1ο Φυλλάδιο Ασκήσεων - Αρμονική Ανάλυση

Αναστάσιος Φράγκος: ΑΜ 1112201900239 Κυριακή, 03 Απριλίου 2021

Συμβολισμοί - Παρατηρήσεις

1. $\lfloor x \rfloor := \min\{n \in \mathbb{Z} \mid n \leqslant x\}$

2. Εάν A είναι ένα σύνολο, ορίζουμε $\#A := \begin{cases} |A|, & \text{εάν αυτό είναι πεπερασμένο} \\ \infty, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$

Άσκηση 1 – (01 στο φυλλάδιο).

i. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια Lebesgue ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Αποδείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f(n^2 x)$ συγκλίνει $\lambda-$σχεδόν παντού.

Υπόδειξη: Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε την:

$$\int |f(tx)| \, d\lambda(x) = \frac{1}{t} \int |f(x)| \, d\lambda(x), \text{ για } t > 0$$

ii. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ ένα Lebesgue μετρήσιμο σύνολο με $\lambda(A) < \infty$. Αποδείξτε ότι σχεδόν για κάθε x το σύνολο $D_n = \{n \in \mathbb{N} \mid n^2 x \in A\}$ είναι πεπερασμένο.

■

$\boxed{\text{i.}}$ *Λύση:* Γενικά αληθεύει ένα γενικότερο (της υπόδειξης) αποτέλεσμα, το οποίο το είδαμε και στη Θεωρία Μέτρου. Το αποδεικνύουμε στην επόμενη πρόταση:

Πρόταση 1.1: *Για κάθε Lebesgue ολοκληρώσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ισχύει η σχέση:*

$$\int f(tx) \, d\lambda(x) = \frac{1}{t} \int f(x) \, d\lambda(x), \text{ για } t > 0$$

Απόδειξη: Η σχέση αποδεικνύεται με τον τυπικό πλέον τρόπο: θα δειχθεί πρώτα για δείκτριες συναρτήσεις, έπειτα για απλές μετρήσιμες συναρτήσεις, με την μονότονη σύγκλιση για μη αρνητικές και τέλος θα περαστεί σε μετρήσιμες συναρτήσεις γενικά.

Για τις δείκτριες: Έστω A ένα μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και $f = \chi_A$ η αντίστοιχη μετρήσιμη συνάρτηση. Επειδή $tx \in A \Leftrightarrow x \in (1/t)A$, έπεται ότι:

$$\int \chi_A(tx) \, d\lambda(x) = \int \chi_{(1/t)A} \, d\lambda(x) = \frac{1}{t}\lambda(A)$$

Επομένως:

$$\int \chi_A(tx) \, d\lambda(x) = \frac{1}{t}\lambda(A) = \frac{1}{t} \int \chi_A(x) \, d\lambda(x)$$

Για τις απλές μετρήσιμες: Έστω $f = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}$ μια απλή μετρήσιμη συνάρτηση, με τα A_i να είναι ανά δύο ξένα μετρήσιμα σύνολα και $a_i > 0$. Χρησιμοποιώντας το προηγούμενο βήμα και την γραμμικότητα του ολοκληρώματος, έχουμε ότι:

$$\int \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}(tx) \, d\lambda(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \int \chi_{A_i}(tx) \, d\lambda(x) = \frac{1}{t} \sum_{i=1}^{n} a_i \int \chi_{A_i}(x) \, d\lambda(x) = \frac{1}{t} \int \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}(x) \, d\lambda(x)$$

Για τις μη αρνητικές μετρήσιμες: Έστω f μια μη αρνητική μετρήσιμη συνάρτηση. Η συνάρτηση $f(tx)$ είναι κι αυτή μετρήσιμη συνάρτηση (κι αυτό είναι υπόθεση ρουτίνας να ελεγχθεί μέσω του ορισμού της μετρησιμότητας). Θεωρούμε λοιπόν μια ακολουθία απλών μετρήσιμων συναρτήσεων $s_n \nearrow f$ και παρατηρούμε ότι $s_n(tx) \nearrow f(tx)$. Από το προηγούμενο βήμα προκύπτει:

$$\int s(tx) \, d\lambda(x) = \frac{1}{t} \int s(x) \, d\lambda(x)$$

και από το *Θεώρημα μονότονης σύγκλισης:*

$$\int s(tx)\ d\lambda(x) \to \int f(tx)\ d\lambda(x) \textbf{ και } \frac{1}{t}\int s(x)\ d\lambda(x) \to \frac{1}{t}\int f(tx)\ d\lambda(x)$$

Αυτό αποδεικνύει την συγκεκριμένη περίπτωση, από τη μοναδικότητα του ορίου.

Για τις μετρήσιμες: Έστω f μια μετρήσιμη συνάρτηση. Γράφουμε την f ισονύναμα στη μορφή $f = f^+ - f^-$ και εφαρμόζουμε το προηγούμενο βήμα. Το ζητούμενο λοιπόν αποδεινύεται με αυτόν τον τρόπο στην γενικότερη περίπτωση:

$$\int f(tx)\ d\lambda(x) = \int f^+(tx)\ d\lambda(x) - \int f^-(tx)\ d\lambda(x) = \frac{1}{t}\int f^+(x)\ d\lambda(x) - \frac{1}{t}\int f^-(x)\ d\lambda(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int f(tx)\ d\lambda(x) = \frac{1}{t}\int f(x)\ d\lambda(x)$$

$\triangle$

Για τη λύση λοιπόν της άσκησης, αρκεί να δειχθεί ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} |f(n^2x)|$ είναι ολοκληρώσιμη (οπότε θα έχουμε επιπλέον αποδείξει την απόλυτη σύγκλιση σχεδόν παντού). Προφανώς η σειρά είναι μετρήσιμη συνάρτηση, αφού είναι (αύξον) όριο μετρήσιμων συναρτήσεων. Δείχνοντας ότι το ολοκλήρωμα είναι πεπερασμένο, αποδεικνύουμε την ολοκληρωσιμότητα.

$$\begin{aligned}
\int \sum_{n=1}^{\infty} |f(n^2x)|\ d\lambda(x) &= \int \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N} |f(n^2x)|\ d\lambda(x) \\
&\overset{*}{=} \lim_{N\to\infty}\int \sum_{n=1}^{N} |f(n^2x)|\ d\lambda(x) \\
&= \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\int |f(n^2x)|\ d\lambda(x) \\
&\overset{**}{=} \underbrace{\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\right)}_{\zeta(2)=\pi^2/6} \cdot \underbrace{\int |f(x)|\ d\lambda(x)}_{(O)(|f|)\in\mathbb{R}} \\
&= \frac{\pi^2}{6}\mathscr{O}(|f|) < \infty
\end{aligned}$$

Στην ισότητα άστρο ($*$) χρησιμοποιείται το *Θεώρημα της μονότονης σύγκλισης* (ή το *λήμμα Beppo-Levi*, πιο άμεσα) και στην ισότητα διπλό άστρο ($**$) η **Πρόταση 1.1**.

$\square$

$\boxed{\text{ii.}}$ *Λύση:* Η απόδειξη του συγκεκριμένου είναι σχετικά άμεση συνέπεια του i. Έχει δειχθεί ότι για κάθε Lebesgue ολοκληρώσιμη συνάρτηση f, σχεδόν για κάθε x η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f(n^2x)$ συγκλίνει - ειδικότερα, επειδή $\lambda(A) < \infty$ η $f = \chi_A$ είναι ολοκληρώσιμη και:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\chi_A(k^2x) < \infty \Rightarrow \sum_{k\in D_n} < \infty, \text{ σχεδόν για κάθε } x$$

Έτσι λοιπόν, $\#D_n = \sum_{k\in D_n} < \infty$ σχεδόν για κάθε x.

$\square$

Άσκηση 2 – (02 στο φυλλάδιο). Η συνάρτηση $\Gamma : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ ορίζεται ως εξής:

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1}e^{-t}\ dt, \text{ όταν } x > 0$$

Αποδείξτε ότι για κάθε $x > 0$:

$$\Gamma(x) \overset{*}{=} \lim_{n\to\infty}\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\ dt \overset{*}{=} \lim_{n\to\infty}\frac{n^x n!}{x(x+1)\cdot\ldots\cdot(x+n)}$$

$\blacksquare$

Λήμμα 2.1: *Για κάθε $x > 0$ αληθεύει ο εγκλεισμός $O(e^{-t}) \subseteq O(1/t^{x+1})$, όπου φυσικά τα αντίστοιχα σύνολα ορίζονται:*

$$O(e^{-t}) := \{g : [0,\infty) \to \mathbb{R} \mid \exists c \in \mathbb{R}_*^+,\ cg \leqslant e^{-(\cdot)} \text{ τελικά}\}$$

και:

$$O(1/t^{x+1}) := \{g : [0,\infty) \to \mathbb{R} \mid \exists c \in \mathbb{R}_*^+,\ cg \leqslant 1/(\cdot)^{x+1} \text{ τελικά}\}$$

Απόδειξη: Πράγματι, το συγκεκριμένο είναι απόρροια του γνωστού αποτελέσματος:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{e^t}{t^{x+1}} = \infty \Rightarrow \lim_{t\to\infty} \left[\frac{1}{e^t} \Big/ \frac{1}{t^{x+1}} \right] = 0 < 1, \text{ για κάθε } x > 0$$

(το οποίο αποδεικνύεται με εφαρμογή του κανόνα l' Hopital $\lfloor x+1 \rfloor$ φορές). Μάλιστα, η σταθερά $c > 0$ μπορεί να επιλεγεί αυθαίρετα στην περίπτωσή μας.

$\triangle$

Λύση: Θα αποδείξουμε πρώτα την κόκκινη ισότητα κι έπειτα μέσω αυτής θα δείξουμε την μπλε.

Για την κόκκινη: Η σύγκλιση της σειράς των ολοκληρωμάτων καθώς και το όριό της θα εξασφαλιστεί μέσω του *Θεωρήματος της κυριαρχημένης σύγκλισης:*

> *Έστω $f_n : E \to \overline{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty]$ ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων. Υποθέτουμε ότι η σύγκλιση $f_n \to f$ αληθεύει $\lambda-$σχεδόν παντού κι επιπλέον ότι υπάρχει $g : E \to [0,\infty]$ ολοκληρώσιμη, τέτοια ώστε $\forall n \in \mathbb{N},\ |f_n| \leqslant g$ σχεδόν παντού. Τότε οι f_n, f είναι ολοκληρώσιμες και:*
>
> $$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n \, d\lambda = \int_E \lim_{n\to\infty} f_n \, d\lambda = \int_E f \, d\lambda$$

Φυσικά στην περίπτωσή μας, όπως άλλωστε θα φανεί από την απόδειξη, το *Θεώρημα της μονότονης σύγκλισης* αρκεί για την λύση της άσκησης. Δεν έχει σημασία στην συγκεκριμένη περίπτωση ποιό εκ των δύο θα χρησιμοποιηθεί, αφού ουσιαστικά το *Θεώρημα της μονότονης σύγκλισης* αποτελεί ειδική περίπτωση του *Θεωρήματος της κυριαρχημένης σύγκλισης*, εάν υποτεθεί επιπλέον ότι $f_n \nearrow f$ και η f είναι ολοκληρώσιμη.

Θεωρούμε την ακολουθία συναρτήσεων $\eta_n : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ η οποία ορίζεται ως εξής:

$$\eta_n(t) = \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \chi_{[0,n]}(t)$$

Η ακολουθία αυτή είναι αύξουσα ακολουθία συναρτήσεων (δηλαδή $\eta_m \leqslant \eta_n$ για κάθε $1 \leqslant m < n$) και έχει όριο τη συνάρτηση e^{-t}. Ειδικότερα:

$$\text{Για κάθε } n \in \mathbb{N} \text{ έχουμε ότι } \eta_n(t) \leqslant \big(\limsup_n \eta_n\big)(t) = e^{-t}, \text{ ομοιόμορφα για όλα τα } t \in \mathbb{R}$$

Επιπλέον, το όριο e^{-t} φράσσεται έπειτα ενός t_0 από την ποσότητα $1/t_0^{x+1}$, σύμφωνα με το **Λήμμα 1.1**. Ορίζουμε τώρα:

$$g(t) = e^{-t} t^{x+1} \chi_{[0,t_0)}(t) + \frac{1}{t^{x+1}} \chi_{[t_0,\infty)}(t)$$

και παρατηρούμε ότι:

$$\eta_n(t) t^{x+1} \leqslant e^t t^{x+1} \leqslant g(t), \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N} \text{ και } t > 0$$

Επιπλέον:

$$\int_0^\infty \eta_n(t) t^{x-1} \, dt \leqslant \int_0^\infty g(t) \, dt = \overbrace{\int_0^{t_0} e^{-t} t^{x-1} \, dt}^{\mathscr{O}(t_0) \in \mathbb{R}} + \int_{t_0}^\infty \frac{1}{t^2} \, dt = \mathscr{O}(t_0) + \frac{1}{t_0} < \infty$$

οπότε το *Θεώρημα της κυριαρχημένης σύγκλισης* εφαρμόζει και εξασφαλίζει ότι οι $\eta_n(t) t^{x-1}$, $e^{-t} t^{x-1}$ είναι ολοκληρώσιμες (κατ' επέκταση η Γ καλώς ορίζεται στο $\mathbb{R}$) και αληθεύει η σύγκλιση:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} \, dt = \int_0^\infty \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} \, dt = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} \, dt =: \Gamma(x)$$

Για την μπλε: Η δεύτερη ισότητα θα προκύψει άμεσα υπολογίζοντας την τιμή καθενός από τα ολοκληρώματα:

$$\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} \, dt$$

Έστω ένα $n \in \mathbb{N}$. Εφαρμόζοντας τη διαδικασία της παραγοντικής ολοκλήρωσης στο εν λόγω ολοκλήρωμα, προκύπτει ότι:

$$\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,dt = \cancel{\int_0^n \left[\frac{1}{x}t^x\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right]' dt} + \frac{n}{n}\cdot\frac{1}{x}\int_0^n t^x\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-1} dt$$

και ξανά με τη διαδικασία της παραγοντικής ολοκλήρωσης:

$$\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,dt = \cancel{\frac{n}{n}\cdot\frac{1}{x}\int_0^n \left[\frac{1}{x+1}t^{x+1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-1}\right]' dt} + \frac{n(n-1)}{n^2}\cdot\frac{1}{x(x+1)}\int_0^n t^{x+1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-2} dt$$

Είναι φανερό πλέον ότι κανείς μπορεί να συνεχίσει επαγωγικά τη διαδικασία, έως ότου καταλήξει στην ισότητα:

$$\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,dt = \frac{n!}{n^n}\cdot\frac{1}{x(x+1)\cdot\ldots\cdot(x+n-1)}\int_0^n t^{x+n-1}\,dt$$

Ισοδύναμα λοιπόν:

$$\begin{aligned}\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,dt &= \frac{n!}{n^n}\cdot\frac{1}{x(x+1)\cdot\ldots\cdot(x+n-1)}\left[\frac{1}{x+n}t^{x+n}\right|_0^n \\ &= \frac{n^x n!}{x(x+1)\cdot\ldots\cdot(x+n-1)}\end{aligned}$$

και με χρήση της κόκκινης ισότητας, προκύπτει το ζητούμενο:

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty}\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,dt = \lim_{n\to\infty}\frac{n^x n!}{x(x+1)\cdot\ldots\cdot(x+n)}$$

□

Άσκηση 3 – (07 στο φυλλάδιο). Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια Lebesgue ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Για $n\in\mathbb{N}$ ορίζουμε $g_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με:

$$g_n(x) = n\int_x^{x+1/n} f(y)\,dy$$

i. Αποδείξτε ότι $g_n(x)\to f(x)$ $\lambda-$σχεδόν παντού.

ii. Αποδείξτε ότι $\int_{\mathbb{R}}|g_n|\,d\lambda \leqslant \int_{\mathbb{R}}|f|\,d\lambda$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$.

iii. Αποδείξτε ότι $\int_{\mathbb{R}}|g_n|\,d\lambda \to \int_{\mathbb{R}}|f|\,d\lambda$.

■

i. *Λύση:* Γνωρίζουμε το γενικό αποτέλεσμα, γνωστό ως *Θεώρημα παραγώγισης του Lebesgue*, κατά το οποίο:

Κάθε Lebesgue ολοκληρώσιμη συνάρτηση $f\in\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$ του $\mathbb{R}^d$ ικανοποιεί τη σχέση:

$$f(x) = \lim_{B\downarrow\{x\}} ⨍_B f(y)\,d\lambda(y),\ \lambda - \text{σχεδόν παντού}$$

όπου $B\in\mathcal{B}_x := \big\{B(a,r)\mid B(a,r)\supseteq\{x\}\big\}$ και $B\downarrow\{x\}\Leftrightarrow\lambda(B)\searrow 0$ και $B\ni x$. Επιπλέον:

$$⨍_B := \frac{1}{\lambda(B)}\int_B$$

Με χρήση λοιπόν του προαναφερθέντος προκύπτει ότι:

$$⨍_x^{x+1/n} f(y)\,d\lambda(y) = n\int_x^{x+1/n} f(y)\,dy \to f(x)$$

αφού $\lambda\big([x-1/n,x+1/n]\triangle[x,x+1/n]\big)\to 0$ και:

$$2n\int_{x-1/n}^{x+1/n} f(x)\,d\lambda(y)\to f(x)$$

Κατ' επέκταση λοιπόν, έχουμε το ζητούμενο $g_n(x) \to f(x)$ $\lambda-$σχεδόν παντού.

$\square$

$\boxed{\text{ii.}}$ *Λύση:* Ουσιαστικά θα μελετήσουμε το συγκεκριμένο αποτέλεσμα μόνο στην περίπτωση των δεικτριών $f = \chi_A$. Η γενική περίπτωση φυσικά αποδεικνύεται με την αναμενόμενη διαδικασία: δεδομένου του αποτελέσματος στις δείκτριες, αποδεικνύουμε την ανισότητα διαδοχικά για απλές μετρήσιμες συναρτήσεις, για μη αρνητικές μετρήσιμες συναρτήσεις και τέλος γενικά για μετρήσιμες συναρτήσεις (οι οποίες σε κάθε περίπτωση πρέπει να είναι και Lebesgue ολοκληρώσιμες).

Για λόγους που θα γίνουν σαφείς κατά την απόδειξη, δείχνουμε το ακόλουθο λήμμα:

Λήμμα 3.1: *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ ένα ανοικτό μετρήσιμο σύνολο τέτοιο ώστε η συνάρτηση χ_A να είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη (ισοδύναμα $\lambda(A) < \infty$). Το A γράφεται ως αριθμήσιμη ένωση ανοικτών, ξένων και φραγμένων διαστημάτων I_k των οποίων τα μέτρα φθίνουν στο 0.*

Απόδειξη: Η αναγραφή:

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k, \text{ με } I_k \text{ ανοικτά, ξένα και φραγμένα}$$

του A είναι σχετικά γνωστό αποτέλεσμα. Επειδή $\lambda(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(I_k) < \infty$ (δηλαδή η σειρά συγκλίνει), έπεται ότι $\lambda(I_k) \to 0$.

$\triangle$

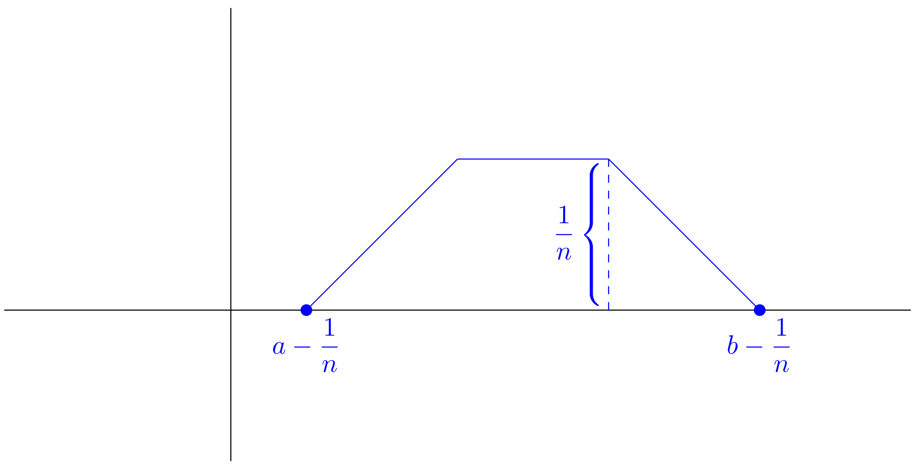
Αποδεικνύουμε τώρα την πρόταση για ανοικτά και φραγμένα διαστήματα $I = (a, b)$. Έστω λοιπόν $f = \chi_I$ και:

$$g_n(x) = n \int_{J_{n,x}} \chi_I(y)\, d\lambda(y) = \lambda(I \cap J_{n,x}), \text{ όπου } J_{n,x} = [x, x + 1/n]$$

Ισχύει λοιπόν ότι:

$$\int \int_{J_{n,x}} \chi_I(y)\, d\lambda(y) d\lambda(x) = \int \lambda(A \cap J_{n,x})\, d\lambda(x)$$

με την $\lambda(A \cap J_{n,x})$ να αποτελεί (μάλιστα Riemann) ολοκληρώσιμη συνάρτηση, η οποία εν γένει σχηματίζει τραπέζιο στο επίπεδο. με βάση $\lambda(I)$ και ύψος $1/n$.



Η μόνη περίπτωση στην οποία δεν σχηματίζεται τραπέζιο ύψους $1/n$ είναι η περίπτωση στην οποία $\lambda(I) < 1/n$, όπου το ύψος γίνεται $\lambda(I) = \min\{\lambda(I), 1/n\}$. Σε κάθε περίπτωση:

$$\int \lambda(A \cap J_{n,x})\, d\lambda(x) \leqslant n \cdot \left(\lambda(I) \cdot \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\right) = \lambda(I) - \frac{1}{n} < \lambda(I), \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}$$

ή:

$$\int \lambda(A \cap J_{n,x})\, d\lambda(x) \leqslant n\lambda(I) \cdot \left({\lambda(I) + \frac{1}{n}} \Big/ {2} \right) \leqslant n\lambda(I) \cdot \frac{1}{n} \leqslant \lambda(I), \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}$$

Η πρόταση λοιπόν αποδεικνύεται για ανοικτά και φραγμένα διαστήματα. Συνεχίζουμε για τα ανοικτά υποσύνολα του $\mathbb{R}$.

Έστω A ένα ανοικτό σύνολο πεπερασμένου μέτρου, το οποίο σύμφωνα με το **Λήμμα 3.1** γράφεται στη μορφή:

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$$

όπου τα I_k είναι ανοικτά, ξένα και φραγμένα διαστήματα και τα μέτρα τους φθίνουν στο 0. Έχουμε λοιπόν, λόγω της προσθετικότητας του μέτρου Lebesgue στα ξένα σύνολα, ότι:

$$\lambda(A \cap J_{n,x}) = \lambda\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \cap J_{n,x}\Big) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(I_k \cap J_{n,x})$$

κι επειδή τα I_k έχουν μέτρα που φθίνουν στο 0, υπάρχει ένας φυσικός (ή μηδέν) N τέτοιος ώστε:

$$n \int \int_{J_{n,x}} \chi_A(y)\, d\lambda(y) d\lambda(x) = n \int \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(I_k \cap J_{n,x})\, d\lambda(x) = n \sum_{k=1}^{\infty} \int \lambda(I \cap J_{n,x}) \leqslant$$

$$\leqslant n \cdot \Big(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda(I_k)}{n} \underbrace{- \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{n^2} - \sum_{k=N+1}^{\infty} \lambda^2(I_k) \Big)}_{\mathscr{A}(g_n) \in \mathbb{R}} = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(I_k) - n\mathscr{A}(g_n) \leqslant \lambda(A)$$

Η πρόταση λοιπόν αποδεικνύεται για ανοικτά σύνολα πεπερασμένου μέτρου. Τέλος, την αποδεικνύουμε γενικά για σύνολα πεπερασμένου μέτρου.

Έστω Λ ένα τυχόν Lebesgue μετρήσιμο σύνολο πεπερασμένου μέτρου. Λόγω της εξωτερικής κανονικότητας του μέτρου Lebesgue, $\lambda(\Lambda) = \inf\big\{\lambda(A) \mid \Lambda \subseteq A \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}}\big\}$ (όπου $\mathcal{T}_{\mathbb{R}}$ είναι η οικογένεια των ανοικτών υποσυνόλων του $\mathbb{R}$) κι επομένως διαλέγοντας τα διάφορα $\Lambda \subseteq A \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}}$ πεπερασμένου μέτρου, έπεται:

$$\int \int_{J_{n,x}} \chi_\Lambda(y)\, d\lambda(y) d\lambda(x) \leqslant \int \int_{J_{n,x}} \chi_A(y)\, d\lambda(y) d\lambda(x) \leqslant \lambda(A)$$

Τώρα παίρνοντας infimum θα προκύψει το ζητούμενο στη γενική περίπτωση:

$$\inf_{\substack{A \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}} \\ A \supseteq \Lambda}} \left\{ \int \int_{J_{n,x}} \chi_\Lambda(y)\, d\lambda(y) d\lambda(x) \right\} \leqslant \inf_{\substack{A \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}} \\ A \supseteq \Lambda}} \lambda(A) = \lambda(\Lambda)$$

□

$\boxed{\text{iii.}}$ <u>*Λύση:*</u> Στο υποερώτημα ii. δείξαμε ότι στην περίπτωση της δείκτριας συνάρτησης $f = \chi_I$ σε ανοικτό και φραγμένο διάστημα αληθεύει η σύγκλιση:

$$\int \int_{J_{n,x}} \chi_I(y)\, d\lambda(y) d\lambda(x) = \lambda(I) - \frac{1}{n} \to \lambda(I)$$

Θα αποδείξουμε το ζητούμενο γενικά για ανοικτά σύνολα A, και η γενική περίπτωση - όπως και στο υποερώτημα ii. - μπορεί να γίνει χρησιμοποιώντας την εξωτερική κανονικότητα του μέτρου Lebesgue. Έστω λοιπόν:

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$$

μια γραφή του A όπως εξασφαλίζεται από το **Λήμμα 3.1**. Αρκεί να δείξουμε ότι:

$$\int \int_{J_{n,x}} \chi_A(y)\, d\lambda(y) d\lambda(x) \geqslant \lambda(A), \text{ καθώς } n \to \infty$$

για το οποίο χρησιμοποιούμε το εξής τέχνασμα: Υπάρχει ένας (ελάχιστος) πραγματικός αριθμός $1 < \varepsilon < 2$ τέτοιος ώστε:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\varepsilon} < \infty$$

οπότε επειδή η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda(I_k)$ συγκλίνει, τελικά $\lambda(I_k) \leqslant 1/k^\varepsilon$. Επειδή τώρα:

$$\int \int_{J_{n,x}} \chi_A(y)\, d\lambda(y) d\lambda(x) = \sum_{k=1}^{N_n} \Big(\lambda(I_k) - \frac{1}{n}\Big) + \sum_{k=N_n+1}^{\infty} n\lambda(I_k) \cdot \left({}^{\displaystyle \lambda(I_k) + \frac{1}{n}} \Big/ {}_{\displaystyle 2} \right) \geqslant \sum_{k=1}^{N_n} \lambda(I_k) - \frac{N_n}{n}$$

η ποσότητα N_n, για αρκούντος μεγάλο n, γίνεται $(N_n)^\varepsilon < n \Rightarrow N_n < n^{1/\varepsilon}$ και κατ' επέκταση:

$$\int\int_{J_{n,x}} \chi_A(y)\ d\lambda(y)d\lambda(x) \geqslant \sum_{k=1}^{N_n} \lambda(I_k) - \frac{n^{1/\varepsilon}}{n} = \sum_{k=1}^{N_n} \lambda(I_k) - \frac{1}{n^{1-1/\varepsilon}} \to \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(I_k) = \lambda(A)$$

Τελικά λοιπόν έχουμε ότι:

$$\int\int_{J_{n,x}} \chi_A(y)\ d\lambda(y)d\lambda(x) \geqslant \lambda(A),\ \text{καθώς } n \to \infty$$

το οποίο αποδεικνύει το ζητούμενο για τις δείκτριες ανοικτών συνόλων πεπερασμένου μέτρου.

Δεδομένου του αποτελέσματος για τις δείκτριες συναρτήσεις, μπορούμε να αποδείξουμε ανάλογο αποτέλεσμα για τις απλές μετρήσιμες. Έστω $s = \sum_{k=1}^n a_k \chi_{A_k}$ μια απλή μετρήσιμη συνάρτηση. Ισχύει ότι:

$$\int\int_{J_{n,x}} s(y)\ d\lambda(y)d\lambda(x) = \int\int_{J_{n,x}} \sum_{k=1}^n a_k\chi_{A_k}(y)\ d\lambda(y)d\lambda(x) = \sum_{k=1}^n a_k \int\int_{J_{n,x}} \chi_{A_k}(y)\ d\lambda(y)d\lambda(x) \to$$

$$\to \sum_{k=1}^n a_k \int \chi_{A_k}(x)\ d\lambda(x) = \int \sum_{k=1}^n a_k\chi_{A_k}(x)\ d\lambda(x) = \int s(x)\ d\lambda(x)$$

Η περίπτωση για τις μη αρνητικές συναρτήσεις ολοκληρώσιμων f επιτυγχάνεται μέσω του *Θεωρήματος μονότονης σύγκλισης*, θεωρώντας ακολουθία απλών μετρήσιμων συναρτήσεων $s_n \nearrow f$. Η περίπτωση των ολοκληρώσιμων f γίνεται μέσω των μη αρνητικών συναρτήσεων f^+, f^-.

□

Άσκηση 4 – (09 στο φυλλάδιο). Έστω $1 < p < \infty$ και $f : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to [0,\infty]$ μετρήσιμη συνάρτηση. Αποδείξτε ότι:

$$\left[\int\left(\int f(x,y)\ dy\right)^p\ dx\right]^{1/p} \leqslant \int\left(\int f(x,y)^p\ dx\right)^{1/p}\ dy$$

■

<u>*Λύση:*</u> Ας αγνοήσουμε προσωρινά τις προϋποθέσεις της f - ας υποθέσουμε προσωρινά ότι η f έχει οποιαδήποτε ιδιότητα χρειάζεται στην ακόλουθη απόδειξη. Θεωρούμε $g \in L^q(\mathbb{R}^d)$ μια συνάρτηση με $||g||_q \leqslant 1$. Για τη συνάρτηση $f \cdot g$ αληθεύει η ανισότητα Hölder:

$$\int |f(x,y)g(x)|\ dx \leqslant \left(\int |g(x)|^q\ dx\right)^{1/q} \cdot \left(\int |f(x,y)|^p\ dx\right)^{1/p} \leqslant \left(\int |f(x,y)|^p\ dx\right)^{1/p} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int\int |f(x,y)g(x)|\ dxdy \leqslant \int\left(\int |f(x,y)|^p\ dx\right)^{1/p}\ dy$$

Χρησιμοποιώντας τώρα το *Θεώρημα του Fubini* εναλλάσσουμε τα πρώτα ολοκληρώματα και έχουμε την εξής σχέση:

$$\int\int |f(x,y)|\ dy \cdot |g(x)|\ dx \leqslant \int\left(\int |f(x,y)|^p\ dx\right)^{1/p}\ dy$$

Με maximum στην ανισότητα ως προς τις g, προκύπτει το ζητούμενο:

$$\max_{\substack{g\in L^q(\mathbb{R}^d)\\ ||g||_q\leqslant 1}} \left\{\int\int |f(x,y)|\ dy \cdot |g(x)|\ dx\right\} \leqslant \int\left(\int |f(x,y)|^p\ dx\right)^{1/p}\ dy \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left|\left|\int f(x,y)\ dy\right|\right|_p = \int\left(\int f(x,y)\ dy\right)^p\ dx \leqslant \int\left(\int |f(x,y)|^p\ dx\right)^{1/p}\ dy$$

Είναι φανερό ότι η απόδειξη δεν εφαρμόζει για κάθε μετρήσιμη f, κι αυτό ουσιαστικά έγκειται στο γεγονός ότι χρησιμοποιείται το *Θεώρημα του Fubini*. Απαιτείται λοιπόν οι f να είναι ολοκληρώσιμες. Για την γενική περίπτωση των μετρήσιμων συναρτήσεων, θεωρούμε προσεγγίζουσα ακολουθία $s_n \nearrow f$ απλών μετρήσιμων συναρτήσεων - οι οποίες είναι ολοκληρώσιμες - και μελετούμε γι' αυτές το εν λόγω ερώτημα. Η προσέγγιση θα μπορούσε επίσης να γίνει με συνεχείς συναρτήσεις συμπαγούς φορέα.

□

Άσκηση 5 – (05 στο φυλλάδιο). Έστω $1 \leqslant p < \infty$ και $f \in L^p\big([0,\infty)\big)$ μετρήσιμη συνάρτηση. Αποδείξτε ότι:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty f(x)e^{-nx}\,dx = 0$$

Υπόδειξη: Εξετάστε τις περιπτώσεις $p=1$ και $1<p<\infty$ ξεχωριστά. ■

Πρόταση 5.1: *Η υπεραριθμήσιμη ακολουθία συνόλων* $\big(L^p([0,\infty))\big)_{p\in[1,\infty)}$ *είναι αύξουσα.*

Απόδειξη: Πράγματι, εάν $f \in L^p\big([0,\infty)\big)$ τότε η $f^p(x)$ τείνει στο 0 καθώς $x\to\infty$, αν εξαιρεθεί ένα σύνολο των x μέτρου 0. Ειδικότερα, εάν $r > p \geqslant 1$:

$$\infty > \int f^p\,d\lambda = \int_{\{f^p>1\}} f^p\,d\lambda + \int_{\{f^p\leqslant 1\}} f^p\,d\lambda \geqslant \int_{\{f^p>1\}} f^p\,d\lambda + \int_{\{f^p\leqslant 1\}} f^r\,d\lambda$$

κι επειδή το ολοκλήρωμα $\int_{\{f^p>1\}} f^p\,d\lambda$ είναι πεπερασμένο:

$$\int_{f^p\leqslant 1} f^r\,d\lambda < \infty, \text{ από το οποίο έπεται ότι } \int f^r\,d\lambda < \infty \Rightarrow f\in L^r([0,\infty))$$

Αυτό αποδεικνύει ότι $p<r \Rightarrow L^p\big([0,\infty)\big) \subseteq L^r\big([0,\infty)\big)$.

△

Λύση:

Βήμα I: Υποθέτουμε ότι $1<p<\infty$. Η $e^{-qn(\cdot)}$ είναι κατά Riemann ολοκληρώσιμη για κάθε $q\geqslant 1$, οπότε για κάθε τέτοιο q, $e^{-qn(\cdot)} \in L^q\big([0,\infty)\big)$ - ειδικότερα το ανήκειν ισχύει για τον συζυγή εκθέτη q του p. Βάσει της ανισότητας του Hölder:

$$\int_0^\infty f(x)e^{-nx}\,dx \leqslant \left(\int_0^\infty f(x)^p\,dx\right)^{1/p}\cdot\left(\int_0^\infty e^{-qnx}\,dx\right)^{1/q}$$

από το οποίο προκύπτει:

$$\int_0^\infty f(x)e^{-nx}\,dx \leqslant ||f||_p\cdot\left(\int_0^\infty e^{-qnx}\,dx\right)^{1/q} = ||f||_p\cdot\left(\frac{1}{qn}\right)^{1/q} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Βήμα II: Εάν είχαμε $p=1$, η **Πρόταση 5.1** εξασφαλίζει ότι $f\in L^2\big([0,\infty)\big)$. Με την επιχειρηματολογία του **Βήματος I**, για τους συζυγείς εκθέτες $p=q=2$, αποδεικνύεται ότι:

$$\int_0^\infty f(x)e^{-nx}\,dx \leqslant ||f||_2\cdot\left(\int_0^\infty e^{-2nx}\,dx\right)^{1/2} = ||f||_2\cdot\left(\frac{1}{2n}\right)^{1/2} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

κι επομένως το ζητούμενο στη γενική περίπτωση.

□

Σχόλιο: Το αποτέλεσμα αυτό ισχύει ακόμη κι αν $p=\infty$, αφού τότε:

$$\int_0^\infty f(x)e^{-nx}\,dx \leqslant ||f||_\infty\cdot\int_0^\infty e^{-nx}\,dx = ||f||_\infty\cdot\frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Άσκηση 6 – (03 στο φυλλάδιο). Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Υπολογίστε το:

$$\lim_{t\to\infty}\int |f(x+t)+f(x)|\,d\lambda(x)$$

■

Λύση: Υποθέτουμε προσωρινά την f μη αρνητική. Έστω $\varepsilon>0$ και $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση με συμπαγή φορέα $\operatorname{supp} g$ που προσεγγίζει την f με την εξής έννοια: $||f-g||_1<\varepsilon$. Εφόσον ο φορέας $\operatorname{supp} g_n$ είναι συμπαγής, υπάρχει μπάλα που περιέχει τον φορέα $B_g \supseteq \operatorname{supp} g_n$ και κατ' επέκταση, για οποιοδήποτε (αρκετά μεγάλο) t τέτοιο ώστε $x+t\notin B_g$:

$$||g(\cdot+t)+g||_1 = \int |g_n(x+t)+g_n(x)|\,d\lambda(x) = \int |g(x)|\,d\lambda(x) = ||g||_1$$

Παρατηρούμε τώρα ότι:

$$\begin{aligned} ||f||_1 &\leqslant ||f(x+t)+f(x)||_1 \leqslant ||f(\cdot+t)-g(\cdot+t)||_1 + ||g(\cdot+t)+g||_1 + ||f-g||_1 \\ &\leqslant ||g(\cdot+t)+g||_1 + 2||g-f||_1 \end{aligned}$$

οπότε, για αρκετά μεγάλο t:

$$||f||_1 \leqslant ||f(x+t)+f(x)||_1 \leqslant 2\varepsilon + ||g||_1 \leqslant 2\varepsilon + \varepsilon + ||f||_1 = 3\varepsilon + ||f||_1$$

το οποίο φυσικά ισχύει για κάθε $\varepsilon > 0$. Προσεγγίζοντας λοιπόν το 0 από τα δεξιά $\varepsilon \to 0^+$, έχουμε το ζητούμενο στην περίπτωση της μη αρνητικής f:

$$||f||_1 = \int |f(x)|\, d\lambda(x) = \lim_{t\to\infty} \int |f(x+t)+f(x)|\, d\lambda(x)$$

Όσον αφορά το ζητούμενο στη γενική του μορφή, δηλαδή για ολοκληρώσιμες f, η προηγούμενη απόδειξη εφαρμόζει για τις f^+, f^-. Έπειτα, εφαρμόζοντας τη γραμμικότητα του ολοκληρώματος, προκύπτει το ζητούμενο στη γενική του μορφή.

Συνοπτικά:

$$\begin{aligned} \lim_{t\to\infty} \int f(x+t)+f(x)\, d\lambda(x) &= \lim_{t\to\infty} \int f^+(x+t)+f^+(x)\ \lambda(x) - \lim_{t\to\infty} \int f^-(x+t)+f^-(t)\, d\lambda(x) \\ &= \lim_{t\to\infty} \int f^+(x)\ \lambda(x) - \lim_{t\to\infty} f^-(t)\, d\lambda(x) \\ &= \lim_{t\to\infty} \int f(x)\ \lambda(x) \\ &= \int f(x)\, d\lambda(x) \end{aligned}$$

οπότε έπεται ότι:

$$\lim_{t\to\infty} \int |f(x+t)+f(x)|\, d\lambda(x) = \int |f(x)|\, d\lambda(x)$$

□