# 691. Διδακτική των Μαθηματικών I

## Παρουσίαση $3^η$

Α. Φράγκος

Δευτέρα 31 Οκτωβρίου 2022

# Τι θα διαπραγματευτούμε

Υποθέτουμε ότι διδάσκουμε στην δευτεροβάθμια εκπαίδευση.

- Θα αναζητήσουμε σημεία θεωρίας ή δραστηριοτήτων στα οποία η χρήση τις γλώσσας δυνητικά έχει επιπτώσεις στην κατανόηση από τους μαθητές.
- Τρόπους με τους οποίους ένας εκπαιδευτικός μπορεί να βοηθήσει στην κατανόηση των εννοιών.

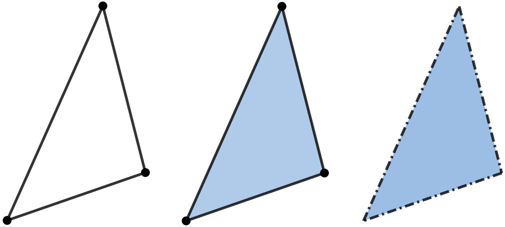
## Εσωτερικά (γυμνάσιο) - Διατύπωση

Η έννοια του εσωτερικού σε διδιάστατα και σε μονοδιάστατα σχήματα: Ας θεωρήσουμε ένα τρίγωνο $\widehat{AB\Gamma}$. Ακούγεται, για παράδειγμα, ότι το βαρύκεντρο $K$ είναι σημείο στο «εσωτερικό» του τριγώνου. Οι μαθητές γνωρίζουν:

- Ότι το τρίγωνο είναι ένωση τριών ευθυγράμμων τμημάτων,
- Ότι το εσωτερικό ενός διαστήματος είναι σύνολο της μορφής $(\alpha, \beta)$.

Δεδομένης της οπτικής αντιστοιχίας «τα ευθύγραμμα τμήματα είναι μετατοπισμένα διαστήματα», ενδέχεται να υπάρξει σύγχυση: ποιό είναι το εσωτερικό του τριγώνου; Είναι το σύνολο $\widehat{AB\Gamma}\setminus\{A, B, \Gamma\}$;

Μαθηματικά μιλώντας, το τρίγωνο δεν έχει εσωτερικό, γιατί είναι πεπερασμένη καμπύλη στο επίπεδο (έχει τοπολογική διάσταση μικρότερη απ' αυτήν του χώρου στον οποίο βρίσκεται). Το εσωτερικό στο οποίο αναφερόμαστε είναι το εσωτερικό του χωρίου που έχει ως σύνορο το τρίγωνο $\widehat{AB\Gamma}$.



*Το τρίγωνο $\widehat{AB\Gamma}$, το κλειστό χωρίο $\mathcal{X}(\widehat{AB\Gamma})$ και το εσωτερικό $\big[\mathcal{X}(\widehat{AB\Gamma})\big]^{\circ}$.*

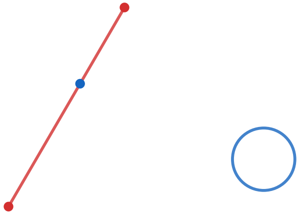
# Εσωτερικά - Διασαφηνίσεις

Πρέπει να γίνει εμφανές γιατί τα εσωτερικά εξαρτώνται από την τοπολογική διάσταση, χωρίς να χρειαστεί να φέρουμε 🧯.

Για να αντιληφθούμε την έννοια του εσωτερικού μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε λογικά παραδείγματα, από μέρη όπως η «επιπεδοχώρα»[1]. Ο κύριος κύκλος ○ για να βρει την ησυχία του στο επίπεδο τριγωνικό σπίτι του △ χρειάζεται τρεις τοίχους (που λειτουργούν ως σύνορο) και κινείται στο εσωτερικό του σπιτιού του, όπως το αντιλαμβάνεται αυτός. Κανείς επίπεδος δεν μπορεί να τον ενοχλήσει, εμείς όμως που είμαστε τρισδιάστατοι τον βλέπουμε. Αντίστοιχα, η κυρία τελεία • έχει σπίτι ε.τ. / και χρειάζεται δύο σημεία για τοίχους. Το εσωτερικό του σπιτιού της είναι εκεί που μπορεί να κινηθεί.

[1] Παιδικό βιβλίο του Abbott Edwin - στα αγγλικά “Flatland”.

Ο κύριος κύκλος ○ μπορεί να δει την κυρία τελεία •, αν μεταφέρουμε το σπίτι της στο επίπεδο. Για να μην την έβλεπε, θα έπρεπε το ε.τ. / να «παχύνει». Οπότε στο επίπεδο το / δεν έχει εσωτερικό, αφού οι επίπεδοι το βλέπουν όλο . Όλο το σπίτι λειτουργει σαν τοίχος γι’ αυτούς.



# Σημεία και σημεία (λύκειο) - Διατύπωση

Τα σημεία του επιπέδου και τα ορίσματα συναρτήσεων: Στο λύκειο (ίσως και στο γυμνάσιο) οι μαθητές μαθαίνουν να συμβολίζουν τα σημεία στο καρτεσιανό επίπεδο (με συντεταγμένες) - παράδειγμα $A(x_A, y_A)$. Μαθαίνουν δηλαδή ότι ένα σημείο μπορεί να αναπαρασταθεί μέσω τον συντεταγμένων του ως ένα διατεταγμένο ζεύγος.

Έπειτα διαπραγματεύονται πραγματικές συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και μαθαίνουν να εκτιμούν την $f$ στο «σημείο $x_0$». Λένε ότι στο «σημείο $x_0$» η $f$ εμφανίζει ακρότατο, ότι εκεί κάμπτεται κ.ο.κ.

# Σημεία και σημεία - Διασαφηνίσεις

Οι μαθητές μπορεί να μπερδευτούν και να πουν, για παράδειγμα, ότι η $f$ εμφανίζει ακρότατο στο $\big(x_0, f(x_0)\big)$, αφού αυτό είναι ένα ακραίο σημείο του γραφήματος $\mathrm{Gr}(f)$ της $f$.

Και πάλι υπάρχει ένα θέμα «διάστασης» που πρέπει να επιλυθεί. Η $f$ ως συνάρτηση έχει μονοδιάστατα ορίσματα, και το «μέγιστο» ή «ελάχιστο» μιας συνάρτησης είναι αριθμός, όχι σημείο. Οι χώροι που μας ενδιαφέρουν είναι μονοδιάστατοι και η $f$ εκτιμάται στα $x$, όχι στα $(x, 0)$.

# Ρίζες (γυμνάσιο/λύκειο) - Διατύπωση

Ρίζες ως συναρτήσεις και ρίζες ως αριθμοί: Η έννοια της ρίζας συναντάται στα σχολικά μαθηματικά με δύο τρόπους:

- Ως συνάρτηση που δρα σε αριθμούς (ή συναρτήσεις): $r(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \sqrt{f(x)}$,
- Ως αριθμός $x_0$ που επιλύει μια εξίσωση της μορφής $f(x) = 0$.

Επομένως, εάν ζητηθεί να βρεθεί ρίζα συνάρτησης $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, οι μαθητές μπορούν να απαντήσουν με δύο τρόπους:

Ένας αριθμός $x_0 \in \mathbb{R}$ με την ιδιότητα $f(x_0) = 0$ **ή** $\sqrt{f}$

Επίσης, τι σχέση έχουν οι δύο έννοιες μεταξύ τους; Είναι άσχετες;

# Ρίζες - Διασαφηνίσεις

Κατ' αρχάς ας ασχοληθούμε λίγο ιστορικά με τον όρο «ρίζα», γιατί έχει ενδιαφέρον.

## Η ρίζα ιστορικά

Στο αραβικό βιβλίο *Al-jabr* εμφανίζεται πρώτη φορά ο όρος «ρίζα», με την αραβική μορφή "jidr" (ρίζα φυτού) και αναφέρεται σε λύσεις (πολυωνυμικών) εξισώσεων $f(x) = 0$. Η ιδέα της ονομασίας έρχεται από το γεγονός ότι η «ανακάλυψη» μιας λύσης παρομοιάζεται με την εξαγωγή των ριζών ενός φυτού (αρχικά οι ρίζες δεν φαίνονται, μέχρι να εξαχθούν).[a][b]

[a] W. W. R. Ball, *A Short Account of the History of Mathematics*.
[b] D. E. Smith: *History of Mathematics* (Vol. 2, p. 393).

Επειδή, τουλάχιστον σε αρχικό στάδιο, η μελέτη εύρεσης λύσεων περιοριζόταν σε πολυωνυμικές εξισώσεις, ο όρος «ρίζα» ταυτίστηκε με τις διάφορες συναρτήσεις $\sqrt[n]{(\cdot)}$.

Συμβατικά στο σχολείο συνηθίζεται να υπονοείται ότι ρίζα μιας συνάρτησης δεν είναι η συνάρτηση $\sqrt{f}$, αλλά ένας αριθμός $x_0$ για τον οποίον $f(x_0) = 0$.

Προσοχή: Ακούγεται μερικές φορές ότι η ρίζα $x_0$ μιας συνάρτησης $f$ λέγεται έτσι γιατί στο $(x_0, 0)$ το $\mathrm{Gr}(f)$ φαίνεται να φυτεύεται το έδαφος ($\{x \in \mathbb{R} \mid y = 0\}$). Αυτό πιο πολύ αστείο φαίνεται παρά οτιδήποτε άλλο, κι επίσης δεν βρήκα πηγές που να υποστηρίζουν την εμφάνιση του όρου ιστορικά μ' αυτόν τον τρόπο. Παρόλα αυτά, διδακτικά ίσως έχει μια εφαρμογή.