Στοιχεία Αλγεβρικής Γεωμετρίας

Α. Φράγκος, 06/10/2024

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Οι σημειώσεις αυτές βασίστηκαν σε ένα βαθμό στα μαθήματα του μεταπτυχιακού μαθήματος Θ21. Αλγεβρική Γεωμετρία, του μεταπτυχιακού των θεωρητικών μαθηματικών του Τμ. Μαθηματικών του ΕΚΠΑ, όπως διδάχθηκε από τον Α. Κοντογεώργη.

Σκοπός των σημειώσεων είναι να δοθεί μία πολύ γενική ιδέα για την αλγεβρική γεωμετρία. Συστήνεται λοιπόν ισχυρά να διαβάζετε παράλληλα τη βιβλιογραφία (στο τέλος παραθέτω κάποια -κατά τη γνώμη μου- καλά βιβλία). Μάλιστα είναι τόσο σημαντικό να συμβουλεύεστε κι άλλα βιβλιά, που η γραμματοσειρά αυτή επιλέχθηκε ακριβώς για να δυσκολέψει το διάβασμα αυτών των σημειώσεων.

Ομολογώ ότι η συγγραφή έγινε αρκετά πρόχειρα (ιδίως τα προαπαιτούμενα), σε ένα αντικείμενο στο οποίο σε καμία περίπτωση δεν θεωρώ ότι είμαι γνώστης. Προχωρίστε με προσοχή και ανοικτά μάτια, για λάθη και αβλεψίες. Όταν βρείτε λάθη, μπορείτε να με ενημερώσετε στο email:

afragos@post.com

Τάσος Φράγκος

Υ.Γ.: Σε κάποιες αποδείξεις έγινε προσπάθεια για ευθεία απόδειξη αντί για απόδειξη εις άτοπον, προκειμένου να υπάρχει καλύτερη εποπτεία.

Κεφάλαιο 2

Μερικά προαπαιτούμενα

2.1 Βασικές έννοιες άλγεβρας

Ορισμός 2.1 (Δακτύλιος). *Έστω R ένα μη-κενό σύνολο και δύο πράξεις $+$ και $*$ (ή απλώς $\cdot$). Ο R λέγεται δακτύλιος εάν:*

1. *Το $(R, +)$ είναι αβελιανή ομάδα,*
2. *Ισχύει η προσεταιριστική ιδιότητα $(a * b) * c = a * (b * c)$,*
3. *Ισχύει η επιμεριστική ιδιότητα $a * (b + c) = a * b + a * c$, $(a + b) * c = a * c + b * c$*

για κάθε $a, b, c \in R$. Το ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης συμβολίζεται με 0. Εάν υπάρχε ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού, συμβολίζεται με 1. Εάν ο πολλαπλασιασμός $*$ είναι μεταθετικός, ο R λέγεται μεταθετικός.

Ορισμός 2.2 (Πολυώνυμα μίας μεταβλητής). *Έστω R ένας δακτύλιος. Ένα πολυώνυμο $f(x)$ με συντελεστές από το R είναι μία τυπική δυναμοσειρά:*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k,\ a_k \in R$$

όπου $a_k = 0$ εκτός από πεπερασμένο πλήθος δεικτών $k \in \mathbb{N}_0$. Ο βαθμός του f ορίζεται:

$$\deg f = \max\{k \mid a_k \neq 0\}$$

Το σύνολο των πολυωνύμων συμβολίζεται με $R[x]$. Προφανώς υπάρχει σχέση μεταξύ των πολυωνύμων $R[x]$ και των τελικά μηδενικών ακολουθιών R_{00}.

$$R[x] \ni \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \leftrightarrow (a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n, 0, 0, 0, 0, \cdots) \in R_{00}$$

Ορισμός 2.3 (Πολυώνυμα πολλών μεταβλητών). *Έστω R ένας δακτύλιος. Ένα πολυώνυμο δύο μεταβλητών x, y είναι ένα στοιχείο του $R[x][y]$. Επαγωγικά, ένα πολυώνυμο μεταβλητών $x_1, \cdots, x_n$ είναι ένα στοιχείο του $R[x_1, \cdots, x_{n-1}][x_n]$. Μπορούμε να παραστήσουμε το πολυώνυμο στη μορφή:*

$$f(X) = \sum_{K \in \mathbb{N}_0^n} a_K X^K, \ a_K \in R$$

όπου $a_K = 0$ εκτός από πεπερασμένο πλήθος δεικτών $K \in \mathbb{N}_0$ και το X^K ορίζεται με την έννοια του πολυδείκτη:

$$X^K = x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n}, \ X = (X_1, \cdots, X_n), \ K = (k_1, \cdots, k_n)$$

Ορισμός 2.4 (Ιδεώδη). *Έστω R ένας δακτύλιος. Ένα ιδεώδες $\mathfrak{i}$ του R είναι ένα υποσύνολο του R με:*

1. $\mathfrak{i} \neq \emptyset$,
2. $a + b \in \mathfrak{i}$ *για κάθε* $a, b \in \mathfrak{i}$,
3. $r * a \in \mathfrak{i}$ *για κάθε* $a \in \mathfrak{i}$, $r \in R$.

Συμβολίζουμε $\mathfrak{i} \trianglelefteq R$.

Ορισμός 2.5 (Πράξεις με ιδεώδη). *Έστω $\mathfrak{i}, \mathfrak{j} \trianglelefteq R$ δύο ιδεώδη. Το άθροισμα $\mathfrak{i} + \mathfrak{j}$ ορίζεται:*

$$\mathfrak{i} + \mathfrak{j} = \{a + b \mid a \in \mathfrak{i}, \ b \in \mathfrak{j}\}$$

Το γινόμενο ορίζεται:

$$\mathfrak{i} \cdot \mathfrak{j} = \left\{ \sum a_k b_k \ \middle| \ a_k \in \mathfrak{i}, \ b_k \in \mathfrak{j} \right\}$$

Το ριζικό ορίζεται:

$$\sqrt{\mathfrak{i}} = \{a \in R \mid a^n \in \mathfrak{i} \text{ για κάποιο } n \in \mathbb{N}\}$$

Ορισμός 2.6 (Ριζικά, κύρια και μηδενικά ιδεώδη). *Ένα ιδεώδες καλείται ριζικό ιδεώδες εάν $\sqrt{\mathfrak{i}} = \mathfrak{i}$. Ένα ιδεώδες που παράγεται από ένα σύνολο A συμβολίζεται:*

$$\mathfrak{i} = \langle A \rangle = \bigcap_{\substack{\mathfrak{j} \supseteq A \\ \mathfrak{j} \trianglelefteq R}} \mathfrak{j}$$

δηλαδή $\langle A \rangle$ είναι το μικρότερο ιδεώδες που περιέχει το A. Εάν $A = \{a_1, \cdots, a_n\}$, συμβολίζουμε $\mathfrak{i} = \langle a_1, \cdots, a_n \rangle$. Εάν $A = \{a\}$, τότε $\mathfrak{i} = \langle a \rangle$ και το ιδεώδες $\mathfrak{i}$ καλείται κύριο. Το μηδενικό ιδεώδες συμβολίζεται με 0 ή $\{0\}$ ή $\langle 0 \rangle$.

Ορισμός 2.7 (Ακέραιες περιοχές). *Ένας δακτύλιος R λέγεται ακέραια περιοχή εάν:*

1. *Ο R είναι μεταθετικός,*
2. *Υπάρχει μοναδιαίο στοιχείο $1 \neq 0$,*
3. *Αν $a * b = 0$, τότε $0 \in \{a, b\}$.*

Ορισμός 2.8 (Σώματα). *Ένας δακτύλιος $\mathbb{K}$ λέγεται σώμα εάν:*

1. *Ο $\mathbb{K}$ είναι μεταθετικός,*
2. *Υπάρχει μοναδιαίο στοιχείο $1 \neq 0$,*
3. *Κάθε μη-μηδενικό $a \in \mathbb{K}$ έχει πολλαπλασιαστικό αντίστροφο.*

Ένα σώμα $\mathbb{K}$ λέγεται αλγεβρικά κλειστό εάν κάθε πολυώνυμο $f \in \mathbb{K}[x]$ έχει $n = \deg f$ (όχι κατ' ανάγκη διακεκριμένες) ρίζες στο $\mathbb{K}$.

Παρατήρηση 2.1. *Έστω R ένας μεταθετικός δακτύλιος με μονάδα και $\mathfrak{m}$ ένα μεγιστικό ιδεώδες. Ο δακτύλιος $R/\mathfrak{m}$ είναι σώμα (και αντιστρόφως).*

Απόδειξη. Εάν το $\mathfrak{m}$ είναι μεγιστικό ιδεώδες, τότε θεωρούμε το σύνολο $R/\mathfrak{m}$ και παρατηρούμε ότι μεταξύ των $\mathfrak{m}/\mathfrak{m} = 0, R/\mathfrak{m}$ δεν υπάρχουν άλλα ιδεώδη. Άρα, για κάθε $a + \mathfrak{m} \in R/\mathfrak{m}$, $a \neq 0$, έχουμε:

$$\langle a + \mathfrak{m} \rangle = {}^{R}\!/_{\mathfrak{m}}$$

και κατά συνέπεια υπάρχει $r \in R$ με $ra + \mathfrak{m} = 1 + \mathfrak{m}$. Δηλαδή η κλάση $a + \mathfrak{m}$ αντιστρέφεται.

Αντιστρόφως, εάν $\mathfrak{i}$ είναι ένα ιδεώδες ώστε $\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{i} \subset R$, τότε:

$$0 \subseteq {}^{\mathfrak{i}}\!/_{\mathfrak{m}} \subset {}^{R}\!/_{\mathfrak{m}}$$

κι επειδή το $R/\mathfrak{m}$ είναι σώμα, $\mathfrak{i}/\mathfrak{m} = 0 \Rightarrow \mathfrak{i} = \mathfrak{m}$. □

Πρόταση 2.1. *Έστω $\mathbb{K}$ ένα σώμα και $A = \{f_1, \cdots, f_n\} \subseteq \mathbb{K}[x]$. Ισχύει:*

$$\langle A \rangle = \left\{ \sum_{k=1}^{n} g_k f_k \;\middle|\; g_k \in \mathbb{K}[x] \right\}$$

Απόδειξη. Εφόσον το $\langle A \rangle$ είναι ιδεώδες και $\{f_1, \cdots, f_n\} \subseteq A$, έπεται ότι:

$$\langle A \rangle \supseteq \left\{ \sum_{k=1}^{n} g_k f_k \;\middle|\; g_k \in \mathbb{K}[x] \right\}$$

Από την άλλη, δεν είναι δύσκολο να δούμε ότι το δεξιό σύνολο είναι ιδεώδες. Από την ιδιότητα του ελαχιστικού ιδεώδους, ισχύει η ισότητα:

$$\langle A \rangle = \left\{ \sum_{k=1}^{n} g_k f_k \;\middle|\; g_k \in \mathbb{K}[x] \right\}$$

□

Πρόταση 2.2. *Έστω $\mathbb{K}$ σώμα. Κάθε ιδεώδες $\mathfrak{i} \trianglelefteq \mathbb{K}[x]$ είναι κύριο.*

Απόδειξη. Η περίπτωση $\mathfrak{i} = 0$ είναι τετριμμένη, οπότε υποθέτουμε $\mathfrak{i} \neq 0$. Εφόσον $\mathfrak{i} \neq 0$, επιλέγουμε $f \in \mathfrak{i} \backslash \{0\}$ ελάχιστου βαθμού $n = \deg f$, κι από τον ευκλείδειο αλγόριθμο, για κάθε $g \in \mathfrak{i}$ έχουμε:

$$g = fq + r \Rightarrow r = g - fq \text{ με } r = 0 \text{ ή } \deg r < \deg f$$

Εφόσον το f είναι ελάχιστου βαθμού και $\deg r < \deg f$, έχουμε $r = 0$. Άρα $g \in \langle f \rangle$ και κατά συνέπεια $\mathfrak{i} = \langle f \rangle$. □

Πρόταση 2.3. *Έστω $\mathbb{K}$ σώμα και $f_1, \cdots, f_n \in \mathbb{K}[x]$. Τότε:*

$$\langle f_1, \cdots, f_n \rangle = \langle \gcd(f_1, \cdots, f_n) \rangle$$

Απόδειξη. Το $\langle f_1, \cdots, f_n \rangle$ είναι κύριο, οπότε μπορούμε να γράφουμε:

$$\langle f_1, \cdots, f_n \rangle = \langle g \rangle, \ g \in \mathbb{K}[x]$$

Θα δείξουμε ότι μπορεί να επιλεγεί $g = \gcd(f_1, \cdots, f_n)$. Καταρχάς γράφουμε:

$$g = \sum_{k=1}^{n} g_k f_k, \ g_k \in \mathbb{K}[x]$$

Εάν h είναι ένας κοινός διαιρέτης των f_k, τότε $h \mid \sum_{k=1}^{n} g_k f_k = g$. Το g είναι διαιρέτης καθενός f_k, αφού καθένα απ' αυτά παράγεται από το g. Αυτά δείχνουν ότι αν $g = \gcd(f_1, \cdots, f_n)$, τότε:

$$\langle f_1, \cdots, f_n \rangle = \langle \gcd(f_1, \cdots, f_n) \rangle$$

□

Ορισμός 2.9 (Δακτύλιοι της Noether). *Ένας δακτύλιος R λέγεται της Noether εάν κάθε αύξουσα αλυσίδα ιδεωδών:*

$$\mathfrak{i}_1 \subseteq \mathfrak{i}_2 \subseteq \mathfrak{i}_3 \subseteq \cdots$$

είναι τελικά σταθερή.

Παρατήρηση 2.2. *Ένας δακτύλιος R είναι της Noether εάν και μόνο αν κάθε $\mathfrak{i} \trianglelefteq R$ είναι πεπερασμένα παραγόμενο.*

Απόδειξη. ($\Rightarrow$) Ας υποθέσουμε προς άτοπο ότι υπάρχει ιδεώδες $\mathfrak{i} \trianglelefteq R$ που δεν είναι πεπερασμένα παραγόμενο. Τότε για κάθε $a_1 \in \mathfrak{i}$ έχουμε:

$$\mathfrak{i}_1 = \langle a_1 \rangle \subset \mathfrak{i}$$

Επίσης, για κάθε $a_2 \in \mathfrak{i} \backslash \mathfrak{i}_1$:

$$\mathfrak{i}_2 = \langle a_1, a_2 \rangle \subset \mathfrak{i}$$

αφού το $\mathfrak{i}$ δεν ειναι πεπερασμένα παραγόμενο. Επαγωγικά προκύπτει μία γνησίως αύξουσα αλυσίδα ιδεωδών:

$$\mathfrak{i}_1 \subset \mathfrak{i}_2 \subset \mathfrak{i}_3 \subset \cdots$$

πράγμα που αντιτίθεται στην υπόθεση ότι ο R είναι δακτύλιος της Noether.

($\Leftarrow$) Έστω μία αύξουσα αλυσίδα ιδεωδών:

$$\mathfrak{i}_1 \subseteq \mathfrak{i}_2 \subseteq \mathfrak{i}_3 \subseteq \cdots$$

Μπορεί να δειχθεί, λόγω της αλυσίδας, ότι το σύνολο $\mathfrak{i} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathfrak{i}_k$ είναι ιδεώδες του R, και μάλιστα πεπερασμένα παραγόμενο, λόγω της υπόθεσης. Εάν $\{a_1, \cdots, a_n\}$ είναι ένα σύνολο γεννητόρων, θεωρούμε m τον δείκτη αυτόν για τον οποίο $a_1, \cdots, a_n \in \mathfrak{i}_m$ και τότε:

$$\mathfrak{i}_k = \mathfrak{i}_m \text{ για κάθε } k \geqslant m$$

□

Θεώρημα 2.1 (Θεώρημα βάσης του Hilbert). *Εάν ο δακτύλιος R είναι της Noether, τότε ο $R[x]$ είναι κι αυτός της Noether. Κατά συνέπεια, κάθε $\mathfrak{i} \trianglelefteq R[x]$ είναι πεπερασμένα παραγόμενο. Επαγωγικά, εάν ο R είναι δακτύλιος της Noether, ο $R[x_1, \cdots, x_n]$ είναι δακτύλιος της Noether και κάθε $\mathfrak{i} \trianglelefteq R[x_1, \cdots, x_n]$ είναι πεπερασμένα παραγόμενο.*

Απόδειξη. Εάν $\mathfrak{j} \trianglelefteq R[x]$ είναι τυχόν, θα δείξουμε ότι το $\mathfrak{j}$ είναι πεπερασμένα παραγόμενο. Πρώτα ορίζουμε την οικογένεια ιδεωδών:

$$\mathfrak{i}_n = \{r \mid rx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 \in \mathfrak{j}\}$$

(μπορεί να ελεγχθεί από τον ορισμό ότι είναι πράγματι ιδεώδη) και παρατηρούμε ότι $\mathfrak{i}_n \subseteq \mathfrak{i}_{n+1}$ για κάθε n. Κατά συνέπεια, σχηματίζεται η αύξουσα αλυσίδα ιδεωδών:

$$\mathfrak{i}_0 \subseteq \mathfrak{i}_1 \subseteq \mathfrak{i}_2 \subseteq \mathfrak{i}_3 \subseteq \cdots$$

η οποία είναι (έστω μετά ενός m) τελικά σταθερή, λόγω του ότι ο R είναι δακτύλιος της Noether.

Επίσης, καθένα από τα $\mathfrak{i}_n$ είναι πεπερασμένα παραγόμενο, με γεννήτορες $\{r_{n,1}, \cdots, r_{n,t_n}\}$, αφού ο R είναι δακτύλιος της Noether. Από τον ορισμό των $\mathfrak{i}_n$ έπεται ότι για κάθε $r_{n,k}$ υπάρχει $f_{n,k}$:

$$f_{n,k} = r_{n,k}x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 \in \mathfrak{j}$$

Ο ισχυρισμός μας είναι ότι:

$$\mathfrak{j} = \langle f_{n,k} \mid 0 \leqslant n \leqslant m,\ 1 \leqslant k \leqslant t_n \rangle$$

και κατά συνέπεια το $\mathfrak{j}$ είναι πεπερασμένα παραγόμενο.

Έστω λοιπόν $\widetilde{\mathfrak{j}} = \langle f_{n,k} \mid 0 \leqslant n \leqslant m,\ 1 \leqslant k \leqslant t_n \rangle$. Είναι φανερό ότι $\widetilde{\mathfrak{j}} \subseteq \mathfrak{j}$, αφού $f_{n,k} \in \mathfrak{j}$, οπότε θέλουμε να δείξουμε ότι $\widetilde{\mathfrak{j}} \supseteq \mathfrak{j}$. Αυτό θα γίνει με επαγωγή στον βαθμό των πολυωνύμων: Έστω:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \in \mathfrak{j}$$

Εάν $n = \deg f = 0$, τότε $f = a_0 \in i_0 = \langle r_{0,1}, \cdots, r_{0,t_0} \rangle = \langle f_{0,1}, \cdots, f_{0,t_0} \rangle$. Άρα, $f \in \widetilde{j}$. Αυτό αποδεικνύει τη βάση της επαγωγής. Υποθέτουμε τώρα ότι $f \in \widetilde{\mathfrak{j}}$ για κάθε $n < N$ και θα δείξουμε ότι το αποτέλεσμα ισχύει και για $n = N$.

- Εάν $N \leqslant m$: Έστω $f(x) = \sum_{k=0}^{N} a_k x^k \in \mathfrak{j}$, οπότε $a_N \in \mathfrak{i}_N$. Από τη σχέση $a_N \in \mathfrak{i}_N$ έχουμε ότι υπάρχουν s_λ με:

$$a_N = \sum_{\lambda=1}^{t_N} s_\lambda r_{N,\lambda}$$

  Ορίζουμε τώρα:

$$g(x) = \sum_{\lambda=1}^{t_N} s_\lambda f_{N,\lambda}(x) = a_N x^N + \sum_{k=0}^{N} b_k x^k$$

  και έχουμε $g \in \widetilde{\mathfrak{j}} \subseteq \mathfrak{j}$. Επομένως $f - g \in \mathfrak{j}$. Όμως $\deg(f-g) \leqslant N-1$ και από την επαγωγική υπόθεση $f - g \in \widetilde{\mathfrak{j}}$. Κατά συνέπεια, $f = f - g + g \in \widetilde{\mathfrak{j}}$.

- Εάν $N > m$: Έστω $f(x) = \sum_{k=0}^{N} a_k x^k \in \mathfrak{j}$, οπότε $a_N \in \mathfrak{i}_N = \mathfrak{i}_m$. Από τη σχέση $a_N \in \mathfrak{i}_N$ έχουμε ότι υπάρχουν s_λ με:

$$a_N = \sum_{\lambda=1}^{t_m} s_\lambda r_{m,\lambda}$$

  Ορίζουμε τώρα:

$$g(x) = \sum_{\lambda=1}^{t_m} s_\lambda f_{m,\lambda}(x) x^{N-m} = a_N x^N + \sum_{k=0}^{N} b_k x^k$$

  και συνεχίζοντας όπως πριν, καταλήγουμε στο $f = f - g + g \in \widetilde{\mathfrak{j}}$.

□

2.2 Βασικές έννοιες τοπολογίας

Σε αυτήν την παράγραφο θα υπενθυμίσουμε βασικές έννοιες από την πραγματική ανάλυση κι έπειτα θα γενικεύσουμε αξιωματικά τα ανοικτά σύνολα σε χώρους στους οποίους δεν προϋποτίθεται μετρική δομή.

Ορισμός 2.10 (Μετρικές και μετρικοί χώροι)**.** *Έστω $M \neq \emptyset$ ένα σύνολο και $\varrho : M \times M \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση με τις ιδιότητες:*

1. $\forall x, y \in M,\ \varrho(x,y) \geqslant 0$
2. $\forall x, y \in M,\ [\varrho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y]$
3. $\forall x, y \in M,\ \varrho(x,y) = \varrho(y,x)$
4. $\forall x, y, z \in M,\ \varrho(x,z) \leqslant \varrho(x,y) + \varrho(y,z)$

Η συνάρτηση ϱ θα καλείται μετρική στο M. Το διατεταγμένο ζεύγος (M, ϱ) θα καλείται μετρικός χώρος.

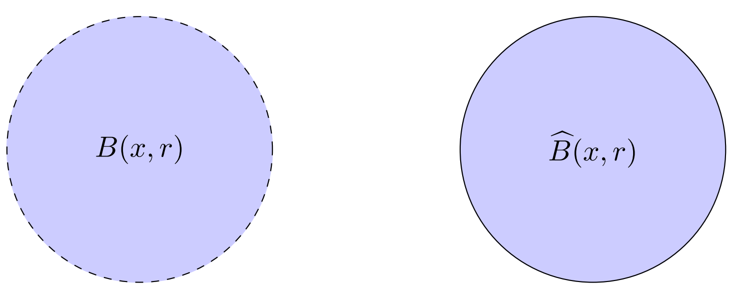
Ορισμός 2.11 (Ανοικτές και κλειστές μπάλες)**.** *Έστω (M, ϱ) ένας μετρικός χώρος, $x \in M$ και $r > 0$. Ορίζουμε ως ανοικτή μπάλα με κέντρο x και ακτίνα r το σύνολο:*

$$B(x,r) := \{y \in M \mid \varrho(x,y) < r\}$$

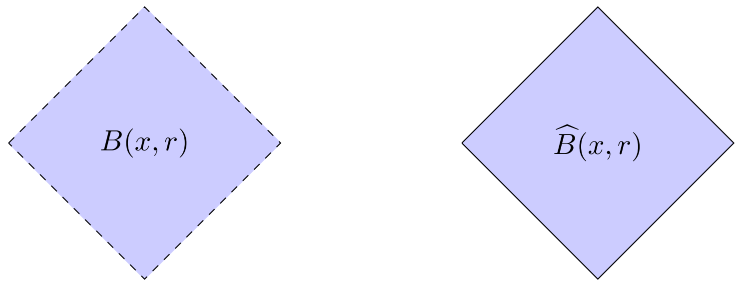
Ορίζουμε ως κλειστή μπάλα με κέντρο x και ακτίνα r το σύνολο:

$$\widehat{B}(x,r) := \{y \in M \mid \varrho(x,y) \leqslant r\}$$

Φυσικά (γενικά) αληθεύει ότι $x \in B(x,r) \subseteq \widehat{B}(x,r)$. Ειδικά στο επίπεδο, μετρώντας με τη συνήθη μετρική έχουμε εικόνες της μορφής:



ενώ μετρώντας με τη μετρική του ταχυδρόμου:



Ορισμός 2.12 (Ανοικτά σύνολα). *Έστω (M,ϱ) μετρικός χώρος. Ένα σύνολο $A \subseteq M$ θα λέγεται ανοικτό στον μετρικό χώρο αν και μόνο αν:*

$$\forall x \in A,\ \exists \varepsilon_x > 0 :\ B(x,\varepsilon_x) \subseteq A$$

Αυτομάτως ο ορισμός των ανοικτών συνόλων δίνει ότι κάθε ανοικτό σύνολο είναι ένωση ανοικτών μπαλών (και ισχύει και το αντίστροφο).

$$A \text{ ανοικτό } \Leftrightarrow \exists \big(B(x,\varepsilon_x)\big)_x \text{ με } A = \bigcup_x B(x,\varepsilon_x)$$

Θεώρημα 2.2. *Έστω (M,ϱ) μετρικός χώρος. Ορίζουμε το σύνολο των ανοικτών συνόλων του μετρικού χώρου:*

$$\mathfrak{T}_\varrho = \{A \subseteq X \mid A \text{ ανοικτό}\}$$

Τα ακόλουθα αληθεύουν:

1. *$\emptyset, M \in \mathfrak{T}_\varrho$*
2. *Εάν $n \in \mathbb{N}$ και $\{A_i\}_{i=1}^n \subseteq \mathfrak{T}_\varrho$, τότε $\bigcap_{i=1}^n A_i \in \mathfrak{T}_\varrho$*
3. *Εάν I είναι ένα αυθαίρετο σύνολο δεικτών και $\{A_i\}_{i\in I} \subseteq \mathfrak{T}_\varrho$, τότε $\bigcup_{i\in I} A_i \in \mathfrak{T}_\varrho$*

Απόδειξη. Για το 1., το $\emptyset$ είναι ανοικτό σύνολο, αφού προτάσεις της μορφής "$\forall x \in \emptyset$" πάντοτε ισχύουν. Το M είναι επίσης ανοικτό σύνολο, αφού:

$$M = \bigcup_{r>0} B(x,r)$$

Για το 2., εφόσον η οικογένεια $\{A_i\}_{i=1}^n$ είναι οικογένεια ανοικτών συνόλων, για κάθε $x \in \bigcap_{i=1}^n A_i$ υπάρχουν ακτίνες r_i τέτοιες ώστε $B(x,r_i) \subseteq A_i$ (για τα διάφορα i). Θεωρώντας $r = \min\{r_i\}_{i=1}^n$, έχουμε ότι $B(x,r) \subseteq \bigcap_{i=1}^n A_i$.

Για το 3., εάν $x \in \bigcup_{i\in I} A_i$, τότε $x \in A_j$ για κατάλληλο δείκτη j. Οπότε, υπάρχει r_j τέτοιο ώστε $B(x,r_j) \subseteq A_j$ και κατ' επέκταση $B(x,r_j) \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i$. □

Υπό το πρίσμα του πρηγγούμενου θεωρήματος, μπορούμε να ορίσουμε αξιωματικά τα ανοικτά σύνολα ως εξής:

Ορισμός 2.13 (Τοπολογίες, τοπολογικοί χώροι, ανοικτά και κλειστά σύνολα). *Έστω $X \neq \emptyset$ ένα σύνολο. Μια τοπολογία στον X είναι μια οικογένεια $\mathfrak{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$ με τις εξής ιδιότητες:*

1. $\emptyset, X \in \mathfrak{T}$
2. *Εάν $n \in \mathbb{N}$ και $\{A_i\}_{i=1}^n \subseteq \mathfrak{T}$, τότε $\bigcap_{i=1}^n A_i \in \mathfrak{T}$*
3. *Εάν I είναι ένα αυθαίρετο σύνολο δεικτών και $\{A_i\}_{i\in I} \subseteq \mathfrak{T}$, τότε $\bigcup_{i\in I} A_i \in \mathfrak{T}$*

Το διατεταγμένο ζεύγος $(X, \mathfrak{T})$ θα καλείται τοπολογικός χώρος. Τα στοιχεία μιας τοπολογίας $\mathfrak{T}$ θα τα ονομάζουμε ανοικτά σύνολα στον X. Τα κλειστά σύνολα F στον X είναι ακριβώς αυτά για τα οποία $F^c = X \backslash F \in \mathfrak{T}$.

Ο ορισμός που δώσαμε για την έννοια της τοπολογίας δεν προϋποθέτει την ύπαρξη μετρικής δομής ούτε κανείς εν γένει μπορεί να εξάγει μετρική δομή χρησιμοποιώντας την τοπολογία. Αυτό το βλέπουμε παρακάτω.

Ορισμός 2.14 (Μετρικοποιήσιμες τοπολογίες). *Έστω $X \neq \emptyset$. Μια τοπολογία $\mathfrak{T}$ στο X λέγεται μετρικοποιήσιμη εάν υπάρχει μετρική ϱ τέτοια ώστε $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}_\varrho$.*

Παρατήρηση 2.3. *Υπάρχουν μη μετρικοποιήσιμες τοπολογίες.*

Απόδειξη. Έστω ένα σύνολο X με την τετριμμένη τοπολογία του, δηλαδή την $\{\emptyset, X\}$. Έστω ϱ μία μετρική στο X. Για τυχόν $x \in X$ και για κάθε $r > 0$, η μπάλα $B(x, r)$ είναι ένα από τα σύνολα $\emptyset, X$ (αφού αυτά είναι τα μόνα ανοικτά σύνολα). Επειδή δεν είναι κενή, αναγκαστικά είναι ολόκληρος ο χώρος X. Τώρα ο X αναγκαστικά είναι μονοσύνολο, αφού οποιοδήποτε $x \neq y \in X$ βρίσκονται σε κάθε μπάλα $B(x, r)$ για οσοδήποτε μικρή απόσταση $r > 0$ - οπότε η απόσταση των x, y είναι μηδενική. Αυτό δείχνει ότι οι μόνες μετρικοποιήσιμες τετριμμένες τοπολογίες είναι αυτές στις οποίες $|X| = 1$. $\square$

Στους διάφορους μετρικούς χώρους (X, ϱ) υπάρχει μια οικογένεια συνόλων $\mathcal{B} \subseteq \mathfrak{T}_\varrho$ από "εύχρηστα" ανοικτά σύνολα για την περιγραφή της τοπολογίας. Για παράδειγμα, η οικογένεια των ανοικτών μπαλών του (X, ϱ) είναι τέτοιου είδους σύνολο, αφού κάθε ανοικτό σύνολο "παράγεται" από μπάλες. Το ανάλογο στους τοπολογικούς χώρους είναι η βάση της τοπολογίας.

Ορισμός 2.15 (Βάση μιας τοπολογίας). *Έστω $(X, \mathfrak{T})$ ένας τοπολογικός χώρος. Ένα σύνολο $\mathcal{B} \subseteq \mathfrak{T}$ λέγεται βάση της τοπολογίας $\mathfrak{T}$ εάν και μόνο αν ισχύει η ακόλουθη συνθήκη:*

"Κάθε $A \in \mathfrak{T}$ γράφεται ως ένωση συνόλων της οικογένειας $\mathcal{B}$"

Παρατήρηση 2.4. *Έστω $(X, \mathfrak{T})$ ένας τοπολογικός χώρος και $\mathcal{B} \subseteq \mathfrak{T}$. Η οικογένεια $\mathcal{B}$ είναι βάση της τοπολογίας εάν και μόνο αν:*

$$\forall A \in \mathfrak{T},\ \forall x \in A,\ \exists B_x \in \mathcal{B} \text{ τέτοιο ώστε } x \in B_x \text{ και } B_x \subseteq A$$

Απόδειξη. ($\Rightarrow$) Υποθέτουμε ότι η $\mathcal{B}$ είναι βάση για την τοπολογία $\mathfrak{T}$. Έστω $A \in \mathfrak{T}$ τυχόν ανοικτό σύνολο και $x \in A$. Επειδή η $\mathcal{B}$ είναι βάση για την τοπολογία, υπάρχει αυθαίρετα μεγάλο πλήθος συνόλων $\mathcal{B} \ni B_i,\ i \in I$ για τα οποία αληθεύει:

$$A = \bigcup_{i \in I} B_i$$

Εξ ορισμού τώρα της ένωσης, υπάρχει δείκτης $j_x \in I$ για τον οποίον $x \in B_{j_x}$, δηλαδή:

$$x \in B_{j_x} \subseteq \bigcup_{i \in I} B_i = A,\ \{B_i\}_{i \in I} \subseteq \mathcal{B}$$

($\Leftarrow$) Υποθέτουμε ότι:

$$\forall A \in \mathfrak{T},\ \forall x \in A,\ \exists B_x \in \mathcal{B} \text{ τέτοιο ώστε } x \in B_x \text{ και } B_x \subseteq A$$

Η ιδιότητα αυτή άμεσα δίνει ότι $\bigcup_{x \in A} B_x \supseteq A$ (διότι η ένωση γίνεται για κάθε $x \in A$, και $x \in B_x$). Επιπλέον $\bigcup_{x \in A} B_x \subseteq A$ (διότι $B_x \subseteq A$ για κάθε x). Ισχύει λοιπόν η ισότητα:

$$\bigcup_{x \in A} B_x = A$$

□

Ορισμός 2.16 (Υποβάσεις). *Έστω $(X, \mathfrak{T})$ ένας τοπολογικός χώρος. Το σύνολο $\mathcal{C} \subseteq \mathfrak{T}$ θα καλείται υποβάση της τοπολογίας $\mathfrak{T}$ εάν και μόνο αν το σύνολο:*

$$\mathcal{B} = \left\{ \bigcap_{i=1}^{n} C_i \;\middle|\; n \in \mathbb{N},\ \{C_i\}_{i=1}^{n} \subseteq \mathcal{C} \right\} \cup \{X\}$$

είναι βάση της $\mathfrak{T}$.

Ορισμός 2.17. *(Εσωτερικό συνόλου και κλειστή θήκη) Έστω $(X, \mathfrak{T})$ ένας τοπολογικός χώρος. Για κάθε $A \subseteq X$ ορίζουμε τα εξής βοηθητικά σύνολα:*

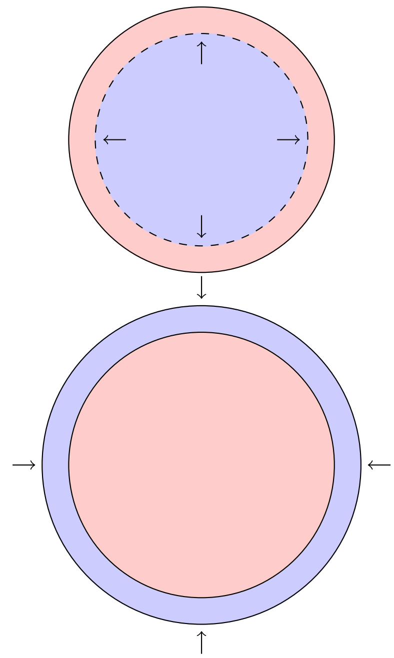
$$\mathcal{E}_A = \{G \in \mathfrak{T} \mid G \subseteq A\} \text{ και } \mathcal{F}_A = \{F \subseteq X \mid F \text{ κλειστό και } A \subseteq F\}$$

Ορίζουμε ως εσωτερικό του A το σύνολο:

$$A^\circ := \bigcup \mathcal{E}_A$$

Ορίζουμε ως κλειστή θήκη του A το σύνολο:

$$\overline{A} := \bigcap \mathcal{F}_A$$



Προσέγγιση του εσωτερικού με ανοικτά σύνολα, "από μέσα". Επίσης, προσέγγιση της θήκης με κλειστά σύνολα, "από έξω".

Με κατάλληλα ανοικτά σύνολα, τις περιοχές σημείων, μπορούν να οριστούν έννοιες συνέχειας στους τοπολογικούς χώρους.

Ορισμός 2.18 (Περιοχές). *Έστω $(X, \mathfrak{T})$ ένας τοπολογικός χώρος και $x \in X$, $A \subseteq X$, $\mathcal{B}$ μία βάση της $\mathfrak{T}$. Το σύνολο A λέγεται περιοχή του x εάν $x \in A^{\circ}$. Δύο άλλοι ισοδύναμοι ορισμοί είναι οι:*

$$\exists G \in \mathfrak{T} \text{ με } x \in G \subseteq A$$

και:

$$\exists B \in \mathcal{B} \text{ με } x \in B \subseteq A$$

Συμβολίζουμε με $\mathcal{N}_x$ το σύνολο όλων των περιοχών του x. Εάν ο τοπολογικός χώρος δεν υπονοείται, θα συμβολίζουμε με $\mathcal{N}_x^{\mathfrak{T}}$ το εν λόγω σύνολο.

Ορισμός 2.19 (Βάσεις περιοχών). *Έστω $(X, \mathfrak{T})$ ένας τοπολογικός χώρος και $x \in X$. Ένα σύνολο $\mathcal{B}_x \subseteq \mathcal{N}_x$ θα καλείται βάση περιοχών του x αν:*

$$\forall U \in \mathcal{N}_x,\ \exists B \in \mathcal{B}_x \text{ τέτοιο ώστε } B \subseteq U$$

Εάν ο τοπολογικός χώρος δεν υπονοείται, θα συμβολίζουμε με $\mathcal{B}_x^{\mathfrak{T}}$ το εν λόγω σύνολο. Επίσης, κάθε $B \in \mathcal{B}_x$ καλείται βασική περιοχή του x.

Έστω $(X,\varrho),(Y,d)$ μετρικοί χώροι. Υπενθυμίζουμε ότι μια συνάρτηση $f:(X,\varrho)\to(Y,d)$ είναι συνεχής στο $x\in X$ όταν για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει $\delta>0$ τέτοιο ώστε:

$$f\big(B_\varrho(x,\delta)\big)\subseteq B_d\big(f(x),\varepsilon\big)$$

Στην πραγματικότητα τα ε και δ ως αποστάσεις δεν χρειάζονται για την διατύπωση του ορισμού, ακόμη και στους μετρικούς χώρους.

$$f \text{ συνεχής } :\Leftrightarrow \forall B_d\big(f(x),\varepsilon\big),\ \exists B_\varrho(x,\delta) \text{ ώστε } f\big(B_\varrho(x,\delta)\big)\subseteq B_d\big(f(x),\varepsilon\big)$$

Το κύριο χαρακτηριστικό του ορισμού είναι η χρήση περιοχών του x. Διατυπώνουμε τον παρακάτω γενικό ορισμό:

Ορισμός 2.20 (Συνέχεια). *Έστω $(X,\mathfrak{T}_X),(Y,\mathfrak{T}_Y)$ δύο τοπολογικοί χώροι και $f:(X,\mathfrak{T}_X)\to(Y,\mathfrak{T}_Y)$. Η f θα λέγεται συνεχής συνάρτηση στο $x\in X$ εάν:*

$$\forall V\in\mathcal{N}_{f(x)}^{\mathfrak{T}_Y},\ \exists U\in\mathcal{N}_x^{\mathfrak{T}_X} \text{ ώστε } f(U)\subseteq V$$

Ο ίδιος ορισμός μπορεί να διατυπωθεί με βασικές περιοχές. Επιπλέον, η f θα καλείται συνεχής αν είναι συνεχής σε κάθε $x\in X$.

Πρόταση 2.4. *Έστω $(X,\mathfrak{T}_X),(Y,\mathfrak{T}_Y)$ δύο τοπολογικοί χώροι και $f:(X,\mathfrak{T}_X)\to(Y,\mathfrak{T}_Y)$. Αληθεύει η ισοδυναμία:*

$$f \text{ συνεχής στο } x\Leftrightarrow\forall V\in\mathcal{N}_{f(x)} \text{ ισχύει } f^{-1}(V)\in\mathcal{N}_x$$

Δηλαδή, κατά κάποιον τρόπο, η f αντιστρέφει περιοχές σε περιοχές.

Απόδειξη. Κατ' αρχάς ας θυμηθούμε μερικές χρήσιμες συνολοθεωρητικές σχέσεις, που δεν εξαρτώνται από τις τοπολογίες. Εάν $f:X\to Y$ είναι μια συνάρτηση και $A\subseteq X, B\subseteq Y$, τότε:

- $A\subseteq f^{-1}\big(f(A)\big)$, αφού εν γένει υπάρχουν περισσότερα στοιχεία απ' ότι αυτά του A των οποίων η εικόνα ανήκει στο $f(A)$.
- $f\big(f^{-1}(B)\big)\subseteq B$, αφού εν γένει υπάρχουν στοιχεία στο B που δεν είναι εικόνα μέσω της f.

($\Rightarrow$) Έστω ότι η f είναι συνεχής στο x. Τότε (από τον ορισμό της συνέχειας) για $V\in\mathcal{N}_{f(x)}$ υπάρχει $U\in\mathcal{N}_x$ με $f(U)\subseteq V$, δηλαδή $f^{-1}\big(f(U)\big)\subseteq f^{-1}(V)$. Από τις χρήσιμες συνολοθεωρητικές παρατηρήσεις:

$$U\subseteq f^{-1}\big(f(U)\big)=f^{-1}(V)$$

οπότε το σύνολο $f^{-1}(V)$ είναι περιοχή του x, ως υπερσύνολο περιοχής του x.

($\Leftarrow$) Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι για κάθε $V\in\mathcal{N}_{f(x)}$ έχουμε $f^{-1}(V)\in\mathcal{N}_x$. Σταθεροποιώντας ένα τέτοιο V, θέτουμε $U=f^{-1}(V)$ και θα δείξουμε ότι $U\in\mathcal{N}_x$, $f(U)\subseteq V$. Πράγματι, από την υπόθεση $U=f^{-1}(V)\in\mathcal{N}_x$ και από τις χρήσιμες συνολοθεωρητικές παρατηρήσεις $f(U)\subseteq f\big(f^{-1}(V)\big)\subseteq V$. $\square$

Ορισμός 2.21 (Ομοιομορφισμοί). *Έστω $(X, \mathfrak{T}_X), (Y, \mathfrak{T}_Y)$ δύο τοπολογικοί χώροι και $f : X \to Y$. Η f θα λέγεται ομοιομορφισμός εάν είναι αμφιμονοσήμαντη και συνεχής ως προς τις δύο κατευθύνσεις (δηλαδή η ίδια να είναι συνεχής και η αντίστροφή της να είναι συνεχής). Η ύπαρξη μιας τέτοιας $f : (X, \mathfrak{T}_X) \to (Y, \mathfrak{T}_Y)$ θα λέμε ότι καθιστά τους δύο τοπολογικούς χώρους ομοιομορφικούς.*

Ορισμός 2.22 (Αρχικές τοπολογίες). *Έστω X ένα σύνολο και $\big((Y_i, \mathfrak{T}_i)\big)_{i\in I}$ μια οικογένεια τοπολογικών χώρων. Επίσης θεωρούμε απεικονίσεις $f_i : X \to Y_i$, $i \in I$. Ονομάζουμε αρχική (ή ασθενή) τοπολογία που προκύπτει από την οικογένεια $(f_i)_{i\in I}$ την τοπολογία με υποβάση:*

$$\mathcal{C} = \bigcup_{i\in I} \{f_i^{-1}(G) \mid G \in \mathfrak{T}_i\}$$

Αφού η $\mathcal{C}$ είναι υποβάση αυτής της τοπολογίας, το σύνολο:

$$\mathcal{B} = \left\{ \bigcap_{i=1}^{n} C_i \;\middle|\; n \in \mathbb{N},\ \{C_i\}_{i=1}^{n} \subseteq \mathcal{C} \right\} \cup \{X\}$$

είναι βάση της τοπολογίας. Η ίδια η τοπολογία έχει τη μορφή:

$$\mathfrak{T} = \Big\{ \bigcup \mathcal{A} \mid \mathcal{A} \subseteq \mathcal{B} \Big\}$$

Από τον ορισμό της, η αρχική τοπολογία των $\{f_i\}_{i\in I}$ είναι η μικρότερη τοπολογία που κάνει κάθε f_i συνεχή.

Ειδική περίπτωση ασθενούς τοπολογίας είναι η ακόλουθη: Έστω $(X, \mathfrak{T})$ τοπολογικός χώρος, $A \subseteq X$ και $\mathrm{i}_A : A \hookrightarrow X$ η συνάρτηση εμφύτευσης. Το A μπορεί να εφοδιαστεί με την αρχική τοπολογία $\mathfrak{T}_A$ που προέρχεται από την (τετριμμένη) οικογένεια (i_A).

Ορισμός 2.23 (Σχετικές τοπολογίες). *Έστω $(X, \mathfrak{T})$ τοπολογικός χώρος, $A \subseteq X$ και $\mathrm{i}_A : A \hookrightarrow X$ η συνάρτηση εμφύτευσης. Η αρχική τοπολογία $\mathfrak{T}_A$ ονομάζεται σχετική τοπολογία του A που προέρχεται από την $\mathfrak{T}$.*

Η τοπολογία αυτή έχει υποβάση:

$$\mathcal{C} = \big\{ \mathrm{i}_A^{-1}(G) \mid G \in \mathfrak{T} \big\}$$

Επειδή όμως $\mathrm{i}_A^{-1}(G) = \{x \in A \mid \mathrm{i}_A(x) \in G\} = A \cap G$, έπεται:

$$\mathcal{C} = \big\{ A \cap G \mid G \in \mathfrak{T} \big\}$$

και περνώντας στα βασικά σύνολα $B = \bigcap_{k=1}^{n} C_k,\ \{C_k\}_{k=1}^{n} \subseteq \mathcal{C}$:

$$B = \bigcap_{k=1}^{n} C_k = \bigcap_{k=1}^{n} A \cap G_k = A \cap \left(\bigcap_{k=1}^{n} G_k \right)$$

Τώρα το $\bigcap_{k=1}^{n} G_k$ είναι ανοικτό σύνολο (έστω G) ως πεπερασμένη τομή τέτοιων, επομένως $B = A \cap G$. Παρατηρήστε ότι αυτό εξισώνει την οικογένεια $\mathcal{C}$ των υποβασικών συνόλων με την οικογένεια $\mathcal{B}$ των βασικών συνόλων.

Μάλιστα η ίδια η τοπολογία ταυτίζεται με τα προηγούμενα δύο σύνολα. Ένα τυχόν στοιχείο $U \in \mathfrak{T}_A$ γράφεται $U = \bigcup_{k\in I} B_k$ για αυθαίρετα μεγάλη οικογένεια $\{B_k\}_{k\in I} \subseteq \mathcal{B}$ και:

$$U = \bigcup_{k\in I} B_k = \bigcup_{k\in I} A \cap G_k = A \cap \left(\bigcup_{k\in I} G_k\right)$$

Το $\bigcup_{k\in I} G_k$ είναι ανοικτό σύνολο G, επομένως $U = A \cap G$. Έχουμε λοιπόν την ακόλουθη παρατήρηση:

Πόρισμα 2.1. *Έστω $(X, \mathfrak{T})$ ένας τοπολογικός χώρος, $A \subseteq X$ και $\mathfrak{T}_A$ η σχετική τοπολογία του A που προέρχεται από την $\mathfrak{T}$. Η υποβάση $\mathcal{C} = \{A \cap G \mid G \in \mathfrak{T}\}$ της σχετικής τοπολογίας ταυτίζεται με την αντίστοιχη βάση $\mathcal{B}$ καθώς και με την τοπολογία $\mathfrak{T}_A$. Δηλαδή:*

$$\mathcal{C} = \mathcal{B} = \mathfrak{T}_A$$

Ορισμός 2.24 (Προβολές και τοπολογίες γινόμενα). *Έστω $\big((X_i, \mathfrak{T}_i)\big)_{i\in I}$ οικογένεια τοπολογικών χώρων και X το γινόμενο:*

$$X = \prod_{i\in I} X_i := \Big\{x : I \to \bigcup_{i\in I} X_i \mid x(i) \in X_i,\ i \in I\Big\}$$

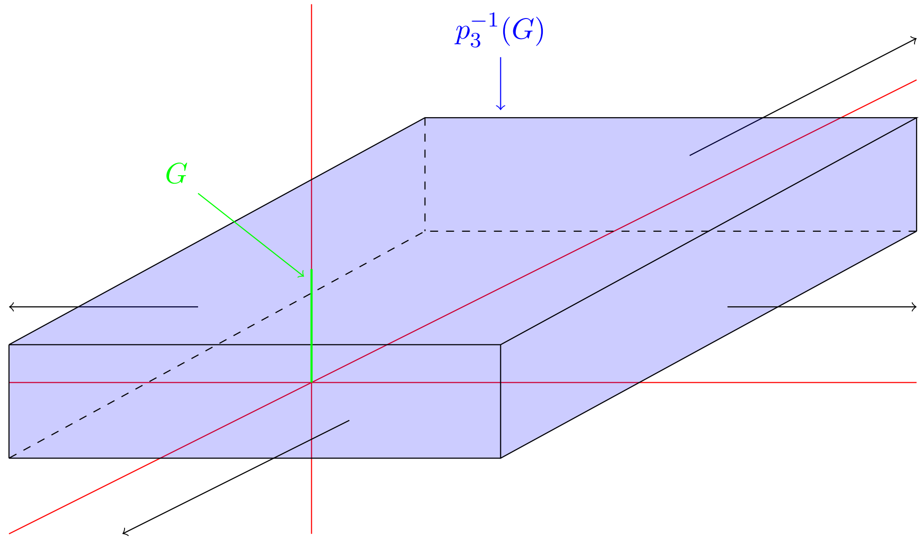
Για κάθε $j \in I$ ορίζουμε τη συνάρτηση προβολής $p_j : X \to X_j,\ x \mapsto x(j)$ στην $j-$συνιστώσα, κι επίσης θεωρούμε $\mathfrak{T}_\gamma$ την αρχική τοπολογία της οικογένειας των προβολών $(p_i)_{i\in I}$. Η $\mathfrak{T}_\gamma$ ονομάζεται τοπολογία γινόμενο (ή καρτεσιανή τοπολογία).

Από τον ορισμό της, η καρτεσιανή τοπολογία $\mathfrak{T}_\gamma$ είναι η μικρότερη τοπολογία που κάνει κάθε προβολή p_i συνεχή. Επιπλέον, η $\mathfrak{T}_\gamma$ έχει υποβάση $\mathcal{C} = \bigcup_{i\in I}\{p_i^{-1}(G) \mid G \in \mathfrak{T}_i\}$. Παρατηρήστε ότι ένα στοιχείο x ανήκει σε ένα υποβασικό σύνολο $p_i^{-1}(G)$ εάν και μόνο αν $p_i(x) \in G_i$, δηλαδή $x_i \in G_i$ (οι υπόλοιπες συντεταγμένες είναι "ελεύθερες").

Ορισμός 2.25 (Κανονική βάση μιας τοπολογίας γινόμενο). *Έστω τοπολογικοί χώροι $(X_i, \mathfrak{T}_i)$, $i \in I$. Θεωρούμε το γινόμενο $X = \prod_{i\in I} X_i$ εφοδιασμένο με την τοπολογία γινόμενο $\mathfrak{T}_\gamma$. Γνωρίζουμε ότι η οικογένεια $\mathcal{C} = \bigcup_{i\in I}\{p_i^{-1}(G) \mid G \in \mathfrak{T}_i\}$ είναι υποβάση της $\mathfrak{T}_\gamma$, και κατ' επέκταση το σύνολο:*

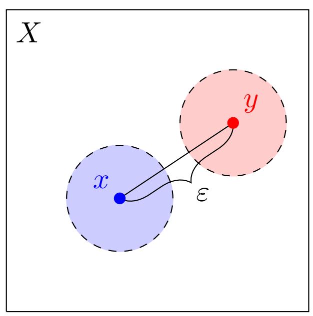
$$\mathcal{B} = \left\{\bigcap_{i=1}^{n} C_i \,\middle|\, n \in \mathbb{N},\ \{C_i\}_{i=1}^{n} \subseteq \mathcal{C}\right\} \cup \{X\}$$

είναι βάση της τοπολογίας. Το ονομάζουμε κανονική βάση της τοπολογίας γινόμενο.



Ένα παράδειγμα στον χώρο $\mathbb{R}^3$, για την προβολή p_3 στον άξονα των z. Το μπλε χωρίο είναι μια άπειρη λωρίδα (όσον αφορά τα x, y).

Στους μετρικούς χώρους (X, ϱ) υπάρχουν κάποιες έννοιες διαχωρισιμότητας: Για παράδειγμα, δοθέντων δύο σημείων x, y, μπορούμε να διαχωρισουμε περιοχή του x από περιοχή του y.



Για παράδειγμα, εάν $\varepsilon = \varrho(x, y)$ τα σύνολα $B(x, \varepsilon/3),\ B(y, \varepsilon/3)$ είναι ανοικτά, ξένα, το πρώτο περιέχει το x και το δεύτερο το y. Δίνουμε λοιπόν τον ακόλουθο ορισμό:

Ορισμός 2.26 (Hausdorff τοπολογικοί χώροι)**.** *Ένας τοπολογικός χώρος $(X, \mathfrak{T})$ λέγεται Hausdorff εάν για κάθε $x, y \in X$ με $x \neq y$ υπάρχουν ανοικτά σύνολα $U, V \in \mathfrak{T}$ τέτοια ώστε $x \in U,\ y \in V$ και $U \cap V = \emptyset$.*

Ορισμός 2.27 (Τοπολογική διάσταση)**.**

2.3 Στοιχεία θεωρίας κατηγοριών

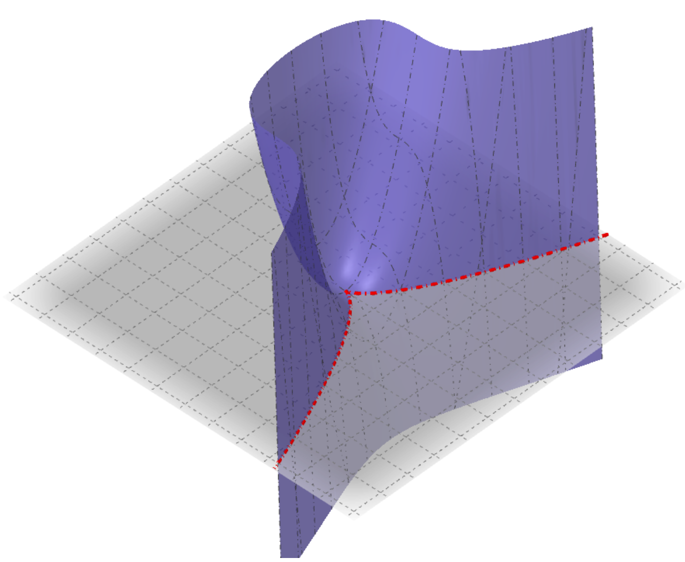
Κεφάλαιο 3

Αλγεβρικά σύνολα

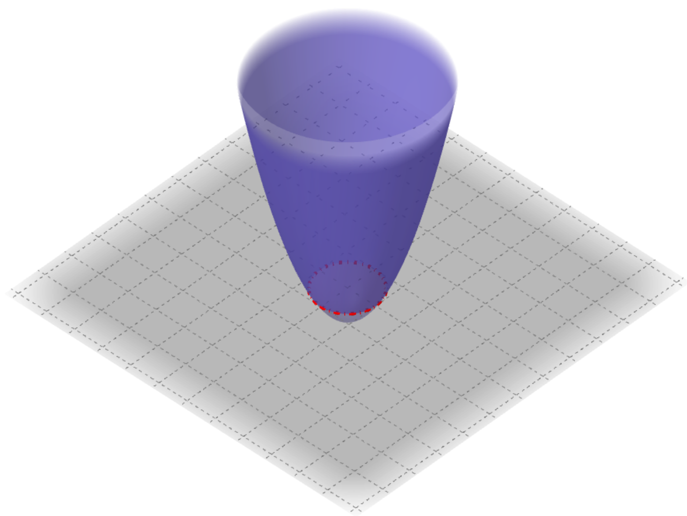
3.1 Αλγεβρικά σύνολα και η σχέση τους με τα ιδεώδη

Εάν f είναι μία ομαλή συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, γνωρίζουμε από τη γεωμετρία ότι το σύνολο μηδενισμού της είναι μία πολλαπλότητα χωρίς σύνορο, διάστασης n. Η εξίσωση $f(X) = 0$, $X = (x_1, \cdots, x_n)$, λέμε ότι περιγράφει μία πολλαπλότητα σε πεπελεγμένη μορφή.

Στην αλγεβρική γεωμετρία, μελετάμε τέτοιου είδους πολλαπλότητες όχι μέσω του απειροστικού λογισμού ή της γεωμετρίας, αλλά μέσω της άλγεβρας, μελετώντας τα ιδεώδη των συναρτήσεων που τις παράγουν. Εμείς εδώ θα θεωρούμε ότι η f είναι ένα πολυώνυμο, είναι όμως σύνηθες σε κάποιες παρουσιάσεις η f να είναι αναλυτική συνάρτηση.



Η $z = x^2 - y^3$ *και η τομή της με το επίπεδο* $z = 0$



Η $z = x^2 + y^2 - 1$ *και η τομή της με το επίπεδο* $z = 0$

Θα γίνουμε περισσότερο σαφείς όσον αφορά πώς υπεισέρχεται η άλγεβρα στη μελέτη αυτής της υποκατηγορίας πολλαπλοτήτων σε πεπλεγμένη μορφή στη συνέχεια. Πρώτα χρειαζόμαστε μερικούς ορισμούς.

Ορισμός 3.1 (Αφφινικές πολλαπλότητες). *Έστω $\mathbb{K}$ ένα σώμα. Ορίζουμε την αφφινική πολλαπλότητα:*

$$\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}} = \{(x_1, \cdots, x_n) \mid x_k \in \mathbb{K}\}$$

Αυτός είναι στην ουσία ο χώρος των σημείων μας.

Ορισμός 3.2 (Αλγεβρικά σύνολα). *Δεδομένης μίας (αυθαίρετα μεγάλης) οικογένειας πολυωνύμων $\{f_k\}_{k\in I} \subseteq \mathbb{K}[x_1, \cdots, x_n]$, ορίζουμε το αλγεβρικό σύνολο της οικογένειας ως εξής:*

$$\mathcal{V}(\{f_k\}_{k\in I}) = \bigcap_{k\in I} \{X \in \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}} \mid f_k(X) = 0\}$$

Παρατήρηση 3.1. *Έστω $\{f_k\}_{k\in I} \subseteq \mathbb{K}[x_1, \cdots, x_n]$ μία οικογένεια πολυωνύμων και $\mathfrak{i} = \langle \{f_k\}_{k\in I} \rangle$. Τότε:*

$$\mathcal{V}(\mathfrak{i}) = \mathcal{V}(\{f_k\}_{k\in I})$$

Παρατήρηση 3.2. *Έστω $A, B \subseteq \mathbb{K}[x_1, \cdots, x_n]$ δύο σύνολα με $A \subseteq B$. Τότε $\mathcal{V}(A) \supseteq \mathcal{V}(B)$.*

Αντιλαμβάνεστε ότι το γεωμετρικό αντικείμενο στην περίπτωση των αλγεβρικών συνόλων είναι το ίδιο το αλγεβρικό σύνολο $\mathcal{V}(\mathfrak{i})$, ενώ το γεωμετρικό είναι το ιδεώδες $\mathfrak{i}$. Το γενικό μοτίβο λοιπόν είναι να μελετήσουμε τα $\mathcal{V}(\mathfrak{i})$ μέσω των ιδεωδών $\mathfrak{i}$.

Πρόταση 3.1. *Έστω $\mathfrak{i}, \mathfrak{j}$ ιδεώδη του $\mathbb{K}[x_1, \cdots, x_n]$ και $\{\mathfrak{j}_k\}_{k\in I}$ μία οικογένεια ιδεωδών του $\mathbb{K}[x_1, \cdots, x_n]$. Τα ακόλουθα αληθεύουν:*

1. $\mathcal{V}(\mathfrak{i}) \cup \mathcal{V}(\mathfrak{j}) = \mathcal{V}(\mathfrak{i} \cap \mathfrak{j})$,
2. $\bigcap_{k\in I} \mathcal{V}(\mathfrak{i}_k) = \mathcal{V}\left(\sum_{k\in I} \mathfrak{i}_k\right)$,
3. *Ισχύει* $\mathcal{V}(\mathfrak{i}) = \mathcal{V}(\sqrt{\mathfrak{i}})$.

Απόδειξη. Για το 1. ο εγκλεισμός $\mathcal{V}(\mathfrak{i}) \cup \mathcal{V}(\mathfrak{j}) \subseteq \mathcal{V}(\mathfrak{i} \cap \mathfrak{j})$ είναι άμεσος, αφού $\mathfrak{i}, \mathfrak{j} \supseteq \mathfrak{i} \cap \mathfrak{j} \Rightarrow \mathcal{V}(\mathfrak{i}), \mathcal{V}(\mathfrak{j}) \subseteq \mathcal{V}(\mathfrak{i} \cap \mathfrak{j})$. Για τον άλλον εγκλεισμό, θεωρούμε $P \in \mathcal{V}(\mathfrak{i} \cap \mathfrak{j})$. Από τον ορισμό, για κάθε $f \in \mathfrak{i} \cap \mathfrak{j}$ θα έχουμε $f(P) = 0$. Εφόσον $f \in \mathfrak{i} \cap \mathfrak{j}$, γράφουμε:

$$f = f_{\mathfrak{i}} \cdot f_{\mathfrak{j}}, \text{ όπου } f_{\mathfrak{i}} \in \mathfrak{i} \text{ και } f_{\mathfrak{j}} \in \mathfrak{j}$$

και παίρνουμε περιπτώσεις:

- Εάν $f_{\mathfrak{i}}(P) \neq 0$ για κάποιο $f_{\mathfrak{i}}$, τότε σταθεροποιώντας το έπεται ότι $f_{\mathfrak{j}}(P) = 0$ για κάθε $f_{\mathfrak{j}} \in \mathfrak{j}$. Δηλαδή $P \in \mathcal{V}(\mathfrak{j})$.
- Εάν $f_{\mathfrak{j}}(P) \neq 0$ για κάποιο $f_{\mathfrak{j}}$, τότε αναλόγως $P \in \mathcal{V}(\mathfrak{i})$.
- Εάν τίποτε από τα παραπάνω δεν ισχύει, τότε $P \in \mathcal{V}(\mathfrak{i})$ και $P \in \mathcal{V}(\mathfrak{j})$.

Σε κάθε περίπτωση, $P \in \mathcal{V}(\mathfrak{i}) \cup \mathcal{V}(\mathfrak{j})$.

Για το 2., έχουμε $\mathfrak{i}_\lambda \subseteq \sum_{k\in I} \mathfrak{i}_k$, οπότε:

$$\mathcal{V}(\mathfrak{i}_\lambda) \supseteq \mathcal{V}\left(\sum_{k\in I} \mathfrak{i}_k\right) \text{ και } \bigcap_{\lambda\in I} \mathcal{V}(\mathfrak{i}_\lambda) \supseteq \mathcal{V}\left(\sum_{k\in I} \mathfrak{i}_k\right)$$

Από την άλλη, γράφουμε:

$$\mathfrak{i}_\lambda = \langle f_{\lambda,1}, \cdots, f_{\lambda,t_\lambda} \rangle$$

και αν $P \in \bigcap_{\lambda\in I} \mathfrak{i}_\lambda$, τότε $f_{\lambda,s} = 0$ για όλα τα $f_{\lambda,s}$. Όμως τα πολυώνυμα αυτά παράγουν το $\mathcal{V}\left(\sum_{\lambda\in I} \mathfrak{i}_\lambda\right)$ και κατά συνέπεια:

$$P \in \mathcal{V}\left(\sum_{\lambda\in I} \mathfrak{i}_\lambda\right)$$

Για το 3., από τη σχέση $\mathfrak{i} \subseteq \sqrt{\mathfrak{i}}$ έχουμε $\mathcal{V}(\mathfrak{i}) \supseteq \mathcal{V}(\sqrt{\mathfrak{i}})$. Επιπλέον, εάν $P \in \mathcal{V}(\mathfrak{i})$ και εάν $f \in \sqrt{\mathfrak{i}}$, τότε για κάποιο n έχουμε $f^n \in \mathfrak{i}$, δηλαδή $f^n(P) = 0$. Αυτό δείχνει ότι $f(P) = 0$ κι άρα $P \in \mathcal{V}(\sqrt{\mathfrak{i}})$. □

Λήμμα 3.1. *Έστω R ακέραια περιοχή, πεπερασμένα παραγόμενη επί ενός σώματος $\mathbb{K}$. Εάν η R είναι σώμα, τότε κάθε στοιχείο της R είναι αλγεβρικό υπεράνω του $\mathbb{K}$.*

Απόδειξη. Εφόσον η R είναι πεπερασμένα παραγόμενη επί του $\mathbb{K}$, δεν βλάπτει να γράφουμε $R = \mathbb{K}[z_1, \cdots, z_m]$. Εάν $m = 1$, τότε, εφόσον το $R = \mathbb{K}[z_1]$ είναι σώμα:

$$z_1^{-1} = c_n z_1^n + \cdots + c_0$$

δηλαδή $c_n z^{n+1} + \cdots + c_0 z_1 - 1 = 0$ και το z_1 είναι αλγεβρικό.

Έστω $m \geqslant 2$. Τότε το $\mathbb{K}(z_1)$ είναι υπόσωμα του R και μπορούμε να γράφουμε $R = \mathbb{K}(z_1)[z_2, \cdots, z_m]$ (με $\mathbb{K}(z)$ συμβολίζουμε τα ρητά πολυώνυμα του z). Επαγωγικά υποθέτουμε ότι τα $z_2, \cdots, z_m$ είναι αλγεβρικά υπεράνω $\mathbb{K}(z_1)$ και θα δείξουμε ότι το z_1 είναι αλγεβρικό υπεράνω του $\mathbb{K}$.

Εφόσον κάθε z_k, $k \geqslant 2$, είναι αλγεβρικό στο $\mathbb{K}(z_1)$, έχουμε:

$$C^k(z_1) z_k^{n_k} + \sum_{\lambda=0}^{n_{k-1}} c_\lambda^k(z_1) z_k^\lambda = 0 \tag{3.1}$$

για κάποια $C^k, c_\lambda^k \in \mathbb{K}[z_1]$. Προσέξτε ότι μπορούμε να υποθέσουμε τους συντελεστές στο $\mathbb{K}[z_1]$ αντί στο $\mathbb{K}(z_1)$, πολλαπλασιάζοντας με κατάλληλο στοιχείο του $\mathbb{K}(z_1)$. Ορίζουμε τώρα:

$$C(z_1) = \prod_{k=2}^{m} C^k(z_1) \text{ και } S = \mathbb{K}\left[z_1, \frac{1}{C(z_1)}\right] \subseteq R$$

Με αυτόν τον ορισμό για το S έχουμε $R = S[z_2, \cdots, z_m]$. Πολλαπλασιάζοντας την 3.1 με C/C^k κι έπειτα με $1/C$, έχουμε:

$$z_k^{n_k} + \sum_{\lambda=1}^{n_{k-1}} b_\lambda^k z_k^\lambda = 0$$

οπότε κάθε στοιχείο του R είναι ακέραιο υπεράνω του S.

Θα δείξουμε ότι το S είναι σώμα. Πράγματι, αν $s \in S$, τότε $s^{-1} \in R$ και είναι ακέραιο υπεράνω του S. Οπότε:

$$(s^{-1})^{n_k} + \sum_{\lambda=1}^{n_{k-1}} \widetilde{b}_\lambda^k (s^{-1})^\lambda = 0 \Rightarrow 1 + \sum_{\lambda=1}^{n_{k-1}} \widetilde{b}_\lambda^k s^{n_k - \lambda} = 0 \Rightarrow s^{-1} = -\sum_{\lambda=1}^{n_{k-1}} \widetilde{b}_\lambda^k s^{n_k - \lambda - 1}$$

κι άρα το s αντιστρέφεται στο S.

Τέλος, θα δείξουμε ότι το z_1 είναι αλγεβρικό υπεράνω του $\mathbb{K}$. Εφόσον το $S = \mathbb{K}[z_1, 1/C(z_1)]$ είναι σώμα, έχουμε:

$$z_1^{-1} = \sum_{k=1}^{n} F_k(z_1) z_1^k \Rightarrow 1 - \sum_{k=1}^{n} F_k(z_1) z_1^{k+1} = 0, \ F_k \in \mathbb{K}\left[1/C(z_1)\right]$$

Κατά συνέπεια, πολλαπλασιάζοντας με κατάλληλο πολυώνυμο του $C(z_1)$, έστω $P_C(z_1)$:

$$P_C(z_1) - \sum_{k=1}^{n} F_k(z_1) P_C(z_1) z_1^{k+1} = 0$$

με $P_C(z_1) - \sum_{k=1}^{n} F_k(z_1) P_C(z_1) z_1^{k+1} \in \mathbb{K}[z_1]$ (απαλείψαμε τους παρονομαστές με $C(z_1)$). Αυτό δείχνει ότι το z_1 είναι αλγεβρικό υπεράνω του $\mathbb{K}$. $\square$

Θεώρημα 3.1 (Ασθενές Nullstellensatz[1]). *Έστω $\mathbb{K}$ ένα αλγεβρικά κλειστό σώμα. Εάν $\mathfrak{i} \trianglelefteq \mathbb{K}[x_1, \cdots, x_n]$ είναι ένα ιδεώδες με $1 \notin \mathfrak{i}$ (δηλαδή $\mathfrak{i} \neq \mathbb{K}[x_1, \cdots, x_n]$), τότε $\mathcal{V}(\mathfrak{i}) \neq \emptyset$. Επιπλέον, τα μεγιστικά ιδεώδη του $\mathbb{K}[x_1, \cdots, x_n]$ έχουν τη μορφή:*

$$\langle x_1 - a_1, \cdots, x_n - a_n \rangle$$

Απόδειξη. Εφόσον το $\mathfrak{i}$ είναι ιδεώδες που δεν ταυτίζεται με το $\mathbb{K}[x_1, \cdots, x_n]$ και ο δακτύλιος $\mathbb{K}[x_1, \cdots, x_n]$ είναι της Noether, υπάρχει μεγιστικό ιδεώδες $\mathfrak{i} \subseteq \mathfrak{m}$, κι οπότε τότε $\mathcal{V}(\mathfrak{i}) \supseteq \mathcal{V}(\mathfrak{m})$. Αυτό που θα χρειαστεί να δείξουμε είναι ότι $\mathcal{V}(\mathfrak{m}) \neq \emptyset$.

Αφού το $\mathfrak{m}$ είναι μεγιστικό, το $\mathbb{K}[x_1, \cdots, x_n]/\mathfrak{m}$ είναι σώμα που περιέχει το $\mathbb{K}$. Το προηγούμενο λήμμα θα μας δώσει ότι:

$$\mathbb{K}[x_1, \cdots, x_n] \big/ \mathfrak{m} \cong \mathbb{K}$$

(αφού το $\mathbb{K}$ είναι αλγεβρικά κλειστό) κι οπότε $x_k + \mathfrak{m} \cong a_k \in \mathbb{K}$, δηλαδή $x_k - a_k \in \mathfrak{m}$. Κατά συνέπεια:

$$\langle x_1 - a_1, \cdots, x_n - a_n \rangle \subseteq \mathfrak{m}$$

Όμως:

$$\mathbb{K}[x_1, \cdots, x_n] \big/ \langle x_1 - a_1, \cdots, x_n - a_n \rangle \cong \mathbb{K}$$

κι άρα το $\langle x_1 - a_1, \cdots, x_n - a_n \rangle$ είναι μεγιστικό. Κατά συνέπεια:

$$\mathcal{V}(\mathfrak{m}) = \{(a_1, \cdots, a_n)\}$$

$\square$

Ορισμός 3.3 (Το ιδεώδες ενός αλγεβρικού συνόλου). *Έστω $V \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$. Ορίζουμε το ιδεώδες του V ως εξής:*

$$\mathcal{I}(V) = \{f \in \mathbb{K}[x_1, \cdots, x_n] \mid f(P) = 0 \text{ για κάθε } P \in V\}$$

Παρατηρήστε ότι $\mathfrak{i} \subseteq \mathcal{I}(\mathcal{V}(\mathfrak{i}))$.

[1] Στα Γερμανικά σημαίνει "θεώρημα τόπου μηδενισμού".

Θεώρημα 3.2 (Το Nullstellensatz του Hilbert)**.** *Έστω $\mathbb{K}$ ένα αλγεβρικά κλειστό σώμα. Εάν $\mathfrak{i} \trianglelefteq \mathbb{K}[x_1, \cdots, x_n]$ είναι ένα ιδεώδες, τότε:*

$$\mathcal{I}\big(\mathcal{V}(\mathfrak{i})\big) = \sqrt{\mathfrak{i}}$$

Απόδειξη. Ο εγκλεισμός $\sqrt{\mathfrak{i}} \subseteq \mathcal{I}\big(\mathcal{V}(\mathfrak{i})\big)$ είναι άμεσος, αφού:

$$\sqrt{\mathfrak{i}} \subseteq \mathcal{I}\big(\mathcal{V}(\sqrt{\mathfrak{i}})\big) = \mathcal{I}\big(\mathcal{V}(\mathfrak{i})\big)$$

Για τον άλλον εγκλεισμό, θα δείξουμε ότι αν $f \in \mathcal{I}\big(\mathcal{V}(\mathfrak{i})\big)$, τότε υπάρχει $m > 0$ ώστε $f^m \in \mathfrak{i}$. Για αυτόν τον σκοπό, εισάγουμε μία νέα μεταβλητή, την x_0, η οποία θα παίξει τον ρόλο της τυπικής αντιστρόφου του f. Θεωρούμε λοιπόν το ιδεώδες $\mathfrak{j} \trianglelefteq \mathbb{K}[x_0, \cdots, x_n]$ με:

$$\mathfrak{j} = \langle 1 - x_0 f, \mathfrak{i} \rangle$$

Εάν $\mathcal{V}(\mathfrak{j}) \neq \emptyset$, τότε υπάρχει $(a_0, \cdots, a_n) \in \mathcal{V}(\mathfrak{i})$, με $(a_1, \cdots, a_n) \in \mathcal{V}(\mathfrak{i})$. Τότε $f(a_1, \cdots, a_n) = 0$ και αφού $1 - x_0 f \in j$, έχουμε $1 - a_0 f(a_1, \cdots, a_n) = 0$. Αυτό είναι άτοπο, αφού $1 \neq 0$.

Εφόσον $\mathcal{V}(\mathfrak{j}) \neq \emptyset$, από το ασθενές Nullstellensatz, $1 \in \mathfrak{j}$. Δηλαδή:

$$1 = g_0(x_0, \cdots, x_n)\big(1 - x_0 f(x_1, \cdots, x_n)\big) + \sum_{k=1}^{s} g_k(x_0, \cdots, x_n) f_k(x_1, \cdots, x_n)$$

όπου $f_k \in \mathfrak{i}$. Θέτοντας $x_0 = 1/f$ έπεται:

$$1 = \sum_{k=1}^{s} g_k(1/f, \cdots, x_n) f_k(x_1, \cdots, x_n)$$

και πολλαπλασιάζοντας με κατάλληλη δύναμη του f, έστω f^m, απαλείφουμε τους παρονομαστές:

$$f^m = \sum_{k=1}^{s} g_k(1/f, \cdots, x_n) f^m f_k(x_1, \cdots, x_n), \text{ όπου } g_k f^m \in \mathbb{K}[x_1, \cdots, x_n]$$

Άρα, $f^m \in \mathfrak{i}$. □

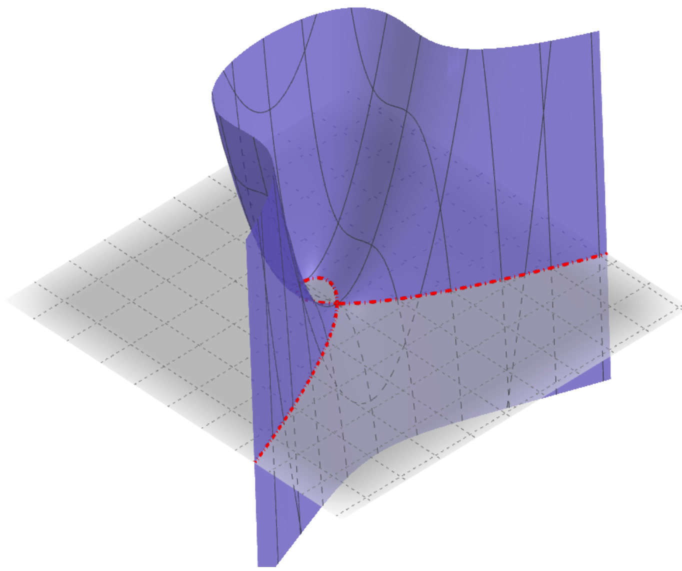
3.2 Η τοπολογία Zariski

Στον αφφινικό χώρο $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ (για παράδειγμα στον $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$), τα σύνολα μηδενισμού $\mathcal{V}(f)$ είναι εν γένει "μικρά" (εκτός του $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$), αφού έχουν τοπολογική διάσταση $n - 1 < n$. Περιμένει λοιπόν κανείς ότι σε μία "λογική" τοπολογία, που σέβεται τη διάσταση, αυτά θα είναι στην καλύτερη περίπτωση κλειστά σύνολα κι όχι ανοικτά. Και πράγματι, στον $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ τα $\mathcal{V}(f)$ είναι εν γένει καμπύλες, όπως αυτή που παρίσταται παρακάτω.

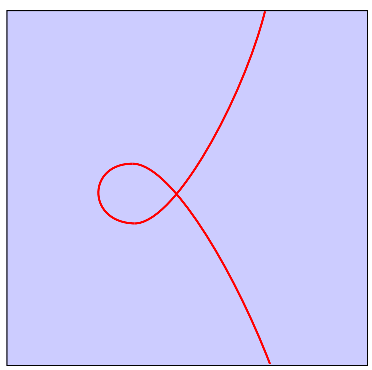
Η τοπολογία Zariski θα μπορούσαμε να πούμε ότι είναι αυτή η τοπολογία με την οποία τα $\mathcal{V}(f)$ γίνονται κλειστά.

Ορισμός 3.4 (Τοπολογία Zariski). *Στο σύνολο $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ ορίζουμε την τοπολογία Zariski:*

$$\mathfrak{T} = \left\{ \mathcal{V}(\mathfrak{i})^c \mid \mathfrak{i} \trianglelefteq \mathbb{K}[x_1, \cdots, x_n] \right\}$$



Η $z = y^2 - x^3 - x^2$ και η τομή της με το επίπεδο $z = 0$.



Η κόκκινη $y^2 - x^3 - x^2 = 0$ και το μπλε συμπλήρωμα.

Παρατήρηση 3.3. *Στο $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ η τοπολογία Zariski $\mathfrak{T}$ είναι πράγματι τοπολογία. Δηλαδή:*

1. $\emptyset, \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}} \in \mathfrak{T}$,
2. *Αν $\{A_k\}_{k=1}^m \subseteq \mathfrak{T}$ είναι μία πεπερασμένη οικογένεια, τότε $\bigcap_{k=1}^m A_k \in \mathfrak{T}$*
3. *Εάν I είναι ένα αυθαίρετο σύνολο δεικτών και $\{A_k\}_{k\in I} \subseteq \mathfrak{T}$, τότε $\bigcup_{k\in I} A_k \in \mathfrak{T}$*

Απόδειξη. Για το 1., έχουμε $\mathcal{V}(0) = \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ (άρα $\emptyset \in \mathfrak{T}$) και $\mathcal{V}(\mathbb{K}[x_1, \cdots, x_n]) = \emptyset$ (άρα $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}} \in \mathfrak{T}$).

Για το 2., έχουμε:

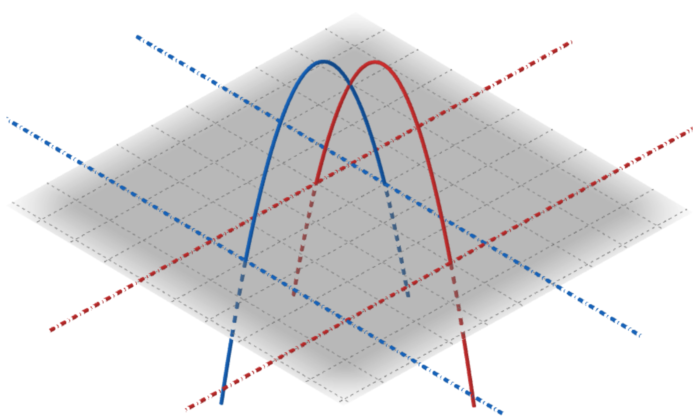
$$A_1 \cap A_2 = \mathcal{V}(\mathfrak{i}_1)^c \cap \mathcal{V}(i_2)^c = \big(\mathcal{V}(\mathfrak{i}_1) \cup \mathcal{V}(\mathfrak{i}_2)\big)^c = \mathcal{V}(\mathfrak{i}_1 \cap \mathfrak{i}_2)^c$$

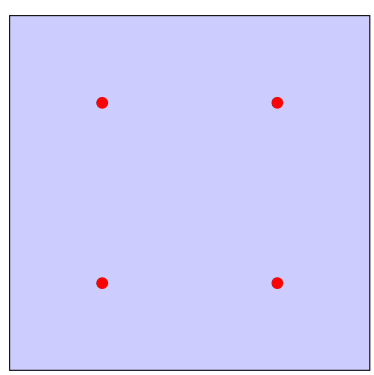
Για το 3.:

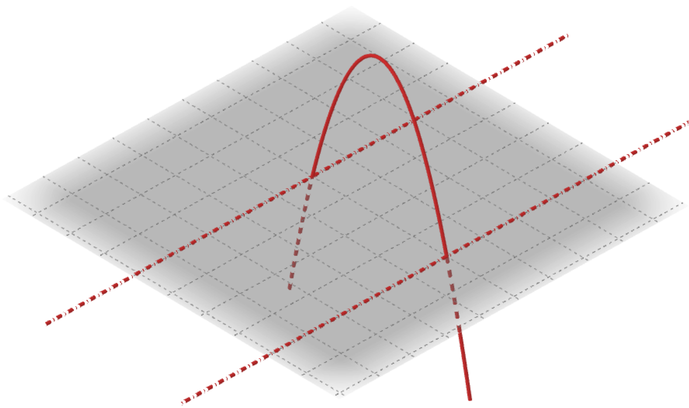
$$\bigcup_{k\in I} A_k = \bigcup_{k\in I} \mathcal{V}(\mathfrak{i}_k)^c = \left(\bigcap_{k\in I} \mathcal{V}(\mathfrak{i}_k)\right)^c = \mathcal{V}\left(\sum_{k\in I} \mathfrak{i}_k\right)^c$$

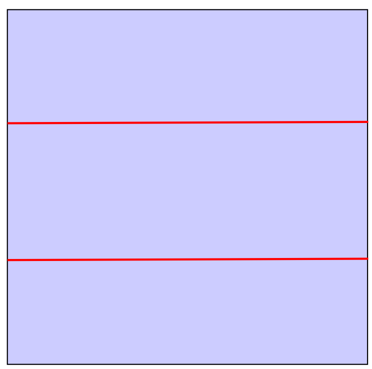
□

Παρατήρηση 3.4. *Προσέξτε ότι οι τοπολογίες Zariski δεν είναι τοπολογίες γινόμενο. Για παράδειγμα, η τοπολογία του $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}} = \mathbb{A}^1_{\mathbb{R}} \times \mathbb{A}^1_{\mathbb{R}}$ δεν είναι η τοπολογία γινόμενο των επιμέρους τοπολογιών Zariski των $\mathbb{A}^1_{\mathbb{R}}$. Επίσης, αφού τα ανοικτά σύνολα είναι "πολύ μεγάλα", καμία τοπολογία Zariski δεν είναι Hausdorff.*









Η τυπική μορφή κάποιων συνόλων στο γινόμενο.

Ορισμός 3.5 (Ανάγωγα σύνολα). *Ένα αλγεβρικό σύνολο $V \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ θα λέγεται ανάγωγο εάν δεν υπάρχουν αλγεβρικά σύνολα $V_1, V_2 \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$, με $V_1, V_2 \neq V$, ούτως ώστε $V = V_1 \cup V_2$.*

Πρόταση 3.2 (Σχέση μεταξύ αναγώγων συνόλων και πρώτων ιδεωδών). *Ένα αλγεβρικό σύνολο $V \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ είναι ανάγωγο εάν και μόνο αν το $\mathcal{I}(V)$ είναι πρώτο ιδεώδες, δηλαδή οποτεδήποτε $ab \in \mathcal{I}(V)$, τότε $a \in \mathcal{I}(V)$ ή $b \in \mathcal{I}(V)$.*

Απόδειξη. ($\Rightarrow$) Έστω ότι το V είναι ανάγωγο και ότι για κάποια πολυώνυμα έχουμε $f_1 f_2 \in \mathcal{I}(V)$. Τότε ορίζουμε $\mathfrak{j}_k = \langle f_k, \mathcal{I}(V) \rangle$ και έχουμε τα εξής:

$$\mathcal{V}(\mathfrak{j}_k) = \{P \in \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}} \mid f_k(P) = 0 \text{ και } \forall f \in \mathcal{I}(V),\ f(P) = 0\} \subseteq V$$

οπότε $\mathcal{V}(\mathfrak{j}_1) \cup \mathcal{V}(\mathfrak{j}_2) \subseteq V$. Από την άλλη, όλα τα σημεία του V μηδενίζουν το πολυώνυμο $f_1 f_2$, άρα κάποιο από τα f_k (και ταυτόχρονα μηδενίζουν κάθε $f \in \mathcal{I}(V)$). Επομένως:

$$\mathcal{V}(\mathfrak{j}_1) \cup \mathcal{V}(\mathfrak{j}_2) \subseteq V \subseteq \mathcal{V}(\langle f_1, \mathcal{I}(V)\rangle) \cup \mathcal{V}(\langle f_2, \mathcal{I}(V)\rangle) = \mathcal{V}(\mathfrak{j}_1) \cup \mathcal{V}(\mathfrak{j}_2)$$

δηλαδή $V = \mathcal{V}(\mathfrak{j}_1) \cup \mathcal{V}(\mathfrak{j}_2)$. Εφόσον είναι ανάγωγο, χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε $\mathcal{V}(\mathfrak{j}_1) = \emptyset$, $\mathcal{V}(\mathfrak{j}_2) = V$. Κατά συνέπεια, το f_2 μηδενίζεται σε κάθε σημείο του V, οπότε $f_2 \in \mathcal{I}(V)$. Αυτά δείχνουν ότι το $\mathcal{I}(V)$ είναι πρώτο.

($\Leftarrow$) Εάν γράψουμε $V = \mathcal{V}(\mathfrak{i}) = \mathcal{V}(\mathfrak{j}_1) \cup \mathcal{V}(\mathfrak{j}_2)$, τότε $\mathcal{V}(\mathfrak{j}_k) \subseteq \mathcal{V}(\mathfrak{i})$ κι άρα:

$$\sqrt{\mathfrak{j}_k} = \mathcal{I}\big(\mathcal{V}(\mathfrak{j}_k)\big) \supseteq \mathcal{I}\big(\mathcal{V}(\mathfrak{i})\big) = \sqrt{\mathfrak{i}}$$

Θεωρούμε τώρα πολυώνυμα f_1, f_2 με $f_k \in \sqrt{\mathfrak{j}_k}$. Εφόσον τα f_k μηδενίζονται στο $\mathcal{V}(\mathfrak{j}_k)$, το $f_1 f_2$ μηδενίζεται στο $\mathcal{V}(\mathfrak{i})$, δηλαδή $f_1 f_2 \in \sqrt{i}$. Σταθεροποιώντας το f_1, διακρύνουμε περιπτώσεις.

- Εφόσον για κάθε f_2 έχουμε $f_1 f_2 \in \sqrt{i}$ και το $\sqrt{\mathfrak{i}}$ είναι πρώτο, υπάρχει περίπτωση είτε $f_1 \in \sqrt{\mathfrak{i}}$ είτε για κάθε $f_2 \in \sqrt{\mathfrak{j}_2}$ να έχουμε $f_2 \in \sqrt{\mathfrak{i}}$. Το δεύτερο, σε συνδυασμό με τα παραπάνω, θα δώσει $\sqrt{\mathfrak{j}_2} = \sqrt{\mathfrak{i}}$, δηλαδή:

$$\mathcal{V}(\mathfrak{i}) = \mathcal{V}(\sqrt{\mathfrak{i}}) = \mathcal{V}(\sqrt{\mathfrak{j}_2}) = \mathcal{V}(\mathfrak{j}_2) \text{ και } \mathcal{V}(\mathfrak{j}_1) = \emptyset$$

- Εάν υπάρχει $f_1 \in \sqrt{\mathfrak{i}}$, τότε πάλι έχουμε δύο περιπτώσεις: Είτε όλα τα $f_1 \in \sqrt{\mathfrak{j}_1}$ ανήκουν στο $\sqrt{\mathfrak{i}}$, είτε υπάρχει $\widetilde{f_1} \in \sqrt{\mathfrak{j}_1} \backslash \sqrt{\mathfrak{i}}$. Η πρώτη περίπτωση δίνει:

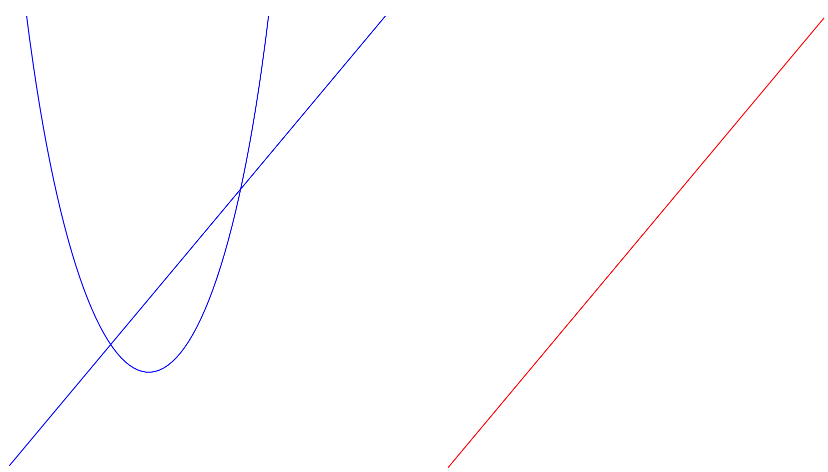
$$\mathcal{V}(\mathfrak{i}) = \mathcal{V}(\sqrt{\mathfrak{i}}) = \mathcal{V}(\sqrt{\mathfrak{j}_1}) = \mathcal{V}(\mathfrak{j}_1) \text{ και } \mathcal{V}(\mathfrak{j}_2) = \emptyset$$

  Για τη δεύτερη, εάν ακολουθήσουμε τη διαδικασία του πρώτου σημείου, θα βρούμε:

$$\mathcal{V}(\mathfrak{i}) = \mathcal{V}(\sqrt{\mathfrak{i}}) = \mathcal{V}(\sqrt{\mathfrak{j}_2}) = \mathcal{V}(\mathfrak{j}_2) \text{ και } \mathcal{V}(\mathfrak{j}_1) = \emptyset$$

Άρα, το $V = \mathcal{V}(\mathfrak{i})$ είναι ανάγωγο. □

Παρατήρηση 3.5. *Εάν f είναι ένα πολυώνυμο, το $V(f)$ είναι ανάγωγο εάν και μόνο αν το f είναι ανάγωγο.*



Η περίπτωση ενός μη-ανάγωγου συνόλου $V = \mathcal{V}\big((y-x)(y-x^2-1)\big)$ (αριστερά) και η περίπτωση ενός ανάγωγου συνόλου $V = \mathcal{V}(y-x)$ (δεξιά).

3.3 Ο δακτύλιος συντεταγμένων και μέγιστα ιδεώδη

Ορισμός 3.6 (Δακτύλιος συντεταγμένων). *Έστω $V \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ ένα αλγεβρικό σύνολο. Ο δακτύλιος συντεταγμένων του V είναι το πηλίκο:*

$$\mathbb{K}[V] = {}^{\mathbb{K}[x_1, \cdots, x_n]}\Big/_{\mathcal{I}(V)}$$

Κεφάλαιο 4

Βάσεις Gröbner και απαλοιφή πολυωνυμικών συστημάτων

Κεφάλαιο 5

Προβολικές πολλαπλότητες

Κεφάλαιο 6

Σχέδια (schemes) και δράγματα (sheaves)

Κεφάλαιο 7

[...]

Βιβλιογραφία

[DS07] W. Decker, F. O. Schreyer, ***Gröbner Bases and Algebraic Curves***. Universität des Saarlandes, 2007.

[Ha77] R. Hartshorne, ***Algebraic Geometry***. Springer, 1977.

[Va22] R. Vakil, ***The rising sea - Foundations of algebraic geometry***. Princeton, 2022.

[AA21] I. A. Αντωνιάδης, A. I. Κοντογεώργης, ***Αλγεβρικές Καμπύλες***. Κάλλιπος, 2021.

[ΘΤ20] A. Θωμά, X. Τατάκης, ***Σημειώσεις στις βάσεις Gröbner***. Παν. Κρήτης, 2020.

[Φρ23] A. Φράγκος, ***Τοπολογία - Σημειώσεις παραδόσεων***. Σημειώσεις ΠΠΣ, ΕΚΠΑ, 2023.