ΑΤΥΠΗ ΜΟΡΦΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Προπτυχιακή εργασία των φοιτητών:

Δημητροκάλλης Βασίλειος, τμήμα Μαθηματικών ΕΚΠΑ, 1ο εξάμηνο, ΑΜ: 1112201900XXX

Φράγκος Αναστάσιος, τμήμα Μαθηματικών ΕΚΠΑ, 1ο εξάμηνο, ΑΜ: 1112201900XXX

Επιβλέπουσα Καθηγήτρια: Ζ. Σμυρναίου

Χωρὶς τὴ μαθηματικὴ τάξη, δὲν στέκει

τίποτε: Οὔτε οὐρανὸς ἔναστρος,

οὔτε ρόδο. Προπαντὸς ἕνα ποίημα.

Νικηφόρος Βρεττάκος

Περιεχόμενα:

Εισαγωγή:

Είναι αδιαμφισβήτητο ότι ο σύγχρονος άνθρωπος, αφού διήλθε τους προηγούμενους αιώνες από τα αιματηρά μονοπάτια της επανάστασης, αντιδρώντας απέναντι σε ό,τι θεώρησε τροχοπέδη της ανθρώπινης προόδου και προσπαθώντας να διασφαλίσει στα άτομα όλων των κοινωνιών αυτά που πλέον ορίζουμε ως «πανανθρώπινα δικαιώματα», κατάφερε να κατακτήσει (εν μέρει), μεταξύ άλλων, την ελεύθερη βούληση και την αχειραγώγητη σκέψη και κρίση.

Σε έναν τέτοιο κόσμο που δημιουργήσαμε, ζούμε, ελεύθεροι να κινήσουμε με την θέλησή μας και όπως μας ευχαριστεί τα νήματα της ζωής μας. Μάλλον έναν τέτοιο κόσμο θα φαντάζονταν ο Πλάτωνας ως τον ιδανικό στο περίφημο έργο του «Πολιτεία», θα σκεφτόταν κανείς. Η πραγματικότητα όμως διαφέρει, κατά μεγάλο μάλιστα βαθμό, κι αυτό είναι απόρροια, ή μάλλον αστοχία, του «σύγχρονου» εκπαιδευτικού συστήματος.

Το εκπαιδευτικό σύστημα οφείλει να προσαρμόζει τις μεθόδους διδασκαλίας στις απαιτήσεις της εποχής, εάν πραγματικά αποσκοπεί στην κοινωνική πρόοδο. Γι΄αυτό και είναι αδιανόητο, μια θεωρητικά ανεπτυγμένη οικονομικά και πολιτιστικά χώρα του 21^{ου} αιώνα, όπως η Ελλάδα, να χρησιμοποιεί τεχνικές που διαμορφώθηκαν στα τέλη του 19^{ου}. Η χώρα μας προφανώς υστερεί σε θέματα διδακτικής, και αυτό έχει εκφάνσεις στον τομέα της επιστήμης κι ακόμη και στην οικονομία, καθώς οι πολίτες, μεν, δύνανται να πάρουν αποφάσεις σε ένα ευρύτατο πλαίσιο, μη έχοντας, δε, το απαραίτητο υπόβαθρο και την απαραίτητη καθοδήγηση, δεν είναι λίγες οι φορές που «αστοχούν» και δεν λαμβάνουν τις σωστές. Για την χώρα μας, φαίνεται, αυτό που θεωρείται στοιχείο αλματώδους προόδου για τον υπόλοιπο κόσμο, είναι, τελικά, μειονέκτημα.

Οι εξελίξεις στην τεχνολογία τρέχουν δριμύτατα στον κόσμο «της γνώσης και της πληροφορίας». Ένα βιώσιμο εκπαιδευτικό σύστημα οφείλει να προσανατολίζει τους μαθητές στην χρήση των νέων τεχνολογιών για την διδασκαλία τους και, προπαντός, να επισημαίνει τα οφέλη της χρήσης τους και τα προβλήματα που τυχόν ενέχουν. Ένα τέτοιο, επίσης, σύστημα οφείλει να ωθεί τους μαθητές στην «δια βίου» μάθηση, δηλαδή, η γνώση να μεταδίδεται μέσω πρακτικών εφαρμογών, διότι η μάθηση γίνεται απείρως ευκολότερη, περισσότερο ελκυστική προς τους μαθητές και, το κυριότερο, η παγκόσμια κοινωνία, βασιζόμενη σε μεγάλο βαθμό στην πρόοδο των τεχνολογιών, ζητά άτομα-εργαζόμενους με πρακτικές ικανότητες.

Στο πλαίσιο, λοιπόν, αυτής της εργασίας θα αναφέρουμε μερικούς τρόπους με τους οποίους το σύγχρονο εκπαιδευτικό σύστημα, μέσω διδακτικών προγραμμάτων, θα γίνει φιλικότερο προς τους μαθητές και ικανό να ανταπεξέλθει στις απαιτήσεις του σύγχρονου τεχνοκρατικού κόσμου.

Η «άτυπη» διδασκαλία των μαθηματικών:

Οι δυο «αντίπαλοι» τρόποι Διδασκαλίας:

Σαν μέθοδος διδασκαλίας των μαθηματικών κυριαρχούν δυο εντελώς αντίθετοι τρόποι διδασκαλίας. Ο πρώτος συχνά καλείται παραδοσιακός. Πρόκειται για τον τρόπο μάθησης που εφάρμοζε πάντα η χώρα μας στην διδασκαλία κάθε σχολικού μαθήματος, και βασίζεται στην δασκαλοκεντρική θεωρία που θέτει τον εκπαιδευτικό σαν αυθεντία και παντογνώστη που μεταδίδει τις γνώσεις στους μαθητές του. Η παραδοσιακή διδασκαλία όμως παρουσιάζει πολλές αδυναμίες που αφορούσαν το βάθος τις μάθησης από τους μαθητές όπως και την στάση τους στην μάθηση της διδακτέας ύλης, για αυτό και αρκετές χώρες τα τελευταία χρόνια την έχουν εγκαταλείψει, υιοθετώντας έναν σύγχρονο τρόπο εκπαίδευσης στον οποίον επίκεντρο είναι ο μαθητής. Σε αυτό το μοντέλο μάθησης και διδασκαλίας ο μαθητής κατακτά την γνώση με την καθοδήγηση του εκπαιδευτικού μέσα από την επίλυση προβλημάτων και διάφορων κατασκευαστικών μεθόδων.

Τα πλεονεκτήματα της Σύγχρονης μάθησης:

Θεωρητικά η Παραδοσιακή Διδασκαλία μειονεκτεί της Σύγχρονης. Τι γίνεται όμως πρακτικά;

Πράγματι ύστερα από εφαρμογή και των δύο τρόπων διδασκαλίας σε δύο ομάδες μαθητών στην Αγγλία αποδείχθηκε ότι οι μαθητές που δέχθηκαν σύγχρονες μεθόδους μάθησης, βασιζόμενες στην ανακαλυπτική θεωρία, σημείωσαν σημαντικά καλύτερες επιδόσεις, σε διάφορα τεστ και διαγωνίσματα, συγκριτικά με αυτούς που δέχθηκαν παραδοσιακή διδασκαλία. Παρόλα αυτά δεν παρατηρήθηκε κάποια αλλαγή στην συμπεριφορά των μαθητών απέναντι στην διδακτέα ύλη, πράγμα το οποίο καταδεικνύει πως οι μαθητές εσωτερίκευσαν βαθύτερα και καλύτερα την γνώση.

Θεωρίες μάθησης και μέθοδοι διδασκαλίας:

Για την ορθή οικοδόμηση της γνώσης στο σύγχρονο τεχνοκρατικό περιβάλλον, κρίνουμε απαραίτητες τις θεωρίες μάθησης και τις μεθόδους διδασκαλίας που προτάθηκαν από την Ευρωπαϊκή Επιτροπή για την αντιμετώπιση του προβλήματος των χαμηλών επιδόσεων των μαθητών της Ε.Ε. στις φυσικές επιστήμες, οι οποίες είναι:

- **Οικοδομητισμός ή Κονστρουκτιβισμός:** Ο οικοδομητισμός είναι μία γνωστική θεωρία της οποίας το αντικείμενο αγγίζει και συνδέει γνώσεις που αφορούν διαφορετικές επιστημονικές σχολές, όπως της πληροφορικής, της γνωστικής ψυχολογίας, της γλωσσολογίας και της έρευνας του εγκεφάλου. Η θεωρία αυτή βασίζεται στο γεγονός ότι το ανθρώπινο μυαλό, καθώς είναι ένα κλειστό (σχετικά) και αυτοοργανώμενο σύστημα επεξεργασίας πληροφοριών (self-organizing information system), στο μεγαλύτερο μέρος της δραστηριότητάς του ασχολείται με τον εαυτό του και σε πολύ μικρό βαθμό με την επεξεργασία πληροφοριών που προέρχονται από τον έξω κόσμο. Όπως αναφέρθηκε από τον Foerster στην ομιλία του «Εμείς δεν βλέπουμε ότι δεν βλέπουμε»: «[…] *Ο εγκέφαλος οικοδομεί μία κατασκευή (construction) για το πώς είναι ο κόσμος, χωρίς να ξέρει πώς αυτός είναι πραγματικά. Αυτό το οποίο εμείς αντιλαμβανόμαστε είναι πάντα οι εμπειρίες μας από τα πράγματα, όχι τα ίδια τα πράγματα καθαυτά.* […] *Κατ' αυτή την έννοια η έκφραση «κάτι καταλαβαίνω» σημαίνει οικοδομώ, δημιουργώ μία ερμηνεία, η οποία φαίνεται ότι λειτουργεί και ότι είναι λογική».* Θα μπορούσαμε να πούμε ότι η μάθηση βασιζόμενη σε Κονστρουκτιβιστικές μεθόδους, είναι εξέλιξη της «μαιευτικής μεθόδου» του Σωκράτη καθώς παύει να είναι μια αυτοματοποιημένη, παθητική διαδικασία αποστήθισης και αποκτά μια ενεργότερη μορφή δημιουργίας της γνώσης, στην οποίαν η μάθηση είναι μια ατομική αυτοκαθοδηγούμενη διεργασία, ανάλογη των εμπειριών του διδασκόμενου. Γενικά, η γνωστική θεωρία του Κονστρουκτιβισμού μπορεί να συνοψιστεί με την φράση του Ernstvon Clasersfeld: «*Η αντίληψη είναι μία εφεύρεση, όχι μία ανακάλυψη*».
- **Κονστραξιονιμός:** Η θεωρία – στην κλασική της εκδοχή – έχει τις ρίζες της στο ερευνητικό έργο των Piaget(γενετική επιστημολογία) και Bruner (γνωστική και εκπαιδευτική ψυχολογία), και θεμελιώνεται πάνω στην κεντρική ιδέα πως η νέα γνώση οικοδομείται (constructed) από τον ίδιο τον μαθητή. Τα πάντα γίνονται κατανοητά μέσα από την κατασκευή τους, καθώς η μάθηση γίνεται «χτίσιμο γνωστικών δομημάτων» μέσα από την σταδιακή εσωτερίκευση της διερευνητικής αλληλεπίδρασης με το περιβάλλον. Όσον αφορά την τεχνολογία, χαρακτηριστική θέση του Κονστραξιονισμού είναι η κατανόηση του εκπαιδευτικού λογισμικού ως «γνωστικού εργαλείου» υποβοήθησης και επέκτασης της σκέψης του μαθητή στην πορεία οικοδόμησης και ανακατασκευής της γνώσης. Η τεχνολογία δίδει επίσης την

δυνατότητα έκφρασης των ιδεών μέσα από διαφορετικές οπτικές γωνίες, κάνοντας ευκολότερη την εξαγωγή παρατηρήσεων.

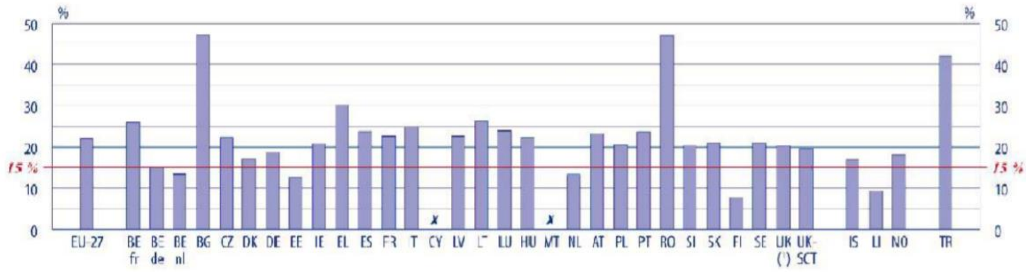
- **Η ανακαλυπτική μάθηση του J.Bruner:**
  Πολύ συχνά ακούγεται η άποψη: «Δεν θα μάθεις Μαθηματικά αν δεν κάνεις Μαθηματικά». Η συγκεκριμένη φράση πηγάζει από μια γενικότερη φιλοσοφία που επικράτησε την δεκαετία του εξήντα και, εν τέλει, οδήγησε στο κίνημα ανακαλυπτικής μάθησης. Πατέρας της ανακαλυπτικής μάθησης είναι ο Bruner ο οποίος υποστήριζε ότι για να μάθει το υποκείμενο πρέπει να δράσει σε συγκεκριμένα αντικείμενα. Με άλλα λόγια οι μαθητές καλούνται να αποκτήσουν γνώσεις και να αναπτύξουν δεξιότητες μέσω του πειραματισμού και της πρακτικής δηλαδή να ανακαλύψουν την γνώση. Η διαδικασία της ανακάλυψης είναι μια δυναμική διαδικασία αλληλεπίδρασης και μπορεί μονάχα να επιτευχθεί με την σωστή καθοδήγηση του εκπαιδευτικού διαφορετικά δεν θα υπάρξει η κατανόηση των εννοιών ή φαινομένων από την μεριά των μαθητών συνεπώς και η μάθηση. Με βάση την ανακαλυπτική θεωρία της μάθησης ο εκπαιδευόμενος πρέπει να αντιμετωπίσει προβληματικές καταστάσεις , να οργανώνει ένα αναλυτικό πρόγραμμα δράσης σε σπειροειδή μορφή και ο εκπαιδευτικός να λειτουργεί σαν συντονιστής και εμψυχωτής στην προσπάθεια του μαθητή του να ανακαλύψει την γνώση (Σμυρναίου).
- **Η Θεωρία του L. Vygotsky:**
  Άλλη μια θεωρία που θέλει τον μαθητή δραστήριο και όχι απλά ένα παθητικό δέκτη είναι η Κοινωνικοπολιτισμική Θεωρία του L. Vygotsky. Σύμφωνα με αυτήν την θεωρία η ανάπτυξη της νόησης είναι διαδικασία κοινωνικής αλληλεπίδρασης με τον δάσκαλο, τους συμμαθητές και το περιβάλλον. Γενικότερα οι ανθρώπινες δραστηριότητες συμβαίνουν μέσα σε πολιτιστικά πλαίσια, που διαμεσολαβούνται μέσα από την γλώσσα. Βασική αρχή της θεωρίας είναι η Ζώνη Επικείμενης Ανάπτυξης (Ζ.Ε.Α). Η Ζ.Ε.Α αποτελεί την ανεξερεύνητη περιοχή του δυναμικού του μαθητή. Ο τελευταίος από την μεριά του βρίσκεται σε μία κατάσταση εξέλιξης που του επιτρέπει να έχει ένα πυρήνα γνώσεων για να χρησιμοποιήσει στην πραγματοποίηση δραστηριοτήτων. Γύρω από αυτόν τον πυρήνα τοποθετείται η Ζ.Ε.Α που μπορεί να πραγματοποιήσει δραστηριότητες μόνα αν υποβοηθείται από άλλους. Σε αυτό το σημείο γίνεται εμφανής η σημασία του κοινωνικού περιβάλλοντος και του εκπαιδευτικού στην γνωστική ανάπτυξη του μαθητή. Ο μαθητής, ατομικά ή μόνος του, δρα στο αντικείμενο της μάθησης χρησιμοποιώντας διαμεσολαβητικά εργαλεία (προφορικός, γραπτός λόγος, μηχανές, κτλ.). Η ανάπτυξη της σκέψης κατευθύνεται από το κοινωνικό επίπεδο στο ατομικό. Επομένως η φύση της μάθησης είναι κοινωνική (Σμυρναίου)

Διδασκαλία των Μαθηματικών επιστημών στις χώρες της Ευρωπαϊκής Ένωσης:

Πριν από λίγα χρόνια η επικρατούσα αντίληψη στον χώρο της διδακτικής των Μαθηματικών (και γενικότερα στην διδακτική των Φυσικών Επιστημών) ήταν η «τραπεζική αντίληψη» της παιδείας, κατά την οποία η μαθηματική γνώση αποκτάται αποκλειστικά και μόνον μέσω της αποστήθισης. Όπως χαρακτηριστικά ανέφερε ο Freire (1977), «*Ο δάσκαλος των Μαθηματικών* […] *καταθέτει τις έτοιμες γνώσεις στα άδεια μυαλά των μαθητών, όπως κανείς καταθέτει χρήματα σε μία τράπεζα*». Τέτοιου είδους παιδεία απαιτεί την άκριτη, παθητική αποδοχή της γνώσης και δημιουργεί ένα κλίμα αυτοματοποιημένης διδασκαλίας, μαθοφοβικό και μαθησιοκτόνο, στο οποίο η ανθρώπινη επικοινωνία αποκόπτεται και η αυθεντία του δασκάλου αποκτά αυτοκρατορική ισχύ.

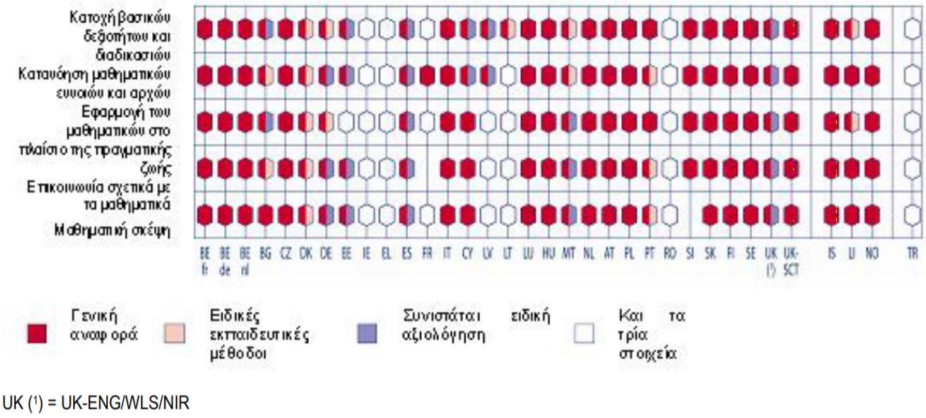
Προφανώς, πλέον αυτή η αντίληψη δεν είναι αποδεκτή. Η άρση, όμως, της αποδοχής ήρθε ως αποτέλεσμα πολύχρονων ερευνών και ευρωπαϊκών ή εθνικών συμβουλίων (NCTM – National Council of Teachers, 1989 / Έρευνες των Cassani & D’Amore & Deleonardi & Girotti, 1996 - P.Cobb & E.Yackel, 1991 - G.Brousseau, 1984 / Βρυξέλλες – European Commission, 16-11-2011 / 1η Σύνοδος Προέδρων των Τμημάτων Μαθηματικών, 11/2018 κ.α.).

Οι υπεύθυνοι της εκπαίδευσης στην Ε.Ε. διαπίστωσαν ότι τα ποσοστά των 15-χρονων μαθητών (2009) με χαμηλές επιδόσεις στα μαθηματικά κυμαινόταν μεταξύ του 9% και του 48%, ποσοστό, όπως αναφέρθηκε, «απογοητευτικό», καθώς «[…] Τόσο τα Μαθηματικά, όσο και οι φυσικές επιστήμες διαδραματίζουν κρίσιμο ρόλο στην σύγχρονη διδακτική ύλη για την ανταπόκριση όχι μόνο στις ανάγκες της αγοράς εργασίας, αλλά επίσης για την ανάπτυξη της ενεργού ιδιότητας του πολίτη». Στόχος της Ε.Ε. είναι έως το τέλος του 2020 τα ποσοστά αυτά να φτάσουν κάτω του 15%.



Εικόνα 1: Ποσοστά 15-χρονων μαθητών με χαμηλές επιδόσεις στα Μαθηματικά, ΟΟΣΑ, βάση δεδομένων PISA, 2009

Τα Μαθηματικά δεν είναι απλώς ένα μάθημα της ύλης των σχολικών προγραμμάτων, αλλά ένας τρόπος σκέψης, απαραίτητος για κάθε πολίτη του σύγχρονου κόσμου (και συνεπώς και της Ε.Ε.), που καλείται καθημερινώς να αντιμετωπίσει όλο και περισσότερα προβλήματα, καθένα πιο περίπλοκο από το προηγούμενο. Η Μαθηματική Λογική, απλοποιώντας τα πράγματα, συχνά εξαλείφει κάθε συναισθηματισμό και οδηγεί στην εύρεση της καλύτερης δυνατής λύσης. Η Ε.Ε., κατανοώντας αυτό, δίνει έμφαση όχι μόνο στην τυπική διδασκαλία του μαθήματος αυτού, αλλά και στην εφαρμογή των μαθηματικών στο πλαίσιο της πραγματικής ζωής. Η κατανόηση των μαθηματικών εννοιών και αρχών δεν έχει απολύτως καμμία ισχύ εάν δεν συνοδεύεται από την ικανότητα εφαρμογής τους.



Εικόνα 2: Δεξιότητες και ικανότητες στην διδακτέα ύλη των Μαθηματικών και καθοδηγητικά έγγραφα στην κατώτερη δευτεροβάθμια εκπαίδευση στις χώρες της Ε.Ε., ISCED 1 & 2, 2010/2011.

Ευρωπαϊκή εκπαιδευτική πολιτική:

Γενικά, κάθε χώρα της Ευρωπαϊκής Ένωσης είναι υπεύθυνη για τα δικά της συστήματα εκπαίδευσης. Παρόλα αυτά, έχει σχεδιαστεί μια κοινή πολιτική ικανή να στηρίξει την εθνική δράση και να αντιμετωπίσει κοινές προκλήσεις, όπως αυτή της τεχνολογικής εξέλιξης και του παγκόσμιου ανταγωνισμού στον χώρο εργασίας. Το στρατηγικό πλαίσιο αυτό αποσκοπεί στην αναβάθμιση της εκπαίδευσης κάθε χώρας της Ευρώπης, μέσω της αναθεώρησης των ήδη χρησιμοποιούμενων πρακτικών και την εισαγωγή νέων, που ταιριάζουν βέλτιστα στους σύγχρονους ρυθμούς ζωής.

Συγκεκριμένα, η Ε.Ε., έθεσε για την εκπαίδευση τα ακόλουθα σημεία – στόχους:

(http://ec.europa.eu)

- Τουλάχιστον το 95% των παιδιών πρέπει να συμμετέχουν στην προσχολική εκπαίδευση.
- Το ποσοστό των ατόμων που εγκαταλείπουν πρόωρα την εκπαίδευση και την κατάρτιση, ηλικίας 18 – 24 ετών, θα πρέπει να είναι κάτω του 10%.
- Τουλάχιστον το 40% των ατόμων ηλικίας 30 – 34 ετών πρέπει να έχει ολοκληρώσει κάποια μορφή τριτοβάθμιας εκπαίδευσης.
- Τουλάχιστον το 15% των ενηλίκων θα πρέπει να συμμετέχει στην διά βίου μάθηση.

- Τουλάχιστον το 20% των αποφοίτων της τριτοβάθμιας εκπαίδευσης και 6% των 18 – 34 ετών με μια αρχική επαγγελματική κατάρτιση πρέπει να έχουν περάσει κάποιο χρόνο για σπουδές ή κατάρτιση στο εξωτερικό.
- Το μερίδιο των απασχολούμενων απόφοιτων 20 – 34 ετών θα πρέπει να είναι τουλάχιστον 82%.

Όσον αφορά την διδασκαλία των μαθηματικών, διαπιστώθηκε ότι οι εμπειρίες των παιδιών συνοδεύονται από φόβο, ο οποίος φαίνεται να είναι άμεση συνέπεια του βαθμοθηρικού χαρακτήρα που έχει αποκτήσει το σχολείο, της εκπαιδευτικής πολιτικής που εφαρμόζεται, καθώς και της ανεπάρκειας των σχολικών βιβλίων. Αυτό το κλίμα φόβου μπορεί να γίνει κλίμα χαράς και έλξης προς τα Μαθηματικά, χρησιμοποιώντας νέες πρακτικές που περιλαμβάνουν προβλήματα Based-Learning (στα οποία τα Μαθηματικά αποκτούν εφαρμογή στην καθημερινή ζωή), και χρήση των νέων τεχνολογιών ICT (Information and Communication Technology). Τέλος, έχοντας υπ’όψην την επαγγελματική αποκατάσταση των μαθητών, κρίνεται απαραίτητος ο ρόλος της ομαδοσυνεργατικότητας στο σχολικό περιβάλλον.

Δυστυχώς, παρ’ όλες της προσπάθειες της Ε.Ε. για μετασχηματισμό / εκσυγχρονισμό της εκπαίδευσης, συγκριτικά λίγες είναι οι χώρες που αποφάσισαν να προβούν σε μεταρρυθμίσεις.

Το παράδειγμα της Αγγλίας και της Τσεχίας:

Η Αγγλία και η Τσεχία, υιοθετώντας το πρόγραμμα «IIATM: Implementation of Innovative Approaches to the Teaching of Mathematics», εφαρμόζουν καινοτόμες προσεγγίσεις στην διδασκαλία.

Το συγκεκριμένο πρόγραμμα βασίζεται στις κονστρουκτιβιστικές μεθόδους διδασκαλίας και στην ομαδοσυνεργατικότητα, ενώ παράλληλα η χρήση του απαιτεί σημαντικές μεταρρυθμίσεις στα σχολικά προγράμματα. Το συγκεκριμένο πρόγραμμα θεωρείται ικανό να προετοιμάζει τους μέλλοντες πολίτες κατάλληλα ώστε να μπορούν να ανταπεξέλθουν στις απαιτήσεις της σύγχρονης κοινωνίας, εφοδιάζοντάς τους με τις ικανότητες:

- Της γρήγορης προσαρμογής στις επικείμενες αλλαγές.
- Της επίλυσης προβλημάτων, όχι απαραίτητα μαθηματικών, χρησιμοποιώντας μαθηματικές μεθόδους.
- Της ανάπτυξης εύκαμπτης και κριτικής σκέψης.

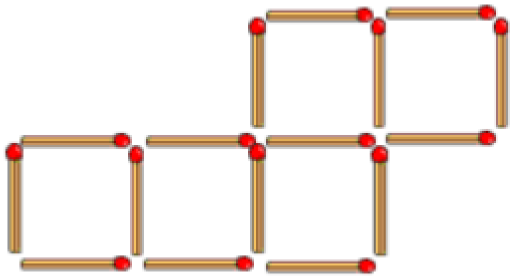
Οι εκπαιδευτικοί ενθαρρύνονται να αλλάξουν τους υπάρχοντες τρόπους διδασκαλίας ώστε η γνώση των μαθητών να μην είναι «στείρα», «τραπεζική» ή «μετωπική», αλλά να έχει βάθος και, κυρίως, κατανόηση σε τέτοιο βαθμό ώστε να επιτρέπονται οι εφαρμογές πέραν της θεωρίας. Πιο συγκεκριμένα, για να επιτευχθεί αυτό, το IIATM έχει ως στόχους να ενθαρρύνει τους δασκάλους και τους εκπαιδευτές να βελτιώσουν τις γνώσεις τους στις νέες διδακτικές μορφές βοηθώντας τους:

- ❖ Να δοκιμάσουν διδακτικές προσεγγίσεις μέσα στην τάξη, δουλεύοντας με υλικό που έχει προετοιμαστεί σε διαφορετικές χώρες.
- ❖ Να διαπιστώσουν τις αλλαγές που υφίσταται ο ρόλος τους καθώς και η λειτουργία των μαθητών στην τάξη όταν εφαρμόζουν αυτές τις διδακτικές μορφές.
- ❖ Να καταγράψουν τις εμπειρίες που αποκομίζουν από τις πειραματικές διδασκαλίες.
- ❖ Να αξιολογήσουν τα αποτελέσματα των διδασκαλιών αυτών σε άτομα και ομάδες.
- ❖ Να αναπτύξουν δεσμούς πέρα από τα εθνικά σύνορα και να επιστρέψουν τις ιδέες και τις εμπειρίες που θα αποκτήσουν στις δικές τους χώρες.

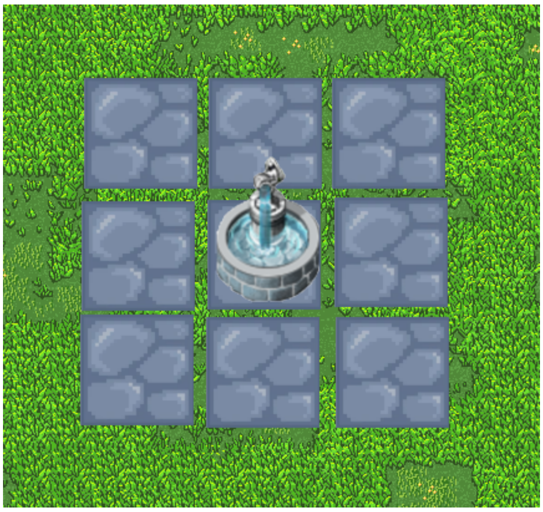
Ένα παράδειγμα του νέου τρόπου (ΙΙΑΤΜ) διδασκαλίας των Μαθηματικών στην Αγγλία, είναι η διδασκαλία της «γενίκευσης». Γενίκευση είναι «η θεμελιακή διαδικασία των μαθητών να αναγνωρίζουν επαναλαμβανόμενες μορφές (μοτίβα) και να τις περιγράφουν με γενικό κανόνα – τύπο». Μοτίβα εμφανίζονται σε πληθώρα τομέων των Μαθηματικών, όπως στην Γεωμετρία, στην Άλγεβρα και στην Στατιστική. Παλαιότερα τέτοιες μαθηματικές έννοιες διδάσκονταν σε μεγάλες τάξεις λόγω της μαθηματικής ωριμότητας που απαιτεί τέτοιου είδους σκέψη. Στα σύγχρονα, όμως, προγράμματα, οι μορφές εντάσσονται σε ένα ευρύτερο πλαίσιο και εισάγονται σε μικρότερες τάξεις, με στόχο την ανάπτυξη των ικανοτήτων της παρατήρησης και της εύρεσης των ομοιοτήτων και των επαναλήψεων, οι οποίες ικανότητες είναι απαραίτητες για την μετέπειτα μαθηματική πορεία των μαθητών.

Στις προτεινόμενες δραστηριότητες για τα προβλήματα γενίκευσης, δίνονται στους μαθητές καταστάσεις όπως:

- ❖ *Τέσσερα σπίρτα σχηματίζουν ένα τετράγωνο, επτά σπίρτα σχηματίζουν δύο τετράγωνα, δέκα σπίρτα τρία τετράγωνα. Πόσα σπίρτα χρειάζονται για τέσσερα τετράγωνα, εκατό τετράγωνα, ν-τετράγωνα;*



- ❖ *Γύρω από ένα σιντριβάνι που έχει επιφάνεια όσο μία πλάκα, τοποθετούνται οκτώ πλάκες. Αν το σιντριβάνι είχε επιφάνεια όσο δύο πλάκες, πόσες πλάκες θα τοποθετούσαμε γύρω του; Αν είχε τρεις, ή δέκα, ή εκατό, ή ν-πλάκες;*



Για τους μαθητές, οι καταστάσεις αυτές είναι πολύ ιδιαίτερες, καθώς, ενώ φαινομενικά δεν εντάσσονται σε κομμάτι της μαθηματικής ύλης που διδάσκονταν στο σχολείο, έχουν μαθηματικό νόημα και προτείνουν προβλήματα για λύση. Οι μαθητές μπορούν να πειραματιστούν με σχήματα και αλγεβρικές πράξεις για να φτάσουν στην λύση της άσκησης, ή στην γενίκευση του προβλήματος.

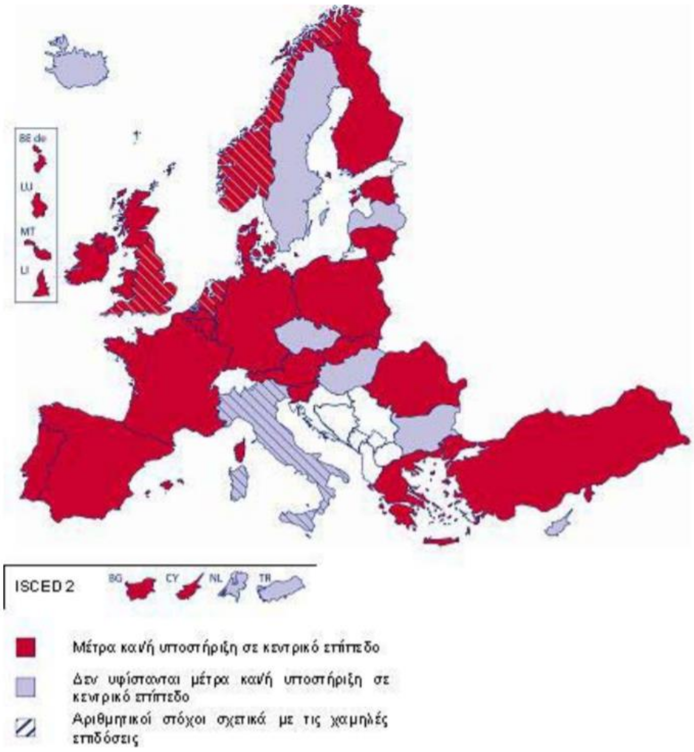
Αλλαγές στην εκπαιδευτική πολιτική της Ελλάδας:

Το εκπαιδευτικό πρόγραμμα της Ελλάδας έχει, σαφώς, αλλάξει και μάλιστα αρκετές φορές, και στα τέλη του $20^{ου}$ αλλά και στις αρχές του $21^{ου}$. Μετά την συνδιάσκεψη της Ευρωπαϊκής επιτροπής το 2011, η Ελλάδα συγκαταλέχθηκε στις χώρες με στόχους ως προς τις χαμηλές επιδόσεις στο μάθημα των Μαθηματικών και, μάλιστα, υποσχέθηκε την λήψη μέτρων και την κρατική υποστήριξη για την αντιμετώπιση του προβλήματος αυτού.

Παρόλα αυτά, ο αριθμός των μαθητών με δυσκολία στα Μαθηματικά εξακολουθεί να είναι εξαιρετικά μεγάλος, καθώς τα μέτρα που λαμβάνει η Ελλάδα μπορεί, μεν, να είναι πολλά, δεν είναι όμως ουσιαστικά. Η εκπαιδευτική πολιτική της Ελλάδας πρέπει να αλλάξει ριζικά, επηρεαζόμενη από τα συστήματα του εξωτερικού, εάν πράγματι επιθυμούμε την κοινωνική, πολιτιστική αλλά και οικονομική μας πρόοδο.

Συγκεκριμένα, στο Ελληνικό εκπαιδευτικό σύστημα θα πρέπει να συμπεριληφθούν:

- Η δημιουργική και ανακαλυπτική μάθηση.
- Η διά βίου μάθηση.
- Η μάθηση μέσω νέων τεχνολογιών (ICT).
- Η μάθηση μέσω «καινοτόμων» πρακτικών (IIATM).



Εικόνα 3: Κατευθυντήριες γραμμές σε εθνικό επίπεδο για την αντιμετώπιση των χαμηλών επιδόσεων στα Μαθηματικά, σε επίπεδο πρωτοβάθμιας και κατώτερης δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, ISCED 1 & 2, 2010-2011

Τι γίνεται όμως με την Γεωμετρία;

Είναι ευνόητο πως η διδασκαλία ενός δυσνόητου και δύσκολου αντικειμένου όπως τα μαθηματικά και η γεωμετρία απαιτεί την επιστράτευση την σύγχρονης διδασκαλίας. Σε ένα μάθημα όπως όμως η Γεωμετρία που πολλοί μαθητές την περιφρονούν και την θεωρούν ασήμαντη ή (και) άχρηστη θεωρούμε εξίσου αναγκαίο μια αλλαγή στην στάση των μαθητών απέναντι στο μάθημα. Κρίνεται λοιπόν απαραίτητη η κατάλληλη υιοθέτηση και εφαρμογή του σύγχρονου μοντέλου προκειμένου να προσελκύσει το ενδιαφέρον των μαθητών.

Η παραπάνω άποψη όμως δεν αποτελεί εικασία και σε καμία περίπτωση δεν μπορεί να χαρακτηριστεί ουτοπική. Ένα λύκειο της Σουηδίας εφάρμοσε την σύγχρονη διδασκαλία με ένα πιο ιδιαίτερο αλλά απλό τρόπο. Πολύ απλά, η διδασκαλία μεταφέρθηκε έξω από την τάξη και συγκριμένα, στο περιβάλλον του σχολικού προαυλίου. Τα αποτελέσματα έδειξαν πως δεν παρατηρήθηκε κάποια επιπλοκή από ανάγωγες συμπεριφορές των μαθητών παρά μόνο το αντίθετο. Οι μαθητές έδειξαν περισσότερη ευχαρίστηση κατά την διάρκεια της μάθησης. Η συμμετοχή των μαθητών αυξήθηκε, όπως και η κατανόησή τους για το αντικείμενο που μάθαιναν. Μάλιστα, τέθηκαν οι βάσεις για περισσότερη συμμετοχή μέσα στην τάξη. Οι μόνες δυσκολίες που παρατηρήθηκαν αφορούσαν τον προγραμματισμό καθώς το σχολικό προαύλιο είναι ένας αρκετά θορυβώδης χώρος που δεν ενδείκνυται για μελέτη. Επηρεασμένοι λοιπόν από αυτήν την μελέτη θεωρούμε ότι θα μπορούσαμε να εφαρμόσουμε ένα παρόμοιο τρόπο διδασκαλίας και στα Λύκεια της χώρας μας.

Διδασκαλία της Γεωμετρίας με το «Geogebra»:

Επηρεασμένοι, λοιπόν, από την θεωρία του Κονστραξιονισμού, θεωρούμε πως ένας ελκυστικός τρόπος για την διδασκαλία των εννοιών της Γεωμετρίας θα ήταν με την χρήση του λογισμικού Geogebra.

Πρόκειται για ένα δωρεάν διαδραστικό λογισμικό με φιλικό προς τον χρήστη γραφικό περιβάλλον εργασίας που, όπως δηλώνει και το όνομα του, (σύνθεση λέξεων Geometry + Algebra) έχει επίκεντρο την Άλγεβρα και την Γεωμετρία (Wikipedia, 2019).

Ποια είναι τα οφέλη της χρήσης του λογισμικού στην εκπαίδευση;

Όπως είπαμε, κύριο μέλημά μας είναι όχι μόνο η βαθιά κατανόηση των εννοιών της Γεωμετρίας, αλλά και η αλλαγή της στάσης των μαθητών απέναντι στην «άχρηστη» και απαξιωμένη, μπροστά στα μάτια τους, Γεωμετρία. Πιστεύουμε, λοιπόν, πως η Geogebra είναι το κατάλληλο λογισμικό για την επίτευξη αυτού του στόχου, αφού όχι μόνο θα τους βοηθήσει να κατανοήσουν καλύτερα την Γεωμετρία αλλά θα τους υποδείξει την άμεση σύνδεση που έχει η Γεωμετρία με την Άλγεβρα.

Ήδη σε πολλές χώρες έχει αποδειχθεί ότι με την σωστή μεθοδολογία το λογισμικό Geogebra μπορεί να επιτύχει σε αυτούς τους στόχους και όχι μόνο. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί μια ομάδα μαθητών, που διδάσκονταν με την χρήση του Geogebra, και που κατάφερε να επιτύχει αρκετά μεγαλύτερα ποσοστά επιτυχίας συγκριτικά με τους μαθητές που διδάσκονταν «παραδοσιακά» (Chang, 2015). Το ίδιο συνέβη και σε μία έρευνα στην οποίαν αποδείχθηκε (επιπροσθέτως) ότι οι μαθητές αφομοίωναν τις γνώσεις αβίαστα, λόγω του ότι η θέληση για μάθηση μεγάλωσε με την χρήση των νέων τεχνολογιών (Mustafa Dogan, 2011).

Μηδείς ἀγεωμέτρητος ἐξίῃ ἐκ τῆς ἡμῶν τάξεως

1ο Εκπαιδευτικό Σενάριο

- *Τίτλος Διδακτικού Σεναρίου:*

  Ισότητα τριγώνων

- *Εμπλεκόμενες Γνωστικές περιοχές:*

  Γεωμετρία

- *Τάξεις στις οποίες μπορεί να απευθύνεται:*

  Α' Γενικού Λυκείου

- *Εκτιμώμενες διδακτικές ώρες:*

  Δύο (2) διδακτικές ώρες

Οργάνωση Διδασκαλίας& υλικοτεχνικής δομής:

Κρίνεται αναγκαίο το μάθημα να λάβει χώρα σε ένα εργαστήριο υπολογιστών με ειδικό διαδραστικό πίνακα ή projector. Σε κάθε περίπτωση χρειάζονται Η/Υ με πρόσβαση στο διαδίκτυο αλλά και εφοδιασμένοι με το λογισμικό Geogebra. Οι μαθητές οφείλουν να φέρουν μαζί τους το τετράδιο τους, μολύβι, γόμα, γνώμονα και θα είναι χωρισμένοι σε ομάδες 2 ατόμων. Αρχικά θα παρακολουθούν στον πίνακα ζευγάρια τριγώνων που θα κατασκευάζονται από τον εκπαιδευτικό και θα πρέπει να εκτιμήσουν αν είναι ίσα ή όχι. Ύστερα θα παρατηρούν τα «πρότυπα» τρίγωνα που θα κατασκευάζονται και αφού πρώτα ο εκπαιδευτικός εξηγήσει τους βασικούς κανόνες λειτουργίας της εφαρμογής θα προσπαθήσουν να αναπαράγουν το ίσο, κάθε φορά, τρίγωνο στο τετράδιό τους και στην οθόνη του δικού τους υπολογιστή μέσω του Geogebra.Ο σχεδιασμός θα γίνεται «εναλλάξ» από τα μέλη την ομάδας, όσο το άλλο μέλος θα δίνει οδηγίες όταν το κρίνει αναγκαίο. Ύστερα από πληθώρα επαναλήψεων της παραπάνω διαδικασίας οι μαθητές θα προσπαθήσουν, με την κατάλληλη καθοδήγηση του εκπαιδευτικού, να γενικεύσουν κάποιους κανόνες και να διατυπώσουν τα κριτήρια Ισότητας τριγώνων.

Διδακτικοί Στόχοι:

Ο κάθε μαθητής στο τέλος της διδακτικής ώρας που αφιερώθηκε στο θέμα «Ισότητα Τριγώνων» οφείλει να είναι ικανός να:

- Γνωρίζει και να διατυπώνει τα κριτήρια ισότητας τριγώνων.
- Εκτιμά «με το μάτι» πότε δυο τρίγωνα είναι ίσα.
- Σχεδιάσει (ίσα) τρίγωνα με την χρήση γνώμονα.
- Σχεδιάσει (ίσα) τρίγωνα με την χρήση του Geogebra.
- Να χρησιμοποιεί το λογισμικό Geogebra.
- Να καλλιεργήσει ομαδοσυνεργατικό πνεύμα και δεξιότητες συνεργασίας και επικοινωνίας με τους συμμαθητές του.
- Αναπτύξει προσωπική και συλλογική ευθύνη ως μέλος μιας ομάδας.
- Να σταματήσει να σκέφτεται και να άγχεται από την ενδεχόμενη αποδοκιμασία και τον στιγματισμό για κάποια λάθος εκτίμηση ή ενέργεια.

Προαπαιτούμενες γνώσεις:

Οι μαθητές πρωτύτερα έχουν εισαχθεί στην έννοια του Τριγώνου ως γεωμετρικό σχήμα και μπορούν να το ορίσουν. Ως προς την χρήση των τεχνολογιών οι μαθητές θα πρέπει να γνωρίζουν πώς να χειρίζονται τον Η/Υ (σίγουρα ξέρουν να χειρίζονται το ποντίκι και να εκκινούν την εφαρμογή από την επιφάνεια εργασίας.

Μεθοδολογία:

Ως προς τις θεωρίες και την μεθοδολογία τις μάθησης που θα εφαρμοστούν στο παραπάνω σενάριο, εκτιμούμε ως την πλέον κατάλληλη, την μαθητοκεντρική θεωρία του Κονστρουκτιβισμού. Οι μαθητές έχοντας ήδη μια μικρή εικόνα της ισότητας τριγώνων από το Γυμνάσιο καλούνται να κατανοήσουν πλήρως την έννοια, τόσο σε θεωρητικό όσο και σε πρακτικό επίπεδο. Έμφαση λοιπόν δίνεται στην μάθηση και στην κατανόηση και όχι στην διδασκαλία. Έτσι οι μαθητές μπορούν να γενικεύσουν μόνοι τους κανόνες και, συνεπώς, τα κριτήρια ισότητας. Ο εκπαιδευτικός παραμένει πολύτιμος αλλά μονάχα ως αρωγός και καθοδηγητής των μαθητών του. Στα πλαίσια της πρακτικής κατανόησης του μαθήματος η θεωρία του Κονστραξιονισμού έρχεται να συμπληρώσει την μεθοδολογία μας. Για αυτό άλλωστε και χρησιμοποιούνται οι Η/Υ εφοδιασμένοι με το λογισμικό Geogebra. Αδιαμφισβήτητα το σενάριο μας είναι επηρεασμένο από την κοινωνικοπολιτισμική θεωρία του Βιγκότσκι μιας και οι μαθητές χωρίζονται σε ομάδες και προσπαθούν να αναπτύξουν ομαδοσυνεργατικές δεξιότητες.

Αναλυτική παρουσίαση του Σεναρίου:

1η Διδακτική Ώρα:

Υπενθυμίζονται στους μαθητές οι έννοιες του τριγώνου και της ισότητας. Αμέσως μετά, μέσω του projector ή του διαδραστικού πίνακα, παρουσιάζονται σαν ερεθίσματα παραδείγματα ίσων τριγώνων. Έπειτα γίνεται διαχωρισμός των μαθητών σε ομάδες των 2 ατόμων. Εάν αυτό δεν είναι δυνατό, τότε μία ομάδα θα έχει ένα παραπάνω μέλος. Αφού τελειώσει ο χωρισμός σε ομάδες ξεκινά μια δραστηριότητα (1) παρατήρησης. Στον πίνακα θα παρουσιάζονται διάφορα ζευγάρια τριγώνων που οι μαθητές θα πρέπει να εκτιμήσουν κάθε φορά αν είναι ίσα. Σταδιακά η δυσκολία θα αυξάνεται με την παράθεση των τριγώνων με περίεργη διάταξη και προσανατολισμό στο επίπεδο του πίνακα. Προκειμένου να προσελκύσουμε ακόμη περισσότερο ενδιαφέρον από τους μαθητές η δραστηριότητα θα λάβει την μορφή παιχνιδιού. Πολύ απλά, η ομάδα που θα έχει τις πιο πολλές σωστές εκτιμήσεις θα είναι και η νικήτρια

Λίγο πριν το τέλος της διδακτικής ώρας ο εκπαιδευτικός θα δείξει στους μαθητές τα βασικά εργαλεία και μηχανισμούς λειτουργίας του λογισμικού Geogebra και στην συνέχεια θα τους αφήσει να πειραματιστούν με αυτό.

2η Διδακτική Ώρα:

Το δεύτερο μάθημα αποτελεί άμεση συνέχεια του προηγούμενου. Για άλλη μια φορά υπενθυμίζεται στους μαθητές ο τρόπος λειτουργίας του λογισμικού Geogebra. Οι μαθητές χωρίζονται ξανά στις ίδιες ομάδες. Αυτή την φορά θα πραγματοποιηθεί μια πιο ενεργητική δραστηριότητα(2) από την πλευρά των μαθητών. Στον διαδραστικό πίνακα θα προβάλλεται μονάχα ένα τρίγωνο. Αυτό το τρίγωνο θα πρέπει οι μαθητές να το αναπαράγουν, αρχικά στο τετράδιο τους και έπειτα στον υπολογιστή τους με την βοήθεια του ειδικού λογισμικού. Τα στοιχεία του πρότυπου τριγώνου θα είναι όλα γνωστά (μήκη πλευρών & μέτρα γωνιών). Η σχεδίαση των σχημάτων στο περιβάλλον εργασίας του Geogebra θα γίνεται εναλλάξ από τους μαθητές της κάθε ομάδας, ενώ το δεύτερο μέλος θα το καθοδηγεί αν και όταν το κρίνει απαραίτητο. Στόχος της δραστηριότητας είναι ύστερα από διαδοχικές επαναλήψεις της διαδικασίας οι μαθητές να διαπιστώσουν τους τρόπους που θα μπορούν να κατασκευάζουν ίσα τρίγωνα και συνεπώς, προς το τέλος της διδακτικής ώρας, να διατυπώσουν μόνοι τους τα κριτήρια ισότητας τριγώνων.

Φυσικά, παρόμοιο σενάριο μπορεί να προταθεί και για την ομοιότητα των τριγώνων.

2ο Εκπαιδευτικό Σενάριο

- *Τίτλος Διδακτικού Σεναρίου:*

  Ισότητα & Ομοιότητα τριγώνων στον πραγματικό κόσμο

- *Εμπλεκόμενες Γνωστικές Περιοχές:*

  Γεωμετρία

- *Τάξεις στις οποίες μπορεί να απευθύνεται:*

  Α΄ Γενικού Λυκείου

- *Εκτιμώμενες διδακτικές ώρες:*

  Τρεις (3) διδακτικές ώρες

Οργάνωση Διδασκαλίας & Υλικοτεχνικής δομής:

Το παρόν εκπαιδευτικό σενάριο θα διδαχτεί στους μαθητές έξω από τα πλαίσια του σχολικού περιβάλλοντος, σαν μια εκπαιδευτική εκδρομή με προορισμό την πιο κοντινή παραλία. Συνεπώς απαραίτητη προϋπόθεση είναι να τα παιδιά να έχουν λάβει γραπτή βεβαίωση από τους κηδεμόνες τους ότι τους επιτρέπεται να αποχωρήσουν από το σχολείο, με την συνοδεία του εκπαιδευτικού τους. Επίσης ο εκπαιδευτικός να έχει λάβει την άδεια του διευθυντή του σχολείου προτού πραγματοποιηθεί η εκδρομή αλλά και των συνάδελφων εκπαιδευτικών των οποίων τις ώρες θα «δανειστεί». Απαραίτητα εργαλεία-όργανα για να πραγματοποιηθεί η εκδρομή επιτυχώς είναι : ένα μέτρο, τετράδιο –σημειωματάριο, στυλό (τουλάχιστον έναν για κάθε ομάδα).Στην εκδρομή οι μαθητές, λαμβάνοντας υπόψη τις γνώσεις που απέκτησαν στο προηγούμενο μάθημα, θα προσπαθήσουν να παρατηρήσουν την ομοιότητα και την ισότητα των τριγώνων στην φύση. Ο εκπαιδευτικός οφείλει να έχει σκεφτεί από πριν παραδείγματα τέτοιων τριγώνων που μπορούν να παρατηρηθούν στην διαδρομή. Μόλις οι μαθητές εξοικειωθούν με την παρατήρηση θα προσπαθήσουν, χωρισμένοι σε ομάδες, να επιλύσουν κάποιες ασκήσεις βασισμένες στην ισότητα και την ομοιότητα τριγώνων.

Διδακτικοί Στόχοι:

Ο κάθε μαθητής ύστερα από την εκπαιδευτική εκδρομή οφείλει να είναι ικανός να:

- Μπορεί να παρατηρεί την Ισότητα και Ομοιότητα τριγώνων στο περιβάλλον,
- Επιλύει προβλήματα βασισμένα στην ισότητα και στην ομοιότητα τριγώνων
- Αναπτύξει τις ικανότητες συνεργασίας και επικοινωνίας με τους συμμαθητές του.
- Καλλιεργήσει προσωπική και συλλογική ευθύνη ως μέλος μιας ομάδας.
- Να σταματήσει να σκέφτεται και να άγχεται από την ενδεχόμενη αποδοκιμασία και τον στιγματισμό για κάποια λάθος εκτίμηση ή ενέργεια.

Προαπαιτούμενες Γνώσεις:

Οι μαθητές πρωτύτερα θα πρέπει να έχουν αφομοιώσει / εσωτερικεύσει τις έννοιες της Ισότητας και Ομοιότητας των Τριγώνων που διδάχθηκαν στα προηγούμενα μαθήματα. Ήδη, από μικρότερες τάξεις, τα παιδία γνωρίζουν πώς να καταγράφουν δεδομένα από μετρήσεις και να χειρίζονται το μέτρο.

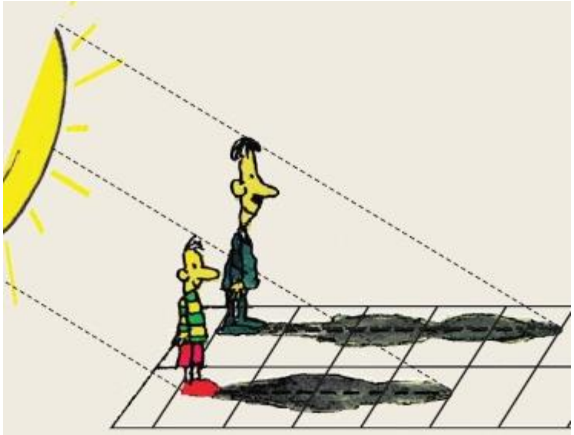
Μεθοδολογία:

Όπως διατυπώθηκε και στο προηγούμενο σενάριο στόχος μας είναι η πρακτική κατανόηση των εννοιών της Ισότητας και Ομοιότητας Τριγώνων. Μπορεί, λοιπόν, στα προηγούμενα μαθήματα τα παιδιά να προσπάθησαν να καταλάβουν αυτές τις έννοιες με την χρήση Η/Υ και του λογισμικού Geogebra, αλλά η σε βάθος, πρακτική κατανόηση βασίζεται στην παρατήρηση και στον πειραματισμό. Γι' αυτό θεωρήθηκε αναγκαία μια εκπαιδευτική εκδρομή που θα μυήσει τους μαθητές σε αυτές τις διαδικασίες και θα τους βοηθήσει να καταλάβουν πλήρως τις έννοιες που αφορούν τα τρίγωνα. Έτσι, το δεύτερο σενάριο της διδασκαλίας μας βασίζεται και αυτό στην μαθητοκεντρική θεωρία. Ο καθηγητής, ξανά, δεν θεωρείται ως η απόλυτη αυθεντία αλλά βοηθάει και καθοδηγεί τους μαθητές προς την απόκτηση της γνώσης, δίνοντας τα κατάλληλα ερεθίσματα και συμβουλές. Σίγουρα ακόμη μια βασική θεωρία μάθησης που θεμελιώνει το σενάριό μας είναι η ανακαλυπτική θεωρία τουBruner, βασική αρχή της οποίας είναι ότι ο μαθητής μπορεί να προσεγγίζει την γνώση και καινούριες δεξιότητες μέσω πειραματισμού και πρακτικής. Επιπροσθέτως, αφού για άλλη μια φορά οι μαθητές θα χωριστούν σε ομάδες, αδιαμφισβήτητα η κοινωνικοπολιτισμική θεωρία του Βιγκότσκι δηλώνει το παρόν.

Αναλυτική παρουσίαση του Σεναρίου:

Και πάλι, οι μαθητές χωρίζονται σε ομάδες, αλλά αυτή την φορά των τεσσάρων ή τριών ατόμων και παίρνουν τα απαραίτητα «εργαλεία» τους. Στην αρχή της διαδρομής οι μαθητές καλούνται να διατυπώσουν πολύ σύντομα τα κριτήρια ισότητας και ομοιότητας τριγώνων. Ύστερα ο εκπαιδευτικός δίνει κάποια ερεθίσματα προκειμένου να αρχίζουν οι μαθητές να σκέφτονται παραδείγματα τέτοιων περιπτώσεων στο περιβάλλον. Αμέσως μετά ξεκινάει ένα νέο παιχνίδι: Οι ομάδες πρέπει να καταγράψουν στο σημειωματάριό τους παραδείγματα τριγώνων που παρατήρησαν στο περιβάλλον κατά την διάρκεια της διαδρομής. Ο καθηγητής οφείλει να δώσει τα κατάλληλα ερεθίσματα ώστε οι μαθητές να παρατηρήσουν το τρίγωνο που σχηματίζει ένα αντικείμενο με την σκιά του προτού φτάσουν στο τελικό προορισμό. Όταν καταφθάσουν στον προορισμό τους, ο εκπαιδευτικός διαβάζει όλες τις παρατηρήσεις των μαθητών και εξηγεί τα απαραίτητα σε κάθε περίπτωση που προκαλεί προβληματισμό καθώς και τυχόν απορίες. Μόλις αυτή η διαδικασία φτάσει στο πέρας της, οι μαθητές θα κληθούν να λύσουν τα πρώτα τους προβλήματα, τα οποία θα έχουν την μορφή πειράματος.

Πρόβλημα 1ο:



Δυο μαθητές από κάθε ομάδα θα στηθούν όρθιοι με την πλάτη γυρισμένη προς τον ήλιο. Οι υπόλοιποι μαθητές, μετρώντας μονάχα το ύψος του ενός μαθητή και το μήκος της σκιάς του, θα πρέπει να βρουν το ύψος του δεύτερου. Ο εκπαιδευτικός οφείλει να βοηθήσει τους μαθητές να καταλάβουν ότι πρόκειται για περίπτωση ομοιότητας τριγώνων και να επιβλέπει για τυχόν λάθη στις μετρήσεις αλλά και στις πράξεις.

Πρόβλημα2ο:

Αν ένα πλοίο ή οποιοδήποτε άλλο αντικείμενο βρίσκεται σε μια θέση Α, στην θάλασσα, και ένας μαθητής από κάθε ομάδα βρίσκεται σε μια θέση Β, στην στεριά, έτσι ώστε το τμήμα ΑΒ να είναι κάθετο στην ακτογραμμή, τότε η υπόλοιπη ομάδα να υπολογίσει την απόσταση ΑΒ.

Το δεύτερο πρόβλημα απαιτεί μια πιο κατασκευαστική και σύνθετη σκέψη, που αφορά την ισότητα τριγώνων, για αυτό ο εκπαιδευτικός πρέπει ξανά να οδηγήσει τους μαθητές σε αυτόν τον τρόπο σκέψης προτού απογοητευτούν θέτοντας τα κατάλληλα ερωτήματα (π.χ. Μπορεί η απόσταση ΑΒ να αποτελεί πλευρά νοητού τριγώνου το οποίο θα διευκολύνει τους υπολογισμούς μας; Μπορούμε να μετρήσουμε τις διαστάσεις αυτού του τριγώνου; Αν όχι, μήπως μπορούμε να βρούμε ένα ίσο του;)

Ουσιαστικά η λύση κρύβεται στην μέθοδο που εφάρμοσε ο Θαλής ο Μιλήσιος. Οι μαθητές πρέπει να κατασκευάσουν δυο ίσα τρίγωνα, ένα στην θάλασσα (που δεν μπορούν να μετρήσουν) και ένα στην στεριά (οι διαστάσεις του οποίου μπορούν να μετρηθούν με ακρίβεια). Για να το κάνουν αυτό οι μαθητές θα πρέπει:

- Να περπατήσουν από το σημείο Β, με κάθετη διεύθυνση στο ΑΒ, μέχρι ένα σημείο Γ πάνω στην παραλία. Η άμμος της παραλίας βοηθά στο να σχεδιαστεί το ευθύγραμμο τμήμα, όπως και το σημείο Γ.
- Στην ίδια ευθεία, πρέπει να προχωρήσουν μια απόσταση ΓΔ, τέτοια ώστε: ΓΔ=ΒΓ.
- Αφού σημειώσουμε το σημείο Δ, οι μαθητές θα κάνουν μια στροφή 90^o έτσι ώστε να περπατήσουν κάθετα στο ΒΔ μέχρι ένα σημείο Ε συνευθειακό του Α.

Ο εκπαιδευτικός μπορεί να φανερώσει την μέθοδο κατασκευής των τριγώνων, αλλά όχι τον τρόπο επίλυσης. Οι μαθητές πρέπει από μόνοι τους να σκεφτούν ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΓΔΕ είναι ίσα.

Αφού κάθε ομάδα λύσει αυτά τα δύο προβλήματα τότε η κάθε τάξη μπορεί να γυρίσει στο σχολείο όπου θα δοθεί στους μαθητές ένα φύλλο εργασίας με περισσότερα προβλήματα παρόμοιου τύπου, που θα συζητηθούν στο επόμενο μάθημα.

3ο Εκπαιδευτικό Σενάριο:

- *Τίτλος Διδακτικού Σεναρίου:*

  Βασικές γεωμετρικές έννοιες και εφαρμογές στην θεωρία των αριθμών

- *Εμπλεκόμενες Γνωστικές περιοχές:*

  Γεωμετρία, Θεωρία Αριθμών

- *Τάξεις στις οποίες μπορεί να απευθύνεται:*

  Α΄ Γενικού Λυκείου

- *Εκτιμώμενες διδακτικές ώρες:*
  Τρεις (3) διδακτικές ώρες

Οργάνωση Διδασκαλίας & υλικοτεχνικής δομής:

Για την διδασκαλία του συγκεκριμένου κεφαλαίου κρίνεται απαραίτητη η χρήση των γνωστών γεωμετρικών οργάνων, του κανόνα και του διαβήτη, καθώς και το λογισμικό «Geogebra-Geometry» . Εφόσον για την διδασκαλία του συγκεκριμένου κεφαλαίου θα ζητηθεί από τους μαθητές η γεωμετρική κατασκευή ορισμένων σχημάτων, θεωρούμε βέλτιστο τρόπο διδασκαλίας αυτόν που προωθεί την ομαδοσυνεργατικότητα, διότι:

- Παρατηρείται μεταξύ των μαθητών ότι δεν υπάρχει μεγάλη εξοικείωση στην χρήση των γεωμετρικών οργάνων / δεν έχουν όλοι οι μαθητές την ίδια ευχέρεια στην χρήση των οργάνων αυτών.

- Η αποτύπωση στο χαρτί «των εικόνων της σκέψης» δεν είναι πάντοτε εύκολη, γι' αυτό και συχνά γίνονται λάθη, τα οποία, συνήθως, δεν εντοπίζονται εύκολα από αυτόν που τα έκανε.

- Η χρήση των λογισμικών που απαιτούνται για την διδασκαλία του μαθήματος μπορεί να δυσκολεύει ορισμένους μαθητές, λιγότερο εξοικειωμένους με τους Η/Υ.

- Καθώς γίνεται «σύνδεση» δύο μαθηματικών κλάδων, που στους μαθητές της Α' Λυκείου, φαίνονται «ασύνδετοι», δεν θα είναι εύκολη η κατανόηση από τους μαθητές μεμονωμένα των όσων θα παρουσιαστούν.

Οι μαθητές θα χωριστούν σε ομάδες των δύο (2) και θα προσπαθούν να απεικονίσουν ό,τι ζητείται από τον εκπαιδευτικό, πρώτα στον υπολογιστή και έπειτα στο χαρτί. Ο εκπαιδευτικός από την πλευρά του θα παρουσιάζει τις γεωμετρικές έννοιες που απαιτούνται, θα δίδει παραδείγματα όπου το κρίνει αναγκαίο, αλλά δεν θα υποδεικνύει στους μαθητές τον τρόπο εργασίας τους. Σκοπός του μαθήματος είναι οι μαθητές να κατακτήσουν μόνοι τους την γνώση και να αναπτύξουν τις δικές τους μεθόδους.

Διδακτικοί Στόχοι:

Ο κάθε μαθητής στο τέλος της διδακτικής ώρας που αφιερώθηκε στο θέμα «Βασικές γεωμετρικές έννοιες και εφαρμογές στην θεωρία των αριθμών» οφείλει να είναι ικανός να:

- Συνειδητοποιεί την σύνδεση μεταξύ των δύο αυτών τομέων των μαθηματικών που, πρωτύτερα, του φαίνονταν ασύνδετοι.
- Γνωρίζει βασικές μεθόδους κατασκευής αριθμών (διχοτόμηση – τριχοτόμηση […] ευθυγράμμου τμήματος / διχοτόμηση γωνίας / κατασκευή κάθετων ευθειών κ.α.)
- Συνειδητοποιεί ότι υπάρχει σύνδεση μεταξύ των αλγεβρικών και των γεωμετρικών πράξεων (παράδειγμα: διαίρεση αριθμών – διαίρεση ευθυγράμμων τμημάτων).
- Γνωρίζει την γεωμετρική κατασκευή απλών αριθμών*.
- Σχεδιάσει, σύμφωνα με τις μεθόδους που έμαθε – ανακάλυψε, με το λογισμικό Geogebra, απλούς αριθμούς.
- Συνειδητοποιεί ότι δεν είναι όλοι οι πραγματικοί αριθμοί (γεωμετρικώς) κατασκευάσιμοι.
- Καλλιεργήσει ομαδοσυνεργατικό πνεύμα και δεξιότητες συνεργασίας και επικοινωνίας με τους συμμαθητές του.
- Αναπτύξει προσωπική και συλλογική ευθύνη ως μέλος μιας ομάδας.
- Σταματήσει να άγχεται από την ενδεχόμενη αποδοκιμασία και τον στιγματισμό για κάποια λάθος εκτίμηση ή ενέργεια.

(*<u>*απλοί αριθμοί:*</u> φυσικά, εννοούμε ευθύγραμμα τμήματα με μήκη απλούς κατασκευάσιμους αριθμούς.)

Προαπαιτούμενες γνώσεις:

Η διδασκαλία θα γίνει πολύ ευκολότερη εάν οι μαθητές γνωρίζουν βασικά θεωρήματα και ορισμούς της γεωμετρίας, όπως το Θ. Θαλή, το Θ. της ισότητας των τριγώνων, τον ορισμό του κύκλου και της μεσοκάθετου. Επίσης, οι μαθητές καλό θα ήταν να γνωρίζουν, έστω και σε μικρό βαθμό, να χρησιμοποιούν το λογισμικό Geogebra.

Μεθοδολογία:

Ως προς τις θεωρίες και την μεθοδολογία της μάθησης του παραπάνω σεναρίου, προφανώς, θα χρησιμοποιηθούν:

- Η μέθοδος μέσω ανακάλυψης (J.Bruner).
    - Το παρόν σενάριο διδασκαλίας απαιτεί την ενεργό συμμετοχή του μαθητή στην ανακάλυψη αλλά και στην ανακατασκευή της γνώσης. Επίσης δίδει την δυνατότητα στους μαθητές να αναζητήσουν τον βέλτιστο τρόπο εργασίας (εδώ τον βέλτιστο τρόπο κατασκευής των απλών αριθμών).
- Η μέθοδος που βασίζεται στην μαθητοκεντρική θεωρία του Κονστρουκτιβισμού [μέθοδος που βασίζεται στην θεωρία κατασκευής της γνώσης] (Piaget).
    - Ο Μαθητής κατασκευάζει την γνώση, μέσα από οργανωμένες εκπαιδευτικές διαδικασίες και μέσω βιωματικών εμπειριών – project. Οι νέες γνώσεις έρχονται να «συμπληρώσουν» τις παλιές. Ο καθηγητής, όπως αναφέρθηκε, είναι «καθοδηγητής», δηλαδή, δεν επιδρά στον τρόπο εργασίας των μαθητών αλλά, αντίθετα, τους κατευθύνει προς την ανακάλυψη της γνώσης.

Αναλυτική παρουσίαση του Σεναρίου:

1η Διδακτική Ώρα:

Κατά την διάρκεια της 1ης διδακτικής ώρας οι μαθητές θα έρθουν σε επαφή με βασικές έννοιες της γεωμετρίας οι οποίες θα τους είναι απαραίτητες, μετέπειτα, στην κατασκευή των αριθμών που ήδη γνωρίζουν. Συγκεκριμένα, θα παρουσιαστούν τα ακόλουθα κομμάτια της Ευκλείδειας γεωμετρίας:

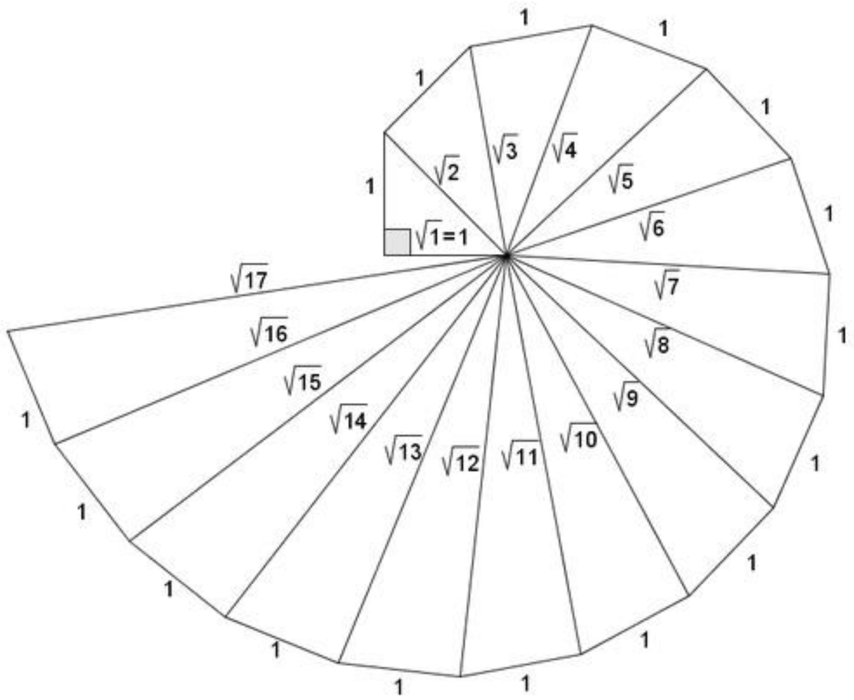
- Η έννοια του σημείου
- Η έννοια του ευθυγράμμου τμήματος και της ευθείας
- Κατασκευή ευθυγράμμου τμήματος ίσου προς δοσμένο
- Μήκος ευθύγραμμου τμήματος
- Το Θεώρημα των παράλληλων ευθειών του Θαλή
- Η έννοια των κάθετων ευθειών και της μεσοκάθετου
- Το πυθαγόρειο θεώρημα
- Η έννοια της γωνίας
- Η έννοια του κύκλου

Στην συνέχεια, καλύπτοντας και το κομμάτι της θεωρίας των αριθμών, θα οριστεί η έννοια του αριθμού και επίσης οι γνωστές πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού μεταξύ των αριθμών. Επίσης θα οριστεί η αφαίρεση και η διαίρεση.

2η Διδακτική Ώρα:

Κατά την διάρκεια της δεύτερης διδακτικής ώρας οι μαθητές θα χρησιμοποιήσουν τις γνώσεις που απέκτησαν ώστε να επεκτείνουν τους ορισμούς της πρόσθεσης, του πολλαπλασιασμού, της αφαίρεσης και της διαίρεσης σε γεωμετρικό «επίπεδο». Τότε, ορίζοντας το ευθύγραμμο τμήμα της μονάδας, θα μπορούν να κατασκευάσουν οποιονδήποτε θετικό ρητό.

Έχοντας, όμως, διδαχθεί την έννοια των αριθμών θα αναρωτηθούν εάν οι θετικοί άρρητοι αριθμοί είναι επίσης δυνατόν να κατασκευαστούν γεωμετρικά. Έτσι, λοιπόν, συνεχίζοντας στον δρόμο της αναζήτησης θα αποδείξουν, με την βοήθεια του πυθαγορείου θεωρήματος, ότι ο αριθμός $\sqrt{2}$ είναι κατασκευάσιμος ως υποτείνουσα ορθογωνίου τριγώνου με κάθετες πλευρές 1, 1. Με την ίδια διαδικασία θα φτάσουν στο συμπέρασμα ότι όλες οι ρίζες των φυσικών αριθμών είναι κατασκευάσιμες: θα έχουν βρει και θα έχουν, εν μέρει, «αποδείξει» αυτό που στα μαθηματικά ονομάζεται «Σπείρα του Θεοδώρου».



Το γεγονός ότι όλες οι ρίζες των φυσικών αριθμών είναι κατασκευάσιμοι αριθμοί δεν σημαίνει ότι όλοι οι άρρητοι είναι κατασκευάσιμοι αριθμοί, αλλά ότι υπάρχουν άρρητοι οι οποίοι είναι κατασκευάσιμοι. Συνεπώς, το αρχικό μας ερώτημα μένει αναπάντητο και θα παραμείνει έως και το τέλος της επόμενης διδακτικής ώρας.

3η Διδακτική Ώρα:

Την τρίτη διδακτική ώρα το μάθημα θα γίνει εκτός του σχολικού περιβάλλοντος (ή, εάν δεν υπάρχει η δυνατότητα, θα γίνει παρουσίαση μέσω του Η/Υ). Οι μαθητές μαζί με τον εκπαιδευτικό θα αναζητήσουν στον χώρο γύρω τους αριθμούς, θα ελέγξουν εάν οι συγκεκριμένοι αριθμοί είναι κατασκευάσιμοι και, μάλιστα, θα προτείνουν τρόπους κατασκευασιμότητας.

Έπειτα, ο καθηγητής θα επιστήσει την προσοχή των μαθητών στο εξής «αξιοπερίεργο», θα λέγαμε, γεγονός:

(η Εκκλησία της «Παναγίας Εκατονταπυλιανής» στην Πάρο, η Εκκλησία της «Ανάστασης του Χριστού» στην Σύρο και το «Πολυγωνικό αμφιθέατρο» στην Πάρο)

Τα περισσότερα πολυγωνικά κτίρια καθώς και οι περισσότεροι πολυγωνικοί τρούλοι των εκκλησιών είναι οκτάγωνοι. Ο καθηγητής θα ζητήσει από τους μαθητές να ερμηνεύσουν το γεγονός και, προς το τέλος του μαθήματος, θα δώσει την απάντηση: «Υπάρχουν 2 λόγοι για τους οποίους η κατασκευή του οκταγώνου προτιμάται. Ο πρώτος είναι ότι η πλευρά του κανονικού οκταγώνου αντιστοιχεί σε κατασκευάσιμο αριθμό και ο δεύτερος, ότι οι πλευρές του κανονικού επταγώνου, καθώς και του κανονικού εννιαγώνου αντιστοιχούν σε αριθμούς άρρητους και μη κατασκευάσιμους»

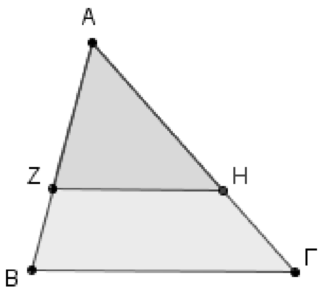
Έτσι, το συγκεκριμένο μάθημα τελειώνει με την λύση της απορίας που γεννήθηκε στους μαθητές την προηγούμενη διδακτική ώρα.

Κριτήρια Αξιολόγησης των μαθητών:

Για το 1ο& 2ο εκπαιδευτικό σενάριο:

Φύλλο Εργασίας των μαθητών για το μάθημα: «Ισότητα και ομοιότητα τριγώνων»:

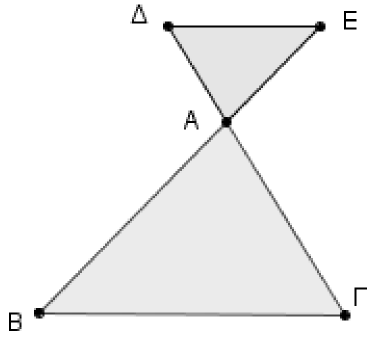
1) Στο παρακάτω σχήμα να δείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΖΗ είναι όμοια και να σχηματίσετε τις αναλογίες (Όπου ΖΗ // ΒΓ)



... = ... (.............)
... = ... (..............) ⇒ .... ≈ .... επομένως θα έχουν τις πλευρές τους ανάλογες

άρα και ... = ...

2) Στο διπλανό σχήμα να δείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΕΔ και ΑΒΓ είναι όμοια και να σχηματίσετε τις αναλογίες(Όπου ΔΕ // ΒΓ)



... = ... (.............)
... = ... (..............) ⇒ .... ≈ .... επομένως θα έχουν τις πλευρές τους ανάλογες

άρα και ... = ...

3) Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ προεκτείνουμε τη διάμεσο ΑΜ και πάνω σε αυτήν παίρνουμε τμήμα ΜΔ = ΑΜ. Να αποδείξετε ότι:

1. τα τρίγωνα ΑΜΒ και ΜΓΔ είναι ίσα
2. ΑΒ=ΔΓ
3. η γωνία ΒΔΓ είναι ίση με την γωνία Α

4) Δύο ισοσκελή τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ έχουν κοινή την κορυφή Α και ίσες τις γωνίες ΒΑΓ & ΔΑΕ. Να αποδειχθεί ότι ΒΔ = ΓΕ.

5) Αν ένα πλοίο βρίσκεται στη θέση Α στη θάλασσα, εμείς στεκόμαστε στη θέση Β στη στεριά να υπολογίσετε την απόσταση ΑΒ

Λύσεις για το Κριτήριο αξιολόγησης του 1^{ου}&2^{ου} εκπαιδευτικού σεναρίου:

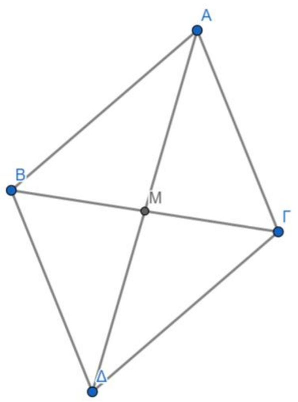
Άσκηση 1^{η}:

Ζ = Β (∠),Α=Α (∠).Τότε ΑΒΓ ~ ΑΖΗ και ΑΖ/ΑΒ = ΑΗ/ΑΓ (= ΖΗ/ΒΓ)

Άσκηση 2^{η}:

ΔΑΕ = ΒΑΓ (∠), Β = Ε (∠).Τότε, ΑΔΕ ~ ΑΒΓ και ΑΕ/ΑΒ = ΑΔ/ΑΓ (= ΔΕ/ΒΓ)

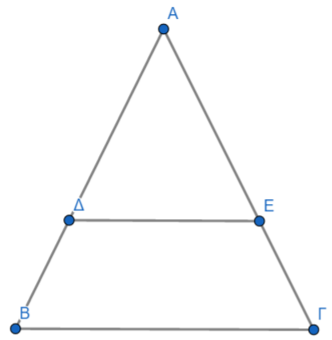
Άσκηση 3^{η}:



1. Ισχύει ότι: ΑΜ = ΜΔ (υποθ.), ΒΜ = ΜΓ (Μ μέσον ΒΓ) και ΒΜΑ = ΔΜΓ (∠) (κατακορυφήν). Τότε, ΑΜΒ, ΔΜΓ τρίγωνα με 2 αντίστοιχες πλευρές ίσες και την περιεχόμενη γωνία επίσης ίση. ΑΜΒ = ΔΜΓ.
2. Καθώς ΑΜΒ = ΔΜΓ, τότε, ΒΜ = ΜΓ, ΑΜ = ΜΔ, ΑΒ = ΔΓ.
3.Γνωρίζουμε ότι ΑΜΒ = ΔΜΓ. Με παρόμοιο τρόπο αποδεικνύουμε ότι ΑΜΓ = ΒΜΔ. Τότε, ΒΔΜ = ΜΑΓ (∠) και ΓΔΜ = ΜΑΒ (∠). Δηλαδή, ΒΔΜ + ΓΔΜ = ΒΑΜ + ΜΑΓ → ΒΔΓ = ΑΒΓ (∠).

Άσκηση 4^{η}:

Εύκολα μπορούμε να δείξουμε ότι: ΑΔΕ ~ ΑΒΓ. Τότε, ΑΒ/ΑΔ = ΑΓ/ΑΕ → (ΑΔ+ΔΒ)/ΑΔ = (ΑΕ+ΕΓ)/ΑΕ → ΔΒ/ΑΔ = ΕΓ/ΑΕ . Όμως, επειδή ΑΔ = ΑΕ, έχουμε ΔΒ = ΕΓ.



Άσκηση 5^{η}: Βασίζεται στο πρόβλημα που λύθηκε από τα παιδιά κατά την διάρκεια του 2^{ου} εκπαιδευτικού σεναρίου.

Για το 3ο εκπαιδευτικό σενάριο:

Κριτήριο αξιολόγησης των μαθητών για το μάθημα: «Βασικές Γεωμετρικές έννοιες και εφαρμογές στην Θεωρία των αριθμών»:

Άσκηση 1η: Να κατασκευαστούν γεωμετρικά οι αριθμοί:

I. 2 / 3
II. 7 / 5
III. 46 / 69

Άσκηση 2η: Να κατασκευάσετε ευθύγραμμα τμήματα με μήκη:

I. $\sqrt{5}$
II. $\sqrt{(13 / 5)}$
III. $(1 / 2)^2$
IV. $(3 / 2)^3$

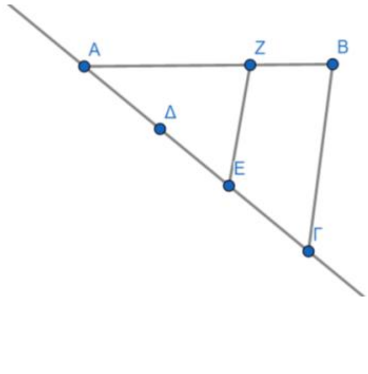
Άσκηση 3η: Έστω α, β, γ φυσικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει: α / β = β / γ. Να παρασταθούν γεωμετρικά οι αριθμοί αυτοί στο επίπεδο.

Άσκηση 4η: Να κατασκευαστεί ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ εμβαδού 1, τέτοιο ώστε ΑΒ = φ = (1+√5) / 2.

Λύσεις για το Κριτήριο αξιολόγησης του 3ου εκπαιδευτικού σεναρίου:

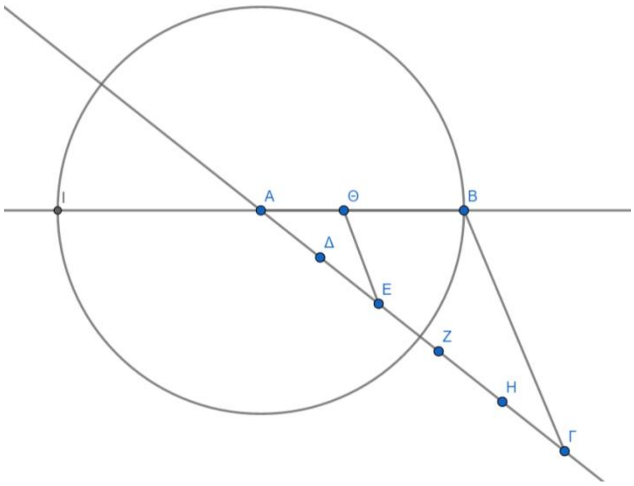
Άσκηση 1η: (εδώ, ουσιαστικά, γίνεται εφαρμογή της γεωμετρικής διαίρεσης)

I) Κατασκευάζουμε ΑΒ = 1 και ευθεία (ε) που διέρχεται από το Α μη παράλληλη στο ΑΒ. Παίρνουμε τμήματα ΑΔ = ΔΕ = ΕΓ στην (ε) και σχεδιάζουμε το ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ. Τέλος, φέρνουμε παράλληλη ευθεία προς το ΒΓ που διέρχεται από το Ε και τέμνει το ΑΒ στο Ζ. Τότε, ΖΒ = 1 / 3 και, συνεπώς,



ΑΖ = 1 – 1 / 3 = 2 / 3.

II) Καθώς 7 / 5 = 5 / 5 + 2 / 5 = 1 + 2 / 5, αρκεί να κατασκευάσουμε τμήμα 2 / 5 και σε αυτό να προσθέσουμε ένα άλλο μήκους 1.



Φέρουμε τμήμα ΑΒ μήκους 1 και ευθεία (ε) μη παράλληλη στο ΑΒ. Παίρνουμε τμήματα ΑΔ = ΔΕ = ΕΖ = ΖΗ = ΗΓ στην (ε) και σχεδιάζουμε το ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ. Έπειτα φέρνουμε την παράλληλη προς το ΒΓ ευθεία που διέρχεται από το Ε και τέμνει την ΑΒ στο Θ. Τέλος, κατασκευάζουμε κύκλο (Α, ΑΒ) και την ευθεία (ζ) που διέρχεται από τα ΑΒ και τέμνει τον κύκλο στο Ι.

Τότε, ΙΒ = 1 + 2 / 5 = 7 / 5.

III) Παρατηρούμε ότι: 46 = 2·23 και 69 = 3·23. Τότε, 46 / 69 = 2 / 3 (όπως η περίπτωση Ι).

Άσκηση 2^{η}:

I) Παρατηρούμε ότι $5 = 4 + 1 = 2^2 + 1^2$ και συνεπώς, $\sqrt{5} = \sqrt{(2^2 + 1^2)}$.

Δηλαδή, το $\sqrt{5}$ αποτελεί υποτείνουσα ορθογωνίου τριγώνου με κάθετες πλευρές 2, 1.

II) Ισχύει ότι: $13 / 5 = 9 / 5 + 4 / 5 = (3 / \sqrt{5})^2 + (2 / \sqrt{5})^2 = (3\sqrt{5} / 5)^2 + (2\sqrt{5} / 5)^2$. Τότε, $\sqrt{(13 / 5)} = \sqrt{\{(3\sqrt{5} / 5)^2 + (2\sqrt{5} / 5)^2\}}$.

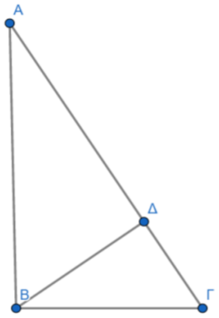
Δηλαδή, το $\sqrt{(13 / 5)}$ αποτελεί υποτείνουσα ορθογωνίου τριγώνου με κάθετες πλευρές $3\sqrt{5} / 5$, $2\sqrt{5} / 5$. Οι κάθετες πλευρές μπορούν εύκολα να κατασκευαστούν με την βοήθεια του τμήματος μήκους $\sqrt{5}$ του προηγούμενου ερωτήματος και της διαίρεσης ευθυγράμμων τμημάτων.

III) Καθώς $(1 / 2)^3 = 1 / 2^3 = 1 / 8$, αρκεί να διαιρέσουμε ευθύγραμμο τμήμα μήκους 1 σε 8 ίσα τμήματα με γεωμετρική διαίρεση.

IV) Ισχύει ότι: $(3 / 2)^3 = (1 + 1 / 2)^3 = 1 + 3 / 2 + 3 / 4 + 1 / 8$.

Κατασκευάζοντας τα τμήματα 3 / 2 και 3 / 4 με γεωμετρική διαίρεση και χρησιμοποιώντας το τμήμα μήκους 1/8 από το προηγούμενο ερώτημα, μπορούμε να κατασκευάσουμε τον ζητούμενο αριθμό.

Άσκηση 3^{η}: Έστω ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $B = 90^o$ και ΒΔ το ύψος προς την υποτείνουσα. Γνωρίζουμε ότι ισχύει: $BΔ^2 = AΔ·ΔΓ$.

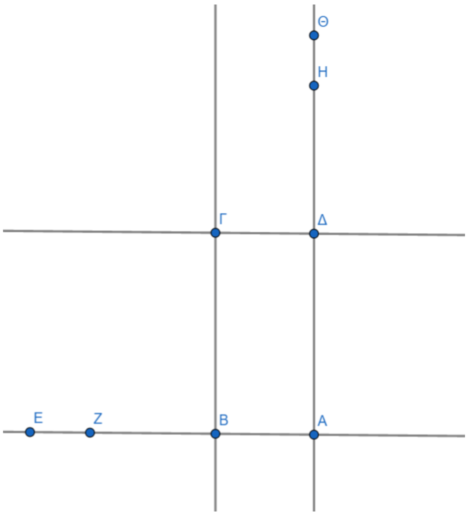


Θέτοντας ΒΔ = β και ΑΔ = α, ΔΓ = γ, βρίσκουμε το ζητούμενο.

$\beta^2 = \alpha \cdot \gamma \rightarrow \beta / \gamma = \alpha / \beta \rightarrow \alpha / \beta = \beta / \gamma$.

Άσκηση 4η: Εάν ΑΒΓΔ έχει εμβαδόν 1, τότε: ΑΒ·ΒΓ = 1 → ΒΓ = 1 / ΑΒ = 1 / φ

ΒΓ = (√5 – 1) / 2. Οπότε αρκεί να κατασκευαστούν τα τμήματα ΑΒ = (1 + √5) / 2 και ΒΓ = (√5 – 1) / 2 κάθετα μεταξύ τους.



Φέρουμε ευθείες (ε) και (ζ), κάθετες μεταξύ τους, που τέμνονται στο Α. Επίσης, κατασκευάζουμε τμήματα ΑΕ = ΑΗ = √5 στις (ζ) και (ε) αντίστοιχα, αφαιρούμε τμήμα μήκους 1 από το ΑΕ, δημιουργώντας τμήμα ΑΖ, και προσθέτουμε τμήμα μήκους 1 στο ΑΗ, δημιουργώντας τμήμα ΑΘ. Τέλος, φέρουμε τις μεσοκάθετους των ΑΖ, ΑΘ που τις τέμνουν στα Β και Δ αντίστοιχα, ενώ οι ίδιες τέμνονται στο Γ. Έτσι, δημιουργούμε παραλληλόγραμμο με πλευρές ΑΒ = ΓΔ = (1 + √5) / 2 και ΒΓ = ΔΑ = (√5 – 1) / 2 (Φυσικά, το τμήμα μήκους √5 κατασκευάζεται όπως αναφέραμε προηγουμένως).

Επίλογος:

Σε μια εποχή προβλημάτων και έλλειψης κριτικής σκέψης, τα Μαθηματικά μπορούν να διδάξουν τον περισσότερα ωφέλιμο τρόπο νόησης, την μεθοδικότητα, την οργάνωση της σκέψης και την λογική. Αρκεί η διδασκαλία τους να μην γεννά στους νέους μαθητές την αντίληψη ότι τα Μαθηματικά είναι μια «αγγαρεία», ένα ακόμη μάθημα των σχολικών προγραμμάτων, υποχρεωτικό να διδαχθεί, αλλά θα πρέπει να συνειδητοποιηθεί ότι αποτελεί ένα από τα χρησιμότερα «εργαλεία», ικανό να αντιμετωπίσει κάθε σύγχρονο πρόβλημα – εάν χρησιμοποιηθεί σωστά – και άξιο να βρίσκεται στην «φαρέτρα» κάθε πολίτη της σύγχρονης κοινωνίας.

Η Ελλάδα, ακολουθώντας το παράδειγμα των χωρών της Ευρώπης που εφήρμοσαν νέες, σύγχρονες εκπαιδευτικές μεθόδους για την διδασκαλία των Μαθηματικών (γενικότερα των Φυσικών Επιστημών) και ταυτόχρονα αναβαθμίζοντας τα σχολικά περιβάλλοντα ώστε να περιέχουν τις νέες τεχνολογίες καθώς επίσης και εισάγοντας νέες θεωρίες μάθησης στο εκπαιδευτικό σύστημα, όπως αυτή του Κονστρουκτιβισμού, του Κονστραξιονισμού και της μάθησης μέσω της ανακάλυψης, μπορεί να αυξήσει σε μεγάλο βαθμό τις επιτυχίες των μαθητών της στον τομέα των Φυσικών Επιστημών. Κατ' επέκτασην, τέτοιοι μαθητές θα είναι ικανοί να βοηθήσουν και αυτοί, από την πλευρά τους, την χώρα είτε μέσω νέων ανακαλύψεων, είτε μέσω νέων / «επαναστατικών» προτάσεων περί ανόρθωσης της οικονομίας (εξάλλου ισχύει η συνεπαγωγή: Πολίτες με «σωστή» σκέψη → Πολιτευόμενοι με εξίσου «σωστή» σκέψη).

Η σωστή διδασκαλία των Μαθηματικών σε χώρες όπως η Ελλάδα είναι μέγιστης σημασίας καθώς η εσωτερική νοητική τάξη που δημιουργείται στους νέους πολίτες διοχετεύεται στην κοινωνία και, έτσι, επιτυγχάνεται η αρμονία που είναι απαραίτητη για την εύρυθμη λειτουργία της.

Εξάλλου, τα πάντα ξεκινούν από τον νου.

Βιβλιογραφία:

Ελληνική:

Δελτίο τύπου,(2011).*Η αντιμετώπιση των χαμηλών επιδόσεων στα Μαθηματικά και στις Φυσικές επιστήμες εξακολουθεί να αποτελεί πρόκληση στην Ευρώπη*, Ευρωπαϊκή Επιτροπή.

Λεωνίδης, Θ.,(2016). *Η εξέλιξη της διδασκαλίας των Μαθηματικών στην Ευρώπη (περιπτώσεις της Γαλλίας, Γερμανίας και Ιταλίας) και στην Ελλάδα από ιδρύσεως της Ευρωπαϊκής Ένωσης (ΕΟΚ) ως σήμερα*, Πανεπιστήμιο Μακεδονίας, Τμήμα Διεθνών και Ευρωπαϊκών Σπουδών.*

Τζεκάκη, Μ., Μπάρμπας, Γ.,(2004). *Καινοτόμες διδακτικές προσεγγίσεις σε διαφορετικές χώρες*, Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης.*

Λεβέντης, Α., Οικονομίδης, Α.,(2000). *Ο οικοδομητισμός ως παράδειγμα μάθησης*, Πρακτικά Πανελλήνιου Συνεδρίου «Πληροφορική και Εκπαίδευση», Πανεπιστήμιο Μακεδονίας.

Σμυρναίου, Ζ.,(2018). *Νέες εξελίξεις στις σύγχρονες θεωρίες μάθησης στην διδασκαλία και στην μάθηση διαφορετικών γνωστικών αντικειμένων*, Ηρόδοτος.

Ξένη:

Βασιλείου, Α.,(2015). *Mathematics Education in Europe: Common Challenges and National Policies*, Euridice.*

Masingilia, J.,(1993). *Learning from Mathematics Practice in Out-of-School Situations*, FLM Publishing Association.

Dogan, M.,(2011). *The role of dynamic geometry software in the proccess of learning: Geogebra example about triangles*,International Journal of Human Sciences.

Διαδικτυακοί τόποι:

Επίσημη ιστοσελίδα της Ευρωπαϊκής Ένωσης,http://ec.europa.eu

Papert, S. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/0020739700030306

Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης. *Πόρισμα της 1ης Συνόδου Προέδρων των Τμημάτων Μαθηματικών των Ελληνικών Πανεπιστημίων*, https://www.auth.gr/news/press/26119

Στρατηγάκης, Σ. *Η Μαθηματική Παιδεία*, https://m.naftemporiki.gr/story/1419794/i-mathimatiki-paideia

Fagerstam, E. *High school teachers' experience of the educational potential of outdoor teaching and learning*,https://www.tandfonline.com/doi/full/10.1080/14729679.2013.769887?casa_token=uOvfTdAr-ZwAAAAA%3ATI7_mY-aotyUOCK9y8YwZ-49mKQFgrL60tDEqndybYex3vnpmHm7h5NBiAlEm2WaoGdoUBwnog60

McParland, M., Noble, L., Livingston, G.*The effectiveness of problem-based learning compared to traditional teaching in undergraduate psychiatry*,https://onlinelibrary.wiley.com/doi/full/10.1111/j.1365-2929.2004.01818.x?casa_token=Z-N4qNYfNKQAAAAA%3A5R3uozCWGcPxSEb1SbEW8AzpsYOxMoQsDz4jAInm5gBJkV71SqViz7hZyPlIJymqpsWI0uQKl-XtSNI

Δημητριάδης, Σ.,(2015). *Θεωρίες μάθησης και Εκπαιδευτικό Λογισμικό,* https://repository.kallipos.gr/pdfviewer/web/viewer.html?file=/bitstream/11419/3397/2/finalpdf.pdf

Chang, K.,(2015). *Ejmste*,https://www.ejmste.com/Incorporating-Geogebra-into-Geometry-Learning-A-lesson-from-India,74912,0,2.html

Wikipedia, (2019). *Geogebra*,https://el.wikipedia.org/wiki/GeoGebra