

Σύντομες Σημειώσεις και Ασκήσεις

Για την Β' Γυμνασίου.

Φράγκος Αναστάσιος

2023

Περιεχόμενα

1. Εξισώσεις και σχέσεις (5)

1.1. Θεωρία (5)

1.1.1. Σχέσεις μέσω μοτίβων (5)

1.1.2. Σχέσεις μέσω εξισώσεων με πολλές μεταβλητές (8)

1.2. Ασκήσεις (-)

2. – (-)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Εξισώσεις και Σχέσεις

1.1 Θεωρία

1.1.1 Σχέσεις μέσω μοτίβων

Στις εξισώσεις ως τώρα μας ενδιέφεραν **αλγεβρικές παραστάσεις** με **έναν άγνωστο**, τις οποίες μπορούσαμε να **λύσουμε** και βρίσκαμε **όλες** τις λύσεις.

Δηλαδή, ως τώρα, στις εξισώσεις μας είχαμε:

- Μία αλγεβρική παράσταση (με ισότητα),
- Έναν άγνωστο,
- Και μπορούσαμε να βρούμε όλες τις λύσεις της εξίσωσης.

Υπενθυμίζουμε ότι:

{ Αλγεβρική παράσταση είναι μία αλληλουχία πράξεων με αγνώστους και αριθμούς. Για παράδειγμα, η:

$$x^3 + 5x - y - 2$$

} είναι μία αλγεβρική παράσταση.

Στις εξισώσεις, οι αλγεβρικές παραστάσεις εμφανίζονται με $=$, για παράδειγμα:

$$x^2 + x + 1 = 0$$

Από εδώ και στο εξής, θα προσπαθήσουμε να γενικεύσουμε την έννοια της εξίσωσης μέσω των **σχέσεων**.

Αν προσπαθήσουμε να φτιάξουμε εξισώσεις με δύο αγνώστους, για παράδειγμα:

$$x + y = 0$$

θα παρατηρήσουμε σε αυτές δεν μπορούμε να βρούμε όλες τις λύσεις. Όλα τα παρακάτω (και πολλά ακόμα) είναι λύσεις της εξίσωσης.

$$\begin{array}{ll} x = 0 & y = 0 \\ x = 1 & y = -1 \\ x = 2 & y = -2 \end{array}$$

$$x = 3 \quad y = -3$$

και ούτω καθεξής. Παρόλο που δεν μπορούμε να βρούμε όμως όλες τις λύσεις, σίγουρα μπορούμε να τις περιγράψουμε. Το y σχετίζεται με το x , και μάλιστα:

$$y = -x$$

Αυτή η σχέση θα προέκυπτε κιόλας αν λύναμε την $x + y = 0$ ως εξίσωση ως προς x (δηλαδή απομονώνουμε το x).

Μερικές φορές, επειδή στις σχέσεις οι άγνωστοι μπορούν να αλλάζουν, να **μεταβάλλονται** (και γενικά να παίρνουν πολλές τιμές), τους ονομάζουμε και **μεταβλητές**.

Φυσικά το ίδιο θα μπορούσαμε να κάνουμε και με εξισώσεις με παραπάνω αγνώστους, μόνο εκεί η κατάσταση θα ήταν περισσότερο περίπλοκη.

$$x + y + z = 0$$

Είναι πολύ ενδιαφέρον ότι οι σχέσεις εμφανίζονται κατά κόρον στη **φυσική**.

Παράδειγμα: Μία μύγα ταξιδεύει με ταχύτητα 10km/h (10 χιλιόμετρα την ώρα). Δηλαδή:

Μετά από 1 ώρα, έχει διανύσει 10km ,

Μετά από 2 ώρες, έχει διανύσει 20km ,

Μετά από 3 ώρες, έχει διανύσει 30km και ούτω καθεξής.

Αν κάποιος μας ρωτούσε μετά από 4 ώρες πόσα km έχει διανύσει η μύγα, θα μπορούσαμε να απαντήσουμε, γιατί εκεί εντοπίζουμε ένα μοτίβο.

$$\text{Απόσταση} = 10 \cdot \text{Ώρες}$$

Οπότε, σε 4 ώρες θα έχει διανύσει 40km .

Πάντως, αν συμβολίσουμε **A** = Απόσταση και **ω** = Ώρες, θα μπορούμε να γράψουμε:

$$A = 10 \cdot \omega$$

Αυτή είναι μία **σχέση**, που προέκυψε φυσιολογικά από ένα φυσικό πρόβλημα.

Παράδειγμα: Στην χημεία υπάρχουν αντιδράσεις (φυσικές διαδικασίες που γίνονται μεταξύ ουσιών) που γίνονται αργά. Για να επιταχυνθούν, συνήθως προστίθεται ακόμη μία ουσία, που λέγεται καταλύτης. Για μία αντίδραση κάποιοι χημικοί παρατήρησαν:

Με 1gr (1 γραμμάριο) καταλύτη, η αντίδραση τελειώνει σε 10sec (10 δευτερόλεπτα),

Με 2gr καταλύτη, η αντίδραση τελειώνει σε 10/2sec,

Με 3gr καταλύτη, η αντίδραση τελειώνει σε 10/3sec,

Με 4gr καταλύτη, η αντίδραση τελειώνει σε 10/4sec,

Με 5gr καταλύτη, η αντίδραση τελειώνει σε 10/5sec, και ούτω καθεξής.

Και πάλι, εδώ μπορούμε να εντοπίσουμε το εξής μοτίβο:

$$\text{Χρόνος αντίδρασης} = \frac{10}{\text{Γραμμάρια καταλύτη}}$$

οπότε, αν κανείς ρωτήσει σε πόσο χρόνο ολοκληρώνεται η αντίδραση αν βάλουμε 10gr καταλύτη, η απάντηση θα είναι:

$$\frac{10}{10} = 1$$

δευτερόλεπτο. Γενικά πάντως, αν συμβολίσουμε X = Χρόνος αντίδρασης και γ = Γραμμάρια καταλύτη, θα έχουμε:

$$X = \frac{10}{\gamma}$$

το οποίο, και πάλι, είναι μία **σχέση** που προέκυψε από φυσικό πρόβλημα.



1.1.2 Σχέσεις μέσω εξισώσεων με πολλές μεταβλητές

Πάντως, πολλές φορές οι σχέσεις εμφανίζονται μέσω εξισώσεων και **δεν** προκύπτουν απλώς παρατηρώντας μοτίβα. Εξάλλου, η παρατήρηση ενός μοτίβου **δεν** είναι απόδειξη ότι το μοτίβο πράγματι είναι αυτό. Για να γίνουμε σαφείς, δίνουμε το παράδειγμα:

Παράδειγμα: Υποθέτουμε ότι έχουμε το ακόλουθο μοτίβο (την αρχή του μοτίβου) για τα X και ω :

Όταν το ω γίνεται 1, το X γίνεται 2,

Όταν το ω γίνεται 2, το X γίνεται 3,

Όταν το ω γίνεται 3, το X γίνεται 4.

Φαίνεται ότι το μοτίβο είναι το εξής:

$$X = \omega + 1$$

αφού το X είναι κατά 1 μεγαλύτερο από το ω . Παρόλα αυτά, δεν είμαστε σίγουροι για το μοτίβο, θα μπορούσε να συνέχιζε με τον εξής τρόπο:

Όταν το ω γίνεται 4, το X γίνεται 11.

Το καινούριο μοτίβο, με την επιπλέον πληροφορία που γράψαμε παραπάνω, δεν είναι πλέον τόσο απλό. Μάλιστα, η σχέση του μοτίβου τώρα είναι η:

$$X = (\omega - 1) \cdot (\omega - 2) \cdot (\omega - 3) + \omega + 1$$

Ελέγξτε ότι πράγματι αυτή είναι σχέση για το μοτίβο:

Όταν το ω γίνεται 1, το X γίνεται 2,

Όταν το ω γίνεται 2, το X γίνεται 3,

Όταν το ω γίνεται 3, το X γίνεται 4.

Όταν το ω γίνεται 4, το X γίνεται 11.

Εμείς λοιπόν, πώς είναι δυνατόν να λύνουμε ασκήσεις αφού δεν μπορούμε να είμαστε σίγουροι για το μοτίβο;

Σύμβαση: Όταν (σε μία άσκηση) εμφανίζεται ένα μοτίβο, εμείς θα υποθέτουμε ότι το μοτίβο αυτό συνεχίζεται με τον απλούστερο δυνατό τρόπο.

Ο μόνος τρόπος να ξέρουμε ακριβώς το μοτίβο, είναι να το **αποδείξουμε** με μαθηματικά. Κι όταν το κάνουμε αυτό, θα εμφανιστούν εξισώσεις με πολλούς αγνώστους, τις οποίες εμείς θα θέλουμε να φέρουμε σε **απλή μορφή**.

Γι' αυτό, προς το παρόν, θα αναφερθούμε στην **απλοποίηση αλγεβρικών παραστάσεων**.

Μία παράσταση αποκτά απλούστερη μορφή όταν όλες οι πράξεις που μπορούν να γίνουν, έχουν εκτελεστεί. Για παράδειγμα, η:

$$x + x + 1$$

δεν είναι απλοποιημένη, αφού μπορούμε να μαζέψουμε τα x .

$$2x + 1$$

Μαζεύοντας τα x , προκύπτει μία απλοποιημένη παράσταση, που δεν απλοποιείται άλλο. Η πρόσθεση δεν μπορεί να γίνει, αφού κάτι τέτοιο θα προϋπέθετε να ξέρουμε την τιμή του x .

Θα λέμε ότι μία αλγεβρική παράσταση **απλοποιείται, εάν είναι δυνατόν να γίνει κάποια πράξη (είτε με μεταβλητές, είτε με αριθμούς) σε αυτήν, ή απαλοιφή κάποιας παρένθεσης.**

Η απαλοιφή παρενθέσεων είναι κι αυτός ένας τρόπος να απλοποιηθεί μία παράσταση. Για παράδειγμα, από την **επιμεριστική ιδιότητα**, η αλγεβρική παράσταση:

$$x \cdot (x + 1)$$

μπορεί να γραφεί:

$$x^2 + x$$

Φυσικά, μία αλγεβρική παράσταση μπορεί να έχει και περισσότερες μεταβλητές:

$$2x - x^2 - 5y + x + y^8 + y$$

Σε αυτήν την περίπτωση, και πάλι για να την απλοποιήσουμε, κάνουμε όσες πράξεις είναι δυνατόν να γίνουν. Στο παραπάνω παράδειγμα, μπορούμε για αρχή να κάνουμε $2x + x = 3x$.

$$3x - x^2 - 5y + y^8 + y$$

Έπειτα, την πράξη $-5y + y = -4y$.

$$3x - x^2 - 4y + y^8$$

Σε αυτό το σημείο σταματάμε. Πράξεις μεταξύ των x και y δεν είναι δυνατόν να γίνουν, αφού αυτό θα προϋπέθετε ότι ξέρουμε τις τιμές τους.

{

Αυτό που χρειάζεται να προσέξουμε είναι ότι, όπως και στις πράξεις με αριθμούς, οι μεταβλητές μπορούν να συνοδεύονται με $-$ μπροστά τους. Δεν το ξεχνάμε, όταν κάνουμε πράξεις.

}

Προσέχουμε λοιπόν και **δεν** γράφουμε $1 - 4x + x = 1 - 5x$. Το **σωστό** είναι $1 - 4x + x = 1 - 3x$, αφού $-4x + x = -3x$.

Επίσης, μερικές φορές είναι δύσκολο να αναφερόμαστε σε μεγάλες αλγεβρικές παραστάσεις. Γι' αυτό, πολλές φορές τους δίνουμε ένα όνομα, για παράδειγμα:

$$P = 3x - x^2 - 5y + y^8 + y$$

1.2 Ασκήσεις

Άσκηση 1: Ένα αυτοκίνητο κινείται με $90km/h$ (90 χιλιόμετρα την ώρα) σε έναν δρόμο. Δηλαδή,

Μετά από 1 ώρα, έχει διανύσει $90km$,

Μετά από 2 ώρες, έχει διανύσει $180km$,

Μετά από 3 ώρες, έχει διανύσει $270km$ και ούτω καθεξής.

- 1) Μετά από 10 ώρες, πόσα km θα έχει διανύσει;
- 2) Αν με ω συμβολίσουμε τις ώρες και με X την απόσταση σε km , να βρείτε μία **σχέση** από την οποία, αν ξέρουμε το ω , θα μπορούμε να βρούμε το X .

Λύση:

- 1) Παρατηρούμε ότι τα χιλιόμετρα που διανύει είναι, σε κάθε περίπτωση, 90 φορές την ώρα που πέρασε. Δηλαδή, σε 10 ώρες θα έχει διανύσει:

$$90 \cdot 10 = 900$$

χιλιόμετρα.

- 2) Περιγραφικά, η σχέση που υπάρχει (και που βλέπουμε από τα δεδομένα) είναι:

$$\text{Χιλιόμετρα} = 90 \cdot \text{Ώρα που πέρασε}$$

δηλαδή, αν χρησιμοποιήσουμε τα σύμβολα:

$$X = 90 \cdot \omega$$

Άσκηση 2: Οι εργάτες σε μία οικοδομή έχουν παρατηρήσει ότι η δουλειά τελειώνει γρηγορότερα όταν περισσότεροι δουλεύουν. Συγκριμένα έχουν παρατηρήσει ότι:

Αν δουλεύει 1 εργάτης, η οικοδομή κτίζεται σε 127 ημέρες,

Αν δουλεύουν 2 εργάτες, η οικοδομή κτίζεται σε $127/2$ ημέρες,

Αν δουλεύουν 3 εργάτες, η οικοδομή κτίζεται σε $127/3$ ημέρες,

Αν δουλεύουν 4 εργάτες, η οικοδομή κτίζεται σε $127/4$ ημέρες, και ούτω καθεξής.

- 1) Αν δουλεύουν 127 εργάτες, σε πόσες μέρες θα τελειώσει η οικοδομή;
- 2) Αν με ε συμβολίσουμε το πλήθος των εργατών και με H τις ημέρες, να βρείτε μία **σχέση** από την οποία, αν γνωρίζουμε το ε , θα μπορούμε να βρούμε το H .

Λύση:

- 1) Παρατηρούμε ότι η οικοδομή ολοκληρώνεται, σε κάθε περίπτωση, σε χρόνο 127 ημερών διά το πλήθος των εργατών. Επομένως, αν έχουμε, 127 εργάτες, η διάρκεια της κατασκευής θα είναι:

$$127/127 = 1$$

ημέρα.

- 2) Περιγραφικά, η σχέση που υπάρχει (και που βλέπουμε από τα δεδομένα) είναι:

$$\text{Ημέρες} = \frac{127}{\text{Πλήθος των εργατών}}$$

δηλαδή, αν χρησιμοποιήσουμε τα σύμβολα:

$$H = \frac{127}{\varepsilon}$$

Άσκηση 3: Ένας βιολόγος έβαλε σε καλλιέργεια (καλλιέργεια είναι το φαγητό για τα μικρόβια) 1 μικρόβιο. Παρατήρησε τα εξής:

Σε 1 ώρα, τα μικρόβια είχαν γίνει 2,

Σε 2 ώρες, τα μικρόβια είχαν γίνει 4,

Σε 3 ώρες, τα μικρόβια είχαν γίνει 8,

Σε 4 ώρες, τα μικρόβια είχαν γίνει 16,

Σε 5 ώρες, τα μικρόβια είχαν γίνει 32 και ούτω καθεξής.

- 1) Σε 9 ώρες, πόσα θα έχουν γίνει τα μικρόβια;
- 2) Αν με ω συμβολίσουμε τις ώρες και με N το πλήθος των μικροβίων, να βρείτε μία **σχέση** από την οποία, αν γνωρίζουμε το ω , θα μπορούμε να βρούμε το N .

Λύση:

- 1) Αν αναδιατυπώσουμε λίγο τα δεδομένα, μπορούμε να γράψουμε:

Σε 1 ώρα, τα μικρόβια είχαν γίνει 2,

Σε 2 ώρες, τα μικρόβια είχαν γίνει $2 \cdot 2$,

Σε 3 ώρες, τα μικρόβια είχαν γίνει $2 \cdot 2 \cdot 2$,

Σε 4 ώρες, τα μικρόβια είχαν γίνει $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$,

Σε 5 ώρες, τα μικρόβια είχαν γίνει $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ και ούτω καθεξής.

Οπότε, μετά από 9 ώρες θα έχουμε:

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^9 = 512$$

μικρόβια.

- 2) Περιγραφικά, η σχέση που υπάρχει (και που βλέπουμε από τα δεδομένα) είναι:

$$\text{Μικρόβια} = 2^{\text{Ώρα που πέρασε}}$$

δηλαδή, αν χρησιμοποιήσουμε τα σύμβολα:

$$N = 2^{\omega}$$

Άσκηση 4: Να απλοποιηθεί η παράσταση:

$$5x^3 + x^4 \cdot x - 9x^8 - 2 + x^8$$

Λύση: *Βήμα I:* Κάνουμε τον πολλαπλασιασμό $x^4 \cdot x = x^5$.

$$5x^3 + x^5 - 9x^8 - 2 + x^8$$

Βήμα II: Κάνουμε την πράξη $-9x^8 + x^8 = -8x^8$.

$$5x^3 + x^5 - 8x^8 - 2$$

Βήμα III: Δεν υπάρχουν άλλες πράξεις που απλοποιούν την παραπάνω παράσταση, οπότε εδώ σταματάμε. Συνηθίζεται να γράφουμε τις δυνάμεις του x με φθίνουσα σειρά, οπότε -αν θέλουμε- τελειώνουμε με το:

$$-8x^8 + x^5 + 5x^3 - 2$$

Άσκηση 5: Να απλοποιηθεί η παράσταση:

$$5x - 5y + y^2 + 78x - 8y + 5 - 107$$

Λύση: *Βήμα I:* Κάνουμε την πράξη $5x + 78x = 83x$.

$$83x - 5y + y^2 - 8y + 5 - 107$$

Βήμα II: Κάνουμε την πράξη $-5y - 8y = -13y$.

$$83x - 13y + y^2 + 5 - 107$$

Βήμα III: Κάνουμε την πράξη $5 - 107 = -102$.

$$83x - 13y + y^2 - 102$$

Βήμα IV: Δεν υπάρχουν άλλες πράξεις που να απλοποιούν την παραπάνω παράσταση, οπότε σταματάμε. Συνηθίζεται να γράφουμε με φθίνουσα σειρά τις δυνάμεις του ενός αγνώστου, μετά του άλλου, και τέλος τις σταθερές. Αν θέλουμε λοιπόν, τελειώνουμε με το:

$$y^2 - 13y + 83x - 102$$

Άσκηση 6: Να απλοποιηθεί η παράσταση:

$$5x \cdot (x^2 + x) - x^3 + 1$$

Λύση: *Βήμα I:* Κάνουμε την επιμεριστική ιδιότητα $5x \cdot (x^2 + x) = 5x^3 + 5x^2$.

$$5x^3 + 5x^2 - x^3 + 1$$

Βήμα II: Κάνουμε την πράξη $5x^3 - x^3 = 4x^3$.

$$4x^3 + 5x^2 + 1$$

Βήμα III: Εδώ σταματάμε, αφού δεν υπάρχουν άλλες πράξεις που να απλοποιούν την παραπάνω παράσταση.

Άσκηση 7: Να απλοποιηθεί η παράσταση:

$$x \cdot (x + 1) - x^2 + (y^3 + y + y \cdot 5) \cdot y$$

Λύση: *Βήμα I:* Κάνουμε την επιμεριστική ιδιότητα $x \cdot (x + 1) = x^2 + x$.

$$x^2 + x - x^2 + (y^3 + y + y \cdot 5) \cdot y$$

Βήμα II: Κάνουμε την πράξη $y + y \cdot 5 = 6y$, στην παρένθεση. Εν τω μεταξύ, εδώ είναι χρήσιμο κανείς να παρατηρήσει ότι $y \cdot 5 = 5 \cdot y = 5y$, οπότε η πράξη $y + y \cdot 5 = 6y$ όπως την κάναμε πριν, είναι λογική.

$$x^2 + x - x^2 + (y^3 + 6y) \cdot y$$

Βήμα III: Κάνουμε την επιμεριστική ιδιότητα $(y^3 + 6y) \cdot y = y^4 + 6y^2$. Αυτή είναι όντως επιμεριστική ιδιότητα (δεν πειράζει που το εξωτερικό y είναι στ' αριστερά κι όχι στα δεξιά), αφού **στον πολλαπλασιασμό δεν έχει σημασία η σειρά**. Δηλαδή, το εξωτερικό y μπορεί να πάει στ' αριστερά της παρένθεσης, αντί στα δεξιά.

$$x^2 + x - x^2 + y^4 + 6y^2$$

Βήμα IV: Κάνουμε την πράξη $x^2 - x^2 = 0$.

$$x + y^4 + 6y^2$$

Βήμα V: Παρατηρούμε ότι δεν γίνονται άλλες πράξεις που να απλοποιούν την παραπάνω παράσταση, οπότε σταματάμε.

Άσκηση 8:

1) Να απλοποιηθεί η παράσταση:

$$P = x \cdot (x - 1) + (y^3 - 1) \cdot y + y - x^2 - 3$$

- 2) Αν κάποιος σας πει ότι $x = 1$ και $y = -4$, μπορείτε να βρείτε την τιμή του P ;

[Προσοχή! Αν τα x, y σας δοθούν, τότε το P παύει να είναι αλγεβρική παράσταση. Γίνεται πράξη μεταξύ αριθμών, αρά (στο τέλος), θα βρείτε έναν αριθμό.]

Λύση:

- 1) *Βήμα I:* Κάνουμε την επιμεριστική ιδιότητα $x \cdot (x - 1) = x^2 - x$.

$$x^2 - x + (y^3 - 1) \cdot y + y - x^2 - 3$$

Βήμα II: Κάνουμε την επιμεριστική ιδιότητα $(y^3 - 1) \cdot y = y^4 - y$. Εδώ, όπως και πριν, δεν πειράζει που το εξωτερικό y είναι στα δεξιά της παρένθεσης και όχι στ' αριστερά. **Στον πολυπλασιασμό δεν έχει σημασία η σειρά.**

$$x^2 - x + y^4 - y + y - x^2 - 3$$

Βήμα III: Κάνουμε την πράξη $x^2 - x^2 = 0$.

$$-x + y^4 - y + y - 3$$

Βήμα IV: Κάνουμε την πράξη $-y + y = 0$.

$$-x + y^4 - 3$$

Βήμα V: Επειδή δεν μπορούν να γίνουν άλλες απλοποιήσεις, τελικά έχουμε:

$$P = -x + y^4 - 3$$

- 2) Αν στη θέση του x βάλουμε το 1 και στη θέση του y το -4 , τότε θα έχουμε την εξής πράξη:

$$P = -1 + (-4)^4 - 3$$

Προσέξτε εδώ ότι η ύψωση σε δύναμη πάει στο -4 (δηλαδή μαζί με το $-$). Αν γράφαμε 4^4 δεν θα ήταν σωστό, γιατί αυτό θα σήμαινε ότι μόνο ένα τμήμα του $y = -4$ υψώνεται στην τετάρτη (το $-$ ξεχνιέται). Για να κάνουμε αυτήν την πράξη, υπολογίζουμε πρώτα την δύναμη:

$$(-4) \cdot (-4) \cdot (-4) \cdot (-4) = 16 \cdot 16 = 256$$

(αφού $- \cdot - \cdot - \cdot - = + \cdot + = +$). Επομένως:

$$P = -1 + 256 - 3 = 252$$

Άσκηση 9: Να απλοποιηθεί η αλγεβρική παράσταση:

$$x \cdot (x + y) - y \cdot (x + y) - x \cdot y$$

[Υπόδειξη: Εδώ θα εμφανιστούν όροι $x \cdot y$. Οι όροι αυτοί δεν μπορούν να απλοποιηθούν με τα x ή τα y , ή με δυνάμεις τους.]

Λύση: *Βήμα I:* Κάνουμε την επιμεριστική ιδιότητα $x \cdot (x + y) = x^2 + x \cdot y$.

$$x^2 + x \cdot y - y \cdot (x + y) - x \cdot y$$

Βήμα II: Κάνουμε την επιμεριστική ιδιότητα $-y \cdot (x + y) = -y \cdot x - y^2$ (Δεν ξεχνάμε ότι οι αριθμοί έχουν πλέον και **πρόσημο**).

$$x^2 + x \cdot y - y \cdot x - y^2 - x \cdot y$$

Βήμα III: Υπάρχει κάποια σχέση μεταξύ των $x \cdot y$ και $y \cdot x$; Η απάντηση είναι **ναι**, αφού **στον πολλαπλασιασμό δεν έχει σημασία η σειρά**. Επομένως, $x \cdot y = y \cdot x$. Δηλαδή, μπορούμε να γράψουμε:

$$x^2 + x \cdot y - x \cdot y - y^2 - x \cdot y$$

Βήμα IV: Κάνουμε την πράξη $x \cdot y - x \cdot y = 0$.

$$x^2 - y^2 - x \cdot y$$

Βήμα V: Στην παραπάνω εξίσωση δεν μπορούν να γίνουν άλλες απλοποιήσεις, οπότε σταματάμε.