691. Διδακτική των Μαθηματικών Ι

Παρουσίαση $5^η$ (θα παρουσιαστεί ή όχι)

Α. Φράγκος

Δευτέρα 14 Νοεμβρίου 2022

Τι θα διαπραγματευτούμε

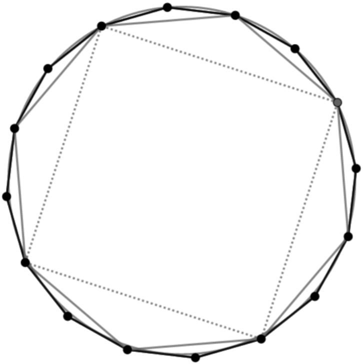
- Θα περιγράψουμε δύο έργα[1] με κυρίαρχη διάσταση τον (μαθηματικό) συλλογισμό με εικόνες.
- Θα περιγράψουμε δύο έργα[1] με έμφαση στη σύνδεση μεταξύ διαφορετικών αναπαραστάσεων.

[1] Tasks.

Συγχωρέστε με για τα σχήματα, τα έχω «κλέψει» από μια παλιά μου εργασία.

Έργο 1.1 - Σχετικά πρώτοι αριθμοί και πολύγωνα

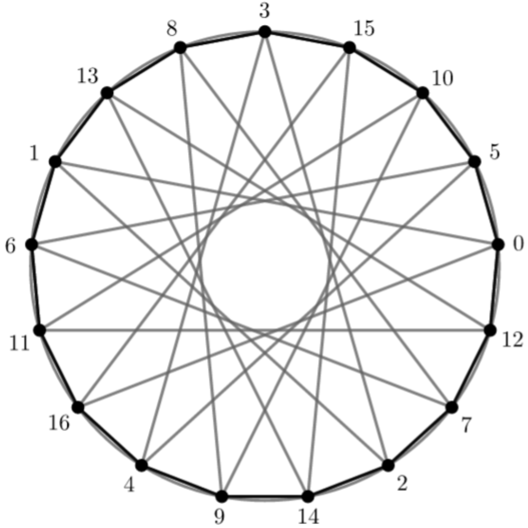
Ιδέα: Ας θεωρήσουμε a, n δύο αριθμούς $(1 < a < n)$ με τον πρώτο να διαιρεί τον δεύτερο. Κατασκευάστε έναν κύκλο στην περιφέρεια του οποίου έχετε τοποθετήσει ομοιόμορφα n σημεία, και κατασκευάστε μια «διαδρομή» που να διατρέχει ανά a τα σημεία του κύκλου, διαδοχικά (με «βήμα a»).



Στο προηγούμενο σχήμα παρουσιάζονται οι διαδρομές βημάτων 1 (■), 2 (—) και 4 (- - -) σε κύκλο 16 σημείων. Εφόσον $a|n$, η διαδρομή που θα κατασκευάσετε θα είναι κανονικό πολύγωνο και δεν θα διατρέχει όλα τα σημεία του κύκλου.

Τι συμβαίνει όταν όμως το n είναι πρώτος (κι άρα δεν έχει διαιρέτη $1 < a < n$); Τότε θα περνάει κάθε διαδρομή βήματος a από κάθε σημείο του κύκλου; Η απάντηση είναι καταφατική.[2]

[2] Θυμίζει modulo αριθμητική;



Αστροειδής μορφή - Διαδρομή βήματος 7 σε κύκλο 17 σημείων.

Επιπλέον, εάν το n δεν είναι κατ' ανάγκη πρώτος αλλά μκδ$(a, n) = 1$, τότε η διαδρομή βήματος a σε κύκλο n σημείων περνάει απ' όλα τα σημεία του κύκλου.

Διατυπώνουμε λοιπόν το ακόλουθο έργο.

Έργο 1.1 - Μέρος 1:

Κατασκευάστε κύκλο n σημείων (όπως πριν) και σ' αυτόν δημιουργήστε διαδρομή βήματος $1 < a < n$.

- Εάν $a|n$, παρατηρήστε ότι η διαδρομή δεν περνά από κάθε σημείο του κύκλου. *Με απόδειξη.*
- Εάν ο n είναι πρώτος (κι άρα δεν υπάρχει μικρότερος αριθμός που να τον διαιρεί) γράψτε μερικά παραδείγματα και μαντέψτε τι κάνει η διαδρομή στον κύκλο των n σημείων. Περνά από κάθε σημείο; *Χωρίς απόδειξη.*
- Γενικότερα, εάν μκδ$(a, n) = 1$, γράψτε μερικά παραδείγματα και μαντέψτε τι κάνει η διαδρομή στον κύκλο των n σημείων. Περνά από κάθε σημείο; *Χωρίς απόδειξη.*

Έργο 1.1 - Μέρος 2:

Θα προσπαθήσουμε να αποδείξουμε το δεύτερο σημείο του Έργου 1.1 - Μέρος 1.

- Κατ' αρχάς, ονοματήστε τα σημεία του κύκλου με $0, 1, 2, \cdots, n-1$ (με τη σειρά, π.χ. αριστερόστροφα).
- Υποθέστε ότι η διαδρομή βήματος a ξεκινά από το 0 και κάποτε ξαναφτάνει στο 0. Μετά από πόσα βήματα θα είναι αυτό το πρώτο κάποτε; *(Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε πολλαπλάσια $\kappa \cdot a = \lambda \cdot n$).*
- Αποδείξτε ότι αν μια διαδρομή διέρχεται από το ίδιο σημείο δύο φορές χωρίς να έχει περάσει από ένα (διαφορετικό) σημείο του κύκλου, τότε το δεύτερο σημείο δεν ανήκει στην διαδρομή.
- Συμπεράνετε το δεύτερο σημείο του Έργου 1.1 - Μέρος 1.

Έργο 1.2 - Τετράγωνα και τέλεια τετράγωνα

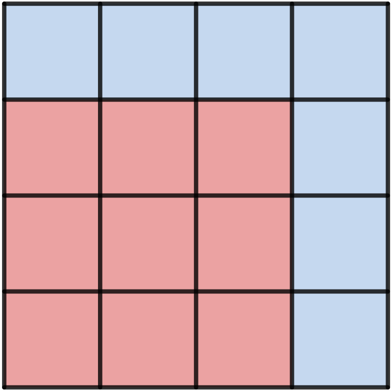
Ιδέα: Ο περιττός αριθμός 1 είναι τέλειο τετράγωνο, το ίδιο και το άθροισμα $1+3=4$. Ίσως εμφανίζεται ένα μοτίβο, για να δούμε: $1+3+5=9$. Μήπως είναι σύμπτωση;

$$
\begin{aligned}
1 &= 1^2 \\
1+3 &= 2^2 \\
1+3+5 &= 3^2 \\
1+3+5+7 &= 4^2 \\
1+3+5+7+9 &= 5^2 \\
1+3+5+7+9+11 &= 6^2 \\
&\vdots \quad (;)
\end{aligned}
$$

Θα λειτουργήσουμε επαγωγικά, χρησιμοποιώντας μοναδιαία τετράγωνα για να κατασκευάσουμε μεγαλύτερα τετράγωνα.

Κανείς για να πάρει ένα τετράγωνο $(n+1)^2$ από ένα τετράγωνο n^2, αρκεί να προσθέσει $2n+1$ μοναδιαία τετράγωνα σε σχήμα γάμμα εφαπτόμενα σε δύο πλευρές, όπως στο σχήμα που θα ακολουθήσει. Επαγωγικά:

$$\begin{aligned}(n+1)^2 &= n^2 + 2n + 1 \\ &= 1 + 3 + \cdots + 2n - 1 + 2n + 1\end{aligned}$$



Έργο 1.2 - Μέρος 1:

- Υπολογίστε διάφορα αθροίσματα διαδοχικών περιττών. Παρατηρήστε ότι αυτά τα αθροίσματα είναι πάντοτε τέλεια τετράγωνα.
- Φανταστείτε τον αριθμό 1 ως μοναδιαίο τετράγωνο. Πώς θα φτιάχνατε το αμέσως επόμενο τετράγωνο χρησιμοποιώντας μοναδιαία τετράγωνα; Πόσα (μοναδιαία) τετραγωνάκια προσθέσατε;
- Μπορείτε (αν έχετε αρκετό χρόνο και υπομονή) να φτιάξετε όσο μεγάλο τετράγωνο θέλετε, ξεκινώντας από το μοναδιαίο; Πόσα (μοναδιαία) τετραγωνάκια προσθέτετε σε κάθε βήμα;
- Είναι αλήθεια ότι κάθε τέλειο τετράγωνο είναι άθροισμα διαδοχικών περιττών, κι ότι κάθε άθροισμα διαδοχικών περιττών είναι τέλειο τετράγωνο;

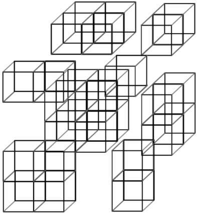
Έργο 1.2 - Μέρος 2:

Βρείτε μια ακολουθία αριθμών (a_k) τέτοια ώστε:

$$n^3 = \sum_{k=0}^{n-1} a_k$$

παίρνοντας ιδέες από το Έργο 1.2 - Μέρος 1.

Υπόδειξη:



Έργο 2.1 - Το Έργο 1.1 με γραμμικές ισοτιμίες

Ας θεωρήσουμε μια γραμμική ισοτιμία:

$$a \cdot x \equiv \lambda \mod n$$

Έχει λύση; Εάν, για παράδειγμα, το a διαιρεί το n, τότε τα $a \cdot x$ δεν διατρέχουν (modulo n) όλους τους αριθμούς $\{1, 2, \cdots, n\}$ (οπότε η απάντηση εξαρτάται του λ). Αυτό διότι η διαδρομή βήματος a στον κύκλο των n σημείων δεν διέρχεται από όλα τα σημεία του κύκλου.

Επιπλέον, εάν το n είναι πρώτος (ή γενικότερα μκδ$(a, n) = 1$), η εν λόγω ισοτιμία έχει λύση για κάθε λ, αφού η διαδρομή βήματος a στον κύκλο των n σημείων διέρχεται από όλα τα σημεία του κύκλου.

Ουσιαστικά έχουμε εκφράσει το πρόβλημα της επίλυσης μιας γραμμικής ιστιμίας με δύο τρόπους: Κατ' αρχάς αλγεβρικά, και μέσω μιας αντιστοιχίας, γεωμετρικά.

Μπορούμε λοιπόν να δώσουμε το ακόλουθο έργο.

Έργο 1.2:

Κατασκευάστε κύκλο n σημείων και απαριθμήστε τα σημεία του με $0, 1, \cdots, n-1$. Επίσης, θεωρήστε τη γραμμική ισοτιμία:

$$a \cdot x \equiv \lambda \mod n$$

- Παρατηρήστε ότι το γινόμενο $a \cdot x \mod n$ (για τα διάφορα x) αντιστοιχεί σε σημείο διαδρομής βήματος a σε κύκλο n σημείων.
- Εάν $a|n$, έχει η γραμμική ισοτιμία λύση;
- Εάν το n είναι πρώτος, έχει η γραμμική ισοτιμία λύση;
- Γενικότερα, αν $\mu\kappa\delta(a, n) = 1$, έχει η γραμμική ισοτιμία λύση;

Έργο 2.2 - Το Έργο 1.2 σε μεγαλύτερες διαστάσεις

Στο προηγούμενο έργο κάναμε «γεωμετρικοποίηση», εδώ θα επιχειρήσουμε «αλγεβρικοποίηση».

Προς το παρόν (δηλ. στο Έργο 1.2) έχουμε βρει τρόπους να «σπάμε» τέλεια τετράγωνα και τέλειους κύβους σε αθροίσματα. Για να το καταφέρουμε αυτό, επικαλεστήκαμε γεωμετρική εποπτεία, «σπάζοντας» τετράγωνα και κύβους σε (αμέσως) μικρότερα τετράγωνα/κύβους & το περισσευόμενο κομμάτι.

Πώς θα γράφαμε κατ' αναλογία με τα προηγούμενα το n^4; Γεωμετρικά φαίνεται δεν μπορούμε να κάνουμε πολλά πράγματα.

Ας επιστρέψουμε στα προηγούμενα παραδείγματα: Για τα τέλεια τετράγωνα, παρατηρήσαμε (γεωμετρικά) ότι:

$$(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 \ \textbf{και}\ n^2 = \sum_{k=0}^{n-1}(2k+1)$$

Το πρώτο στην πραγματικότητα είναι ταυτολογία, δεδομένου του τύπου του διωνυμικού αναπτύγματος. Για το δεύτερο:

$$\begin{aligned} n^2 &= [n^2 - (n-1)^2] + [(n-1)^2 - (n-2)^2] + \cdots + [2^2 - 1] \\ &= [2n-1] + [2(n-1)-1] + \cdots + [1] \\ &= [2(n-1)+1] + [2(n-2)+1] + \cdots + [2(0)+1] \\ &= \sum_{k=0}^{n-1}(2k+1) \end{aligned}$$

Οπότε, στην πραγματικότητα, για να βρούμε ένα τέλειο τετράγωνο n^2 προσθέτουμε όρους που προκύπτουν από τη διαφορά $(k+1)^2 - k^2$.

Παρομοίως, κανείς μπορεί να δείξει (γεωμετρικά, αλλά και αλγεβρικά) ότι:

$$n^3 = \sum_{k=0}^{n-1}(3k^2 + 3k + 1)$$

όπου $3k^2 + 3k + 1 = (k+1)^3 - k^3$.

Αφού πλέον έχει γίνει σύνδεση μέσω άλγεβρας, μπορούμε να επεκταθούμε σε περισσότερες διαστάσεις. Για παράδειγμα:

$$n^4 = \sum_{k=0}^{n-1}(4k^3 + 6k^2 + 4k + 1)$$

όπου $4k^3 + 6k^2 + 4k + 1 = (k+1)^4 - k^4$. Γενικά (αυτά μεταξύ μας):

$$n^c = \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{\ell=0}^{c-1}\binom{c}{\ell}k^\ell$$

Έργο 2.2:

Δυστυχώς, αν προσπαθήσουμε να βρούμε έναν τρόπο να εκφράζουμε τα n^4 ως αθροίσματα (όπως στο Έργο 1.2), η γεωμερική μας εποπτεία δεν θα βοηθήσει (αφού δεν μπορούμε να σκεφτόμαστε τετραδιάστατους χώρους).

- Για τα τέλεια τετράγωνα: Όταν θέλαμε να κατασκευάσουμε από ένα τέλειο τετράγωνο k^2 το $(k+1)^2$, προσθέταμε στο πρώτο «αυτό που του λείπει», δηλαδή $(k+1)^2 - k^2 = 2n+1$. Εν τέλει, το n^2 το γράψαμε ως άθροισμα αυτών των $2k+1$. Μπορούμε να κάνουμε το ίδιο για τους τέλειους κύβους; Δηλαδή, γράφεται το n^3 ως άθροισμα αριθμών της μορφής $(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$;
- Γενικεύστε για τα n^4.