

Τμήμα Μαθηματικών
Ε.Κ.Π.Α.

Λέσχη Μαθηματικών

Τεύχος Α

Χειμερινό εξάμηνο 2024-25

Αθήνα, Ημερομηνία —

Οργάνωση και Ομιλητές

Οργάνωση

- Φράγκος Αναστάσιος,
- Οικονομίδης Ιωάννης,
- Μπιζάνος Κωνσταντίνος,
- Κατσαντώνης Ευάγγελος,
- Σύλλογος Μεταπτυχιακών Φοιτητών και Υποψήφιων Διδακτόρων “Εύδοξος”.

Επιτροπή Μεταπτυχιακών Σπουδών

- Γιαννιώτης Παναγιώτης,
(<https://sites.google.com/view/panagiotis-gianniotis/>)
- Δρακόπουλος Μιχαήλ,
(<http://users.uoa.gr/~mdraco/>)
- Ηλιοπούλου Μαρίνα,
(<https://sites.google.com/view/marina-iliopoulou/home>)
- Μπαρμπάτης Γεράσιμος,
(<http://users.uoa.gr/~gbarbatis/>)
- Μελιγκοτσίδου Λουκία,
(<http://users.uoa.gr/~meligots/>)

Ομιλητές

Οι παρουσιάσεις στη Λέσχη Μαθηματικών του χειμερινού εξαμήνου 2024-25 έγιναν (με αλφαβητική σειρά) από τα ακόλουθα άτομα:

- Αβουκάτος Ανδρέας, Α.Λ.ΜΑ.,
- Γκούσκος Χαράλαμπος, Ε.Κ.Π.Α., Τμ. Μαθηματικών,
- Κούστας Στέφανος, Ε.Κ.Π.Α., Τμ. Μαθηματικών,
- Μαυρίκιος Μαυρίκος, Ε.Κ.Π.Α., Τμ. Μαθηματικών,
- Σβούρος Στυλιανός, Ε.Κ.Π.Α., Τμ. Μαθηματικών,
- Φράγκος Αναστάσιος, Ε.Κ.Π.Α., Τμ. Μαθηματικών,
(<https://afragos-math.github.io/>).

Τεχνικές Λεπτομέρειες

Συγγραφή

Η συγγραφή αυτού του τεύχους των πρακτικών της Λέσχης Μαθηματικών έγινε από τους:

- Κούστα Στέφανο,
- Φράγκο Αναστάσιο
(<https://afragos-math.github.io/>).

Το template αυτής της παρουσίασης μπορεί να βρεθεί εδώ:

<https://afragos-math.github.io/somewhere>

Γραμματοσειρές

Τα πνευματικά δικαιώματα της γραμματοσειράς “Κέρκης” ανήκουν στο Τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Αιγαίου. Περισσότερες πληροφορίες μπορείτε να βρείτε εδώ:

<http://iris.math.aegean.gr/kerkis/>

Χρησιμοποιήθηκε επίσης η μαθηματική καλλιγραφική γραμματοσειρά *Boondox*, από το Πανεπιστήμιο της Washington (St. Louis).

<https://ctan.org/tex-archive/fonts/boondox>

Εξώφυλλο-οπισθόφυλλο

Το εξώφυλλο και το οπισθόφυλλο σχεδιάστηκαν από τις:

- Φράγκου Άννα,
- Φράγκου Μαρία.

Ευχαριστίες

Για τις προτάσεις θεμάτων

Ευχαριστούμε τα ακόλουθα άτομα (με αλφαβητική σειρά) για τις διάφορες προτάσεις τους όσον αφορά τη θεματολογία:

- Ευστρατίου Φρειδερίκη,
- Θεοτοκάτο Κωνσταντίνο,
- Μηλολιδάκη Ορέστη,
- Σβούρο Στυλιανό,
- Σεβαστού Νικολέτα,
- Σταυράκη Νεκτάριο,
- Χολέβα Μηνά
(<https://math.auth.gr/en/member/holevas-minas/>).

Για διάφορα διαδικαστικά θέματα

Ευχαριστούμε τους:

- Γιαννιώτη Παναγιώτη
(<https://sites.google.com/view/panagiotis-gianniotis/>),
- Μελιγκοτσίδου Λουκία,
(<http://users.uoa.gr/~meligots/>),
- Νοτάρη Σωτήριο,
(<http://scholar.uoa.gr/notaris/home>).

Πίνακας Περιεχομένων

1 Η Εικασία Περιορισμού του Stein	11
1.1 Ανισότητες Παρεμβολής	11
1.2 Διατύπωση του restriction	13
1.2.1 Αναγκαίες συνθήκες για να ισχύει ένα Θεώρημα Περιορισμού . . .	14
1.3 Το Θεώρημα Stein-Tomas	15
1.4 Η λύση του προβλήματος στις 2 διαστάσεις	17
Βιβλιογραφία	19
2 Η γεωμετρία πίσω από μία εξίσωση Reaction-Diffusion	21
2.1 Μία προεπισκόπηση	21
2.2 Μερικά προαπαιτούμενα	23
2.2.1 Η προέλευση της Allen-Cahn	23
2.2.2 Η Allen-Cahn μέσω gradient flows*	25
2.2.3 Η λύση της Allen-Cahn στη μία διάσταση	28
2.2.4 Πολλαπλότητες και πολλαπλότητες Riemann	30
2.2.5 Ασθενείς και πολύ ασθενείς έννοιες διαφορισμότητας	46
2.3 Ελαχιστικές (υπερ-) επιφάνειες	48
2.3.1 Η πρώτη μεταβολή του εμβαδού	48
2.3.2 Ολομορφική αναπαράσταση και μερικά παραδείγματα ελαχιστικών επιφανειών	51
2.4 Η ενέργεια της Allen-Cahn και σύνολα πεπερασμένης περιμέτρου	55
2.4.1 Φραγμένη κύμανση και περίμετρος	55
2.4.2 Κάτω ημισυνέχεια και Γ -σύγκλιση	57
2.4.3 Η Γ -σύγκλιση της ενέργειας στην περίμετρο	61
2.5 Λύσεις της Allen-Cahn και εμφυτευμένες ελαχιστικές (υπερ-) επιφάνειες .	64
Βιβλιογραφία	65
3 Statistical learning through Bayesian regression trees	67
3.1 Introduction	67
3.1.1 A supervised learning problem	68
3.1.2 Mathematical definition of a binary tree	68
3.2 Entering BART and BART extensions	69
3.2.1 Introduction to the model	69
3.2.2 Prior specification and regularisation	69
3.2.3 Posterior evaluation and inference	72
3.2.4 Probit BART for classification	73
3.3 Simulation study	73

3.3.1 Simulation study setup	73
3.3.2 Simulation mechanism	73
3.3.3 Demonstration of results	73
Βιβλιογραφία	75
4 Διαγράμματα Penrose στη γενική θεωρία της σχετικότητας	77
4.1 Μελανές οπές	77
4.1.1 Γενικά	77
4.1.2 Συντεταγμένες Eddington-Finkelstein	79
4.1.3 Συντεταγμένες Kruskal-Szekeres	80
4.1.4 Μελανές οπές Kerr	82
4.2 Διαγράμματα Penrose	82
4.2.1 Η κατασκευή των διαγραμμάτων	82
4.2.2 Χωροχρόνος Minkowski	84
4.2.3 Διαγράμματα Penrose σε χωροχρόνο Schwarzschild	84
4.2.4 Διαγράμματα Penrose σε χωροχρόνο Kerr	84
4.2.5 Βαρυτική κατάρρευση	84
4.2.6 Ομογενές και ισοτροπικό σύμπαν	84
Βιβλιογραφία	85
5 Analysis of time-to-event and longitudinal data: A multi-state modeling approach	87
Βιβλιογραφία	89

Κεφάλαιο 1

Η Εικασία Περιορισμού του Stein

Κούστας Στέφανος, Τμήμα Μαθηματικών, ΕΚΠΑ

Περίληψη

Η Εικασία Restriction του Stein (1967) είναι από τα διασημότερα προβλήματα της Αρμονικής Ανάλυσης, ανοιχτό μέχρι και σήμερα σε όλες τις διαστάσεις $n \geq 3$. Τα τελευταία χρόνια, μετά από τα αποτελέσματα του Guth έχει αλλάξει ριζικά ο τρόπος με τον οποίο αντιμετωπίζεται το πρόβλημα. Σε αυτό το mini course θα συζητήσουμε την προέλευση του προβλήματος από την ανισότητα Hausdorff-Young και τους περιορισμούς που προκύπτουν φυσικά κατά τη μελέτη του. Μετά από μία εκτενή εισαγωγή θα δούμε τη λύση του προβλήματος στις 2 διαστάσεις και τις βασικές τεχνικές που χρησιμοποίησε ο Guth για να αποδείξει τα αποτελέσματά για διαστάσεις $n \geq 3$. Στο τέλος θα αναφερθούμε και σε αποτελέσματα που δεν επηρεάζονται από τη διάσταση του χώρου, υπό την έννοια ότι ισχύουν για όλες τις διαστάσεις $n \geq 2$.

Γενικότερη κατηγορία. Ανάλυση, Αρμονική Ανάλυση.

1.1 Ανισότητες Παρεμβολής

Πρόταση 1.1 (Ανισότητα Young). Έστω $p, q, r \in [1, \infty]$ ώστε $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$ και $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$. Τότε η συνέλιξη $f * g \in L^r(\mathbb{R}^n)$ και μάλιστα

$$\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q. \quad (1.1)$$

Θεώρημα 1.1 (Ανισότητα Riesz-Thorin). Έστω (X, \mathcal{A}, μ) και (Y, Ω, ν) δύο χώροι σ-πεπερασμένου μέτρου, $p_0, p_1, q_0, q_1 \in [1, +\infty]$ και

$$T : L^{p_0}(\mu) + L^{p_1}(\mu) \rightarrow L^{q_0}(\nu) + L^{q_1}(\nu)$$

γραμμικός τελεστής για τον οποίο ισχύουν οι εκτιμήσεις

$$\|Tf\|_{L^{q_0}(\nu)} \leq M_0 \|f\|_{L^{p_0}(\mu)} \quad \text{και} \quad \|Tf\|_{L^{q_1}(\nu)} \leq M_1 \|f\|_{L^{p_1}(\mu)}$$

για κάποιες θετικές σταθερές M_0, M_1 . Τότε, για κάθε $t \in (0, 1)$, αν

$$\frac{1}{p_t} = \frac{1-t}{p_0} + \frac{t}{p_1} \quad \text{και} \quad \frac{1}{q_t} = \frac{1-t}{q_0} + \frac{t}{q_1}$$

έχουμε

$$\|Tf\|_{L^{q_t}(\nu)} \leq M_0^{1-t} M_1^t \|f\|_{L^{p_t}(\mu)}. \quad (1.2)$$

Λήμμα 1.1 (Ανισότητα Hardy-Littlewood-Sobolev). Αν $0 < \alpha < n$, $1 < p, q < \infty$ και

$$\frac{1}{q} + 1 = \frac{1}{p} + \frac{\alpha}{n},$$

τότε

$$\left\| f * \frac{1}{|x|^\alpha} \right\|_q \lesssim \|f\|_p. \quad (1.3)$$

Θεώρημα 1.2 (Ανισότητα Minkowski για ολοκληρώματα). Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu), (Y, \mathcal{B}, \nu)$ χώροι σ-πεπερασμένου μέτρου, $p \in [1, +\infty)$ και $f : X \times Y \rightarrow [0, +\infty)$ μία $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ -μετρήσιμη συνάρτηση. Τότε, θέτοντας $f_y(x) = f(x, y)$ για κάθε $(x, y) \in X \times Y$, ισχύει η ανισότητα:

$$\left\| \int_Y f_y d\nu(y) \right\|_{L^p(X)} \leq \int_Y \|f_y\|_{L^p(X)} d\nu(y). \quad (1.4)$$

Ορισμός 1.1. Έστω $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$. Ο μετασχηματισμός Fourier της ορίζεται ως

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i \langle x, \xi \rangle} dx, \quad \text{για κάθε } \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Θεώρημα 1.3 (Ανισότητα Hausdorff-Young). Έστω $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $p \in [1, 2]$. Τότε, αν q είναι ο συζυγής εκθέτης του p ισχύει

$$\|\hat{f}\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}. \quad (1.5)$$

Μάλιστα, μόνο αν $p \in [1, 2]$ και $q = p^*$ ισχύει μία τέτοια εκτίμηση.

Η ανισότητα Hausdorff-Young μας δίνει μια ικανοποιητική απάντηση για τη σχέση που έχουν μεταξύ τους τα μεγέθη των f και \hat{f} , καθώς μας επιτρέπει να ορίσουμε τον μετασχηματισμό Fourier για συναρτήσεις του L^p , $p \in (1, 2)$ μέσω προσέγγισης με συναρτήσεις Schwartz, στην οποία ο μετασχηματισμός Fourier υπάρχει και είναι γραμμική ισομετρία επί.

Για συναρτήσεις f των οποίων ο μετασχηματισμός Fourier είναι περιορισμένος σε συμπαγή υποσύνολα του \mathbb{R}^n , η ανισότητα Hausdorff-Young παίρνει τη μορφή

$$\|\hat{f}\|_{L^q(K)} \lesssim \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \quad p \in [1, 2], \quad q \leq p^*, \quad (1.6)$$

όπου K συμπαγές υποσύνολο του \mathbb{R}^n και p^* ο συζυγής εκθέτης του p . Η περίπτωση $q = p^*$ είναι η ανισότητα Hausdorff-Young. Για τις υπόλοιπες τιμές του q χρησιμοποιούμε το παρακάτω λήμμα.

Λήμμα 1.2. Έστω (X, \mathcal{A}, μ) χώρος πεπερασμένου μέτρου. Αν $1 \leq p \leq q < \infty$, ισχύει

$$\|f\|_p \leq \mu(X)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \|f\|_q \quad (1.7)$$

για κάθε $f \in L^q(X)$.

1.2 Διατύπωση του restriction

Το παραπάνω πρόβλημα γίνεται πιο ενδιαφέρον αν αναζητήσουμε εκτιμήσεις της μορφής (1.6) όταν περιορίσουμε τον μετασχηματισμό Fourier της f σε μια συμπαγή επιφάνεια S του \mathbb{R}^n όπως η μοναδιαία σφαίρα \mathbb{S}^{n-1} . Αν ψάχνουμε δηλαδή όλα τα ζεύγη εκθετών (p, q) για τα οποία ισχύει μία ανισότητα της μορφής

$$\|\hat{f}\|_{L^q(\mathbb{S}^{n-1})} \lesssim \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}. \quad (1.8)$$

Σε αντίθεση με τις δύο παραπάνω περιπτώσεις, ο περιορισμός σε ένα υποσύνολο του \mathbb{R}^n μέτρου 0 δεν είναι πάντα δυνατός για $p = 2$. Αυτό γιατί κάθε στοιχείο f του $L^2(\mathbb{R}^n)$ είναι ο μετασχηματισμός Fourier κάποιας συνάρτησης $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$, αφού από το Θεώρημα Plancherel ο μετασχηματισμός Fourier είναι επί και είναι εύκολο να δούμε ότι υπάρχει συνάρτηση του $L^2(\mathbb{R}^n)$ που δεν ορίζεται στη σφαίρα. Στην περίπτωση που $p = 1$, η (1.8) ισχύει για κάθε $q \geq 1$. Πράγματι, αφού ο μετασχηματισμός Fourier μίας L^1 συνάρτησης είναι συνεχής συνάρτηση, ο περιορισμός του \hat{f} στην \mathbb{S}^{n-1} είναι καλά ορισμένος. Επίσης, από την τριγωνική ανισότητα έχουμε την (1.8) για $q = \infty$.

Για κάθε $q \in [1, \infty)$ ισχύει

$$\|\hat{f}\|_q \leq \|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$$

κι έτσι η (1.8) ισχύει για $p = 1$ και $q \geq 1$. Το πρόβλημα του τι συμβαίνει για τις ενδιάμεσες τιμές του p παραμένει ανοιχτό στην πλήρη γενικότητα.

Για να αντιληφθούμε καλύτερα την (1.8) μπορούμε να την μετασχηματίσουμε σε δυϊκή μορφή. Έστω (p, q) ένα ζεύγος που την ικανοποιεί. Ισχύει

$$\|g\|_p = \sup_{h \in S(\mathbb{R}^n)} \left\{ \int gh : \|h\|_{p^*} \leq 1 \right\}. \quad (1.9)$$

Η (1.8) είναι ισοδύναμη με την

$$\sup_{\|f\|_p=1} \|\hat{f}\|_{L^q(\mathbb{S}^{n-1})} \lesssim 1.$$

Ισοδύναμα,

$$\sup_{\|f\|_p=1} \sup_{\|g\|_{L^{q^*}(\mathbb{S}^{n-1})}=1} \left| \int \hat{f}(\xi) g(\xi) d\sigma(\xi) \right| \lesssim 1.$$

Εναλλάσσοντας τα supremum και χρησιμοποιώντας την ισότητα Parseval παίρνουμε

$$\sup_{\|g\|_{L^{q^*}(\mathbb{S}^{n-1})}=1} \sup_{\|f\|_p=1} \left| \int f(x) \widehat{gd\sigma}(x) dx \right| \lesssim 1.$$

Τελικά,

$$\|\widehat{gd\sigma}\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|g\|_{L^{q^*}(\mathbb{S}^{n-1})}. \quad (1.10)$$

Οι ανισότητες (1.8) και (1.10) είναι ισοδύναμες. Μάλιστα, η (1.8) καλείται ανισότητα περιορισμού, ενώ η (1.10) καλείται ανισότητα επέκτασης. Θα τις καλούμε και τις δύο ανισότητες Περιορισμού, καθώς είναι εξ ορισμού ισοδύναμες για όλα τα ζεύγη (p, q) για τα οποία δεν γνωρίζουμε αν το θεώρημα ισχύει, καθώς και για όλα τα ζεύγη (p, q) για τα οποία γνωρίζουμε ότι το θεώρημα δεν ισχύει.

Ορισμός 1.2. Έστω $S = (S, d\sigma)$ μία επιφάνεια με ή χωρίς σύνορο με επιφανειακό μέτρο $d\sigma$ και $p, q \in [1, \infty]$. Λέμε ότι έχουμε ένα (L^p, L^q) θεώρημα περιορισμού για την S αν ισχύει μια ανισότητα ανάλογη της (1.8) για κάθε συνάρτηση δοκιμής $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Συμβολίζουμε ένα τέτοιο θεώρημα με $R_S(p \rightarrow q)$.

Όπως έχουμε δει παραπάνω, το $R_S(1 \rightarrow q)$ ισχύει για κάθε επιφάνεια S και κάθε $q \in [1, +\infty]$. Θα αποδείξουμε τώρα ότι αν η S είναι υπερεπιπέδο (ακόμα και συμπαγές υποσύνολο υπερεπιπέδου), τότε το $R_S(p \rightarrow q)$ ισχύει αν και μόνο αν $p = 1$.

Πρόταση 1.2. Υποθέτουμε ότι έχουμε την $R_S(p \rightarrow q)$ για κάποιο συμπαγές υποσύνολο S ενός υπερεπιπέδου και για όλες τις συναρτήσεις δοκιμής $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Τότε πρέπει να ισχύει ότι $p = 1$.

Απόδειξη. Υποθέτουμε για ευκολία ότι $S = \{x_n = 0\} \cap B_2^n$. Επιλέγουμε συνάρτηση Schwartz ψ ώστε $\hat{\psi} \sim 1$ σε μια περιοχή του 0. Ορίζουμε μία συνάρτηση f ως εξής:

$$f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) = \psi(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n/\lambda),$$

όπου λ θετική παράμετρος. Παρατηρούμε ότι $\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \lambda^{\frac{1}{p}} \|\psi\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$, άρα $\|f\|_p \sim \lambda^{\frac{1}{p}}$. Ο μετασχηματισμός Fourier της f είναι

$$\hat{f}(\xi_1, \dots, \xi_n) = \lambda \hat{\psi}(\xi_1, \dots, \lambda \xi_n),$$

άρα ο \hat{f} συγκεντρώνεται σε μία συμπιεσμένη μπάλα με διαστάσεις $1 \times \dots \times 1 \times \frac{1}{\lambda}$. Έτσι, όταν περιορίσουμε τον \hat{f} στο S , αυτός θα συγκεντρωθεί στην B_2^{n-1} . Από τον ορισμό της f ισχύει επίσης $\|f\|_{L^q(S)} \sim \lambda$. Έχουμε υποθέσει ότι έχουμε ένα θεώρημα περιορισμού για το S άρα πρέπει να ισχύει μια εκτίμηση της μορφής $\lambda \lesssim \lambda^{\frac{1}{p}}$. Αν αφήσουμε το $\lambda \rightarrow \infty$ βλέπουμε ότι πρέπει να ισχύει $p = 1$. \square

1.2.1 Αναγκαίες συνθήκες για να ισχύει ένα Θεώρημα Περιορισμού

Θεωρούμε μία επιφάνεια $S = \{(x, \Phi(x)) : x \in \mathbb{R}^{n-1}, \Phi \in C^\infty(\mathbb{R}^{n-1}, \mathbb{R}), |x| \lesssim 1\}$ με $\Phi(0) = \nabla \Phi(0) = 0$. Υποθέτουμε ότι η Φ δεν είναι ταυτοτικά μηδέν. Θα δείξουμε ότι η ύπαρξη μη τετριμμένων θεωρημάτων περιορισμού για την S εξαρτάται και από την καμπυλότητα Gauss της.

Πρόταση 1.3. Υποθέτουμε ότι $\Phi(x) = O(|x|^k)$ για κάποιο $k \geq 2$. Τότε το θεώρημα περιορισμού $R_S(p \rightarrow q)$ είναι δυνατό μόνο αν

$$p^* \geq \frac{n+k-1}{n-1}q.$$

Έτσι, όσο πιο επίπεδη είναι η S τόσο λιγότερα restriction estimates περιμένουμε. Εφόσον υποθέσαμε ότι τουλάχιστον $\Phi(0) = \nabla \Phi(0) = 0$, προκύπτει η συνθήκη

$$p^* \geq \frac{n+1}{n-1}q, \quad (1.11)$$

η οποία είναι αναγκαία για να ισχύει το $R_S(p \rightarrow q)$. Υπενθυμίζουμε ότι αν μ είναι ένα μέτρο Borel στον \mathbb{R}^n τότε ο μετασχηματισμός Fourier του ορίζεται ως

$$\hat{\mu}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i \langle x, \xi \rangle} d\mu(x), \text{ για κάθε } \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Στην περίπτωση της \mathbb{S}^{n-1} , ισχύει η ασυμπτωτική εκτίμηση

$$|\widehat{d\sigma}(x)| = O(|x|^{-\frac{n-1}{2}}), \quad |x| \gg 1, \quad (1.12)$$

άρα ο $\widehat{d\sigma}$ μπορεί να ανήκει στον L^{p^*} μόνο αν

$$p^* > \frac{2n}{n-1} \quad \text{ή, ισοδύναμα} \quad p < \frac{2n}{n+1}.$$

Άρα, το $R_{\mathbb{S}^{n-1}}(p \rightarrow q)$ μπορεί να ισχύει μόνο αν

$$p < \frac{2n}{n+1}. \quad (1.13)$$

Εικασία 1.1 (Εικασία Περιορισμού στην \mathbb{S}^{n-1}). Αν $p, q \in [1, \infty]$ τότε το $R_{\mathbb{S}^{n-1}}(p \rightarrow q)$ ισχύει αν και μόνο αν ισχύουν ταυτόχρονα οι (1.11) και (1.13).

Υπάρχει η πεποίθηση ότι η Εικασία Περιορισμού ισχύει για οποιαδήποτε συμπαγή επιφάνεια S της οποίας η καμπυλότητα Gauss είναι παντού μη-μηδενική.

Υπενθυμίζουμε ότι αν γράψουμε την S (τοπικά) σαν γράφημα όπως παραπάνω, η καμπυλότητα Gauss της δίνεται από τη σχέση

$$\mathcal{G}(x, \Phi(x)) = \det(H_\Phi(x)),$$

όπου

$$H_\Phi(x) = (\partial_i \partial_j \Phi(x))_{i,j=1}^n$$

ο Εσσιανός πίνακας της Φ .

1.3 Το Θεώρημα Stein-Tomas

Ένα πρώτο βασικό βήμα προς τη λύση του προβλήματος περιορισμού στη σφαίρα είναι το θεώρημα Stein-Tomas, το οποίο πιστοποιεί την ισχύ του θεωρήματος περιορισμού στην περίπτωση που $q = 2$. Πιο συγκεκριμένα,

Θεώρημα 1.4 (Stein-Tomas). Αν $1 \leq p \leq \frac{2(n+1)}{n+3}$, τότε ισχύει το $R_S(p \rightarrow 2)$.

Το ανάλογο του προηγούμενου θεωρήματος για τη σφαίρα είναι ($\alpha = \beta = n - 1$)

$$\|\widehat{f d\sigma}\|_p \lesssim \|f\|_{L^2(\mathbb{S}^{n-1})} \quad \text{για } p > \frac{2(n+1)}{n-1},$$

ή ισοδύναμα

$$\|\hat{f}\|_{L^p(\mathbb{S}^{n-1})} \lesssim \|f\|_{L^2} \quad \text{για } p < \frac{2(n+1)}{n+3}.$$

Απόδειξη. Γράφουμε

$$\begin{aligned} \|\hat{f}\|_{L^2(\mathbb{S}^{n-1})}^2 &= \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \bar{\hat{f}}(\xi) \hat{f}(\xi) d\sigma(\xi) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \bar{\hat{f}}(\xi) \left(\hat{f}(\xi) \cdot d\sigma(\xi) \right) d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \bar{f}(x) (f * \check{d\sigma})(x) dx \\ &\leq \|f\|_p \|f * \check{d\sigma}\|_{p^*} \quad (\text{Hölder}). \end{aligned}$$

Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι υπάρχει σταθερά $C = C(n)$ ώστε

$$\|f * \check{d}\sigma\|_{p^*} \leq C \|f\|_p, \quad p = \frac{2(n+1)}{n+3}. \quad (1.14)$$

Για να το δείξουμε αυτό, διαμερίζουμε την \mathbb{S}^{n-1} ως εξής: Κάθε υπερεπίπεδο $\{\xi_j = 0\}$ διχοτομεί την \mathbb{S}^{n-1} σε δύο ημισφαίρια H_j^1 και H_j^2 .

Θεωρούμε (ϕ_i) μία διαμέριση της μονάδας του \mathbb{R}^n ώστε για κάθε $1 \leq j \leq n$ και $l = 1, 2$ να ισχύει

$$\text{supp}(\phi_i) \cap \mathbb{S}^{n-1} \subset H_j^l.$$

Αν περιορίσουμε την οικογένεια (ϕ_i) σε αυτά τα μέλη της των οποίων οι φορείς τέμνουν την \mathbb{S}^{n-1} , θα πάρουμε μία πεπερασμένη διαμέριση της μονάδας της \mathbb{S}^{n-1} αν περιορίσουμε αυτά τα ϕ_i πάνω της. Γράφουμε

$$d\sigma = \sum_{i=1}^m \phi_i d\sigma. \quad (1.15)$$

Έτσι, για να αποδείξουμε την (1.14), αρκεί να την αποδείξουμε για το μέτρο $\phi_i d\sigma$ και να αθροίσουμε ως προς i . Για να διευκολυνθούμε, σταθεροποιούμε $i \in \{1, \dots, m\}$ και υποθέτουμε ότι έχει φορέα

$$\{\xi \in \mathbb{S}^{n-1} : \xi_n > c\} \subset H_n^1$$

για κάποιο $0 < c < 1$. Αν $x, \xi \in \mathbb{R}^n$, γράφουμε $x = (x', t)$ και $\xi = (\xi', \xi_n)$. Έτσι,

$$\begin{aligned} (\phi_i d\sigma)^\sim(x) &= \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \phi_i(\xi) e^{2\pi i \langle x, \xi \rangle} d\sigma(\xi) \\ &= \int_{|\xi'| \leq 1-c^2} e^{2\pi i \langle x, \xi \rangle} \frac{\phi_i(\xi', \sqrt{1-|\xi'|^2})}{\sqrt{1-|\xi'|^2}} d\xi' \\ &= \int_{|\xi'| \leq 1-c^2} e^{2\pi i \langle x', \xi' \rangle} e^{2\pi i t \sqrt{1-|\xi'|^2}} \frac{\phi_i(\xi', \sqrt{1-|\xi'|^2})}{\sqrt{1-|\xi'|^2}} d\xi' \\ &= \left(e^{2\pi i t \sqrt{1-|\xi'|^2}} \frac{\phi_i(\xi', \sqrt{1-|\xi'|^2})}{\sqrt{1-|\xi'|^2}} \right)^\nabla, \end{aligned}$$

όπου ∇ ο μετασχηματισμός Fourier στη μεταβλητή ξ' . Ορίζουμε

$$K_t(x') = (\phi_i d\sigma)^\sim(x', t) = (\phi_i^\sim * d\sigma^\sim)(x', t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Από τον υπολογισμό που κάναμε για το $(\phi_i d\sigma)^\sim$ και το γεγονός ότι $1 - |\xi'|^2 > 0$ εντός του $\text{supp}(\phi_i)$ έχουμε

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \sup_{\xi' \in \mathbb{R}^{n-1}} |K_t^\Delta| \leq C < \infty, \quad (1.16)$$

όπου Δ ο μετασχηματισμός Fourier στη μεταβλητή ξ' . Από την (1.12) και το γεγονός ότι ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier ϕ_i^\sim είναι συνάρτηση Schwartz έπεται ότι

$$|K_t(x')| \lesssim |t|^{-\frac{n-1}{2}} \quad \text{για κάθε } x' \in \mathbb{R}^{n-1}. \quad (1.17)$$

Με τους συλλογισμούς του προηγούμενου βήματος της απόδειξης, λόγω των (1.16) και (1.17) μπορούμε να θεωρήσουμε τη συνέλιξη με την K_t ως φραγμένο γραμμικό τελεστή

από τον $L^1(\mathbb{R}^{n-1})$ στον $L^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$ κι από τον $L^2(\mathbb{R}^{n-1})$ στον εαυτό του. Από την Ανισότητα Riesz-Thorin έχουμε

$$\|K_t * g\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^{n-1})} \lesssim |t|^{-(n-1)(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})} \|g\|_{L^p(\mathbb{R}^{n-1})}.$$

Για κάθε συνάρτηση f στον \mathbb{R}^n γράφουμε $f_t(x') = f(x', t)$. Έχουμε

$$\begin{aligned} \|f * (\phi_i d\sigma)^\vee\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} &= \left\| \left\| \int_{\mathbb{R}} f_\tau * K_{t-\tau} d\tau \right\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^{n-1})} \right\|_{L^{p^*}(\mathbb{R})} \\ &\leq \left\| \int_{\mathbb{R}} \|f_\tau * K_{t-\tau}\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^{n-1})} d\tau \right\|_{L^{p^*}(\mathbb{R})} \\ &\lesssim \left\| \int_{\mathbb{R}} \frac{\|f_\tau\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^{n-1})}}{|t-\tau|^{-(n-1)(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})}} d\tau \right\|_{L^{p^*}(\mathbb{R})} \\ &\lesssim \left\| \|f_t\|_{L^p(\mathbb{R}^{n-1})} \right\|_{L^p(\mathbb{R})} = \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}. \end{aligned}$$

Στην τελευταία ανισότητα χρησιμοποιήθηκε η (1.1) για $\alpha = \frac{n-1}{2} + \frac{n+1}{p}$, $n = 1$ και $q = p^*$. Η παραπάνω συνθήκη για τους δείκτες a, n μας δίνει ότι $p = \frac{2(n+1)}{n+3}$. Αυτό μαζί με ένα επιχείρημα παρεμβολής ολοκληρώνει την απόδειξη του Θεωρήματος Stein-Tomas. \square

1.4 Η λύση του προβλήματος στις 2 διαστάσεις

Κλείνουμε την πρώτη ώρα με τη λύση του προβλήματος περιορισμού στις δύο διαστάσεις. Ξεκινάμε διατυπώνοντάς το.

$$\|\hat{f}\|_{L^q(\mathbb{S}^{n-1})} \lesssim \|f\|_p, \quad \text{όπου } p < \frac{4}{3} \text{ και } q \leq \frac{1}{3}p^*. \quad (1.18)$$

Γράφουμε το πρόβλημα σε δυϊκή μορφή

$$\|\widehat{f d\sigma}\|_q \lesssim \|f\|_{L^p(\mathbb{S}^{n-1})}, \quad \text{όπου } q > 4 \text{ και } q \geq 3p^*. \quad (1.19)$$

Παρατηρούμε ότι αν η (1.19) ισχύει για κάποιο q , τότε αφού ισχύει τετριμμένα για $q = \infty$, από παρεμβολή συμπεραίνουμε ότι ισχύει και για κάθε $q' \geq q$. Επομένως αρκεί να την αποδείξουμε στην περίπτωση που $q = 3p^*$.

Βιβλιογραφία

- [Gr14(I)] L. Grafakos: *Classical Fourier Analysis*. Graduate Texts in Mathematics, Springer New York, NY, 2014.
- [Gr14(II)] L. Grafakos: *Modern Fourier Analysis*. Graduate Texts in Mathematics, Springer New York, NY, 2014.
- [Gu16] L. Guth: *A restriction estimate using polynomial partitioning*. J. American Mathematical Society 29, No. 2, pp. 371-413, 2016.
- [Gu18] L. Guth: *A restriction estimate using polynomial partitioning II*. Acta Math, 221, pp. 81-142, 2018.
- [Ma15] P. Mattila: *Fourier Analysis and Hausdorff Dimension*. Cambridge University Press, Cambridge, 2015.
- [Mi02] T. Mitsis: *A Stein-Thomas restriction theorem for general measures*. Publ. Math. Debrecen, 60 (1-2), pp. 89-90, 2002.

Κεφάλαιο 2

Η γεωμετρία πίσω από μία εξίσωση Reaction-Diffusion

Αναστάσιος Φράγκος, Ε.Κ.Π.Α., Τμ. Μαθηματικών

Περίληψη

Οι εξισώσεις Reaction-Diffusion αποτελούν χρήσιμο εργαλείο για την περιγραφή μίας μεγάλης κατηγορίας φυσικών φαινομένων, τα οποία κυμαίνονται από τη χημεία και τις διάφορες χημικές αντιδράσεις, έως την επιστήμη των υλικών και τη δημιουργία κραμάτων. Σε αυτό το mini-course θα επικεντρωθούμε στην εξίσωση Allen-Cahn και τις γεωμετρικές ιδιότητές της. Η φυσική που υποκρύπτεται πίσω από τα μαθηματικά είναι η περιγραφή του σχηματισμού και της γεωμετρίας των κραμάτων. Αφού εισαγάγουμε βασικές έννοιες από την ανάλυση και τη γεωμετρία, ο φιλόδοξος στόχος μας θα είναι, μεταξύ άλλων, το θεώρημα των Modica-Mortola (1977) και επίσης η συσχέτιση των ελαχιστικών υπερεπιφανειών με τις λύσεις της εν λόγω εξίσωσης, μέσω του θεωρήματος των Pacard-Ritoré (2003). Σκοπεύουμε να δώσουμε μία ιδέα για την απόδειξη του θεωρήματος Modica-Mortola, αλλά όχι για το Pacard-Ritoré. Παρόλα αυτά, θα δώσουμε τα απαραίτητα γεωμετρικά εργαλεία για την απόδειξή του.

Γενικότερη κατηγορία. Γεωμετρία, Διαφορικές εξισώσεις, Λογισμός μεταβολών, Φυσική.

2.1 Μία προεπισκόπηση

Σε πρώτο στάδιο, το φυσικό φαινόμενο που θα μας απασχολήσει σε αυτές τις παρουσιάσεις είναι η περιγραφή του διαχωρισμού των φάσεων σε ένα (εν γένει πολυμερές) κράμα, μέσω της παραβολικής εξίσωσης Allen-Cahn. Όταν αναφερόμαστε σε διαχωρισμό των φάσεων, εννοούμε τη μεταβολή του συστήματος από μία ομοιογενή κατάσταση A σε ένα μείγμα δύο στοιχείων $A_1 + A_2$.

Από μαθηματικής άποψης, η περιγραφή χωρίζεται σε δύο μέρη: Σε αυτό της διάχυσης και σε ένα δυναμικό που “αντιστέκεται” σ’ αυτήν. Είναι λογικό εξάλλου να σκεφτεί κανείς

ότι ένα (μονομερές) υλικό τείνει απλώς να διαχέεται στον χώρο, ενώ η ύπαρξη στοιχείων πλήθους $N \geq 2$ δημιουργεί μία ιδιόμορφη κατάσταση, στην οποία δεν μπορεί να υπάρξει απλώς διάχυση. Η ύπαρξη του δυναμικού περιγράφει την αλληλεπίδραση των στοιχείων. Η διάχυση περιγράφεται εν γένει από εξισώσεις της μορφής $\partial_t u = \Delta u$ (όπου $\Delta = \Delta_x$), και το δυναμικό συμβολίζεται συνήθως με $-W$, οπότε η παραβολική Allen-Cahn οφείλει να έχει τη μορφή:¹

$$\partial_t u = \Delta u - W_u(u) \quad (2.1)$$

όπου $W_u = \partial W / \partial u$. Η ορολογία “παραβολικό” έχει σχέση με την ύπαρξη μίας παραγώγου ως προς τον χρόνο αλλά δύο παραγώγων ως προς τον χώρο. Αναμένεται λοιπόν, με μία παραβολική αλλαγή μεταβλητών $(t, x) \mapsto (t/\lambda^2, x/\lambda)$, η εξίσωση (2.1) να μείνει (σχεδόν) αναλλοίωτη [Ev10].

Για το υπόλοιπο των παρουσιάσεων, θα μας απασχολήσουν χρονικά ανεξάρτητες λύσεις της (2.1) και κατά συνέπεια θα επικεντωθούμε σε καταστάσεις “ισορροπίας”, στις οποίες μας ενδιαφέρει η γεωμετρία. Για την ακρίβεια, θα μελετήσουμε την:

$$\varepsilon^2 \Delta u - W_u(u) = 0 \quad (2.2)$$

(ο ρόλος του ε θα φανεί εν μέρη αργότερα).

Για την (2.2) ορίζεται η ενέργειά της:

$$\mathcal{E}_\varepsilon(u; \Omega) = \int_\Omega \frac{\varepsilon}{2} |\nabla u|^2 + \frac{1}{\varepsilon} W(u) \, dx \quad (2.3)$$

η οποία φαίνεται να εμπεριέχει μίας μορφής “κινητική” ενέργεια $\varepsilon |\nabla u|^2 / 2$ και τη δυναμική W/ε . Βέβαια η ορολογία “κινητική ενέργεια” δεν είναι σωστή και τη χρησιμοποιούμε μονάχα για τη σύνδεση με τους τύπους της κλασικής μηχανικής. Στην πραγματικότητα δεν υπάρχει κίνηση, και η $\varepsilon |\nabla u|^2 / 2$ σχετίζεται με την επιφανειακή τάση. Αυτό που μπορεί να δειχθεί σχετικά με την ενέργεια (2.3) είναι το ακόλουθο γεωμετρικό αποτέλεσμα, για την περίπτωση δύο υλικών, που οφείλεται στους Modica και Mortola:

Έστω $E \subseteq \Omega$ ένα σύνολο με πεπερασμένη περίμετρο. Υπάρχει μία ακολουθία προσεγγιστικών λύσεων u_ε (στον $L^4(\Omega)$, με κάποια ομαλότητα) ούτως ώστε:

$$\lambda \cdot \text{Per}(E; \Omega) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{E}_\varepsilon(u_\varepsilon; \Omega)$$

και $u_\varepsilon \rightarrow \mathbf{1}_E - \mathbf{1}_{\Omega \setminus E}$, στον $L^1(\Omega)$. Το λ είναι ένας πραγματικός αριθμός. Επίσης, με $\text{Per}(E; \Omega)$ συμβολίζουμε την περίμετρο του E και με $\mathbf{1}_A$ τη δείκτρια συνάρτηση του A .

Αυτό είναι το δύσκολο βήμα ώστε κανείς να αποδείξει ότι το συναρτησιακό της ενέργειας $\mathcal{E}_\varepsilon(\cdot; \Omega)$ Γ -συγκλίνει (ό,τι κι αν αυτό σημαίνει) σε ένα πολλαπλάσιο της περιμέτρου.

Η τελευταία ενασχόλησή μας θα είναι το θεώρημα των Pacard-Ritoré, με το οποίο στην περίπτωση των δύο υλικών εξασφαλίζεται η ύπαρξη λύσεων u_ε των (2.2) που η διεπιφάνειά τους είναι κατά προσέγγιση μία ελαχιστική υπερεπιφάνεια. Οι ελαχιστικές επιφάνειες είναι στην περίπτωση των τριών διαστάσεων κρίσιμα σημεία του συναρτησιακού του εμβαδού. Είναι, δηλαδή, επιφάνειες Σ , στις οποίες μηδενίζεται η πρώτη μεταβολή (παράγωγος) του εμβαδού, για κοντινές μεταβολές της Σ . Ισοδύναμα, είναι επιφάνειες μέσης καμπυλότητας μηδέν. Οι ελαχιστικές υπερεπιφάνειες είναι εμφυτευμένες υποπολλαπλότητες διάστασης n μίας πολλαπλότητας Riemann διάστασης $n+1$, που αποτελούν γενίκευση των ελαχιστικών επιφανειών.

¹Συνηθίζεται τόσο το W όσο και το $-W$ να καλούνται δυναμικά, παρότι μόνο το $-W$ έχει τη φυσική έννοια του δυναμικού [AFS18].

Συγκεκριμένα, με το θεώρημα των Pacard και Ritoré έχουμε το εξής:

Έστω (\mathcal{M}, g) μία $(n+1)$ -διάστατη συμπαγής πολυπλοπότητα Riemann χωρίς σύνορο. Έστω, επίσης, $\Sigma \subseteq \mathcal{M}$ μία μη-εκφυλισμένη, προσανατολισμένη ελαχιστική υπερεπιφάνεια με $\mathcal{M} \setminus \Sigma = \mathcal{M}^+ \cup \mathcal{M}^-$, της οποίας το κάθετο διάνυσμα (που συμφωνεί με τον προσανατολισμό) κοιτάζει προς το \mathcal{M}^+ . Υπάρχει $\varepsilon_0 > 0$ ώστε για κάθε $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, υπάρχει λύση u_ε της αντίστοιχης (2.2), με:

$$u_\varepsilon \rightarrow \mathbf{1}_{\mathcal{M}^+} - \mathbf{1}_{\mathcal{M}^-}$$

ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα των \mathcal{M}^+ , \mathcal{M}^- , καθώς $\varepsilon \rightarrow 0$. Επιπλέον, για την ενέργεια έχουμε:

$$\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0^+ \\ \varepsilon < \varepsilon_0}} \mathcal{E}_\varepsilon(u_\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{2}} \mathcal{H}^n(\Sigma)$$

όπου $\mathcal{H}^n(\Sigma)$ είναι το n -διάστατο μέτρο Hausdorff της Σ (δηλαδή, κατ' ουσίαν, ο όγκος/το εμβαδόν της Σ).

Το παραπάνω θεώρημα είναι λογικό (τουλάχιστον το κομμάτι της σύγκλισης $u_\varepsilon \rightarrow \mathbf{1}_{\mathcal{M}^+} - \mathbf{1}_{\mathcal{M}^-}$), αφού η διαίσθησή μας είναι ότι τα υλικά κινούνται με τρόπο τέτοιο ώστε να ελαχιστοποιήσουν την επιφανειακή τους τάση. Κατά συνέπεια, αναμένουμε η “συνδετική” επιφάνεια των υλικών να είναι κοντά σε κρίσιμα σημεία του συναρτησιακού του όγκου/εμβαδού.

Σκοπεύουμε να αποδείξουμε ένα μέρος του θεωρήματος Modica-Mortola, αλλά όχι το Pacard-Ritoré. Παρόλα αυτά, θα δώσουμε τα απαραίτητα γεωμετρικά εργαλεία για την απόδειξή του.

2.2 Μερικά προαπαιτούμενα

2.2.1 Η προέλευση της Allen-Cahn

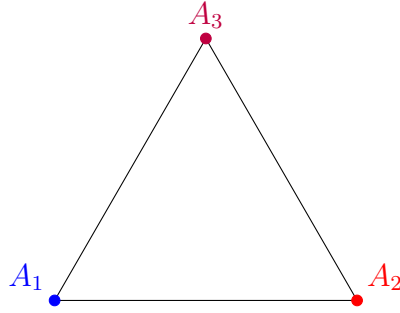
Είναι σημαντικό, πριν συζητήσουμε το μαθηματικό κομμάτι, να σκεφτούμε πώς μοντελοποιείται το πρόβλημα του σχηματισμού των κραμάτων, και συγκεκριμένα να μελετήσουμε ποιο είναι ακριβώς το φυσικό νόημα της u . Στην περίπτωση των δύο υλικών, η u πρέπει να εκφράζει σε κάθε σημείο, με κάποιον τρόπο, πόσο υλικό A_1 υπάρχει και πόσο A_2 . Αυτό το “μέτρο” μπορεί να είναι κάποιου είδους συγκέντρωση, για παράδειγμα μία προσημασμένη πυκνότητα συγκέντρωσης. Το -1 θα αντιστοιχεί στο υλικό A_1 και το 1 στο A_2 . Οι ενδιάμεσες τιμές εκφράζουν τη συνύπαρξη των δύο φάσεων.



Η περίπτωση των δύο φάσεων είναι η απλούστερη και αυτή που θα μας απασχολήσει στη συνέχεια. Εάν το πλήθος των φάσεων είναι μεγαλύτερο του 2, η μία διάσταση δεν αρκεί για την περιγραφή του φαινομένου, και αυτό είναι ζήτημα γεωμετρίας.



Εάν οι τρεις φάσεις τοποθετηθούν στην ευθεία, μπορεί κανείς να μεταβεί από το A_1 στο A_3 και από το A_3 στο A_2 (ή αντίστροφα), αλλά είναι αδύνατον να μεταβεί απ' ευθείας από το A_1 στο A_2 , χωρίς να διέλθει από το A_3 . Εδώ χρειαζόμαστε μία ακόμα διάσταση.



Η u έχει λοιπόν νόημα να παίρνει και διανυσματικές τιμές, αν και αυτό δεν θα μας απασχολήσει.

Προκειμένου να μελετήσουμε την προέλευση της παραβολικής εξίσωσης Allen-Cahn, θα χρειαστεί να μελετήσουμε δύο όρους, αυτόν της διάχυσης και αυτόν του δυναμικού.

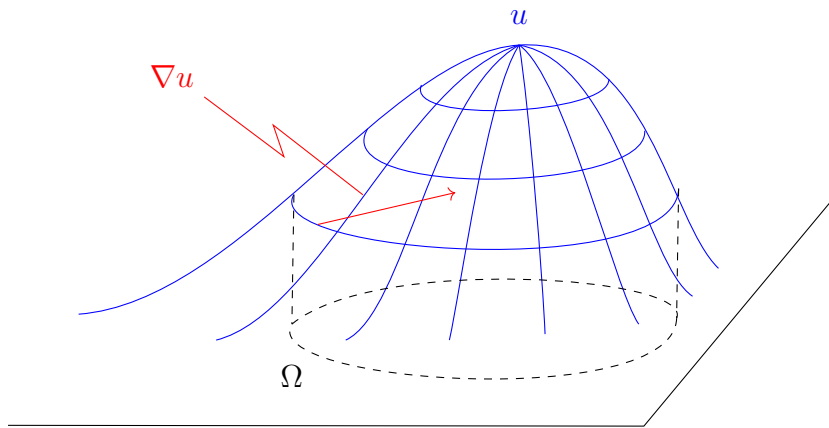
Σημειώνουμε εδώ ότι στην εισαγωγή θα ασχοληθούμε με την περίπτωση όπου ο χώρος είναι ευκλείδειος και όχι μία γενική πολλαπλότητα Riemann. Παρόλα αυτά, ό,τι θα πούμε γενικεύεται και στην περίπτωση των πολλαπλοτήτων. Για τη διάχυση, ας υποθέσουμε ότι η u είναι πυκνότητα συγκέντρωσης. Εάν Ω ένα σύνολο με αρκετά ομαλό σύνορο, η συνολική συγκέντρωση στο Ω είναι:

$$\int_{\Omega} u \, dx$$

και η μεταβολή της συγκέντρωσης $\partial_t \int_{\Omega} u \, dx$. Εάν το υλικό διαχέεται, αναμένουμε να εξέρχεται από το Ω , μέσω του συνόρου του. Δηλαδή, περιμένουμε η εκροή του υλικού να εξαρτάται από την ποσότητα:

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot \hat{n} \, dS$$

με το F να είναι μία διανυσματική συνάρτηση που εκφράζει την εκροή από το σύνορο και \hat{n} είναι το μοναδιαίο κάθετο στο $\partial\Omega$. Εφόσον θέλουμε το υλικό να φεύγει από το Ω , μία επιλογή για το F μπορεί να είναι η $F = -\alpha \nabla u$, $\alpha > 0$.



Μάλιστα, αφού αναμένουμε η συγκέντρωση εντός του Ω να μικραίνει, πολλαπλασιάζουμε την $\int_{\partial\Omega} -\alpha \nabla u \cdot \hat{n} \, dS$ με -1 , κι έχουμε τη σχέση:

$$\partial_t \int_{\Omega} u \, dx = - \int_{\partial\Omega} -\alpha \nabla u \cdot \hat{n} \, dS = \alpha \int_{\partial\Omega} \nabla u \cdot \hat{n} \, dS$$

και από το θεώρημα της απόκλισης του Gauss:

$$\partial_t \int_{\Omega} u \, dx = \int_{\Omega} \nabla \cdot (\nabla u) \, dx = \alpha \int_{\Omega} \Delta u \, dx$$

όπου $\nabla \cdot \diamond$ είναι ο τελεστής της απόκλισης. Δηλαδή:

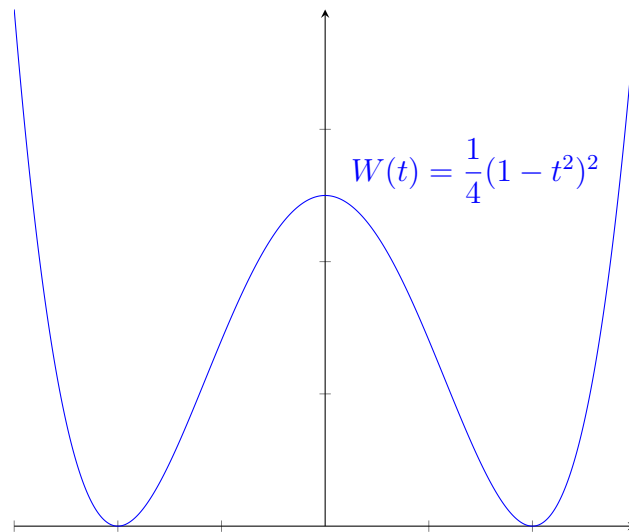
$$\int_{\Omega} \partial_t u - \alpha \Delta u \, dx = 0$$

Αφού το Ω ήταν τυχόν, έπεται ότι:

$$\partial_t u - \alpha \Delta u = 0$$

Εάν θέσουμε $\alpha = \varepsilon^2$, η εξίσωση γίνεται $\partial_t u = \varepsilon^2 \Delta u$.

Όσον αφορά το δυναμικό, θα περιοριστούμε στην περίπτωση των δύο υλικών. Η φυσική διαίσθηση είναι ότι οι φάσεις θα θέλουν να διαχωριστούν καθώς περνάει ο χρόνος, και κατά συνέπεια θα πρέπει να υπάρχει ένα δυναμικό W , το οποίο έχει δύο ελάχιστα, καθένα εκ των οποίων αντιστοιχεί σε μία φάση. Ένα τέτοιο δυναμικό είναι το $W(t) = (1 - t^2)^2/4$, που έχει ελάχιστα στα -1 και 1 .



Το δυναμικό τείνει να ωθήσει το ομοιογενές μείγμα σε μία κατάσταση διαχωρισμού (αρκετά λυπηρό), όπου η u θα γίνεται είτε -1 είτε 1 . Από την άλλη, δεν πρέπει να ξεχνάμε την τάση των υλικών να διαχέονται, οπότε συνδυάζοντας την εξίσωση της διάχυσης με το δυναμικό, παίρνουμε την εξίσωση:

$$\partial_t u = \varepsilon^2 \Delta u - W_u(u)$$

η οποία είναι η παραβολική εξίσωση Allen-Cahn. Εάν οι λύσεις είναι χρονικά ανεξάρτητες, παίρνουμε την εξίσωση Allen-Cahn:

$$\Delta u - W_u(u) = 0$$

2.2.2 Η Allen-Cahn μέσω gradient flows*

Η εξίσωση Allen-Cahn προκύπτει επίσης μέσω της Cahn-Hilliard, ως μία ειδική περίπτωση. Θα αναφέρουμε επιγραμματικά κάποια πράγματα μέσω των λεγόμενων gradient flows. Σημειώνουμε ότι αυτή η παράγραφος είναι στην πραγματικότητα ένα **παράρτημα** και μπορεί να παραληφθεί. Διάφορες έννοιες ασθενούς παραγωγισιμότητας που χρησιμοποιούνται, εάν δεν αναφέρονται εδώ, μπορούν να βρεθούν στην Παράγραφο 2.2.5.

Η ιδέα για την εξαγωγή της διαφορικής εξίσωσης είναι να “ωθήσουμε” την u προς την κατεύθυνση που ελαχιστοποιείται η ενέργεια. Δηλαδή, η u πρέπει να ακολουθήσει την κλίση $-\nabla \mathcal{E}_\varepsilon(u; \Omega)$, στο $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, για κάποια έννοια κλίσης.

$$\partial_t u = -\nabla_{\mathcal{E}} \mathcal{E}_\varepsilon(u; \Omega)$$

Εδώ ή έννοια της κλίσης είναι αυτή του μεταβολικού διαφορικού ή του διαφορικού Gâteaux. Ο παρακάτω ορισμός που δίνουμε μπορεί να γενικευτεί σε τοπικά κυρτούς τοπολογικούς διανυσματικούς χώρους.

Ορισμός 2.1 (Διαφορικό Gâteaux). Έστω $J : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ ένα συναρτησιακό σε χώρο συναρτήσεων (ή κατανομών) και u, v συναρτήσεις. Η μεταβολή του J στο u από την κατεύθυνση της v είναι η παράγωγος:

$$\delta J(u)(v) = \frac{\delta J(u)}{\delta v} = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} J(u + tv)$$

Το διαφορικό Gâteaux είναι η συνάρτηση (ή κατανομή) $\nabla_{\mathcal{E}} J(u)$ για την οποία για κάθε v :

$$\langle \nabla_{\mathcal{E}} J(u), v \rangle = \delta J(u)(v)$$

για κάποιο εσωτερικό γινόμενο $\langle \cdot, \cdot \rangle$ του \mathcal{X} .

Η έννοια της μεταβολής αναλύεται σε διαφορετικό πλαίσιο στην Παράγραφο 2.3.

Εν προκειμένω θα ασχοληθούμε με τον ομογενή χώρο Sobolev $\dot{H}^1(\Omega)$:

$$\dot{H}^1(\Omega) = \{u \in \mathcal{S}'(\Omega) \mid \nabla u \in L^2(\Omega)\}$$

και με τον δυϊκό του $\dot{H}^{-1}(\Omega) = \dot{H}_0^1(\Omega)'$ (με \mathcal{S}' συμβολίζουμε τις tempered κατανομές, δηλαδή τις κατανομές του χώρου του Schwartz). Η έννοια της παραγωγίσιμης της κατανομής έχει κι αυτή τη βάση της στο θεώρημα απόκλισης του Gauss (όπως έχουν και οι έννοιες στην Παράγραφο 2.2.5). Συγκεκριμένα, για κάθε $\varphi \in \mathcal{S}(\Omega)$ θέλουμε:

$$\langle \partial_i u, \varphi \rangle = -\langle u, \partial_i \varphi \rangle$$

Με $\langle \cdot, \cdot \rangle$ συμβολίζουμε την εκτίμηση των συναρτησοειδών.

Όπως πιθανότατα θα έχετε αντιληφθεί, η εύρεση του κατάλληλου εσωτερικού γινομένου για το διαφορικό Gâteaux είναι κομβικής σημασίας για την εξίσωση Cahn-Hilliard. Παρακάτω περιγράφουμε σε βήματα την επιλογή του και την εξαγωγή της εξίσωσης.

Βήμα I: Στον χώρο $\dot{H}^{-1}(\Omega)$ θα ορίσουμε ένα εσωτερικό γινόμενο, χρησιμοποιώντας τον $L^2(\Omega)$, σε πυκνο υπόχωρο του $\dot{H}^{-1}(\Omega)$. Συγκεκριμένα:

$$\langle v_1, v_2 \rangle_{\dot{H}^{-1}(\Omega)} = \langle \nabla \varphi_{v_1}, \nabla \varphi_{v_2} \rangle_{L^2(\Omega)}$$

όπου οι $\varphi_{v_1}, \varphi_{v_2} \in \dot{H}^{-1}(\Omega)$ είναι αντιπρόσωποι των v_1, v_2 , των οποίων η επιλογή θα εξηγηθεί στη συνέχεια. Αυτός ο ορισμός εσωτερικού γινομένου είναι ακριβώς αυτός που θα χρειαστεί για την κλίση του συναρτησιακού της ενέργειας.

Βήμα II: Για κάθε v (ή εν πάση περιπτώσει για v σε πυκνό υποσύνολο), υπάρχει αντιπρόσωπος φ_v ούτως ώστε το πρόβλημα συνοριακών τιμών Neumann να επιλύεται:

$$\begin{cases} -\Delta \varphi_v = v, & \text{στο } \Omega \\ \frac{\partial \varphi_v}{\partial \hat{n}} = 0, & \text{στο } \partial\Omega \\ \int_{\Omega} \varphi_v \, dx = 0 \end{cases}$$

Αυτό μπορεί να δειχθεί από το θεώρημα Lax-Milgram, το οποίο αναφέρουμε παρακάτω. Όπως θα φανεί από τη διατύπωση, το εν λόγω θεώρημα είναι το ανάλογο του θεωρήματος αναπαράστασης του Riesz για διγραμμικές απεικονίσεις.

Θεώρημα 2.1 (Lax-Milgram). Έστω H ένας χώρος Hilbert και $B : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ μία διγραμμική απεικόνιση. Υποθέτουμε ότι:

i. Υπάρχει σταθερά $C > 0$ ούτως ώστε:

$$|B(u, v)| \leq C \|u\| \cdot \|v\|$$

ii. Υπάρχει σταθερά $c > 0$ ούτως ώστε:

$$c \|u\|^2 \leq B(u, u)$$

Έστω επίσης $F : H \rightarrow \mathbb{R}$ ένα φραγμένο συναρτησοειδές. Τότε υπάρχει μοναδικό στοιχείο $u \in H$ ούτως ώστε:

$$B(u, v) = \langle F, v \rangle, \quad \forall v \in H$$

Εν προκειμένω, ορίζουμε $B : \dot{H}_0^1(\Omega) \times \dot{H}_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} B(\varphi_{v_1}, \varphi_{v_2}) &= \langle \nabla \varphi_{v_1}, \nabla \varphi_{v_2} \rangle_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} \langle \nabla \varphi_{v_1}, \nabla \varphi_{v_2} \rangle \, dx \\ &= - \int_{\Omega} \Delta \varphi_{v_1} \cdot \varphi_{v_2} \, dx \end{aligned}$$

και αποδεικνύουμε τις εκτιμήσεις του θεωρήματος Lax-Milgram.

- Για την πρώτη εκτίμηση, από την ανισότητα Hölder έχουμε:

$$|B(\varphi_{v_1}, \varphi_{v_2})| \leq \|\nabla \varphi_{v_1}\|_{L^2(\Omega)} \cdot \|\nabla \varphi_{v_2}\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\varphi_{v_1}\|_{\dot{H}^1(\Omega)} \cdot \|\varphi_{v_2}\|_{\dot{H}^1(\Omega)}$$

- Για τη δεύτερη εκτίμηση, έχουμε:

$$B(\varphi_{v_1}, \varphi_{v_1}) = \|\nabla \varphi_{v_1}\|_{L^2(\Omega)}^2$$

και από την ανισότητα του Poincaré, εάν $(\varphi_{v_1})_{\Omega} = \int_{\Omega} \varphi_{v_1} \, dx$:

$$\|\varphi_{v_1}\|_{L^2(\Omega)}^2 = \|\varphi_{v_1} - (\varphi_{v_1})_{\Omega}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq c \|\nabla \varphi_{v_1}\|_{L^2(\Omega)}^2 = c \cdot B(\varphi_{v_1}, \varphi_{v_1})$$

οπότε:

$$\frac{1}{c+1} \|\varphi_{v_1}\|_{\dot{H}^1(\Omega)}^2 \leq B(\varphi_{v_1}, \varphi_{v_1})$$

Εάν λοιπόν ορίσουμε:

$$F(\varphi_{v_2}) = \int_{\Omega} v_1 \varphi_{v_2} \, dx, \quad v_1 \in \dot{H}_0^1(\Omega)$$

τότε υπάρχει μοναδικό φ_{v_1} ούτως ώστε:

$$B(\varphi_{v_1}, \varphi_{v_2}) = F(\varphi_{v_2}), \quad \text{για κάθε } \varphi_{v_2} \in \dot{H}_0^1(\Omega)$$

Κατά συνέπεια, για κάθε v_1 υπάρχει φ_{v_1} ούτως ώστε $-\Delta \varphi_{v_1} = v_1$ ασθενώς. Έτσι, το εσωτερικό γινόμενο $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\dot{H}^{-1}(\Omega)}$ είναι καλά ορισμένο (σε πυκνό υπόχωρο).

Βήμα III: Για κάθε $v \in \dot{H}_0^1(\Omega)$ υπολογίζουμε:

$$\begin{aligned}
\langle \nabla_{\mathcal{G}} \mathcal{E}_\varepsilon(u; \Omega), v \rangle &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \mathcal{E}_\varepsilon(u + tv; \Omega) \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (\mathcal{E}_\varepsilon(u + tv; \Omega) - \mathcal{E}_\varepsilon(u; \Omega)) \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \int_\Omega \frac{\varepsilon}{2} 2t \langle \nabla u, \nabla v \rangle + \int_\Omega \frac{1}{\varepsilon} W_u(u) v \, dx \\
&= \int_\Omega \varepsilon \langle \nabla u, \nabla v \rangle \, dx + \frac{1}{\varepsilon} W_u(u) v \, dx \\
&= \int_\Omega \left[-\varepsilon \Delta u + \frac{1}{\varepsilon} W_u(u) \right] v \, dx \\
&= \int_\Omega \left[\varepsilon \Delta u - \frac{1}{\varepsilon} W_u(u) \right] \Delta \varphi_v \, dx \\
&= - \int_\Omega \left\langle \nabla \left[\varepsilon \Delta u - \frac{1}{\varepsilon} W_u(u) \right], \nabla \varphi_v \right\rangle \\
&= \left\langle \nabla \left[\frac{1}{\varepsilon} W_u(u) - \varepsilon \Delta u \right], \nabla \varphi_v \right\rangle_{L^2(\Omega)} \\
&= \left\langle -\nabla \cdot \nabla \left[\frac{1}{\varepsilon} W_u(u) - \varepsilon \Delta u \right], -\nabla \cdot \nabla \varphi_v \right\rangle_{\dot{H}^{-1}(\Omega)} \\
&= \left\langle -\Delta \left[\frac{1}{\varepsilon} W_u(u) - \varepsilon \Delta u \right], v \right\rangle_{\dot{H}^{-1}(\Omega)}
\end{aligned}$$

Οι παραπάνω υπολογισμοί μας επιτρέπουν να κάνουμε την ταύτιση (ασθενώς):

$$\nabla_{\mathcal{G}} \mathcal{E} = -\Delta \left[\frac{1}{\varepsilon} W_u(u) - \varepsilon \Delta u \right]$$

Κατά συνέπεια, το gradient flow γίνεται:

$$\partial_t u = \Delta \left[\frac{1}{\varepsilon} W_u(u) - \varepsilon \Delta u \right] \quad (2.4)$$

Η εξίσωση 2.4 ονομάζεται εξίσωση Cahn-Hilliard. Για την χρονικά ανεξάρτητη μορφή έχουμε την εξίσωση:

$$\Delta \left[\frac{1}{\varepsilon} W_u(u) - \varepsilon \Delta u \right] = 0$$

η οποία λύνεται εάν για παράδειγμα:

$$\frac{1}{\varepsilon} W_u(u) - \varepsilon \Delta u = 0 \Leftrightarrow \varepsilon^2 \Delta u - W_u(u) = 0$$

(αυτή είναι μία από τις πολλές περιπτώσεις για τις οποίες η χρονικά ανεξάρτητη 2.4 επιλύεται). Η τελευταία είναι ακριβώς η εξίσωση Allen-Cahn.

2.2.3 Η λύση της Allen-Cahn στη μία διάσταση

Στην απλή περίπτωση της μίας διάστασης, η εξίσωση Allen-Cahn έχει λύση που μπορεί να βρεθεί εύκολα.

Παρατηρούμε για αρχή ότι, για να βρούμε μία λύση, αρκεί να μελετήσουμε μονάχα την $\Delta u - W_u(u) = 0$ και όχι τις (2.2). Πράγματι η:

$$\varepsilon^2 \Delta u(\varepsilon x) = W_u(u(\varepsilon x))$$

είναι ισοδύναμη με την:

$$\Delta v = W_u(v) = v^3 - v$$

όπου $v(x) = u(\varepsilon x)$.

Παρατηρούμε επίσης ότι:

$$((v')^2 - 2W(v))' = 2v' \cdot v'' - 2v' \cdot W_u(v) = 0$$

και άρα:

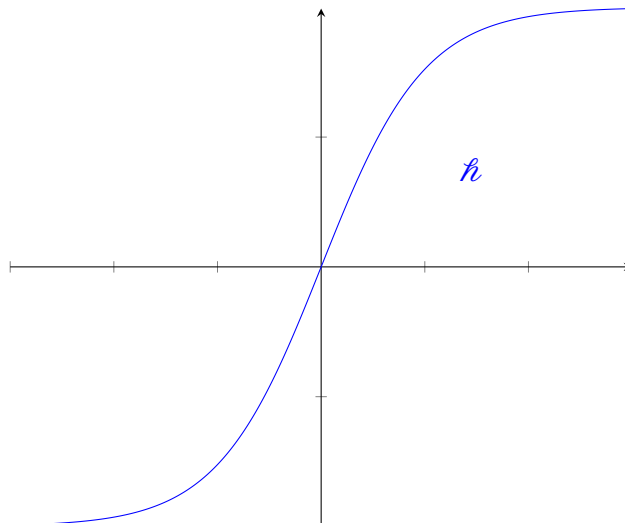
$$(v')^2 = 2W(v) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Για να βρούμε μία λύση, θέτουμε $c = 0$ και υποθέτουμε $v' > 0$. Έχουμε:

$$v' = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - v^2)$$

και άρα η (ετεροκλινής) λύση είναι η:

$$v(x) = \mathcal{H}(x - x_0), \quad \mathcal{H}(x) = \tanh(x/\sqrt{2})$$



Η \mathcal{H} έχει καλή φυσική ερμηνεία, τόσο από τη μορφή της, όσο και από την ιδιότητα της πεπερασμένης ενέργειας.

$$\mathcal{E}(v; \mathbb{R}) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2}(v')^2 + W(v) \, dx < \infty$$

Μάλιστα, μπορεί κανείς να δείξει ότι οι μόνες λύσεις με πεπερασμένη ενέργεια είναι αυτές που μόλις βρήκαμε, μαζί με τις τετριμμένες ± 1 .

Παρατήρηση 2.1 (Λύσεις πεπερασμένης ενέργειας της μονοδιάστατης Allen-Cahn, $\varepsilon = 1$). Οι μόνες \mathcal{H} λύσεις πεπερασμένης ενέργειας της μονοδιάστατης Allen-Cahn, με $\varepsilon = 1$, είναι οι $v(x) = \pm \mathcal{H}(x - x_0)$ και οι $v \equiv \pm 1$.

Απόδειξη. Όπως έχουμε δει, για κάποιο $c \in \mathbb{R}$, $(v')^2 = 2W(v) + c$. Λόγω της πεπερασμένης ενέργειας, αφού $(v')^2/2$, $W(v) > 0$, θα πρέπει να υπάρχει ακολουθία $(x_k)_k$ με:

$$x_k \rightarrow \infty, \quad v'(x_k) \rightarrow 0, \quad W(v(x_k)) \rightarrow 0$$

(αλλιώς σκεφτείτε τι θα συνέβαινε). Άρα $(v'(x_k))^2 - 2W(v(x_k)) \rightarrow 0$, κι αφού το c είναι σταθερό, $c = 0$.

Στη συνέχεια διακρίνουμε περιπτώσεις. Εάν $|v(0)| < 1$, τότε:

$$v' = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - v^2) \text{ ή } v' = -\frac{1}{\sqrt{2}}(1 - v^2)$$

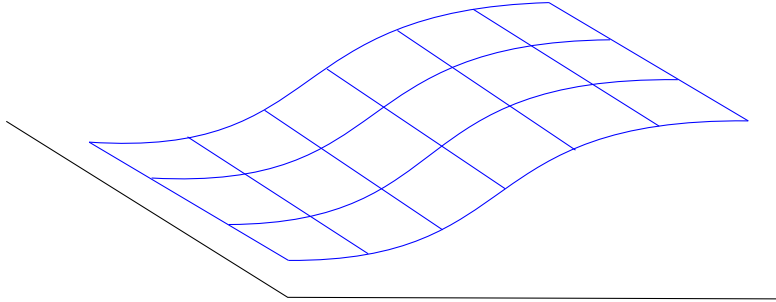
δηλαδή $v = \pm \mathcal{H}(x - x_0)$.

Εάν $|v(0)| = 1$, θα υποθέσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $v(0) = 1$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει x_1 ούτως ώστε $v(x_1) < 1$ και τότε παρατηρούμε ότι ως το x_1 η λύση είναι της μορφής $\pm \mathcal{H}(x - x_0)$. Άρα, έχει ασυνέχεια σε κάποιο σημείο του διαστήματος $(\min\{x_1, 0\}, \max\{x_1, 0\})$, πράγμα άτοπο. Κατά συνέπεια $v \geq 1$. Εφόσον η μονοτονία της v αλλάζει μονάχα στα σημεία όπου $v(x) = 1$, η v πρέπει να διατηρεί τη μονοτονία της (σκεφτείτε γιατί). Εάν είναι φθίνουσα, $v \equiv 1$, ενώ εάν είναι αύξουσα, δεν έχει πεπερασμένη ενέργεια, εκτός κι αν $v \equiv 1$.

Τέλος, ασχολούμαστε με την περίπτωση $|v(0)| > 1$. Θα υποθέσουμε και πάλι, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι $v(0) > 1$. Εάν $v > 1$, τότε όπως πριν η v δεν έχει πεπερασμένη ενέργεια. Επίσης, εάν υπάρχει σημείο x_1 ούτως ώστε $v(x_1) = 1$, τότε από εκεί και πέρα $v \equiv 1$, ενώ για τα $x < x_1$ η v δεν έχει πεπερασμένη ενέργεια. \square

Η μονοδιάστατη λύση της Allen-Cahn έχει ανάλογο στις δύο διαστάσεις, το οποίο συνήθως ονομάζουμε μονοδιάστατη λύση στις δύο διαστάσεις. Η λύση αυτή είναι η εξής: Θεωρούμε $a \in \mathbb{S}^1$, $b \in \mathbb{R}$, και ορίζουμε:

$$v(x) = \mathcal{H}(\langle a, x \rangle - b)$$



2.2.4 Πολλαπλότητες και πολλαπλότητες Riemann

Η μορφή των θεωρημάτων των Modica-Mortola και Pacard-Ritoré, με την οποία θα ασχοληθούμε, είναι γενική και χρησιμοποιεί πολλαπλότητες Riemann. Ο χώρος, δηλαδή, στον οποίον υπάρχει το κράμα και μελετάται η δομή του, είναι μία πολλαπλότητα Riemann. Αυτή είναι η μορφή με την οποία εμφανίστηκε ιστορικά το Pacard-Ritore στο [PR03], αλλά όχι το Modica-Mortola στο [MM77].

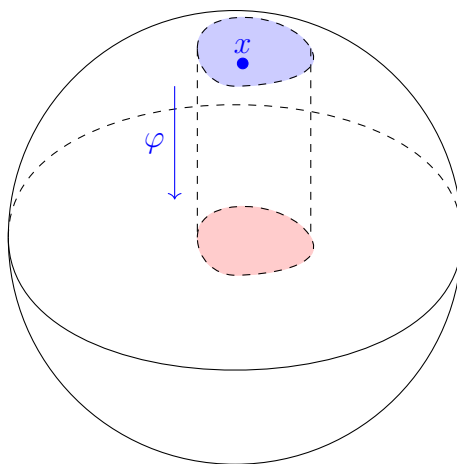
Στη συνέχεια θα ακολουθήσει μία μικρή εισαγωγή στις πολλαπλότητες και τη γεωμετρία Riemann. Γενικά, θα ακολουθήσουμε μία παρουσίαση όπως στα [Kü15], [dC92], [Bo86], [Fr24].

Είναι φυσιολογικό, ως γενίκευση των \mathbb{R}^n , να μελετήσουμε χώρους που είναι τοπικά ευκλείδειοι. Οι πολλαπλότητες είναι στην ουσία τοπικά ευκλείδειοι χώροι, μόνο που προστίθενται στον ορισμό τους μερικές επιπλέον βοηθητικές ιδιότητες, που είναι ολικές και όχι τοπικές. Αυτό βέβαια γίνεται στο πλαίσιο της ομοιότητάς τους με τους ευκλείδειους χώρους. Η πρώτη ολική ιδιότητα είναι αυτή του δεύτερου αριθμήσιμου τοπολογικού χώρου, με την οποία τα δίκτυα αντικαθίστανται από ακολουθίες και η δεύτερη του Hausdorff, με την οποία εξασφαλίζεται η μοναδικότητα των ορίων.

Ορισμός 2.2 (Τοπολογικές πολλαπλότητες χωρίς σύνορο). Ένας τοπολογικός χώρος $(\mathcal{M}, \mathfrak{T})$ θα λέγεται τοπολογική πολλαπλότητα (διάστασης n) εάν:

- i. Είναι τοπικά ομοιομορφικός με τον \mathbb{R}^n . Δηλαδή για κάθε $x \in \mathcal{M}$, υπάρχει ανοικτή περιοχή $U \in \mathfrak{T}$ του x και τοπολογικός ομοιομορφισμός $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$.
- ii. Είναι δεύτερος αριθμήσιμος. Δηλαδή, υπάρχει αριθμήσιμη βάση της \mathfrak{T} .
- iii. Είναι Hausdorff. Δηλαδή για κάθε $x \neq y$ υπάρχουν $U, V \in \mathfrak{T}$, $U \cap V = \emptyset$, με $x \in U$, $y \in V$.

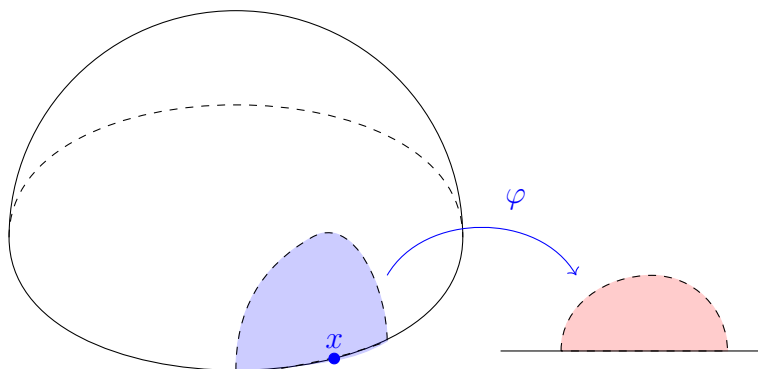
Αυτός ο ορισμός αναφέρεται στις πολλαπλότητες χωρίς σύνορο. Παραδείγματα τέτοιων πολλαπλοτήτων υπάρχουν πολλά, με το απλούστερο ίσως (μη-ευκλείδειο) παράδειγμα στον χώρο να είναι η σφαίρα \mathbb{S}^2 .



Υπάρχουν επίσης πολλαπλότητες που έχουν σύνορο, όπως είναι το ημισφαίριο μαζί με τον ισημερινό. Για κάποιον, δηλαδή, που κατοικεί στο ημισφαίριο, υπάρχει ένα (όχι με την τοπολογική έννοια) σύνορο, που είναι ο ισημερινός. Οι πολλαπλότητες με σύνορο ορίζονται με τον ακόλουθο τρόπο:

Ορισμός 2.3 (Τοπολογικές πολλαπλότητες με σύνορο). Ένας τοπολογικός χώρος $(\mathcal{M}, \mathfrak{T})$ θα καλείται τοπολογική πολλαπλότητα με σύνορο εάν ισχύουν οι ιδιότητες ii. και iii. του Ορισμού 2.2, και η i. έχει αντικατασταθεί από την:

- i*. Για κάθε $x \in \mathcal{M}$ υπάρχει τοπικός ομοιομορφισμός είτε με το \mathbb{R}^n είτε με το άνω ημιεπίπεδο $\overline{\mathbb{R}^n_+}$.



Το σύνορο της πολλαπλότητας είναι τα σημεία αυτά που απεικονίζονται στο σύνορο του άνω ημιεπιπέδου μέσω των τοπικών ομοιομορφισμών.

Ορισμός 2.4 (Σύνоро μίας τοπολογικής πολλαπλότητας). Έστω μία πολλαπλότητα $(\mathcal{M}, \mathfrak{T})$. Ένα σημείο $x \in \mathcal{M}$ θα λέγεται *συνοριακό* εάν απεικονίζεται στο σύνορο του άνω ημιεπιπέδου μέσω των τοπικών ομοιομορφισμών. Το σύνορο των συνοριακών σημείων συμβολίζεται με $\text{bd}\mathcal{M}$ και καλείται *σύνορο της πολλαπλότητας* \mathcal{M} .

Πρόταση 2.1. Για κάθε πολλαπλότητα $(\mathcal{M}, \mathfrak{T})$ ισχύουν τα εξής:

- i. Το σύνορο $\text{bd}\mathcal{M}$ εφοδιάζεται με δομή τοπολογικής πολλαπλότητας, με τον περιορισμό των ομοιομορφισμών στο σύνορο $\text{bd}\mathcal{M}$.
- ii. Έχουμε $\text{bd}\text{bd}\mathcal{M} = \emptyset$ (δηλαδή το σύνορο είναι τοπολογική πολλαπλότητα χωρίς σύνορο).

Σε μία τοπολογική πολλαπλότητα ορίζονται έννοιες συνέχειας, μέσω των τοπικών ομοιομορφισμών. Θα λέμε ότι μία συνάρτηση $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ μεταξύ πολλαπλοτήτων είναι *συνεχής* εάν σε κάθε x η συνάρτηση (τοπική παράσταση):

$$\tilde{f} = \psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$$

είναι συνεχής, με τις φ, ψ να είναι τοπικοί ομοιομορφισμοί των $x \in \mathcal{M}$ και $f(x) \in \mathcal{N}$ αντίστοιχα. Στην ουσία ανάγουμε τον ορισμό της συνέχειας στις πραγματικές συναρτήσεις.

Επίσης, αξίζει να παρατηρήσουμε ότι αν φ_1, φ_2 είναι ομοιομορφισμοί στην ίδια πολλαπλότητα, οι $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(U \cap V) \rightarrow \varphi_2(U \cap V)$, $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1} : \varphi_2(U \cap V) \rightarrow \varphi_1(U \cap V)$ είναι ομοιομορφισμοί, πράγμα που -σε γενικές γραμμές- δείχνει ότι υπάρχει μία έννοια “καλής μετάβασης” μεταξύ των περιοχών των ομοιομορφισμών. Αυτό είναι αναγκαίο με την εξής έννοια: Εάν θέλουμε να οριστούν έννοιες συνέχειας στις πολλαπλότητες, για παράδειγμα συναρτήσεων $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$, δεν θα πρέπει να υπάρχει εξάρτηση από την επιλογή των ομοιομορφισμών με τις οποίες γράφεται η τοπική παράσταση \tilde{f} .

Στις πολλαπλότητες μπορεί, επίσης, να προσδοθεί μία διαφορική δομή, με την οποία είναι δυνατόν να οριστούν έννοιες διαφορισμότητας σε συναρτήσεις σε πολλαπλότητες.

Σημείωση: Σε όλα τα παρακάτω το “διαφορικό” μπορεί να αντικατασταθεί με το “ C^k ”, $1 \leq k \leq \infty$.

Ορισμός 2.5 (Χάρτες και διαφορικά συμβιβαστοί χάρτες). Έστω $(\mathcal{M}, \mathfrak{T})$ μία τοπολογική πολλαπλότητα.

- i. Κάθε ζεύγος (U, φ) , με $U \in \mathfrak{T}$ και $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ τοπικός ομοιομορφισμός, θα καλείται *χάρτης*.
- ii. Δύο χάρτες $(U, \varphi), (V, \psi)$ λέγονται *διαφορικά συμβιβαστοί* εάν οι μεταβάσεις:

$$\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V) \text{ και } \varphi \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap V) \rightarrow \varphi(U \cap V)$$

είναι διαφορίσιμες. Δηλαδή, οι αλληλαγές συντεταγμένων είναι διαφορίσιμες (αμφιδιαφορίσιμες για την ακρίβεια).

Ορισμός 2.6 (Διαφορικοί άτλαντες και διαφορικές πολλαπλότητες). Έστω $(\mathcal{M}, \mathfrak{T})$ μία τοπολογική πολλαπλότητα.

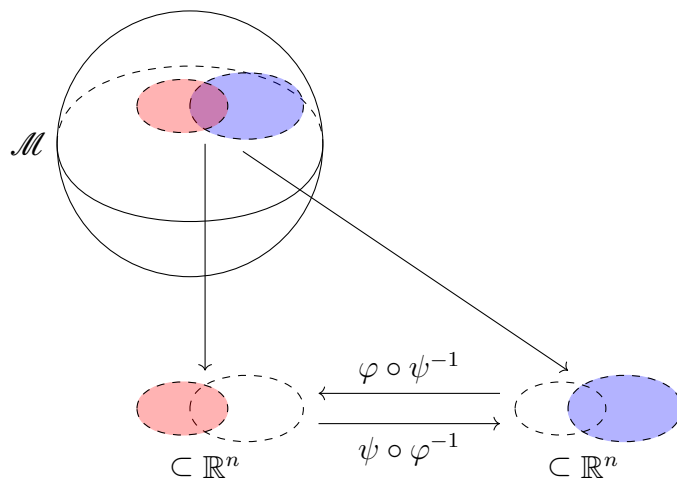
- i. Ένας (διαφορικός) *άτλαντας* \mathcal{A} είναι ένα σύνολο διαφορικά συμβιβαστών χαρτών:

$$\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$$

που αποτελεί κάλυμμα της \mathcal{M} .

- ii. Το ζεύγος $(\mathcal{M}, \mathfrak{T}, \mathcal{A})$ θα καλείται *διαφορική πολλαπλότητα*. Συνήθως ο άτλαντας \mathcal{A} είναι ο *μεγιστικός*:

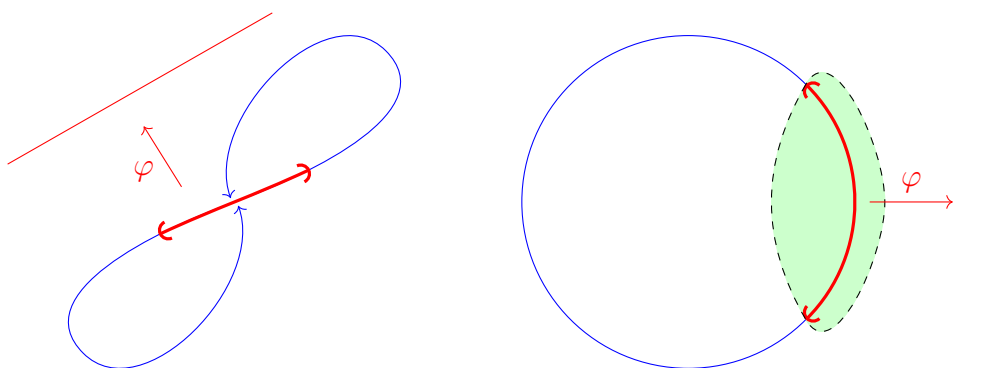
$$\mathcal{A}_{\max} = \{(U, \varphi) \mid (U, \varphi) \text{ ανά δύο διαφορικά συμβιβαστοί χάρτες της } \mathcal{M}\} \supseteq \mathcal{A}$$



Πολύ συχνά στους συμβολισμούς παραλείπουμε την τοπολογία/τους άτλαντες και γράφουμε μονάχα (για παράδειγμα) \mathcal{M} για την πολλαπλότητα.

Με τους ορισμούς αυτούς υπάρχουν δύο είδη πολλαπλοτήτων: Εάν ξεκινήσουμε με μοντέλο τον χώρο \mathbb{R} , μπορούμε να φτιάξουμε ένα οκτάρι ή έναν κύκλο. Η ουσιώδης διαφορά των δύο είναι ότι το οκτάρι έχει τοπικά την τοπολογία του \mathbb{R} αλλά όχι τη σχετική τοπολογία του \mathbb{R}^2 , ενώ ο κύκλος έχει τοπικά την τοπολογία του \mathbb{R} και τη σχετική τοπολογία του \mathbb{R}^2 . Στην πρώτη περίπτωση λέμε ότι η πολλαπλότητα είναι *εμβαπτισμένη*, ενώ στη δεύτερη ότι είναι *εμφυτευμένη*. Εμείς θα ασχοληθούμε μονάχα με *εμφυτευμένες* πολλαπλότητες (τις καλούμε *εμφυτευμένες υποπολλαπλότητες*, αφού περιέχονται σε μεγαλύτερο χώρο).

Η ορολογία “εμβαπτισμένος” δεν έχει την έννοια του “εμφυτεύω”, και συνεπώς οι δύο λέξεις δεν έχουν το ίδιο νόημα. Η λέξη *εμβάπτιση* εδώ χρησιμοποιείται με την έννοια της αλλαγής ονόματος/ονοματοδοσίας. Και πράγματι, το οκτάρι είναι στην ουσία το \mathbb{R} , μόνο που το “βλέπουμε/βαπτίζουμε” αλλιώς.

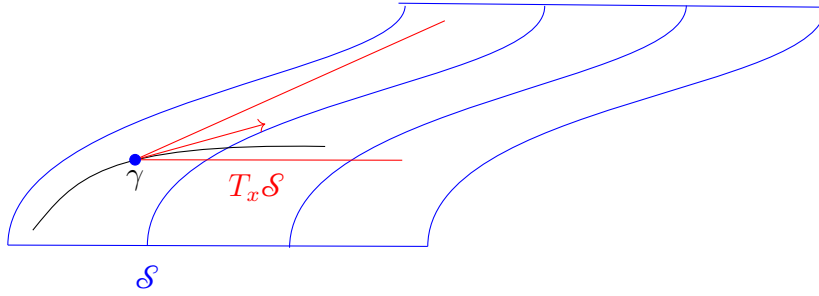


Σημείωση: Στη συνέχεια θα ασχολούμαστε με ομαλές (δηλαδή C^∞) πολλαπλότητες.

Πολύ βασική έννοια στις πολλαπλότητες είναι αυτή του *εφαπτόμενου χώρου*. Δεδομένης μίας επιφάνειας $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}^3$, συνηθίζεται να δίνεται ο ορισμός του *εφαπτόμενου χώρου* (επιπέδου) σε ένα σημείο $p \in \mathcal{M}$:

$$T_x \mathcal{S} = \{(p, u) \in \{p\} \times \mathbb{R}^3 \mid \exists \text{ διαφορ. καμπύλη } \gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathcal{S} \text{ με } \gamma(0) = p, \gamma'(0) = u\}$$

Την ιδέα αυτή θα χρησιμοποιήσουμε για να γενικεύσουμε τον ορισμό. Μόνο για αρχή, είναι σημαντικό να παρατηρήσουμε ότι εδώ προϋποτίθεται η ύπαρξη/εμφύτευση της πολλαπλότητας (επιφάνειας) σε έναν μεγαλύτερο χώρο, μία κατάσταση που είναι ασυνήθης γενικά στις πολλαπλότητες.



Γενικότερα, χωρίς να προϋποτίθεται οποιουδήποτε είδους εμφύτευση, ορίζουμε το ακόλουθο:

Ορισμός 2.7 (Εφαπτόμενοι χώροι - Γεωμετρική μορφή). *Εστω \mathcal{M} μία πολλαπλότητα και $x \in \mathcal{M}$. Ορίζουμε τον εφαπτόμενο χώρο της \mathcal{M} στο x ως εξής:*

$$T_x \mathcal{M} = \{(x, u) \in \{x\} \times \mathbb{R}^n \mid \exists \text{ διαφορ. καμπύλη } \gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathcal{M} \text{ με } \gamma(0) = x \text{ και}$$

$$\partial_{t=0}(\varphi \circ \gamma) = u, \text{ για κάποιον τοπικό χάρτη } (U, \varphi) \text{ του } x\}$$

Εναλλεκτικά (και ισοδύναμα):

$$T_x \mathcal{M} = \{ \gamma / \sim_x \mid \gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathcal{M} \text{ διαφορ. καμπύλη με } \gamma(0) = x \}$$

όπου $\gamma \sim_x \zeta$ εάν $\partial_{t=0}(\varphi \circ \gamma) \parallel \partial_{t=0}(\varphi \circ \zeta)$ για κάποιον χάρτη (U, φ) του x .

Ένας ακόμη τρόπος να οριστεί ο εφαπτόμενος χώρος είναι μέσω παραγωγίσεων. Είναι βοηθητικό κανείς να ταυτίζει τα στοιχεία του εφαπτόμενου χώρου με τις “κατά κατεύθυνση παραγώγους”. Διαισθητικά (στους \mathbb{R}^n) αυτή η αντιστοιχία μπορεί να γίνει, αφού κάθε κατά κατεύθυνση παράγωγος αντιστοιχεί σε ένα διάνυσμα, και κάθε διάνυσμα σε μία κατά κατεύθυνση παράγωγο. Η γενική περίπτωση χρειάζεται περισσότερη αιτιολόγηση, αλλά δεν θα αναφερθούμε εδώ [Fr24].

Ορισμός 2.8 (Εφαπτόμενοι χώροι και παραγωγίσεις). *Έστω \mathcal{M} μία πολλαπλότητα και $x \in \mathcal{M}$. Μία συνάρτηση $u_x : C^\infty(\mathcal{M}; \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ θα λέγεται παραγωγή στο x :*

i. *Είναι γραμμική.*

ii. *Ικανοποιεί τον κανόνα του Leibnitz:*

$$u_x(f \cdot g) = u_x(f) \cdot g(x) + f(x) \cdot u_x(g), \quad f, g \in C^\infty(\mathcal{M}; \mathbb{R})$$

Επίσης, ισοδύναμα μπορούμε να ορίσουμε τον εφαπτόμενο χώρο ως εξής:

$$T_x \mathcal{M} = \{u_x : C^\infty(\mathcal{M}; \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R} \mid u_x \text{ παραγωγή στο } x\}$$

Εάν έχουμε μία συνάρτηση $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$, υπάρχει μία φυσιολογική συνάρτηση μεταξύ των αντίστοιχων χώρων, που είναι η προώθηση.

Ορισμός 2.9 (Προώθηση). *Έστω \mathcal{M}, \mathcal{N} δύο πολλαπλότητες, $x \in \mathcal{M}$ και $F \in C^\infty(\mathcal{M}; \mathcal{N})$. Η προώθηση της F είναι ο γραμμικός τελεστής:*

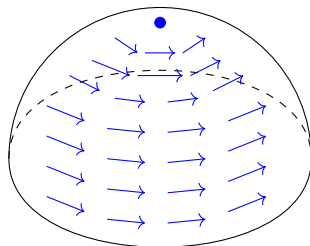
$$F_* : T_x \mathcal{M} \rightarrow T_{F(x)} \mathcal{N} \text{ με } F_*(u_x)(\diamond) = u_x(\diamond \circ F)$$

Εάν οι \mathcal{M}, \mathcal{N} είναι δύο επιφάνειες στον \mathbb{R}^3 , μία τέτοια συνάρτηση, μεταξύ των εφαπτόμενων χώρων, είναι το διαφορικό της F . Η προώθηση είναι στην ουσία το διαφορικό, εάν “περάσουμε” στην τοπική παράσταση.

Πρόταση 2.2 (Τοπική έκφραση της προώθησης). Έστω \mathcal{M}, \mathcal{N} δύο πολλαπλότητες, $x \in \mathcal{M}$ και $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$. Εάν $(U, \varphi), (V, \psi)$ είναι τοπικοί χάρτες των x και $F(x)$ αντίστοιχα, τότε η F_* σε τοπικές συντεταγμένες εκφράζεται μέσω του πίνακα:

$$\left(\partial(\psi \circ F \circ \varphi^{-1})_i / \partial x_j \right)_{i,j=1}^{n,m}$$

Εάν κανείς κατασκευάσει σε μία πολλαπλότητα μία συλλογή εφαπτόμενων διανυσμάτων (δηλαδή παραγωγίσεων), ώστε σε κάθε σημείο να αντιστοιχεί ένα διάνυσμα, φτιάχνει ένα διανυσματικό πεδίο, με την προϋπόθεση να υπάρχει μία ομαλή μεταβολή μεταξύ των διανυσμάτων.



Προκειμένου να μελετηθεί αυτή η έννοια της ομαλής μετάβασης μεταξύ διανυσμάτων, χρειάζεται να οριστεί ένας χώρος που περιέχει όλα τα πιθανά εφαπτόμενα διανύσματα. Προσέξτε ότι δεν μπορούμε εν γένει να πούμε “το $u \in T_x \mathcal{M}$ απέχει λίγο από το $v \in T_y \mathcal{M}$ ”, εάν $x \neq y$, απλώς επειδή τα διανύσματα u, v δεν ανήκουν στον ίδιο χώρο. Δεν υφίσταται, για παράδειγμα, κάποιου είδους ποσότητα $u - v$. Ορίζουμε λοιπόν το ακόλουθο:

Ορισμός 2.10 (Εφαπτόμενη δέσμη). Έστω \mathcal{M} μία πολλαπλότητα. Ορίζουμε την εφαπτόμενη δέσμη:

$$T\mathcal{M} = \coprod_{x \in \mathcal{M}} T_x \mathcal{M} = \bigcup_{x \in \mathcal{M}} (\{x\} \times T_x \mathcal{M})$$

Η εφαπτόμενη δέσμη μπορεί να αποκτήσει δομή πολλαπλότητας, κι επομένως θα μπορούν να οριστούν έννοιες ομαλότητας και συνέχειας. Για να κατανοήσουμε την ιδέα, ας θεωρήσουμε ότι η \mathcal{M} είναι κάποιος ευκλείδειος χώρος. Για κάθε $u, v \in T\mathcal{M}$, ενδεχομένως κανείς θα μπορούσε να πει ότι τα u, v είναι κοντά εάν τα $x_u = \pi_1(u)$, $x_v = \pi_1(v)$ είναι κοντά, κι επίσης τα $u = \pi_2(u)$, $v = \pi_2(v)$ (καταχρηστικά τα συμβολίζουμε με το ίδιο γράμμα) είναι κοντά. Με π_1 συμβολίζουμε τον περιορισμό στην \mathcal{M} και με π_2 τον “περιορισμό” στους $T_p \mathcal{M}$ (δεδομένου του p). Δηλαδή, δύο εφαπτόμενα διανύσματα είναι κοντά εάν το σημείο εφαρμογής τους είναι κοντά και τα διανύσματα είναι κοντά, εάν μεταφερθούν ώστε να έχουν κοινή αρχή.

Αυτή είναι η ιδέα με την οποία κανείς κατασκευάζει δομή πολλαπλότητας στην εφαπτόμενη δέσμη $T\mathcal{M}$.

Θεώρημα 2.2 (Η C^∞ -δομή της εφαπτόμενης δέσμης). Έστω \mathcal{M} μία πολλαπλότητα διάστασης n και $T\mathcal{M}$ η εφαπτόμενη δέσμη της. Υπάρχει C^∞ -δομή στην $T\mathcal{M}$ που την καθιστά πολλαπλότητα διάστασης $2n$, και τον περιορισμό $\pi : T\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$, C^∞ -συνάρτηση. Οι χάρτες δηλαδή (των (p, u_p)) είναι της μορφής:

$$\Phi(q, u_q) = (\varphi_1(q), \dots, \varphi_n(q), u_q^1, \dots, u_q^n)$$

όπου:

i. Ο (U, φ) είναι χάρτης του $p \cong (\varphi_1(p), \dots, \varphi_n(p))$.

ii. Ισχύει:

$$u_q(\diamond) = \sum_{i=1}^n u_q^i \frac{\partial(\diamond \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i} \Big|_{\varphi(q)} \cong (u_q^1, \dots, u_q^n)$$

Τα διανυσματικά πεδία μπορούν να οριστούν ως μία ομαλή επιλογή εφαπτόμενων διανυσμάτων από την $T\mathcal{M}$.

Ορισμός 2.11 (Διανυσματικά πεδία). Έστω \mathcal{M} μία πολλαπλότητα. Θα καλούμε μία συνάρτηση $X \in C^\infty(\mathcal{M}; T\mathcal{M})$ διανυσματικό πεδίο εάν είναι C^∞ -τομή της $T\mathcal{M}$. Δηλαδή αν $\pi \circ X = \text{id}$.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M} & \xrightarrow{X} & T\mathcal{M} \\ & \searrow \text{id} & \downarrow \pi \\ & & \mathcal{M} \end{array}$$

Αυτή είναι η τυπική κατασκευή των διανυσματικών πεδίων. Ένας πιο φιλικός χαρακτηρισμός για το τι είναι διανυσματικό πεδίο θα ακολουθήσει στην επόμενη πρόταση.

Σημείωση: Αρκετές φορές θα συμβολίζουμε τα βασικά διανυσματικά πεδία:

$$E_i(p) = \frac{\partial \diamond}{\partial x_i} \Big|_p = \frac{\partial(\diamond \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i} \Big|_{\varphi(p)}$$

Τότε, τα εφαπτόμενα διανύσματα παίρνουν την απλή μορφή:

$$u_p = \sum_{i=1}^n u_p^i \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p = \sum_{i=1}^n u_p^i E_i(p)$$

Πρόταση 2.3 (Χαρακτηρισμός των διανυσματικών πεδίων). Έστω \mathcal{M} μία πολλαπλότητα και X ένα διανυσματικό πεδίο. Το X παίρνει τη μορφή:

$$X(p) = \sum_{i=1}^n X^i(p) \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p = \sum_{i=1}^n X^i(p) E_i(p), \text{ με } X^i \in C^\infty(\mathcal{M}; \mathbb{R})$$

Αντιστρόφως, κάθε τέτοια μορφή είναι διανυσματικό πεδίο.

Τα διανυσματικά πεδία στη φυσική συνήθως αντιπροσωπεύουν πεδία δυνάμεων. Κατά συνέπεια, είναι φυσιολογικό κανείς να ασχοληθεί και με κινήσεις πάνω στην πολλαπλότητα, δηλαδή με ροές.

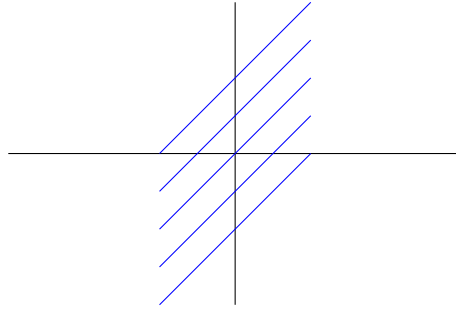
Ας θεωρήσουμε μία C^∞ -συνάρτηση $\Theta : \mathbb{R} \times \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$, που έχει ως ορίσματα τον “χρόνο” ($t \in \mathbb{R}$) και τη “θέση” ($p \in \mathcal{M}$), και που κατά κάποιον τρόπο εκφράζει τη “μεταφορά υλικού”. Σε χρόνο 0 αναμένουμε ότι δεν έχει υπάρξει κάποια “μεταφορά υλικού”, αφού τη στιγμή εκκίνησης αυτή υλοποιούνται οι αρχικές μας συνθήκες. Οπότε μπορούμε να θεωρήσουμε $\Theta(0, p) = p$. Από την άλλη, σε χρόνο $t + s$ έχουμε τη ροή $\Theta(t + s, p)$, η οποία -αν αυτή ορίζεται με λογικό τρόπο- θα πρέπει να μπορεί να βρεθεί μελετώντας την μεταφορά πρώτα σε χρόνο t , κι έπειτα σε χρόνο s μονάδες μετά το t , από το σημείο $\Theta(t, p)$. Δηλαδή $\Theta(t + s, p) = \Theta(s, \Theta(t, p))$.

Η έννοια της ροής μελετάται και στα δυναμικά συστήματα, με διαφορετική ορολογία (οι συναρτήσεις Θ λέγονται συναρτήσεις μετάβασης, και συνήθως έχουν και κάποιον αρχικό χρόνο t_0 , ενδεχομένως διαφορετικό του μηδενός).

Παράδειγμα ροής (λόγου χάρη προς μία κατεύθυνση $v = (v_1, v_2)$) στον \mathbb{R}^2 είναι η:

$$\Theta(t, (x_1, x_2)) = (x_1 + tv_1, x_2 + tv_2)$$

Εδώ η μεταφορά του υλικού γίνεται σε παράλληλες προς το v ευθείες.



Ορισμός 2.12 (Διαφορικές ροές). Έστω \mathcal{M} μία πολλαπλότητα και $\Theta : \mathbb{R} \times \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ μία C^∞ -συνάρτηση. Η Θ θα καλείται διαφορική ροή εάν:

- i. Για κάθε $p \in \mathcal{M}$, $\Theta(0, p) = p$.
- ii. Για κάθε $t, s \in \mathbb{R}$ και $p \in \mathcal{M}$, $\Theta(t + s, p) = \Theta(s, \Theta(t, p))$.

Πολλές φορές γράφουμε $\Theta_t(p) = \Theta(t, p)$. Εάν αντί για \mathbb{R} έχουμε κάποιο διάστημα $(-\varepsilon, \varepsilon)$ και αντί για \mathcal{M} έχουμε ένα ανοικτό U , ονομάζουμε τη ροή τοπική (οι ιδιότητες i., ii. τροποποιούνται όπως χρειάζεται για να βγάζουν νόημα).

Η αντιστοιχία διανυσματικών πεδίων και τοπικών ροών επιτυγχάνεται μέσω των ολοκληρωτικών καμπυλών και του απειροστικού γεννήτορα.

Ορισμός 2.13 (Ολοκληρωτικές καμπύλες και ο απειροστικός γεννήτορας). Έστω \mathcal{M} μία πολλαπλότητα.

- i. Μία καμπύλη $\gamma : I \rightarrow \mathcal{M}$ λέγεται ολοκληρωτική καμπύλη του διανυσματικού πεδίου X εάν ακολουθεί τις γραμμές του διανυσματικού πεδίου. Δηλαδή εάν:

$$\gamma_* \left(\frac{d}{dt} \Big|_t \right) = X(\gamma(t))$$

- ii. Εάν $\Theta : \mathbb{R} \times \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ είναι μία διαφορική ροή, ο απειροστικός της γεννήτορας είναι το διανυσματικό πεδίο:

$$\Theta^\alpha(p)(f) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left(f(\Theta_{\Delta t}(p)) - f(\Theta_0(p)) \right) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left(f(\Theta_{\Delta t}(p)) - f(p) \right)$$

το οποίο αντιπροσωπεύει τη μεταβολή της ροής.

Θεώρημα 2.3 (Συσχέτιση διανυσματικών πεδίων και διαφορικών ροών). Έστω \mathcal{M} μία πολλαπλότητα.

- i. Έστω Θ μία διαφορική ροή (τοπική ή όχι). Οι τροχιές:

$$\gamma(t) = \Theta(t, p)$$

είναι ολοκληρωτικές καμπύλες του Θ^α .

ii. Για κάθε διανυσματικό πεδίο X υπάρχει μία τοπική διαφορική ροή Θ (ολική ενδέχεται να μην υπάρχει) ώστε $\Theta^* = X$ και $\Theta(0, p) = p$, σε κάποια περιοχή U .

Κομβικό ρόλο παίζουν επίσης οι αγκύλες Lie των διανυσματικών πεδίων. Πρώτα ορίζουμε τη σύνθεση των διανυσματικών πεδίων X, Y . Ορίζουμε δηλαδή:

$$XY(p)(f) = X(p)(Y(\diamond)(f))$$

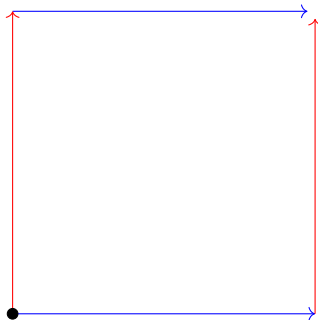
Η XY δεν είναι εν γένει διανυσματικό πεδίο, κι αυτό οφείλεται στην ύπαρξη δευτέρων παραγώγων. Προκειμένου να πάρουμε διανυσματικό πεδίο που αντιστοιχεί στη σύνθεση, ορίζουμε την αγκύλη Lie.

Ορισμός 2.14 (Αγκύλη Lie). Έστω \mathcal{M} μία πολλαπλότητα και X, Y δύο διανυσματικά πεδία. Ορίζουμε την αγκύλη Lie:

$$[X, Y] = XY - YX$$

Έχει ενδιαφέρον να συγκρίνει κανείς τα διανυσματικά πεδία και τις ροές τους με την αγκύλη Lie. Για παράδειγμα, εάν έχουμε $\partial/\partial x, \partial/\partial y$ δύο βασικά διανυσματικά πεδία και Φ, Θ τις αντίστοιχες τοπικές (και όχι ολικές) ροές, ξεκινώντας από ένα σημείο p , δεν έχει σημασία η σειρά της σύνθεσης στις ροές. Δηλαδή, ακολουθώντας την Φ κι έπειτα τη Θ , φτάνουμε στο ίδιο σημείο με το να ακολουθήσουμε πρώτα τη Θ κι έπειτα τη Φ .

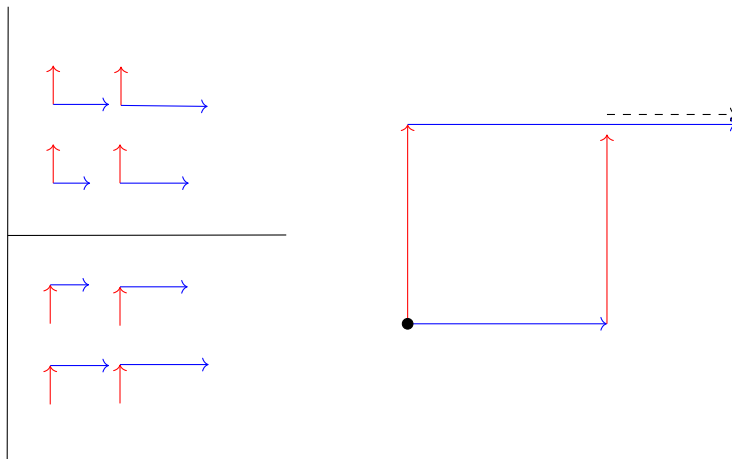
$$\Theta(s, \Phi(t, p)) = \Phi(t, \Theta(s, p))$$



Εάν $[X, Y] = 0$, τότε αυτό που μπορεί κανείς να δείξει είναι η ανεξαρτησία της διαδρομής σε τοπικές ροές. Λέμε ότι τα διανυσματικά πεδία X, Y μετατίθενται εάν $[X, Y] = 0$.

Υπάρχουν επίσης διανυσματικά πεδία που δεν μετατίθενται, όπως είναι τα $X = (x^2 + y^2)\partial/\partial x, Y = \partial/\partial y$ στο επίπεδο.

$$[X, Y] = 2y \frac{\partial}{\partial x} + (x^2 + y^2) \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} - (x^2 + y^2) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} = 2y \frac{\partial}{\partial x}$$



Το διανυσματικό πεδίο $[X, Y]$ είναι ένα μέτρο του πόσο τα X, Y απέχουν από το να μετατίθενται.

Προκειμένου να ασχοληθούμε ουσιαδώς με γεωμετρία πάνω σε πολλαπλότητες, θα χρειαστούμε μίας μορφής εσωτερικό γινόμενο στους εφαπτόμενους χώρους, που είναι η μετρική Riemann. Στο [Fr24] εξηγείται γιατί η μετρική Riemann είναι απαραίτητη, εάν κανείς θέλει να μελετήσει όγκους, κι επίσης στα [Kü15], [dC92] πώς ορίζεται η καμπυλότητα.

Η μετρική Riemann στις πολλαπλότητες είναι μία συλλογή εσωτερικών γινομένων στους εφαπτόμενους χώρους, που μεταβάλλονται ομαλά, καθώς το σημείο εφαρμογής αλλάζει. Αυτή η έννοια ομαλότητας συνήθως περιγράφεται, όπως και στα διανυσματικά πεδία, δηλαδή ορίζοντας έναν χώρο-δέσμη κι έπειτα παίρνοντας τομή. Προκειμένου να απλοποιήσουμε τη διαδικασία, θα μεταβούμε απ' ευθείας σε έναν ορισμό όπως της Πρότασης 2.3.

Σημειώνουμε ότι, εάν $\{(dx_k)_p\}_k$ είναι μία δυϊκή βάση της $\{\partial/\partial x_k|_p\}_k$, ορίζεται το τανυστικό γινόμενο:

$$(dx_i)_p \otimes (dx_j)_p \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \Big|_p, \frac{\partial}{\partial x_\ell} \Big|_p \right) = \delta_{i,k} \delta_{j,\ell}$$

Ορισμός 2.15 (Μετρικές Riemann και πολλαπλότητες Riemann). Έστω \mathcal{M} μία πολλαπλότητα. Μία μετρική Riemann είναι ένα συμμετρικό 2-τανυστικό πεδίο, δηλαδή μία συνάρτηση g με τις ιδιότητες:

- i. Για κάθε $u, v \in T_p \mathcal{M}$, $g(p)(u, v) = g(p)(v, u)$.
- ii. Για κάθε $v \in T_p \mathcal{M}$, $g(p)(v, v) \geq 0$, με την ισότητα μόνο όταν $v = 0$.
- iii. Η $g(p)$ γράφεται:

$$g(p) = \sum_{i,j=1}^n g_{i,j}(p) (dx_i)_p \otimes (dx_j)_p$$

με τις $g_{i,j}$ να είναι C^∞ -συναρτήσεις. Επίσης, η $\{(dx_k)_p\}_k$ είναι η δυϊκή βάση της $\{\partial/\partial x_k|_p\}_k$.

Το ζεύγος (\mathcal{M}, g) θα καλείται πολλαπλότητα Riemann.

Στη γεωμετρία Riemann αποδεικνύεται το εξής:

Θεώρημα 2.4. Έστω \mathcal{M} μία πολλαπλότητα. Υπάρχει (όχι μοναδική) μετρική Riemann στην \mathcal{M} .

Σημείωση: Πολλές φορές, όταν η μετρική Riemann υπονοείται, γράφουμε:

$$\langle X(p), Y(p) \rangle \text{ αντί } g(p)(X(p), Y(p))$$

όπου τα X, Y είναι διανυσματικά πεδία.

Στη συνέχεια θα μας απασχολήσουν θέματα που αφορούν τη καμπυλότητα στις πολλαπλότητες Riemann. Στις εμφυτευμένες υποπολλαπλότητες στον \mathbb{R}^n , βασική προϋπόθεση για τη μελέτη της καμπυλότητας, τουλάχιστον τμηματικά, είναι η μελέτη της δεύτερης παραγώγου των καμπυλών. Δηλαδή, η μελέτη της μεταβολής της ταχύτητας. Παρακάτω θα προσπαθήσουμε να ασχοληθούμε με το αντίστοιχο πλαίσιο στις πολλαπλότητες Riemann, που είναι η μελέτη της μεταβολής των διανυσματικών πεδίων.

Η διαίσθηση που θα οδηγήσει στους ορισμούς βρίσκεται στην περίπτωση των εμφυτευμένων υποπολλαπλοτήτων στον \mathbb{R}^n , και είναι η πρώτη που θα μας απασχολήσει.

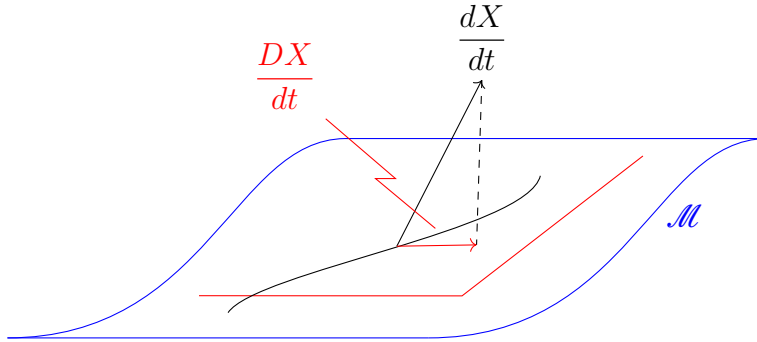
Εστω $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ μία εμφυτευμένη υποπολλαπλότητα διάστασης $m < n$. Θεωρούμε μία καμπύλη $\gamma : I \rightarrow \mathcal{M}$ και επίσης ορίζουμε X το πεδίο ταχυτήτων της, που είναι ένα διανυσματικό πεδίο κατά μήκος της γ . Με τη δεύτερη παράγωγο της γ , παίρνουμε άλλο ένα διανυσματικό πεδίο Y κατά μήκος της γ . Το Y περιέχει την “πληροφορία” για τη καμπυλότητα στην περίπτωση της εμφυτευμένης υποπολλαπλότητας, αλλά όχι γενικά. Το πρόβλημα έγκειται στο γεγονός ότι ο ορισμός ο ίδιος προϋποθέτει με πολύ άμεσο τρόπο την εμφύτευση, ώστε να υπάρχει το διανυσματικό πεδίο Y εκτός πολλαπλότητας.

Θα προσπαθήσουμε να βρούμε, στην περίπτωση των εμφυτευμένων υποπολλαπλοτήτων, έναν τρόπο έκφρασης της δεύτερης παραγώγου (δηλαδή της παραγώγου του X) που δεν θα προϋποθέτει την ύπαρξη “εξωτερικού χώρου” με τόσο άμεσο τρόπο. Ίσως αυτός ο ορισμός να μπορεί μετέπειτα να γενικευτεί στην περίπτωση των πολλαπλοτήτων Riemann.

Γράφουμε το $Y = dX/dt$ στη μορφή $Y = \pi(Y) + \pi^\perp(Y)$, όπου π είναι η προβολή $\pi(Y(p)) : T_p\mathbb{R}^n \rightarrow T_p\mathcal{M}$ και π^\perp η προβολή $\pi^\perp(Y(p)) : T_p\mathbb{R}^n \rightarrow T_p^\perp\mathcal{M}$. Δηλαδή η πρώτη προβάλλει το διάνυσμα στους εφαπτόμενους χώρους της πολλαπλότητας και η δεύτερη στους αντίστοιχους κάθετους. Αφού οι κάθετες συνησιώσεις προκαλούν εν γένει πρόβλημα, ορίζουμε:

$$\frac{DX}{dt} = \pi(Y) = \pi\left(\frac{dX}{dt}\right)$$

(άλλος συμβολισμός είναι ο $D_t X$). Η νέα αυτή παράγωγος ονομάζεται συναλλοίωτη παράγωγος του X κατά μήκος της γ .



Οι ιδιότητες με τις οποίες θα οριστεί η συναλλοίωτη παράγωγος γενικά, όπως και η έννοια της συνοχής, συνοψίζονται στο παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 2.5 (Ιδιότητες της συναλλοίωτης παραγώγου σε εμφυτευμένες πολλαπλότητες).

Έστω \mathcal{M} μία εμφυτευμένη υποπολλαπλότητα στον \mathbb{R}^n και X_1, X_2 δύο διανυσματικά πεδία κατά μήκος μίας καμπύλης $\gamma : I \rightarrow \mathcal{M}$ (όχι κατ' ανάγκη η ταχύτητα της γ). Τότε:

$$\frac{D}{dt}(X_1 + X_2) = \frac{DX_1}{dt} + \frac{DX_2}{dt}$$

και:

$$\frac{D}{dt}(f(t)X_1(t)) = \frac{df}{dt}X_1(t) + f(t)\frac{DX_1}{dt}, \quad f \in C^1(I; \mathbb{R})$$

Τέλος, εάν Y είναι ένα διανυσματικό πεδίο και X το πεδίο της ταχύτητας της γ , η ποσότητα DY/dt εξαρτάται από το πεδίο ταχυτήτων X , και φυσικά από το Y , αλλιά όχι από την γ . Δηλαδή, εάν $\gamma(t_0) = p$, τότε η $DY/dt|_{t=t_0}$ δεν εξαρτάται από την γ , αλλιά από το σημείο p και από την ταχύτητα $X(p)$.

Ιδιαίτερως η τελευταία ιδιότητα έχει ενδιαφέρον, και μας προϊδεάζει ότι υπάρχει ένας γενικός τελεστής ∇ , που κωδικοποιεί όλες τις κατά κατεύθυνση παραγώγους. Διαισθητικά, $\nabla_{d\gamma/dt}Z = DY/dt$, $Z(\gamma(t)) = Y(t)$. Αυτός θα είναι ο τελεστής ∇ της συνοχής, και η ποσότητα $\nabla_X Y$ θα σημαίνει την κατά κατεύθυνση παράγωγο του Y κατά μήκος του X .

Ορισμός 2.16 (Συνοχή). Έστω (\mathcal{M}, g) μία πολυηλιαπλότητα Riemann. Ορίζουμε ως συνοχή κάθε συνάρτηση $\nabla : (X, Y) \mapsto \nabla_X Y$ με τις ιδιότητες:

i C^1 -γραμμικότητα στην πρώτη μεταβλητή:

$$\nabla_{fX_1+gX_2}Y = f\nabla_{X_1}Y + g\nabla_{X_2}Y$$

ii. Κανόνας του Leibnitz στη δεύτερη μεταβλητή:

$$\nabla_X(fY) = f\nabla_XY + X(\cdot)(f)Y$$

iii. Γραμμικότητα στη δεύτερη μεταβλητή:

$$\nabla_X(Y_1 + Y_2) = \nabla_XY_1 + \nabla_XY_2$$

όπου τα X, Y, X_1, X_2, Y_1, Y_2 είναι διανυσματικά πεδία και $f \in C^1(\mathcal{M}; \mathbb{R})$.

Μέσω της συνοχής, που είναι γενική έννοια, περιοριζόμενοι σε καμπύλες θα εξάγουμε τη συναλλοίωτη παράγωγο.

Θεώρημα 2.6 (Συναλλοίωτη παράγωγος). Έστω (\mathcal{M}, g) μία πολυηλιαπλότητα Riemann με συνοχή ∇ . Υπάρχει μία γενική έννοια συναλλοίωτης παραγώγου κατά μήκος της γ , που είναι μοναδική δεδομένης της συνοχής ∇ . Δηλαδή, ο τελεστής αυτός D/dt ικανοποιεί τις ιδιότητες:

i. Γραμμικότητα:

$$\frac{D}{dt}(Y_1 + Y_2) = \frac{DY_1}{dt} + \frac{DY_2}{dt}$$

ii. Κανόνας του Leibnitz:

$$\frac{D}{dt}(fY_1) = \frac{df}{dt}Y_1 + f\frac{DY_1}{dt}$$

Γενικά τα Y_1, Y_2 είναι διανυσματικά πεδία κατά μήκος της γ και $f \in C^1(I; \mathbb{R})$.

iii. Συμβατότητα με τη συνοχή ∇ :

$$\frac{DY}{dt} = \nabla_X Z$$

Το Y με το Z σχετίζονται ως εξής $Z(\gamma(t)) = Y(t)$. Δηλαδή το Y είναι διανυσματικό πεδίο κατά μήκος της γ που έχει προκύψει από το Z , και X είναι το πεδίο ταχυτήτων $X = d\gamma/dt$.

Οι λεπτομέρειες που δικαιολογούν ότι αυτοί οι ορισμοί είναι καλοί μπορούν να βρεθούν στο [Bo86].

Ένα “μικρό” τεχνικό ζήτημα είναι το ότι οι συνοχές ενδεχομένως δεν συμπεριφέρονται καλά στο εσωτερικό γινόμενο (δεν ισχύει δηλαδή ο κανόνας του Leibnitz για τα εσωτερικά γινόμενα). Αυτό διορθώνεται με το ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα 2.7 (Υπαρξη Levi-Civita συνοχής). Για κάθε πολλαπλότητα Riemann (\mathcal{M}, g) υπάρχει μοναδική συνοχή Levi-Civita, δηλαδή συνοχή με τις ιδιότητες:

i. Συμμετρία:

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$$

(οπότε τότε $\nabla_{E_i} E_j - \nabla_{E_j} E_i = [E_i, E_j] = 0$, πράγμα που δικαιολογεί την ορολογία της συμμετρίας).

ii. Συμβατότητα με τη μετρική g :

$$X\langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle$$

Τα X, Y, Z είναι διανυσματικά πεδία.

Σημείωση: Από εδώ και στο εξής θα χρησιμοποιούμε Levi-Civita συνοχές.

Με την έννοια της συναλλοίωτης παραγώγου μπορούν να οριστούν οι έννοιες παράλληλης μετατόπισης πάνω σε μία πολλαπλότητα. Μπορούμε, δηλαδή, να μεταφέρουμε εφαπτόμενα διανύσματα πάνω σε μία πολλαπλότητα, με τρόπο που σέβεται τη γεωμετρία. Για τους κάτοικους της πολλαπλότητας, η κίνηση αυτή γίνεται όντως παράλληλα, ενώ για τους “εξωτερικούς” παρατηρητές ενδεχομένως όχι (σκεφτείτε το παράδειγμα της σφαίρας).

Θα λέμε ότι ένα διανυσματικό πεδίο Y κατά μήκος μίας καμπύλης $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παράλληλο εάν $DY/dt \equiv 0$. Δηλαδή, ένα διανυσματικό πεδίο Y είναι παράλληλο εάν δεν κάνει στροφές πάνω στην πολλαπλότητα και διατηρεί σταθερό μήκος.

Οι γεωδαισιακές σχετίζονται με την παράλληλη μεταφορά με τον εξής τρόπο: Πρέπει να είναι “ευθείες” στην πολλαπλότητα, με την έννοια ότι δεν στρίβουν ή αλλάζουν ταχύτητα. Δηλαδή, είναι καμπύλες γ με:

$$\frac{D}{dt} \frac{d\gamma}{dt} \equiv 0$$

Τώρα είμαστε σε θέση να διερευνήσουμε την έννοια της καμπυλότητας. Υπενθυμίζουμε ότι στη γεωμετρία των επιφανειών $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}^3$, κομβικό ρόλο παίζει ο τελεστής σχήματος:

$$S_p : T_p \mathcal{S} \rightarrow T_p \mathcal{S}, \quad S_p(u) = -(\nabla_Y \hat{n})_p = -u^1 \frac{\partial \hat{n}}{\partial x} - u^2 \frac{\partial \hat{n}}{\partial y}$$

όπου το Y είναι διανυσματικό πεδίο με $Y(p) = u$ και \hat{n} το μοναδιαίο κάθετο διανυσματικό πεδίο. Ο τελεστής σχήματος δίνει, επίσης, τη δεύτερη θεμελιώδη μορφή στις επιφάνειες, μέσω του τύπου:

$$\Pi(u, v) = \langle S_p(u), v \rangle \hat{n}$$

η οποία ορίζεται από τον πίνακα:

$$\begin{pmatrix} \mathcal{L} & \mathcal{M} \\ \mathcal{M} & \mathcal{N} \end{pmatrix}$$

όπου:

$$\mathcal{L} = -\left\langle \frac{\partial \hat{n}}{\partial x}, \frac{\partial \varphi^{-1}}{dx} \right\rangle, \quad \mathcal{M} = -\left\langle \frac{\partial \hat{n}}{\partial x}, \frac{\partial \varphi^{-1}}{dy} \right\rangle, \quad \mathcal{N} = -\left\langle \frac{\partial \hat{n}}{\partial y}, \frac{\partial \varphi^{-1}}{dy} \right\rangle$$

Το θεώρημα που θα ακολουθήσει, θα δικαιολογήσει τον ορισμό της καμπυλότητας Riemann. Υπενθυμίζουμε, επίσης, την πρώτη θεμελιώδη μορφή:

$$I(u, v) = \langle u, v \rangle$$

που ορίζεται από τον πίνακα:

$$\begin{pmatrix} \mathcal{E} & \mathcal{F} \\ \mathcal{F} & \mathcal{G} \end{pmatrix}$$

όπου:

$$\mathcal{E} = \left\langle \frac{\partial \varphi^{-1}}{\partial x}, \frac{\partial \varphi^{-1}}{\partial x} \right\rangle, \mathcal{F} = \left\langle \frac{\partial \varphi^{-1}}{\partial x}, \frac{\partial \varphi^{-1}}{\partial y} \right\rangle, \mathcal{G} = \left\langle \frac{\partial \varphi^{-1}}{\partial y}, \frac{\partial \varphi^{-1}}{\partial y} \right\rangle$$

Θεώρημα 2.8 (Συσχέτιση της καμπυλότητας με τη μετάθεση των συνοχών). Έστω $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}^3$ μία επιφάνεια. Ισχύουν τα εξής δύο:

$$\mathcal{LN} - \mathcal{M}^2 = \langle \nabla_{E_1} \nabla_{E_2} E_2 - \nabla_{E_2} \nabla_{E_1} E_2, E_1 \rangle$$

και:

$$\mathcal{EG} - \mathcal{F}^2 = \langle E_1, E_1 \rangle \langle E_2, E_2 \rangle - \langle E_1, E_2 \rangle^2$$

Κατά συνέπεια, η καμπυλότητα Gauss γίνεται:

$$K = \frac{\mathcal{LN} - \mathcal{M}^2}{\mathcal{EG} - \mathcal{F}^2} = \frac{\langle \nabla_{E_1} \nabla_{E_2} E_2 - \nabla_{E_2} \nabla_{E_1} E_2, E_1 \rangle}{\langle E_1, E_1 \rangle \langle E_2, E_2 \rangle - \langle E_1, E_2 \rangle^2}$$

Το παραπάνω θεώρημα υποδεικνύει ότι η ποσότητα:

$$\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z$$

είναι σημαντική για τη μελέτη της καμπυλότητας. Αυτό λοιπόν που θα μας απασχολήσει είναι το μέτρο του πόσο μετατίθενται οι συνοχές, προκειμένου να κατανοήσουμε τη καμπυλότητα. Μάλιστα, για εντελώς τεχνικούς λόγους, θα μελετήσουμε την:

$$\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$$

Αυτό δεν αλλάζει τη διαίσθηση, αφού ούτως ή άλλως $\nabla_{[E_1, E_2]} E_2 = 0$ και:

$$\nabla_{E_1} \nabla_{E_2} E_2 - \nabla_{E_2} \nabla_{E_1} E_2 = \nabla_{E_1} \nabla_{E_2} E_2 - \nabla_{E_2} \nabla_{E_1} E_2 - \nabla_{[E_1, E_2]} E_2$$

Ορισμός 2.17 (Καμπυλότητα Riemann). Έστω (\mathcal{M}, g) μία πολλαπλότητα Riemann. Ορίζουμε την καμπυλότητα Riemann:

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$$

Επίσης, θα ορίσουμε έναν ακόμη τελεστή που έχει σχέση με τη καμπυλότητα, που συχνά επίσης καλείται καμπυλότητα Riemann.

$$\text{Rm}(X, Y, Z, W) = \langle R(X, Y)Z, W \rangle$$

Με αυτούς τους ορισμούς, μπορεί να οριστεί η τμηματική καμπυλότητα Gauss ως προς τα επίπεδα $\mathcal{P}_p = \text{span}\{X(p), Y(p)\}$:

$$K(\mathcal{P}) = \frac{\text{Rm}(X, Y, Y, X)}{\langle X, X \rangle \langle Y, Y \rangle - \langle X, Y \rangle^2}$$

Ιδιαίτερως, θα μας απασχολήσει και η μέση καμπυλότητα εμφυτευμένων υποπολλαπλοτήτων, στο θεώρημα των Pacard-Ritoré. Η εμφάνιση της μέσης καμπυλότητας έγκειται στο γεγονός ότι οι ελαχιστικές επιφάνειες είναι αυτές ακριβώς που έχουν μέση

καμπυλότητα μηδέν. Ο ορισμός της μέσης καμπυλότητας (ως διάνυσμα), τουλάχιστον στην περίπτωση των επιφανειών, έχει ως εξής:

$$H(p) = \frac{1}{2} \left(\Pi(E_1(p), E_1(p)) + \Pi(E_2(p), E_2(p)) \right) \in T_p^\perp \mathcal{S} \quad (2.5)$$

Γενικά, εάν η εμφυτευμένη υποπολλαπλότητα $\mathcal{M} \subseteq \overline{\mathcal{M}}$ είναι διάστασης n και συνδιάστασης N , μπορούμε να εκμεταλευτούμε τη σχέση (2.5) και να δώσουμε τον ορισμό που θα ακολουθήσει, αφού πρώτα ορίσουμε τη δεύτερη θεμελιώδη μορφή σε τυχούσα συνδιάσταση.

Όσον αφορά τη δεύτερη θεμελιώδη μορφή στις επιφάνειες, έχουμε ορίσει:

$$\Pi(u, v) = \langle S_p(u), v \rangle = -\langle (\nabla_Y \hat{n})_p, v \rangle \hat{n}, \quad Y(p) = u$$

Από γεωμετρικής άποψης υπάρχει μία καλύτερη μορφή του ίδιου ορισμού, που θα δούμε αμέσως. Θεωρούμε Y, V δύο διανυσματικά πεδία με $Y(p) = u$, $V(p) = v$ και από τον κανόνα του Leibnitz:

$$\Pi(u, v) = -\langle (\nabla_Y \hat{n})_p, v \rangle \hat{n} = -u \langle \hat{n}, v \rangle \hat{n} + \langle \hat{n}, (\nabla_Y V)_p \rangle \hat{n}$$

Ο πρώτος όρος είναι μηδέν, αφού $v \perp \hat{n}$. Ο δεύτερος είναι ακριβώς η προβολή $\pi^\perp(\nabla_Y V)_p$, στον κάθετο χώρο $T_p^\perp \mathcal{S}$. Δηλαδή:

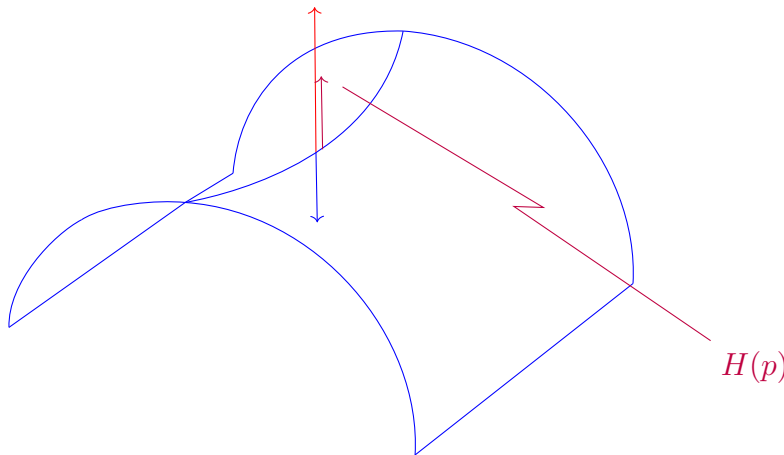
$$\Pi(u, v) = \pi^\perp(\nabla_Y V)_p, \quad Y(p) = u, \quad V(p) = v$$

Ορισμός 2.18 (Δεύτερη θεμελιώδης μορφή και μέση καμπυλότητα). Έστω μία εμφυτευμένη υποπολλαπλότητα $\mathcal{M} \subseteq \overline{\mathcal{M}}$ είναι διάστασης n και συνδιάστασης N . Ορίζουμε τη δεύτερη θεμελιώδη μορφή:

$$\Pi(u, v) = \pi^\perp(\nabla_Y V)_p, \quad Y(p) = u, \quad V(p) = v$$

όπου π^\perp είναι η προβολή στον κάθετο χώρο $T_p^\perp \mathcal{M}$. Ορίζουμε επίσης τη μέση καμπυλότητα:

$$H(p) = \frac{1}{n} \sum_k \Pi(E_k(p), E_k(p)) \in T_p^\perp \mathcal{M}$$



Ένα τελευταίο είδος καμπυλότητας που θα μας απασχολήσει είναι η καμπυλότητα Ricci. Επειδή η καμπυλότητα Ricci προϋποθέτει την έννοια του ίχνους, θα ασχοληθούμε πρώτα με αυτό. Επί τη ευκαιρία, επειδή οι έννοιες της απόκλισης $\nabla \cdot$ και της

Laplace-ιανής Δ ορίζονται μέσω του ίχνους, πριν την καμπυλότητα Ricci είναι λογικό να παρεμβληθούν οι ορισμοί τους ως δύο χρήσιμες εφαρμογές.

Η ιδέα για τον ορισμό του ίχνους έρχεται από την εξής απλή παρατήρηση: Εάν A είναι μία γραμμική συνάρτηση με:

$$A(x, y) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

τότε:

$$\text{Tr}(A) = \alpha + \delta = \left\langle \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle + \left\langle \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Ορισμός 2.19 (Ίχνος). Έστω (\mathcal{M}, g) μία πολυθλαπλότητα Riemann. Εάν A είναι ένας τελεστής με $A_p : T_p\mathcal{M} \rightarrow T_p\mathcal{M}$, ορίζουμε:

$$\text{Tr}(A_p) = \sum_k \langle A_p E_k(p), E_k(p) \rangle$$

Με το ίχνος μπορεί να οριστεί άμεσα ο τελεστής της απόκλισης, εφορμώντας από τον γνωστό τύπο του απειροστικού λογισμού $\nabla \cdot f = \sum_k \partial f / \partial x_k = \sum_k \langle (\nabla f) e_k, e_k \rangle$.

Ορισμός 2.20 (Απόκλιση). Έστω (\mathcal{M}, g) μία πολυθλαπλότητα Riemann και Y ένα διανυσματικό πεδίο. Ορίζουμε την απόκλιση:

$$\nabla^g \cdot Y = \text{Tr}(\nabla_\diamond Y) = \text{Tr}(X \mapsto \nabla_X Y) = \sum_k \langle \nabla_{E_k} Y, E_k \rangle$$

(ή απλά $\nabla \cdot Y$, εάν η μετρική υπονοείται).

Επίσης, μπορεί να οριστεί η Laplace-ιανή, που καλείται τελεστής Laplace-Beltrami. Η ιδέα πίσω από τον ορισμό είναι η σχέση $\nabla \cdot \nabla = \Delta$, και προϋποθέτει την ύπαρξη του τελεστή της κλίσης. Σημειώνουμε ότι η συνήθης γραφή της κλίσης είναι $\text{grad } f$ αντί του ∇f που χρησιμοποιούμε στον απειροστικό λογισμό. Παρόλα αυτά, θεωρούμε ότι δεν θα υπάρξει σύγχυση, εάν χρησιμοποιήσουμε τον συμβολισμό ∇f , και ότι θα είναι ευκολότερη εποπτικά η σύνδεση των τύπων με τον απειροστικό λογισμό.

Ορισμός 2.21 (Κλίση και ο τελεστής Laplace-Beltrami). Έστω (\mathcal{M}, g) μία πολυθλαπλότητα Riemann και $f \in C^\infty(\mathcal{M}; \mathbb{R})$. Ορίζουμε την κλίση ∇f (ασυνήθης συμβολισμός) ως το διανυσματικό πεδίο που ικανοποιεί τη σχέση:

$$\langle \nabla f, X \rangle_p = X(p)(f), \text{ για κάθε διανυσματικό πεδίο } X$$

Επίσης ορίζουμε τον τελεστή Laplace-Beltrami:

$$\Delta_g f = \nabla^g \cdot \nabla f = \text{Tr} \nabla_\diamond (\nabla f) = \text{Tr}(X \mapsto \nabla_X \nabla f) = \sum_k \langle \nabla_{E_k} \nabla f, E_k \rangle$$

(ή απλά Δf , εάν η μετρική υπονοείται).

Μάλιστα, ο τελεστής Laplace-Beltrami ορίζεται και με λιγότερη ομαλότητα. Με αυτόν τον ορισμό μπορούμε να κατανοήσουμε τους όρους της εξίσωσης $\Delta u - W_u(u) = 0$ σε μία πολυθλαπλότητα Riemann.

Φυσικά δεν πρέπει να ξεχνάμε τον στόχο μας, που είναι ο ορισμός της καμπυλότητας Ricci. Η καμπυλότητα Ricci ήταν ένα από τα βασικά μαθηματικά εργαλεία που οδήγησε τελικά στη λύση της εικασίας του Poincaré², από τη δουλειά των Hamilton και Perelman.

Δεν θα αναλύσουμε τη διαισθητική και γεωμετρική ερμηνεία του τελεστή Ricci. Θα αναφέρουμε μονάχα ότι η ιδέα είναι η περιγραφή της παραμόρφωσης ενός σχήματος, καθώς κινείται σε γεωδαισιακές.

Ορισμός 2.22 (Καμπυλότητα Ricci). Έστω (\mathcal{M}, g) μία πολλαπλότητα Riemann. Ορίζουμε τη καμπυλότητα Ricci:

$$\begin{aligned}\text{Ric}(Y, Z) &= \text{Tr}(\mathbf{R}(\diamond, Y)Z) = \text{Tr}(X \mapsto \mathbf{R}(X, Y)Z) \\ &= \sum_k \langle \mathbf{R}(E_k, Y)Z, E_k \rangle\end{aligned}$$

2.2.5 Ασθενείς και πολύ ασθενείς έννοιες διαφορισμότητας

Στη συνέχεια θα μελετήσουμε μία έννοια ασθενούς παραγωγίσης, με την οποία θα διευρύνουμε το σύνολο των “παραγωγίσμων” συναρτήσεων. Σημειώνουμε ότι σε όλα τα παρακάτω, οι πολλαπλότητες Riemann θα συνοδεύονται με το επιφανειακό τους μέτρο $d\sigma$, και θα είναι πλήρεις. Σε περίπτωση που υπάρχει εμφυτευμένη υποπολλαπλότητα, το επιφανειακό της μέτρο θα συμβολίζεται με dS . Πληροφορίες σχετικά με την ολοκλήρωση στις πολλαπλότητες (και γιατί η δομή Riemann είναι αναγκαία) μπορούν να βρεθούν στα [Bo86], [Fr24].

Έστω (\mathcal{M}, g) μία πολλαπλότητα Riemann και $\Omega \subseteq \mathcal{M}$ ανοικτό σύνολο. Θεωρούμε μία συνάρτηση $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$. Η γενίκευση που θα δώσουμε για τον ορισμό των παραγώγων στηρίζεται στο θεώρημα της απόκλισης. Για κάθε $\varphi \in C_c^\infty(\Omega; \mathbb{R})$, εάν υπάρχει αρκετή ομαλότητα στην f , έχουμε ότι:

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot (f \varphi E_i) d\sigma = \int_{\partial\Omega} \langle f \varphi E_i, \hat{n} \rangle dS = \int_{\partial\Omega} f \varphi \hat{n}_i dS$$

κι επειδή $\varphi \in C_c^\infty(\Omega; \mathbb{R})$:

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot (f \varphi E_i) d\sigma = \int_{\Omega} E_i(f) \varphi d\sigma + \int_{\Omega} f \nabla \cdot (\varphi E_k) d\sigma = 0$$

δηλαδή:

$$\int_{\Omega} E_i(x)(f) \varphi(x) d\sigma(x) = - \int_{\Omega} f(x) \nabla \cdot (\varphi E_k)_x d\sigma(x) \quad (2.6)$$

Η ιδέα φυσικά της εξίσωσης (2.6) είναι η μεταφορά της παραγώγου από την f στη φ . Αυτή η σχέση μπορεί να οδηγήσει στον ορισμό μίας ασθενούς έννοιας παραγωγίσης για συναρτήσεις $f \in L_{\text{loc}}^1(\Omega)$.

Ορισμός 2.23 (Ασθενείς παράγωγοι και χώροι Sobolev). Έστω (\mathcal{M}, g) μία πολλαπλότητα Riemann και $\Omega \subseteq \mathcal{M}$ ανοικτό σύνολο. Θεωρούμε μία συνάρτηση $f \in L_{\text{loc}}^1(\Omega)$. Λέμε ότι η f έχει ασθενή παράγωγο εάν για κάθε $\varphi \in C_c^\infty(\Omega; \mathbb{R})$ ισχύει:

$$\int_{\Omega} V_{i,f} \varphi d\sigma = - \int_{\Omega} \nabla \cdot (\varphi E_k) d\sigma$$

για κάποια συνάρτηση $V_{i,f} \in L_{\text{loc}}^1(\Omega; \mathbb{R})$. Το σύνολο των $L^p(\Omega)$ -συναρτήσεων που έχουν $L^p(\Omega)$ ασθενείς παράγωγους λέγεται χώρος Sobolev— $(1, p)$ και συμβολίζεται με $W^{1,p}(\Omega)$.

²Η εικασία, που πλέον είναι θεώρημα, είναι σε γενικές γραμμές η εξής: Κάθε τοπολογική πολλαπλότητα διάστασης 3 χωρίς σύνορο, που είναι συμπαγής, συνεκτική και έχει τετριμμένη θεμελιώδη ομάδα, είναι ομοιομορφική με την \mathbb{S}^2 .

Σημείωση: Ιδίως στην περίπτωση όπου $p = 2$, συμβολίζουμε $W^{1,2}(\Omega) = H^1(\Omega)$.

Μία εύκολη παρατήρηση είναι ότι η έννοια της ασθενούς παραγώγου είναι μοναδική. Μία όχι τόσο εύκολη παρατήρηση είναι ότι υπάρχουν εξαιρετικά ιδιάζουσες συναρτήσεις (για παράδειγμα, με άπειρους αριθμήσιμους πυκνούς πόλους) που είναι ασθενώς παραγωγίσιμες [Ev10].

Ο ορισμός των χώρων Sobolev θα μπορούσε να δοθεί και με μία έννοια ασθενούς κλίσης. Η ιδέα πίσω από τον ορισμό είναι και πάλι το θεώρημα της απόκλισης: Εάν η f είναι μία αρκετά ομαλή συνάρτηση, τότε για κάθε διανυσματικό πεδίο $X \in C_c^\infty(\Omega; T\mathcal{M})$:

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot (fX) \, d\sigma = \int_{\partial\Omega} f \langle X, \hat{n} \rangle \, dS = 0$$

Επιπλέον:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla \cdot (fX) \, d\sigma &= \int_{\Omega} \sum_k \langle \nabla_{E_k}(fX), E_k \rangle \, d\sigma \\ &= \int_{\Omega} \sum_k f \langle \nabla_{E_k} X, E_k \rangle + \sum_k \langle E_k(f)X, E_k \rangle \, d\sigma \\ &= \int_{\Omega} f \nabla \cdot X \, d\sigma + \int_{\Omega} \sum_k \langle X, E_k(f)E_k \rangle \, d\sigma \end{aligned}$$

κι από τον ορισμό της κλίσης, $\langle \nabla f, E_k \rangle = E_k(f)$, οπότε:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f \nabla \cdot (fX) \, d\sigma &= \int_{\Omega} f \nabla \cdot X \, d\sigma + \int_{\Omega} \sum_k \langle X, \langle \nabla f, E_k \rangle E_k \rangle \, d\sigma \\ &= \int_{\Omega} f \nabla \cdot X \, d\sigma + \int_{\Omega} \langle X, \nabla f \rangle \, d\sigma \end{aligned}$$

Κατά συνέπεια:

$$\int_{\Omega} \langle \nabla f, X \rangle \, d\sigma = - \int_{\Omega} f \nabla \cdot X \, d\sigma$$

Μπορούμε, όπως πριν, να ορίσουμε την έννοια της ασθενούς κλίσης ως το (όχι κατ' ανάγκη ομαλό) διανυσματικό πεδίο Df για το οποίο:

$$\int_{\Omega} \langle Df, X \rangle \, d\sigma = - \int_{\Omega} f \nabla \cdot X \, d\sigma, \text{ για κάθε } X \in C_c^\infty(\Omega; T\mathcal{M}) \quad (2.7)$$

Μία ακόμα ασθενέστερη έννοια κλίσης είναι η κλίση με την έννοια της κατανομής. Ένας τρόπος η σχέση (2.7) να γενικευτεί ακόμα περισσότερο είναι να παρατηρήσουμε ότι η $\int_{\Omega} \langle Df, X \rangle \, d\sigma$ είναι στην ουσία ένα συναρτησοειδές, από τον χώρο των ομαλών διανυσματικών πεδίων με συμπαγή φορέα, προς το \mathbb{R} . Δηλαδή, υπάρχει ένα συναρτησοειδές $T_{Df} \in C_c^\infty(\Omega; T\mathcal{M})'$ ούτως ώστε:

$$T_{Df}(X) = - \int_{\Omega} f \nabla \cdot X \, d\sigma, \quad X \in C_c^\infty(\Omega; T\mathcal{M})$$

Με αυτές τις ιδέες, ο ακόλουθος ορισμός είναι λογικός.

Ορισμός 2.24 (Κλίση με την έννοια της κατανομής). Έστω (\mathcal{M}, g) μία πολυπλοκότητα Riemann και Ω ένα ανοικτό υποσύνολό της. Έστω επίσης $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. Λέμε ότι η f

έχει κλίση με την έννοια της κατανομής εάν υπάρχει συναρτησοειδής $T_{Df} \in C_c^\infty(\Omega; T\mathcal{M})'$ ούτως ώστε για κάθε $X \in C_c^\infty(\Omega; T\mathcal{M})$ να έχουμε:

$$T_{Df}(X) = - \int_{\Omega} f \nabla \cdot X \, d\sigma$$

Συμβολίζουμε καταχρηστικά:

$$T_{Df}(X) = \int_{\Omega} \langle Df, X \rangle \, d\sigma$$

απλώς για να υπάρχει ομοιότητα με την εξίσωση (2.7). Κατά τ' αλήθεια η ισότητα με ολοκληρώματα πιθανότατα δεν έχει νόημα και δεν μπορεί να επιτευχθεί.

Σημειώνουμε, τέλος, ότι υπάρχει μία έννοια εγκλεισμού $C_c^\infty(\Omega; T\mathcal{M}) \subseteq C_c^\infty(\Omega; T\mathcal{M})'$ (ή ορθότερα $C_c^\infty(\Omega; T\mathcal{M}) \hookrightarrow C_c^\infty(\Omega; T\mathcal{M})'$), με τον εξής τρόπο: Κάθε $Y \in C_c^\infty(\Omega; T\mathcal{M})$ αντιστοιχεί στο συναρτησοειδές:

$$\int_{\Omega} \langle \diamond, Y \rangle \, d\sigma : C_c^\infty(\Omega; T\mathcal{M}) \rightarrow \mathbb{R}$$

2.3 Ελαχιστικές (υπερ-) επιφάνειες

2.3.1 Η πρώτη μεταβολή του εμβαδού

Οι ελαχιστικές υπερεπιφάνειες είναι στην ουσία επιφάνειες που τοπικά ελαχιστοποιούν το εμβαδόν. Σε αυτήν την παράγραφο θα μελετήσουμε τα κρίσιμα σημεία του συναρτησιακού του εμβαδού/όγκου και θα δώσουμε τον ορισμό των ελαχιστικών υπερεπιφανειών χρησιμοποιώντας τη μέση καμπυλότητα. Θα δούμε, δηλαδή, ότι είναι λογικό ελαχιστική υπερεπιφάνεια να σημαίνει εμφυτευμένη υποπολλαπλότητα διάστασης n και συνδιάστασης N με μέση καμπυλότητα $H \equiv 0$.

Ας υποθέσουμε ότι $(\Sigma, g) \subseteq (\mathcal{M}, \bar{g})$ είναι μία εμφυτευμένη υποπολλαπλότητα διάστασης n και συνδιάστασης N . Μεταβάλλοντας λίγο την Σ , μέσω κάποιας ροής Θ , θέλουμε το εμβαδόν/όγκος να μην αυξάνεται. Θέλουμε, δηλαδή:

$$\mathcal{H}^n(\Sigma) \leq \mathcal{H}^n(\Theta_t(\Sigma))$$

το οποίο σημαίνει ότι το συναρτησιακό του όγκου έχει τοπικό ελάχιστο. Δηλαδή:

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \mathcal{H}^n(\Theta_t(\Sigma)) = 0$$

Η παραπάνω ποσότητα συνηθίζεται να καλείται πρώτη μεταβολή του εμβαδού/όγκου.

Η έννοια της (πρώτης) μεταβολής είναι συνήθης σε προβλήματα λογισμού μεταβολών. Το γενικότερο πλαίσιο έχει ως εξής: Έστω ότι έχουμε ένα συναρτησιακό J , από έναν χώρο (συνήθως συναρτήσεων) στο \mathbb{R} . Μεταβάλλοντας ως προς κάποια κατεύθυνση τ τα ορίσματα του J , παίρνουμε τις διάφορες συναρτήσεις του t :

$$J(\tau_t(f))$$

Εάν το J έχει τοπικό ακρότατο στο f_0 , τότε για κάθε μεταβολή τ του f_0 :

$$\delta J(\tau) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} J(\tau_t(f_0)) = 0$$

Με το επόμενο θεώρημα θα συσχετίσουμε την πρώτη μεταβολή του εμβαδού/όγκου με τη μέση καμπυλότητα. Θα χρειαστούμε μόνο, πριν τη διατύπωσή του, την έννοια της εφαπτόμενης απόκλισης. Με τον συμβολισμό $\nabla^{\bar{g}} = \bar{\nabla}$, εάν X είναι ένα διανυσματικό πεδίο κατά μήκος της Σ (αλλά όχι αναγκαστικά εφαπτόμενο στην Σ), ορίζουμε:

$$\bar{\nabla}^\top \cdot X = \sum_{E_k \parallel \Sigma} \langle \bar{\nabla}_{E_k} X, E_k \rangle$$

όπου το σύμβολο $E_k \parallel \Sigma$ σημαίνει διανυσματικά πεδία που παράγουν τους εφαπτόμενους χώρους της Σ και είναι παράλληλα της Σ στα σημεία “επαφής” με τη Σ .

Θεώρημα 2.9 (Η πρώτη μεταβολή του εμβαδού). Έστω $(\Sigma, g) \subseteq (\mathcal{M}, \bar{g})$ μία υπερεπιφάνεια χωρίς σύνορο. Θεωρούμε Θ μία ροή στην \mathcal{M} με $X = \Theta^\alpha \in C_c^\infty(\mathcal{M}; T\mathcal{M})$, και $\Theta_t(\Sigma)$ τη μεταβολή της Σ μέσω αυτής της ροής. Για την πρώτη μεταβολή του συναρτησιακού του εμβαδού/όγκου $\delta \mathcal{H}^n(\Theta) = d/dt|_{t=0} \mathcal{H}^n(\Theta_t)$ από την κατεύθυνση της Θ ισχύουν οι σχέσεις:

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \mathcal{H}^n(\Theta_t(\Sigma)) = \int_{\Sigma} \bar{\nabla}^\top \cdot X \, dS = -n \int_{\Sigma} \langle X, H \rangle \, dS$$

Απόδειξη. Θα δώσουμε την απόδειξη αυτού του θεωρήματος, παραλείποντας μερικές λεπτομέρειες. Σε όλα τα παρακάτω ασχολούμαστε μονάχα με την περίπτωση του ενός χάρτη, καθώς για τους περισσότερους τα επιχειρήματα είναι ανάλογα.

Βήμα I: Θα δείξουμε την ισότητα:

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \mathcal{H}^n(\Theta_t(\Sigma)) = \int_{\Sigma} \bar{\nabla}^\top \cdot X \, dS$$

Εδώ θα υπολογίσουμε τους συντελεστές της μετρικής ως προς τα εφαπτόμενα προς την Σ (και ορθογώνια μεταξύ τους) διανυσματικά πεδία. Οπότε, μπορούμε να υποθέσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $g_{i,j} = \delta_{i,j}$ και $\nabla_{E_k} E_k = 0$ στη Σ .

Το στοιχείο του εμβαδού/όγκου της $\Theta_t(\Sigma)$, σε συνάρτηση με το εμβαδόν της Σ , γίνεται:

$$dS^t = \frac{\sqrt{\det(g_{i,j}^t)_{i,j}}}{\sqrt{\det(g_{i,j})_{i,j}}} dS$$

όπου g^t είναι η μετρική Riemann στη μεταβολή $\Theta_t(\Sigma)$. Επομένως, εάν θέλουμε να υπολογίσουμε την πρώτη μεταβολή, πρέπει να υπολογίσουμε την παράγωγο:

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \frac{\sqrt{\det(g_{i,j}^t)_{i,j}}}{\sqrt{\det(g_{i,j})_{i,j}}}$$

η οποία στην περίπτωσή μας (αφού $g_{i,j} = \delta_{i,j}$, $g^0 = g$) γίνεται:

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \sqrt{\det(g_{i,j}^t)_{i,j}} = \frac{1}{2\sqrt{\det(g_{i,j}^0)_{i,j}}} \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \det(g_{i,j}^t)_{i,j} = \frac{1}{2} \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \det(g_{i,j}^t)_{i,j}$$

Αναπτύσσοντας την ορίζουσα:

$$\det(g_{i,j}^t)_{i,j} = \sum_{k=1}^n g_{1,k}^t \det(g_{i,j}^t)_{i \neq 1, j \neq k}$$

παίρνουμε με παραγωγή:

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \det(g_{i,j}^t)_{i,j} = \dots = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} g_{1,1}^t + \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \det(g_{i,j}^t)_{i,j} = \dots = \sum_{k=1}^n \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} g_{k,k}^t$$

Επειδή τώρα:

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} g_{k,k}^t = X \langle E_k, E_k \rangle = 2 \langle \bar{\nabla}_X E_k, E_k \rangle = 2 \langle \bar{\nabla}_{E_k} X, E_k \rangle$$

έπεται:

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \det(g_{i,j}^t)_{i,j} = \sum_{E_k \parallel \Sigma} \langle \bar{\nabla}_{E_k} X, E_k \rangle = \bar{\nabla}^\top \cdot X$$

δηλαδή:

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \mathcal{H}^n(\Theta_t(\Sigma)) = \int_{\Sigma} \bar{\nabla}^\top \cdot X \, dS$$

Βήμα II: Θα δείξουμε την ισότητα:

$$\int_{\Sigma} \bar{\nabla}^\top \cdot X \, dS = -n \int_{\Sigma} \langle X, H \rangle \, dS$$

Εάν γράψουμε $X = X^\top + X^\perp$, όπου το X^\top είναι παράλληλο στην Σ και το X^\perp κάθετο, τότε:

$$\int_{\Sigma} \bar{\nabla}^\top \cdot X^\top \, dS = 0$$

και κατά συνέπεια:

$$\int_{\Sigma} \bar{\nabla}^\top \cdot X \, dS = \int_{\Sigma} \bar{\nabla}^\top \cdot X^\perp \, dS$$

Θεωρούμε $\{\hat{n}_k\}_{k=1}^N$ μία οικογένεια μοναδιαίων κάθετων διανυσματικών πεδίων στη Σ , που παράγει τους κάθετους χώρους. Γράφουμε διαδοχικά τα εξής:

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}^\top \cdot X^\perp &= \bar{\nabla}^\top \cdot \left(\sum_k \langle X, \hat{n}_k \rangle \hat{n}_k \right) \\ &= \sum_{\lambda} \left\langle \bar{\nabla}_{E_\lambda} \sum_k \langle X, \hat{n}_k \rangle \hat{n}_k, E_\lambda \right\rangle \\ &= \sum_{k,\lambda} \langle E_\lambda \langle X, \hat{n}_k \rangle \hat{n}_k + \langle X, \hat{n}_k \rangle \bar{\nabla}_{E_\lambda} \hat{n}_k, E_\lambda \rangle \\ &= \sum_{k,\lambda} \langle X, \hat{n}_k \rangle \langle \bar{\nabla}_{E_\lambda} \hat{n}_k, E_\lambda \rangle \end{aligned}$$

Επειδή όμως:

$$\langle \bar{\nabla}_{E_\lambda} \hat{n}_k, E_\lambda \rangle = E_\lambda \langle \hat{n}_k, E_\lambda \rangle - \langle \hat{n}_k, \bar{\nabla}_{E_\lambda} E_\lambda \rangle = -\langle \hat{n}_k, \bar{\nabla}_{E_\lambda} E_\lambda \rangle \hat{n}_k$$

έχουμε:

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}^\top \cdot X^\perp &= - \sum_{k,\lambda} \langle X, \hat{n}_k \rangle \langle \bar{\nabla}_{E_\lambda} E_\lambda, \hat{n}_k \rangle \\ &= - \sum_k \langle X, \hat{n}_k \rangle \left\langle \sum_{\lambda} \bar{\nabla}_{E_\lambda} E_\lambda, \hat{n}_k \right\rangle \\ &= - \sum_k \left\langle \langle X, \hat{n}_k \rangle \hat{n}_k, \left\langle \sum_{\lambda} \bar{\nabla}_{E_\lambda} E_\lambda, \hat{n}_k \right\rangle \hat{n}_k \right\rangle \\ &= -n \langle X, H \rangle \end{aligned}$$

Έτσι λοιπόν:

$$\int_{\Sigma} \bar{\nabla}^{\top} \cdot X \, dS = -n \int_{\Sigma} \langle X, H \rangle \, dS$$

□

Από το Θεώρημα 2.9 έχουμε ως πόρισμα την εξής πρόταση, που συνδέει την τοπική ελαχιστοποίηση του εμβαδού/όγκου με τη μέση καμπυλότητα.

Πρόταση 2.4 (Τοπική ελαχιστοποίηση και μέση καμπυλότητα). Έστω $(\Sigma, g) \subseteq (\mathcal{M}, \bar{g})$ μία υπερεπιφάνεια χωρίς σύνορο. Θεωρούμε τις εξής τρεις συνθήκες:

- i. Για κάθε ανοικτό $U \subseteq \mathcal{M}$, $U \cap \Sigma \subseteq \Sigma$ και για κάθε μεταβολή \mathcal{N} με $U \cap \mathcal{N} \subseteq \mathcal{N}$, $\Sigma \setminus U = \mathcal{N} \setminus U$, έχουμε:

$$\mathcal{H}^n(\Sigma) \leq \mathcal{H}^n(\mathcal{N})$$

Δηλαδή, εάν μεταβάλλουμε μία μικρή περιοχή $U \cap \Sigma$ της Σ , το εμβαδόν/ο όγκος πάντα αυξάνεται.

- ii. Ισχύει:

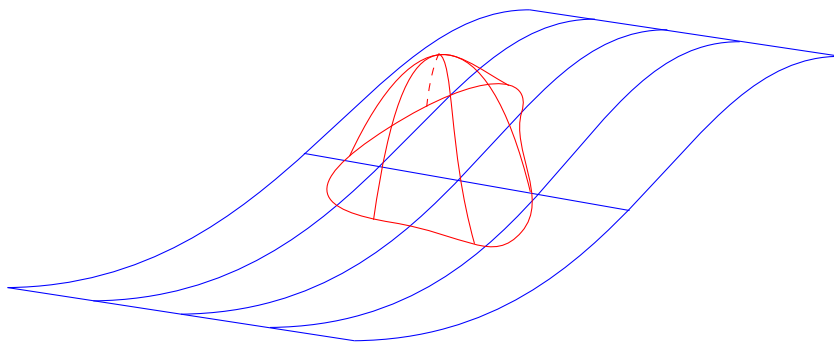
$$\int_{\Sigma} \bar{\nabla}^{\top} \cdot X \, dS = 0$$

για κάθε μεταβολή Θ της Σ με $X = \Theta^{\alpha} \in C_c^{\infty}(\mathcal{M}; T\mathcal{M})$.

- iii. Στην Σ έχουμε $H \equiv 0$.

- iv. Το συναρτησιακό το εμβαδού έχει κρίσιμο σημείο στο Σ .

Ισχύουν τότε οι συνεπαγωγές i. \Rightarrow ii. \Leftrightarrow iii. \Leftrightarrow iv.



Ορισμός 2.25 (Ελαχιστικές υπερεπιφάνειες). Έστω (Σ, g) μία εμφυτευμένη υποπολλ-
 λαπλότητα στην (\mathcal{M}, \bar{g}) . Θα λέμε ότι η Σ είναι ελαχιστική υπερεπιφάνεια εάν $H \equiv 0$
 στο $\Sigma \setminus \text{bd}\Sigma$. Σύμφωνα με την Πρόταση 2.4, οι ελαχιστικές υπερεπιφάνειες είναι κρίσιμα
 σημεία του συναρτησιακού του εμβαδού/όγκου.

2.3.2 Ολομορφική αναπαράσταση και μερικά παραδείγματα ελαχιστικών επιφανειών

Από εδώ και στο εξής θα περιορίσουμε τη μελέτη μας σε επιφάνειες Σ (όχι κατ' ανάγκη
 εμφυτευμένες) στον \mathbb{R}^n , $n \geq 2$, ή ιδιαιτέρως στον \mathbb{R}^3 , που έχουν παραμετρική μορφή.
 Μας ενδιαφέρουν δηλαδή επιφάνειες της μορφής $\Sigma = \{f(x, y)\}$, $(x, y) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^2$.

Θα δείξουμε ότι υπάρχει μία σχέση μεταξύ των παραμετρικών ελαχιστικών επιφανειών
 και των πραγματικών/φανταστικών μερών κάποιων ολόμορφων συναρτήσεων. Πρώτα

χρησιμοποιήστε την ακόλουθη τεχνική πρόταση, που μπορεί να βρεθεί με την απαραίτητη λεπτομέρεια στο [Sc15].

Σημείωση: Η παρακάτω μορφή της Laplace-ιανής είναι η αναμενόμενη γενίκευση, κατά συντεταγμένες.

Πρόταση 2.5. Έστω $(\Sigma, g) = (\{f(x, y)\}, g)$, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, μία παραμετρική (εμβαπτισμένη) επιφάνεια στον \mathbb{R}^n . Από τη μετρική της Σ προκύπτει με φυσιολογικό τρόπο μία μετρική στο Ω , έστω γ . Τότε:

i. Έχουμε:

$$\Delta_\gamma f = nH$$

ii. Ειδικότερα, η Σ είναι παραμετρική ελαχιστική επιφάνεια εάν και μόνο αν $\Delta_\gamma f \equiv 0$.

iii. Έχουμε:

$$\Delta f = n\sqrt{\det(g_{i,j})_{i,j}}H$$

iv. Ειδικότερα, η Σ είναι παραμετρική ελαχιστική επιφάνεια εάν και μόνο αν $\Delta f \equiv 0$.

Επίσης, υπενθυμίζουμε ότι μία παραμέτρηση f της Σ λέγεται σύμμορφη εάν:

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| = \left| \frac{\partial f}{\partial x_j} \right| \text{ και } \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_i}, \frac{\partial f}{\partial x_j} \right\rangle = 0, \quad i \neq j$$

Θεώρημα 2.10 (Ολομορφική αναπαράσταση). Έστω $\Sigma = \{f(x, y)\}$ μία σύμμορφη παραμετρική επιφάνεια στον \mathbb{R}^n με $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, και απλά συνεκτικό $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$. Η Σ είναι παραμετρική ελαχιστική επιφάνεια εάν και μόνο αν $f = \Re h$ για κάποια μη-σταθερή ολόμορφη συνάρτηση $h : \Omega \rightarrow \mathbb{C}^n$ με:

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial \Re h_k}{\partial x} + i \frac{\partial \Im h_k}{\partial x} \right)^2 \equiv 0 \text{ στο } \Omega$$

Επιπλέον, η $\Sigma^* = \{\Im h(x, y)\}$ είναι παραμετρική ελαχιστική επιφάνεια, που λέγεται συζυγής της Σ .

Απόδειξη. Η απόδειξη θα γίνει σε βήματα.

Βήμα I: Θα δείξουμε αρχικά ότι:

$$\Delta f \equiv 0 \text{ στο } \Omega \Leftrightarrow f = \Re h, \quad h : \Omega \rightarrow \mathbb{C}^n \text{ ολόμορφη.} \quad (2.8)$$

(\Rightarrow) Εδώ ουσιαστικά χρειάζεται, δεδομένης της f , να βρεθεί συνάρτηση g ούτως ώστε οι εξισώσεις Cauchy-Riemann να αληθεύουν. Δηλαδή, χρειάζεται:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_k}{\partial x} &= -\frac{\partial f_k}{\partial y} \\ \frac{\partial g_k}{\partial y} &= \frac{\partial f_k}{\partial x} \end{aligned}$$

Αυτό σημαίνει ότι συνάρτηση g_k με κλίση:

$$\nabla G_k = \left(-\frac{\partial f_k}{\partial y}, \frac{\partial f_k}{\partial x} \right)$$

δηλαδή υπάρχει το δυναμικό του $F_k = (-\partial f_k/\partial y, \partial f_k/\partial x)$. Άρα, για κάθε απλά συνεκτικό σύνολο B :

$$0 = \int_{\partial B} \langle \nabla g_k, d\ell \rangle = \int_{\partial B} -\frac{\partial f_k}{\partial y} dx + \frac{\partial f_k}{\partial x} dy = \int_B \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f_k}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial f_k}{\partial y} \right) dA = \int_B \Delta f_k dA$$

(από το θεώρημα του Green). Οι παραπάνω υπολογισμοί δείχνουν ότι μία ικανή και αναγκαία συνθήκη για την ύπαρξη της g είναι η $\Delta f \equiv 0$.

(\Leftarrow) Η άλλη κατεύθυνση μπορεί να αποδειχθεί με τις εξισώσεις Cauchy-Riemann.

Βήμα II: Έπειτα θα δείξουμε ότι αν $h = f + ig$, με την h να είναι ολόμορφη, η f είναι σύμμορφη. Έχουμε:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial \Re h_k}{\partial x} + i \frac{\partial \Im h_k}{\partial x} \right)^2 &\equiv 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial f_k}{\partial x} + i \frac{\partial g_k}{\partial x} \right)^2 \equiv 0 \\ &\Leftrightarrow \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right|^2 - \left| \frac{\partial g}{\partial x} \right|^2 + 2i \cdot \left\langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial x} \right\rangle \equiv 0 \\ &\Leftrightarrow \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| = \left| \frac{\partial g}{\partial x} \right| \text{ και } \left\langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial x} \right\rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| = \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| \text{ και } \left\langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right\rangle = 0 \end{aligned}$$

Η τελευταία συνθήκη είναι ακριβώς αυτή που εξασφαλίζει ότι η f είναι σύμμορφη παραμέτρηση.

Τέλος, η $\Sigma^* = \{\Im h(x, y)\}$ είναι κι αυτή σύμμορφη παραμετρική ελαχιστική επιφάνεια, αφού $\Im h = \Re(-ih)$. \square

Με το Θεώρημα 2.10 μπορούμε να δώσουμε μερικά παραδείγματα σύμμορφων παραμετρικών ελαχιστικών επιφανειών.

Το πρώτο παράδειγμα είναι το κατενοειδές (ή αλυσσοειδής επιφάνεια). Εάν:

$$h(z) = \alpha \begin{pmatrix} \cosh z \\ i \cdot \sinh z \\ z \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

τότε:

$$\sum_{k=1}^3 \left(\frac{\partial \Re h_k}{\partial x} + i \frac{\partial \Im h_k}{\partial x} \right)^2 \equiv 0$$

κι άρα η $f = \Re h$ είναι σύμμορφη παραμετρική ελαχιστική επιφάνεια. Μάλιστα εάν χρησιμοποιήσουμε τις σχέσεις:

$$\begin{aligned} \cosh(x + iy) &= \cosh x \cos y + i \sinh x \sin y \\ \sinh(x + iy) &= \sinh x \cos y + i \cosh x \sin y \end{aligned}$$

προκύπτει η παραμέτρηση:

$$f(x, y) = \alpha \begin{pmatrix} \cosh x \cos y \\ -\cosh x \sin y \\ x \end{pmatrix}$$

Το δεύτερο παράδειγμα είναι το συζυγές του πρώτου, δηλαδή το ελικοειδές. Η $g = \Im h$ είναι σύμμορφη παραμετρική ελαχιστική επιφάνεια, κι όπως πριν μπορούμε να δείξουμε ότι:

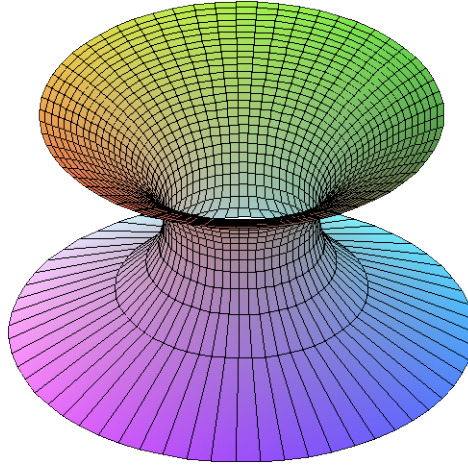
$$g(x, y) = \alpha \begin{pmatrix} \sinh x \sin y \\ \sinh x \cos y \\ y \end{pmatrix}$$

Τέλος, ένα ανεξάρτητο παράδειγμα (που είναι ενδιαφέρον λόγω της ύπαρξης αυτοτομών και της μη-προσανατολισιμότητας) είναι η επιφάνεια του Henneberg. Εδώ έχουμε:

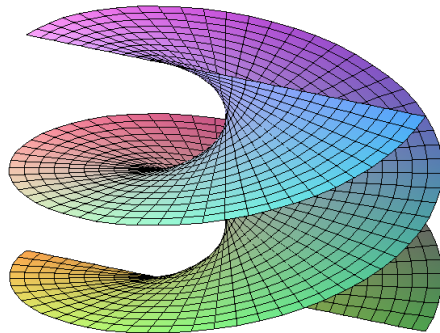
$$h(z) = \begin{pmatrix} -1 + \cosh(2z) \\ -i(\cosh z + 1 \cosh(3z)/3) \\ -\sinh z + \sinh(3z)/3 \end{pmatrix}$$

και $f = \Re h$. Σε πραγματικές συντεταγμένες:

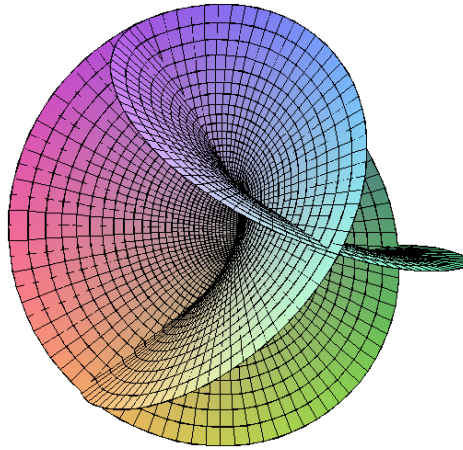
$$f(x, y) = \begin{pmatrix} -1 + \cosh(2x) \cos(2y) \\ \sinh x \sin y + \sinh(3x) \sin(3y)/3 \\ -\sinh x \cos y + \sinh(3x) \cos(3y)/3 \end{pmatrix}$$



Εικόνα 2.1: Το κατενοειδές



Εικόνα 2.2: Το ελικοειδές



Εικόνα 2.3: Η επιφάνεια του Henneberg

2.4 Η ενέργεια της Allen-Cahn και σύνολα πεπερασμένης περιμέτρου

2.4.1 Φραγμένη κύμανση και περίμετρος

Για τη Γ -σύγκλιση του συναρτησιακού της περιμέτρου στο συναρτησιακό της ενέργειας, αλλά ακόμη και για τον ορισμό της περιμέτρου χρειαζόμαστε την έννοια της κύμανσης

Στις πραγματικές συναρτήσεις η έννοια της κύμανσης σχετίζεται με την διαδρομή που διανύει το γράφημα μίας συνάρτησης στον κατακόρυφο άξονα. Δηλαδή, η ολική κύμανση σχετίζεται με την ποσότητα:

$$\int \left| \frac{df}{dx} \right| dx$$

αφού, πολύ πρόχειρα, η ποσότητα $|df| = |df/dx| \cdot dx$ είναι το μέτρο του κατακόρυφου άξονα. Για την γενική περίπτωση, η αντίστοιχη ποσότητα είναι η:

$$\int_{\Omega} |\nabla f| d\sigma$$

Εμείς θα ασχοληθούμε με την έννοια της περιμέτρου σε ένα πλαίσιο ασθενούς δι-αφορισιμότητας, μέσω της κλίσης με την έννοια της κατανομής.

Υπενθυμίζουμε ότι ένα μέτρο Borel μ λέγεται μέτρο Radon εάν:

- i. Είναι τοπικά πεπερασμένο.
- ii. Είναι εσωτερικά κανονικό, δηλαδή για κάθε ανοικτό U :

$$\mu(U) = \sup\{\mu(K) \mid K \subseteq U \text{ συμπαγές}\}$$

Ορισμός 2.26 (Συναρτήσεις φραγμένης κύμανσης). Έστω (\mathcal{M}, g) μία πολυπλοκότητα Riemann και $\Omega \subseteq \mathcal{M}$ ένα ανοικτό υποσύνολο. Έστω μία συνάρτηση $u \in L^1(\Omega)$ η οποία έχει κλίση, με την έννοια της κατανομής, που αναπαριστάται από ένα $T\mathcal{M}$ -μέτρο Radon, με την εξής έννοια: Υπάρχει $T\mathcal{M}$ -μέτρο Radon, που το συμβολίζουμε κι αυτό με Du , ώστε για κάθε $X \in C_c^\infty(\Omega; T\mathcal{M})$:

$$\int_{\Omega} \langle X, Du \rangle = - \int_{\Omega} u \nabla \cdot X d\sigma$$

Την ποσότητα $\langle X, Du \rangle$ κανείς μπορεί να την φαντάζεται ως ένα άθροισμα μέτρων. Εάν σε κάθε κατεύθυνση υπάρχει ένα μέτρο Radon $d\mu_k$, δηλαδή:

$$Du = \sum_k d\mu_k E_k$$

τότε:

$$\int_{\Omega} \langle X, Du \rangle = \sum_k \int_{\Omega} X^k d\mu_k$$

Εάν η ολική κύμηση, δηλαδή η ποσότητα:

$$\int_{\Omega} |Du| = \sup \left\{ \int_{\Omega} u \nabla \cdot X \, d\sigma \mid X \in C_c^{\infty}(\Omega; T\mathcal{M}), \|X\|_{L^{\infty}} \leq 1 \right\}$$

είναι πεπερασμένη, τότε λέμε ότι η u είναι φραγμένης κύμανσης (ο συμβολισμός του ολοκληρώματος δεν είναι τυχαίος). Το σύνολο των συναρτήσεων φραγμένης κύμανσης το συμβολίζουμε με $BV(\Omega)$. Η νόρμα του χώρου είναι η:

$$\|u\|_{BV(\Omega)} = \|u\|_{L^1(\Omega)} + \int_{\Omega} |Du|$$

Για τα διανυσματικά μέτρα υπάρχει ολόκληρη θεωρία, αλλά εμείς θα σταθούμε μόνο στην εποπτεία και τη διαίσθηση.

Επίσης, παρατηρούμε ότι η ποσότητα $|Du|$ που ορίζεται από την:

$$\int_V |Du| = \sup \left\{ \int_V u \nabla \cdot X \, d\sigma \mid X \in C_c^{\infty}(V; T\mathcal{M}), \|X\|_{L^{\infty}} \leq 1 \right\}, \quad V \subseteq \Omega$$

είναι ένα μέτρο Radon, πράγμα που δικαιολογεί τον συμβολισμό του ολοκληρώματος.

Η διαίσθηση για τον ορισμό της περιμέτρου ενός συνόλου έχει ως εξής: Ας υποθέσουμε ότι έχουμε έναν δίσκο και χρειάζεται να υπολογίσουμε την περίμετρό του. Μπορούμε να πάρουμε μία διατομή του κύκλου, που είναι δύο σημεία, κι έπειτα δύο “συναρτήσεις” Dirac σε καθένα σημείο. Στη διατομή η “περίμετρος” είναι το ολοκλήρωμα:

$$\int_{\mathbb{R}} \delta_1 + \delta_2 \, dx$$

Εάν επαναλάβουμε αυτή τη διαδικασία για όλες τις διατομές, παίρνουμε ένα συνεχές “συναρτήσεων” Dirac κατά μήκος της περιμέτρου του δίσκου, κι αναμένουμε το μήκος της να γίνεται:

$$\int_{\mathbb{R}} \delta_{B_1(0)} \, dA$$

Αυτό το συνεχές “συναρτήσεων” Dirac, όπως και στη μονοδιάστατη περίπτωση, πρέπει να έχει προέλθει από την παράγωγο της δείκτριας συνάρτησης του δίσκου.

Ορισμός 2.27 (Περίμετρος και σύνολα Caccioppoli). Έστω E ένα Borel υποσύνολο μίας πολυπλοπλότητας Riemann (\mathcal{M}, g) . Ορίζουμε την περίμετρο του E όταν η $\mathbf{1}_E$ έχει κλίση με την έννοια της κατανομής, ως εξής:

$$\text{Per}(E; \Omega) = \int_{\Omega} |D\mathbf{1}_E|$$

Λέμε ότι το E είναι σύνολο Caccioppoli εάν $\text{Per}(E; \Omega) < \infty$.

Είναι σημαντικό να διευκρινίσουμε ότι εν γένει το μέτρο Hausdorff \mathcal{H}^{n-1} του συνόρου ∂E δεν είναι ίσο με την περίμετρο Per του E .

Ας περιοριστούμε προσωρινά στην περίπτωση όπου $\Omega = \mathbb{R}^n$. Το ανηγμένο σύνορο $\partial^* E$ του E είναι το σύνολο των σημείων x για τα οποία η ποσότητα:

$$\lim_{r \searrow 0} \frac{D\mathbf{1}_E(B_r(x))}{|D\mathbf{1}_E|(B_r(x))} \in \mathbb{R}^n$$

έχει μέτρο 1. Μάλιστα ισχύει $\partial^* E \subseteq \partial E$. Με το ακόλουθο θεώρημα θα δούμε ότι η περίμετρος του E σχετίζεται περισσότερο με το ανηγμένο σύνορο $\partial^* E$, παρά με το ∂E .

Θεώρημα 2.11 (Το θεώρημα του de Giorgi). Έστω $E \subseteq \mathbb{R}^n$ ένα σύνολο Caccioppoli. Ισχύει ότι:

$$\text{Per}(E; \mathbb{R}^n) = \mathcal{H}^{n-1}(\partial^* E)$$

Σημείωση: Το θεώρημα του de Giorgi έχει και γενικότερη διατύπωση, σε πολλαπλότητες Riemann.

2.4.2 Κάτω ημισυνέχεια και Γ —σύγκλιση

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε μία οικογένεια από συναρτησιακά J_k , που συγκλίνουν σε κάποιο άλλο, έστω J . Ένα πρόβλημα στον λογισμό των μεταβολών είναι το εξής: Εάν δοθεί μία οικογένεια $\{u_k\}_k$ με όριο u , ώστε κάθε u_k να ελαχιστοποιεί το J_k , μπορούμε να συμπεράνουμε ότι στο όριο το u ελαχιστοποιεί το J ; Η απάντηση είναι εν γένει αρνητική.

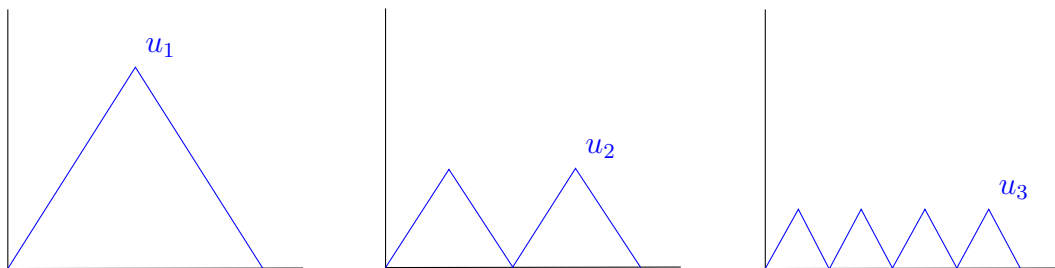
Θα δούμε το ακόλουθο παράδειγμα: Στον χώρο $H_0^1([0, 1])$, των H^1 —συναρτήσεων που έχουν μία έννοια μηδενισμού στο σύνορο,³ θεωρούμε το συναρτησιακό $J : H_0^1([0, 1]) \rightarrow [0, \infty]$:

$$J(u) = \int_0^1 (u'(t)^2 - 1)^2 dt$$

και ορίζουμε την οικογένεια των συναρτησιακών J_k :

$$J_k(u) = \begin{cases} J(u), & \text{εάν } u' \text{ σταθερή στα διάφορα } (i/(2k), (i+1)/(2k)), \quad i \leq 2k-1 \\ \infty, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Τότε οι παρακάτω οδοντωτές συναρτήσεις u_k αποτελούν ελάχιστα των J_k .



Επίσης $u_k \rightarrow 0$ (μάλιστα ομοιόμορφα) και $J_k(u_k) \rightarrow J(0)$ σχεδόν παντού, για κάθε οδοντωτή ή σταθερή συνάρτηση. Όμως, προς κακή μας τύχη, η $u = 0$ δεν ελαχιστοποιεί το $J(u)$. Το πρόβλημα είναι η μορφή της σύγκλισης, και συγκεκριμένα ότι δεν έχουμε Γ —σύγκλιση, αλλά μία άλλη.

³Γενικά η έννοια του μηδενισμού στο σύνορο στις $W^{1,p}$ —συναρτήσεις δεν είναι τετριμμένη. Μπορείτε να βρείτε πληροφορίες στο [Ev10].

Ορισμός 2.28 (Γ -σύγκλιση). Έστω \mathcal{X} ένας Hausdorff και δεύτερος (ή πρώτος) αριθμήσιμος τοπολογικός χώρος, και $J_k : \mathcal{X} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ μία οικογένεια συναρτησιακών στο \mathcal{X} . Λέμε ότι τα J_k Γ -συγκλίνουν σε ένα $J : \mathcal{X} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ εάν:

- i. Υπάρχει ασυμπτωτικό κοινό κάτω φράγμα: Για κάθε $f \in \mathcal{X}$ και κάθε ακολουθία $\{f_k\}_k$ με $f_k \rightarrow f$ στο \mathcal{X} , έχουμε:

$$J(f) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} J_k(f_k)$$

- ii. Υπάρχουν προσεγγιστικές ακολουθίες: Για κάθε $f \in \mathcal{X}$ υπάρχει ακολουθία $\{f_k\}_k$ με $f_k \rightarrow f$ στον \mathcal{X} με:

$$J(f) = \lim_{k \rightarrow \infty} J_k(f_k)$$

ή ισοδύναμα:

$$J(f) \geq \limsup_{k \rightarrow \infty} J_k(f_k)$$

Εάν οι J_k Γ -συγκλίνουν στην J , γράφουμε:

$$J = \Gamma\text{-}\lim_{k \rightarrow \infty} J_k \text{ ή } J_k \xrightarrow{\Gamma} J$$

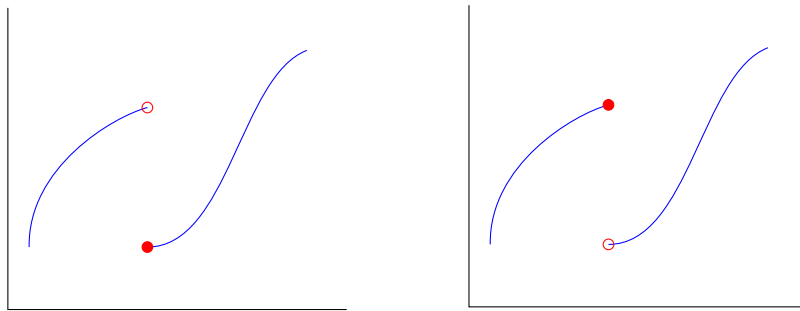
Θεώρημα 2.12 (Θεμελιώδες θεώρημα της Γ -σύγκλισης). Έστω \mathcal{X} Hausdorff και δεύτερος (ή πρώτος) αριθμήσιμος τοπολογικός χώρος, και $J_k : \mathcal{X} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ μία οικογένεια συναρτησιακών στο \mathcal{X} . Εάν $J_k \xrightarrow{\Gamma} J$, $J : \mathcal{X} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ και οι $f_k \in \mathcal{X}$ ελαχιστοποιούν τα J_k , τότε στο όριο $f_k \rightarrow f$, το J ελαχιστοποιείται.

Όπως είδαμε και στο προηγούμενο παράδειγμα, υπάρχουν οικογένειες συναρτησιακών που συγκλίνουν, με κάποια έννοια, αλλά τα σημεία ελαχιστοποίησής τους δεν συγκλίνουν σε σημείο ελαχιστοποίησης. Υπάρχει πίσω από αυτό το φαινόμενο μία εξήγηση, που είναι η κάτω ημισυνέχεια.

Ορισμός 2.29 (Κάτω ημισυνέχεια). Έστω \mathcal{X} Hausdorff και δεύτερος (ή πρώτος) αριθμήσιμος τοπολογικός χώρος, και $J : \mathcal{X} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ένα συναρτησιακό. Λέμε ότι το J είναι κάτω ημισυνεχές εάν:

$$f_k \rightarrow f \Rightarrow J(f) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} J(f_k)$$

Ισοδύναμα, τα διάφορα $J^{-1}((-\infty, t])$ είναι κλειστά στον \mathcal{X} .



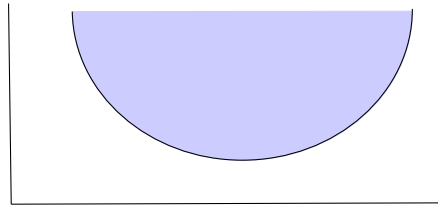
Εικόνα 2.4: Ένα παράδειγμα μίας κάτω ημισυνεχούς συνάρτησης (στα αριστερά) κι ένα μίας όχι κάτω ημισυνεχούς (στα δεξιά).

Παρακάτω θα δούμε ότι το όριο πρέπει οπωσδήποτε να είναι κάτω ημισυνεχές, εάν αποσκοπούμε σε κάποια Γ -σύγκλιση. Αυτό είναι λογικό, αν σκεφτούμε συναρτησιακά που προσεγγίζουν τις J_k , και με ελάχιστα που πλησιάζουν το όχι κάτω ημισυνεχές τμήμα της J .

Πρώτα θα χρειαστούμε μερικά ενδιάμεσα βήματα.

Ορισμός 2.30 (Επιγράφημα). Έστω \mathcal{X} ένας τοπολογικός χώρος και $J : \mathcal{X} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ένα συναρτησιακό. Ορίζουμε το επιγράφημα:

$$\text{epi}(J) = \{(f, j) \in \mathcal{X} \times \overline{\mathbb{R}} \mid j \geq J(f)\}$$



Παρατήρηση 2.2. Έστω \mathcal{X} ένας Hausdorff και δεύτερος (ή πρώτος) αριθμήσιμος τοπολογικός χώρος. Ένα συναρτησιακό $J : \mathcal{X} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ είναι κάτω ημισυνεχές εάν και μόνο αν το επιγράφημα $\text{epi}(J)$ είναι κλειστό στον $\mathcal{X} \times \overline{\mathbb{R}}$.

Ορισμός 2.31 (Όρια Kuratowski). Έστω (\mathcal{X}, d) ένας μετρικός χώρος και $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ μία ακολουθία συνόλων. Ορίζουμε το Kuratowski limit supremum:

$$\text{K-} \limsup_{k \rightarrow \infty} A_k = \left\{ x \in \mathcal{X} \mid \liminf_{k \rightarrow \infty} d(x, A_k) = 0 \right\}$$

και το αντίστοιχο limit infimum:

$$\text{K-} \liminf_{k \rightarrow \infty} A_k = \left\{ x \in \mathcal{X} \mid \limsup_{k \rightarrow \infty} d(x, A_k) = 0 \right\}$$

Εάν τα δύο προηγούμενα σύνολα ταυτίζονται, τότε λέμε ότι το όριο Kuratowski υπάρχει και συμβολίζουμε:

$$\text{K-} \lim_{k \rightarrow \infty} A_k = \text{K-} \limsup_{k \rightarrow \infty} A_k = \text{K-} \liminf_{k \rightarrow \infty} A_k$$

Ίσως ο ορισμός δεν δίνει καλή εικόνα πώς σχετίζεται αφενός το παραπάνω όριο με τη Γ -σύγκλιση κι αφετέρου τι γεωμετρική ερμηνεία έχει. Τη Γ -σύγκλιση θα τη δούμε αργότερα. Παρακάτω θα αναφέρουμε μερικά παραδείγματα που δείχνουν ότι η σύγκλιση Kuratowski είναι πολύ φυσιολογική, και μάλιστα με το τελευταίο θα δούμε τη διαφορά και μία στοιχειώδη ερμηνεία για τα $\text{K-} \limsup$, $\text{K-} \liminf$.

Για το πρώτο παράδειγμα, θεωρούμε την ακολουθία:

$$A_k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x|^n + |y|^n < 1\}$$

Τότε το όριο Kuratowski υπάρχει και μάλιστα:

$$\text{K-} \lim_{k \rightarrow \infty} A_k = B_{\ell^\infty} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$$

Για το δεύτερο παράδειγμα, θεωρούμε την ακολουθία:

$$A_k = \frac{1}{k} \mathbb{Z}^2$$

Τότε το όριο Kuratowski υπάρχει και μάλιστα:

$$\text{K-} \lim_{k \rightarrow \infty} A_k = \mathbb{R}^2$$

Το τρίτο και τελευταίο παράδειγμα είναι κάπως πιο ιδιαίτερο. Θεωρήστε τη μπάλα $B = B((0, 1/4), 1/2)$ (τη μπάλα διαμέτρου 1, μετατοπισμένη $1/4$ δεξιά). Περιστρέφοντας τη B κατά $2\pi k/n$ γύρω από την αρχή των αξόνων, παίρνουμε τα σύνολα:

$$A_k = e^{-2\pi ki/n} B$$

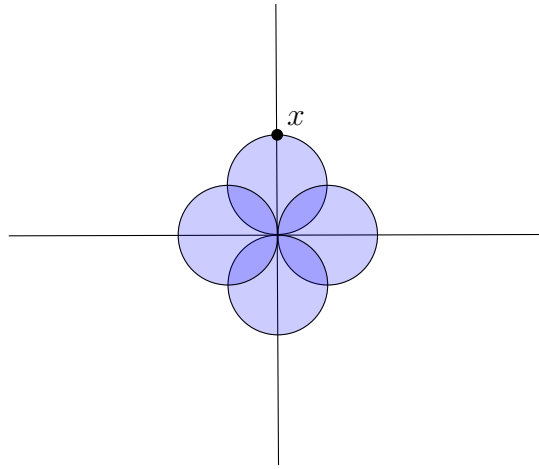
Τότε:

$$\text{K-}\limsup_{k \rightarrow \infty} A_k = \bigcup_{k=1}^n A_k$$

και:

$$\text{K-}\liminf_{k \rightarrow \infty} A_k = \{(0, 0)\}$$

Για να επιβεβαιώσουμε ότι πράγματι τα limit supremum, limit infimum είναι αυτά που αναφέρθηκαν παραπάνω, θα περιοριστούμε για ευκολία στην περίπτωση $n = 4$, και μάλιστα στο σημείο $x = (0, 1)$.



Οι διάφορες αποστάσεις $d(x, A_k)$, καθώς τα k μεταβάλλονται, γίνονται:

$$1, \alpha, 0, \alpha, 1, \alpha, 0, \alpha, 1, \alpha, 0, \alpha, 1, \dots$$

(όπου $\alpha < 1$), οπότε το x ανήκει στο $\text{K-}\limsup A_k$ αλλά όχι στο $\text{K-}\liminf A_k$.

Η γεωμετρική διαίσθηση για τα $\text{K-}\limsup$, $\text{K-}\liminf$ έχει ως εξής: Εάν κάποιος βρίσκεται μακριά από τα A_k καθώς αυτά περιστρέφονται γρήγορα, το σχήμα που βλέπει είναι τέσσερεις λοβοί. Εάν όμως βρίσκεται κοντά, μπορεί ευκολότερα να διακρίνει ποια σημεία ουσιωδώς δεν αλλάζουν (δηλαδή η αρχή των αξόνων).

Πρόταση 2.6. Έστω (\mathcal{X}, d) ένα μετρικός χώρος και συναρτησιακά $J_k : \mathcal{X} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $J : \mathcal{X} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Τότε $J_k \xrightarrow{\Gamma} J$ εάν και μόνο αν:

$$\text{K-}\lim \text{epi}(J_k) = \text{epi}(J)$$

Πρόταση 2.7. Έστω (\mathcal{X}, d) ένα μετρικός χώρος και συναρτησιακά $J_k : \mathcal{X} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $J : \mathcal{X} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Εάν $J_k \xrightarrow{\Gamma} J$, τότε το J είναι κάτω ημισυνεχές.

Απόδειξη. Εάν $J_k \xrightarrow{\Gamma} J$, τότε:

$$\text{K-}\lim \text{epi}(J_k) = \text{epi}(J)$$

Όμως τα όρια Kuratowski είναι πάντα κλειστά, πράγμα που αποδεικνύει ότι το $\text{epi}(J)$ είναι κλειστό, κι αυτό στη συνέχεια μας δείχνει ότι η J είναι κάτω ημισυνεχής. \square

2.4.3 Η Γ —σύγκλιση της ενέργειας στην περίμετρο

Με όλα αυτά είμαστε πλέον σε θέση να αποδείξουμε την Γ —σύγκλιση της ενέργειας σε ένα πολλαπλάσιο της περιμέτρου. Η απόδειξη θα χωριστεί σε δύο μέρη, τα οποία οφείλονται στους Modica και Mortola [MM77]. Το πρώτο σχετίζεται με το ασυμπτωτικό κοινό κάτω φράγμα της Γ —σύγκλισης, και το δεύτερο με τις προσεγγιστικές ακολουθίες. Μάλιστα το δεύτερο είναι το θεώρημα που ήδη έχουμε αναφέρει στην εισαγωγή.

Επίσης, θα χρειαστούμε την ακόλουθη πρόταση:

Πρόταση 2.8. Έστω (\mathcal{M}, g) μία πολλαπλότητα Riemann και $\Omega \subseteq \mathcal{M}$ ανοικτό υποσύνολό της. Εάν η ακολουθία $\{u_k\}_k$ του $BV(\Omega)$ φράσσεται ως εξής:

$$\sup_k \|u_k\|_{BV(\Omega)} = \sup_k \left(\|u_k\|_{L^1(\Omega)} + \int_{\Omega} |Du_k| \right) < \infty$$

για κάθε προσυμπαγές ανοικτό V στο Ω , τότε (ενδεχομένως παίρνοντας κάποια υπακολουθία αν χρειαστεί), υπάρχει $u \in BV_{\text{loc}}(\Omega)$ ούτως ώστε:

$$u_k \xrightarrow{L^1_{\text{loc}}(\Omega)} u \text{ και } \int_V |Du| \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_V |Du_k|$$

για κάθε προσυμπαγές V στο Ω .

Τώρα διατυπώνουμε και αποδεικνύουμε το πρώτο μέρος του θεωρήματος.

Θεώρημα 2.13 (Ασυμπτωτικό κοινό κάτω φράγμα για την περίμετρο). Έστω (\mathcal{M}, g) μία πολλαπλότητα Riemann και $\Omega \subseteq \mathcal{M}$ ανοικτό και προσυμπαγές υποσύνολό της. Υποθέτουμε ότι $\mathcal{E}_{\varepsilon}(u_{\varepsilon}; \Omega) \leq C$, $C > 0$, για μία ακολουθία συναρτήσεων $u_{\varepsilon} \in H^1(\Omega) \cap L^4(\Omega)$. Τότε υπάρχει ακολουθία $\varepsilon_k \rightarrow 0$ και $u_0 \in BV_{\text{loc}}(\Omega)$ με $u_0(\Omega) \in \{\pm 1\}$ $d\sigma$ —σχεδόν παντού και:

$$u_{\varepsilon_k} \xrightarrow{L^1_{\text{loc}}(\Omega)} u_0, \quad \lambda \cdot \text{Per}(\{u_0 = 1\}; V) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathcal{E}_{\varepsilon_k}(u_{\varepsilon_k}; V), \quad \lambda > 0$$

για κάθε προσυμπαγές ανοικτό V στο Ω . Το θεώρημα διατυπώνεται επίσης για γενικές ακολουθίες $u_{\varepsilon_k} \rightarrow u_0$, $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$.

Απόδειξη. Η απόδειξη θα γίνει σε βήματα.

Βήμα I: Καθ' όλη τη διάρκεια της απόδειξης, καθοριστικό ρόλο παίζει η:

$$\Phi(t) = \int_0^t \sqrt{2W(s)} \, ds, \quad W(t) = \frac{1}{4}(1 - t^2)^2$$

Πρώτα θα δείξουμε μία χρήσιμη ανισότητα: Χρησιμοποιώντας την $2\alpha\beta \leq \alpha^2 + \beta^2$, γράφουμε:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\varepsilon}(u; \Omega) &= \int_{\Omega} \frac{\varepsilon}{2} |\nabla u|^2 + \frac{1}{\varepsilon} W(u) \, d\sigma \\ &\geq \int_{\Omega} \sqrt{2W(u)} |\nabla u| \, d\sigma \\ &= \int_{\Omega} |\nabla(\Phi(u))| \, d\sigma \end{aligned} \tag{2.9}$$

Βήμα II: Είναι εύκολο κανείς να διαπιστώσει ότι $|\Phi(t)| \leq a + bW(t)$, $a, b > 0$, κι άρα:

$$\mathcal{E}_{\varepsilon}(u_{\varepsilon}; \Omega) = \int_{\Omega} \frac{\varepsilon}{2} |\nabla u_{\varepsilon}|^2 + \frac{1}{\varepsilon} W(u_{\varepsilon}) \, d\sigma \leq C \Rightarrow \|\Phi(u_{\varepsilon})\|_{L^1(\Omega)} \leq M_1, \quad M_1 > 0$$

Αυτή η ανισότητα μαζί με την (2.9) μας επιτρέπουν να χρησιμοποιήσουμε την Πρόταση 2.8. Κατά συνέπεια, υπάρχει $\Phi_0 \in BV_{\text{loc}}(\Omega)$ ούτως ώστε, για μία υπακολουθία της $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$:

$$\Phi(u_{\varepsilon_k}) \xrightarrow{L^1_{\text{loc}}(\Omega)} \Phi_0 \text{ και } \int_V |D\Phi_0| \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_V |D(\Phi(u_{\varepsilon_k}))|$$

για κάθε προσυμπαγές V στο Ω . Επειδή:

$$\int_V |D(\Phi(u_{\varepsilon_k}))| = \int_V \left| \sqrt{2W(u_{\varepsilon_k})} \nabla u_{\varepsilon_k} \right| d\sigma \leq \int_V \frac{\varepsilon_k}{2} |\nabla u_{\varepsilon_k}|^2 + \frac{1}{\varepsilon_k} W(u_{\varepsilon_k}) d\sigma$$

έχουμε τελικά:

$$\int_V |D\Phi_0| \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \mathcal{E}_{\varepsilon_k}(u_{\varepsilon_k}; V)$$

Βήμα III: Παρατηρούμε ότι η Φ έχει αντίστροφο, η οποία μάλιστα είναι ομοιόμορφα συνεχής. Λόγω της ομοιόμορφης συνέχειας, έπεται η κατά μέτρο σύγκλιση των u_{ε_k} στο $u_0 = \Phi^{-1}(\Phi_0)$.

$$\sigma(\{|u_{\varepsilon_k} - u_0| \geq \delta\}) = \sigma(\{|\Phi^{-1}(\Phi(u_{\varepsilon_k})) - \Phi^{-1}(\Phi_0)| \geq \delta\}) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

Επιπλέον, από την ενέργεια μπορεί κανείς να δει ότι $\|u_{\varepsilon_k}\|_{L^4(\Omega)} \leq M_2$, $M_2 > 0$. Εάν λοιπόν περιοριστούμε στα συμπαγή V στο Ω , είναι γνωστό ότι η κατά μέτρο σύγκλιση μαζί με το φράγμα στην L^p -νόρμα (εδώ $1 < p = 4$) δίνουν L^1 -σύγκλιση στο V . Δηλαδή $u_{\varepsilon_k} \rightarrow u_0$ στον $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$.

Βήμα IV: Η u_0 παίρνει σχεδόν παντού τις τιμές ± 1 , αφού μπορούμε να γράψουμε:

$$\frac{\delta^2}{2} \sigma(\{|u_{\varepsilon_k}^2 - 1| \geq \delta\} \cap V) \leq \int_V W(u_{\varepsilon_k}) d\sigma \leq C\varepsilon_k$$

για κάθε $\delta > 0$ και για κάθε συμπαγές V στο Ω .

Επιπλέον έχουμε:

$$\begin{aligned} \Phi(u_0) &= \Phi(1)\mathbf{1}_{\{u_0=1\}} + \Phi(-1)\mathbf{1}_{\{u_0=-1\}} \\ &= (\Phi(1) - \Phi(-1))\mathbf{1}_{\{u_0=1\}} + \Phi(-1)(\mathbf{1}_{\{u_0=1\}} + \mathbf{1}_{\{u_0=-1\}}) \\ &= (\Phi(1) - \Phi(-1))\mathbf{1}_{\{u_0=1\}} + \Phi(-1)\mathbf{1}_\Omega \end{aligned}$$

και κατά συνέπεια:

$$\int_V |D\Phi(u_0)| = \lambda \int_V |Du_0| = \lambda \cdot \text{Per}(\{u_0 = 1\}; V)$$

όπου $\lambda = \Phi(1) - \Phi(-1)$, για κάθε προσυμπαγές ανοικτό V στο Ω . □

Τώρα διατυπώνουμε και αποδεικνύουμε το δεύτερο μέρος του θεωρήματος.

Θεώρημα 2.14 (Modica-Mortola/Προσεγγιστικές ακολουθίες). Έστω (\mathcal{M}, g) μία πολυ-λαβήτητα Riemann, $\Omega \subseteq \mathcal{M}$ ανοικτό υποσύνολό της και $E \subseteq \Omega$ ένα σύνολο Caccioppoli στο Ω . Υπάρχει ακολουθία $u_\varepsilon \in H^1(\Omega) \cap L^4(\Omega)$ προσεγγιστικών λύσεων της Allen-Cahn με ε (2.2), ούτως ώστε:

$$\lambda \cdot \text{Per}(E; \Omega) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{E}_\varepsilon(u_\varepsilon; \Omega), \quad \lambda > 0$$

και $u_\varepsilon \rightarrow \mathbf{1}_E - \mathbf{1}_{\Omega \setminus E}$ στον $L^1(\Omega)$.

Απόδειξη. Θα σκιαγραφήσουμε ένα κομμάτι της απόδειξης, για να αποκτήσουμε μία ιδέα.

Θα ασχοληθούμε με την περίπτωση όπου το σύνορο ∂E είναι C^∞ , κι οπότε τότε $\partial^* E = \partial E$. Από το θεώρημα του de Giorgi, $\mathcal{H}^{n-1}(\partial E) = \mathcal{H}^{n-1}(\partial^* E) = \text{Per}(E; \Omega)$. Για την γενικότερη περίπτωση, όπου δεν υπάρχει αρκετή ομαλότητα, χρειάζεται επιδεξιότητα με διάφορες προσεγγίσεις.

Υπενθυμίζουμε τη μονοδιάστατη λύση της Allen-Cahn:

$$\mathcal{H}(x) = \tanh(x/\sqrt{2})$$

καθώς επίσης κι ότι υπάρχει μία μονοδιάστατη λύση της Allen-Cahn στο επίπεδο, που είναι ένα συνεχές μονοδιάστατων τέτοιων λύσεων γύρω από μία ευθεία.

Η μονοδιάστατη αυτή λύση είναι ενδεικτική για τη (προσεγγιστική) μορφή των λύσεων. Υπάρχουν δηλαδή λύσεις της Allen-Cahn με ε , που έχουν προσεγγιστικά τη μορφή:

$$u_\varepsilon(x) = \mathcal{H}(\text{dist}(x, \partial E)/\varepsilon)$$

όπου dist είναι η προσημασμένη απόσταση από το σύνορο (δείτε στο [AFS18]). Σημειώνουμε ότι, αφού το σύνορο είναι ομαλό, η συνάρτηση της απόστασης είναι ομαλή κοντά στο ∂E , κι επίσης $|\nabla \text{dist}(\diamond, \partial E)| = 1$.

Συμβολίζουμε από εδώ και στο εξής $u_\varepsilon(x) = \mathcal{F}(\text{dist}(x, \partial E)/\varepsilon)$, για μία συνάρτηση \mathcal{F} που θα επιλεγεί στη συνέχεια. Εάν $\Sigma^t = \{\text{dist}(\diamond, \partial E) = t\}$, τότε για $t \approx 0$ γράφουμε:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_\varepsilon(u_\varepsilon; \Omega) &= \int_\Omega \frac{1}{2\varepsilon} \mathcal{F}'(\text{dist}(x, \partial E)/\varepsilon)^2 + \frac{1}{\varepsilon} W(\mathcal{F}(\text{dist}(x, \partial E)/\varepsilon)) \, d\sigma \\ &= \int_{-\varepsilon K}^{\varepsilon K} \int_{\Sigma^t} \frac{1}{2\varepsilon} \mathcal{F}'(t/\varepsilon)^2 + \frac{1}{\varepsilon} W(\mathcal{F}(t/\varepsilon)) \, dS^t \, dt \\ &\approx \text{Per}(E, \Omega) \int_{-\varepsilon K}^{\varepsilon K} \frac{1}{2\varepsilon} \mathcal{F}'(t/\varepsilon)^2 + \frac{1}{\varepsilon} W(\mathcal{F}(t/\varepsilon)) \, dt \\ &= \text{Per}(E, \Omega) \int_{-K}^K \frac{1}{2} \mathcal{F}'(t)^2 + W(\mathcal{F}(t)) \, dt \end{aligned}$$

και επιλέγουμε:

$$\mathcal{F}(t) = \begin{cases} \mathcal{H}(t), & t \in [-K, K] \\ -1, & t < -K \\ 1, & t > K \end{cases}$$

οπότε:

$$\mathcal{E}_\varepsilon(u_\varepsilon; \Omega) \approx \text{Per}(E, \Omega) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \mathcal{H}'(t)^2 + W(\mathcal{H}(t)) \, dt$$

Με υπολογισμό τώρα έπεται:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \mathcal{H}'(t)^2 + W(\mathcal{H}(t)) \, dt = \Phi(1) - \Phi(-1) = \lambda$$

για τη συνάρτηση Φ του Θεωρήματος 2.13.

Προσέξτε ότι οι παραπάνω συναρτήσεις u_ε δεν είναι κατ' ανάγκη λύσεις της Allen-Cahn με ε . \square

2.5 Λύσεις της Allen-Cahn και εμφυτευμένες ελαχιστικές (υπερ-) επιφάνειες

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, η φυσική διαίσθηση για τη εξίσωση Allen-Cahn είναι ότι τα υλικά κινούνται με τρόπο τέτοιο, ώστε να ελαχιστοποιούν την επιφανειακή τους τάση. Κατά συνέπεια, αναμένουμε ότι η “συνδετική” επιφάνεια των υλικών είναι κοντά σε κάποια ελαχιστική επιφάνεια. Η πρώτη σημαντική ένδειξη ότι κάτι τέτοιο όντως συμβαίνει είναι το θεώρημα των del Pino-Musso-Pacard, στο οποίο κατασκευάζονται λύσεις της Allen-Cahn με ελικοειδή συμμετρία.

Πριν διατυπώσουμε αυτό το θεώρημα, θα αναφέρουμε μερικά που προηγήθηκαν (στο επόμενο θεώρημα) και που τελικά οδήγησαν σε αυτό. Όλα αυτά τα θεωρήματα σχετίζονται με τις συμμετρικές λύσεις της Allen-Cahn.

Θεώρημα 2.15 (Dang-Fife-Peletier και Gui). Στο \mathbb{R}^2 υπάρχει λύση της Allen-Cahn της οποίας το σύνολο μηδενισμού είναι δύο κάθετες ημιευθείες, δηλαδή το σύνολο:

$$\mathfrak{N} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > |y|\}$$

Με παρόμοια μέθοδο μπορεί να αποδειχθεί ότι υπάρχει λύση με σύνολο μηδενισμού:

$$\mathfrak{N} = \{(r \cos \theta, r \sin \theta) \in \mathbb{R}^2 \mid r > 0, |\theta| < \pi/2k\}$$

Με ανακλίσεις, μπορεί να αποδειχθεί ότι υπάρχουν λύσεις με διεδρική συμμετρία.

Με παρόμοιες μεθόδους αποδεικνύεται επίσης το ακόλουθο:

Θεώρημα 2.16 (del Pino-Musso-Pacard). Θεωρούμε το ελικοειδές g_λ σε πολικές συντεταγμένες:

$$g_\lambda(t, \theta) = \left(t \cos \theta, t \sin \theta, \frac{\lambda}{\pi} \theta\right)$$

και την ελικοειδή κίνηση στο $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$ κατά α :

$$\text{sc}_\lambda^\alpha(z, t) = \left(e^{i\alpha} z, t + \frac{\lambda}{\pi} \alpha\right)$$

Εάν $\lambda > \pi$, υπάρχει λύση της Allen-Cahn που είναι φραγμένη, έχει σύνολο μηδενισμού $\mathfrak{N} = g_\lambda(\mathbb{R}^2)$ και έχει ελικοειδή συμμετρία, δηλαδή:

$$u \circ \text{sc}_\lambda^\alpha = u, \text{ για κάθε } \alpha \in \mathbb{R}$$

Εάν $\lambda \leq \pi$, δεν υπάρχουν λύσεις με σύνολο μηδενισμού το ελικοειδές.

Διατυπώνουμε τώρα το θεώρημα Pacard-Ritoré. Η πρώτη απόδειξη αυτού του θεωρήματος εμφανίστηκε στο [PR03] το 2003, και μία σημαντικά ευκολότερη στο [Pa12] το 2012. Σημειώνουμε ότι η απόδειξη είναι κατά κύρια βάση γεωμετρική και χρησιμοποιεί όλα τα γεωμετρικά αποτελέσματα που είδαμε ως τώρα.

Θεώρημα 2.17 (Pacard-Ritoré). Έστω (\mathcal{M}, g) μία συμπαγής πολυπλοπότητα Riemann διάστασης $n + 1$ χωρίς σύνορο. Έστω, επίσης, $\Sigma \subseteq \mathcal{M}$ μία μη-εκφυλισμένη, προσανατολισμένη ελαχιστική υπερεπιφάνεια διάστασης n , με $\mathcal{M} \setminus \Sigma = \mathcal{M}^+ \cup \mathcal{M}^-$, της οποίας το κάθετο διάνυσμα (που συμφωνεί με τον προσανατολισμό) κοιτάζει προς το \mathcal{M}^+ . Υπάρχει $\varepsilon_0 > 0$ ώστε για κάθε $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, υπάρχει λύση u_ε της εξίσωσης Allen-Cahn με ε (2.2), με:

$$u_\varepsilon \rightarrow \mathbf{1}_{\mathcal{M}^+} - \mathbf{1}_{\mathcal{M}^-}$$

ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα των \mathcal{M}^+ , \mathcal{M}^- , καθώς $\varepsilon \rightarrow 0$. Επιπλέον, για την ενέργεια έχουμε:

$$\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0^+ \\ \varepsilon < \varepsilon_0}} \mathcal{E}_\varepsilon(u_\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{2}} \mathcal{H}^n(\Sigma)$$

Βιβλιογραφία

- [AFS18] N. D. Alikakos, G. Fusco, P. Smyrnelis: *Elliptic Systems of Phase Transition Type*. Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications Vol. 91, Birkhäuser, 2018.
- [Bo86] W. Boothby, *An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry*. Second Edition, Academic Press Inc. 1986.
- [Ch19] O. Chodosh, *Lecture Notes on Geometric Features of the Allen-Cahn Equation*. RTG Summer School 2019, Princeton, 2019.
- [dC92] M. P. do Carmo: *Riemannian Geometry*. Mathematics: Theory and Applications, Birkhäuser, Boston, 1992.
- [DHS10] U. Dierkes, S. Hindebrandt, F. Sauvigny: *Minimal Surfaces*. A Series of Comprehensive Studies in Mathematics, Vol. 339, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2010.
- [Ev10] L. C. Evans: *Partial Differential Equations*. Second Edition, Graduate Studies in Mathematics, Vol. 19, AMS, Providence, Rhode Island, 2010.
- [Kü15] W. Kühnel: *Differential Geometry, Curves – Surfaces – Manifolds*. Third Edition, Student Mathematical Library, Vol. 77, AMS, Providence, Rhode Island, 2015.
- [Li12] P. Li, *Geometric Analysis*. Cambridge studies in advanced mathematics, Vol. 137, Cambridge University Press, 2012.
- [Pa12] F. Pacard, *The role of minimal surfaces in the study of the Allen-Cahn equation*. Contemporary Mathematics, 570, AMS, Providence, Rhode Island, 2012.
- [PR03] F. Pacard, M. Ritoré, *From the constant mean curvature hypersurfaces to the gradient theory of phase transitions*. J. Differential Geometry 64, No. 3, 2003, pp. 356-423.
- [MM77] L. Modica, S. Mortola, *Un esempio di Γ^- -convergenza*. Boll. Un. Mat. Ital. B5, 14, no. 1, MR 00445362, 1977, pp. 285-299.
- [Sc15] T. Schmidt, *Minimal Surfaces and Plateau's problem*. Lecture notes, Universität Hamburg, 2015.
- [Fr24] Α. Φράγκος, *Γεωμετρική Πλησιογραμμική Άλγεβρα*. Σημειώσεις, ΕΚΠΑ, 2024

Κεφάλαιο 3

Statistical learning through Bayesian regression trees

Μαυρίκιος Μαυρίκος, Ε.Κ.Π.Α., Τμ. Μαθηματικών

Περίληψη

Μέσα από την τεράστια ποικιλία μεθόδων στατιστικής μάθησης, τα μοντέλα που ενσωματώνουν δυαδικά δέντρα είναι η πιο δημοφιλής επιλογή τόσο σε προβλήματα κατηγοριοποίησης όσο και σε προβλήματα παλινδρόμησης. Τέτοιοι αλγόριθμοι αποτελούν τα Random Forests (Breiman, 2001) και το Stochastic Gradient Boosting (Friedman, 2002). Το ενδιαφέρον στρέφεται στα Bayesian Additive Regression Trees, γνωστά ως BART, μια μη παραμετρική, Μπευζιανή προσέγγιση παλινδρόμησης η οποία διαφοροποιείται από τις προηγούμενες, αφού βασίζεται σε ένα Μπευζιανό μοντέλο πιθανοτήτων και όχι σε έναν καθαρό αλγόριθμο. Η αξιοσημείωτη διαφορά του BART είναι η ανάπτυξη ενός μοντέλου αθροίσματος δέντρων, καθιστώντας το ένα αθροιστικό μοντέλο, όπου κάθε δέντρο περιορίζεται από μια συγκεκριμένη prior προκειμένου να έχει μικρή επίδραση. Πέρα από την συμπερασματολογία που αντλείται από έναν MCMC αλγόριθμο, το BART μπορεί να θεωρηθεί κατάλληλο για την επιλογή και στατιστικά σημαντικών μεταβλητών. Τέλος, η εφαρμογή του BART έχει δείξει αρκετά θετικά αποτελέσματα σε μια μεγάλη ποικιλία προβλημάτων του πραγματικού κόσμου, όπως η πρόβλεψη χιονοστιβάδων σε ορεινούς δρόμους (Blattenberger and Fowles, 2014) ή ο τρόπος με τον οποίο οι μεταγραφικοί παράγοντες αλληλεπιδρούν με το DNA (Zhou and Liu, 2008).

Γενικότερη κατηγορία. Στατιστική, Μπεϋζιανή στατιστική

3.1 Introduction

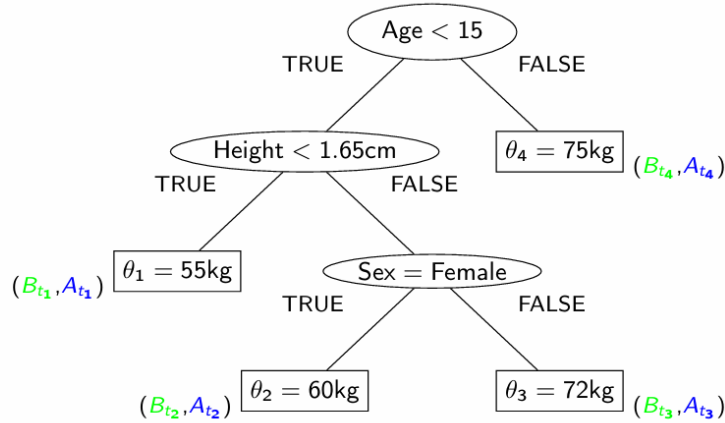
3.1.1 A supervised learning problem

Our study begins by considering the fundamental problem of making inference about a random variable y (response variable) given a dimensional vector of p inputs (explanatory variables) $\underline{x} = (x_1, \dots, x_p)^\top$.

Specifically, if we suppose, \mathcal{Y} to be the set of the output variable and \mathcal{X} to be the vector space, dimension's p , of the covariates, then we can deduce that there exist an unknown and complex function $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ which comprises the main relationship between y and \underline{x} .

3.1.2 Mathematical definition of a binary tree

Most of the literature, use the term of binary decision tree, which is a tree-data structure that each node has at most two children. We can contemplate it as a directed graph that from any other node there is exactly one directed path to the root [Kn97]. Here, we employ full binary trees, meaning that each node has either 2 or 0 children. It consists of two main types of nodes: the split node, denoted s_j , where a test or a condition is applied and a terminal node, denoted t_i (leaf of a tree) where a specific vector of values, θ_i , is determined. In fact, a binary decision tree represents mathematically a decision making process.



Hence, we can consider that a binary tree, \mathcal{T} , with $b \in \mathbb{N}$ terminal nodes, partitions the space \mathcal{X} of the covariates and the space \mathcal{Y} of the response into b subsets.

Binary's tree simplified form and interpretability, is not enough in order to be incorporated in statistical models. In search of a more concrete mathematical definition, binary trees can be encoded as step functions [TR19].

To elaborate, if we let Θ as the space of the terminal values / parameters θ_i , then we can contemplate a binary tree as a function $g : \mathcal{X} \rightarrow \Theta$ that can be written as:

$$g(\underline{x}; \mathcal{T}) = \sum_{i=1}^b \theta_i \mathbf{1}_{B_{t_i}}(\underline{x})$$

In our example, if we consider that $\underline{x} = (\text{Age}, \text{Height}, \text{Sex})^\top$, the $b = 4$ indicators

functions of the sets B_{t_i} can be described as:

$$\begin{aligned} \mathbf{1}_{B_{t_1}}(\underline{x}) &= \mathbf{1}(\text{Age} < 15)\mathbf{1}(\text{Height} < 1.65), \\ \mathbf{1}_{B_{t_2}}(\underline{x}) &= \mathbf{1}(\text{Age} < 15)\mathbf{1}(\text{Height} \geq 1.65)\mathbf{1}(\text{Sex} = \text{Female}), \\ \mathbf{1}_{B_{t_3}}(\underline{x}) &= \mathbf{1}(\text{Age} < 15)\mathbf{1}(\text{Height} \geq 1.65)\mathbf{1}(\text{Sex} = \text{Male}), \\ \mathbf{1}_{B_{t_4}}(\underline{x}) &= \mathbf{1}(\text{Age} \geq 15) \end{aligned}$$

Furthermore, here the parameters $\theta_i = \theta_i \in \mathbb{R}$ and the subsets A_{t_i} contain the real observed children's weight that end up in the terminal t_i . Note that the θ_i 's might comprise a sample mean or median the y_k 's that ended up in the i -th terminal, rendering the tree as a regression tree. In general cases, if y consisted of some number of distinct classes, then the values at the terminal nodes would indicate the prevailing class in the subset of \mathcal{Y} in that leaf, rendering a classification tree. Hence, the quantities θ_i play an important part in parameterizing the conditional distribution $f(y|\underline{x} \in B_{t_i})$.

At this point, two main questions emerge: First, how can we derive inferences about the parameters θ_i ? and second what is the "optimal" form of the binary tree \mathcal{T} to make the best inferences?

3.2 Entering BART and BART extensions

3.2.1 Introduction to the model

Chipman, George and McCulloch consider the problem setup as:

$$\begin{aligned} y &= f(\underline{x}) + \varepsilon \\ \varepsilon &\sim \mathcal{N}(0, \sigma^2) \end{aligned}$$

Hence, BART's aim comprises modeling or at least approximating $f(x) = \mathbb{E}[y|x]$ by a sum of m regression trees:

$$y = \sum_{j=1}^m g(\underline{x}; \mathcal{T}_j, M_j) + \varepsilon \quad (3.1)$$

The M_j denotes the vector whose element represent a single parameter $m_{ij} \in \mathbb{R}$ at the i -th terminal node of the j -th tree. Namely:

$$M_j = (\mu_{1j}, \dots, \mu_{b_j j})^\top$$

where b_j is the number of leaves of the \mathcal{T}_j .

3.2.2 Prior specification and regularisation

The form of the model in 3.1 uncovers the fact that:

- the number of trees, m
- the m pairs $\{(\mathcal{T}_j, M_j)\}_{j=1}^m$
- and the parameter of variation, σ^2

determine the sum-of-trees.

However, interestingly enough, m is considered to be a pre-selected constant in order to avoid further computational costs. The authors recommend a default choice of $m = 200$ and later they depend on how well BART performed in order to change the initial value. From their experience, the predictive performance of the model increases dramatically, as m is increased, however at some point it levels off and decreases for larger number of trees.

Hence, at this point we consider the joint prior distribution of BART model's parameters as:

$$\begin{aligned} f((\mathcal{T}_1, M_1), \dots, (\mathcal{T}_m, M_m), \sigma^2) &= \left[\prod_{j=1}^m f(\mathcal{T}_j, M_j) \right] f(\sigma^2) \\ &= \left[\prod_{j=1}^m p(\mathcal{T}_j) f(\mathcal{T}_j | M_j) \right] f(\sigma^2) \\ &= \left[\prod_{j=1}^m p(\mathcal{T}_j) \left[\prod_{i=1}^{b_j} f(\mu_{ij} | \mathcal{T}_j) \right] \right] f(\sigma^2) \end{aligned}$$

Essentially, the overall prior is split into three sub-priors:

- one for the tree structure (depth, size and splitting criteria), $p(\mathcal{T}_j)$
- another for the values in the terminal nodes conditional on the tree structure, $f(\mu_{ij} | \mathcal{T}_j)$,
- and a final one for the residual noise's variance, $f(\sigma^2)$.

A natural choice for Chipman, George and McCulloch is to impose a inverse Gamma distribution apriori to σ^2 , namely:

$$\sigma^2 \sim \mathcal{IG}\left(\frac{\nu}{2}, \frac{\nu\lambda}{2}\right) \Leftrightarrow \frac{\nu\lambda}{\sigma^2} \sim \mathcal{X}_\nu^2$$

In order to achieve high prior probability in regions of plausible values of σ^2 , a rough overestimate $\hat{\sigma}^2$ of σ^2 is used. BART offers two choices:

- the sample variance of y , $S_y^2 = \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2$,
- the residual variance from least squares regression on the y and \underline{x} , $\text{MSE} = \frac{1}{n-p} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2$.

Then, for a given probability $q \in (0, 1)$, the shape parameter, λ , can be derived from the relationship:

$$P(\sigma^2 \leq \hat{\sigma}^2) = q$$

as there are set of default choices for the degrees of freedom, ν , ranging from 3 to 10.

The choice of the prior on the leaf parameters, m_{ij} , is taken to be a conjugate normal distribution. Hence, we have that, $\forall j = 1, 2, \dots, m$ and $\forall i = 1, 2, \dots, b_j$:

$$\mu_{ij} | \mathcal{T}_j \sim \mathcal{N}(\xi_\mu, \sigma_\mu^2)$$

Regarding the choice of the hyper-parameters, BART deploys a strategy in order to ensure that the prior is defined with respect to the given data.

- m_{ij} apriori independent and iid \Rightarrow the instigated prior on $\mathbb{E}[y|x]$ is $\mathcal{N}(m\xi_\mu, m\sigma_\mu^2)$
- It is high probable to $\mathbb{E}[y|x] \in [y_{\min}, y_{\max}]$.
- The most proper hyper-parameters must satisfy:

$$P[G(\underline{x}) \in [y_{\min}, y_{\max}]] = a$$

where $G(\underline{x}) = \sum_{j=1}^m g(\underline{x}_k; \mathcal{T}_j, M_j)$ and a is a large probability.

Hence, if we let:

$$Z = \frac{G(\underline{x}) - m\xi_\mu}{\sqrt{m}\sigma_\mu}$$

subtract with $m\xi_\mu$ and divide with $\sqrt{m}\sigma_\mu$, BART conveniently determines the values of ξ_μ and σ_μ through the equations:

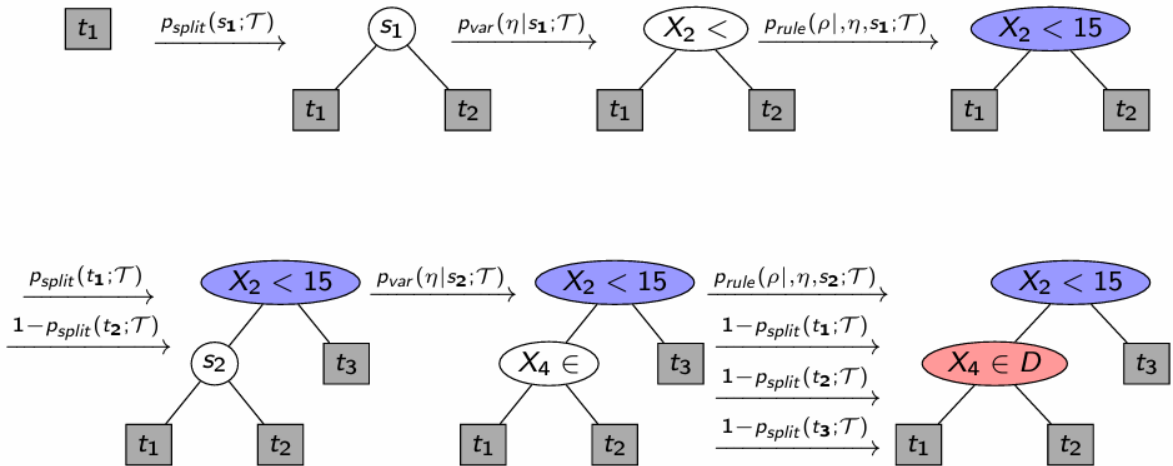
$$\frac{y_{\min} - m\xi_\mu}{\sqrt{m}\sigma_\mu} = -k \quad \text{and} \quad \frac{y_{\max} - m\xi_\mu}{\sqrt{m}\sigma_\mu} = k$$

for the cases of $k = 2, 3$ where the assigned probability is $a = 0.95, 0.975$ respectfully. Furthermore, for the sake of simplicity in calculating the posterior, a transformation of the response variable y is suggested in order to lie in the interval $(-0.5, 0.5)$.

$$\tilde{y} = \frac{y - \frac{y_{\min} + y_{\max}}{2}}{y_{\max} - y_{\min}}$$

With that assumption, setting $\xi_\mu = 0$, and therefore getting $\sigma_\mu = \frac{0.5}{k\sqrt{m}}$, BART has the ability to shrink all of the tree parameters towards zero, hence, controlling and diminishing their effect into the sum in equation 3.1.

Given the complex structure of a tree, an analytical closed-form of the prior, without heavy notation, is rather not feasible. However, BART, specifies the tree prior indirectly, through a tree-generating stochastic process whose each realization can be considered as a random draw from the prior. Hence, a random draw can be considered as a recursive sequence of steps in the following manner:



In other words, the tree prior can be determined and heavily influenced by the three distributions, p_{split} , p_{var} and p_{rule} . The distribution that refer to the split node, p_{var} and p_{rule} are defined over the set of (available) covariates, X_i , and over the set

of available observed values or category subsets. For practical reasons, Chipman, George and McCulloch set finite supports for both distributions in order to let the data influence the tree, hence they consider a discrete uniform as a choice for them.

It is preferable to employ more and more balanced or “bushy” trees into the fit and avoid ones that place more split nodes to one side only (to the TRUE or FALSE statement). Given a node v , and its depth d_v , namely, the number of split nodes above it to the root, a probability α and positive parameter β , we have:

$$p_{\text{split}}(v; \mathcal{T}) = \alpha(1 + d_v)^{-\beta}$$

Under this description we can deduce that:

- $p_{\text{split}} \searrow$ as $d_v \nearrow$.
- α encourages more earlier splits or creations of sub-trees
- β discourages the tree-generating process from continuing further

Regarding the choice for the two hyper parameters, all the relative literature follows a default choice of $\alpha = 0.95$ and $\beta = 2$. With that choice, we expect that the majority of the contributing trees will have 2 or 3 terminal leaves and deeper or single-node trees will render a small proportion.

3.2.3 Posterior evaluation and inference

Despite the complex size of the parameter space, which renders analytical calculation impossible, BART extracts information about the posterior through a Bayesian backfitting MCMC algorithm. In essence, this algorithm is a Gibbs sampler:

- m successive draws from $(\mathcal{T}_j, M_j) | \mathbb{T}_{-j}, \mathbb{M}_{-j}, \sigma^2, \underline{y}$
- a draw of σ^2 from $\sigma^2 | \mathcal{T}_1, M_1, \dots, \mathcal{T}_m, M_m, \underline{y}$.

Nonetheless it can be noticed that the pair (\mathcal{T}_j, M_j) is dependent on $\mathbb{T}_{-j}, \mathbb{M}_{-j}, \underline{y}$, on only through the partial residuals of the remaining $m - 1$ trees. Verily:

$$\underline{R}_j = \underline{y} - \sum_{I \neq j} g(X; \mathcal{T}_I, M_I)$$

where $g(X; \mathcal{T}_I, M_I) = [g(\underline{x}_1; \mathcal{T}_I, M_I), \dots, g(\underline{x}_n; \mathcal{T}_I, M_I)]^\top \in \mathbb{R}^{n \times 1}$. Consequently, the first step is simply drawing from the conditional posterior of $(\mathcal{T}_j, M_j) | \underline{R}_j, \sigma^2$ which can be carried out in two steps as it can be factorized in the form:

$$f((\mathcal{T}_j, M_j) | \underline{R}_j, \sigma^2) = p(\mathcal{T}_j | \underline{R}_j, \sigma^2) f(M_j | \underline{R}_j, \sigma^2)$$

As a result, a single iteration of the Gibbs sampler consists of $2m + 1$ consecutive draws as shown below:

$$\begin{aligned} 1 : \mathcal{T}_1 &\sim \mathcal{T}_1 | \underline{R}_1, \sigma^2 \\ 2 : M_1 &\sim M_1 | \mathcal{T}_1, \underline{R}_1, \sigma^2 \\ 3 : \mathcal{T}_2 &\sim \mathcal{T}_2 | \underline{R}_2, \sigma^2 \\ 4 : M_2 &\sim M_2 | \mathcal{T}_2, \underline{R}_2, \sigma^2 \\ &\vdots \\ 2m - 1 : \mathcal{T}_m &\sim \mathcal{T}_m | \underline{R}_m, \sigma^2 \\ 2m : M_m &\sim M_m | \mathcal{T}_m, \underline{R}_m, \sigma^2 \\ 2m + 1 : \sigma^2 &\sim \sigma^2 | \mathcal{T}_1, M_1, \dots, \mathcal{T}_m, M_m, \underline{y} \end{aligned}$$

First, as far as the conditional posterior of σ^2 is concerned, we have that:

$$\begin{aligned} f(\sigma^2 | \mathcal{T}_1, M_1, \dots, \mathcal{T}_m, M_m, \underline{\varepsilon}) &\propto f((\mathcal{T}_1, M_1), \dots, (\mathcal{T}_m, M_m), \sigma^2 | y) \\ &\propto f(\underline{y} | (\mathcal{T}_1, M_1), \dots, (\mathcal{T}_m, M_m)) \\ &\quad f((\mathcal{T}_1, M_1), \dots, (\mathcal{T}_m, M_m), \sigma^2) \\ &\propto f(\underline{y} | (\mathcal{T}_1, M_1), \dots, (\mathcal{T}_m, M_m)) f(\sigma^2) \end{aligned}$$

and then we end up in:

$$\sigma^2 | \mathcal{T}_1, M_1, \dots, \mathcal{T}_m, M_m, \underline{\varepsilon} \sim \mathcal{IG} \left(\frac{\nu + n}{2}, \frac{\nu\lambda + \sum_{k=1}^n (y_k - G(\underline{x}_k))^2}{2} \right)$$

Given the tree architecture, $\mathcal{T}_j, \sigma^2, R_j$ and the prior independence among the terminal nodes, the conditional posterior is considered to be in the form:

$$f(M_j | \mathcal{T}_j, \sigma^2, \underline{R}_j) = \prod_{i=1}^{b_j} f(\mu_{ij} | \mathcal{T}_j, \sigma^2, \underline{R}_j)$$

Hence, the quantities inside the product can be proportional to:

$$\begin{aligned} f(\mu_{ij} | \mathcal{T}_j, \sigma^2, \underline{R}_j) &\propto f(\mu_{ij}, \underline{R}_j | \mathcal{T}_j, \sigma^2) \\ &= f(\underline{R}_j | \mathcal{T}_j, \mu_{ij}, \sigma^2) f(\mu_{ij} | \mathcal{T}_j) p(\mathcal{T}_j) f(\sigma^2) \\ &\propto f(\underline{R}_j | \mathcal{T}_j, \mu_{ij}, \sigma^2) f(\mu_{ij} | \mathcal{T}_j) \end{aligned}$$

3.2.4 Probit BART for classification

3.3 Simulation study

3.3.1 Simulation study setup

3.3.2 Simulation mechanism

3.3.3 Demonstration of results

Βιβλιογραφία

- [AC93] James H. Albert, Siddhartha Chib: *\Bayesian analysis of binary and polychotomous response data*. Journal of the American statistical Association 88.422, 1993, pp. 669-679.
- [CGM10] Hugh A. Chipman, Edward I. George, Robert E. McCulloch: *BART: Bayesian additive regression trees*. 2010.
- [Fr01] Jerome H. Friedman: *Greedy function approximation: a gradient boosting machine*. Annals of statistics, 2001, pp. 1189-1232.
- [GG84] Stuart Geman, Donald Geman: *Stochastic relaxation, Gibbs distributions, and the Bayesian restoration of images*. IEEE, Transactions on pattern analysis and machine intelligence 6, 1984, pp. 721-741.
- [Ha70] Keith W. Hastings: *\Monte Carlo sampling methods using Markov chains and their applications*. 1970.
- [Kn97] Donald E. Knuth: *The art of computer programming*. Vol. 3, Pearson Education, 1997.
- [KB13] Adam Kapelner, Justin Bleich: *Bartmachine: Machine learning with bayesian additive regression trees*. arXiv preprint, arXiv:1312.2171, 2013.
- [SSM21] Rodney Sparapani, Charles Spanbauer, Robert McCulloch: *Nonparametric machine learning and efficient computation with Bayesian additive regression trees: the BART R package*. Journal of Statistical Software 97, 2021, pp. 1-66.
- [TR19] Yaoyuan V. Tan, Jason Roy: *Bayesian additive regression trees and the General BART model*. Statistics medicine 38.25, 2019, pp. 5048-5069.

Κεφάλαιο 4

Διαγράμματα Penrose στη γενική θεωρία της σχετικότητας

Στυλιανός Σβούρος, Ε.Κ.Π.Α., Τμ. Μαθηματικών

Περίληψη

Πώς μπορούμε στη θεωρία της Γενικής Σχετικότητας να αναπαραστήσουμε έναν χωροχρόνο σε ένα (πεπερασμένο) κομμάτι χαρτί; Στις δύο αυτές διαλέξεις θα απαντήσουμε σε αυτό το ερώτημα, μελετώντας μελανές οπές μέσω των διαγραμμάτων Penrose και τις πληροφορίες που μας δίνουν για τα διάφορα σύμπαντα, καθώς επίσης κι άλλα παράξενα φαινόμενα που μπορούν να αποκαλύψουν.

Γενικότερη κατηγορία. Γεωμετρία, Σχετικότητα, Φυσική.

4.1 Μελανές οπές

4.1.1 Γενικά

Αρχικά θα δούμε τη λύση Schwarzschild στις εξισώσεις Einstein.¹ Αυτή αποτελεί λύση κενού (εάν η μάζα θεωρηθεί ADM μάζα²) με μετρική:

$$g = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$$

¹Οι εξισώσεις πεδίου του Einstein είναι οι:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}$$

Με R συμβολίζουμε τον τανυστή της καμπυλότητας και με g τη μετρική Riemann. Με R συμβολίζουμε τη scalar καμπυλότητα και T είναι ο τανυστής ενέργειας-τάσης (stress-energy). Λ είναι η κοσμολογική σταθερά και $\kappa = 8\pi G/c^4$ η βαρυτική σταθερά του Einstein. **Παρεμπιπτόντως**, στα αθροίσματα θεωρούμε τη σύμβαση του Einstein.

²Ο ADM (Arnold-Deser-Misner) φορμαλισμός είναι ένας τρόπος να θεμελιωθεί η θεωρία της σχετικότητας. Σε έναν ασυμπτωτικά επίπεδο χωροχρόνο (π.χ. ένα σώμα στο σύμπαν), σπάζοντας τη μετρική του χωροχρόνου σε $3 + 1$ μέρη, παίρνουμε ένα που αντιστοιχεί στον χώρο κι ένα που αντιστοιχεί στον χρόνο. Αυτό το σπάσιμο συνοδεύεται με μία ποσότητα ενέργειας που οδηγεί σε μία μάζα.

όπου $m = G_N M$, με την M να είναι η μάζα της μελανής οπής. Η μελανή οπή είναι σφαιρικά συμμετρική λύση (χωρίς στροφορμή ή/και φορτίο) και είναι εκπεφρασμένη στις συντεταγμένες Schwarzschild (t, r, θ, φ) , $t \in \mathbb{R}$, $r > 0$, $\theta \in (0, \pi)$, $\varphi \in (0, 2\pi)$.³

Παρατήρηση 4.1. Για $r = 2m$, ο όρος $dr \otimes dr$ αποκλίνει, οπότε στην πραγματικότητα $r \in (0, 2m) \cup (2m, \infty)$.

Διάφορα ερωτήματα:

- Τι συμβαίνει όταν $r = 2m$;
- Τι ισχύει πέραν του $t \rightarrow \pm\infty$; Για να βγάλει νόημα αυτή η ερώτηση, αρκεί να θυμηθούμε ότι ένας χάρτης $\psi : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^4$ δεν καλύπτει απαραίτητα όλον τον χωροχρόνο \mathcal{M} . Δηλαδή, μπορούμε να παραμετροποιήσουμε το ψ ώστε να καλύπτει πεπερασμένο “μέρος” του \mathcal{M} και να καταλήγει σε άπειρο “κομμάτι” του \mathbb{R}^4 . Αναλόγως για $r \rightarrow \infty$.

Η απάντηση στα ερωτήματα αυτά θα έρθει μελετώντας όχι την ίδια τη μετρική εφαρμοσμένη ως προς ένα χάρτη, αλλά τη συμπεριφορά των “αμερόληπτων” γεωδαισιακών.

Ορισμός 4.1 (Null γεωδαισιακές). Καλούμε μία γεωδαισιακή γ null (ή φωτεινή) αν για την τετραταχύτητά της v_γ ισχύει $g(v_\gamma, v_\gamma) = 0$. Δηλαδή, μπορούν να θεωρούνται τροχιές ακτίνων φωτός, γι’ αυτό και η ονομασία.⁴

Η δράση⁵ για null γεωδαισιακές στον Schwarzschild χωροχρόνο (δηλαδή με την προηγούμενη μετρική) είναι:

$$S[\gamma] = \int \left[\left(1 - \frac{2m}{r}\right) \dot{t}^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 - r^2(\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) \right] d\lambda$$

Εδώ το λ είναι μία νέα παράμετρος (αφινική) ως προς την οποία έχουμε εκφράσει τις συναρτήσεις συντεταγμένων.

Ορισμός 4.2 (Ακτινικές γεωδαισιακές). Ορίζουμε ως ακτινικές γεωδαισιακές αυτές που κρατούν τα θ, φ σταθερά και κινούνται μόνο ακτινικά.

Από τη δράση, η t -εξίσωση κίνησης Euler είναι:

$$\frac{d}{d\lambda} \left[\left(1 - \frac{2m}{r}\right) \dot{t} \right] = 0 \Leftrightarrow \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \dot{t} = k = \text{σταθερά}$$

Χρησιμοποιώντας αυτή τη σχέση και τη συνθήκη των null γεωδαισιακών, μπορούμε να δείξουμε ότι η r μπορεί να θεωρηθεί αφινική παράμετρος. Για την ακρίβεια ισχύει $r = \pm k\lambda$, και αφού το k είναι σταθερά και το λ αφινική παράμετρος, το r είναι αφινική παράμετρος.

Μπορούμε επομένως να ορίσουμε $\tilde{t}_\pm(r) := t(\pm k\lambda)$ αντί του $t(\lambda)$.

- Για τη $\tilde{t}_+(r) = t(k\lambda)$:

$$\frac{d\tilde{t}_+}{dr} = \frac{dt}{d\lambda} \frac{d\lambda}{dr} = \frac{\dot{t}}{\dot{r}} = \frac{k}{1 - 2m/r} \Big/ k = \frac{r}{r - 2m}$$

άρα $\tilde{t}_+(r) = r + 2m \ln |r - 2m| + c_1$, c_1 σταθερά.

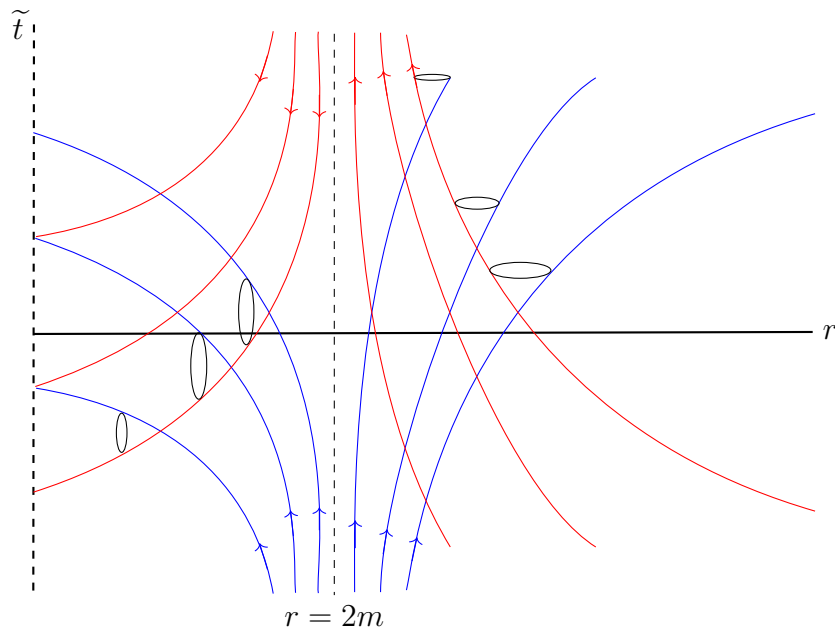
³Οι συντεταγμένες Schwarzschild είναι συντεταγμένες που συνήθως χρησιμοποιούνται σε πολλαπλότητες Lorentz (ημιριμάνιες με δείκτη μετρικής $(1, n-1)$) που είναι σφαιρικά συμμετρικοί χωροχρόνοι.

⁴Θυμηθείτε τον κώνο της ειδικής σχετικότητας ή τον μελλοντικό κώνο στην κυματική εξίσωση.

⁵Εν γένει η δράση είναι το ολοκλήρωμα της Lagrange-ιανής, της ποσότητας δηλαδή που κωδικοποιεί τη δυναμική του συστήματος. Η αρχή της ελάχιστης δράσης θα δώσει για την πρώτη μεταβολή ότι $\delta S = 0$.

- Για τη $\tilde{t}_-(r) = t(-k\lambda)$ αντίστοιχα παίρνουμε $\tilde{t}_-(r) = -r - 2m \ln |r - 2m| + c_2$, c_2 σταθερά.

Διαγραμματικά αναπαριστούμε τα παραπάνω ως εξής:



Εκ πρώτης όψεως, το διάγραμμα είναι παραπλανητικό, αφού η περιοχή για $r > 2m$ δεν φαίνεται να στέλνει γεωδαισιακές πέραν του $r = 2m$, γεγονός αντίθετο με αυτά που γνωρίζουμε για έναν ορίζοντα γεγονότων (δηλαδή $r = 2m$).⁶

Προϊδεαζόμαστε, λοιπόν, ότι χρησιμοποιώντας τον συγκεκριμένο χάρτη με τις Schwarzschild συντεταγμένες με χρόνο \tilde{t} , έχουμε χάσει οπτικά το παραπάνω γεγονός. Άρα, πιθανότατα, αυτό είναι ένα πρόβλημα που εύκολα επιλύεται με την αλλαγή χάρτη.

4.1.2 Συντεταγμένες Eddington-Finkelstein

Θέλουμε οι γεωδαισιακές με φορά προς τα έσω να περνούν στην περιοχή $r < 2m$ από την περιοχή $r > 2m$, και η ιδέα είναι οι συντεταγμένες που θα επιλέξουμε να κάνουν τις γεωδαισιακές να έχουν κλίσης -1 . Αυτό επιτυγχάνεται από τις συντεταγμένες Eddington-Finkelstein (E-F), για τις οποίες έχουμε:

$$\bar{t}(t, r, \theta, \varphi) := t + 2m \ln |r - 2m|$$

Εάν η σχέση αυτή επιλυθεί ως προς $t = \tilde{t}_-$ και αντικατασταθεί στη σχέση του $\tilde{t}_-(r)$, θα έχουμε:

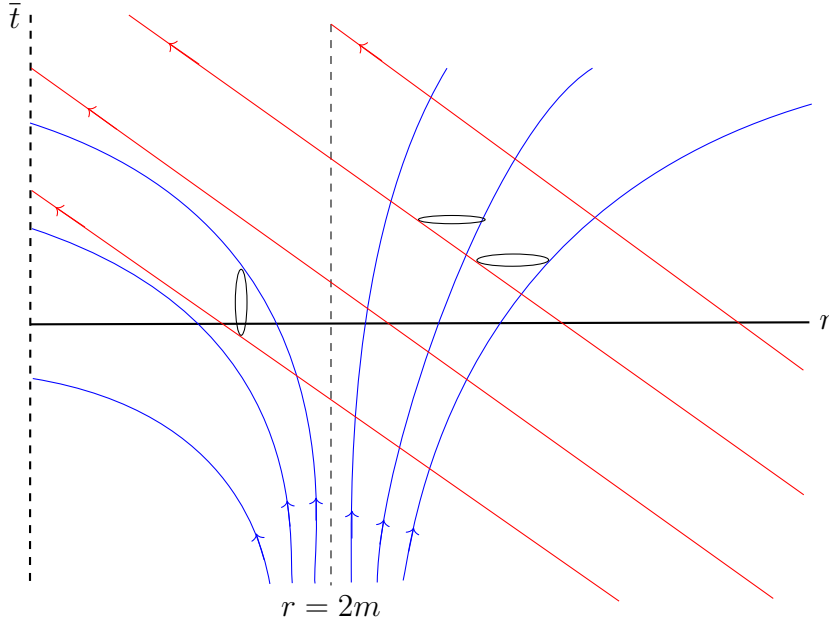
$$\bar{t}_- = -r + c_2$$

Δηλαδή, οι εισερχόμενες null γεωδαισιακές ευθειοποιήθηκαν με κλίση -1 . Επίσης, έχουμε:

$$\bar{t}_+ = r + 4m \ln |r - 2m| + c_1$$

που αποτελεί ένα rescaling των αρχικών null γεωδαισιακών με φορά προς τα έξω.

⁶Επίσης, οι μελλοντικοί κώνοι φαίνεται να αλλάζουν μέγεθος και να μην στέκονται όρθιοι.



Βλέποντας το νέο διάγραμμα, παρατηρούμε ότι το να πάρουμε $r = 2m$ δεν αποτελεί πρόβλημα. Οπότε μπορούμε να ορίσουμε έναν νέο χάρτη στο $V = U \cup \{r = 2m\}$.

Στο νέο διάγραμμα με την επισύναψη των παραπάνω σημείων, οι κώννοι φωτός για $r = 2m$ σχηματίζονται και έχουν τη δεξιά τους πλευρά καρακόρυφα (πάνω στο $r = 2m$). Αυτή είναι ακριβώς η συνθήκη του να υπάρχει οριζοντας στο $r = 2m$ και γι' αυτόν τον λόγο αποτελεί σημείο χωρίς επιστροφή.

Στην πραγματικότητα, ο E-F μετασχηματισμός μοιάζει να τραβάει τα σημεία του $t \rightarrow \infty$ προς τα κάτω και περισσότερο όσο πιο κοντά είμαστε στο $r = 2m$.

Συνοψίζοντας, ο E-F μετασχηματισμός είναι $\bar{t} = t + 2m \ln |r - 2m|$, $\bar{r} = r$, $\bar{\theta} = \theta$, $\bar{\varphi} = \varphi$. Η Schwarzschild μετρική σε συντεταγμένες E-F γίνεται:

$$g = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 - \frac{2m}{r} (d\bar{t} \otimes dr + dr \otimes d\bar{t}) - \left(1 + \frac{2m}{r}\right) dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$$

Με το παραπάνω επιβεβαιώνουμε ότι η $r = 2m$ μπορεί να ληφθεί.

4.1.3 Συντεταγμένες Kruskal-Szekeres

Στόχος μας τώρα είναι να πράξουμε κάτι ανάλογο για τις εξερχόμενες null γεωδαισιακές, δηλαδή να τις ευθυοποιήσουμε με κλίση 1. Εάν το επιτύχουμε αυτό, τότε οι κώννοι μας θα αποκτήσουμε καλή μορφή και θα στέκονται όρθιοι, με γωνία $\pi/2$.

Οι συντεταγμένες που το επιτυγχάνουν αυτό είναι οι συντεταγμένες Kruskal-Szekeres (K-S).

- Για $r > 2m$, ο μετασχηματισμός είναι:

$$\bar{t}(t, r, \theta, \varphi) := \left(\frac{r}{2m} - 1\right)^{1/2} e^{r/4m} \sinh \frac{t}{4m}$$

και:

$$\bar{r}(t, r, \theta, \varphi) := \left(\frac{r}{2m} - 1\right)^{1/2} e^{r/4m} \cosh \frac{t}{4m}$$

- Για $r < 2m$, έχουμε:

$$\bar{\bar{t}}(t, r, \theta, \varphi) := \left(1 - \frac{r}{2m}\right)^{1/2} e^{r/4m} \cosh \frac{t}{4m}$$

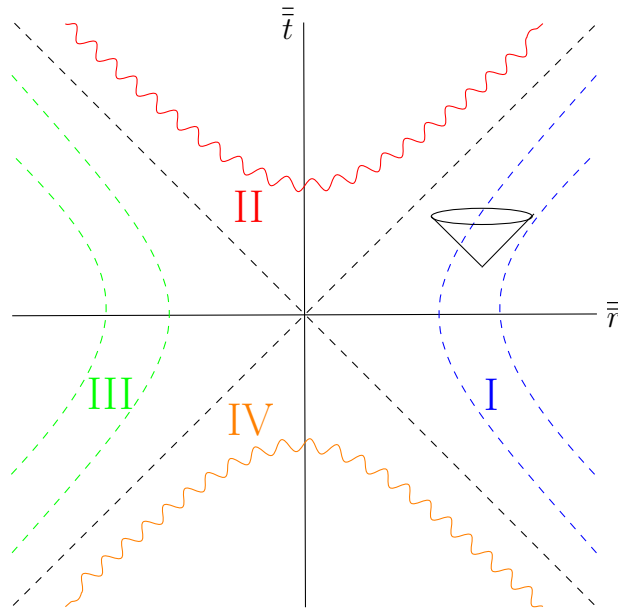
και:

$$\bar{\bar{r}}(t, r, \theta, \varphi) := \left(1 - \frac{r}{2m}\right)^{1/2} e^{r/4m} \sinh \frac{t}{4m}$$

Σε κάθε περίπτωση, τα θ, φ μένουν ως έχουν. Με πράξεις επαληθεύεται ότι:

$$\bar{\bar{t}}^2 - \bar{\bar{r}}^2 = \begin{cases} -k^2, & r > 2m \\ \ell^2, & r < 2m \end{cases} \quad \text{με } k, \ell \in \mathbb{R}$$

Το διάγραμμα που προκύπτει από την παραπάνω σχέση είναι ένα σύνολο υπερβολών. Το εκπληκτικό με τις K-S συντεταγμένες είναι ότι, εκτός από την ευθείοποίηση των εξερχόμενων null γεωδαισιακών, επιτυγχάνεται η καλύτερη δυνατή αναπαράσταση του Schwarzschild χωροχρόνου, με την εμφάνιση νέων περιοχών, που δεν ήταν εμφανείς στις προηγούμενες συντεταγμένες.



Αν συμπαγοποιήσουμε το διάγραμμα αυτό ως προς τις null άπειρο κατευθύνσεις, δηλαδή εκεί που ξεκινούν οι καταλήγουν οι γεωδαισιακές, έχουμε το αντίστοιχο διάγραμμα Penrose.⁷

Στο διάγραμμα αυτό η περιοχή I μπορεί να θεωρηθεί ότι είναι το σύμπαν μας (όπως και στα προηγούμενα διαγράμματα) και οι γραμμές με σταθερό r είναι οι υπερβολές που έχουν σχεδιαστεί. Η περιοχή II είναι η μελανή οπή, με την κυματιστή γραμμή να συμβολίζει την ιδιομορφία και το τμήμα μεταξύ της γραμμής και των διαγωνίων να είναι το μόνο που αποτελεί κομμάτι του χωροχρόνου μας⁸. Η περιοχή III είναι ένα σύμπαν που δεν φαίνεται να συνδέεται αιτιακά με το δικό μας. Η περιοχή IV είναι η λεγόμενη λευκή οπή, από την οποία όλες οι αιτιακές γεωδαισιακές (null ή χρονοειδείς⁹) είναι εξερχόμενες προς τις περιοχές I και III. Αυτό σημαίνει ότι ένας παρατηρητής στις I ή III μπορεί να δει την ιδιομορφία της. Εκεί οι υπερβολές αντιστοιχούν σε σταθερό t .

⁷Μεταξύ άλλων, οι κώνοι τώρα έχουν γίνει όρθιοι.

⁸Δηλαδή όχι η κυματιστή γραμμή.

⁹Δηλαδή $g(v_\gamma, v_\gamma) = 0$ ή $g(v_\gamma, v_\gamma) > 0$.

Στην αρχή των αξόνων υπάρχει μία αλλαγή στην τοπολογία του χώρου και αυτό είναι πολύ σημαντικό, διότι σημαίνει ότι δεν είναι δυνατόν να βρεθεί ένας παρατηρητής σε αυτό, καθώς θα πρέπει να ξεπεράσει την ταχύτητα του φωτός για να το κατορθώσει. Αυτό είναι ένα στιγμιαίο γεγονός (δεν μπορούμε να αντιληφθούμε χρόνο εκεί). Η αρχή των αξόνων ονομάζεται γέφυρα Einstein-Rosen.

4.1.4 Μελανές οπές Kerr

Οι μελανές οπές Kerr έχουν στροφορμή αλλά όχι φορτίο.¹⁰ Συνεπώς, εφόσον η ιδιομορφία περιέχει την πληροφορία της οπής, λόγω της περιστροφής, η ιδιομορφία δεν είναι ένα σημείο, αλλά ένα απειροστά λεπτό δακτυλίδι μη μηδενικής ακτίνας. Αυτό είναι το λεγόμενο ring singularity.

Ένας ισχυρισμός εδώ είναι ότι ο παρατηρητής μπορεί να αποφύγει το ring singularity και να περάσει από τον δίσκο που την περιφράσσει, και να εξέλθει σε ένα αντι-σύμπαν.

Οι Kerr μελανές οπές έχουν, επίσης, δύο οριζόντες γεγονότων και κανείς μπορεί να τις διανύσει χωρίς να πέσει στην ιδιομορφία, βγαίνοντας σε άλλο σύμπαν.

4.2 Διαγράμματα Penrose

4.2.1 Η κατασκευή των διαγραμμάτων

Σκοπός μας στη συνέχεια είναι να κατασκευάσουμε μία “ουσιώδη” εικόνα ενός ολόκληρου χωροχρόνου σε ένα πεπερασμένο κομμάτι χαρτί. Για τους χωροχρόνους που αυτό είναι εφικτό, το προκύπτον διάγραμμα ονομάζεται διάγραμμα Penrose ή διάγραμμα Penrose-Carter.

Προφανώς, κάνοντας αυτόν τον περιορισμό στον πεπερασμένο “καμβά” μας, θα χρειαστούν μερικοί συμβιβασμοί. Θα κρατήσουμε ότι οι κλίσεις των null γεωδαισιακών πρέπει να είναι ± 1 , το οποίο είναι χαρακτηριστική αρχή για την καλύτερη κατασκευή του διαγράμματος.¹¹

Παρακάτω περιγράφουμε τα στάδια κατασκευής του διαγράμματος. Σημειώστε ότι δεν είναι απόλυτα, αλλά είναι εύχρηστα για απλούς χωροχρόνους και η βάση για πιο σύνθετους.

- i. Αρχικά παίρνουμε τη μετρική του χωροχρόνου που θέλουμε να σχεδιάσουμε, εκπεφρασμένη ως προς κάποιον χάρτη και σημειώνουμε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων συντεταγμένων. Αρκετές φορές είναι χρήσιμο να κοιτάμε πως οι συνδιασμοί συντεταγμένων περιορίζονται.
- ii. Βρίσκουμε δύο νέες null συντεταγμένες¹² (πιθανότατα μη-συμπαγείς) που αντικαθιστούν δύο από τις αρχικές μας μη-συμπαγείς συντεταγμένες.

¹⁰Μέχρι τώρα έχουμε δει μονάχα τις μαύρες οπές του Schwarzschild, δηλαδή τις μαύρες οπές που προκύπτουν από την μελέτη της λύσης Schwarzschild, των εξισώσεων του Einstein. Οι μαύρες οπές Schwarzschild έχουν μάζα αλλά όχι στροφορμή ή φορτίο. Υπάρχουν κι άλλες λύσεις, που οδηγούν σε άλλες μαύρες οπές, όπως είναι η Kerr. Εν γένει, υπάρχει το εξής θεώρημα:

Θεώρημα 4.1. Όλες οι μαύρες οπές που προκύπτουν από τις εξισώσεις των Einstein και Maxwell χαρακτηρίζονται πλήρως (πλην κβαντικών φαινομένων) από τη μάζα, τη στροφορμή και το ηλεκτρικό τους φορτίο.

¹¹Επίσης οι κώνοι φωτός θα στέκονται όρθιοι.

¹²Είναι συντεταγμένες που σέβονται τη φυσική των κώνων, δηλαδή δύο γεγονότα στο σύνορο ενός κώνου έχουν απόσταση μηδέν $ds = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = 0$. Δηλαδή, εάν u είναι ο χάρτης, $g(\partial/\partial u, \partial/\partial u) = 0$.

- iii. Κάνουμε συμπαγοποίηση των δύο null συντεταγμένων v, w ξεχωριστά, δηλαδή θέτουμε:

$$p := \arctan v, \quad q := \arctan(w)$$

Τότε οι (p, q) παίρνουν τιμές σε υποσύνολο του $[-\pi/2, \pi/2]^2$.

- iv. Ορίζουμε νέα χρονική και χωρική συντεταγμένη:

$$T := p + q, \quad X := p - q$$

- v. Εκφράζουμε τη g συναρτήσει των συντεταγμένων¹³ $(T, X, \diamond, \diamond)$.

- vi. Αν η g έχει τη μορφή:¹⁴

$$g = \Omega^{-2}(T, X, \diamond, \diamond)(dT \otimes dT - dX \otimes dX - R(T, X)(d\diamond \otimes d\diamond))$$

τότε σχηματίζουμε την:

$$g_{\text{diagram}} = dT \otimes dT - dX \otimes dX$$

Παρατήρηση 4.2.

- Η σημασία του βήματος ii. είναι ότι διατηρεί τη δομή των κόνων. Δηλαδή, η συμπίεση και το rescaling των συντεταγμένων δεν αλληιάζει τις γωνίες των κόνων, σε αντίθεση με άλλες συντεταγμένες (χρονοειδείς ή χωροειδείς).
- Στο βήμα vi., αγνοώντας τον παράγοντα Ω^{-2} που είναι σύμμορφος, δεν αλληιάζουν οι null γεωδαισιακές, άρα και οι κώνοι φωτός. Θα αλληιάξουν όμως οι χρονοειδείς και χωροειδείς γεωδαισιακές (αυτό όμως δεν μας πειράζει, αφού οι αιτιακές σχέσεις δεν αλληιάζουν).
- Σχεδιάζουμε την g_{diagram} , καθώς στις δύο διαστάσεις όλα είναι απλούστερα. Μετά εισάγουμε ό,τι αφήσαμε. Δηλαδή, είναι σαν να θεωρούμε ότι σε κάθε σημείο του διδιάστατου διαγράμματος υπάρχει προσκολλημένος ένας χώρος που έχει μετρική το κομμάτι της g που παραλείψαμε (δηλαδή το $R(T, X)(d\diamond \oplus d\diamond)$).

Πρόταση 4.1. Μία καμπύλη γ είναι null γεωδαισιακή ως προς τη μετρική g εάν και μόνο αν είναι null γεωδαισιακή ως προς την $\Omega^2 g$, όπου η $\Omega \in C^\infty(\mathcal{M}; \mathbb{R})$ είναι παντού μη-μηδενική.

Απόδειξη. Έστω $\nabla, \tilde{\nabla}$ οι συνοχές των g και $\Omega^2 g$ αντίστοιχα. Έστω καμπύλη $\gamma : (0, 1) \rightarrow \mathcal{M}$ και X το εφαπτόμενο διανυσματικό της πεδίο

(\Rightarrow) Έστω ότι η γ είναι αφφινικά παραμετροποιημένη null γεωδαισιακή ως προς την g . Δηλαδή, $\nabla_X X = 0$. Έχουμε:¹⁵

$$\begin{aligned} (\tilde{\nabla}_X X)^a &= X^b \frac{\partial}{\partial x^a} X^a + \tilde{\Gamma}_{cb}^a X^b X^c \\ &= X^b \frac{\partial}{\partial x^a} X^a + \frac{1}{2\Omega^2} g^{ab} [(\Omega^2 g)_{cd,b} + (\Omega^2 g)_{bd,c} - (\Omega^2 g)_{bc,d}] X^b X^c \end{aligned}$$

¹³Με \diamond συμβολίζουμε τις υπόλοιπες συντεταγμένες, που είναι οι αρχικές και δεν έχουν αλλάξει.

¹⁴Για κάποια $\Omega \in C^\infty(\mathcal{M}; \mathbb{R})$.

¹⁵Ο όρος με τελεία έχει πάθει contraction.

Ο δεύτερος όρος της προηγούμενης σχέσης είναι ίσος με:

$$\frac{1}{2\Omega^2} g^{ad} [2\Omega^2_{,b} g^{cd} - \Omega^2_{,d} g_{bc}] X^b X^c + \frac{1}{2} g^{ad} [g_{cd,b} + g_{bd,c} - g_{bc,d}] X^c X^d$$

Ο τελευταίος όρος της τελευταίας σχέσης μαζί με τον $X^b \partial / \partial x^b X^a$ δίνουν $\nabla_X X$, που είναι μηδέν.

Μένει λοιπόν:

$$(\widetilde{\nabla}_X X)^a = \frac{1}{2\Omega^2} g^{ad} [2\Omega^2_{,b} g_{cd} - \Omega^2_{,d} g_{bc}] X^b X^c$$

όμως $g_{bc} X^b X^c = g(X, X) = 0$, αφού η g είναι null γεωδαισιακή της g (εδώ φαίνεται γιατί το επιχείρημα λειτουργεί μόνο για null γεωδαισιακές).

Για τον πρώτο όρο της τελευταίας σχέσης έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Omega^2} g^{ad} g_{cd} \Omega^2_{,b} X^b X^c &= \frac{2}{\Omega} \Omega_{,b} X^b X^a \\ &= 2X(2 \ln \Omega) X^a \\ &=: AX \end{aligned}$$

άρα έχουμε $(\widetilde{\nabla}_X X)^a = AX^a$, που είναι ακριβώς η εξίσωση μίας γεωδαισιακής που δεν έχει παραμετροποιηθεί αφηνικά και γι' αυτόν τον λόγο δεν είναι μηδέν. Το ότι είναι null γεωδαισιακή είναι φανερό, αφού:

$$(\Omega^2 g)(X, X) = \Omega^2 g(X, X) = 0$$

Ο ίδιος υπολογισμός αντίστροφα δίνει το (\Leftarrow). □

4.2.2 Χωροχρόνος Minkowski

Η απλούστερη λύση των εξισώσεων Einstein είναι ο χωροχρόνος Minkowski (στο κενό). Για τις συντεταγμένες του ισχύει $t \in (-\infty, \infty)$, $r \in (0, \infty)$, $\theta \in (0, \pi)$, $\varphi \in (0, 2\pi)$ και η μετρική είναι:

$$g_{\text{Mink}} = dt^2 - dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$$

4.2.3 Διαγράμματα Penrose σε χωροχρόνο Schwarzschild

4.2.4 Διαγράμματα Penrose σε χωροχρόνο Kerr

4.2.5 Βαρυτική κατάρρευση

4.2.6 Ομογενές και ισοτροπικό σύμπαν

Βιβλιογραφία

[Wa84] R. M. Wald: *General Relativity*. University of Chicago Press, 1984.

[Sc15] F. P. Schuller: *The WE-Heraeus International Winter School on Gravity and Light*. Universität Erlangen-Nürnberg, Institut für Theoretische Physik III, 2015.

Κεφάλαιο 5

Analysis of time-to-event and longitudinal data: A multi-state modeling approach

Χρυσούλα Τσιμετζόγλου, Ε.Κ.Π.Α., Τμ. Μαθηματικών

Περίληψη

In medical research, Survival Analysis and Longitudinal Data Analysis are distinct statistical fields used to study time-evolving data. However, the complexity of processes, such as disease progression, necessitates a joint analysis of time-to event and longitudinal data. By employing multi-state modeling, transitions between different disease states can be effectively modeled over time. Incorporating longitudinal data | such as repeated measurements of patient characteristics or biomarkers | further enhances this modeling, providing deeper insights into these transitions. This joint approach allows for a comprehensive assessment of how baseline and time-varying factors influence the risks of moving between states, thereby improving the understanding of disease progression patterns and enhancing predictions for clinical outcomes.

Γενικότερη κατηγορία. Βιοστατιστική, Data analysis, Survival analysis

Βιβλιογραφία

- [AK02] P. K. Andersen, N. Keiding: *Multi-state models for event history analysis*. Statistical Methods in Medical Research, 2002.
- [Co14] D. Collet: *Survival Data in Medical Research*. Third edition, CRC, 2014.
- [Di02] P. J. Diggle: *Analysis of Longitudinal Data*. Springer, 2005.
- [Ho99] P. Hougaard: *Multistate Models: A Review*. Life Data Analysis, 5, Springer, 1999, pp. 239-264.
- [Kl05] J. Klein et al.: *Handbook of Survival Analysis*. CRC, 2014.
- [Ra22] J. Le-Rademacher et al.: *The Utility of Multistate Models: A Flexible Framework for Time-to-Event Data*. Epidemiologic Methods, 2022.
- [We05] R. Weiss: *Modeling Longitudinal Data*. Springer, 2005.

