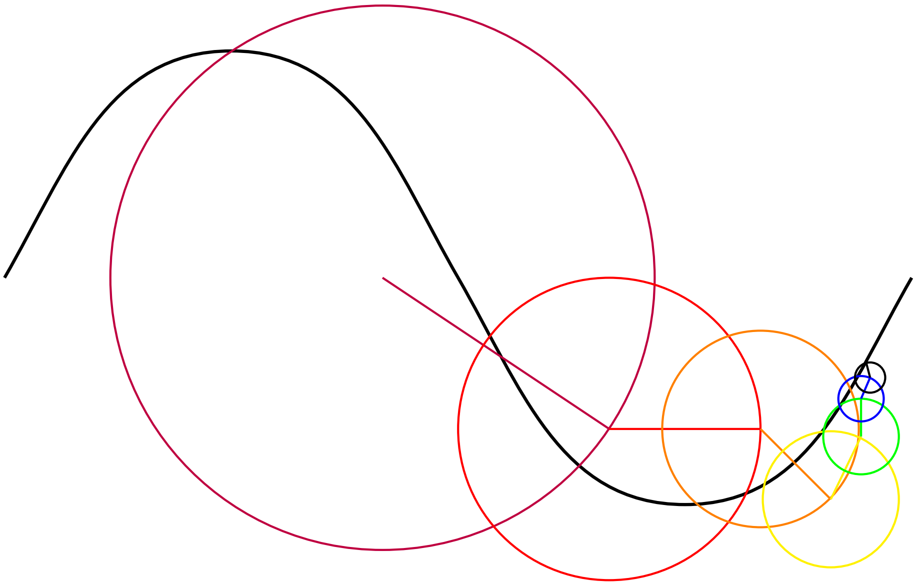
$$S_{n,f}(x) = \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k) e^{ikx}$$

είναι μιγαδικά τριγωνομετρικά πολυώνυμα.

Τα μερικά αθροίσματα της σειράς Fourier έχουν μία καλή γεωμετρική εικόνα, όπως έχουν τα πολυώνυμα Taylor στον απειροστικό λογισμό. Για να το δούμε αυτό, θα περιοριστούμε σε έναν όρο $\widehat{f}(k)e^{ikx}$. Καθώς $x \in [-\pi/k, \pi/k]$, το e^{ikx} διατρέχει έναν κύκλο, και η ποσότητα $\widehat{f}(k)$ είναι εν γένει ένας μιγαδικός αριθμός. Οπότε πολλαπλασιάζοντας τις δύο αυτές ποσότητες μεταξύ τους ο κύκλος αποκτά ακτίνα $|\widehat{f}(k)|$ και στρέφεται κατά $\arg \widehat{f}(k)$ (έχει μία αρχική φάση).

Αν αθροίσουμε τα διάφορα $\widehat{f}(k)e^{ikx}$, παίρνουμε στην ουσία πολλά περιστεφόμενα διαδοχικά διανύσματα, τα οποία καθώς κινούνται, το τελευταίο διαγράφει μία «τροχιά». Υπό «καλές συνθήκες», η τροχιά αυτή θα είναι πολύ κοντά στην f.

Όπως έχουμε σχεδιάσει και στο εξώφυλλο, μία εικόνα είναι η ακόλουθη:



Στη συνέχεια θα δούμε την ακόλουθη πρόταση «μοναδικότητας», που ισχύει για τον $C(\mathbb{T})$ αλλά γενικεύεται (όπως θα δούμε παρακάτω) και σε μεγαλύτερο χώρο.

Πρόταση 2.3.1. *Εάν $f \in C(\mathbb{T})$ με $\widehat{f}(k) = 0$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$, τότε $f \equiv 0$. Αντίστοιχα, αν $f, g \in C(\mathbb{T})$ και $\widehat{f}(k) = \widehat{g}(k)$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$, τότε $f \equiv g$.*

Απόδειξη: Ας θεωρήσουμε $f \in C(\mathbb{T})$ με $\widehat{f}(k) = 0$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$. Από τη σχέση αυτή μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mu(x)\ dx = 0$$

για κάθε τριγωνομετρικό πολυώνυμο $\mu(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}$, εφόσον από τη γραμμικότητα του ολοκληρώματος:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mu(x)\ dx = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-n}^{n}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{ikx}\ dx = \sum_{k=-n}^{n}\widehat{f}(-k) = 0$$

Οπότε αν θεωρήσουμε $(\mu_n)_{n=1}^{\infty}$ την ακολουθία μιγαδικών τριγωνομετρικών πολυωνύμων που εξασφαλίζεται από το Θεώρημα 2.2.1, θα έχουμε:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mu_n(x)\ dx = 0, \text{ για κάθε } n$$

και κατά συνέπεια:

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\ dx = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\ dx - \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)\mu(x)|\ dx = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - \mu(x)| \cdot |f(x)|\ dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\ dx \leqslant \frac{1}{2\pi}\cdot ||f-\mu_n||_{L^\infty}\cdot ||f||_{L^1} \to 0$$

Εφόσον λοιπόν $1/(2\pi)^2 \cdot \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\ dx = 0 \Rightarrow ||f||_{L^2} = 0$, έχουμε $f \equiv 0$.

Εάν στην γενικότερη περίπτωση θεωρήσουμε $f, g \in C(\mathbb{T})$ με $\widehat{f}(k) = \widehat{g}(k)$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$, τότε ισχυριζόμαστε ότι $\widehat{f-g}(k) = \widehat{f}(k) - \widehat{g}(k) = 0$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ (οπότε αναγόμαστε στην προηγούμενη περίπτωση και δείχνουμε ότι $f - g \equiv 0$). Πράγματι, ο ισχυρισμός είναι ζήτημα πράξεων, από τον ορισμό των συντελεστών Fourier.

□

2.4 Σειρές Fourier στον L^2

Στην ουσία έχουμε κάνει τη μεγαλύτερη προετοιμασία όσον αφορά την ύπαρξη βάσης Schauder στον $L^2(\mathbb{T})$. Το μόνο πρόβλημα -το οποίο είναι και αρκετά κύριο- είναι ότι ο χώρος $L^2(\mathbb{T}) = C(\mathbb{T})$ όπως τον ορίσαμε δεν είναι πλήρης. Θυμηθείτε ότι ο Ορισμός 1.5.1 των βάσεων Schauder απαιτεί χώρο Banach.

Κανονικά δεν θα είχαμε πρόβλημα, αν είχαμε ορίσει τον $L^2(\mathbb{T})$ στις Lebesgue ολοκληρώσιμες συναρτήσεις, διότι τότε μ' αυτόν τον ορισμό ο $L^2(\mathbb{T})$ είναι πράγματι πλήρης. Εδώ, για να αποφύγουμε αυτό το πρόβλημα, θα δουλέψουμε με την πλήρωση $\widetilde{L^2(\mathbb{T})}$ του $L^2(\mathbb{T})$, όπως αυτή εξασφαλίζεται από το Θεώρημα 1.1.1 (γιατί άραγε σε αυτήν την περίπτωση η πλήρωση της μετρικής δίνει και πλήρωση της νόρμας;).

Ας θεωρήσουμε λοιπόν την πλήρωση $(\widetilde{L^2(\mathbb{T})}, \widetilde{\|\cdot\|_{L^2}})$. Κατ' αρχάς θα συμβολίζουμε τη νόρμα $\widetilde{\|\cdot\|_{L^2}} = \|\cdot\|_{\widetilde{L^2}}$, για ευκολία.

Κάτι που είναι σημαντικό είναι ότι, πέρα από τη νόρμα, και η συνάρτηση $\widehat{\cdot} : L^2(\mathbb{T}) \to \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ (δηλαδή ο συντελεστής Fourier) επεκτείνεται σε συνεχή συνάρτηση στον $\widetilde{L^2(\mathbb{T})}$. Αυτό θα το δείξουμε παρακάτω. Εν τω μεταξύ όμως παρατηρήστε ότι -ακόμη κι αν δεν τον ορίσαμε- ο χώρος $\ell^\infty(\mathbb{Z})$ (δηλαδή ο χώρος των φραγμένων ακολουθιών και με αρνητικούς δείκτες) εφοδιάζεται με νόρμα αντίστοιχη του $\ell^\infty(\mathbb{N})$. Αυτήν την νόρμα, την νόρμα supremum, θα τη χρησιμοποιήσουμε στα επόμενα.

Παρατήρηση 2.4.1. *Ο συντελεστής Fourier* $\widehat{\cdot} : (L^2(\mathbb{T}), \|\cdot\|_{L^2}) \to (\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}, \|\cdot\|_{\ell^\infty})$ *είναι συνεχής συνάρτηση, οπότε από το Θεώρημα 1.4.1 επεκτείνεται σε συνεχή συνάρτηση* $\widetilde{\widehat{\cdot}} : (\widetilde{L^2(\mathbb{T})}, \|\cdot\|_{\widetilde{L^2}}) \to (\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}, \|\cdot\|_{\ell^\infty})$.

Απόδειξη: Θα δείξουμε ότι η $\widehat{\cdot}$ είναι φραγμένη συνάρτηση, οπότε θα είναι και συνεχής, αφού είναι γραμμική (το ότι είναι γραμμική έπεται από τον ορισμό της).

Παρατηρούμε λοιπόν ότι αν $f \in L^2(\mathbb{T})$, για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ έχουμε:

$$|\widehat{f}(k)| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx}\, dx \right| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|\, dx$$

κι από την ανισότητα Hölder:

$$|\widehat{f}(k)| \leqslant \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f|^2 \right)^{1/2} \cdot (2\pi)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \|f\|_{L^2}$$

Οπότε, αφού η παραπάνω σχέση ισχύει για κάθε k, έπεται:

$$\|\widehat{f}\|_{\ell^\infty} \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \|f\|_{L^2}$$

και η $\widehat{\cdot}$ είναι φραγμένη (μάλιστα με νόρμα $\|\widehat{\cdot}\| \leqslant (2\pi)^{-1/2}$), κατά συνέπεια είναι συνεχής.

Από το Θεώρημα 1.4.1 υπάρχει μοναδική συνεχής επέκταση $\widetilde{\widehat{\cdot}} : (\widetilde{L^2(\mathbb{T})}, \|\cdot\|_{\widetilde{L^2}}) \to (\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}, \|\cdot\|_{\ell^\infty})$.

$\square$

Τέλος, θα εισάγουμε ένα εσωτερικό γινόμενο στον $L^2(\mathbb{T})$, από το οποίο η συνήθης νόρμα επάγεται. Στον $L^2(\mathbb{T})$ η συνάρτηση:

$$\langle f, g \rangle_{L^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f \cdot \overline{g}$$

είναι εσωτερικό γινόμενο, και μάλιστα επάγει τη νόρμα $\|\cdot\|_{L^2}$:

$$\sqrt{\langle f, f \rangle_{L^2}} = \left(\int_{-\pi}^{\pi} f \cdot \overline{f} \right)^{1/2} = \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f|^2 \right)^{1/2} = \|f\|_{L^2}$$

Το εσωτερικό γινόμενο αυτό θα μας είναι πολύ χρήσιμο, κυρίως διότι μέσω αυτού μπορούμε να εκφράσουμε τους συντελεστές Fourier μίας συνάρτησης του $L^2(\mathbb{T})$. Παρατηρήστε ότι:

$$\widehat{f}(\diamond) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-i\diamond x}\, dx = \langle f, e^{i\diamond(\cdot)} \rangle_{L^2}$$

κι επίσης θυμηθείτε την Πρόταση 1.3.2, σε συνδυασμό με την ακόλουθη παρατήρηση:

Παρατήρηση 2.4.2. *Η οικογένεια $(e^{-ik(\cdot)})_{k=-\infty}^{\infty}$ είναι ορθοκανονική οικογένεια στον $(L^2(\mathbb{T}), \langle\cdot,\cdot\rangle_{L^2})$. Δηλαδή για κάθε $k \neq \lambda$:*

$$\langle e^{ik(\cdot)}, e^{i\lambda(\cdot)}\rangle_{L^2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-\lambda)x}\, dx = 0$$

και για κάθε k:

$$\langle e^{ik(\cdot)}, e^{ik(\cdot)}\rangle_{L^2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx = 1$$

Φαίνεται λοιπόν ότι -με κάποια επιχειρηματολογία- ίσως είναι δυνατόν να αποδειχθεί ότι η οικογένεια $(e^{ik(\cdot)})_{k=-\infty}^{\infty}$ είναι ορθοκανονική βάση του $\widetilde{L^2(\mathbb{T})}$.

Βέβαια αυτή η «ορθοκανονικότητα», για να οριστεί σωστά, απαιτεί μία επέκταση του συνήθους εσωτερικού γινομένου, που θα δούμε τώρα (εξάλλου εμείς θα ασχοληθούμε με τον $\widetilde{L^2(\mathbb{T})}$ κι όχι με τον $L^2(\mathbb{T})$). Έχοντας υπόψη την Παρατήρηση 1.3.2, μπορούμε να ορίσουμε την επέκταση $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\widetilde{L^2}} : \widetilde{L^2(\mathbb{T})} \times \widetilde{L^2(\mathbb{T})} \to \mathbb{C}$ του εσωτερικού γινομένου $\widetilde{L^2(\mathbb{T})}$:

$$\langle f, g\rangle_{\widetilde{L^2}} = \frac{1}{2}\left(||f+g||_{\widetilde{L^2}}^2 - ||f-g||_{\widetilde{L^2}}^2 + i\cdot||f+ig||_{\widetilde{L^2}}^2 - i\cdot||f-ig||_{\widetilde{L^2}}^2\right)$$

το οποίο επάγει (με τετριμμένο τρόπο) την επέκταση $||\cdot||_{\widetilde{L^2}}$. Είναι δυνατόν να αποδειχθεί ότι πράγματι είναι εσωτερικό γινόμενο και επεκτείνει το $\langle\cdot,\cdot\rangle_{L^2}$ (σκεφτείτε το εσωτερικό γινόμενο μέσω δύο συναρτήσεων, μία για κάθε μεταβλητή. Έπειτα, χρησιμοποιείστε το Θεώρημα 1.4.1 για να ελέγξετε τις ιδιότητες). Μάλιστα η $(e^{ik(\cdot)})_{k=-\infty}^{\infty}$ εξακολουθεί να είναι ορθοκανονική οικογένεια, και για τον αντίστοιχο συντελεστή Fourier $\widetilde{\widehat{\cdot}}$ αληθεύει:

$$\widetilde{\widehat{f}}(\diamond) = \langle f, e^{i\diamond(\cdot)}\rangle_{\widetilde{L^2}}$$

Αυτό συμβαίνει διότι οι $\widetilde{\widehat{\cdot}}$, $\langle\cdot, e^{i\diamond(\cdot)}\rangle_{\widetilde{L^2}}$ είναι συνεχείς επεκτάσεις της $\widehat{\cdot}$, οπότε από το Θεώρημα 1.4.1 ταυτίζονται (μιας και μοναδική τέτοια επέκταση υπάρχει).

Έχοντας πει όλα αυτά, είναι δυνατόν να αποδείξουμε ένα βοηθητικό αποτέλεσμα για τη μελέτη μας. Αντί να δείξουμε απ' ευθείας ότι κάθε $f \in \widetilde{L^2(\mathbb{T})}$ προσεγγίζεται από τα μερικά αθροίσματα της σειράς Fourier της, θα δείξουμε πρώτα ότι αν κάθε $g \in L^2(\mathbb{T})$ προσεγγίζεται από τα μερικά αθροίσματα της σειράς Fourier της, τότε κάθε $f \in \widetilde{L(\mathbb{T})}$ προσεγγίζεται από τα μερικά αθροίσματα της σειράς Fourier της. Στην ουσία ανάγουμε το γενικό πρόβλημα προσέγγισης, στις συνεχείς συναρτήσεις.

Λήμμα 2.4.1. *Εάν για κάθε $g \in L^2(\mathbb{T})$ αληθεύει ότι:*

$$g = \lim_{n\to\infty}^{||\cdot||_{\widetilde{L^2}}} \sum_{k=-n}^{n} \widehat{g}(k)e^{ik(\cdot)} \Leftrightarrow \left|\left| g - \sum_{k=-\infty}^{\infty}\widehat{g}(k)e^{ik(\cdot)}\right|\right|_{\widetilde{L^2}} = 0 \Leftrightarrow \left|\left| g - \sum_{k=-n}^{n}\widehat{g}(k)e^{ik(\cdot)}\right|\right|_{\widetilde{L^2}} \to 0$$

τότε για κάθε $f \in \widetilde{L^2(\mathbb{T})}$:

$$f = \lim_{n\to\infty}^{||\cdot||_{\widetilde{L^2}}} \sum_{k=-n}^{n} \widetilde{\widehat{f}}(k)e^{ik(\cdot)} \Leftrightarrow \left|\left| f - \sum_{k=-\infty}^{\infty}\widetilde{\widehat{f}}(k)e^{ik(\cdot)}\right|\right|_{\widetilde{L^2}} = 0 \Leftrightarrow \left|\left| f - \sum_{k=-n}^{n}\widetilde{\widehat{f}}(k)e^{ik(\cdot)}\right|\right|_{\widetilde{L^2}} \to 0$$

Απόδειξη: Ας θεωρήσουμε $f \in \widetilde{L^2(\mathbb{T})}$ και μία οικογένεια $(g_m)_{m=1}^{\infty}$ συναρτήσεων του $L^2(\mathbb{T})$, που την προσεγγίζουν. Τέτοια οικογένεια υπάρχει, αφού από το Θεώρημα 1.1.1 γνωρίζουμε ότι ο $L^2(\mathbb{T})$ είναι πλήρης υπόχωρος του $\widetilde{L^2(\mathbb{T})}$. Για την ακρίβεια ξέρουμε ότι:

$$\overline{\mathrm{i}_{L^2}(L^2(\mathbb{T}))} = \widetilde{L^2(\mathbb{T})}$$

αλλά, όπως γίνεται συνήθως, ταυτίζουμε τα $\mathrm{i}_{L^2}(L^2(\mathbb{T}))$ και $L^2(\mathbb{T})$.

Παρατηρούμε ότι το όριο $\sum_{k=-\infty}^{\infty}\widetilde{\widehat{f}}(k)e^{ik(\cdot)}$ υπάρχει: την απόδειξη αυτού του ισχυρισμού μπορείτε να βρείτε στην απόδειξη της Πρότασης 1.3.2 (ii. $\Rightarrow$ iii.). Γράφουμε λοιπόν:

$$\left\|f-\sum_{k=-\infty}^{\infty}\widetilde{\widehat{f}}(k)e^{ik(\cdot)}\right\|_{\widetilde{L^2}}\leqslant\|f-g_m\|_{\widetilde{L^2}}+\left\|g_m-\sum_{k=-\infty}^{\infty}\widehat{g_m}(k)e^{ik(\cdot)}\right\|_{\widetilde{L^2}}+$$
$$+\left\|\sum_{k=-\infty}^{\infty}\widehat{g_m}(k)e^{ik(\cdot)}-\sum_{k=-n}^{n}\widetilde{\widehat{f}}(k)e^{ik(\cdot)}\right\|_{\widetilde{L^2}}+\left\|\sum_{k=-n}^{n}\widetilde{\widehat{f}}(k)e^{ik(\cdot)}-\sum_{k=-\infty}^{\infty}\widetilde{\widehat{f}}(k)e^{ik(\cdot)}\right\|_{\widetilde{L^2}}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\left\|f-\sum_{k=-\infty}^{\infty}\widetilde{\widehat{f}}(k)e^{ik(\cdot)}\right\|_{\widetilde{L^2}}\leqslant\|f-g_m\|_{\widetilde{L^2}}+\left\|\sum_{k=-\infty}^{\infty}\widehat{g_m}(k)e^{ik(\cdot)}-\sum_{k=-n}^{n}\widetilde{\widehat{f}}(k)e^{ik(\cdot)}\right\|_{\widetilde{L^2}}$$
$$+\left\|\sum_{k=-n}^{n}\widetilde{\widehat{f}}(k)e^{ik(\cdot)}-\sum_{k=-\infty}^{\infty}\widetilde{\widehat{f}}(k)e^{ik(\cdot)}\right\|_{\widetilde{L^2}}$$

και αφήνουμε $m\to\infty$, οπότε παίρνουμε:

$$\left\|f-\sum_{k=-\infty}^{\infty}\widetilde{\widehat{f}}(k)e^{ik(\cdot)}\right\|_{\widetilde{L^2}}\leqslant\left\|\sum_{|k|\geqslant n+1}\widetilde{\widehat{f}}(k)e^{ik(\cdot)}\right\|_{\widetilde{L^2}}+\left\|\sum_{k=-n}^{n}\widetilde{\widehat{f}}(k)e^{ik(\cdot)}-\sum_{k=-\infty}^{\infty}\widetilde{\widehat{f}}(k)e^{ik(\cdot)}\right\|_{\widetilde{L^2}}$$

Τέλος, αν αφήσουμε και το $n\to\infty$, παίρνουμε το ζητούμενο.

□

Έτσι λοιπόν πρέπει να δείξουμε ότι υπάρχει καλή προσέγγιση των συνεχών συναρτήσεων. Αυτό στην ουσία θα γίνει χρησιμοποιώντας το ακόλουθο σημαντικό λήμμα:

Λήμμα 2.4.2 (Βέλτιστη προσέγγιση). *Έστω $f\in L^2(\mathbb{T})$. Για κάθε μιγαδικό τριγωνομετρικό πολυώνυμο $\mu=\sum_{k=-n}^{n}c_ke^{ik(\cdot)}$ αληθεύει ότι:*

$$\left\|f-\sum_{k=-n}^{n}\widehat{f}(k)e^{ik(\cdot)}\right\|_{L^2}\leqslant\left\|f-\sum_{k=-n}^{n}c_ke^{ik(\cdot)}\right\|_{L^2}$$

με την ισότητα να ισχύει εάν και μόνο αν $c_k=\widehat{f}(k)$. Έτσι λοιπόν, τα μερικά αθροίσματα της σειράς Fourier «ελαχιστοποιούν» -κατά κάποιον τρόπο- τη νόρμα $\|\cdot\|_{L^2}$.

Απόδειξη: Αν θεωρήσουμε τη διαφορά:

$$f-\sum_{k=-n}^{n}c_ke^{ik(\cdot)}=\left(f-\sum_{k=-n}^{n}\widehat{f}(k)e^{ik(\cdot)}\right)+\sum_{k=-n}^{n}\left(\widehat{f}(k)-c_k\right)e^{ik(\cdot)}$$

μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι οι δύο δεξιοί όροι είναι κάθετοι μεταξύ τους. Αυτό -πολύ συνοπτικά- μπορεί κανείς να το δει με πράξεις, από τα εξής τρία:

- Αληθεύει (όπως εξάλλου είδαμε) η σχέση $\widehat{f}(k)=\langle f,e^{ik(\cdot)}\rangle_{L^2}$.
- Χρησιμοποιώντας το πρώτο σημείο, από την απόδειξη της Πρότασης 1.3.2 (ii. $\Rightarrow$ iii.) (ή με πράξεις):
$$f-\sum_{k=-n}^{n}\widehat{f}(k)e^{ik(\cdot)}\perp\sum_{k=-n}^{n}\widehat{f}(k)e^{ik(\cdot)}$$
- Γενικότερα, χρησιμοποιώντας το πρώτο σημείο, με πράξεις:
$$f-\sum_{k=-n}^{n}\widehat{f}(k)e^{ik(\cdot)}\perp\sum_{k=-n}^{n}c_ke^{ik(\cdot)}$$

  για κάθε c_k.

Χρησιμοποιώντας τώρα το Πυθαγόρειο θεώρημα:

$$\left\|f-\sum_{k=-n}^{n}c_k e^{ik(\cdot)}\right\|_{L^2}=\left\|f-\sum_{k=-n}^{n}\widehat{f}(k)e^{ik(\cdot)}\right\|_{L^2}+\left\|\sum_{k=-n}^{n}(\widehat{f}(k)-c_k)e^{ik(\cdot)}\right\|_{L^2}$$

έπεται το ζητούμενο. Μάλιστα η ισότητα ισχύει εάν και μόνο αν ο δεύτερος όρος δεξιά είναι μηδέν, δηλαδή εάν και μόνο αν $c_k=\widehat{f}(k)$.

□

Αυτό το λήμμα είναι πολύ χαρακτηριστικό για την ανάλυση Fourier. Μάλιστα σε κάποιες παρουσιάσεις -για παράδειγμα στο [Ca]- μέσω αυτού ορίζονται φυσιολογικά οι συντελεστές Fourier.

Πρόταση 2.4.1. *Για κάθε συνεχή συνάρτηση $g\in L^2(\mathbb{T})$ τα μερικά αθροίσματα της σειράς Fourier:*

$$\sum_{k=-n}^{n}\widehat{g}(k)e^{ik(\cdot)}\in\widetilde{L^2(\mathbb{T})}$$

προσεγγίζουν την g, με τη νόρμα $\|\cdot\|_{\widetilde{L^2}}$.

Απόδειξη: Επιλέγουμε οικογένεια μιγαδικών τριγωνομετρικών πολυωνύμων $(\mu_m)_{m=1}^{\infty}$, σύμφωνα με το Θεώρημα 2.2.1, που προσεγγίζει την g. Από το Λήμμα 2.4.2 έπεται το ζητούμενο.

□

Επομένως, χρησιμοποιώντας επίσης το Λήμμα 2.4.1 παίρνουμε το ακόλουθο σημαντικό θεώρημα:

Θεώρημα 2.4.1 (Προσέγγιση στον $\widetilde{L^2(\mathbb{T})}$). *Κάθε $f\in\widetilde{L^2(\mathbb{T})}$ προσεγγίζεται από τα μερικά αθροίσματα της σειράς Fourier της:*

$$\sum_{k=-n}^{n}\widehat{\widetilde{f}}(k)e^{ik(\cdot)}\in\widetilde{L^2(\mathbb{T})}$$

με τη νόρμα $\|\cdot\|_{\widetilde{L^2}}$.

Τέλος, με την ακόλουθη πρόταση θα δείξουμε τη μοναδικότητα της αναγραφής σε σειρά Fourier, και κατά συνέπεια (βάση του Ορισμού 1.5.1) ότι η οικογένεια $(e^{ik(\cdot)})_{k=-\infty}^{\infty}$ αποτελεί βάση Schauder του $\widetilde{L^2(\mathbb{T})}$.

Πρόταση 2.4.2. *Για κάθε $f\in\widetilde{L^2(\mathbb{T})}$ η αναγραφή σε σειρά:*

$$f=\lim_{n\to\infty}^{\|\cdot\|_{\widetilde{L^2}}}\sum_{k=-n}^{n}c_k e^{ik(\cdot)}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k e^{ik(\cdot)}$$

είναι μοναδική.

Απόδειξη: Εάν υποθέσουμε ότι δύο διαφορετικές αναγραφές υπάρχουν, τότε η διαφορά τους είναι ένας μη τετριμμένος τρόπος κανείς να γράψει τη μηδενική συνάρτηση. Δηλαδή, υπάρχουν $c_k,\ c_k^*\in\mathbb{C}$ ώστε για κάθε $\lambda\in\mathbb{Z}$ (παίρνοντας εσωτερικό γινόμενο):

$$0=\left\langle \lim_{n\to\infty}^{\|\cdot\|_{\widetilde{L^2}}}\sum_{k=-n}^{n}(c_k-c_k^*)e^{ik(\cdot)},e^{i\lambda(\cdot)}\right\rangle_{\widetilde{L^2}}\overset{*}{=}\lim_{n\to\infty}^{\|\cdot\|_{\widetilde{L^2}}}\sum_{k=-n}^{n}(c_k-c_k^*)\langle e^{ik(\cdot)},e^{i\lambda(\cdot)}\rangle_{\widetilde{L^2}}\Rightarrow c_\lambda=c_\lambda^*$$

όπου η άστρο $(*)$ αποδεικνύεται από τη συνέχεια και τη γραμμικότητα του $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\widetilde{L^2}}$. Αυτό αποδεικνύει τη μοναδικότητα της γραφής.

$\square$

Θεώρημα 2.4.2 (Βάση Shauder και σειρές Fourier)**.** *Η ορθοκανονική οικογένεια* $\left(e^{ik(\cdot)}\right)_{k=-\infty}^{\infty}$ *αποτελεί βάση Schauder στον* $\widetilde{L^2(\mathbb{T})}$.

Είναι ενδιαφέρον το ότι μ' αυτόν τον τρόπο δεν αποδείξαμε κάτι λιγότερο απ' αυτό που συνήθως αποδεικνύεται στη θεωρία μέτρου. Ο χώρος που εμείς συμβολίσαμε $\widetilde{L^2(\mathbb{T})}$ είναι ο αντίστοιχος $L^2(\mathbb{T})$ στις Lebesgue ολοκληρώσιμες συναρτήσεις (δηλαδή είναι ισομορφικοί). Εμείς όμως δεν θα το αποδείξουμε.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Αποτελέσματα σε χώρους με βάσεις Schauder

3.1 Διαχωρισιμότητα

Ένα από τα πρώτα αποτελέσματα στις βάσεις Schauder (και ίσως τι πιο άμεσο) είναι η διαχωρισιμότητα των χώρων με βάση Schauder.

Πρόταση 3.1.1 (Διαχωρισιμότητα σε χώρους με βάση Schauder)**.** *Εάν ένας χώρος Banach έχει βάση Schauder, είναι διαχωρίσιμος.*

Απόδειξη: Θεωρούμε $(e_k)_{k=1}^{\infty}$ μία βάση Schauder του X κι ορίζουμε το σύνολο:

$$D=\left\{x\in X \;\middle|\; x=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k e_k,\ \text{για κάποια } \lambda_k\in\mathbb{Q},\ n\in\mathbb{N}\right\}$$

Είναι φανερό ότι το παραπάνω σύνολο είναι αριθμήσιμο. Ισχυριζόμαστε ότι είναι και πυκνό.

Θεωρούμε λοιπόν $x\in X$ και $\varepsilon>0$. Επειδή η $(e_k)_{k=1}^{\infty}$ είναι βάση Schauder του χώρου:

$$\overline{\operatorname{span}}\{e_k\}_{k=1}^{\infty}=X\ni x$$

οπότε υπάρχουν $n\in\mathbb{N}$ και πραγματικοί αριθμοί $a_k\in\mathbb{R}$ ούτως ώστε:

$$\left\|x-\sum_{k=1}^{n}a_k e_k\right\|<\varepsilon$$

Έτσι λοιπόν, εάν ορίσουμε $M=\max\{\|e_k\| \mid k\leqslant n\}$, μπορούμε να βρούμε ρητούς λ_k αρκετά κοντά στους a_k, και συγκεκριμένα:

$$|a_k-\lambda_k|<\frac{\varepsilon}{nM}$$

Κατά συνέπεια:

$$\left\|x-\sum_{k=1}^{n}\lambda_k e_k\right\|\leqslant\left\|x-\sum_{k=1}^{n}a_k e_k\right\|+\left\|\sum_{k=1}^{n}a_k e_k-\sum_{k=1}^{n}\lambda_k e_k\right\|<2\varepsilon$$

το οποίο δείχνει ότι το D είναι πυκνό σύνολο. Οπότε ο X είναι διαχωρίσιμος.

□

Το αντίστροφο -το αν δηλαδή κάθε διαχωρίσιμος χώρος Banach έχει βάση Schauder- δεν είναι αληθές. Ο πρώτος που κατάφερε να αποδείξει τον ισχυρισμό ήταν ο Per Enflo, και για τον κόπο του κέρδισε μία χήνα, όπως του είχε υποσχεθεί από τον Stanislaw Mazur σε περίπτωση που κατάφερνε κάτι τέτοιο.

Εμείς δεν θα δείξουμε το αντίστροφο, καθώς η απόδειξη είναι εκτενής και χρησιμοποιεί έννοιες που δεν θα παρουσιάσουμε σ' αυτήν την εργασία. Παρόλα αυτά, παραπέμπεστε στο [En].

Ο Mazur (στα αριστερά) δίνει δώρο στον Enflo (δεξιά) μία χήνα το 1972, την οποία είχε υποσχεθεί από το 1936 σε περίπτωση που βρισκόταν λύση στο πρόβλημα.

3.2 Ο τελεστής T

Δεδομένου ενός χώρου με βάση Schauder, είναι λογικό κανείς να θελήσει να κάνει την «κατά συντεταγμένες» αντιστοιχία:

$$X \ni x = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k e_k \rightsquigarrow (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \cdots) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$$

Επομένως ορίζεται φυσιολογικά ο τελεστής T ο οποίος κάνει αυτήν την αντιστοιχία. Αν θεωρήσουμε:

$$\Sigma = \left\{ (\lambda_k)_{k=1}^{\infty} \;\middle|\; \sup_n \left\| \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k \right\| < \infty \right\}$$

τότε ο τελεστής $T : X \to \Sigma$ ορίζεται από τον τύπο:

$$T(x) = T\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k \right) = (\lambda_k)_{k=1}^{\infty}$$

Παρατηρήστε ότι ο ορισμός αυτός είναι καλός: κάθε $x \in X$ έχει αναπαράσταση ως άθροισμα μέσω της βάσης Schauder, και οι συντελεστές λ_k είναι μοναδικοί.

Επιπλέον, στον χώρο Σ μπορούμε να ορίσουμε μία νόρμα, την:

$$|||(\lambda_k)_{k=1}^{\infty}||| = \sup_n \left\| \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k \right\|$$

η οποία τον καθιστά χώρο με νόρμα.

Βάσει των ορισμών και της πληρότητας του X, το επόμενο αποτέλεσμα είναι λογικό.

Πρόταση 3.2.1. *Ο χώρος $(\Sigma, |||\cdot|||)$ είναι χώρος Banach και ο τελεστής $T : (X, \|\cdot\|) \to (\Sigma, |||\cdot|||)$ ισομορφική εμφύτευση. Δηλαδή ο $T : X \to T(X)$ είναι ισομορφισμός.*

Απόδειξη: Στην ουσία η απόδειξη θα γίνει σε δύο βήματα, ένα για κάθε σκέλος της πρότασης.

Βήμα I: Πρώτα θα δείξουμε ότι ο χώρος Σ είναι χώρος Banach. Έστω λοιπόν $(\lambda^m)_{m=1}^{\infty} = \big((\lambda_k^m)_{k=1}^{\infty}\big)_{m=1}^{\infty}$ μία βασική ακολουθία του Σ. Από τον ορισμό της νόρμας $|||\cdot|||$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε:

$$|\lambda_n^m - \lambda_n^{\xi}| \cdot ||e_n|| \overset{*}{\leqslant} \left\|\sum_{k=1}^{n} (\lambda_k^m - \lambda_k^{\xi})e_k\right\| + \left\|\sum_{k=1}^{n-1} (\lambda_k^m - \lambda_k^{\xi})e_k\right\| \leqslant 2|||\lambda^m - \lambda^{\xi}|||$$

για κάθε $m, \xi \in \mathbb{N}$ (στην ισότητα άστρο $(*)$ γίνεται χρήση της τριγωνικής ανισότητας). Οπότε, αφού η $(\lambda^m)_{m=1}^{\infty}$ είναι βασική ακολουθία, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ η $(\lambda_n^m)_{m=1}^{\infty}$ είναι βασική ακολουθία πραγματικών αριθμών. Κατά συνέπεια το όριο $\lambda_n^{\infty} = \lim_{m\to\infty} \lambda_n^m$ υπάρχει για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Τώρα η $(\lambda^m)_{m=1}^{\infty}$ είναι φραγμένη (αφού είναι βασική) κι οπότε:

$$|||\lambda^m||| = \sup_n \left\|\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^m e_k\right\| \leqslant M$$

για κάποια σταθερά M. Δηλαδή, παίρνοντας όριο ως προς m:

$$\sup_n \left\|\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^{\infty} e_k\right\| \leqslant M$$

κι από τον ορισμό του Σ έχουμε $\lambda = (\lambda_n^{\infty})_{n=1}^{\infty} \in \Sigma$.

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι $\lim_{m\to\infty}^{|||\cdot|||} \lambda^m = \lambda$. Εφόσον η $(\lambda^m)_{m=1}^{\infty}$ είναι βασική, για κάθε $\varepsilon > 0$ και για αρκετά μεγάλους δείκτες $m < \xi$, $|||\lambda^m - \lambda^{\xi}||| < \varepsilon$. Δηλαδή από τη σχέση:

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} (\lambda_k^m - \lambda_k^{\xi})e_k\right\| \leqslant |||\lambda^m - \lambda^{\xi}||| < \varepsilon$$

παίρνουμε με όριο ως προς ξ:

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} (\lambda_k^m - \lambda_k^{\infty})e_k\right\| < \varepsilon$$

Κατά συνέπεια, εφόσον η παραπάνω σχέση ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}$:

$$|||\lambda^m - \lambda||| = \sup_n \left\|\sum_{k=1}^{n} (\lambda_k^m - \lambda_k^{\infty})e_k\right\| = 0$$

το οποίο δείχνει τη ζητούμενη σύγκλιση, κι ότι ο Σ είναι χώρος Banach.

Βήμα II: Τώρα χρειάζεται να δείξουμε ότι ο T είναι ισομορφική εμφύτευση. Κατ' αρχάς ο T είναι $1-1$ αφού η αναγραφή σε βάσεις Schauder είναι μοναδική, ο $T^{-1} : T(X) \to X$ είναι γραμμικός τελεστής, και $1-1$ και επί με τετριμμένο τρόπο. Μάλιστα, από τον ορισμό της $|||\cdot|||$ προκύπτει ότι:

$$||x|| = \lim_{n\to\infty} \left\|\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k\right\| = \lim\ \sup_{n\to\infty} \left\|\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k\right\| \leqslant \sup_{n\to\infty} \left\|\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k\right\| = |||T(x)|||$$

(αφού $\lim\ \sup \leqslant \sup$) δηλαδή ο T^{-1} είναι φραγμένος. Σύμφωνα με την Παρατήρηση 1.4.3, αν δείξουμε ότι ο $T(X)$ είναι χώρος Banach, θα έχουμε δείξει ότι η T^{-1} (άρα και η T) θα είναι ένας ισομορφισμός.

Για να δείξουμε ότι το $T(X)$ είναι πλήρης υπόχωρος του Σ, αρκεί να δείξουμε ότι είναι κλειστό υποσύνολο του Σ (σημειώστε ότι ο Σ είναι χώρος Banach, άρα πλήρης). Αυτό διότι τα «όρια» του $T(X)$ υπάρχουν στο Σ (αφού είναι Banach), κι επειδή το $T(X)$ είναι κλειστό, τα «όρια» αυτά ανήκουν στο $T(X)$.

Έστω λοιπόν $(\lambda^m)_{m=1}^{\infty} = \big((\lambda_k^m)_{k=1}^{\infty}\big)_{m=1}^{\infty}$ μία ακολουθία του $T(X)$ που συγκλίνει σε $\lambda = (\lambda_k)_{k=1}^{\infty} \in \Sigma$ (δηλαδή $|||\lambda^m - \lambda||| \to 0$). Από τον ορισμό της $|||\cdot|||$, για κάθε $\varepsilon > 0$ και $n \in \mathbb{N}$:

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} (\lambda_k^m - \lambda_k)e_k\right\| < \varepsilon$$

Επιπλέον, επειδή η $(\lambda^m)_{m=1}^\infty$ συγκλίνει, είναι βασική. Οπότε για αρκετά μεγάλα $\xi < n$:

$$\left\|\sum_{k=\xi+1}^{n} \lambda_k^m e_k\right\| < \varepsilon$$

Συνδυάζοντας τις δύο προηγούμενες ανισότητες, σε συνδυασμό με την τριγωνική:

$$\left\|\sum_{k=\xi+1}^{n} \lambda_k e_k\right\| \leqslant \left\|\sum_{k=\xi+1}^{n} (\lambda_k - \lambda_k^m) e_k\right\| + \left\|\sum_{k=\xi+1}^{n} \lambda_k^m e_k\right\| \leqslant$$

$$\leqslant \left\|\sum_{k=1}^{n} (\lambda_k - \lambda_k^m) e_k\right\| + \left\|\sum_{k=1}^{\xi} (\lambda_k - \lambda_k^m) e_k\right\| + \left\|\sum_{k=\xi+1}^{n} \lambda_k^m e_k\right\| < 3\varepsilon$$

έπεται ότι η $\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k e_k\right)_{n=1}^\infty$ είναι βασική ακολουθία στον χώρο Banach X. Επομένως:

$$\lim_{n\to\infty}^{||\cdot||} \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k \in X$$

και κατά συνέπεια $\lambda \in T(X)$. Αυτό δείχνει ότι το $T(X) \subseteq \Sigma$ είναι κλειστό, επομένως ο $T(X)$ είναι χώρος Banach.

□

3.3 Χαρακτηρισμοί βάσεων Schauder

Ένα πολύ σημαντικό θεώρημα, στου οποίου την απόδειξη εμφανίζεται ο τελεστής T, είναι ο ακόλουθος χαρακτηρισμός των βάσεων Schauder:

Θεώρημα 3.3.1 (Χαρακτηρισμός βάσεων Schauder)**.** *Έστω $(X, ||\cdot||)$ ένας χώρος Banach και $(e_k)_{k=1}^\infty$ μία ακολουθία του. Η $(e_k)_{k=1}^\infty$ είναι βάση Schauder του X εάν και μόνο αν ισχύουν οι τρεις ακόλουθες συνθήκες:*

i. Για κάθε $k \in \mathbb{N}$, $e_k \neq 0$.

ii. $X = \overline{\text{span}}\{e_k\}_{k=1}^\infty$

iii. Υπάρχει μία σταθερά $M > 0$ ώστε για κάθε $n \leqslant m$ και $\lambda_k \in \mathbb{R}$, $k \leqslant m$:

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k\right\| \leqslant M \left\|\sum_{k=1}^{m} \lambda_k e_k\right\|$$

Απόδειξη: ($\Rightarrow$) Αυτή η κατεύθυνση είναι ίσως η πιο απλή από τις δύο. Τα i., ii. είναι άμεση συνέπεια του ότι η $(e_k)_{k=1}^\infty$ είναι βάση Schauder, οπότε μονάχα το iii. χρειάζεται να αποδειχθεί.

Από την Πρόταση 3.2.1 ο τελεστής T είναι ισομορφική εμφύτευση, άρα και φραγμένος. Κατά συνέπεια, αν θέσουμε $M = ||T||$ και ορίσουμε $x = \sum_{k=1}^m \lambda_k e_k$:

$$\sup_{n\leqslant m} \left\|\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k\right\| = ||T(x)|| \leqslant M \cdot ||x|| = M \left\|\sum_{k=1}^{m} \lambda_k e_k\right\|$$

Δηλαδή για κάθε $n \leqslant m$ και για κάθε $\lambda_k \in \mathbb{R}$, $k \leqslant m$:

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k\right\| \leqslant M \left\|\sum_{k=1}^{m} \lambda_k e_k\right\|$$

($\Leftarrow$) Δεδομένων των i., ii., iii. θα αποδείξουμε ότι για κάθε $x \in X$ υπάρχει μοναδική ακολουθία πραγματικών αριθμών $(\lambda_k)_{k=1}^{\infty}$ ώστε:

$$x = \lim_{n\to\infty}^{||\cdot||} \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k e_k$$

Κατ' αρχάς, όσον αφορά τη μοναδικότητα, αν για κάποια $\lambda_k \in \mathbb{R}$ έχουμε $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k e_k = 0$, τότε από την iii. για $n = 1$:

$$|\lambda_1| \cdot ||e_1|| = ||\lambda_1 e_1|| \leqslant M \left|\left| \sum_{k=1}^{m} \lambda_k e_k \right|\right|$$

για κάθε $m > 1$. Παίρνοντας όριο καθώς $m \to \infty$ έχουμε:

$$|\lambda_1| \cdot ||e_1|| \leqslant M \left|\left| \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k e_k \right|\right| = 0$$

και κατά συνέπεια ότι $\lambda_1 = 0$, εφόσον από το i. το e_1 δεν είναι μηδενικό.

Γνωρίζοντας ότι $\lambda_1 = 0$, χρησιμοποιώντας τον προηγούμενο συλλογισμό για $n = 2$, μπορούμε να γράψουμε την ανισότητα:

$$|\lambda_2| \cdot ||e_2|| = ||\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2|| \leqslant M \left|\left| \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k e_k \right|\right| = 0$$

από την οποία έπεται ότι $\lambda_2 = 0$. Επαγωγικά λοιπόν $\lambda_k = 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$, το οποίο αποδεικνύει τη μοναδικότητα.

Όσον αφορά την αναγραφή σε άπειρο άθροισμα, ορίζουμε το σύνολο:

$$K = \left\{ x \in X \;\middle|\; x = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k e_k, \text{ για } \lambda_k \in \mathbb{R} \right\}$$

το οποίο είναι υπερσύνολο του $\operatorname{span}\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$. Λόγω αυτού του εγκλεισμού:

$$X = \overline{\operatorname{span}}\{e_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \overline{K}$$

κι επομένως αν αποδειχθεί ότι το K είναι κλειστό, θα έχει δειχθεί ότι $K = \overline{K} = X$.

Έστω λοιπόν $(x_m)_{m=1}^{\infty}$ μία ακολουθία του K που συγκλίνει σε $x \in X$. Αν γράψουμε $x_m = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^m e_k$ για τα διάφορα m, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θα έχουμε από την iii. και την τριγωνική ανισότητα:

$$|\lambda_n^m - \lambda_n^{\xi}| \cdot ||e_n|| = \left|\left| \sum_{k=1}^{n} (\lambda_k^m - \lambda_k^{\xi}) e_k - \sum_{k=1}^{n-1} (\lambda_k^m - \lambda_k^{\xi}) e_k \right|\right| \leqslant 2M \left|\left| \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^m - \lambda_k^{\xi}) e_k \right|\right|$$

δηλαδή $|\lambda_n^m - \lambda_n^{\xi}| \cdot ||e_n|| \leqslant 2M \cdot ||x_m - x_{\xi}||$ για κάθε m, ξ. Αυτό δείχνει ότι η ακολουθία $(\lambda_n^m)_{m=1}^{\infty}$ είναι βασική ακολουθία πραγματικών αριθμών, οπότε έχει όριο $\lambda_n^{\infty} = \lim_{m\to\infty} \lambda_n^m$.

Ορίζουμε τώρα $y_n = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^{\infty} e_k$ και θα δείξουμε ότι $||y_n - x|| \to 0$. Πρώτα όμως θα δούμε ένα βοηθητικό αποτέλεσμα. Κατ' αρχάς είναι φανερό ότι $\lim_{m\to\infty}^{||\cdot||} \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^m e_k = y_n$. Από το iii. έχουμε:

$$\left|\left| \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^m e_k - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^{\xi} e^k \right|\right| \leqslant M \cdot ||x_m - x_{\xi}||$$

οπότε με όριο ως προς ξ:

$$\left|\left| \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^m e_k - y_n \right|\right| \leqslant M \cdot ||x_m - x||$$

Έστω λοιπόν $\varepsilon > 0$. Βρίσκουμε αρκετά μεγάλο m ώστε $||x_m - x|| < \varepsilon/(M+2)$ κι αρκετά μεγάλο n ώστε:

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^m e_k - x_m\right\| < \frac{\varepsilon}{M+2}$$

Κατά συνέπεια, για αρκετά μεγάλα n, m:

$$||y_n - x|| \leqslant \left\|y_n - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^m e_k\right\| + \left\|\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^m e_k - x_m\right\| + ||x_m - x|| \leqslant$$

$$\leqslant M \cdot ||x_m - x|| + \left\|\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^m e_k - x_m\right\| + ||x_m - x|| < \varepsilon$$

κι άρα $||y_n - x|| \to 0 \Leftrightarrow x = \lim_{n\to\infty}^{||\cdot||} y_n \Leftrightarrow x = \lim_{n\to\infty}^{||\cdot||} \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^\infty e_k$. Δηλαδή, αφού το x γράφεται ως άπειρο άθροισμα, $x \in K$ και το K είναι κλειστό.

□

Συνέπεια του προηγούμενου θεωρήματος είναι η ακόλουθη πρόταση:

Πρόταση 3.3.1. *Έστω $(X, ||\cdot||)$ ένας χώρος Banach και $(e_k)_{k=1}^\infty$ μία ακολουθία του. Η ακολουθία $(e_k)_{k=1}^\infty$ είναι Schauder βασική ακολουθία στον X εάν και μόνο αν:*

i. Για κάθε $k \in \mathbb{N}$, $e_k \neq 0$.

ii. Υπάρχει σταθερά $M > 0$ ώστε για κάθε $n \leqslant m$ και $\lambda_k \in \mathbb{R}$, $k \leqslant m$:

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k\right\| \leqslant M \left\|\sum_{k=1}^{m} \lambda_k e_k\right\|$$

3.4 Σταθερές βάσεων Schauder και ισοδυναμία

Ορισμός 3.4.1 (Μερικές αναπαραστάσεις και διορθογώνια συναρτησοειδή)**.** *Έστω $(X, ||\cdot||)$ ένας χώρος Banach με βάση Schauder $(e_k)_{k=1}^\infty$. Ορίζουμε:*

i. Τις μερικές αναπαραστάσεις (ή αλλιώς κανονικές προβολές) $P_n : X \to X$:

$$P_n(x) = P_n\left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k e_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k$$

ii. Τα διορθογώνια συναρτησοειδή $e_m^* : X \to \mathbb{R}$:

$$e_m^*(x) = e_m^*\left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k e_k\right) = \lambda_m$$

Δεδομένου του προηγούμενου ορισμού, είναι χρήσιμο να δούμε την ακόλουθη παρατήρηση:

Παρατήρηση 3.4.1. *Έστω $(X, ||\cdot||)$ ένας χώρος Banach με βάση Schauder $(e_k)_{k=1}^\infty$.*

i. Οι συναρτήσεις P_n είναι γραμμικοί τελεστές και μάλιστα $M = \sup_{n\to\infty} ||P_n|| < \infty$.

ii. Τα e_m^* είναι συναρτησοειδή του X^* και $||e_m^*|| \leqslant 2M/||e_m||$.

Απόδειξη: Για το i.: Το ότι οι P_n είναι γραμμικοί τελεστές είναι φανερό. Όσον αφορά το φράγμα, για κάθε $x = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k e_k$ μπορούμε να γράψουμε:

$$||P_n(x)|| = \left|\left| P_n \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k e_k \right) \right|\right| = \left|\left| \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k \right|\right|$$

κι από το Θεώρημα 3.3.1, iii.:

$$||P_n(x)|| \leqslant ||T|| \cdot \left|\left| \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k e_k \right|\right| = ||T|| \cdot ||x||$$

(θυμηθείτε ότι η σταθερά M του αναφερόμενου θεωρήματος είναι η $||T||$ της γραμμικής ισομορφικής εμφύτευσης $T : X \to \Sigma$). Κατά συνέπεια $||P_n|| \leqslant ||T||$ και $M = \sup_{n\to\infty} ||P_n|| \leqslant ||T|| < \infty$.

Για το ii.: Και πάλι είναι φανερό ότι οι e_m^* είναι γραμμικές. Όσον αφορά το φράγμα, γράφουμε πάλι $x = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k e_k$ και έχουμε:

$$|e_m^*(x)| = \left| e_m^* \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k e_k \right) \right| = |\lambda_k| = \frac{1}{||e_m||} \left|\left| P_m \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k e_k \right) - P_{m-1} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k e_k \right) \right|\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{||e_m||} \left(\left|\left| P_m \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k e_k \right) \right|\right| + \left|\left| P_{m-1} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k e_k \right) \right|\right| \right) \leqslant \frac{2M}{||e_m||} \cdot \left|\left| \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k e_k \right|\right| = \frac{2M}{||e_m||} \cdot ||x||$$

Επομένως $||e_m^*|| \leqslant 2M/||e_m||$.

□

Η παραπάνω παρατήρηση μας επιτρέπει να ορίσουμε τις σταθερές των βάσεων Schauder.

Ορισμός 3.4.2 (Σταθερές βάσεων Schauder). *Έστω $(X, ||\cdot||)$ ένας χώρος Banach με βάση Schauder $(e_k)_{k=1}^{\infty}$. Η σταθερά $M = \sup_{n\to\infty} ||P_n|| < \infty$ (όπως εξασφαλίζεται από την Παρατήρηση 3.4.1) ονομάζεται σταθερά της βάσης Schauder $(e_k)_{k=1}^{\infty}$. Τη συμβολίζουμε με* $\mathrm{BC}_{(e_k)_{k=1}^{\infty}}$.

Επιπλέον θα αναφέρουμε την ισοδυναμία των βάσεων Schauder. Είναι σημαντικό κανείς να παρατηρήσει ότι η αναγραφή χρησιμοποιώντας τις βάσεις Schauder είναι στην ουσία όριο μίας ακολουθίας (της ακολουθιας των μερικών αναπαραστάσεων). Επομένως έχει νόημα να ορίσουμε μία «ισοδυναμία», λέγοντας ότι δύο βάσεις Schauder είναι ισοδύναμες εάν και μόνο αν ισχύει το εξής: οι αναγραφές ως προς τη μία βάση είναι σειρές που συγκλίνουν εάν και μόνο αν οι αντίστοιχες αναγραφές στην άλλη βάση συγκλίνουν. Για να γίνουμε περισσότερο ακριβείς, δίνουμε τον ορισμό.

Ορισμός 3.4.3 (Ισοδύναμες βάσεις Schauder). *Έστω $(X, ||\cdot||)$, $(Y, |||\cdot|||)$ δύο χώροι Banach και $(e_k)_{k=1}^{\infty}$, $(v_k)_{k=1}^{\infty}$ δύο βάσεις Schauder των X και Y αντίστοιχα. Θα λέμε ότι οι $(e_k)_{k=1}^{\infty}$, $(v_k)_{k=1}^{\infty}$ είναι ισοδύναμες εάν και μόνο αν:*

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k \text{ συγκλίνει} \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} \lambda_k v_k \text{ συγκλίνει}$$

Πιο εύχρηστες μορφές της ισοδυναμίας των βάσεων Schauder θα δώσουμε με την ακόλουθη πρόταση, η οποία αποτελείται από χαρακτηρισμούς των βάσεων Schauder.

Πρόταση 3.4.1 (Χαρακτηρισμός της ισοδυναμίας των βάσεων Schauder)**.** *Έστω* $(X, ||\cdot||)$, $(Y, |||\cdot|||)$ *δύο χώροι Banach και* $(e_k)_{k=1}^{\infty}$, $(v_k)_{k=1}^{\infty}$ *δύο βάσεις Schauder των* X *και* Y *αντίστοιχα. Τα ακόλουθα ισοδυναμούν:*

i. Οι $(e_k)_{k=1}^{\infty}$, $(v_k)_{k=1}^{\infty}$ *είναι ισοδύναμες.*

ii. Υπάρχει ισομορφισμός $H : X \to Y$ *με* $H(e_k) = (v_k)$ *για κάθε* $k \in \mathbb{N}$.

iii. Υπάρχουν $M, \Lambda > 0$ *τέτοια ώστε για κάθε* $(\lambda_k)_{k=1}^{\infty}$*:*

$$\frac{1}{M}\left\|\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k\right\| \leqslant \left|\left|\left|\sum_{k=1}^{n} \lambda_k v_k\right|\right|\right| \leqslant \Lambda \left\|\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k\right\|$$

Απόδειξη: (i. $\Rightarrow$ ii.) Ορίζουμε τον τελεστή $H : X \to Y$:

$$H(x) = H\left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k e_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k v_k$$

και παρατηρούμε ότι είναι γραμμικός, $1-1$ και επί. Επιπλέον είναι φανερό ότι $H(e_k) = v_k$. Αν δείξουμε ότι είναι και φραγμένη, τότε από την Παρατήρηση 1.4.3 θα έχουμε δείξει ότι είναι ισομορφισμός.

Για να δείξουμε ότι η H είναι φραγμένη, θα δείξουμε ότι το γράφημά της Gr H είναι κλειστό (οπότε το αποτέλεσμα θα είναι συνέπεια του θεωρήματος του κλειστού γραφήματος). Έστω λοιπόν $(x_n, H(x_n))_{n=1}^{\infty}$ μία ακολουθία του $X \times Y$ με $x_n \to x \in X$, $H(x_n) \to y \in Y$.

Επειδή $x_n \in X$, υπάρχει αναγραφή $x_n = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^n e_k$, κι αντίστοιχα μπορούμε να γράψουμε $x = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k e_k$. Επίσης γράφουμε -εφόσον $y \in Y$- $y = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k v_k$. Από τη συνέχεια των διορθογώνιων συναρτησοειδών, για κάθε m έχουμε:

$$e_m^*(x_n) \to e_m^*(x) \Rightarrow e_m^*\left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^n e_k\right) \to e_m^*\left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k e_k\right) \Rightarrow \lambda_m^n \to \lambda_m$$

κι επίσης:

$$v_m^*(H(x_n)) \to v_m^*(y) \Rightarrow v_m^*\left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^n v_k\right) \to v_m^*\left(\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k v_k\right) \Rightarrow \lambda_m^n \to \mu_m$$

οπότε $\lambda_m = \mu_m$ για κάθε m. Έτσι δείξαμε ότι:

$$H(x_n) = H\left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^n e_k\right) \to \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k v_k = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k v_k = H\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k\right) = H(x)$$

και κατά συνέπεια το γράφημα Gr H είναι κλειστό.

(ii. $\Rightarrow$ iii.) Θεωρούμε $(\lambda_k)_{k=1}^{\infty}$ μία ακολουθία πραγματικών αριθμών και γράφουμε:

$$\left|\left|\left|\sum_{k=1}^{n} \lambda_k v_k\right|\right|\right| = \left|\left|\left|\sum_{k=1}^{n} \lambda_k H(e_k)\right|\right|\right| = \left|\left|\left|H\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k\right)\right|\right|\right|$$

κι επειδή ο H είναι φραγμένος:

$$\left|\left|\left|\sum_{k=1}^{n} \lambda_k v_k\right|\right|\right| \leqslant ||H|| \cdot \left\|\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k\right\|$$

Κάνοντας το ίδιο χρησιμοποιώντας τον αντίστροφο τελεστή H^{-1}, αποδεικνύουμε ότι:

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k\right\| \leqslant ||H^{-1}|| \cdot \left|\left|\left|\sum_{k=1}^{n} \lambda_k v_k\right|\right|\right| \Rightarrow \frac{1}{||H^{-1}||}\left\|\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k\right\| \leqslant \left|\left|\left|\sum_{k=1}^{n} \lambda_k v_k\right|\right|\right|$$

Το ζητούμενο αποδεικνύεται με $M = ||H^{-1}||$ και $\Lambda = ||H||$.

(iii. $\Rightarrow$ i.) Αν $n < m$ και $(\lambda_k)_{k=1}^{\infty}$ είναι μία ακολουθία πραγματικών αριθμών, από το Θεώρημα 3.3.1, iii.:

$$\left|\left|\left|\sum_{k=1}^{n} \lambda_k v_k\right|\right|\right| \leqslant \Lambda \left|\left|\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k\right|\right| \leqslant \Lambda \cdot ||T|| \cdot \left|\left|\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k\right|\right| \leqslant M \cdot \Lambda \cdot ||T|| \left|\left|\left|\sum_{k=1}^{m} \lambda_k v_k\right|\right|\right|$$

Δείξαμε, σε συνδυασμό με την υπόθεση iii., ότι:

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k \text{ συγκλίνει } \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} \lambda_k v_k \text{ συγκλίνει}$$

οπότε οι βάσεις $(e_k)_{k=1}^{\infty}$, $(v_k)_{k=1}^{\infty}$ είναι ισοδύναμες.

□

3.5 Ύπαρξη κλειστών, γραμμικών υποχώρων με βάση Schauder

Γενικά οι χώροι με νόρμα πεπερασμένης διάστασης έχουν πολύ καλές ιδιότητες όσον αφορά τις βάσεις Schauder. Κατ' αρχάς, αν $(e_k)_{k=1}^{n}$ είναι μία (πεπερασμένη) βάση, κάθε στοιχείο x γράφεται στη μορφή $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k$. Παρακάτω θα δείξουμε ότι κάθε χώρος με νόρμα πεπερασμένης διάστασης είναι χώρος Banach, οπότε κατ' επέκταση κάθε χώρος πεπερασμένης διάστασης έχει βάση Schauder.

Λήμμα 3.5.1. *Έστω $(e_k)_{k=1}^{n}$ μία ακολουθία γραμμικά ανεξάρτητων στοιχείων σε έναν χώρο με νόρμα $(X, ||\cdot||)$. Υπάρχει σταθερά M (που εξαρτάται μόνο από τα γραμμικώς ανεξάρτητα στοιχεία) έτσι ώστε για κάθε $(\lambda_k)_{k=1}^{n}$:*

$$M \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k| \leqslant \left|\left|\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k\right|\right|$$

Απόδειξη: Έστω $(\lambda_k)_{k=1}^{n}$ μία οικογένεια πραγματικών αριθμών. Θα υποθέσουμε ότι δεν είναι όλοι τους μηδέν, εξάλλου διαφορετικά η κατάσταση είναι τετριμμένη.

Θα δείξουμε ότι:

$$\left|\left|\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \Big/ \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k| \cdot e_k\right|\right| \geqslant M$$

οπότε τότε:

$$\frac{1}{\sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|} \left|\left|\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k\right|\right| \geqslant M \Rightarrow M \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k| \leqslant \left|\left|\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k\right|\right|$$

Μάλιστα για να μην βαραίνουμε τον συμβολισμό, αρκεί να δείξουμε ότι αν $\sum_{k=1}^{n} |\mu_k| = 1$, τότε:

$$M \leqslant \left|\left|\sum_{k=1}^{n} \mu_k e_k\right|\right|$$

Αν η παραπάνω σχέση δεν είναι αληθής, για κάθε $m \in \mathbb{N}$ μπορούν να βρεθούν $(\mu_k^m)_{k=1}^{n}$ με $\sum_{k=1}^{n} |\mu_k^m| = 1$ και:

$$\left|\left|\sum_{k=1}^{n} \mu_k^m e_k\right|\right| < 1/m$$

δηλαδή, καθώς $m \to \infty$, $\sum_{k=1}^{n} \mu_k^m e_k \to 0$. Τώρα καθεμία από τις ακολουθίες $(\mu_k^m)_{m=1}^{\infty}$ του $\mathbb{R}$ είναι φραγμένη από το 1 (αφού $\sum_{k=1}^{n} |\mu_k^m| = 1$) και κατά συνέπεια για την πρώτη απ' αυτές ($k = 1$) υπάρχει υπακολουθία που συγκλίνει σε κάποιο μ_1^{∞}. Αντίστοιχα, θεωρώντας δείκτες της πρώτης υπακολουθίας, μπορεί να βρεθεί δεύτερη υπακολουθία -αυτήν την φορά της μ_2^m- που συγκλίνει σε μ_2^{∞}. Εν τω μεταξύ, χρησιμοποιώντας τους δείκτες της δεύτερης υπακολουθίας, η αντίστοιχη υπακολουθία της πρώτης συνεχίζει να συγκλίνει στο μ_1^∞, αφού είναι υπακολουθία συγκλίνουσας (υπ)ακολουθίας. Συνεχίζοντας επαγωγικά, μπορεί να βρεθεί υπακολουθία δεικτών $(m_\xi)_{\xi=1}^\infty$ ώστε για κάθε $k \in \mathbb{N}$:

$$\lim_{\xi\to\infty} \mu_k^{m_\xi} = \mu_k^\infty$$

Αφού $\left|\left|\sum_{k=1}^n \mu_k^m e_k\right|\right| < 1/m$, έχουμε λοιπόν ότι:

$$0 = \lim_{\xi\to\infty}\left|\left|\sum_{k=1}^{n} \mu_k^{m_\xi} e_k\right|\right| = \left|\left|\sum_{k=1}^{n} \mu_k^\infty e_k\right|\right|$$

δηλαδή $\sum_{k=1}^n \mu_k^\infty e_k = 0 \Rightarrow \mu_k^\infty = 0,\ k \in \mathbb{N}$. Αυτό είναι άτοπο, μιας και:

$$1 = \lim_{\xi\to\infty}\sum_{k=1}^{n} |\mu_k^{m_\xi}| = \sum_{k=1}^{n} \left|\lim_{\xi\to\infty} \mu_k^{m_\xi}\right| = \sum_{k=1}^{n} \mu_k^\infty = 0$$

□

Θεώρημα 3.5.1 (Πληρότητα σε πεπερασμένες διαστάσεις). *Έστω $(X, ||\cdot||)$ ένας χώρος με νόρμα, ο οποίος είναι πεπερασμένης διάστασης. Ο $(X, ||\cdot||)$ είναι χώρος Banach.*

Απόδειξη: Έστω $n = \dim X$ και $(x^m)_{m=1}^\infty$ μία βασική ακολουθία στον X. Αν γράψουμε $x^m = \sum_{k=1}^n \lambda_k^m e_k$, για κάθε $\varepsilon > 0$ και για αρκετά μεγάλα m, ξ:

$$||x^m - x^\xi|| = \left|\left|\sum_{k=1}^{n}(\lambda_k^m - \lambda_k^\xi)e_k\right|\right| < \varepsilon$$

Επομένως, χρησιμοποιώντας το Λήμμα 3.5.1:

$$M\sum_{k=1}^{n}|\lambda_k^m - \lambda_k^\xi| \leqslant \left|\left|\sum_{k=1}^{n}(\lambda_k^m - \lambda_k^\xi)e_k\right|\right| < \varepsilon$$

για κάποια σταθερά M. Αυτό δείχνει ότι, για τα διάφορα k, οι ακολουθίες $(\lambda_k^m)_{m=1}^\infty$ είναι βασικές, και κατά συνέπεια υπάρχουν τα όρια:

$$\lim_{m\to\infty} \lambda_k^m = \lambda_k^\infty$$

Έτσι λοιπόν:

$$\left|\left|\sum_{k=1}^{n}(\lambda_k^m - \lambda_k^\infty)e_k\right|\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n}|\lambda_k^m - \lambda_k^\infty|\cdot||e_k|| \Rightarrow \lim_{m\to\infty}\left|\left|\sum_{k=1}^{n}(\lambda_k^m - \lambda_k^\infty)e_k\right|\right| = 0 \Rightarrow \lim_{m\to\infty}^{||\cdot||} x^m = x$$

αν θέσουμε $x = \sum_{k=1}^n \lambda_k^\infty e_k \in X$.

□

Στους χώρους πεπερασμένης διάστασης με νόρμα ισχύει ένα γνωστό αποτέλεσμα: τα κλειστά και φραγμένα σύνολα ταυτίζονται με τα συμπαγή.

Παρατήρηση 3.5.1. *Έστω $(X, ||\cdot||)$ ένας χώρος πεπερασμένης διάστασης με νόρμα. Τα συμπαγή σύνολα είναι ακριβώς αυτά που είναι ταυτοχρόνως κλειστά και φραγμένα.*

Απόδειξη: ($\Rightarrow$) Έστω Y ένα συμπαγές σύνολο. Από την Παρατήρηση 1.1.10, μία συγκλίνουσα ακολουθία (που είναι ακολουθία) έχει συγκλίνουσα υπακολουθία στο Y. Δηλαδή η υπακολουθία συγκλίνει σε στοιχείο του Y, άρα και η ακολουθία. Απ' αυτό έπεται ότι ο Y είναι κλειστός.

Αν δεν ήταν φραγμένος, θα υπήρχε ακολουθία $(y_m)_{m=1}^\infty$ του Y με $||y_m|| > m$. Αυτή όμως η ακολουθία δεν είναι έχει συγκλίνουσα υπακολουθία, οπότε από την Παρατήρηση 1.1.10 έχουμε άτοπο.

($\Leftarrow$) Έστω $(e_k)_{k=1}^n$ μία βάση του κλειστού και φραγμένου Y, και $(y^m)_{m=1}^\infty$ μία ακολουθία του Y με $x^m = \sum_{k=1}^n \lambda_k^m e_k$. Πολύ συνοπτικά, αφού ο Y είναι φραγμένος, υπάρχει C ώστε:

$$M \sum_{k=1}^n |\lambda_k^n| \overset{*}{\leqslant} \left|\left| \sum_{k=1}^n \lambda_k^m e_k \right|\right| \leqslant C$$

(όπου η ανισότητα άστρο ($*$) δικαιολογείται από το Λήμμα 3.5.1). Δηλαδή για τα διάφορα k οι $(\lambda_k^m)_{m=1}^\infty$ είναι φραγμένες.

Όπως και στην απόδειξη του Θεωρήματος 3.5.1 μπορεί να βρεθεί υπακολουθία δεικτών $(m_\xi)_{\xi=1}^\infty$ ούτως ώστε $\lim_{\xi\to\infty} \lambda_k^{m_\xi} = \lambda_k^\infty \in \mathbb{R}$. Αν θέσουμε $y = \sum_{k=1}^n \lambda_k^\infty e_k$, είναι θέμα πράξεων να δείξουμε ότι $y^{m_\xi} \to y$. Επειδή τα y^{m_ξ} ανήκουν στον Y και ο Y είναι κλειστός, έπεται $y \in Y$.

Δηλαδή κάθε ακολουθία έχει συγκλίνουσα υπακολουθία, και το αποτέλεσμα έπεται από την Παρατήρηση 1.1.10.

$\square$

Η μπάλα $B_X(0,1)$ είναι κλειστή και φραγμένη, οπότε σε χώρους πεπερασμένης διάστασης είναι συμπαγής. Είναι ενδιαφέρον πως σε χώρους άπειρης διάστασης η $B_X(0,1)$ δεν είναι ποτέ συμπαγής, οπότε (κατά μία έννοια) η συμπάγεια της $B_X(0,1)$ είναι χαρακτηρισμός για τη διάσταση. Εμείς δεν θα δούμε αυτό το αποτέλεσμα, μπορεί όμως να βρεθεί στο [Γι3] (Παράγραφος 4.2).

Ένα σημαντικό αποτέλεσμα, το οποίο έρχεται ως επέκταση των προηγούμενων, είναι ότι σε κάθε απειροδιάστατο χώρο Banach υπάρχει κλειστός υπόχωρος με βάση Schauder, οσοδήποτε μικρής σταθεράς βάσης $1 \leqslant \mathrm{BC}_{(e_k)_{k=1}^\infty} \leqslant 1+\varepsilon$. Παρατηρήστε ότι η σταθερά μίας βάσης είναι πάντοτε μεγαλύτερη η ίση του 1, αφού αν $x = \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k$, τότε:

$$||P_n(x)|| = \left|\left| \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k \right|\right| = 1 \cdot ||x||$$

και κατά συνέπεια $||P_n|| \geqslant 1 \Rightarrow \mathrm{BC}_{(e_k)_{k=1}^\infty} = \sup_{n\to\infty} ||P_n|| \geqslant 1$.

Πριν όμως προχωρίσουμε στην απόδειξη, θα δούμε ένα λήμμα ουσιαστικό για την απόδειξη του θεωρήματος.

Λήμμα 3.5.2 (Λήμμα του Mazur)**.** *Έστω $(X, ||\cdot||)$ ένας απειροδιάστατος χώρος με νόρμα και Y ένας κλειστός γραμμικός υπόχωρος του X με πεπερασμένη διάσταση. Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $x \in X$ με $||x|| = 1$ και:*

$$||y|| \leqslant (1+\varepsilon) \cdot ||y + \lambda x||$$

για κάθε $y \in Y$ και $\lambda \in \mathbb{R}$.

Απόδειξη: Αφού ο χώρος Y έχει πεπερασμένη διάσταση, η σφαίρα $\partial S_Y(0,1)$ είναι συμπαγής (Παρατήρηση 3.5.1). Παίρνοντας καλύψεις με μπάλες ακτίνας $\varepsilon/2$, είναι δυνατόν να βρούμε πεπερασμένα το πλήθος $(y_k)_{k=1}^m$ στην $\partial S_Y(0,1)$ ώστε για κάθε $y \in \partial S_Y(0,1)$, υπάρχει m με $||y - y_m|| < \varepsilon/2$.

Τώρα από την Πρόταση 1.4.3, ii. μπορούμε να βρούμε συναρτησοειδή $y_k^* \in X^*$ με $y_k^*(y_k) = ||y_k|| = 1$. Από την Παρατήρηση 1.4.2 οι πυρήνες $\mathrm{Ker}\ y_k^*$ είναι υπερεπίπεδα (δηλαδή $\mathrm{codim\ Ker}\ y_k^* = 1$), οπότε:

$$\mathrm{codim} \left(\bigcap_{k=1}^m \mathrm{Ker}\ y_k^* \right) < \infty$$

Αφού $\dim X = \infty$, ο $\bigcap_{k=1}^m \mathrm{Ker}\ y_k^*$ έχει μη μηδενική διάσταση, οπότε βρίσκουμε $x \in X$ με $x \in \partial S_X(0,1) \Rightarrow ||x|| = 1$ και $x \in \bigcap_{k=1}^m \mathrm{Ker}\ y_k^*$. Αυτό το x έχει την ιδιότητα για κάθε $k \in \mathbb{N}$, $y_k^*(x) = 0$.

Λαμβάνοντας όλα τα προηγούμενα υπόψη, για κάθε $y \in \partial S_Y(0,1)$ και $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$||y + \lambda x|| \geqslant ||y_m + \lambda x|| - ||y - y_m|| \geqslant ||y_m + \lambda x|| - \varepsilon/2$$

Τώρα τα συναρτησοειδή y_k^* έχουν νόρμα $||y_k^*|| = 1$, διότι το ii. της Πρότασης 1.4.3 αποδεικνύεται από το i. της αντίστοιχης πρότασης. Οπότε:

$$||y_m + \lambda x|| - \varepsilon/2 \geqslant y_k^*(y_m + \lambda x) - \varepsilon/2 = y_k^*(y_m) - \varepsilon/2 = 1 - \varepsilon/2 \geqslant 1/(1+\varepsilon)$$

εάν επιπλέον υποθέσουμε ότι $0<\varepsilon<1$ (το οποίο δεν είναι μεγάλο πρόβλημα - αν το ε ήταν μεγαλύτερο, εμείς θα κάνουμε την απόδειξη «καλύτερα», για μικρότερο ε). Αποδεικνύουμε λοιπόν ότι:

$$||y+\lambda x|| \geqslant 1/(1+\varepsilon) \Rightarrow (1+\varepsilon)\cdot||y+\lambda x|| \geqslant 1 = ||y||$$

(αφού $y\in\partial S_Y(0,1)$). Λόγω γραμμικότητας αποδεικνύεται η εν λόγω σχέση σε όλον τον Y.

□

Θεώρημα 3.5.2 (Θεώρημα Banach). *Έστω $(X,||\cdot||)$ ένας απειροδιάστατος χώρος Banach. Για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει κλειστός γραμμικός υπόχωρος με μοναδιαία (δηλαδή $||e_k||=1$) βάση Schauder $(e_k)_{k=1}^{\infty}$ σταθεράς $\mathrm{BC}_{(e_k)_{k=1}^{\infty}}\leqslant 1+\varepsilon$.*

Απόδειξη: Έστω κάποιο $\varepsilon>0$ και μία ακολουθία $(\varepsilon_k)_{k=1}^{\infty}$ θετικών αριθμών με:

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1+\varepsilon_n)\leqslant 1+\varepsilon$$

Θεωρούμε οποιοδήποτε $e_1\in X$ με $||e_1||=1$ και ορίζουμε $Y_1=\mathrm{span}\{e_1\}$. Έπειτα, από το Λήμμα 3.5.2 μπορούμε να βρούμε $e_2\in X$ με $||e_2||=1$ και:

$$||x||\leqslant(1+\varepsilon_2)\cdot||x+\lambda e_2||$$

με $x\in Y_1$ και $\lambda\in\mathbb{R}$. Ορίζουμε $Y_2=\mathrm{span}\{e_1,e_2\}$. Με ανάλογο τρόπο βρίσκουμε $e_3\in X$ με $||e_3||=1$ και:

$$||x||\leqslant(1+\varepsilon_3)\cdot||x+\lambda e_3||$$

με $x\in Y_2$ και $\lambda\in\mathbb{R}$. Ορίζουμε $Y_3=\mathrm{span}\{e_1,e_2,e_3\}$ και συνεχίζουμε επαγωγικά.

Ορίζουμε επίσης $Y=\overline{\bigcup_{k=1}^{n}Y_k}$ και παρατηρούμε ότι ο Y είναι χώρος Banach, αφού είναι κλειστός υπόχωρος του χώρου Banach X. Επιπλέον, θα δείξουμε ότι για κάθε $n<m$ και $(\lambda_k)_{k=1}^{\infty}$:

$$\left|\left|\sum_{k=1}^{n}\lambda_k e_k\right|\right|\leqslant(1+\varepsilon)\cdot\left|\left|\sum_{k=1}^{m}\lambda_k e_k\right|\right|$$

οπότε από το Θεώρημα 3.3.1 η $(e_k)_{k=1}^{\infty}$ θα είναι βάση Schauder του Y. Μάλιστα, αφήνοντας $m\to\infty$ θα έχουμε:

$$||P_n(x)||=\left|\left|P_n\left(\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k e_k\right)\right|\right|=\left|\left|\sum_{k=1}^{n}\lambda_k e_k\right|\right|\leqslant(1+\varepsilon)\cdot\left|\left|\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k e_k\right|\right|=(1+\varepsilon)\cdot||x||$$

και κατά συνέπεια $||P_n||\leqslant 1+\varepsilon\Rightarrow\mathrm{BC}_{(e_k)_{k=1}^{\infty}}\leqslant 1+\varepsilon$.

Παρατηρούμε λοιπόν ότι:

$$\left|\left|\sum_{k=1}^{n}\lambda_k e_k\right|\right|\leqslant(1+\varepsilon_n)\cdot\left|\left|\lambda_{n+1}e_k+\sum_{k=1}^{n}\lambda_k e_k\right|\right|=(1+\varepsilon_n)\cdot\left|\left|\sum_{k=1}^{n+1}\lambda_k e_k\right|\right|$$

διότι $\sum_{k=1}^{n}\lambda_k e_k\in Y_n$. Επαγωγικά λαμβάνουμε το ζητούμενο:

$$\left|\left|\sum_{k=1}^{n}\lambda_k e_k\right|\right|\leqslant\prod_{k=n}^{m}(1+\varepsilon_k)\cdot\left|\left|\sum_{k=1}^{m}\lambda_k e_k\right|\right|\leqslant\prod_{k=1}^{\infty}(1+\varepsilon_k)\cdot\left|\left|\sum_{k=1}^{m}\lambda_k e_k\right|\right|=(1+\varepsilon)\cdot\left|\left|\sum_{k=1}^{m}\lambda_k e_k\right|\right|$$

□

3.6 Block βάσεις και βάσεις χωρίς περιορισμό

Αυτό που θα μας απασχολήσει στη συνέχεια είναι οι block βάσεις και οι βάσεις χωρίς περιορισμό.

Ορισμός 3.6.1 (Block βάσεις). *Έστω $(X, \|\cdot\|)$ ένας χώρος Banach με βάση Schauder $(e_k)_{k=1}^{\infty}$. Μία ακολουθία $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ λέγεται block βάση της Schauder βάσης $(e_k)_{k=1}^{\infty}$ εάν και μόνο αν υπάρχουν συντελεστές $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ ώστε:*

$$x_n = \sum_{k=m_n+1}^{m_{n+1}} a_k e_k$$

για κάποιους γνησίως αύξοντες δείκτες $(m_n)_{n=1}^{\infty}$.

Η ορολογία της block βάσης μπορεί να γίνει αντιληπτή εάν δούμε τον παρακάτω πίνακα: Αν προσωρινά ταυτίσουμε τα $x_n = \sum_{k=m_n+1}^{m_{n+1}} a_k e_k$ με διανύσματα της μορφής $x_n = (0, \cdots, 0, a_{m_n+1} e_{m_n+1}, a_{m_n+2} e_{m_n+2}, \cdots, a_{m_{n+1}} e_{m_{n+1}}, 0, \cdots)^T$:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \\ \\ \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{O} & & & \mathbf{O} \\ & \boxed{\begin{matrix} a_{m_1+1} & & \mathrm{O} \\ & \ddots & \\ \mathrm{O} & & a_{m_2} \end{matrix}} & & \\ & & \boxed{\begin{matrix} a_{m_2+1} & & \mathrm{O} \\ & \ddots & \\ \mathrm{O} & & a_{m_3} \end{matrix}} & \\ \mathbf{O} & & & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ \\ \\ \\ \end{pmatrix}$$

οπότε εμφανίζεται ένας $\infty \times \infty$ πίνακας, ο οποίος έχει (block) διαγώνια μορφή. Μάλιστα οι διαγώνιοι πίνακες σημειωμένοι με block αντιστοιχούν στα εκάστοτε στοιχεία x_n.

Παρατήρηση 3.6.1. *Βάσει της Πρότασης 3.3.1 κάθε block βάση μίας Schauder βάσης είναι Schauder βασική ακολουθία.*

Μία ακόμη έννοια είναι αυτή των βάσεων χωρίς περιορισμό. Στις χωρίς περιορισμό βάσεις στην ουσία προσπαθούμε να «μιμηθούμε» την απόλυτη σύγκλιση, με την εξής έννοια: Ας θεωρήσουμε έναν χώρο $(X, \|\cdot\|)$ με νόρμα η οποία προέρχεται από ένα εσωτερικό γινόμενο $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Εάν μία σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ συγκλίνει απόλυτα (αν δηλαδή $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\| < \infty$) μπορούμε περιστρέφοντας τα x_k να κατασκευάσουμε ένα στοιχείο του X:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|R_k(x_k)\| e_1 \in \overline{\operatorname{span}}\{e_1\}$$

(όπου R_k είναι στροφή). Εν τω μεταξύ η έννοια της στροφής σε πολλές διαστάσεις δεν είναι τόσο τετριμμένη ([Φρ1], Παράγραφος 8.3), αλλά εμείς θα παραλείψουμε τις λεπτομέρειες σε αυτό το σημείο. Τώρα σε χώρους που υπάρχει νόρμα αλλά όχι εσωτερικό γινόμενο δεν είναι δυνατή αυτή η έννοια στροφής, και μάλιστα η μόνη (μη τετριμμένη) στροφή που κανείς σίγουρα διαθέτει είναι αυτή που αλλάζει την κατεύθυνση. Δηλαδή η $x_k \rightsquigarrow -x_k$.

Μπορούμε λοιπόν να πούμε ότι μία σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ συγκλίνει χωρίς περιορισμό εάν η $\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k x_k$ συγκλίνει για κάθε επιλογή $\varepsilon_k \in \{\pm 1\}$. Ακόμη μπορούμε να δώσουμε τον ακόλουθο ορισμό:

Ορισμός 3.6.2 (Βάσεις χωρίς περιορισμό). *Έστω $(X, \|\cdot\|)$ ένας χώρος Banach με βάση Shauder $(e_k)_{k=1}^{\infty}$. Η $(e_k)_{k=1}^{\infty}$ θα λέγεται βάση χωρίς περιορισμό εάν για κάθε $x = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k e_k$ η σειρά:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k \lambda_k e_k$$

είναι ένα στοιχείο του x για κάθε επιλογή $\varepsilon_k \in \{\pm 1\}$.

Εν τω μεταξύ ίσως αυτός ο ορισμός να μην είναι πολύ «καλός», καθώς δεν δικαιολογεί την ορολογία «χωρίς περιορισμό». Κανείς μπορεί να πει ότι δεν υπάρχει περιορισμός ως προς την επιλογή των προσήμων, αλλά δεν είναι ακριβώς αυτό το νόημα της σύγκλισης χωρίς περιορισμό. Θα επανέλθουμε σε αυτό το θέμα αργότερα.

Πρώτα θα ξανα-αναφερθούμε στη συσχέτιση της απόλυτης σύγκλισης και της σύγκλισης χωρίς περιορισμό. Είναι γνωστό αποτέλεσμα ότι, εάν $(X, \|\cdot\|)$ είναι ένας χώρος (Banach) πεπερασμένης διάστασης, η απόλυτη σύγκλιση ταυτίζεται με την σύγκλιση χωρίς περιορισμό. Μάλιστα η μία κατεύθυνση είναι απλή, αφού ανεξαρτήτως της διάστασης η απόλυτη σύγκλιση δίνει σύγκλιση χωρίς περιορισμό -η άλλη είναι περισσότερο περίπλοκη και στην ουσία αποδείχθηκε πρώτη φορά από τον Riemann για τους $\mathbb{R}^n$

Για παράδειγμα, από το [Ru] (Theorem 3.56) στο οποίο αποδεικνύεται ότι αν μια πραγματική σειρά συγκλίνει χωρίς περιορισμό τότε συγκλίνει απολύτως, μπορείτε με κατά συντεταγμένες σύγκλιση (εφόσον έχουμε πεπερασμένη διάσταση) να δείξετε το αποτέλεσμα για τους $\mathbb{R}^n$. Εμείς δεν θα επεκταθούμε σ' αυτό το αποτέλεσμα.

Το παραπάνω αποτέλεσμα δικαιολογεί τη συσχέτιση που κάναμε με την απόλυτη σύγκλιση. Είναι επίσης ενδιαφέρον ένα θεώρημα που αποδείχθηκε στο [DV], κατά το οποίο σε χώρους άπειρης διάστασης υπάρχουν πάντοτε σειρές που συγκλίνουν χωρίς περιορισμό αλλά όχι απολύτως. Ένα απλό παράδειγμα είναι η $(1/n)_{n=1}^{\infty}$ στον χώρο ℓ^2.

Για τη συνέχεια θα χρειαστούμε έναν τελεστή T, αντίστοιχο του τελεστή T της Παραγράφου 3.2. Δεδομένου ότι «δουλεύουμε» με βάσεις Schauder, είναι και πάλι λογικό να θέλουμε να ορίσουμε την αντιστοιχία $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k e_k \rightsquigarrow (\lambda_k)_{k=1}^{\infty}$, αυτήν την φορά όμως όχι στον Σ, αλλά σε άλλον χώρο.

Ορίζουμε τον χώρο U:

$$U = \left\{ (\lambda_k)_{k=1}^{\infty} \;\middle|\; \sup\left\{ \left\| \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \lambda_k e_k \right\|,\ n \in \mathbb{N},\ \varepsilon_k \in \{\pm 1\} \right\} < \infty \right\}$$

τον οποίο εφοδιάζουμε με μία νόρμα, την:

$$[\|(\lambda_k)_{k=1}^{\infty}\|] = \sup\left\{ \left\| \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \lambda_k e_k \right\|,\ n \in \mathbb{N},\ \varepsilon_k \in \{\pm 1\} \right\}$$

Όπως και στην παράγραφο 3.2, εάν ο $(X, \|\cdot\|)$ είναι χώρος Banach, μπορούμε να δείξουμε το ακόλουθο:

Πρόταση 3.6.1. *Ο χώρος $(U, [\|\cdot\|])$ είναι χώρος Banach και ο τελεστής $T : X \to U$ ισομορφική εμφύτευση.*

Επίσης στον U ορίζεται ακόμη μία χρήσιμη νόρμα, η:

$$[|(\lambda_k)_{k=1}^{\infty}|] = \sup\left\{ \left\| \sum_{k\in N} \lambda_k e_k \right\| \;\middle|\; N \subseteq \mathbb{N} \text{ πεπερασμένο} \right\}$$

που μάλιστα είναι ισοδύναμη της $[\|\cdot\|]$, όπως δείχνουμε παρακάτω.

Παρατήρηση 3.6.2. *Για κάθε $(\lambda_k)_{k=1}^{\infty} \in U$:*

$$[|(\lambda_k)_{k=1}^{\infty}|] \leqslant [\|(\lambda_k)_{k=1}^{\infty}\|] \leqslant 2 \cdot [|(\lambda_k)_{k=1}^{\infty}|]$$

Απόδειξη: Αν θεωρήσουμε πεπερασμένο υποσύνολο των φυσικών N και δείκτες ε_k ώστε:

$$\varepsilon_k = 1,\ k \in N \text{ και } \varepsilon_k = -1,\ k \notin N$$

θα έχουμε για κάθε n:

$$2 \cdot \left\| \sum_{k \in N} \lambda_k e_k \right\| = \left\| \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k + \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \lambda_k e_k \right\| \leqslant \left\| \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k \right\| + \left\| \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \lambda_k e_k \right\|$$

Επομένως με supremum έπεται $[|(\lambda_k)_{k=1}^{\infty}|] \leqslant [||(\lambda_k)_{k=1}^{\infty}||]$.

Από την άλλη μεριά, αν $N = \{k \leqslant n \mid \varepsilon_k \lambda_k = \lambda_k\}$, $\Phi = \{k \leqslant n \mid \varepsilon_k \lambda_k = -\lambda_k \neq 0\}$:

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \lambda_k e_k \right\| \leqslant \left\| \sum_{k \in N} \lambda_k e_k \right\| + \left\| \sum_{k \in \Phi} (-1) \lambda_k e_k \right\| = \left\| \sum_{k \in N} \lambda_k e_k \right\| + \left\| \sum_{k \in \Phi} \lambda_k e_k \right\|$$

και με supremum έχουμε $[||(\lambda_k)_{k=1}^{\infty}||] \leqslant 2 \cdot [|(\lambda_k)_{k=1}^{\infty}|]$.

□

Βάσει της παραπάνω παρατήρησης, δίνουμε τους ακόλουθους δύο ορισμούς.

Ορισμός 3.6.3 (Μερικές αναπαραστάσεις σε βάσεις χωρίς περιορισμό). *Έστω $(X, \|\cdot\|)$ ένας χώρος Banach με βάση Schauder $(e_k)_{k=1}^{\infty}$ χωρίς περιορισμό. Για κάθε πεπερασμένο $N \subseteq \mathbb{N}$ ορίζουμε τις μερικές αναπαραστάσεις (κανονικές προβολές):*

$$P_N(x) = P_N\left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k e_k \right) = \sum_{k \in N} \lambda_k e_k$$

Ορισμός 3.6.4 (Σταθερά βάσης χωρίς περιορισμό). *Έστω $(X, \|\cdot\|)$ ένας χώρος Banach με βάση Schauder $(e_k)_{k=1}^{\infty}$ χωρίς περιορισμό. Ορίζουμε τη σταθερά της βάσης χωρίς περιορισμό ως εξής:*

$$\mathrm{UBC}_{(e_k)_{k=1}^{\infty}} = \sup\{\|P_N\| \mid N \subseteq \mathbb{N} \text{ πεπερασμένο}\}$$

Τώρα με το ακόλουθο θεώρημα -του οποίου η απόδειξη είναι ανάλογη αυτής του Θεωρήματος 3.3.1- θα δικαιολογίσουμε την ορολογία των βάσεων χωρίς περιορισμό (και συγκεκριμένα με την παρατήρηση που θα ακολουθήσει).

Θεώρημα 3.6.1 (Χαρακτηρισμός βάσεων χωρίς περιορισμό). *Έστω $(X, \|\cdot\|)$ ένας χώρος Banach με βάση Schauder $(e_k)_{k=1}^{\infty}$. Τα ακόλουθα ισοδυναμούν:*

i. Η $(e_k)_{k=1}^{\infty}$ είναι βάση χωρίς περιορισμό.

ii. Υπάρχει $M > 0$ ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$, πεπερασμένο υποσύνολο $N \subseteq \{1, \cdots, n\}$ και $\lambda_k \in \mathbb{R}$, $k \leqslant n$:

$$\left\| \sum_{k \in N} \lambda_k e_k \right\| \leqslant M \left\| \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k \right\|$$

iii. Υπάρχει $M > 0$ ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $\varepsilon_k \in \{\pm 1\}$, $\lambda_k \in \mathbb{R}$, $k \leqslant n$, να έχουμε:

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \lambda_k e_k \right\| \leqslant M \left\| \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k \right\|$$

Παρατήρηση 3.6.3. *Εάν $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k e_k$ είναι ένα στοιχείο του X, για οποιαδήποτε μετάθεση $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, το αντικείμενο:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{\sigma(k)} e_{\sigma(k)}$$

είναι στοιχείο του X.

Απόδειξη: Από το Θεώρημα 3.6.1, ii. έπεται ότι για κάθε $n < m$ και $N \subseteq \{1, \cdots, m\}$ με $\min N > n$:

$$\left\| \sum_{k \in N} \lambda_k e_k \right\| \leqslant M \left\| \sum_{k=n}^{m} \lambda_k e_k \right\|$$

Λόγω του ότι η $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k e_k$ συγκλίνει, για κάθε $\varepsilon > 0$ και αρκετά μεγάλα n, m, ο όρος δεξιά είναι μικρότερος του ε, και κατά συνέπεια:

$$\left\| \sum_{k \in N} \lambda_k e_k \right\| < \varepsilon$$

Έστω τώρα μετάθεση $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ και για αρκετά μεγάλα $n_0 < m$:

$$\left\| \sum_{k=n_0}^{m} \lambda_{\sigma(k)} e_{\sigma(k)} \right\| < \varepsilon$$

Κατ' αρχάς βρίσκουμε αρκετά μεγάλο n (για το m έχουμε $m > n$) ώστε για κάθε $N \subseteq \{1, \cdots, m\}$ με $\min N > n$:

$$\left\| \sum_{k \in N} \lambda_k e_k \right\| < \varepsilon$$

Ορίζουμε $n_0 = \min\{\kappa \mid \sigma(k) > n \text{ για κάθε } k \geqslant \kappa\}$. Εφόσον για κάθε $k \geqslant n_0$ έχουμε $\sigma(k) > n$, αν θέσουμε:

$$N = \{\sigma(k) \mid k \in \{n_0, \cdots, m\}\}$$

τότε $\min N > n$, κι από την προηγούμενή μας ανάλυση:

$$\left\| \sum_{k=n_0}^{m} \lambda_{\sigma(k)} e_{\sigma(k)} \right\| = \left\| \sum_{k \in N} \lambda_k e_k \right\| < \varepsilon$$

□

Στην ουσία λοιπόν δεν υπάρχει περιορισμός στη σειρά της άθροισης: Αν η $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k e_k$ συγκλίνει σε στοιχείο του X, οποιαδήποτε αναδιάταξη συγκλίνει κι αυτή σε στοιχείο του X. Αυτό τελικά δικαιολογεί την ορολογία «χωρίς περιορισμό».

Με αυτά μπορούμε να αποδείξουμε ένα βοηθητικό αποτέλεσμα για αργότερα.

Πρόταση 3.6.2. *Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος Banach και $(e_k)_{k=1}^{\infty}$ βάση Schauder χωρίς περιορισμό. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και πραγματικούς αριθμούς $\lambda_k, a_k \in \mathbb{R}$, $k \leqslant n$, έχουμε:*

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} \lambda_k a_k e_k \right\| \leqslant \mathrm{UBC}_{(e_k)_{k=1}^{\infty}} \max\{|\lambda_k|\}_{k=1}^{\infty} \cdot \left\| \sum_{k=1}^{n} a_k e_k \right\|$$

Απόδειξη: Από την Πρόταση 1.4.3, ii. μπορούμε να βρούμε συναρτησοειδές $x^* \in X^*$ ώστε για τα δεδομένα n, λ_k, a_k:

$$x^* \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k a_k e_k \right) = \left\| \sum_{k=1}^{n} \lambda_k a_k e_k \right\|$$

και μάλιστα $||x^*|| = 1$ (αφού το ii. της εν λόγω πρότασης αποδεικνύεται από το i.). Θέτοντας ε_k έτσι ώστε $\varepsilon_k a_k x^*(e_k) \geqslant 0$, έχουμε:

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} \lambda_k a_k e_k\right\| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k| \cdot |a_k x^*(e_k)| \leqslant \max\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} |a_k x^*(e_k)| = \max\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty} \left|\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k a_k x^*(e_k)\right|$$

Επειδή τώρα $||x^*|| = 1$, σε συνδυασμό με το Θεώρημα 3.6.1, iii.:

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} \lambda_k a_k e_k\right\| \leqslant M \cdot \max\{|\lambda_k|\}_{k=1}^{\infty} \cdot \left\|\sum_{k=1}^{n} a_k e_k\right\|$$

Μάλιστα μία από τις σταθερές M είναι η $\mathrm{UBC}_{(e_k)_{k=1}^{\infty}}$, και το ζητούμενο αποδεικνύεται (αυτό μπορείτε να το δείτε από την απόδειξη του θεωρήματος, ή τέλος πάντων από την απόδειξη του ανάλογού του στις βάσεις Schauder).

□

Σε αντιστοιχία με το Θεώρημα 3.5.2 μπορεί να κανείς να αναρρωτηθεί εάν κάθε χώρος Banach περιέχει κλειστό υπόχωρο με βάση χωρίς περιορισμό, όπως περιέχει κλειστό υπόχωρο με βάση Schauder. Αποδείχθηκε, για πρώτη φορά στο [GM], ότι αυτό δεν είναι αληθές. Υπάρχει δηλαδή χώρος Banach ο οποίος δεν περιέχει κανέναν υπόχωρο με βάση χωρίς περιορισμό. Αυτό απαντά και σε ένα απλούστερο ερώτημα, στο αν δηλαδή υπάρχουν χώροι με Schauder βάση που δεν είναι χωρίς περιορισμό (αν κι αυτό έχει αποδειχθεί, λόγου χάρη για τον $C([0, 1])$).

Επιστρέφοντας σε πιο απλά πράγματα, μερικά παραδείγματα βάσεων Schauder μάς είναι ήδη γνωστά. Κατ' αρχάς αν θεωρήσουμε:

$$e_k = (0, \cdots, 0, \overset{k-\text{θέση}}{1}, 0, \cdots)$$

η οικογένεια $(e_k)_{k=1}^{\infty}$ είναι βάση Schauder των ℓ^p, $1 < p < \infty$, χωρίς περιορισμό.

Το ότι είναι βάση Schauder αποδεικνύεται από τη σχέση:

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k\right\|_{\ell^p} = \left(\sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{m} |\lambda_k|^p\right)^{1/p} = \left\|\sum_{k=1}^{m} \lambda_k e_k\right\|_{\ell^p}$$

(όταν $n \leqslant m$) σε συνδιασμό με το Θεώρημα 3.3.1. Το ότι είναι χωρίς περιορισμό είναι προφανές. Αποδεικνύεται μέσω της $(1/n)_{n=1}^{\infty} \in \ell^p$ ότι η απόλυτη σύγκλιση δεν ταυτίζεται με τη σύγκλιση χωρίς περιορισμό:

$$\left\|\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_k}{k} e_k\right\|_{\ell^p} = ||(1/k)_{k=1}^{\infty}||_{\ell^p} < \infty \text{ αλλά } \sum_{k=1}^{\infty} \left\|\frac{1}{k} e_k\right\|_{\ell^p} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$$

Αντίστοιχα, η εν λόγω οικογένεια είναι βάση Schauder και για τον χώρο ℓ^∞, παίρνοντας όριο στην παραπάνω ανισότητα (και χρησιμοποιώντας φυσικά την Παρατήρηση 1.2.8). Επίσης, είναι χωρίς περιορισμό. Μέσω της $(1/n)_{n=1}^{\infty} \in \ell^\infty$ αποδεικνύεται και πάλι ότι η απόλυτη σύγκλιση δεν ταυτίζεται αυτής χωρίς περιορισμό.

Στον ℓ^1 (αναλόγως) η οικογένεια $(e_k)_{k=1}^{\infty}$ είναι Schauder βάση χωρίς περιορισμό. Η απόλυτη σύγκλιση ταυτίζεται αυτής χωρίς περιορισμό, με την ακόλουθη έννοια:

$$\left\|\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k \lambda_k e_k\right\|_{\ell^1} = \sum_{k=1}^{\infty} |\varepsilon_k \lambda_k| = \sum_{k=1}^{\infty} ||\varepsilon_k \lambda_k e_k||_{\ell^1}$$

παρόλα αυτά, από το [DV], υπάρχει ακολουθία $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ που συγκλίνει χωρίς περιορισμό αλλά όχι απολύτως.

3.7 Το θεώρημα του James

Χρησιμοποιώντας τις block βάσεις μπορεί να αποδειχθεί ένα θεώρημα που οφείλεται στον James, κατά το οποίο κάθε χώρος στον οποίον ο ℓ^1 (αντίστοιχα ο c_0) εμφυτεύεται ισομορφικά, περιέχει «σχεδόν ισομετρικά» αντίγραφα του ℓ^1 (αντίστοιχα του c_0).

Θεώρημα 3.7.1 (Θεώρημα του James). *Έστω $(X, ||\cdot||)$ ένας χώρος Banach στον οποίον εμφυτεύεται ισομορφικά ο ℓ^1. Τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ισομορφική εμφύτευση $H : \ell^1 \to X$ με $||H|| \leqslant 1$ και $||H^{-1}|| \leqslant 1 + \varepsilon$. Αντίστοιχο θεώρημα ισχύει και -αντί του ℓ^1- για τον c_0.*

Απόδειξη: Έστω $\varepsilon > 0$ και ισομορφική εμφύτευση $T : \ell^1 \to X$. Ορίζουμε τη νόρμα στον ℓ^1:

$$|||x||| = ||T(x)||$$

και παρατηρούμε ότι, εφόσον ο T είναι ισομορφική εμφύτευση:

$$M \cdot |||x||| \leqslant ||x||_{\ell^1} \leqslant \Lambda \cdot |||x|||$$

(για κάποιες σταθερές M, Λ). Δηλαδή οι νόρμες $|||\cdot|||$ και $||\cdot||_{\ell^1}$ είναι ισοδύναμες.

Θεωρούμε $(e_k)_{k=1}^{\infty}$ τη μοναδιαία βάση Schauder που αντιστοιχεί στον ℓ^1, και για τα διάφορα $k \in \mathbb{N}$ ορίζουμε:

$$A_k = \left\{ x \in \partial S_{(\ell^1, |||\cdot|||)}(0, 1) \mid P_k(x) = 0, \ \{m \mid e_m^*(x) \neq 0\} \text{ πεπερασμένο} \right\}$$

καθώς επίσης και $a_k = \sup\{||x||_{\ell^1} \mid x \in A_k\}$. Μάλιστα για τα A_k αυτά αληθεύει η φθίνουσα σχέση $A_k \supseteq A_{k+1}$ και κατά συνέπεια $a_k \geqslant a_{k+1}$. Επιπλέον, από τον ορισμό των A_k, των a_k και τη διπλή ανισότητα που αναφέραμε παραπάνω, $M \leqslant a_k \leqslant \Lambda$. Επομένως υπάρχει το όριο:

$$a = \lim_{k\to\infty} a_k$$

Εφόσον $\varepsilon > 0$, έχουμε $0 < a < a\sqrt{1+\varepsilon}$ κι οπότε είναι δυνατόν να βρεθεί $a \leqslant a_{k_0} < a\sqrt{1+\varepsilon}$. Ισχυριζόμαστε ότι μπορεί να βρεθεί block βάση $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ της $(e_k)_{k=1}^{\infty}$ ώστε $|||x_k||| = 1$, $||x_k|| > a/\sqrt{1+\varepsilon}$ και $P_{k_0}(x) = 0$ για κάθε k.

Πράγματι, επιλέγουμε (εφόσον υπάρχουν σε κάθε βήμα) $x_1 \in A_{k_0}$ με:

$$||x_1||_{\ell^1} > \frac{a}{\sqrt{1+\varepsilon}}$$

Το σύνολο $\{m \mid e_m^*(x_1) \neq 0\}$ είναι πεπερασμένο από τον ορισμό του A_{k_0}, οπότε μετά από αρκετά μεγάλο k_1 θα έχουμε $e_m^*(x_1) = 0$. Αυτό δείχνει ότι:

$$x_1 = \sum_{m=k_0+1}^{k_1} e_m^*(x_1) e_m$$

Αντίστοιχα επιλέγουμε $x_2 \in A_{k_1}$ με $||x_2|| > a/\sqrt{1+\varepsilon}$, $P_{k_0}(x) = 0$ και:

$$x_2 = \sum_{m=k_1+1}^{k_2} e_m^*(x_2) e_m$$

για κάποιον δείκτη $k_2 > k_1$. Η επιλογή των x_k μπορεί να συνεχιστεί με ανάλογο τρόπο, επαγωγικά. Αυτά δείχνουν ότι η εν λόγω ακολουθία $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ είναι block βάση της $(e_k)_{k=1}^{\infty}$ και έχει τις ζητούμενες ιδιότητες.

Τώρα, εφόσον η $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ είναι block βάση, για κάθε ακολουθία $(\lambda_k)_{k=1}^{\infty}$ έχουμε:

$$\left|\left|\left| \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \right|\right|\right| = \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k| \cdot |||x_k||| = \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|$$

κι οπότε απ' αυτό παρατηρούμε ότι:

$$\sum_{k=1}^{n} {}^{\lambda_k} \Big/ {}_{\sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|} \, x_k \in A_{k_0}$$

(υπολογίζοντας τη νόρμα $|||\cdot|||$, κι επειδή από τον ορισμό των x_k θα έπεται ότι η τιμή μέσω της P_{k_0} θα είναι μηδέν). Επομένως:

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{\sum_{k=1}^{n}|\lambda_k|} x_k\right\|_{\ell^1} \leqslant a_{k_0} \Rightarrow \left\|\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right\|_{\ell^1} \leqslant a_{k_0} \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k| = a_{k_0} \left|\left|\left|\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right|\right|\right|$$

Τώρα γράφουμε:

$$\left|\left|\left|\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right|\right|\right| \geqslant \frac{1}{a_{k_0}} \left\|\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right\|_{\ell^1} \stackrel{*}{=} \frac{1}{a_{k_0}} \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|\cdot\|x_k\|_{\ell^1} \geqslant \frac{1}{\lambda\sqrt{1+\varepsilon}} \cdot \frac{\lambda}{\sqrt{1+\varepsilon}} \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k| = \frac{1}{1+\varepsilon} \left\|\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k\right\|_{\ell^1}$$

(στην άστρο $(*)$ ξαναχρησιμοποιείται ότι η $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ είναι block βάση). Παρατηρήστε ακόμη ότι $\sum_{k=1}^{n} |\lambda_k| = \left\|\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k\right\|_{\ell^1}$.

Έπεται απ' ολα τα παραπάνω ότι ο τελεστής $H : \ell^1 \to X$ με τύπο:

$$H\left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k e_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k T(x_k)$$

είναι ισομορφική εμφύτευση με $\|H\| \leqslant 1$, $\|H^{-1}\| \leqslant 1+\varepsilon$. Αναλόγως αντιμετωπίζεται η περίπτωση του c_0.

□

3.8 Το θεώρημα του Zippin

Χρησιμοποιώντας τις block βάσεις καθώς και τις βάσεις χωρίς περιορισμό, μπορεί να αποδειχθεί το λεγόμενο θεώρημα του Zippin.

Κατ' αρχάς ας θεωρήσουμε μία μοναδιαία (δηλαδή $\|x_k\|_{\ell^p} = 1$) block βάση $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ του ℓ^p, $1 \leqslant p < \infty$. Με την παρακάτω πρόταση δείχνουμε μία ενδιαφέρουσα ιδιότητα των block βάσεων του ℓ^p, ότι κάθε block βάση της συνήθους Schauder βάσης $(e_k)_{k=1}^{\infty}$ είναι ισοδύναμη -κατά μία έννοια- με την $(e_k)_{k=1}^{\infty}$. Αντίστοιχο αποτέλεσμα ισχύει και για τον c_0.

Εδώ βέβαια πρέπει να προσέξουμε, καθώς η ισοδυναμία έχει οριστεί μεταξύ βάσεων Schauder και όχι μεταξύ block και Schauder βάσεων. Δεν είναι βέβαια δύσκολο να διατυπώσουμε μία γενίκευση του ορισμού, λέγοντας ότι δύο ακολουθίες $(x_k)_{k=1}^{\infty}$, $(e_k)_{k=1}^{\infty}$ είναι ισοδύναμες εάν:

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \text{ συγκλίνει } \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k \text{ συγκλίνει}$$

Πρόταση 3.8.1. *Στους χώρους ℓ^p, $1 \leqslant p < \infty$, κάθε μοναδιαία block βάση $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ είναι ισοδύναμη με τη συνήθη βάση $(e_k)_{k=1}^{\infty}$. Αντίστοιχο αποτέλεσμα ισχύει και για τον c_0.*

Απόδειξη: Έστω $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ μία μοναδιαία block βάση της $(e_k)_{k=1}^{\infty}$ με:

$$x_n = \sum_{k=m_n+1}^{m_{n+1}} a_k e_k$$

Γράφοντας για κάθε $n < m$:

$$\left\|\sum_{k=n}^{m} \lambda_k x_k\right\|_{\ell^p} = \left\|\sum_{k=n}^{m} \sum_{j=m_k+1}^{m_{k+1}} \lambda_k a_j e_j\right\|_{\ell^p} = \left(\sum_{k=n}^{m} \sum_{j=m_k+1}^{m_{k+1}} |\lambda_k a_j|^p\right)^{1/p} = \left(\sum_{k=n}^{m} |\lambda_k|^p \sum_{j=m_k+1}^{m_{k+1}} |a_j|^p\right)^{1/p} =$$

$$= \left(\sum_{k=n}^{m} |\lambda_k|^p \cdot \|x_k\|_{\ell^p}^p\right)^{1/p} = \left(\sum_{k=n}^{m} |\lambda_k|^p\right)^{1/p} = \left\|\sum_{k=n}^{m} \lambda_k e_k\right\|_{\ell^p}$$

έχουμε το ζητούμενο (αφού οι χώροι ℓ^p είναι πλήρεις και ισχύει η «ισοδυναμία» στις βασικές ακολουθίες).

□

Με το θεώρημα του Zippin θα δείξουμε ότι η ιδιότητα της Πρότασης 3.8.1 χαρακτηρίζει τις συνηθισμένες βάσεις των ℓ^p, $1 \leqslant p < \infty$, και του c_0. Δηλαδή θα δείξουμε ότι αν $(X, \|\cdot\|)$ είναι ένας χώρος Banach ώστε η μοναδιαία Schauder βάση του $(e_k)_{k=1}^{\infty}$ είναι ισοδύναμη με κάθε μοναδιαία block βάση $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ της $(e_k)_{k=1}^{\infty}$, τότε η $(e_k)_{k=1}^{\infty}$ είναι ισοδύναμη με τη συνηθισμένη βάση κάποιου ℓ^p, $1 \leqslant p < \infty$, ή του c_0.

Για να αποδείξουμε το θεώρημα του Zippin θα χρειαστούμε ένα ανεξάρτητο λήμμα, το οποίο είναι κατά βάση αριθμητικό και κάπως τεχνικό.

Λήμμα 3.8.1. *Έστω $(\kappa_n)_{n=1}^{\infty}$ μία αύξουσα ακολουθία πραγματικών αριθμών με $1 \leqslant \kappa_n \leqslant n$, $n \in \mathbb{N}$. Αν υπάρχει $M > 0$ ώστε:*

$$M^{-1}\kappa_n\kappa_{n^{t-1}} \leqslant \kappa_{n^t} \leqslant M\kappa_n\kappa_{n^{t-1}}, \;\; n,t \in \mathbb{N}$$

τότε υπάρχει $0 \leqslant c \leqslant 1$ ώστε:

$$M^{-1}n^c \leqslant \kappa_n \leqslant Mn^c, \;\; n \in \mathbb{N}$$

Απόδειξη: Με επαγωγή κανείς μπορεί να δείξει ότι:

$$M^{-t}\kappa_n^t \leqslant \kappa_{n^t} \leqslant M^t\kappa_n^t, \;\; n,t \in \mathbb{N}$$

Έστω $n,m \in \mathbb{N}$. Για κάθε t έχουμε $n^{\lfloor t\log m\rfloor} \leqslant m^{\lfloor t\log n\rfloor + 1}$, οπότε από τη σχέση που βρήκαμε με επαγωγή, έχουμε ότι:

$$M^{-\lfloor t\log m\rfloor}\kappa_n^{\lfloor t\log m\rfloor} \leqslant \kappa_{n^{\lfloor t\log m\rfloor}} \leqslant \kappa_{m^{\lfloor t\log n\rfloor+1}} \leqslant M^{\lfloor t\log n\rfloor+1}\kappa_m^{\lfloor t\log n\rfloor+1}$$

Στην παραπάνω σχέση με log και πράξεις παίρνουμε:

$$\frac{\log\kappa_n}{\log n} - \frac{\log\kappa_m}{\log m} \leqslant \log M \cdot \left(\frac{1}{\log n} + \frac{1}{\log m}\right) + \frac{\log M + \log\kappa_n + \log\kappa_m}{t\log n \cdot \log m}, \;\; t \in \mathbb{N}$$

και αντίστοιχα, αν είχαμε $m < n$ (αντί $n < m$):

$$\frac{\log\kappa_m}{\log m} - \frac{\log\kappa_n}{\log n} \leqslant \log M \cdot \left(\frac{1}{\log n} + \frac{1}{\log m}\right) + \frac{\log M + \log\kappa_n + \log\kappa_m}{t\log n \cdot \log m}, \;\; t \in \mathbb{N}$$

Οι δύο παραπάνω σχέσεις δείχνουν ότι:

$$\left|\frac{\log\kappa_n}{\log n} - \frac{\log\kappa_m}{\log m}\right| \leqslant \log M \cdot \left(\frac{1}{\log n} + \frac{1}{\log m}\right) + \frac{\log M + \log\kappa_n + \log\kappa_m}{t\log n \cdot \log m}, \;\; t \in \mathbb{N}$$

και μάλιστα με όριο καθώς $t \to \infty$:

$$\left|\frac{\log\kappa_n}{\log n} - \frac{\log\kappa_m}{\log m}\right| \leqslant \log M \cdot \left(\frac{1}{\log n} + \frac{1}{\log m}\right) \qquad (*)$$

Αυτά δείχνουν ότι η $(\log\kappa_n/\log n)_{n=1}^{\infty}$ είναι βασική ακολουθία πραγματικών αριθμών, και έχει όριο:

$$c = \lim_{n\to\infty}\frac{\log\kappa_n}{\log n}$$

που είναι μεταξύ των μηδέν και ένα, αφού $1 \leqslant \kappa_n \leqslant n$. Από την άστρο $(*)$ τώρα έχουμε με όρια $m \to \infty$:

$$M^{-1}n^c \leqslant \kappa_n \leqslant Mn^c, \;\; n \in \mathbb{N}$$

□

Θεώρημα 3.8.1 (Θεώρημα του Zippin). *Έστω $(X, \|\cdot\|)$ ένας χώρος Banach και $(e_k)_{k=1}^{\infty}$ μοναδιαία Schauder βάση του. Εάν η $(e_k)_{k=1}^{\infty}$ είναι ισοδύναμη με κάθε μοναδιαία block βάση της, τότε είναι ισοδύναμη με την συνηθισμένη βάση κάποιου ℓ^p, $1 \leqslant p < \infty$, ή του c_0.*

Απόδειξη: Η απόδειξη είναι αρκετά μακροσκελής και θα γίνει σε βήματα.

Βήμα I: Επειδή η μοναδιαία βάση Schauder $(e_k)_{k=1}^{\infty}$ είναι ισοδύναμη με κάθε μοναδιαία block βάση της, θα είναι ισοδύναμη και με τις $(\varepsilon_k e_k)_{k=1}^{\infty}$, για κάθε επιλογή $\varepsilon_k \in \{\pm 1\}$. Δηλαδή η $(e_k)_{k=1}^{\infty}$ είναι βάση χωρίς περιορισμό. Θα υποθέσουμε μάλιστα ότι $\mathrm{UBC}_{(e_k)_{k=1}^{\infty}} = 1$, αφού ως προς μία ισοδύναμη της $\|\cdot\|$ νόρμα πράγματι αληθεύει η εν λόγω ισότητα.

Βήμα II: Έστω λοιπόν $(x_k^i)_{k=1}^{\infty}$ μοναδιαίες block βάσεις της $(e_k)_{k=1}^{\infty}$, που καθώς $i \in I$ διατρέχουν όλη την οικογένεια των μοναδιαίων block βάσεων. Από την Πρόταση 3.4.1, ii. υπάρχει ισομορφισμός $H_i : X \to \overline{\mathrm{span}}\{x_k^i\}_{k=1}^{\infty}$ με:

$$H_i\left(\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k e_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k x_k^i \text{ και κατά συνέπεια } H^{-1}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k x_k^i\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k e_k$$

Παρατηρούμε ότι για τις διάφορες block βάσεις $(x_k^i)_{k=1}^{\infty}$ οι H_i, H_i^{-1} φράσσονται σημειακά. Για τις H_i (κι αντίστοιχα κανείς μπορεί να δει για τις H_i^{-1}) θα δείξουμε ότι:

$$\sup_{i\in I}\left\|H_i\left(\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k e_k\right)\right\| = \sup_{i\in I}\left\|\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k x_k^i\right\| < \infty$$

Θεωρούμε προς άτοπο ότι το supremum είναι άπειρο και θεωρούμε $M > 0$. Θα μπορεί να βρεθεί δείκτης $i_1 \in I$ τέτοιος ώστε:

$$\left\|\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k x_k^{i_1}\right\| > M \text{ κι οπότε } \left\|\sum_{k=1}^{n_1}\lambda_k x_k^{i_1}\right\| > M$$

για αρκετά μεγάλο δείκτη $n_1 \in \mathbb{N}$ (παρατηρήστε ότι η ανισότητα είναι γνήσια μεγαλύτερη του M). Έπειτα θεωρούμε το σύνολο $I_1 \subseteq I$ των δεικτών για τους οποίους οι βάσεις $(x_k^i)_{k=1}^{\infty}$ έχουν αναγραφές που περιέχουν e_j για $j \geqslant n_1 + 1$ (και όχι για $j \leqslant n_1$), και ισχυριζόμαστε ότι:

$$\sup_{i\in I_1}\left\|\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k x_k^i\right\| = \infty$$

Πράγματι, αυτό αληθεύει διότι αν θεωρήσουμε πεπερασμένους δείκτες $k \in N_i \subseteq \mathbb{N}$ ώστε τα x_k^i, $i \in I$, να έχουν αναγραφές ως τα e_j, $j \leqslant n_1$:

$$\sup_{i\in I_1}\left\|\sum_{k\in N}\lambda_k x_k\right\| = \sup_{i\in I_1}\left\|\sum_{k\in N_i}\lambda_k \sum_j a_j^i e_j\right\| \leqslant \mathrm{UBC}_{(e_k)_{k=1}^{\infty}} = 1$$

οπότε:

$$\sup_{i\in I_1}\left\|\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k x_k^i\right\| \geqslant \sup_{i\in I}\left\|\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k x_k^i\right\| - \sup_{i\in I_1}\left\|\sum_{k\in N}\lambda_k x_k^i\right\| \geqslant \infty$$

Μπορεί λοιπόν να βρεθεί, με παρόμοιο σκεπτικό, $i_2 \in I_2$ και $n_2 \in \mathbb{N}$ ώστε:

$$\left\|\sum_{k=n_1+1}^{n_2}\lambda_k x_k^{i_2}\right\| > M$$

Συνεχίζοντας επαγωγικά, κατασκευάζουμε μία block βάση $(y_k)_{k=1}^{\infty} = (x_k^{i_j})_{j=1,k=n_j+1}^{\infty,n_{j+1}}$ της $(e_k)_{k=1}^{\infty}$ για την οποία:

$$\left\|\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k y_k\right\| \geqslant \sum_{k=1}^{\infty} M = \infty$$

το οποίο οδηγεί σε άτοπο, αφού όλες οι block βάσεις είναι ισοδύναμες της $(e_k)_{k=1}^{\infty}$.

Βήμα III: Από το Βήμα II, εφόσον οι H_i, H_i^{-1} για τα διάφορα $i \in I$ φράσσονται σημειακά, από την αρχή ομοιόμορφου φράγματος (δηλαδή από το Θεώρημα 1.4.5), υπάρχει $M > 0$ ώστε:

$$M^{-1}\left\|\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k e_k\right\| \leqslant \left\|\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k x_k\right\| \leqslant M\left\|\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k e_k\right\|$$

για κάθε block βάση $(x_k)_{k=1}^\infty$.

Βήμα IV: Θέλοντας να εφαρμόσουμε το Λήμμα 3.8.1, ορίζουμε:

$$\kappa_n = \left\| \sum_{k=1}^{n} e_k \right\|$$

Επειδή $BC_{(e_k)_{k=1}^\infty} \leqslant UBC_{(e_k)_{k=1}^\infty} = 1$, έχουμε $BC_{(e_k)_{k=1}^\infty} = 1$, και κατά συνέπεια, από το Θεώρημα 3.3.1, iii., $\kappa_n \leqslant \kappa_{n+1}$ για κάθε n (παρατηρήστε ότι μία από τις σταθερές M του εν λόγω θεωρήματος είναι η $BC_{(e_k)_{k=1}^\infty}$). Δηλαδή $1 = \kappa_1 \leqslant \kappa_n \leqslant n$.

Βήμα V: Για κάθε $n, t \in \mathbb{N}$ θα δείξουμε ότι:

$$M^{-2}\kappa_{n^{t-1}}\kappa_n \leqslant \kappa_{n^t} \leqslant M^2\kappa_{n^{t-1}}\kappa_n$$

Θεωρούμε για κάθε $n, t \in \mathbb{N}$:

$$\lambda_m = \left\| \sum_{k=(m-1)n^{t-1}+1}^{mn^{t-1}} e_k \right\| \quad \text{και} \quad x_m = \frac{1}{\lambda_m} \sum_{k=(m-1)n^{t-1}+1}^{mn^{t-1}} e_k$$

οπότε η οικογένεια $(x_m)_{m=1}^\infty$ καθίσταται μοναδιαία block βάση της $(e_k)_{k=1}^\infty$. Επιπλέον παρατηρούμε ότι:

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k = \sum_{k=1}^{n^t} e_k, \text{ οπότε } \kappa_{n^t} = \left\| \sum_{k=1}^{n^t} e_k \right\| = \left\| \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \right\|$$

Από την ανισότητα του Βήματος III έπεται ότι:

$$M^{-1}\lambda_1 \leqslant \lambda_m \leqslant M\lambda_1$$

κι οπότε:

$$\kappa_{n^t} = \left\| \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \right\| \geqslant M^{-1} \left\| \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k \right\| = M^{-1}|\lambda_1| \cdot \left\| \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{\lambda_1} e_k \right\|$$

Επειδή $\lambda_k/\lambda_1 \geqslant M^{-1}$, από την Πρόταση 3.6.2 έπεται ότι:

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{\lambda_1} e_k \right\| \geqslant \left\| \sum_{k=1}^{n} M^{-1} e_k \right\| = M^{-1}\kappa_n$$

κι οπότε $\kappa_{n^t} \geqslant M^{-2}\kappa_{n^{t-1}}\kappa_n$. Αναλόγως αποδεικνύεται ότι $\kappa_{n^t} \leqslant M^2\kappa_{n^{t-1}}\kappa_n$.

Βήμα VI: Εφόσον οι προϋποθέσεις του Λήμματος 3.8.1 ικανοποιούνται, μπορεί να βρεθεί $0 \leqslant c \leqslant 1$ ώστε:

$$M^{-2}n^c \leqslant \kappa_n \leqslant M^2 n^c$$

Βήμα VII: Εάν $c = 0$: τότε $M^{-2} \leqslant \kappa_n \leqslant M^2$. Δηλαδή, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και πραγματικούς αριθμούς μ_k, $k \leqslant n$, αν $|\mu_m| = \max\{|\mu_k|\}_{k=1}^n$:

$$|\mu_m| = ||\mu_m e_m|| \leqslant \left\| \sum_{k=1}^{n} \mu_k e_k \right\|$$

(όπου η ανισότητα προκύπτει από το Θεώρημα 3.3.1, iii., σε συνδυασμό με το γεγονός $BC_{(e_k)_{k=1}^\infty} = 1$).

Επιπλέον, από την Πρόταση 3.6.2 (εφόσον $UBC_{(e_k)_{k=1}^\infty} = 1$):

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} \mu_k e_k \right\| \leqslant \mu_m \left\| \sum_{k=1}^{n} e_k \right\| = \mu_m \kappa_n \leqslant \mu_m M^2$$

Έτσι λοιπόν, συνδυάζοντας όλα τα προηγούμενα:

$$\max\{|\mu_k|\}_{k=1}^n \leqslant \left\| \sum_{k=1}^{n} \mu_k e_k \right\| \leqslant M^2 \cdot \max\{\mu_k\}_{k=1}^n$$

το οποίο αποδεικνύει ότι η νόρμα $\|\cdot\|$ είναι ισοδύναμη της νόρμας του c_0.

Βήμα VIII: Εάν $c \neq 0$: θέτουμε $p = 1/c$. Θα δείξουμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και ακολουθία ρητών $(\mu_k)_{k=1}^{\infty}$ έχουμε:

$$M^{-6}\left(\sum_{k=1}^{n}|\mu_k|^p\right)^{1/p} \leqslant \left\|\sum_{k=1}^{n}\mu_k e_k\right\| \leqslant M^6\left(\sum_{k=1}^{n}|\mu_k|^p\right)^{1/p}$$

Οπότε, από την πυκνότητα των ρητών και με όρια $n \to \infty$, θα έχουμε δείξει το (ανάλογο) γενικό αποτέλεσμα.

Γι' αυτό αρκεί να θείξουμε ότι για θετικούς ρητούς μ_k αληθεύει:

$$M^{-6}\left(\sum_{k=1}^{n}\mu_k^p\right)^{1/p} \leqslant \left\|\sum_{k=1}^{n}\mu_k e_k\right\| \leqslant M^6\left(\sum_{k=1}^{n}\mu_k^p\right)^{1/p}$$

διότι απ' αυτό, μέσω της χωρίς περιορισμό σύγκλισης, μπορούμε να αποδείξουμε τη γενική περίπτωση των ρητών.

Κατ' αρχάς βρίσκουμε m, m_k, $k \leqslant n$, θετικούς ακεραίους ούτως ώστε $\mu_k = m_k/m$, και γράφουμε:

$$\left\|\sum_{k=1}^{n}\mu_k e_k\right\| = \left\|\sum_{k=1}^{n}\frac{m_k}{m}e_k\right\| = m^{-1}\left\|\sum_{k=1}^{n}m_k e_k\right\| \qquad (*)$$

Από τη σχέση του Βήματος VI έχουμε $m_k \leqslant M^{-2}\kappa_{m_k^p}$, οπότε από την Πρόταση 3.6.2:

$$\left\|\sum_{k=1}^{n}m_k e_k\right\| \geqslant M^{-2}\left\|\sum_{k=1}^{n}\kappa_{m_k^p}e_k\right\|$$

και η άστρο $(*)$ γίνεται:

$$\left\|\sum_{k=1}^{n}\mu_k e_k\right\| \geqslant M^{-2}m^{-1}\left\|\sum_{k=1}^{n}\kappa_{m_k^p}e_k\right\| \qquad (**)$$

Τώρα, για να απλοποιήσουμε κάπως τους συμβολισμούς, θέτουμε $s_1 = 0$, $s_k = \sum_{j=1}^{k-1}m_j^p$. Επίσης ορίζουμε:

$$\omega_k = \sum_{j=s_k+1}^{s_{k+1}}e_j \text{ και } y_k = \frac{1}{\omega_k}\sum_{j=s_k+1}^{s_{k+1}}e_j$$

Η οικογένεια $(y_k)_{k=1}^{\infty}$ είναι φανερό ότι είναι block βάση της $(e_k)_{k=1}^{\infty}$. Επειδή επιπλέον:

$$\sum_{k=1}^{n}\omega_k y_k = \sum_{k=1}^{\sum_{i=1}^{n}m_i^p}e_k$$

έχουμε:

$$\left\|\sum_{k=1}^{n}\omega_k y_k\right\| = \left\|\sum_{k=1}^{\sum_{i=1}^{n}m_i^p}e_k\right\| = \kappa_{\sum_{i=1}^{n}m_i^p}$$

Από την παραπάνω σχέση, την ανισότητα του Βήματος VIII και την ανισότητα του Βήματος VII (σε συνδυασμό με την Πρόταση 3.6.2) έπεται τελικά ότι:

$$\left\|\sum_{k=1}^{n}\kappa_{m_k^p}e_k\right\| \geqslant M^{-1}\left\|\sum_{k=1}^{n}\omega_k e_k\right\| \geqslant M^{-2}\left\|\sum_{k=1}^{n}\omega_k y_k\right\| = M^{-2}\kappa_{\sum_{i=1}^{n}m_i^p} \geqslant M^{-4}\left(\sum_{k=1}^{n}m_k^p\right)^{1/p} =$$

$$= M^4 m\left(\sum_{k=1}^{n}\mu_k^p\right)^{1/p}$$

οπότε συνδυάζοντας και τη σχέση διπλό άστρο $(**)$:

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} \mu_k e_k \right\| \geqslant M^{-6} \left(\sum_{k=1}^{n} \mu_k^p \right)^{1/p}$$

Αναλόγως αποδεικνύεται και η ανισότητα:

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} \mu_k e_k \right\| \leqslant M^{6} \left(\sum_{k=1}^{n} \mu_k^p \right)^{1/p}$$

και κατ' επέκταση η γενική προς απόδειξη ανισότητα αυτού του βήματος.

Μ' αυτό δείξαμε τελικά ότι η $(e_k)_{k=1}^{\infty}$ είναι ισοδύναμη της συνήθους βάσης του ℓ^p, όπου $1 \leqslant p = 1/c < \infty$.

□

Βιβλιογραφία

[Be] Bernstein Sergei: ***Proof of the theorem of Weierstrass based on the calculus of probabilities*** (Comm. Kharkov Math. Soc. 13 (1912), 1–2 - Μετάφραση στα αγγλικά από τον Michael S. Floater, 1912 (πρωτότυπο), 2017 (μετάφραση))

[BT] Banach S., Tarski A.: ***Sur la décomposition des ensembles de points en parties respectivement congruentes*** (Fundamenta Mathematicae, 1924)

[Ca] Carney Sean: ***Fourier Analysis*** (Σημειώσεις UCLA, 2021)

[DM] Dodu Juliette, Morillon Marianne: ***The Hahn-Banach Property and the Axiom of Choice*** (Mathematical Logic Quarterly, V. 45, 1999)

[DV] Dvoretzky A., Rogers C.A.: ***Absolute and Unconditional Convergence in Normed Linear Spaces*** (Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 1950)

[En] Enflo Per: ***A Counterexample to the Approximation Problem in Banach Spaces*** (University of California, Berkley, CF, 1972)

[GM] Gowers W.T., Maurey B.: ***The Unconditional Basic Sequence Problem*** (Journal of the American Mathematical Society, V. 5, No. 4, 1993)

[Ru] Rudin W.: ***Principles of Mathematical Analysis*** (McGraw-Hill, NY, 1953)

[Βα] Βαλέττας Πέτρος: ***Πραγματική Ανάλυση*** (Σημειώσεις ΕΚΠΑ, 2015)

[Γι1] Γιαννόπουλος Απόστολος: ***Αρμονική Ανάλυση*** (Σημειώσεις ΕΚΠΑ, 2022)

[Γι2] Γιαννόπουλος Απόστολος: ***Μεταπτυχιακή Ανάλυση ΙΙ*** (Σημειώσεις ΕΚΠΑ, 2007)

[Γι3] Γιαννόπουλος Απόστολος: ***Σημειώσεις Συναρτησιακής Ανάλυσης*** (Σημειώσεις Παν. Κρήτης, 2003)

[Δη] Δήμογλου Κωνσταντίνος: ***Μοναδικότητα Unconditional Βάσης Schauder σε χώρους Banach*** (Παν. Ιωανίνων, 2019)

[Κα] Κατάβολος Αριστείδης: ***Εισαγωγή στη Θεωρία Τελεστών*** (Συμμετρία, 2008 - Επικαιροποίηση 2022)

[ΝΖΚΦ] Νεγρεπόντης Σ., Ζαχαριάδης Θ., Καλαμίδας Ν. Φαρμάκη Β.: ***Γενική Τοπολογία και Συναρτησιακή Ανάλυση*** (Συμμετρία, 1997)

[Φρ1] Φράγκος Αναστάσιος: ***Εισαγωγή στην Επίπεδη Υπερβολική Γεωμετρία*** (Σημειώσεις ΕΚΠΑ, επηρεασμένες από το μάθημα «533. Εισαγωγή στη Θεμελίωση της Γεωμετρίας», 2021)

[Φρ2] Φράγκος Αναστάσιος: ***Τοπολογία - Σημειώσεις παραδόσεων*** (Σημειώσεις ΕΚΠΑ, από τα μαθήματα της κ. Παπατριανταφύλλου Μ., 2023)