

# Το μικρό εγχειρίδιο των μαθηματικών της Γ' λυκείου

## Σύντομες σημειώσεις

Α. Φράγκος

Τελ. ενημέρωση: 17 Οκτωβρίου 2023

## 0 Σύνολα, πράξεις με σύνολα και αριθμοί

- 0.1 Βασικοί ορισμοί στα σύνολα
- 0.2 Βασικές πράξεις με σύνολα
- 0.3 Σύνολα που ορίζονται με περιγραφή
- 0.4 Αριθμοί
- 0.5 Πράξεις με αριθμούς

## 1 Όρια και συνέχεια

- 1.1 Βασικοί ορισμοί
- 1.2 Μονότονες συναρτήσεις
- 1.3 Αντίστροφες συναρτήσεις
- 1.4 Όρια συναρτήσεων
- 1.5 Συνεχείς συναρτήσεις
- 1.6 Ακολουθίες
- 1.7 Όρια ακολουθιών
- 1.8 Βασικά θεωρήματα για συνεχείς συναρτήσεις

## 2 Διαφορικός λογισμός

- 2.1 Η έννοια της παραγώγου
- 2.2 Παραγωγίσιμες συναρτήσεις
- 2.3 Κανόνες παραγώγισης
- 2.4 Παράγωγοι και ρυθμός μεταβολής
- 2.5 Βασικά θεωρήματα για τις παραγωγίσιμες συναρτήσεις

2.6 Ακρότατα

2.7 Ασύμπτωτες

### 3 Ολοκληρωτικός λογισμός

3.1 Ορισμένο ολοκλήρωμα

3.2 Παράγουσες

3.3 Μέθοδοι ολοκλήρωσης

3.4 Βασικά θεωρήματα για τις ολοκληρώσιμες συναρτήσεις

3.5 Βεβαρυμένα ολοκληρώματα

3.6 Διαφορικές εξισώσεις

# Σύνολα και πράξεις με σύνολα

Βασικοί ορισμοί στα σύνολα

## Ορισμός (Σύνολο)

Ως **σύνολο** ορίζουμε κάθε συλλογή από αντικείμενα, των οποίων η σειρά και το πλήθος ιδίων όρων δεν μας ενδιαφέρει.<sup>1</sup> Συνήθως τα σύνολα τα συμβολίζουμε με κεφαλαία γράμματα και τα στοιχεία τους με μικρά γράμματα.

## Ορισμός (Ανήκει)

Εάν  $A$  είναι ένα σύνολο, θα γράφουμε  $a \in A$  εάν το  $a$  είναι στοιχείο του  $A$ . Λέμε επίσης ότι το  $a$  **ανήκει** στο  $A$ .

Ένα παράδειγμα συνόλου είναι το  $A = \{1, 2, 5, 6, 7, 8, 9\}$ . Το σύνολο  $\{1, 2\}$  είναι ίδιο με το  $\{2, 1\}$ , αφού -όπως είπαμε- η σειρά των όρων δεν μας ενδιαφέρει. Επειδή ούτε το πλήθος ιδίων όρων μας ενδιαφέρει, το  $\{1, 2\}$  είναι ίδιο και με το  $\{1, 1, 1, 2\}$ .

## Ορισμός (Υποσύνολο)

Εάν έχουμε δύο σύνολα  $A$ ,  $B$  και το  $B$  περιέχει όλα τα στοιχεία του  $A$  (ενδεχομένως και μερικά ακόμα), θα λέμε ότι το  $A$  είναι **υποσύνολο** του  $B$ . Συμβολικά:

$$A \subseteq B$$

<sup>1</sup>Αυτός δεν είναι καλός ορισμός. Το σύνολο είναι έννοια που δεν μπορεί να οριστεί. ≡

Εάν το  $B$  περιέχει όλα τα στοιχεία του  $A$  και σίγουρα έχει και μερικά παραπάνω, λέμε ότι το  $A$  είναι **γνήσιο υποσύνολο** του  $B$  και συμβολίζουμε:

$$A \subset B$$

### Ορισμός (Υπερσύνολο)

Μερικές φορές θέλουμε να σκεφτόμαστε, όχι ότι ένα σύνολο είναι μικρότερο από ένα άλλο, αλλά ότι αυτό το άλλο είναι μεγαλύτερο από το πρώτο. Η ιδέα δεν αλλάζει και η σχέση μεταξύ των συνόλων παραμένει ίδια, εμείς όμως (για λόγους οπτικών ή γραφής), μπορεί να θέλουμε να γράψουμε:

$$B \supseteq A \text{ αντί για } A \subseteq B$$

και:

$$B \supset A \text{ αντί για } A \subset B$$

Το  $B \supseteq A$  εκφράζει το **υπερσύνολο** (το  $B$  είναι υπερσύνολο του  $A$ ) και το  $B \supset A$  το γνήσιο υπερσύνολο (το  $B$  είναι **γνήσιο υπερσύνολο** του  $A$ ).

### Ορισμός (Ισότητα συνόλων)

Γενικά, ξεχνώντας επαναλήψεις στοιχείων και τη διαφορετική σειρά, λέμε ότι δύο σύνολα είναι **ίσα** εάν έχουν ακριβώς τα ίδια στοιχεία.

## Παρατήρηση

Εάν ένα σύνολο είναι υποσύνολο ενός άλλου, μπορεί να είναι ίσα. Αν είναι γνήσιο υποσύνολο όμως, δεν μπορεί να είναι ίδια. Αντίστοιχα για τα υπερσύνολα.

Για παράδειγμα, το  $A = \{0, 1\}$  είναι υποσύνολο του  $B = \{0, 1\}$ , αφού το  $B$  περιέχει όλα τα στοιχεία του  $A$ . Αντίστοιχα, το  $B$  είναι υποσύνολο του  $A$ . Το  $A$  **δεν** είναι γνήσιο υποσύνολο του  $B$ , αφού κάτι τέτοιο θα σήμαινε ότι το  $B$  έχει ένα στοιχείο που το  $A$  δεν έχει.

# Σύνολα και πράξεις με σύνολα

## Ασκήσεις

1. Ελέγξτε εάν τα παρακάτω σύνολα είναι υποσύνολα ή υπερσύνολα του  $\{0, 1, 3, \triangle, \$\}$ . Ποια είναι ίσα με το  $\{0, 1, 3, \triangle, \$\}$ ;
  - 1.1  $\{0, 0, 0, 0, 1, 3, \triangle, \triangle, \$\}$
  - 1.2  $\{0, 1, 2, 3, \triangle, \triangle, \$\}$
  - 1.3  $\{\triangle, \$\}$
  - 1.4  $\{0, 1, 3, \triangle, \$\}$
  - 1.5  $\{0, 1, 3, \triangle, \$\}$
  - 1.6  $\{0, 2, 8, \diamond\}$
  - 1.7  $\{3, 1, 3, \$, \triangle\}$
2. Κατασκευάστε ένα γνήσιο υποσύνολο κι ένα γνήσιο υπερσύνολο για καθένα από τα παρακάτω:
  - 2.1  $\{-1, 0, \triangle, \$\}$
  - 2.2  $\{\triangle, \diamond, \$\}$
  - 2.3  $\{\triangle\}$
  - 2.4  $\{\}$  (αυτό το σύνολο δεν έχει τίποτε μέσα. Ονομάζεται «κενό» και συμβολίζεται με  $\emptyset$ ).
  - 2.5  $\{\Phi, O\}$
  - 2.6  $\{-1, 1, \Pi\}$
  - 2.7  $\{\{1\}\}$  (αυτό το σύνολο περιέχει μέσα του ένα σύνολο).

# Σύνολα και πράξεις με σύνολα

## Βασικές πράξεις με σύνολα

### Ορισμός (Ένωση)

Για κάθε δύο σύνολα  $A, B$  μπορούμε να κατασκευάσουμε την ένωσή τους, που είναι ένα καινούριο σύνολο το οποίο περιέχει όλα τα στοιχεία των  $A, B$ . Το συμβολίζουμε  $A \cup B$  και λέμε ότι είναι η **ένωση** των  $A$  και  $B$ .

Για παράδειγμα, εάν  $A = \{a, a_*\}$  και  $B = \{b, b_*\}$ , τότε:

$$A \cup B = \{a, a_*, b, b_*\}$$

### Ορισμός (Τομή)

Για κάθε δύο σύνολα  $A, B$  ορίζεται το σύνολο που περιέχει μόνο τα κοινά τους στοιχεία. Το συμβολίζουμε με  $A \cap B$  και λέμε ότι είναι η **τομή** των  $A$  και  $B$ . Εάν τα  $A, B$  δεν έχουν κοινά στοιχεία, η τομή τους είναι το κενό σύνολο  $\{\}$  (αλλιώς συμβολίζεται με  $\emptyset$ ).

Για παράδειγμα, αν  $A = \{a, x\}$  και  $B = \{x, b\}$ :

$$A \cap B = \{x\}$$



## Ορισμός (Συνολοθεωρητική διαφορά)

Εάν  $A, B$  είναι δύο σύνολα, ορίζεται το σύνολο που περιέχει το  $A$ , από το οποίο έχουν αφαιρεθεί τα στοιχεία του  $B$  (εννοείται όσα απ' αυτά είναι στο  $A$ ). Το συμβολίζουμε με  $A \setminus B$  και το λέμε **συνολοθεωρητική διαφορά**.

Για παράδειγμα, εάν  $A = \{a, a_*, b\}$  και  $B = \{b, b_*\}$ , τότε:

$$A \setminus B = \{a, a_*\}$$

(το  $b$  αφαιρέθηκε).

## Παρατήρηση

Το σύνολο  $A \setminus B$  είναι ίδιο με το  $A \setminus (A \cap B)$ .

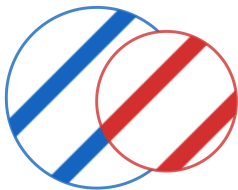
## Ορισμός (Συμπλήρωμα)

Έστω δύο σύνολα  $A, B$  με  $A \subseteq B$ . Το σύνολο που περιέχει όλα τα στοιχεία του  $B$  που δεν είναι στο  $A$  το λέμε **συμπλήρωμα** του  $A$  στο  $B$ . Το συμβολίζουμε με  $A_B^c$  (ή με  $A^c$ , αν το  $B$  εννοείται).

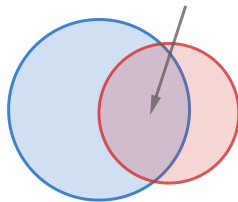
## Παρατήρηση

Τα σύνολα  $A_B^c$  και  $B \setminus A$  είναι ίσα.

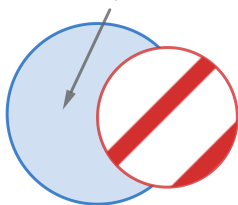
$$A \cup B$$



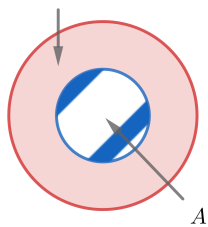
$$A \cap B$$



$$A \setminus B$$



$$A_B^c$$



# Σύνολα, πράξεις με σύνολα και αριθμοί

Σύνολα που ορίζονται με περιγραφή

Ως τώρα έχουμε δει τον τρόπο γραφής των συνόλων με αναγραφή των στοιχείων τους. Για παράδειγμα, έχουμε δει τη γραφή:

$$A = \{0, 1, 3, \triangle, \$\}$$

Αυτός είναι ένας καλός τρόπος κανείς να ορίσει ένα σύνολο, μόνο όμως όταν το σύνολο δεν έχει άπειρα στοιχεία ή είναι εμφανές ένα μοτίβο στα στοιχεία του. Μπορούμε δηλαδή να γράψουμε το  $A$  όπως προηγουμένως ή το:

$$B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, \dots\}$$

αλλά, εάν το σύνολο  $\Gamma$  είναι το σύνολο όλων των πολυγώνων, δεν είναι εύκολο να το γράψουμε. Γι' αυτό χρησιμοποιούμε τη γραφή του συνόλου με **περιγραφή** των στοιχείων του. Μπορούμε να αναπαραστήσουμε το  $\Gamma$  ως εξής:

$$\Gamma = \{P \mid P \text{ είναι πολύγωνο}\}$$

Η γραφή σημαίνει το εξής: «Το  $\Gamma$  είναι το σύνολο των  $P$ , ούτως ώστε τα  $P$  είναι πολύγωνα». Η κάθετη γραμμή ξεχωρίζει την ονομασία των στοιχείων από την περιγραφή τους.

### Ορισμός (Φυσικοί αριθμοί)

Κάθε αριθμός που εκφράζει ποσότητα από (ομοειδή) αντικείμενα ονομάζεται φυσικός αριθμός. Αν συμβολίσουμε με 1 τη μονάδα, προσθέτοντας μία μονάδα κάθε φορά, κατασκευάζουμε τους αριθμούς:

$$2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, \dots$$

Το σύνολο των φυσικών αριθμών είναι το:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, \dots\}$$

### Ορισμός (Ακέραιοι αριθμοί)

Οι προσημασμένοι φυσικοί αριθμοί, μαζί με το 0, λέγονται ακέραιοι αριθμοί. Το σύνολο των ακεραίων αριθμών είναι το:

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$$

## Ορισμός (Ρητοί αριθμοί)

Ρητοί είναι οι αριθμοί που μπορούν να γραφούν ως λόγος ακεραίων (ακέραιος δια μη-μηδενικό ακέραιο). Το σύνολο των ρητών είναι το:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{\kappa}{\lambda} \mid \kappa, \lambda \in \mathbb{Z}, \lambda \neq 0 \right\}$$

Οι ρητοί αριθμοί μπορούν να προσεγγίζουν πολύ καλά άλλους αριθμούς. Για παράδειγμα, έχουμε δει ότι:

$$\pi \approx 3.1415$$

Αυτό είναι στην ουσία μία προσέγγιση από ρητούς, αφού:

$$\pi \approx 3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{5}{10000}$$

## Ορισμός (Πραγματικοί αριθμοί)

Πραγματικοί είναι όλοι οι αριθμοί που προσεγγίζονται από ρητούς. Το σύνολο των πραγματικών αριθμών είναι το:

$$\mathbb{R} = \{x \mid \text{για κάθε } \varepsilon > 0 \text{ υπάρχει } q \in \mathbb{Q} \text{ ώστε } |x - q| < \varepsilon\}$$

(το  $\varepsilon$  δηλώνει πόσο καλή θέλουμε να κάνουμε την προσέγγιση. Το  $q$  είναι μία ρητή προσέγγιση  $\varepsilon$ -κοντά στο  $x$ ).

Για το  $\mathbb{R}$  (αλλά και για άλλα σύνολα), χρησιμοποιούμε τους ακόλουθους βοηθητικούς συμβολισμούς:

- ▶  $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$  (οι πραγματικοί αριθμοί που δεν είναι μηδέν).
- ▶  $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$  (οι θετικοί πραγματικοί αριθμοί).
- ▶  $\mathbb{R}_- = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}$  (οι αρνητικοί πραγματικοί αριθμοί).
- ▶  $\mathbb{R}_+^* = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$
- ▶  $\mathbb{R}_-^* = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$

Χρησιμοποιώντας τα άπειρα  $\infty$  και  $-\infty$ , τα οποία τα φανταζόμαστε ως οντότητες  $\infty > x$ ,  $-\infty < x$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , συμβολίζουμε:

- ▶  $\widetilde{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$

Άλλοι χρήσιμοι συμβολισμοί είναι οι:

- ▶  $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$  (το ανοικτό διάστημα άκρων  $a, b$ ).
- ▶  $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$  (το αριστερά ημιανοικτό διάστημα άκρων  $a, b$ ).
- ▶  $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$  (το δεξιά ημιανοικτό διάστημα άκρων  $a, b$ ).
- ▶  $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$  (το κλειστό διάστημα άκρων  $a, b$ ).
- ▶  $(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$  (η ανοικτή ημιευθεία πάνω από το  $a$ ).
- ▶  $[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$  (η κλειστή ημιευθεία πάνω από το  $a$ ).
- ▶  $(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$  (η ανοικτή ημιευθεία κάτω από το  $b$ ).
- ▶  $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$  (η κλειστή ημιευθεία κάτω από το  $b$ ).

# Σύνολα, πράξεις με σύνολα και αριθμοί

Πράξεις με αριθμούς

Βοηθητικοί συμβολισμοί για αθροίσματα και γινόμενα είναι οι ακόλουθοι:

Ορισμός (Ο τελεστής  $\Sigma$ )

Εάν έχουμε ένα άθροισμα της μορφής:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \cdots + x_n$$

μπορούμε να το συμπυκνώσουμε γράφοντας:

$$\sum_{k=1}^n x_k$$

Ορισμός (Ο τελεστής  $\prod$ )

Εάν έχουμε ένα γινόμενο της μορφής:

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot \dots \cdot x_n$$

μπορούμε να το συμπυκνώσουμε γράφοντας:

$$\prod_{k=1}^n x_k$$



# Σύνολα, πράξεις με σύνολα και αριθμοί

## Ασκήσεις

1. Βρείτε τα σύνολα  $A \cup B$ ,  $A \cap B$ ,  $A \setminus B$  στις ακόλουθες περιπτώσεις:

1.1  $A = \{1, 2, 3\}$ ,  $B = \{3, 4, 5\}$

1.2  $A = \{\triangle, \circ, \$\}$ ,  $B = \{0, 1, 2\}$

1.3  $A = \mathbb{Q}$ ,  $B = \{m/n \mid m, n \in \mathbb{N}\}$

1.4  $A = (0, 2)$ ,  $B = (1, 3]$

2. Βρείτε το σύνολο  $A_B^c$  στις ακόλουθες περιπτώσεις:

2.1  $B = \{0, 1, 2\}$ ,  $A = \{0, 2\}$

2.2  $B = \mathbb{R}$ ,  $A = \emptyset$

2.3  $B = \mathbb{R}$ ,  $A = (a, b)$

2.4  $B = \mathbb{R}$ ,  $A = (-\infty, 0] \cup [1, \infty)$

2.5  $B = \{P \mid P \text{ πολύγωνο}\}$ ,  $A = \{T \mid T \text{ ισοσκελές τρίγωνο}\}$

3. Αποδείξτε ότι το σύνολο:

$$(1, \infty) \cap (2, \infty) \cap (3, \infty) \cap (4, \infty) \cap \dots$$

είναι το κενό  $\emptyset$ .

# Όρια και συνέχεια

## Βασικοί ορισμοί

Τα μαθηματικά της  $\Gamma'$  λυκείου όπως και ο απειροστικός λογισμός  $I$  (που διδάσκεται τα πρώτα εξάμηνα σε πολλές σχολές) έχει ως κύριο αντικείμενο μελέτης τις πραγματικές συναρτήσεις και τις ιδιότητές τους.

### Ορισμός (Συναρτήσεις)

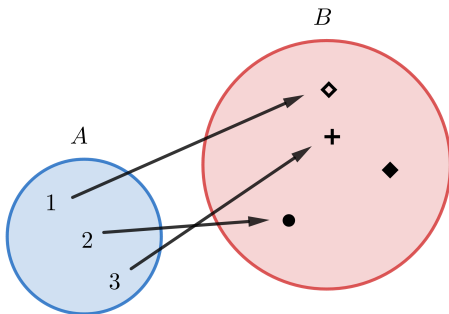
Ας θεωρήσουμε  $A$  και  $B$  δύο σύνολα. Μία συνάρτηση (ας τη συμβολίσουμε  $f$ ) είναι μία **διαδικασία** η οποία αντιστοιχεί **κάθε**  $a \in A$  σε **μία και μοναδική** τιμή  $b_a$  εντός του  $B$  (το  $b_a$  εξαρτάται από το  $a$ , γι' αυτό έχει δείκτη  $a$ ). Το  $b_a$  το συμβολίζουμε και με  $f(a)$ . Οι συναρτήσεις λέγονται και «απεικονίσεις», ιδίως όταν έχουν έντονα γεωμετρικά χαρακτηριστικά (λ.χ. οι «γραμμικές απεικονίσεις»).

### Ορισμός (Πεδία ορισμού και τιμών)

Έστω  $f : A \rightarrow B$  μία συνάρτηση.

- ▶ Το σύνολο  $A$  λέγεται «**πεδίο ορισμού**» της  $f$ .
- ▶ Το σύνολο  $B$  λέγεται «**πεδίο τιμών**» της  $f$ .

Παρακάτω θα δούμε μερικά παραδείγματα συναρτήσεων.



Στο παραπάνω σχήμα απεικονίζεται μία αντιστοιχία από το σύνολο:

$$A = \{1, 2, 3\}$$

στο σύνολο:

$$B = \{\diamond, +, \bullet, \blacklozenge\}$$

Το 1 αντιστοιχεί στο  $\diamond$ , το 2 στο  $\bullet$  και το 3 στο  $+$ . Οι συναρτήσεις μπορεί να είναι περίπλοκες και όχι κατ' ανάγκη από αριθμούς σε αριθμούς.

Ας ονοματίσουμε αυτήν την συνάρτηση  $f$ . Το  $A$  είναι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης και  $B$  το πεδίο τιμών. Προσέξτε ότι το  $B$  περιέχει ένα στοιχείο που δεν «πιάνεται» από ένα στοιχείο του  $A$  μέσω της  $f$ . Αυτό δεν είναι πρόβλημα.

### Σύνολο τιμών

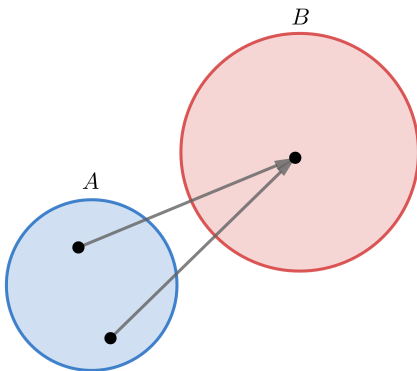
Εάν  $f : A \rightarrow B$  είναι μία συνάρτηση, το σύνολο των σημείων του  $B$  που η συνάρτηση  $f$  «πιάνει», λέγεται **σύνολο τιμών**. Συμβολίζεται με  $f(A)$ , και αυστηρά ορίζεται ως εξής:

$$f(A) = \{b \in B \mid \text{υπάρχει } a \in A \text{ με } f(a) = b\}$$

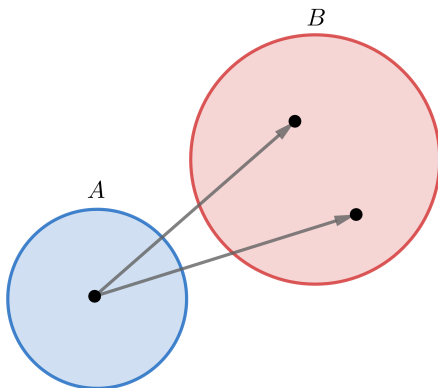
### Παρατήρηση

Εάν  $f : A \rightarrow B$  είναι μία συνάρτηση, τότε  $f(A) \subseteq B$ .

Επιτρέπεται επίσης μία συνάρτηση να αντιστοιχεί δύο στοιχεία στο πεδίο ορισμού στο ίδιο στοιχείο του πεδίου τιμών.



Αυτό που **δεν** επιτρέπεται είναι μία τιμή του πεδίου ορισμού να αντιστοιχίζεται σε δύο τιμές του συνόλου τιμών



Εφόσον τη συνάρτηση τη βλέπουμε ως διαδικασία, θέλουμε να έχει ένα αποτέλεσμα κι όχι πολλά. Από την άλλη, αν ξεκινήσουμε από δύο διαφορετικές καταστάσεις, μπορεί και να καταλήξουμε στο ίδιο αποτέλεσμα.

Εμείς γενικά θα ασχοληθούμε με πραγματικές συναρτήσεις, δηλαδή με συναρτήσεις  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ , όπου  $A \subseteq \mathbb{R}$ .

## Παράδειγμα

- ▶ Τα πολυώνυμα  $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , που για κάθε  $x$  παίρνουν τη μορφή:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = \sum_{k=0}^n a_k x^k, \quad a_k \in \mathbb{R}$$

είναι πραγματικές συναρτήσεις. Παράδειγμα πολυωνύμου:

$$p(x) = 2x^{54} - 5x^4 - 8x + 2$$

- ▶ Οι ρητές συναρτήσεις  $q : \mathbb{R} \setminus \{\text{πεπερασμένο πλήθος αριθμών}\} \rightarrow \mathbb{R}$  που αποτελούν κλάσμα πολυωνύμων (μη-μηδενικού παρονομαστή):

$$q(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0} = \frac{\sum_{k=0}^n a_k x^k}{\sum_{k=0}^n b_k x^k}$$

(όπου  $a_k, b_k \in \mathbb{R}$  και κάποιο  $b_k$  δεν είναι μηδέν) είναι πραγματικές συναρτήσεις. Παράδειγμα ρητής συνάρτησης:

$$q(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$$

# Όρια και συνέχεια

## Μονότονες συναρτήσεις



# Όρια και συνέχεια

## Αντίστροφες συναρτήσεις

# Όρια και συνέχεια

Όρια συναρτήσεων

# Όρια και συνέχεια

Συνεχείς συναρτήσεις

# Όρια και συνέχεια

## Ακολουθίες

# Όρια και συνέχεια

Όρια ακολουθιών

# Όρια και συνέχεια

Βασικά θεωρήματα για συνεχείς συναρτήσεις

# Διαφορικός λογισμός

Η έννοια της παραγώγου

# Διαφορικός λογισμός

Παραγωγίσιμες συναρτήσεις



# Διαφορικός λογισμός

## Κανόνες παραγώγισης

# Διαφορικός λογισμός

Παράγωγοι και ρυθμός μεταβολής

# Διαφορικός λογισμός

Βασικά θεωρήματα για τις παραγωγίσιμες συναρτήσεις

# Διαφορικός λογισμός

Ακρότατα

# Διαφορικός λογισμός

Ασύμπτωτες

# Ολοκληρωτικός λογισμός

Ορισμένο ολοκλήρωμα

# Ολοκληρωτικός λογισμός

Παράγουσες

# Ολοκληρωτικός λογισμός

Μέθοδοι ολοκλήρωσης



# Ολοκληρωτικός λογισμός

Βασικά θεωρήματα για τις ολοκληρώσιμες συναρτήσεις

# Ολοκληρωτικός λογισμός

Βεβαρυμένα ολοκληρώματα

# Ολοκληρωτικός λογισμός

Διαφορικές εξισώσεις

