Μερικές ασκήσεις στην Αρμονική Ανάλυση

Αναστάσιος Φράγκος Παρασκευή, 03 Ιουνίου 2022

Συμβολισμοί - Παρατηρήσεις

1. Εάν A είναι ένα σύνολο, $\#A$ είναι η πληθικότητά του **2.** χ_A είναι η δείκτρια συνάρτηση του συνόλου A **3.** Με $O(f)$ θα συμβολίζουμε το σύνολο συναρτήσεων $O(f) = \{g \mid g \leqslant f \text{ τελικά}\}$ **4.** Με $\mathscr{O}$ (και διάφορους δείκτες) θα συμβολίζουμε σταθερές που προέρχονται από ολοκληρώματα ολοκληρώσημων συναρτήσεων - οπότε ας μην υπάρχει σύγχυση με το $O(f)$ **5.** $f_n \to_o f$: Η ακολουθία f_n συγκλίνει ομοιόμορφα στο f

Περιεχόμενα

1 Μέτρο και Ολοκλήρωμα Lebesgue

Άσκηση 1.1.

i. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια Lebesgue ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Αποδείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f(n^2x)$ συγκλίνει $\lambda-$σχεδόν παντού.

Υπόδειξη: Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε την:

$$\int |f(tx)|\, d\lambda(x) = \frac{1}{t}\int |f(x)|\, d\lambda(x), \text{ για } t > 0$$

ii. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ ένα Lebesgue μετρήσιμο σύνολο με $\lambda(A) < \infty$. Αποδείξτε ότι σχεδόν για κάθε x το σύνολο $D_n = \{n \in \mathbb{N} \mid n^2x \in A\}$ είναι πεπερασμένο.

■

$\boxed{\text{i.}}$ *Λύση:* Γενικά αληθεύει ένα γενικότερο (της υπόδειξης) αποτέλεσμα, το οποίο το είδαμε και στη Θεωρία Μέτρου. Το αποδεικνύουμε στην επόμενη πρόταση:

Πρόταση 1.1.1: *Για κάθε Lebesgue ολοκληρώσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ισχύει η σχέση:*

$$\int f(tx)\, d\lambda(x) = \frac{1}{t}\int f(x)\, d\lambda(x), \text{ για } t > 0$$

Απόδειξη: Η σχέση αποδεικνύεται με τον τυπικό πλέον τρόπο: θα δειχθεί πρώτα για δείκτριες συναρτήσεις, έπειτα για απλές μετρήσιμες συναρτήσεις, με την μονότονη σύγκλιση για μη αρνητικές και τέλος θα περαστεί σε μετρήσιμες συναρτήσεις γενικά.

Για τις δείκτριες: Έστω A ένα μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και $f = \chi_A$ η αντίστοιχη μετρήσιμη συνάρτηση. Επειδή $tx \in A \Leftrightarrow x \in (1/t)A$, έπεται ότι:

$$\int \chi_A(tx)\, d\lambda(x) = \int \chi_{(1/t)A}\, d\lambda(x) = \frac{1}{t}\lambda(A)$$

Επομένως:

$$\int \chi_A(tx)\, d\lambda(x) = \frac{1}{t}\lambda(A) = \frac{1}{t}\int \chi_A(x)\, d\lambda(x)$$

Για τις απλές μετρήσιμες: Έστω $f = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}$ μια απλή μετρήσιμη συνάρτηση, με τα A_i να είναι ανά δύο ξένα μετρήσιμα σύνολα και $a_i > 0$. Χρησιμοποιώντας το προηγούμενο βήμα και την γραμμικότητα του ολοκληρώματος, έχουμε ότι:

$$\int \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}(tx)\ d\lambda(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \int \chi_{A_i}(tx)\ d\lambda(x) = \frac{1}{t} \sum_{i=1}^{n} a_i \int \chi_{A_i}(x)\ d\lambda(x) = \frac{1}{t} \int \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}(x)\ d\lambda(x)$$

Για τις μη αρνητικές μετρήσιμες: Έστω f μια μη αρνητική μετρήσιμη συνάρτηση. Η συνάρτηση $f(tx)$ είναι κι αυτή μετρήσιμη συνάρτηση (κι αυτό είναι υπόθεση ρουτίνας να ελεγχθεί μέσω του ορισμού της μετρησιμότητας). Θεωρούμε λοιπόν μια ακολουθία απλών μετρήσιμων συναρτήσεων $s_n \nearrow f$ και παρατηρούμε ότι $s_n(tx) \nearrow f(tx)$. Από το προηγούμενο βήμα προκύπτει:

$$\int s(tx)\ d\lambda(x) = \frac{1}{t} \int s(x)\ d\lambda(x)$$

και από το *Θεώρημα μονότονης σύγκλισης:*

$$\int s(tx)\ d\lambda(x) \to \int f(tx)\ d\lambda(x) \ \textbf{και}\ \frac{1}{t} \int s(x)\ d\lambda(x) \to \frac{1}{t} \int f(tx)\ d\lambda(x)$$

Αυτό αποδεικνύει την συγκεκριμένη περίπτωση, από τη μοναδικότητα του ορίου.

Για τις μετρήσιμες: Έστω f μια μετρήσιμη συνάρτηση. Γράφουμε την f ισονύναμα στη μορφή $f = f^+ - f^-$ και εφαρμόζουμε το προηγούμενο βήμα. Το ζητούμενο λοιπόν αποδεικνύεται με αυτόν τον τρόπο στην γενικότερη περίπτωση:

$$\int f(tx)\ d\lambda(x) = \int f^+(tx)\ d\lambda(x) - \int f^-(tx)\ d\lambda(x) = \frac{1}{t} \int f^+(x)\ d\lambda(x) - \frac{1}{t} \int f^-(x)\ d\lambda(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int f(tx)\ d\lambda(x) = \frac{1}{t} \int f(x)\ d\lambda(x)$$

△

Για τη λύση λοιπόν της άσκησης, αρκεί να δειχθεί ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} |f(n^2 x)|$ είναι ολοκληρώσιμη (οπότε θα έχουμε επιπλέον αποδείξει την απόλυτη σύγκλιση σχεδόν παντού). Προφανώς η σειρά είναι μετρήσιμη συνάρτηση, αφού είναι (αύξον) όριο μετρήσιμων συναρτήσεων. Δείχνοντας ότι το ολοκλήρωμα είναι πεπερασμένο, αποδεικνύουμε την ολοκληρωσιμότητα.

$$\begin{aligned}
\int \sum_{n=1}^{\infty} |f(n^2 x)|\ d\lambda(x) &= \int \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} |f(n^2 x)|\ d\lambda(x) \\
&\overset{*}{=} \lim_{N\to\infty} \int \sum_{n=1}^{N} |f(n^2 x)|\ d\lambda(x) \\
&= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \int |f(n^2 x)|\ d\lambda(x) \\
&\overset{**}{=} \underbrace{\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right)}_{\zeta(2)=\pi^2/6} \cdot \underbrace{\int |f(x)|\ d\lambda(x)}_{\mathscr{O}(|f|)\in\mathbb{R}} \\
&= \frac{\pi^2}{6} \mathscr{O}(|f|) < \infty
\end{aligned}$$

Στην ισότητα άστρο ($*$) χρησιμοποιείται το *Θεώρημα της μονότονης σύγκλισης* (ή το *λήμμα Beppo-Levi*, πιο άμεσα) και στην ισότητα διπλό άστρο ($**$) η **Πρόταση 1.1.1**.

□

$\boxed{\text{ii.}}$ *Λύση:* Η απόδειξη του συγκεκριμένου είναι σχετικά άμεση συνέπεια του i. Έχει δειχθεί ότι για κάθε Lebesgue ολοκληρώσιμη συνάρτηση f, σχεδόν για κάθε x η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f(n^2 x)$ συγκλίνει - ειδικότερα, επειδή $\lambda(A) < \infty$ η $f = \chi_A$ είναι ολοκληρώσιμη και:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \chi_A(k^2 x) < \infty \Rightarrow \sum_{k\in D_n} < \infty, \text{ σχεδόν για κάθε } x$$

Έτσι λοιπόν, $\#D_n = \sum_{k\in D_n} < \infty$ σχεδόν για κάθε x.

□

Άσκηση 1.2. Η συνάρτηση $\Gamma : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ ορίζεται ως εξής:

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt, \text{ όταν } x > 0$$

Αποδείξτε ότι για κάθε $x > 0$:

$$\Gamma(x) \overset{*}{=} \lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\, dt \overset{*}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\cdot \ldots \cdot (x+n)}$$

■

Λήμμα 1.2.1: *Για κάθε $x > 0$ αληθεύει ο εγκλεισμός $O(e^{-t}) \subseteq O(1/t^{x+1})$, όπου φυσικά τα αντίστοιχα σύνολα ορίζονται:*

$$O(e^{-t}) := \left\{ g : [0,\infty) \to \mathbb{R} \mid \exists c \in \mathbb{R}^+_*,\ cg \leqslant e^{-(\cdot)} \text{ τελικά} \right\}$$

και:

$$O(1/t^{x+1}) := \left\{ g : [0,\infty) \to \mathbb{R} \mid \exists c \in \mathbb{R}^+_*,\ cg \leqslant 1/(\cdot)^{x+1} \text{ τελικά} \right\}$$

Απόδειξη: Πράγματι, το συγκεκριμένο είναι απόρροια του γνωστού αποτελέσματος:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{e^t}{t^{x+1}} = \infty \Rightarrow \lim_{t\to\infty} \left[\frac{1}{e^t} \bigg/ \frac{1}{t^{x+1}} \right] = 0 < 1, \text{ για κάθε } x > 0$$

(το οποίο αποδεικνύεται με εφαρμογή του κανόνα l' Hopital $\lfloor x+1 \rfloor$ φορές). Μάλιστα, η σταθερά $c > 0$ μπορεί να επιλεγεί αυθαίρετα στην περίπτωσή μας.

△

Λύση: Θα αποδείξουμε πρώτα την κόκκινη ισότητα κι έπειτα μέσω αυτής θα δείξουμε την μπλε.

Για την κόκκινη: Η σύγκλιση της σειράς των ολοκληρωμάτων καθώς και το όριό της θα εξασφαλιστεί μέσω του *Θεωρήματος της κυριαρχημένης σύγκλισης:*

> *Έστω $f_n : E \to \overline{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty]$ ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων. Υποθέτουμε ότι η σύγκλιση $f_n \to f$ αληθεύει $\lambda-$σχεδόν παντού κι επιπλέον ότι υπάρχει $g : E \to [0, \infty]$ ολοκληρώσιμη, τέτοια ώστε $\forall n \in \mathbb{N},\ |f_n| \leqslant g$ σχεδόν παντού. Τότε οι f_n, f είναι ολοκληρώσιμες και:*
>
> $$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n\, d\lambda = \int_E \lim_{n\to\infty} f_n\, d\lambda = \int_E f\, d\lambda$$

Φυσικά στην περίπτωσή μας, όπως άλλωστε θα φανεί από την απόδειξη, το *Θεώρημα της μονότονης σύγκλισης* αρκεί για την λύση της άσκησης. Δεν έχει σημασία στην συγκεκριμένη περίπτωση ποιό εκ των δύο θα χρησιμοποιηθεί, αφού ουσιαστικά το *Θεώρημα της μονότονης σύγκλισης* αποτελεί ειδική περίπτωση του *Θεωρήματος της κυριαρχημένης σύγκλισης*, εάν υποτεθεί επιπλέον ότι $f_n \nearrow f$ και η f είναι ολοκληρώσιμη.

Θεωρούμε την ακολουθία συναρτήσεων $\eta_n : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ η οποία ορίζεται ως εξής:

$$\eta_n(t) = \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \chi_{[0,n]}(t)$$

Η ακολουθία αυτή είναι αύξουσα ακολουθία συναρτήσεων (δηλαδή $\eta_m \leqslant \eta_n$ για κάθε $1 \leqslant m < n$) και έχει όριο τη συνάρτηση e^{-t}. Ειδικότερα:

$$\text{Για κάθε } n \in \mathbb{N} \text{ έχουμε ότι } \eta_n(t) \leqslant \big(\limsup_n \eta_n\big)(t) = e^{-t}, \text{ ομοιόμορφα για όλα τα } t \in \mathbb{R}$$

Επιπλέον, το όριο e^{-t} φράσσεται έπειτα ενός t_0 από την ποσότητα $1/t_0^{x+1}$, σύμφωνα με το **Λήμμα 1.2.1**. Ορίζουμε τώρα:

$$g(t) = e^{-t} t^{x+1} \chi_{[0,t_0)}(t) + \frac{1}{t^{x+1}} \chi_{[t_0,\infty)}(t)$$

και παρατηρούμε ότι:

$$\eta_n(t) t^{x+1} \leqslant e^t t^{x+1} \leqslant g(t), \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N} \text{ και } t > 0$$

Επιπλέον:

$$\int_0^\infty \eta_n(t) t^{x-1}\, dt \leqslant \int_0^\infty g(t)\, dt = \overbrace{\int_0^{t_0} e^{-t} t^{x-1}\, dt}^{\mathscr{O}(t_0)\in\mathbb{R}} + \int_{t_0}^\infty \frac{1}{t^2}\, dt = \mathscr{O}(t_0) + \frac{1}{t_0} < \infty$$

οπότε το *Θεώρημα της κυριαρχημένης σύγκλισης* εφαρμόζει και εξασφαλίζει ότι οι $\eta_n(t)t^{x-1}$, $e^{-t}t^{x-1}$ είναι ολοκληρώσιμες (κατ' επέκταση η Γ καλώς ορίζεται στο $\mathbb{R}$) και αληθεύει η σύγκλιση:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,dt = \int_0^\infty \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,dt = \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}\,dt =: \Gamma(x)$$

Για την μπλε: Η δεύτερη ισότητα θα προκύψει άμεσα υπολογίζοντας την τιμή καθενός από τα ολοκληρώματα:

$$\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,dt$$

Έστω ένα $n\in\mathbb{N}$. Εφαρμόζοντας τη διαδικασία της παραγοντικής ολοκλήρωσης στο εν λόγω ολοκλήρωμα, προκύπτει ότι:

$$\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,dt = \cancel{\int_0^n \left[\frac{1}{x}t^x\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right]'}\,dt + \frac{n}{n}\cdot\frac{1}{x}\int_0^n t^x\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-1}\,dt$$

και ξανά με τη διαδικασία της παραγοντικής ολοκλήρωσης:

$$\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,dt = \cancel{\frac{n}{n}\cdot\frac{1}{x}\int_0^n \left[\frac{1}{x+1}t^{x+1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-1}\right]'}\,dt + \frac{n(n-1)}{n^2}\cdot\frac{1}{x(x+1)}\int_0^n t^{x+1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-2}\,dt$$

Είναι φανερό πλέον ότι κανείς μπορεί να συνεχίσει επαγωγικά τη διαδικασία, έως ότου καταλήξει στην ισότητα:

$$\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,dt = \frac{n!}{n^n}\cdot\frac{1}{x(x+1)\cdot\ldots\cdot(x+n-1)}\int_0^n t^{x+n-1}\,dt$$

Ισοδύναμα λοιπόν:

$$\begin{aligned}\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,dt &= \frac{n!}{n^n}\cdot\frac{1}{x(x+1)\cdot\ldots\cdot(x+n-1)}\left[\frac{1}{x+n}t^{x+n}\right|_0^n \\ &= \frac{n^x n!}{x(x+1)\cdot\ldots\cdot(x+n-1)}\end{aligned}$$

και με χρήση της κόκκινης ισότητας, προκύπτει το ζητούμενο:

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty}\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,dt = \lim_{n\to\infty}\frac{n^x n!}{x(x+1)\cdot\ldots\cdot(x+n)}$$

□

Άσκηση 1.3. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Υπολογίστε το:

$$\lim_{t\to\infty}\int |f(x+t)+f(x)|\,d\lambda(x)$$

■

<u>*Λύση:*</u> Έστω f μια λοκληρώσιμη συνάρτηση. Έστω $\varepsilon>0$ και $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση με συμπαγή φορέα $\operatorname{supp} g$ που προσεγγίζει την f με την εξής έννοια: $||f-g||_1<\varepsilon$. Εφόσον η συνάρτηση g δεν μηδενίζεται στο συμπαγές σύνολο $S=\operatorname{supp} g$, η μεταφορά αυτής δεν θα μηδενίζεται στο $S_{+t}=t+\operatorname{supp} g$. Μάλιστα, αρκούντως μεγάλου t οι δύο φορείς έχουν κενή τομή. Γράφουμε λοιπόν:

$$||g(\cdot+t)+g||_1 = \int_{S\cup S_{+t}} |g_n(x+t)+g_n(x)|\,d\lambda(x) = \int_S |g(x)|\,d\lambda(x) + \int_{S_{+t}} |g(x+t)|\,d\lambda(x) = 2||g||_1$$

Παρατηρούμε τώρα ότι, για αρκετά μεγάλο t:

$$2||f||_1 \stackrel{*}{\geqslant} ||f(\cdot+t)+f(\cdot)||_1 = ||f(\cdot+t)-g(\cdot+t)+g(\cdot+t)+g(\cdot)-g(\cdot)+f||_1$$

και:

$$||f(\cdot+t)+f(\cdot)||_1 = ||f(\cdot+t)-g(\cdot+t)+g(\cdot+t)+g(\cdot)-g(\cdot)+f||_1 \stackrel{**}{\geqslant} ||g(\cdot+t)-g(\cdot)||_1 - 2||f-g||_1$$

όπου η ανισότητα άστρο $(*)$ είναι η τριγωνική και η ανισότητα διπλό άστρο $(**)$ είναι η αντίθετη τριγωνική. Παρατηρούμε τώρα ότι, επειδή $||f-g||_1 < \varepsilon$, θα πρέπει

$$||g||_1 \geqslant ||f||_1 - \varepsilon$$

και κατ' επέκταση:

$$2||f||_1 \geqslant ||f(\cdot + t) + f(\cdot)||_1 \geqslant ||f||_1 - \varepsilon$$

Με όριο τώρα $\varepsilon \to 0^+$ έπεται το ζητούμενο.

$$|f(\cdot + t) + f(\cdot)||_1 = 2||f||_1$$

□

Άσκηση 1.4. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια Lebesgue ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με:

$$g_n(x) = n \int_x^{x+1/n} f(y)\, dy$$

i. Αποδείξτε ότι $g_n(x) \to f(x)$ $\lambda-$σχεδόν παντού.

ii. Αποδείξτε ότι $\int_{\mathbb{R}} |g_n|\, d\lambda \leqslant \int_{\mathbb{R}} |f|\, d\lambda$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

iii. Αποδείξτε ότι $\int_{\mathbb{R}} |g_n|\, d\lambda \to \int_{\mathbb{R}} |f|\, d\lambda$.

■

Θεώρημα 1.4.1: *(Θεώρημα παραγώγισης του Lebesgue) Έστω f μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση στον $\mathbb{R}^d$. Για κάθε οικογένεια κυρτών συνόλων $\mathcal{B}$ με την ιδιότητα «υπάρχει υπακολουθία συνόλων B ώστε $B \downarrow \{x\}$», αληθεύει:*

$$f(x) = \lim_{\mathcal{B} \ni B \downarrow \{x\}} \frac{1}{\lambda(B)} \int_B f(y)\, d\lambda(y)$$

Μάλιστα η απόδειξη «λειτουργεί» και για μεγαλύτερη οικογένεια $\mathcal{B}$, αλλά δεν θα χρειαστεί εν προκειμένω.

△

$\boxed{\text{i.}}$ *Λύση:* Επειδή η οικογένεια $\mathcal{B} = \big\{[x, x+1/n]\big\}$ είναι οικογένεια κυρτών συνόλων και $(x, x+1/n) \downarrow \{x\}$ από το **Θεώρημα 1.4.1** προκύπτει το ζητούμενο.

□

$\boxed{\text{ii.}}$. *Λύση:* Παρατηρούμε ότι:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} |g_n|\, d\lambda &= \int_{\mathbb{R}} \left| n \int_{\mathbb{R}} \chi_{[x,x+1/n]}(y) f(y)\, d\lambda(y) \right|\, d\lambda(x) \\ &\leqslant \int_{\mathbb{R}} n \int_{\mathbb{R}} \chi_{[x,x+1/n]}(y) |f(y)|\, d\lambda(y) d\lambda(x)\end{aligned}$$

Με εναλλαγή τώρα των ολοκληρωμάτων, θα προκύψει το ζητούμενο.

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} |g_n|\, d\lambda &\leqslant \int_{\mathbb{R}} n \int_{\mathbb{R}} \chi_{[x,x+1/n]}(y) |f(y)|\, d\lambda(y) d\lambda(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(n \int_{\mathbb{R}} \chi_{[y-1/n,y]}(x)\, d\lambda(x) \right) |f(y)|\, d\lambda(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}} |f(y)|\, d\lambda(y)\end{aligned}$$

□

$\boxed{\text{iii.}}$ *Λύση:* Από το λήμμα του Fatou έχουμε:

$$\int_{\mathbb{R}} \liminf_{n\to\infty} |g_n|\, d\lambda \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} |g_n|\, d\lambda$$

κι από το i., το $\liminf g_n$ είναι στην πραγματικότητα όριο, που ισούται με f. Δηλαδή:

$$\int_{\mathbb{R}} |f|\, d\lambda \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} |g_n|\, d\lambda$$

Χρησιμοποιώντας το ii. λοιπόν, έχουμε:

$$\limsup_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} |g_n| \; d\lambda \leqslant \int_{\mathbb{R}} |f| \; d\lambda$$

το οποίο δίνει το ζητούμενο, αφού:

$$\liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} |g_n| \; d\lambda \leqslant \limsup_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} |g_n| \; d\lambda \leqslant \int_{\mathbb{R}} |f| \; d\lambda \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} |g_n| \; d\lambda \leqslant \limsup_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} |g_n| \; d\lambda$$

□

2 Οι χώροι L^p

Άσκηση 2.1. Έστω $1 < p < \infty$ και $f : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to [0, \infty]$ μετρήσιμη συνάρτηση. Αποδείξτε ότι:

$$\left[\int \left(\int f(x,y)\,dy\right)^p\,dx\right]^{1/p} \leqslant \int \left(\int f(x,y)^p\,dx\right)^{1/p}\,dy$$

■

Πρόταση 2.1.1: *Έστω f μια $p-$ολοκληρώσιμη συνάρτηση (δηλαδή $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$). Η $p-$νόρμα της f ισούται με την ποσότητα:*

$$||f||_p = \max_{\substack{g \in L^q(\mathbb{R}^n) \\ ||g||_q \leqslant 1}} \left\{\int f \cdot g\,d\lambda\right\}, \text{ όπου } q \text{ είναι ο συζυγής εκθέτης του } p$$

△

Θεώρημα 2.1.1: *(Ανισότητα Hölder) Έστω E ένα μετρήσιμο σύνολο και f, g δύο μετρήσιμες συναρτήσεις $f \in L^p(E)$, $g \in L^q(E)$. Το γινόμενο $f \cdot g$ είναι ολοκληρώσιμη συνάρτηση (δηλαδή $f \cdot g \in L^1(E)$) και αληθεύει η ανισότητα:*

$$\int_E |f \cdot g|\,d\lambda \leqslant \left(\int_E |f|^p\,d\lambda\right)^{1/p} \cdot \left(\int_E |g|^q\,d\lambda\right)^{1/q}$$

Ισοδύναμα, με συμβολισμούς νορμών $||f \cdot g||_1 \leqslant ||f||_p \cdot ||g||_q$.

△

Λύση: Ας αγνοήσουμε προσωρινά τις προϋποθέσεις της f - ας υποθέσουμε προσωρινά ότι η f έχει οποιαδήποτε ιδιότητα χρειάζεται στην ακόλουθη απόδειξη. Θεωρούμε $g \in L^q(\mathbb{R}^d)$ μια συνάρτηση με $||g||_q \leqslant 1$, όπου q είναι ο συζυγής εκθέτης του p. Για τη συνάρτηση $f \cdot g$ αληθεύει η *ανισότητα Hölder:*

$$\int |f(x,y)g(x)|\,dx \leqslant \left(\int |g(x)|^q\,dx\right)^{1/q} \cdot \left(\int |f(x,y)|^p\,dx\right)^{1/p} \leqslant \left(\int |f(x,y)|^p\,dx\right)^{1/p} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int\int |f(x,y)g(x)|\,dxdy \leqslant \int \left(\int |f(x,y)|^p\,dx\right)^{1/p}\,dy$$

Χρησιμοποιώντας τώρα το *Θεώρημα του Fubini* εναλλάσσουμε τα πρώτα ολοκληρώματα και έχουμε την εξής σχέση:

$$\int\int |f(x,y)|\,dy \cdot |g(x)|\,dx \leqslant \int \left(\int |f(x,y)|^p\,dx\right)^{1/p}\,dy$$

Με maximum στην ανισότητα ως προς τις g, προκύπτει το ζητούμενο:

$$\max_{\substack{g \in L^q(\mathbb{R}^d) \\ ||g||_q \leqslant 1}} \left\{\int\int |f(x,y)|\,dy \cdot |g(x)|\,dx\right\} \leqslant \int \left(\int |f(x,y)|^p\,dx\right)^{1/p}\,dy \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left|\left|\int f(x,y)\,dy\right|\right|_p = \int \left(\int f(x,y)\,dy\right)^p\,dx \leqslant \int \left(\int |f(x,y)|^p\,dx\right)^{1/p}\,dy$$

Είναι φανερό ότι η απόδειξη δεν εφαρμόζει για κάθε μετρήσιμη f, κι αυτό ουσιαστικά έγκειται στο γεγονός ότι χρησιμοποιείται το *Θεώρημα του Fubini.* Απαιτείται λοιπόν οι f να είναι ολοκληρώσιμες. Για την γενική περίπτωση των μετρήσιμων συναρτήσεων, θεωρούμε προσεγγίζουσα ακολουθία $s_n \nearrow f$ απλών μετρήσιμων συναρτήσεων - οι οποίες είναι ολοκληρώσιμες - και μελετούμε γι' αυτές το εν λόγω ερώτημα. Η προσέγγιση θα μπορούσε επίσης να γίνει με συνεχείς συναρτήσεις συμπαγούς φορέα.

□

Άσκηση 2.2. Έστω $1 \leqslant p < \infty$ και $f \in L^p\big([0,\infty)\big)$ μετρήσιμη συνάρτηση. Αποδείξτε ότι:

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^\infty f(x)e^{-nx}\,dx = 0$$

Υπόδειξη: Εξετάστε τις περιπτώσεις $p = 1$ και $1 < p < \infty$ ξεχωριστά. ■

Λύση:

Βήμα I: Υποθέτουμε ότι $1 < p < \infty$. Η $e^{-qn(\cdot)}$ είναι κατά Riemann ολοκληρώσιμη για κάθε $q \geqslant 1$, οπότε για κάθε τέτοιο q, $e^{-qn(\cdot)} \in L^q\big([0,\infty)\big)$ - ειδικότερα το ανήκειν ισχύει για τον συζυγή εκθέτη q του p. Βάσει της *ανισότητας του Hölder:*

$$\int_0^\infty f(x)e^{-nx}\,dx \leqslant \left(\int_0^\infty f(x)^p\,dx\right)^{1/p} \cdot \left(\int_0^\infty e^{-qnx}\,dx\right)^{1/q}$$

από το οποίο προκύπτει:

$$\int_0^\infty f(x)e^{-nx}\,dx \leqslant ||f||_p \cdot \left(\int_0^\infty e^{-qnx}\,dx\right)^{1/q} = ||f||_p \cdot \left(\frac{1}{qn}\right)^{1/q} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Βήμα II: Εάν είχαμε $p = 1$, τότε παρατηρούμε ότι $|f(x)e^{-nx}| \leqslant |f(x)|$ και η f είναι ολοκληρώσιμη συνάρτηση, οπότε από το *Θεώρημα της κυριαρχημένης σύγκλισης:*

$$\lim_{n\to\infty}\int f(x)e^{-nx}\,dx = \int \lim_{n\to\infty} f(x)e^{-nx}\,dx = \int 0\,dx = 0$$

□

Σχόλιο: Το αποτέλεσμα αυτό ισχύει ακόμη κι αν $p = \infty$, αφού τότε:

$$\int_0^\infty f(x)e^{-nx}\,dx \leqslant ||f||_\infty \cdot \int_0^\infty e^{-nx}\,dx = ||f||_\infty \cdot \frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

3 Σειρές Fourier

Άσκηση 3.1. Έστω $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$ μια τριγωνομετρική σειρά και $s_n(x)$ η σειρά των μερικών αθροισμάτων της. Δηλαδή:

$$s_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx},\ n \in \mathbb{N}$$

Υποθέτουμε ότι υπάρχουν $f \in C(\mathbb{T})$ και υπακολουθία $\{s_{k_n}\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ τέτοια ώστε:

$$||f - s_{k_n}||_\infty \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Αποδείξτε ότι για κάθε $k \in \mathbb{Z}$:

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}\,dx$$

■

Λήμμα 3.1.1: *Αληθεύει ότι* $\widehat{s_n}(k) = c_k$, *όταν φυσικά* $|k| \leqslant n$.

Απόδειξη: Πράγματι, παρατηρούμε ότι:

$$\begin{aligned}\widehat{s_n}(k) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} s_n(x)e^{-ikx} \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{\ell=-n}^{n} c_\ell e^{i\ell x}e^{-ikx}\,dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\sum_{\ell=-n}^{n} c_\ell \int_{-\pi}^{\pi} e^{ix(\ell-k)}\,dx\end{aligned}$$

κι επειδή:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ix(\ell-k)}\,dx = \chi_{\{\ell=k\}}(\ell)$$

έπεται τελικά ότι:

$$\widehat{s_n}(k) = \sum_{\ell=-n}^{n} c_\ell \chi_{\{\ell=k\}}(\ell) = \sum_{\ell=k} c_\ell = c_k$$

△

Λύση: Θεωρώντας $k_m \geqslant |k|$ και γράφοντας:

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\big(s_{k_m}(x) - f(x)\big)e^{-ikx}\,dx\right| &\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|s_{k_m}(x) - f(x)|\,dx \\ &\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}||s_{k_m} - f||_\infty\,dx \\ &= ||s_{k_m} - f||_\infty \xrightarrow{m\to\infty} 0\end{aligned}$$

δείχνουμε ουσιαστικά ότι:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} s_{k_m}e^{-ikx}\,dx \xrightarrow{m\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}\,dx =: \widehat{f}(k)$$

Τώρα από το **Λήμμα 3.1.1** έπεται ότι:

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} s_{k_m}e^{-ikx}\,dx \xrightarrow{m\to\infty} \widehat{f}(k)$$

κι επειδή η c_k είναι σταθερή ακολουθία του m, θα πρέπει $c_k = \widehat{f}(k)$. Οπότε το ζητούμενο αποδεικνύεται.

□

Άσκηση 3.2. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ συνεχής, $2\pi-$περιοδική συνάρτηση και έστω $a \in \mathbb{R}$ ώστε $a/\pi \notin \mathbb{Q}$. Αποδείξτε ότι:

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} f(x+ka) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t)\ dt$$

■

Λήμμα 3.2.1: *Γνωρίζουμε ότι κάθε L^2 ολοκληρώσιμη συνάρτηση προσεγγίζεται από τη σειρά Fourier της (μάλιστα ομοιόμορφα). Επειδή κάθε συνεχής, $2\pi-$περιοδική συνάρτηση είναι L^2-ολοκληρώσιμη, η σειρά Fourier κάθε συνεχούς συνάρτησης προσεγγίζει τη συνάρτηση.*

△

Λύση: Ουσιαστικά κάθε συνεχής, $2\pi-$περιοδική συνάρτηση «παράγεται» από τις e^{int}, αφού κάθε συνεχής, $2\pi-$περιοδική συνάρτηση προσεγγίζεται από τη σειρά Fourier της. Είναι λογικό λοιπόν να μελετήσουμε το εν λόγο ερώτημα, αρχικά για συναρτήσεις της μορφής $f_n(x) = e^{inx}$. Εάν $n = 0$, η σχέση ισχύει τετριμμένα και δεν έχουμε να δείξουμε κάτι. Για $n \neq 0$:

$$\sum_{k=1}^{N} e^{in(x+ka)} = e^{inx} \sum_{k=1}^{N} [e^{ina}]^k = e^{inx} \left[\frac{e^{inx}(e^{inNa} - e^{ina})}{1 - e^{ina}}\right]$$

όπου φυσικά η τελευταία ισότητα είναι δυνατόν να γραφεί, αφού $a/\pi \notin \mathbb{Q}$, και συνεπώς $e^{ina} \neq 1$. Έχουμε δηλαδή:

$$\begin{aligned} \left|\frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} e^{in(x+ka)}\right| &\leqslant \frac{|e^{inNa} - e^{ina}|}{N \cdot |1 - e^{ina}|} \\ &\leqslant \frac{2}{N \cdot |1 - e^{ina}|} \end{aligned}$$

και αφήνοντας $N \to \infty$:

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} f_n(x) = 0 = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f_n(t)\ dt$$

Δηλαδή αποδεικνύεται το ζητούμενο για την περίπτωση των e^{-inx}. Είναι άμεσο λοιπόν από την γραμμικότητα του ολοκληρώματος ότι η σχέση επίσης θα αληθεύει για τριγωνομετρικά πολυώνυμα.

Για τη γενική περίπτωση συνεχούς f, θεωρούμε $\varepsilon > 0$ και χρησιμοποιώντας το **Λήμμα 3.2.1**, βρίσκουμε τριγωνομετρικό πολυώνυμο p τέτοιο ώστε $||f - p||_\infty \leqslant \varepsilon$. Έχουμε λοιπόν ότι:

$$\begin{aligned} &\left|\frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} f(x+ka) - \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t)\ dt\right| \leqslant \\ &\leqslant \left|\frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} f(x+ka) - p(x+ka) + \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} p(x+ka) - \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} p(t) - \int_{\mathbb{T}} f(t) - p(t)\ dt\right| \\ &\leqslant \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} |f(x+ka) - p(x+ka)| + \left|\frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} p(x+ka) - \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} p(t)\right| + ||f - p||_1 \\ &\leqslant ||f - p||_\infty + \left|\frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} p(x+ka) - \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} p(t)\right| + ||f - p||_\infty \\ &\leqslant 2\varepsilon + \left|\frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} p(x+ka) - \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} p(t)\right| \end{aligned}$$

Αφήνοντας τώρα $N \to \infty$, έπεται ότι:

$$\limsup_{N\to\infty} \left|\frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} f(x+ka) - \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t)\ dt\right| \leqslant 2\varepsilon$$

και συνεπώς το ζητούμενο

□

Άσκηση 3.3. Έστω $f \in C(\mathbb{T})$ συνάρτηση με πραγματικές τιμές, τέτοια ώστε:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k\sqrt{a_k^2+b_k^2} = 0$$

όπου φυσικά $a_k = a_k(f)$ και $b_k = b_k(f)$. Δείξτε ότι $s_n(f) \to_o f$. ■

Θεώρημα 3.3.1: *(Féjer) Έστω $f \in C(\mathbb{T})$ και $\sigma_n(f,x)$ η ακολουθία Féjer αυτής. Αληθεύει ότι:*

$$\sigma_n(f,x) \to_o f$$

△

<u>*Λύση:*</u> Για τη λύση της άσκησης κάνουμε την εξής βασική παρατήρηση, που ουσιαστικά θα προσδώσει το ζητούμενο:

$$s_n(f,x) - \sigma_n(f,x) = \left(\frac{(s_n - s_0) + (s_n - s_1) + \cdots + (s_n - s_{n-1})}{n}\right)(f,x)$$

Δηλαδή:

$$|s_n(f,x) - \sigma_n(f,x)| = \left|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=k+1}^{n} a_j\cos(jx) + b_j\sin(jx)\right|$$

και με αλλαγή της σειράς της άθροισης:

$$\begin{aligned}|s_n(f,x) - \sigma_n(f,x)| &= \left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\big(a_j\cos(jx) + b_j\sin(jx)\big)\sum_{k=0}^{j-1}\right| \\ &= \left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} j\big(a_j\cos(jx) + b_j\sin(jx)\big)\right|\end{aligned}$$

Σε αυτό το σημείο εφαρμόζουμε την ανισότητα Cauchy - Swartz εντός του αθροίσματος και παίρνουμε:

$$\begin{aligned}|s_n(f,x) - \sigma_n(f,x)| &= \left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} j\big(a_j\cos(jx) + b_j\sin(jx)\big)\right| \\ &\leqslant \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} j\sqrt{a_j^2+b_j^2}\cdot\cancel{\sqrt{\cos^2(jx)+\sin^2(jx)}} \\ &= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} j\sqrt{a_j^2+b_j^2}\end{aligned}$$

Με χρήση λοιπόν της υπόθεσης, έπεται ότι:

$$||s_n(f) - \sigma_n(f)||_\infty \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k\sqrt{a_k^2+b_k^2} \to 0$$

κι επομένως:

$$||s_n(f) - f||_\infty \leqslant ||s_n(f) - \sigma_n(f)||_\infty + ||\sigma_n(f) - f||_\infty \to 0 + 0$$

το οποίο αποδεικνύει ότι $s_n(f) \to_o f$. Να σημειωθεί ότι στο τελευταίο γίνεται χρήση του **Θεωρήματος 3.3.1**.

□

4 L^2-σύγκλιση σειρών Fourier

Άσκηση 4.1. Έστω $0 < a \leqslant \pi$ και $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ η συνάρτηση $f(x) = \chi_{[-a,a]}(x)$.

i. Αποδείξτε ότι $\widehat{f}(0) = a/\pi$ και:
$$\widehat{f}(k) = \frac{\sin(ka)}{\pi k}, \text{ εάν } k \neq 0$$

ii. Αποδείξτε ότι για κάθε $x \in [-\pi, \pi] \backslash \{\pm a\}$ ισχύει:
$$\chi_{[-a,a]}(x) = \frac{a}{\pi} + \sum_{k \neq 0} \frac{\sin(ka)}{\pi k} e^{ikx}$$

iii. Υπολογίστε τα αθροίσματα:
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(ka)}{k} \textbf{ και } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^2(ka)}{k^2}$$

■

Πρόταση 4.1.1: *Έστω $\mathcal{I}$ ο γραμμικός ισομετρικός ισομορφισμός:*
$$\mathcal{I} : L^2 \rightarrowtail\!\!\!\rightarrow \ell^2(\mathbb{Z}) \text{ όπου } f \mapsto \left(\widehat{f}(k)\right)_{k=-\infty}^{\infty}$$

Αληθύει ότι:
$$||f||_{L^2}^2 = \langle f, f \rangle_{L^2} = \langle \mathcal{I}f, \mathcal{I}f \rangle_{\ell^2}$$

και άρα:
$$||f||_{L^2}^2 = \left\langle \left(\widehat{f}(k)\right)_{k=-\infty}^{\infty}, \left(\widehat{f}(k)\right)_{k=-\infty}^{\infty} \right\rangle_{\ell^2}$$

Εδώ να υπενθυμίσουμε ότι το εσωτερικό γινόμενο $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2}$ ορίζεται:
$$\langle f, g \rangle_{L^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}\, dx$$

(για τετραγωνικά ολοκληρώσιμες, $2\pi-$περιοδικές συναρτήσεις $f, g \in L^2(\mathbb{T})$).

△

$\boxed{\text{i.}}$ *Λύση:* Υπενθυμίζουμε ότι για κάθε $k \neq 0$ οι συντελεστές Fourier ορίζονται βάσει του τύπου:
$$\widehat{f}(k) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx}\, dx$$

και για $k = 0$:
$$\widehat{f}(0) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx$$

Οπότε, ειδικά για την περίπτωση $f = \chi_{[-a,a]}$:
$$\begin{aligned}
\widehat{f}(k) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \chi_{[-a,a]}(x) e^{-ikx}\, dx \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^{a} e^{-ikx}\, dx \\
&= \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-a}^{a} \cos(kx)\, dx - i \cancel{\int_{-a}^{a} \sin(kx)\, dx} \right] \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{0}^{a} \cos(kx)\, dx \\
&= \frac{\sin(ka)}{\pi k}, \text{ όταν } k \neq 0
\end{aligned}$$

και:
$$\widehat{f}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \chi_{[-a,a]}(x)\, dx = \frac{a}{\pi}$$

$\square$

$\boxed{\text{ii.}}$ *Λύση:* Η συνάρτηση $\chi_{[-a,a]}$ είναι συνεχώς παραγωγίσιμη, μάλιστα m φορές για κάθε $m \in \mathbb{N}$. Επομένως, εάν $s_n(f, \cdot)$ είναι η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της σειράς Fourier:

$$s_n(f,x) = \widehat{f}(0) + \sum_{0 \neq |k| \leqslant n} \widehat{f}(k) e^{ikx} \xrightarrow{n \to \infty} \chi_{[-a,a]}(x)$$

κι άρα:

$$\chi_{[-a,a]}(x) = \frac{a}{\pi} + \sum_{k \neq 0} \frac{\sin(ka)}{\pi k} e^{ikx}$$

$\square$

$\boxed{\text{iii.}}$ *Λύση:* Εφόσον $0 \in [-a, a]$, στη σχέση του υποερωτήματος ii. αντικαθιστούμε $x \rightsquigarrow 0$ και έχουμε:

$$1 = \chi_{[-a,a]}(0) = \frac{a}{\pi} + \sum_{k \neq 0} \frac{\sin(ka)}{\pi k}$$

Επειδή επιπλέον η $\sin(\pi k)/k$ είναι περιττή συνάρτηση του k, θα αληθεύει:

$$1 = \frac{a}{\pi} + 2 \sum_{k \geqslant 1} \frac{\sin(ka)}{\pi k}$$

κι επομένως:

$$\begin{aligned} \sum_{k \geqslant 1} \frac{\sin(ka)}{k} &= \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{a}{\pi}\right) \\ &= \frac{\pi - a}{2} \end{aligned}$$

Όσον αφορά το άθροισμα:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^2(ka)}{k^2}$$

για να το υπολογίσουμε θα χρησιμοποιήσουμε την **Πρόταση 4.1.1**. Παρατηρούμε λοιπόν ότι:

$$\left\langle \left(\widehat{f}(k)\right)_{k=-\infty}^{\infty}, \left(\widehat{f}(k)\right)_{k=-\infty}^{\infty} \right\rangle_{\ell^2} = \left(\frac{a}{\pi}\right)^2 + \sum_{k \neq 0} \frac{\sin^2(ka)}{(\pi k)^2}$$

και κατ' επέκταση:

$$||f||_{L^2}^2 = \left(\frac{a}{\pi}\right)^2 + \sum_{k \neq 0} \frac{\sin^2(ka)}{(\pi k)^2} \Rightarrow \left(\int_{-\pi}^{\pi} \chi_{[-a,a]}(x)^2 \, dx\right)^{2 \cdot 1/2} = \left(\frac{a}{\pi}\right)^2 + \sum_{k \neq 0} \frac{\sin^2(ka)}{(\pi k)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \sum_{k \geqslant 1} \frac{\sin^2(ka)}{(\pi k)^2} = \frac{a}{\pi} - \frac{a^2}{\pi^2} \Rightarrow \sum_{k \geqslant 1} \frac{\sin^2(ka)}{k^2} = \frac{a\pi - a^2}{2}$$

$\square$

Άσκηση 4.2. Έστω $\epsilon_1, \epsilon_2, \cdots, \epsilon_n \in \{\pm 1\}$. Ορίζουμε συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ με:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} \epsilon_k e^{ikx}$$

Δείξτε ότι:

$$||f||_\infty = \max\{|f(x)| \mid x \in [0, 2\pi]\} \geqslant \sqrt{n}$$

$\blacksquare$

Πρόταση 4.2.1: *Για κάθε τετραγωνικά ολοκληρώσιμη συνάρτηση αληθεύει η σχέση:*

$$||f||_\infty \geqslant ||f||_2$$

Απόδειξη: Πράγματι:

$$||f||_\infty = ||f||_\infty \cdot \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\lambda \geqslant \left(\frac{1}{2\pi}|f|^2 \, d\lambda\right)^{1/2} = ||f||_2$$

△

Λύση: Καταρχάς παρατηρούμε ότι:

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(k) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{\ell=1}^{n}\epsilon_\ell e^{i\ell x}e^{-ikx} \\
&= \frac{1}{2\pi}\sum_{\ell=1}^{n}\epsilon_\ell\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(\ell-k)x} \\
&= \sum_{\ell=k}\epsilon_\ell \\
&= \epsilon_k
\end{aligned}$$

κι επιπλέον ότι η f είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμη συνάρτηση, ως τριγωνομετρικό πολυώνυμο. Χρησιμοποιώντας λοιπόν την **Πρόταση 4.1.1** *(ισότητα Parseval):*

$$||f||_2^2 = \sum_{k=1}^{n}|\widehat{f}(k)|^2 = \sum_{k=1}^{n}\epsilon_k = n$$

και τέλος, βάσει της **Πρότασης 4.2.1**:

$$||f||_\infty^2 \geqslant ||f||_2^2 = n \Rightarrow ||f||_\infty \geqslant \sqrt{n}$$

□

Άσκηση 4.3. Έστω $s_1 < s_2 < \cdots < s_n < s_{n+1} < \cdots$ γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών. Για κάθε $m \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $f_m : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ με:

$$f_m(x) = \frac{1}{m}\sum_{n=1}^{m} e^{is_n x}$$

i. Αποδείξτε ότι:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f_{k^2}(x)|^2 \, dx \leqslant \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} < \infty$$

ii. Αποδείξτε ότι, αν $k^2 \leqslant m < (k+1)^2$, τότε:

$$\left|f_m(x) - \frac{k^2}{m}f_{k^2}(x)\right| \leqslant \frac{2}{\sqrt{m}}$$

iii. Αποδείξτε ότι $f_m(x) \to 0$ σχεδόν παντού.

■

i. *Λύση:* Καταρχάς για τους συντελεστές Fourier των f_m παρατηρούμε ότι:

$$\begin{aligned}
\widehat{f_m}(k) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{m}\sum_{n=1}^{m} e^{is_n x}e^{-ikx} \, dx \\
&= \frac{1}{m}\cdot\frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{m}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ix(s_n-k)} \, dx \\
&= \frac{1}{m}\sum_{n=1}^{m}\chi_{\{k=s_n\}}(k) \\
&= \frac{1}{m}\chi_{\{s_n \;|\; n\in[m]\}}(k)
\end{aligned}$$

δηλαδή:

$$\widehat{f_m}(k) = \begin{cases} \frac{1}{m}, \text{ όταν } k = s_n, \; n \in [m] \\ 0, \text{ αλλιώς} \end{cases}$$

Επειδή καθεμία από της f_m είναι τριγωνομετρικό πολυώνυμο, κάθε f_m είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμη. Από την **Πρόταση 4.1.1** (*ισότητα Parseval*) έπεται ότι:

$$||f_{k^2}||_{L^2}^2 = \left|\left|\left(\widehat{f_{k^2}}(\ell)\right)_\ell\right|\right|_{\ell^2}^2 \leqslant \sum_{n=1}^{k^2}\left(\frac{1}{k^2}\right)^2 = \frac{1}{k^2}$$

κι επομένως:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f_k^2(x)|^2\,dx = \sum_{k=1}^{\infty}||f_{k^2}||_{L^2}^2 \leqslant \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} < \infty$$

□

$\boxed{\text{ii.}}$ <u>*Λύση:*</u> Γράφουμε:

$$\begin{aligned}\left|f_m(x) - \frac{k^2}{m}f_{k^2}(x)\right| &= \left|\frac{1}{m}\sum_{n=1}^{m}e^{is_nx} - \frac{1}{m}\sum_{n=1}^{k^2}e^{is_nx}\right| \\ &= \left|\frac{1}{m}\sum_{n=k^2+1}^{m}e^{is_nx}\right| \\ &\leqslant \frac{1}{m}\sum_{n=k^2+1}|e^{-is_nx}| \\ &\leqslant \frac{2k}{m}\end{aligned}$$

κι επειδή $k^2 \leqslant m$:

$$\left|f_m(x) - \frac{k^2}{m}f_{k^2}(x)\right| \leqslant \frac{2}{\sqrt{m}}$$

□

$\boxed{\text{iii.}}$ <u>*Λύση:*</u> Όπως αναφέρθηκε και στο υποερώτημα i., καθεμία από τις f_m είναι στον L^2. Οπότε αν δείξουμε ότι η ακολουθία $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ είναι Cauchy, θα υπάρχει συνάρτηση $f := \lim_m f_m$ στον L^2 η οποία θα είναι όριο των f_m. Για την f αυτή θα αληθεύει:

$$\widehat{f_m}(k) \to \widehat{f}(k),\ \text{δηλαδή}\ \frac{1}{m}\chi_{\{k=s_n\}}(k) \xrightarrow{m\to\infty} \widehat{f}(k) \Rightarrow \widehat{f}(k) = 0,\ \forall k$$

Θα έχουμε λοιπόν έτσι το ζητούμενο, αφού η συνθήκη $\widehat{f}(k) = 0$ συνεπάγεται ότι $f(x) = 0$ σχεδόν παντού.

Ισχυρισμός: Η ακολουθία $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ είναι Cauchy.

Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $2/\sqrt{m} < \varepsilon$, οπότε επιλέγουμε k τέτοιο ώστε $k^2 \leqslant m < (k+1)^2$ και παίρνουμε:

- Εάν $m = k^2$:

$$\begin{aligned}|f_{m+1}(x) - f_m(x)| &\leqslant \left|f_{m+1}(x) - \frac{k^2}{m+1}f_{k^2}(x)\right| + \left|\frac{k^2}{m+1}f_{k^2}(x) - f_{k^2}(x)\right| \\ &\leqslant \frac{2}{\sqrt{m+1}} + \frac{1}{m+1} \leqslant \varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{4} \xrightarrow{\varepsilon\to 0^+} 0\end{aligned}$$

- Εάν $m \neq k^2$ και (συνεπώς) $k^2 < m < (k+1)^2$, τότε:

$$\begin{aligned}|f_{m+1}(x) - f_m(x)| &\leqslant \left|f_{m+1}(x) - \frac{k^2}{m+1}f_{k^2}(x)\right| + \left|\frac{k^2}{m}f_m(x) - f_m(x)\right| \\ &\leqslant \frac{2}{\sqrt{m+1}} + \frac{m-k^2}{m}|f_m(x)| \\ &\overset{*}{\leqslant} \frac{2}{\sqrt{m}} + \frac{m-k^2}{m} \\ &\overset{**}{\leqslant} \frac{2}{\sqrt{m}} + \frac{2k+1}{m} \\ &\leqslant \frac{2}{\sqrt{m}} + \frac{2}{\sqrt{m}} + \frac{1}{m} \leqslant 2\varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{4} \xrightarrow{\varepsilon\to 0^+} 0\end{aligned}$$

όπου η ανισότητα άστρο $(*)$ δικαιολογείται εξ ορισμού των f_m ($|f_m| \leqslant 1$) και η ανισότητα διπλό άστρο $(**)$ δικαιολογείται από τη σχέση $m - k^2 \leqslant (k+1)^2 - k^2 = 2k+1$.

Σε κάθε περίπτωση, η $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ είναι βασική ακολουθία.

□

Άσκηση 4.4.

i. Έστω $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία μιγαδικών τέτοια ώστε $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| < \infty$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $f \in C(\mathbb{T})$ τέτοια ώστε $\widehat{f}(k) = a_k$ για κάθε $a_k \in \mathbb{N}$.

ii. Αποδείξτε ότι δεν υπάρχει $f \in C(\mathbb{T})$ τέτοια ώστε $\widehat{f}(k) = 1/\sqrt{k}$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$.

iii. Χρησιμοποιώντας το i., δείξτε ότι υπάρχει $f \in C(\mathbb{T})$ για την οποία $\widehat{f}(k) = 1/\sqrt{k}$ για άπειρους k.

■

Θεώρημα 4.4.1: *Ένας χώρος με νόρμα είναι πλήρης εάν και μόνο αν ισχύει η ακόλουθη συνθήκη:*

$$(x_k)_k \textit{ συγκλίνει} \Leftrightarrow \sum_k ||x_k|| < \infty$$

Κατ' επέκταση, επειδή ο χώρος $(C(\mathbb{T}), ||\cdot||_\infty)$ είναι πλήρης, εάν $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| < \infty$ τότε υπάρχει συνεχής f η οποία αποτελεί όριο των $\sum_{k=1}^{n} a_k e^{ikx}$.

△

$\boxed{\text{i.}}$ <u>*Λύση:*</u> Θεωρούμε την ακολουθία $(c_k)_{k=-\infty}^{\infty}$ η οποία ορίζεται ως εξής:

$$(c_k)_{k=-\infty}^{\infty} = (\cdots, 0, 0, 0, \overbrace{\ 0\ }^{c_0}, a_1, a_2, a_3, \cdots)$$

και κάνουμε χρήση του **Θεωρήματος 4.4.1**. Εξασφαλίζεται λοιπόν η ύπαρξη μιας συνεχούς f για την οποία:

$$\widehat{f}(k) = c_k = 0,\ k \leqslant 0 \textbf{ και } \widehat{f}(k) = c_k = a_k,\ k > 0$$

$\boxed{\text{ii.}}$ <u>*Λύση:*</u> Εάν υποθέσουμε προς άτοπο ότι τέτοια f υπήρχε, τότε ως συνεχής συνάρτηση θα ήταν τετραγωνικά ολοκληρώσιμη. Από την **Πρόταση 4.1.1**:

$$||f||_{L^2}^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$$

έπεται ότι $||f||_{L^2} = \infty$, το οποίο είναι άτοπο αφού $f \in L^2$.

$\boxed{\text{iii.}}$ <u>*Λύση:*</u> Θεωρούμε την ακολουθία $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ η οποία ορίζεται ως εξής:

$$a_k = \begin{cases} k^2, \text{ εάν } k = m^4 \\ 0, \text{ αλλιώς} \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} < \infty$$

οπότε εφαρμόζοντας το i., έχουμε το ζητούμενο.

□

5 Μετασχηματισμός Fourier

Άσκηση 5.1. Έστω $f \in L^1(\mathbb{R})$. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν σταθερά $M > 0$ και $0 < a < 1$ τέτοια ώστε:

$$|\widehat{f}(\xi)| \leqslant \frac{M}{|\xi|^{1+a}} \tag{$*$}$$

όπου εδώ με $\widehat{f}$ συμβολίζουμε τον μετασχηματισμό Fourier. Δείξτε ότι η f ικανοποιεί συνθήκη Hölder τάξης a. Δηλαδή υπάρχει $B > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x, t \in \mathbb{R}$:

$$|f(x+t) - f(x)| \leqslant B|t|^a$$

■

Θεώρημα 5.1.1: *(L^1-τύπος αντιστροφής) Αν $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ και ο μετασχηματισμός Fourier αυτής είναι επίσης ολοκληρώσιμος, τότε:*

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) \exp\big(2\pi i \langle x, \xi \rangle\big)\, d\xi$$

σχεδόν παντού, και μάλιστα για κάθε $x \in \mathrm{Leb}(f)$.

△

<u>*Λύση:*</u> Η σχέση ($*$) εξασφαλίζει ότι ο μετασχηματισμός Fourier $\widehat{f}$ είναι ολοκληρώσιμη συνάρτηση, αφού:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(\xi)|\, d\xi \leqslant \underbrace{\int_{-1}^{1} |\widehat{f}(\xi)|\, d\xi}_{\mathscr{O}_1 < \infty} + \underbrace{2\int_{1}^{\infty} \frac{M}{|\xi|^{1+a}}\, d\xi}_{\mathscr{O}_2 < \infty} < \infty$$

Το πρώτο ολοκλήρωμα είναι πεπερασμένο διότι ο μετασχηματισμός Fourier είναι συνεχής συνάρτηση και το διάστημα $[-1, 1]$ συμπαγές. Εφόσον λοιπόν $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, μπορεί να εφαρμοστεί ο *τύπος αντιστροφής*:

$$\begin{aligned} |f(x+t) - f(x)| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i (x+t)\xi}\, d\xi - \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i x\xi}\, d\xi \right| \\ &\leqslant \left| \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i x\xi} (e^{2\pi i \xi t} - 1)\, d\xi \right| \end{aligned}$$

Γράφουμε τώρα $e^{2\pi i \xi t} - 1 = e^{\pi i \xi t}(e^{\pi i \xi t} - e^{-\pi i \xi t}) = 2i \cdot e^{\pi i \xi t} \sin(\pi \xi t)$ και έχουμε:

$$\begin{aligned} |f(x+t) - f(x)| &\leqslant \left| \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i x\xi} (e^{2\pi i \xi t} - 1)\, d\xi \right| \\ &\leqslant 2 \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(\xi)| \cdot |\sin(\pi \xi t)|\, d\xi \end{aligned}$$

Σε αυτό το σημείο εφαρμόζουμε ένα τέχνασμα, και χωρίζουμε το ολοκλήρωμα σε:

$$\begin{aligned} |f(x+t) - f(x)| &\leqslant 2 \left(\int_{|\xi| \geqslant 1/|t|} |\widehat{f}(\xi)| \cdot |\sin(\pi \xi t)|\, d\xi + \int_{|\xi| < 1/|t|} |\widehat{f}(\xi)| \cdot |\sin(\pi \xi t)|\, d\xi \right) \\ &\leqslant 2 \Big(\underbrace{\int_{|\xi| \geqslant 1/|t|} \frac{M}{|\xi|^{1+a}}\, d\xi}_{\mathscr{O}_3} + \underbrace{\int_{|\xi| < 1/|t|} \frac{M}{|\xi|^{1+a}} |\sin(\pi \xi t)|\, d\xi}_{\mathscr{O}_4} \Big) \end{aligned}$$

όπου ο διαχωρισμός, αν και φαινομενικά ≪αυθαίρετος≫, προκύπτει από βελτιστοποίηση ενός διαχωρισμού $|\xi| \geqslant C(t),\ |\xi| < C(t)$ (ως προς t), ώστε το φράγμα να ελαχιστοποιείται.

Όσον αφορά το ολοκλήρωμα $\mathscr{O}_3$, φράσσουμε:

$$\mathscr{O}_3 \leqslant 2M \int_{1/|t|}^{\infty} \frac{1}{s^{1+a}}\, ds = 2Ma|t|^a$$

Όσον αφορά το ολοκλήρωμα $\mathscr{O}_4$, υποθέτουμε (χωρίς βλάβη της γενικότητας) ότι $t > 0$ και κάνοντας την αντικατάσταση $u \rightsquigarrow \pi \xi t$ γράφουμε:

$$\mathscr{O}_4 = M \cdot \frac{(\pi t)^{1+a}}{\pi t} \int_{|u| \leqslant \pi} \left| \frac{\sin u}{u^{1+a}} \right| du = \left(M\pi^a \int_{|u| \leqslant \pi} \left| \frac{\sin u}{u^{1+a}} \right| du \right) |t|^a$$

Συμμαζεύουμε όλες αυτές τις σταθερές και έχουμε εν τέλει ότι:

$$|f(x+t)-f(x)| \leqslant 2\left(2Ma + M\pi^a \int_{|u|\leqslant\pi} \left|\frac{\sin u}{u^{1+a}}\right| \, du\right)|t|^a$$

το οποίο αποδεικνύει ότι η f ικανοποιεί συνθήκη Hölder τάξης a.

□

Άσκηση 5.2. Θεωρούμε f την πραγματική συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} 1-|x|, \text{ αν } |x|<1 \\ 0, \text{ αλλιώς} \end{cases}$$

Δειξτε ότι:

$$\widehat{f}(\xi) = \left(\frac{\sin(\pi\xi)}{\pi\xi}\right)^2, \ \xi \neq 0 \ \textbf{και} \ \widehat{f}(0) = 1$$

(όπου με $\widehat{f}$ συμβολίζουμε τον μετασχηματισμό Fourier). Έπειτα υπολογίστε το ολοκλήρωμα:

$$\int_0^\infty \left(\frac{\sin x}{x}\right)^4 \, dx$$

■

Θεώρημα 5.2.1: *(Ισότητα Plancerel) Για κάθε τετραγωνικά ολοκληρώσιμη συνάρτηση f ο μετασχηματισμός Fourier αυτής ορίζεται, είναι επίσης τετραγωνικά ολοκληρώσιμος και:*

$$||f||_2^2 = \int_{-\infty}^\infty |\widehat{f}(\xi)|^2 \, d\xi$$

△

Λύση: Καταρχάς, υπολογίζουμε τον μετασχηματισμό Fourier της f:

$$\begin{aligned} \widehat{f}(\xi) &= \int_{-\infty}^\infty f(\xi) e^{-2\pi i x\xi} \, d\xi \\ &= \int_{-1}^1 (1-|x|) e^{-2\pi i x \xi} \, d\xi \\ &= \int_{-1}^1 (1-|x|)\cos(2\pi x\xi) \, d\xi \\ &= \left(\frac{\sin(\pi\xi)}{\pi\xi}\right)^2 \end{aligned}$$

και βάσει της *ισότητας Plancerel*:

$$\int_{-1}^1 (1-|x|)^2 \, dx = ||f||_2^2 = \int_{-\infty}^\infty \left(\frac{\sin(\pi\xi)}{\pi\xi}\right)^4 \, d\xi$$

Τέλος, επειδή οι $f, \widehat{f}$ είναι αμφότερες άρτιες:

$$\begin{aligned} 2\int_0^1 (1-x^2) \, dx = 2\int_0^\infty \left(\frac{\sin(\pi\xi)}{\pi\xi}\right)^4 \, d\xi &\overset{*}{\Rightarrow} \\ \frac{2}{3} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \left(\frac{\sin u}{u}\right)^4 \, du &\Rightarrow \\ \frac{\pi}{3} = \int_0^\infty \left(\frac{\sin u}{u}\right)^4 \, du & \end{aligned}$$

όπου στην συνεπαγωγή άστρο $(*)$ γίνεται η αντικατάσταση $u \rightsquigarrow \pi\xi$.

□