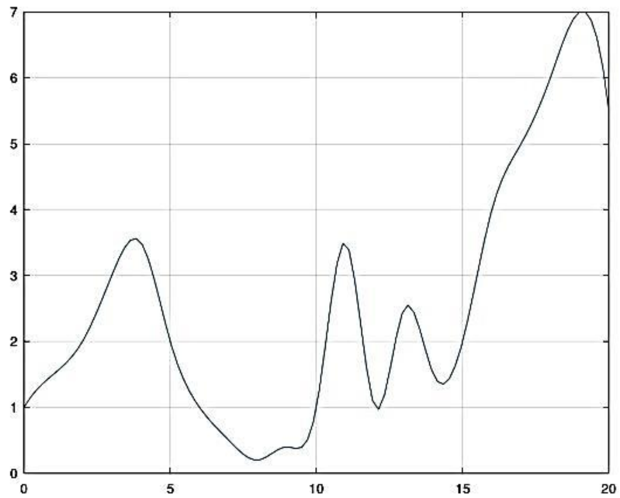
Εισαγωγή των οικονομικών μαθηματικών και του πληθωρισμού στα πλαίσια του σχολικού διδακτικού προγράμματος

691. Διδακτική των Μαθηματικών Ι - Προπτυχιακή εργασία.

Στεφανίδου Μαρία: 1112202000212,

Τόλης Χρήστος: 1112201900216,

Φράγκος Αναστάσιος: 1112201900239.



ΕΚΠΑ, Τμήμα Μαθηματικών,

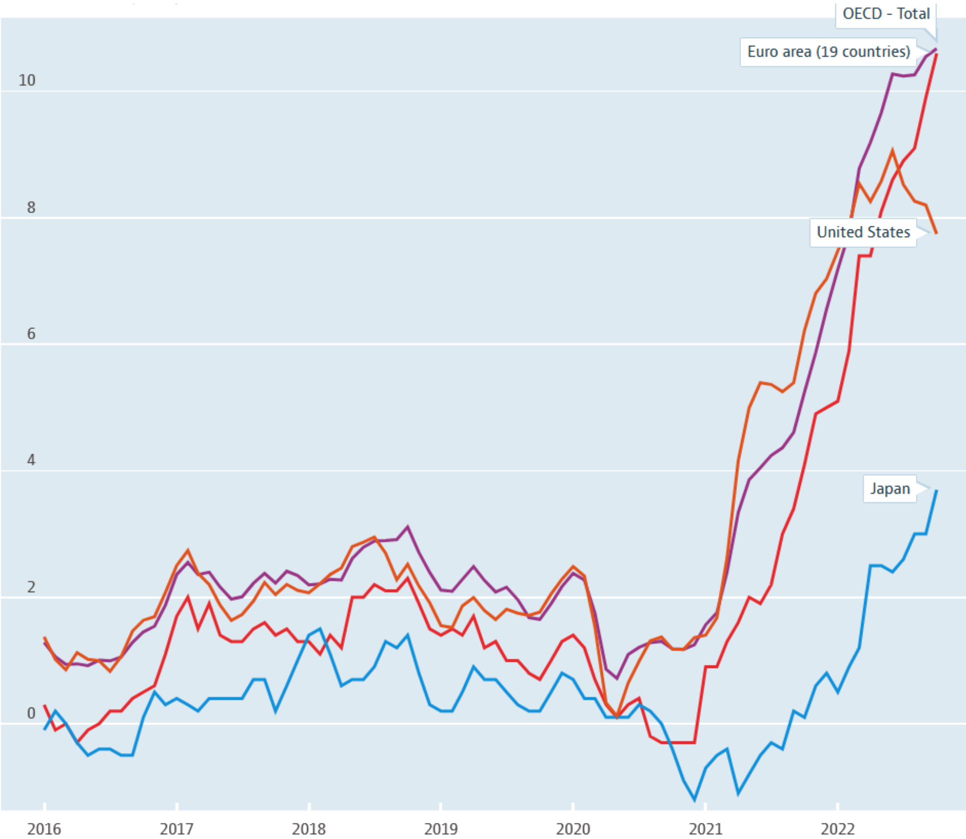
08 Ιανουαρίου 2023

Περιεχόμενα

Πρόλογος

Η παρούσα εργασία έγινε στα πλαίσια του μαθήματος «691. Διδακτική των Μαθηματικών Ι» από προπτυχιακούς φοιτητές του Εθνικού και Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνών, υπό την επίβλεψη του κ. Ψυχάρη Γεώργιου.

Ο τρόπος με τον οποίο τα μαθηματικά εισάγονται στην οικονομία έγινε εμφανέστατος μετά την έναρξη του πολέμου στην Ουκρανία,[4.1] κυρίως μέσω μελέτης της πρωτοφανούς αύξησης του πληθωρισμού.



Εικόνα 1.1.[OECD] *Ο πληθωρισμός σε επιλεγμένες χώρες, ανά έτη.*

Με αφορμή την επικαιρότητα, θα παρουσιάσουμε ένα εκπαιδευτικό σενάριο με το οποίο μαθητές της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης θα εισαχθούν σε οικονομικά θέματα, αναγκαία για να κατανοηθεί σ’ έναν βαθμό η οικονομική κατάσταση (ολόκληρου του κόσμου) των τελευταίων ετών. Έμφαση θα δοθεί σε θέματα πληθωρισμού. Γενικότερα πάντως θα παρουσιαστούν τα ακόλουθα:

- Η ιστορία του χρήματος εξελικτικά,
- Η έννοια του πληθωρισμού (σε διάφορες εκφάνσεις της)
- Η ποσοτικοποίηση του πληθωρισμού,
- Η εξαγωγή συμπερασμάτων μελετώντας δείκτες όπως του πληθωρισμού.

Η δραστηριότητα που θα παρουσιαστεί στους μαθητές θα χωριστεί σε δύο μέρη: Στο πρώτο θα παρουσιαστούν βασικές έννοιες των οικονομικών μαθηματικών, στο δεύτερο θα γίνει εφαρμογή τους σε παραδείγματα επηρεασμένα από τον κόσμο.

Ελπίζουμε η επιλογή του θέματος να αποτελέσει αρκετά ενδιαφέρον θέμα για τους μαθητές της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, και πολύ περισσότερο ευελπιστούμε οι έννοιες να αποτελέσουν σημαντική προσθήκη στη «γνωστική φαρέτρα» τους.

Τέλος, να σημειωθεί ότι κάποια κομμάτια της παρούσας εργασίας που αφορούν τη διδασκαλία των μαθηματικών στην Ευρωπαϊκή Ένωση καθώς και το πρόγραμμα IIATM είναι επηρεασμένα από το [ΔΒΦΑ].

Βασικές εισαγωγικές έννοιες

Πριν προχωρήσουμε στην ανάλυση της δραστηριότητας θεωρούμε σημαντικό να γίνει μια αναφορά στο τι πρόκειται να παρουσιαστεί στη συνέχεια.

2.1. Η εξέλιξη του χρήματος ιστορικά

Ο πληθωρισμός ως έννοια δεν είναι δυνατόν να κατανοηθεί εάν δεν υπάρχει μια στοιχειώδης ιδέα για το πώς λειτουργεί το πιστωτικό οικονομικό σύστημα. Η αξία του χρήματος δεν είναι απόλυτη αλλά μεταβλητή, και αυτού ακριβώς του είδους η ρευστότητα είναι που επιτρέπει τις όποιες διακυμάνσεις στην αξία του. Γιατί άραγε να υιοθετηθεί ένα τόσο περίπλοκο σύστημα για την οικονομική δραστηριότητα του κόσμου; Δεν θα μπορούσε να υπάρχει μια έννοια απολυτότητας, ώστε να μην χρειάζεται κάθε φορά να επαναπροσδιορίζεται η αξία του χρήματος; Θεωρούμε ότι αυτές οι ερωτήσεις είναι αναμενόμενες στα πλαίσια ανάλυσης αυτού του θέματος, οπότε ξεκινούμε με μια ιστορική αναδρομή.

Αρχικά το χρηματικό σύστημα ήταν ανταλλακτικό – οι συναλλαγές μεταξύ των ανθρώπων ήταν ουσιαστικά ανταλλαγές, οπότε το «χρήμα» θα μπορούσε κανείς να πει ότι ήταν το εμπόρευμα που ανταλλασσόταν και δεν είχε τη σημερινή μορφή του.

Μια ποιο οικεία μορφή του ήλθε στη συνέχεια, υπό τη μορφή κερμάτων. Το «κέρμα» εδώ χρησιμοποιείται με κάπως πιο ευρεία έννοια και δεν σημαίνει κατ’ ανάγκη μεταλλικό κέρμα – είναι απλώς μια κοινή μονάδα μέτρησης του πλούτου. Στη Μεσοποταμία γινόταν χρήση κοχυλιών ως κέρματα, στην Αίγυπτο γίνεται αναφορά στη χρήση μεταλλικών νομισμάτων, των οποίων η αξία ταυτιζόταν (κατά κάποιο τρόπο) με το βάρος τους.[ΛΟΧΑ]

Εικόνα 2.1. (Μουσείο του Λούβρου). Ο Κώδικας του Βασιλέως Hammurabi: Περιλαμβάνει περίπου 3.500 γραμμές στις οποίες αναφέρονται πολλές μέθοδοι πληρωμής σε ασήμι, βάσει βάρους. Χρησιμοποιούταν και αντιγραφόταν για περισσότερο από 1.000 χρόνια.

Η χρήση νομισμάτων με την πάροδο των χρόνων διαδιδόταν όλο και περισσότερο στην Ευρώπη, με τις τελευταίες χώρες που το εισήγαγαν να αποτελούν η Ισπανία και οι Σκανδιναβικές (κατά τον Μεσαίωνα), λόγω του ότι η οικονομία ήταν πρακτικά βασισμένη στις συναλλαγές της μοναρχίας.

Εν τω μεταξύ στην Κίνα, περί το 1189, έγινε αντιληπτό ότι η χρήση μεταλλικών κερμάτων δεν ενδείκνυται για μια ευρεία και εύκολη κυκλοφορία του χρήματος. Η δυναστεία των Τζιν απαγόρευσε την κυκλοφορία των μεταλλικών νομισμάτων και έγινε αποκλειστική χρήση χαρτονομισμάτων, τα οποία είχαν αντιπροσωπευτική αξία.[ΛΟΧΑ] Δηλαδή αντιπροσώπευαν ένα κομμάτι (βάρος) πραγματικού μετάλλου.

Χρήμα με αντιπροσωπευτική αξία είχε εμφανιστεί και στην Ευρώπη, αν κι εκεί δεν διαδόθηκε τόσο ευρέως όπως στην Κίνα. Συγκεκριμένα, κυρίως σε πόλεις της βόρειας Ιταλίας, λόγω της ανθίζουσας οικονομικής δραστηριότητας, υπήρξε η ανάγκη για τη δημιουργία ενός συστήματος δανεισμού. Μάλιστα στη Βενετία κατά το 1157 συστάθηκε η πρώτη εθνική τράπεζα.[ΣΑΓΕ]

Κάπως έτσι στην ιστορία εισήχθη το πιστωτικό σύστημα, στο οποίο οι «οικονομικοί παίκτες» έχουν *πίστη* ότι το πλήθος των αντιπροσωπευτικών νομισμάτων (χαρτονομισμάτων) μένει ελεγχόμενο ώστε να αντιπροσωπεύει μια ποσότητα πλούτου.

Τώρα πλέον μπορεί να εξηγηθεί ο λόγος που το χρήμα δεν έχει σταθερή αξία. Φανταστείτε ότι χρειάζεται να αυξηθεί η κινητικότητα του χρήματος στην αγορά, οπότε τυπώνονται περισσότερα χαρτονομίσματα. Εφόσον η ποσότητα του πλούτου που αντιπροσωπεύουν (συνολικά) τα χρήματα είναι σταθερή, η αξία των χαρτονομισμάτων θα πρέπει να μειωθεί. Παραδείγματα στην ιστορία όπου γίνεται μεγάλη τύπωση χαρτονομισμάτων εντοπίζονται κυρίως εν μέσω πολέμων.

Έχοντας πει αυτά, μπορούμε να αναφερθούμε στον πληθωρισμό.

2.2. Η έννοια του πληθωρισμού

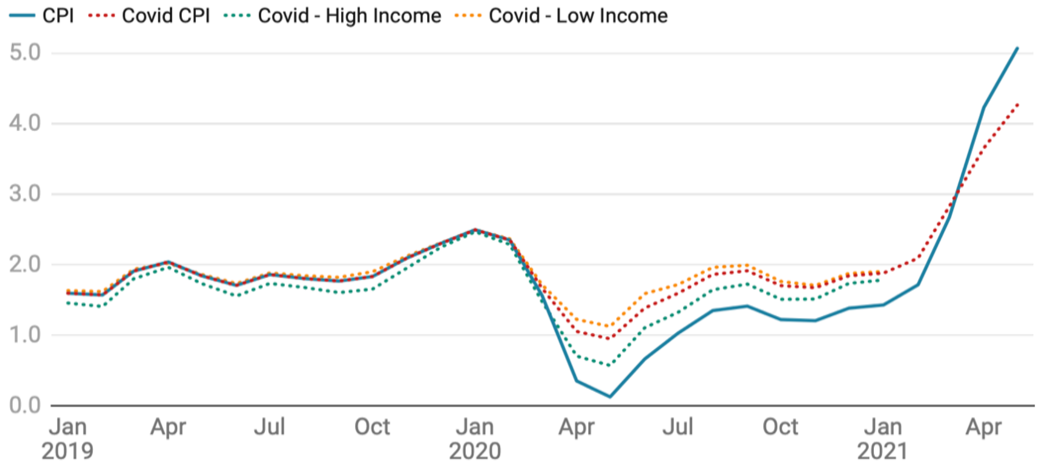
Φανταστείτε μια κοινωνία στην οποία το χρήμα δεν έχει μεγάλη αξία (για παράδειγμα μια κοινωνία που βρίσκεται σε κατάσταση πολέμου). Κανείς θα είναι πολύ δυσκολότερο να προμηθευτεί αγαθά, αφού η αξία αυτών είναι φαινομενικά πολύ υψηλότερη από την αντίστοιχη αξία του χρήματος. Πριν την υποτίμηση της αξίας του χρήματος οι τιμές των προϊόντων θα ήταν περισσότερο προσιτές, οπότε λέμε ότι η εν λόγω κοινωνία πέρασε μία περίοδο πληθωρισμού.

> Πληθωρισμός: Είναι η συνεχής αύξηση του γενικού επιπέδου των τιμών μιας οικονομίας σε μία συγκεκριμένη χρονική περίοδο, που προκαλεί πτώση στην αγοραστική δύναμη, καθώς κάθε μονάδα χρήματος αγοράζει λιγότερα αγαθά και υπηρεσίες.

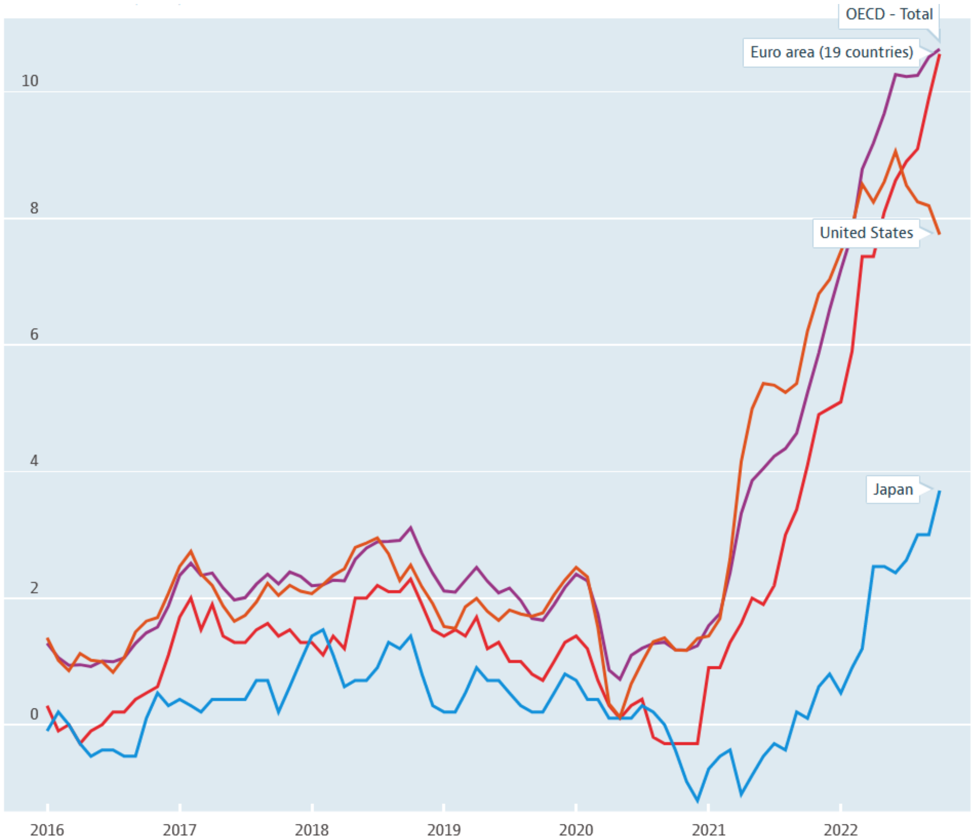
Φυσικά ο πληθωρισμός δεν έχει μοναδικό αίτιο και συνήθως είναι αποτέλεσμα ενός περίπλοκου (χαοτικού) οικονομικού μηχανισμού. Μάλιστα το να εντοπιστεί σωστά η κύρια αιτία του είναι μεγάλης σημασίας στα οικονομικά. Για να γίνει σαφής η σημασία αυτή δίνουμε το ακόλουθο παράδειγμα:

Φανταστείτε ότι σε μια κοινωνία εμφανίζεται πληθωρισμός λόγω του ότι υπάρχει μεγάλη ζήτηση σε αγαθά και οι εταιρίες που τα παράγουν αυξάνουν την αξία τους. Εάν θεωρήσουμε ότι ο πληθωρισμός είναι συνέπεια της μείωσης της κινητικότητας στην αγορά, και (για παράδειγμα) μειώσουμε τους φόρους, τότε θα επιτύχουμε αύξηση του πληθωρισμού και όχι μείωση – δηλαδή το αντιδιαμετρικό του επιθυμητού

Η περίοδος που διανύουμε (2022-23) είναι μια περίοδος πρωτοφανούς πληθωρισμού, η οποία μάλιστα έρχεται μετά από μια πτώση στον πληθωρισμό λόγω του SARS Covid-19.



Εικόνα 2.2.[CAAL] *Η μείωση του πληθωρισμού εν μέσω κορονοϊού (ΗΠΑ).*



Εικόνα 1.1.[OECD] *Ο πληθωρισμός σε επιλεγμένες χώρες, ανά έτη.*

Ενδέχεται οι μαθητές να έχουν αναρωτηθεί για τον λόγο που διάφορες τιμές αλλάζουν ανά περιόδους, και ίσως δεν γνωρίζουν τον πραγματικό λόγο αυτών των αυξομειώσεων. Ίσως διαβάζουν ή ακούν στα διάφορα μέσα μαζικής ενημέρωσης διάφορους όρους (ορολογία) ή εξηγήσεις που οι ίδιοι δεν γνωρίζουν ή δεν είναι σε θέση να καταλάβουν χωρίς μια ικανοποιητική εισαγωγή. Να σημειωθεί σ’ αυτό το σημείο ότι – μετά την άνθηση των κοινωνικών δικτύων – οι πολίτες πρέπει να είναι προσεκτικοί όσον αφορά τις πηγές της πληροφορίας, καθώς υπάρχουν αρκετές περιπτώσεις παραπληροφόρησης ή διαστρέβλωσης των δεδομένων.

Στη συνέχεια λοιπόν θα διερευνήσουμε μέσω δραστηριοτήτων αυτές τις μεταβολές, και θα τις εισάγουμε σε ένα πλαίσιο με το οποίο οι μαθητές ενδέχεται να είναι γνώριμοι.

Δραστηριότητα

3.1. Πλαίσιο εφαρμογής

3.1.1. Λίγα λόγια για τη διδασκαλία των μαθηματικών

Για αρκετά χρόνια στον χώρο της διδακτικής υπήρχε η αντίληψη ότι η παιδεία έχει τραπεζικό χαρακτήρα και υποστηριζόταν ότι η γνώση μεταδίδεται αποκλειστικά μέσω της αποστήθισης. Όπως ανέφερε ο Freire (1977): «*Ο δάσκαλος των μαθηματικών [...] μεταφέρει τις έτοιμες γνώσεις στα μυαλά των μαθητών, όπως κανείς καταθέτει χρήματα σε μία τράπεζα*». Η προσέγγιση αυτή, που κατά βάση είναι δασκαλοκεντρική, έχει διάφορα προβλήματα, εκ των οποίων τα μεγαλύτερα (κατά την άποψή μας) είναι τα ακόλουθα:

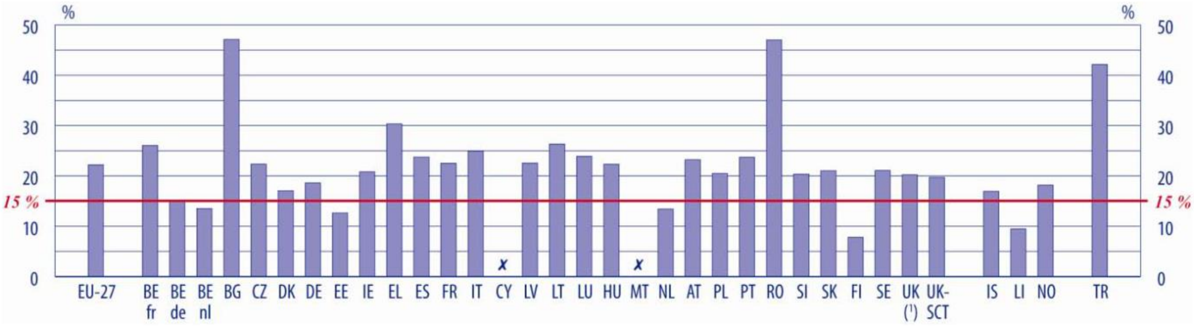
- Είναι δασκαλοκεντρική, το οποίο δημιουργεί ένα μαθοφοβικό κλίμα στο μάθημα,
- Ο ρόλος των μαθητών δεν είναι κύριος, οπότε οι ίδιοι δεν διερευνούν και δεν μπαίνουν σε διαδικασία κρίσης και σκέψης,
- Δεν προετοιμάζει για τα μαθηματικά σε εξωσχολικό επίπεδο και δεν εξοπλίζει τους μαθητές με την λογική σκέψη που απαιτείται για την αντιμετώπιση μη μαθηματικών προβλημάτων με μαθηματικές «μεθόδους»,
- Δεν υπάρχει χώρος για βελτίωση, μιας και το σύστημα γίνεται απόλυτο και ο δάσκαλος αποκτά μορφή αυθεντίας.

Πλέον αυτές οι απόψεις έχουν αναθεωρηθεί. Ο ρόλος των μαθητών στο μάθημα θα πρέπει να είναι κύριος, κι επιπλέον οι ίδιοι οι μαθητές να είναι σε θέση να κατασκευάσουν τη γνώση μέσω σωστής κατεύθυνσης από τους εκπαιδευτικούς. Λαμβάνοντας υπόψη την εφαρμογή των μαθηματικών στην καθημερινότητα, ο ρόλος της συνεργασίας θα πρέπει να αναδεικνύεται στις σχολικές αίθουσες.

Φυσικά η εν λόγω αναθεώρηση έγινε σταδιακά και είναι αποτέλεσμα πολλαπλών και πολυετών μελετών.

3.1.1.1. Η ευρωπαϊκή πολιτική

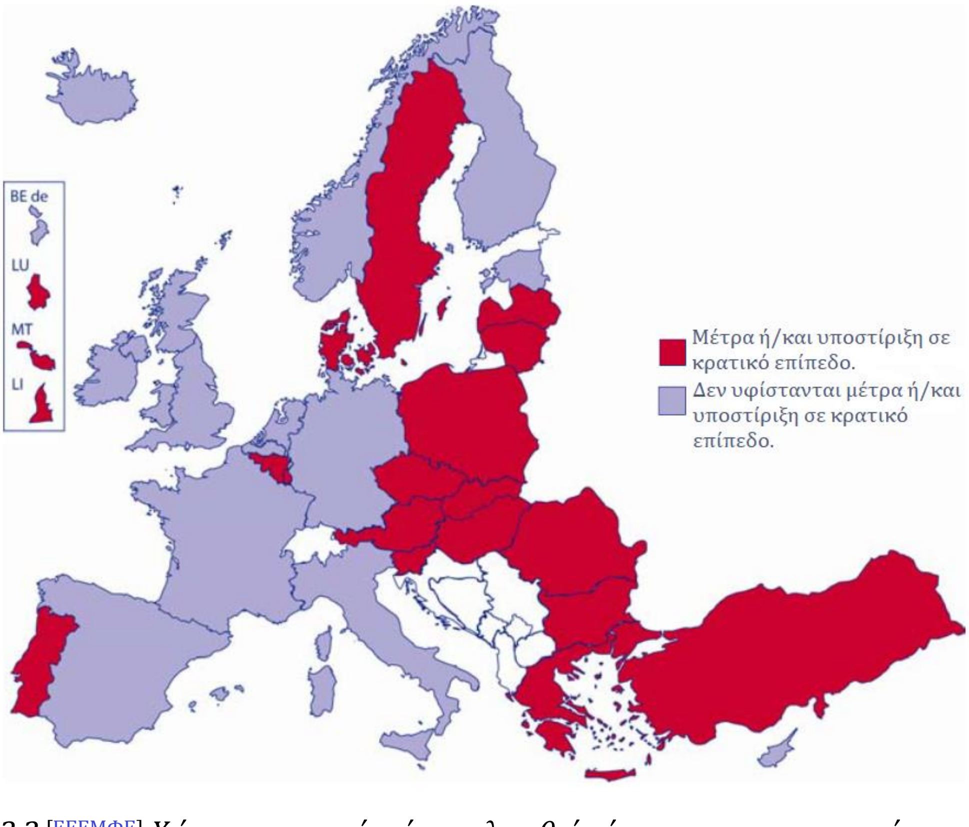
Οι υπεύθυνοι της εκπαίδευσης στην ΕΕ διαπίστωσαν ότι τα ποσοστά των 15-χρονων μαθητών (2009) με χαμηλές επιδόσεις στα μαθηματικά κυμαίνονταν μεταξύ του 9% και του 48%, το οποίο κρίθηκε «απογοητευτικό» καθώς «τόσο τα μαθηματικά όσο και οι φυσικές επιστήμες διαδραματίζουν κρίσιμο ρόλο στη σύγχρονη διδακτική ύλη για την ανταπόκριση όχι μόνο στις ανάγκες της αγοράς εργασίας, αλλά επίσης για την ανάπτυξη της ενεργού ιδιότητας του πολίτη». Στόχος της ΕΕ είναι ως το τέλος του 2020 τα ποσοστά αυτά να φράσουν κάτω του 15%.[ΕΕΕΜΦΕ]



Εικόνα 3.1.[ΕΕΕΜΦΕ] *Ποσοστό 15-χρονων μαθητών (2009) στην ΕΕ με χαμηλές επιδόσεις στα μαθηματικά, ανά χώρες. Το 15% είναι το ανώτατο φράγμα – στόχος για την ΕΕ.*

Διαπιστώθηκε, μετά από σχετική έρευνα, ότι οι εμπειρίες των μαθητών στα μαθηματικά συνοδεύονταν με φόβο, ο οποίος φαίνεται να σχετίζεται του «βαθμοθυρικού» χαρακτήρα που έχει αποκτήσει το σχολείο, της εκπαιδευτικής πολιτικής που εφαρμόζεται, καθώς και της ανεπάρκειας των σχολικών βιβλίων. Θεωρήθηκε ότι προγράμματα που περιλαμβάνουν προβλήματα Based-Learning (στα οποία τα μαθηματικά έχουν εφαρμογή στην καθημερινή ζωή) και χρήση νέων τεχνολογιών ICT (Information and Communication Technology) έχουν τη δυνατότητα να ελκύσουν τους μαθητές στα μαθηματικά και να επιτύχουν καλύτερη κατανόηση.

Διάφορες χώρες στην ΕΕ και της Ευρώπης έχουν λάβει μέτρα για την αντιμετώπιση των χαμηλών επιδόσεων στα μαθηματικά, ανάμεσα σ' αυτές και η Ελλάδα.



Εικόνα 3.2.[ΕΕΕΜΦΕ] *Χώρες στις οποίες έχουν ληφθεί μέτρα για την αντιμετώπιση των χαμηλών επιδόσεων στα μαθηματικά, στην πρωτοβάθμια και δευτεροβάθμια εκπαίδευση.*

3.1.1.2. Το πρόγραμμα IIATM

Το πρόγραμμα διδασκαλίας IIATM (Implementation of Innovative Approaches to the Teaching of Mathematics) μπορεί να αποτελέσει αρωγό στη διδασκαλία των μαθηματικών, κάνοντας περισσότερο ελκυστική τη διδασκαλία τους και προετοιμάζοντας τους μαθητές σύμφωνα με τις ευρωπαϊκές προδιαγραφές.

Το συγκεκριμένο πρόγραμμα βασίζεται σε μεθόδους κατασκευής της γνώσης και στη συνεργασία. Θεωρείται ότι είναι ικανό να προετοιμάζει τους μέλλοντες πολίτες κατάλληλα ώστε να μπορούν να ανταπεξέλθουν στις απαιτήσεις της σύγχρονης κοινωνίας, εφοδιάζοντάς τους με ικανότητες:

- Γρήγορης προσαρμογής στις επικείμενες αλλαγές,
- Επίλυσης προβλημάτων, όχι απαραίτητα μαθηματικών, χρησιμοποιώντας μαθηματικές μεθόδους,
- Ανάπτυξης εύκαμπτης και κριτικής σκέψης.

Ένα παράδειγμα του νέου τρόπου διδασκαλίας IIATM εφαρμόστηκε στην Αγγλία, στην Τσεχία και στην Ελλάδα, και βασίζεται στη γενίκευση. Οι μαθητές καλούνται να δημιουργήσουν μόνοι τους τη γνώση (ή να την εμπλουτίσουν) παρατηρώντας μοτίβα ή δεδομένα.[ΕΕΕΜΦΕ] [ΤΜΜΓ] Έτσι αναδεικνύεται ο ρόλος του μαθητή στο μάθημα και υιοθετείται από τους μαθητές ο «επιστημονικός» τρόπος εξαγωγής συμπερασμάτων, που βασίζεται στην παρατήρηση.

Στην δραστηριότητα που θα ακολουθήσει θα επιχειρήσουμε να εισάγουμε τεχνικές IIATM στο μαθησιακό περιβάλλον.

3.1.2. Σχετικά με τη δραστηριότητα

Η δραστηριότητα απευθύνεται σε μαθητές Α' Λυκείου. Ο χρόνος υλοποίησης αναμένεται στις δύο (2) ή τρεις (3) διδακτικές ώρες, και ο χώρος υλοποίησης είναι πιθανότητα το εργαστήριο υπολογιστών.

Οι προαπαιτούμενες γνώσεις των μαθητών είναι σε γενικές γραμμές η ακόλουθες:

- Κατανόηση της έννοιας του (μαθηματικού) *λόγου*,
- Κατανόηση της έννοιας της *μεταβολής*,
- Κατανόηση της έννοιας της *συνάρτησης*,
- Κατανόηση της έννοιας της *γραφικής παράστασης*,
- Στοιχειώδης γνώση χρήσης του *υπολογιστή*.

3.2. Εισαγωγή των μαθητών στα οικονομικά

Στο πρώτο κομμάτι της παρουσίασης θα γίνει μια νύξη σε βασικές χρηματοοικονομικές έννοιες, ώστε να μπορεί να κατανοηθεί η σημασία του πληθωρισμού. Όπως αναφέραμε στο [2.1], η έννοια του πληθωρισμού δεν έχει νόημα συνολικά αν δεν συνοδεύεται από μια μεταβλητότητα στο χρήμα. Παρακάτω θα περιγράψουμε συνοπτικά την εξέλιξη του χρήματος – περισσότερες λεπτομέρειες κανείς μπορεί να βρει στο [2.1].

Ξεκινούμε λέγοντας ότι το χρήμα προέκυψε ως μια φυσική εξέλιξη του ανταλλακτικού εμπορίου. Τα κέρματα ή τα βάρη εμφανίστηκαν ώστε να αποτελούν μια ενιαία / κοινή μορφή σύγκρισης του πλούτου.

Έπειτα εμφανίστηκαν τα χαρτονομίσματα, στην Κίνα για να καταστήσουν δυνατή την ευκολότερη διανομή του πλούτου και το εμπόριο, και στην Ευρώπη μέσω δανείων. Και στις δύο περιπτώσεις τα χαρτονομίσματα είχαν αντιπροσωπευτική αξία, αντιπροσώπευαν δηλαδή κάποιο κομμάτι πλούτου. Το κράτος (στην Κίνα) και οι τράπεζες (στην Ευρώπη) είχαν ευθύνη να κρατούν ισορροπημένο το πλήθος τον χαρτονομισμάτων σε σχέση με τον πλούτο, και οι πολίτες είχαν πίστη σ' αυτούς ότι το κάνουν σωστά. Αυτό δικαιολογεί και την ορολογία *πιστωτικό σύστημα.*

Τώρα πλέον μπορούμε να εξηγήσουμε γιατί, για παράδειγμα εν μέσω πολέμων, η αξία των νομισμάτων πέφτει. Αν χρειάζεται να υπάρξει κίνηση στις αγορές και εκτυπωθούν περισσότερα χρήματα, εφόσον ο πλούτος που αντιπροσωπεύουν είναι σταθερός, η αξία τους θα μειωθεί.

Ορίζουμε λοιπόν την έννοια του πληθωρισμού.

> Πληθωρισμός: Είναι η συνεχής αύξηση του γενικού επιπέδου των τιμών μιας οικονομίας σε μία συγκεκριμένη χρονική περίοδο, που προκαλεί πτώση στην αγοραστική δύναμη, καθώς κάθε μονάδα χρήματος αγοράζει λιγότερα αγαθά και υπηρεσίες.

Ο ορισμός αυτός καθαυτός βέβαια δεν είναι βοηθητικός, γιατί εκφράζει μια κατάσταση χωρίς να την ποσοτικοποιεί. Μαθηματικά μιλώντας, θα θέλαμε μια έννοια σύγκρισης για τις διάφορες περιπτώσεις πληθωρισμού, ένα μέτρο δηλαδή που θα δείχνει πότε έχουμε «περισσότερο πληθωρισμό» και πότε «λιγότερο». Από αυτό το σημείο ξεκινά η δράση των μαθητών.

3.3. Εργασίες για τους μαθητές

Τα σχόλια που προσθέτουμε θα σημειώνονται με το κόκκινο «Σχόλιο».

3.3.1. Δείκτης τιμών και πληθωρισμός

I. Φανταστείτε την περίπτωση όπου κάποιος το έτος Χ με 1€ αγοράζει 1kg αλεύρι. Το έτος Χ+1 με 1€ αγοράζει 0.8kg αλεύρι και το έτος Χ+2 με 1€ αγοράζει 0.5kg αλεύρι. Πώς πιστεύετε ότι μπορούμε να ποσοτικοποιήσουμε πόσο μεταβλήθηκαν οι τιμές; Θεωρήστε ότι κάθε έτος το νοικοκυριό αγοράζει ίδια ποσότητα αλευριού.

> Σχόλιο: Οι μαθητές είναι δυνατόν να δώσουν διερευνητικά διάφορες απαντήσεις στο συγκεκριμένο ερώτημα, με ίσως την πιο αναμενόμενη να είναι αυτή που ποσοτικοποιεί τη μεταβολή μέσω της διαφοράς των τιμών. Στα οικονομικά βέβαια συνηθίζεται να μελετάται η αλλαγή με λόγο, αφενός γιατί έτσι είναι εμφανέστερη η σύγκριση, αφετέρου γιατί οι άνθρωποι συνήθως καταλαβαίνουν

τις διαφορές στις τιμές συγκριτικά με προηγούμενα έτη «ποσοστιαία». Όπως και να 'χει πάντως, η βιβλιογραφία έχει διαμορφωθεί στον ορισμό με λόγο, οπότε στη συνέχεια θα ποσοτικοποιούμε τη μεταβολή με λόγο και όχι με διαφορά. Επίσης, οι μαθητές θα πρέπει να σκεφτούν αν η μεταβολή θα γίνει στα συνολικά έξοδα ή στα έξοδα του τεμαχίου – αυτό έχει σημασία όταν η μεταβολή ποσοτικοποιείται με διαφορά και όχι με λόγο. Με λόγο λοιπόν περιμένουμε μια απάντηση της μορφής:

$$\frac{\text{Κόστος μετά}}{\text{Κόστος πριν}}$$

II. Εκτός από το πόσο μεταβλήθηκαν οι τιμές, αυτό που κυρίως μας ενδιαφέρει είναι πόσο μεταβλήθηκε η μεταβολή των τιμών. Εξάλλου ο πληθωρισμός είναι μια κατάσταση στην οποία συναντάται συνεχής αύξηση των τιμών, οπότε είναι εύλογο κανείς να μελετά πόσο αλλάζουν οι μεταβολές των τιμών. Μπορείτε - στο ερώτημα I. - να βρείτε την ποσοστιαία μεταβολή της αύξησης των τιμών;

Σχόλιο: Η έννοια της μεταβολής ποσοστιαία είναι κάτι που συναντάται στο σχολικό πρόγραμμα, περιέργως κυρίως όχι στα μαθηματικά, αλλά στη φυσική. Οι μαθητές σ' αυτό το σημείο καλούνται να κάνουν τη σύνδεση, ότι τελικά η ποσοστιαία μεταβολή είναι μαθηματικό εργαλείο. Επιπλέον, βρίσκοντας τη μεταβολή θα έχουν ποσοτικοποιήσει, κατά κάποιον τρόπο, τον πληθωρισμό. Χρησιμοποιώντας τη μεταβολή του *I.* με λόγο:

$$\frac{\frac{\text{Κόστος πιο μετά}}{\text{Κόστος μετά}} - \frac{\text{Κόστος μετά}}{\text{Κόστος πριν}}}{\frac{\text{Κόστος μετά}}{\text{Κόστος πριν}}} \cdot 100\%$$

Μετά απ' αυτήν την άσκηση θα πρέπει να πούμε στους μαθητές ότι η μεταβολή στο *I.* ποσοτικοποιείται συνήθως με λόγο (και δεν είναι η μόνη σωστή απάντηση) και η ποσοστιαία μεταβολή στο *II.* είναι η παραπάνω.

III. Συνήθως ο πληθωρισμός ποσοτικοποιείται (για παράδειγμα μηνιαία) μέσω του ακόλουθου τύπου:

$$\text{πληθωρισμός} = \frac{\frac{\text{Κόστος μήνα } (n+2)}{\text{Κόστος μήνα } (n+1)} - \frac{\text{Κόστος μήνα } (n+1)}{\text{Κόστος μήνα } (n)}}{\frac{\text{Κόστος μήνα } (n+1)}{\text{Κόστος μήνα } (n)}} \cdot 100$$

Παρατηρείτε κάποια ομοιότητα με τον τύπο που βρήκατε στο II.; Είναι λογική αυτή η συσχέτιση;

Σχόλιο: Αναμένεται σε αυτό το σημείο οι μαθητές να κάνουν τη σύνδεση με τα προηγούμενα και να σκεφτούν γιατί οι ορισμοί που δόθηκαν είναι λογικοί. Πρέπει να γίνει σύνδεση του λεκτικού ορισμού με τη μαθηματική ποσοτικοποίησή του.

Με τα *I.*, *II.* υπόψη, μπορούμε να προχωρήσουμε σε εφαρμογές.

3.3.2. Μερικοί υπολογισμοί

III. Μπείτε στο okaa.gr και επιλέξτε την κατηγορία «στατιστικά δελτία τιμών». Για τη μέση ετήσια κατανάλωση για κάθε κατηγορία, να υπολογίσετε το μέσο κόστος αγορών για το κρέας για κάθε τρίμηνο από το 2018 μέχρι και το 2022.

Σχόλιο: Οι μαθητές καλούνται να διαβάσουν δεδομένα μεγάλου όγκου, κάτι με το οποίο δεν εξασκούνται επαρκώς στο σχολείο. Επίσης, παρουσιάζεται ο υπολογιστής και συγκεκριμένα η εφαρμογή Excel ως εργαλείο διαχείρισης μεγάλου όγκου δεδομένων, και γίνεται μια παρουσίαση της χρήσης του. Το Excel (παρόλα τα προβλήματά του)[BBC] [BIIN] [NATU] αποτελεί ένα από τα μεγαλύτερα προγράμματα διαχείρισης όγκου δεδομένων (μαζί με την R, η οποία είναι καλύτερη αλλά πιο δύσχρηστη).[TRPSC]

IV. Θεωρώντας το 2018 ως έτος βάσης, υπολογίστε τον πληθωρισμό του δείκτη τιμών για κάθε τρίμηνο της παραπάνω περιόδου, για το συγκεκριμένο προϊόν.

Σχόλιο: Εδώ οι μαθητές καλούνται να χρησιμοποιήσουν στην πράξη τους τύπους που βρήκαν στα προηγούμενα ερωτήματα. Φυσικά οι μαθητές μπορεί να σκεφτούν ότι δεν είναι ανάγκη να κάνουν «στο χαρτί» όλες τις πράξεις, κι ότι το Excel μπορεί να βοηθήσει με τις εντολές υπολογισμού που ήδη διαθέτει.

3.3.3. Επεκτάσεις συναρτήσεων

V. Με βάση τα δεδομένα του ερωτήματος III., χαράξτε τη γραφική παράσταση που αντιπροσωπεύει την πορεία του δείκτη τιμών και τη γραφική παράσταση που αντιπροσωπεύει την πορεία του πληθωρισμού την περίοδο εκείνη, όπως προέκυψε από το ερώτημα IV.. Επιβεβαιώστε τα αποτελέσματά σας κάνοντας τα αντίστοιχα διαγράμματα στο Excel.

Σχόλιο: Το ζήτημα της χάραξης γραφικής παράστασης δεν είναι καθόλου τετριμμένο όταν τα δεδομένα είναι διακριτά, όπως στην περίπτωση του πεπερασμένου πλήθους. Ίσως κάποιοι μαθητές θελήσουν να σχεδιάσουν σημεία, άλλοι ίσως θέλουν να ενώσουν τα σημεία με ευθύγραμμα τμήματα. Ποια είναι η σωστή προσέγγιση; Και οι δύο είναι σωστές προσεγγίσεις, ανάλογα με το τι θέλει κάθε ερευνητής – για παράδειγμα, αν θέλει τα δεδομένα χωρίς καμία παρεμβολή, το διάγραμμα των σημείων είναι αυτό που χρειάζεται. Αλλιώς, μπορεί να επιζητήσει μια συνεχή μεταβολή, οπότε είναι χρήσιμο το διάγραμμα των ευθυγράμμων τμημάτων. Αν θέλει κιόλας το γράφημα να «παραγωγίζεται», εδώ τα πράγματα δυσκολεύουν περισσότερο. Γενικά στην ανάλυση υπάρχει μεγάλη μελέτη στο πώς επεκτείνεται μια συνάρτηση. Στα οικονομικά ποια μέθοδος προσέγγισης των καμπυλών του πληθωρισμού θα ακολουθηθεί, ώστε να προσεγγίζει την «πραγματικότητα», είναι ένα ερώτημα ακόμη αναπάντητο. Εικάζεται ότι δεν έχει νόημα μια «ομαλή» (λ.χ. παραγωγίσιμη) προσέγγιση, αφού οι δείκτες ενδέχεται να προσεγγίζονται με μορφοκλάσματα (δείτε το [4.2]).

3.3.4. Συλλογή δεδομένων, υπολογισμοί και εξαγωγή συμπερασμάτων

VI. Με τη βοήθεια των γονιών σας συλλέξτε τα οικογενειακά έξοδα που αφορούν το ρεύμα και τη βενζίνη τον Ιανουάριο του 2023 και τον Ιανουάριο του 2022. Υπολογίστε τον προσωπικό σας πληθωρισμό και συγκρίνετέ τον με τον μέσο πληθωρισμό της χώρας στις αντίστοιχες κατηγορίες.

> Σχόλιο: Εδώ οι μαθητές χρειάζεται να συλλέξουν δεδομένα, το οποίο είναι πολύ σημαντικό και συνήθως δεν εξασκείται στο σχολείο. Οι μαθητές επιλέγουν δεδομένα για κάποιο σκοπό – εδώ για να βρουν τον προσωπικό πληθωρισμό τους και τον πληθωρισμό της χώρας (στην πρώτη περίπτωση γίνεται άμεση συλλογή, στη δεύτερη έμμεση). Αφού γίνει η συλλογή των δεδομένων, μπορούν να χρησιμοποιηθούν τα παραπάνω ερωτήματα για να υπολογιστούν οι πληθωρισμοί και να γίνει η οπτικοποίησή τους, προκειμένου να γίνει σύγκριση. Αυτή η διαδικασία που ακολουθείται είναι, σε γενικές γραμμές, η διαδικασία που θα ακολουθούσε ένας οικονομολόγος.

3.4. Επέκταση της δραστηριότητας

Παρακάτω θα αναφέρουμε επιγραμματικά τρόπους με τους οποίους κανείς θα μπορούσε να επεκτείνει τη δραστηριότητα στο σχολικό περιβάλλον.

- Μπορεί να γίνει νύξη του [4.2], αν κι αυτό πιθανότατα να δυσκολέψει τους μαθητές, αν γίνει σε συνδυασμό με την προηγούμενη εργασία.
- Μπορούν να προστεθούν περισσότερα ερωτήματα που κάνουν χρήση προγραμμάτων όπως το Excel, ή να γίνει μεγαλύτερη εμβάθυνση στο πώς γίνεται χρήση του εν λόγω προγράμματος.
- Μπορεί να συζητηθεί κατά πόσο ο πληθωρισμός είναι ένας δείκτης οικονομικής ευημερίας. Ποιοι παράγοντες (ιστορικά) επηρεάζουν τη μεταβολή του;

Παράρτημα

4.1. Ο πόλεμος στην Ουκρανία – Οικονομικές επιπτώσεις

Στις 24 Φεβρουαρίου του 2022 Ρωσικά στρατεύματα εισέβαλαν στο έδαφος της Ουκρανίας, ακόμη για άγνωστους λόγους.

Είναι η πρώτη φορά μετά από πολλά χρόνια που ξεσπά πόλεμος τέτοιου μεγέθους στην Ευρώπη, οπότε είναι λογική η συντάραξη παγκοσμίως. Συγκεκριμένα διάφοροι οικονομολόγοι ερευνούν από την πρώτη στιγμή πιθανές οικονομικές επιπτώσεις αυτής της πολεμικής σύγκρουσης, μιας και σ' έναν βαθμό ο «πόλεμος» πλέον γίνεται σε οικονομικό επίπεδο, τουλάχιστον από την πλευρά της Ευρώπης και των ΗΠΑ. Εξάλλου η ισορροπία που επικρατεί σε τέτοιες συγκρούσεις είναι συνήθως «ισορροπία τρόμου», λόγω φόβου έναρξης πυρηνικής διαμάχης.

Κυρίως οι χώρες τις Ευρωπαϊκής Ένωσης και οι ΗΠΑ επέβαλαν τεράστιες κυρώσεις έναντι της Ρωσίας, απέβαλλαν τις μεγαλύτερες Ρωσικές τράπεζες από το SWIFT[SWIFT] και έβαλαν «φρένο» στην αγοραπωλησία της Ρωσικής ενέργειας. Αυτή η αντιμετώπιση πέτυχε την αποδυνάμωση της Ρωσικής οικονομίας, ταυτόχρονα όμως δημιούργησε μια δύσκολη κατάσταση για την ΕΕ και τις ΗΠΑ, καθώς η Ρωσία είναι πάροχος του 19% της ποσότητας φυσικού αερίου του πλανήτη.

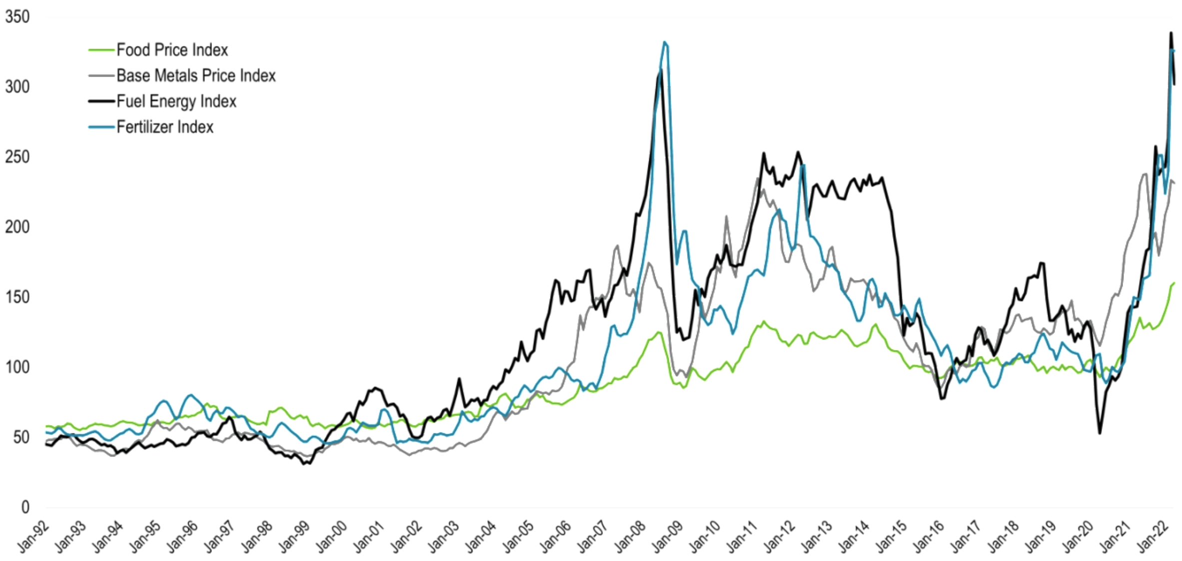
Οι «δυτικές κυρώσεις» μείωσαν την αξία του ρουβλιού (Ρωσικό νόμισμα), η αξία της μεγαλύτερης Ρωσικής τράπεζας Sberbank έπεσε κατά 96%, η παραγωγός ενέργειας Gazprom υποτιμήθηκε κατά 90% και η Rosneft κατά 50%. Η Ρωσία φοβούμενη την πτώση των μετοχών έκλεισε το MOEX[MOEX] για τρεις εβδομάδες.

Η ΕΕ είναι σε έναν μεγάλο βαθμό εξαρτώμενη από τη Ρωσική ενέργεια, και μετά την απόφαση να μην γίνονται αγοραπωλησίες Ρωσικής ενέργειας, στράφηκε προς τις ΗΠΑ. Λόγω ζήτησης το πετρέλαιο από τις ΗΠΑ δέχθηκε αύξηση στην αξία του αρχικά κατά 68.43% κι έπειτα κατά 86.67%, πράγμα που έκανε τη χρήση ενέργειας αρκετά ακριβότερη.[GLIMTBBS]

Αυτό οδήγησε σε μια γενικότερη αύξηση στην αξία των αγαθών, αφού η παραγωγή τους είχε μεγαλύτερο κόστος. Ιδιαίτερα μεγάλη αύξηση στις τιμές τους είχαν τα παράγωγα σίτου, μιας και η Ουκρανία είναι από τους μεγαλύτερους παραγωγούς σιτηρών στην Ευρώπη και τον κόσμο.

4.2. Μορφοκλασματική συμπεριφορά κάποιων δεικτών

Παρατηρώντας διάφορα διαγράμματα τιμών-χρόνου (για παράδειγμα στο χρηματιστήριο) διάφοροι ερευνητές έκαναν μια εικασία: Η αυξομειώσεις των τιμών (που είναι χαοτικό φαινόμενο) προσδιορίζονται σε κάποιες περιπτώσεις από φαινομενικά τυχαίους παράγοντες, οπότε είναι πρακτικά «τυχαίες κινήσεις».



Εικόνα 4.1.[ROJE]

Οι «τυχαίες» κινήσεις είναι οι «τυχαίες» αυξομειώσεις στον άξονα των τιμών (y) και το γράφημα είναι η απεικόνιση αυτών των κινήσεων εις βάθος χρόνου (x).[VATA]

Μαθηματικά μιλώντας, εικάζεται ότι κάποιοι (χαοτικοί) οικονομικοί δείκτες προσεγγίζονται από κινήσεις (t, Y_t), όπου:

- t είναι ο χρόνος,
- Y_t είναι πραγματικές τυχαίες μεταβλητές (υπολογιζόμενες στο t),
- για όλα τα $t_1, \cdots, t_k$ τα «βήματα» $Y_t - Y_{t-1}, \cdots, Y_2 - Y_1$ είναι ανεξάρτητα,
- κάθε βήμα $Y_t - Y_s$ $(t > s)$ ακολουθεί κανονική κατανομή $\mathrm{Norm}(0, t-s)$,
- σχεδόν για κάθε t η απεικόνιση $t \mapsto Y_t$ είναι συνεχής.[CBYP]

Ο παραπάνω ορισμός είναι κάτι που εκ των πραγμάτων *δεν* μπορεί να παρουσιαστεί σε ένα σχολικό πλαίσιο, καθώς τα εν λόγω αντικείμενα προϋποθέτουν για την κατανόησή τους ένα αρκετά μεγαλύτερο εννοιολογικό πεδίο (απ' αυτό που αναμένεται να έχουν οι μαθητές). Για καλή μας τύχη πάντως, οι κινήσεις που περιγράψαμε παραπάνω προσεγγίζουν τις (μονοδιάστατες) κινήσεις σωματιδίων, και είναι οι λεγόμενες κινήσεις Brown. Σ' αυτές θα αναφερθούμε αργότερα και θα τις χρησιμοποιήσουμε για μια ομαλότερη εισαγωγή στη μελέτη των οικονομικών δεικτών.

Οι τυχαίες κινήσεις εντάσσονται εννοιολογικά στη μελέτη των μορφοκλασμάτων (fractals). Στη συνέχεια λοιπόν θα αναφερθούμε στα μορφοκλάσματα, διατυπώνοντας κυρίως βασικούς ορισμούς. Αυτό το κάνουμε για να μπορέσουμε στη συνέχεια να παρουσιάσουμε στους μαθητές μια πτυχή των μορφοκλασμάτων και κυρίως πώς θα διαπιστώνουμε αν ένας δείκτης ενδέχεται να προσεγγίζεται από μορφόκλασμα.

4.2.1. Μορφοκλάσματα και μορφοκλασματικές διαστάσεις

Η κατηγορία των μορφοκλασμάτων είναι ευρεία και δεν ορίζεται ακριβώς. Δεν υπάρχει δηλαδή ένας ενιαίος ορισμός για την περιγραφή του τι είναι μορφόκλασμα, μονάχα διαφορετικές υποκατηγορίες σχημάτων που συνιστούν την κατηγορία των μορφοκλασμάτων. Για παράδειγμα, τα σχήματα που έχουν «μεγάλη πολυπλοκότητα» εντάσσονται στην κατηγορία των μορφοκλασμάτων. Τι σημαίνει όμως πολυπλοκότητα;

Περιέργως η έννοια της διάστασης είναι ένα μέτρο του πόσο περίπλοκο είναι ένα σχήμα. Είναι ευκολότερο κανείς να μελετήσει (η ακόμη και να φανταστεί) μια ευθεία παρά μια σφαίρα. Επίσης, κανείς είναι ευκολότερο να αναλύσει μικρότερο ποσό δεδομένων παρά μεγαλύτερο. Οι μαθηματικοί προσπάθησαν να γενικεύσουν την έννοια της διάστασης ώστε να μπορέσουν να περιγράψουν καλύτερα την πολυπλοκότητα στα σχήματα.

Το μέτρο πολυπλοκότητας που θα χρησιμοποιήσουμε εμείς είναι η διάσταση του Minkowski. Ας θεωρήσουμε ένα τετράγωνο πλευράς a, το οποίο είναι διδιάστατο. Μπορούμε να καλύψουμε το τετράγωνο αυτό με:

$$N_\delta = \left(\frac{a}{\delta}\right)^2$$

Τετραγωνάκια πλευράς δ, αφού η πλευρά δ χωράει στην a περίπου a/δ φορές. Παρατηρούμε εδώ ότι ο εκθέτης είναι ακριβώς η διάσταση του σχήματος, οπότε μπορούμε να γράψουμε:

$$2 = \frac{\log N_\delta}{\log a - \log \delta}$$

Μάλιστα με όριο ως προς $\delta \to 0^+$ η εξάρτηση από τα a, δ εξαλείφεται.

$$2 = \lim_{\delta \to 0^+} \frac{\log N_\delta}{-\log \delta}$$

Δίνεται λοιπόν ο ακόλουθος ορισμός, της διάστασης του Minkowski:

Ορισμός: Έστω S ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Ορίζουμε ως διάσταση Minkowski του S τον αριθμό:

$$\dim_{\mathcal{M}} S = \lim_{\delta \to 0^+} \frac{\log N_\delta}{-\log \delta}$$

όπου N_δ είναι το ελάχιστο πλήθος υπερκύβων πλευράς δ που καλύπτουν το S.

Αναμένεται ένα «ομαλό» υποσύνολο S του $\mathbb{R}^n$ με διάσταση $m < n$ (δηλ. περιγράφεται από m μεταβλητές) να έχει διάσταση $\dim_{\mathcal{M}} S$ ίση με m. Εάν έχει διάσταση $\dim_{\mathcal{M}} S$ γνήσια μεγαλύτερη του m, θα είναι περίπλοκο, δηλαδή μορφόκλασμα (η διάσταση και η διάσταση Minkowski δεν ταυτίζονται πάντα).

Εάν λοιπόν ένας οικονομικός δείκτης προσεγγίζεται από μια συνάρτηση που για σχετικά μικρό δ έχει:

$$\frac{\log N_\delta}{-\log \delta} > 1$$

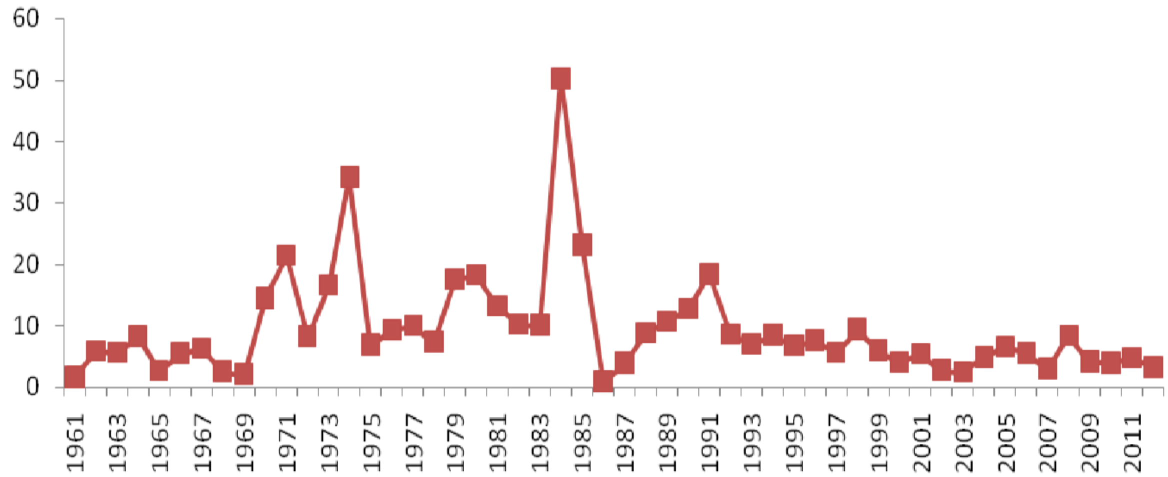
αυτό είναι μια *ένδειξη* ότι ο δείκτης προσεγγίζεται από κάποιο μορφόκλασμα (τα γραφήματα είναι γραμμές, οπότε μονοδιάστατα). Αφού τελειώσουμε με την περιγραφή της θεωρίας μορφοκλασμάτων, θα δούμε πώς μπορούμε να εφαρμόσουμε τα παραπάνω σε μία τάξη.

4.2.2. Κινήσεις Brown

Οι κινήσεις στον άξονα των (y) πολλών οικονομικών δεικτών ενδέχεται να είναι τυχαιοποιημένες. Μάλιστα ενδέχεται να περιγράφονται από μονοδιάστατες κινήσεις Brown, οπότε η κίνηση στον άξονα των (y) ενδέχεται να μπορεί να ειδωθεί ως κίνηση ενός σωματιδίου. Κάνοντας το γράφημα του χρόνου-θέσης του σωματιδίου, το προκύπτον γράφημα ενδεχομένως προσεγγίζει τον οικονομικό δείκτη.

Οπότε, αντί να δοθούν περίπλοκοι ορισμοί για την περιγραφή των κινήσεων των δεικτών, μπορεί απλά να ειπωθεί ότι ένα γράφημα ενός οικονομικού δείκτη μπορεί κανείς να φανταστεί ότι είναι η κίνηση μέσα στον χρόνο ενός σωματιδίου που κινείται σε μία διάσταση (y).

4.2.3. Μορφοκλασματική ανάλυση δεδομένων



Εικόνα 4.2.[NDRSARBE] *Ο πληθωρισμός στις Φιλιππίνες από το 1961 ως το 2012.*

Έχουν γίνει διάφορες μελέτες με διάφορους οικονομικούς δείκτες για να διαπιστωθεί αν έχουν μεγάλη πολυπλοκότητα. Στο [NDRSARBE] διαπιστώνεται ότι ο πληθωρισμός στις Φιλιππίνες ίσως εμφανίζει μορφοκλασματική συμπεριφορά.

Στο [KYHZWZQW] διαπιστώνεται ότι η τιμή του χρυσού στην Κινεζική αγορά στο τέλος κάθε ημέρας ενδεχομένως δεν εμφανίζει μορφοκλασματική συμπεριφορά, οπότε ίσως να μην περιγράφονται όλοι οι οικονομικοί δείκτες μέσω μορφοκλασμάτων, παρά μόνο κάποιοι.

Οι μαθητές στο σενάριο που θα ακολουθήσει θα πρέπει να διερευνήσουν εάν ένας δείκτης ενδέχεται να προσεγγίζεται από μορφοκλάσματα ή όχι, μελετώντας τη διάσταση Minkowski προσεγγιστικά.

4.2.4. Εισαγωγή στους μαθητές

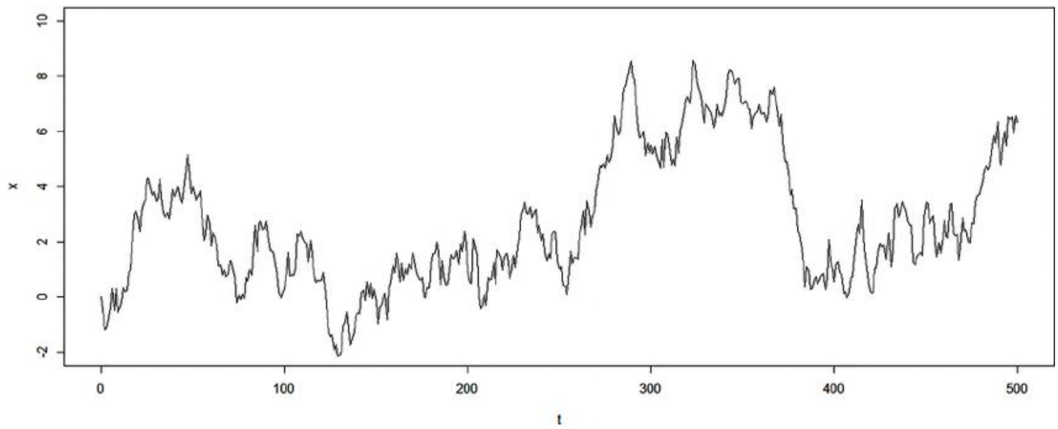
Η παρακάτω δραστηριότητα είναι ενδεικτική του τι θα παρουσιαστεί στους μαθητές. Δεν θα γίνει πλήρης ανάλυση του θέματος καθώς δεν είναι τα κύριο κομμάτι αυτής της εργασίας.

Η δραστηριότητα απευθύνεται σε μαθητές Γ’ Λυκείου και έχει διάρκεια 2 διδακτικών ωρών.

Τα σχόλια που προσθέτουμε θα σημειώνονται με το κόκκινο «Σχόλιο».

4.2.4.1. Τυχαιοποιημένοι δείκτες ή δύσκολα προβλέψιμοι;

Ι. Δύο ερευνητές κοιτάζουν το ακόλουθο γράφημα στο χρηματιστήριο:



στο οποίο απεικονίζεται η τιμή μιας μετοχής σε διάστημα 500 ημερών. Ο πρώτος ισχυρίζεται ότι οι αυξομειώσεις της τιμής της μετοχής είναι πρακτικά τυχαίες, γιατί δεν μπορούμε να γνωρίζουμε όλους τους παράγοντες που την επηρεάζουν. Ο δεύτερος διαφωνεί λέγοντας ότι κάποια τουλάχιστον χαρακτηριστικά μπορούν να προβλεφθούν, όπως για παράδειγμα αν η τιμή θα αυξηθεί ή όχι (χωρίς να γνωρίζουμε πόσο).

Ποιά είναι η δική σας γνώμη; Συμφωνείτε με κάποιον από τους δύο;

> Σχόλιο: Σε αυτό το σημείο κάνουμε μαθηματικά με διερεύνηση. Απαντήσεις εξάλλου δεν μπορούν να δοθούν με απόλυτη βεβαιότητα, μιας και το θέμα που διαπραγματευόμαστε είναι ανοικτό. Πέρα απ’ αυτό πάντως, είναι σημαντικό να θιχθεί το κομμάτι της λογικής μαντεψιάς και της λογικής επιλογής,[MALA] καθώς στα μαθηματικά δεν είναι λίγες οι φορές που κανείς παίρνει ρίσκο και λειτουργεί υπό μια αμφισβητήσιμη υπόθεση προκειμένου να φτάσει κοντύτερα στην

αλήθεια. Επιπλέον, η συνειδητοποίηση ότι ένα αυστηρό μοτίβο ενδέχεται να μην υπάρχει, αποτελεί κατά κάποιον τετριμμένο τρόπο εύρεση μοτίβου.

II. Στο παραπάνω ερώτημα κάνατε μία υπόθεση, είπατε για παράδειγμα ότι υπάρχει τυχαιοποίηση ή ότι δεν υπάρχει. Μπορείτε να βρείτε στοιχεία που να την υποστηρίζουν;

Σχόλιο: Αφού διατυπωθεί μία υπόθεση, επόμενο βήμα είναι να ελεγθεί. Η επιστήμη προχωρά διατυπώνοντας υποθέσεις / εικασίες κι έπειτα προσπαθεί να τις επιβεβαιώσει ή διαψεύσει.

Σε αυτό το ερώτημα αναμένουμε οι μαθητές να προσπαθήσουν να προσεγγίσουν το πρόβλημα χρησιμοποιώντας έννοιες ισορροπίας. Για παράδειγμα, δεν υπάρχει λόγος η κίνηση του δείκτη προς τα πάνω να είναι περισσότερο συχνή από την κίνηση προς τα κάτω, ούτε τα «άλματα» προς το θετικό κομμάτι του άξονα των (y) να είναι μεγαλύτερα από τα άλματα προς το αρνητικό κομμάτι του.

4.2.4.2. Μια ένδειξη για την τυχαιότητα

III. Διάφοροι οικονομολόγοι εικάζουν ότι διάφορα γραφήματα στα οικονομικά μπορούν να προσεγγιστούν από κινήσεις σωματιδίων. Δηλαδή, ένα γράφημα των οικονομικών θα μπορούσε να είναι το γράφημα χρόνου-κίνησης ενός σωματιδίου. Κατ' αυτήν την έννοια, το γράφημα είναι ένα αρκετά περίπλοκο σύνολο.

Εάν καταφέρουμε να βρούμε έναν τρόπο να προσδιορίζουμε πότε ένα σχήμα είναι περίπλοκο, τότε ελέγχοντας αν ένα γράφημα των οικονομικών είναι περίπλοκο θα έχουμε μια ένδειξη ότι ίσως προκύπτει με κάποιον τυχαίο τρόπο.

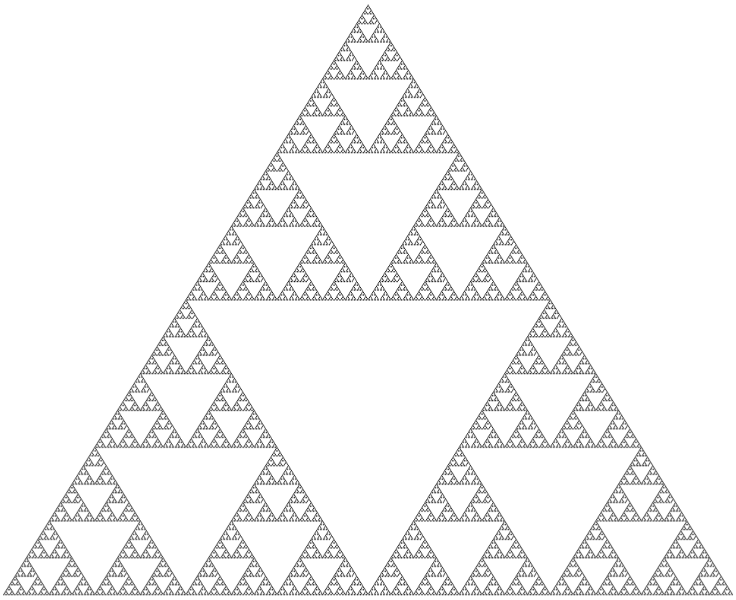
Στα μαθηματικά ορίζουμε την πολυπλοκότητα μιας γραμμής του επιπέδου μέσω ενός αριθμού. Εάν N_δ είναι το ελάχιστο πλήθος από τεραγωνάκια πλευράς δ που την καλύπτουν, η πολυπλοκότητα της γραμμής είναι ο αριθμός:

$$d = \lim_{\delta \to 0^+} \frac{\log N_\delta}{-\log \delta}$$

και το σύνολο λέμε ότι είναι περίπλοκο όταν $d > 1$. Με βάση αυτόν τον τύπο, ελέγξτε προσεγγιστικά αν το γράφημα που σας δόθηκε στην αρχή είναι περίπλοκο ή όχι.

Σχόλιο: Οι μαθητές αναμένεται να λειτουργήσουν κατασκευαστικά πάνω σε μια εκτυπωμένη μορφή του γραφήματος, σχεδιάζοντας μικρά τετράγωνα πλευράς δ και καλύπτοντας το γράφημα του. Σ' αυτό λοιπόν το ερώτημα απαιτείται χρήση υλικών – υποθέτουμε ότι η σύνδεση των τριών εννοιών «οικονομικός δείκτης», «γραφική αναπαράσταση» και «γεωμετρική αναπαράσταση» θα καταστήσει καλύτερη την κατανόηση από πλευράς των μαθητών.

IV. Γιατί ο αριθμός d εκφράζει πράγματι πολυπλοκότητα; Κατ' αρχάς, ας δούμε ένα πολύ γνωστό παράδειγμα, το τρίγωνο του Sierpiński. Το τρίγωνο αυτό κατασκευάζεται με τον εξής τρόπο: Θεωρήστε ένα ισοσκελές τρίγωνο και χωρίστε το σε τέσσερα ίσα ισοσκελή τρίγωνα. Από αυτά αφαιρέστε το μεσαίο και λειτουργήσετε ανάλογα για τα υπόλοιπα τρία μικρότερα τρίγωνα. Το σχήμα που θα κατασκευάσετε στο τέλος (μετά από άπειρα βήματα) θα μοιάζει με το ακόλουθο:



Μπορείτε – αυτήν την φορά όχι προσεγγιστικά αλλά ακριβώς – να βρείτε την πολυπλοκότητα αυτού του σχήματος; Υποθέστε ότι τα τρία πρώτα υπο-τρίγωνα έχουν πλευρά $1/2$.

Σχόλιο: Εδώ οι μαθητές μπορούν να δουλέψουν με δύο τρόπους, είτε χρησιμοποιώντας όρια ακολουθιών είτε γράφοντας διαδοχικά προσεγγίσεις της πολυπλοκότητας και μαντεύοντας το όριο.

Εάν θεωρήσουμε τετραγωνάκια πλευράς $1/2$, το παραπάνω σχήμα καλύπτεται από 3 τετράγωνα. Άρα:

$$d \approx \frac{\log 3}{-\log(1/2)} = \frac{\log 3}{\log 2}$$

Μικραίνοντας τα τετραγωνάκια ώστε να έχουν πλευρά $(1/2)^2$, το τρίγωνο καλύπτεται από 3^2 τετραγωνάκια, αφού κάθε μικρότερο τριγωνάκι είναι σμίκρυνση της προηγούμενης προσέγγισης. Επομένως:

$$d \approx \frac{\log(3^2)}{-\log[(1/2)^2]} = \frac{2\log 3}{2\log 2} = \frac{\log 3}{\log 2}$$

Συνεχίζοντας αναλόγως, όλες οι προσεγγίσεις παίρνουν τη μορφή:

$$d \approx \frac{\log(3^n)}{-\log[(1/2)^n]} = \frac{n\log 3}{n\log 2} = \frac{\log 3}{\log 2}$$

κι άρα το d θα πρέπει να είναι ακριβώς $\log 3 \,/\, \log 2$. Εδώ η πολυπλοκότητα είναι μεγαλύτερη του 1, γνήσια.

V. Εδώ θα αιτιολογήσουμε λίγο περισσότερο τον ορισμό της πολυπλοκότητας. Η πολυπλοκότητα όπως την ορίσαμε είναι στην πραγματικότητα μια γενίκευση της διάστασης.

Ας θεωρήσουμε ένα τετραγωνάκι πλευράς α. Το τετραγωνάκι αυτό καλύπτεται από:

$$N_\delta = \left(\frac{a}{\delta}\right)^2$$

τετραγωνάκια πλευράς δ, μιας και χωρούν περίπου a/δ πλευρές δ στην a. Εδώ βλέπουμε ότι το εκθέτης 2 είναι η διάσταση του τετραγωνακιού. Αν λοιπόν γράψουμε:

$$\log N_\delta = 2\log(a/\delta) \Rightarrow 2 = \frac{\log N_\delta}{\log(a/\delta)} = \frac{\log N_\delta}{\log a - \log \delta}$$

τότε για μικρά δ (δηλαδή για μεγάλα $-\log \delta$) το 2 προσεγγίζεται:

$$2 \approx \frac{\log N_\delta}{-\log \delta}$$

Απ' αυτό μπορούμε έπειτα να γενικεύσουμε την έννοια της διάστασης, και να ορίσουμε της πολυπλοκότητα. Ερώτημα: Είναι η διάσταση όπως την γνωρίζαμε πριν την γενίκευση (κατά μία έννοια) ένας τρόπος να υπολογίζουμε πόσο περίπλοκο είναι ένα σχήμα;

> Σχόλιο: Αναμένεται από τους μαθητές να παρατηρήσουν γνωστά σχήματα σε μεγάλες διαστάσεις είναι σχετικά δύσκολο να περιγραφούν, οπότε είναι περίπλοκα. Για παράδειγμα, η ευθεία περιγράφεται σχετικά εύκολα, η δε σφαίρα όχι και τόσο. Με μόλις ένα διάνυσμα κανείς προσδιορίζει μια ευθεία, για τη σφαίρα απαιτούνται δύο.

Βιβλιογραφία

Βιβλιογραφία

[NIFE]: Ferguson Niall, *Η Εξέλιξη του Χρήματος, μια Οικονομική Ιστορία του Κόσμου (The Ascent of Money, a Financial History of the World)*, Εκδ. «Αλεξάνδρεια», 2011.

[NKZM]: Κουτσιαράς Νίκος, Μανούζας Ζήσης, *Πολιτική Οικονομία Ι: Μακροθεωρία και Πολιτική*, ΕΚΠΑ, Σχολή Οικονομικών και Πολιτικών Επιστημών, Τμήμα Πολιτικής Επιστήμης και Δημόσιας Διοίκησης.

[DALE]: Λεώνη Ευαγγελάτου-Δάλλα, *Στοιχεία Fractal Γεωμετρίας*, ΕΚΠΑ, Τμήμα Μαθηματικών, 2000.

[CBYP]: Christopher Bishop, Yuval Peres, *Fractals in Probability and Analysis*, Cambridge University Press, 2016.

[VATA]: Velásquez Tania, *Chaos Theory and the Science of Fractals in Finance*, Copenhagen Business School, 2010.

[ROJE]: Rodrigue Jean-Paul, *The Geography of Transport Systems*, Routledge New York, 2020.

Μελέτες

[MALA]: Magdalene Lampert, *When the Problem is not the Question and the Solution is not the Answer: Mathematical Knowing and Teaching*, American Educational Research Journal, Spring 1990, Vol.27, No.1, pp. 29-63.

[ΕΕΕΜΦΕ]: Δελτίο τύπου της Ευρωπαϊκής Επιτροπής (2011), *Η αντιμετώπιση των χαμηλών επιδόσεων στα Μαθηματικά και στις Φυσικές επιστήμες εξακολουθεί να αποτελεί πρόκληση στην Ευρώπη,* Ευρωπαική Επιτροπή (ο ελληνικός σύνδεσμος δεν είναι πλέον διαθέσιμος, δείτε το αντίστοιχο αγγλικό στον: http://keyconet.eun.org/c/document_library/get_file?uuid=e456b461-d3cd-4bd5-aabc-2cae2d4bfaf9&groupId=11028).

[ΤΜΜΓ]: Τζεκάκη Μαριάννα, Μπάρμπας Γεώργιος, *Καινοτόμες διδακτικές προσεγγίσεις σε διαφορετικές χώρες*, Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, 2004.

[ΔΒΦΑ]: Δημητροκάλλης Βασίλειος, Φράγκος Αναστάσιος, *Άτυπη Μορφή Διδασκαλίας των Μαθηματικών,* ΕΚΠΑ, προπτυχιακή εργασία, 2019 (διαθέσιμο στον: https://afragos-math.github.io/files/others/amdm.pdf).

[ΣΑΓΕ]: Σαραντοπούλου Γεωργία, *Η εξέλιξη του χρήματος. Ιστορική αναδρομή - σύγχρονες μορφές και προκλήσεις*, Ελληνικό Ανοικτό Πανεπιστήμιο, 2018.

[ΛΟΧΑ]: Λόλας Χαράλαμπος, *Ιστορία του Χρήματος, Η μετάβαση από τα πρώτα ανταλλακτικά μέσα και τα πρώτα νομίσματα στην εποχή του ηλεκτρονικού χρήματος*, Ελληνικό Ανοικτό Πανεπιστήμιο, 2018.

[CAAL]: Cavallo Alberto, *Inflation with COVID Consumption Baskets*, NBER Working Paper Series, No. 27352, Harvard Business School, 2020.

[GLIMTBBS]: Gaye-Del Lo, Isaac Marcelin, Théophile Bassène, Babacar Sène, *The Russo-Ukrainian war and financial markets: the role of dependence on Russian commodities*, Elsevier, 2022.

[KYHZWZQW]: Kedong Yin, Hengda Zhang, Wenbo Zhang, Qian Wei: *Fractal Analysis of the Gold Market in China*, Romanian Journal of Economic Forecasting – XVI(3), 2013.

[NDRSARBE]: Nancy Doloriel, Rolly Salvaleon, Ariston Ronquillo, Baceledes Estal, *Fractal Analysis of Philipines Inflation Rate*, SDSSU Multidisciplinary Research Journal Vol. 2, No 1, 2014.

Ιστοσελίδες

[TRPSC]: The R Project for Statistical Computing: https://www.r-project.org/

[ΟΚΑΑ]: Οργανισμός Κεντρικών Αγορών και Αλιείας: https://www.okaa.gr/

[OECD]: Οργανισμός Οικονομικής Συνεργασίας και Ανάπτυξης (Organisation for Economic Co-operation and Development): https://www.oecd.org/

[SWIFT]: Κοινότητα για την Παγκόσμια Διατραπεζική Οικονομική Επικοινωνία (Society for Worldwide Interbank Financial Telecommunication): https://www.swift.com/

[MOEX]: Χρηματιστήριο της Μόσχας (Moscow Exchange): https://www.moex.com/en/

[EURO]: Ιστοσελίδα της Ευρωπαϊκής Επιτροπής: http://ec.europa.eu

[BBC]: BBC, *Excel: Why using Microsoft's tool caused Covid-19 results to be lost*, 05/10/2020: https://www.bbc.com/news/technology-54423988

[BIIN]: Business Insider, *How The London Whale Debacle Is Partly The Result Of An Error Using Excel*, 12/02/2013: https://www.businessinsider.com/excel-partly-to-blame-for-trading-loss-2013-2

[NATU]: Nature, *Autocorrect errors in Excel still creating genomics headache*, 13/08/2021: https://www.nature.com/articles/d41586-021-02211-4