

# Πεδία Jacobi

Κωνσταντίνος Μπιζάνος &  
Αναστάσιος Φράγκος

Αθήνα,  
27/05/2024



---

# Πίνακας Περιεχομένων

<b>1</b>	<b>Η εξίσωση του Jacobi</b>	<b>5</b>
1.1	Η εξίσωση Jacobi . . . . .	5
1.2	Εφαπτομενικά και κάθετα πεδία Jacobi . . . . .	10
<b>2</b>	<b>Ειδικοί τύποι πεδίων Jacobi</b>	<b>13</b>
2.1	Πεδία Jacobi που μηδενίζονται σε σημείο . . . . .	13
2.2	Πεδία Jacobi σε χώρους σταθερής καμπυλότητας . . . . .	15
<b>3</b>	<b>Συζυγή σημεία</b>	<b>19</b>
3.1	Παραδείγματα συζυγών σημείων . . . . .	19
3.2	Βασικά αποτελέσματα για τα συζυγή σημεία . . . . .	20
<b>4</b>	<b>Η δεύτερη μεταβολή του μήκους</b>	<b>23</b>
4.1	Λίγα λόγια για τα μεταβολικά προβλήματα . . . . .	23
4.2	Ο τύπος της δεύτερης μεταβολής . . . . .	27
4.3	Η δεύτερη μεταβολή της ενέργειας . . . . .	30
4.4	Αδυναμία ελαχιστοποίησης πέρα από συζυγή σημεία . . . . .	31
<b>5</b>	<b>Σημεία αποκοπής</b>	<b>35</b>
5.1	Χρόνοι και τόποι αποκοπής . . . . .	35
5.2	Ο τόπος αντιστροφής . . . . .	37
	<b>Ευρετήριο</b>	<b>39</b>
	<b>Βιβλιογραφία</b>	<b>41</b>



# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

## Η εξίσωση του Jacobi

### 1.1 Η εξίσωση Jacobi

**Ορισμός 1.1** Έστω  $(M, g)$  πολλαπλότητα Riemann και  $\gamma: I \rightarrow M$  μια γεωδαισιακή. Μια  $\Gamma: K \times I \rightarrow M$  μεταβολή της  $\gamma$  θα λέγεται **μεταβολή μέσω γεωδαισιακών** αν κάθε κύρια καμπύλη  $\Gamma_s$  είναι γεωδαισιακή.

**Παράδειγμα 1.1** Παραπέμπουμε τον αναγνώστη στο βιβλίο [Lee-RG, 2018] και στην απόδειξη του λήμματος του Gauss, όπου η μεταβολή που ορίζεται στην αντίστοιχη απόδειξη είναι μεταβολή μέσω γεωδαισιακών.

**Κίνητρο 1.1** • Θα προσπαθήσουμε να παράξουμε μια εξίσωση που θα πρέπει να ικανοποιεί το πεδίο μεταβολής μια μεταβολής μέσω γεωδαισιακών. Παρόλα αυτά θα δούμε ότι η προκειμένη εξίσωση, δοσμένης γεωδαισιακής  $\gamma$ , χαρακτηρίζει μια κλάση διανυσματικών πεδίων κατά μήκος της  $\gamma$ , τα λεγόμενα **πεδία Jacobi** με τα οποία θα ασχοληθούμε σε μεγάλο βαθμό κατά τη διάρκεια των κεφαλαίων.

- Με τις παραπάνω υποθέσεις του Ορισμού 1.1 έστω  $V(t) = \partial_s \Gamma(0, t)$  το αντίστοιχο πεδίο μεταβολής της  $\Gamma$ . Αφού  $\Gamma_s$  είναι γεωδαισιακή, για κάθε  $s \in J$ , τότε  $D_t T = 0$ . Χρησιμοποιώντας της τελευταία σχέση θέλουμε να εξάγουμε μια σχέση σχετική με το  $V$ .
- Αν γνωρίζαμε ότι για κάθε  $W$  κατά μήκος της  $\Gamma$ , ισχύει ότι

$$D_s D_t W = D_t D_s W$$

τότε από γνωστό Λήμμα θα προέκυπτε ότι

$$0 = D_s D_t T = D_t D_s T = D_t D_t S$$

όπου υπολογίζοντας στο  $(0, t)$  θα είχαμε ότι  $D_t^2 V = 0$ . Παρόλα αυτά η αλήθεια είναι αρκετά μακριά από αυτό.

- Στην προκειμένη περίπτωση καθοριστικός είναι ο ρόλος του τανυστή καμπυλότητας Riemann, ο οποίος αποτελεί ένα “μέτρο” του κατά πόσο η διαφορά  $D_s D_t W - D_t D_s W$  απέχει από το είναι μηδέν!

**Λήμμα 1.1** Έστω  $(M, g)$  πολλαπλότητα Riemann και  $\Gamma: J \times I \rightarrow M$  μια λεία μονο-παραμετρική οικογένεια καμπυλών. Αν  $V$  ένα  $\mathcal{C}^\infty$  διανυσματικό πεδίο κατά μήκος της  $\Gamma$ , τότε

$$D_s D_t V - D_t D_s V = R(S, T)V$$

όπου  $S(s, t) = \partial_s \Gamma(s, t)$  και  $T(s, t) = \partial_t \Gamma(s, t)$ .

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε την ζητούμενη ισότητα σε ένα τοπικό σύστημα συντεταγμένων. Έστω  $(U, (x^i))$  χάρτης της  $M$ . Τότε σε συντεταγμένες έχουμε ότι

$$\Gamma = (\Gamma^1, \dots, \Gamma^n)$$

και

$$S(s, t) = \frac{\partial \Gamma^i}{\partial s}(s, t) \partial_i|_{\Gamma(s, t)}, \quad T(s, t) = \frac{\partial \Gamma^j}{\partial t}(s, t) \partial_j|_{\Gamma(s, t)}, \quad V(s, t) = V^k(s, t) \partial_k|_{\Gamma(s, t)}$$

Έχουμε ότι

$$D_t V = D_t (V^i \partial_i) = \frac{\partial V^i}{\partial t} \partial_i + V^i D_t(\partial_i)$$

επομένως

$$D_s D_t V = \frac{\partial^2 V^i}{\partial s \partial t} \partial_i + \frac{\partial V^i}{\partial t} D_s(\partial_i) + \frac{\partial V^i}{\partial s} D_t(\partial_i) + V^i D_s D_t(\partial_i) \quad (1.1)$$

Λόγω συμμετρικότητας έχουμε ότι

$$D_t D_s V = \frac{\partial^2 V^i}{\partial t \partial s} \partial_i + \frac{\partial V^i}{\partial s} D_t(\partial_i) + \frac{\partial V^i}{\partial t} D_s(\partial_i) + V^i D_t D_s(\partial_i) \quad (1.2)$$

Αφαιρώντας από την 1.1 την 1.2 προκύπτει ότι

$$D_s D_t V - D_t D_s V = V^i [D_s D_t(\partial_i) - D_t D_s(\partial_i)]$$

Λόγω επεκτασιμότητας έχουμε ότι

$$D_t(\partial_i) = \nabla_T \partial_i = \frac{\partial \Gamma^j}{\partial t} \nabla_{\partial_j} \partial_i$$

συνεπώς, αφού και το  $\nabla_{\partial_j} \partial_i$  είναι επεκτάσιμο, έχουμε ότι

$$D_s D_t \partial_i = \frac{\partial^2 \Gamma^j}{\partial s \partial t} \nabla_{\partial_j} \partial_i + \frac{\partial \Gamma^j}{\partial t} \frac{\partial \Gamma^k}{\partial s} \nabla_{\partial_k} (\nabla_{\partial_j} \partial_i)$$

Λόγω συμμετρικότητας (ως προς  $s, t$ ) και συμμετρικότητας της συνοχής έχουμε ότι έχουμε ότι

$$D_s D_t \partial_i - D_t D_s \partial_i = \frac{\partial \Gamma^j}{\partial t} \frac{\partial \Gamma^k}{\partial s} [\nabla_{\partial_k} (\nabla_{\partial_j} \partial_i) - \nabla_{\partial_j} (\nabla_{\partial_k} \partial_i)] = R(S, T) \partial_i$$

όπου  $R$  είναι ο τανυστής καμπυλότητας Riemann και η τελευταία ισότητα προκύπτει από την  $\mathcal{C}^\infty$  γραμμικότητα του  $R$ . Από την τελευταία σχέση προκύπτει άμεσα το ζητούμενο.  $\square$

**Θεώρημα 1.1** (Εξίσωση Jacobi). Έστω  $(M, g)$  πολυπληθότητα Riemann,  $\gamma: I \rightarrow M$  γεωδαισιακή και  $V \in \mathcal{X}(\gamma)$ . Υποθέτουμε ότι το  $V$  είναι πεδίο μεταβολής κάποιας μεταβολής της  $\gamma$  μέσω γεωδαισιακών. Τότε

$$D_t^2 V + R(V, \dot{\gamma})(\dot{\gamma}) = 0 \quad (1.3)$$

Απόδειξη. Έστω  $\Gamma: J \times I \rightarrow M$  μεταβολή της  $\gamma$  μέσω γεωδαισιακών τέτοιο ώστε

$$V(t) = \partial_s \Gamma(0, t)$$

Αφού  $\Gamma_s$  είναι γεωδαισιακή, για κάθε  $s \in J$ , τότε έχουμε ότι  $D_t T = 0$ , συνεπώς

$$0 = D_s D_t T = D_t D_s T = D_t D_t S + R(S, T)T$$

όπου η δεύτερη ισότητα προκύπτει από το προηγούμενο λήμμα και η τρίτη από το Λήμμα Συμμετρίας. Εφαρμόζοντας την τελευταία σχέση στα  $(0, t)$ , δεδομένου ότι

$$T(0, t) = \dot{\gamma}(t) \quad \text{και} \quad S(0, t) = \partial_s \Gamma(0, t) = V(t)$$

προκύπτει η ζητούμενη σχέση. □

**Ορισμός 1.2** Έστω  $(M, g)$  πολλαπλότητα Riemann και  $\gamma$  γεωδαισιακή. Ένα  $V \in \mathcal{X}(\gamma)$  θα λέγεται **πεδίο Jacobi** αν ικανοποιεί την εξίσωση 1.3.

**Παρατήρηση 1.1** • Έστω  $(M, g)$  πολλαπλότητα Riemann,  $\gamma: I \rightarrow M$  μια γεωδαισιακή της  $M$  και  $J \in \mathcal{X}(\gamma)$  πεδίο Jacobi. Έστω  $p = \gamma(a)$  με  $a \in I$ .

- Στην περίπτωση των εξισώσεων παράλληλων διανυσματικών πεδίων κατά μήκος καμπύλης και των γεωδαισιακών εξισώσεων ήταν αρκετά εύχρηστο να μελετήσουμε τις εξισώσεις γύρω από ένα τοπικό σύστημα συντεταγμένων. Αυτό ήταν μια καθοριστική κίνηση για να αποδείξουμε θεωρήματα ύπαρξης και μοναδικότητας.
- Λόγω της εμφάνισης της δεύτερης τάξης συναλλοίωτης παράγωγου στην εξίσωση Jacobi, θα ήταν βολικότερο, για ένα πεδίο Jacobi  $J \in \mathcal{X}(\gamma)$  να θεωρήσουμε ένα παράλληλο, ορθοκανονικό πλαίσιο  $\{E_i\}$  κατά μήκος της  $\gamma$ . Τότε

$$J(t) = J^i(t)E_i(t)$$

και τότε η εξίσωση 1.3 μπορεί να αναδιατυπωθεί με τον εξής τρόπο

$$\ddot{J}^i(t) + R_{jkl}^i \circ \gamma(t) J^j(t) J^k(t) J^\ell(t) = 0 \quad (1.4)$$

όπου

$$R(E_j, E_k)E_\ell = R_{jkl}^i E_i$$

- Μέσω της παραπάνω εξίσωσης και δεδομένων δύο αρχικών συνθηκών θα δείξουμε ότι δοσμένης γεωδαισιακής υπάρχει μοναδικό πεδίο Jacobi που ικανοποιεί αυτές της αρχικές συνθήκες.

**Θεώρημα 1.2** (Υπαρξη και Μοναδικότητα Πεδίων Jacobi). Έστω  $(M, g)$  πολλαπλότητα Riemann,  $\gamma: I \rightarrow M$  μια γεωδαισιακή της  $M$  και  $a \in I$ . Αν  $v, w \in T_p M$ , όπου  $p = \gamma(a)$ , τότε υπάρχει μοναδικό πεδίο Jacobi  $J: I \rightarrow TM$  τέτοιο ώστε

$$J(a) = v \quad \text{και} \quad D_t J(a) = w.$$

Απόδειξη. Έστω  $\{E_i\}_i$  ένα παράλληλο, ορθοκανονικό πλαίσιο κατά μήκος της  $\gamma$ . Τότε, μέσω της παρατήρησης αναγόμαστε στην επίλυση του συστήματος διαφορικών εξισώσεων δεύτερης τάξης

$$\ddot{J}^i(t) + R_{jkl}^i \circ \gamma(t) J^j(t) J^k(t) J^\ell(t) = 0$$

Θέτοντας  $W^i = \dot{J}^i$ , τότε προκύπτει το γραμμικό σύστημα διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης, αλλά με  $2n$  αγνώστους αυτή το φορά

$$\begin{aligned} W^i &= \dot{J}^i \\ \dot{W}^i &= - (R_{jkl}^i \circ \gamma) J^j J^k J^\ell \end{aligned}$$

Αν  $v = v^i E_i(a)$  και  $w = w^i E_i(a)$ , τότε οι αρχικές συνθήκες του παραπάνω προβλήματος αρχικών τιμών είναι

$$(J^1(a), \dots, J^n(a), W^1(a), \dots, W^n(a)) = (v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_n)$$

Από γνωστό θεώρημα, το παραπάνω σύστημα έχει μοναδική λύση και μάλιστα λόγω των παραπάνω αρχικών συνθηκών έχουμε ότι το  $J = J^i E_i$  ικανοποιεί την εξίσωση Jacobi και μάλιστα

$$J(a) = J^i(a) E_i(a) = v^i E_i(a) = v \quad \text{και} \quad D_t J(a) = \dot{J}^i(a) E_i(a) = w.$$

□

**Παρατήρηση 1.2** • Έστω  $(M, g)$  πολλαπλότητα Riemann,  $\gamma: I \rightarrow M$  μια γεωδαισιακή της  $M$  και  $a \in I$ . Αν  $p = \gamma(a)$ , μέσω του προηγούμενου θεωρήματος, δείξαμε ότι υπάρχει αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση

$$\Phi: \mathcal{J}(\gamma) \rightarrow T_p M \oplus T_p M, \quad \Phi(J) = (J(a), D_t J(a))$$

όπου  $\mathcal{J}(\gamma)$  είναι το σύνολο των πεδίων Jacobi κατά μήκος της  $\gamma$ .

- Επίσης, είναι εύκολο να διαπιστωθεί, λόγω της εξίσωσης 1.3, τότε  $\mathcal{J}(\gamma)$  είναι ένας διανυσματικός υπόχωρος του  $\mathcal{X}(\gamma)$
- Λόγω της γραμμικότητας της εξίσωσης του Jacobi, αποδεικνύεται ότι η  $\Phi$  είναι γραμμική απεικόνιση και κατ' επέκταση γραμμικός ισομορφισμός.

**Πόρισμα 1.1** Έστω  $(M, g)$  διάστασης  $n$  και  $\gamma: I \rightarrow M$  μια γεωδαισιακή της  $M$ . Τότε  $\mathcal{J}(\gamma)$  είναι διανυσματικός υπόχωρος του  $\mathcal{X}(\gamma)$  διάστασης  $2n$ .

**Κίνητρο 1.2** • Μέσω του Θεωρήματος 1.1 δείξαμε ότι για δοσμένη γεωδαισιακή και πεδίο μεταβολής της μέσω γεωδαισιακών, τότε το αντίστοιχο πεδίο μεταβολής είναι πεδίο Jacobi.

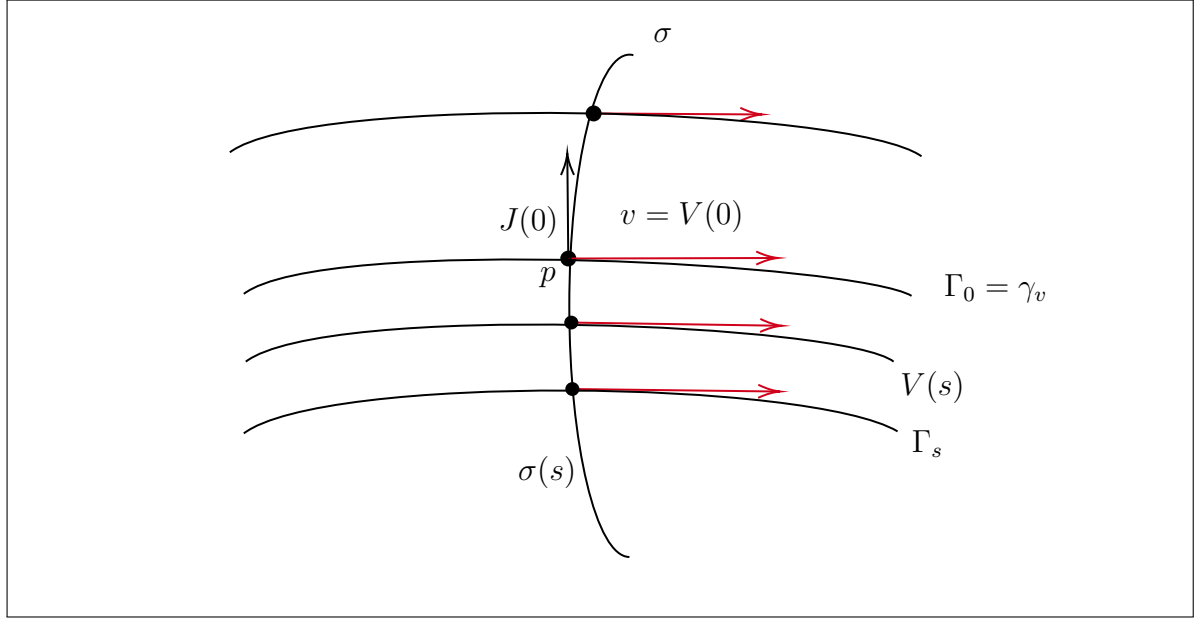
- Θα μπορούσαμε να ισχυριστούμε ότι ισχύει το αντίστροφο; Δηλαδή ότι κάθε πεδίο Jacobi είναι πεδίο μεταβολής κάποια μεταβολής μέσω γεωδαισιακών; Η επόμενη πρόταση μας δίνει καταφατική απάντηση στην προηγούμενη ερώτηση, κάτω υπό ορισμένες προϋποθέσεις!

**Πρόταση 1.1.** Έστω  $(M, g)$  πολλαπλότητα Riemann και  $\gamma: I \rightarrow M$  γεωδαισιακή. Αν  $M$  είναι πλήρης ή  $I$  είναι συμπαγές διάστημα, τότε κάθε πεδίο Jacobi κατά μήκος της  $\gamma$  είναι πεδίο μεταβολής κάποιας μεταβολής της  $\gamma$  μέσω γεωδαισιακών.



**Απόδειξη.** • Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι  $0 \in I$  (εφαρμόζοντας κατάλληλη μεταφορά στο  $t$ ). Τότε συμβολίζουμε ως εξής  $\gamma(0) = p$  και  $\dot{\gamma}(0) = v$ , δηλαδή  $\gamma(t) = \exp_p(tv)$ .

- Θεωρούμε  $J \in \mathcal{J}(\gamma)$  και θεωρούμε  $\sigma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  τέτοια ώστε  $\sigma(0) = p$  και  $\dot{\sigma}(0) = J(0)$ . Επιπρόσθετα, επιλέγουμε  $V(s) \in \mathcal{X}(\sigma)$  με  $V(0) = v$  και  $D_s V(0) = D_t J(0)$ .



- Ορίζουμε  $\Gamma(s, t) = \exp_{\sigma(s)}(tV(s))$ . Χρησιμοποιώντας ότι είτε  $M$  είναι πλήρης, μέσω του Hopf-Rinow, είτε ότι το  $I$  είναι συμπαγές, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι  $\Gamma: (-\delta, \delta) \times I \rightarrow M$  μεταβολή της  $\gamma$ . Αφήνεται ως άσκηση στον αναγνώστη να δείξει ότι  $\Gamma$  είναι μεταβολή της  $\gamma$  μέσω γεωδαισιακών.
- Θεωρούμε το πεδίο μεταβολής  $W(t)$  της  $\Gamma$ . Παρατηρούμε ότι

$$W(0) = \dot{\sigma}(0) = J(0) \quad D_t W = D_t S(0, 0) = D_s T(0, 0) = D_s V(0) = D_t J(0)$$

Μέσω του Θεωρήματος 1.1 το  $W$  είναι πεδίο Jacobi και από την παραπάνω σχέση και την μοναδικότητα των πεδίων Jacobi προκύπτει ότι  $W = J$ .

□

**Κίνητρο 1.3** Έστω  $(M, g)$  πολλαπλότητα Riemann και  $\gamma: I \rightarrow M$  μια  $\mathcal{C}^\infty$  καμπύλη. Λόγω της φυσιολογικής συμπεριφοράς που έχει η συνοχή Levi - Cività κάτω από τοπικές ισομετρίες έχουμε ήδη δει το εξής αποτέλεσμα : Αν  $F: (M, g) \rightarrow (\tilde{M}, \tilde{g})$  τοπική ισομετρία και  $\tilde{\gamma} = F \circ \gamma$ , τότε  $\gamma$  είναι γεωδαισιακή της  $M$  αν και μόνο αν  $\tilde{\gamma}$  είναι γεωδαισιακή. Μπορεί το προηγούμενο αποτέλεσμα να εξάγει κάτι αντίστοιχο αποτέλεσμα για δύο  $J \in \mathcal{X}(\gamma)$  και  $\tilde{J} \in \mathcal{X}(\tilde{\gamma})$  όταν αυτά είναι  $F$  - συσχετισμένα;

**Πρόταση 1.2.** Έστω  $F: (M, g) \rightarrow (\tilde{M}, \tilde{g})$  μια τοπική ισομετρία μεταξύ δύο πολλαπλοτήτων Riemann και  $\gamma: I \rightarrow M$  γεωδαισιακή (συνεπώς και  $\tilde{\gamma} = F \circ \gamma$ ) γεωδαισιακή. Αν δύο  $J \in \mathcal{X}(\gamma)$  και  $\tilde{J} \in \mathcal{X}(\tilde{\gamma})$  είναι  $F$  - συσχετισμένα, δηλαδή

$$d_{\gamma(t)} F(J(t)) = \tilde{J}(t)$$

τότε  $J \in \mathcal{J}(\gamma)$  αν και μόνο αν  $\tilde{J} \in \mathcal{J}(\tilde{\gamma})$ .

Απόδειξη. Το ζητούμενο προκύπτει τοπικά χρησιμοποιώντας τη φυσικότητα της συναλλοίωτης παραγώγου και την φυσικότητα του τελεστή καμπυλότητας Riemann.  $\square$

## 1.2 Εφαπτομενικά και κάθετα πεδία Jacobi

**Κίνητρο 1.4** • Είναι φυσιολογικό ξεκινώντας να μελετάει κανείς τα πεδία Jacobi να αναζητά τετριμμένα παραδείγματα και να εξετάσει τί πληροφορίες μπορεί να αποκομίσει από αυτά.

- Αν  $(M, g)$  πολλαπλότητα Riemann και  $\gamma: I \rightarrow M$  γεωδαισιακή, από την  $\mathcal{C}^\infty$  γραμμικότητα καθώς και από τις συμμετρίες του τανυστή καμπυλότητας προκύπτει ότι τα  $J_0(t) = \dot{\gamma}(t)$  και  $J_1(t) = t\dot{\gamma}(t)$  είναι πεδία Jacobi κατά μήκος της  $\gamma$ .
- Αν υποθέσουμε ότι  $M$  είναι πλήρης ή  $I$  συμπαγές, αν θεωρήσουμε τις αντίστοιχες μεταβολές της απόδειξης της Πρότασης 1.1 που έχουν ως πεδία μεταβολής τα  $J_0, J_1$  αντίστοιχα παρατηρούμε ότι

$$\Gamma_0(s, t) = \gamma(s + t) \quad \text{και} \quad \Gamma_1(s, t) = \gamma((1 + s)t)$$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι η πληροφορία που λαμβάνουμε από τις παραπάνω σχέσεις είναι μηδαμινή σχετικά με την συμπεριφορά άλλων γεωδαισιακών πέραν της  $\gamma$ .

- Αν θεωρήσουμε μια τυχαία κανονική καμπύλη  $\gamma: I \rightarrow M$  σε μια πολλαπλότητα Riemann  $(M, g)$ , τότε αυτή είναι immersion και για κάθε  $t \in I$  έχουμε ότι

$$T_{\gamma(t)}^\top M := \langle \dot{\gamma} \rangle \leq T_{\gamma(t)} M$$

είναι 1-διάστατος υπόχωρος, συνεπώς μπορούμε να θεωρήσουμε τον  $T_{\gamma(t)}^\perp M$  αντίστοιχο  $(n - 1)$  - διάστατο υπόχωρο του  $T_{\gamma(t)}^\top M$ .

- Ένα  $V \in \mathcal{X}(\gamma)$  θα λέγεται **εφαπτομενικό** αν  $V(t) \in T_{\gamma(t)}^\top M$ , για κάθε  $t \in I$ . Ένα  $V \in \mathcal{X}(\gamma)$  θα λέγεται **κάθετο** αν  $V(t) \in T_{\gamma(t)}^\perp M$ , για κάθε  $t \in I$ . Ο χώρος των εφαπτομενικών και κάθετων διανυσματικών πεδίων κατά μήκος της  $\gamma$  θα συμβολίζεται με  $\mathcal{X}^\top(\gamma), \mathcal{X}^\perp(\gamma)$  αντίστοιχα.

**Ορισμός 1.3** Έστω  $(M, g)$  πολλαπλότητα Riemann και  $\gamma: I \rightarrow M$  γεωδαισιακή. Ένα  $V \in \mathcal{X}(\gamma)$  θα λέγεται **εφαπτομενικό πεδίο Jacobi** αν είναι πεδίο Jacobi και  $V(t) \in T_{\gamma(t)}^\top M$ , για κάθε  $t \in I$ . Αναλόγως ορίζονται και τα κάθετα πεδία Jacobi. Ο χώρος των εφαπτομενικών και κάθετων διανυσματικών πεδίων κατά μήκος της  $\gamma$  θα συμβολίζεται με  $\mathcal{J}^\top(\gamma), \mathcal{J}^\perp(\gamma)$  αντίστοιχα.

**Πρόταση 1.3.** Έστω  $(M, g)$  πολλαπλότητα Riemann,  $\gamma: I \rightarrow M$  γεωδαισιακή και  $J \in \mathcal{J}(\gamma)$ . Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα.

- Το  $J$  είναι κάθετο πεδίο Jacobi κατά μήκος της  $\gamma$ .
- Το  $J$  είναι κάθετο στο  $\dot{\gamma}$  σε δύο διαφορετικά σημεία.
- Τα  $J, D_t J$  είναι κάθετα στο  $\dot{\gamma}$  σε ένα σημείο.
- Τα  $J, D_t J$  είναι κάθετα στο  $\dot{\gamma}$  σε κάθε σημείο.

*Απόδειξη.* Έστω  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  και  $f(t) = \langle J(t), \dot{\gamma}(t) \rangle$ . Αφού η συνοχή Levi - Civita είναι μετρική έχουμε ότι

$$\dot{f} = \langle D_t J, \dot{\gamma} \rangle + \langle J, D_t \dot{\gamma} \rangle = \langle D_t J, \dot{\gamma} \rangle$$

και όμοια

$$\ddot{f} = \langle D_t^2 J, \dot{\gamma} \rangle = -\langle R(J, \dot{\gamma})\dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle = -R_m(J, \dot{\gamma}, \dot{\gamma}, \dot{\gamma}) = 0$$

όπου η τελευταία σχέση προκύπτει από τις συμμετρίες του τανυστή καμπυλότητας Riemann. Συνεπώς, έχουμε ότι  $\dot{f}$  είναι σταθερή, από όπου η ισοδυναμίες (α) - (δ) προκύπτουν άμεσα.  $\square$

**Πόρισμα 1.2** Έστω  $(M, g)$  πολλαπλότητα Riemann,  $\gamma: I \rightarrow M$  γεωδαισιακή μη σταθερή (δηλαδή κανονική). Τότε  $\mathcal{J}^\perp(\gamma)$  είναι ένας  $2n - 2$  - υπόχωρος του  $\mathcal{J}(\gamma)$  και  $\mathcal{J}^\top(\gamma)$  είναι ένας 2 - υπόχωρος του  $\mathcal{J}(\gamma)$ . Συνεπώς

$$\mathcal{J}(\gamma) = \mathcal{J}^\top(\gamma) \oplus \mathcal{J}^\perp(\gamma)$$

*Απόδειξη.* • Θεωρούμε την απεικόνιση

$$\Phi: \mathcal{J}(\gamma) \rightarrow T_p M \oplus T_p M, \quad \Phi(J) = (J(a), D_t J(a))$$

η οποία έχουμε δείξει ότι είναι γραμμικός ισομορφισμός. Από το παραπάνω λήμμα είναι σαφές ότι

$$\Phi(\mathcal{J}^\perp(\gamma)) = T_p M^\perp \oplus T_p M^\perp$$

όπου ο τελευταίος χώρος έχει διάσταση  $2n - 2$ .

- Είναι άμεσο ότι  $\mathcal{J}^\top(\gamma) \cap \mathcal{J}^\perp(\gamma) = \{0\}$  και αφού τα  $J_0, J_1$  που ορίσθηκαν στο Κίνητρο 1.4 ανήκουν στο  $\mathcal{J}^\top(\gamma)$  και είναι γραμμικά ανεξάρτητα, τότε  $\dim \mathcal{J}^\top(\gamma) = 2$ .  $\square$



## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

# Ειδικοί τύποι πεδίων Jacobi

### 2.1 Πεδία Jacobi που μηδενίζονται σε σημείο

**Λήμμα 2.1** Έστω  $(M, g)$  πολλαπλότητα Riemann  $I \subseteq \mathbb{R}$  διάστημα που περιέχει το 0,  $\gamma: I \rightarrow M$  γεωδαισιακή και  $J \in \mathcal{J}(\gamma)$  τ.ω.  $J(0) = 0$ . Υποθέτουμε ότι  $M$  είναι πλήρης ή  $I$  είναι συμπαγές. Τότε το  $J$  είναι πεδίο μεταβολής της μεταβολής της  $\gamma$

$$\Gamma(s, t) = \exp_p(t(v + sw))$$

όπου  $\gamma(0) = p$ ,  $\dot{\gamma}(0) = v$  και  $D_t J(0) = w$ .

*Απόδειξη.* Ακολουθώντας τα βήματα της απόδειξης της Πρότασης 1.1, επιλέγουμε για  $\sigma \equiv p$  και  $W(s) = v + sw$ . Τότε, η ζητούμενη μεταβολή είναι η

$$\Gamma(s, t) = \exp_{\sigma(s)}(tW(s)) = \Gamma(s, t) = \exp_p(t(v + sw))$$

□

**Πρόταση 2.1.** Έστω  $(M, g)$  πολλαπλότητα Riemann  $I \subseteq \mathbb{R}$  διάστημα που περιέχει το 0,  $\gamma: I \rightarrow M$  γεωδαισιακή με  $\gamma(0) = p$  και  $\dot{\gamma}(0) = v$ . Για κάθε  $w \in T_p M$ , το  $J \in \mathcal{J}(\gamma)$  το οποίο ικανοποιεί τις παρακάτω συνθήκες

$$J(0) = 0 \quad \text{και} \quad D_t J(0) = w$$

δίνεται από τον τύπο

$$J(t) = d_{tv}(\exp_p)(tw) \tag{2.1}$$

κάνοντας την ταύτιση  $T_{tv}(T_p M) \equiv T_p M$ .

*Απόδειξη.* Αφού κάθε  $t \in I$  ανήκει σε ένα  $0 \in I_0 \subseteq I$  συμπαγές. Άρα, για κάθε τέτοιο συμπαγές διάστημα  $I_0$ , το  $J$  από το Λήμμα 2.1, είναι πεδίο μεταβολής της μεταβολής

$$\Gamma(s, t) = \exp_p(t(v + sw))$$

Υπολογίζουμε ως εξής

$$\begin{aligned} J(t) &= \partial_s \Gamma(0, t) = d_{(0,t)}(\exp_p(t(v + sw))) (\partial_s) \\ &= d_{tv}(\exp_p) \circ d_{(0,t)}(t(v + sw)) (\partial_s) = d_{tv}(\exp_p)(tw) \end{aligned}$$

□

**Παρατήρηση 2.1** Με τις υποθέσεις της προηγούμενης πρότασης, υποθέτουμε ότι  $(U, (x^i))$  είναι κανονική περιοχή και κανονικές συντεταγμένες γύρω από το  $p$  τ.ω.  $\gamma(I) \subseteq U$  με

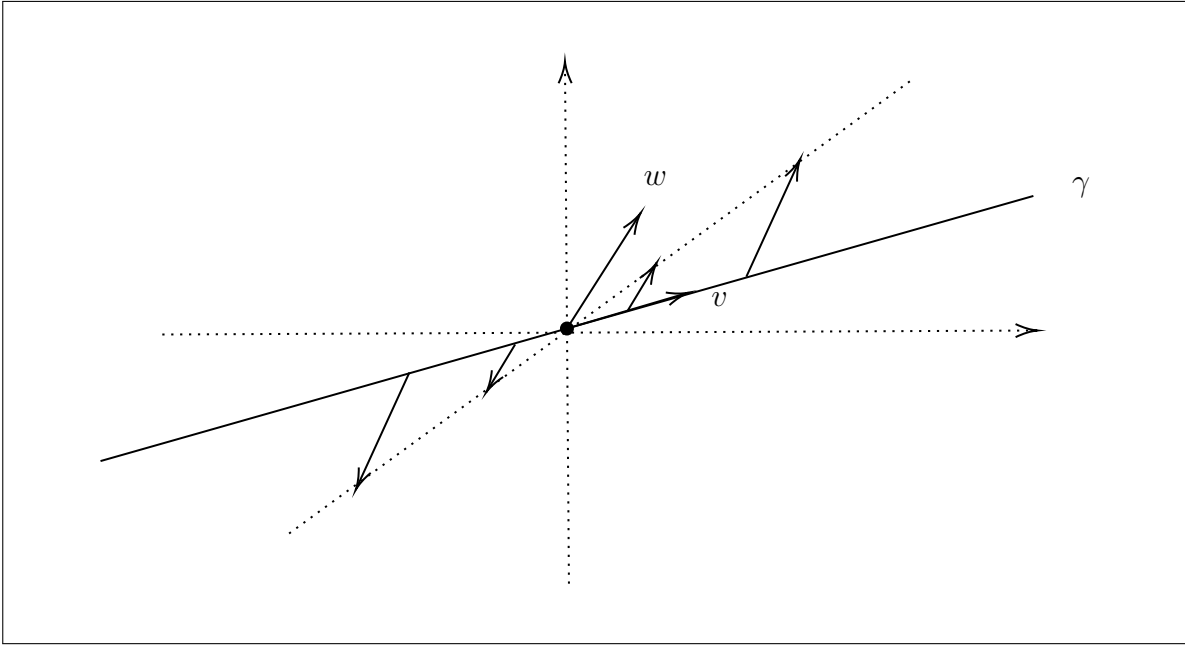
$$v = v^i \partial_i|_p \quad \text{και} \quad w = w^i \partial_i|_p$$

Τότε η αντίστοιχη αναπαράσταση της  $\Gamma$  είναι η

$$\Gamma(s, t) = (t(v^1 + sw^1), \dots, t(v^n + sw^n))$$

συνεπώς αφού  $J$  είναι το πεδίο μεταβολής της  $\Gamma$  γράφεται σε κανονικές συντεταγμένες στην μορφή

$$J(t) = tw^i \partial_i|_{\gamma(t)} \quad (2.2)$$



**Παρατήρηση 2.2** Έστω  $(M, g)$  πολλαπλότητα Riemann,  $p \in M$  και  $U$  κανονική περιοχή του  $p$ . Έστω  $q \in U \setminus \{p\}$ . Θεωρούμε την ακτινική γεωδαισιακή

$$\gamma(t) = \exp_p(tv)$$

όπου  $v = \exp_p^{-1}(q)$ . Τότε, έχουμε ότι  $\gamma(1) = q$ . Έστω  $w \in T_q M$ , το οποίο σε κανονικές συντεταγμένες γράφεται ως

$$w = w^i \partial_i|_{\gamma(t)}$$

Θεωρώντας το  $v' = w^i \partial_i|_p$  και εφαρμόζοντας την παραπάνω παρατήρηση έχουμε ότι το πεδίο Jacobi  $J \in \mathcal{J}(\gamma)$  που μηδενίζεται στο 0 ικανοποιεί την σχέση

$$J(1) = w^i \partial_i|_{\gamma(1)} = w^i \partial_i|_q = w$$

**Πόρισμα 2.1** Έστω  $(M, g)$  πολλαπλότητα Riemann,  $p \in M$  και  $U$  κανονική περιοχή του  $p$ . Έστω  $q \in U \setminus \{p\}$ . Θεωρούμε την ακτινική γεωδαισιακή

$$\gamma(t) = \exp_p(tv)$$

όπου  $v = \exp_p^{-1}(q)$ . Τότε, έχουμε ότι  $\gamma(1) = q$ . Για κάθε  $w \in T_q M$  είναι τιμή ενός  $J \in \mathcal{J}(\gamma)$  που μηδενίζεται για  $t = 0$ .

## 2.2 Πεδία Jacobi σε χώρους σταθερής καμπυλότητας

**Κίνητρο 2.1** Σε μια πολλαπλότητα Riemann  $(M, g)$  μπορούμε για οποιαδήποτε γραμμικά ανεξάρτητα  $v, w \in T_p M$  και  $\Pi$  τον χώρο που παράγεται από τα  $v, w$  να ορίσουμε την **τμηματική καμπυλότητα** του  $\Pi$  ως

$$K(\Pi) = \frac{\text{Rm}_p(v, w, v, w)}{|u \wedge w|^2}$$

όπου

$$|u \wedge w| = (\langle v, v \rangle \cdot \langle w, w \rangle - \langle v, w \rangle^2)^{1/2}$$

Αρκετό ενδιαφέρον, παρότι δεν φαίνεται εκ πρώτης όψεως, έχουν χώροι με σταθερή τμηματική καμπυλότητα, με αποτελέσματα τα οποία έρχονται σε άμεση επαφή με τα πεδία Jacobi. Για να δώσουμε μια πρώτη γεύση στον αναγνώστη, θυμίζουμε ότι κάθε συνεκτική πολλαπλότητα Riemann επιδέχεται καθολική επικάλυψη, βλέπε [Lee-SM, 2012], για την οποία εν γένει δεν γνωρίζουμε την φύση της ως πολλαπλότητα. Στην περίπτωση όμως που η  $M$  έχει σταθερή τμηματική καμπυλότητα  $-1, 0, 1$ , δεν έχουμε αρκετές επιλογές για αυτή την επικάλυψη. Πρέπει να είναι μια εκ των παρακάτω!

$$\mathbb{H}^n, \quad \mathbb{R}^n, \quad \mathbb{S}^n$$

**Λήμμα 2.2** Έστω  $(M, g)$  πολλαπλότητα Riemann με σταθερή τμηματική καμπυλότητα  $c$ . Τότε για κάθε  $v, w, x \in T_p M$  ισχύει ότι

$$\text{Rm}(v, w)(x) = c(\langle w, x \rangle v + \langle v, x \rangle w)$$

όπου  $\text{Rm}$  είναι η προκείμευση απεικόνιση  $\text{Rm}: T_p M \times T_p M \times T_p M \rightarrow T_p M$ , από τον τανυστή καμπυλότητας Riemann.

**Ορισμός 2.1** Έστω  $c \in \mathbb{R}$ . Με  $s_c: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  θα συμβολίζουμε την συνάρτηση

$$s_c(t) = \begin{cases} t, & c = 0 \\ R \sin(t/R), & c = 1/R^2 > 0 \\ R \sinh(t/R), & c = -1/R^2 < 0 \end{cases}$$

**Πρόταση 2.2.** Έστω  $(M, g)$  πολλαπλότητα Riemann σταθερής τμηματικής καμπυλότητας  $c$  και  $\gamma: I \rightarrow M$  γεωδαισιακή της  $M$  μοναδιαίας ταχύτητας. Αν  $J \in \mathcal{J}(\gamma)^\perp$  με  $J(0) = 0$ , τότε το  $J$  είναι της μορφής

$$J(t) = k s_c(t) E(t)$$

όπου  $s_c$  είναι η συνάρτηση που ορίσθηκε παραπάνω και  $E(t)$  είναι ένα παράλληλο, κάθετο και δ.π. κατά μήκος της  $\gamma$ .

**Απόδειξη.** • Έστω  $E(t)$  ένα παράλληλο, κάθετο και μοναδιαίο δ.π. κατά μήκος της  $\gamma$  και  $J \in \mathcal{J}(\gamma)^\perp$  με  $J(0) = 0$ , το οποίο γράφεται στην μορφή

$$J(t) = u(t)E(t)$$

Τότε, έχουμε ότι

$$D_t^2 J + R(J, \dot{\gamma})(\dot{\gamma}) = \ddot{u} + cu = 0$$

όπου η ισότητα προκύπτει άμεσα από το προηγούμενο Λήμμα, από το γεγονός ότι  $J$  είναι κάθετο και  $\dot{\gamma}$  είναι μοναδιαίας ταχύτητας.

- Η τελευταία εξίσωση είναι μια συνήθης διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές, όπου οι λύσεις που ικανοποιούν την συνθήκη  $u(0) = 0$  είναι ακριβώς τα σταθερά πολλαπλάσια  $ks_c$ .
- Με επιχείρημα διαστάσεων προκύπτει ότι τα κάθετα πεδία Jacobi που μηδενίζονται για  $t = 0$  είναι ακριβώς αυτά της μορφής

$$J(t) = ks_c(t)E(t)$$

□

**Παρατήρηση 2.3** Θεωρούμε την απεικόνιση  $\pi: \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{S}^n$  με  $\pi(x) = x/\|x\|$ . Αν  $g^\circ \in \mathcal{T}^{(0,2)}(M)$  η επαγόμενη μετρική Riemann της σφαίρας από την συνήθη μετρική Riemann του  $\mathbb{R}^n$ , τότε θεωρούμε τον pullback τανυστή

$$\hat{g} = \pi^* g^\circ \in \mathcal{T}^{0,2}(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})$$

Πως μπορούμε να συνδέσουμε όμως την συνήθη ευκλείδεια μετρική με τον παραπάνω τανυστή  $\hat{g}$ ;

**Λήμμα 2.3** Στον  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ , η συνήθης ευκλείδεια μετρική  $\bar{g}$  γράφεται ως

$$\bar{g} = dr \otimes dr + r^2 \hat{g}$$

όπου  $r$  η συνήθης ευκλείδεια απόσταση  $r(x) = \|x\|$ .

*Απόδειξη.* Θεωρούμε την απεικόνιση  $\Phi: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  με  $\Phi(\rho, x) = \rho x$ . Εφοδιάζοντας το  $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{S}^{n-1}$  με την warped product μετρική  $d\rho \otimes d\rho + \rho^2 g^\circ$  έχουμε ότι

$$\bar{g} = (\Phi^{-1})^*(d\rho \otimes d\rho + \rho^2 g^\circ) = dr \otimes dr + r^2 \hat{g}$$

□

Το παρακάτω θεώρημα, το οποίο διατυπώνουμε, μπορεί να βρεθεί στο [Lee-RG, 2018].

**Θεώρημα 2.1.** Έστω  $(M, g)$  πολλαπλότητα Riemann με σταθερή τμηματική καμπυλότητα  $c$ . Έστω  $p \in M$  και  $(U, (x^i))$  κανονικές συντεταγμένες γύρω από το  $p$ . Αν  $r$  η ακτινική απόσταση που ορίζεται στο  $U \setminus \{p\}$  και  $\hat{g} \in \mathcal{T}^{0,2}(U \setminus \{p\})$  που ορίζεται σε  $x$  - συντεταγμένες όπως πριν, τότε έχουμε ότι

$$g = dr \otimes dr + s_c(r)^2 \hat{g}.$$



**Απόδειξη.** • Για πρακτικούς λόγους θα συμβολίζουμε με  $\bar{g}$  το ευκλείδειο εσωτερικό γινόμενο (σε κανονικές συντεταγμένες και με  $g_c$  το δεξί μέλος της παραπάνω ισότητας. Έστω  $q \in U \setminus \{p\}$ . Αν  $b = r(q)$ , από το Λήμμα του Gauss, έχουμε ότι κάθε  $v \in T_q M$  επιδέχεται (ορθογώνια) ανάλυση της μορφής

$$v = V^\perp + V^\top$$

όπου  $V^\perp$  είναι πολλαπλάσιο του  $\partial_r|_q$  και  $V^\top$  είναι εφαπτόμενο στην γεωδαισιακή σφαίρα ακτίνας  $b$ .

- Θέλουμε να δείξουμε ότι  $g(v, v) = g_c(v, v)$  (μετά εφαρμόστε για  $v + w$ ), αλλά από τις ιδιότητες των κανονικών συντεταγμένων, έχουμε ότι  $\partial_r$  είναι μοναδιαίο ως προς τα  $g, \bar{g}, g_c$ , συνεπώς αρκεί να δείξουμε την ισότητα υποθέτοντας ότι  $v$  είναι εφαπτόμενο στην γεωδαισιακή σφαίρα ακτίνας  $b$
- Τότε για αυτά τα  $v$ , αφού  $r \equiv b$ , αρκεί να δείξουμε ότι

$$g(v, v) = s_c(b)^2 \hat{g}(b)$$

Από το Λήμμα 2.3 έχουμε ότι

$$g_c(v, v) = \frac{s_c(b)^2}{b^2} \bar{g}(v, v)$$

- Από το Λήμμα 2.2 μπορούμε να υποθέσουμε ότι για την ακτινική γεωδαισιακή  $\gamma: [0, b] \rightarrow M$  (σε κανονικές συντεταγμένες)

$$\gamma(t) = \left( \frac{t}{b} q^1, \dots, \frac{t}{b} q^n \right)$$

υπάρχει πεδίο Jacobi  $J \in \mathcal{J}(\gamma)$  τ.ω.  $J(b) = v$  με τύπο

$$J(t) = \frac{t}{b} v^i \partial_i|_{\gamma(t)}$$

- Αφού  $J(0) = 0$  και  $J(b) = v$ , δηλαδή κάθετα στο  $\dot{\gamma}$ , τότε  $J \in \mathcal{J}^\perp(\gamma)$ , άρα είναι της μορφής

$$J(t) = k s_c(t) E(t)$$

- Χρησιμοποιώντας την τελευταία σχέση δείζει ότι την ζητούμενη ισότητα. □

**Πόρισμα 2.2** Έστω  $(M, g)$  και  $(\tilde{M}, \tilde{g})$  πολλαπλότητες Riemann ίδιας διάστασης και σταθερής τμηματικής καμπυλότητας  $c$ . Τότε,  $(M, g)$  και  $(\tilde{M}, \tilde{g})$  είναι τοπικά ισομετρικές.



## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

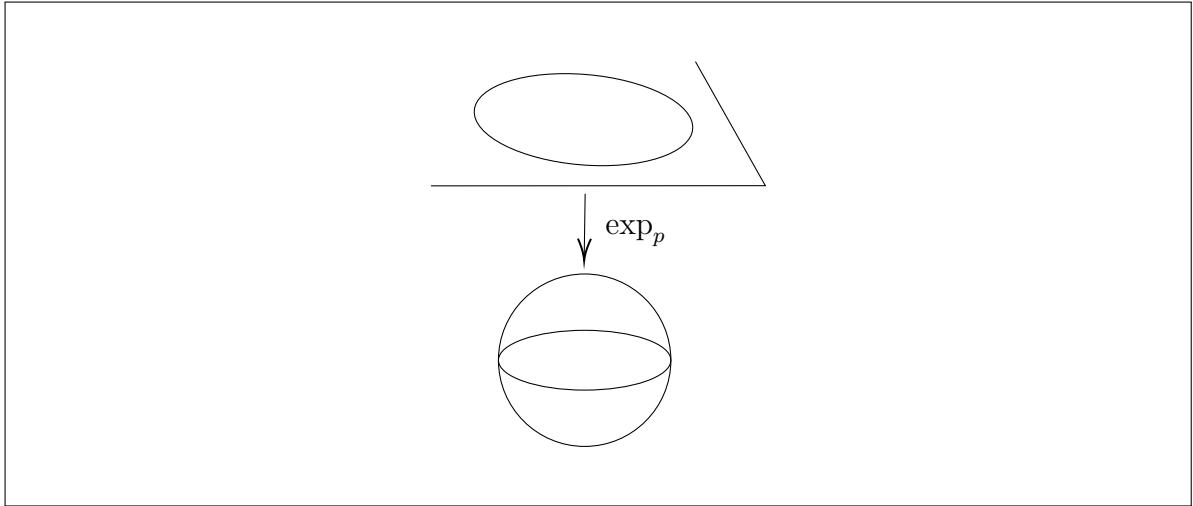
# Συζυγή σημεία

### 3.1 Παραδείγματα συζυγών σημείων

Σε αυτό το κεφάλαιο θα ξεκινήσει να μας απασχολήσει το ερώτημα του κατά πόσον και υπό ποιες προϋποθέσεις η εκθετική απεικόνιση γίνεται αμφιδιαφόριση, και ειδικότερα θα ασχοληθούμε με τα κρίσιμα σημεία της. Αφού αποκτήσουμε τα κατάλληλα εργαλεία, θα ασχοληθούμε με το εν λόγω θέμα ξανά στο Κεφάλαιο 5. Ξέρουμε ήδη ότι η εκθετική συνάρτηση  $\exp_p$  στο ανοικτό σύνολο:

$$\mathcal{E}_p = \{v \in T_p M \mid \exists \gamma : I \supseteq [0, 1] \rightarrow M \text{ μεγιστική γεωδαισιακή με } \gamma(0) = p, \dot{\gamma}(0) = v\}$$

αποτελεί ομαλή απεικόνιση μεταξύ  $n$ -διάστατων χώρων, κι οπότε υπάρχει αντίστροφος στα σημεία στα οποία η  $d_v(\exp_p)$  έχει τάξη  $n$  (από το θεώρημα της αντίστροφης ή το θεώρημα τάξης).



Τα σημεία της εκθετικής στα οποία εφαρμόζονται τα θεωρήματα αντίστροφης απεικόνισης και τάξης, θα τα ονομάζουμε **κανονικά** σημεία. Γνωρίζουμε ήδη ότι το 0 είναι κανονικό σημείο, αφού:

$$d_0(\exp_p) = \text{id}$$

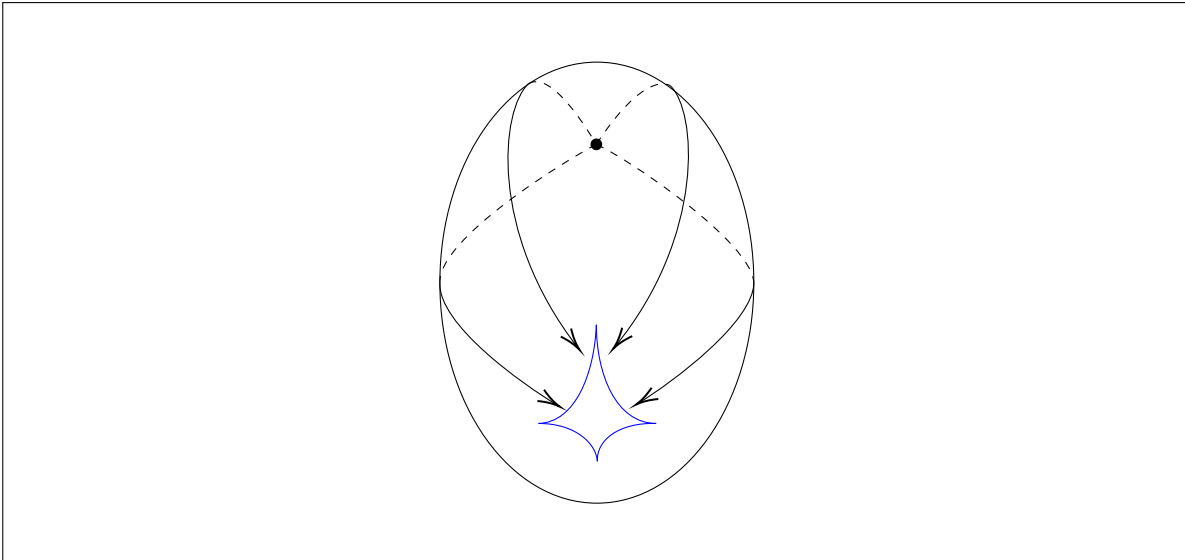
Για να πάρουμε μία ιδέα για τη μορφή των κρίσιμων σημείων της εκθετικής, θα ασχοληθούμε με το παράδειγμα της σφαίρας  $\mathbb{S}^2$ . Η εκθετική απεικόνιση  $\exp_p$  εκεί αποτελεί αμφιδιαφόριση, όταν περιορίζεται στην μπάλα  $B_\pi(0) \subseteq T_p \mathbb{S}^2$ . Κάθε όμως σημείο στο σύνορο  $\partial B_\pi(0)$  αποτελεί κρίσιμο σημείο, πράγμα που μας προϋποθέτει ότι η εκθετική δεν θα μπορεί να επεκταθεί στα αντιποδικά σημεία ως αμφιδιαφόριση.

Αυτό που αποσκοπούμε να δούμε είναι ότι μέσω των πεδίων Jacobi μπορούν να μελετηθούν τα εν λόγω κρίσιμα σημεία.

**Κίνητρο 3.1** Έχουμε ήδη δει, από την Πρόταση 2.2, ότι κάθε πεδίο Jacobi στη σφαίρα  $\mathbb{S}^2$ , που μηδενίζεται στο  $p$ , έχει τον πρώτο του μηδενισμό σε απόσταση ακριβώς  $\pi$  από το  $p$ , δηλαδή στο αντιποδικό σημείο. Από την άλλη, εάν έχουμε  $U$  μία κανονική περιοχή του  $p$ , τότε η Πρόταση 2.1 σε κανονικές συντεταγμένες δίνει τη σχέση  $J(t) = tw^i \partial_i|_{\gamma(t)}$  ( $w \neq 0$ ), και κατά συνέπεια το πεδίο Jacobi δεν μηδενίζεται σε κανένα άλλο σημείο εντός της κανονικής περιοχής.

**Ορισμός 3.1 (Συζυγή σημεία).** Έστω  $(M, g)$  μία πολλαπλότητα Riemann και  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  μία γεωδαισιακή με  $\gamma(a) = p$ ,  $\gamma(b) = q$ . Θα λέμε ότι τα  $p, q$  είναι **συζυγή** κατά μήκος της  $\gamma$  εάν υπάρχει ένα πεδίο Jacobi  $J \in \mathcal{J}(\gamma) \setminus \{0\}$  ούτως ώστε  $J(a) = J(b) = 0$ . Η **τάξη** της συζυγίας είναι η διάσταση του χώρου αυτών των πεδίων Jacobi.

Η μελέτη των συζυγών σημείων δεν είναι καθόλου τετριμμένη. Ίσως το παράδειγμα της σφαίρας που δώσαμε στην αρχή να είναι παραπλανητικό από αυτήν την άποψη. Στα ελλειψοειδή  $\mathcal{E}$  η κατάσταση είναι πιο περίπλοκη αλλά πιο τυπική, και το σύνολο των πρώτων συζυγών σημείων από κάποιο  $p$  είναι μία κλειστή καμπύλη (που εικονίζεται στο παρακάτω σχήμα). Περισσότερες λεπτομέρειες σχετικά με τα συζυγή σημεία μπορούν να βρεθούν στο [dC-RG, 1992].



## 3.2 Βασικά αποτελέσματα για τα συζυγή σημεία

**Παρατήρηση 3.1** • Από το θεώρημα ύπαρξης και μοναδικότητας για τα πεδία Jacobi, ο χώρος των πεδίων που μηδενίζονται στο  $a$  είναι διάστασης  $n$ . Εφόσον τώρα τα εφαπτόμενα πεδία Jacobi μηδενίζονται το πολύ σε ένα σημείο, η τάξη συζυγίας πρέπει να είναι το πολύ  $n - 1$ .

- Μάλιστα η ανισότητα είναι σφιχτή: Από την Πρόταση 2.2, στις σφαίρες  $\mathbb{S}^n$ , για κάθε γεωδαισιακή που ενώνει αντιποδικά σημεία και για κάθε παράλληλο διανυσματικό πεδίο που είναι κάθετο κατά μήκος της  $\gamma$ , υπάρχει πεδίο Jacobi που μηδενίζεται στα άκρα. Όμως ο χώρος των παράλληλων, κάθετων διανυσματικών πεδίων είναι διάστασης  $n - 1$ .

Η παρακάτω πρόταση θα δικαιολογήσει την προηγούμενη διαίσθησή μας, δείχνοντας ότι τα συζυγή σημεία σχετίζονται πολύ στενά με τα κρίσιμα σημεία της εκθετικής.

**Πρόταση 3.1** (Τα κρίσιμα σημεία της εκθετικής). Έστω  $(M, g)$  μία πολλαπλότητα Riemann,  $p \in M$  και  $v \in T_p M$ . Έστω  $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$  το τμήμα της μεγιστικής γεωδαισιακής του  $v$  (από το  $p$ ) για το οποίο  $\gamma(t) = \exp_p(tv)$ , κι έστω  $q = \exp_p v$ . Το  $v$  είναι κρίσιμο σημείο της  $\exp_p$  εάν και μόνο αν τα  $p, q$  είναι συζυγή κατά μήκος της  $\gamma$ .

*Απόδειξη.* ( $\Rightarrow$ ) Εάν το  $v$  είναι κρίσιμο σημείο, θα υπάρχει μη-μηδενικό  $w \in T_v T_p M \simeq T_p M$  ούτως ώστε  $d_v(\exp_p)(w) = 0$ . Θεωρούμε  $\Gamma$  τη μεταβολή:

$$\Gamma(s, t) = \exp_p(t(v + sw))$$

(από το Λήμμα 2.1) καθώς επίσης και το πεδίο Jacobi  $J = \partial_{s=0}\Gamma$ , που αποτελεί πεδίο μεταβολής της  $\Gamma$ . Υπολογίζοντας το  $J(1)$  παίρνουμε:

$$J(1) = \partial_{s=0}\Gamma(s, 1) = \frac{\partial}{\partial s}\bigg|_{s=0} \exp_p(v + sw) = d_v(\exp_p)(w) = 0$$

πράγμα που μας δείχνει ότι στα άκρα το πεδίο Jacobi  $J$  μηδενίζεται.

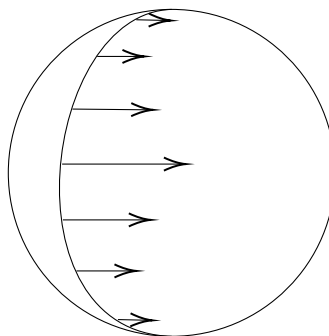
( $\Leftarrow$ ) Αντιστρόφως, εάν τα  $p, q$  είναι συζυγή, υπάρχει πεδίο Jacobi  $J \in \mathcal{J}(\gamma) \setminus \{0\}$  που μηδενίζεται στα άκρα, δηλαδή  $J(0) = J(1) = 0$ . Από το Λήμμα 2.1, το  $J$  είναι το πεδίο μεταβολής της:

$$\Gamma(s, t) = \exp_p(t(v + sw))$$

όπου  $D_t J(0) = w$ . Αφού όμως  $J(1) = d_v(\exp_p)(w)$  (όπως πριν), έχουμε:

$$d_v(\exp_p)(w) = 0$$

□





## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

# Η δεύτερη μεταβολή του μήκους

### 4.1 Λίγα λόγια για τα μεταβολικά προβλήματα

Πρωτού αναφερθούμε στη δεύτερη μεταβολή του συναρτησιακού του μήκους, θεωρούμε χρησιμο να γίνει μνεία στο γενικότερο πλαίσιο, που είναι ο λογισμός μεταβολών. Πολλά μαθηματικά προβλήματα, και ιδίως αυτά που προέρχονται από τη φυσική ή τις δι-  
αφορικές εξισώσεις, αντιμετωπίζονται με τεχνικές μη-γραμμικών συναρτησιακών.<sup>1</sup>

**Παράδειγμα 4.1** Γνωρίζουμε ήδη το πρόβλημα ελαχιστοποίησης του μήκους, μέσω της μελέτης των **γεωδαισιακών**, το οποίο είναι στην ουσία ένα μεταβολικό πρόβλημα. Δεδομένης οποιασδήποτε κατάλληλης μεταβολής  $\Gamma : J \times I \rightarrow M$ , γνωρίζουμε ότι σε κατάλληλα μικρή περιοχή το συναρτησιακό του μήκους  $L$  ελαχιστοποιείται, δεδομένων δύο σημείων. Δηλαδή το συναρτησιακό

$$L_g(\gamma) = \int_a^b |\dot{\gamma}(t)|_g dt$$

ελαχιστοποιείται στην κλάση:

$$\mathcal{A} = \{\gamma : [a, b] \rightarrow M \mid \gamma \text{ καμπύλη του } M \text{ με άκρα } \gamma(a) = p, \gamma(b) = q\}$$

δεδομένου ότι τα άκρα  $p, q$  είναι αρκετά κοντά. Άλλα αγαπημένα προβλήματα μεταξύ των μαθηματικών που ασχολούνται με λογισμό μεταβολών είναι τα λεγόμενα **ισοπεριμετρικά προβλήματα**. Ένα παράδειγμα ισοπεριμετρικού προβλήματος είναι το ακόλουθο: Δεδομένου ενός θετικού αριθμού  $\mu$ , μπορεί να βρεθεί απλή και κλειστή καμπύλη μήκους  $\mu$ , που να μεγιστοποιεί το εμβαδόν στο εσωτερικό της; Δηλαδή, το ερώτημα είναι εάν το συναρτησιακό του εμβαδού:

$$A(\gamma) = \int_{\text{int}(\gamma)} \sqrt{\det(g_{i,j})_{i,j}} dx \wedge dy$$

έχει μέγιστο στην κλάση:

$$\mathcal{A} = \{\gamma \mid \gamma \text{ απλή και κλειστή καμπύλη με } L_g(\gamma) = \mu\}$$

Τέλος, υπάρχει και το (μη-παραμετρικό) **πρόβλημα του Plateau** (και το γενικότερό του Douglas) στο οποίο κανείς διερωτάται εάν, δεδομένης συνάρτησης  $\gamma : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ , υπάρχει γράφημα διάστασης  $n$  που να περιέχει την  $\gamma$  σύνορο και να ελαχιστοποιεί

<sup>1</sup>Η ορολογία του μη-γραμμικού συναρτησιακού ταυτίζεται με αυτήν του “όχι κατ’ ανάγκη γραμμικού”.

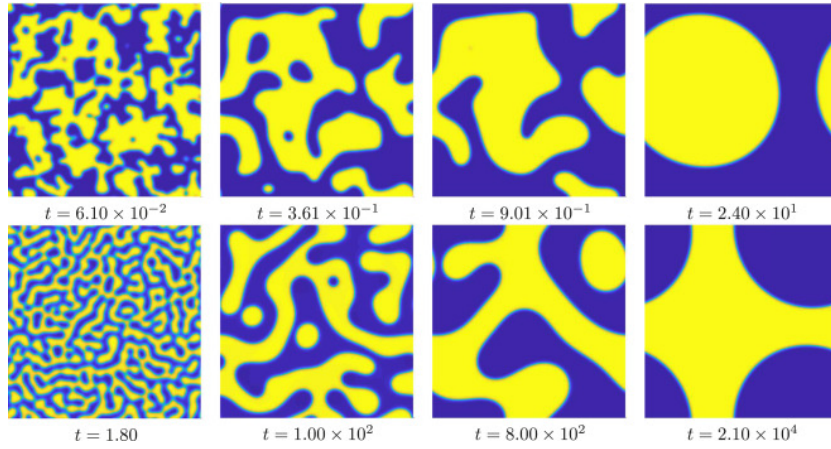
τον όγκο (ή τουλάχιστον να αποτελεί κρίσιμο σημείο). Δηλαδή, αναζητούμε γραφήματα  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  στον  $\mathbb{R}^{n+m}$  που να ελαχιστοποιούν το μέτρο Hausdorff:

$$\mathcal{H}^n(\text{Gr}(f)) = \int_{\Omega} \sqrt{1 + \sum |\mathcal{M}\nabla f|^2} dx$$

σε κατάλληλη κλάση  $\mathcal{A}$ . Με  $\mathcal{M}\nabla f$  συμβολίζουμε τις  $n \times n$  υπο-ορίζουσες του  $\nabla f$ , και το άθροισμα υπολογίζεται πάνω σε όλες αυτές. Ένα πρόβλημα σχετικό με τις ελαχιστικές επιφάνειες είναι η δημιουργία κραμάτων και η μελέτη της εξίσωσης Allen-Cahn  $\varepsilon^2 \Delta u - \dot{W}(u) = 0$ , της οποίας οι λύσεις είναι οι κρίσιμες τιμές του συναρτησιακού της ενέργειας:

$$E(u) = \int_M \varepsilon \frac{|\nabla u|^2}{2} + \frac{W(u)}{\varepsilon} dx$$

Η εξίσωση αυτή περιγράφει τον σχηματισμό των κραμάτων και της διεπιφάνειάς τους. Καθώς το  $\varepsilon$  γίνεται μικρό, οι λύσεις της εξίσωσης πλησιάζουν κάποια ελαχιστική επιφάνεια.



Ίσως από τα παραπάνω παραδείγματα να δίνεται μία ιδέα του πόσο βασικά είναι τα προβλήματα με τα οποία διαπραγματεύεται ο λογισμός μεταβολών. Αυτό που μας ενδιαφέρει σε πρώτο βήμα, είναι να περιγράψουμε μερικά βασικά εργαλεία του, τα οποία θα αντιπαραβάλλουμε έπειτα με τα αποτελέσματά μας στη διαφορική γεωμετρία. Σημειώνουμε για τα επόμενα ότι όλες μας οι συναρτήσεις ανήκουν σε χώρο με νόρμα.

**Ορισμός 4.1 (Παράγωγοι / Πρώτες και δεύτερες μεταβολές των συναρτησιακών).**

Έστω  $J : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$  ένα συναρτησιακό. Η **παράγωγος** ή **πρώτη μεταβολή** του  $J$  στο  $f$ , από την κατεύθυνση του  $h$ , ορίζεται:

$$\delta J(f, h) = \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} J(f + \varepsilon h)$$

Αντίστοιχα ορίζεται η **δεύτερη παράγωγος** ή **δεύτερη μεταβολή**:

$$\delta^2 J(f, h) = \left. \frac{d^2}{d\varepsilon^2} \right|_{\varepsilon=0} J(f + \varepsilon h)$$

Επίσης, οι κατευθύνσεις  $h$  συχνά αναφέρονται κι αυτές ως μεταβολές.

**Παρατήρηση 4.1** Έστω  $J : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$  ένα συναρτησιακό. Εάν το  $J$  στο  $f_0$  έχει τοπικό ακρότατο, τότε:

$$\delta J(f_0, h) = 0, \text{ για κάθε αποδεκτή μεταβολή } h$$

δηλαδή για κάθε  $h$  ούτως ώστε  $f_0 + h \in \mathcal{A}$ . Επιπλέον, εάν υπάρχει τοπικό ελάχιστο:

$$\delta^2 J(f_0, h) \geq 0$$

κι αν υπάρχει τοπικό μέγιστο:

$$\delta^2 J(f_0, h) \leq 0$$



*Απόδειξη.* Πράγματι, η συνάρτηση του  $\varepsilon$ ,  $J(f_0 + \diamond h) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , θα πρέπει να έχει τοπικό ακρότατο στο  $\varepsilon = 0$ , και κατά συνέπεια:

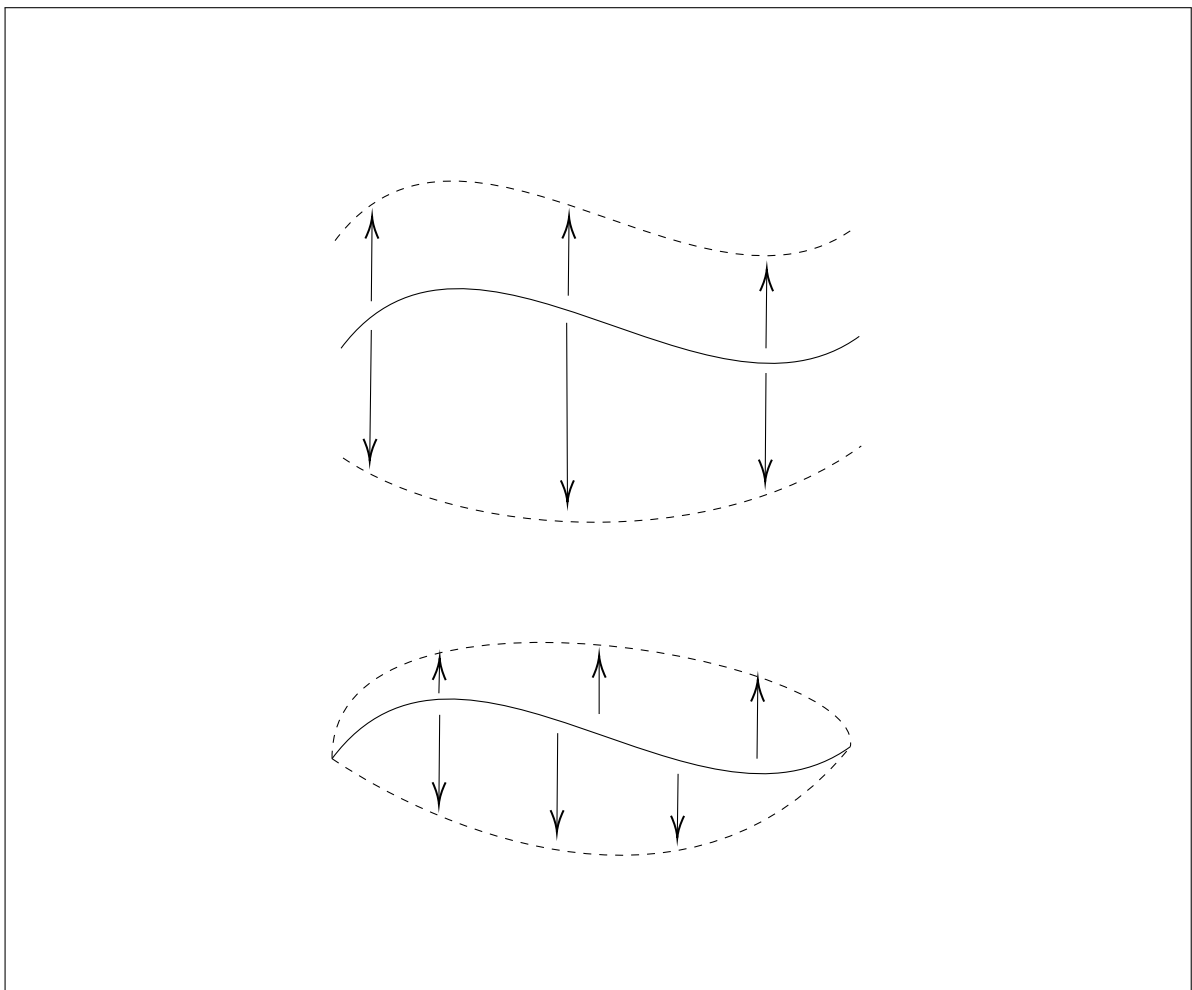
$$\delta J(f_0, h) = \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} J(f_0 + \varepsilon h) = 0$$

Οι περιπτώσεις με τη δεύτερη μεταβολή προκύπτουν και πάλι από τη μονοδιάστατη περίπτωση.  $\square$

Εάν κανείς θέλει να μελετήσει προβλήματα σε χώρους που είναι πολλαπλότητες Riemann, εκεί δεν υπάρχει ενδεχομένως τόσο άμεση περιγραφή της μεταβολής, όπως είναι οι συναρτήσεις  $h$ . Στο παράδειγμα με τις καμπύλες, τι θα σήμαινε άραγε η ποσότητα  $\gamma + \varepsilon h$ ; Αυτός είναι ο λόγος που ορίζουμε προσεκτικά τις μεταβολές: Υπενθυμίζουμε ότι μία (αποδεκτή) μεταβολή της καμπύλης  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  είναι μία συνεχής μονοπαραμετρική οικογένεια  $\Gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [a, b] \rightarrow M$ ,  $\Gamma(s, t) = \Gamma_s(t)$ , με τις ιδιότητες:

- Υπάρχει διαμέριση  $\{a_0 < a_1 < \dots < a_k\}$  του  $[a, b]$  ούτως ώστε στα ορθογώνια  $(-\varepsilon, \varepsilon) \times [a_j, a_{j+1}]$  η  $\Gamma$  είναι ομαλή.
- Η  $\Gamma_s : [a, b] \rightarrow M$  είναι κατά τμήματα κανονική και  $\mathcal{C}^\infty$ .
- Έχουμε  $\Gamma_0(t) = \gamma(t)$ ,  $t \in [a, b]$ .

Στις μεταβολές ορίζονται και τα πεδία μεταβολών, δηλαδή τα διανυσματικά πεδία  $V : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [a, b] \rightarrow TM$  με  $V(s, t) \in T_{\Gamma(s, t)}M$ . Ειδικά μας ενδιαφέρει το πεδίο μεταβολής της  $\gamma$ , δηλαδή το  $V(t) = \partial_{s=0}\Gamma(s, t)$ .



Στο παραπάνω σχήμα: Απεικονίζεται μία μεταβολή και μία κανονική μεταβολή.

Με τον παραπάνω ορισμό, εάν μας ενδιαφέρουν οι καμπύλες, είναι λογικό η πρώτη και δεύτερη μεταβολή ενός συναρτησιακού να οριστούν ως εξής:

**Ορισμός 4.2 (Πρώτη και δεύτερη μεταβολή - γεωμετρική εκδοχή).** Έστω  $(M, g)$  μία πολλαπλότητα Riemann,  $\gamma : I \rightarrow M$  μία καμπύλη και  $\Gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \times I \rightarrow M$  μία μεταβολή αυτής. Έστω επίσης  $J : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$  ένα συναρτησιακό (σε κάποια κλάση  $\mathcal{A}$ ). Ορίζουμε την **πρώτη μεταβολή** (εννοείται στην  $\gamma$ ) από την κατεύθυνση της  $\Gamma$ :

$$\delta J(\gamma, \Gamma) = \delta J(\Gamma) = \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} J(\Gamma_s)$$

καθώς επίσης και τη **δεύτερη μεταβολή**:

$$\delta^2 J(\gamma, \Gamma) = \delta^2 J(\Gamma) = \left. \frac{d^2}{ds^2} \right|_{s=0} J(\Gamma_s)$$

**Παρατήρηση 4.2** Έστω  $(M, g)$  μία πολλαπλότητα Riemann,  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  μία καμπύλη, κι επίσης  $J : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$  ένα συναρτησιακό (σε κάποια κλάση  $\mathcal{A}$ ). Εάν το  $J$  στη  $\gamma$  έχει τοπικό ακρότατο, τότε:

$$\delta J(\Gamma) = 0$$

για κάθε μεταβολή  $\Gamma$  της  $\gamma$ . Επίσης, εάν στο  $\gamma$  έχουμε ελάχιστο, τότε:

$$\delta^2 J(\Gamma) \geq 0$$

ενώ αν έχουμε μέγιστο:

$$\delta^2 J(\Gamma) \leq 0$$

**Απόδειξη.** Πράγματι, η συνάρτηση του  $s$ ,  $J(\Gamma_s) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , θα πρέπει να έχει τοπικό ακρότατο στο  $s = 0$ , και κατά συνέπεια:

$$\delta J(\Gamma) = \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} J(\Gamma_s) = 0$$

Οι περιπτώσεις με τη δεύτερη μεταβολή προκύπτουν και πάλι από τη μονοδιάστατη περίπτωση.  $\square$

Η παραπάνω σκέψη είναι απλή, αλλά πολύ σημαντική και, εάν κανείς το φιλοσοφίσει, αρκετά βαθιά. Αντί κανείς να μελετήσει ένα πρόβλημα σε έναν ιδιόμορφο χώρο (συνατήσεων), μελετάει πολλά (εν γένει άπειρα) εύκολα προβλήματα στο  $\mathbb{R}$ .

**Κίνητρο 4.1** Αυτό που επιδιώκουμε, κι αυτό που φαίνεται από τις Παρατηρήσεις 4.1, 4.2, είναι η σύνδεση των πρώτων και δεύτερων μεταβολών με ελαχιστοποιήσεις και μεγιστοποιήσεις συναρτησιακών, και συγκεκριμένα μας ενδιαφέρουν αποτελέσματα που σχετίζονται με την ελαχιστοποίηση του μήκους. Είναι μάλιστα ήδη γνωστό, στην περίπτωση όπου η  $\gamma$  είναι γεωδαισιακή, ότι τοπικά έχουμε  $\delta L_g(\Gamma) = 0$  και αντιστρόφως (οπότε η συνθήκη  $\delta L_g(\Gamma) = 0$ , για κάθε μεταβολή, είναι ικανή και αναγκαία για την ύπαρξη ελαχίστου). Το αποτέλεσμα αυτό περιγράφεται ως “οι γεωδαισιακές ελαχιστοποιούν τοπικά το μήκος”. Αργότερα θα βρούμε μία συνθήκη για την γεωδαισιακή  $\gamma$ , η οποία εξασφαλίζει  $\delta^2 L_g(\Gamma) < 0$ , όταν τα χωρία υπολογισμού γίνονται πολύ μεγάλα. Κατά συνέπεια, αυτό μας δείχνει ότι οι γεωδαισιακές σε μεγάλα χωρία δεν ελαχιστοποιούν κατ’ ανάγκη το μήκος.

Βέβαια οι μεταβολές έχουν κι άλλες εφαρμογές πέρα απ’ αυτά τα βασικά αποτελέσματα, όπως είναι τα θεωρήματα Morse, Bonnet-Meyers και Synge-Weinstein.

## 4.2 Ο τύπος της δεύτερης μεταβολής

**Θεώρημα 4.1** (Ο τύπος της δεύτερης μεταβολής). Έστω  $(M, g)$  μία πολυπλοκότητα Riemann. Έστω  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  μία γεωδαισιακή μοναδιαίας ταχύτητας, με μεταβολή  $\Gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [a, b] \rightarrow M$  που είναι κανονική (δηλαδή  $\Gamma_s(a) = \gamma(a)$ ,  $\Gamma_s(b) = \gamma(b)$ ). Θεωρούμε  $V$  το αντίστοιχο πεδίο μεταβολών κι έχουμε:

$$\delta^2 L_g(\Gamma) = \frac{d^2}{ds^2} \Big|_{s=0} L_g(\Gamma_s) = \int_a^b |D_t V^\perp|^2 - \text{Rm}(V^\perp, \dot{\gamma}, \dot{\gamma}, V^\perp) dt$$

όπου  $V^\perp$  είναι η κάθετη συνηστώσα του  $V$ .

*Απόδειξη.* Θα συμβολίζουμε στην απόδειξη  $T = \partial_t \Gamma$ ,  $S = \partial_s \Gamma$ , κι επίσης θεωρούμε  $\{a_0 < a_1 < \dots < a_k\}$  διαμέριση όπως αυτήν στον ορισμό των μεταβολών. Με μία παραγωγή έχουμε:

$$\frac{d}{ds} L_g(\Gamma_s|_{[a_{j-1}, a_j]}) = \frac{\partial}{\partial s} \int_{a_{j-1}}^{a_j} \langle T, T \rangle^{1/2} dt = \int_{a_{j-1}}^{a_j} \frac{\partial}{\partial s} \langle T, T \rangle^{1/2} dt$$

όπου η εναλλαγή του ολοκληρώματος και της παραγώγου γίνεται εφόσον έχει δοθεί αρκετή ομαλότητα. Παραγωγίζοντας το εσωτερικό γινόμενο:

$$\int_{a_{j-1}}^{a_j} \frac{\partial}{\partial s} \langle T, T \rangle^{1/2} dt = \int_{a_{j-1}}^{a_j} \frac{1}{2} \langle T, T \rangle^{-1/2} 2 \langle D_s T, T \rangle dt$$

και από το Λήμμα Συμμετρίας:

$$\int_{a_{j-1}}^{a_j} \frac{1}{2} \langle T, T \rangle^{-1/2} 2 \langle D_s T, T \rangle dt = \int_{a_{j-1}}^{a_j} \frac{\langle D_t S, T \rangle}{\langle T, T \rangle^{1/2}} dt$$

Την τελευταία σχέση μπορούμε να την ξανα-παραγωγίσουμε, προκειμένου να πάρουμε τη δεύτερη μεταβολή.

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{ds^2} L_g(\Gamma_s|_{[a_{j-1}, a_j]}) &= \int_{a_{j-1}}^{a_j} \frac{\partial}{\partial s} \frac{\langle D_t S, T \rangle}{\langle T, T \rangle^{1/2}} dt \\ &= \int_{a_{j-1}}^{a_j} \frac{\langle D_s D_t S, T \rangle}{\langle T, T \rangle^{1/2}} + \frac{\langle D_t S, D_s T \rangle}{\langle T, T \rangle^{1/2}} - \frac{\langle D_t S, T \rangle \langle D_s T, T \rangle}{\langle T, T \rangle^{3/2}} dt \end{aligned}$$

(πάλι κάνουμε εναλλαγή της παραγώγου με το ολοκλήρωμα). Στον πρώτο όρο του αρθοίσματος μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη σχέση  $D_s D_t S - D_t D_s S = \text{R}(\partial_s \Gamma, \partial_t \Gamma)S$ , και στους άλλους δύο το Λήμμα Συμμετρίας. Έπεται τότε:

$$[\dots] = \int_{a_{j-1}}^{a_j} \frac{\langle D_t D_s S + \text{R}(S, T)S, T \rangle}{\langle T, T \rangle^{1/2}} + \frac{\langle D_t S, D_t S \rangle}{\langle T, T \rangle^{1/2}} - \frac{\langle D_t S, T \rangle^2}{\langle T, T \rangle^{3/2}} dt$$

κι οπότε εάν  $s = 0$ ,  $\langle T, T \rangle = 1$ :

$$\frac{d^2}{ds^2} \Big|_{s=0} L_g(\Gamma_s|_{[a_{j-1}, j]}) = \left[ \int_{a_{j-1}}^{a_j} \langle D_t D_s S, T \rangle - \text{Rm}(S, T, T, S) + |D_t S|^2 - \langle D_t S, T \rangle^2 dt \right] \Big|_{s=0}$$

Όμως στο  $s = 0$  έχουμε  $D_t T = D_t \dot{\gamma} = 0$ , αφού η  $\gamma$  είναι γεωδαισιακή, πράγμα που μας επιτρέπει να γράψουμε τα αθροίσματα των πρώτων όρων ως εξής:

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^k \left[ \int_{a_{j-1}}^{a_j} \langle D_t D_s S, T \rangle dt \right]_{s=0} &= \sum_{j=0}^k \left[ \int_{a_{j-1}}^{a_j} \frac{d}{dt} \langle D_s S, T \rangle dt \right]_{s=0} \\ &= \sum_{j=0}^k \left[ \langle D_s S, T \rangle \Big|_{a_{j-1}}^{a_j} \right]_{s=0} \\ &= 0 \end{aligned}$$

όπου η τελευταία ισότητα δικαιολογείται από το γεγονός  $D_{s=0} S = D_{s=0} \partial_s \Gamma = 0$  στα  $a_0 = a$ ,  $a_k = b$  (αφού στα άκρα δεν υπάρχει μεταβολή, λόγω της κανονικότητας της  $\Gamma$ ). Ο πρώτος λοιπόν όρος εξαλείφεται και παίρνουμε την απλούστερη σχέση:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{ds^2} \Big|_{s=0} L_g(\Gamma_s) &= \sum_{j=0}^k \left[ \int_{a_{j-1}}^{a_j} -\text{Rm}(S, T, T, S) + |D_t S|^2 - \langle D_t S, T \rangle^2 dt \right]_{s=0} \\ &= \int_a^b -\text{Rm}(V, \dot{\gamma}, \dot{\gamma}, V) + |D_t V|^2 - \langle D_t V, \dot{\gamma} \rangle^2 dt \end{aligned}$$

Αυτοί είναι στην ουσία οι βασικοί υπολογισμοί. Μένει κανείς να γράψει  $V = V^\perp + V^\top$ , όπου  $V^\top = \langle V, \dot{\gamma} \rangle \dot{\gamma}$ . Τότε:

$$(D_t V)^\top = \langle D_t V, \dot{\gamma} \rangle \dot{\gamma} = D_t \langle V, \dot{\gamma} \rangle \dot{\gamma} = D_t V^\top, \text{ αφού } D_t \dot{\gamma} = 0$$

(κι αντίστοιχα  $(D_t V)^\perp = D_t V^\perp$ ), κι άρα:

$$|D_t V|^2 = |(D_t V)^\top|^2 + |(D_t V)^\perp|^2 = \langle D_t V, \dot{\gamma} \rangle^2 + |D_t V^\perp|^2$$

Ο πρώτος όρος στην τελευταία ισότητα θα διώξει τον αντίστοιχο όρο στον τύπο της δεύτερης μεταβολής, που έχουμε ήδη βρει. Ο δεύτερος όρος είναι ένας από τους επιθυμητούς. Τέλος, όσον αφορά τον όρο  $\text{Rm}(V, \dot{\gamma}, \dot{\gamma}, V)$ , από τη συμμετρία:

$$\text{Rm}(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}, \diamond, \diamond) = \text{Rm}(\diamond, \diamond, \dot{\gamma}, \dot{\gamma}) = 0$$

από την πρώτη ταυτότητα του Bianchi και από το γεγονός ότι το  $V^\top$  είναι παράλληλο, έπεται με κάμποσους υπολογισμούς:

$$\text{Rm}(V, \dot{\gamma}, \dot{\gamma}, V) = \text{Rm}(V^\perp, \dot{\gamma}, \dot{\gamma}, V^\perp)$$

(δοκιμάστε να το δείξετε). Συνδυάζοντας όλα τα παραπάνω, παίρνουμε τον τύπο της δεύτερης μεταβολής  $\delta^2 L_g(\Gamma)$ .

$$\delta^2 L_g(\Gamma) = \frac{d^2}{ds^2} \Big|_{s=0} L_g(\Gamma_s) = \int_a^b |D_t V^\perp|^2 - \text{Rm}(V^\perp, \dot{\gamma}, \dot{\gamma}, V^\perp) dt$$

□

Είναι σαφές από τον τύπο της δεύτερης μεταβολής ότι αυτό που παίζει ουσιαστικό ρόλο είναι η κάθετη συνητώσα του πεδίου μεταβολών. Αυτό θα πρέπει να είναι διαισθητικά εμφανές, αφού μία παράλληλη μεταβολή συνεισφέρει μόνο στις αναπαραμετρήσεις της  $\gamma$ . Από εδώ και στο εξής, δεν χρειάζεται να ασχολούμαστε με γενικά πεδία μεταβολών, αλλά με κάθετα πεδία μεταβολών. **Περιορίζουμε τη μελέτη μας στα κάθετα πεδία μεταβολών**, δηλαδή στα πεδία  $V$  της  $\gamma$  για τα οποία  $V = V^\perp$ .

Το Θεώρημα 4.1 οδηγεί φυσιολογικά στον ορισμό του δείκτη της  $\gamma$ .

**Ορισμός 4.3 (Ο δείκτης).** Έστω  $(M, g)$  μία πολλαπλότητα Riemann και  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  μία γεωδαισιακή μοναδιαίας ταχύτητας. Θεωρούμε  $V, W \in \mathcal{X}(\gamma)$  κι ορίζουμε τον **δείκτη** της  $\gamma$ :

$$I(V, W) = \int_a^b \langle D_t V, D_t W \rangle - \text{Rm}(V, \dot{\gamma}, \dot{\gamma}, W) dt$$

Το Θεώρημα 4.1, σε συνδυασμό με τις ιδιότητες της δεύτερης μεταβολής στην Παρατήρηση 4.2, έχει ως συνέπεια την ακόλουθη παρατήρηση.

**Παρατήρηση 4.3** Έστω  $(M, g)$  μία πολλαπλότητα Riemann και  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  μία γεωδαισιακή μοναδιαίας ταχύτητας. Εάν  $\Gamma$  είναι κανονική μεταβολή και  $V$  το αντίστοιχο πεδίο μεταβολών, τότε η ιδιότητα της ελαχιστοποίησης στην  $\gamma$  συνεπάγεται την:

$$I(V, V) \geq 0$$

Αυτό είναι το αντίστοιχο αποτέλεσμα στα γενικά συναρτησιακά, στα οποία όταν το  $J : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$  ελαχιστοποιείται, τότε  $\delta^2 J(\Gamma) \geq 0$ .

Ο τύπος του  $I$  στα πεδία Jacobi μπορεί να λάβει μία συγκεκριμένη, απλοποιημένη μορφή, η οποία δίνεται στην ουσία από την ακόλουθη πρόταση.

**Πρόταση 4.1.** Έστω  $(M, g)$  μία πολλαπλότητα Riemann και  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  μία γεωδαισιακή. Για κάθε  $V, W$  κατά τμήματα ομαλά διανυσματικά πεδία της  $\gamma$ :

$$I(V, W) = - \int_a^b \langle D_t^2 V + \text{R}(V, \dot{\gamma})\dot{\gamma}, W \rangle dt + [\langle D_t V, W \rangle]_a^b - \sum_{j=1}^{k-1} \langle \Delta_j D_t V, W(a_j) \rangle$$

Με  $\{a_0 < a_1 < \dots < a_k\}$  συμβολίζουμε μία διαμέριση στα διαστήματα της οποίας τα  $V, W$  γίνονται ομαλά. Επίσης,  $\Delta_j$  είναι ο τελεστής της διαφοράς  $D_{t=a_j^+} V - D_{t=a_j^-} V$ .

**Απόδειξη.** Θα δουλέψουμε στα υποδιαστήματα  $[a_{j-1}, a_j]$ . Παραγωγίζοντας την ποσότητα  $\langle D_t V, W \rangle$ , έχουμε:

$$\frac{d}{dt} \langle D_t V, W \rangle = \langle D_t^2 V, W \rangle + \langle D_t V, D_t W \rangle$$

κι οπότε με ολοκλήρωση του τελευταίου όρου:

$$\int_{a_{j-1}}^{a_j} \langle D_t V, D_t W \rangle dt = - \int_{a_{j-1}}^{a_j} \langle D_t^2 V, W \rangle dt + [\langle D_t V, W \rangle]_{a_{j-1}}^{a_j}$$

Αθροίζοντας τα παραπάνω κι αφαιρώντας την ποσότητα  $\int_a^b \text{Rm}(V, \dot{\gamma}, \dot{\gamma}, V) dt$ , έχουμε τη ζητούμενη σχέση.  $\square$

Συνέπεια της προηγούμενης πρότασης είναι η επόμενη παρατήρηση.

**Παρατήρηση 4.4** Έστω  $(M, g)$  μία πολλαπλότητα Riemann. Εάν η  $\gamma$  είναι γεωδαισιακή και  $V$  είναι ένα κανονικό, κατά τμήματα ομαλό διανυσματικό πεδίο στην  $\gamma$ , τότε  $I(V, W) = 0$  για όλα τα κανονικά, κατά τμήματα ομαλά διανυσματικά πεδία  $W$  στην  $\gamma$ , εάν και μόνο αν το  $V$  είναι πεδίο Jacobi.

Απόδειξη. Η μία κατεύθυνση είναι άμεση, και συγκεκριμένα υπό την υπόθεση των πεδίων Jacobi. Τα πεδία Jacobi είδαμε ότι αποτελούν λύση μίας γραμμικής διαφορικής εξίσωσης, οπότε το θεώρημα της ύπαρξης των λύσεων δίνει, μεταξύ άλλων, και ομαλότητα. Για την άλλη κατεύθυνση, η απόδειξη παρουσιάζει σημαντικές ομοιότητες με αυτήν κατά την οποία οι ελαχιστικές επιφάνειες είναι γεωδαισιακές. Θα είμαστε λοιπόν συνοπτικοί.

Σε τυχόν διάστημα της μορφής  $[a_{j-1}, a_j]$ , θεωρούμε μία συνάρτηση επάρματος (bump function), καθώς επίσης και το κανονικό πεδίο  $W = \varphi(t)\langle D_t^2 V + R(V, \dot{\gamma})\dot{\gamma}, W \rangle$ . Εφόσον η  $\varphi$  είναι συνάρτηση επάρματος, από την Πρόταση 4.1 έπεται:

$$0 = I(V, W) = - \int_{a_{j-1}}^{a_j} \varphi(t) |D_t^2 V + R(V, \dot{\gamma})\dot{\gamma}|^2 dt$$

Μάλιστα το παραπάνω ισχύει για κάθε  $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty([a_{j-1}, a_j])$ , πράγμα που μας δείχνει ότι:

$$D_t^2 V + R(V, \dot{\gamma})\dot{\gamma} = 0 \text{ στο } [a_{j-1}, a_j]$$

δηλαδή το πεδίο  $V$  είναι κατά τμήματα Jacobi. Μένει μόνο να δείξουμε ότι στα συνδεδεμένα σημεία  $a_j$  δεν υπάρχουν “γωνίες”. Επιλέγουμε λοιπόν πεδίο  $W$  με:

$$W(a_j) = D_{t=a_j^+} V - D_{t=a_j^-} V, \quad j \in \{1, \dots, k-1\}, \quad W(a) = W(b) = 0$$

και ξανά από την Πρόταση 4.1, σε συνδυασμό με την ιδιότητα του κατά τμήματος Jacobi:

$$0 = I(V, W) = - \sum_{j=1}^{k-1} |\Delta_j D_t V|^2, \text{ δηλαδή } \Delta_j D_t V = 0 \text{ για κάθε } j$$

Το τελευταίο εξασφαλίζει την ανυπαρξία γωνιών, και κατά συνέπεια το ζητούμενο (θυμηθείτε επίσης τη μοναδικότητα των πεδίων Jacobi).  $\square$

### 4.3 Η δεύτερη μεταβολή της ενέργειας

Μία άλλη διατύπωση των προηγούμενων αποτελεσμάτων, που είναι σε ορισμένα σημεία βολικότερη, είναι αυτή που εμπλέκει την ενέργεια. Στο [dC-RG, 1992], για παράδειγμα, ακολουθείται περιγραφή των αποτελεσμάτων μεταβολής χρησιμοποιώντας εξολοκλήρου την ενέργεια.

**Ορισμός 4.4 (Η κινητική ενέργεια).** Έστω  $(M, g)$  μία πολλαπλότητα Riemann,  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  μία καμπύλη και  $\Gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [a, b] \rightarrow M$  μία μεταβολή αυτής. Ορίζουμε την **κινητική ενέργεια** από την  $s$ -μεταβολή της  $\gamma$  ως εξής:

$$E(s) = \int_a^b |\partial_t \Gamma(s, t)|^2 dt$$

Δεν είναι δύσκολο κανείς να δείξει ότι, εάν η  $\gamma$  είναι γεωδαισιακή, για κάθε κανονική μεταβολή  $\Gamma$  έχουμε  $E(\gamma) \leq E(s)$ . Ακολουθώντας επίσης την απόδειξη της πρώτης μεταβολής του μήκους, μπορεί ναδειχθεί ότι υπάρχει ανάλογος τύπος για την πρώτη μεταβολή της ενέργειας. Βέβαια εμάς εδώ θα μας απασχολήσει μονάχα η δεύτερη μεταβολή της ενέργειας.

Συνδυάζοντας τις αποδείξεις του Θεωρήματος 4.1 και της Πρότασης 4.1, μπορούμε να πάρουμε το ακόλουθο θεώρημα:

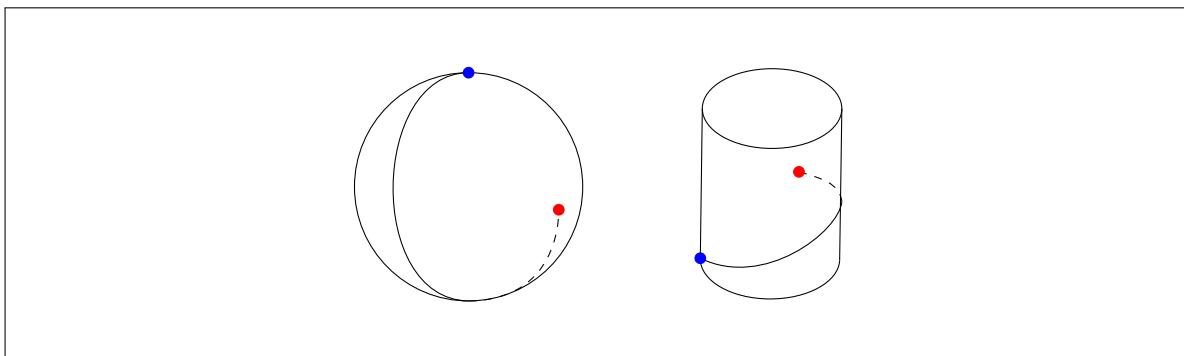
**Θεώρημα 4.2** (Η δεύτερη μεταβολή της ενέργειας). Έστω  $(M, g)$  μία πολλαπλότητα Riemann,  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  μία γεωδαισιακή και  $\Gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [a, b] \rightarrow M$  μία κανονική μεταβολή. Τότε:

$$\frac{1}{2}\ddot{E}(0) = - \int_a^b \langle D_t^2 V + R(V, \dot{\gamma})\dot{\gamma}, V \rangle dt - \sum_{j=1}^{k-1} \langle \Delta_j D_t V, V(a_j) \rangle$$

Με  $V$  συμβολίζουμε το πεδίο μεταβολής της  $\Gamma$  και με  $\{a_0 < a_1 < \dots < a_k\}$  τη διαμέριση στα διαστήματα της οποίας το  $V$  γίνεται ομαλό.

## 4.4 Αδυναμία ελαχιστοποίησης πέρα από συζυγή σημεία

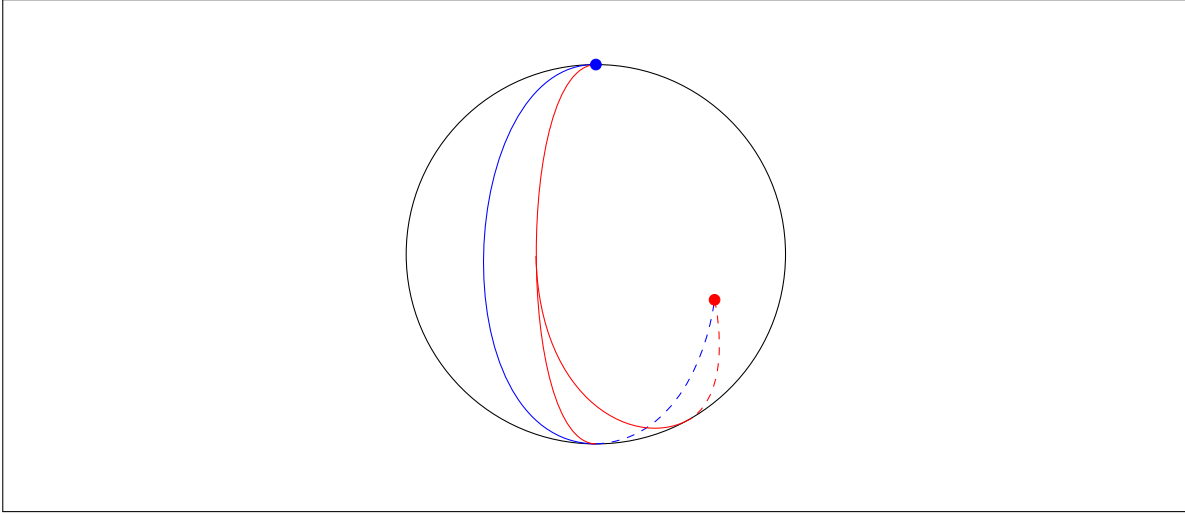
Γνωρίζουμε ότι, τοπικά, οι γεωδαισιακές είναι ελαχιστοποιούσες καμπύλες του μήκους. Ολικά όμως, όπως φαίνεται από το παράδειγμα της σφαίρας ή του κυλίνδρου, οι γεωδαισιακές δεν ελαχιστοποιούν το μήκος σε οσοδήποτε μεγάλο χωρίο.



**Κίνητρο 4.2** Μας ενδιαφέρει να διερευνήσουμε πόσο μεγάλο πρέπει να είναι αυτό το χωρίο ούτως ώστε η γεωδαισιακή να παύει να είναι πλέον ελαχιστοποιούσα. Λαμβάνοντας υπόψη την  $\delta^2 L_g(\Gamma) \geq 0$  όταν υφίσταται ελαχιστοποίηση του  $L_g$ , ενδεχομένως θα μας ενδιέφερε να βρούμε συνθήκες υπό τις οποίες  $\delta^2 L_g(\Gamma) < 0$ . Επίσης, δεδομένου ότι τα κρίσιμα σημεία του  $d_v(\exp_p)$  σχετίζονται με τα συζυγή σημεία του  $p$ , αναμένουμε η συζυγία κι αυτή να παίζει ρόλο.

**Ορισμός 4.5 (Συζυγή σημεία καμπυλών).** Έστω  $(M, g)$  μία πολλαπλότητα Riemann και  $\gamma : [a, c] \rightarrow M$  μία γεωδαισιακή. Λέμε ότι η  $\gamma$  έχει **συζυγές** σημείο εάν υπάρχει  $b \in (a, c]$  ούτως ώστε τα  $\gamma(a)$ ,  $\gamma(b)$  να είναι συζυγή. Το συζυγές σημείο θα λέγεται **εσωτερικό** εάν  $b \in (a, c)$ .

Η γεωμετρική εποπτεία που έχει κανείς είναι η εξής: Έστω ότι στη σφαίρα  $\mathbb{S}^2$  παίρνουμε γεωδαισιακές που περνούν πέρα από αντιποδικά σημεία (έστω  $p = \gamma(a)$  και  $q$  αυτά τα αντιποδικά σημεία). Τότε μεταξύ των  $p, q$  υπάρχει (για παράδειγμα από την Πρόταση 1.1) ολόκληρη μεταβολή μέσω γεωδαισιακών της  $\gamma$  (που εν προκειμένω είναι τα ημικύκλια μεταξύ των αντιποδικών σημείων). Διαλέγουμε ένα (διαφορετικό του τμήματος της  $\gamma$ ) ημικύκλιο  $C$ , και παρατηρούμε ότι η καμπύλη  $C$  μαζί με το τελικό τμήμα της  $\gamma$  αποτελεί κατά τμήματα γεωδαισιακή, με μήκος όσο της  $\gamma$ . Στο σημείο  $q$  υπάρχει γωνία, οπότε με τα γνωστά επιχειρήματα εξομάλυνσης των γωνιών των γεωδαισιακών, μπορούμε να πάρουμε μία καινούρια καμπύλη μικρότερου μήκους, που συνδέει τα άκρα της  $\gamma$ .



Το παρακάτω θεώρημα εξασφαλίζει, στην ουσία, μία συνθήκη υπό την οποία οι γεωδαισιακές δεν ελαχιστοποιούν το μήκος.

**Θεώρημα 4.3.** Έστω  $(M, g)$  μία πολυπλοπότητα Riemann και  $p, q \in M$ . Εάν η  $\gamma$  είναι γεωδαισιακή μεταξύ των  $p, q$ , με εσωτερικό συζυγές σημείο, τότε υπάρχει κανονικό πεδίο  $V \in \mathcal{X}(\gamma)$  με  $I(V, V) < 0$ . Δηλαδή  $\delta^2 L_g < 0$  (για κατάλληλη μεταβολή).

*Απόδειξη.* Θεωρούμε τη γεωδαισιακή  $\gamma : [a, c] \rightarrow M$  με  $\gamma(a) = p$ ,  $\gamma(b) = q$ , κι επίσης εσωτερικό συζυγές σημείο  $\gamma(b)$ ,  $b \in (a, c)$ . Εφόσον τα  $\gamma(a), \gamma(b)$  είναι συζυγή, μπορεί να βρεθεί πεδίο Jacobi που μηδενίζεται στα  $a, b$ , έστω  $J$ . Ορίζουμε τώρα:

$$Y(t) = \begin{cases} J(t), & t \in [a, b] \\ 0, & t \in [b, c] \end{cases}$$

και παρατηρούμε ότι αυτό είναι ένα κανονικό και κατά τμήματα ομαλό διανυσματικό πεδίο κατά μήκος της  $\gamma$ . Στο  $t = b$  ενδέχεται να υπάρχει “γωνία”, και γι’ αυτόν τον λόγο ορίζουμε επίσης  $W$  ομαλό διανυσματικό πεδίο της  $\gamma$  με:

$$W(b) = \Delta_{t=b} D_t Y \text{ και συμπαγή φορέα}$$

Για την ακρίβεια πάντοτε υπάρχει ασυνέχεια της παραγώγου, αφού αν  $0 = \Delta_{t=b} D_t Y = -D_{t=b} J$ , τότε το  $J$  θα ήταν από μοναδικότητα παντού μηδενικό. Επίσης, για μικρό  $\varepsilon > 0$  ορίζουμε  $V_\varepsilon = Y + \varepsilon W$  κι έχουμε:

$$I(V_\varepsilon, V_\varepsilon) = I(Y + \varepsilon W, Y + \varepsilon W) = I(Y, Y) + 2\varepsilon I(Y, W) + \varepsilon^2 I(W, W)$$

Το  $Y$  ικανοποιεί την εξίσωση του Jacobi στα  $[a, b]$ ,  $[b, c]$  με  $Y(b) = 0$ , κι οπότε από την Πρόταση 4.1:

$$I(Y, Y) = -\langle \Delta_{t=b} D_t Y, Y(b) \rangle = 0$$

Αντίστοιχα, υπολογίζουμε το  $I(Y, W)$ .

$$I(Y, W) = -\langle \Delta_{t=b} D_t Y, W(b) \rangle = -|W(b)|^2$$

Από τα παραπάνω παίρνουμε τελικά ότι:

$$I(V_\varepsilon, V_\varepsilon) = -2\varepsilon |W(b)|^2 + \varepsilon^2 I(W, W) = O(-\varepsilon)$$

κι οπότε για  $\varepsilon = \varepsilon_0$  αρκετά μικρό, έχουμε  $I(V_{\varepsilon_0}, V_{\varepsilon_0}) < 0$ . Επιλέγουμε λοιπόν  $V = V_{\varepsilon_0}$ .  $\square$



Μπορούμε να δείξουμε και ένα αποτέλεσμα που μοιάζει να είναι κάποιας μορφής αντίστροφο του προηγούμενου. Μπορούμε δηλαδή να δείξουμε ότι, εάν δεν υπάρχουν συζυγή σημεία, η καμπύλη  $\gamma$  αποτελεί ελαχιστοποιούσα σε κοντινές κανονικές μεταβολές.

**Λήμμα 4.1** Έστω  $(M, g)$  μία πολλαπλότητα Riemann και  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  μία γεωδαισιακή. Εάν  $J_1, J_2 \in \mathcal{J}(\gamma)$ , τότε η ποσότητα  $f(t) = \langle D_t J_1, J_2 \rangle(t) - \langle J_1, D_t J_2 \rangle(t)$  είναι σταθερή.

Απόδειξη. Είναι θέμα υπολογισμών, παραγωγίζοντας την  $f$ . □

**Θεώρημα 4.4.** Έστω  $(M, g)$  μία πολλαπλότητα Riemann και  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  μία γεωδαισιακή χωρίς εσωτερικά συζυγή σημεία. Εάν  $V$  είναι οποιοδήποτε κανονικό, κατά τμήματα ομαλό διανυσματικό πεδίο κατά μήκος της  $\gamma$ , τότε  $I(V, V) \geq 0$ . Η ισότητα συμβαίνει εάν και μόνο αν το  $V$  είναι πεδίο Jacobi. Δηλαδή, εάν το  $\gamma(b)$  δεν είναι συζυγές του  $\gamma(a)$ , τότε  $I(V, V) > 0$ .

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι εκτενής, και θα γίνει συνοπτικά, σε βήματα.

- Θεωρούμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι  $a = 0$ . Επίσης, ορίζουμε  $p = \gamma(0)$  και θεωρούμε  $\{w_1, \dots, w_n\}$  μία ορθοκανονική βάση του  $T_p M$ , με  $w_1 = \dot{\gamma}(0)$ . Για κάθε  $i \geq 2$ , συμβολίζουμε με  $J_i$  το πεδίο Jacobi με  $J_i(0) = 0$ ,  $D_{t=0} J_i = w_i$ .
- Εφόσον η  $\gamma$  δεν έχει συζυγή σημεία, κανένας γραμμικός συνδυασμός των  $J_i$  δεν μηδενίζεται. Δηλαδή (για παράδειγμα με επιχειρήματα διαστάσεων), τα  $J_i$  παράγουν για κάθε  $t$  τον  $T_{\gamma'(t)}^\perp T_{\gamma(t)} M$ . Εάν λοιπόν το  $V$  είναι όπως στη διατύπωση του θεωρήματος:

$$V(t) = u^i(t) J_i(t)$$

για ομαλές συναρτήσεις  $u^i : (0, b) \rightarrow M$ .

- Σε κανονικές συντεταγμένες, από τη μορφή των πεδίων Jacobi που μηδενίζονται σε σημείο, μπορούμε να γράψουμε:

$$J_i(t) = t \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{\gamma(t)} \text{ και } V(t) = t u^i(t) \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{\gamma(t)}$$

Με αυτή τη μορφή κανείς μπορεί να δείξει ότι οι  $u^i$  επεκτείνονται ομαλά στο  $[0, b]$  (αυτό το παραλείπουμε).

- Ορίζουμε:

$$X = u^i D_t J_i \text{ και } Y = \dot{u}^i J_i$$

και παρατηρούμε ότι  $D_t V = X + Y$ , στα διαστήματα στα οποία η  $V$  είναι ομαλή. Έστω για τον συμβολισμό ότι  $\{a_0 < a_1 < \dots < a_k\}$  είναι η αντίστοιχη διαμέριση.

- Αποσκοπούμε να δείξουμε ότι:

$$|D_t V|^2 - \text{Rm}(V, \dot{\gamma}, \dot{\gamma}, V) = \frac{d}{dt} \langle V, X \rangle + |Y|^2$$

Ξεκινούμε παραγωγίζοντας το  $\langle V, X \rangle$ .

$$\frac{d}{dx} \langle V, X \rangle = \langle D_t V, X \rangle + \langle V, D_t X \rangle = \langle X + Y, Y \rangle + \langle V, D_t X \rangle$$

Από την εξίσωση του Jacobi μπορεί ναδειχθεί ότι:

$$D_t X = \dot{u}^i D_t J_i - \text{Rm}(V, \dot{\gamma}) \dot{\gamma}$$

κι άρα:

$$\langle D_t X, V \rangle = \langle \dot{u}^i D_t J_i, u^\lambda J_\lambda \rangle - \text{Rm}(V, \dot{\gamma}) \dot{\gamma} \quad (4.1)$$

Όμως στο  $t = 0$  έχουμε  $\langle D_t J_i, J_\lambda \rangle - \langle J_i, D_t J_\lambda \rangle = 0$ , κι άρα, από το Λήμμα 4.1,  $\langle D_t J_i, J_\lambda \rangle = \langle J_i, D_t J_\lambda \rangle$ . Αυτό στον πρώτο όρο της (4.1) δίνει:

$$\langle \dot{u}^i D_t J_i, u^\lambda J_\lambda \rangle = \dot{u}^i u^\lambda \langle D_t J_i, J_\lambda \rangle = \langle \dot{u}^i J_i, u^\lambda D_t J_\lambda \rangle = \langle Y, X \rangle$$

Με αντικατάσταση του παραπάνω στην (4.1), κι έπειτα στον τύπο της παραγώγου στην αρχή του βήματος, έχουμε τη ζητούμενη σχέση.

- Υπολογίζουμε:

$$\begin{aligned} I(V, V) &= \sum_{j=1}^k \int_{a_{j-1}}^{a_j} |D_t V|^2 - \text{Rm}(V, \dot{\gamma}, \dot{\gamma}, V) dt \\ &= \sum_{j=1}^k [\langle V, X \rangle]_{a_{j-1}}^{a_j} + \int_0^b |Y|^2 dt \\ &= \int_0^b |Y|^2 dt \end{aligned}$$

αφού τα  $V, X$  είναι συνεχή. Έπεται ότι  $I(V, V) \geq 0$ .

- Εάν  $I(V, V) = 0$ , τότε αναγκαστικά  $\dot{u}^i \equiv 0$ , δηλαδή τα  $u^i$  είναι σταθερά. Εφόσον λοιπόν το  $V$  είναι  $\mathbb{R}$ -γραμμικός συνδυασμός πεδίων Jacobi, το ίδιο είναι πεδίο Jacobi.

□

Πολύ γενικότερο θεώρημα είναι αυτό του δείκτη του Morse, το οποίο μπορεί να βρεθεί στο [dC-RG, 1992]. Το θεώρημα του δείκτη του Morse δικαιολογεί την ορολογία του “δείκτη” στον ορισμό του  $I$ , κι έχει σημασία τουλάχιστον να αναφερθούμε σε αυτό. Η διατύπωση του θεωρήματος έχει ως εξής:

**Θεώρημα 4.5** (Το θεώρημα του δείκτη του Morse). Έστω  $(M, g)$  μία πολλαπλότητα Riemann και  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  μία γεωδαισιακή. Συμβολίζουμε με  $\mathcal{I}$  τη μέγιστη διάσταση των υποχώρων των κανονικών διανυσματικών πεδίων της  $\gamma$ , για τους οποίους ο δείκτης  $I$  είναι αρνητικά ορισμένος. Το  $\mathcal{I}$  ισούται με το πλήθος των συζυγών σημείων της  $\gamma$  στο  $(a, b)$ , λαμβάνοντας υπόψη την τάξη.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

# Σημεία αποκοπής

### 5.1 Χρόνοι και τόποι αποκοπής

Σε αυτό το κεφάλαιο θα μελετήσουμε περισσότερο τα συζυγή σημεία και την ιδιότητα αμφιδιαφόρισης της  $\exp_p$ .

**Κίνητρο 5.1** Εάν υποθέσουμε ότι έχουμε μία καμπύλη  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  που είναι γεωδαισιακή μοναδιαίας ταχύτητας, υπάρχουν δύο ενδεχόμενα: Είτε η γεωδαισιακή θα είναι ελαχιστοποιούσα παντού, είτε (το πιο σύνηθες) από ένα σημείο κι έπειτα θα παύει να είναι ελαχιστοποιούσα (για παράδειγμα, αυτό θα συνέβαινε εάν η  $\gamma$  περνούσε από κάποιο συζυγές σημείο). Λόγω συνέχειας, ο περιορισμός της  $\gamma$  που αποτελεί ελαχιστοποιούσα συνάρτηση του μήκους, έχει πεδίο ορισμού  $[a, t_0]$  ή  $[a, \infty)$ . Μάλιστα, λόγω της μοναδιαίας ταχύτητας, ο αριθμός  $t \in \{t_0 - a, \infty\}$  αποτελεί τον χρόνο έως ότου ένα κινούμενο σημείο κατά μήκος της  $\gamma$  πάψει να κινείται σε ελαχιστοποιούσα του μήκους.

Υπενθυμίζουμε ότι χρησιμοποιείται ο συμβολισμός  $\gamma_v$  για τη μεγιστική γεωδαισιακή καμπύλη που ξεκινά από σημείο  $p$  κι έχει ταχύτητα  $v$  στην αφετηρία. Θα θεωρούμε επίσης, για ευκολία, το πεδίο ορισμού  $[0, b]$ .

**Ορισμός 5.1 (Χρόνος και τόπος αποκοπής).** Έστω  $(M, g)$  μία πλήρης και συνεκτική πολλαπλότητα Riemann, και  $p \in M$ ,  $v \in T_p M$ . Ορίζουμε τον **χρόνο αποκοπής**:

$$t_{\text{cut}}(p, v) = \sup\{b > 0 \mid \eta \gamma_v|_{[0, b]} \text{ είναι ελαχιστοποιούσα}\}$$

Ορίζουμε επίσης τον **τόπο αποκοπής**:

$$\text{Cut}(p) = \{q \in M \mid \exists \gamma_v \text{ με } \gamma_v(t_{\text{cut}}(p, v)) = q\}$$

του οποίου τα στοιχεία θα λέμε **σημεία αποκοπής**.

**Πρόταση 5.1.** Έστω  $(M, g)$  μία πλήρης και συνεκτική πολλαπλότητα Riemann,  $p \in M$  και μοναδιαίο  $v \in T_p M$ . Συμβολίζουμε  $t_{\text{cut}} = t_{\text{cut}}(p, v)$  κι έχουμε τα εξής:

- (α) Εάν  $0 < b < t_{\text{cut}}$ , τότε η  $\gamma_v|_{[0, b]}$  δεν έχει κανένα συζυγές σημείο και είναι η μοναδική ελαχιστοποιούσα καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας.
- (β) Εάν  $t_{\text{cut}} < \infty$ , τότε η  $\gamma_v|_{[0, t_{\text{cut}}]}$  είναι ελαχιστοποιούσα και: i) το  $\gamma_v(t_{\text{cut}})$  είναι συζυγές του  $p$  ή/και ii) υπάρχουν τουλάχιστον δύο ελαχιστοποιούσες γεωδαισιακές μοναδιαίας ταχύτητας από το  $p$  στο  $\gamma_v(t_{\text{cut}})$ .

**Απόδειξη.** Για το (α): Έστω  $0 < b < t_{\text{cut}}$ . Εξ ορισμού του  $t_{\text{cut}}$ , βρίσκουμε  $0 < b < c < t_{\text{cut}}$  ούτως ώστε η  $\gamma_v|_{[0,c]}$  να είναι ελαχιστοποιούσα, και παρατηρούμε ότι από το Θεώρημα 4.3 το  $\gamma_v(t)$  δεν είναι συζυγές σημείο για κανένα  $0 < t \leq b$ . Σημειώνουμε ότι η  $\gamma_v|_{[0,b]}$  είναι ελαχιστοποιούσα, αφού η  $\gamma_v|_{[0,c]}$  είναι (γιατί:). Η  $\gamma_v|_{[0,b]}$  είναι επίσης μοναδική. Εάν δεν ήταν (και υπήρχε ακόμη μία, η  $\gamma$ ), τότε από τη μοναδικότητα των γεωδαισι-ακών,  $\dot{\gamma}(b) \neq \dot{\gamma}_v(b)$ . Δηλαδή η καμπύλη  $\zeta$  που στο  $[0, b]$  είναι η  $\gamma$  και στο  $[b, c]$  η  $\gamma_v$  είναι ελαχιστοποιούσα, κατά τμήματα γεωδαισιακή, με γωνία. Αυτό σημαίνει -κατά τα γνωστά- ότι μπορεί να ομαλοποιηθεί στη γωνία της και να αποκτήσει μικρότερο μήκος, πράγμα άτοπο.

Για το (β): Υποθέτουμε ότι  $t_{\text{cut}} < \infty$ , κι επιλέγουμε ακολουθία  $\{b_j\}_{j=1}^{\infty}$  με  $b_j \nearrow t_{\text{cut}}$ , με τις  $\gamma_v|_{[0,b_j]}$  να είναι ελαχιστοποιούσες. Παρατηρούμε, λόγω συνέχειας, ότι:

$$d_g(p, \gamma_v(t_{\text{cut}})) = \lim_{j \rightarrow \infty} d_g(p, \gamma_v(b_j)) = \lim_{j \rightarrow \infty} b_j = t_{\text{cut}}$$

πράγμα που υποδεικνύει ότι η  $\gamma_v$  είναι ελαχιστοποιούσα στο  $[0, t_{\text{cut}}]$ . Έστω τώρα ότι το  $\gamma_v(t_{\text{cut}})$  δεν είναι συζυγές του  $p$ . Θα δούμε ότι αναγκαστικά υπάρχουν δύο ελαχιστοποιούσες γεωδαισιακές μοναδιαίας ταχύτητας από το  $p$  στο  $\gamma_v(t_{\text{cut}})$ , κι οπότε θα έχουμε αποδείξει την πρόταση. Διαλέγουμε λοιπόν ακολουθία  $\{b_j\}_{j=1}^{\infty}$  με  $b_j \nearrow t_{\text{cut}}$ , κι από τον ορισμό του  $t_{\text{cut}}$ , καμία από τις  $\gamma_v|_{[0,b_j]}$  δεν είναι ελαχιστοποιούσα. Οπότε, από το Θεώρημα Hopf-Rinow, μπορούμε να βρούμε ελαχιστοποιούσα γεωδαισιακή μοναδιαίας ταχύτητας  $\gamma_j : [0, a_j] \rightarrow M$  μεταξύ των  $p, \gamma_v(b_j)$ , με  $a_j < b_j$ . Ορίζουμε τώρα τα μοναδιαία διανύσματα  $w_i = \dot{\gamma}_j(0)$ , και από τη συμπίεση της σφαίρας, υπάρχει υπακολουθία αυτών που συγκλίνει. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, και για ευκολία, υποθέτουμε ότι η ίδια συγκλίνει στο  $w$ . Αναλόγως, λόγω του ότι η  $\{a_j\}_{j=1}^{\infty}$  είναι φραγμένη, μπορούμε να υποθέσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι η  $a_j$  συγκλίνει στο  $a$ . Τότε:

$$\gamma_v(b_j) = \gamma_j(a_j) = \exp_p(a_j w_j) \rightarrow \exp_p(a w)$$

και:

$$t_{\text{cut}} = d_g(p, \gamma_v(t_{\text{cut}})) = \lim_{j \rightarrow \infty} d_g(p, \gamma_j(a_j)) = \lim_{j \rightarrow \infty} a_j = a$$

οπότε η  $\gamma(t) = \exp_p(tw)$  στο  $[0, t_{\text{cut}}]$  είναι κι αυτή ελαχιστοποιούσα γεωδαισιακή μοναδιαίας ταχύτητας. Πρέπει να δείξουμε ότι οι  $\gamma_v, \gamma$  δεν ταυτίζονται. Εφόσον το  $\gamma_v(t_{\text{cut}})$  δεν είναι συζυγές σημείο, από την Πρόταση 3.1 το  $t_{\text{cut}}v$  είναι κανονικό σημείο της  $\exp_p$ , κι άρα η  $\exp_p$  αντιστρέφεται τοπικά. Επειδή  $\exp_p(a_j w_j) = \exp(b_j v)$ , καθώς τα  $b_j v$  πλησιάζουν το  $t_{\text{cut}}v$  (λόγω του  $1 - 1$ ) τα  $a_j w_j$  θα πρέπει να διατηρούν κάποια απόσταση, μακριά από τον τόπο στον οποίο η  $\exp_p$  αντιστρέφεται. Δηλαδή, με όρια,  $t_{\text{cut}}v \neq aw$ , κι άρα οι  $\gamma_v, \gamma$  δεν ταυτίζονται.  $\square$

Θα διατυπώσουμε επίσης το παρακάτω θεώρημα, το οποίο δεν θα αποδείξουμε. Παραπέμπουμε τον αναγνώστη στο [Lee-RG, 2018].

**Θεώρημα 5.1** (Η συνέχεια των χρόνων αποκοπής). Έστω  $(M, g)$  μία πλήρης και συνεκτική πολυπλοπότητα Riemann. Η συνάρτηση  $t_{\text{cut}} : UTM \rightarrow (0, \infty]$  στην μοναδιαία εφαπτόμενη δέσμη  $UTM = \{(p, v) \in TM \mid |v|_g = 1\}$  είναι συνεχής.

## 5.2 Ο τόπος αντιστροφής

**Κίνητρο 5.2** Η διαίσθησή μας, σε συνδυασμό με την Πρόταση 5.1, υποδεικνύει ότι οι γεωδαισιακές δεν συμπεριφέρονται καλά κοντά στους χρόνους αποκοπής. Οπότε, για την μελέτη της εκθετικής θα είναι πιθανότητα χρήσιμο να μελετήσουμε τις γεωδαισιακές μακριά απ' αυτούς. Αυτό μας οδηγεί στον ορισμό του τόπου αντιστροφής.

**Ορισμός 5.2 (Τόπος αντιστροφής και εφαπτόμενος τόπος αποκοπής).** Έστω  $(M, g)$  μία πλήρης και συνεκτική πολλαπλότητα Riemann. Ορίζουμε τον **τόπο αντιστροφής** του  $p$  ως εξής:

$$\text{ID}(p) = \{v \in T_p M \mid |v| < t_{\text{cut}}(p, v/|v|)\}$$

Επίσης ορίσουμε το σύνορο αυτού του χώρου, ως τον **εφαπτόμενο τόπο αποκοπής**:

$$\text{TCL}(p) = \partial \text{ID}(p) = \{v \in T_p M \mid |v| = t_{\text{cut}}(p, v/|v|)\}$$

**Θεώρημα 5.2.** Έστω  $(M, g)$  μία πλήρης και συνεκτική πολλαπλότητα Riemann, και  $p \in M$ . Τα ακόλουθα αληθεύουν:

- (α) Το  $\text{Cut}(p) \subseteq M$  είναι κλειστό μηδενοσύνολο.
- (β) Ο περιορισμός της εκθετικής στο  $\overline{\text{ID}(p)}$  είναι επί.
- (γ) Ο περιορισμός της εκθετικής στο  $\text{ID}(p)$  είναι αμφιδιαφόριση επί του  $M \setminus \text{Cut}(p)$ .

*Απόδειξη.* Για το (α): Θεωρούμε ακολουθία  $\{q_j\}_{j=1}^\infty \subseteq \text{Cut}(p)$  που συγκλίνει στο  $q$ , και θα δείξουμε ότι  $q \in \text{Cut}(p)$ . Γράφουμε λοιπόν  $q_j = \exp_p(t_{\text{cut}}(p, v_j)v_j)$  για μοναδιαία  $v_j$ , κι έχουμε, από τη συμπίεση της σφαίρας, συγκλίνουσα υπακολουθία του  $v_j$ . Υποθέτουμε και πάλι χωρίς βλάβη της γενικότητας, κατά τα συνήθη, ότι η  $v_j$  συγκλίνει στο  $v$ . Οπότε:

$$t_{\text{cut}}(p, v_j) \rightarrow t_{\text{cut}}(p, v)$$

από τη συνέχεια του  $t_{\text{cut}}$ . Μάλιστα  $t_{\text{cut}}(p, v) < \infty$ . Από τη συνέχεια της εκθετικής:

$$q_j = \exp_p(t_{\text{cut}}(p, v_j)v_j) \rightarrow \exp_p(t_{\text{cut}}(p, v)v) \in \text{Cut}(p)$$

κι άρα  $q \in \text{Cut}(p)$ . Όσον αφορά το μέτρο, η ιδέα είναι να δείξουμε ότι το  $\text{TCL}(p)$  είναι μηδενοσύνολο. Έπειτα, επειδή η  $\exp_p$  είναι ομαλή, το:

$$\text{Cut}(p) = \exp_p(\text{TCL}(p))$$

θα είναι επίσης μηδενοσύνολο. Το  $\text{TCL}(p)$ , όμως, εύκολα δείχνει κανείς ότι είναι μηδενοσύνολο. Αρκεί να παραστήσουμε το  $\text{TCL}(p)$  τοπικά ως γράφημα, που προκύπτει από την πεπλεγμένη μορφή  $|v| = t_{\text{cut}}(p, v/|v|)$  (εδώ πρέπει να εισαχθούν βέβαια συντεταγμένες, για παράδειγμα πολικές  $r = t_{\text{cut}}(p, \theta^1, \dots, \theta^n)$ ). Αριθμήσιμο το πολύ πλήθος τοπικών γραφημάτων συνυποτούν το  $\text{TCL}(p)$ , και καθένα απ' αυτά έχει μέτρο 0 (αφού είναι γράφημα συνεχούς συνάρτησης). Κατά συνέπεια, το  $\text{TCL}(p)$  έχει μέτρο 0.

Για το (β): Χρησιμοποιούμε το Θεώρημα Hopf-Rinow.

Για το (γ): Από τους ορισμούς προκύπτει ότι  $\exp_p(\text{ID}(p)) = M \setminus \text{Cut}(p)$ . Αφού το  $\exp_p(\text{ID}(p))$  δεν περιέχει σημεία αποκοπής, δεν θα πρέπει να περιέχει ούτε συζυγή σημεία του  $p$  (δείτε το Θεώρημα 4.3). Εφόσον δεν υπάρχουν σημεία αποκοπής, η  $\exp_p$  στο  $\text{ID}(p)$  είναι 1-1. Εφόσον δεν υπάρχουν συζυγή σημεία, η  $\exp_p$  στο  $\text{ID}(p)$  είναι τοπική αμφιδιαφόριση (από την Πρόταση 3.1), κι άρα από το προηγούμενο, αμφιδιαφόριση.  $\square$



---

## Ευρετήριο

Δείκτης, 29	Πεδίο Jacobi, εφαπτομενικό, 10
Διανυσματικό πεδίο, εφαπτομενικό, 10	Πεδίο Jacobi, κάθετο, 10
Διανυσματικό πεδίο, κάθετο, 10	Σημεία αποκοπής, 35
Ενέργεια, 30	Σημεία, κανονικά, 19
Εξίσωση του Jacobi, 6	Σημεία, συζυγή, 20
Καμπυλότητα, τμηματική, 15	Σημεία, συζυγή, καμπυλών, 31
Μεταβολή, δεύτερη, 24	Σημεία, συζυγή, καμπυλών, εσωτερικά, 31
Μεταβολή, δεύτερη (γεωμετρική), 26	Τόπος αντιστροφής, 37
Μεταβολή, μέσω γεωδαισιακών, 5	Τόπος αποκοπής, 35
Μεταβολή, πρώτη, 24	Τόπος αποκοπής, εφαπτόμενος, 37
Μεταβολή, πρώτη (γεωμετρική), 26	Χρόνος αποκοπής, 35
Πεδίο Jacobi, 7	





---

# Βιβλιογραφία

- [dC-RG, 1992] do Carmo M. P. (1992). ***Riemannian Geometry***, Vol. 2, Birkhäuser.
- [GF-CV, 1963] Gelfand I. M., Fomin S. V. (1963). ***Calculus of Variations***, Vol. 1, Prentice-Hall Inc.
- [Lee-RG, 2018] Lee J. M. (2018). ***Introduction to Riemannian Manifolds***, Vol. 2, Springer.
- [Lee-SM, 2012] Lee J. M. (2012). ***Smooth Manifolds***, Vol. 2, Springer.