

Θέματα στις Συνήθειες Διαφορικές Εξισώσεις

Πρώτα θα αναφερθούμε σε βασικά κομμάτια θεωρίας, πριν προχωρήσουμε στις λύσεις των θεμάτων.

Υπενθύμιση 1: (Διαφορικές εξισώσεις) Έστω Ω ένα σύνολο $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times C^1(\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}) \times C(\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R})$. Μία συνάρτηση $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ με:

$$F(t, y(t), y'(t)) = 0 \text{ (όπου } y'(t) = (d/dt)(y)(t))$$

θα καλείται διαφορική εξίσωση. Εμείς, όταν ψάχνουμε λύσεις μίας διαφορικής εξίσωσης, αναζητούμε συναρτήσεις $y \in C^1(I \rightarrow \mathbb{R}) \subseteq C^1(\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R})$ που να ικανοποιούν την παραπάνω σχέση, όπου το I είναι διάστημα.

Εν τω μεταξύ, ας σημειώσουμε κάποια σημαντικά σημεία:

- Το σύνολο $(\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R})$ είναι το σύνολο όλων μερικών συναρτήσεων, δηλαδή:

$$(\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}) = \{f : A \rightarrow B \mid \text{για κάποια } A, B \subseteq \mathbb{R}\}$$

- Το σύνολο $(I \rightarrow \mathbb{R})$ είναι το σύνολο των συναρτήσεων από το I στο \mathbb{R} , δηλαδή:

$$(I \rightarrow \mathbb{R}) = \mathbb{R}^I$$

- Οι προσθήκες -μπροστά απ' αυτά τα σύνολα- C, C^1, C^2 κ.ο.κ. σημαίνουν το προφανές κάθε φορά.
- Η απαίτηση $y \in C^1(I \rightarrow \mathbb{R})$ δεν είναι καθόλου περιοριστική. Οι διαφορικές εξισώσεις έχουν προκύψει από φυσικά προβλήματα, στα οποία απαιτείται κάποια ομαλότητα. Αν κανείς δεν θέλει να ασχοληθεί να συνεχώς διαφορίσιμες συναρτήσεις, συνήθως καταφεύγει σε **κατανομές**, δηλαδή στοιχεία του $(C_c^\infty(I \rightarrow \mathbb{R}))^*$ (του δυϊκού χώρου των λείων συναρτήσεων με συμπαγή φορέα), τα οποία δεν είναι καν συναρτήσεις!¹ Φυσικά αυτό είναι αρκετά περίπλοκο, οπότε μένουμε στη C^1 περίπτωση.

Υπενθύμιση 2: (Εξίσωση Bernoulli) Κάθε εξίσωση της μορφής:

$$y'(t) + a(t)y(t) = b(t)y^r(t)$$

με I διάστημα, $a, b \in C(I \rightarrow \mathbb{R})$ και $r \in \mathbb{Z}$, λέγεται εξίσωση Bernoulli. Ισχύει και για $r \in \mathbb{R}$, αλλά δεν το βλέπουμε συνήθως.

Οι εξισώσεις Bernoulli λύνονται με τον ακόλουθο τρόπο:

- Εάν $r = 0$ ή $r = 1$, η εξίσωση είναι γραμμική. Έτσι λοιπόν, αν υποθέσουμε χωρίς μεγάλη βλάβη της γενικότητας, ότι $r = 0$:

$$y'(t) + a(t)y(t) = b(t)$$

Τώρα είναι γνωστή μία μέθοδος επίλυσης, που αξιοποιεί αυτό που λέμε «ολοκληρωτικό παράγοντα». Παρατηρούμε δηλαδή ότι:

$$y'(t)e^{\int a(t)} + a(t)e^{\int a(t)}y(t) = b(t)e^{\int a(t)} \Rightarrow (y(t)e^{\int a(t)})' = b(t)e^{\int a(t)}$$

¹Ίσως είναι γνωστό το δ του Dirac, που έρχεται φυσικά από τη μελέτη της συνάρτησης βήματος του Heaviside.

και οπότε:

$$y(t) = e^{-\int a(t)} \cdot \left(c + \int b(t) e^{\int a(t)} \right)$$

- Εάν $r \notin \{0, 1\}$, τότε με τον μετασχηματισμό $u(t) = y^{1-r}(t)$ καταφέρνουμε να μετασχηματίσουμε την εξίσωση σε γραμμική. Πράγματι, αφού:

$$u'(t) = (1-r)y^{-r}(t)y'(t)$$

έχουμε:

$$y'(t) + a(t)y(t) = b(t)y(t) \Rightarrow (1-r)y^{-r}(t)y'(t) + (1-r)a(t)y^{1-r}(t) = (1-r)b(t)$$

δηλαδή:

$$u'(t) + (1-r)a(t)u(t) = b(t)$$

Αυτή λύνεται όπως παραπάνω.

Υπενθύμιση 3: (διαφορικές 1-μορφές και ακριβείς διαφορικές εξισώσεις) Μία διαφορική 1-μορφή είναι στην ουσία το διαφορικό μίας συνάρτησης. Εάν $F \in \mathcal{D}(\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R})$ (διαφορίσιμη συνάρτηση), τότε το διαφορικό της είναι η συνάρτηση:

$$DF = \frac{\partial F}{\partial t} dt + \frac{\partial F}{\partial y} dy$$

και, κατά μία έννοια, είναι το πολυδιάστατο ανάλογο της παραγώγου.

Τώρα, όπως η $y'(t) = 0$ είναι μία διαφορική εξίσωση, έτσι και η $DF = 0$ είναι το πολυδιάστατο ανάλογο μίας διαφορικής εξίσωσης. Δηλαδή η:

$$\frac{\partial F}{\partial t} dt + \frac{\partial F}{\partial y} dy = 0$$

είναι μία διαφορική εξίσωση. Μάλιστα λύνεται, ανάλογα με το μονοδιάστατο ανάλογό της. Θα πρέπει, εάν το πεδίο ορισμού της F , έστω $A \subseteq \mathbb{R}^2$, είναι ανοικτό και συνεκτικό:

$$F \equiv c, \text{ όπου } c \text{ σταθερά}$$

(αυτό δεν το αποδεικνύουμε, είναι όμως λογικό). Εάν λοιπόν μας δοθεί μία εξίσωση:

$$M(t, y)dx + N(t, y)dy = 0$$

εμείς θα προσπαθούμε να βρίσκουμε συνάρτηση F ώστε:

$$M = \frac{\partial F}{\partial t} \text{ και } N = \frac{\partial F}{\partial y}$$

Σ' αυτήν την περίπτωση, αν δηλαδή τέτοια F υπάρχει, θα λέμε ότι η παραπάνω εξίσωση είναι ακριβής.

Είναι εύκολο, δεδομένης μίας διαφορικής εξίσωσης $M(t, y)dx + N(t, y)dy = 0$, να βρεθεί αυτή η F ; Όχι, μάλιστα τις περισσότερες φορές καθόλου! Για να βρούμε μία συνθήκη που μας δίνει τότε μία διαφορική εξίσωση είναι ακριβής, χρειάζεται να χρησιμοποιήσουμε **Αλγεβρική Τοπολογία** και **Γεωμετρική Ανάλυση**. Αποδεικνύεται ότι:

«Εάν το σύνολο των t , έστω A , είναι συσταλτό και η 1-μορφή είναι κλειστή (δηλαδή $\partial M/\partial y = \partial N/\partial t$) τότε (και μόνο τότε) υπάρχει $F \in \mathcal{D}(\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R})$ ώστε:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = M \text{ και } \frac{\partial F}{\partial y} = N \gg$$

Ένα σύνολο λέγεται συσταλτό εάν μπορούμε -με συνεχή τρόπο, χωρίς να ανοιγοκλείνουμε τρύπες- να το πλάσουμε και να το κάνουμε σημείο.

Υπενθύμιση 4: (Περί δυναμοσειρών) Είναι γνωστή, από τον απειροστικό λογισμό 2, η έννοια της δυναμοσειράς. Λέμε ότι κάθε απειρόβαθμο πολυώνυμο:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(t-t_0)^n$$

αποτελεί δυναμοσειρά γύρω από το t_0 . Η δυναμοσειρά αυτή μάλιστα συγκλίνει όταν $|t| < R$, όπου το R είναι η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς, που ορίζεται:

$$R := \sup \left\{ R > 0 \mid \sum_{n=0}^{\infty} a_n(R-t_0)^n \text{ συγκλίνει} \right\}$$

Επίσης είναι γνωστό ότι, δεδομένων κάποιων συνθηκών ομαλότητας, πολλές συναρτήσεις προσεγγίζονται από δυναμοσειρά, είναι δηλαδή όριο:

$$f(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N a_n(t-t_0)^n$$

για κατάλληλους συντελεστές $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Οι απείρως παραγωγίσιμες συναρτήσεις (οι λείες) προσεγγίζονται σε αρκετές περιπτώσεις από το αντίστοιχο πολυώνυμο Taylor. Εν τω μεταξύ ας σημειώσουμε εδώ ότι κάθε αναλυτική συνάρτηση παραγωγίζεται, και η παράγωγός της είναι γενίκευση του κανόνα παραγωγής για τα πολυώνυμα.

Τώρα, όσον αφορά τις διαφορικές εξισώσεις, μπορεί λόγω δυσκολίας στην εύρεση μίας λύσης να ζητήσουμε προσέγγισή της. Μία διαφορική εξίσωση:

$$y''(t) + f(t)y(t) + g(t)y(t) = 0$$

έχει, σε κάποιες περιπτώσεις, λύση που προσεγγίζεται από τα μερικά αθροίσματα $\sum_{n=0}^N a_n(t-t_0)^n$, για κάποια a_n . Για την ακρίβεια, υπάρχει το ακόλουθο θεώρημα:

«Εάν οι συναρτήσεις f και g είναι αναλυτικές γύρω από το t_0 (αναλύονται δηλαδή ως δυναμοσειρά με κέντρο t_0), τότε υπάρχει μοναδική λύση του προβλήματος αρχικών τιμών:

$$y''(t) + f(t)y(t) + g(t)y(t) = 0, \text{ με } y(t_0) = a_0, \ y'(t_0) = a_1$$

η οποία είναι αναλυτική συνάρτηση γύρω από το t_0 , με ακτίνα σύγκλισης τουλάχιστον το ελάχιστο των ακτινών σύγκλισης των f, g . Μάλιστα, έχει σειρά Taylor.»

Υπενθύμιση 5: (Η εξίσωση Euler) Εξισώσεις Euler ονομάζονται οι εξισώσεις της μορφής:

$$t^2 y''(t) + aty + by = 0, \text{ όπου } a, b \in \mathbb{R} \text{ και } t > 0$$

Κάθε τέτοια εξίσωση έχει μία λύση t^r , για κάποιο $r \in \mathbb{R}$. Αυτό μπορούμε να το δούμε με μία αντικατάσταση:

$$r(r-1)t^r + art^r + bt^r = 0 \Rightarrow r^2 + (a-1)r + b = 0$$

- Εάν $\Delta > 0$, τότε υπάρχουν δύο λύσεις $r_1 \neq r_2$, και η γενική λύση είναι της μορφής:

$$c_1 t^{r_1} + c_2 t^{r_2}$$

μιας και οι t^{r_1}, t^{r_2} είναι γραμμικώς ανεξάρτητες.

- Εάν $\Delta = 0$, υπάρχει μία διπλή λύση r . Οπότε η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης γίνεται:

$$c_1 t^r + c_2 (\log t) t^r$$

αφού χρειάζεται ο χώρος των λύσεων να είναι διδιάστατος.

- Τέλος, αν $\Delta < 0$, θεωρούμε τις μιγαδικές λύσεις $r_1 = \alpha + \beta i, r_2 = \alpha - \beta i$, και παίρνουμε:

$$t^\alpha (c_1 \cos(\beta \log t) + c_2 \sin(\beta \log t))$$

Υπενθύμιση 6: (Η μέθοδος του Lagrange) Ας υποθέσουμε ότι έχουμε μία διαφορική εξίσωση:

$$y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = f(t)$$

και επίσης ότι γνωρίζουμε τη γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς $y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = 0$. Εάν y_1, y_2 είναι δύο λύσεις της ομογενούς εξίσωσης, κάθε λύση της ομογενούς έχει τη μορφή:

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t), \text{ για } c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

αφού ο χώρος των λύσεων έχει διάσταση 2. Η παρατήρηση που έκανε ο Lagrange, και η οποία είναι πολύ ενδιαφέρουσα, είναι ότι, αν θεωρήσουμε αντί σταθερές c_1, c_2 , συναρτήσεις $c_1(t), c_2(t)$, μπορούμε να βρούμε λύση της μη ομογενούς.

Πράγματι, έστω ότι υπάρχει $y(t) = c_1(t)y_1(t) + c_2(t)y_2(t)$ μία λύση της μη ομογενούς εξίσωσης. Τότε:

$$y(t) = c_1(t)y_1(t) + c_2(t)y_2(t)$$

$$y'(t) = c_1'(t)y_1(t) + c_1(t)y_1'(t) + c_2'(t)y_2(t) + c_2(t)y_2'(t)$$

$$y''(t) = c_1''(t)y_1(t) + y_1(t) + 2c_1'(t)y_1'(t) + c_1(t)y_1''(t) + c_2''(t)y_2(t) + 2c_2'(t)y_2'(t) + c_2(t)y_2''(t)$$

Με αντικατάσταση στην μη ομογενή διαφορική εξίσωση έπεται (με πολλές πράξεις):

$$(a+1)((c_1'y_1 + c_2'y_2) + (c_1'y_1' + c_2'y_2')) = f$$

Εδώ προσέξτε ότι δεν ψάχνουμε τη γενική λύση ακόμη, ψάχνουμε μία λύση. Ας βρούμε λοιπόν, για χάρη ευκολίας, μία λύση με:

$$c_1'y_1 + c_2'y_2 = 0$$

$$c_1'y_1' + c_2'y_2' = f$$

Το παραπάνω σύστημα κανείς μπορεί να το δει ως σύστημα με αγνώστους c'_1, c'_2 . Έχουμε λοιπόν:

$$W(\cdot) = \det \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{pmatrix} \neq 0$$

μιας και οι λύσεις είναι γραμμικώς ανεξάρτητες. Μάλιστα η ορίζουσα $W(t)$ χρησιμοποιείται αρκετά συχνά κι ονομάζεται ορίζουσα Wronski.

Από τον κανόνα του Cramer, παίρνουμε ουσιαστικά τα c'_1, c'_2 και κατά συνέπεια μία λύση. Πράγματι:

$$c_1(t) = \frac{\det \begin{pmatrix} 0 & y_2(t) \\ f(t) & y'_2(t) \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y'_1(t) & y'_2(t) \end{pmatrix}} = \frac{-f(t)y_2(t)}{W(t)}$$

και:

$$c_2(t) = \frac{\det \begin{pmatrix} y_1(t) & 0 \\ y'_1(t) & f(t) \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y'_1(t) & y'_2(t) \end{pmatrix}} = \frac{f(t)y_1(t)}{W(t)}$$

Ολοκληρώνοντας λοιπόν:

$$\begin{aligned} c_1(t) &= - \int \frac{f(t)y_2(t)}{W(t)} dt \\ c_2(t) &= \int \frac{f(t)y_1(t)}{W(t)} dt \end{aligned}$$

Είναι θέμα πράξεων πλέον να ελέγξει κανείς ότι η $c_1(t)y_1(t) + c_2(t)y_2(t)$ είναι λύση της μη ομογενούς.

Μέχρι τώρα έχουμε τη γενική λύση της ομογενούς και μία λύση της μη ομογενούς. Ποιά είναι η γενική λύση της μη ομογενούς; Μπορούμε να βγάλουμε απ' αυθείας συμπεράσματα; Η απάντηση είναι όχι. Εδώ αξιοποιείται ένα θεώρημα, κατά το οποίο:

«Ολες οι λύσεις είναι της μορφής $y_o + y_\epsilon$, όπου y_o είναι λύσεις της ομογενούς και y_ϵ μία λύση της μη ομογενούς (ειδική λύση).»

Υπενθύμιση 7: (Γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις με την ορίζουσα Wronski) Έστω:

$$y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = 0$$

μία διαφορική εξίσωση και y_1 μία λύση της. Με τη βοήθεια της ορίζουσας Wronski, είναι δυνατόν να βρούμε μία ακόμη, γραμμικώς ανεξάρτητη, λύση y_2 .

Πράγματι, εάν y_1, y_2 είναι δύο λύσεις της εν λόγω διαφορικής εξίσωσης (με την πρώτη να είναι γνωστή και την δεύτερη άγνωστη), έχουμε:

$$y_1 y'_2 - y'_1 y_2 = W \Rightarrow \frac{y_1 y'_2 - y'_1 y_2}{y_1^2} = \frac{W}{y_1^2}$$

δηλαδή:

$$\left(\frac{y_2}{y_1}\right)' = \frac{W}{y_1^2} \Rightarrow y_2(t) = y_1(t) \int \frac{W(t)}{y_1^2(t)} dt$$

Σ' αυτό το σημείο μπορεί να εφαρμοστεί ένας τύπος για την ορίζουσα Wronski, ο οποίος ονομάζεται τύπος του Liouville. Απ' αυτόν παίρνουμε:

$$y_2(t) = y_1(t) \int \frac{e^{-\int a(t) dt}}{y_1^2(t)} dt$$

Είναι ζήτημα εφαρμογής της ορίζουσας Wronski ώστε να αποδειχθεί η γραμμική ανεξαρτησία των y_1, y_2 .

Υπενθύμιση 8: (Το θεώρημα Picard-Lindelof) Θεωρούμε το πρόβλημα αρχικών τιμών:

$$y'(t) = f(t, x), \text{ με } y(t_0) = y_0$$

Εάν οι $f, \partial f / \partial y$ είναι συνεχείς συνάρτησεις σε ορθογώνιο:

$$H = \{(t, y) : |t - t_0| \leq A, |y - y_0| \leq B\}$$

με $(t_0, y_0) \in H^\circ$, τότε υπάρχει μοναδική λύση σε διάστημα της μορφής $I = [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$, η οποία προσεγγίζεται ομοιόμορφα από την ακολουθία:

$$y_{n+1}(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(\xi, y_n(\xi)) d\xi$$

Θέμα 1: Να λυθεί η διαφορική εξίσωση:

$$ty^2(t)y'(t) + y^3(t) = 1, \quad t > 0$$

Λύση: Εδώ παρατηρούμε ότι, για τα $t > 0$ ώστε $y(t) \neq 0$:

$$y'(t) + \frac{1}{t} \cdot y(t) = y^{-2}(t)$$

οπότε αυτή είναι μία εξίσωση Bernoulli με $r = -2$, και λύνεται βάσει της **Υπενθύμισης 2**. Γενικά συνήθως δεν γίνεται αναφορά για το τι συμβαίνει για τα υπόλοιπα t . Είναι φανερό, λόγω συνέχειας, ότι το σύνολο $y^{-1}(\{0\})$ είναι πεπερασμένο (εφόσον η y δεν μπορεί να μηδενίζεται σε διάστημα -δεν θα ίσχυε η διαφορική εξίσωση τότε). Λόγω συνέχειας, και του πεπερασμένου του εν λόγω συνόλου, η λύση μπορεί να μεταφερθεί σε όλο το $t > 0$ (γιατί;). \square

Θέμα 2: Να βρεθεί η διαφορίσιμη συνάρτηση φ , με $\varphi(\pi/2) = 0$, για την οποία η διαφορική εξίσωση:

$$2 + y^4 \sin t + \varphi(t)y^3y' = 0$$

γίνεται ακριβής. Στη συνέχεια, να λύσετε αυτήν την διαφορική εξίσωση.

Λύση: Η διαφορική εξίσωση αυτή μπορεί να γραφεί ως 1-μορφή:

$$(2 + y^4 \sin t)dt + (\varphi(t)y^3)dy = 0$$

Με βάση το θεώρημα που αναφέραμε στην **Υπενθύμιση 3**, πρέπει η σχέση:

$$\frac{\partial(2 + y^4 \sin t)}{\partial y} = \frac{\partial(\varphi(t)y^3)}{\partial t}$$

να αληθεύει (παρατηρήστε ότι στις παραγωγίσεις δεν βλέπουμε το y ως συνάρτηση του t). Δηλαδή:

$$4y^3 \sin t = \varphi'(t)y^3 \Rightarrow \varphi'(t) = 4 \sin t \Rightarrow \varphi(t) = -4 \cos t + c$$

και από την αρχική συνθήκη, $\varphi(t) = -4 \cos t$.

Για να λυθεί η διαφορική εξίσωση, πρέπει να βρούμε μία συνάρτηση $F \in \mathcal{D}(\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R})$ ώστε:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = 2 + y^4 \sin t \text{ και } \frac{\partial F}{\partial y} = (-4 \cos t)y^3$$

Ξεκινούμε από την πρώτη σχέση, και ολοκληρώνοντας έχουμε:

$$F(t, y) = 2t - y^4 \cos t + c_1(y)$$

Ανάλογα, από τη δεύτερη σχέση, ολοκληρώνοντας ως προς y :

$$F(x, y) = (-\cos t)y^4 + c_2(x)$$

οπότε:

$$F(t, y) = 2t - y^4 \cos t$$

Από την ανάλυση που κάναμε στην **Υπενθύμιση 3**, θα πρέπει:

$$F(t, y) = 2t - y^4 \cos t = c \Rightarrow 2t - y^4 \cos t = c$$

το οποίο είναι πεπλεγμένη λύση της ζητούμενης διαφορικής εξίσωσης. □

Θέμα 3: Το πρόβλημα αρχικών τιμών:

$$y''(t) - 2ty'(t) - y(t) = 0, \text{ με } y(0) = 1, y'(0) = 2$$

έχει λύση της μορφής $y'(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$. Να υπολογιστούν οι συντελεστές a_n , $n \in \{0, 1, 2, \dots, 7\}$.

Λύση: Από τη μέθοδο επίλυσης με δυναμοσειρές (από το αντίστοιχο θεώρημα της **Υπενθύμισης 4**), οι τιμές a_0 και a_1 είναι αντίστοιχα $y(0)$, $y'(0)$. Δηλαδή, $a_0 = 1$, $a_1 = 2$.

Γενικά τώρα, εάν:

$$y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n t^n$$

είναι η λύση της εξίσωσης (όπως αυτή εξασφαλίζεται από την **Υπενθύμιση 4**), έχουμε:

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$$

$$y'(t) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n t^{n-1}$$

$$y''(t) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) t^{n-2}$$

οπότε με αντικατάσταση στη διαφορική εξίσωση:

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n t^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} 2na_n t^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = 0 \Rightarrow \\
& \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2} t^n - \sum_{n=0}^{\infty} 2na_n t^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = 0 \Rightarrow \\
& \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} [(n+2)(n+1)a_{n+2} - (2n+1)a_n] t^n = 0 \Rightarrow \\
& \Rightarrow (n+2)(n+1)a_{n+2} - (2n+1)a_n = 0 \Rightarrow a_{n+2} = \frac{2n+1}{(n+2)(n+1)} a_n
\end{aligned}$$

Ξεκινώντας από το a_0 , μπορούμε να βρούμε τα a_0, a_2, a_4, a_6 , κι από το a_1 τα a_1, a_3, a_5, a_7 . \square

Θέμα 4: Να λυθεί η διαφορική εξίσωση:

$$t^2 y''(t) + 3ty'(t) - 3y(t) = t^2, \quad t > 0$$

Λύση: Η λύση θα γίνει σε δύο μέρη. Κατ' αρχάς, θα χρειαστεί να λύσουμε την ομογενή εξίσωση:

$$t^2 y''(t) + 3ty'(t) - 3y(t) = 0, \quad t > 0$$

η οποία είναι Euler, βάσει της **Υπενθύμισης 5**. Έπειτα, με τη μέθοδο του Lagrange, στην **Υπενθύμιση 6**, θα βρούμε μία ειδική λύση, και κατά συνέπεια (αξιοποιώντας ένα γνωστό θεώρημα) θα έχουμε βρει τη γενική λύση της μη ομογενούς εξίσωσης.

Βήμα I: (Η επίλυση της εξίσωσης Euler) Ψάχνουμε μία λύση της μορφής t^r . Έχουμε:

$$r^2 + 2r - 3 = 0 \Rightarrow (r+3)(r-1) = 0 \Rightarrow r \in \{-3, 1\}$$

οπότε η γενική λύση είναι η:

$$c_1 t^{-3} + c_2 t, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Βήμα II: (Η μέθοδος Lagrange) Θεωρούμε t^{-3} , t τις δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της ομογενούς εξίσωσης. Θα αναζητήσουμε μία λύση $c_1(t)t^{-3} + c_2(t)t$ της μη ομογενούς λύσεις, βάσει όσων είπαμε στην **Υπενθύμιση 6**. Έχουμε:

$$W(t) = \det \begin{pmatrix} t^{-3} & t \\ -3t^{-4} & 1 \end{pmatrix} = t^{-3} + 3t^{-3} = 4t^{-3}$$

και:

$$\begin{aligned}
c_1(t) &= - \int \frac{t^3}{W(t)} dt = - \int \frac{1}{4} dt = -t/4 + s_1 \quad (\text{επιλέγουμε } s_1 = 0) \\
c_2(t) &= \int \frac{t^{-1}}{W(t)} dt = \int \frac{t^2}{4} dt = t^3/12 + s_2 \quad (\text{επιλέγουμε } s_2 = 0)
\end{aligned}$$

Έτσι, η γενική λύση της μη ομογενούς γίνεται:

$$c_1 t^{-3} + c_2 t - t^{-2}/4 + 1/12$$

(ως άθροισμα των ομογενών και της ειδικής λύσης). \square

Θέμα 5: Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και οι ιδιοσυναρτήσεις του προβλήματος συνοριακών τιμών:

$$y''(t) + 4y'(t) - (\lambda - 4)y(t) = 0, \text{ με } y(0) = 0, y(2) = 0$$

Λύση: Αρχικά θα λύσουμε την εν λόγω διαφορική εξίσωση, παραβλέποντας το γεγονός ότι το λ είναι άγνωστο. Θεωρούμε την $y(t) = e^{rt}$ κι έχουμε:

$$r^2 e^{rt} + 4r e^{rt} - (\lambda - 4)e^{rt} = 0$$

οπότε:

$$r^2 + 4r - (\lambda - 4) = 0 \Rightarrow r = \frac{-2 \pm 2\sqrt{\lambda}}{2} = -1 \pm \sqrt{\lambda}$$

Οι δύο λύσεις $e^{(-1-\sqrt{\lambda})t}$, $e^{(-1+\sqrt{\lambda})t}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητες (όταν $\lambda \neq 0$), και κατά συνέπεια η γενική λύση γίνεται:

$$c_1 e^{(-1-\sqrt{\lambda})t} + c_2 e^{(-1+\sqrt{\lambda})t}$$

Για $t = 0$ έχουμε $y(0) = c_1 + c_2 = 0 \Rightarrow c_1 = -c_2$, και για $t = 2$ έχουμε:

$$y(2) = c_1 e^{-2-2\sqrt{\lambda}} - c_1 e^{-2+2\sqrt{\lambda}} = c_1 (e^{-2-2\sqrt{\lambda}} - e^{-2+2\sqrt{\lambda}}) = 0$$

- Εάν $\lambda > 0$, τότε $c_1 = 0$ και $c_2 = 0$, οπότε κι εκεί η λύση εκφυλίζεται στη μηδενική.
- Εάν $\lambda < 0$, τότε συμβολίζουμε $\mu = 2\sqrt{|\lambda|}$ κι έχουμε:

$$0 = -c_1 e^{-2} (e^{\mu i} - e^{-\mu i}) = 2i \cdot \sin \mu$$

(αφού $(e^{\theta i} - e^{-\theta i})/(2i) = \sin \theta$). Οπότε είτε $\mu \in \{k\pi \mid k \in \mathbb{N}\}$ και $c_1 = -c_2 \in \mathbb{R}$, είτε $c_1 = -c_2 = 0$ και $\mu \notin \{k\pi \mid k \in \mathbb{N}\}$. Η γενική λύση στην πρώτη περίπτωση γίνεται:

$$c_1 e^{(-2-k\pi)t} - c_1 e^{(-2+k\pi)t}$$

και στη δεύτερη εκφυλιζόμαστε στο 0.

Στην περίπτωση όπου $\lambda = 0$, καταλήγουμε σε μία γνωστή εξίσωση $y''(t) + 4y'(t) = 0$. \square

Θέμα 6: Να βρεθεί η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης:

$$2ty''(t) + (1 - 4t)y'(t) + (2t - 1)y(t) = e^t, \quad t > 0$$

εάν είναι γνωστές δύο λύσεις $y_1(t) = te^t$ και $y_2(t) = e^t + te^t$, $t > 0$.

Λύση: Θεωρούμε τη διαφορική εξίσωση:

$$L(y(t)) = y''(t) + \frac{1-4t}{2t}y'(t) + \frac{2t-1}{2t}y(t) - \frac{e^t}{t} = 0$$

και παρατηρούμε ότι, επειδή $L(y_1) = L(y_2) = 0$:

$$L(y_2) - L(y_1) = 0 \Rightarrow (y_2 - y_1)'' + \frac{1-4t}{2t}(y_2 - y_1)' + \frac{2t-1}{2t}(y_2 - y_1)' = 0$$

Δηλαδή η $y_3(t) = (y_2 - y_1)(t) = e^t$ είναι λύση της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης. Από την **Υπενθύμιση 7**, η:

$$y_4(t) = e^t \int \frac{e^{-\int (1-4t) dt}}{e^t} dt$$

αποτελεί λύση της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης, που είναι γραμμικώς ανεξάρτητη με την y_3 . Κατά συνέπεια, η γενική λύση της ομογενούς γίνεται:

$$c_1 y_3 + c_2 y_4$$

και, από μία παρατήρηση στην **Υπενθύμιση 6**, η γενική λύση της μη ομογενούς είναι:

$$c_1 y_3 + c_2 y_4 + y_1$$

(ως άθροισμα των ομογενών και μίας ειδικής). □

Θέμα 7: Έστω το πρόβλημα αρχικών τιμών:

$$y'(t) = f(t, y) \text{ με } y(0) = 1$$

όπου $f(t, y) = t^2|y|^{1/3}$. Δείξτε ότι αν $0 < B < 1$ και $0 < A < B^{1/3}/(1+B)^{1/9}$, το Θεώρημα Picard-Lindelof εγγυάται ύπαρξη και μοναδικότητα λύσης στο ορθογώνιο $S = \{(t, y) : |t| \leq A, |y-1| \leq B\} \subseteq \mathbb{R}^2$.

Λύση: Η μερική παράγωγος της f ως προς y είναι η συνάρτηση:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{3} \cdot t^2 |y|^{-2/3}$$

η οποία δεν ορίζεται στην ευθεία $\{(t, y) : y = 0\}$. Επειδή $0 < B < 1$, το ορθογώνιο S δεν τέμνει την ευθεία αυτή. Επιπλέον, είναι συνεχής στο S , όπως και η f (και αυτό προκύπτει από τους τύπους των δύο συναρτήσεων, που είναι γνωστοί). Επειδή $(0, 1) \in S^\circ$, η **Υπενθύμιση 8** δίνει το ζητούμενο.² □

Θέμα 8: Δείξτε ότι, αν $f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι Lipschitz συναρτήσεις, τότε οι $f_1 + f_2$, $f_1 \circ f_2$ είναι Lipschitz συναρτήσεις.

Λύση: Υποθέτουμε ότι:

$$|f_1(x) - f_1(y)| \leq M \cdot |x - y| \text{ και } |f_2(x) - f_2(y)| \leq \Lambda \cdot |x - y|$$

Από την τριγωνική ανισότητα έχουμε:

$$|(f_1 + f_2)(x) - (f_1 + f_2)(y)| \leq |f_1(x) - f_1(y)| + |f_2(x) - f_2(y)| \leq (M + \Lambda) \cdot |x - y|$$

²Φαίνεται ότι η λύση δεν εξαρτάται από τη σταθερά A , καθώς ούτως ή άλλως το t δεν επηρεάζει τη συνέχεια των δύο συναρτήσεων, f , $\partial f / \partial y$.

οπότε η $f_1 + f_2$ είναι Lipschitz συνάρτηση, με σταθερά Lipschitz $\leq M + \Lambda$. Όσον αφορά τη σύνθεση:

$$|f_1 \circ f_2(x) - f_1 \circ f_2(y)| \leq M \cdot |f_2(x) - f_2(y)| \leq M\Lambda \cdot |x - y|$$

οπότε η $f_1 \circ f_2$ είναι Lipschitz συνάρτηση, με σταθερά Lipschitz $\leq M\Lambda$. □

Θέμα 9: Δίνεται η διαφορική εξίσωση:

$$y' = \mu y - y - y^3, \quad \mu \in \mathbb{R}$$

Να προσδιοριστούν οι λύσεις ισορροπίας και τα σημεία διακλάδωσης. Επίσης, να σχεδιαστεί το διάγραμμα διακλάδωσης και να εξεταστεί η ευστάθεια των λύσεων ισορροπίας.

Λύση: Γράφουμε γι' αρχή:

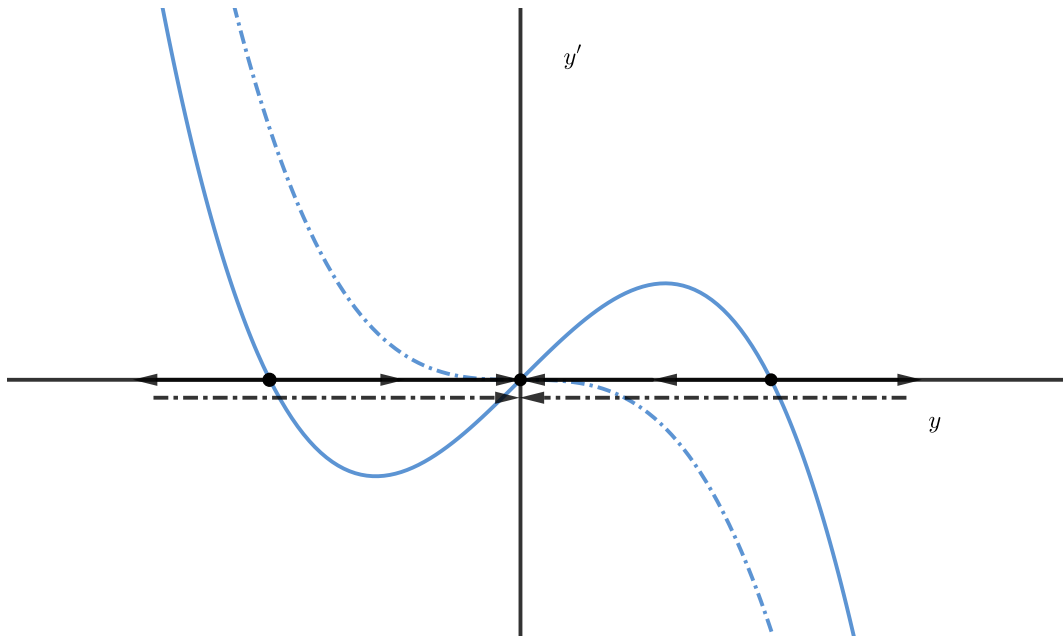
$$y' = (\mu - 1)y - y^3 = y((\mu - 1) - y^2)$$

και παρατηρούμε τα εξής:

- Εάν $y \in \{0, \pm\sqrt{\mu - 1}\}$, τότε $y' = 0$.
- Γενικά:

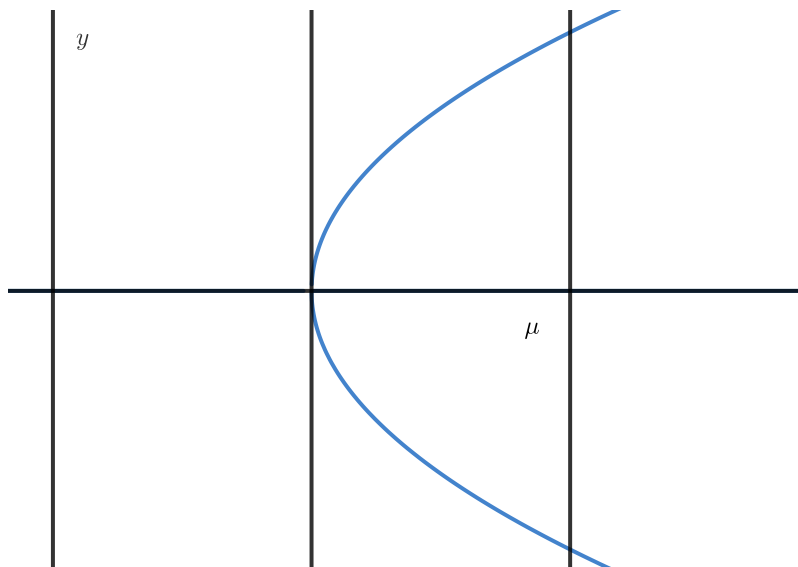
	$(-\infty, -\sqrt{\mu - 1})$	$[-\sqrt{\mu - 1}, 0]$	$[0, \sqrt{\mu - 1}]$	$[\sqrt{\mu - 1}, \infty)$
y	−	−	+	+
$y + \sqrt{\mu - 1}$	−	+	+	+
$y - \sqrt{\mu - 1}$	−	−	−	+
y'	−	+	−	+
y	↘	↗	↘	↗

Οπότε, το διάγραμμα φάσης γίνεται:



Απ' αυτό παρατηρούμε ότι τα σημεία $-\sqrt{\mu-1}$, $\sqrt{\mu-1}$ αποτελούν σημεία ασταθούς ισορροπίας, ενώ το 0 σημείο ευσταθούς ισορροπίας. Επίσης, για την τιμή $-\sqrt{\mu-1} = \sqrt{\mu-1} = 0 \Leftrightarrow \mu = 1$ η φύση της λύσης αλλάζει.

Σχεδιάζοντας το διάγραμμα διακλάδωσης:



παρατηρούμε ότι πράγματι η τιμή $\mu = 1$ αλλάζει ποιοτικά τη φύση των λύσεων. Κατά συνέπεια, είναι σημείο διακλάδωσης. \square

Θέμα 10: Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών:

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y}, \text{ με } \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0$$

όπου:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Λύση: Συμβολίζουμε $\mathbf{y} = (y_1, y_2)^T$ και γράφουμε:

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

δηλαδή:

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1 + y_2 \\ y_2' &= 5y_1 - 3y_2 \end{aligned}$$

Παραγωγίζοντας την πρώτη σχέση κι αξιοποιώντας τη δεύτερη, έχουμε:

$$y_1'' = y_1' + y_2' = y_1' + 5y_1 - 3y_2 = y_1' + 5y_1 - 3y_1' + 3y_1$$

επομένως:

$$y_1'' + 2y_1' - 8y_1 = 0$$

Αυτή είναι μία γνωστή εξίσωση, και λύνεται με τον συνήθη τρόπο, ψάχνοντας δηλαδή λύσεις της μορφής e^{rt} . Έχουμε λοιπόν:

$$r^2 e^{rt} + 2r e^{rt} - 8e^{rt} = 0 \Rightarrow r^2 + 2r - 8 = 0 \Rightarrow r \in \{-4, 2\}$$

και έτσι οι e^{-4t} , e^{2t} είναι (γραμμικώς) ανεξάρτητες λύσεις. Η γενική λύση είναι η:

$$y_1(t) = c_1 e^{-4t} + c_2 e^{2t}$$

και, από τη σχέση των y_1 , y_2 :

$$y_2(t) = 4c_1 e^{4t} + 2c_2 e^{2t} - c_1 e^{-4t} - c_2 e^{2t} = 3c_1 e^{4t} + c_2 e^{2t}$$

Η αρχική συνθήκη θα προσδιορίσει τα c_1 , c_2 . Για $t = 0$:

$$y_1(0) = 1 \Rightarrow c_1 + c_2 = 1$$

$$y_2(0) = 2 \Rightarrow 3c_1 + c_2 = 2$$

επομένως $c_1 = 1/2$ και $c_2 = 1/2$. □

Θέμα 11: Δείξτε ότι ο πίνακας:

$$\Phi = \begin{pmatrix} 2 & \log t \\ 0 & 1/t \end{pmatrix}$$

είναι θεμελιώδης πίνακας λύσεων του συστήματος:

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1/t \end{pmatrix} \mathbf{y}, \quad t > 0$$

Να βρεθεί η λύση του συστήματος εάν $\mathbf{y}(1) = (1, 1)^T$.

Λύση: Κατ' αρχάς ο πίνακας Φ είναι πίνακας λύσεων, αφού:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1/t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & \log t \\ 0 & 1/t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/t \\ 0 & -1/t^2 \end{pmatrix} = \Phi'$$

Υπολογίζοντας την ορίζουσα Wronski, $W = \det \Phi$, θα διαπιστώσουμε ότι οι λύσεις (οι στήλες του πίνακα Φ) είναι γραμμικώς ανεξάρτητες.

$$\det \Phi = 2/t, \quad t > 0$$

Κατά συνέπεια ο πίνακας Φ είναι θεμελιώδης πίνακας λύσεων του συστήματος. Η γενική λύση, μιας και οι στήλες του Φ είναι γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις, θα λαμβάνει τη μορφή:

$$c_1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \cdot \begin{pmatrix} \log t \\ 1/t \end{pmatrix}$$

ή αλλιώς, μετά από αλλαγή των σταθερών:

$$\begin{pmatrix} c_1 + c_2 \log t \\ c_2/t \end{pmatrix}$$

Με την αρχική συνθήκη υπόψη, μπορούμε να προσδιορίσουμε τα c_1, c_2 , τα οποία γίνονται $c_1 = 1$, $c_2 = 1$. \square

Θέμα 12: Έστω $\psi(t)$ η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών:

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y}, \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0, \text{ όπου } A \in \mathbb{R}^{n \times n}, A + A^T = 0$$

Δείξτε ότι $\|\psi(t)\| = \|\mathbf{y}_0\|$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$, όπου $\|\cdot\|$ συμβολίζει την Ευκλείδεια νόρμα. Επιβεβαιώστε το αποτέλεσμα αυτό από τη λύση του συστήματος:

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{y}, \mathbf{y}_0 = (a, b)$$

Λύση: θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$T_\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \text{ με } T_\psi(t) = \|\psi(t)\|^2 = \langle \psi(t), \psi(t) \rangle$$

και παρατηρούμε ότι είναι παραγωγίσιμη. Μάλιστα:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_\psi}{\partial t}(t) &= \langle \psi(t), \psi'(t) \rangle + \langle \psi'(t), \psi(t) \rangle \\ &= \psi^T(t) \psi'(t) + \psi'^T(t) \psi(t) \end{aligned}$$

Εάν το ψ είναι λύση του συστήματος $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$, τότε:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_\psi}{\partial t}(t) &= \psi^T(t) A \psi(t) + \psi(t)^T A^T \psi(t) \\ &= \psi^T(t) (A + A^T) \psi(t) \stackrel{*}{=} 0 \end{aligned}$$

(όπου η $(*)$ δικαιολογείται από την υπόθεση $A + A^T = 0$). Αυτό δείχνει ότι η T_ψ είναι σταθερή, δηλαδή η $\|\psi(t)\|$ είναι σταθερή. Λόγω της αρχικής συνθήκης έχουμε $\psi(0) = \mathbf{y}_0$, οπότε $\|\psi(t)\| = \|\mathbf{y}_0\|$ για όλα τα $t \in \mathbb{R}$.

Ας κάνουμε μία επαλήθευση στο σύστημα:

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{y}, \mathbf{y}_0 = (a, b)$$

Κατ' αρχάς παρατηρούμε ότι:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

Έπειτα, θα βρούμε τη λύση του προβλήματος αρχικών τιμών που δίνει το σύστημα αυτό, μαζί με την αρχική συνθήκη.

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= -y_1 \end{aligned}$$

Παραγωγίζοντας την πρώτη, έχουμε $y_1'' = y_2' = -y_1$, δηλαδή $y_1'' + y_1 = 0$. Αυτή είναι γνωστή διαφορική εξίσωση (λ.χ. από την κλασική μηχανική), και έχει γενική λύση:

$$y_1(t) = c_1 \sin t + c_2 \cos t$$

και η y_2 γίνεται $y_2(t) = c_1 \cos t - c_2 \sin t$. Λαμβάνοντας υπόψη την αρχική συνθήκη:

$$c_1 \sin 0 + c_2 \cos 0 = a$$

$$c_1 \cos 0 - c_2 \sin 0 = b$$

δηλαδή $c_1 = b$, $c_2 = a$. Τελικά, αν συμβολίσουμε $\psi(t) = (b \sin t + a \cos t, b \cos t - a \sin t)^T$:

$$\|\psi(t)\|^2 = b^2 \sin^2 t + 2ab \sin t \cos t + a^2 \cos^2 t + b^2 \cos^2 t - 2ab \sin t \cos t + a^2 \sin^2 t = a^2 + b^2$$

δηλαδή $\|\psi(t)\| = \sqrt{a^2 + b^2} = \|(a, b)^T\| = \|\mathbf{y}_0\|$. □