ΘΕΩΡΙΑ ΠΑΙΓΝΙΩΝ

Χειμερινό 2022

Μπουρνέτας

28/09/22

Προβλήματα βελτιστοποίησης/λήψης αποφάσεων με περισσότερους από έναν αποφασίζοντες (≥2).

Η ωφέλεια καθενός εξαρτάται από τις αποφάσεις όλων

σύγκρουση συμφερόντων	συνεργατικό πλαίσιο
ανταγωνιστικά παιχνίδια	παιχνίδια συνεργασίας

Παράδειγμα 1

Παίκτες A, B, C. 1) Κληρώνεται ένας δίκαια 2) Επιλέγει ποιον θα σημαδέψει με ευστοχίες a, b, c αντίστοιχα. Χβγ $a>b>c$

Αν πετύχει, το παιχνίδι συνεχίζει με τους δύο. Αν αποτύχει το παιχνίδι επαναλαμβάνεται.

$P(A) = P(A \text{ επιζεί στο τέλος})$, όμοια $P(B)$, $P(C)$

$\overset{\shortparallel}{P_A}$ $\qquad \overset{\shortparallel}{P_B}$ $\qquad \overset{\shortparallel}{P_C}$

$P_{AB} = P(A \text{ επιζεί μεταξύ } A, B)$, $P_{BA} = 1 - P_{AB}$, όμοια $P_{AC}, P_{CA}, P_{BC}, P_{CB}$

$a = P(A \text{ πετυχαίνει τον στόχο})$, όμοια b, c.

Ⓐ Ⓑ	$P(E_j)$	$P(A \text{ επιζεί} \mid E_j)$, $j=1,2,3,4$
E_1) Κληρώνεται ο A κ' πετυχαίνει	$a/2$	1
E_2) Κληρώνεται ο A κ' αστοχεί	$1-a/2$	P_{AB}
E_3) Κληρώνεται ο B κ' πετυχαίνει	$b/2$	0
E_4) Κληρώνεται ο B κ' αστοχεί	$1-b/2$	P_{AB}

$$\Rightarrow P_{AB} = 1 \cdot a/2 + P_{AB} \cdot 1-a/2 + 0 \cdot b/2 + P_{AB} \cdot 1-b/2 \Rightarrow$$

$P_{AB} = \frac{a}{a+b}$. Όμοια $P_{BA} = \frac{b}{a+b}$ $\quad P_{AC} = \frac{a}{a+c}$ $\quad P_{CA} = \frac{c}{a+c}$

$P_{BC} = \frac{b}{c+b}$ $\quad P_{CB} = \frac{c}{b+c}$

Scanned with CamScanner

1ο στάδιο

1η στρατηγική: Κάθε παίκτης σημαδεύει τον πιο ισχυρό

A → B $\quad P_A = \frac{1}{3} a P_{AC} + \frac{1}{3}(1-a) P_A + \frac{1}{3} b \cdot 0 + \frac{1}{3}(1-b) P_A +$

B → A $\quad \frac{1}{3} c \cdot 0 + \frac{1}{3}(1-c) P_A \Rightarrow P_A = \frac{a^2}{(a+c)(a+b+c)}$, όμοια

C → A $\quad P_B = \frac{b}{a+b+c}, \quad P_C = \frac{c(2a+c)}{a+b+c}$

Αν π.χ. $a=0,8$, $b=0,6$, $c=0,4$, τότε $P_A = 0.296$, $P_B = 0.333$, $P_C = 0.37$

Παραλλαγή 1

(A, B) συμμαχούν έναντι του C.

A → C $\quad$ Όμοια θα προκύψει ότι

B → C $\quad P_A = 0.444$, $P_B = 0.470$, $P_C = 0.089$

C → A

Παραλλαγή 2

(A, C) απειλή εναντίον C

A → B $\quad$ Όμοια θα προκύψει ότι

B → A $\quad P_A = 0.444 \quad P_B = 0.200 \quad P_C = 0.356$

C → B

Scanned with CamScanner

30/09/22

Παράδειγμα 2

Παραλλαγή Ρώσικης Ρουλέτας

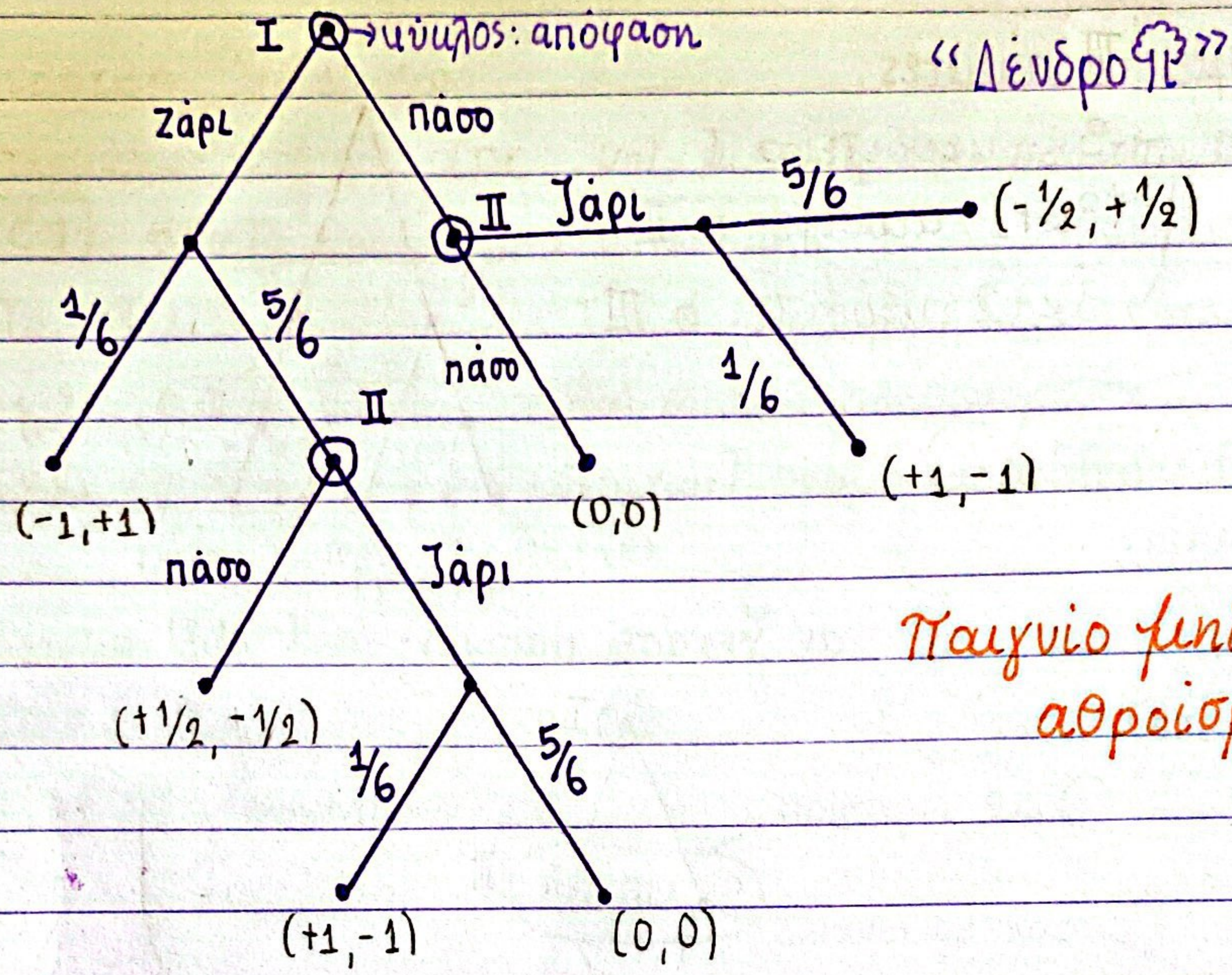
Παίκτες I, II

1) Πονταρουν από 1€

2) I → ρίχνει ζάρι → 1 χάνει ο I, παίρνει τα € ο II stop
→ 2-6 προχωρά στον II
πάσο + προσθέτει 1€

3) II → ρίχνει ζάρι → 1 χάνει ο II, παίρνει τα € ο I stop
→ 2-6 τα μοιράζονται stop
πάσο + προσθέτει 1€, τα μοιράζονται stop

Scanned with CamScanner



Παιγνίο μηδενικού αθροίσματος

Παράδειγμα 3

Παιχνίδι Morra

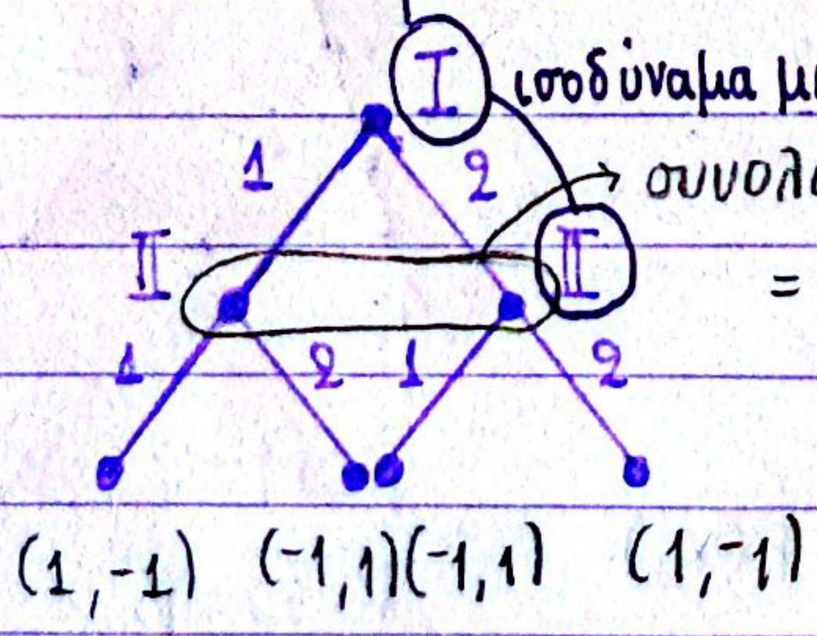
Παίκτες I, II

Γράφουν 1 ή 2 σε χαρτί κρυφά.

Δείχνουν τα χαρτιά.

Άθροισμα: άρτιο → ο I κερδίζει 1€ από τον II

περιττό → ο II κερδίζει 1€ από τον I



ισοδύναμα μπορούμε να τους εναλλάξουμε στο γρ.

→ σύνολο πληροφόρησης του II

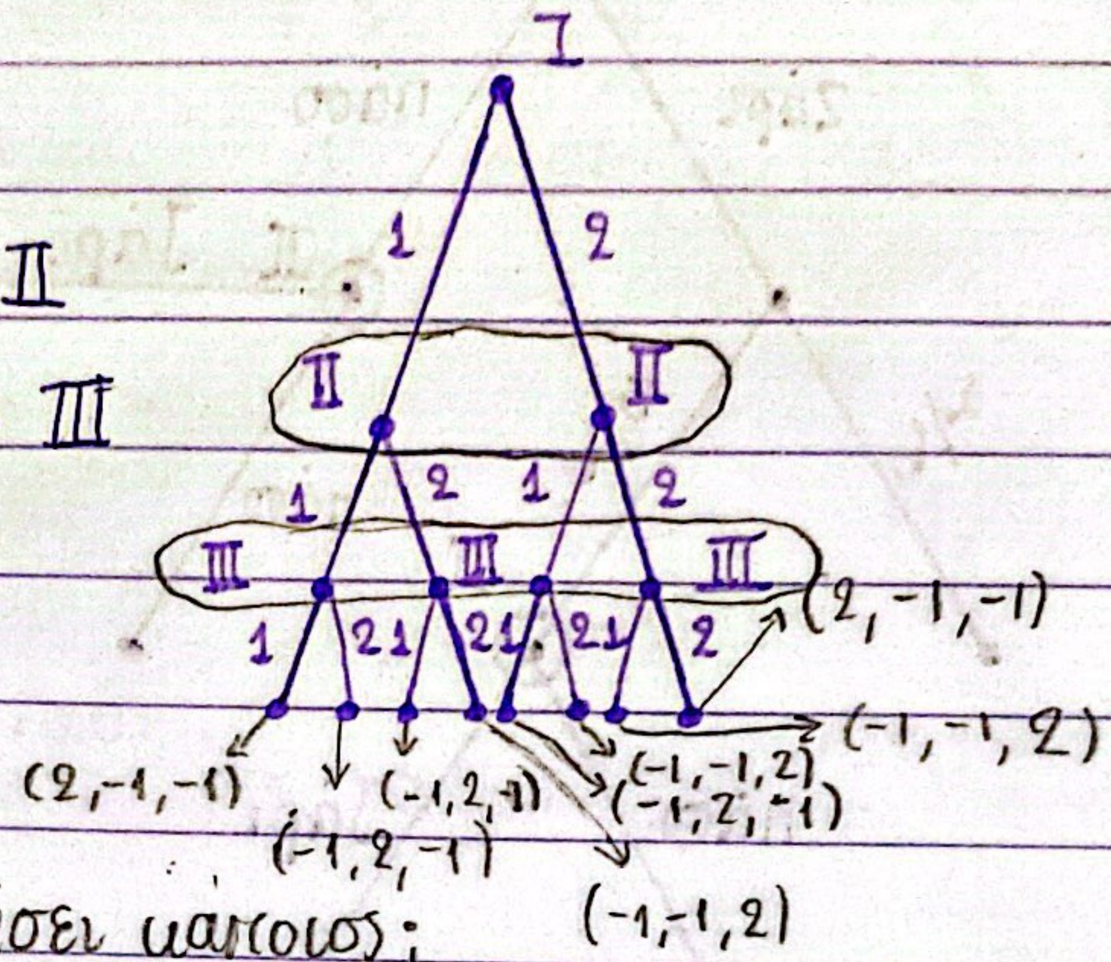
= ο II δεν ξέρει!!

Αν πάρουμε 3 παίκτες:

Άθροισμα → $3k$: κερδίζει ο I

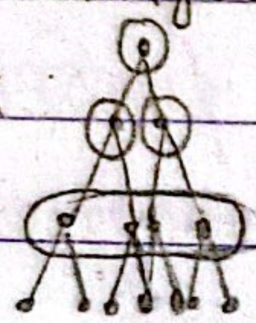
→ $3k+1$: κερδίζει ο II

→ $3k+2$: κερδίζει ο III

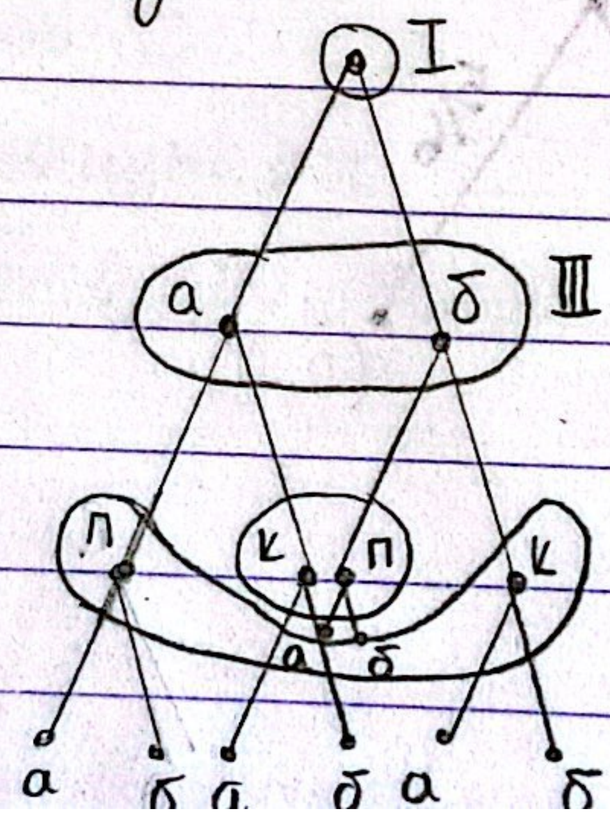


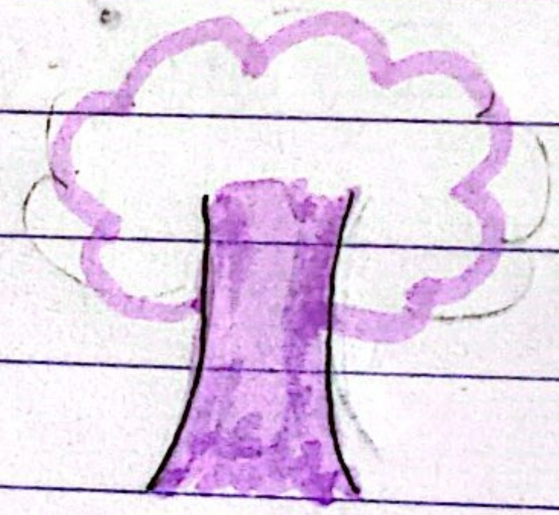
και πολλές άλλες παραλλαγές

πχ



αν ξεχάσει κάποιος;





...

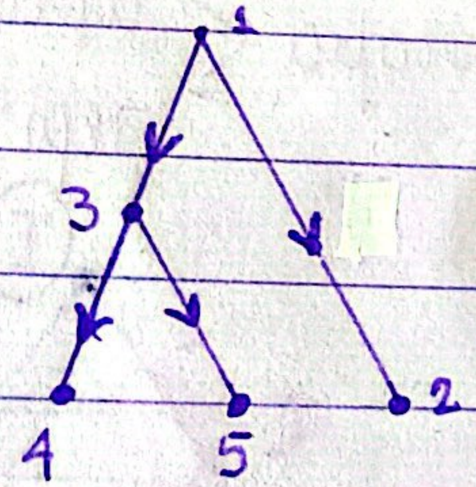
Scanned with CamScanner

05/10/22

Ενισχυμένη Μορφή Παιχνιδιού

1. $N = \{1, 2, \dots, n\}$ σύνολο παικτών
2. Δένδρο (προσανατολισμένο), T = σύνολο κορυφών (καταστάσεις παιχνιδιού)
3. $F : T \to 2^T$ $\forall i \in T$, $F(i) = \{$κορυφές που έπονται άμεσα της $i\}$.

$\Leftrightarrow$ ακμές



▷ $t_0 \in T$ αρχική κορυφή: $t_0 \notin F(x)$, $x \in T$.

▷ x τερματική κορυφή: $F(x) = \emptyset$

$t \in F(s) \Leftrightarrow \exists$ ακμή $s \to t$

Μονοπάτι $s \to t$

$(\underset{s}{x_1}, x_2, \dots, \underset{t}{x_k})$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = s \\ x_k = t \end{array}\right\} \begin{array}{l} x_{j+1} \in F(x_j) \\ j = 1, 2, \dots, k-1 \end{array}$$

$F(1) = \{2, 3\}$

$F(2) = \emptyset$

$F(3) = \{4, 5\}$

$F(4) = F(5) = \emptyset$

Scanned with CamScanner

4. Συνάρτηση Πληρωμής

t: τερματική κορυφή, $(p_1, \dots, p_n)$, p_i = πληρωμή παίκτη_i στην t.

5. $\boxed{T_0 \subset T}$: $\forall t \in T_0$ έχει έλεγχο $\boxed{\text{η φύση}}$

6. $T - T_0 = T_1 \cup T_2 \cup \dots \cup T_n$, $T_i \cap T_j = \emptyset$, $\boxed{T_i = \{t : \text{έλεγχος στον παίκτη } i\}}$

7. $\forall i = 1, 2, \dots, n$ $T_i = T_{i1} \cup T_{i2} \cup \dots \cup T_{ik_i}$ σύνολο πληροφόρησης του i

8. $\forall T_{ij} \Rightarrow h_{ij}$ = σύνολο ταμπελών (δεικτών) όνομα αποφάσεων - κινήσεων

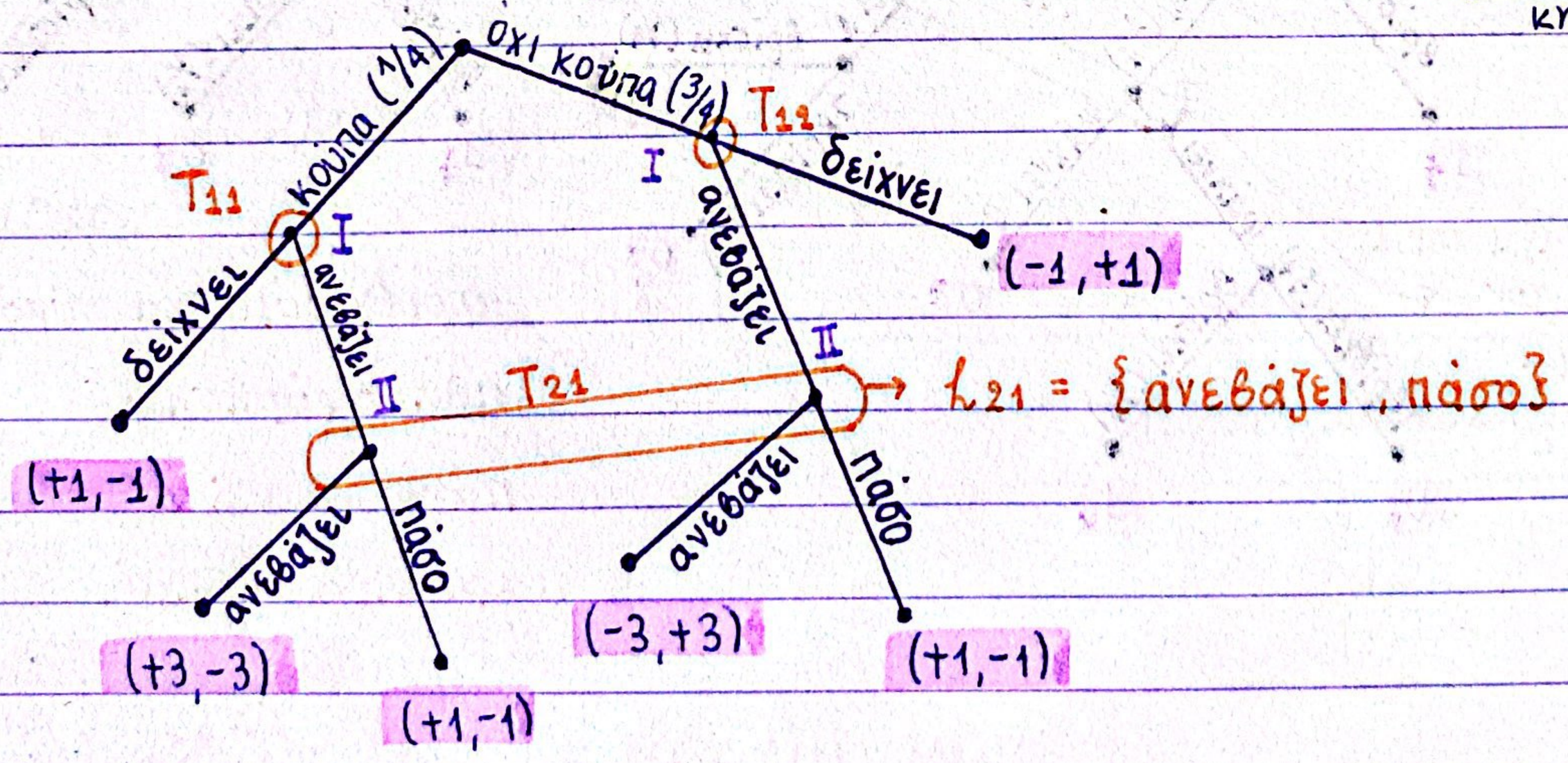
Παράδειγμα 1

Στοιχειώδες Πόκερ

- Παίκτες - I, II, ποντάρουν 1€

Ο $\boxed{\text{I}}$ τραβάει χαρτί και το βλέπει → ποντάρει 2€ (*)
→ δείχνει το χαρτί → κούπα: νίκη I
→ όχι κούπα: νίκη II

(*) Ο I ανεβάζει το πονταρίσμα : $\boxed{\text{II}}$ → πάσο: νίκη I
→ πονταρει 2€, ο I δείχνει → κούπα: νίκη I
→ όχι κούπα: νίκη II



Scanned with CamScanner

Παράδειγμα 2

Παιχνίδι Αναζήτησης, I: αντιτορπιλλιό, II: υποβρύχιο

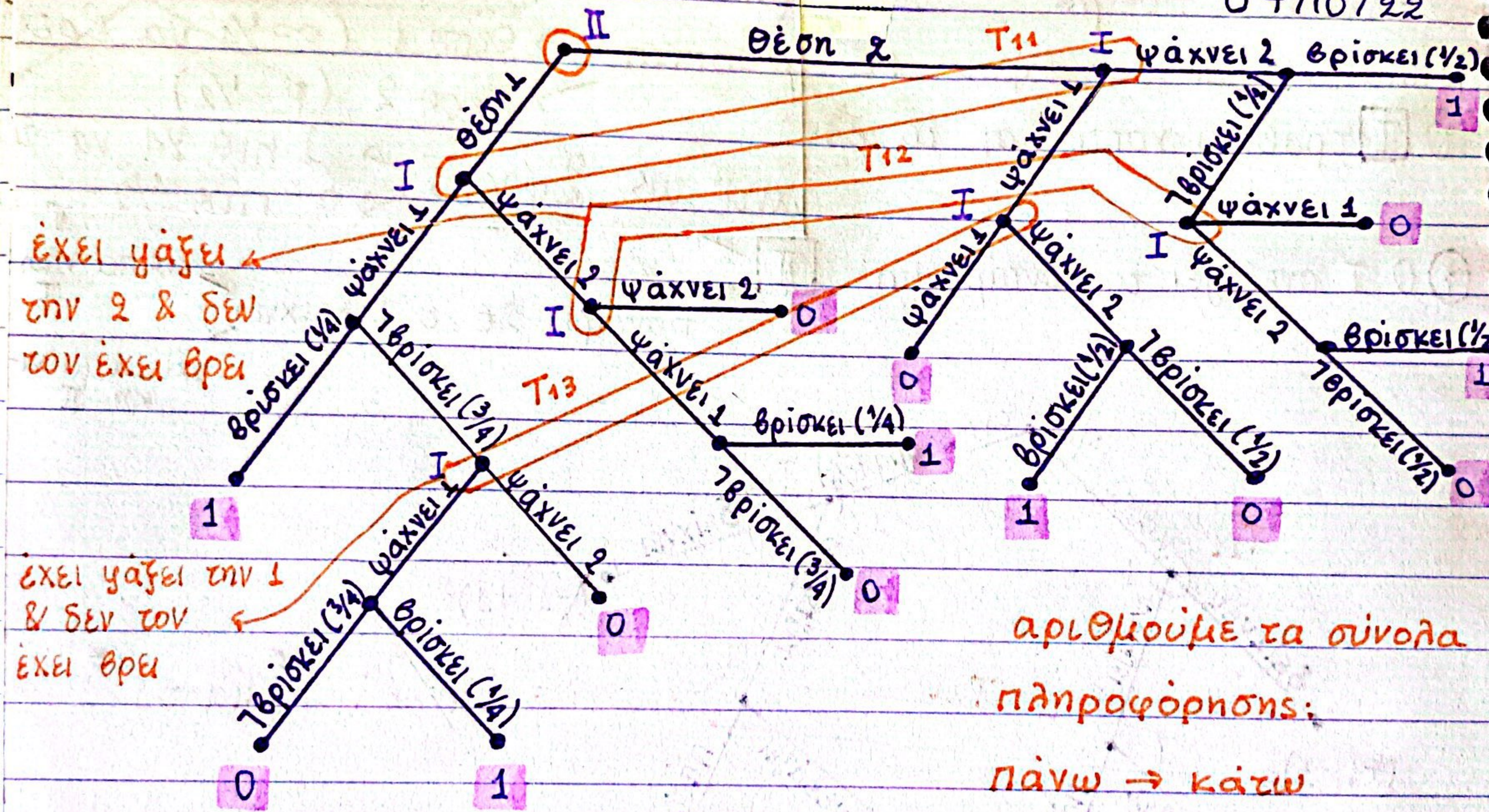
① II κρύβεται → θέση 1 ($p = 1/4$ να βρεθεί)
→ θέση 2 ($p = 1/2$ να βρεθεί)
(δεν κινείται)

② I ψάχνει ως 2 φορές → θέση 1 ($p = 1/4$ να τον βρει)
→ θέση 2 ($p = 1/2$ να τον βρει)
(κινείται)

Πληρωμές: ① κερδίζει ο I, χάνει ο II (τον βρίσκει) ⓪ (ισοπαλία) δεν τον βρίσκει

Scanned with CamScanner

07/10/22



έχει γάξει την 2 & δεν τον έχει βρει

έχει γάξει την 1 & δεν τον έχει βρει

αριθμούμε τα σύνολα πληροφόρησης:

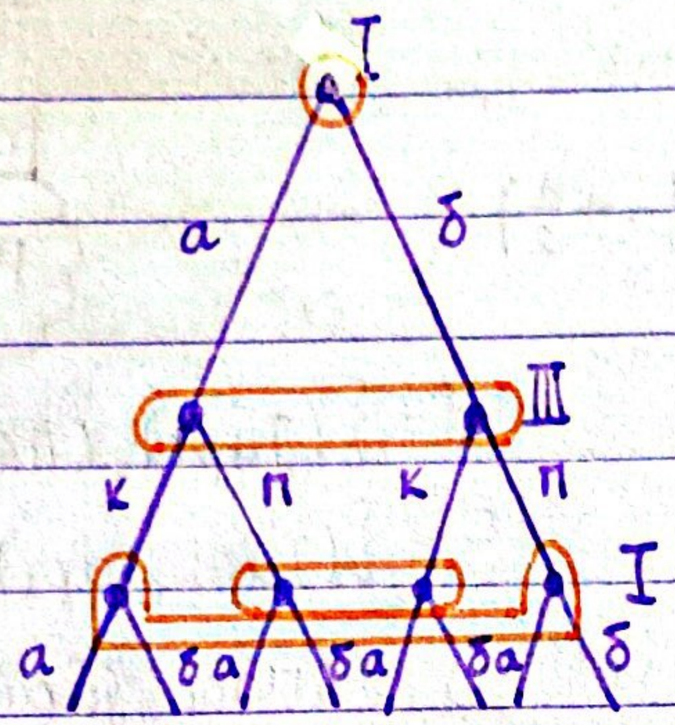
πάνω → κάτω

αριστερά → δεξιά

Scanned with CamScanner

Τέλεια Πληροφόρηση (Perfect Information): Όλα τα σύνολα πληροφόρησης είναι μονοσύνολα (σκάκι, τάβλι)

Όχι τέλεια πληροφόρηση: ναυμαχία, πόκερ κα.



"ο Ι ξεχνάει"

όχι τέλεια ανάμνηση

Πλήρης / Ελλιπής Πληροφόρηση (Full / Incomplete Information):

Έχουμε στο αν όλοι οι παίκτες γνωρίζουν τους κανόνες.

Στρατηγικές (Καθαρές)

Πλήρες σχέδιο δράσης ενός παίκτη

$S^i = x = (x_1, x_2, \dots, x_{k_i})$

$x_j \in h_{ij} \ \forall j = 1, 2, \dots, k_i$

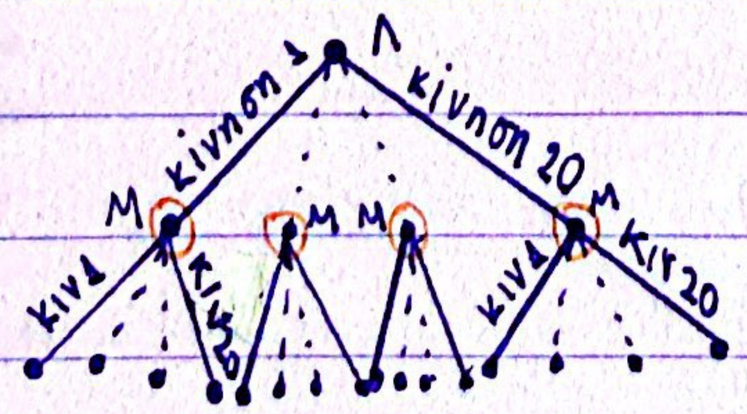
$$|S^i| = \prod_{j=1}^{k_i} |h_{ij}|$$

πληθάριθμος

$$\boxed{S^i = \{s^i : s^i \text{ στρατηγική του } i\}}$$

Παράδειγμα

Ζυάμι 2 κινήσεων



$S^\Lambda = \{(1), (2), \dots, (20)\}$

$|S^\Lambda| = 20$

$$S^M = \begin{cases} (1, 1, \dots, 1) \\ (1, 1, \dots, 2) \\ \vdots \\ (20, 20, \dots, 20) \end{cases} \qquad |S^M| = 20^{20}$$

Scanned with CamScanner

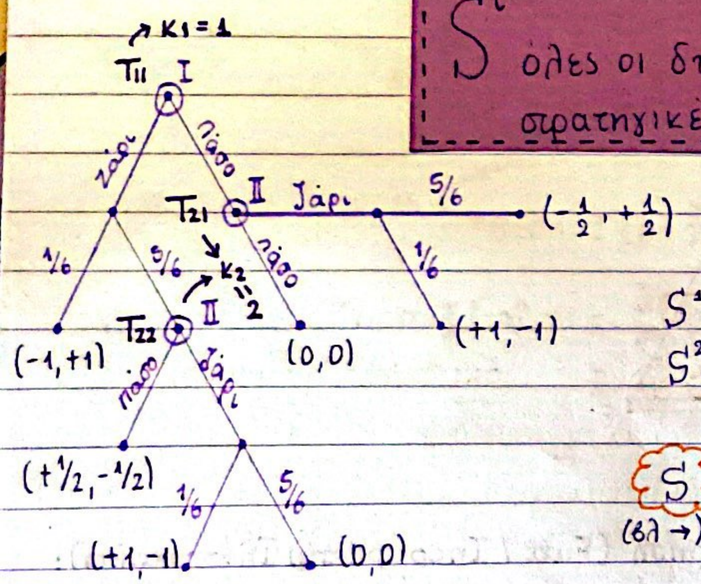
$S^i = (x_1, x_2, \dots, x_{k_i})$

$x_j \in \mathcal{L}_{ij} \ \forall j$

$\mathcal{S}^i$ όλες οι δυνατές στρατηγικές

Παράδειγμα 1

Ρωσική Ρουλέττα



14/10/22.

Περίπτωση 2:

Ξαίνησεις της φύσης

$S = ((\text{γάρι}), (\text{γάρι}, \text{γάρι}))$

κατανομή πιθανότητας στις τελικές κορυφές

$p(S) = [1/6, 5/6^2, 5/6^2, 0, 0, 0, 0]$

$S^1 = \{(\text{γάρι}), (\text{πάσο})\}$

$S^2 = \{(\text{γάρι}, \text{γάρι}), (\text{γάρι}, \text{πάσο}), (\text{πάσο}, \text{γάρι}), (\text{πάσο}, \text{πάσο})\}$

$\mathcal{S} = \{((\text{γάρι}), (\text{γάρι}, \text{γάρι})), ((\text{γάρι}), (\text{γάρι}, \text{πάσο})) \dots\}$ (βλ →)

Περίπτωση 1: Ξ κορυφές με αιτήσεις της φύσης

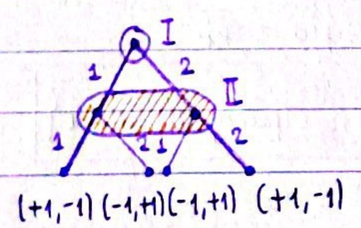
$s \in \mathcal{S} \to t(s) \to \pi(t) = (\pi^1(t), \dots, \pi^n(t))$

$h^i(s) = \pi^i(t(s))$

$\mathcal{S} = (\mathcal{S}^1, \dots, \mathcal{S}^n)$

Παράδειγμα 2

Μοτσα



Γενικό Παράδειγμα

		-2	0	5	10
στρατηγικές	$S = (S^1, S^2)$	0	7	0	3	0	0	τερματικές κορυφές (0-αθροίσματος)
	$x = (x^1, x^2)$	0	0	0	5	0	5	

$\mathcal{S} = \{((1),(1)), ((1),(2)), ((2),(1)), ((2),(2))\}$

π.χ. $s = ((1),(2)) \to t(s) \to h(s) = \begin{pmatrix} h^1(s) \\ h^2(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

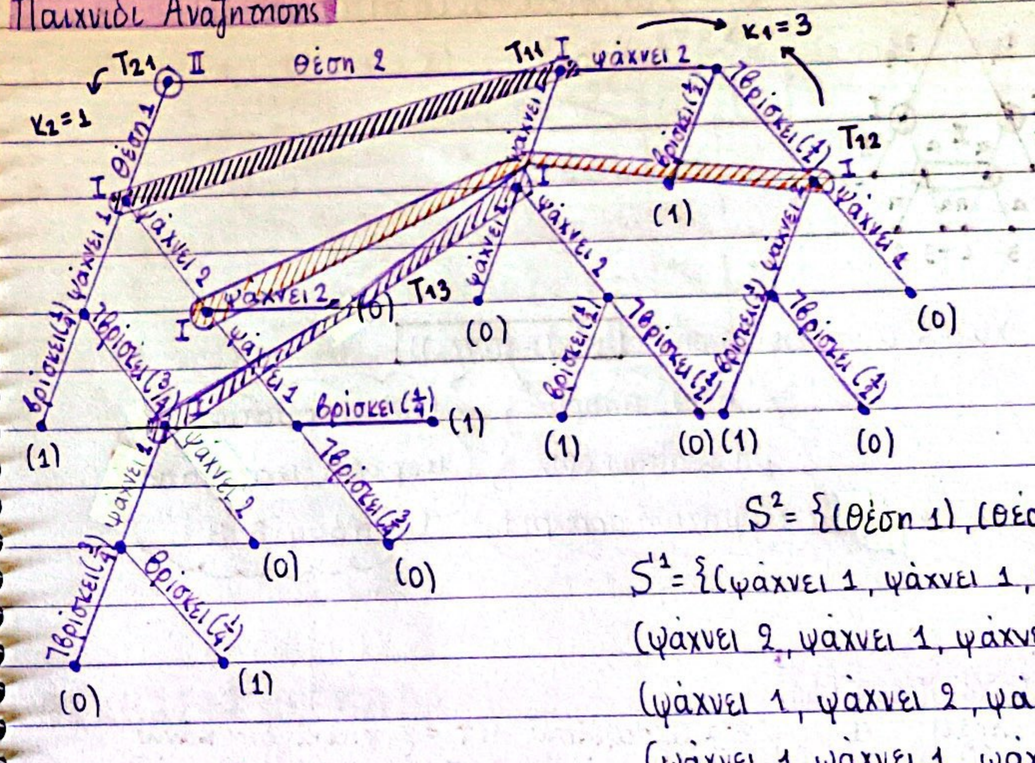
$S^I \backslash S^{II}$	(1)	(2)
(1)	(1,-1)	(-1,1)
(2)	(-1,1)	(1,-1)

⇒

I \ II	(1)	(2)
(1)	1	-1
(2)	-1	1

Παράδειγμα 3

Παιχνίδι Αναζήτησης



$S^2 = \{(\text{θέση } 1), (\text{θέση } 2)\}$

$S^1 = \{(\text{ψάχνει } 1, \text{ψάχνει } 1, \text{ψάχνει } 1), (\text{ψάχνει } 2, \text{ψάχνει } 1, \text{ψάχνει } 1), (\text{ψάχνει } 1, \text{ψάχνει } 2, \text{ψάχνει } 1), (\text{ψάχνει } 1, \text{ψάχνει } 1, \text{ψάχνει } 2), (\text{ψάχνει } 2, \text{ψάχνει } 2, \text{ψάχνει } 1), (\text{ψάχνει } 2, \text{ψάχνει } 1, \text{ψάχνει } 2), (\text{ψάχνει } 1, \text{ψάχνει } 2, \text{ψάχνει } 2), (\text{ψάχνει } 2, \text{ψάχνει } 2, \text{ψάχνει } 2)\}$

συνάρτηση Χρησιμότητας

Ο τερματική κορυφή t $\pi(t) = (\pi^1(t), \dots, \pi^n(t))$ όπου $\pi^i(t)$ = πληρωμή (ωφέλεια) παίκτη i αν το παιχνίδι τερματίσει στην t

Στρατηγική Κατάσταση

Σύνολο στρατηγικών καταστάσεων $= \mathcal{S} = \mathcal{S}^1 \times \mathcal{S}^2 \times \dots \times \mathcal{S}^n$, $s = (s^1, s^2, \dots, s^n)$ και $s^i \in \mathcal{S}^i$.

Scanned with CamScanner

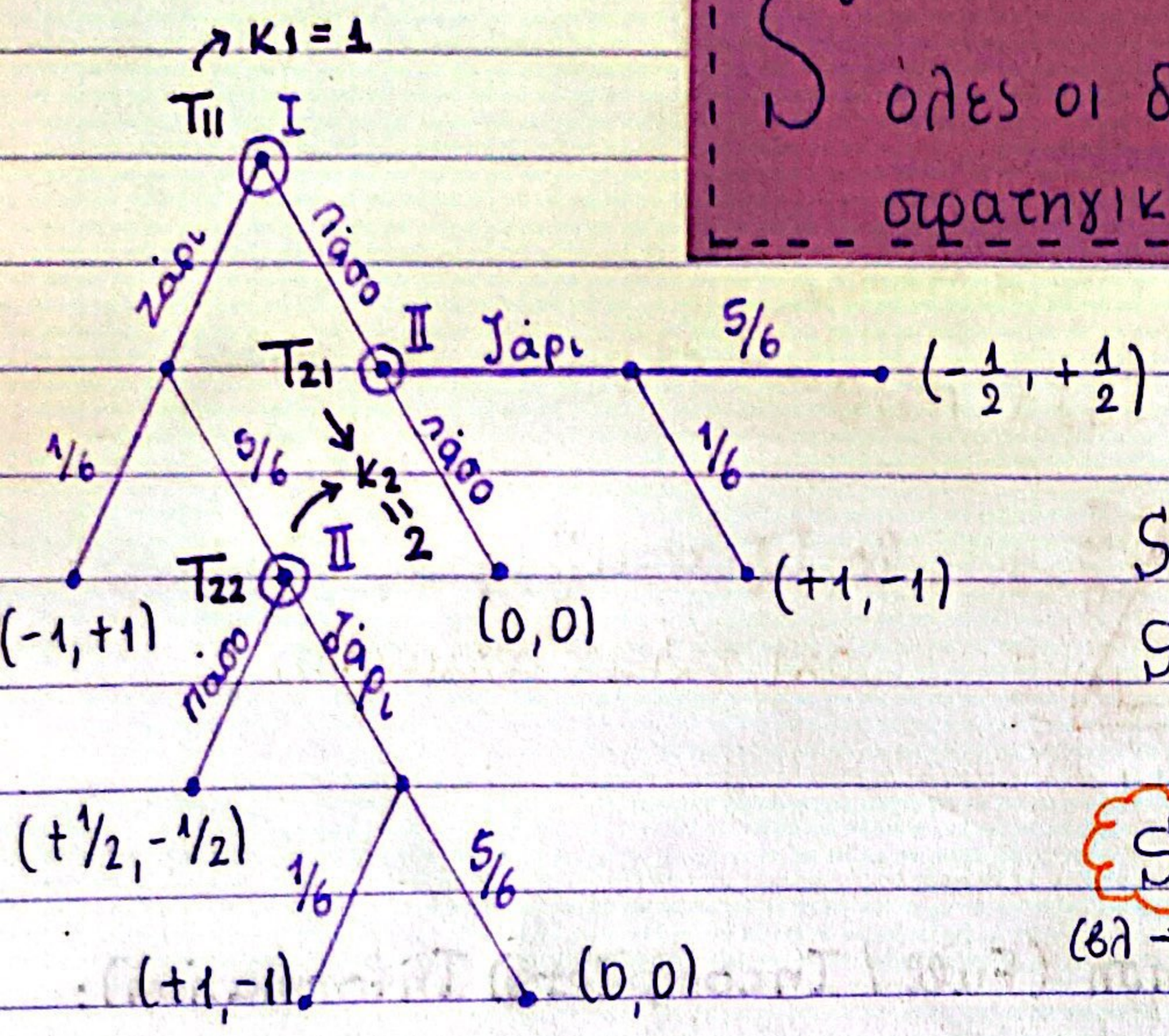
$S^i = (X_1, X_2, \dots, X_{k_i})$

$x_j \in \mathcal{L}_{ij} \ \forall j$

S^i όλες οι δυνατές στρατηγικές

Παράδειγμα 1

Ρωσική Ρουλέττα



$S^1 = \{(\text{Jάρι}), (\text{πάσο})\}$

$S^2 = \{(\text{Jάρι}, \text{Jάρι}), (\text{Jάρι}, \text{πάσο}), (\text{πάσο}, \text{Jάρι}), (\text{πάσο}, \text{πάσο})\}$

$S = \{((\text{Jάρι}), (\text{Jάρι}, \text{Jάρι})), ((\text{Jάρι}), (\text{Jάρι}, \text{πάσο})) \dots\}$ (βλ →)

14/10/22.

Περίπτωση 2: ∃ κινήσεις της φύσης

$S = ((\text{Jάρι}), (\text{Jάρι}, \text{Jάρι}))$

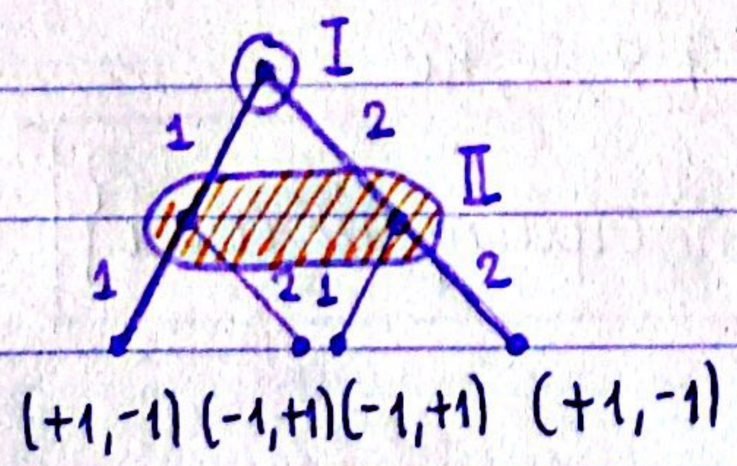
κατανομή πιθανότητας στις τελικές κορυφές

$p(s) = [1/6, 5/6, 5/6, 0, 0, 0, 0]$

Περίπτωση 1: ∄ κορυφές με κινήσεις της φύσης

Παράδειγμα 2

Μορφή



$s \in S \to t(s) \to \pi(t) = (\pi^1(t), \dots, \pi^n(t))$

$h^i(s) = \pi^i(t(s))$

$S = (S^1, \dots, S^n)$

Γενικό Παράδειγμα

στρατηγικές

-2 0 5 10 τερματικές κορυφές (0-αθροίσματος)

$S = (S^1, S^2)$ 0.7 0.03 0 0

$x = (x^1, x^2)$ 0 0 0.5 0.5

$S = \{((1), (1)), ((1), (2)), ((2), (1)), ((2), (2))\}$

π.χ. $s = ((1), (2)) \to t(s) \to h(s) = \begin{pmatrix} h^1(s) \\ h^2(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$S^I \backslash S^{II}$	(1)	(2)
(1)	(1,-1)	(-1,1)
(2)	(-1,1)	(1,-1)

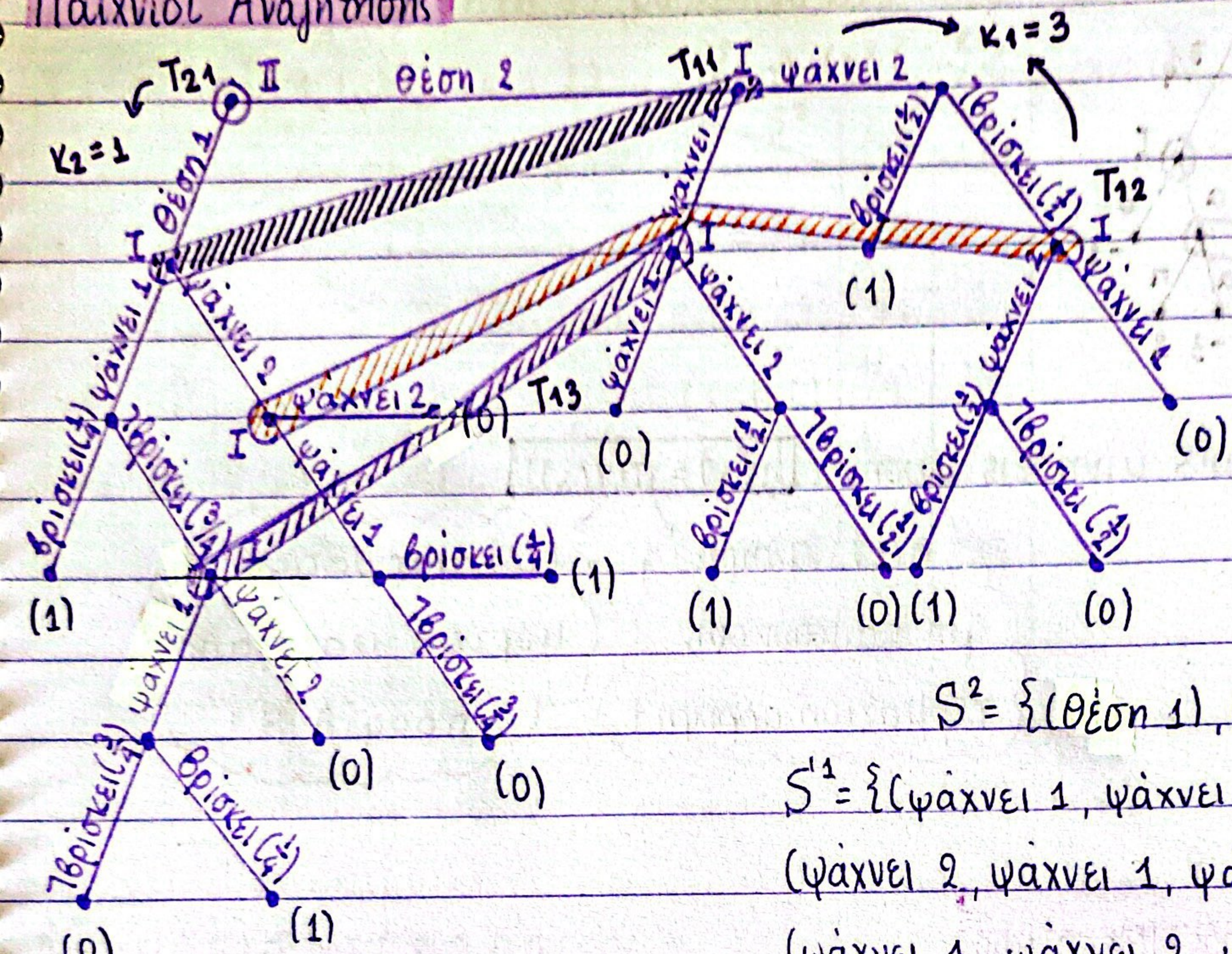
⇒

I \ II	(1)	(2)
(1)	1	-1
(2)	-1	1

Scanned with CamScanner

Παράδειγμα 3

Παιχνίδι Αναζήτησης



$S^2 = \{(\text{θέση } 1), (\text{θέση } 2)\}$

$S^1 = \{(\text{ψάχνει } 1, \text{ψάχνει } 1, \text{ψάχνει } 1),$
$(\text{ψάχνει } 2, \text{ψάχνει } 1, \text{ψάχνει } 1),$
$(\text{ψάχνει } 1, \text{ψάχνει } 2, \text{ψάχνει } 1),$
$(\text{ψάχνει } 1, \text{ψάχνει } 1, \text{ψάχνει } 2),$
$(\text{ψάχνει } 2, \text{ψάχνει } 2, \text{ψάχνει } 1),$
$(\text{ψάχνει } 2, \text{ψάχνει } 1, \text{ψάχνει } 2),$
$(\text{ψάχνει } 1, \text{ψάχνει } 2, \text{ψάχνει } 2),$
$(\text{ψάχνει } 2, \text{ψάχνει } 2, \text{ψάχνει } 2)\}$

συνάρτηση Χρησιμότητας

Υ τερματική κορυφή t $\Pi(t) = (\Pi^1(t), \dots, \Pi^n(t))$ όπου $\Pi^i(t)$ = πληρωμή (ωφέλεια) παίκτη i αν το παιχνίδι τερματίσει στην t

Στρατηγική Κατάσταση

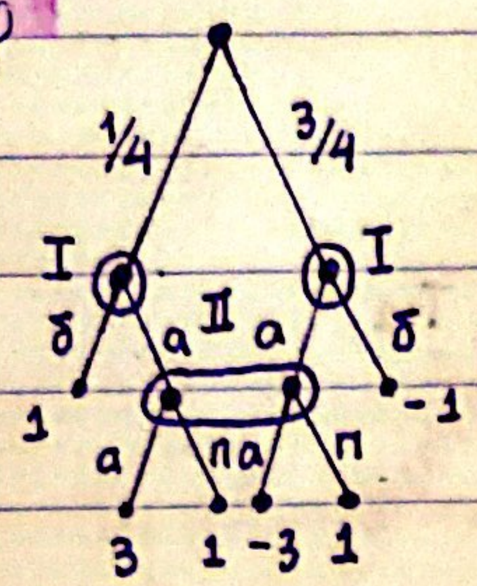
Σύνολο στρατηγικών καταστάσεων $= S = S^1 \times S^2 \times \dots \times S^n$, $s = (s^1, s^2, \dots, s^n)$ και $s^i \in S^i$.

Scanned with CamScanner

Παράδειγμα 1

19/10/22

Πόκερ



$S^I = \{(a,a), (a,\delta), (\delta,a), (\delta,\delta)\}$

$S^{II} = \{(a), (\pi)\}$

Παιχνίδι χωρίς κινήσεις φύσης : $\boxed{h(s) = \pi(t(s))}$

$\pi(t)$: πληρωμή παικτών στην τερματική κορυφή t

$t(s)$: τερματική κορυφή κάτω από προφίλ s.

Παράδειγμα 2

	Κέρδος		Μέση Τιμή
		Αν 12	4
Επιλογή 1	-4 πιθ 1/2	10 πιθ 1/2	3
Επιλογή 2	2.9 πιθ 1/2	3.1 πιθ 1/2	3

Θα προτιμήσω MT = 3 γιατί δεν χάνω ή θέλω να ρισκάρω για >> κέρδος

ΙΣΧΥΡΟΣ ΝΟΜΟΣ ΜΕΓΑΛΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Πολλές επαναλήψεις ($n \to +\infty$)

↳ το ίδιο μέσο κέρδος

καλός δείκτης ωφέλειας παίκτη για πολλές επαναλήψεις

Παραλληλισμός με Θεωρία Ωφέλειας

Επιστροφή στο πχ 1

S^I \ S^{II}	(α)	(π)
(α,α)	$-3/2$ *	1
(α,δ)	0	$-1/2$ **
(δ,α)	-2	1
(δ,δ)	$-1/2$	$-1/2$

*: $1/4 \cdot 3 + 3/4 \cdot (-3) = -6/4$

**: $1/4 \cdot 1 + 3/4 \cdot (-1) = -1/2$

Scanned with CamScanner

Στο παιχνίδι αναζήτησης: (δες σχήμα πίσω ←)

II: $S^{II} = \{(1), (2)\}$ (πού κρύβεται)

I: $S^{I} = \{(1,1,1), (1,1,2), \dots, (2,2,2)\}$ (πού γάχνει).

π.χ. (1, 2, 1)

1ο: γάζιμο

όχι στη θέση 2 γάχνεις 2 (αχρείαστο)

όχι στη θέση 1 γάχνεις 1

όχι στη θέση 2 γάχνεις 2 (αχρείαστο)

(1, 1, 1)

ταυτίζονται! και οι πληρωμές τους

$S^I \backslash S^{II}$	(1)	(2)
(1,1,1)	7/16	0
(1,2,1)	7/16	0
(1,1,2)	1/4	1/2
(2,1,1)	1/4	1/2
(2,2,1)	0	3/4
(2,1,2)	1/4	1/2
(1,2,2)	1/4	1/2
(2,2,2)	0	3/4

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 2

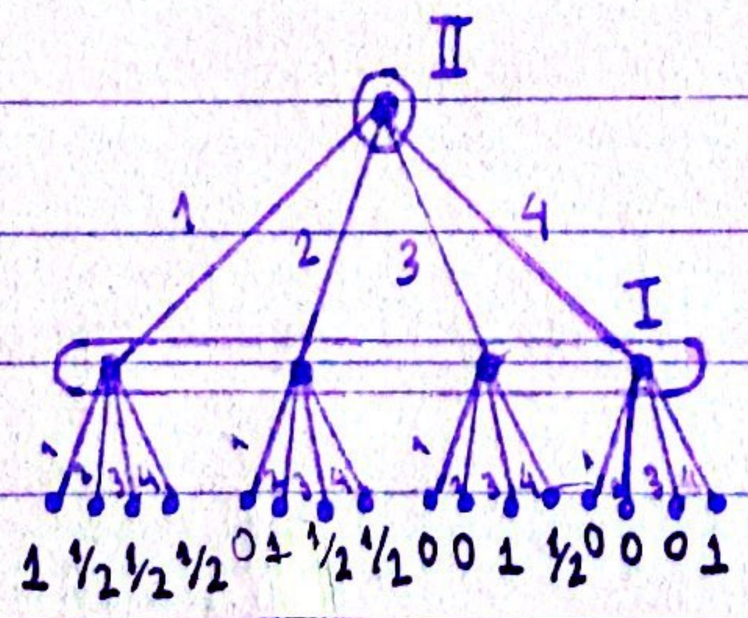
1) Ο II επιλέγει από $\{1,2,3,4\}$

Ο I μαντεύει → σωστά +1

→ μεγαλύτερο αλλά λάθος +1/2

→ μικρότερο αλλά λάθος +0.

α) Δενδροδιάγραμμα β) Στρατηγικές γ) Παιχνιδοπίνακας



$S^{I} = \{(1),(2),(3),(4)\}$

$S^{II} = \{(1),(2),(3),(4)\}$

$S^I \backslash S^{II}$	(1)	(2)	(3)	(4)
(1)	1	0	0	0
(2)	1/2	1	0	0
(3)	1/2	1/2	1	0
(4)	1/2	1/2	1/2	1

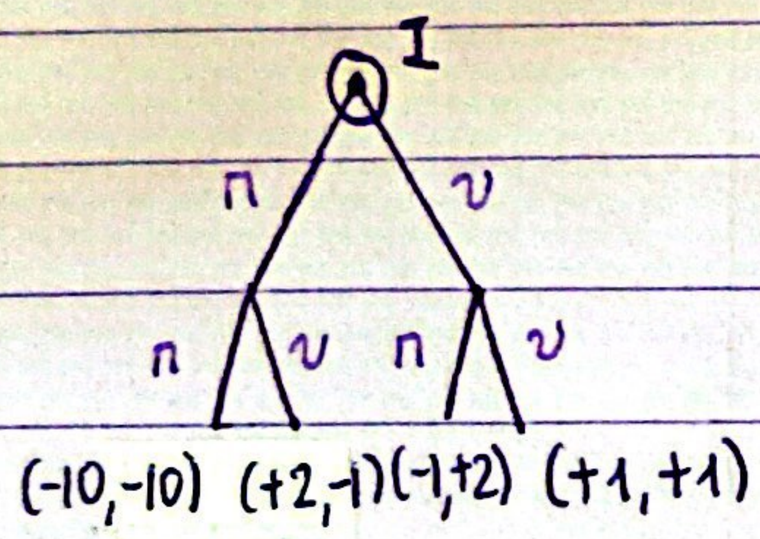
Scanned with CamScanner

② Chicken Game

Παίκτης → π: προχωρά
Παίκτης → υ: υποχωρεί

υ και οι 2: +1 για τον μαθένα
π και οι 2: -10 για τον μαθένα
υ ο ένας → ο άλλος +2
→ ο ένας +1

α) Δενδροδιάγραμμα



β) Στρατηγικές

$S^I = \{(\pi), (\upsilon)\}$

$S^{II} = \{(\pi), (\upsilon)\}$

γ) Παιχνιδοπίνακες

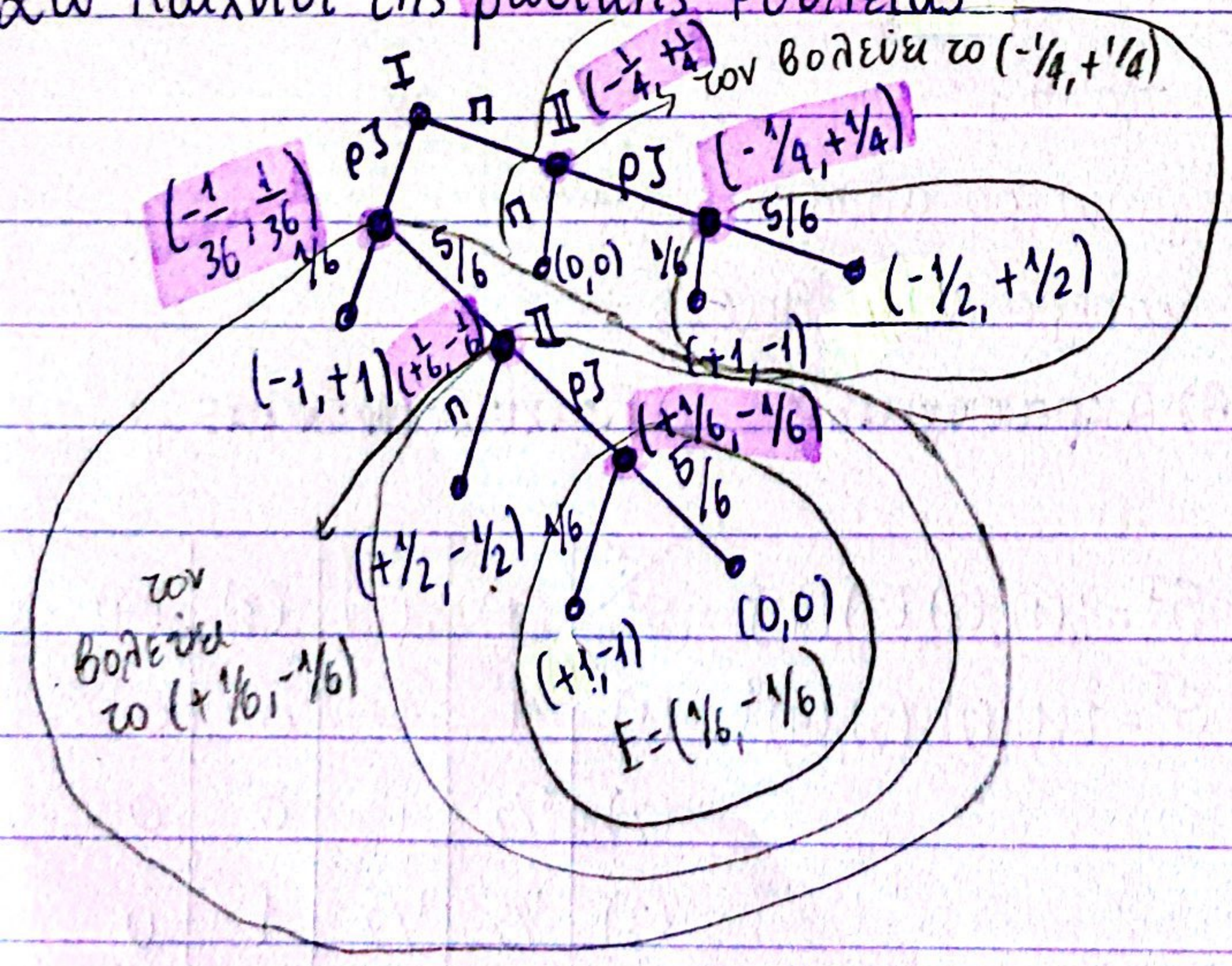
2 πίνακες: πληρωμές ≠ 0 αθροίσματος

S^I \ S^{II}	(π)	(υ)
(π)	-10	+2
(υ)	-1	+1

S^I \ S^{II}	(π)	(υ)
(π)	-10	-1
(υ)	+2	+1

Στο παιχνίδι της ρωσικής Ρουλέτας

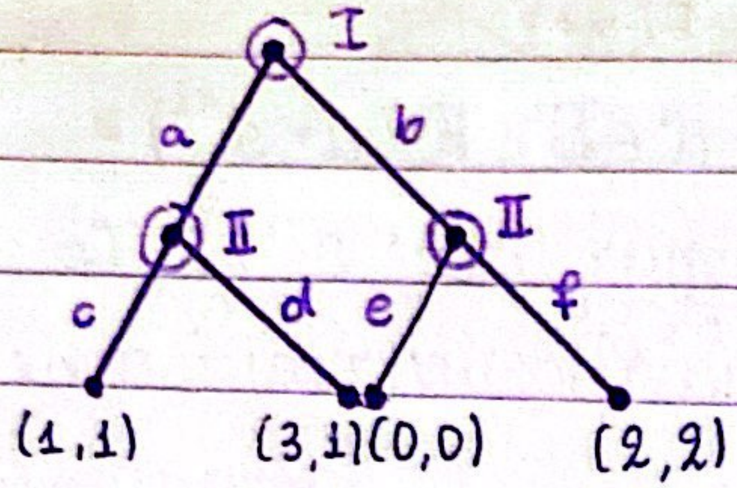
21/10/22



Άρα τον I συμφέρει το (-1/36, +1/36) (αφαιρώντας τους κύκλους)

Scanned with CamScanner

Παράδειγμα



Scanned with CamScanner

(1,1) (3,1)(0,0) (2,2)

26/10/22

Στρατηγική κατάσταση: $S = (S^1, S^2, \dots, S^N)$

$s^i \in S^i$, $i = 1, 2, \dots, N$.

ΣΣΙ ή σημείο Nash: αν για κάθε παίκτη η s^i είναι βέλτιστη απάντηση στις στρατηγικές όλων των άλλων παικτών.

Π.χ. $N=3$, $S = (S^1, S^2, S^3)$

Αν σταθεροποιήσουμε τα S^2, S^3, δεδομένων αυτών, η πληρωμή του 1ου παίκτη είναι συνάρτηση του S_1

Συμβολισμός

$S = (S^1, S^2, \dots, S^N)$

$S^{-1} = (S^2, S^3, \dots, S^N) \rightsquigarrow S^{-i} = (S^1, \dots, S^{i-1}, S^{i+1}, \dots, S^N)$

γενικά

Γενικά $S = (S^i, S^{-i})$

$h^i(s)$ = πληρωμή του παίκτη i στην S

από όλες τις στρατηγικές αφαιρώ του παίκτη i

σημείο στρατηγικής ισορροπίας

S_0 ΣΣΙ $\Leftrightarrow \forall i = 1, 2, \dots, N$ $h^i(S_0^i, S_0^{-i}) \geq h^i(S^i, S_0^i)$ $\forall S^i \in S^i$

Αν ξέρω εγώ που είμαι ο i ότι όλοι θα ακολουθήσουν στρατηγική S_0^{-i} και εγώ διαλέγω διαφορετική θα πληρωθώ "λιγότερο".

$\Leftrightarrow h^i(S_0^i, S_0^{-i}) = \max_{S^i \in S^i} \{h^i(S^i, S_0^{-i})\}$

Γενικότερος Ορισμός - Αντάπουριση

Έστω πεπερασμένο σύνολο A, με δυναμοσύνολο $2^A = \{B : B \subseteq A\}$. Έστω, επίσης, σύνολο X και $F: X \to 2^A$, $\forall x \in X : F(x) \subseteq A$ συνολοσυνάρτηση. Η F τότε λέγεται αντάπουριση από το X στο A.

Scanned with CamScanner

Ορισμός

Έστω x^* σταθερό σημείο της F, δηλαδή $x^* \in F(x^*)$.

Έστω S στρατηγική κατάσταση. $BR^i(s) = \{u^i \in S^i : h^i(u^i, s^{-i}) \geq h^i(t^i, s^{-i}) \ \forall t^i \in S^i\} = \{u^i \in S^i : h^i(u^i, s^{-i}) = \max_{t^i \in S^i} h^i(t^i, s^{-i})\}$. Το σύνολο αυτό λέγεται σύνολο βέλτιστων απαντήσεων του i στην s.

BR = Best Responds

$BR(s) = \prod_{i=1}^{N} BR^i(s)$ (καρτεσιανό γινόμενο - αντιπόμριση από το S στο S, όπου $S = \prod_{i=1}^{N} S^i$) $\forall s \in S$ στρατηγική κατάσταση, $BR(s) \subseteq S$.

Ιδιότητα: s_0 ΣΣΙ $\Leftrightarrow$ s_0 σταθερό σημείο της $BR \Rightarrow s_0 \in BR(s_0)$.

Παράδειγμα 1

Μορφή

$S^I \backslash S^{II}$	(1)	(2)
(1)	1	-1
(2)	-1	1

$S^I = \{(1), (2)\}$

$S^{II} = \{(1), (2)\}$

$S = S^I \times S^{II} = \{((1),(1)), ((1),(2)), \dots, ((2),(2))\}$

$BR^I((1),(2)) = \{(2)\}$, $(1) \notin BR^I((1),(2)) \Rightarrow$ όχι ΣΣΙ

Εδώ κανένα σημείο δεν είναι ΣΣΙ

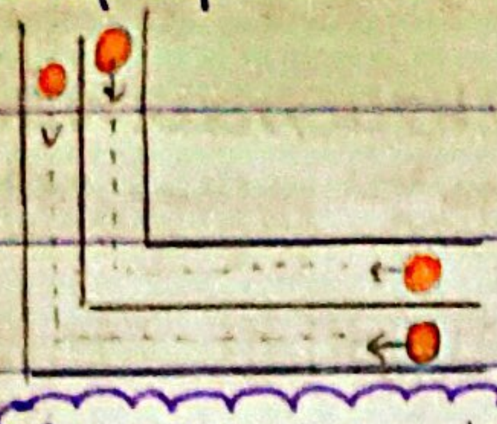
Αν σταθεροποιηθω σε αυτή τη γραμμή, ο II ξέρει ότι ο I θα πάρει 1 αν κάνει (1) ή θα χάσει 1 αν κάνει (2) $\Rightarrow BR^{II}((1),(1)) = \{(2)\}$ όχι βέλτιστο για $\{((1),(1))$ όχι ΣΣΙ του I, αφού $(2) \notin BR^{II}((1),(1))$

Πινακοπαιχνίδια: Όταν κερδίζει ένας παίκτης ο άλλος χάνει.

Για να είναι ΣΣΙ ένα στοιχείο του θα πρέπει να είναι μέγιστο της στήλης του & ελάχιστο της γραμμής του.

Παράδειγμα 2

Δέντροφη



$S^I \backslash S^{II}$	A	Δ
A	0	-1
Δ	-1	0

h_1

$S^I \backslash S^{II}$	A	Δ
A	0	-1
Δ	-1	0

h_2

A: αριστερά
Δ: δεξιά

Διπλανοπαιχνίδι
⇒ μη μηδενικού αθροίσματος
Έχουμε ΣΣΙ;

$S = (A,A)$, $S^{-1} = \{A\}$
$BR^I(s) = \{A\}$ αν ο I ξέρει ότι ο II οδηγεί αριστερά, του συμφέρει να πάει κι αυτός A.
Ισχύει και αντίστροφα: $BR^{II}(s) = \{A\}$

Επομένως (A,A) (όμοια και το (Δ,Δ)) ΣΣΙ. Ωστόσο τα άλλα όχι

$\sum_{i=1}^{N} h^i(s)$ = "κοινωνικό όφελος"

Αν μπορούσαν να οδηγήσουν & στη μέση του δρόμου;

$S^I \backslash S^{II}$	A	M	Δ
A	0	-1	-1
M	-1	-1	-1
Δ	-1	-1	0

h_1

$S^I \backslash S^{II}$	A	M	Δ
A	0	-1	-1
M	-1	-1	-1
Δ	-1	-1	0

h_2

(A,A)	(Δ,Δ)	(M,M) ΣΣΙ
0	0	-2

↓
όχι κοινωνικό όφελος!!

Παράδειγμα 3

Δίλημμα κρατουμένου

2 συνεργοί ύποπτοι σε λιστεία - ξεχωριστή ανάκριση I, II.
$S^I = S^{II} = \{(O), (Δ)\}$ O: ομολογεί, Δ: δεν ομολογεί

$S^I \backslash S^{II}$	O	Δ
O	-8	0
Δ	-10	-1

$S^I \backslash S^{II}$	O	Δ
O	-8	-10
Δ	0	-1

Scanned with CamScanner

$S^I \backslash S^{II}$	0	ΔΟ
0	-8	0
ΔΟ	-10	-1

n_1

$S^I \backslash S^{II}$	0	ΔΟ
0	-8	-10
ΔΟ	0	-1

n_2

02/11/22

Διπλανοπαιχνίδι

Κοινωνικά βέλτιστο : (ΔΟ, ΔΟ) → άθροισμα -2

Σημεία στρατηγικής ισορροπίας:

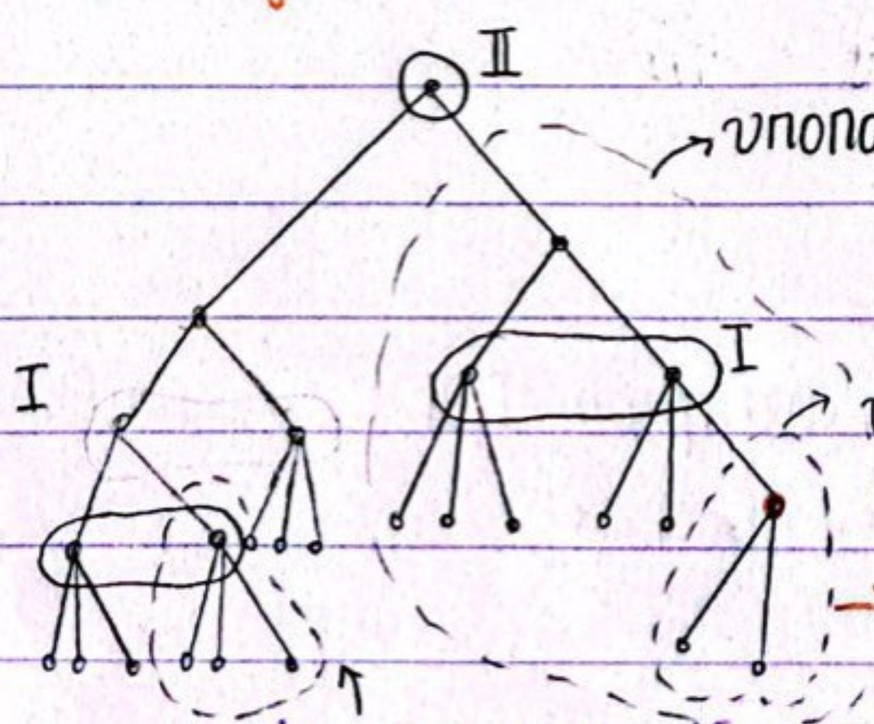
$BR^I(0,0) = \{(0)\}$
$BR^{II}(0,0) = \{(0)\}$ } ΣΣΙ

$BR^I(\Delta O, \Delta O) = \{(0)\}$
$BR^{II}(\Delta O, \Delta O) = \{(0)\}$ } Όχι ΣΣΙ

$BR^I(0, \Delta O) = \{(0)\}$
$BR^{II}(0, \Delta O) = \{(0)\}$
Όμοια (ΔΟ, 0) } Όχι ΣΣΙ

"Οι εντελώς ανταγωνιστικές λύσης μιας κατάστασης μπορεί να οδηγήσουν στην κοινωνικά χειρότερη κατάσταση κοινωνικά".

Παράδειγμα



→ υποπαιχνίδι

→ το ίδιο με νέο παιχνίδι που βγαίνει από υποδένδρο κορυφή •

→ υποπαιχνίδι του αρχικού παιχνιδιού

όχι υποπαιχνίδι
αλλάζουν οι κανόνες

Σε ένα υποπαιχνίδι περιέχονται είτε όλα είτε κανένα από τα σύνολα πληροφόρησης του αρχικού.

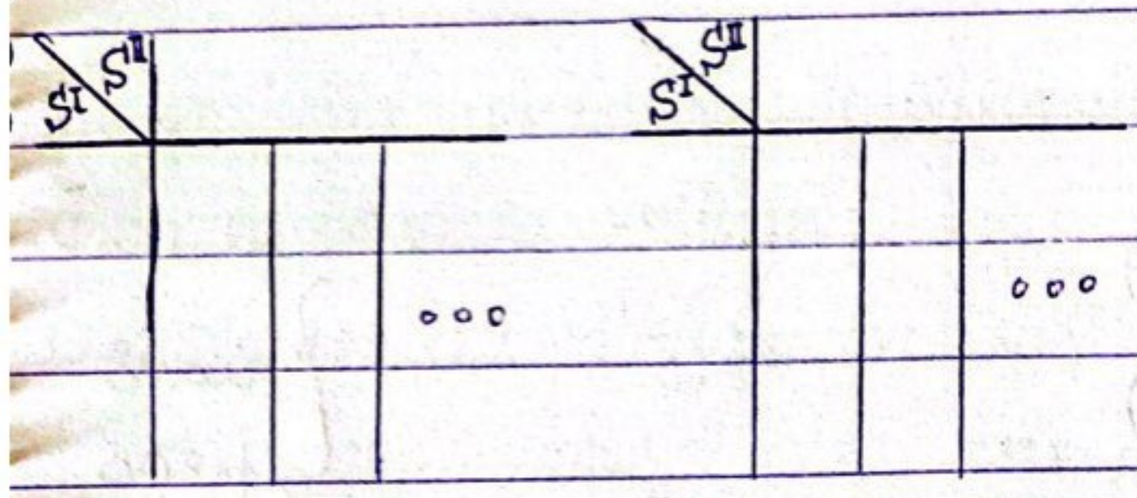
Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

Σε ένα παιχνίδι τέλειας πληροφόρησης, από κάθε κορυφή, ξεκινά ένα υποπαιχνίδι.

Θεώρημα Zermelo-Kuhn

Κάθε πεπερασμένο παιχνίδι n-παικτών τέλειας πληροφόρησης έχει τουλάχιστον ένα ΣΣΙ.



$h_1(S^1, S^2)$ πρώτου παίκτη

$h_2(S^1, S^2)$ δεύτερου παίκτη

$h^i(S_1, S_2, \dots, S^n)$, $i = 1, 2, \dots, n$

$S^i = \{S_1^i, S_2^i, \dots, S_m^i\}$

1. $N = \{1, 2, \dots, n\}$
2. $S = S^1 \times S^2 \times \dots \times S^n$

   S^i: σύνολο στρατηγικών του i
3. $h = (h^1, h^2, \dots, h^n)$

   $h^i = (S^1, S^2, \dots, S^n)$

$\langle N, S, h \rangle$ κανονική μορφή του παιχνιδιού

Έστω παιχνίδι σε κανονική μορφή. $\langle N, S, h \rangle$

$N = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ #παικτών

$S = S^1 \times S^2 \times \dots \times S^n$ στρατηγικές (επιλογές) παικτών

Χβγ $S^i = \{1, 2, \dots, |S^i|\}$ η κάθε επιλογή

$|S^i|$: πληθάριθμος του S^i

ονομάζω κάθε στρατηγική με έναν αριθμό

Κάνουμε τη ζωή μας εύκολη!!!

π.χ. $\{(J, PJ), (PJ, J), (PJ, PJ)\}$

1 2 3

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

Παράδειγμα

Morra

$S^I \backslash S^{II}$	1	2
1	1	-1
2	-1	1

I: maximizer II: minimizer

↳ τα βλέπει τα βλέπει ↲

σαν μέρδη σαν ιόστη

ΔΣΣΙ

μηδενικού αθροίσματος

Το χειρότερο που μπορεί να πάθει ο S^I είναι το -1

Ομοια ο S^{II}, το $+1$.

Συμμετρικοί!!!

$\tilde{S}^1$: Έστω ότι I → 1 πιθ(1/2), → 2 πιθ(1/2)

Αν ο II ακολουθήσει την 1: $h^1 = 1/2 \cdot 1 + 1/2 \cdot (-1) = 0$

Αν ο II ακολουθήσει την 2: $h^1 = 1/2 \cdot (-1) + 1/2 \cdot 1 = 0$

} κατά μέσο όρο 0.

Ανεβάνοντας τον χώρο των στρατηγικών ο 1ος παίκτης έρχεται σε καλύτερη κατάσταση.

$\tilde{S}^2$: Έστω όμοια ο II (πιθ 1/2, 1/2).

Συμμετρικά, αν ο I ακολουθήσει την 1: $h^2 = 0$

αν ο II ακολουθήσει την 2: $h^2 = 0$.

Νέα στρατηγική κατάσταση: $(\tilde{S}^1, \tilde{S}^2)$ ΣΣΙ

ΣΣΙ είναι αν ο I ξέρει ότι ο άλλος θα έχει 50-50 επιλογές. Δεν έχει κίνητρο να φύγει από το 50-50. Ομοια δεν βολεύει και τον άλλο.

Με αυτό τον μηχανισμό βρήκαμε ΣΣΙ σε παιχνίδι που δεν υπήρχε.

Υπάρχει πάντα ΣΣΙ; Με αυτή τη γενίκευση υπάρχει ΠΑΝΤΑ.

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

Παιχνίδι n-παικτών με πεπερασμένα σύνολα 04/11/22

στρατηγικών, π.χ. $S^{1} = \{S_1^1, S_2^1, \dots, S_m^1\}$ → παίκτης 1, m-στρατηγική

Προκύπτουν

$$\left.\begin{aligned} S^1 &= \{S_1^1, \dots, S_{m_1}^1\} \\ S^2 &= \{S_1^2, \dots, S_{m_2}^2\} \\ &\vdots \\ S^n &= \{S_1^n, \dots, S_{m_n}^n\} \end{aligned}\right\} \quad S^i \in \mathcal{S}^i,\ i = 1, 2, \dots, n.$$

σύνολα καθαρών (pure) ..... στρατηγικών ....

Αν επιλέξω αρχικά τις πιθανότητες (ως παίκτης) και αφήσω μετά τη φύση να φέρει τις επιλογές;

Για παίκτη i: $S^i = \{S_1^i, S_2^i, \dots, S_{m_i}^i\}$, ορίζουμε $x = (x_1, x_2, \dots, x_{m_i})$, $x_j \geq 0$, $j = 1, 2, \dots, m_i$, $\sum_{j=1}^{m_i} x_j = 1$ την μεικτή στρατηγική του παίκτη i

$\tilde{S}^i = \{x : x$ μεικτή στρατηγική$\}$ π.χ. $S^1 = (1, 2, 3)$, $x = (x_1, x_2, x_3)$ → στρατηγικές διακριτή τ.μ.

$x_1 = P(\text{επιλέγω } 1)$

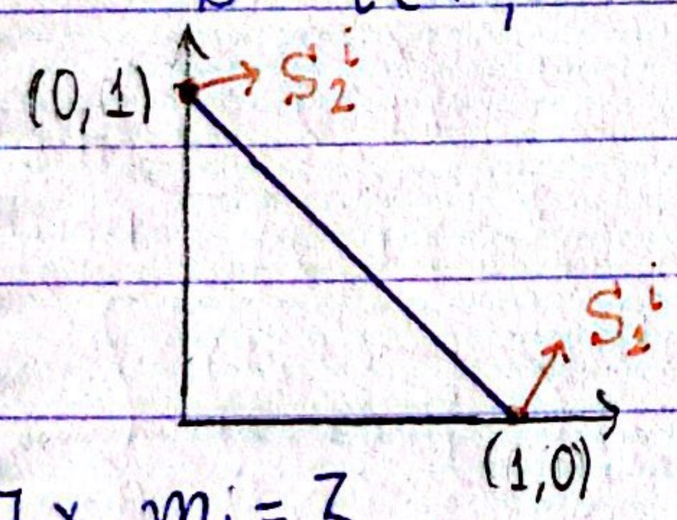
$x_2 = P(\text{επιλέγω } 2)$

$x_3 = P(\text{επιλέγω } 3)$

$\tilde{S}^i \subseteq \mathbb{R}^{m_i}$

π.χ. $m_i = 2$.

$\tilde{S}^i = \{(x_1, x_2) : x_1, x_2 \geq 0,\ x_1 + x_2 = 1\}$

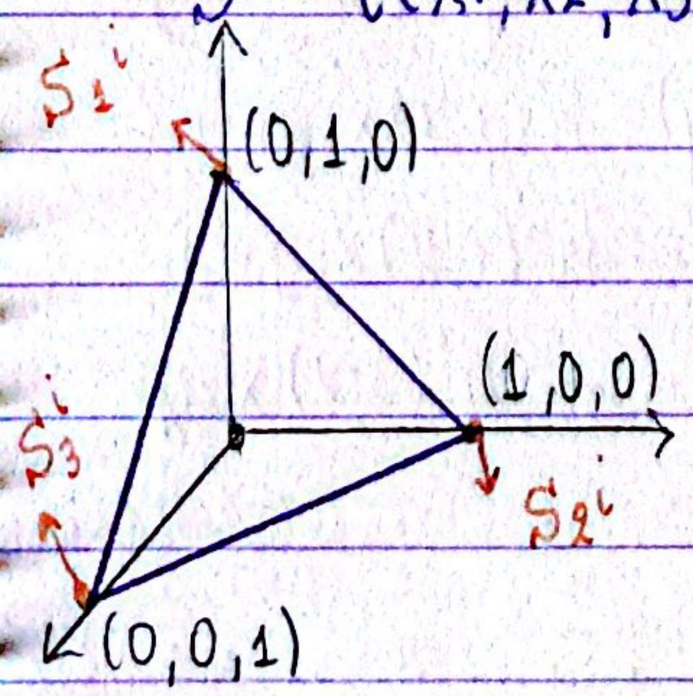


Simplex στον $\mathbb{R}^n$!!!

κυρτά πολύεδρα

π.χ. $m_i = 3$

$\tilde{S}^i = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1, x_2, x_3 \geq 0,\ x_1 + x_2 + x_3 = 1\}$



Οι καθαρές στρατηγικές είναι ειδικές περιπτώσεις των μεικτών ⇒ οι κορυφές

$(x_1, x_2, x_3) = x_1(1,0,0) + x_2(0,1,0) + x_3(0,0,1)$,

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$, $\sum_{i=1}^{3} x_i = 1$

Scanned with CamScanner

Όταν έχω ένα πεπερασμένο σύνολο αριθμών, το σύνολο των μικτών συνδυασμών τους είναι η μικτή θήκη ⇒ $\tilde{S}_i$ = μικτή θήκη των $(1,0,\dots,0), (0,1,\dots,0), \dots, (0,0,\dots,1)$.

Υπόθεση

Οι επιλογές στρατηγικών από τους παίκτες μέσω τυχαιοποίησης είναι στοχαστικά ανεξάρτητες

$\tilde{S}^i = \{ \tilde{S}^i : \tilde{S}^i = (\tilde{S}^i(S^i_1), \tilde{S}^i(S^i_2), \dots \tilde{S}^i(S^i_{m_i})) \}$

όπου $\tilde{S}^i(S^i_k) = P($ο παίκτης i να διαλέξει την στρατηγική $S^i_k)$

x_k ← κατω από την μεικτή στρατηγική $\tilde{S}^i$.

$S = (S^1, \dots, S^k)$ στρατηγική κατάσταση

$\tilde{S} = (\tilde{S}^1, \dots, \tilde{S}^k)$, $\tilde{S}^i \in \tilde{S}^i$, $i = 1, \dots, k$.

↳ διάνυσμα μεικτών στρατηγικών των παικτών

Δυναρτήσεις πληρωμής των παικτών

$h^i(S)$ = (αναμενόμενη) πληρωμή του παίκτη i στη στρατηγική κατάσταση S

πληρωμή πάνω σε μεικτή στρατηγική

$\tilde{h}^i(\tilde{S}) = E_{\tilde{S}}[h_i(S)] = \sum h^i(S^1, \dots, S^n)\, \tilde{S}^1(S^1) \dots \tilde{S}^n(S^n)$

$S = (S^1, \dots, S^n)$.

Ειδική Περίπτωση

2 παίκτες → $S^1 = \{1, 2, \dots, m\}$

→ $S^2 = \{1, 2, \dots, n\}$

Μεικτές στρατηγικές $\begin{cases} 1 : x = (x_1, \dots, x_m)^T \in \mathbb{R}^m \\ 2 : y = (y_1, \dots, y_n)^T \in \mathbb{R}^n \end{cases}$ παίκτης

π.χ. στην αρχή του παιχνιδιού:

$S^1 = \{\overset{x_1}{1}, \overset{x_2}{2}, \overset{x_3}{3}\}$ → πιθ. μεικτών

$S^2 = \{\overset{y_1}{1}, \overset{y_2}{2}\}$

$h^1(1,1)$, $h^2(1,1)$

$S = \{ (1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,1), (3,2) \}$

$h^1(x,y) = h^1(1,1)x_1y_1 + h^1(1,2)x_1y_2 + \dots h^1(3,2)x_3y_2$

Scanned with CamScanner

Ⓐ 0-αθροίσματος

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $a_{ij} = h^1(i,j) = h^2(i,j)$

$\tilde{h}^1(x,y) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j$

$= x^T A y$ και έτσι $\tilde{h}^2(x,y)$

$= -x^T A y$.

Ⓑ Διπιναυοπαιχνίδι

$A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $a_{ij} = h^1(i,j)$,

$b_{ij} = h^2(i,j)$

$\tilde{h}^1(x,y) = x^T A y$

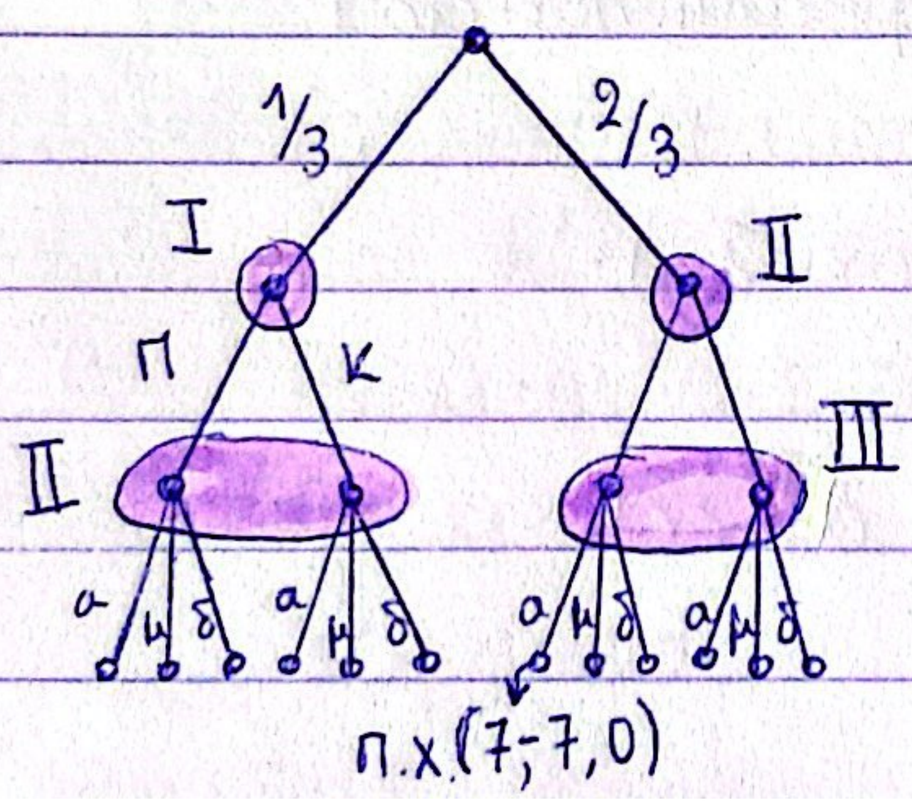
$\tilde{h}^2(x,y) = x^T B y$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

(2.5) 2 πιναυοπαιχνίδια

S^I \ S^{II}	α	μ	δ	S^{II} \ S^{III}	α	μ	δ
Γ_{12}: Π	1	1	3	Γ_{23}: Π	3	1	2
Κ	7	-1	5	Κ	4	3	0

Στην αρχή η φύση επιλέγει Γ_{12}, πιθ 1/3, ή Γ_{23}, πιθ 2/3



11/11/22

Scanned with CamScanner

π.χ. (7, -7, 0)

11/11/22

3.10.

Ο II επιλέγει $j \in \{1, 2, \dots, n\}$

Ο I μαντεύει

I μαντεύει σωστά ⇒ πληρώνεται 1

I μαντεύει $< j$ ⇒ -

I μαντεύει $> j$ ⇒ πληρώνει 1

$S^{I} = \{1, \dots, n\}$ $S^{II} = \{1, \dots, n\}$

Πίνακας Πληρωμών

$S^{I} \backslash S^{II}$	1	2	...	n
1	1	0	0	0
2	-1	1	0	0
⋮	-1	-1	1	0
n	-1	-1	-1	1

Scanned with CamScanner

3.14

ΔΠΠ = διπινακοπαιχνίδι

$A = \begin{bmatrix} t & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ $t \in ? \Rightarrow \exists$ ΣΣΙ σε καθαρές στρατηγικές

$S^I = \{1,2\}$, $S^{II} = \{1,2\}$

$S = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2)\}$

(1,1) ⇒ ο Ι δεν έχει κίνητρο να αλλάξει αν $t \geq 2$
ο ΙΙ δεν έχει κίνητρο
} (1,1) ΣΣΙ για $t \geq 2$

(1,2) ⇒ ο Ι δεν έχει κίνητρο να αλλάξει
ο ΙΙ έχει κίνητρο, προτιμά να μεταπηδήσει στο 1
} όχι ΣΣΙ

(2,1) ⇒ ο ΙΙ προτιμά να μεταπηδήσει ⇒ όχι ΣΣΙ

(2,2) ⇒ ο Ι προτιμά να μεταπηδήσει ⇒ όχι ΣΣΙ.

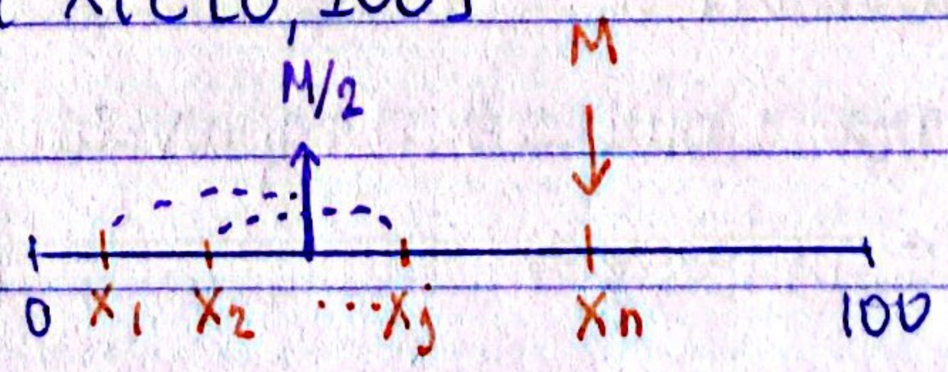
Τελικά $\exists$ ΣΣΙ $\Leftrightarrow t \geq 2$ (το (1,1)).

3.8

n παίκτες, κάθε παίκτης i επιλέγει $x_i \in [0,100]$

$S^i = [0,100]$, $i = 1,\dots,n$, $N = \{1,\dots,n\}$

Έστω $M = \max\{x_i, i = 1,\dots,n\}$

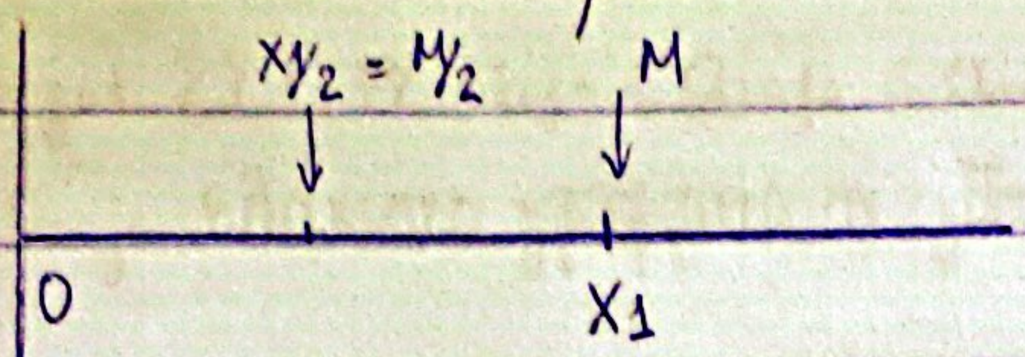


$A = \{j \in N : |x_j - M/2| = \min\{|x_k - M/2|\}\}$.

$h^2(x_1,\dots,x_n) = \begin{cases} \frac{x_i}{|A|}, & i \in A \\ 0, & i \notin A \end{cases}$ $k \in \mathbb{N}$ "Θες να είσαι πιο κοντά στη μέση, αλλά από αυτούς που είναι στη μέση θες να 'σαι από πάνω"

α) Είναι το $x = (0, 0, \dots, 0)$ ΣΣΙ;

Αν 1 παίκτης μεταπηδήσει μπροστά: ("έχω κίνητρο να φύγω από το O_j")



Ισαπέχουν όλοι από τη μέση ⇒ ο x_1 που είναι πάνω >>>

⇒ τον συμφέρει να φύγει ⇒ όχι ΣΣΙ.

β) Αν μεταβάλουμε το $S^i = \{0, 1, \dots, 100\}$ και περιορίσουμε σε 2 παίκτες, νδο (1,1), (2,2) ΣΣΙ.

(1,1) $h^1(1,1) = h^2(1,1) = 1/2$ // Συμφέρει κάποιον να φύγει;

Έστω ότι ο Ι γνωρίζει ότι ο ΙΙ θα επιλέξει $x_2 = 1$

Αν $x_1 = 0$ θα ισαπέχουν ⇒ $M = 1$, $M/2 = 1/2$, $A = \{1, 2\}$

και $h^1 = 0/2 = 0 < 1/2$ <u>όχι</u>

Αν $x_1 = 2$, $M = 2$, $M/2 = 1$, $A = \{2\}$ έχασε ⇒ $h^1 = 0 < 1/2$ <u>όχι</u>

Αν $x_1 \geq 3$, $M = x_1$, $M/2 = x_1/2$, $A = \{2\}$ έχασε ⇒ $h^1 = 0 < 1/2$ <u>όχι</u>

Συμμετρικά, ούτε ο ΙΙ έχει συμφέρον να φύγει.

⇒ (1,1) ΣΣΙ

(2,2)
(άσκηση)

Scanned with CamScanner

ΠΑΙΧΝΙΔΙΑ 2 ΠΑΙΚΤΩΝ 0-ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΟΣ

$S^I = \{1, \dots, m\}$, $S^{II} = \{1, \dots, n\}$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

$$A = \begin{array}{c} \\ 1 \\ i_0 \\ m \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & j_0 & n \end{array} \\ \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & a_{i_0 j_0} & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \end{array}$$

I: maximizer, II: minimizer

Ύπαρξη ΣΣΙ σε καθαρές στρατηγικές

$S = \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\} = \{(i,j) : i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n\}$

$$(i_0, j_0) \ \Sigma\Sigma I \Leftrightarrow \begin{cases} a_{ij_0} \le a_{i_0 j_0} \ \forall i = 1, \dots, m \\ a_{i_0 j} \ge a_{i_0 j_0} \ \forall j = 1, \dots, n \end{cases} \Leftrightarrow a_{ij_0} \le a_{i_0 j_0} \le a_{i_0 j} \ \forall ij$$

$\Leftrightarrow a_{i_0 j_0}$ ελάχιστο γραμμής, μέγιστο στήλης

σαγματικό σημείο

Μπορεί να μην υπάρχουν, π.χ. Morra $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Λήμμα

Αν $(i_0, j_0), (i_1, j_1)$ ΣΣΙ $\Rightarrow a_{i_0 j_0} = a_{i_1 j_1}$.

Πράγματι, $a_{i_1 j_0} \le a_{i_0 j_0} \le a_{i_0 j_1} \le a_{i_1 j_1} \le a_{i_1 j_0} \Rightarrow a_{i_0 j_0} = a_{i_1 j_1}$.

Ορισμός

Έστω παιχνίδι N-παικτών $\langle N, S, h \rangle$.

Επίπεδο ασφαλείας του παίκτη i: $u^i = \max_{s^i} \min_{s^{-i}} h^i(s^i, s^{-i}) \ f(s^i)$

με κατέστρεψαν

[Πεσιμιστικό κριτήριο]

$= \max_{s^i} f(s^i)$

Για πινακοπαιχνίδι με $N = \{1, 2\}$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

Τα επίπεδα ασφάλειας δίνουν: $\underline{u} = \max_i \min_j a_{ij}$, $\bar{u} = \min_j \max_i a_{ij}$

κάτω τιμή παιχνιδιού, άνω τιμή παιχνιδιού

Λήμμα

(1) $\underline{u} \le \bar{u}$ (2) $\exists \Sigma\Sigma I \Leftrightarrow \bar{u} = \underline{u}$

Scanned with CamScanner

ΣΣΙ σε καθαρές στρατηγικές σε π.π.
$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $S^{I} = \{1, \dots, m\}$, $S^{II} = \{1, \dots, n\}$
(i_0, j_0) ΣΣΙ $\Leftrightarrow a_{ij_0} \leq a_{i_0j_0} \leq a_{i_0j}$ $\forall i, j$.
↳ $a_{i_0j_0}$ ελάχιστο γραμμής, μέγιστο στήλης

18/11/22

ανασκόπηση
↳ αν (i_0, j_0), (i_1, j_1) ΣΣΙ
$a_{i_0j_0} = a_{i_1j_1}$

ΕΠΙΠΕΔΟ ΑΣΦΑΛΕΙΑΣ

Ορισμός

$\underline{u} = \max_i \min_j (a_{ij})$ επίπεδο ασφάλειας του I, $\bar{u} = \min_j \max_i (a_{ij})$ επίπεδο ασφάλειας του II.

πχ $\underline{u} = 10$, $\bar{u} = 20$ → ο II πληρώνει το πολύ 20.

ο I παίρνει το λιγότερο 10

- πληρωμή $u = 15$ ✓
- πληρωμή $u = 9$ ή 22 ✗

Λήμμα 1

$\underline{u} \leq \bar{u}$

Γενικά: $\underline{u} \leq \bar{u}$ ↗ $\underline{u} < \bar{u}$
↘ $\underline{u} = \bar{u} \Leftrightarrow$ ΣΣΙ σε κάθε στρατηγική

Απόδειξη

$\min_j (a_{ij}) \leq a_{ij}$ $\forall i, j$

$\Rightarrow \max_i \min_j (a_{ij}) \leq \max a_{ij}$ $\forall j$

$\Rightarrow \underline{u} \leq \max_i a_{ij}$ $\forall j$ $\Rightarrow \underline{u} \leq \underbrace{\min_j \max_i (a_{ij})}_{\bar{u}}$ ■

Ορισμός

Αν $\bar{u} = \underline{u} = u$, τότε u τιμή του παιχνιδιού

Πρόταση

$\bar{u} = \underline{u} \Leftrightarrow \exists$ ΣΣΙ σε καθαρές στρατηγικές και τότε $u = a_{i_0j_0}$ $\forall$ ΣΣΙ (i_0, j_0).

Απόδειξη

"$\Rightarrow$": Έστω $\bar{u} = \underline{u} = u$ και $\underline{u} = \max_i \min_j a_{ij} = \min_j a_{i_0j}$, $\bar{u} = \min_j \max_i a_{ij} = \max_i a_{ij_0}$

Scanned with CamScanner

$u = \underline{u} \le a_{i_0 j_0} \le \bar{u} = u \Rightarrow a_{i_0 j_0} = u.$

$\Rightarrow a_{i_0 j_0} = \underline{u} = \bar{u} = u \Rightarrow a_{i_0 j_0}$ ελάχιστο γραμμής & μέγιστο στήλης.

"$\Leftarrow$": Έστω (i_0, j_0) ΣΣΙ $\Rightarrow \underline{a_{i j_0}} \le a_{i_0 j_0} \le a_{i_0 j}$ $\forall i, j$

$a_{i_0 j_0} = \min_j a_{i_0 j} = \max_i a_{i j_0}$

Τότε $\left.\begin{array}{l} \underline{u} = \max_i \min_j a_{ij} \ge \min_j a_{i_0 j} = a_{i_0 j_0} \\ \bar{u} = \min_j \max_i a_{ij} \le \max_i a_{i j_0} = a_{i_0 j_0}. \end{array}\right\} \underline{u} = \bar{u} = a_{i_0 j_0}.$ ■

Παράδειγμα 1

$$\begin{array}{c} \\ \text{όχι} \\ \text{ΣΣΙ} \end{array} \begin{bmatrix} 5 & 4 & -2 & 4 \\ 6 & \boxed{5} & 7 & \boxed{5} \\ 2 & 3 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \to \text{ΣΣΙ} \\ \\ \end{array}$$

ΣΣΙ

(ούτε min γραμμής ούτε max στήλης)

$\underline{u} = \max_i \min_j a_{ij} = 5.$

$\bar{u} = \min_j \max_i a_{ij} = 5$

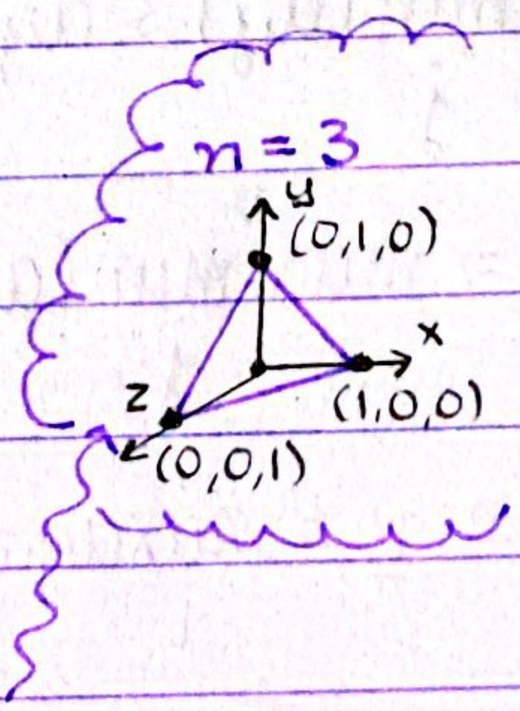
ΣΣΙ: $(2,2)$, $(2,4)$.

Παράδειγμα 2

$$\begin{array}{c} \begin{bmatrix} 5 & 6 & 2 & 4 \\ 3 & 7 & 5 & -1 \\ 2 & 5 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} 2 \\ -1 \\ 1 \end{array} \\ \underbrace{\begin{array}{cccc} 5 & 7 & 5 & 4 \end{array}}_{\bar{u} = 4} \end{array} \Rightarrow \underline{u} = 2$$

$\Rightarrow \nexists$ ΣΣΙ!!

(σε καθαρές στρατηγικές)



ΜΙΚΤΕΣ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΕΣ

Για τον I, $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ μικτή στρατηγική I, $x \ge 0$, $\sum_{i=1}^{m} x_i = 1$

κυρτό πολύεδρο με κορυφές τα e_i^T του $\mathbb{R}^m$

$\mathbb{P}^m = \{ x \in \mathbb{R}^m, x_i \ge 0, \sum_{i=1}^{m} x_i = 1 \}.$

Όμοια για τον II, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$

$\mathbb{P}^n = \{ y \in \mathbb{R}^n, y_i \ge 0, \sum_{i=1}^{n} y_i = 1 \}$

Scanned with CamScanner

Αν ο I επιλέξει $x \in \mathbb{P}^m$
Αν ο II επιλέξει $y \in \mathbb{P}^n$ } διανύσματα στήλες } η αναμενόμενη πληρωμή του II στον I $= x^T A y$

(x_0, y_0) ΣΣΙ σε μειωτή στρατηγική $\Rightarrow x^T A y_0 \leq x_0^T A y_0 \leq x_0^T A y$
Πρόκειται για ζεύγος πρωτεύοντος-δυϊκού, $\forall x \in \mathbb{P}^m, y \in \mathbb{P}^n$
Επομένως θα μπορούσαμε να εφαρμόσουμε το Θεώρημα Δυϊκότητας από Επιχειρησιακή Έρευνα: Μαθηματικός Προγραμματισμό και να λύσουμε το Simplex.

Scanned with CamScanner

23/11/22

Επανάληψη

Πινακοπαιχνίδι

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n}$$

$S^{I}=\{1,\dots,m\}$

$S^{II}=\{1,\dots,n\}$

Πληρωμή

$h^{I}(x,y)=x^{T}Ay=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}x_i y_j a_{ij}$

(x_0,y_0) ΣΣΙ αν

$x^{T}Ay_0 \le x_0^{T}Ay_0 \le x_0^{T}Ay$

$\forall x\in\mathbb{P}^m,\ y\in\mathbb{P}^n$

Μεικτές στρατηγικές

$\tilde{S}^{I}=\mathbb{P}^m=\{x=(x_1,\dots,x_m),\ x_i\ge 0\ \forall i,\ \sum_{i=1}^{m}x_i=1\}$

$\tilde{S}^{II}=\mathbb{P}^n=\{y=(y_1,\dots,y_n),\ y_i\ge 0\ \forall i,\ \sum_{i=1}^{n}y_i=1\}$

Επίπεδα ασφαλείας

$$\left.\begin{aligned} &\text{I}: \underline{u}=\max_i\min_j a_{ij} \\ &\text{II}: \bar{u}=\min_j\max_i a_{ij} \end{aligned}\right\}\ \boxed{\text{καθαρές}}$$

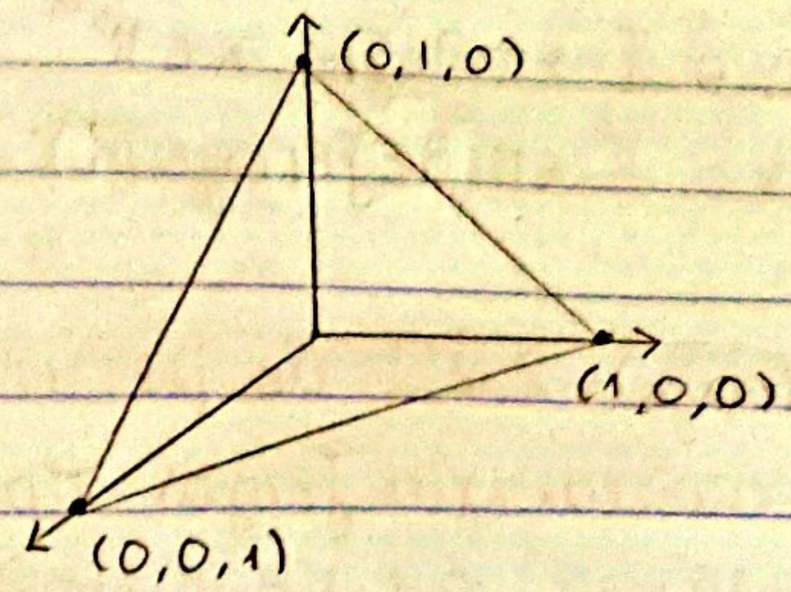
$$\left.\begin{aligned} &\text{I}: \underline{u}=\max_{x\in\mathbb{P}^m}\min_{y\in\mathbb{P}^n} x^{T}Ay \\ &\text{II}: \bar{u}=\min_{y\in\mathbb{P}^n}\max_{x\in\mathbb{P}^m} x^{T}Ay \end{aligned}\right\}\ \boxed{\text{μεικτές}}$$

Scanned with CamScanner

$\underline{u} = \max\min x^T A y = \max f(x)$

$f(x) = \min x^T A y = \min_{y \in \mathbb{P}^n} c^T y, \quad c^T = x^T A$

$= \min_{j=1,\dots,n} x^T A e_j$



$$A e_j = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \to j \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$= A_{\cdot j} = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$$

$\underline{u} = \max_i \min_j x^T A e_j$

Για καθαρές: $\bar{u}, \underline{u}$

Για μεικτές: $\bar{v}, \underline{v}$

Λήμμα 1

$\underline{v} = \max_{x \in \mathbb{P}^m} \min_j x^T A_{\cdot j}$

$\bar{v} = \min_{y \in \mathbb{P}^n} \max_i A_{\cdot i} y$

Λήμμα 2

$\underline{u} \le \underline{v} \le \bar{v} \le \bar{u}$

Πρόταση

(x_0, y_0) ΣΣΙ $\Leftrightarrow \underline{v} = \bar{v} = v$ και $x_0^T A y_0 = v$

Επίσης (x_1, y_1) άλλο ΣΣΙ $\Rightarrow x_1^T A y_1 = x_0^T A y_0$

Ορισμός

Μια $x_0 \in \mathbb{P}^m$ είναι βέλτιστη για τον I αν του εξασφαλίζει το επίπεδο ασφαλείας του $\underline{v} \Rightarrow f(x_0) = \underline{v}$ $\left(f(x) = \min_{y \in \mathbb{P}^n} x^T A y, \ \underline{v} = \max_x f(x)\right)$

Μια $y_0 \in \mathbb{P}^n$ είναι βέλτιστη για τον II αν του εξασφαλίζει το επίπεδο ασφαλείας του $\bar{v} \Rightarrow g(y_0) = \bar{v}$ $\left(g(y) = \max_{x \in \mathbb{P}^m} x^T A y, \ \bar{v} = \min_y g(y)\right)$

Συνέχεια της f

$f(x) = \min x^T A y = \min x^T A_{\cdot j} = \min\{x^T A_{\cdot 1}, x^T A_{\cdot 2}, \dots\} \Rightarrow$ συνεχής

Λήμμα 3.

Αν (x_0, y_0) ΣΣΙ $\Rightarrow x_0$ βέλτιστη στρατηγική του I, y_0 βέλτιστη στρατηγική του II.

Απόδειξη

(x_0, y_0) ΣΣΙ $\Rightarrow \bar{v} = \underline{v} = v \Rightarrow x^T A y_0 \le \overset{\overset{v}{\shortparallel}}{x_0^T A y_0} \le x_0^T A y$

$\forall x \ \forall y \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} x_0^T A y_0 = \underline{v} \\ x_0^T A y_0 = \bar{v} \end{matrix} \right\}$ βέλτιστες. ■

Scanned with CamScanner

Θεώρημα Minimax

$\underline{v} = \bar{v}$ ↳ απόδειξη με ΕΕΜΠ

Πόρισμα 1

Ένα πεπερασμένο πιναιοπαιχνίδι έχει πάντα ΣΣΙ σε μειγτές στρατηγιες

Πόρισμα 2

Αν x_0, y_0 βέλτιστες στρατηγιες των I, II αντιστοιχα, τότε (x_0, y_0) ΣΣΙ

Ειδικές Περιπτώσεις Πιναιοπαιχνιδιών

- $m = n = 2$
- $m = 2$ ή $n = 2$
- ∃ Εγιστωτικές στρατηγιες

Απλοποιήσεις

Παράδειγμα 1

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 10 & 7 \\ 7 & 3 & 1 & 5 \\ 4 & 6 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

3×4

Η γραμμή 3 υπιαρχείται από την γραμμή 1

Η στρατηγική 3 υπιαρχείται από την στρατηγική 1 ⇝ παραλείπεται ⇒ 2×4 ⇒ ειδική περίπτωση.

Ομοια η στρατηγική 2 υπιαρχείται από τη στρατηγική 4. (νέα) ⇒ 2×3.

Scanned with CamScanner

Κυριαρχίες

25/11/22

(Είδαμε ότι) σε πινακοπαιχνίδι με πίνακα A η στρατηγική i του I κυριαρχείται αν $\exists i_0 \neq i$ τω $a_{i_0 j} \geq a_{ij}$ $\forall j = 1, \dots, n$, και η στρατηγική j του II κυριαρχείται αν $\exists j_0 \neq j$ τω $a_{i j_0} \leq a_{ij}$ $\forall i = 1, \dots, n$.

Π.Χ.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1/2 & 1/2 & 0 \end{array} \\ A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

→ πιθανότητες επιλογής εκάστοτε στρατηγικής (στήλης)

→ δεν κυριαρχείται καμία γραμμή/στήλη

Όμως:

Έστω στρατηγική του II $y_0 = (1/2, 1/2, 0)$

Πληρωμή: (ο II πληρώνει)

I
$$\begin{cases} \text{Αν } i=1: \ h = 1/2 \cdot 1 + 1/2 \cdot 3 + 0 = \boxed{2} \\ \text{Αν } i=2: \ h = 1/2 \cdot 1 + 1/2 \cdot 1 + 0 = \boxed{1} \\ \text{Αν } i=3: \ h = 1/2 \cdot 2 + 1/2 \cdot 0 + 0 = \boxed{1} \end{cases}$$

ομοιόμορφα καλύτερη από την y_3 = στήλη 3 = $[2\ 4\ 1]^T$

Με αυτόν τον τρόπο σκέψης η j_3 κυριαρχείται.

Έστω ότι δίνεται πινακοπαιχνίδι $A_{m \times n}$.

1) Εξετάζουμε αν $\exists$ σαγματικό σημείο ($\underline{u} = \bar{u}$: τα επίπεδα ασφαλείας των παικτών ταυτίζονται)

2) Αν $\nexists$ σαγματικό σημείο:

α. Εξετάζουμε για κυριαρχημένες στρατηγικές ⇒ διαδοχικές απλοποιήσεις ⇒ καταλήγουμε σε πινακοπαιχνίδι $m \times n$.

i. $m = n = 2$ ⇒ σύστημα εξισώσεων

ii. $m = 2, n > 2$ ή $m > 2, n = 2$ ⇒ αλγόριθμος

iii. $m, n > 2$ ⇒ εξισωτικές στρατηγικές.

β. Τίποτα δεν δούλεψε ⇒ ΕΕΜΠ.

Scanned with CamScanner

Περίπτωση 2αι : $m=n=2$

Π.Χ.

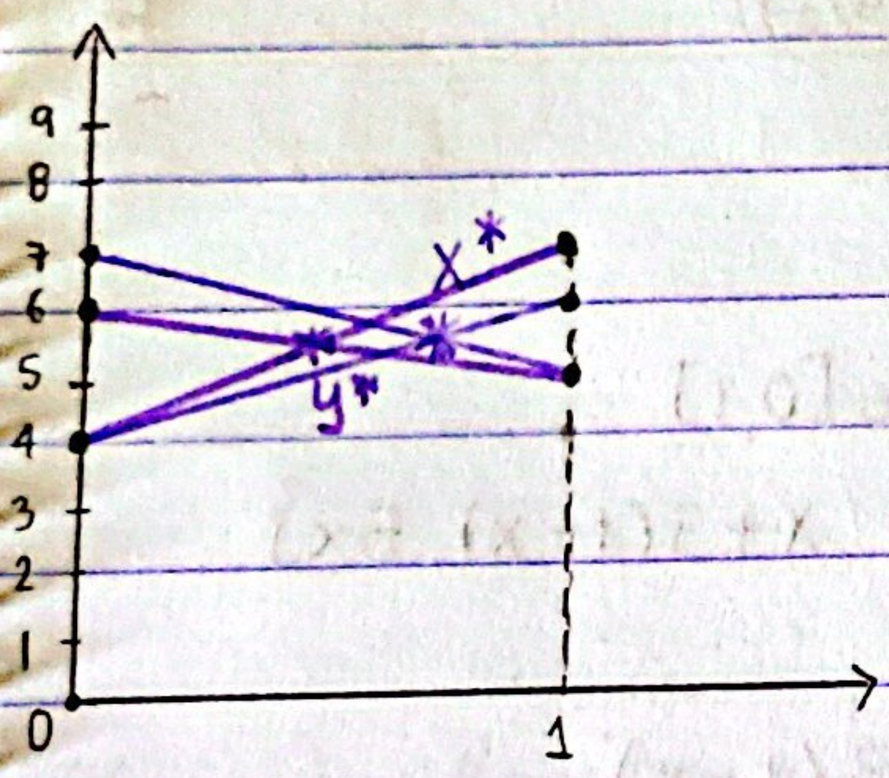
$$A = \begin{array}{c|cc|c} & y & 1-y & \\ \hline x & 5 & 6 & 5 \leftarrow \underline{u} \\ 1-x & 7 & 4 & 4 \\ \hline & 7 & 6 & \\ & & \uparrow \bar{u} & \end{array}$$

Γνωρίζουμε ότι $\underline{u} = \bar{u} = u = val(A)$

Βασικές στρατηγικές $\quad f_j(x) = x^T A_{\cdot j}$

I $\quad \underline{v} = \max_x \min_y x^T A y = \max_x \min_j x^T A_{\cdot j}$

$$\left.\begin{array}{l} x^T A_{\cdot 1} = 5x + 7(1-x) \\ x^T A_{\cdot 2} = 6x + 4(1-x) \end{array}\right\} \underline{v} = \max_{x \in [0,1]} \min \{5x + 7(1-x), 6x + 4(1-x)\}$$



$x^* \Rightarrow 5x + 7(1-x) = 6x + 4(1-x)$

$\Rightarrow x^* = 3/4$

$f_i(y) = A_{i\cdot} y$

II $\quad \bar{v} = \min_y \max_x \overbrace{x^T A y}^{} = \min_y \max_i A_{i\cdot} y$

$\bar{v} = \min_{y \in [0,1]} \max \{5y + 6(1-y), 7y + 4(1-y)\}$

$y^* \Rightarrow 5y + 6(1-y) = 7y + 4(1-y)$

$\Rightarrow y^* = 1/2$

$\rightsquigarrow$ ΣΣΙ : $x_0 = (3/4, 1/4)$, $y_0 = (1/2, 1/2)$

Περίπτωση 1.

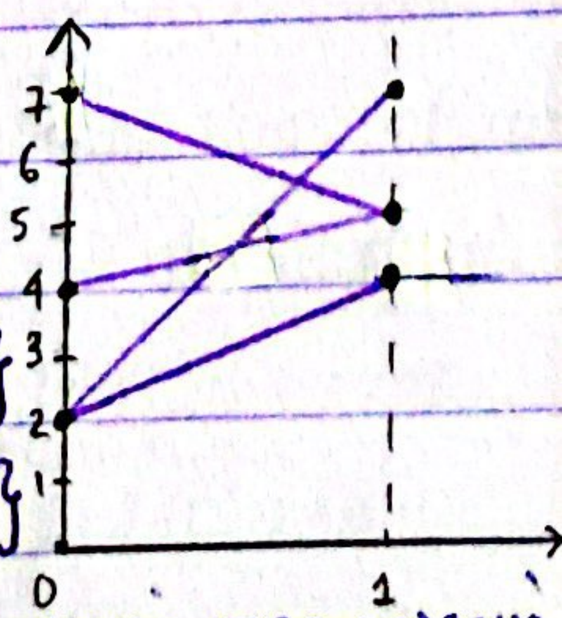
Π.Χ.

$$A = \begin{array}{c|cc|c} & y & 1-y & \\ \hline x & 5 & 7 & 5 \leftarrow \underline{u} \\ 1-x & 4 & 2 & 2 \\ \hline & 5 & 7 & \\ & \uparrow & & \\ & \bar{u} & & \end{array}$$

Αν το κάναμε με την πάνω μέθοδο (όχι αναγκαίο)

$\underline{v} = \max \min \{5x + 4(1-x), 7x + 2(1-x)\}$

$\bar{v} = \min \max \{5y + 7(1-x), 4y + 2(1-y)\}$



$\exists$ σαγματικό σημείο

$\bar{v} = \underline{v} = \bar{u} = \underline{u} = 5$

$\underline{v} = 5$, $\bar{v} = 5$, ο II δεν έχει εξισωτική στρατηγική, ο I έχει αλλά δεν είναι βέλτιστη

Scanned with CamScanner

Γενική Παρατήρηση

Αν $m=n=2$ αν $\nexists$ σαγματικό σημείο τότε το ΣΣΙ προκύπτει από εξισωτικές στρατηγικές των 2 παικτών (σημείο τομής).

Παράδειγμα

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 & 3/2 \\ 1 & 3 & 0 & 5/2 \end{bmatrix}$$

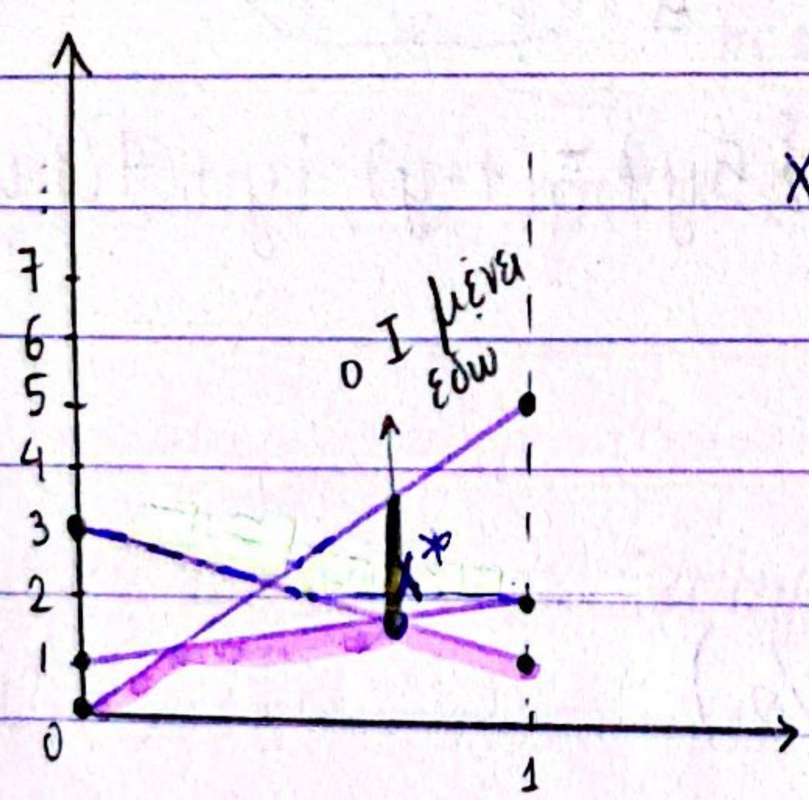
(η j4 κυριαρχείται: $1/2\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} + 1/2\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix}3/2\\5/2\end{pmatrix}$)

$\downarrow$ απλοποίηση

$$\begin{array}{c} x \\ 1-x \end{array} A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

I: $\mathbb{P}^m = \mathbb{P}^2 = \{(x, 1-x)\}$, $x \in [0,1]$

$\underline{v} = \max\min\{2x+1-x,\ x+3(1-x),\ 5x\}$



$x^* \Rightarrow 2x+1-x = x+3(1-x)$

$\Rightarrow x^* = 2/3$

$\underline{v} = 5/3 = val(A)$

II ??

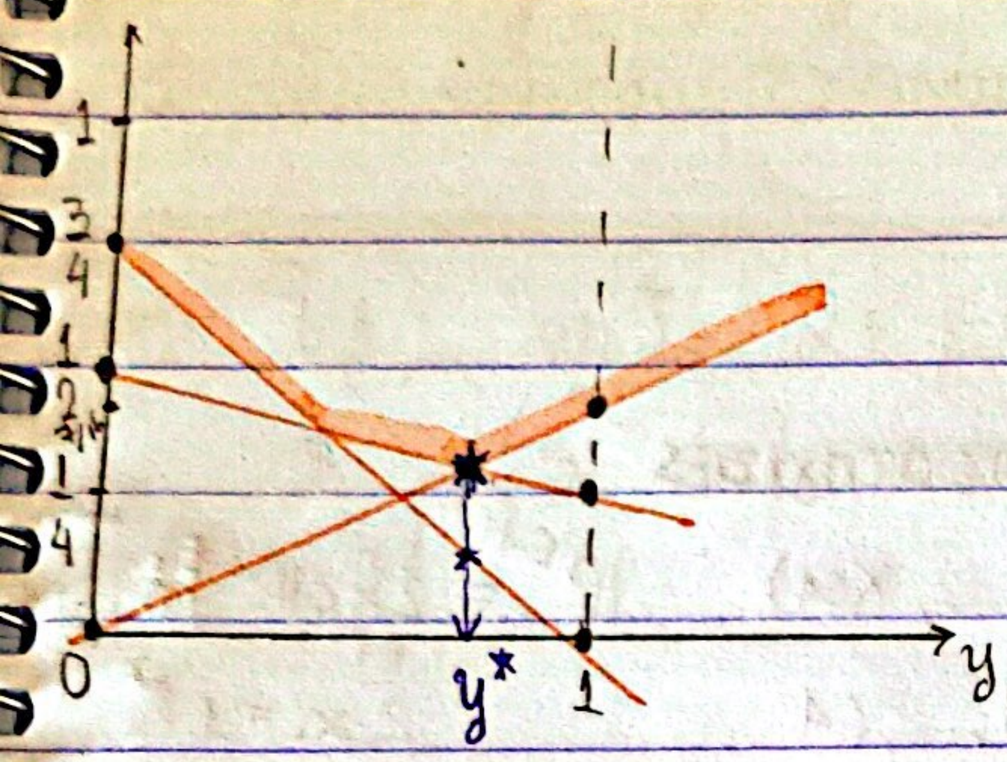
Scanned with CamScanner

Παράδειγμα 30/11/22

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} y & 1-y \end{array} \\ \begin{bmatrix} 7/16 & 0 \\ 1/4 & 1/2 \\ 0 & 3/4 \end{bmatrix} \end{array}$$

$\bar{v} = \min_y \max\{7/16\, y + 0(1-y),\ 1/4\, y + 1/2(1-y),\ 0y + 3/4(1-y)\}$ II

y^*: $7/16\, y = 1/4\, y + 1/2(1-y) \Leftrightarrow y^* = 8/11$



$\Rightarrow \bar{v} = 7/22$

ΣΣΙ $= (x^\circ, y^\circ)$, $y^\circ = (8/11, 3/11)$

Για τον I ξέρουμε ότι $\underline{v} = 7/22$

Αν ο II ακολουθεί την $y^\circ = (8/11, 3/11)$:

1. $7/16\, y^* + 0(1-y^*) = 7/22$
2. $1/4\, y^* + 1/2(1-y^*) = 7/22$

βέλτιστες απαντήσεις στην y°

3. $3/4(1-y^*) < 7/22$ (φαίνεται στο σχήμα)

$\Downarrow$

+ οποιοσδήποτε μιγτός συνδυασμός βέλτιστη

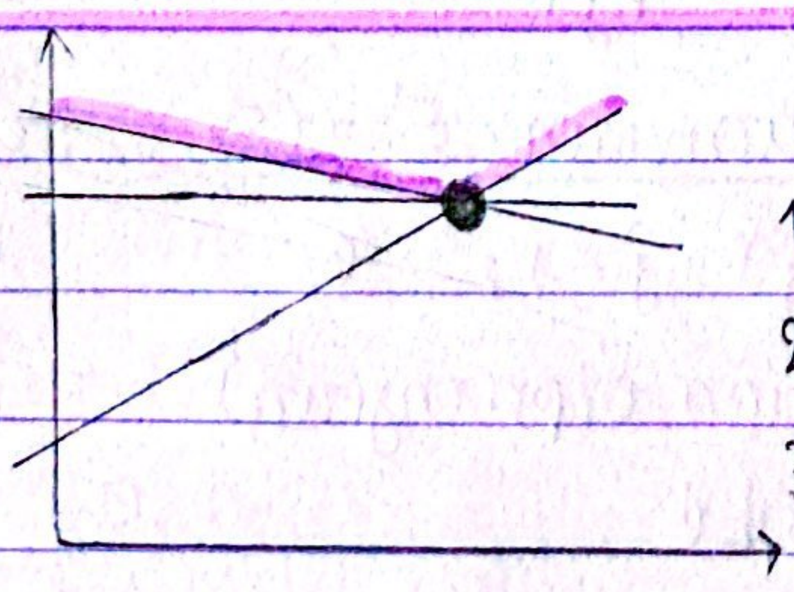
Πρέπει να βρούμε εκείνο το x^* τω $x^\circ = \begin{pmatrix} x^* \\ 1-x^* \end{pmatrix}$ έτσι ώστε η y° να είναι βέλτιστη απάντηση στη x° → η 3η γραμμή δεν θα συμμετέχει ⇒ 2×2

$A = [\cdot]^{x}_{1-x}_{0}$ ← βέλτιστη

$\forall x' = \begin{pmatrix} x \\ 1-x \\ 0 \end{pmatrix}$

⇒ Νέος Πίνακας $A = \begin{array}{c} x \\ 1-x \end{array} \begin{bmatrix} 7/16 & 0 \\ 1/4 & 1/2 \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{7}{16}x + \frac{1}{4}(1-x) = 0x + \frac{1}{2}(1-x) \Rightarrow x^* = \frac{4}{11}$

$\Rightarrow \underline{v} = 7/22$ ✓



$$\begin{array}{c|cc} & y & 1-y \\ \hline 1 & a_{11} & a_{12} \\ 2 & a_{21} & a_{22} \\ 3 & a_{31} & a_{32} \end{array}_{3\times 2} \qquad y_0 = \begin{pmatrix} y^* \\ 1-y^* \end{pmatrix}$$

Όλες οι καθαρές στρατηγικές του I έχουν την ίδια πληρωμή κάτω από την y° $\forall x \in \mathbb{R}^3$ βέλτιστη.

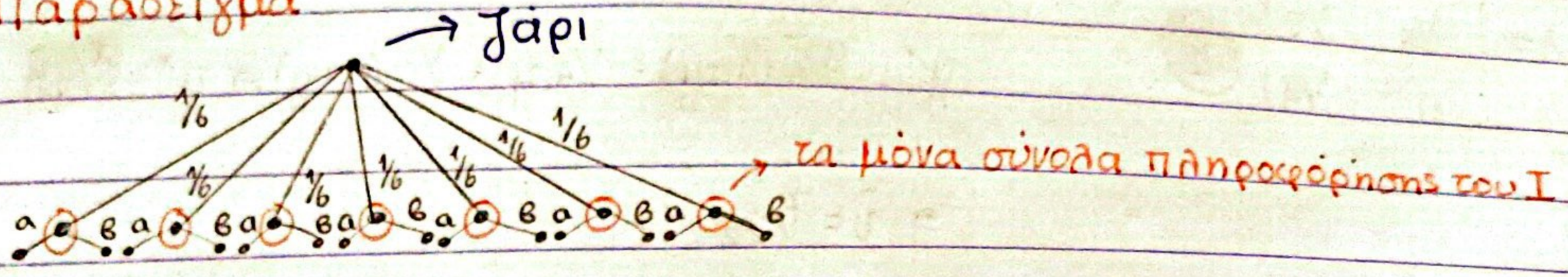
$a_{11}y + a_{12}(1-y) = a_{21}y + a_{22}(1-y) = a_{31}y + a_{32}(1-y)$

Scanned with CamScanner

Παιχνίδια σε στάδια → συμπεριφορικές στρατηγικές, υποπαιχνίδια

1. Συμπεριφορικές στρατηγικές

Παράδειγμα



$S^I = (S_1, S_2, \dots, S_6)$ (πχ $(a, \beta, a, a, \beta, a)$)

$S_i \in \{a, \beta\}$, $i = 1, \dots, 6$.

$S^I = \{a, \beta\}^6$, $|S^I| = 2^6 = 64$

$S = \{1, 2, \dots, 64\}$

(a,a,a,a,a,a) $(\beta,\beta,\beta,\beta,\beta,\beta)$

Μεικτές στρατηγικές

$x = (x_1, x_2, \dots, x_{64})$ $\mathbb{P}^{64} = \{x \in \mathbb{R}^{64}, x \geq 0$

$x_i \geq 0$ $i = 1, \dots, 64$ $\sum_{i=1}^{64} x_i = 1$

$\sum_{i=1}^{64} x_i = 1$

άλλος τρόπος

Πρώτα βλέπω το Jάρι, αν έρθει 1 → a, p_1 / β, p_2

αν έρθει 2 → a, p_3 / β, p_4

κτλ.

} Μια στρατηγική αυτού του τύπου προσδιορίζεται μονοσήμαντα από $\underline{p} = (p_1, p_2, \dots, p_6)$, $p_i \in [0,1]$

$[0,1]^6 = (\mathbb{P}^2)^6$, $\mathbb{P}^2 = (p, 1-p)$, $p \in [0,1]$

⇒ συμπεριφορική στρατηγική ⇒ $P = (\underline{p}_1, \underline{p}_2, \dots, \underline{p}_\ell)$: $p_1 = \begin{pmatrix} p_{11} \\ \vdots \\ p_{k_1} \end{pmatrix} \in \mathbb{P}^{k_1}$, $\sum_{j=1}^{k_1} p_{1j} =$ κτλ.

Έστω ότι τα σύνολα πληροφόρησης ενός παίκτη είναι $T_1, T_2, \dots, T_\ell$,

$|L_i| = k_i$, $i = 1, \dots, \ell$, $L_i = \{1, \dots, k_i\}$.

Scanned with CamScanner

02/12/22

Έστω ότι ένας παίκτης έχει σύνολα πληροφόρησης $T_1, T_2, \dots, T_\ell$. Σε κάθε σύνολο πληροφόρησης $k = 1, \dots, \ell$ ∃ ένα σύνολο ταμπελών L που περιέχει τις δυνατές αποφάσεις του παίκτη αν το παιχνίδι μπει στο T_k.

Έστω $|L_1| = k_1, |L_2| = k_2, \dots, |L_\ell| = k_\ell$

κβγ $L_j = \{1, \dots, k_j\}$

@ <u>Καθαρή στρατηγική:</u> $S = (S_1, \dots, S_\ell)$

$S_j \in \{1, \dots, k_j\}, j = 1, \dots, \ell$

$S = \{S : \text{καθαρή στρατηγική}\}$

$= L_1 \times L_2 \times \dots \times L_\ell$.

$|S| = k_1 \dots k_\ell = m$ ⇝

Scanned with CamScanner

Μειωτή στρατηγική: $x=(x_1,x_2,\dots,x_m)$, $x_i\geq 0$, $i=1,\dots,m$, $\sum_{i=1}^{m} x_i=1$

Σύνολο μειωτών στρατηγικών $\mathbb{P}^m$ (simplex στον $\mathbb{R}^m$)

Συμπεριφορική στρατηγική: $\forall T_j : j=1,\dots,\ell$ έστω $P_j=(P_{j1},\dots P_{jk_j})$ διάνυσμα πιθανοτήτων στο h_j, $P_{j1}+P_{j2}+\dots+P_{jk_j}=1$

$P=(P_1,\dots,P_\ell)$.

$\tilde{S}=\{1,\dots,m\}$ Σε μειωτή επιλέγεται ένας αριθμός $\in\{1,\dots,m\}$ με πιθανότητα $(x_1,\dots,x_m)$ και αυτός αντιστοιχεί σε μια καθαρή στρατηγική $s\in S$.

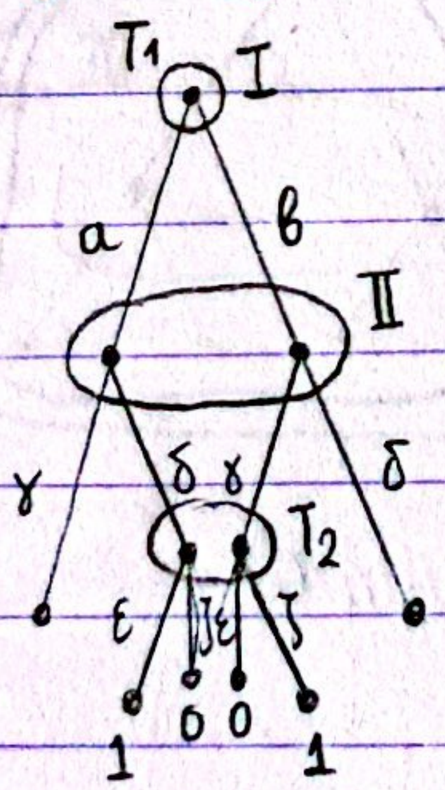
$s^1=(s_1^1,\dots,s_\ell^1)$ $s=?$

Σε συμπεριφορική $P=(P_1,\dots,P_\ell)$ ανεξάρτητα

$(P_{11},\dots,P_{1k_1})$ $(P_{\ell 1},\dots,P_{\ell k_\ell})$ $\sum_{s\in S} P_{1s_1}\dots P_{\ell s_\ell}=1$

$P(\text{επιλέγει στρατηγική } \forall s) = P_{1s_1}P_{2s_2}\dots P_{\ell s_\ell}=x_s$

Παράδειγμα



I: T_1, $h_1=\{a,\beta\}$ $k_1=2$

T_2, $h_2=\{\varepsilon,\zeta\}$ $k_2=2$

$S=\{\underset{1}{(a,\varepsilon)},\underset{2}{(a,\zeta)},\underset{3}{(\beta,\varepsilon)},\underset{4}{(\beta,\zeta)}\}$ $m=2^2=4=|S|$

Έστω $x=(1/2,0,0,1/2)$ μειωτή στρατηγική.

Ερώτημα: Υπάρχει συμπεριφορική που αντιστοιχεί στην x;

Συμπεριφορική στρατηγική $P_1=(P_{11},P_{12})$, $P_2=(P_{21},P_{22})$

$P_{11}=P(a \text{ στο } T_1)$, $P_{12}=P(\beta \text{ στο } T_1)$, $P_{21}=P(\varepsilon \text{ στο } T_2)$, $P_{22}=P(\zeta \text{ στο } T_2)$

$\forall P=(P_1,P_2)$ αντιστοιχεί στη μειωτή στρατηγική $x=(x_1,x_2,x_3,x_4)$ όπου

$x_1=P_{11}P_{21}$, $x_2=P_{11}(1-P_{21})$, $x_3=(1-P_{11})P_{21}$, $x_4=(1-P_{11})(1-P_{21})$ $\rightsquigarrow$

$?\exists\, p_{11} \in [0,1],\ p_{21} \in [0,1]$ τω

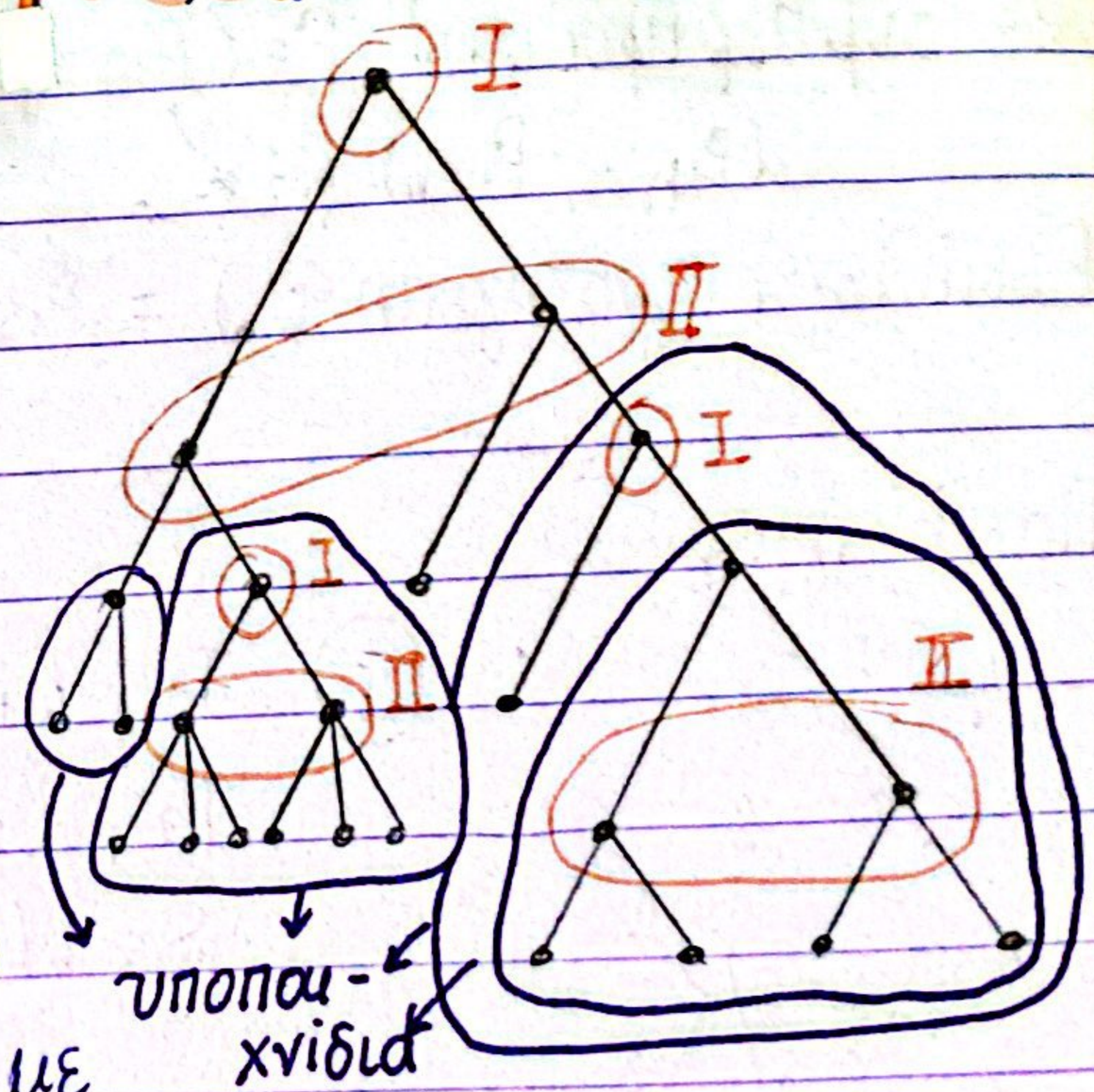
$$\left.\begin{aligned} x_1 &= p_{11}p_{21} = 1/2 \Rightarrow p_{11}, p_{21} > 0 \\ x_2 &= p_{11}(1-p_{21}) = 0 \\ x_3 &= p_{21}(1-p_{11}) = 0 \\ x_4 &= (1-p_{11})(1-p_{21}) = 1/2 \Rightarrow p_{11}, p_{21} < 1 \end{aligned}\right\} \text{αδυνατο}$$

⇒ Δεν προκύπτει από μειωτη.

Πεπερασμένα αναδρομικά παιχνίδια

Θεώρημα Kuhn

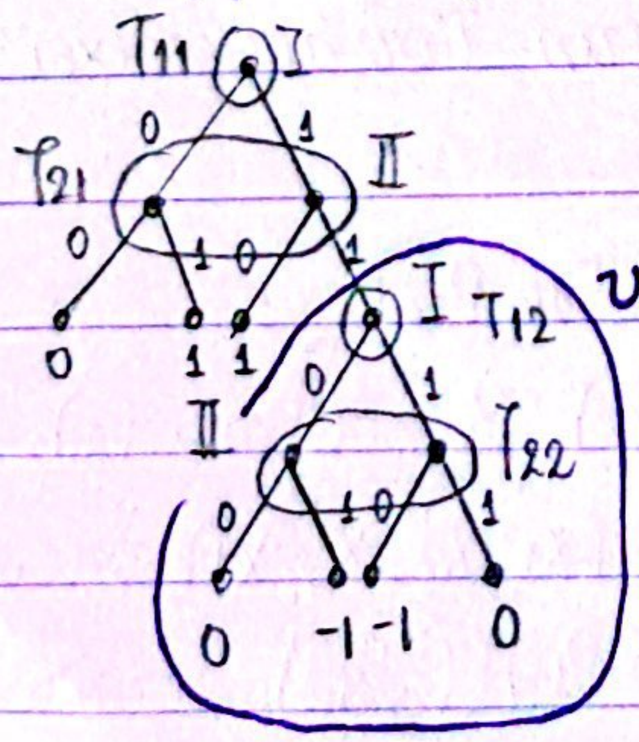
Σε πεπερασμένο παιχνίδι n-παικτών τέλειας ανάμνησης κάθε μειωτή στρατηγική μπορεί να προκύψει από μία συμπεριφορική στρατηγική αυτού του παίκτη.



Παράδειγμα

Δύο παίκτες επιλέγουν ταυτόχρονα από έναν αριθμό ∈ {0,1}.

Αν άθροισμα = 0 ή 1 ⇒ ο I κερδίζει τόσο από τον II. Αν άθροισμα = 2 επαναλήψη με αντεστραμμένους ρόλους, αν άθροισμα ζανά 2 τέλος (πληρωμή 0).



1ο στάδιο.

S^I \ S^{II}	0	1
0	0	1
1	1	Γ_1

S^I \ S^{II}	0	1
0	0	-1
1	-1	0

αντικαθιστώ εδώ.

όχι ΣΣΙ

εξισωτικές στρατηγικές

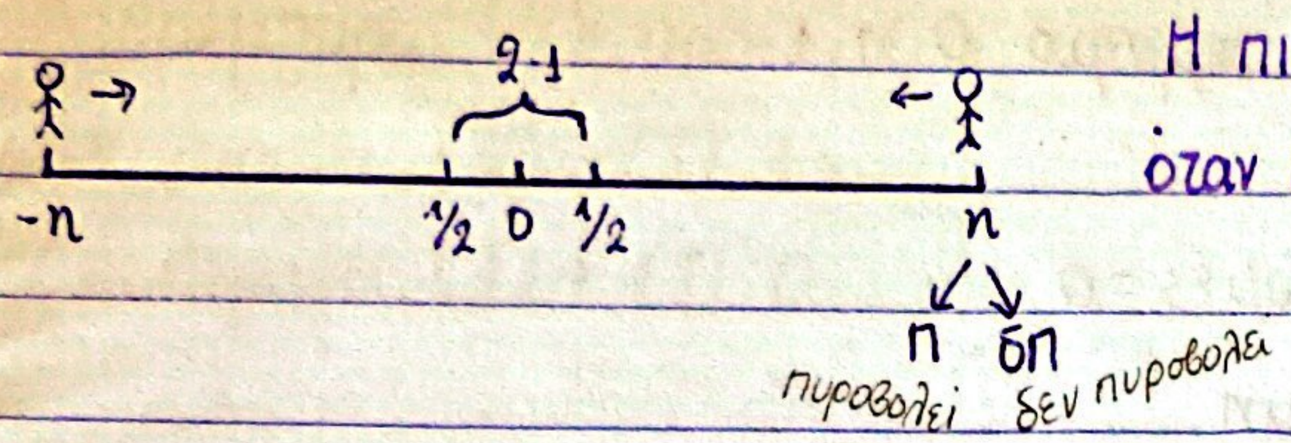
Scanned with CamScanner

αναδρομικά παιχνίδια

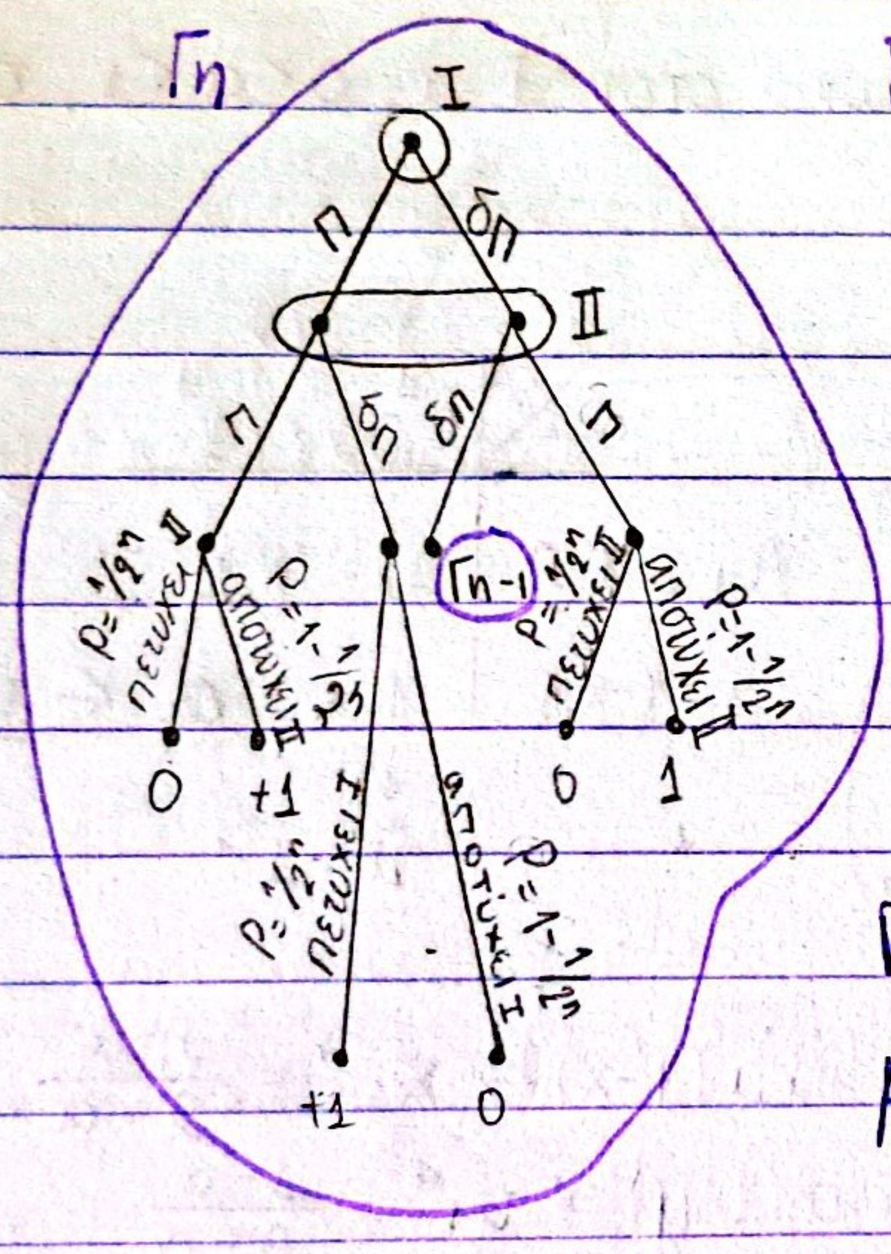
07/12/22

Παράδειγμα 1

Μονομαχία



Η πιθανότητα να πετύχει ο κάθε παίκτης όταν βρίσκεται σε απόσταση $2t$ είναι $1/2^t$



Πληρωμή $I = h^1$ → $+1$ αν επιζήσει, 0 αν πεθάνει

$\Gamma_1 : n=1$

$$A_1 = \begin{array}{c|cc} & \pi & \delta\pi \\ \hline \pi & 1/2 & 1/2 \\ \delta\pi & 1/2 & 0 \end{array} \qquad X_1^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad y_1^* = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \text{ οτιδήποτε}$$

$v_1 = 1/2$

$\Gamma_2 : n=2$

$$A_1 = \begin{array}{c|cc} & \pi & \delta\pi \\ \hline \pi & 3/4 & 1/4 \\ \delta\pi & 3/4 & 1/2 \end{array} \qquad X_2^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad y_2^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$v_2 = 1/2$

Γ_t: <u>Επαγωγική Υπόθεση (ΕΥ)</u>: $v_t = 1/2$.

$$A_{t+1} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{1}{2^{t+1}} & \frac{1}{2^{t+1}} \\ 1 - \frac{1}{2^{t+1}} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$1/2^{t+1} < 1/2 < 1 - 1/2^{t+1}$ $\qquad v_{t+1} = 1/2$ ✓

$\Rightarrow X_{t+1}^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \; y_{t+1}^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Scanned with CamScanner

Παράδειγμα 2

Μετρητής

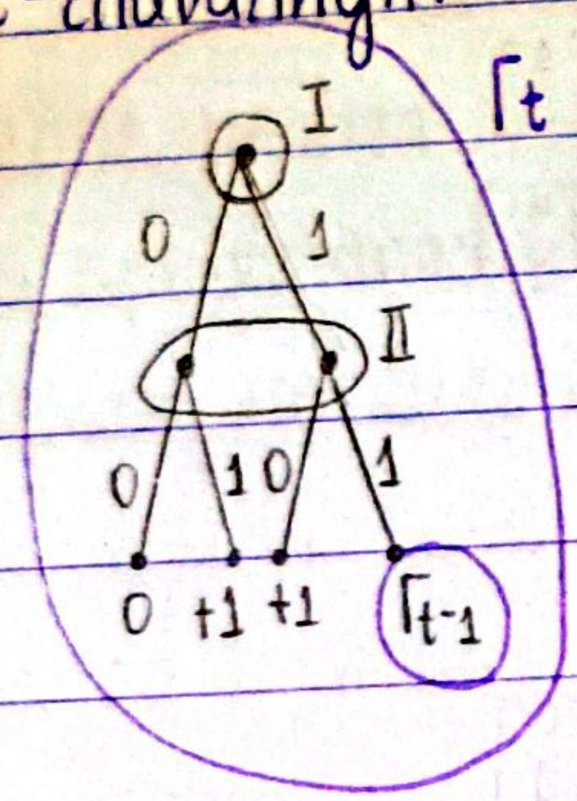
αρχή: τιμή $= n$

Οι παίκτες επιλέγουν ταυτόχρονα αριθμό 0 ή 1

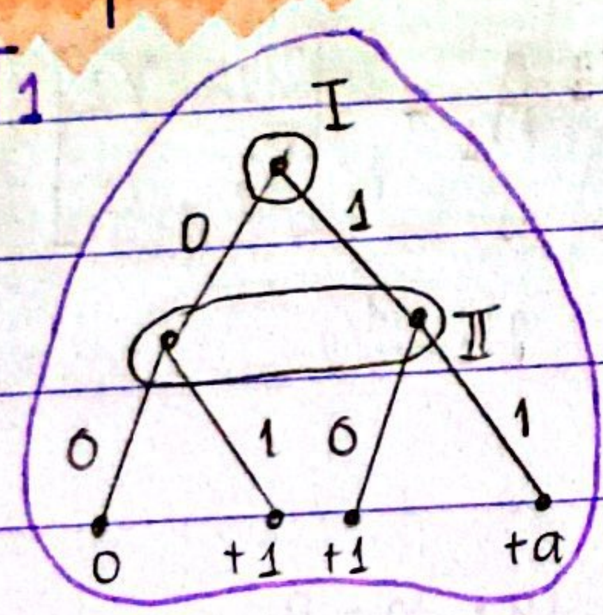
- ο διαφορετικοί $II \to I$ 1 μονάδα
- ο 0, 0 → τέλος (ισοπαλία), πληρωμές $= 0$
- ο 1, 1 → μετρητής $\leftarrow n-1$, επανάληψη.

Αν ο μετρητής φτάσει το 0 ο II πληρώνει στον I a, $0<a<1$, τέλος.

t-επανάληψη:



Βήμα t=1



	$S^I \backslash S^{II}$	y	$1-y$
		0	1
$A_1 \Rightarrow$	x 0	0	1
	$1-x$ 1	1	$a \leftarrow \underline{u}=a$
		↓	
		$\bar{u}=1$	

I) $0x + 1(1-x) = 1x + a(1-x) \Rightarrow x_1^* = \frac{1-a}{2-a}$

II) $0y + (1-y) = y + a(1-y) \Rightarrow y_1^* = \frac{1-a}{2-a}$

$v_1 = 0 \cdot x_1^* + 1 \cdot (1-x_1^*) = 1 - x_1^* = \frac{1}{2-a}$.

Βήμα t=2

	$S^I \backslash S^{II}$	0	1
$A_2 \Rightarrow$	0	0	1
	1	1	v_1

Όμοια με $n=1$, όπου $v_1 = a$

$x_2^* = \frac{1-a}{3-2a}$, $1 - x_2^* = \frac{2-a}{3-2a}$

$y_2^* = \frac{1-a}{3-2a}$, $1 - y_2^* = \frac{2-a}{3-2a}$

Βήμα t=3, $v_3 = \frac{3-2a}{4-3a} = 1 - x_3$ Επαγωγική Υπόθεση (ΕΥ): $v_t = \frac{t-(t-1)a}{t+1-ta}$

δ.ο. $0 < v_t < 1$ $A_{t+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & v_t \end{pmatrix} \Rightarrow \ldots \Rightarrow v_{t+1} = \frac{1}{2-v_t} =$

... = Ιπτούμενο

Scanned with CamScanner

Παράδειγμα 3

Παιχνίδι επιθεώρησης

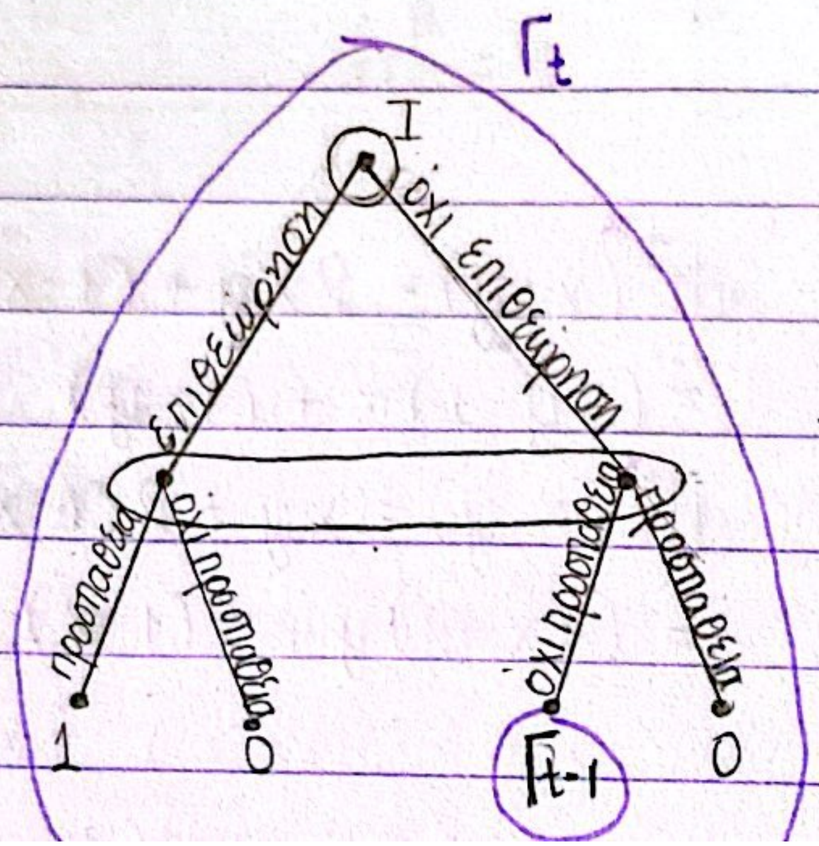
Τελωνείο (I) επιθεωρούν μόνο μια μέρα που επιλέγουν (κάθε μέρα αποφασίζουν)

Λαθρέμπορος (II) κάθε μέρα αποφασίζει αν θα περάσει ή όχι.

Αν πιαστεί (II) → (I) +1

Αν περάσει (II) → (I) 0.

n μέρες.



Βήμα 1: $v_1 = 1$

Βήμα 2: $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & v_1 \end{bmatrix}$

Βήμα $t+1$: $A_{t+1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & v_t \end{bmatrix}$

(άσκηση)

Scanned with CamScanner

09/12/22

ΠΑΙΧΝΙΔΙΑ ΜΗ ΜΗΔΕΝΙΚΟΥ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΟΣ

2 παίκτες, $|S^I| = |S^{II}| = 2$, διπινακοπαιχνίδια 2×2

Πίνακες Πληρωμών

$\underset{A}{\overset{I}{\downarrow}}$ $\underset{B}{\overset{II}{\downarrow}}$

Σύνολα Βέλτιστων Απαντήσεων

1

- $BR^I(y) = \{x : x$ βέλτιστη απάντηση του I στη (μειωτή γενικά) στρατηγική του II$\}$
- $BR^{II}(x) = \{y : y$ βέλτιστη απάντηση του II στην στρατηγική x του I$\}$

(x_0, y_0) ΣΣΙ $\Leftrightarrow$

$x_0 \in BR^I(y)$ & $y_0 \in BR^{II}(x)$

2 **Συναρτήσεις Πληρωμής**

$h^I(x,y)$ = μέση πληρωμή του I υάτω από $(x,y) = x^T A y = \sum_{i,j} x_i a_{ij} y_j$

$h^{II}(x,y) = x^T B y$

Scanned with CamScanner

③ Από εδώ και πέρα όταν λέμε x εννοούμε την πιθανότητα να παίξει ο I την 1η (όπως έχουμε ορίσει) στρατηγική, δηλαδή τον αριθμό από τον οποίο προκύπτει το διάνυσμα $\begin{bmatrix} x \\ 1-x \end{bmatrix}$ (όμοια για $y \to \begin{bmatrix} y \\ 1-y \end{bmatrix}$), οπότε $h^I = [x, 1-x]^T A [y, 1-y]$

$a_{11} xy +$

Παράδειγμα 1

Μάχη των 2 φύλων

$$A = \begin{array}{c|cc} & 1 & 2 \\ \hline 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{c} x \\ 1-x \end{array} \qquad \begin{array}{c} y \quad 1-y \end{array}$$

$$B = \begin{array}{c|cc} & 1 & 2 \\ \hline 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{array} \quad \begin{array}{c} x \\ 1-x \end{array} \qquad \begin{array}{c} y \quad 1-y \end{array}$$

$$h^I(x,y) = 2xy + (1-x)(1-y) \overset{\cdots}{=} (3y-1)x + (1-y)$$

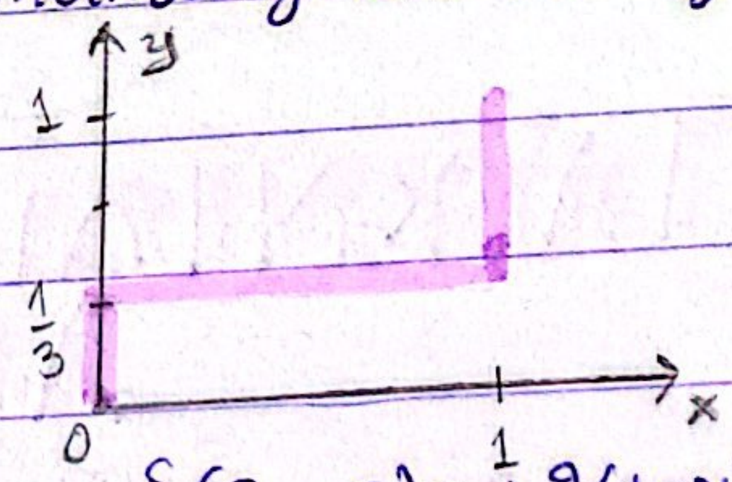
$$h^{II}(x,y) = xy + 2(1-x)(1-y) = (3x-2)y + 2(1-x).$$

$\Downarrow$

$BR^I(y)$: $\forall y \in [0,1]$ ο I λύνει το πρόβλημα $\max\{(3y-1)x + (1-y)\}$

$x \in [0,1] \rightsquigarrow$ υλίση:

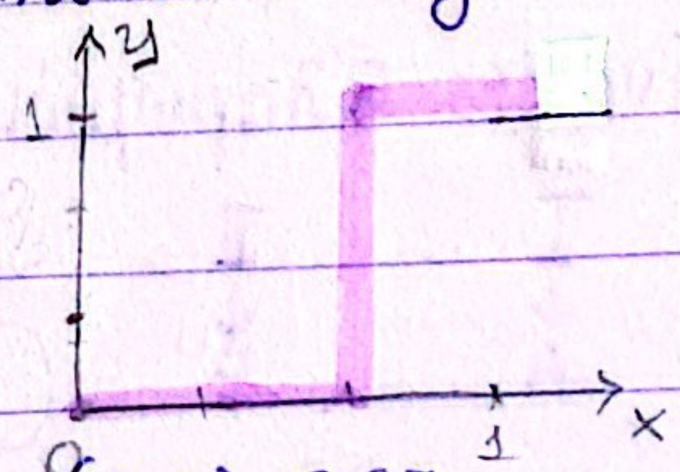
- $+$ $y > 1/3$ $\quad BR^I(y) = \{1\}$
- 0 $y = 1/3$ $\quad BR^I(y) = [0,1]$
- $-$ $y < 1/3$ $\quad BR^I(y) = \{0\}$



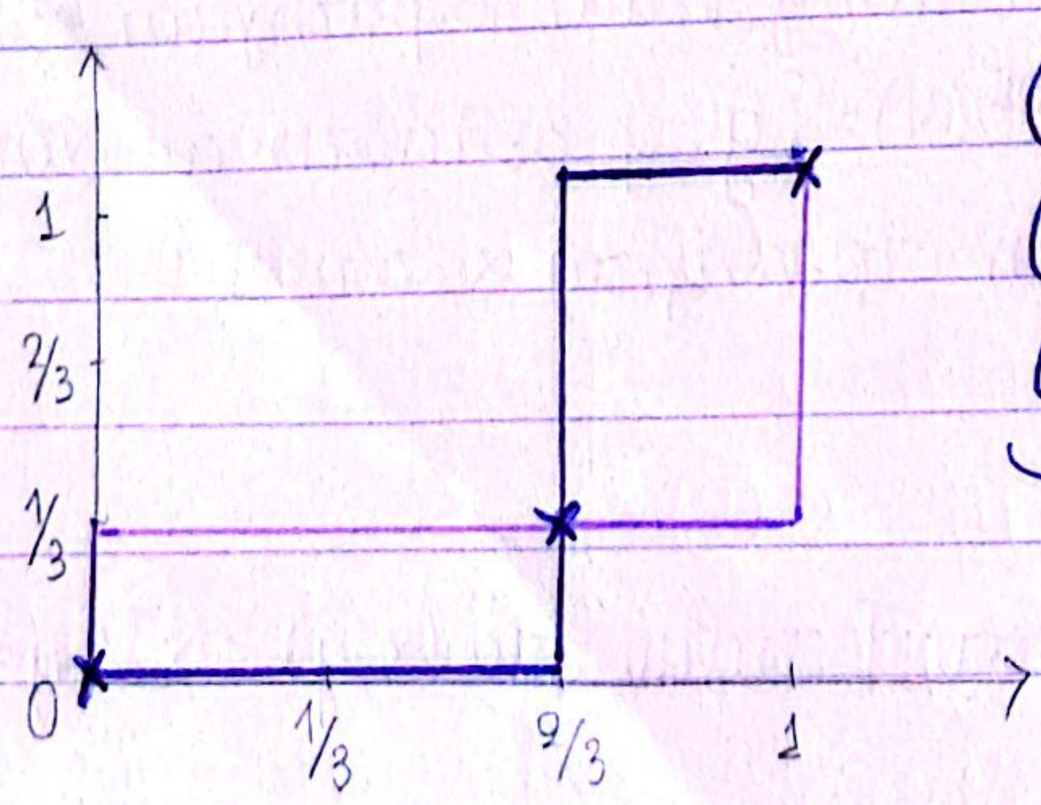
$BR^{II}(x)$: $\forall x \in [0,1]$ ο II λύνει το πρόβλημα $\max\{(3x-2)y + 2(1-x)\}$

$y \in [0,1] \rightsquigarrow$ υλίση:

- $+$ $x > 2/3$ $\quad BR^{II}(x) = \{1\}$
- 0 $x = 2/3$ $\quad BR^{II}(x) = [0,1]$
- $-$ $x < 2/3$ $\quad BR^{II}(x) = \{0\}$



Σε 1 γράφημα



$(x_1, y_1) = (0,0)$ ΣΣΙ

$(x_2, y_2) = (1,1)$ ΣΣΙ

$\underbrace{(x_0, y_0) = (2/3, 1/3) \text{ ΣΣΙ}}$

→ αφού ανήκουν στα BR και των 2

Scanned with CamScanner

Πληρωμές		$h^I + h^{II}$
$(x_0, y_0) = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$	$h^I = 2/3$ $h^{II} = 2/3$	$\frac{4}{3}$
$(x_1, y_1) = (0,0)$	$h^I = 1$ $h^{II} = 2$	3
$(x_2, y_2) = (1,1)$	$h^I = 2$ $h^{II} = 1$	3

Παράδειγμα 2

Αν σωθεί ο σωσίλος και οι δύο αμοιβή $v > 0$. Αν δεν σωθεί και οι δύο αμοιβή 0. Ο Ποιος πέσει στο νερό, κόστος c (αρνητική αμοιβή), $0 < v < c$.

Πέφτει ένας σωσίλος στο ποτάμι & πνίγεται. Και οι δύο παίκτες θέλουν να σωθεί, αλλά ο ένας θέλει να πέσει ο άλλος.

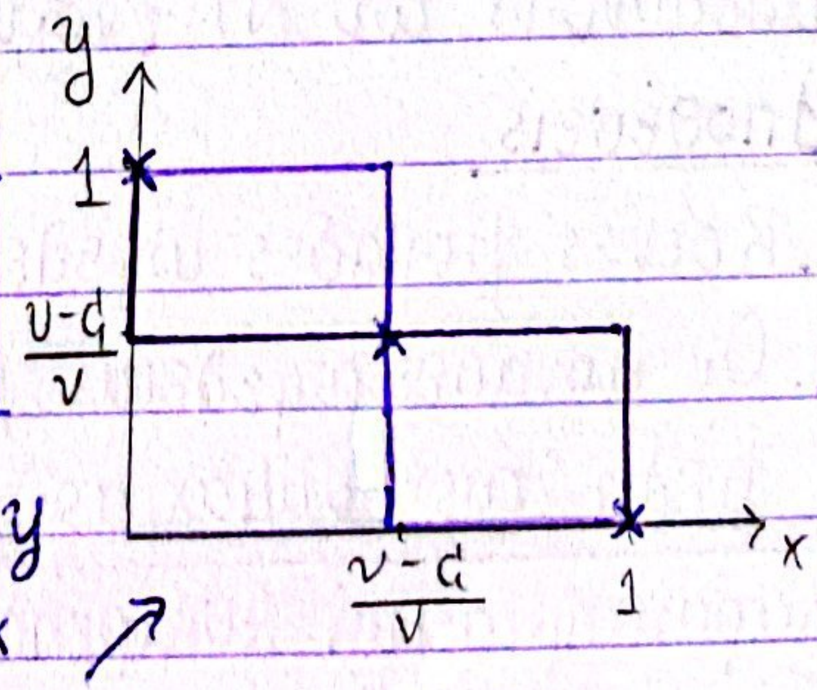
$S^I = S^{II} = \{\overset{①}{\Pi}, \overset{②}{\delta\Pi}\}$

$A =$

$S^I \backslash S^{II}$	Π	$\delta\Pi$
Π	$v-c$	$v-c$
$\delta\Pi$	v	0

$B =$

$S^I \backslash S^{II}$	Π	$\delta\Pi$
Π	$v-c$	v
$\delta\Pi$	$v-c$	0



$h^I(x,y) = x(v-c) + (1-x)yv = (v-c-vy)x + vy$

$h^{II}(x,y) = y(v-c) + (1-y)xv = (v-c-vx)y + vx$

$$BR^I(y) = \begin{cases} \{1\}, & y < \frac{v-c}{v} \\ [0,1], & y = \frac{v-c}{v} \\ \{0\}, & y > \frac{v-c}{v} \end{cases} \qquad BR^{II}(y) = \begin{cases} \{1\}, & x < \frac{v-c}{v} \\ [0,1], & x = \frac{v-c}{v} \\ \{0\}, & x > \frac{v-c}{v} \end{cases}$$

ΣΙΙ

$(1,0) \longrightarrow h^I = v \quad h^{II} = v-c$ — Πιθ. να σωθεί ο σωσίλος $\longrightarrow 1$

$(\frac{v-c}{v}, \frac{v-c}{v}) \longrightarrow h^I = v-c \quad h^{II} = v-c \longrightarrow 1-(c/v)^2$

$(0,1) \longrightarrow h^I = v-c \quad h^{II} = v \longrightarrow 1$

Πληρωμές

$x = \frac{v-c}{v} \Rightarrow 1-x = \frac{c}{v}$

πιθ (δεν πέφτει)

Παράδειγμα 3

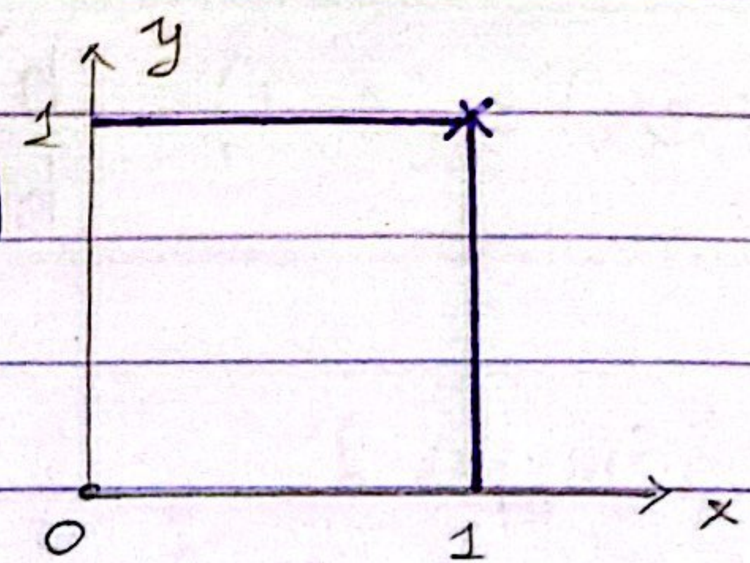
Το δίλημμα του κρατουμένου

$$A = \begin{array}{c|cc} & 0 & \Delta 0 \\ \hline x & -8 & 0 \\ 1-x & -10 & -1 \\ \hline & y & 1-y \end{array} \qquad B = \begin{array}{c|cc} & 0 & \Delta 0 \\ \hline x & -8 & -10 \\ 1-x & 0 & -1 \\ \hline & y & 1-y \end{array}$$

$$h^{I}(x,y) = (y+1)x - (9y+1)$$

$$h^{II}(x,y) = (x+1)y - (9x+1)$$

$BR^{I}(y) = \{1\}$ $y \in [0,1]$ $\quad$ $BR^{II}(x) = \{1\}$ $x \in [0,1]$



ΣΣΙ: $\{(1,1)\}$ (ομολογούν και οι δύο).

Scanned with CamScanner

ΠΑΙΧΝΙΔΙΑ ΣΕ ΣΥΜΜΑΧΙΚΗ ΜΟΡΦΗ

14/12/22

Υποθέτουμε ότι οι παίκτες μπορούν να σχηματίσουν συμμαχίες (υποσύνολα του N)

Σε κάθε συμμαχία οι παίκτες αποφασίζουν από κοινού ποια στρατηγική θα ακολουθήσει ο καθένας.

ισχύς; κίνητρα για να μπει σε συμμαχία;

Υποθέσεις

1. Κοινές μονάδες ωφέλειας για όλους τους παίκτες
2. Οι μονάδες ωφέλειας μπορούν να μεταφέρονται ανάμεσα στα μέλη της συμμαχίας → Transferable Utility (TU games)

Χαρακτηριστική Συνάρτηση

Σύνολο παικτών $N = \{1, 2, \dots, n\}$

2^N = δυναμοσύνολο του N

$U : 2^N \to \mathbb{R}$ χαρακτηριστική συνάρτηση αν:

1. $U(\emptyset) = 0$
2. $\forall S, T \subseteq N : S \cap T = \emptyset \Rightarrow U(S \cup T) \geq U(S) + U(T)$ «υπερπροσθετικότητα»

$\langle N, U \rangle$ παιχνίδι συμμαχιών μορφής μέσω χαρακτηριστικής συνάρτησης

ιδιότητες

1. u, v χαρακτηριστικές συναρτήσεις, $w = u + v$ χαρακτηριστική συνάρτηση
2. $u' = \lambda u, \lambda > 0 \Rightarrow u'$ χαρακτηριστική συνάρτηση

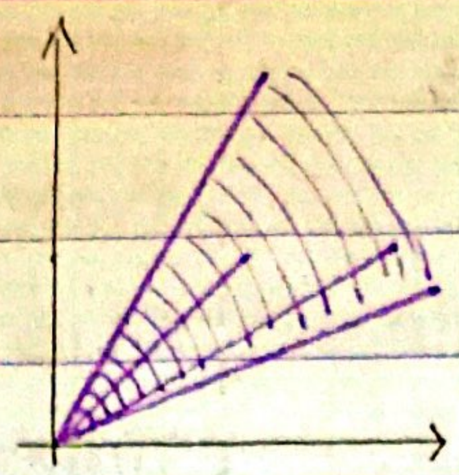
«Κύριος»

Scanned with CamScanner

Παρένθεση

$u: 2^N \to \mathbb{R}$ χαρακτηριστική συνάρτηση, $|2^N| = 2^n$

$\underline{u} = (u(S), S \in 2^N) \in \mathbb{R}^{2^n}$



Έστω $\langle N, S^i, i \in N, h^i, i \in N \rangle$ παιχνίδι σε κανονική μορφή

$N: \{1, 2, \dots, n\}$ σύνολο παικτών

$S^i: \{S^i =$ καθαρή στρατηγική του παίκτη $i\}$, $|S^i| < \infty$

$h^i: h^i(S_i, S_{-i}) =$ πληρωμή του παίκτη i στην στρατηγική κατάσταση (S_i, S_{-i})

Πώς ορίζουμε χαρακτηριστική συνάρτηση v; (→ υπό αυτό το παιχνίδι) ← εμπλουτίζω με συμμαχίες

① $T \subset N$ οι υπόλοιποι συμμαχία $N \setminus T$

συμμαχία T ↓

↳ 2 παίκτες - 0 άθροισμα

(για σταθεροποιημένο T)

② $T: S^T = \prod_{i \in T} S^i$ στρατηγικές συμμαχίας T

③ $\varphi^T(S_T, S_{N \setminus T}) = \sum_{i \in T} h^i(S_T, S_{N \setminus T})$

↳ πληρωμές (καθαρές στρατηγικές)

$\varphi^{N \setminus T}(S_T, S_{N \setminus T}) = -\varphi^T(S_T, S_{N \setminus T})$

προσοχή! όχι $\sum_{i \in N \setminus T} h^i(S_T, S_{N \setminus T})$ αφού έχουμε παίγνιο 0-αθροίσματος

④ Επίπεδα Ασφαλείας

Επίπεδο ασφαλείας του παίκτη (της συμμαχίας) T είναι $\underline{u} = \max\min \varphi^T(S_T, S_{N \setminus T})$ σε καθαρές στρατηγικές.

Αντίστοιχα, σε μικτές στρατηγικές ⑤

- $\varphi^T(\tilde{S}_T, \tilde{S}_{N \setminus T}) = \sum_{S_T} \sum_{S_{N \setminus T}} \tilde{S}_T(S_T) \tilde{S}_{N \setminus T}(S_{N \setminus T}) \varphi^T(S_T, S_{N \setminus T})$.

  ↳ πληρωμή

- $\underline{v} = \max_{\tilde{S}_T} \min_{\tilde{S}_{N \setminus T}} \varphi^T(\tilde{S}_T, \tilde{S}_{N \setminus T})$, $\underline{v} \geq \underline{u}$

  ↳ επίπεδο ασφαλείας

(μικτή στρατηγική στο $S^T: (p(S_T), S_T \in S^T)$)

$S^T = \prod_{i \in T} S^i$

$S_T = (S_1, S_2, \dots, S_k)$, $S_1 \in S^1$, $S_2 \in S^2$, $S_k \in S^k$

αν $T = \{1, 2, \dots, k\}$

Ορίζουμε $v(T) = \underline{v}$ ($v(N \setminus T) = w$), χαρακτηριστική συνάρτηση v.

Θεώρημα 1

Η $v: 2^N \to \mathbb{R}$, όπου $v(T)$ επίπεδο ασφαλείας της T εναντίον της $N \setminus T$ είναι χαρακτηριστική συνάρτηση.

Scanned with CamScanner

Παραδείγματα παιχνιδιών σε συμμαχική μορφή

Παράδειγμα 1

Κανόνας Ομοφωνίας

Έστω ποσό χορηγίας $A>0$. Για $S \subset N$ (γνήσιο υποσύνολο) $v(S)=0$, $v(N)=A$.

Παράδειγμα 2

Όποιος ξεχωρίζει χάνει

Αριθμημένοι παίκτες $1, 2, \dots, n$. $\xrightarrow{\text{πχ}}$ $v(\{1,2\}) = 1+2=3$

αριστερά A
δεξιά Δ

$\xrightarrow{\text{πχ}}$ $v(\{i_1, i_2, \dots, i_k\}) = i_1 + i_2 + \dots + i_k$, $k \geq 2$

Αν ο παίκτης i συμφωνήσει με τουλάχιστον άλλον ένα παίκτη $\xrightarrow{\text{πχ}}$ $v(\{i\}) \Rightarrow S=\{i\}$, ο i παίζει ειδοπράττει ωφέλεια $= i$

Πίνακοπαιχνίδι με τους υπόλοιπο

Πίνακας: $A = \begin{array}{c|cc} & A & \Delta \\ \hline A & i & 0 \\ \Delta & 0 & i \end{array}$, προκύπτει εύκολα $val(A) = i/2$

$\Rightarrow \sum\sum I$: $x_0 = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$, $y_0 = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$, (x_0, y_0).

Παράδειγμα 3

Παιχνίδι απλής αγοράς

Αγρότης → κτήμα → καλλιέργεια → 100
Βιομηχανία → εργοστάσιο → 200.
Μεσίτης → σιλοφμα → 300.

Παίκτες $N=\{A, B, M\}$

↳ ο αγρότης "συμμαχεί" → δίνει κτήμα στην βιομηχανία

$v(\emptyset)=0$ $\quad$ $v(AB)=200$
$v(A)=100$ $\quad$ $v(AM)=300$
$v(B)=0$ $\quad$ $v(ABM)=300$
$v(M)=0$

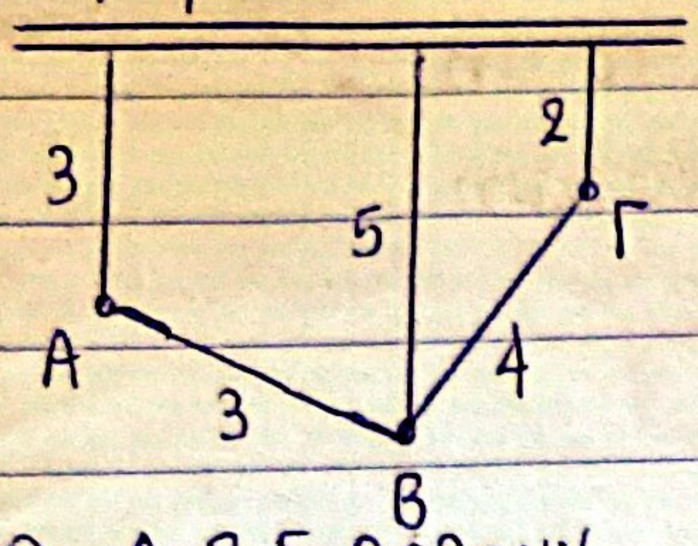
Θεώρημα 2 16/12/22

Κάθε χαρακτηριστική συνάρτηση $v(S)$, $S \subseteq N$ δημιουργεί ένα παιχνίδι του οποίου τα επίπεδα ασφαλείας ταυτίζονται με την v.

Scanned with CamScanner

Παράδειγμα 4

Δρόμος



Οι Α, Β, Γ θέλουν επικοινωνία με τον δρόμο.

$v(A) = -3 \rightarrow$ πληρώνει

$v(B) = -5$

$v(Γ) = -2$ ο καθένας μόνος: $-3-5=-8$

$v(AB) = -6 \rightarrow$ $B \rightarrow A: -5-3=-8$

$A \rightarrow B: -3-3=-6.$

$v(AΓ) = -5$

$v(BΓ) = -6$

$v(ABΓ) = -8.$

Παράδειγμα 5

Παιχνίδι ταχυδρομείου

n παίκτες, κάθε ένας είναι υποχρεωμένος να βάλει 100€ σε ένα φάκελο και να τα ταχυδρομήσει σε έναν άλλο παίκτη.

$v(N) = 0.$

$v(1) = -100 \rightarrow$ κάπου θα τα στείλει, αλλά κανείς δεν θα του στείλει (όλοι οι άλλοι εναντίον του)

$v(1,2) = 0 \rightarrow$ κανείς δεν θα τους στείλει, άρα τους συμφέρει να τα στείλουν ο ένας στον άλλο.

$v(1,2,3) = 100 \rightarrow$ κανείς δεν θα τους στείλει, αυτό που βολεύει κάποιον είναι να πάρει τα 200 των άλλων 2 και να στείλει σε 1 τα 100 $\Rightarrow 200-100=100.$

Παράδειγμα 6

Δίπινακοπαιχνίδι

$N=\{1,2\}$, $S^1=\{1,2,\dots,n\}$, $S^2=\{1,\dots,n\}$

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

$v(1,2) = \max(a_{ij}+b_{ij})$ για κάθε $i,j \le n$.

$S \in \{\{1\},\{2\},\emptyset,\{1,2\}\}$

$v(\emptyset)=0$ $v(1) \Rightarrow$ πινακοπαιχνίδι 0-αθροίσματος με $A \rightarrow \underset{\text{γραμμές}}{I\max}, \underset{\text{στήλες}}{II\min} \Rightarrow$ $v(1) = val(A)$. Αντίστοιχα $v(2) = val(B^T)$ αφού $\underset{\text{στήλες}}{II\max}, \underset{\text{γραμμές}}{I\min}$

Scanned with CamScanner

Ορισμός

Τα συμμαχικά παιχνίδια $\langle N, v\rangle$, $\langle N, v'\rangle$ είναι ισοδύναμα αν $\exists k>0$ και $a=(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{R}^n$ τω $v'(S)=kv(S)+\sum_{i\in S} a_i \ \forall S\subseteq N$.

ΣΧΕΣΗ ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑΣ

- ανακλαστική
- συμμετρική
- μεταβατική

} ιδιότητα

Φάση 1

0-κανονικοποίηση

Επιλέγουμε $k=1$, $a_i=-v(i)$

$v'(S)=v(S)-\sum_{i\in S} v(i)$

π.χ. $v'(1,2)=v(1,2)-v(1)-v(2)$

a. $\Rightarrow v'(i)=v(i)-v(i)=0 \rightsquigarrow$ «ξεκινούν όλοι από το 0»

β. $\Rightarrow \forall T,S\subseteq N,\ S\subset T \Rightarrow v'(S)\le v'(T)$ «μονοτονία»

$0\le v'(S)\le v'(N)$

Κανονικοποίηση

Φάση 2.

1-κανονικοποίηση

Έστω $\langle N, v'\rangle$ σε 0-κανονική μορφή,

$0\le v'(S)\le v'(N)$

$k=1/v'(N)$, $a_i=0$

$v''(S)=v'(S)/v'(N)$

$\langle N, v''\rangle$ 0-1-κανονική μορφή.

$0\le v''(S)\le 1 \overset{a.}{\Leftarrow}$

$\forall S\subset T \Rightarrow v''(S)\le v''(T) \overset{β.}{\Leftarrow}$

(μόνο σε επουσιώδη!)

Ορισμός

1. $\langle N, v\rangle$, $v\equiv 0$ μηδενικό παιχνίδι
2. $\langle N, v\rangle$, v προσθετική ($v(S)+v(T)=v(S\cup T)$) επουσιώδες παιχνίδι
3. μη επουσιώδες $\Rightarrow$ ουσιώδες παιχνίδι

Έστω $\langle N, v\rangle$ επουσιώδες $\Rightarrow v(S)=\sum_{i\in S} v(i)$

$\Rightarrow v'(S)=v(S)-\sum_{i\in S} v(i)=0 \ \forall S$

Scanned with CamScanner

21/12/22

Παιχνίδι $\langle N, v \rangle$ παιχνίδι σε συμμαχική μορφή.
N = σύνολο παικτών = $\{1, 2, \dots, n\}$, $v: 2^N \to \mathbb{R}$ χαρακτηριστική συνάρτηση, $S \subseteq N$ συμμαχία, $v(S)$ = επίπεδο ασφάλειας της συμμαχίας
$\forall S, T \subseteq N \quad S \cap T = \emptyset \Rightarrow v(S \cup T) \geq v(S) + v(T)$

Επουσιώδες: $v(S \cup T) = v(S) + v(T)$
$v(S) = \sum_{i \in S} v(i) \Rightarrow v'(S) = 0 \ \forall S \subseteq N$
$v'(N) = 0$

0-1 κανονικοποίηση
0-κανονικοποίηση.
$v'(S) = v(S) - \sum_{i \in S} v(i)$
$v'(i) = 0$
$\forall T \supset S \Rightarrow v'(T) \geq v'(S)$

1-κανονικοποίηση
$v''(S) = \frac{v'(S)}{v'(N)}$
$v''(N) = 1$
$0 \leq v''(S) \leq 1 \ \forall S \subseteq N$

Παράδειγμα

Δρόμος (δες 16/12)

Έχουμε βρει:
$v(A) = -3$
$v(B) = -5$
$v(\Gamma) = -2$
$v(AB) = -6$
$v(A\Gamma) = -5$
$v(B\Gamma) = -6$
$v(AB\Gamma) = -8$

0-1 κανονικοποίηση

0-κανονικοποίηση

$v'(A) = v'(B) = v'(\Gamma) = 0$ (μονοσύνολα)
$v'(AB) = v(AB) - v(A) - v(B) = -6 + 3 + 5 = 2$
$v'(A\Gamma) = v(A\Gamma) - v(A) - v(\Gamma) = -5 + 3 + 2 = 0$
$v'(B\Gamma) = v(B\Gamma) - v(B) - v(\Gamma) = -6 + 5 + 2 = 1$
$v'(AB\Gamma) = v(AB\Gamma) - v(AB) - v(B\Gamma) - v(A\Gamma) = -8 + 3 + 5 + 2 = 2$

1-κανονικοποίηση $(v'(N) > 0)$
$N = \{A, B, \Gamma\}$, $v'(N) = 2$.
$v''(A) = v''(B) = v''(\Gamma) = 0$ (μονοσύνολα), $v''(AB) = 1$, $v''(A\Gamma) = 0$, $v''(B\Gamma) = \frac{1}{2}$
$v''(AB\Gamma) = 1$.

Scanned with CamScanner

Ορισμός

Μια συμμαχία S λέγεται ουσιώδης αν $\forall S_1, \dots, S_m$ διαμέριση [$S_i \cap S_j = \emptyset \ \forall i \neq j \ S_1 \cup \dots \cup S_m = S$] $v(S) > v(S_1) + v(S_2) + \dots + v(S_m)$

$v''(AB) > v''(A) + v''(B)$ $\quad v''(A\Gamma) = v''(A) + v''(\Gamma)$ $\quad v''(AB\Gamma) = v''(AB) + v''(\Gamma)$

συνολικά $v''(AB) = 1$ ουσιώδης, $v''(A\Gamma) = 0$ επουσιώδης,

$v''(B\Gamma) = 1/2$ ουσιώδης, $v''(AB\Gamma) = 1$ επουσιώδης στο π.χ. πίσω

Ορισμός

Ένας παίκτης είναι άχρηστος $\Leftrightarrow \forall S : i \notin S \Rightarrow v(S \cup \{i\}) = v(S) + v(\{i\}) \xRightarrow{\text{κανονικοποίηση}} v'(S \cup \{i\}) = v'(S)$

Ειδικές κατηγορίες

(I) Παιχνίδια σταθερού αθροίσματος σε συμμαχική μορφή.

$v(S) + v(N \setminus S) = v(N) \ \forall S \subseteq N$

Τότε η χαρακτηριστική συνάρτηση v που προκύπτει από τα επίπεδα ασφαλείας των συμμαχιών είναι σταθερού αθροίσματος σε συμμαχική μορφή $\Rightarrow v(S) + v(N \setminus S) = v(N) \ \forall S \subseteq N$

Θεώρημα (1)

Έστω παιχνίδι σταθερού αθροίσματος σε κανονική μορφή $\sum_{i=1}^{N} h^i(s) = c \ \forall s$ στρατηγική κατάσταση.

Πρόταση (2)

Κάθε παιχνίδι δύο παικτών σταθερού αθροίσματος σε συμμαχική μορφή είναι επουσιώδες

Έστω ότι είναι ουσιώδες.

$v'(N) > 0 \Rightarrow v''(N) = 1$

$v''(1,2) = 1 \quad v''(1) = 0 \quad v''(2) = 0$

$\left.\begin{array}{l} v''(1) + v''(N \setminus \{1\}) = 0 \\ v''(N) = 1 \end{array}\right\} \neq$

(1) + (2) $\xrightarrow{\text{πόρισμα}}$ Έστω πιναμοπαιχνίδι (2 παικτών - 0 αθροίσματος σε συμμαχική μορφή) είναι επουσιώδες.

Scanned with CamScanner

23/12/22

V Απλά παιχνίδια

Απλό παιχνίδι σε συμμαχική μορφή $\langle N, v \rangle \Leftrightarrow v(S) \in \{0,1\}$

S κερδίζει $v(S)=1$
S χάνει $v(S)=0$ } $\Rightarrow$ σε 0-1 κανονική μορφή.

① Κληρονομεί την μονοτονία: $\begin{cases} \text{a. } S \text{ κερδίζει} \Rightarrow \forall T \supset S \ T \text{ κερδίζει} \\ \text{β. } S \text{ χάνει} \Rightarrow \forall R \subset S \ R \text{ χάνει.} \end{cases}$

② Αν μια συμμαχία κερδίσει $\Rightarrow$ προφανώς οι υπόλοιπες χάνουν $\Rightarrow$ $[v(S)=1 \Rightarrow v(N \setminus S)=0]$ (απόδειξη: έστω $v(S)=v(N\setminus S)=1 \Rightarrow$ $v(N) \geq v(S)+v(N\setminus S)=2$ άτοπο).

Υπεροψιώδη απλά παιχνίδια;

Δικτάτορες: Έστω $i \in N$ (δικτάτορας), $\boxed{v(S)=\begin{cases}1 & \text{αν } i \in S \\ 0 & \text{αν } i \notin S\end{cases}}$

(Ο παίκτης i είναι δικτάτορας - κάνει ό,τι θέλει $\Rightarrow$ ό,τι συμμαχία του έχει κερδίζει). Έτσι:

- $v(i)=1$ • $v'(i)=0$ (0-κανονικοποίηση)
- $v(j)=0 \ \forall j \neq i$ • $v'(j)=0 \ \forall j \neq i$

Αν $i \notin S$: $v'(S)=v(S)-\sum_{i \in S} v(i)=0$

Αν $i \in S$: $v(S)=1$ αλλά $v'(S)=v(S)-v(i)=1-1=0$ (οι υπόλοιποι της συμμαχίας: μόνοι τους 0)

$\Rightarrow$ Είναι το μοναδικό ΜΗ ΜΗΔΕΝΙΚΟ ΕΠΟΥΣΙΩΔΕΣ παίγνιο

Έστω $v(S)=1$, S ουσιώδες $\Rightarrow \forall T \subset S \ v(T)=0$.
(αφού αν $T \subset S$ και $v(T)=1$ $v(S)=\underbrace{v(T)}_{1}+\underbrace{v(S\setminus T)}_{\neq 0}=1$ άτοπο).

Scanned with CamScanner

Ένα απλό παιχνίδι προσδιορίζεται μονοσήμαντα από τις ελάχιστες συμμαχίες που μερδίζουν.

Ειδική Υποκατηγορία των απλών

$[Q; \underbrace{w_1, w_2, \dots, w_n}]$ $\quad v(S) = \begin{cases} 1, & \sum_{i \in S} w_i \geq Q \\ 0, & \sum_{i \in S} w_i < Q \end{cases}$ $\quad$ { ΠΟΣΟΣΤΙΑΙΑ ΠΑΙΧΝΙΔΙΑ

Q: ελάχιστος #ψήφων για να ληφθεί η απόφαση

w_i: # ψήφων του παίκτη i («βάρη»)

Παράδειγμα

Κανόνας Πλειοψηφίας

$\left[\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1; 1, 1, 1, \dots, 1\right]$

$\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1$: για να παρθεί η απόφαση: «οι μισοί» +1 ↳ ακέραιο μέρος

$1, 1, 1, \dots, 1$: ο καθένας προσθέτει 1 ψήφο

$[2; 1, 1, 1]$
$[8; 3, 5, 6]$
$[51; 2, 49, 49]$
} ισοδύναμα με πλειοψηφία

↓

κανείς δεν μπορεί να κερδίσει μόνος του

π.χ. στο 2ο: Χρειάζονται 8 ψήφοι για να παρθεί η απόφαση. Ο 1ος έχει 3, ο 2ος 5, ο 3ος 6. Πρέπει 2 τουλάχιστον να συμφωνήσουν για να υπάρξει πλειοψηφία.

$[2; 2, 2, 1]$
$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$
$1 \quad 2 \quad 3$

$v(1) = 1 \quad v(2) = 1$

$v(12) = 1$

Εδώ δεν ισχύει $v(12) \geq v(1) + v(2)$!

→ όχι ισοδύναμο με πλειοψηφία

Scanned with CamScanner

Πυρήνας

Παράδειγμα

Απλής αγοράς

A → αγρότης
B → βιομήχανος
E → μεσίτης
$v(A)=100$
$v(B)=v(E)=0$
$v(AB)=200$
$v(AE)=300$
$v(ABE)=300$

x_1: μερίδιο A
x_2: μερίδιο B
x_3: μερίδιο E
$x_1+x_2+x_3=300$
(συνολικός ορθολογισμός)

$x_1=0$; ΟΧΙ
$x_1=99,99$; ΟΧΙ
$x_1=101$; ΝΑΙ!!
$x_3=0$???

→ **ΟΡΘΟΛΟΓΙΣΜΟΣ**

1. Συλλογικός
$x_1+x_2+\dots+x_n=v(N)$

$\langle N,v\rangle$, $x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$
διάνυσμα αποδόσεων
(όταν όλοι συνεργάζονται)

2. Ατομικός
$x_j\geq v(j)\ \forall j\in N$

$\mathcal{A}$ = σύνολο αποδόσεων
$=\{x\in\mathbb{R}^n : \sum_{j\in N} x_j=v(N), x_j\geq v(j)\}$

Παρατηρήσεις

1. Αν $\langle N,v\rangle$ σε 0-1 κανονική μορφή, τότε $\mathcal{A}$ = simplex = $\mathbb{P}^n=\{x\in\mathbb{R}^n : x_j\geq 0, j\in N\ \sum_{j=1}^{n} x_j=1\}$

2. Αν $\langle N,v\rangle$ επουσιώδες $\Rightarrow v(N)=\sum_{j\in N} v(j)=\sum_{j\in N} x_j \overset{x_j\geq v(j)}{\underset{\text{(ατομικός)}}{\Longrightarrow}} x_j=v(j)\ \forall j\in N$
$\Rightarrow \mathcal{A}=\{(v(1),v(2),\dots,v(n))\}$.

3. Συμμαχικός
$\forall S\subset N\ \sum_{j\in S} x_j\geq v(S)$

G: πυρήνας (core) του παιχνιδιού
$=\{x\in\mathbb{R}^n :$
- $x_j\geq v(j)\ \forall j$
- $\sum_{j\in N} x_j=v(N)$
- $\sum_{j\in N} x_j\geq v(S)\ \forall S\subset N$ $\}$

$G\subseteq\mathcal{A}$

Scanned with CamScanner

1. Επουσιώδεις Παιχνίδι

$v(S) = \sum_{j \in S} v(j) \quad S \subseteq N$

$\Downarrow$

$C = \mathcal{A} = \{(v(1), \dots, v(n))\}$

2. Κανόνας Πλειοψηφίας $(n \geq 3)$

$\forall j \; v(j) = 0, \; v(N \setminus \{j\}) = 1 \Rightarrow$

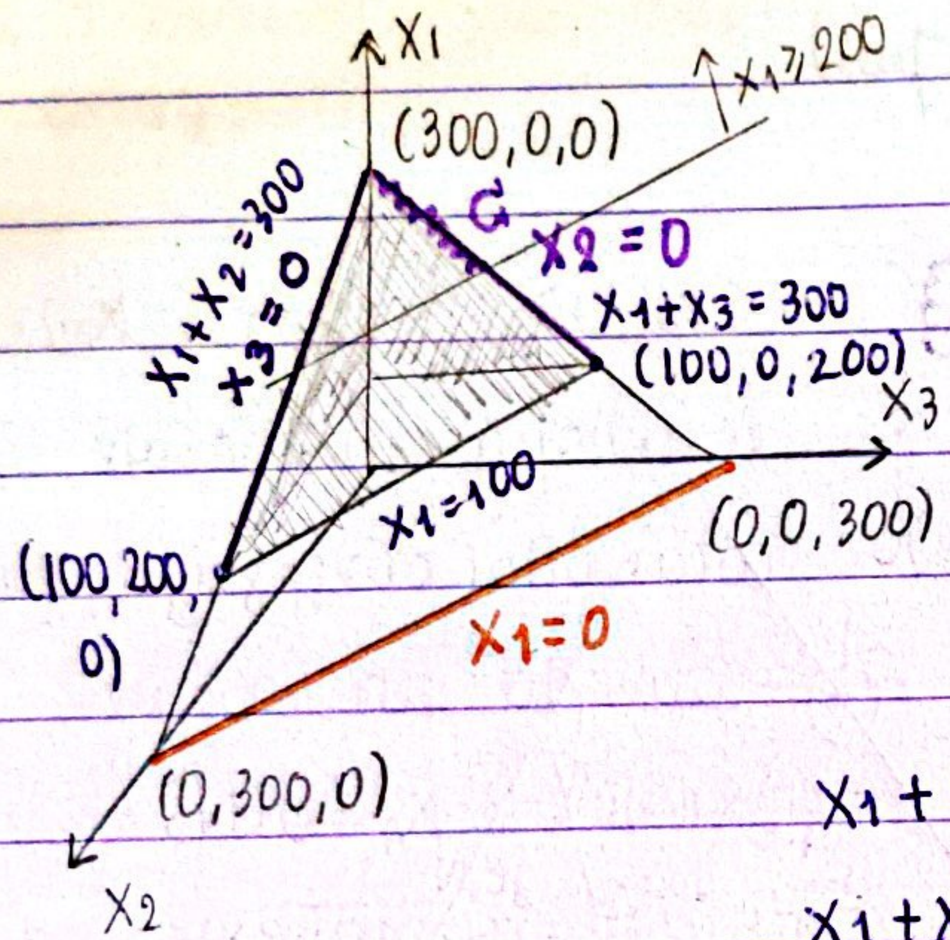
$\sum_{j \neq i} x_i = 1 \Rightarrow x_j = 0 \; \forall j$ άτοπο

$\Rightarrow C = \emptyset.$

3. $v(A) = 100 \quad v(B) = v(E) = 0 \quad v(AB) = 200 \quad v(AE) = 300 \quad v(BE) = 0$

$v(ABE) = 300.$

$\mathcal{A} = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 \geq 100, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_1 + x_2 + x_3 = 300\}$



$C = \left\{ x : \begin{array}{l} \circ \; x_1 \geq 100, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \\ \circ \; x_1 + x_2 + x_3 = 300 \\ \circ \; x_1 + x_2 \geq 200 \; (AB) \\ \circ \; x_1 + x_3 \geq 300 \; (AE) \\ \circ \; x_2 + x_3 \geq 0 \; (BE) \end{array} \right\}$

$\left.\begin{array}{l} x_1 + x_3 \geq 300 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 300 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1 + x_3 = 300 \\ x_2 = 0 \end{array}\right\} (BE)$

$(AB) \Rightarrow x_1 + x_2 \geq 200 \Rightarrow x_1 \geq 200 \Rightarrow$ πυρήνας: $x_1 \geq 200, x_2 = 0,$

$x_1 + x_3 = 300, x_3 \geq 0.$

Scanned with CamScanner

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ

11/01/23

2.4

Δύο πίνακες: $\Gamma_1 = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} \delta & \alpha \end{array} \\ \begin{array}{c} \pi \\ \kappa \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$ $\Gamma_2 = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} \delta & \alpha \end{array} \\ \begin{array}{c} \pi \\ \kappa \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$

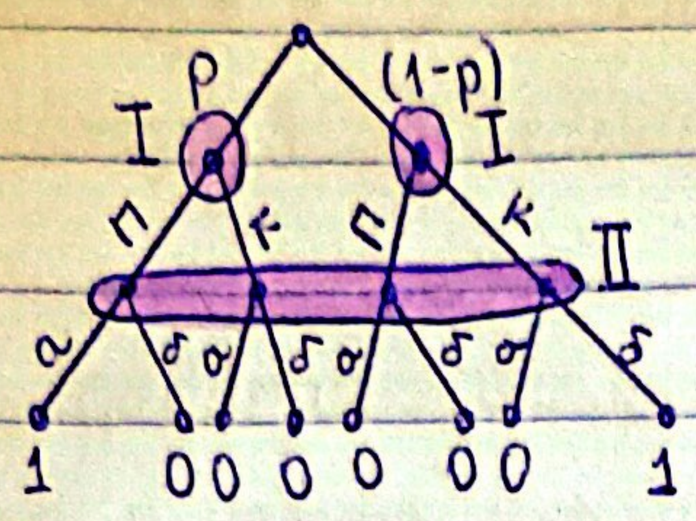
Η φύση επιλέγει $\Gamma_1(p)$ ή $\Gamma_2(1-p)$ πιθανότητες επιλογής

Ο Ι γνωρίζει ποιο επιλέχθηκε, ο ΙΙ όχι, και επιλέγουν κίνηση

Ν.Β. η εκτεταμένη μορφή, τα σύνολα στρατηγικών και οι πίνακες πληρωμών.

Scanned with CamScanner

α) Συστεταμένη Μορφή



β) Σύνολα Στρατηγικών

$S^I = \{(\pi,\pi),(\pi,\kappa),(\kappa,\pi),(\kappa,\kappa)\} = \{\pi,\kappa\}^2$

μήκος 2 (2 σύνολα πληροφόρησης)

$S^{II} = \{(\alpha),(\delta)\}$

μήκος 1 (1 σύνολο πληροφόρησης).

γ) Πίνακας Πληρωμών

$h^i(s) = h^i(s^1, s^2) = E$[ωφέλεια παίκτη i κάτω από προφίλ στρατηγικών (s^1, s^2)], $0 < p < 1$

A=

$s^1 \backslash s^2$	(α)	(δ)	
(π,π)	$p(=p\cdot 1+(1-p)\cdot 0)$	0	$u=\min(p,1-p)$ ⇑ 0
(π,κ)	p	1-p	$\min(p,1-p)$
(κ,π)	0	0	0
(κ,κ)	0	1-p	0
	$\bar{u}=\min(p,1-p)$ ⇐ p	1-p	

Extra Ερώτημα: ΣΣΙ;

Επίπεδο ασφαλείας παίκτη Ι σε καθαρές στρατηγικές: $\underline{u} = \max_{s^1\in S^I}[\min_{s^2\in S^{II}} h(s_1,s_2)]$, επίπεδο ασφαλείας παίκτη ΙΙ σε καθαρές στρατηγικές $\bar{u} = \min_{s^2\in S^{II}}[\max_{s^1\in S^I} h(s_1,s_2)]$

$\bar{u} = \underline{u}$ άρα $\exists$ ΣΣΙ : αν $p<1-p$, ΣΣΙ=((π,κ),(α))

αν $p>1-p$, ΣΣΙ=((π,κ),(δ)).

2.14

Ο παίκτης Ι έχει στα χέρια του 3 χαρτιά: 1 άσσος (A), 2 ρηγάδες (K)

Ρίχνει ένα και ανακοινώνει ότι "έχει" AK ή KK.

Ο παίκτης ΙΙ → πάσο (π) / → τα βλέπει (β)

① Ι αλήθεια, ΙΙ πάσο ⇒ ο Ι παίρνει +1 από τον ΙΙ

② Ι ψέμα για καλύτερο χαρτί, ΙΙ πάσο ⇒ ο Ι παίρνει +2 από τον ΙΙ

③ Ι ψέμα για χειρότερο χαρτί, ΙΙ πάσο ⇒ ο ΙΙ παίρνει +2 από τον Ι

④ Αν ο ΙΙ βλέπει οι ①②③ πολλαπλασιάζονται και αντιστρέφονται: π.χ. Ι αλήθεια, ΙΙ(β) ⇒ ο Ι -2

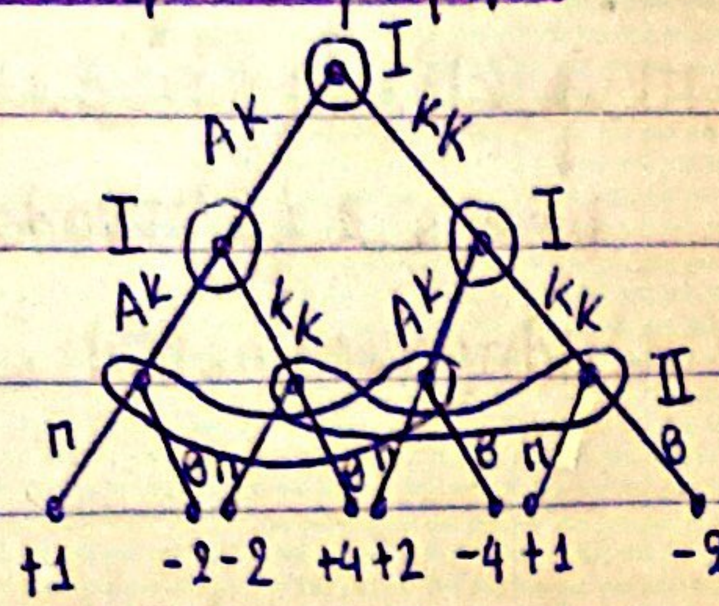
Ι ψέμα για καλύτερο, ΙΙ(β) ⇒ ο Ι -4

Ι ψέμα για χειρότερο, ΙΙ(β) ⇒ ο Ι +4

Πληρωμές ①②③④

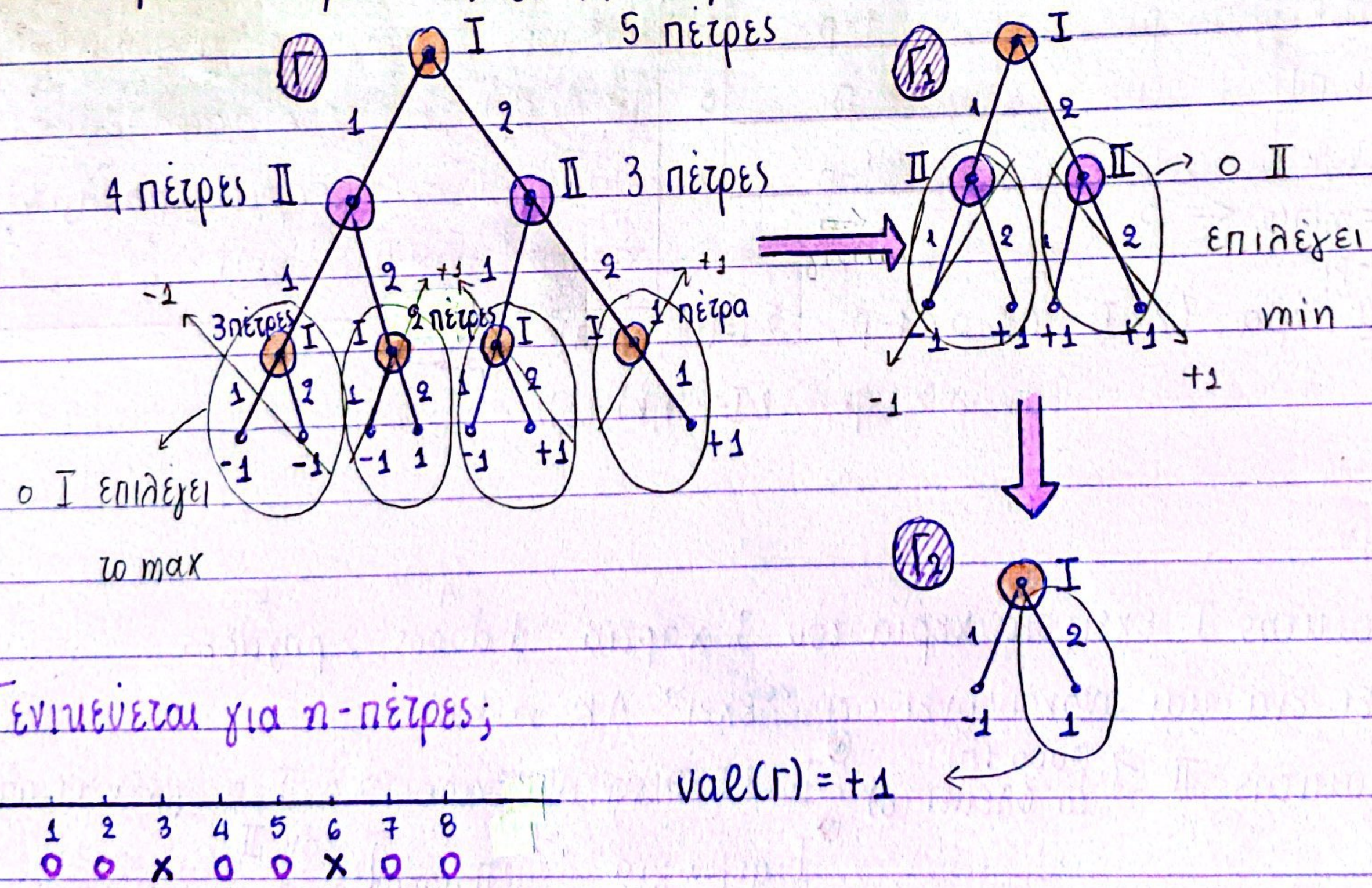
Scanned with CamScanner

Ενιαία μορφή



3.4 (διαβασε 3.3!!)

2 παίκτες παίρνουν εναλλάξ 1 ή 2 πέτρες από ένα σάκο που περιέχει 5. Όποιος πάρει τελευταίος κερδίζει 1 από τον άλλο. Να λυθεί με δυναμικό προγραμματισμό.



Γενικεύεται για n-πέτρες;

1	2	3	4	5	6	7	8
o	o	x	o	o	x	o	o

O o αυτός που κερδίζει όταν παίζει με τόσες πέτρες

O x αυτός που χάνει όταν παίζει με τόσες πέτρες

O πρώτος κερδίζει όταν το σακί ΔΕΝ έχει πολλαπλάσιο του 3

Scanned with CamScanner

Παραλλαγή 1: Ο τελευταίος χάνει
Παραλλαγή 2: Ο τελευταίος κερδίζει, αλλά μπορούν να επιλέξουν 1,2,3
Παραλλαγή 3: Ο τελευταίος κερδίζει, αλλά μπορούν να επιλέξουν 1,2,4

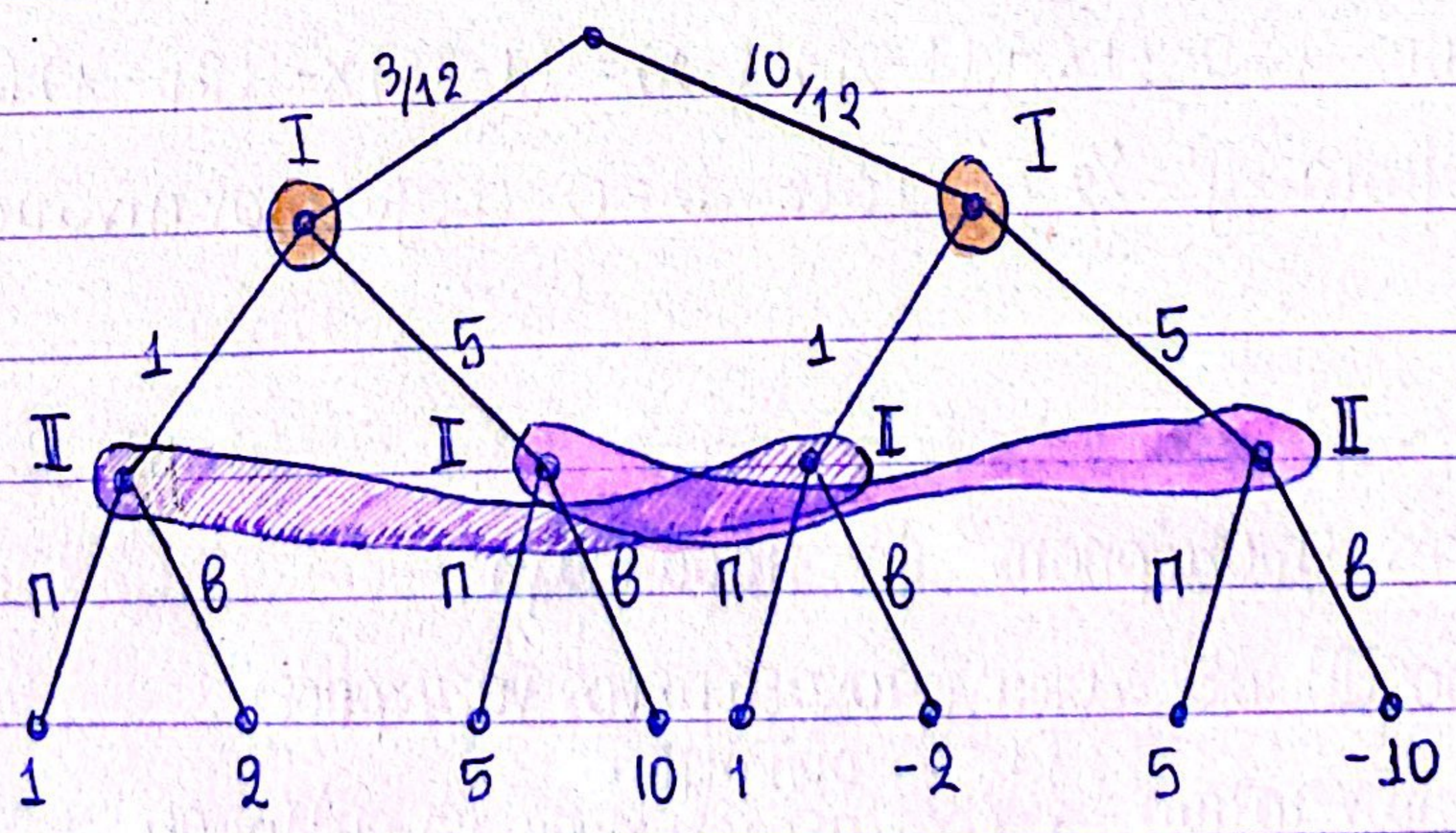
Στο πρόβλημα που λύσαμε, έστω $v(i,n)$ = πληρωμή παίκτη 1 όταν μένουν n πέτρες και παίζει, $i=1,2$. Για $n \geq 2$:

$$\left.\begin{aligned} v(1,n) &= \max\{v(2,n-1), v(2,n-2)\} \\ v(2,n) &= \min\{v(1,n-1), v(1,n-2)\} \end{aligned}\right\} \text{αναδρομή!!}$$

2.6 σε συνδυασμό με 4.8.

Ι χαρτί από τράπουλα → φιγούρα Φ : $12/52 = 3/13$
→ όχι Φ : $10/13$

Ι λέει ότι "έχει" Φ → βάζει στο τραπέζι 1 ή 5€.
ΙΙ πάσο ⇒ ο Ι + ποσό που έβαλε από τον ΙΙ
ΙΙ βλέπει ⇒ → ο Ι έχει Φ κερδίζει το διπλάσιο από όσα έβαλε
→ ο Ι δεν έχει Φ χάνει το διπλάσιο από όσα έβαλε.



A =

S^I \ S^{II}	(Π,Π)	(Π,Β)	(Β,Π)	(Β,Β)
11	$13/13$	$13/13$	$-14/13$	$-14/13$
15	$53/13$	$-97/13$	$56/13$	$-94/13$
51	$25/13$	$40/13$	$-5/13$	$10/13$
55	$5/13$	$-70/13$	$5/13$	$-70/13$

απλοποίηση σε 2×2 παιγνιο με ιεραρχία γραμμών-στηλών & εξισώσεις στρατηγικές

Scanned with CamScanner

4.10 12/01/23

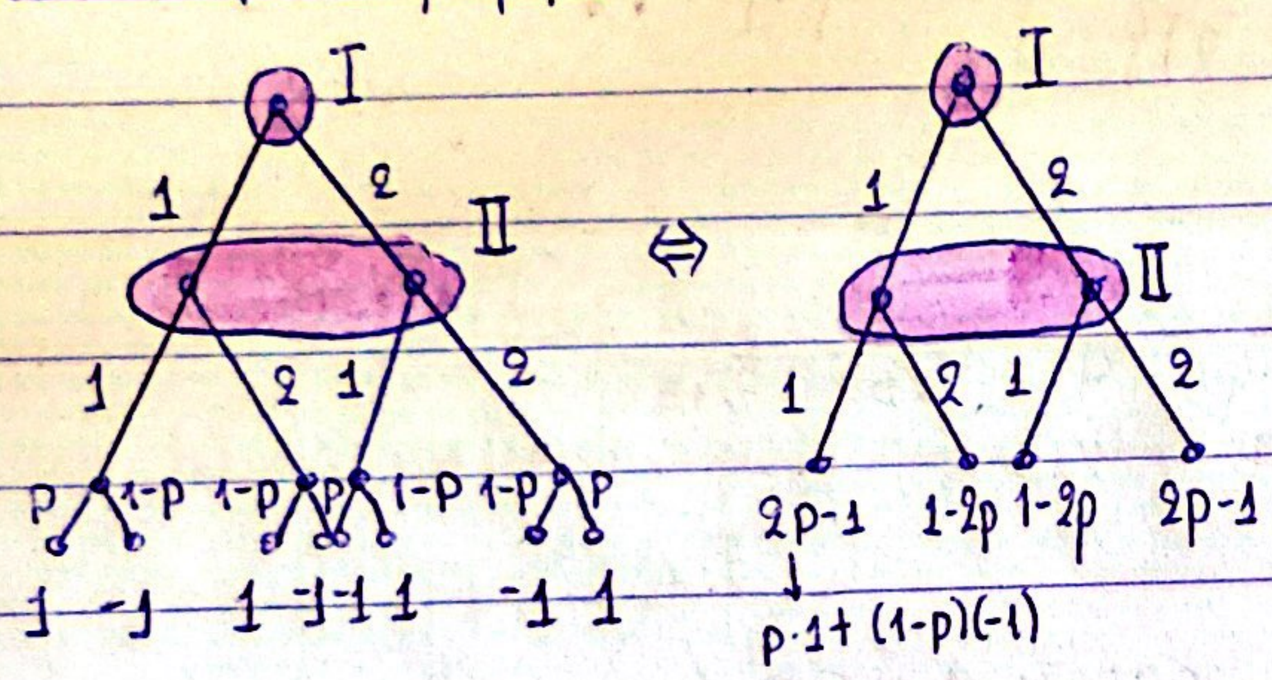
Δύο παίκτες δείχνουν 1 ή 2 δάκτυλα ταυτόχρονα.

Μετά η φύση επιλέγει ποιος κερδίζει:

$p \rightarrow$ αν άθροισμα άρτιο I κερδίζει, περιττό II κερδίζει.

$1-p \rightarrow$ αν άθροισμα περιττό I, άρτιο II.

α) Συνεταμένη μορφή



β) Για τα διάφορα p:

- $p = 1/2 \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

  (x, y) ΣΣΙ $\forall x, y$

- $p \neq 1/2 \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 2p-1 & 1-2p \\ 1-2p & 2p-1 \end{bmatrix}$

  Εδώ $\underline{u} < 0$ αφού $2p-1<0$ ή $1-2p<0$. Ομοια $\bar{u} > 0 \Rightarrow$ $\nexists$ ΣΣΙ.

Στην περίπτωση που $\nexists$ ΣΣΙ δουλεύουμε με εξισώσεις στρατηγικές.

Συμπληρώνουμε τον A:

$$\begin{array}{c|cc} & y & 1-y \\ \hline x & 2p-1 & 1-2p \\ 1-x & 1-2p & 2p-1 \end{array}$$

Προκύπτουν οι: $(2p-1)x + (1-2p)(1-x) = (1-2p)x + (2p-1)(1-x)$

$\Rightarrow x^\circ = 1/2$. Ομοια $y^\circ = 1/2$. Τότε $v = 0$ (βάζω στον πίνακα τα x°, y°).

5.5

"Το παιχνίδι της επιθεώρησης" με παραλλαγή:

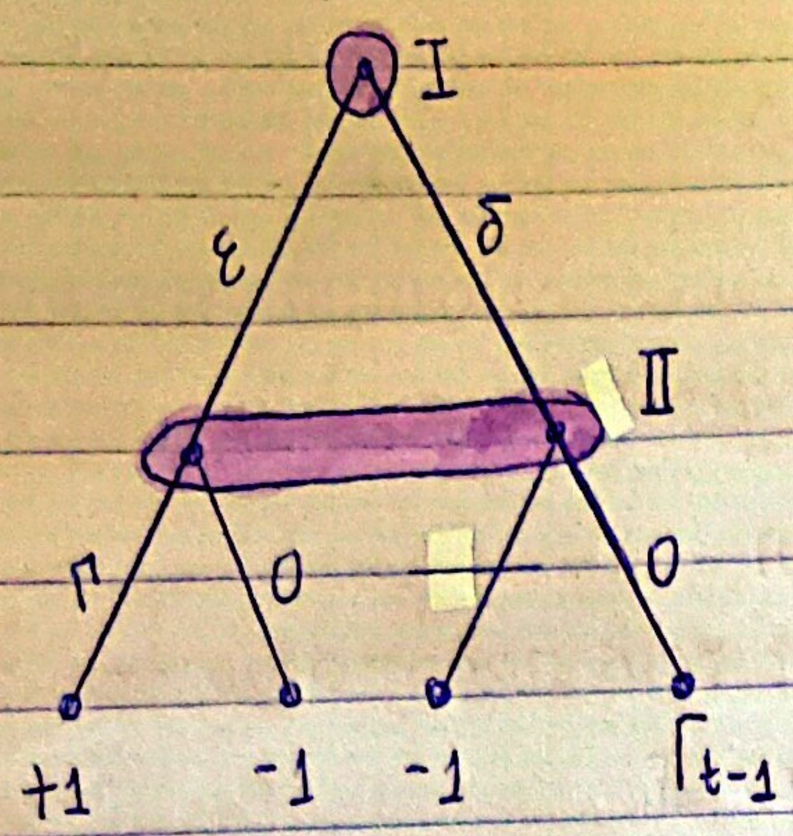
① Ο λαθρέμπορος (II) δεν είναι υποχρεωμένος να περάσει

② Πληρωμή τελωνειακών $= \begin{cases} 1, & \text{αν συλληφθεί} \\ -1, & \text{αν περάσει χωρίς να συλληφθεί} \\ 0, & \text{αν δεν περάσει.} \end{cases}$

Έστω t = μέρες που μένουν.

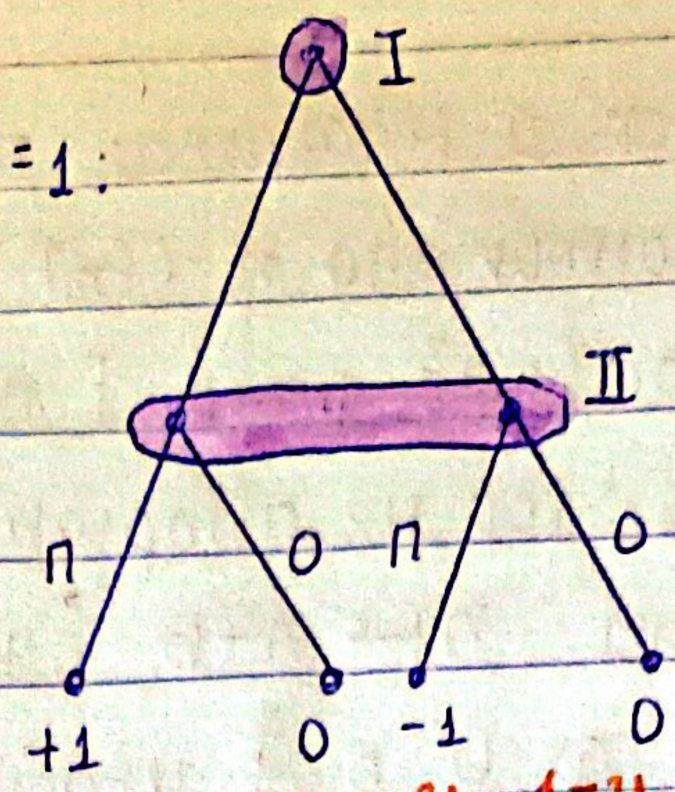
ε: ενέδρα, δ: όχι ενέδρα, π: προσπαθεί να περάσει, ο: δεν προσπαθεί

Scanned with CamScanner



$$A_t = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & v_{t-1} \end{bmatrix}$$

Αν $t=1$:



$$A_1 = \begin{array}{c|cc} & y_1 & 1-y_1 \\ \hline x_1 & \varepsilon\ 1 & 0 \\ 1-x_1 & \delta\ -1 & 0 \end{array} \begin{matrix} 0 \\ -1 \end{matrix} \Big\} \underline{u}=0$$

$$\underbrace{1 \quad 0}_{\bar{u}=0}$$

$$t=2 \Rightarrow A_2 = \begin{array}{c|cc} & y_2 & 1-y_2 \\ \hline x_2 & 1 & -1 \\ 1-x_2 & -1 & 0 \end{array} \Big\} \underline{u}=-1$$

$$\underbrace{\quad}_{\bar{u}=0}$$

$\Rightarrow u=\bar{u}=\underline{u}=0$

$v_1=0,\ x_1=1\ \ y_1=0$ } στη θέση $(\varepsilon, 0)$

$\nexists$ ΣΣΙ $\Rightarrow$ εξισωτικές στρατηγικές

$x_2 + (1-x_2)(-1) = -x_2 + 0 \overset{\cdots}{\Rightarrow} x_2 = 1/3$

Όμοια $y_2 = 1/3$

$$t=3 \Rightarrow A_3 = \begin{array}{c|cc} & y_3 & 1-y_3 \\ \hline x_3 & 1 & -1 \\ 1-x_3 & -1 & -1/3 \end{array}$$ Ξανά θα χρειαστούν εξισωτικές στρατηγικές

και προκύπτουν $x_3 = y_3 = 1/4$, $v_3 = -1/2$ $(= -2/4)$ → το ένα για την επαγωγή μετά

Όμοια για $t=4$ προκύπτουν $x_4 = y_4 = 1/5$, $v_4 = -3/5$ (με $A_4 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1/2 \end{bmatrix}$)

Επαγωγική Υπόθεση } $x_t = y_t = \dfrac{1}{t+1}$, $v_t = \dfrac{t-1}{t+1}$ } άσκηση η απόδειξη

πιο περίπλοκο: Ν δο Ρ(επιθεώρηση την τελευταία μέρα) $= 2/n+1$ ενώ τις άλλες $= \frac{1}{n+1}$

Όταν $t=n$ (αρχή) (n = μέρες που μένουν ⇒ είμαστε στην 1η μέρα)

Ρ(προσπαθεί 1η μέρα) $= \dfrac{1}{n+1}$, Ρ(προσπαθεί 2η μέρα) $= \underbrace{(1 - 1/n+1)}_{\text{δεν προσπαθεί την 1η}} \underbrace{1/n}_{\text{από τη 2η μέρα και μετά}} = 1/n+1$

σήμερα + μέρες που μένουν

όσο δεν γίνεται επιθεώρηση

$n/n+1$ $\quad$ $n-1/n$ $\quad$ $2/3$

Ρ(προσπαθεί τελευταία μέρα) $= \underbrace{(1 - 1/n+1)}_{1\text{η μέρα}} \underbrace{(1 - 1/n)}_{2\text{η μέρα}} \cdots \underbrace{(1 - 1/3)}_{(n-2)\text{ μέρα}} \cdot 0$ → τελευταία μέρα (θα τον πιάσει)

Scanned with CamScanner

5.8. (Εκδοση κ. Μπουρνέτα - παλιό βιβλίο).

2 παίκτες ξεκινούν από n (Γ_n)

II επιλέγει $b \in \{1,2\}$ και ο I προσπαθεί να μαντέψει το b.

Αν το βρει, stop με πληρωμές 0. $\rightarrow (\Gamma_{n-b})$

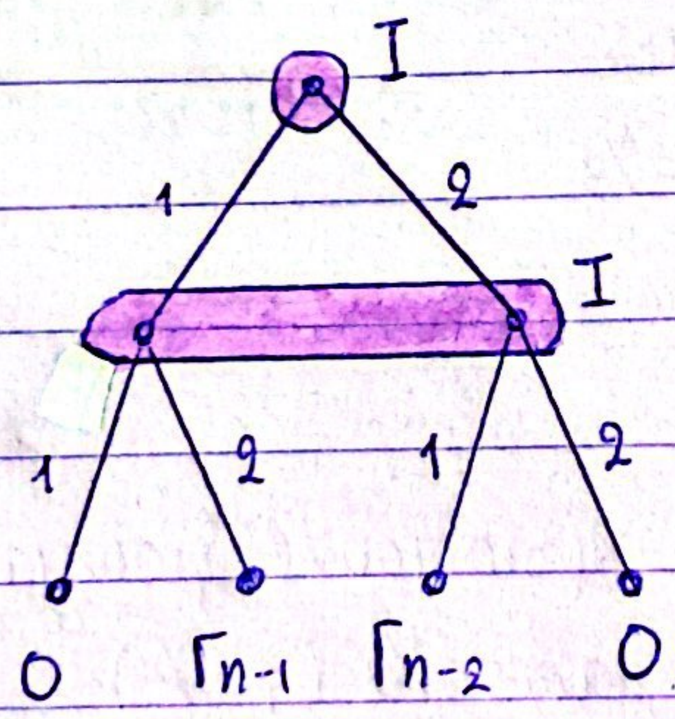
Αν δεν το βρει, $n \mapsto n-b$. Επανάληψη με τους παραπάνω όρους.

Οταν φτάσει το 0 ο I κερδίζει 1 από τον II

Έστω $v_n = \text{val}\,\Gamma_n$, (x_n, y_n) ΣΣΙ. Να εκφραστούν τα v_n, x_n, y_n συναρτήσει της ακολουθίας Fibonacci, $\{F_n, n=0,1,\dots\}$, $F_0 = F_1 = 1$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$.

n	0	1	2	3	4	5	...
F_n	1	1	2	3	5	8	

Για $n \geq 2$:



$$A = \begin{array}{c|cc} & 1 & 2 \\ \hline 1 & 0 & v_{n-2} \\ 2 & v_{n-1} & 0 \end{array} \Big\} \; \underline{u} = 0$$

$\bar{u} > 0$

$\Rightarrow \nexists$ ΣΣΙ $\Rightarrow$ εξισωτικές στρατηγικές

$$\Rightarrow A = \begin{array}{c|cc} & y & 1-y \\ \hline x & 0 & v_{n-2} \\ 1-x & v_{n-1} & 0 \end{array}$$

Για τα x: $x_n \cdot 0 + (1-x_n) v_{n-1} = x v_{n-2} + (1-x) \cdot 0$

$\Rightarrow \boxed{x_n = \dfrac{v_{n-1}}{v_{n-1} + v_{n-2}}}$ Ομοια για y (άσκηση)

$$\boxed{v_n = x_n v_{n-2} = \frac{v_{n-1} v_{n-2}}{v_{n-1} + v_{n-2}} \text{ για } n \geq 2, \quad v_0 = v_1 = 1}$$

Για $n=2$, $x_2 = v_1 / v_0 - v_1 = 1/1+1 = 1/2$, $v_2 = v_0 v_1 / v_0 + v_1 = 1/2$

Για $n=3$, $x_3 =$ άσκηση, $v_3 = v_1 v_2 / v_1 + v_2 = 1/3$ $\left(= \frac{1 \cdot 1/2}{1 + 1/2}\right)$

Για $n=4$, $x_4 =$, $v_4 = v_2 v_3 / v_2 + v_3 = 1/5$ Fibonacci !!

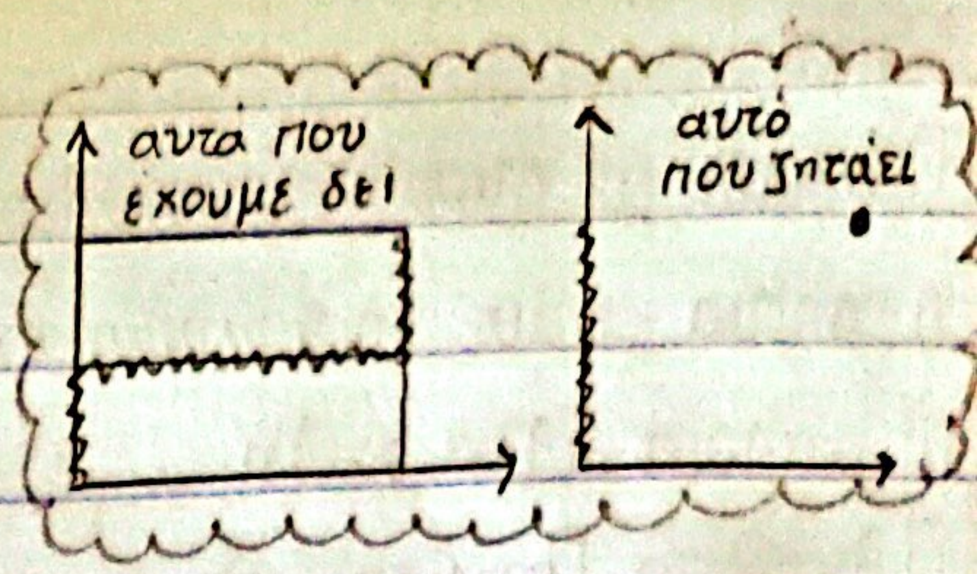
Επαγωγική Υπόθεση $\Big\}$ $v_n = 1/F_n$, $x_n = \dfrac{\frac{1}{F_{n-1}}}{\frac{1}{F_{n-1}} + \frac{1}{F_{n-2}}} = \dfrac{F_{n-2}}{F_n}$ ...

Scanned with CamScanner

6.3

Έστω ένα διπλανομοπαιχνίδι, $A, B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ ω

α) Είναι δυνατόν $BR^I(y) = \begin{cases} \{0\}, & 0 \le y < 1 \\ \{1\}, & y = 1 \end{cases}$ ω



Έστω $A = \begin{array}{cc} y & 1-y \\ \end{array}$
$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{array}{l} x \\ 1-x \end{array}$$

$$h^I(x,y) = a_{11}xy - a_{12}x(1-y) + a_{21}(1-x)y + a_{22}(1-x)(1-y)$$
$$= [(a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22})y + (a_{12} - a_{22})]x + \delta(y)$$
$$= c_1(y)x + \delta(y) \quad \text{με } c_1(y) = \theta_1 y + \theta_2 \text{ (α' βαθμού γραμμική)}$$

$$BR^I(y) = \begin{cases} \{1\}, & c_1(y) > 0 \\ [0,1], & c_1(y) = 0 \\ \{0\}, & c_1(y) < 0 \end{cases}$$

υποθέση $\begin{cases} BR^I(1) = \{1\} \Rightarrow c_1(1) > 0 \\ BR^I(y) = \{0\} \ \forall\, 0 \le y \le 1 \Rightarrow c_1(y) < 0 \ \forall y \in [0,1) \end{cases}$

άτοπο για μια γραμμική συνεχή.

6.6

$S^I = \{\underset{\text{πρωί}}{\text{π}}, \underset{\text{βράδυ}}{\text{β}}\}$
$S^{II} = \{\text{π}, \text{β}\}$
διαφημίσεις, απήχηση $\begin{cases} 0 & \text{αν συμπέσουν} \\ \text{π} & \text{δεν συμπέσουν για την πρωινή} \\ \text{β} & \text{δεν συμπέσουν για την βραδυνή} \end{cases}$

$0 < \text{π} < \text{β}$

ΣΣΙ;

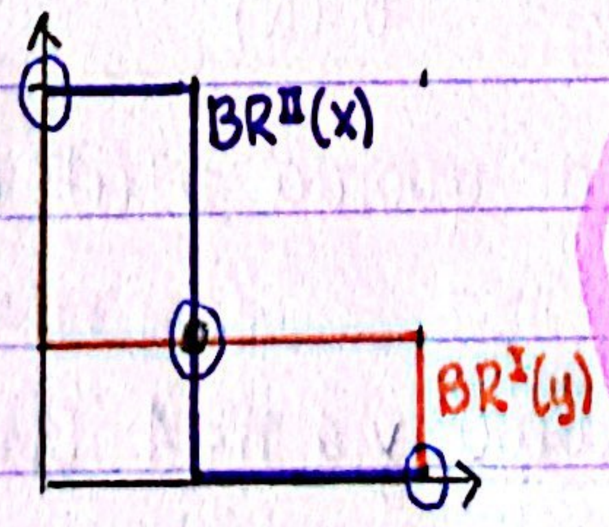
$$A = \begin{array}{c|cc} & \text{π} & \text{β} \\ \hline \text{π} & 0 & \text{π} \\ \text{β} & \text{β} & 0 \end{array} \qquad B = \begin{array}{c|cc} & \text{π} & \text{β} \\ \hline \text{π} & 0 & \text{β} \\ \text{β} & \text{π} & 0 \end{array}$$

$h^I(x,y) = \text{π}x(1-y) + \text{β}(1-x)y = (\text{π} - (\text{β}+\text{π})y)x + \text{β}y$

$$\Rightarrow BR^I(y) = \begin{cases} \{1\}, & y < \text{π}/\text{π}+\text{β} \\ [0,1], & y = \text{π}/\text{π}+\text{β} \\ \{0\}, & y > \text{π}/\text{π}+\text{β} \end{cases}$$

$h^{II}(x,y) = \text{β}x(1-y) + \text{π}(1-x)y = (\text{π} - (\text{π}+\text{β})x)y + \text{β}x$

$$\Rightarrow BR^{II}(x) = \begin{cases} \{1\}, & x < \text{π}/\text{π}+\text{β} \\ [0,1], & x = \text{π}/\text{π}+\text{β} \\ \{0\}, & x > \text{π}/\text{π}+\text{β} \end{cases}$$



$$\Sigma\Sigma I = \begin{cases} (0,1) \to (\text{β}, \text{π}) \\ (\text{π}/\text{π}+\text{β}, \text{π}/\text{π}+\text{β}) \\ (1,0) \to (\text{π}, \text{β}) \end{cases}$$

Scanned with CamScanner

10.2. 13/01/23

Παιχνίδι με σκουπιδοσακούλες - NIMBY "not in my backyard"

n-σπίτια - κάθε νοικοκυριό έχει μια σκουπιδοσακούλα που την πετάει σε κάποια άλλη αυλή.

Πληρωμή Παίκτη = -k : k = # σκουπιδοσακούλων στην αυλή του

α) Χαρακτηριστική συνάρτηση

• Έστω $S \subsetneq N$ (γνήσιο): η συμμαχία θα ξεφορτωθεί όλες τις σακούλες της, αλλά θα πάρει όλες τις σακούλες των υπόλοιπων (στόχος των υπόλοιπων να καταστρέψουν τη συμμαχία). $\Rightarrow v(S) = |N \setminus S|$

• Έστω $S = N$: δεν έχουν να πετάξουν σακούλες αλλού $\Rightarrow v(N) = -|N| = -n$

β) 0-1 κανονική μορφή

Ο κανονικοποιημένος: $v'(S) = v(S) - \sum_{i \in S} v(i)$. Εδώ, $\forall i$ $v(i) = -(n-1)$ (κάθε παίκτη χωριστά)

Αν $S \subsetneq N$ $v'(S) = -(n-s) - \sum_{i \in S} (1-n) = s - n - s(1-n) = n(s-1)$

$|S| = s$. Αν $S = N$, $v'(N) = -n - n(1-n) = n^2 - 2n = n(n-2)$

$\phi \neq S \subsetneq N$ είδα ότι $v(S) = -|N \setminus S|$. Τότε $\phi \neq N \setminus S \subsetneq N$ με $v(N \setminus S) = -|S|$ $\Rightarrow v(S) + v(N \setminus S) = -n = v(N)$

Υπενθύμιση Σταθερού Αθροίσματος: $\langle N, v \rangle \Rightarrow v(S) + v(N \setminus S) = v(N)$ $\forall S$

Extra: $\langle N, v \rangle$ συμμετρικό αν $v(S) = f(|S|)$ $\forall S$.

1-κανονικοποίηση: $v''(S) = \frac{v'(S)}{v'(N)}$. Αν $S \subsetneq N$, $v''(S) = \frac{n(s-1)}{n(n-2)} = \frac{s-1}{n-2}$.
$(v'(N) \neq 0,\ n > 2)$

Αν $S = N$, $v''(N) = 1$ και φυσικά $v''(i) = 0$ για μεμονωμένους παίκτες i.

γ) Πυρήνας του παιχνιδιού για $n = 4$ (11.28)

$v(1) = v(2) = v(3) = v(4) = -3$ $\quad v(12) = v(13) = v(14) = \ldots = v(34) = -2$

$v(123) = v(124) = v(134) = v(234) = -1$ $\quad v(1234) = -4$

Scanned with CamScanner

Πυρήνας C

Έστω x_i = πληρωμή/απόδοση του παίκτη i, $i \in N$

Ατομικός Ορθολογισμός: $x_i \geq v(i)\ \forall i$

Συλλογικός Ορθολογισμός: $\sum_{i=1}^{n} x_i = v(N)$

Συμμαχικός Ορθολογισμός: $\sum_{i \in S} x_i \geq v(S)\ \forall S \subsetneq N$

{Υπενθύμιση}

$\mathcal{X}$ = σύνολο εφικτών αποδόσεων

C

Στην άσκηση:

$x_1 \geq -3$ $\quad x_1 + x_2 \geq -2$ $\quad \boxed{x_1 + x_2 + x_3 \geq -1}$ (2) $\quad \boxed{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq -4}$ (3)

$x_2 \geq -3$ $\quad x_1 + x_3 \geq -2$ $\quad x_2 + x_3 + x_4 \geq -1$

$x_3 \geq -3$ $\quad x_1 + x_4 \geq -2$ $\quad x_1 + x_3 + x_4 \geq -1$

$\boxed{x_4 \geq -3}$ (1) $\quad x_2 + x_3 \geq -2$ $\quad x_1 + x_2 + x_4 \geq -1$

$x_2 + x_4 \geq -2$

$x_3 + x_4 \geq -2$

(1), (2), (3) $\Rightarrow x_4 = -3$. Όμοια $x_1 = x_2 = x_3 = -3$

Όμως τότε $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -12 \leq -4$ άτοπο

$\Rightarrow C = \emptyset$.

11.2α.

Ταχυδρομείο, $n > 2$

(Επιστροφή στο π.χ. που ταχυδρομούσαν οι παίκτες 100€ σε γράμματα)

Είχαμε $v(i) = -100\ \forall i$ (μεμονωμένοι παίκτες), $v(N \setminus \{i\}) = 100$

και συνολικά $v(S) = \begin{cases} -100, & |S| = 1 \\ 0, & |S| \neq 1, n-1 \text{ (αλλιώς)} \\ +100, & |S| = n-1 \end{cases}$

Πυρήνας

$x_i \geq 100\ \forall i$ $\quad \sum_{j \neq i} x_j \geq 100\ \forall i$ $\quad \sum_{j \in S} x_j \geq 0$ $\quad \forall S : |S| \neq 1, n-1$

$\sum_{i=1}^{n} x_i = 0 = v(N)$

π.χ. για $i = n$

$x_n \geq -100$, $\sum_{j=1}^{n-1} x_j \geq 100$, $x_n + \sum_{j=1}^{n-1} x_j = \sum_{j=1}^{n} x_j = 0$

$C = \emptyset \Leftarrow x_n = 100,\ x_j = -100\ \forall j \Rightarrow \sum^{n} x_j = -100n < 0$ άτοπο

Scanned with CamScanner

10.3

Παιχνίδι 3 παικτών με 2 "πίνακες": «Τριπίνακοπαιχνίδι»

$$A=\begin{bmatrix}(1,0,1) & (1,2,0)\\ (2,1,0) & (0,0,0)\end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix}(0,1,0) & (2,1,0)\\ (1,2,0) & (0,0,0)\end{bmatrix}$$

Ο παίκτης III επιλέγει A ή B

Ο παίκτης I επιλέγει γραμμή 1 ή 2

Ο παίκτης II επιλέγει στήλη 1 ή 2.

π.χ. αν ο III επιλέξει A, ο I 2 και ο II 1 παίρνουμε (2,1,0) όπου $\pi^{I}=2$, $\pi^{II}=1$, $\pi^{III}=0$ πληρωμή

⇒ Χαρακτηριστική συνάρτηση

$\langle N, v\rangle$, $v=;$

$v(I)=;$ $T=\{I\}$, $N\setminus T=\{II, III\}$ → συμμαχούν εναντία I

⇒ Συμμαχικό παιχνίδι: I VS II&III - 0-αθροίσματος!

$S^{I}=\{1,2\}$ (γραμμές)

$S^{II,III}=\{(1,A),(1,B),(2,A),(2,B)\}$, 1,2 (στήλες).

Πινακοπαιχνίδι 2x4

$$H_I=\begin{array}{c} \\ 1\\ 2\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}1A & 1B & 2A & 2B\end{array}\\ \begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 2\\ 2 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix}\end{array}, \quad v(I)=val(H_I)$$

⇓ κυριαρχία στηλών

$$H_I=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

(η $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\leq\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$ → φεύγει,
η $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\leq\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}$ → φεύγει)

δουλεία ⇒ $v(I)=1/2$.

Όμοια, $v(II)=2/3$ με $H_{II}=\begin{array}{c} \\ 1\\ 2\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}1A & 1B & 2A & 2B\end{array}\\ \begin{bmatrix}0 & 1 & 1 & 2\\ 2 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix}\end{array}$

και $v(III)=0$ με

$$H_{III}=\begin{array}{c} \\ A\\ B\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}11 & 12 & 21 & 22\end{array}\\ \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\end{array}$$

Προσοχή: όχι $v(I,II)$ ⇒ $S^{I,II}=\{11,22,12,21\}$,

$S^{III}=\{A,B\}$, αλλάζει η "υλίση του πίνακά" →

$$H_{I,II}=\begin{array}{c}\begin{array}{cc}A & B\end{array}\\ \begin{bmatrix}1 & 1\\ 3 & 3\\ 3 & 3\\ 0 & 0\end{bmatrix}\end{array}\begin{array}{c}11\\12\\21\\22\end{array} \Rightarrow val=3 \neq 0 \; !$$

Scanned with CamScanner

Όμοια $H_{II,III} = \begin{array}{c|cc} & 1 & 2 \\ \hline 1A & 1 & 1 \\ 1B & 1 & 2 \\ 2A & 2 & 0 \\ 2B & 1 & 1 \end{array}$, $H_{I,III} = \begin{array}{c|cc} & 1 & 2 \\ \hline 1A & 2 & 1 \\ 1B & 0 & 2 \\ 2A & 2 & 0 \\ 2B & 1 & 1 \end{array}$

$v(II, III) = \frac{4}{3}$ $\qquad$ $v(I, III) = 1$

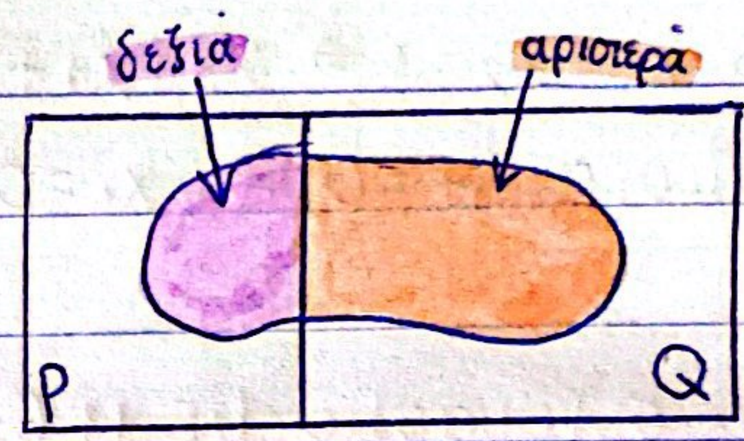
Τελευταία Περίπτωση: $v(N) = 3$.

10.8

Αγορά γαντιών

N παίκτες, $N = P \cup Q$, $P \cap Q = \emptyset$

δεξιά γάντια ↳ αριστερά γάντια



Αξία συμμαχίας S = #ζευγών που σχηματίζονται

$v(S) = \min(|S \cap P|, |S \cap Q|)$.

10.9

Κόμματα $\begin{cases} A & 40\% \\ B & 40\% \\ \Gamma & 20/3\% \\ \Delta & 20/3\% \\ E & 20/3\% \end{cases}$ $\qquad S = \begin{cases} \text{κερδίζει} = \text{κυβέρνηση} \\ \text{χάνει αλλιώς} \end{cases}$

κόμμα	έδρες
A	120
B	120
Γ	20
Δ	20
E	20

300 έδρες, απλή αναλογική

Ποδοσφαιρο Παιχνίδι

$v(S) = \begin{cases} 1, & \text{νίκη} \quad \sum_{i \in S} w_i \geq 151 \\ 0, & \text{ήττα} \quad \text{αλλιώς} \end{cases}$

$[151; \underset{A}{120}, \underset{B}{120}, \underset{\Gamma}{20}, \underset{\Delta}{20}, \underset{E}{20}]$

πλειοψηφία

Συμμαχίες που κερδίζουν: $\{A, B\}$, $\{A, \Gamma, \Delta\}$, $\{A, \Gamma, E\}$, $\{A, \Delta, E\}$, $\{B, \Gamma, \Delta\}$, $\{B, \Gamma, E\}$, $\{B, \Delta, E\}$, $\{A, B, \Gamma\}$, ... (όλες οι 3άδες εκτός από $\{\Gamma, \Delta, E\}$), $\{A, B, \Gamma, \Delta\}$, ... (όλες οι 4άδες), $\{A, B, \Gamma, \Delta, E\}$

Scanned with CamScanner

11.9

(Πάνω στην 10.9).

$C = \emptyset$ (θα το δείξουμε)

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1, \; x_i \geq 0 \; \forall i$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 \geq 1 \Rightarrow x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_3 + x_4 = 1 \end{array}\right\} x_2 = x_3 + x_4$$

Επίσης $x_1 + x_2 = 1 \Rightarrow x_3 + x_4 + x_5 = 0 \overset{x_i \geq 0}{\Rightarrow} x_3 = x_4 = x_5 = 0 \overset{x_2 = x_3 + x_4}{\Rightarrow} x_2 = 0$

και όμοια $x_1 = 0 \Rightarrow x_i = 0 \; \forall i$ άτοπο $\Rightarrow$ πράγματι κενός πυρήνας.

10.6 σε συνδυασμό με 11.6.

#n εταιρείες κατασκευάζουν διαδρόμους προσγείωσης/απογείωσης

Η εταιρεία i απαιτεί μήκος διαδρόμου $\geq l_i$

$0 < l_1 < l_2 < \ldots < l_n$. Κόστος διαδρόμου μήκους $l = a + bl$, $a, b \in \mathbb{R}$ γνωστά, $a \geq 0$, $b > 0$.

πχ $S = \{1, 5, 6\}$ μήκος $l = l_6$, κόστος $a + bl_6$, $v(S) = -(a + bl_6)$

Άρα γενικά $v(S) = -(a + b \max_{i \in S} l_i) = -(a + b l_{j^*(S)})$, $j^* = \max\{j \in S\}$

$n = 3$

$l_1 = 500$, $l_2 = 700$, $l_3 = 1000$, $a = 0$, $b = 1$

$v(S) = -\max_{j \in S} l_j$

Πυρήνας

$v(1) = -500$	$v(12) = -700$	$x_1 \geq -500$
$v(2) = -700$	$v(13) = -1000$	$x_2 \geq -700$
$v(3) = -1000$	$v(23) = -1000$	$x_3 \geq -1000$
		$x_1 + x_2 \geq -700$
		$x_2 + x_3 \geq -1000$
		$x_1 + x_3 \geq -1000$
		$x_1 + x_2 + x_3 = -1000$

$$\xrightarrow{y_i = -x_i} \left\{\begin{array}{l} y_1 \leq 500 \\ y_2 \leq 700 \\ y_3 \leq 1000 \\ y_1 + y_2 \leq 700 \\ y_2 + y_3 \leq 1000 \\ y_1 + y_3 \leq 1000 \\ y_1 + y_2 + y_3 = 1000 \end{array}\right\}$$

Scanned with CamScanner

$\Rightarrow y_3 = 1000 - y_1 - y_2$

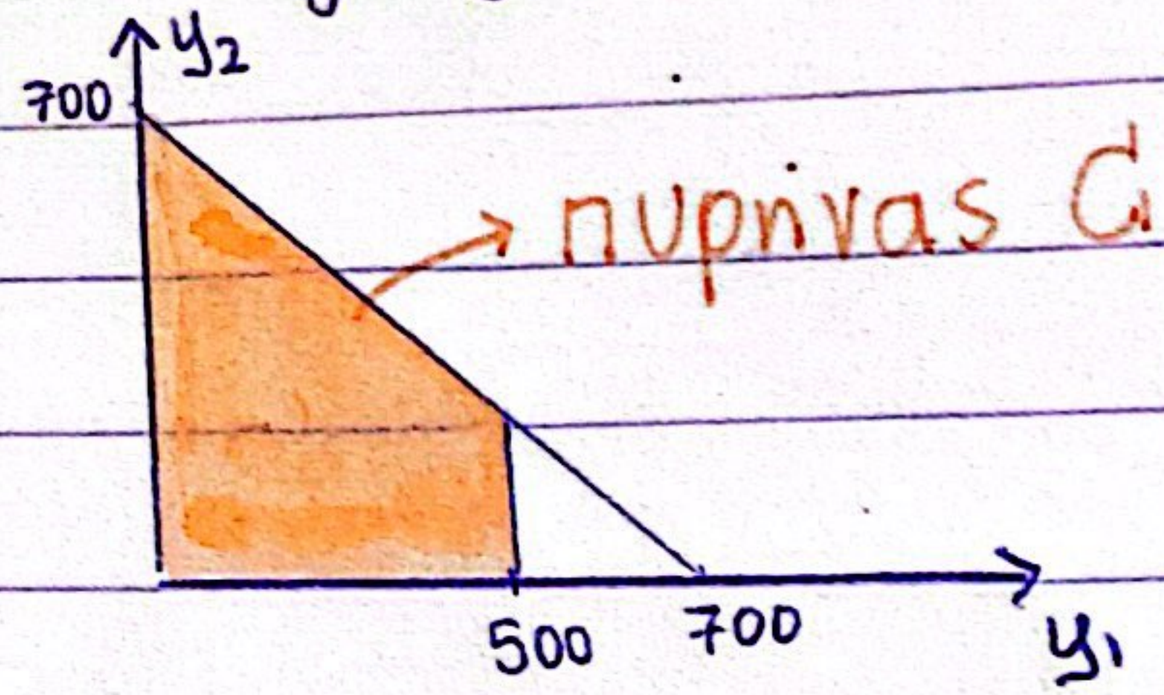
$y_1 + y_3 \leq 1000 \Rightarrow y_1 + 1000 - y_1 - y_2 \leq 1000 \Rightarrow y_2 \geq 0.$

$y_1 \geq 0, \; y_2 \geq 0$

$y_1 + y_2 \leq 700$

$y_1 \leq 500$

$y_2 \leq 700$



Scanned with CamScanner