Υπολογιστική Άλγεβρα

Ασκήσεις, Μέρη VIII, IX, X

Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Φράγκος Αναστάσιος: AM1112201900239

Άσκηση

Έστω I ένα μη μηδενικό ιδεώδες του δακτυλίου πολυωνύμων $\mathbb{F}[\vec{x}]$, $\vec{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$.

---

1. *Να γίνει πλήρης και λεπτομερής απόδειξη του Θεωρήματος:*

   Κάθε μη μηδενικό ιδεώδες $I \trianglelefteq \mathbb{F}[\vec{x}]$ έχει μοναδική ανηγμένη βάση Gröbner.

2. *Να γίνει πλήρης και λεπτομερής απόδειξη του αλγορίθμου υπολογισμού βάσης Gröbner, (αλγόριθμος Buchberger).*
3. *Να βρείτε και να περιγράψετε (με όσες λεπτομέριες μπορείτε) τρεις εφαρμογές των βάσεων Gröbner (διαφορετικές από αυτές που έγιναν στο μάθημα).*
4. *Γράψτε τι νομίζετε ότι θα θυμόσαστε από το μάθημα, μετά από πολλά χρόνια.*

Σε όλα τα παρακάτω υπονοείται η λεξικογραφική διάταξη: $\mathbf{x_i \geq_{lex} x_{i+1}, \forall i \in [n-1]}$. **Επιπλέον, παρατηρούμε ότι το σώμα $\mathbb{F}$ δεν είναι το μηδενικό σύνολο**[1]**.**

$\boxed{1.}$ Η απόδειξη αυτή θα αποτελέσει ουσιαστικά μία σύνοψη σχεδόν όλων όσων περιγράφηκαν για τις βάσεις Gröbner κατά την διάρκεια του μαθήματος, καθώς σχεδόν όλα τα πορίσματα που αναφέρθηκαν / περιγράφηκαν θα χρειαστούν για την διάρθρωσή της.

Λήμμα: ***Λήμμα του Dickson:***
Έστω I ένα ιδεώδες μονωνύμων του $\mathbb{F}[\vec{x}]$:

$$I = \langle \mathbf{y_1} = \vec{x}^{\,\vec{l_1}}, \mathbf{y_2} = \vec{x}^{\,\vec{l_2}}, \mathbf{y_3} = \vec{x}^{\,\vec{l_3}}, \cdots \rangle \text{ (Ενδέχεται τα μονώνυμα } \mathbf{y_i} \text{ που το παράγουν να είναι άπειρα)}$$

Είναι δυνατόν (ειδικότερα) να βρεθεί πεπερασμένο πλήθος μονωνύμων $\mathbf{x_i} = \vec{x}^{\,\vec{k_i}}$ τα οποία το παράγουν.

Απόδ. Μία απόδειξη έχει περιγραφεί στα μέρη "**Μέρος V**" και "**Μέρος VII**". Εδώ, για αλλαγή της ρουτίνας, θα ακολουθηθεί μία άλλη μέθοδος απόδειξης.

Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή.

Για το βήμα της επαγωγής, είναι γνωστό ότι κάθε ιδεώδες μονωνύμων του $\mathbb{F}[x]$ είναι πεπερασμένα παραγόμενο από μονώνυμο.

Για $I \trianglelefteq \mathbb{F}[x, y]$, το ιδεώδες I θα έχει την μορφή:

$$I = \langle x^{a_1} y^{b_1}, x^{a_2} y^{b_2}, x^{a_3} y^{b_3}, \cdots \rangle$$

Εάν απομονωθούν οι "x συνηστώσες" των όρων που παράγουν το I, μπορούμε να δούμε ότι το ιδεώδες που παράγεται από αυτές είναι πεπερασμένα παραγόμενο και μάλιστα από μόνο ένα μονώνυμο x^{ω}. Ισχυριζόμαστε ότι θα υπάρχει μονώνυμο - πολλαπλάσιο του x^{ω}, έστω $x^{\omega+\mu} y^{\lambda}$, το οποίο θα ανήκει στο ιδεώδες I. Πράγματι, εάν προς άτοπο δεν υπήρχε τέτοιο μονώνυμο, κανένα από τα $x^{a_i} y^{b_i}$ δεν θα άνηκε στο I, το οποίο είναι προφανώς άτοπο. Διαλέγουμε λοιπόν $x^{\bar{\omega}} y^{\lambda}$ να είναι αυτό με τον ελάχιστο βαθμό ως προς x.

Επομένως, μπορούμε πλέον να ορίσουμε το σύνολο:

$$A = \left\{ x^{\bar{\omega}} y^{\bar{\lambda}} \mid \bar{\lambda} \leq \lambda \text{ και } x^{\bar{\omega}} y^{\bar{\lambda}} \in I \right\}$$

και να παρατηρήσουμε ότι αυτό παράγει το I. Το ότι παράγει το I, ισχύει αφού για κάθε $x^a y^b \in I$, καταρχάς $x^a \geq_{lex} x^{\bar{\omega}}$ (εξ ορισμού του $x^{\bar{\omega}}$) και επιπλέον αν προς άτοπο δεν παράγεται από το A, θα πρέπει $b > \lambda$ (διαφορετικά θα άνηκε στο A). Επειδή $b > \lambda$, το $x^a y^b$ διαιρείται από το $x^{\bar{\omega}} y^{\lambda}$ και συνεπώς παράγεται από το A. Και βέβαια, προφανώς το A είναι πεπερασμένο, αφού ο αρθμός λ είναι φυσικός.

---

[1] Η πλήρης αιτιολόγιση αυτού του σημείο βρίσκεται στο "**Μέρος VII**".

Για το επαγωγικό βήμα, υποθέτουμε ότι κάθε ιδεώδες μονωνύμων του $\mathbb{F}[x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}]$ είναι πεπερασμένα παραγόμενο από μονώνυμα και θα δείξουμε ότι και το τυχαίο ιδεώδες I του $\mathbb{F}[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ είναι πεπερασμένα παραγόμενο από μονώνυμα.

Θα θεωρήσουμε το ιδεώδες I του χώρου $\mathbb{F}[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ στον ισοδύναμο χώρο $\mathbb{F}[x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}][x_n]$. Το ιδεώδες I μπορεί να γραφεί ως:

$$I = \langle \vec{x}^{\,\vec{l_1}} x_n^{b_1}, \vec{x}^{\,\vec{l_2}} x_n^{b_2}, \vec{x}^{\,\vec{l_3}} x_n^{b_3}, \cdots \rangle \text{ με } \vec{x}^{\,\vec{l_i}} \in \mathbb{F}[x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}]$$

Λόγω της επαγωγικής υπόθεσης, υπάρχει πεπερασμένο πλήθος μονωνύμων του $\mathbb{F}[x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}]$, έστω $\vec{x}^{\,\vec{a_1}}, \vec{x}^{\,\vec{a_2}}, \vec{x}^{\,\vec{a_3}}, \cdots$, τα οποία παράγουν το ιδεώδες των αντίστοιχων πρώτων "$n-1$ συντεταγμένων". Θεωρούμε $\vec{x}^{\,\vec{a'_1}}, \vec{x}^{\,\vec{a'_2}}, \vec{x}^{\,\vec{a'_3}}, \cdots$ να είναι μονώνυμα του $\mathbb{F}[x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}]$ τα οποία είναι τα ελάχιστα ως προς τους πρώτους $n-1$ βαθμούς, για τα οποία υπάρχουν $x_n^{\lambda_1}, x_n^{\lambda_2}, x_n^{\lambda_3}, \cdots$ έτσι ώστε $\vec{x}^{\,\vec{a'_i}} x_n^{\lambda_i} \in I$.

Μπορούμε πλέον να ορίσουμε, όπως και στην προηγούμενη επαγωγική περίπτωση, το σύνολο:

$$A = \bigcup_{i \in [n]} \{ \vec{x}^{\,\vec{a'_i}} x_1^{\bar{\lambda}_{i,1}} \cdots x_{i-1}^{\bar{\lambda}_{i,1}} x_{i+1}^{\bar{\lambda}_{i+1,1}} \cdots x_n^{\bar{\lambda}_{i,n}} \mid \bar{\lambda}_{i,n} \leq \lambda_i, \bar{\lambda}_{i,j} \overset{j<n}{\leq} a'_{i,j} \text{ και } \vec{x}^{\,\vec{a'_i}} x_n^{\bar{\lambda}_i} \in I \}$$

και να παρατηρήσουμε ότι αυτό παράγει το ιδεώδες I και είναι πεπερασμένο.

Με αυτό ολοκληρώνεται η επαγωγή και αποδεικνύεται το ζητούμενο "**Λήμμα**".

Ορισμός: ***Βάσεις Gröbner:***
Έστω I ένα ιδεώδες του $\mathbb{F}[\vec{x}]$. Θεωρούμε $MO(I)$ το σύνολο:

$$MO(I) = \{M(f) \mid f \in I\}, \text{ όπου } M(f) \text{ είναι ο μεγιστοβάθμιος του } f$$

*Σύμφωνα με το προηγούμενο "**Λήμμα**", το ιδεώδες $\langle MO(I) \rangle$ είναι πεπερασμένα παραγόμενο από μονώνυμα του $MO(I)$. Έστω λοιπόν $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ να είναι μία βάση του. Θεωρούμε $G = \{g_1, g_2, \cdots, g_n\}$ ένα σύνολο από πολυώνυμα του I για τα οποία $M(g_i) = a_i$. Ονομάζουμε το σύνολο G βάση Gröbner του I.*

[2]

Ορισμός: ***Ελαχιστικές Βάσεις Gröbner :***
Έστω I ένα ιδεώδες του $\mathbb{F}[\vec{x}]$. Θεωρούμε $G = \{g_1, g_2, \cdots, g_n\}$ μία βάση Gröbner του I και για κάθε όρο της g_i ελέγχουμε εάν $M(g_i) \in \langle MO(G - \{g_i\}) \rangle$ ή εάν $M(g_i) \notin \langle MO(G - \{g_i\}) \rangle$. Εάν ισχύει το πρώτο, δημιουργούμε την νέα βάση Gröbner $G - \{g_i\}$, αλλιώς δεν αλλάζουμε την βάση G. Επαναλαμβάνουμε την διαδικασία στην νέα βάση Gröbner έως ότου:

$$\forall g'_i \in G' : MO(g'_i) \notin \langle MO(G' - \{g'_i\}) \rangle$$

Η βάση G' που προκύπτει μετά το πέρας της διαδικασίας ονομάζεται ελαχιστική. Μπορούμε επιπλέον να θεωρήσουμε ότι οι συντελεστές των μεγιστοβαθμίων όρων των στοιχείων της βάσης είναι όλοι $1_{\mathbb{F}}$.

Πρόταση: ***Ισότητα μονωνύμων στις Ελαχιστικές Βάσεις Gröbner:***
Έστω I ένα ιδεώδες του $\mathbb{F}[\vec{x}]$. Θεωρούμε B_1, B_2 δύο ελαχιστικές βάσεις Gröbner του I. Ισχύει ότι:

$$MO(B_1) = MO(B_2)$$

(Έχουν υπάρξει διορθώσεις)[3]

Έστω τα σύνολα $MO(B_1), MO(B_2)$ παράγουν ιδεώδες J. Καταρχάς ισχυριζόμαστε ότι τα σύνολα $MO(B_1), MO(B_2)$ έχουν έστω ένα κοινό σημείο. Πράγματι, εάν $MO(B_1) \cap MO(B_2) = \emptyset$, (χωρίς βλάβη της γενικότητας) για κάθε στοιχείο $\bar{g}$ του $MO(B_2)$, επειδή το $MO(B_1)$ παράγει το J, θα πρέπει το $\bar{g}$ να είναι

[2] Το ότι τα μονώνυμα ανήκουν στο $MO(I)$ είναι περισσότερο εμφανές στην απόδειξη των μερών "**Μέρος V**" και "**Μέρος VII**".
[3] Μια άλλη απόδειξη μπορεί να βρεθεί στο "**Μέρος VII**".

πολυωνυμικός συνδιασμός των στοιχείων του τελευταίου:

$$\bar{g} = \sum_{y \in MO(B_1)} a_y \cdot y$$

Επειδή το $\bar{g}$ είναι μονώνυμο, για κάποιο $y \in B_1$ θα πρέπει να ισχύει $\bar{g} = a_y \cdot y$. Επειδή η βάση B_2 είναι ελαχιστική[4], $a_y = 1_{\mathbb{F}}$ και επομένως το $\bar{g}$ είναι ακριβώς το στοιχείο y του $MO(B_1)$. Από αυτό έχουμε άτοπο.

Διαλέγουμε λοιπόν y_1 ένα στοιχείο του συνόλου $MO(B_1) \cap MO(B_2)$. Θα ισχυριστούμε ότι το σύνολο $(MO(B_1) - \{y_1\}) \cap (MO(B_2) - \{y_1\})$ δεν είναι κενό. Πράγματι, και πάλι προς άτοπο υποθέτουμε ότι $(MO(B_1) - \{y_1\}) \cap (MO(B_2) - \{y_1\}) = \emptyset$ και για κάθε[5] $\bar{g} \in MO(B_2) - \{y_1\}$, επειδή το $MO(B_1)$ παράγει το ιδεώδες J, θα πρέπει το $\bar{g}$ να είναι πολυωνυμικός συνδιασμός των στοιχείων του τελευταίου:

$$\bar{g} = a_{y_1} \cdot y_1 + \sum_{y \in MO(B_1) - \{y_1\}} a_y \cdot y$$

Επειδή το $\bar{g}$ είναι μονώνυμο, θα ταυτίζεται είτε με το $a_{y_1} \cdot y_1$ είτε με οποιοδήποτε άλλο $a_y \cdot y$ του πολυωνυμικού συνδιασμού. Και πάλι όμως, για κάθε $y \in MO(B_1)$ αν ίσχυε $\bar{g} >_{lex} y$, τότε $y \notin \langle MO(B_1 - \{y_1\}) \rangle$, οπότε θα πρέπει $y = y_1$ και συνεπώς $\bar{g} = a_{y_1} \cdot y_1$. Τότε όμως, $\bar{g} \in \langle MO(B_2) - \{\bar{g}\} \rangle \subseteq \langle MO(B_2 - \{g\}) \rangle, MO(g) = \bar{g}$, το οποίο είναι άτοπο.

Είναι φανερό ότι κανείς μπορεί επαγωγικά να συνεχίσει τον συλλογισμό και να δείξει ότι τα σύνολα $MO(B_1) - \{y_1, y_2, y_3, \cdots, y_n\}$ και $MO(B_2) - \{y_1, y_2, y_3, \cdots, y_n\}$ πάντοτε έχουν κοινά σημεία, εκτός και αν βέβαια είναι και τα δύο τους κενά. Άρα, επειδή τα B_1, B_2 είναι πεπερασμένα, θα υπάρχουν $y_1, y_2, \cdots, y_n$ για τα οποία θα ισχύει:

$$MO(B_1) - \{y_1, y_2, \cdots, y_n\} = MO(B_2) - \{y_1, y_2, \cdots, y_n\} = \emptyset$$
$$\Rightarrow MO(B_1) = MO(B_2) = \{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$$

Ορισμός: ***Ανηγμένες Βάσεις Gröbner:***
Έστω I ένα ιδεώδες του $\mathbb{F}[\vec{x}]$ και G μία ελαχιστική βάση Gröbner αυτού. Εάν για την G (επιπλέον) ισχύει:

$$\forall g \in G, \text{ κάθε (μη μηδενικός) όρος του } g \text{ δεν ανήκει στι ιδεώδες } \langle MO(G - \{g\}) \rangle$$

τότε η G ονμάζεται ανηγμένη βάση Gröbner του ιδεώδους I. Παρακάτω θα περιγραφεί μία διαδικασία εύρεσης ανηγμένης βάσης Gröbner, δεδομένης μίας ελαχιστικής βάσης Gröbner.

Έστω $G = \{g_1, g_2, \cdots, g_n\}$ μία ελαχιστική βάση Gröbner. Ακολουθούμε την παρακάτω διαδικασία για τον προσδιορισμό της ανηγμένης βάσεως Gröbner:

- Διαιρούμε το g_1 με το σύνολο $\{g_2, \cdots, g_n\}$: $g_1 = \pi_{1,2} g_2 + \cdots + \pi_{1,n} g_n + u_1$, και παίρνουμε το υπόλοιπο u_1.
- Εάν u_1 είναι 0, τότε από το G αφαιρούμε το πολυώνυμο g_1. Διαφορετικά, θεωρούμε την νέα βάση Gröbner $\{u_1, g_2, \cdots, g_n\}$ και παρατηρούμε ότι κανένας (μη μηδενικός) όρος του u_1 δεν ανήκει στο $\langle M(g_2), \cdots, M(g_n) \rangle$. Αυτό διότι αν άνηκε έστω και ένας (o_1), θα ίσχυε:

  $$\overbrace{g_1 - \pi_{1,2} g_2 - \cdots - \pi_{1,n} g_n - o_1}^{\in \langle MO(g_1), MO(g_2), \cdots, MO(g_n) \rangle} = u_1 - o_1$$

  Άρα και ο $u_1 - o_1$ θα άνηκε στο $\langle MO(g_1), MO(g_2), \cdots, MO(g_n) \rangle$, οπότε και ο $M(u_1 - o_1)$. Επαγωγικά βρίσκει κανείς ότι όλοι οι όροι του u_1 θα άνηκαν στο $\langle MO(g_1), MO(g_2), \cdots, MO(g_n) \rangle$, το οποίο είναι άτοπο στην διαδικασία της διαίρεσης.
- Στην βάση $\{u_1, g_2, \cdots, g_n\}$ εφαρμόζουμε την διαδικασία που αναφέρθηκε (πεπερασμένες φορές) έως ότου να προκύψει ανηγμένη βάση $\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$.

[4]Αν για κάθε y ίσχυε ότι το a_y είχε μη μηδενικό βαθμό, τότε για όλα τα στοιχεία της βάσης B_1 ισχύει $\bar{g} >_{lex} y \Rightarrow y \notin J$ (άτοπο).

[5]Αν κάποιο από τα δύο σύνολα ήταν κενό, η άσκηση αποδεικνύεται άμεσα. Αν τα $MO(B_1)$ και $MO(B_2)$ είναι κενά, το ζητούμενο αποδεικνύεται άμεσα. Αν (χωρίς βλάβη της γενικότητας) το πρώτο είναι κενό αλλά όχι το δεύτερο, το δεύτερο έχει στοιχείο y_2 που είναι πολλαπλάσιο του y_1 και συνεπώς $y_2 \in \langle MO(B_2) - \{y_2\} \rangle \subseteq \langle MO(B_2 - \{g_2\}) \rangle, MO(g_2) = y_2$ (άτοπο διότι B_2 ελαχιστική βάση Gröbner).

Θεώρημα: ***Μοναδικότητα Ανηγμένων Βάσεων Gröbner:***
Εάν $G = \{g_1, \cdots, g_n\}, H = \{h_1, \cdots, h_n\}$ είναι δύο ανηγμένες βάσεις Gröbner του ιδεώδους I, τότε υποχρεωτικά $G = H$.

Εφόσον οι βάσεις είναι ανηγμένες, θα είναι και ελαχιστικές. Επομένως, από την "**Πρόταση:** ***Ισότητα μονωνύμων στις Ελαχιστικές Βάσεις Gröbner***" έχουμε ότι ισχύουν:

$$M(g_1) = M(h_1),\ g_1 - h_1 \in I$$

$$M(g_2) = M(h_2),\ g_2 - h_2 \in I$$

$$\vdots$$

$$M(g_n) = M(h_n),\ g_n - h_n \in I$$

Επειδή $g_i - h_i \in I$, θα πρέπει να υπάρχουν g_j, h_j τέτοια ώστε $M(g_j) = M(h_j)|M(g_i - h_i)$. Επειδή $M(g_i - h_i) \leq_{lex} M(g_i) = M(h_j)$, θα πρέπει τα g_j, h_j να μην ταυτίζονται με τα g_i, h_i ή η ποσότητα $g_i - h_i$ να είναι το μηδενικό πολυώνυμο. Προκύπτει λοιπόν ότι είτε το $M(g_j) = M(h_j)$ θα διαιρεί κάποιον όρο του g_i ή του h_i (το οποίο είναι άτοπο, εξ ορισμού της ανηγμένης βάσης Gröbner) είτε $g_i - h_i = 0$. Τελικά $g_i = h_i$ και συνεπώς το ζητούμενο αποδεικνύεται.

2.

Ορισμός: ***Ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο μονωνύμων:***
Έστω $\vec{x}^{\,\vec{k}}, \vec{x}^{\,\vec{l}} \in \mathbb{F}[\vec{x}]$ δύο μονώνυμα. Ορίζουμε ως ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο αυτών των δύο το μονώνυμο:

$$lcm(\vec{x}^{\,\vec{k}}, \vec{x}^{\,\vec{l}}) = \vec{x}^{\,\overrightarrow{(\max\{k_i, l_i\})}}$$

Ορισμός: S ***πολυώνυμα:***
Έστω $f, g \in \mathbb{F}[\vec{x}]$ δύο πολυώνυμα. Ορίζουμε ως S πολυώνυμο των f, g το πολυώνυμο:

$$S(f, g) = \frac{lcm(M(f), M(g))}{M(f)} \cdot f - \frac{lcm(M(f), M(g))}{M(g)} \cdot g$$

Αλγόριθμος: ***Αλγόριθμος του Buchberger:***
Ο αλγόριθμος του Buchberger είναι ένας αλγόριθμος υπολογισμού μίας βάσεως Gröbner ενός ιδεώδους I. Συγκεκριμμένα, ο αλγόριθμος έχει ως εξής:

Έστω I το ιδεώδες $\langle f_1, f_2, \cdots, f_n \rangle$.

I. Θέτουμε $i = 1, k = 2$

II. Θέτουμε $\mathcal{S} = S(f_i, f_k)$,

III. Θέτουμε $\mathcal{I} = \{f_1, f_2, \cdots, f_n\}$,

IV. Εκτελούμε την διαίρεση ${}^{\mathcal{S}}\!/_{\mathcal{I}}$,

V. Ελέγχουμε το υπόλοιπο $u = u\left[{}^{\mathcal{S}}\!/_{\mathcal{I}}\right]$ της διαίρεσης ${}^{\mathcal{S}}\!/_{\mathcal{I}}$:

V.α. Εάν $u = 0$, ελέγχουμε όλα τα υπόλοιπα $u\left[{S(g_h, g_j)}/_{\mathcal{I}}\right]$, για τις διάφορες τιμές των $h \neq j$.

V.α.ι. Έστω και ένα από αυτά δεν είναι 0, θέτουμε, $k \leftarrow k+1$ και επαναλαμβάνουμε την διαδικασία από το $\mathbf{IV}$.

V.α.ιι. Διαφορετικά, ο Αλγόριθμος τερματίζει.

V.β. Εάν $u \neq 0$, θέτουμε $\mathcal{I} \leftarrow \mathcal{I} \cup \{\mathcal{S}\}$ και επαναλαμβάνουμε την διαδικασία από το $\mathbf{IV}$.

Το σύνολο $\mathcal{I}$ που προκύπτει είναι βάση Gröbner του I

Παρατήρηση: ***Ο Αλγόριθμος δίδει πράγματι βάση Gröbner $\mathcal{I}$ του I:*** Ο Αλγόριθμος του Buchberger δίδει πράγματι βάση Gröbner $\mathcal{I}$ του I. Αυτό είναι συνέπεια του ακόλουθου θεωρήματος:

Θεώρημα: ***Κριτήριο του Buchberger:***
Έστω $I = \langle f_1, \cdots, f_n \rangle$. Το $\mathcal{I} = \{f_1, \cdots, f_n\}$ είναι βάση Gröbner ως προς μία συγκεκριμμένη μονωνυμική διάταξη εάν και μόνο αν $u\left[{S(f_i, f_j)}/_{\mathcal{I}}\right] = 0$ για κάθε $i \neq j$, ως προς την διάταξη που έχουμε επιλέξει.

Ουσιαστικά ο Αλγόριθμος τελειώνει όταν ικανοποιηθεί η συνθήκη του Κριτηρίου του Buchberger, όταν δηλαδή για κάθε $i \neq j$ ισχύει $u\left[{S(f_i, f_j)}/_{\mathcal{I}}\right] = 0$. Και βέβαια, λόγω του Λήμματος: "**Λήμμα:** ***Λήμμα του Dickson***", η διαδικασία θα τερματίζει, αφού εξασφαλίζεται η ύπαρξη βάσης Gröbner.

3.

Εφαρμογές στην Μηχανική των Υπολογιστών:

Ορισμός: ***Το Πολυώνυμο Taylor πολυμεταβλητών συναρτήσεων:***
Έστω f μία απείρως διαφορίσιμη συνάρτηση $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$. Ορίζουμε πολυώνυμο Taylor n τάξεως στο σημείο $\vec{\delta}$ το πολυώνυμο:

$$T_{n,f}(\vec{x} + \vec{\delta}) = f(\vec{\delta}) + \sum_{i \in [n]} \frac{1}{i!} \left(\vec{x} \cdot \nabla\right)^i f(\vec{\delta})$$

Παρατήρηση: ***Προσέγγιση συναρτήσεων μέσω του Πολυωνύμου Taylor:*** Είναι φανερό ότι κάθε πολυώνυμο Taylor προσεγγίζει τις τιμές της αντίστοιχης συνάρτησης από την οποία ορίζεται. Η προσέγγιση βέβαια δεν είναι πάντοτε τέλεια (ενδ. να *μην* υπάρχει σύγκλιση του πολυωνύμου προς την συνάρτηση καθώς η τάξη αυξάνει), είναι όμως αρκετά ικανοποιητική στις περισσότερες περιπτώσεις, σε περιοχές κοντινές του σημείο προσέγγισης $\vec{\delta}$. Δεδομένου ότι οι εφαρμογές που θα παρουσιαστούν λαμβάνουν χώρα σε "μικρές περιοχές" (κυρτά και φραγμένα σύνολα μικρής διαμέτρου), θα θεωρούμε ότι η προσέγγιση του πολυωνύμου Taylor είναι ικανοποιητική, χωρίς να αναλύουμε με λεπτομέριες κάθε φορά γιατί ισχύει αυτό ή πόση ακρίβεια χρειάζεται.

Πρόταση: ***Η Εξίσωση Διάχυσης της Θερμότητας στον τρισδιάστατο, Ευκλείδειο χώρο:***
I. *Συνάρτηση διάχυσης της Θερμότητας είναι κάθε συνάρτηση u, λύση της μη γραμμικής διαφορικής εξίσωσης:*

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \alpha \nabla \cdot \nabla u = 0$$

όπου α είναι η θερμική διαχυτικότητα του προβλήματος.

II. *Κάθε συνάρτηση διάχυσης της Θερμότητας είναι απείρως διαφορίσιμη. Αυτό προκύπτει, εάν γραφεί ο γενικός τύπος / γενική λύση:*

$$u(\vec{x}, t) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{\sqrt{(4\pi k t)^3}} exp\left(-\frac{(\vec{x} - \vec{y}) \cdot (\vec{x} - \vec{y})}{4kt}\right) u(\vec{y}, 0)\, dy, \text{ όπου } k \in \mathbb{R}_+^*$$

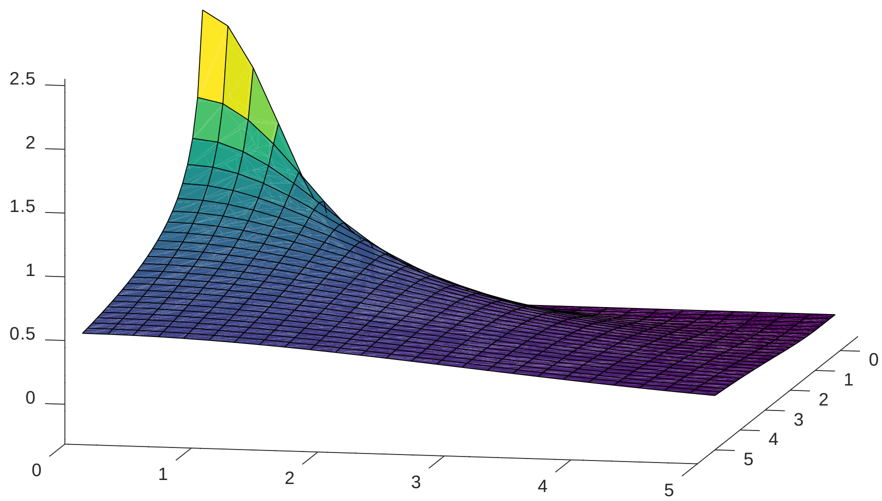
Πρόβλημα: ***Θερμικά ευαίσθητα μέρη σε Υπολογιστικά Μηχανήματα:***
Έστω ότι ένα υπολογιστικό μηχάνημα αποτελείται από k μέρη, εκ των οποίων τα l είναι θερμικά ευαίσθητα. Δεδομένου ότι η κατασκευή πρέπει να γίνει σε χωρίο Π, να βρεθούν οι βέλτιστες θέσεις τοποθέτησης των l θερμικά ευαίσθητων μερών δεδομένου ότι:

- *Τα $k-l$ θερμικά μη ευαίσθητα μέρη έχουν τοποθετηθεί στο Π,*
- *Η συνάρτηση $u_{\vec{y}}$, όπου $\vec{y} \in \{0,1\}^{k-l}$ είναι η συνάρτηση διάχυσης θερμότητας δεδομένου του ότι λειτουργούν τα μέρη για τα οποία αντιστοιχούν μονάδες στο διάνυσμα $\vec{y}$,*
- *Τα θερμικά ευαίσθητα μέρη παράγουν αμελητaία ποσά θερμότητας.*

Σύμφωνα με τον Ορισμό "**Ορισμός:** ***Το Πολυώνυμο Taylor πολυμεταβλητών συναρτήσεων***" και την Πρόταση: "**Πρόταση:** ***Η Εξίσωση Διάχυσης της Θερμότητας στον τρισδιάστατο, Ευκλείδειο χώρο***", θεωρούμε $T_{n,u_{\vec{y}}}$ τα πολυώνυμα Taylor που προσεγγίζουν τις $u_{\vec{y}}$ σε τυχαίο σημείο $\vec{\delta}$ του Π. Για να βρούμε τις βέλτιστες θέσεις τοποθέτησης, ουσιαστικά χρειάζεται να βρεθούν κοινά σημεία ελαχίστου (ή σημεία που προσεγγίζουν ελάχιστο) όλων των συναρτήσεων $u_{\vec{y}}$. Ισοδύναμα, χρειάζεται να βρεθούν τα σημεία μηδενισμού των διαφορικών των $T_{n,u_{\vec{y}}}$ (ενδεχόμενες θέσεις ακροτάτου) για τυχαίο χρόνο και έπειτα να διαπιστωθεί ποιά από αυτά αντιστοιχούν σε (τοπικό) ελάχιστο. Δηλαδή, χρειάζεται στο πρώτο βήμα να λυθεί το πολυωνυμικό σύστημα:

$$\nabla T_{n,u_{(1,0,0,\cdots,0)}}(\vec{x},t_0) = 0$$
$$\nabla T_{n,u_{(0,1,0,\cdots,0)}}(\vec{x},t_0) = 0$$
$$\nabla T_{n,u_{(0,0,1,\cdots,0)}}(\vec{x},t_0) = 0$$
$$\vdots$$
$$\nabla T_{n,u_{(1,1,0,\cdots,0)}}(\vec{x},t_0) = 0$$
$$\nabla T_{n,u_{(1,0,1,\cdots,0)}}(\vec{x},t_0) = 0$$
$$\vdots$$
$$\nabla T_{n,u_{(1,1,1,\cdots,1)}}(\vec{x},t_0) = 0$$

Για την επίλυση του πολυωνυμικού συστήματος αυτού μπορούν να χρησιμοποιηθούν οι τεχνικές που αναφέρθηκαν και αναλύθηκαν στο μάθημα, περί των βάσεων Gröbner.



Σχήμα 1: *Μία υποπερίπτωση της Εξίσωσης Διάχυσης της Θερμότητας:* $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}$. *Χρησιμοποιείται για να περιγράψει την διάχυση της θεμότητας στην μία διάσταση και στον χρόνο. Στο σχήμα εικονίζεται η* $\sqrt{\frac{1}{t}} exp\left(\frac{-x^2}{4t}\right)$, *που είναι μία λύση της διαφορικής εξίσωσης αυτής.*

Εφαρμογές στην Γεωμετρία κατά Klein:

Ορισμός: ***Πραγματικά Εσωτερικά γινόμενα και Τετραγωνικές μορφές αυτών:***
I. ***Εσωτερικό γινόμενο:*** *Έστω V διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{R}$ και έστω $\mathcal{E} : V^2 \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση με τις ιδιότητες:*

- *Συμμετρικότητα:* $(\forall x, y \in V)[\mathcal{E}(x,y) = \mathcal{E}(y,x)]$
- *Διγραμμικότητα:* $(\forall x, y, z \in V, \kappa, \lambda \in \mathbb{R})\Big[[\mathcal{E}(\kappa x + \lambda y, z) = \kappa\mathcal{E}(x,z) + \lambda\mathcal{E}(y,z)] \wedge [\mathcal{E}(z, \kappa x + \lambda y) = \kappa\mathcal{E}(z,x) + \lambda\mathcal{E}(z,y)]\Big]$
- *Μη εκφυλισμός:* *Εάν $\forall y \in V$ ισχύει $\mathcal{E}(x,y) = 0$, τότε υποχρεωτικά $x = 0$*

ονομάζεται εσωτερικό γινόμενο του διανυσματικού χώρου V. Εάν η συνάστηση αυτή $\mathcal{E}$ έχει επίσης την ιδιότητα:

- *Θετικά ορισμένη:* $(\forall x \in V)\Big[[\mathcal{E}(x,x) \geq 0] \wedge [\mathcal{E}(x,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0]\Big]$

τότε το εσωτερικό γινόμενο $\mathcal{E}$ ονομάζεται θετικά ορισμένο.

II. ***Τετραγωνικές μορφές*** *Έστω $\mathcal{E}$ ένα εσωτερικό γινόμενο του V. Ορίζουμε ως τετραγωνική μορφή του $\mathcal{E}$ την συνάρτηση $T : V \to \mathbb{R}$ με τύπο:*

$$T(x) = \mathcal{E}(x,x)$$

Παρατήρηση: ***Η διγραμμικότητα του εσωτερικού γινομένου:*** Στην δεύτερη ιδιότητα του ορισμού "**I.**" η έννοια της διγραμμικότητας περιγράφεται ως:

$$(\forall x, y, z \in V, \kappa, \lambda \in \mathbb{R})\Big[[\mathcal{E}(\kappa x + \lambda y, z) = \kappa\mathcal{E}(x,z) + \lambda\mathcal{E}(y,z)] \wedge [\mathcal{E}(z, \kappa x + \lambda y) = \kappa\mathcal{E}(z,x) + \lambda\mathcal{E}(z,y)]\Big]$$

Κανείς όμως αν λάβει υπ' όψιν το πρώτο σημείο του ίδιου ορισμού (*Συμμετρικότητα*) μπορεί να χρησιμοποιήσει μία απλούστερη έννοια διγραμμικότητας:

$$(\forall x, y, z \in V, \kappa, \lambda \in \mathbb{R})[\mathcal{E}(\kappa x + \lambda y, z) = \kappa\mathcal{E}(x,z) + \lambda\mathcal{E}(y,z)]$$

χωρίς να δημιουργήσει ουσιαστικές αλλαγές στον ορισμό του εσωτερικού γινομένου.

Πρόταση: ***Σχέση Εσωτερικών γινομένων - Τετραγωνικών μορφών:***
Ένα εσωτερικό γινόμενο $\mathcal{E}$ στον V ορίζει μία τετραγωνική μορφή T ως:

$$T(x) = \mathcal{E}(x,x)$$

αλλά ισχύει και το αντίστροφο. Εάν κανείς γνωρίζει τον τύπο της τετραγωνικής μορφής T μπορεί να προσδιορίσει οποιαδήποτε τιμή του εσωτερικού γινομένου $\mathcal{E}$ ως εξής:

$$\mathcal{E}(x,y) = \frac{1}{2} \cdot \big(T(x+y) - T(x) - T(y)\big)$$

Πράγματι, αρκεί κανείς να παρατηρήσει ότι:

$$T(x+y) - T(x) - T(y) = \mathcal{E}(x+y, x+y) - \mathcal{E}(x,x) - \mathcal{E}(y,y) = \mathcal{E}(x,x) + 2\mathcal{E}(x,y) - \mathcal{E}(y,y) - \mathcal{E}(y,y) = 2\mathcal{E}(x,y)$$

Πρόταση: ***Τα Εσωτερικά γινόμενα σε Πραγματικούς Διανυσματικούς χώρους:***
Έστω $\mathcal{E}$ ένα εσωτερικό γινόμενο στον πραγματικό διανυσματικό χώρο V. Εάν $x = a_1e_1 + a_2e_2 + \cdots + a_ne_n$, $y = b_1e_1 + b_2e_2 + \cdots + b_ne_n$ είναι ένα στοιχεία του χώρου γραμμένα ως γραμμικοί συνδιασμοί των στοιχείων της βάσεως, παρατηρούμε (λόγω των ιδιοτήτων του εσωτερικού γινομένου) ότι:

$$\mathcal{E}(x,y) = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \cdot \begin{pmatrix} \mathcal{E}(e_1,e_1) & \cdots & \mathcal{E}(e_1,e_n) \\ \mathcal{E}(e_2,e_1) & \cdots & \mathcal{E}(e_2,e_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{E}(e_n,e_1) & \cdots & \mathcal{E}(e_n,e_n) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Παρατήρηση: ***Η μορφή των Τετραγωνικών μορφών σε Πραγματικούς Διαννσματικούς χώρους:*** Κάθε τετραγωνική μορφή σε πραγματικό διανυσματικό χώρο V παίρνει την μορφή:

$$T(x) = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \cdot \begin{pmatrix} \mathcal{E}(e_1, e_1) & \cdots & \mathcal{E}(e_1, e_n) \\ \mathcal{E}(e_2, e_1) & \cdots & \mathcal{E}(e_2, e_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{E}(e_n, e_1) & \cdots & \mathcal{E}(e_n, e_n) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

όπου $x = a_1e_1 + a_2e_2 + \cdots + a_ne_n$ είναι η αναπαράσταση του x ως γραμμικός συνδιασμός των στοιχείων μίας βάσης του V.

Παρατήρηση: ***Τετραγωνικές μορφές και πολυώνυμα:*** Κάθε τετραγωνική μορφή είναι πολυώνυμο $n = dimV$ μεταβλητών.

Ορισμός: ***Θετικά ορισμένα Εσωτερικά γινόμενα και νόρμες:***
Έστω V ένας διανυσματικός χώρος εφοδιασμένος με θετικά ορισμένο εσωτερικό γινόμενο $\mathcal{E}$. Τότε, μπορεί να οριστεί η νόρμα στον ίδιο χώρο:

$$||x|| = \sqrt{\mathcal{E}(x, x)}$$

Ορισμός: ***Οι Ισομετρίες μεταξύ Διανυσματικών χώρων:***
Έστω V, W διανυματικοί χώροι με μετρικές d, b και $f : V \to W$ μία αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση η οποία έχει την ιδιότητα:

$$(\forall x, y \in V)[d(x, y) = b(f(x), f(y))]$$

Ονομάζουμε κάθε τέτοια συνάρτηση ισομετρία του V προς W.

Θεώρημα: ***Τετραγωνικές μορφές και Ισομετρίες:***
Έστω $(V, \mathcal{E}), (W, \mathcal{E}')$ διανυματικοί χώροι εφοδιασμένοι με θετικά ορισμένα εσωτερικά γινόμενα $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$ και αντίστοιχες τετραγωνικές μορφές T, T'. Εάν $f : V \to W$ είναι αμφιμονοσήμαντη, γραμμική απεικόνιση και ισχύει ότι:

$$T(x) = 1 \Rightarrow T'(f(x)) = 1$$

τότε η f είναι ισομετρία του V προς W.

Απόδ. Πράγματι, εάν $|\cdot|, ||\cdot||$ είναι οι αντίστοιχες νόρμες που ορίζουν τα εσωτερικά γινόμενα, τότε:

$$||f(x)||^2 = T'(f(x)) = T'(f(|x| \cdot \widehat{x})) = |x|^2 \cdot T'(f(\widehat{x})) = |x|^2 \Rightarrow ||f(x)|| = |x|$$

Εφόσον οι νόρμες είναι ίσες, και οι επαγόμενες μετρικές επίσης θα είναι ίσες. Δηλαδή θα ισχύει:

$$(\forall x, y \in V)[|x - y| = ||f(x) - f(y)||]$$

Αυτό αποδεικνύει το ζητούμενο, ότι δηλαδή η f είναι ισομετρία του V προς W.

Θεώρημα: ***Τα Πολυωνυμικά συστήματα στην εύρεση Ισομετριών:***
Έστω $(V, \mathcal{E}), (W, \mathcal{E}')$ διανυματικοί χώροι εφοδιασμένοι με θετικά ορισμένα εσωτερικά γινόμενα $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$ και αντίστοιχες τετραγωνικές μορφές T, T'. Έστω $f : V \to W$ είναι αμφιμονοσήμαντη, γραμμική απεικόνιση. Εάν το πολυωνυμικό σύστημα:

$$T(x) = 1$$

$$T'(f(x)) = 1$$

έχει σύνολο λύσεων $\mathcal{L} = \{x \in V \mid |x| = 1\}$ (όπου $|\cdot|$ η επαγόμενη νόρμα στον V), τότε η f είναι ισομετρία του V προς W.

Η απόδειξη είναι άμεση συνέπεια του Θεωρήματος: "**Θεώρημα:** ***Τετραγωνικές μορφές και Ισομετρίες***", αφού ισχύει ότι $\mathcal{L} = \{x \in V \mid |x| = 1\} = \{x \in V \mid T(x) = 1\}$.

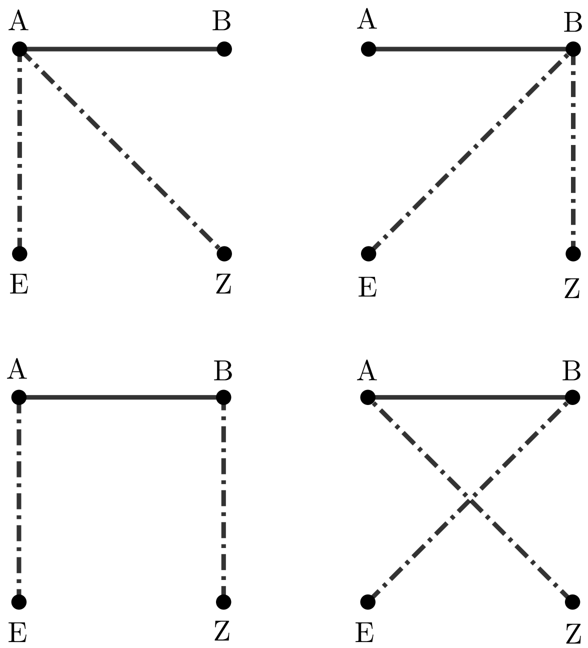
Παρατήρηση: ***Οι Βάσεις Gröbner στην εύρεση Ισομετριών:*** Από το προηγούμενο Θεώρημα είναι άμεσο το ότι αρκεί το αντίστοιχο σύστημα της βάσεως Gröbner των πολυωνύμων T, T' να έχει σύνολο λύσεων $\mathcal{L} = \{x \in V \mid |x| = 1\}$.

Εφαρμογές στην Θεωρία Γραφημάτων:

Ορισμός: ***Γραφήματα και Απλά Γραφήματα:***
I. *Έστω V ένα πεπερασμένο σύνολο στοιχείων και E ένα σύνολο που περιέχει δισύνολα (ή μονοσύνολα) με στοιχεία του V. Ονομάζουμε κάθε διατεταγμένο ζεύγος:*

$$G = (V, E)$$

γράφημα με σύνολο κορυφών V και σύνολο ακμών E. Οι αναπαραστάσεις των γραφημάτων είναι συνήθως γεωμετρικά σχήματα, όπου τα στοιχεία x του V (κορυφές) σχεδιάζονται ως σημεία και τα στοιχεία $\{x, y\}$ του E (ακμές) σχεδιάζονται ως συνεχείς γραμμές που ενώνουν τα αντίστοιχα σημεία x και y.



Σχήμα 2: *4 γραφήματα με 4 κορυφές και 3 ακμές*

II. *Εάν σε ένα γράφημα G το σύνολο ακμών E δεν περιέχει μονοσύνολα, το γράφημα ονομάζεται απλό. Ισοδύναμα, σε μία γεωμετρική αναπαράσταση, δεν θα υπάρχει ακμή που να συνδέει ένα σημείο με τον εαυτό του (δεν υπάρχει θηλιά).*

Ορισμός: ***Χρωματισμοί και Γνήσιοι Χρωματισμοί Γραφημάτων:***
I. *Έστω G ένα γράφημα με σύνολο κορυφών V και κ μία επί συνάρτηση $V \twoheadrightarrow [q]$. Η συνάρτηση κ ονομάζεται χρωματισμός του G με q χρώματα και κάθε αριθμός στο $[q]$ ονομάζεται χρώμα.*

II. *Έστω $G = (V, E)$ ένα γράφημα και κ ένας χρωματισμός του με q χρώματα. Εάν για κάθε δύο κορυφές x, y που ορίζουν ακμή στο E ισχύει ότι $\kappa(x) \neq \kappa(y)$, ο χρωματισμός κ ομομάζεται γνήσιος. Σε έναν τέτοιον χρωματισμό δεν υπάρχουν 2 γειτονικές κορυφές κορυφές (που συνδέονται με ακμή) οι οποίες να έχουν το ίδιο χρώμα.*

Ορισμός: ***Χρωματικός Αριθμός:***
Έστω $G = (V, E)$ ένα γράφημα και $A = \{q \in \mathbb{N} \mid \kappa : V \twoheadrightarrow [q],\ \kappa$ γνήσιος χρωματισμός$\}$. Ορίζουμε ως χρωματικό αριθμό του G τον φυσικό αριθμό:

$$\chi(G) = \min A$$

Θεώρημα: ***Θεώρημα Bayer:***
Έστω $G = (V, E)$ ένα γράφημα με σύνολο κορυφών $V = \{u_1, u_2, u_3, \cdots\}$. Θεωρούμε $\kappa : V \twoheadrightarrow [q]$ έναν γνήσιο χρωματισμό του G και σε κάθε χρώμα λ του $[q]$ αντιστοιχούμε τον αριθμό ξ^λ, όπου $\xi = cos\left(\frac{2\pi}{q}\right) + isin\left(\frac{2\pi}{q}\right)$ είναι μία πρωταρχική $q-$οστή ρίζα της μονάδας. Θεωρούμε τα πολυώνυμα:

$$x_i^q - 1 = 0$$

$$x_i^{q-1} + x_i^{q-2}x_j + \cdots + x_j^{q-1} = 0$$

Η μεταβλητή x_i μας δηλώνει το χρώμα της κορυφής u_i (δηλ. εάν η x_i είναι ξ^λ, το χρώμα είναι λ). Το πολυώνυμο $x_i^{q-1} + x_i^{q-2}x_j + \cdots + x_j^{q-1} = 0$ μας πληροφορεί ότι οι κορυφές u_i, u_j έχουν διαφορετικό χρώμα (δηλ. ισχύει το ''ίσο με το 0'' εάν και μόνο αν τα χρώματά των u_i, u_j είναι διαφοτερικά).

Απόδ. Εάν οι κορυφές u_i, u_j έχουν διαφορετικό χρώμα, τότε τα x_i, x_j είναι διαφορετικά και παίρνουν τιμές $q-$οστές ρίζες της μονάδος. Επομένως, $x_i^q - 1 = x_j^q - 1 = 0$.

Επιπλέον, επειδή τα x_i, x_j διαφέρουν, γράφοντας την ισότητα $x_i^q - x_j^q = 0$ ισοδύναμα ως:

$$x_i^q - x_j^q = (x_i - x_j) \cdot (x_i^{q-1} + x_i^{q-2}x_j + \cdots + x_j^{q-1}) = 0$$

παρατηρούμε ότι θα πρέπει να ισχύει $x_i^{q-1} + x_i^{q-2}x_j + \cdots + x_j^{q-1} = 0$

Αντίστροφα, εάν ισχύει η ισότητα $x_i^{q-1} + x_i^{q-2}x_j + \cdots + x_j^{q-1} = 0$ και επιπλέον $x_i = x_j$, θα πρέπει να ισχύει επιπλέον ότι $qx_i^{q-1} = 0$. Αυτό είναι άτοπο, αφού η x_i είναι $q-$οστή ρίζα της μονάδος, και συνεπώς ικανοποιεί την σχέση $x_i^q - 1 = 0$

Παρατήρηση: ***Οι Βάσεις Gröbner στην ύπαρξη γνήσιου χρωματισμού με*** q ***χρώματα:*** Από το Θεώρημα: "**Θεώρημα:** ***Θεώρημα Bayer***" έπεται ότι ένα γράφημα θα έχει γνήσιο χρωματισμό με q χρώματα εάν και μόνο αν το σύστημα των $|V| + |E|$ εξισώσεων:

$$x_i^q - 1 = 0, \text{ για κάθε κορυφή } u_i$$

$$x_i^{q-1} + x_i^{q-2}x_j + \cdots + x_j^{q-1} = 0, \text{ όπου } u_i, u_j \text{ είναι γειτονικές}$$

έχει λύση. Για την επίλυση του πολυωνυμικού συστήματος αυτού μπορούν να χρησιμοποιηθούν οι τεχνικές που αναφέρθηκαν και αναλύθηκαν στο μάθημα, περί των βάσεων Gröbner.

Παρατήρηση: ***Η εύρεση του Χρωματικού Αριθμού μέσω του Θεωρήματος Bayer:*** Σύμφωνα με την προηγούμενη Παρατήρηση: "**Παρατήρηση:** ***Οι Βάσεις Gröbner στην ύπαρξη γνήσιου χρωματισμού με*** q ***χρώματα***", μπορεί κανείς, με επίλυση $\chi(G)$ πολυωνυμικών συστημάτων να προσδιορίσει τον χρωματικό αριθμό $\chi(G)$ ενός γραφήματος G. Αυτή η μέθοδος ενδέχεται να μην ενδείκνυται για επίλυση με "χαρτί και μολύβι", είναι όμως κάτι που μπορεί να υπολογιστεί με ευκολία μέσω του Ηλεκτρονικού Υπολογιστή / της Τεχνιτής Νοημοσύνης.

$\boxed{4.}$ Πράγματα που θα θυμάμαι στο μέλλον:

- Το κατ' εμέ κύριο: Σε οποιαδήποτε (μαθηματική) θεωρία δεν είναι πάντοτε τετριμμένη η μετάβαση από την μία διάσταση στις πολλές. Πρέπει κανείς να είναι πολύ προσεκτικός στο πώς θα ορίσει αντίστοιχες έννοιες στις πολλές διαστάσεις, ώστε να είναι μαθηματικά εύπλαστες, χρήσιμες και να αποτελούν πράγματι γενίκευση της περίπτωσης της 1ας διάστασης.
- Η σημασία της ιδιαιτερότητας της περίπτωσης: Δεν είναι αναγκαίο να μεταβιβάζονται (τουλάχιστον αυτούσιες) όλες οι ιδιότητες μίας διάστασης στην επόμενη. Επομένως, για την επίλυση ορισμένων προβλημάτων κανείς θα είναι χρήσιμο να λειτουργεί αναλόγως την ιδιαιτερότητα της περίπτωσης.

- Το πιο τετριμμένο: Μόνο και μόνο η μελέτη των πολυωνύμων μπορεί να βρει λύσεις σε πλήθος φαινομενικά “άσχετων” μαθηματικών προβλημάτων.