691. Διδακτική των Μαθηματικών Ι

Παρουσίαση 7^{η}

Α. Φράγκος

Τρίτη 29 Νοεμβρίου 2022

Τι θα διαπραγματευτούμε

- Θα μελετήσουμε την κατασκευή διαφόρων καμπυλών στα πλαίσια ξυλουργικών τεχνικών.

Εργασιακό περιβάλλον - Ξυλουργική

Στο πλαίσιο της μελέτης των συναρτήσεων στη Β-Γ λυκείου μπορεί να γίνει αναφορά σε πρακτικούς τρόπους κατασκευής ορισμένων καμπυλών. Ειδικά στη ξυλουργική (και ακόμη πιο ειδικά στην κατασκευή οργάνων) γίνεται χρήση διάφορων εμπειρικών πρακτικών για την κατασκευή ορισμένων καμπυλών. Παρακάτω θα δούμε διαδικασίες (προσεγγιστικής) κατασκευής:

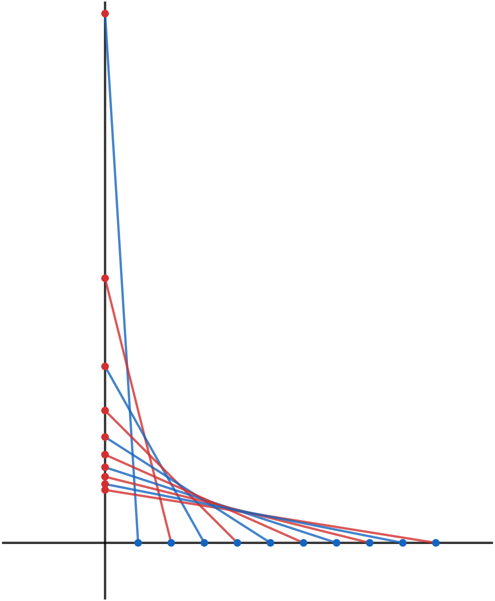
- Της συνήθους υπερβολής (δηλ. του $\mathrm{Gr}\big(1/(\cdot)|_{(0,\infty)}\big)$),
- Της έλλειψης (διαφόρων αξόνων - καρφιά και σχοινί[1]),
- Της έλλειψης (διαφόρων αξόνων - ως προβολή κύκλου).

[1] Χωρίς σαπούνι.

Η υπερβολή

Η κατασκευή: Σχεδιάζουμε δύο κάθετες ευθείες και πάνω σε μια απ' αυτές επιλέγουμε (ομοιόμορφα) σημεία $x_1, \cdots, x_n$. Στην άλλη επιλέγουμε σημεία $y_1 = 4/x_1, \cdots, y_n = 4/x_n$ και κατασκευάζουμε τα ε.τ. που ενώνουν τα σημεία x_k, y_{n-k+1}.

Το σχήμα που προκύπτει φαίνεται να «σκιαγραφεί» το υπογράφημα της συνάρτησης $1/(\cdot)$.



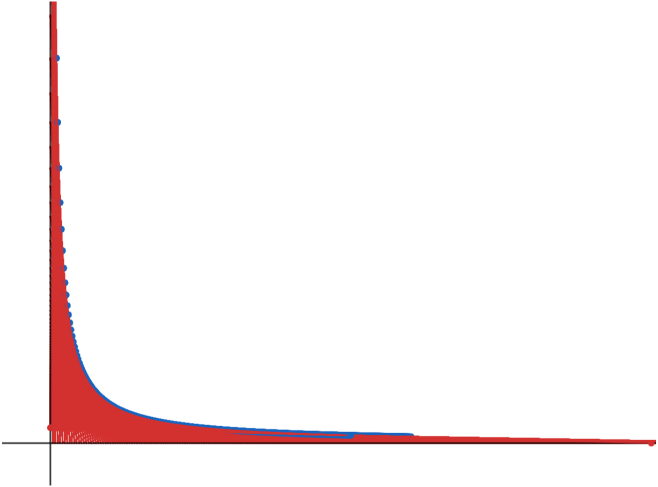
Είναι αλήθεια ότι η «γραμμή» στο τεταρτημόριο που λειτουργεί (κατά μια έννοια) ως σύνορο του υπογραφήματος είναι το γράφημα της $1/(\cdot)$; Αν ναι, για ποιόν λόγο;

Η αιτιολόγιση της εν λόγω κατασκευής μπορεί να γίνει με διαφορικό λογισμό Γ λυκείου. Συγκεκριμένα, δοθέντος ενός σημείου $x_0 \in (0, \infty)$, η εφαπτόμενη της $f(x) = 1/x$ στο x_0 είναι η ευθεία:

$$\varepsilon_{x_0}(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) = -\frac{1}{x_0^2} \cdot (x - x_0) + \frac{1}{x_0}$$

η οποία τέμνει τον άξονα των x στο $(2x_0, 0)$ και των y στο $(0, 2/x_0)$. Ονοματίζοντας το $2x_0$ ως s, οι τομές γίνονται αντίστοιχα $(s, 0)$ και $(0, 4/s)$.

Για τα διάφορα $s > 0$, η ένωση των διάφορων ευθειών δίνει το υπογράφημα της $1/(\cdot)$. Πιο παραστατικά, μπορείτε να δείτε με κίνηση την επικάλυψη πατώντας εδώ.



Οι μαθητές φυσικά δεν γνωρίζουν (ενδεχομένως) την αιτιολόγιση για τον λόγο για τον οποίον η κατασκευή «δουλεύει». Ζητούμε να προσέξουν τη διαδικασία κατασκευής (ο ξυλουργός θα δείχνει), κι έπειτα να την αναπαράγουν. Η αναπαραγωγή μπορεί να γίνει με διάφορους τρόπους:

- Με ψηφιακά μέσα (όπως προηγουμένως), για παράδειγμα με χρήση του λογισμικού GeoGebra (Geometry) ή του Desmos,
- Με χρήση υλικών μέσων (χάρακες, χαρτιά κ.τ.λ.), με το «μεγαλεπίβολο» σχέδιο να είναι ανακατασκευή με καρφιά / πινέζες και σχοινιά. Τα καρφιά θα αντιστοιχούν στα σημεία, τα σχοινιά στις εφαπτόμενες ευθείες (αυτός είναι και ο τρόπος με τον οποίον παλαιότερα λειτουργούσαν οι ξυλουργοί).

Η χρήση ψηφιακών πρακτικών δίνει τη δυνατότητα στους μαθητές να πάρουν μια ιδέα για την κατασκευή: Σχεδιάζοντας την υπερβολή, μπορεί (εποπτικά) να γίνει η παρατήρηση ότι οι ευθείες εφάπτονται σ' αυτή.

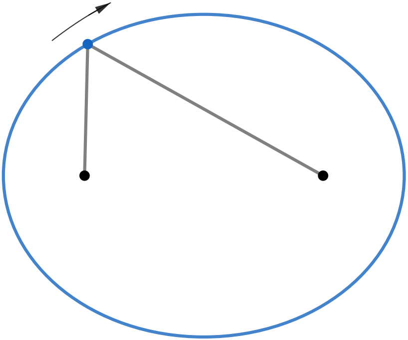
Ειδικά η χρήση υλικών μόνο ίσως δυσκολέψει στην εύρεση κάποιας αιτιολόγισης. Ένας μαθητής μπορεί να σκεφτεί να βρει τα σημεία τομής (διαδοχικών) ευθειών και να προσεγγίσει μ' αυτά την υπερβολή, αφήνοντας το πλήθος των ευθειών να τείνει στο άπειρο. Αυτό είναι σαφώς δυσκολότερο απ' ότι η μελέτη μέσω εφαπτομένων, αφού κάθε φορά τα σημεία τομής εξαρτώνται (και) από το πλήθος των εφαπτομένων. Οπότε ένας καθηγητής θα πρέπει να επιλέξει τρόπο προσέγγισης ανάλογα με τη δυσκολία που θέλει να εισάγει στους μαθητές.

Έλλειψη - 1η προσέγγιση

Ο επόμενος τρόπος κατασκευής της έλλειψης στηρίζεται σε μεγάλο βαθμό στον ορισμό της έλλειψης, όπως αυτή παρουσιάζεται στο σχολικό βιβλίο.

Η κατασκευή: Στερεώστε δύο καρφιά / πινέζες στο επίπεδο και ενώστε τα / τες με σχοινί που δεν σχηματίζει ευθύγραμμο τμήμα. Κρατώντας τεντωμένο το σχοινί με ένα μολύβι, περιστρέψτε το μολύβι γύρω από τις δύο πινέζες. Το σχήμα που θα προκύψει είναι μια έλλειψη.

Η κατασκευή πράγματι δίνει έλλειψη, αφού το μήκος του σχοινιού είναι σταθερό, και ως έλλειψη ορίζουμε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων των οποίων οι αποστάσεις από δύο (σταθεροποιημένα) σημεία - τις εστίες - έχει σταθερό άθροισμα.



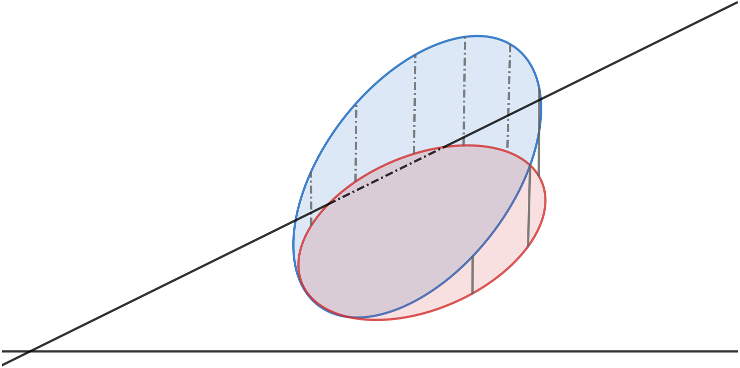
Εδώ οι μαθητές έρχονται αντιμέτωποι με έννοιες που τους είναι περισσότερο οικίες. Θα προσπαθήσουμε λοιπόν δύο πράγματα:

- Πρώτον, να συνδέσουν την «πραγματικότητα» (υλικά ή ψηφιακά) με τον ορισμό της έλλειψης,
- Δεύτερον, να αιτιολογίσουν την κατασκευή, να δώσουν δηλαδή μια στοιχειώδη απόδειξη για τον τρόπο με τον οποίο δουλεύει.

Επίσης, θα ήταν καλό να γίνει μια σύνδεση με τον κύκλο: Ένας κύκλος καθορίζεται μονοσήμαντα από το κέντρο του και τη διάμετρό του, αναλόγως μια έλλειψη καθορίζεται μονοσήμαντα από τα «κέντρα» της (εστίες) και την «διάμετρό» της.

Έλλειψη - 2η προσέγγιση

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε έναν κυκλικό δίσκο υπο γωνία με το επίπεδο.



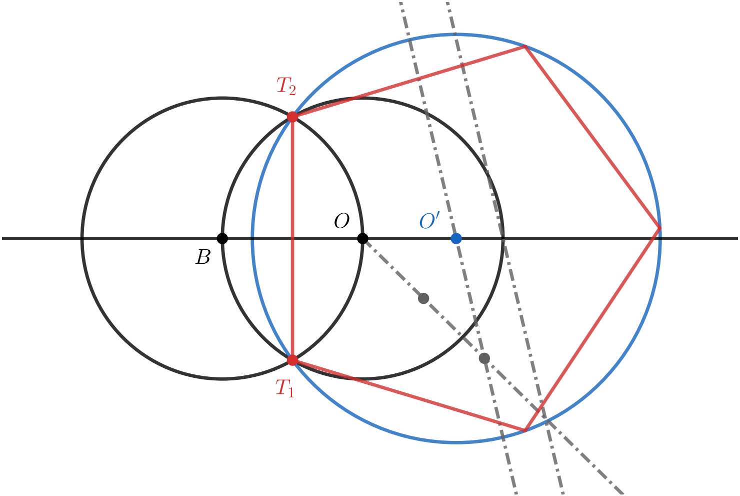
Η κατασκευή: Σχεδιάζουμε το περίγραμμα της προβολής του κύκλου στο επίπεδο. Το προκύπτον σχήμα μοιάζει πολύ με έλλειψη - μάλιστα ισχυριζόμαστε ότι είναι.

Εμπειρικά δεν είναι φυσικά αναγκαίο να αποδειχθεί ότι η εν λόγω έλλειψη είναι καμπύλη, μάλιστα δεν χρειάζεται καν να είναι έλλειψη. Αρκεί η ομοιότητά της με έλλειψη. Στην ιστορία είναι γνωστά τέτοιου είδους παραδείγματα προσεγγίσεων, όπως οι προσεγγιστικές κατασκευές κανονικών πολυγώνων.

Εν τω μεταξύ, θεωρήστε την ακόλουθη κατασκευή (η οποία δεν έχει σχέση με την έλλειψη):[2] Κατασκευάστε κύκλο ακτίνας ρ και κέντρου O, και πάνω σε μια προέκταση μιας διαμέτρου κατασκευάστε τμήμα OO' με μήκος $n\rho/3 - \rho$. Προεκτείνετε την OO' στην ημιευθεία του O και βρείτε το σημείο τομής B με τον κύκλο που χαράξατε πριν. Από το B χαράξτε κύκλο ακτίνας ρ και θεωρήστε τα σημεία τομής των δύο κύκλων T_1, T_2. Από το O' φέρτε κύκλο ακτίνας $O'T_1 = O'T_2$ και κατασκευάστε πολύγωνο (;) με τόξο T_1T_2. Ισχυριζόμαστε ότι το προκύπτον σχήμα θα μοιάζει με $n-$γωνο.[3]

[2] Αυτό είναι ένα παράδειγμα προσεγγιστικής κατασκευής.

[3] Για μικρές τιμές του n, δηλαδή $3 < n \leqslant 11$.



Το τμήμα OO' *έχει μήκος* $5\rho/3 - \rho = 2\rho/3$*, οπότε «κατασκευάζει» πεντάγωνο.*

Επιστρέφουμε στη μελέτη της έλλειψης: Ένας ξυλουργός μπορεί (αναλόγως την περίσταση) να χρησιμοποιεί τον 1ο ή τον 2ο τρόπο κατασκευής μιας έλλειψης. Οι μαθητές καλούνται να διερευνήσουν ποιός τρόπος είναι «καλύτερος» για την κατασκευή μιας έλλειψης.

Σαν πρώτο βήμα, μπορεί να ελεγχθεί αν όντως οι δύο τρόποι κατασκευάζουν έλλειψη ή αν κάποιος από αυτούς λειτουργεί προσεγγιστικά. Ο πρώτος τρόπος είναι συμβατός με τον ορισμό της έλλειψης, οπότε θα ελεγθεί ο δεύτερος.

Στο σχολείο έχει δειχθεί ότι κάθε έλλειψη χαρακτηρίζεται από εξίσωση της μορφής:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,\ a, b > 0$$

Θεωρούμε ότι ο άξονας y του επιπέδου του δίσκου παρακλείνει από το επίπεδο κατά θ, και όχι ο x. Προβάλλοντας τον κύκλο (έστω ακτίνας ρ) στο επίπεδο, παρατηρούμε ότι κάθε σημείο (x, ℓ) - σε συντεταγμένες στο επίπεδο του δίσκου - απεικονίζεται στο $(x, \ell \cos\theta)$. Επιπλέον, όλα τα σημεία της προβολής έχουν αυτήν τη μορφή. Επομένως, θέτοντας $y = \ell \cos\theta$:

$$\frac{x^2}{\rho^2} + \frac{y^2}{\rho^2 \cos^2\theta} = \frac{x^2 + \ell^2}{\rho^2} = \frac{\rho^2}{\rho^2} = 1$$

Έχοντας ένα μαθηματικό υπόβαθρο, στη συνέχεια απαιτείται συνεργασία με τον ξυλουργό ώστε οι μαθητές να εντοπίσουν λόγους για τους οποίους (σε κάποιες περιπτώσεις) η μία μέθοδος υπερτερεί έναντι της άλλης.

Εδώ συνειδητοποιούν ότι τα μαθηματικά λειτουργούν ως μοντέλο στο πλαίσιο της εργασίας του ξυλουργού, οπότε (κατά μία έννοια) το πώς ακριβώς θα χρησιμοποιηθούν εξαρτάται περισσότερο από τις απαιτήσεις του εργασιακού περιβάλλοντος παρά από τα ίδια τα μαθηματικά.