Ασκήσεις στη Συναρτησιακή Ανάλυση

Σημείωση: Στο αρχείο με τις βάσεις Schauder (δηλαδή στο αρχείο που βρίσκεται στον σύνδεσμο https://afragos-math.github.io/files/analysis/schauder.pdf) έχω κάποιες αποδείξεις βασικών αποτελεσμάτων.

Τάσος Φράγκος

Άσκηση 1: *Έστω $(X, ||\cdot||)$ ένας χώρος με νόρμα. Αποδείξτε ότι ο $(X, ||\cdot||)$ είναι χώρος Banach εάν και μόνο αν για κάθε ακολουθία $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ του X ώστε $\sum_{k=1}^{\infty} ||x_n|| < \infty$, η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ συγκλίνει στον X.*

Απάντηση: ($\Rightarrow$) Υποθέτουμε ότι ο χώρος $(X, ||\cdot||)$ είναι Banach. Εάν $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ είναι μία ακολουθία του X με:

$$\sum_{k=1}^{\infty} ||x_k|| < \infty$$

τότε η $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ είναι μία ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών των οποίων το άθροισμα συγκλίνει. Δηλαδή, αν $n \leqslant m$ και $n \to \infty$:

$$\sum_{k=n}^{m} ||x_k|| \to 0 \text{ (δηλαδή } \lim^{|\cdot|}_{m \geqslant n \to \infty} \sum_{k=n}^{m} ||x_k|| = 0)$$

Έτσι λοιπόν, από την τριγωνική ανισότητα:

$$\left|\left|\sum_{k=n}^{m} x_k\right|\right| \leqslant \sum_{k=n}^{m} ||x_k|| \to 0 \text{ (δηλαδή } \lim^{||\cdot||}_{m \geqslant n \to \infty} \sum_{k=n}^{m} x_k = 0)$$

και κατά συνέπεια η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων $\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)_{n=1}^{\infty}$ είναι βασική. Επειδή ο χώρος $(X, ||\cdot||)$ είναι Banach (δηλαδή πλήρης), υπάρχει το όριο:

$$x = \lim^{||\cdot||}_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} x_k = \sum_{k=1}^{\infty} x_k$$

($\Leftarrow$) Υποθέτουμε ότι όποτε αληθεύει $\sum_{k=1}^{\infty} ||x_n|| < \infty$, η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ συγκλίνει στον X. Θεωρούμε $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ μία βασική ακολουθία στον X, και θα δείξουμε ότι συγκλίνει. Πράγματι, αν ορίσουμε:

$$x_1 = y_1, \;\; x_2 = y_2 - y_1, \;\; x_3 = y_3 - y_2, \cdots, x_n = y_n - y_{n-1}$$

τότε:

$$y_1 = x_1, \;\; y_2 = x_1 + x_2, \;\; y_3 = x_1 + x_2 + x_3, \cdots, y_n = \sum_{k=1}^{n} x_k = y_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (y_{k+1} - y_k)$$

(τα αθροίσματα γίνονται τηλεσκοπικά). Δηλαδή εάν $\sum_{k=1}^{\infty} ||x_k|| < \infty$, τότε από την υπόθεση η $\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνει κι άρα η $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνει.

Για να δείξουμε ότι η $\left(\sum_{k=1}^{n} ||x_k||\right)_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνει, θα δείξουμε ότι είναι βασική (αφού είναι ακολουθία πραγματικών αριθμών). Έστω λοιπόν $\varepsilon > 0$. Αφού η $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι βασική, για αρκετά μεγάλο $n > 1$:

$$||y_{k+1} - y_k|| < \varepsilon/2, \quad \text{για } k \geqslant n$$

κι επομένως:

$$\sum_{k=n}^{n+1} ||y_{k+1} - y_k|| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

οπότε η $\left(\sum_{k=1}^{n} ||x_k||\right)_{n=1}^{\infty}$ είναι βασική ακολουθία πραγματικών αριθμών.

□

Άσκηση 2: *Έστω ο χώρος με νόρμα* $(C([a,b]), ||\cdot||_\infty)$, *όπου:*

$$||f||_\infty = \sup\ |f|([a,b])$$

Θέτουμε $T : \big(C([a,b]), ||\cdot||_\infty\big) \to \big(C([a,b]), ||\cdot||_\infty\big)$ *μέσω του τύπου:*

$$f \mapsto T(f),\ \text{όπου}\ T(f)(x) = \int_a^x f(t)\ dt$$

Δείξτε ότι:

i. Ο T *είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής.*

ii. $||T|| = b - a$

Απάντηση: Για το i.: Η γραμμικότητα του τελεστή είναι συνέπεια της γραμμικότητας του ολοκληρώματος.

$$T(f+g)(\cdot) = \int_a^{(\cdot)} (f+g)(t)\ dt = \int_a^{(\cdot)} f(t)\ dt + \int_a^{(\cdot)} g(t)\ dt = T(f)(\cdot) + T(g)(\cdot)$$

Όσον αφορά το φράγμα, γράφουμε:

$$|T(f)(x)| = \left|\int_a^x f(t)\ dt\right| \leqslant \left|\int_a^x\ dt\right| \cdot ||f||_\infty = |x-a| \cdot ||f||_\infty \leqslant (b-a) \cdot ||f||_\infty$$

οπότε έχουμε:

$$||T(f)(\cdot)||_\infty \leqslant (b-a) \cdot ||f||_\infty$$

(εδώ η μεταβλητή είναι η συνάρτηση f, οπότε έπρεπε να φράξουμε τον τελεστή με ανισότητα της μορφής $||T(f)||_\infty \leqslant M \cdot ||f||_\infty$, πράγμα που τελικά κάναμε).

Για το ii.: Ήδη από την ανισότητα $||T(f)||_\infty \leqslant (b-a) \cdot ||f||_\infty$ (που είδαμε παραπάνω) έπεται ότι $||T|| \leqslant b - a$. Θυμηθείτε ότι:

$$||T|| = \inf\{M > 0\ |\ ||T(f)||_\infty \leqslant M \cdot ||f||_\infty\}$$

Έπειτα, γνωρίζουμε επίσης ότι:

$$||T|| = \sup\ T\partial S_{\left(C([a,b]),||\cdot||_\infty\right)}(0,1) = \sup\{||T(f)||_\infty\ |\ f \in C([a,b]),\ ||f||_\infty = 1\}$$

οπότε αν $h \equiv 1 \in \partial S_{\left(C([a,b]),||\cdot||_\infty\right)}(0,1)$:

$$|T(h)(x)| = \left|\int_a^x\ dt\right| = |x-a| = x - a, \quad \text{για κάθε}\ b > x > a$$

κι άρα $||T(h)||_\infty \geqslant b - a$ (από τον ορισμό της νόρμας $||\cdot||_\infty$). Αυτό δίνει τελικά (σε συνδυασμό με τον ισοδύναμο χαρακτηρισμό της νόρμας τελεστή) ότι:

$$||T|| = \sup\ T\partial S_{\left(C([a,b]),||\cdot||_\infty\right)}(0,1) \geqslant ||T(h)||_\infty \geqslant b - a$$

□

Άσκηση 3: *Έστω* $(X, ||\cdot||)$, $(Y, |||\cdot|||)$ *χώροι με νόρμα,* $T, T_n \in \mathcal{B}(X,Y)$ *(γραμμικοί, φραγμένοι τελεστές) και* $x, x_n \in X$, $n \in \mathbb{N}$. *Εάν* $T_n \to T \Leftrightarrow ||T_n - T|| \to 0$ *και* $x_n \to x$, *δείξτε ότι* $T_n(x_n) \to T(x)$.

Απάντηση: Θα δείξουμε ότι $||T_n(x_n) - T(x)|| \to 0$. Χρησιμοποιώντας την τριγωνική ανισότητα, μπορούμε να γράψουμε:

$$||T_n(x_n) - T(x)|| \leqslant ||T_n(x_n) - T_n(x)|| + |||T_n(x) - T(x)||$$

κι έπειτα, από τα φράγματα των τελεστών:

$$||T(x_n) - T(x)|| \leqslant ||T_n|| \cdot ||x_n - x|| + ||T_n - T|| \cdot ||x||$$

Τώρα από τις συγκλίσεις $T_n \to T$, $x_n \to x$ έπεται ότι οι νόρμες $||T_n||$, $||x_n||$ είναι φραγμένες, από τα M και Λ αντίστοιχα. Δηλαδή:

$$||T(x_n) - T(x)|| \leqslant M \cdot ||x_n - x|| + ||T_n - T|| \cdot \Lambda$$

κι αφήνοντας $n \to \infty$ έχουμε το ζητούμενο.

□

Άσκηση 4: *Έστω $(X, ||\cdot||)$ ένας χώρος με νόρμα και $T : X \to \mathbb{R}$ ένας τελεστής με $T \not\equiv 0$. Απόδείξτε ότι τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

i. Ο T είναι φραγμένος.

ii. Το σύνολο $\text{Ker } T = T^{-1}(\{0\}) \subseteq X$ *είναι κλειστό.*

iii. Υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $T(S(0_X, \varepsilon)) \subset \mathbb{R}$.

Απάντηση: (i. $\Rightarrow$ ii.) Το $\{0\} \subseteq \mathbb{R}$ είναι κλειστό και ο T φραγμένος (άρα και συνεχής). Οι συνεχείς συναρτήσεις αντιστρέφουν τα κλειστά σε κλειστά (αφού αντιστρέφουν τα ανοικτά σε ανοικτά).

(ii. $\Rightarrow$ iii.) Εάν το σύνολο Ker T είναι κλειστό, το συμπλήρωμά του θα είναι ανοικτό. Δηλαδή, για κάθε $y \notin \text{Ker } T$, υπάρχει $\varepsilon_y > 0$ ούτως ώστε $S(y, \varepsilon_y) \cap \text{Ker } T = \varnothing$. Εάν λοιπόν δράσουμε με την T:

$$T(S(y, \varepsilon_y)) \not\ni 0$$

κι από την γραμμικότητα του T:

$$0 \notin T(y + S(0_X, \varepsilon_y)) \Rightarrow 0 \notin T(y) + T(S(0_X, \varepsilon_y)) \Rightarrow -T(y) \notin T(S(0_X, \varepsilon_y)) \Rightarrow T(-y) \notin T(S(0_X, \varepsilon_y))$$

(αφού αν $-T(y) \in S(0_X, \varepsilon_y)$, τότε με μεταφορά $0 \in T(y) + T(S(0_X, \varepsilon_y))$). Δηλαδή για $\varepsilon = \varepsilon_y$, $T(S(0_X, \varepsilon)) \subset \mathbb{R}$.

(iii $\Rightarrow$ i.) Δεδομένου του iii., υπάρχει κάποιος αριθμός $a \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε $a \notin T(S_X(0_X, \varepsilon))$. Μάλιστα λόγω γραμμικότητας $-a \notin T(S_X(0_X, \varepsilon))$, κι επίσης δεν είναι δυνατόν κάποιος b με $|b| > |a|$ (πιο μακρυά από το 0) να ανήκει στην εν λόγω εικόνα: εάν $b = T(x)$, $x \in S_X(0_X, \varepsilon)$, τότε $a = T(a/b \cdot x)$, $a/b \cdot x \in S_X(0_X, \varepsilon)$ (αφού $a/b \in (-1, 1)$). Δηλαδή όλη η εικόνα $T(S_X(0_X, \varepsilon))$ περιέχεται στο $(-|a|, |a|) = S_{\mathbb{R}}(0, |a|)$ και κατά συνέπεια:

$$T(S_X(0_X, \varepsilon)) \subseteq S_{\mathbb{R}}(0, |a|) \Rightarrow T(S_X(0_X, 1)) \subseteq S_{\mathbb{R}}(0, |a|/\varepsilon) \Rightarrow ||T|| \leqslant |a|/\varepsilon$$

οπότε ο τελεστής είναι φραγμένος.

□

Άσκηση 5: *Έστω $(X, ||\cdot||)$ χώρος με νόρμα και $x^* \in X^* = \mathscr{B}(X, \mathbb{R})$ με $x^* \not\equiv 0$. Αποδείξτε ότι:*

$$||x^*|| = \frac{1}{\inf\{||x|| \mid x^*(x) = 1\}}$$

Απάντηση: Θα δείξουμε τις δύο ανισότητες. Για την πρώτη ($\geqslant$), εάν $x \in X$ είναι τέτοιο ώστε $x^*(x) = 1$:

$$|x^*(x)| = 1 \leqslant ||x^*|| \cdot ||x|| \Rightarrow 1/||x|| \leqslant ||x^*|| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sup\{1/||x|| \mid x^*(x) = 1\} = \frac{1}{\inf\{||x|| \mid x^*(x) = 1\}} \leqslant ||x^*||$$

Για τη δεύτερη ($\leqslant$), επειδή:

$$||x^*|| = \sup\ x^* \partial S_{(X, ||\cdot||)}(0, 1)$$

για καθε $||x^*|| > \varepsilon > 0$ υπάρχει $x_\varepsilon \in X$ με $||x_\varepsilon|| = 1$ και $||x^*|| - \varepsilon < |x^*(x_\varepsilon)| \leqslant ||x^*||$. Παρατηρούμε ότι:

$$x^*(x_\varepsilon / x^*(x_\varepsilon)) = 1$$

κι επιπλέον, από την προηγούμενη ανισότητα:

$$\left|\left|\frac{x_\varepsilon}{x^*(x_\varepsilon)}\right|\right| = \frac{1}{|x^*(x_\varepsilon)|} < \frac{1}{||x^*|| - \varepsilon}$$

δηλαδή:
$$\inf\{||x|| \mid x^*(x)=1\} \leqslant \left|\left|\frac{x_\varepsilon}{x^*(x_\varepsilon)}\right|\right| \leqslant \frac{1}{||x^*||-\varepsilon}$$
Έπεται πλέον ότι:
$$\inf\{||x|| \mid x^*(x)=1\} \leqslant \left|\left|\frac{x_\varepsilon}{x^*(x_\varepsilon)}\right|\right| \leqslant \frac{1}{||x^*||}$$
και κατά συνέπεια η ζητούμενη ανισότητα.

□

Άσκηση 6: *Ποιος είναι ο δυϊκός χώρος του* $(\mathbb{R}^n, ||\cdot||_\infty)$*; Ποιος είναι ο δυϊκός χώρος του* $(\mathbb{R}^n, ||\cdot||_p)$, $1 \leqslant p < \infty$*;*

Απάντηση: Η απάντηση θα είναι είναι κάπως εκτενής και θα γίνει σε βήματα. Στην ουσία η άσκηση ζητά να βρούμε τους δυϊκούς χώρους των $(\mathbb{R}^n, ||\cdot||_p)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$ μέσω ισομετρίας, χρησιμοποιώντας γνωστούς χώρους, κι εκεί έγκειται η δυσκολία. Εν τω μεταξύ, σε όλα τα υπόλοιπα θα συμβολίζουμε με $(e_k)_{k=1}^n$ τη συνήθη βάση του $\mathbb{R}^n$.

Βήμα I: Γι' αρχή θα δείξουμε ότι:
$$\left((\mathbb{R}^n, ||\cdot||_p)^*, ||\cdot||\right) = \left(\mathscr{B}\left((\mathbb{R}^n, ||\cdot||_p), \mathbb{R}\right), ||\cdot||\right) \cong (\mathbb{R}^n, ||\cdot||_q)$$
όπου η «$\cong$» υλοποιείται μέσω ισομετρίας και q είναι ο συζυγής του $p > 1$ (δηλαδή $1/p + 1/q = 1$).

Ορίζουμε τον τελεστή $T_q^p : \left((\mathbb{R}^n, ||\cdot||_p)^*, ||\cdot||\right) \to (\mathbb{R}^n, ||\cdot||_q)$ μέσω του τύπου:
$$T_q^p(x^*) = \left(x^*(e_k)\right)_{k=1}^n$$
και παρατηρούμε ότι είναι γραμμικός. Όσον αφορά το επί, είναι φανερό ότι ένα γραμμικό συναρτησοειδές (λόγω γραμμικότητας) μπορεί να οριστεί μονοσήμαντα γνωρίζοντας τις εικόνες της βάσης (κάνουμε γραμμική επέκταση).

Όσον αφορά το φράγμα (και κατά συνέπεια τη συνέχεια), θεωρούμε $x^* \in \left((\mathbb{R}^n, ||\cdot||_p)\right)^*$. Θέτουμε:
$$a_k = \begin{cases} |x^*(e_k)|^q / x^*(e_k), & x^*(e_k) \neq 0 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$
κι έχουμε ότι:
$$||T_q^p(x^*)||_q^q = \sum_{k=1}^n |x^*(e_k)|^q = \sum_{k=1}^n a_k x^*(e_k) = x^*\left(\sum_{k=1}^n a_k e_k\right)$$
Επομένως:
$$||T_q^p(x^*)||_q^q \leqslant ||x^*|| \cdot \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p\right)^{1/p} = ||x^*|| \cdot \left(\sum_{k=1}^n |x^*(e_k)|^{p(q-1)}\right)^{1/p} = ||x^*|| \cdot \left(\sum_{k=1}^n |x^*(e_k)|^q\right)^{1/p}$$
(αφού $p(q-1) = q$). Από την τελευταία ανισότητα, με πράξεις:
$$||T_q^p(x^*)||_q \leqslant ||x^*|| \Rightarrow ||T_q^p|| \leqslant 1$$

Για να δείξουμε την ισομετρία, θα δείξουμε και την άλλη ανισότητα $||T_q^p(x^*)||_q \geqslant ||x^*||$. Έστω λοιπόν $x^* \in \left((\mathbb{R}^n, ||\cdot||_p)\right)^*$ και $x = (x_1, \cdots, x_n) = \sum_{k=1}^n x_k e_k$. Χρησιμοποιώντας την τριγωνική ανισότητα και την Hölder, μπορούμε να γράψουμε:
$$|x^*(x)| = \left|\sum_{k=1}^n x_k x^*(e_k)\right| \leqslant \sum_{k=1}^n |x_k| \cdot |x^*(e_k)| \leqslant \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^n |x^*(e_k)|^q\right)^{1/q}$$
δηλαδή:
$$|x^*(x)| \leqslant ||x||_p \cdot ||T_q^p(x^*)||_q$$
και κατά συνέπεια
$$||x^*|| \leqslant ||T_q^p(x^*)||_q$$

Βήμα ΙΙ: Για την περίπτωση του $(\mathbb{R}^n, ||\cdot||_\infty)^*$ θα κάνουμε ένα τέχνασμα. Αποσκοπούμε να δείξουμε, κατ' αναλογία με το Βήμα Ι, ότι:

$$\big((\mathbb{R}^n, ||\cdot||_\infty)^*, ||\cdot||\big) = \Big(\mathscr{B}\big((\mathbb{R}^n, ||\cdot||_\infty), \mathbb{R}\big), ||\cdot||\Big) \cong (\mathbb{R}^n, ||\cdot||_1)$$

(εξάλλου, οι ∞, 1, από τη σχέση $1/p + 1/q = 1$, λειτουργούν ως συζυγείς αριθμοί).

Στο Βήμα Ι βρήκαμε μία οικογένεια $(T^p_q)_p$ φραγμένων γραμμικών τελεστών $T^p_q : \big((\mathbb{R}^n, ||\cdot||_p)^*, ||\cdot||\big) \to (\mathbb{R}^n, ||\cdot||_q)$ -οι οποίοι μάλιστα είχαν τον ίδιο τύπο $T^p_q(x^*) = \big(x^*(e_k)\big)_{k=1}^n$- που υλοποιούν τις ισομετρίες:

$$\big((\mathbb{R}^n, ||\cdot||_p)^*, ||\cdot||\big) = \Big(\mathscr{B}\big((\mathbb{R}^n, ||\cdot||_p), \mathbb{R}\big), ||\cdot||\Big) \overset{T^p_q}{\cong} (\mathbb{R}^n, ||\cdot||_q)$$

Στη σχέση $||T^q_p(x^*)||_q = ||x^*(e_k)||_p$ είναι δυνατόν να πάρουμε όριο $\lim_{q\to\infty} = \lim_{p\to 1}$, λόγω της Παρατήρησης 1.2.8 στο αρχείο των βάσεων Schauder.

$$\lim_{q\to\infty} ||T^q_p(x^*)||_q = \lim_{p\to 1} \big|\big|\big(x^*(e_k)\big)_{k=1}^n\big|\big|_p$$

Αυτό δείχνει (μαζί με την προηγούμενη ανάλυση στο Βήμα ΙΙ) ότι ο γραμμικός τελεστής $T^\infty_1 : \big((\mathbb{R}^n, ||\cdot||_\infty)^*, ||\cdot||\big) \to (\mathbb{R}^n, ||\cdot||_1)$, που τον ορίζουμε μέσω του τύπου $T^\infty_1(x^*) = \big(x^*(e_k)\big)_{k=1}^n$, είναι γραμμική ισομετρία επί.

Βήμα ΙΙΙ: Η εύρεση ισομετρίας $T^1_\infty : \big((\mathbb{R}^n, ||\cdot||_1)^*, ||\cdot||\big) \to (\mathbb{R}^n, ||\cdot||_\infty)$ γίνεται όπως στο Βήμα ΙΙ.

□

Άσκηση 7: *Έστω X, Y δύο ισομορφικοί χώροι Banach. Αποδείξτε ότι οι χώροι $X^* = \mathscr{B}(X, \mathbb{R})$, $Y^* = \mathscr{B}(Y, \mathbb{R})$ είναι ισομορφικοί.*

Απάντηση: Εφόσον οι X, Y είναι ισομορφικοί, υπάρχει ισομορφισμός $\varphi : X \to Y$. Ορίζουμε τον τελεστή $\Phi : Y^* \to X^*$ μέσω του τύπου:

$$\Phi(y^*) = y^* \circ \varphi$$

και ισχυριζόμαστε ότι είναι ισομορφισμός. Κατ' αρχάς είναι φανερό ότι είναι γραμμική. Για το $1-1$, εάν $y^* \neq z^* \in Y^*$, τότε διαφέρουν σε κάποιο $w \in Y$. Δηλαδή:

$$y^*(w) \neq z^*(w) \Rightarrow y^* \circ \varphi\big(\varphi^{-1}(w)\big) \neq z^* \circ \varphi\big(\varphi^{-1}(w)\big) \Rightarrow \Phi(y^*) \neq \Phi(z^*)$$

Όσον αφορά το επί, εάν $x^* \in X^*$ η συνάρτηση $x^* \circ \varphi^{-1}$ έχει εικόνα (μέσω της Φ) $x^* \circ \varphi^{-1} \circ \varphi = x^*$. Δηλαδή η Φ είναι επί.

Εάν τώρα φράξουμε τον τελεστή Φ, επειδή οι χώροι X^*, Y^* είναι Banach (ως δυϊκοί), από το Παρατήρηση 1.4.3 στο αρχείο με τις βάσεις Schauder (είναι αποτέλεσμα του θεωρήματος της ανοικτής απεικόνισης) θα έχουμε δείξει ότι ο Φ είναι ισομορφισμός. Έτσι λοιπόν έχουμε:

$$||\Phi(y^*)|| = ||y^* \circ \varphi|| \leqslant ||\varphi|| \cdot ||y^*|| \Rightarrow ||\Phi|| \leqslant ||\varphi||$$

κι άρα το ζητούμενο.

□

Άσκηση 8: *Έστω $(X, ||\cdot||)$ ένας χώρος με νόρμα. Αποδείξτε ότι υπάρχει ισομετρική εμφύτευση $T : X \to \ell^\infty(\Gamma)$ για κατάλληλο σύνολο Γ.*

Απάντηση: Κατ' αρχάς θεωρούμε το σύνολο:

$$\mathscr{D} = \{D \subseteq X \mid D \text{ πυκνό}\}$$

και παρατηρούμε ότι αυτό δεν είναι κενό (αφού $X \in \mathscr{D}$). Για τα επόμενα είναι δυνατόν να επιλέξουμε οποιοδήποτε πυκνό σύνολο $D \in \mathscr{D}$, εμείς όμως θα επιλέξουμε το εξής πυκνό σύνολο: θεωρώντας το μερικά διατεταγμένο σύνολο $(\mathscr{D}, \preceq = \supseteq)$ είναι δυνατόν να επιλεγεί, βάση του λήμματος του Zorn, μεγιστικό στοιχείο $D \in \mathscr{D}$. Αυτό το D, από τον ορισμό της διάταξης $\preceq$, θα είναι ελαχιστικό μεταξύ των πυκνών υποσυνόλων του X, ως προς την σχέση του υποσυνόλου $\subseteq$. Ορίζουμε $\Gamma = \#D$ τον πληθάριθμο του D.

Έστω λοιπόν $(x_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ ένα πυκνό υποσύνολο του $\partial S(0,1)\subseteq X$. Θεωρώντας τον κλειστό γραμμικό υπόχωρο $\{0\}$, για κάθε x_γ μπορεί να βρεθεί συναρτησοειδές $x^*_\gamma\in X^*$ τέτοιο ώστε:

$$||x^*_\gamma|| = 1 \text{ και } x^*_\gamma(x_\gamma) = \inf\{||x_\gamma - y|| \mid y\in\{0\}\} = ||x_\gamma|| = 1$$

Αυτό ισχύει από την Πρόταση 1.4.3, i., στο αρχείο των βάσεων Schauder (είναι αποτέλεσμα του θεωρήματος Hahn-Banach).

Ορίζουμε, βάσει των προηγουμένων, τον τελεστή $T: X\to\ell^\infty(\Gamma)$ μέσω του τύπου:

$$T(x) = \left(x^*_\gamma(x)\right)_{\gamma\in\Gamma}$$

Ο T είναι γραμμικός τελεστής. Είναι επίσης φραγμένος, αφού:

$$||T(x)||_{\ell^\infty(\Gamma)} = \sup_\gamma |x^*_\gamma(x)| \leqslant ||x|| \Rightarrow ||T||\leqslant 1$$

Για να αποδείξουμε ότι είναι ισομετρική εμφύτευση, θεωρούμε $\varepsilon>0$ και θα δείξουμε ότι για κάθε $x\in\partial S(0,1)$, $||T(x)||_{\ell^\infty(\Gamma)}\geqslant 1-\varepsilon$. Αν το δείξουμε αυτό, θα έχουμε για κάθε $x\in\partial S(0,1)$:

$$||T(x)||_{\ell^\infty(\Gamma)}\geqslant 1 = ||x|| \Rightarrow ||x||\leqslant ||T(x)||_{\ell^\infty(\Gamma)}\leqslant ||x|| \Rightarrow ||T(x)|| = ||x||$$

οπότε μέσω της γραμμικότητας θα έχουμε $||T(x)|| = ||x||$ για κάθε $x\in X$.

Έστω $x\in\partial S(0,1)$. Από την πυκνότητα του $(x_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$, μπορούμε να βρούμε $\gamma\in\Gamma$ ούτως ώστε $||x_\gamma - x|| < \varepsilon$. Οπότε $|x^*_\gamma(x_\gamma) - x^*_\gamma(x)|\leqslant ||x^*_\gamma||\cdot||x_\gamma - x|| < \varepsilon$ (αφού $||x^*_\gamma|| = 1$). Με (αντίστροφη) τριγωνική ανισότητα έπεται ότι:

$$|x^*_\gamma(x_\gamma)| - |x^*_\gamma(x)| < \varepsilon \Rightarrow |x^*_\gamma(x)| > |x^*_\gamma(x_\gamma)| - \varepsilon = 1-\varepsilon$$

δηλαδή $||T(x)||_{\ell^\infty(\Gamma)} = \sup_n |x^*_\gamma(x_\gamma)| > 1-\varepsilon$, για κάθε $\varepsilon>0$.

□

Άσκηση 9: *Έστω $(X, ||\cdot||)$ χώρος με νόρμα και $A\subseteq X$, $B\subseteq X^*$. Θέτουμε:*

$$A^\perp = \{x^*\in X^* \mid x^*(x) = 0,\ \forall x\in A\}$$

και

$$^\perp B = \{x\in X \mid x^*(x) = 0,\ \forall x^*\in B\}$$

Αποδείξτε ότι:

- *i. $X^\perp = \{0_{X^*}\}$, $\{0_X\}^\perp = X^*$, $^\perp\{0_{X^*}\} = X$, $^\perp X^* = \{0_X\}$*
- *ii. Το $A^\perp\subseteq X^*$ είναι κλειστός υπόχωρος του X^*.*
- *iii. Το $^\perp B\subseteq X$ είναι κλειστός υπόχωρος του X.*
- *iv. Αληθεύει $A\subseteq {}^\perp(A^\perp)$. Εάν ο A είναι γραμμικός υπόχωρος του X, τότε ισχύει η ισότητα $\overline{A} = {}^\perp(A^\perp)$.*
- *v. Αληθεύει $B\subseteq ({}^\perp B)^\perp$.*

Απάντηση: Για το i.: Το σύνολο $X^\perp$ περιέχει όλα τα συναρτησοειδή που μηδενίζονται παντού. Δηλαδή περιέχει μόνο το 0_{X^*}. Το $\{0_X\}^\perp$ περιέχει όλα τα συναρτησοειδή που μηδενίζονται στο 0_X, δηλαδή περιέχει όλα τα συναρτησοειδή. Το $^\perp\{0_{X^*}\}$ περιέχει όλα τα x που μηδενίζουν το μηδενικό συναρτησοειδές, δηλαδή περιέχει όλον τον X.

Τέλος, το $^\perp X^*$ περιέχει όλα τα x που μηδενίζουν ταυτόχρονα όλα τα συναρτησοειδή $x^*\in X^*$. Από το θεώρημα Hahn-Banach, και συγκεκριμένα από την Πρόταση 1.4.3, i., στο αρχείο με τις βάσεις Schauder, για κάθε $x\neq 0$ υπάρχει μη τετριμμένο γραμμικό συναρτησοειδές $x^*\in X^*$ με $x^*(x) = ||x|| > 0$, οπότε δεν υπάρχει -πέραν του μηδενός- στοιχείο που να μηδενίζει ταυτόχρονα όλα τα συναρτησοειδή.

Για το ii.: Θεωρούμε $x^*_n\in A^\perp$ και $x^*\in X^*$ ώστε $x^*_n\to x^*\Leftrightarrow ||x^*_n - x^*||\to 0$, και θα δείξουμε ότι $x^*\in A^\perp$ (οπότε το $A^\perp$ θα είναι κλειστό). Έστω λοιπόν $x\in A$. Έχουμε:

$$|x^*(x)| = |x^*_n(x) - x^*(x)|\leqslant ||x^*_n - x^*||\cdot||x||\to 0 \text{ δηλαδή } x^*(x) = 0,\ \forall x\in A$$

Έτσι δείξαμε ότι $x^*\in A^\perp$.

Για το iii.: Παρατηρούμε ότι:

$$^{\perp}B = \bigcap_{x^* \in B} \text{Ker } x^*$$

οπότε το ζητούμενο έπεται από την Άσκηση 4.

Για το iv.: Το σύνολο $A^{\perp}$ περιέχει όλα τα συναρτησοειδή που μηδενίζονται στο A, δηλαδή έχουν πυρήνα Ker $x^* \supseteq A$. Οπότε:

$$^{\perp}(A^{\perp}) = \bigcap_{x^* \in A^{\perp}} \text{Ker } x^* \supseteq A$$

Αν ο A είναι γραμμικός και $x \in X \backslash \overline{A}$, τότε υπάρχει από το θεώρημα Hahn-Banach, και συγκεκριμένα από την Πρόταση 1.4.3, i., στο αρχείο με τις βάσεις Schauder, γραμμικό συναρτησοειδές που μηδενίζεται στο $\overline{A}$ αλλά όχι στο x. Επομένως:

$$^{\perp}(A^{\perp}) \subseteq \overline{A}$$

Επειδή ο πρώτος είναι κλειστός και περιέχει το A, έπεται η ισότητα.

Για το v.: Το $^{\perp}B$ περιέχει όλα τα στοιχεία $x \in X$ που μηδενίζουν κάθε συναρτησοειδές του B. Οπότε για κάθε $x^* \in B$ έχουμε Ker $x^* \supseteq {}^{\perp}B$. Το σύνολο $({}^{\perp}B)^{\perp}$ περιέχει όλα τα συναρτησοειδή που μηδενίζονται σε κάθε στοιχείο του $^{\perp}B$, οπότε περιέχει τα $x^* \in B$, κι έτσι:

$$({}^{\perp}B)^{\perp} \supseteq B$$

□

Άσκηση 10: *Έστω $(X, ||\cdot||)$, $(Y, |||\cdot|||)$ δύο χώροι με νόρμα, $X \neq \{0\}$. Αποδείξτε ότι, αν ο $\mathcal{B}(X,Y)$ είναι Banach, τότε και ο $(Y, |||\cdot|||)$ είναι Banach.*

Απάντηση: Και πάλι η άσκηση αυτή θα γίνει σε βήματα.

Βήμα I: Κατ' αρχάς, από την Άσκηση 8, υπάρχει ισομετρική εμφύτευση $\Phi : (X, ||\cdot||) \to \ell^{\infty}(\Gamma)$, και μάλιστα το σύνολο Γ μπορεί να επιλεγεί να είναι ο πληθάριθμος $\mathcal{X}$ του X (επιλέγοντας το πυκνό σύνολο X). Από τον ορισμό της Φ, θυμόμαστε ότι έχει την μορφή:

$$\Phi(x) = \left(x^*_{\chi}(x)\right)_{\chi \in \mathcal{X}}$$

Επιπλέον, μία αλγεβρική βάση $(e_i)_{i \in I}$ του X μπορεί επίσης να επιλεγεί.

Βήμα II: Ορίζουμε $e^* = e_1^*$, κι επίσης για τα διάφορα $y \in Y$ τις γραμμικές απεικονίσεις $T_y : X \to Y$ με:

$$T_y(e_1) = y \cdot e^*(e_1) \text{ και } T_y(e_i) = 0,\ i \neq 1$$

Οι T_y είναι φραγμένες απεικονίσεις. Πράγματι, για κάθε $x \in \partial S_{(X,||\cdot||)}(0,1)$ έχουμε, λόγω ισομετρίας, $\Phi(x) \in \partial S_{\ell^{\infty}(\mathcal{X})}(0,1)$ και:

$$|||T_y(x)||| = |e^*(x_1)| \cdot |||y||| \leqslant ||\Phi(x)||_{\ell^{\infty}(\mathcal{X})} \cdot |||y||| = |||y|||$$

όπου $x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$. Οπότε:

$$||T_y|| = \sup T_y \partial S_{(X,||\cdot||)}(0,1) \leqslant |||y|||$$

και κατά συνέπεια $T_y \in \mathcal{B}(X,Y)$, με τον τελευταίο χώρο να είναι πλήρης.

Βήμα III: Έστω $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ μία βασική ακολουθία του Y. Θεωρούμε τους τελεστές T_{y_n} και παρατηρούμε ότι για κάθε n, m:

$$||T_{y_n} - T_{y_m}|| \leqslant |||y_n - y_m|||$$

οπότε η ακολουθία $(T_{y_n})_{n=1}^{\infty}$ είναι βασική στον πλήρη χώρο $\mathcal{B}(X,Y)$.

Έστω λοιπόν $\widehat{T} \in \mathcal{B}(X,Y)$ ώστε $T_{y_n} \to \widehat{T}$. Από τη σύγκλιση έπεται:

$$T_{y_n}(e_1) \to \widehat{T}(e_1) \Rightarrow y_n \cdot e^*(e_1) \to \widehat{T}(e_1) \Rightarrow y_n \to \frac{\widehat{T}(e_1)}{e^*(e_1)}$$

δηλαδή η $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνει στο $\widehat{T}(e_1)/e^*(e_1)$. Αυτά αποδεικνύουν ότι ο χώρος $(Y, |||\cdot|||)$ είναι πλήρης.

$\square$

Άσκηση 11: *Έστω $(X, ||\cdot||)$ χώρος Banach και $(X, |||\cdot|||)$ χώρος με νόρμα ώστε:*

$$||x|| \leqslant M \cdot |||x|||$$

Αποδείξτε ότι, αν ο $(X, |||\cdot|||)$ είναι χώρος Banach, οι νόρμες $||\cdot||$, $|||\cdot|||$ είναι ισοδύναμες.

Απάντηση: Από την ανισότητα της υπόθεσης ο γραμμικός τελεστής $i : (X, |||\cdot|||) \to (X, ||\cdot||)$ είναι φραγμένος. Επειδή οι χώροι είναι Banach, από την Παρατήρηση 1.4.3, στο αρχείο των βάσεων Schauder (που είναι αποτέλεσμα του θεωρήματος της ανοικτής απεικόνισης) έπεται ότι ο i είναι ισομορφισμός. Δηλαδή έχουμε το ζητούμενο.

$\square$

Άσκηση 12: *Έστω $(X, ||\cdot||)$ ένας χώρος με νόρμα και $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ ακολουθία του X. Αποδείξτε ότι η $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι φραγμένη εάν και μόνο αν η ακολουθία $\left(x^*(x_n)\right)_{n=1}^{\infty}$ είναι φραγμένη για κάθε $x^* \in X^*$.*

Απάντηση: Κι εδώ θα εργαστούμε σε βήματα. Στην ουσία χρειάζεται να δείξουμε ότι το αντίστροφο ($\Leftarrow$). Το ευθύ ($\Rightarrow$) είναι συνέπεια της σχέσης $|x^*(x_n)| \leqslant ||x^*|| \cdot ||x_n||$.

Βήμα I: Θεωρούμε τη συνάρτηση $T : X \to \ell^{\infty}(\Gamma)$ της Άσκησης 8, όπου και πάλι $\Gamma = \mathfrak{X} = \#X$, επιλέγοντας το πυκνό σύνολο X. Για την μετέπειτα μελέτη είναι σκόπιμο να ορίσουμε τους τελεστές φ_x, για τους οποίους $\varphi_x(x^*) = x^*(x)$. Μ' αυτούς υπόψη, μπορούμε να γράψουμε:

$$||x|| = ||T(x)||_{\ell^{\infty}(\mathfrak{X})} = \sup_{\chi \in \mathfrak{X}} |x_{\chi}^*(x)| = \sup_{\chi \in \mathfrak{X}} \left|\varphi_x(x_{\chi}^*)\right|$$

και μάλιστα, επειδή $\{x_{\chi}^* \mid \chi \in \mathfrak{X}\} = \{x^* \in X^* \mid ||x|| = 1\} = \partial S_{X^*}(0,1)$:

$$||x|| = \sup_{x^* \in \partial S_{X^*}(0,1)} \left|\varphi_x(x^*)\right| = \sup \ \varphi_x \partial S_{X^*}(0,1) = ||\varphi_x||$$

Βήμα II: Οι τελεστές $\varphi_{x_n}, n \in \mathbb{N}$, είναι φραγμένοι σημειακά. Πράγματι, επειδή:

$$\varphi_{x_n}(x^*) = x^*(x_n)$$

από την υπόθεση έπεται το κατά σημείο φράγμα.

Βήμα III: Επειδή ο χώρος X^* είναι πλήρης (ως δυϊκός), από την αρχή ομοιομόρφου φράγματος έπεται ότι:

$$\sup_n \ ||\varphi_{x_n}|| = M < \infty$$

δηλαδή, από το Βήμα I, $||\varphi_{x_n}|| = ||x_n|| < M < \infty$. Αυτό αποδεικνύει το ζητούμενο.

$\square$

Άσκηση 13: *Έστω $(X, ||\cdot||)$, $(Y, |||\cdot|||)$ χώροι με νόρμα και $T : X \to Y$ γραμμικός τελεστής. Αποδείξτε ότι, αν $y^* \circ T \in X^*$ για κάθε $y^* \in Y^*$, τότε ο T είναι φραγμένος.*

Απάντηση: Δείχνοντας ότι το γράφημα της T είναι κλειστό, βάσει του θεωρήματος του κλειστού γραφήματος θα έχουμε δείξει ότι ο T είναι φραγμένος.

Έστω λοιπόν $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ ακολουθία του X με $x_n \to x \in X$, και $T(x_n) \to y \in Y$. Επειδή τώρα για κάθε $y^* \in Y^*$ έχουμε $y^* \circ T \in X^*$:

$$y^* \circ T(x_n) \to y^* \circ T(x) = y^*\left(T(x)\right)$$

κι επίσης από τη σχέση $T(x_n) \to y$:

$$y^* \circ T(x_n) \to y^*(y)$$

δηλαδή $y^*\left(T(x)\right) = y^*(y)$ για κάθε $y^* \in Y^*$. Από την Πρόταση 1.4.3, ii., στο αρχείο των βάσεων Schauder, έπεται αναγκαστικά ότι $y = T(x)$. Οπότε το γράφημα της T είναι κλειστό.

$\square$

Άσκηση 14: *Έστω $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ μία ακολουθία του $\mathbb{R}$ ώστε η σειρά:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$$

να συγκλίνει για κάθε μηδενική ακολουθία $(y_n)_{n=1}^{\infty} \in c_0$. Αποδείξτε ότι η σειρά:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$$

συγκλίνει, εφαρμόζοντας την αρχή ομοιόμορφου φράγματος.

Απάντηση: Θεωρούμε την οικογένεια τελεστών $(T_n)_{n=1}^{\infty}$ της μορφής $T_n : c_0 \to \mathbb{R}$, που ορίζονται ως εξής:

$$T_n(y) = \sum_{k=1}^{n} x_n y_n$$

Οι T_n είναι γραμμικοί τελεστές, και θα δείξουμε ότι είναι φραγμένοι. Πράγματι:

$$|T_n(y)| = \left|\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right| \leqslant \left|\sum_{k=1}^{n} x_k\right| \cdot ||y||_{\ell^\infty} \Rightarrow ||T_n|| \leqslant \left|\sum_{k=1}^{n} x_k\right|$$

Επιπλέον φράσσονται σημειακά, αφού:

$$\sup_n \ |T_n(y)| = \sup \ \left|\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right|$$

και η $\sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k$ συγκλίνει. Από το θεώρημα ομοιόμορφου φράγματος:

$$\sup_n \ ||T_n|| = M < \infty$$

και κατά συνέπεια ο γραμμικός τελεστής $T : c_0 \to \mathbb{R}$ με τύπο:

$$T(y) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k$$

ορίζεται και είναι φραγμένος. Το ότι είναι φραγμένος δικαιολογείται αυστηρότερα από το γεγονός ότι:

$$|T(y)| = \left|\sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k\right| \leqslant \left|\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right| + \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} x_k y_k\right| \leqslant ||T_n|| \cdot ||y||_{\ell^\infty} + \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} x_k y_k\right| \leqslant M \cdot ||y||_{\ell^\infty} + \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} x_k y_k\right|$$

και με όριο $n \to \infty$:

$$|T(y)| \leqslant M \cdot ||y||_{\ell^\infty} \Rightarrow ||T|| \leqslant M$$

Εφόσον τώρα η T είναι φραγμένη, θεωρώντας για τα διάφορα n τις (τελικά μηδενικές) ακολουθίες $\xi_n = (\text{sign } x_1, \cdots, \text{sign } x_n, 0, \cdots)$ παίρνουμε:

$$|T(\xi_n)| = \left|\sum_{k=1}^{n} |x_k|\right| = \sum_{k=1}^{n} |x_k| \leqslant M$$

και με όριο $n \to \infty$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k| \leqslant M < \infty$$

$\square$

Άσκηση 15: *Έστω $(X, ||\cdot||)$ χώρος με νόρμα, $A \subseteq X$, $x_0 \in X$ και:*

$$Y = \text{span } A$$

Αποδείξτε ότι $x_0 \in \overline{Y}$ *εάν και μόνο αν για κάθε* $x^* \in X$ *με* $x^*|_A \equiv 0$ *έχουμε* $x^*(x_0) = 0$.

Απάντηση: ($\Rightarrow$) Εάν $x_0 \in \overline{Y}$, τότε υπάρχει ακολουθία $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ του Y που συγκλίνει στο x_0. Μάλιστα, επειδή $x^*(y_n) = 0$ για κάθε συναρτησοειδές τέτοιο ώστε $x^*|_A \equiv 0$, λόγω της συνέχειας των x^* έπεται ότι $x^*(x_0) = 0$.

($\Leftarrow$) Εάν προς άτοπο το $x_0 \neq 0$ δεν ανήκει στον κλειστό γραμμικό υπόχωρο $\overline{Y}$, από την Πρόταση 1.4.3, i., στο αρχείο των βάσεων Schauder (που είναι αποτέλεσμα του Hahn-Banach), μπορεί να βρεθεί συναρτησοειδές $x^* \in X^*$ με $x^*|_{\overline{Y}} \equiv 0$ και $x^*(x_0) = ||x_0|| > 0$. Αυτό είναι άτοπο.

$\square$