Ασκήσεις στη Συναρτησιακή Ανάλυση

Σημείωση: Στο αρχείο με τις βάσεις Schauder (δηλαδή στο αρχείο που βρίσκεται στον σύνδεσμο https://afragos-math.github.io/files/analysis/schauder.pdf) έχω κάποιες αποδείξεις βασικών αποτελεσμάτων.

Τάσος Φράγκος

Άσκηση 1: *Έστω $(X, ||\cdot||)$ ένας χώρος με νόρμα. Αποδείξτε ότι ο $(X, ||\cdot||)$ είναι χώρος Banach εάν και μόνο αν για κάθε ακολουθία $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ του X ώστε $\sum_{k=1}^{\infty} ||x_n|| < \infty$, η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ συγκλίνει στον X.*

Απάντηση: ($\Rightarrow$) Υποθέτουμε ότι ο χώρος $(X, ||\cdot||)$ είναι Banach. Εάν $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ είναι μία ακολουθία του X με:

$$\sum_{k=1}^{\infty} ||x_k|| < \infty$$

τότε η $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ είναι μία ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών των οποίων το άθροισμα συγκλίνει. Δηλαδή, αν $n \leqslant m$ και $n \to \infty$:

$$\sum_{k=n}^{m} ||x_k|| \to 0 \text{ (δηλαδή } \lim^{|\cdot|}_{m \geqslant n \to \infty} \sum_{k=n}^{m} ||x_k|| = 0)$$

Έτσι λοιπόν, από την τριγωνική ανισότητα:

$$\left|\left|\sum_{k=n}^{m} x_k\right|\right| \leqslant \sum_{k=n}^{m} ||x_k|| \to 0 \text{ (δηλαδή } \lim^{||\cdot||}_{m \geqslant n \to \infty} \sum_{k=n}^{m} x_k = 0)$$

και κατά συνέπεια η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων $\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)_{n=1}^{\infty}$ είναι βασική. Επειδή ο χώρος $(X, ||\cdot||)$ είναι Banach (δηλαδή πλήρης), υπάρχει το όριο:

$$x = \lim^{||\cdot||}_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} x_k = \sum_{k=1}^{\infty} x_k$$

($\Leftarrow$) Υποθέτουμε ότι όποτε αληθεύει $\sum_{k=1}^{\infty} ||x_n|| < \infty$, η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ συγκλίνει στον X. Θεωρούμε $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ μία βασική ακολουθία στον X, και θα δείξουμε ότι συγκλίνει. Πράγματι, αν ορίσουμε:

$$x_1 = y_1, \ \ x_2 = y_2 - y_1, \ \ x_3 = y_3 - y_2, \cdots, x_n = y_n - y_{n-1}$$

τότε:

$$y_1 = x_1, \ \ y_2 = x_1 + x_2, \ \ y_3 = x_1 + x_2 + x_3, \cdots, y_n = \sum_{k=1}^{n} x_k = y_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (y_{k+1} - y_k)$$

(τα αθροίσματα γίνονται τηλεσκοπικά). Δηλαδή εάν $\sum_{k=1}^{\infty} ||x_k|| < \infty$, τότε από την υπόθεση η $\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνει κι άρα η $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνει.

Για να δείξουμε ότι η $\left(\sum_{k=1}^{n} ||x_k||\right)_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνει, θα δείξουμε ότι είναι βασική (αφού είναι ακολουθία πραγματικών αριθμών). Έστω λοιπόν $\varepsilon > 0$. Αφού η $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι βασική, για αρκετά μεγάλο $n > 1$:

$$||y_{k+1} - y_k|| < \varepsilon/2, \quad \text{για } k \geqslant n$$

κι επομένως:

$$\sum_{k=n}^{n+1} ||y_{k+1} - y_k|| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

οπότε η $\left(\sum_{k=1}^{n} ||x_k||\right)_{n=1}^{\infty}$ είναι βασική ακολουθία πραγματικών αριθμών.

□

Άσκηση 2: *Έστω ο χώρος με νόρμα* $(C([a,b]), ||\cdot||_\infty)$*, όπου:*

$$||f||_\infty = \sup |f|([a,b])$$

Θέτουμε $T : \big(C([a,b]), ||\cdot||_\infty\big) \to \big(C([a,b]), ||\cdot||_\infty\big)$ *μέσω του τύπου:*

$$f \mapsto T(f), \text{ όπου } T(f)(x) = \int_a^x f(t)\ dt$$

Δείξτε ότι:

i. Ο T *είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής.*

ii. $||T|| = b - a$

Απάντηση: Για το i.: Η γραμμικότητα του τελεστή είναι συνέπεια της γραμμικότητας του ολοκληρώματος.

$$T(f+g)(\cdot) = \int_a^{(\cdot)} (f+g)(t)\ dt = \int_a^{(\cdot)} f(t)\ dt + \int_a^{(\cdot)} g(t)\ dt = T(f)(\cdot) + T(g)(\cdot)$$

Όσον αφορά το φράγμα, γράφουμε:

$$|T(f)(x)| = \left|\int_a^x f(t)\ dt\right| \leqslant \left|\int_a^x\ dt\right| \cdot ||f||_\infty = |x-a| \cdot ||f||_\infty \leqslant (b-a)\cdot||f||_\infty$$

οπότε έχουμε:

$$||T(f)(\cdot)||_\infty \leqslant (b-a)\cdot ||f||_\infty$$

(εδώ η μεταβλητή είναι η συνάρτηση f, οπότε έπρεπε να φράξουμε τον τελεστή με ανισότητα της μορφής $||T(f)||_\infty \leqslant M \cdot ||f||_\infty$, πράγμα που τελικά κάναμε).

Για το ii.: Ήδη από την ανισότητα $||T(f)||_\infty \leqslant (b-a)\cdot||f||_\infty$ (που είδαμε παραπάνω) έπεται ότι $||T|| \leqslant b-a$. Θυμηθείτε ότι:

$$||T|| = \inf\{M > 0 \mid ||T(f)||_\infty \leqslant M \cdot ||f||_\infty\}$$

Έπειτα, γνωρίζουμε επίσης ότι:

$$||T|| = \sup\ T\partial S_{\left(C([a,b]),||\cdot||_\infty\right)}(0,1) = \sup\{||T(f)||_\infty \mid f \in C([a,b]),\ ||f||_\infty = 1\}$$

οπότε αν $h \equiv 1 \in \partial S_{\left(C([a,b]),||\cdot||_\infty\right)}(0,1)$:

$$|T(h)(x)| = \left|\int_a^x\ dt\right| = |x-a| = x-a, \quad \text{για κάθε } b > x > a$$

κι άρα $||T(h)||_\infty \geqslant b-a$ (από τον ορισμό της νόρμας $||\cdot||_\infty$). Αυτό δίνει τελικά (σε συνδυασμό με τον ισοδύναμο χαρακτηρισμό της νόρμας τελεστή) ότι:

$$||T|| = \sup\ T\partial S_{\left(C([a,b]),||\cdot||_\infty\right)}(0,1) \geqslant ||T(h)||_\infty \geqslant b-a$$

□

Άσκηση 3: *Έστω* $(X, ||\cdot||)$, $(Y, |||\cdot|||)$ *χώροι με νόρμα,* $T, T_n \in \mathcal{B}(X,Y)$ *(γραμμικοί, φραγμένοι τελεστές) και* $x, x_n \in X$, $n \in \mathbb{N}$*. Εάν* $T_n \to T \Leftrightarrow ||T_n - T|| \to 0$ *και* $x_n \to x$*, δείξτε ότι* $T_n(x_n) \to T(x)$.

Απάντηση: Θα δείξουμε ότι $||T_n(x_n) - T(x)|| \to 0$. Χρησιμοποιώντας την τριγωνική ανισότητα, μπορούμε να γράψουμε:

$$||T_n(x_n) - T(x)|| \leqslant ||T_n(x_n) - T_n(x)|| + |||T_n(x) - T(x)||$$

κι έπειτα, από τα φράγματα των τελεστών:

$$||T(x_n) - T(x)|| \leqslant ||T_n|| \cdot ||x_n - x|| + ||T_n - T|| \cdot ||x||$$

Τώρα από τις συγκλίσεις $T_n \to T$, $x_n \to x$ έπεται ότι οι νόρμες $||T_n||$, $||x_n||$ είναι φραγμένες, από τα M και Λ αντίστοιχα. Δηλαδή:

$$||T(x_n) - T(x)|| \leqslant M \cdot ||x_n - x|| + ||T_n - T|| \cdot \Lambda$$

κι αφήνοντας $n \to \infty$ έχουμε το ζητούμενο.

□

Άσκηση 4: *Έστω $(X, ||\cdot||)$ ένας χώρος με νόρμα και $T : X \to \mathbb{R}$ ένας τελεστής με $T \not\equiv 0$. Απόδείξτε ότι τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

i. Ο T είναι φραγμένος.

ii. Το σύνολο $\mathrm{Ker}\ T = T^{-1}(\{0\}) \subseteq X$ *είναι κλειστό.*

iii. Υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $T(S(0_X, \varepsilon)) \subset \mathbb{R}$.

Απάντηση: (i. $\Rightarrow$ ii.) Το $\{0\} \subseteq \mathbb{R}$ είναι κλειστό και ο T φραγμένος (άρα και συνεχής). Οι συνεχείς συναρτήσεις αντιστρέφουν τα κλειστά σε κλειστά (αφού αντιστρέφουν τα ανοικτά σε ανοικτά).

(ii. $\Rightarrow$ iii.) Εάν το σύνολο $\mathrm{Ker}\ T$ είναι κλειστό, το συμπλήρωμά του θα είναι ανοικτό. Δηλαδή, για κάθε $y \notin \mathrm{Ker}\ T$, υπάρχει $\varepsilon_y > 0$ ούτως ώστε $S(y, \varepsilon_y) \cap \mathrm{Ker}\ T = \varnothing$. Εάν λοιπόν δράσουμε με την T:

$$T(S(y, \varepsilon_y)) \not\ni 0$$

κι από την γραμμικότητα του T:

$$0 \notin T(y + S(0_X, \varepsilon_y)) \Rightarrow 0 \notin T(y) + T(S(0_X, \varepsilon_y)) \Rightarrow -T(y) \notin T(S(0_X, \varepsilon_y)) \Rightarrow T(-y) \notin T(S(0_X, \varepsilon_y))$$

(αφού αν $-T(y) \in S(0_X, \varepsilon_y)$, τότε με μεταφορά $0 \in T(y) + T(S(0_X, \varepsilon_y))$). Δηλαδή για $\varepsilon = \varepsilon_y$, $T(S(0_X, \varepsilon)) \subset \mathbb{R}$.

(iii $\Rightarrow$ i.) Δεδομένου του iii., υπάρχει κάποιος αριθμός $a \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε $a \notin T(S_X(0_X, \varepsilon))$. Μάλιστα λόγω γραμμικότητας $-a \notin T(S_X(0_X, \varepsilon))$, κι επίσης δεν είναι δυνατόν κάποιος b με $|b| > |a|$ (πιο μακρυά από το 0) να ανήκει στην εν λόγω εικόνα: εάν $b = T(x)$, $x \in S_X(0_X, \varepsilon)$, τότε $a = T(a/b \cdot x)$, $a/b \cdot x \in S_X(0_X, \varepsilon)$ (αφού $a/b \in (-1, 1)$). Δηλαδή όλη η εικόνα $T(S_X(0_X, \varepsilon))$ περιέχεται στο $(-|a|, |a|) = S_{\mathbb{R}}(0, |a|)$ και κατά συνέπεια:

$$T(S_X(0_X, \varepsilon)) \subseteq S_{\mathbb{R}}(0, |a|) \Rightarrow T(S_X(0_X, 1)) \subseteq S_{\mathbb{R}}(0, |a|/\varepsilon) \Rightarrow ||T|| \leqslant |a|/\varepsilon$$

οπότε ο τελεστής είναι φραγμένος.

□

Άσκηση 5: *Έστω $(X, ||\cdot||)$ χώρος με νόρμα και $x^* \in X^* = \mathscr{B}(X, \mathbb{R})$ με $x^* \not\equiv 0$. Αποδείξτε ότι:*

$$||x^*|| = \frac{1}{\inf\{||x|| \mid x^*(x) = 1\}}$$

Απάντηση: Θα δείξουμε τις δύο ανισότητες. Για την πρώτη ($\geqslant$), εάν $x \in X$ είναι τέτοιο ώστε $x^*(x) = 1$:

$$|x^*(x)| = 1 \leqslant ||x^*|| \cdot ||x|| \Rightarrow 1/||x|| \leqslant ||x^*|| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sup\{1/||x|| \mid x^*(x) = 1\} = \frac{1}{\inf\{||x|| \mid x^*(x) = 1\}} \leqslant ||x^*||$$

Για τη δεύτερη ($\leqslant$), επειδή:

$$||x^*|| = \sup\ x^* \partial S_{(X, ||\cdot||)}(0, 1)$$

για καθε $||x^*|| > \varepsilon > 0$ υπάρχει $x_\varepsilon \in X$ με $||x_\varepsilon|| = 1$ και $||x^*|| - \varepsilon < |x^*(x_\varepsilon)| \leqslant ||x^*||$. Παρατηρούμε ότι:

$$x^*(x_\varepsilon / x^*(x_\varepsilon)) = 1$$

κι επιπλέον, από την προηγούμενη ανισότητα:

$$\left|\left|\frac{x_\varepsilon}{x^*(x_\varepsilon)}\right|\right| = \frac{1}{|x^*(x_\varepsilon)|} < \frac{1}{||x^*|| - \varepsilon}$$

δηλαδή:

$$\inf\{||x|| \mid x^*(x)=1\} \leqslant \left|\left|\frac{x_\varepsilon}{x^*(x_\varepsilon)}\right|\right| \leqslant \frac{1}{||x^*||-\varepsilon}$$

Έπεται πλέον ότι:

$$\inf\{||x|| \mid x^*(x)=1\} \leqslant \frac{1}{||x^*||}$$

και κατά συνέπεια η ζητούμενη ανισότητα.

□

Άσκηση 6: *Ποιος είναι ο δυϊκός χώρος του $(\mathbb{R}^n, ||\cdot||_\infty)$; Ποιος είναι ο δυϊκός χώρος του $(\mathbb{R}^n, ||\cdot||_p)$, $1 \leqslant p < \infty$;*

Απάντηση: Η απάντηση θα είναι είναι κάπως εκτενής και θα γίνει σε βήματα. Στην ουσία η άσκηση ζητά να βρούμε τους δυϊκούς χώρους των $(\mathbb{R}^n, ||\cdot||_p)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$ μέσω ισομετρίας, χρησιμοποιώντας γνωστούς χώρους, κι εκεί έγκειται η δυσκολία. Εν τω μεταξύ, σε όλα τα υπόλοιπα θα συμβολίζουμε με $(e_k)_{k=1}^n$ τη συνήθη βάση του $\mathbb{R}^n$.

Βήμα I: Γι' αρχή θα δείξουμε ότι:

$$\left((\mathbb{R}^n, ||\cdot||_p)^*, ||\cdot||\right) = \left(\mathscr{B}\big((\mathbb{R}^n, ||\cdot||_p), \mathbb{R}\big), ||\cdot||\right) \cong (\mathbb{R}^n, ||\cdot||_q)$$

όπου η «$\cong$» υλοποιείται μέσω ισομετρίας και q είναι ο συζυγής του $p>1$ (δηλαδή $1/p + 1/q = 1$).

Ορίζουμε τον τελεστή $T_q^p : \left((\mathbb{R}^n, ||\cdot||_p)^*, ||\cdot||\right) \to (\mathbb{R}^n, ||\cdot||_q)$ μέσω του τύπου:

$$T_q^p(x^*) = \big(x^*(e_k)\big)_{k=1}^n$$

και παρατηρούμε ότι είναι γραμμικός. Όσον αφορά το επί, είναι φανερό ότι ένα γραμμικό συναρτησοειδές (λόγω γραμμικότητας) μπορεί να οριστεί μονοσήμαντα γνωρίζοντας τις εικόνες της βάσης (κάνουμε γραμμική επέκταση).

Όσον αφορά το φράγμα (και κατά συνέπεια τη συνέχεια), θεωρούμε $x^* \in \left((\mathbb{R}^n, ||\cdot||_p)\right)^*$. Θέτουμε:

$$a_k = \begin{cases} |x^*(e_k)|^q / x^*(e_k), & x^*(e_k) \neq 0 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

κι έχουμε ότι:

$$||T_q^p(x^*)||_q^q = \sum_{k=1}^n |x^*(e_k)|^q = \sum_{k=1}^n a_k x^*(e_k) = x^*\left(\sum_{k=1}^n a_k e_k\right)$$

Επομένως:

$$||T_q^p(x^*)||_q^q \leqslant ||x^*|| \cdot \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p\right)^{1/p} = ||x^*|| \cdot \left(\sum_{k=1}^n |x^*(e_k)|^{p(q-1)}\right)^{1/p} = ||x^*|| \cdot \left(\sum_{k=1}^n |x^*(e_k)|^q\right)^{1/p}$$

(αφού $p(q-1)=q$). Από την τελευταία ανισότητα, με πράξεις:

$$||T_q^p(x^*)||_q \leqslant ||x^*|| \Rightarrow ||T_q^p|| \leqslant 1$$

Για να δείξουμε την ισομετρία, θα δείξουμε και την άλλη ανισότητα $||T_q^p(x^*)||_q \geqslant ||x^*||$. Έστω λοιπόν $x^* \in \left((\mathbb{R}^n, ||\cdot||_p)\right)^*$ και $x = (x_1, \cdots, x_n) = \sum_{k=1}^n x_k e_k$. Χρησιμοποιώντας την τριγωνική ανισότητα και την Hölder, μπορούμε να γράψουμε:

$$|x^*(x)| = \left|\sum_{k=1}^n x_k x^*(e_k)\right| \leqslant \sum_{k=1}^n |x_k| \cdot |x^*(e_k)| \leqslant \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^n |x^*(e_k)|^q\right)^{1/q}$$

δηλαδή:

$$|x^*(x)| \leqslant ||x||_p \cdot ||T_q^p(x^*)||_q$$

και κατά συνέπεια

$$||x^*|| \leqslant ||T_q^p(x^*)||_q$$

Βήμα II: Για την περίπτωση του $(\mathbb{R}^n, ||\cdot||_\infty)^*$ θα κάνουμε ένα τέχνασμα. Αποσκοπούμε να δείξουμε, κατ' αναλογία με το Βήμα I, ότι:

$$\left((\mathbb{R}^n, ||\cdot||_\infty)^*, ||\cdot||\right) = \Big(\mathcal{B}\big((\mathbb{R}^n, ||\cdot||_\infty), \mathbb{R}\big), ||\cdot||\Big) \cong (\mathbb{R}^n, ||\cdot||_1)$$

(εξάλλου, οι ∞, 1, από τη σχέση $1/p + 1/q = 1$, λειτουργούν ως συζυγείς αριθμοί).

Στο Βήμα I βρήκαμε μία οικογένεια $(T_q^p)_p$ φραγμένων γραμμικών τελεστών $T_q^p : \left((\mathbb{R}^n, ||\cdot||_p)^*, ||\cdot||\right) \to (\mathbb{R}^n, ||\cdot||_q)$ -οι οποίοι μάλιστα είχαν τον ίδιο τύπο $T_q^p(x^*) = \big(x^*(e_k)\big)_{k=1}^n$- που υλοποιούν τις ισομετρίες:

$$\left((\mathbb{R}^n, ||\cdot||_p)^*, ||\cdot||\right) = \Big(\mathcal{B}\big((\mathbb{R}^n, ||\cdot||_p), \mathbb{R}\big), ||\cdot||\Big) \overset{T_q^p}{\cong} (\mathbb{R}^n, ||\cdot||_q)$$

Στη σχέση $||T_p^q(x^*)||_q = ||x^*(e_k)||_p$ είναι δυνατόν να πάρουμε όριο $\lim_{q\to\infty} = \lim_{p\to 1}$, λόγω της Παρατήρησης 1.2.8 στο αρχείο των βάσεων Schauder.

$$\lim_{q\to\infty} ||T_p^q(x^*)||_q = \lim_{p\to 1} \left|\left|\big(x^*(e_k)\big)_{k=1}^n\right|\right|_p$$

Αυτό δείχνει (μαζί με την προηγούμενη ανάλυση στο Βήμα II) ότι ο γραμμικός τελεστής $T_1^\infty : \left((\mathbb{R}^n, ||\cdot||_\infty)^*, ||\cdot||\right) \to (\mathbb{R}^n, ||\cdot||_1)$, που τον ορίζουμε μέσω του τύπου $T_1^\infty(x^*) = \big(x^*(e_k)\big)_{k=1}^n$, είναι γραμμική ισομετρία επί.

Βήμα III: Η εύρεση ισομετρίας $T_\infty^1 : \left((\mathbb{R}^n, ||\cdot||_1)^*, ||\cdot||\right) \to (\mathbb{R}^n, ||\cdot||_\infty)$ γίνεται όπως στο Βήμα II.

□

Άσκηση 7: *Έστω X, Y δύο ισομορφικοί χώροι Banach. Αποδείξτε ότι οι χώροι $X^* = \mathcal{B}(X, \mathbb{R})$, $Y^* = \mathcal{B}(Y, \mathbb{R})$ είναι ισομορφικοί.*

Απάντηση: Εφόσον οι X, Y είναι ισομορφικοί, υπάρχει ισομορφισμός $\varphi : X \to Y$. Ορίζουμε τον τελεστή $\Phi : Y^* \to X^*$ μέσω του τύπου:

$$\Phi(y^*) = y^* \circ \varphi$$

και ισχυριζόμαστε ότι είναι ισομορφισμός. Κατ' αρχάς είναι φανερό ότι είναι γραμμική. Για το $1-1$, εάν $y^* \neq z^* \in Y^*$, τότε διαφέρουν σε κάποιο $w \in Y$. Δηλαδή:

$$y^*(w) \neq z^*(w) \Rightarrow y^* \circ \varphi\big(\varphi^{-1}(w)\big) \neq z^* \circ \varphi\big(\varphi^{-1}(w)\big) \Rightarrow \Phi(y^*) \neq \Phi(z^*)$$

Όσον αφορά το επί, εάν $x^* \in X^*$ η συνάρτηση $x^* \circ \varphi^{-1}$ έχει εικόνα (μέσω της Φ) $x^* \circ \varphi^{-1} \circ \varphi = x^*$. Δηλαδή η Φ είναι επί.

Εάν τώρα φράξουμε τον τελεστή Φ, επειδή οι χώροι X^*, Y^* είναι Banach (ως δυϊκοί), από το Παρατήρηση 1.4.3 στο αρχείο με τις βάσεις Schauder (είναι αποτέλεσμα του θεωρήματος της ανοικτής απεικόνισης) θα έχουμε δείξει ότι ο Φ είναι ισομορφισμός. Έτσι λοιπόν έχουμε:

$$||\Phi(y^*)|| = ||y^* \circ \varphi|| \leqslant ||\varphi|| \cdot ||y^*|| \Rightarrow ||\Phi|| \leqslant ||\varphi||$$

κι άρα το ζητούμενο.

□

Άσκηση 8: *Έστω $(X, ||\cdot||)$ ένας χώρος με νόρμα. Αποδείξτε ότι υπάρχει ισομετρική εμφύτευση $T : X \to \ell^\infty(\Gamma)$ για κατάλληλο σύνολο Γ.*

Απάντηση: Κατ' αρχάς θεωρούμε το σύνολο:

$$\mathcal{D} = \{D \subseteq X \mid D \text{ πυκνό}\}$$

και παρατηρούμε ότι αυτό δεν είναι κενό (αφού $X \in \mathcal{D}$). Για τα επόμενα είναι δυνατόν να επιλέξουμε οποιοδήποτε πυκνό σύνολο $D \in \mathcal{D}$, εμείς όμως θα επιλέξουμε το εξής πυκνό σύνολο: θεωρώντας το μερικά διατεταγμένο σύνολο $(\mathcal{D}, \preceq = \supseteq)$ είναι δυνατόν να επιλεγεί, βάση του λήμματος του Zorn, μεγιστικό στοιχείο $D \in \mathcal{D}$. Αυτό το D, από τον ορισμό της διάταξης $\preceq$, θα είναι ελαχιστικό μεταξύ των πυκνών υποσυνόλων του X, ως προς την σχέση του υποσυνόλου $\subseteq$. Ορίζουμε $\Gamma = \#D$ τον πληθάριθμο του D.

Έστω λοιπόν $(x_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ ένα πυκνό υποσύνολο του $\partial S(0,1)\subseteq X$. Θεωρώντας τον κλειστό γραμμικό υπόχωρο $\{0\}$, για κάθε x_γ μπορεί να βρεθεί συναρτησοειδές $x_\gamma^*\in X^*$ τέτοιο ώστε:

$$||x_\gamma^*||=1 \text{ και } x_\gamma^*(x_\gamma)=\inf\{||x_\gamma-y|| \mid y\in\{0\}\}=||x_\gamma||=1$$

Αυτό ισχύει από την Πρόταση 1.4.3, i., στο αρχείο των βάσεων Schauder (είναι αποτέλεσμα του θεωρήματος Hahn-Banach).

Ορίζουμε, βάσει των προηγουμένων, τον τελεστή $T:X\to\ell^\infty(\Gamma)$ μέσω του τύπου:

$$T(x)=\left(x_\gamma^*(x)\right)_{\gamma\in\Gamma}$$

Ο T είναι γραμμικός τελεστής. Είναι επίσης φραγμένος, αφού:

$$||T(x)||_{\ell^\infty(\Gamma)}=\sup_\gamma|x_\gamma^*(x)|\leqslant||x||\Rightarrow||T||\leqslant 1$$

Για να αποδείξουμε ότι είναι ισομετρική εμφύτευση, θεωρούμε $\varepsilon>0$ και θα δείξουμε ότι για κάθε $x\in\partial S(0,1)$, $||T(x)||_{\ell^\infty(\Gamma)}\geqslant 1-\varepsilon$. Αν το δείξουμε αυτό, θα έχουμε για κάθε $x\in\partial S(0,1)$:

$$||T(x)||_{\ell^\infty(\Gamma)}\geqslant 1=||x||\Rightarrow||x||\leqslant||T(x)||_{\ell^\infty(\Gamma)}\leqslant||x||\Rightarrow||T(x)||=||x||$$

οπότε μέσω της γραμμικότητας θα έχουμε $||T(x)||=||x||$ για κάθε $x\in X$.

Έστω $x\in\partial S(0,1)$. Από την πυκνότητα του $(x_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$, μπορούμε να βρούμε $\gamma\in\Gamma$ ούτως ώστε $||x_\gamma-x||<\varepsilon$. Οπότε $|x_\gamma^*(x_\gamma)-x_\gamma^*(x)|\leqslant||x_\gamma^*||\cdot||x_\gamma-x||<\varepsilon$ (αφού $||x_\gamma^*||=1$). Με (αντίστροφη) τριγωνική ανισότητα έπεται ότι:

$$|x_\gamma^*(x_\gamma)|-|x_\gamma^*(x)|<\varepsilon\Rightarrow|x_\gamma^*(x)|>|x_\gamma^*(x_\gamma)|-\varepsilon=1-\varepsilon$$

δηλαδή $||T(x)||_{\ell^\infty(\Gamma)}=\sup_n|x_\gamma^*(x_\gamma)|>1-\varepsilon$, για κάθε $\varepsilon>0$.

□

Άσκηση 9: *Έστω $(X,||\cdot||)$ χώρος με νόρμα και $A\subseteq X$, $B\subseteq X^*$. Θέτουμε:*

$$A^\perp=\{x^*\in X^* \mid x^*(x)=0,\ \forall x\in A\}$$

και

$$^\perp B=\{x\in X \mid x^*(x)=0,\ \forall x^*\in B\}$$

Αποδείξτε ότι:

- *i. $X^\perp=\{0_{X^*}\}$, $\{0_X\}^\perp=X^*$, $^\perp\{0_{X^*}\}=X$, $^\perp X^*=\{0_X\}$*
- *ii. Το $A^\perp\subseteq X^*$ είναι κλειστός υπόχωρος του X^*.*
- *iii. Το $^\perp B\subseteq X$ είναι κλειστός υπόχωρος του X.*
- *iv. Αληθεύει $A\subseteq{}^\perp(A^\perp)$. Εάν ο A είναι γραμμικός υπόχωρος του X, τότε ισχύει η ισότητα $\overline{A}={}^\perp(A^\perp)$.*
- *v. Αληθεύει $B\subseteq({}^\perp B)^\perp$.*

Απάντηση: Για το i.: Το σύνολο $X^\perp$ περιέχει όλα τα συναρτησοειδή που μηδενίζονται παντού. Δηλαδή περιέχει μόνο το 0_{X^*}. Το $\{0_X\}^\perp$ περιέχει όλα τα συναρτησοειδή που μηδενίζονται στο 0_X, δηλαδή περιέχει όλα τα συναρτησοειδή. Το $^\perp\{0_{X^*}\}$ περιέχει όλα τα x που μηδενίζουν το μηδενικό συναρτησοειδές, δηλαδή περιέχει όλον τον X.

Τέλος, το $^\perp X^*$ περιέχει όλα τα x που μηδενίζουν ταυτόχρονα όλα τα συναρτησοειδή $x^*\in X^*$. Από το θεώρημα Hahn-Banach, και συγκεκριμένα από την Πρόταση 1.4.3, i., στο αρχείο με τις βάσεις Schauder, για κάθε $x\neq 0$ υπάρχει μη τετριμμένο γραμμικό συναρτησοειδές $x^*\in X^*$ με $x^*(x)=||x||>0$, οπότε δεν υπάρχει -πέραν του μηδενός- στοιχείο που να μηδενίζει ταυτόχρονα όλα τα συναρτησοειδή.

Για το ii.: Θεωρούμε $x_n^*\in A^\perp$ και $x^*\in X^*$ ώστε $x_n^*\to x^*\Leftrightarrow||x_n^*-x^*||\to 0$, και θα δείξουμε ότι $x^*\in A^\perp$ (οπότε το $A^\perp$ θα είναι κλειστό). Έστω λοιπόν $x\in A$. Έχουμε:

$$|x^*(x)|=|x_n^*(x)-x^*(x)|\leqslant||x_n^*-x^*||\cdot||x||\to 0 \text{ δηλαδή } x^*(x)=0,\ \forall x\in A$$

Έτσι δείξαμε ότι $x^*\in A^\perp$.

Για το iii.: Παρατηρούμε ότι:

$$^{\perp}B = \bigcap_{x^* \in B} \text{Ker } x^*$$

οπότε το ζητούμενο έπεται από την Άσκηση 4.

Για το iv.: Το σύνολο $A^{\perp}$ περιέχει όλα τα συναρτησοειδή που μηδενίζονται στο A, δηλαδή έχουν πυρήνα Ker $x^* \supseteq A$. Οπότε:

$$^{\perp}(A^{\perp}) = \bigcap_{x^* \in A^{\perp}} \text{Ker } x^* \supseteq A$$

Αν ο A είναι γραμμικός και $x \in X \backslash \overline{A}$, τότε υπάρχει από το θεώρημα Hahn-Banach, και συγκεκριμένα από την Πρόταση 1.4.3, i., στο αρχείο με τις βάσεις Schauder, γραμμικό συναρτησοειδές που μηδενίζεται στο $\overline{A}$ αλλά όχι στο x. Επομένως:

$$^{\perp}(A^{\perp}) \subseteq \overline{A}$$

Επειδή ο πρώτος είναι κλειστός και περιέχει το A, έπεται η ισότητα.

Για το v.: Το $^{\perp}B$ περιέχει όλα τα στοιχεία $x \in X$ που μηδενίζουν κάθε συναρτησοειδές του B. Οπότε για κάθε $x^* \in B$ έχουμε Ker $x^* \supseteq {}^{\perp}B$. Το σύνολο $({}^{\perp}B)^{\perp}$ περιέχει όλα τα συναρτησοειδή που μηδενίζονται σε κάθε στοιχείο του $^{\perp}B$, οπότε περιέχει τα $x^* \in B$, κι έτσι:

$$({}^{\perp}B)^{\perp} \supseteq B$$

□

Άσκηση 10: *Έστω $(X, ||\cdot||)$, $(Y, |||\cdot|||)$ δύο χώροι με νόρμα, $X \neq \{0\}$. Αποδείξτε ότι, αν ο $\mathcal{B}(X,Y)$ είναι Banach, τότε και ο $(Y, |||\cdot|||)$ είναι Banach.*

Απάντηση: Και πάλι η άσκηση αυτή θα γίνει σε βήματα.

Βήμα I: Κατ' αρχάς, από την Άσκηση 8, υπάρχει ισομετρική εμφύτευση $\Phi : (X, ||\cdot||) \to \ell^{\infty}(\Gamma)$, και μάλιστα το σύνολο Γ μπορεί να επιλεγεί να είναι ο πληθάριθμος $\mathcal{X}$ του X (επιλέγοντας το πυκνό σύνολο X). Από τον ορισμό της Φ, θυμόμαστε ότι έχει την μορφή:

$$\Phi(x) = \left(x^*_{\chi}(x)\right)_{\chi \in \mathcal{X}}$$

Επιπλέον, μία αλγεβρική βάση $(e_i)_{i \in I}$ του X μπορεί επίσης να επιλεγεί.

Βήμα II: Ορίζουμε $e^* = e_1^*$, κι επίσης για τα διάφορα $y \in Y$ τις γραμμικές απεικονίσεις $T_y : X \to Y$ με:

$$T_y(e_1) = y \cdot e^*(e_1) \text{ και } T_y(e_i) = 0, \ i \neq 1$$

Οι T_y είναι φραγμένες απεικονίσεις. Πράγματι, για κάθε $x \in \partial S_{(X, ||\cdot||)}(0,1)$ έχουμε, λόγω ισομετρίας, $\Phi(x) \in \partial S_{\ell^{\infty}(\mathcal{X})}(0,1)$ και:

$$|||T_y(x)||| = |e^*(x_1)| \cdot |||y||| \leqslant ||\Phi(x)||_{\ell^{\infty}(\mathcal{X})} \cdot |||y||| = |||y|||$$

όπου $x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$. Οπότε:

$$||T_y|| = \sup T_y \partial S_{(X, ||\cdot||)}(0,1) \leqslant |||y|||$$

και κατά συνέπεια $T_y \in \mathcal{B}(X,Y)$, με τον τελευταίο χώρο να είναι πλήρης.

Βήμα III: Έστω $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ μία βασική ακολουθία του Y. Θεωρούμε τους τελεστές T_{y_n} και παρατηρούμε ότι για κάθε n, m:

$$||T_{y_n} - T_{y_m}|| \leqslant |||y_n - y_m|||$$

οπότε η ακολουθία $(T_{y_n})_{n=1}^{\infty}$ είναι βασική στον πλήρη χώρο $\mathcal{B}(X,Y)$.

Έστω λοιπόν $\widehat{T} \in \mathcal{B}(X,Y)$ ώστε $T_{y_n} \to \widehat{T}$. Από τη σύγκλιση έπεται:

$$T_{y_n}(e_1) \to \widehat{T}(e_1) \Rightarrow y_n \cdot e^*(e_1) \to \widehat{T}(e_1) \Rightarrow y_n \to \frac{\widehat{T}(e_1)}{e^*(e_1)}$$

δηλαδή η $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνει στο $\widehat{T}(e_1)/e^*(e_1)$. Αυτά αποδεικνύουν ότι ο χώρος $(Y, |||\cdot|||)$ είναι πλήρης.

□

Άσκηση 11: *Έστω $(X, ||\cdot||)$ χώρος Banach και $(X, |||\cdot|||)$ χώρος με νόρμα ώστε:*

$$||x|| \leqslant M \cdot |||x|||$$

Αποδείξτε ότι, αν ο $(X, |||\cdot|||)$ είναι χώρος Banach, οι νόρμες $||\cdot||$, $|||\cdot|||$ είναι ισοδύναμες.

Απάντηση: Από την ανισότητα της υπόθεσης ο γραμμικός τελεστής $i : (X, |||\cdot|||) \to (X, ||\cdot||)$ είναι φραγμένος. Επειδή οι χώροι είναι Banach, από την Παρατήρηση 1.4.3, στο αρχείο των βάσεων Schauder (που είναι αποτέλεσμα του θεωρήματος της ανοικτής απεικόνισης) έπεται ότι ο i είναι ισομορφισμός. Δηλαδή έχουμε το ζητούμενο.

□

Άσκηση 12: *Έστω $(X, ||\cdot||)$ ένας χώρος με νόρμα και $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ ακολουθία του X. Αποδείξτε ότι η $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι φραγμένη εάν και μόνο αν η ακολουθία $\left(x^*(x_n)\right)_{n=1}^{\infty}$ είναι φραγμένη για κάθε $x^* \in X^*$.*

Απάντηση: Κι εδώ θα εργαστούμε σε βήματα. Στην ουσία χρειάζεται να δείξουμε ότι το αντίστροφο ($\Leftarrow$). Το ευθύ ($\Rightarrow$) είναι συνέπεια της σχέσης $|x^*(x_n)| \leqslant ||x^*|| \cdot ||x_n||$.
Βήμα I: Θεωρούμε τη συνάρτηση $T : X \to \ell^{\infty}(\Gamma)$ της Άσκησης 8, όπου και πάλι $\Gamma = \mathfrak{X} = \#X$, επιλέγοντας το πυκνό σύνολο X. Για την μετέπειτα μελέτη είναι σκόπιμο να ορίσουμε τους τελεστές φ_x, για τους οποίους $\varphi_x(x^*) = x^*(x)$. Μ' αυτούς υπόψη, μπορούμε να γράψουμε:

$$||x|| = ||T(x)||_{\ell^{\infty}(\mathfrak{X})} = \sup_{\chi\in\mathfrak{X}} |x^*_{\chi}(x)| = \sup_{\chi\in\mathfrak{X}} \left|\varphi_x(x^*_{\chi})\right|$$

και μάλιστα, επειδή $\{x^*_{\chi} \mid \chi \in \mathfrak{X}\} = \{x^* \in X^* \mid ||x|| = 1\} = \partial S_{X^*}(0,1)$:

$$||x|| = \sup_{x^*\in\partial S_{X^*}(0,1)} \left|\varphi_x(x^*)\right| = \sup\ \varphi_x \partial S_{X^*}(0,1) = ||\varphi_x||$$

Βήμα II: Οι τελεστές $\varphi_{x_n}, n \in \mathbb{N}$, είναι φραγμένοι σημειακά. Πράγματι, επειδή:

$$\varphi_{x_n}(x^*) = x^*(x_n)$$

από την υπόθεση έπεται το κατά σημείο φράγμα.
Βήμα III: Επειδή ο χώρος X^* είναι πλήρης (ως δυϊκός), από την αρχή ομοιομόρφου φράγματος έπεται ότι:

$$\sup_n\ ||\varphi_{x_n}|| = M < \infty$$

δηλαδή, από το Βήμα I, $||\varphi_{x_n}|| = ||x_n|| < M < \infty$. Αυτό αποδεικνύει το ζητούμενο.

□

Άσκηση 13: *Έστω $(X, ||\cdot||)$, $(Y, |||\cdot|||)$ χώροι Banach και $T : X \to Y$ γραμμικός τελεστής. Αποδείξτε ότι, αν $y^* \circ T \in X^*$ για κάθε $y^* \in Y^*$, τότε ο T είναι φραγμένος.*

Απάντηση: Δείχνοντας ότι το γράφημα της T είναι κλειστό, βάσει του θεωρήματος του κλειστού γραφήματος θα έχουμε δείξει ότι ο T είναι φραγμένος.
Έστω λοιπόν $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ ακολουθία του X με $x_n \to x \in X$, και $T(x_n) \to y \in Y$. Επειδή τώρα για κάθε $y^* \in Y^*$ έχουμε $y^* \circ T \in X^*$:

$$y^* \circ T(x_n) \to y^* \circ T(x) = y^*\left(T(x)\right)$$

κι επίσης από τη σχέση $T(x_n) \to y$:

$$y^* \circ T(x_n) \to y^*(y)$$

δηλαδή $y^*\left(T(x)\right) = y^*(y)$ για κάθε $y^* \in Y^*$. Από την Πρόταση 1.4.3, ii., στο αρχείο των βάσεων Schauder, έπεται αναγκαστικά ότι $y = T(x)$. Οπότε το γράφημα της T είναι κλειστό.

□

Άσκηση 14: *Έστω $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ μία ακολουθία του $\mathbb{R}$ ώστε η σειρά:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$$

να συγκλίνει για κάθε μηδενική ακολουθία $(y_n)_{n=1}^{\infty} \in c_0$. Αποδείξτε ότι η σειρά:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$$

συγκλίνει, εφαρμόζοντας την αρχή ομοιόμορφου φράγματος.

Απάντηση: Θεωρούμε την οικογένεια τελεστών $(T_n)_{n=1}^{\infty}$ της μορφής $T_n : c_0 \to \mathbb{R}$, που ορίζονται ως εξής:

$$T_n(y) = \sum_{k=1}^{n} x_n y_n$$

Οι T_n είναι γραμμικοί τελεστές, και θα δείξουμε ότι είναι φραγμένοι. Πράγματι:

$$|T_n(y)| = \left|\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right| \leqslant \left|\sum_{k=1}^{n} x_k\right| \cdot ||y||_{\ell^\infty} \Rightarrow ||T_n|| \leqslant \left|\sum_{k=1}^{n} x_k\right|$$

Επιπλέον φράσσονται σημειακά, αφού:

$$\sup_n \ |T_n(y)| = \sup \ \left|\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right|$$

και η $\sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k$ συγκλίνει. Από το θεώρημα ομοιόμορφου φράγματος:

$$\sup_n \ ||T_n|| = M < \infty$$

και κατά συνέπεια ο γραμμικός τελεστής $T : c_0 \to \mathbb{R}$ με τύπο:

$$T(y) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k$$

ορίζεται και είναι φραγμένος. Το ότι είναι φραγμένος δικαιολογείται αυστηρότερα από το γεγονός ότι:

$$|T(y)| = \left|\sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k\right| \leqslant \left|\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right| + \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} x_k y_k\right| \leqslant ||T_n|| \cdot ||y||_{\ell^\infty} + \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} x_k y_k\right| \leqslant M \cdot ||y||_{\ell^\infty} + \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} x_k y_k\right|$$

και με όριο $n \to \infty$:

$$|T(y)| \leqslant M \cdot ||y||_{\ell^\infty} \Rightarrow ||T|| \leqslant M$$

Εφόσον τώρα η T είναι φραγμένη, θεωρώντας για τα διάφορα n τις (τελικά μηδενικές) ακολουθίες $\xi_n = (\text{sign } x_1, \cdots, \text{sign } x_n, 0, \cdots)$ παίρνουμε:

$$|T(\xi_n)| = \left|\sum_{k=1}^{n} |x_k|\right| = \sum_{k=1}^{n} |x_k| \leqslant M$$

και με όριο $n \to \infty$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k| \leqslant M < \infty$$

$\square$

Άσκηση 15: *Έστω $(X, ||\cdot||)$ χώρος με νόρμα, $A \subseteq X$, $x_0 \in X$ και:*

$$Y = \text{span } A$$

Αποδείξτε ότι $x_0 \in \overline{Y}$ *εάν και μόνο αν για κάθε* $x^* \in X$ *με* $x^*|_A \equiv 0$ *έχουμε* $x^*(x_0) = 0$.

Απάντηση: ($\Rightarrow$) Εάν $x_0 \in \overline{Y}$, τότε υπάρχει ακολουθία $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ του Y που συγκλίνει στο x_0. Μάλιστα, επειδή $x^*(y_n) = 0$ για κάθε συναρτησοειδές τέτοιο ώστε $x^*|_A \equiv 0$, λόγω της συνέχειας των x^* έπεται ότι $x^*(x_0) = 0$.

($\Leftarrow$) Εάν προς άτοπο το $x_0 \neq 0$ δεν ανήκει στον κλειστό γραμμικό υπόχωρο $\overline{Y}$, από την Πρόταση 1.4.3, i., στο αρχείο των βάσεων Schauder (που είναι αποτέλεσμα του Hahn-Banach), μπορεί να βρεθεί συναρτησοειδές $x^* \in X^*$ με $x^*|_{\overline{Y}} \equiv 0$ και $x^*(x_0) = ||x_0|| > 0$. Αυτό είναι άτοπο.

□

Άσκηση 16: *Έστω* $T : \ell^2 \to \ell^2$ *ο τελεστής που ορίζεται μέσω του τύπου:*

$$T(x_1, x_2, x_3, \cdots) = (0, x_1, x_2, x_3, \cdots)$$

(ο τελεστής T *λέγεται και «τελεστής μετατόπισης»). Αποδείξτε ότι ο* T *είναι γραμμικός τελεστής και ισομετρία.*

Απάντηση: Ελέγχοντας τον τελεστή T στα στοιχεία $(x_1, x_2, \cdots) + \lambda \cdot (y_1, y_2, \cdots)$, μπορούμε να δείξουμε ότι ο τελεστής T είναι γραμμικός.

Είναι επίσης μία ισομετρία. Πράγματι, από τον ορισμό της νόρμας $||\cdot||_{\ell^2}$ έχουμε:

$$||T(x_1, x_2, \cdots)||_{\ell^2}^2 = |0|^2 + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=2}^{n} |a_{k-1}|^2 = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n-1} |a_k|^2 = ||(x_1, x_2, \cdots)||_{\ell^2}^2$$

□

Άσκηση 17: *Έστω* $S : \ell^2 \to \ell^2$ *τελεστής ώστε:*

$$S(x_1, x_2, x_3, \cdots) = (0, x_2, 0, x_4, 0, \cdots)$$

Αποδείξτε ότι ο S *είναι φραγμένος τελεστής και υπολογίστε τη νόρμα του.*

Απάντηση: Από το πυθαγόρειο θεώρημα, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε:

$$||(x_1, \cdots, x_{2n})||_2^2 = ||(x_1, 0, x_3, \cdots, x_{2n-1})||_2^2 + ||(0, x_2, 0, \cdots, x_{2n})||_2^2$$

οπότε $||(0, x_2, 0, \cdots, x_{2n})||_2 \leqslant ||(x_1, \cdots, x_{2n})||_2$. Γενικότερα:

$$||S(x_1, x_2, x_3, \cdots)||_{\ell^2} = ||(0, x_2, 0, x_4, \cdots)||_{\ell^2} \leqslant ||(x_1, x_2, x_3, \cdots)||_{\ell^2}$$

το οποίο δείχνει ότι ο τελεστής S είναι φραγμένος, και έχει νόρμα $||S|| \leqslant 1$.

Από τον ισοδύναμο χαρακτηρισμό της νόρμας τελεστή, $||S|| = \sup T\partial S_{\ell^2}(0, 1)$, επιλέγοντας το στοιχείο $j = (0, 1, 0, 0, \cdots) \in S_{\ell^2}(0, 1) \subseteq \ell^2$ έπεται:

$$||S(j)||_{\ell^2} = 1 \leqslant \sup T\partial S_{\ell^2}(0, 1) = ||S||$$

και κατά συνέπεια $||S|| = 1$.

□

Άσκηση 18: *Έστω* $(X, ||\cdot||)$ *ένας χώρος με νόρμα ώστε:*

$$||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2 \cdot ||x||^2 + 2 \cdot ||y||^2$$

για κάθε $x, y \in X$. *Αποδείξτε ότι υπάρχει ένα εσωτερικό γινόμενο* $\langle \cdot, \cdot \rangle$ *από το οποίο η νόρμα* $||\cdot||$ *επάγεται, και μάλιστα:*

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}(||x+y||^2 - ||x-y||^2)$$

Απάντηση: Αρκεί να δείξουμε ότι το $\langle \cdot, \cdot \rangle$, που ορίζεται:

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}(||x+y||^2 - ||x-y||^2)$$

είναι ένα εσωτερικό γινόμενο, μιας και επάγει τη νόρμα $||x|| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$

Κατ' αρχάς είναι φανερό ότι $\langle x,x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$, κι επιπλέον $\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle$ για κάθε $x,y \in X$.

Χρειάζεται να αποδειχθεί η γραμμικότητα του υποψήφιου εσωτερικού γινομένου ως προς την πρώτη μεταβλητή. Αυτό θα γίνει σε βήματα.

Βήμα I: Για κάθε $x,y,z \in X$, θα δείξουμε ότι $\langle x+y,z\rangle = \langle x,z\rangle + \langle y,z\rangle$. Από τον κανόνα του παραλληλογράμμου (εφαρμόζοντάς τον δύο φορές):

$$||x+y+z||^2 = 2\cdot||x+z||^2 + 2\cdot||y||^2 - ||x-y+z||^2$$

και:

$$||x+y+z||^2 = 2\cdot||y+z||^2 + 2\cdot||x||^2 - ||y+z-x||^2$$

Τώρα προσθέτοντας κατά μέλη τις παραπάνω σχέσεις:

$$2\cdot||x+y+z||^2 = 2\cdot||x+z||^2 + 2\cdot||y+z||^2 + 2\cdot||x||^2 + 2\cdot||y||^2 - ||x-y+z||^2 - ||y+z-x||^2$$

Μάλιστα ανάλογη σχέση θα προέκυπτε εάν στην παραπάνω σχέση είχαμε $-z$ αντί z -αυτό θα το χρησιμοποιήσουμε στα επόμενα.

$$2\cdot||x+y-z||^2 = 2\cdot||x-z||^2 + 2\cdot||y-z||^2 + 2\cdot||x||^2 + 2\cdot||y||^2 - ||x-y-z||^2 - ||y-z-x||^2$$

Επειδή $||x-y+z| = ||-x+y-z|| = ||y-z-x||$ και $||y+z-x|| = ||-y-z+x|| = ||x-y-z||$, έπεται απ' όλα τα προηγούμενα ότι:

$$\langle x+y,z\rangle = \frac{1}{4}(||x+y+z||^2 - ||x+y-z||^2) = \frac{1}{4}(||x+z||^2 - ||x-z||^2) + \frac{1}{4}(||y+z||^2 - ||y-z||^2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \langle x+y,z\rangle = \langle x,z\rangle + \langle y,z\rangle$$

Βήμα II: Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε -με επαγωγή από το προηγούμενο βήμα- ότι $\langle nx,y\rangle = n\langle x,y\rangle$. Επίσης, παρατηρώντας ότι $\langle -x,y\rangle = -\langle x,y\rangle$, η σχέση $\langle \zeta x,y\rangle = \zeta\langle x,y\rangle$ ισχύει για κάθε $\zeta \in \mathbb{Z}$.

Τώρα, αν $q = \kappa/\zeta \in \mathbb{Q}$, $\kappa,\zeta \in \mathbb{Z}$, είναι ένας ρητός, έχουμε:

$$\zeta\langle qx,y\rangle = \langle \zeta qx,y\rangle = \zeta q\langle x,y\rangle \Rightarrow \langle qx,y\rangle = q\langle x,y\rangle$$

κι από τη συνέχεια του $\langle\cdot,\cdot\rangle$ (γράφεται συναρτήσει νορμών) έπεται η σχέση $\langle\lambda x,y\rangle = \lambda\langle x,y\rangle$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

$\square$

Άσκηση 19: *Έστω $(H,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ ένας χώρις Hilbert και $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ μία ακολουθία του H ώστε $\langle x_k,x_m\rangle = 0$, $k \neq m$. Δείξτε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

i. Η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ συγκλίνει.

ii. Η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} ||x_k||^2$ συγκλίνει.

Απάντηση: (i. $\Rightarrow$ ii.) Εφόσον η $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ συγκλίνει, έστω x το όριό της. Αν ορίσουμε:

$$p_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$$

τότε $||x-p_n|| \to 0$. Μάλιστα:

$$\left\langle \sum_{k=1}^{\infty} x_k - p_n, p_n \right\rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{\infty} x_k - \sum_{\lambda=1}^{n} x_k, \sum_{\lambda=1}^{n} x_k \right\rangle = 0$$

(ακριβώς όπως στην Πρόταση 1.3.2, στο αρχείο με τις βάσεις Schauder), οπότε από το Πυθαγόρειο θεώρημα:

$$||x||^2 = ||x-p_n||^2 + ||p_n||^2$$

Με ανάλογο τρόπο είναι δυνατόν να δείξουμε ότι $x_1 \perp \sum_{k=1}^{n} x_k$, $x_2 \perp \sum_{k=2}^{\infty} x_k$, και ούτω καθεξής, οπότε με επαγωγική χρήση του Πυθαγορείου θεωρήματος:

$$||x||^2 = ||x - p_n||^2 + \sum_{k=1}^{n} ||x_k||^2$$

Αφήνοντας $n \to \infty$, έχουμε το ζητούμενο.

(ii. $\Rightarrow$ i.) Όπως και στην προηγούμενη κατεύθυνση, είναι δυνατόν να γράψουμε (από το Πυθαγόρειο θεώρημα):

$$\left|\left|\sum_{k=n+1}^{m} x_k\right|\right|^2 = \sum_{k=n+1}^{m} ||x_k||^2$$

Εφόσον η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} ||x_k||^2$ συγκλίνει, το παραπάνω δείχνει ότι η $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ είναι βασική ακολουθία. Επειδή βρισκόμαστε σε πλήρη χώρο (Hilbert), θα υπάρχει το όριό της.

$\square$

Άσκηση 20: *Έστω $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ένας χώρος Hilbert και $\varnothing \neq A \subseteq H$. Αποδείξτε ότι:*

$$A^{\perp\perp} = \overline{\text{span}}\ A$$

Απάντηση: Καταρχάς είναι φανερό ότι $A^{\perp\perp} \supseteq A$. Το $A^{\perp\perp}$ είναι επιπλέον κλειστό, οπότε $A^{\perp\perp} \supseteq \overline{A}$. Πράγματι, αν $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι μία ακολουθία του $A^{\perp\perp}$ που συγκλίνει σε $a \in H$, τότε για κάθε $\alpha \in A^{\perp}$:

$$\langle a_n, \alpha \rangle = 0 \overset{*}{\Rightarrow} \langle a, \alpha \rangle = 0 \Rightarrow a \in A^{\perp\perp}$$

(όπου στη συνεπαγωγή άστρο $(*)$ χρησιμοποιείται η συνέχεια του εσωτερικού γινομένου). Άρα το $A^{\perp\perp}$ είναι κλειστό.

Για τον άλλον εγκλεισμό, υποθέτουμε προς άτοπο ότι δεν ισχύει, οπότε βρίσκεται $h \in A^{\perp\perp} \backslash \overline{A}$. Θεωρούμε (εφόσον βρησκόμαστε σε χώρο Hilbert) τη μοναδική προβολή του h στον $\overline{A}$, έστω r, και θεωρούμε το διάνυσμα $h - r \in A^{\perp}$. Αφού $h - r \in A^{\perp}$, έχουμε για κάθε $a \in A^{\perp}$, $\langle a, h - r \rangle = 0$.

Από την άλλη όμως:

$$\langle a, h - r \rangle = ||a|| \cdot ||h - r|| \cdot \cos(\widehat{a, h - r}) = ||a|| \cdot ||h - r|| \cdot \frac{||h - r||}{||a||} = ||h - r||^2$$

κι επειδή $h \in A^{\perp\perp} \backslash \overline{A}$, $||h - r|| = \text{dist}(x, \overline{A}) > 0$. Δηλαδή $\langle a, h - r \rangle > 0$, το οποίο είναι άτοπο.

Εν τω μεταξύ, για να είμαστε εντελώς πλήρεις, θα κάνουμε και μία αναφορά στη σχέση:

$$\cos\theta = \frac{\text{προσκείμενη κάθετη}}{\text{υποτείνουσα}}$$

στα ορθογώνια τρίγωνα. Αυτή η συζήτηση ίσως είναι αναγκαίο να γίνει, δεδομένου ότι ο ορισμός που δίνουμε (στη συναρτησιακή ανάλυση) στις γωνίες δεν εμπλέκει πουθενά την καθετότητα, παρά μόνο το εσωτερικό γινόμενο. Υπενθυμίζουμε ότι ορίζουμε:

$$\cos(\widehat{a, b}) = \frac{\langle a, b \rangle}{||a|| \cdot ||b||}$$

Έστω λοιπόν ένα ορθογώνιο τρίγωνο με πλευρές a, b, c, εκ των οποίων η τελευταία είναι υποτείνουσα. Παρατηρούμε ότι:

$$\langle b, b \rangle = \langle c - a, c - a \rangle = \langle c, c \rangle + \langle a, a \rangle - 2\langle c, a \rangle$$

κι οπότε:

$$||b||^2 = ||c||^2 + ||a||^2 - 2\langle c, a \rangle \Rightarrow ||b||^2 = ||c||^2 + ||a||^2 - 2 \cdot ||c|| \cdot ||a|| \cdot \cos(\widehat{c, a})$$

Με χρήση του Πυθαγορείου θεωρήματος:

$$||c||^2 - ||a||^2 = ||c||^2 + ||a||^2 - 2 \cdot ||c|| \cdot ||a|| \cdot \cos(\widehat{c, a}) \Rightarrow \cos(\widehat{c, a}) = \frac{||a||}{||c||}$$

□

Άσκηση 21: *Αποδείξτε ότι ο χώρος ℓ^p, $p \neq 2$, δεν είναι χώρος Hilbert (εννοείται ότι στον χώρο $(\ell^p, ||\cdot||_{\ell^p})$, $p \neq 2$, δεν υπάρχει εσωτερικό γινόμενο $\langle\cdot,\cdot\rangle$ που να επάγει τη νόρμα).*

Απάντηση: Θα δείξουμε ότι στον χώρο $(\ell^p, ||\cdot||_{\ell^p})$, $p \neq 2$, δεν υπάρχει εσωτερικό γινόμενο $\langle\cdot,\cdot\rangle$ που να επάγει τη νόρμα $||\cdot||_{\ell^p}$.

Αν τέτοιο εσωτερικό γινόμενο υπήρχε, το Πυθαγόρειο θεώρημα θα ίσχυε. Έστω λοιπόν $x,y \in \ell^p$ με $x \perp y$. Θα πρέπει να αληθεύει:

$$||x-y||^2_{\ell^p} = ||x||^2_{\ell^p} + ||y||^2_{\ell^p}$$

Για $p=1$ αυτό δεν αληθεύει, για παράδειγμα επιλέγοντας $x=(1,0,0,\cdots)$, $y=(0,1,0,\cdots)$. Για τα ίδια x,y και για $p \geqslant 3$ έχουμε:

$$||x-y||^2_{\ell^p} = 2^{2/p} \neq 2 = 1^{2p/p} + 1^{2p/p} = ||x||^2_{\ell^p} + ||y||^2_{\ell^p}$$

οπότε και πάλι το Πυθαγόρειο θεώρημα δεν αληθεύει.

Μία σημαντική παρατήρηση: Γιατί άραγε τα x,y να μπορούν να θεωρηθούν κάθετα; Περιορίζοντας το εσωτερικό γινόμενο στον διδιάστατο υπόχωρο $\mathbb{R}^2 \hookrightarrow \ell^p$ προκύπτει και πάλι ένα εσωτερικό γινόμενο (ως περιορισμός εσωτερικού γινομένου). Τώρα, για τον πεπερασμένης διάστασης υπόχωρο, αληθεύει η (ορθογώνια) ισομορφία:

$$\left(\mathbb{R}^2, \langle\cdot,\cdot\rangle|_{\mathbb{R}^2}\right) \cong \left(\mathbb{R}^2, (\cdot)\mathrm{Id}_2(\cdot)^T\right)$$

η οποία υλοποιείται με έναν ισομορφισμό f που είναι ορθογώνια απεικόνιση (δηλαδή διατηρεί τα εσωτερικά γινόμενα). Από την ισομορφία αυτή δικαιολογείται γιατί μπορούμε να θεωρούμε τα x,y κάθετα.

□

Άσκηση 22: *Έστω $(X, ||\cdot||), (Y, |||\cdot|||)$ δύο χώροι με νόρμα, με τον τελευταίο να είναι Banach, και $T: X \to Y$ φραγμένος, γραμμικός τελεστής. Αποδείξτε ότι, αν ο T είναι επί, ο δυϊκός τελεστής $T^*: Y^* \to X^*$ με:*

$$T^*(y^*) = y^* \circ T$$

είναι ισομορφική εμφύτευση.

Απάντηση: Εφόσον ο T είναι γραμμικός, φραγμένος και επί, ο T^* είναι καλά ορισμένος. Είναι επίσης φανερό ότι είναι γραμμικός. Επειδή ο T είναι επί, ο T^* θα είναι και $1-1$: αν $y^* \neq z^*$, τότε διαφέρουν σε κάποιο $w \in X$, δηλαδή σε κάποιο $T(x)=w$. Κατά συνέπεια, $y^* \circ T(x) \neq z^* \circ T(x)$. Για το φράγμα, έχουμε $||T^*(y^*)|| \leqslant ||y^*|| \cdot ||T||$, δηλαδή $||T^*|| \leqslant ||T||$.

Τέλος, αν δείξουμε ότι το σύνολο $T^*(Y^*) \subseteq X^*$ είναι κλειστό, θα είναι και χώρος Banach (ως υποσύνολο χώρου Banach). Από το θεώρημα της ανοικτής απεικόνισης θα έπεται τότε ότι ο τελεστής $T^*: Y^* \to T^*(Y^*)$ είναι ένας ισομορφισμός.

Θεωρούμε λοιπόν $(z_n^*)_{n=1}^\infty = (y_n^* \circ T)_{n=1}^\infty$ μία ακολουθία του $T^*(Y^*)$, με όριο $z^* \in X^*$, και θα δείξουμε ότι $z^* \in T(Y^*)$. Επειδή $||y_n^* \circ T - z^*|| \to 0$, για κάθε $x \in X$ θα έχουμε:

$$|y_n^* \circ T(x) - z^*(x)| \to 0$$

κι αν θέσουμε $y = T(x)$, $\lambda_y = \varphi(x)$:

$$|y_n(y) - \lambda_y| \to 0$$

Ισχυριζόμαστε ότι η συνάρτηση $\lambda(y) = \lambda_y$ -που κατά τ' άλλα έχει οριστεί με περίεργο τρόπο- είναι καλά ορισμένη. Πράγματι, θα δείξουμε ότι ανεξαρτήτως των x για τα οποία $T(x)=y$, έχουμε $\lambda(y)=\varphi(x)$. Εάν $x_1, x_2 \in X$ είναι στοιχεία τέτοια ώστε $x_1, x_2 \in T^{-1}(y)$, τότε:

$$|y_n^*(y) - \varphi(x_1)| \to 0 \text{ και } |y_n^*(y) - \varphi(x_2)| \to 0$$

δηλαδή $\lambda(y)$ (από το x_1) $=\varphi(x_1) = \varphi(x_2) = \lambda(y)$ (από το x_2) , λόγω της μοναδικότητας του ορίου.

Η $\lambda: Y \to \mathbb{R}$ είναι ένα συναρτησοειδές (δηλαδή $\lambda \in Y^*$). Είναι κατ' αρχάς γραμμική, αφού αν $y=T(x)$, $g=T(w)$:

$$\lambda(y+g) = \lambda\big(T(x+w)\big) = \varphi(x+w) = \varphi(x)+\varphi(w) = \lambda\big(T(x)\big) + \lambda\big(T(w)\big) = \lambda(y)+\lambda(g)$$

και είναι επίσης φραγμένη, αλλά αυτό χρειάζεται περισσότερη δουλειά για να αποδειχθεί. Έστω $0 < \varepsilon < 1$. Από τη σύγκλιση:

$$|y_n^*(y) - \lambda(y)| \to 0$$

έπεται ότι, για αρκετά μεγάλο n (από την αντίστροφη τριγωνική ανισότητα):

$$|\lambda(y) - y_n^*(y)| < \varepsilon \Rightarrow |\lambda(y)| \leqslant \varepsilon + |y_n^*(y)|$$

δηλαδή:

$$|\lambda(y)| \leqslant \varepsilon + ||y_n^*|| \cdot ||y||$$

Αναλόγως κανείς μπορεί να δείξει ότι $|y_n^*(y)| \leqslant \varepsilon + ||\varphi|| \cdot ||x||$, για αρκετά μεγάλο n. Τώρα παρατηρούμε ότι οι y_n^* φράσσονται σημειακά. Πράγματι:

$$|y_n^*(y)| \leqslant \varepsilon + ||\varphi|| \cdot ||x|| \leqslant 1 + ||\varphi|| \cdot ||x|| \text{ οπότε } \sup_n |y_n^*(y)| \leqslant 1 + ||\varphi|| \cdot ||x|| < \infty$$

Έτσι, επειδή ο Y είναι Banach, από την αρχή ομοιομόρφου φράγματος έπεται ότι υπάρχει σταθερά M ώστε $||y_n^*|| \leqslant M$, κι επομένως:

$$|\lambda(y)| \leqslant \varepsilon + M \cdot ||y||$$

Εφόσον η παραπάνω ανισότητα αποδείχθηκε για τυχόν $0 < \varepsilon < 1$, έχουμε:

$$|\lambda(y)| \leqslant M \cdot ||y||$$

και κατά συνέπεια η λ είναι φραγμένη. Δείξαμε μ' αυτά ότι το λ είναι γραμμικό συναρτησοειδές του Y^*.

Όλα τα παραπάνω δείχνουν τελικά ότι ο τελεστής $\lambda \circ T : X \to \mathbb{R}$ είναι συναρτησοειδές του X^*, και μάλιστα:

$$|y_n^*(y) - \lambda(y)| \to 0 \Rightarrow |y_n^* \circ T(x) - \lambda \circ T(x)| \to 0$$

Λόγω της μοναδικότητας του ορίου, θα έχουμε $z^* = \lambda \circ T$, κι άρα:

$$\lim_{n\to\infty}^{||\cdot||} y_n^* \circ T = z^* = \lambda \circ T \in T^*(Y^*)$$

οπότε ο $T^*(Y^*) \subseteq X^*$ είναι κλειστός.

$\square$

Άσκηση 23: *Έστω Y ένας γραμμικός υπόχωρος ενός χώρου Hilbert $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, και $y^* \in Y^*$. Αποδείξτε ότι υπάρχει μοναδικό $x^* \in H^*$ ώστε:*

$$x^*|_Y \equiv y^* \text{ και } ||x^*|| = ||y^*||$$

Απάντηση: Η ύπαρξη ενός τέτοιου συναρτησοειδούς x^* εξασφαλίζεται από το θεώρημα των Hahn-Banach, οπότε εμείς αποσκοπούμε να δείξουμε τη μοναδικότητα μόνο.

Από το θεώρημα αναπαράστασης του Riesz, υπάρχει ένα $w \in Y$ ούτως ώστε:

$$y^*(\cdot) = \langle\cdot, w\rangle|_{Y\times Y} \text{ και } ||y^*|| = ||w||$$

Είναι φανερό ότι η $x^*(\cdot) = \langle\cdot, w\rangle$ είναι μία επέκταση του y^*, όπως αυτή περιγράφεται στην εκφώνιση της άσκησης. Ας υποθέσουμε προς άτοπο ότι ακόμη ένα συναρτησοειδές όπως το x^* (έστω το z^*) υπάρχει. Τότε, και πάλι από το θεώρημα αναπαράστασης του Riesz, μπορεί να βρεθεί $v \in H$ ούτως ώστε:

$$z^*(\cdot) = \langle\cdot, v\rangle \text{ και } ||z^*|| = ||v||$$

και μάλιστα, επειδή τα x^*, z^* είναι επεκτάσεις του ίδιου συναρτησοειδούς:

$$(x^* - z^*)|_Y(\cdot) = \langle\cdot, w - v\rangle|_{Y\times H} = (y^* - y^*)(\cdot) \equiv 0 \Leftrightarrow w - v \in Y^\perp$$

Ειδικότερα, $w - v \perp w$ (αφού $w \in Y$). Εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο θεώρημα, παίρνουμε:

$$||v||^2 = ||w - v||^2 + ||w||^2$$

κι επειδή $||w|| = ||y^*|| = ||z^*|| = ||v||$, έπεται $||w - v|| = 0 \Rightarrow w = v$. Κατά συνέπεια, τα συναρτησοειδή x^*, z^* ταυτίζονται.

□

Άσκηση 24: *Έστω X χώρος με νόρμα και Y γραμμικός υπόχωρός του. Έστω επίσης $x_0 \in X$. Δείξτε ότι:*

$$\text{dist}(x_0, Y) = \sup\{|x^*(x_0)| \mid x^* \in X^*, \ ||x^*|| = 1, \ Y \subseteq \text{Ker } x^*\}$$

Απάντηση: Από την Πρόταση 1.4.3, i. στο αρχείο των βάσεων Schauder (είναι πόρισμα του θεωρήματος Hahn-Banach) έχουμε άμεσα ότι:

$$\text{dist}(x_0, Y) \leqslant \sup\big\{|x^*(x_0)| \ \big| \ x^* \in X^*, \ ||x^*|| = 1, \ Y \subseteq \text{Ker } x^*\big\}$$

Επιπλέον, εφόσον $||x^*|| = 1$ και $Y \subseteq \text{Ker } x^*$, για κάθε $y \in Y$ θα έχουμε:

$$|x^*(x_0)| = |x^*(x_0 - y)| \leqslant ||x_0 - y|| \Rightarrow |x^*(x_0)| \leqslant \inf\{||x_0 - y|| \mid y \in Y\} = \text{dist}(x_0, Y)$$

κι οπότε αποδεικνύεται και η άλλη ανισότητα:

$$\text{dist}(x_0, Y) \geqslant \sup\big\{|x^*(x_0)| \ \big| \ x^* \in X^*, \ ||x^*|| = 1, \ Y \subseteq \text{Ker } x^*\big\}$$

□