Θεωρία Συνόλων

Ασκήσεις, Μέρος II

Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Φράγκος Αναστάσιος: AM1112201900239

Άσκηση 1: *Έστω A, B σύνολα ώστε $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B)$. Δείξτε ότι $A = B$.*

Εάν A είναι το κενό σύνολο, τότε $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B) = \emptyset$. Επειδή $\mathcal{P}(B) = \emptyset$, έπεται ότι μόνο υποσύνολο του B είναι το κενό, άρα το ίδιο είναι κενό. Επομένως $A = B$.

Υποθέτουμε ότι $A \neq \emptyset$. Διαλέγουμε ένα στοιχείο του A, έστω a, και θεωρούμε το υποσύνολο $\{a\}$ του A, το οποίο ανήκει στο $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B)$. Επειδή ανήκει στο $\mathcal{P}(B)$, είναι υπόσύνολο του B. Επομένως, το στοιχείο a ανήκει στο B. Με αυτό έχουμε δείξει τον εγκλεισμό $A \subseteq B$. Ο αντίστροφος εγκλεισμός είναι τελείως συμμετρικός· επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία για το B αυτήν την φορά και προκύπτει $B \subseteq A$, επομένως ισχύει η ισότητα $A = B$.

Άσκηση 2: *Έστω A, B σύνολα.*

2.1 Αν $A \subseteq B$, δείξτε ότι $\bigcup A \subseteq \bigcup B$.

2.2 Δείξτε ότι $\bigcup \mathcal{P}(A) = A$.

2.3 Δείξτε ότι $A \subseteq \mathcal{P}\left(\bigcup A\right)$.

2.1 Στην περίπτωση που το A ή το B είναι κενά σύνολα ή περιέχουν μόνο το κενό σύνολο, προκύπτει άμεσα ότι $\bigcup A \subseteq \bigcup B$.

Έστω ότι $A, B \neq \emptyset$ και δεν περιέχουν μόνο το κενό σύνολο. Σε αυτήν την περίπτωση, διαλέγουμε ένα μη κενό σύνολο $\bar{a} \in A$ και από αυτό τυχαίο $a \in \bar{a}$. Το a θα ανήκει στην $\bigcup A$, αφού $a \in \bar{a} \in A$, και επίσης θα ανήκει στην $\bigcup B$, αφού $a \in \bar{a} \in A \subseteq B$. Επομένως, το σύνολο $\bigcup A$ θα πρέπει να περιέχεται στο $\bigcup B$, μιας και κάθε $a \in \bigcup A$ θα ανήκει σε κάποιο $\bar{a} \in A$. Δηλαδή $\bigcup A \subseteq \bigcup B$.

2.2 Θεωρούμε το σύνολο $\mathcal{M}(A) = \{\{x\} \mid x \in A\}$. Το $\mathcal{M}(A)$ είναι πράγματι σύνολο, αφού από το αξίωμα του δυναμοσυνόλου το $\mathcal{P}(A)$ είναι σύνολο, η συνθήκη '$R(a)$: *Το a είναι μονοσύνολο*' είναι οριστική και το $\mathcal{M}(A)$ ισοδύναμα μπορεί να γραφεί:

$$\mathcal{M}(A) = \{a \in \mathcal{P}(A) \mid R(a)\}$$

Οπότε από το αξίωμα της εξειδίκευσης, το $\mathcal{M}(A)$ είναι σύνολο.

Παρατηρούμε ότι $\mathcal{M}(A) \subseteq \mathcal{P}(A)$, οπότε από το σημείο '*2.1*' θα πρέπει $\bigcup \mathcal{M}(A) \subseteq \bigcup \mathcal{P}(A)$. Επειδή $\bigcup \mathcal{M}(A) = A$, έπεται ότι $A \subseteq \bigcup \mathcal{P}(A)$. Ισχυριζόμαστε ότι ισχύει και ο αντίστροφος εγκλεισμός, αφού εάν $a \in \bigcup \mathcal{P}(A)$, θα πρέπει να ανήκει, εξ ορισμού της ένωσης, σε κάποιο υποσύνολο του A, δηλαδή γενικότερα στο A. Επομένως, ισχύει τελικά η ισότητα:

$$A = \bigcup \mathcal{P}(A)$$

2.3 Για κάθε σύνολο $\bar{a} \in A$, θεωρούμε το σύνολο $\Phi(\bar{a}) = \bigcup \{\{a\} \mid a \in \bar{a}\}$ και παρατηρούμε ότι αυτό είναι υποσύνολο του $\bigcup A$· επομένως, θα πρέπει να ανήκει στο δυναμοσύνολο τού $\bigcup A$.

$$\Phi(\bar{a}) \in \mathcal{P}\left(\bigcup A\right)$$

Επιπλέον, το $\Phi(\bar{a})$ είναι ακριβώς το σύνολο $\bar{a}$, οπότε ισοδύναμα έχουμε ότι $\bar{a} \in \mathbb{P}(\bigcup A)$. Αυτό ισχύει για κάθε $\bar{a} \in A$, επομένως:

$$A \subseteq \mathcal{P}\left(\bigcup A\right)$$

Άσκηση 3: *Δείξτε ότι δεν υπάρχει σύνολο που να έχει ως στοιχεία όλα τα μονοσύνολα. Με άλλα λόγια, δεν υπάρχει σύνολο A τέτοιο ώστε:*

$$Q \in A \Leftrightarrow (\exists x)[X = \{x\}]$$

Υποθέτουμε προς άτοπο ότι η κλάση $[\![x \mid x \text{ είναι μονοσύνολο}]\!]$ είναι ένα σύνολο. Επειδή είναι ένα σύνολο, γι᾽ αυτό εφαρμόζεται το αξίωμα της ένωσης. Επομένως, η ένωση:

$$E = \bigcup\, [\![x \mid x \text{ είναι μονοσύνολο}]\!]$$

είναι ένα σύνολο. Αυτό είναι άτοπο, αφού τότε το σύνολο E θα περιείχε όλα τα στοιχεία του κόσμου αντικειμένων[1], άρα και όλα τα σύνολα.

[1]Είναι αξίωμα (:διατεταγμένου ζεύγους) ότι κάθε στοιχείο x του κόσμου ορίζει μονοσύνολο $\{x\}$ στον κόσμο αντικειμένων.

Άσκηση 4: *Δείξτε ότι δεν υπάρχει σύνολο που να έχει ως στοιχεία όλα τα διατεταγμένα ζεύγη. Με άλλα λόγια, δεν υπάρχει σύνολο A τέτοιο ώστε:*

$$x \in A \Leftrightarrow (\exists a, b)[x = (a, b)]$$

Έστω x ένα διατεταγμένο ζεύγος. Σύμφωνα με τον ορισμό του *Kuratowski*, θα μπορούν να βρεθούν δύο στοιχεία a, b για τα οποία θα ισχύει:

$$x = (a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$$

Υποθέτουμε προς άτοπο ότι η κλάση $[\![x \mid x \text{ είναι διατεταγμένο ζεύγος}]\!]$ είναι σύνολο. Σε αυτήν την περίπτωση, από το αξίωμα της ένωσης, η παρακάτω ένωση επίσης θα πρέπει να είναι σύνολο:

$$\bigcup [\![x \mid x \text{ είναι διατεταγμένο ζεύγος}]\!] = \bigcup \Big\{ \{\{a\}, \{a, b\}\} \mid a, b \text{ στοιχεία του κόσμου} \Big\}$$

$$= \Big(\bigcup \Big\{ \{\{a\}\} \mid a \text{ στον κόσμο} \Big\} \Big) \cup \Big(\bigcup \{\{a, b\} \mid a, b \text{ στον κόσμο}\} \Big)$$

Αυτό είναι άτοπο, αφού στην ένωση $\bigcup \{\{a, b\} \mid a, b \text{ στον κόσμο}\}$, όταν $a = b$, ενώνονται όλα τα μονοσύνολα, και συνεπώς το σύνολο της ένωσης θα περιέχει όλα τα στοιχεία του κόσμου αντικειμένων.

Άσκηση 5: *Δείξτε ότι η κλάση όλων των συναρτήσεων δεν είναι σύνολο.*

Υποθέτουμε προς άτοπο ότι η κλάση $[\![f \mid function(f)]\!]$ είναι σύνολο. Εφόσον είναι σύνολο, μπορεί να επιλεγεί το υποσύνολό του:

$$\{f : \{x\} \to \{x\} \mid x \text{ στοιχείο του κόσμου}\}$$

Κάθε συνάρτηση του υποσυνόλου αυτού ουσιάστικά ταυτίζεται με το σύνολο $\{x\} \times \{x\} = \{(x, x)\} = \{\{x\}\}$. Επομένως, παίρνοντας την ένωση του υποσυνόλου αυτού, θα πρέπει να προκύψει το σύνολο:

$$\bigcup \Big\{ \{\{x\}\} \mid x \text{ στοιχείο του κόσμου} \Big\} = \bigcup \{\{x\} \mid x \text{ στοιχείο του κόσμου}\}$$

Αυτό είναι άτοπο, αφού όπως δείχθηκε στην 'Άσκηση 3', το σύνολο όλων των μονοσυνόλων δεν είναι σύνολο.

Άσκηση 6: *Έστω $\mathcal{A}$ ένα σύνολο συναρτήσεων τέτοιο ώστε για κάθε f, g στο $\mathcal{A}$ να ισχύει $f \subseteq g$ ή $g \subseteq f$. Αποδείξτε ότι η $\bigcup \mathcal{A}$ είναι μία συνάρτηση.*

Λήμμα: *Εάν A, B, C, D είναι 4 σύνολα, τότε ισχύει η σχέση $(A \times B) \cup (C \times D) = (A \cup C) \times (B \cup D)$*

Απόδ. του Λήμματος: Πράγματι, ισχύει ότι:

$$(A \times B) \cup (C \times D) = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B\} \cup \{(x, y) \mid x \in C, y \in D\} = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B, x \in C, y \in D\}$$

$$= \{(x, y) \mid x \in A \cup C, y \in B \cup D\} = (A \cup C) \times (B \cup D)$$

Λύση της Άσκησης: Αρχικά, θα δείξουμε ότι το σύνολο $\bigcup \mathcal{A}$ είναι υποσύνολο ενός καρτεσιανού γινομένου. Πράγματι, καθεμία από τις $f \in \mathcal{A}$ είναι υποσύνολο του $Df \times Imf$, όπου Df, Imf είναι το πεδίο ορισμού της f και το σύνολο τιμών της αντίστοιχα. Επομένως, η ένωσή τους θα πρέπει να περιέχει το σύνολο $\bigcup \mathcal{A}$:

$$\bigcup \mathcal{A} \subseteq \bigcup_{f \in \mathcal{A}} Df \times Imf \overset{\text{'Λήμμα'}}{=} \left(\bigcup_{f \in \mathcal{A}} Df \right) \times \left(\bigcup_{f \in \mathcal{A}} Imf \right)$$

Επιπλέον, για να δείξουμε ότι τελικά είναι συνάρτηση, θα δείξουμε ότι για κάθε $y \in \bigcup_{f \in \mathcal{A}} Imf$ υπάρχει μοναδικό $y \in \bigcup_{f \in \mathcal{A}} Imf$ με την ιδιότητα $(x, y) \in \bigcup \mathcal{A}$. Πράγματι, εάν υπήρχαν 2 τέτοια (διακεκριμμένα) $y, \hat{y}$, θα έπρεπε να υπήρχαν 2 συναρτήσεις $f, \hat{f}$ για τις οποίες θα ίσχυε $(x, y) \in f, (x, \hat{y}) \in \hat{f}$. Λόγω της αρχικής υπόθεσης, θα πρέπει να συμβαίνει $f \subseteq \hat{f}$ ή $\hat{f} \subseteq f$, οπότε $\Big[(x, y) \text{ και } (x, \hat{y}) \in f\Big]$ ή $\Big[(x, y) \text{ και } (x, \hat{y}) \in \hat{f}\Big]$. Αυτό είναι άτοπο, αφού οι $f, \hat{f}$ είναι συναρτήσεις.

Άσκηση 7: *Βρείτε όλες τις δυνατές σχέσεις ισοδυναμίας στο σύνολο* $\{0, 1, 2\}$.

Γνωρίζουμε ότι σε τυχαίο σύνολο A, κάθε διαμέρισή του[2] (άπειρη ή μη) $\sqcup_x A_x$ ορίζει μία σχέση ισοδυναμίας '$\sim$' όπου:

$$a \sim b \Leftrightarrow a, b \in A_x, \text{ για κάποιον δείκτη } x$$

Η '$\sim$' είναι πράγματι σχέση ισοδυναμίας, αφού:

[2] Το σύμβολο '$\sqcup$' σημαίνει ξένη ένωση.

1. Είναι αυτοπαθής: $a \in A_x \Leftrightarrow a, a \in A_x \Leftrightarrow a \sim a$,
2. Είναι συμμετρική: $a \sim b \Leftrightarrow a, b \in A_x \Leftrightarrow b, a \in A_x \Leftrightarrow b \sim a$,
3. Είναι μεταβατική: $a \sim b, b \sim c \Leftrightarrow a, b \in A_x, b, c \in A_y \overset{A_x, A_y \text{ ξένα ή ταυτ.}}{\Longrightarrow} a, b, c \in A_x = A_y \Rightarrow a, c \in A_x \Rightarrow a \sim c$.

Αντίστροφα, κάθε σχέση ισοδυναμίας '$\sim$' σε σύνολο A είναι γνωστό ότι ορίζει διαμέριση του $A = \sqcup_x A_x$, αφού κάθε στοιχείο $a \in A$ ανήκει στο σύνολο $\left[{}^{a}/_{\sim}\right] = \{b \in A \mid b \sim a\}$ και επίσης κάθε 2 σύνολα $\left[{}^{a}/_{\sim}\right]$, $\left[{}^{b}/_{\sim}\right]$ με $a \not\sim b$ είναι ξένα μεταξύ τους $\big[$είναι ξένα, διότι αν δεν ήταν, θα υπήρχε $c \sim a, c \sim b \Rightarrow a \sim b$ (άτοπο)$\big]$.

Επομένως, αρκεί να βρεθούν οι δυνατές διαμερίσεις του συνόλου $\{0, 1, 2\}$.

1. $\{0, 1, 2\}$: $a \sim b$ για κάθε $a, b \in \{0, 1, 2\}$.
2. $\{0\} \cup \{1, 2\}$: $0 \sim 0$ και κάθε 2 μη μηδενικά στοιχεία είναι ισοδύναμα μεταξύ τους, αλλά όχι με το 0.
3. $\{0, 1\} \cup \{2\}$: $2 \sim 2$ και τα υπόλοιπα στοιχεία είναι ισοδύναμα μεταξύ τους, αλλά όχι με το 2.
4. $\{0, 2\} \cup \{1\}$: $1 \sim 1$ και τα υπόλοιπα στοιχεία είναι ισοδύναμα μεταξύ τους, αλλά όχι με το 1.
5. $\{0\} \cup \{1\} \cup \{2\}$: Κάθε στοιχείο είναι ισοδύναμο μόνο με τον εαυτό του.

Άσκηση 8: *Έστω $f : A \to B$ μία συνάρτηση από το σύνολο A στο σύνολο B και $\mathfrak{R}$ μία σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο B. Ορίζουμε το σύνολο Q ως εξής:*

$$Q = \{(x, y) \in A \times A \mid \big(f(x), f(y)\big) \in \mathfrak{R}\}$$

Αποδείξτε ότι το Q είναι μία σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο A.

Το σύνολο Q είναι σχέση ισοδυναμίας, αφού:

1. Είναι αυτοπαθής: Εάν $a \in A$, επειδή $\mathfrak{R}$ είναι σχέση ισοδυναμίας, $f(a)\mathfrak{R}f(a) \Rightarrow xQx, x \in f^{-1}(a)$. Επειδή $a \in f^{-1}(a)$, έπεται ότι aQa.
2. Είναι συμμετρική: Εάν aQb, τότε $f(a)\mathfrak{R}f(b)$. Επειδή $\mathfrak{R}$ είναι σχέση ισοδυναμίας, $f(b)\mathfrak{R}f(a) \Rightarrow xQy, x \in f^{-1}(b), y \in f^{-1}(a)$. Επειδή $b \in f^{-1}(b)$ και $a \in f^{-1}(a)$, έπεται ότι bQa.
3. Είναι μεταβατική: Εάν aQb και bQc, τότε $f(a)\mathfrak{R}f(b)$ και $f(b)\mathfrak{R}f(c)$. Επειδή $\mathfrak{R}$ είναι σχέση ισοδυναμίας, $f(a)\mathfrak{R}f(c) \Rightarrow xQy, x \in f^{-1}(a), y \in f^{-1}(c)$. Επειδή $a \in f^{-1}(a)$ και $c \in f^{-1}(c)$, έπεται ότι aQc.

Άσκηση 9: *Ορίζουμε μία σχεση στο σύνολο P των θετικών ακεραίων ως εξής:*

$$m \sim n \Leftrightarrow m, n \text{ έχουν τον ίδιο αριθμό (διαφορετικών ανά 2) πρώτων παραγόντων}$$

9.1 Αποδείξτε ότι η '$\sim$' είναι μία σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο P.

9.2 Υπάρχει συνάρτηση $f : \left[{}^{P}/_{\sim}\right] \to \left[{}^{P}/_{\sim}\right]$ τέτοια ώστε $f\left(\left[{}^{n}/_{\sim}\right]\right) = \left[{}^{3n}/_{\sim}\right]$ για κάθε $n \in P$;

9.1 Η σχέση '$\sim$' είναι σχέση ισοδυναμίας, αφού:

1. Είναι αυτοπαθής: Κάθε θετικός ακέραιος έχει ίδιο πλήθος πρώτων παραγόντων με τον εαυτό του.
2. Είναι συμμετρική: Εάν m και n έχουν το ίδιο πλήθος πρώτων παραγόντων, τότε και οι n και m έχουν το ίδιο πλήθος πρώτων παραγόντων.
3. Είναι μεταβατική: Εάν m, n έχουν το ίδιο πλήθος πρώτων παραγόντων και n, q έχουν το ίδιο πλήθος πρώτων παραγόντων, τότε και οι m, q έχουν το ίδιο πλήθος πρώτων παραγόντων.

9.2 Τέτοια συνάρτηση δεν υπάρχει, αφού παρατηρούμε ότι:

$$\left[{}^{2 \cdot 5}/_{\sim}\right] = \left[{}^{3 \cdot 5}/_{\sim}\right]$$

αλλά:

$$f\left(\left[{}^{2 \cdot 5}/_{\sim}\right]\right) = \left[{}^{2 \cdot 3 \cdot 5}/_{\sim}\right] \neq \left[{}^{3^2 \cdot 5}/_{\sim}\right] = f\left(\left[{}^{3 \cdot 5}/_{\sim}\right]\right)$$

Άσκηση 10:

10.1 Γράψτε μια έκφραση του συνόλου '4' χρησιμοποιώντας μόνο τα σύμβολα '∅', '{' και '}' (φυσικά και κόμματα).

10.2 Ποιά είναι η $\bigcup 4$;

10.3 Ποιά είναι η $\bigcap 4$;

10.1 Σύμφωνα με τον ορισμό των φυσικών αριθμών του *von Neumann*, το μηδέν ορίζεται ως το σύνολο $\emptyset$ και κάθε επόμενος φυσικός αριθμός είναι το σύνολο όλων των προηγούμενών του. Επαγωγικά λοιπόν έχουμε:

$$
\begin{aligned}
0 &= \emptyset \\
1 &= \{\emptyset\} \\
2 &= \big\{\emptyset, \{\emptyset\}\big\} \\
3 &= \Big\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\Big\} \\
4 &= \Big\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \Big\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\Big\}\Big\}
\end{aligned}
$$

10.2 Επειδή το σύνολο 4 είναι ακριβώς το $\{0, 1, 2, 3\}$, η ένωση $\bigcup 4$ είναι ακριβώς $0 \cup 1 \cup 2 \cup 3$. Επειδή $0 \subset 1 \subset 2 \subset 3$, τελικά έχουμε ότι:

$$\bigcup 4 = 3$$

10.3 Επειδή το σύνολο 4 είναι ακριβώς το $\{0, 1, 2, 3\}$, η τομή $\bigcap 4$ είναι ακριβώς $0 \cap 1 \cap 2 \cap 3$. Επειδή $0 = \emptyset$, τελικά έχουμε ότι:

$$\bigcap 4 = 0$$

Άσκηση 11: *Έστω A ένα μεταβατικό σύνολο. Αποδείξτε τα ακόλουθα:*

11.1 Αν $x \in B$ και $B \in A$, τότε $x \in A$.

11.2 $\bigcup A \subseteq A$.

11.3 $A \subseteq \mathcal{P}(A)$

11.1 Επειδή το A είναι μεταβατικό και $B \in A$, θα πρέπει $B \subseteq A$. Άρα, για $x \in B$, θα πρέπει εφόσον $B \subseteq A$, να ισχύει $x \in A$.

11.2 Έστω ένα $x \in \bigcup A$. Εξ ορισμού της ένωσης, θα πρέπει να υπάρχει $B \in A$ τέτοιο ώστε $x \in B$. Επειδή το A είναι μεταβατικό, $B \subseteq A$ και επομένως $x \in A$. Από αυτό έπεται $\bigcup A \subseteq A$.

12.3 Έστω τυχαίο $x \in A$. Επειδή το A είναι μεταβατικό, $x \subseteq A$, και επομένως $x \in \mathcal{P}(A)$. Δηλαδή:

$$\forall x \in A, x \in \mathcal{P}(A) \Rightarrow A \subseteq \mathcal{P}(A)$$

Άσκηση 12: *Αν το σύνολο A είναι μεταβατικό, δείξτε ότι $\bigcup A^+ = A$.*

Εάν το σύνολο A είναι μεταβατικό, στην 'Άσκηση 11, 11.2' έχουμε δείξει ότι $\bigcup A \subseteq A$. Επειδή $A \subseteq A$, θα πρέπει επιπλέον:

$$\bigcup A \cup \{A\} \subseteq A \Rightarrow \bigcup A^+ \subseteq A$$

Για τον αντίστροφο εγκλεισμό, παρατηρούμε ότι $A \supseteq A$, οπότε $\bigcup A \cup \{A\} \supseteq A$.

Τελικά, προκύπτει το ζητούμενο, ότι δηλαδή $\bigcup A^+ = A$.

Άσκηση 13: *Αποδείξτε ότι κάθε φυσικός αριθμός είναι μεταβατικό σύνολο.*

Θα δείξουμε ότι γι κάθε φυσικό αριθμό n, εάν $x \in n$, τότε $x \subseteq n$. Η απόδειξη αυτή θα γίνει με επαγωγή.

Για την βάση της επαγωγής, παρατηρούμε ότι με τετριμμένο τρόπο $\forall x \in \emptyset, x \subseteq \emptyset$, αφού το κενό σύνολο δεν έχει στοιχεία.

Για το βήμα της επαγωγής, θεωρούμε ότι η επαγωγική υπόθεση ισχύει για κάποιον $n \in \omega$, και θα δείξουμε ότι ισχύει και για τον $S_n \in \omega$. Πράγματι, εάν $x \in S_n$, τότε:

$$\begin{aligned} x \in S_n &\Rightarrow x \in n \cup \{n\} \\ &\Rightarrow x \in n \text{ ή } x = n \\ &\Rightarrow x \subseteq n \text{ ή } x = n \\ &\Rightarrow x \subseteq n \cup \{n\} \\ &\Rightarrow x \subseteq S_n \end{aligned}$$

Άσκηση 14: *Αποδείξτε ότι το σύνολο ω των φυσικών αριθμών είναι μεταβατικό σύνολο.*

Για να δείξουμε ότι το σύνολο των φυσικών αριθμών ω είναι μεταβατικό, θα δείξουμε με επαγωγή ότι για κάθε $n \in \omega$ ισχύει $n \subseteq \omega$.

Για την βάση της επαγωγής, το 0 ανήκει στο σύνολο των φυσικών αριθμών και επίσης είναι (τετριμμένα) υποσύνολό του, αφού $0 = \emptyset \subseteq \omega$.

Για το βήμα της επαγωγής, υποθέτουμε ότι για κάποιον φυσικό n ιαχύει $n \subseteq \omega$. Θα δείξουμε ότι για τον S_n επίσης ισχύει $S_n \subseteq \omega$. Πράγματι, το S_n γράφεται ως $S_n = n \cup \{n\}$, με $n \subseteq \omega$, λόγω της επαγωγικής υπόθεσης. Επειδή επιπλέον $n \in \omega$, θα πρέπει $\{n\} \subseteq \omega$, οπότε τελικά $S_n \subseteq \omega$.

Άσκηση 15: *Αποδείξτε ότι αν το σύνολο A είναι μεταβατικό, τότε και το $A^+ = A \cup \{A\}$ είναι επίσης ένα μεταβατικό σύνολο.*

Έστω ένα στοιχείο $x \in A \cup \{A\}$. Εάν $x \in A$, τότε επειδή το A είναι μεταβατικό, $x \subseteq A \Rightarrow x \subseteq A \cup \{A\} = A^+$. Εάν $x \in \{A\} \Rightarrow x = A$, τότε $x \subseteq A \Rightarrow x \subseteq A \cup \{A\}$. Σε κάθε περίπτωση, $x \in A^+ \Rightarrow x \subseteq A^+$, επομένως το A^+ είναι ένα μεταβατικό σύνολο.

Άσκηση 16:

16.1 Αποδείξτε ότι αν το σύνολο A είναι μεταβατικό, τότε και το $\mathcal{P}(A)$ είναι επίσης ένα μεταβατικό σύνολο.

16.2 Αποδείξτε ότι αν το $\mathcal{P}(A)$ είναι μεταβατικό σύνολο, τότε και το A είναι μεταβατικό σύνολο.

16.1 Έστω B να είναι ένα στοιχείο του δυναμοσυνόλου $\mathcal{P}(A)$. Εάν το B είναι το $\emptyset$, τότε $\emptyset \subseteq \mathcal{P}(A)$. Διαφορετικά, θεωρούμε τυχαίο $x \in B \subseteq A$. Επειδή το A είναι μεταβατικό, το x θα πρέπει να είναι υποσύνολό του. Επομένως, το B αποτελείται από υποσύνολα του A, άρα $B \subseteq \mathcal{P}(A)$. Από αυτό προκύπτει ότι το $\mathcal{P}(A)$ είναι ένα μεταβατικό σύνολο.

16.2 Θεωρούμε τυχαίο $B \in \mathcal{P}(A)$. Επειδή το $\mathcal{P}(A)$ είναι μεταβατικό, $B \subseteq \mathcal{P}(A)$. Επειδή το A είναι υποσύνολο του εαυτού του, θα ανήκει στο δυναμοσύνολό του, και επομένως $A \subseteq \mathcal{P}(A)$. Επομένως, εάν $x \in A$ είναι τυχαίο στοιχείο, θα πρέπει $x \in \mathcal{P}(A)$. Δηλαδή το x είναι ένα υποσύνολο του A. Από αυτό προκύπτει ότι το A είναι ένα μεταβατικό σύνολο.