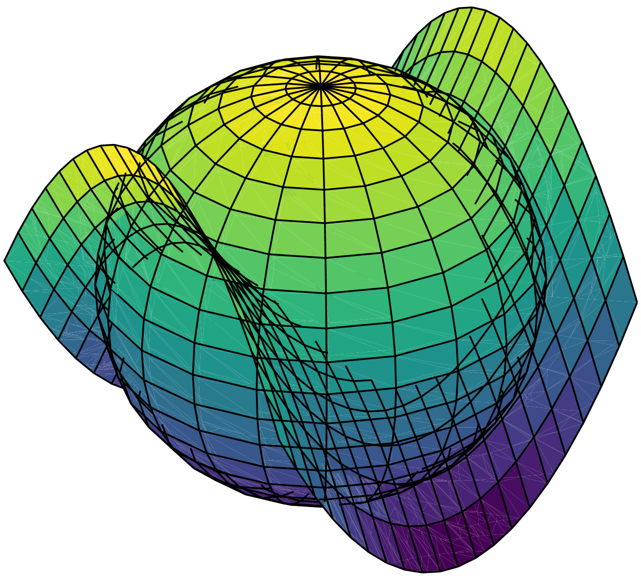
Μερικές αποδείξεις στην

Πολυμεταβλητή Γεωμετρία
και στη Μιγαδική Ανάλυση

Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Τμήμα Μαθηματικών, Σεπτέμβριος 2022



Μερικές αποδείξεις για τα μαθήματα:

Απειροστικός Λογισμός ΙΙΙ (301)
Γεωμετρική Ανάλυση (615)
Μιγαδική Ανάλυση Ι (701)

Φράγκος Αναστάσιος

1η Έκδοση, Αύγουστος 2022 Τελευταία ενημέρωση: *23/04/2022, 16:38*

ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΙ

Α

1. α.α.τριγ: Απλά Ασυμπτωτικό Τρίγωνο

Γ

2. γων.: Γωνία

Δ

3. δ.α.τριγ.: Διπλά Ασυμπτωτικό Τρίγωνο

Ε

4. Ε.Γ.: Ευκλείδεια Γεωμετρία
5. ε.τ.: Ευθύγραμμο Τμήμα

Ο

6. Ο.Γ.: Ουδέτερη Γεωμετρία

Σ

7. σ.τ.: Σημείο Τομής

Τ

8. τριγ.: Τρίγωνο
9. τ.α.τριγ.: Τριπλά Ασυμπτωτικό Τρίγωνο

Υ

10. Υ.Α.: Υπερβολικό Αξίωμα
11. Υ.Γ.: Υπερβολική Γεωμετρία

Πρόλογος

Οι παρούσες σημειώσεις αποτελούν μια εισαγωγή σε θέματα πολυμεταβλητού απειροστικού λογισμού, με κάποια περισσότερη έμφαση σε αποδείξεις. Επιπλέον, υπάρχει ένα εισαγωγικό μέρος για τη μιγαδική ανάλυση.

Η ύλη των μαθημάτων πολυμεταβλητού απειροστικού λογισμού / απειροστικού λογισμού ΙΙΙ είναι συνήθως αρκετά μεγάλη ώστε να μην μπορεί να γίνει μέρος των αποδείξεων στην τάξη, πόσο μάλλον σε τμήματα που δεν έχουν καθαρά μαθηματικό χαρακτήρα. Σκοπός λοιπόν αυτών των σημειώσεων είναι μια συνεχής παρουσίαση αποδείξεων, με θεματολογία που κυμαίνεται από στοιχειώδη θέματα πολυμεταβλητού απειροστικού, έως θεωρήματα ροών (Green, Stokes, Gauss).

Η δημιουργία μιας συλλογής αποδείξεων προσπάθησε να επιτευχθεί στο [3], αλλά λόγω του περιορισμένου χρόνου (περίπου 10 ημέρες) δεν έγινε 'πλήρης' (τουλάχιστον όσον αφορά την ύλη που διδάσκεται στο τμήμα Μαθηματικών του Ε.Κ.Π.Α.). Μια δεύτερη προσπάθεια γίνεται με αυτές οι σημειώσεις, για την συγγραφή των οποίων δεν υπάρχει περιορισμένο χρονικό διάστημα.

Όσον αφορά το μέρος της μιγαδικής ανάλυσης, να σημειωθεί ότι μεγάλο τμήμα αυτού προέρχεται από το [7], το οποίο αποτελεί τροποποιημένες σημιώσεις του κ. Χατζηαφράτη Τ.

Ευελπιστώ φοιτητές που ενδιαφέρονται για παρουσιάσεις θεμελιωμένες μέσω αποδείξεων, να οφεληθεί σε έναν βαθμό.

Θα είμαι ευγνώμων σε όποιον αναγνώστη με ενημερώσει για τυχόντα λάθη (τυπογραφικά ή μαθηματικής φύσεως), μέσω της διεύθυνσης ηλ. ταχυδρομείου: afragos@email.com

Φ.Α.

Η γραμματοσειρά είναι δημιούργημα του κ. Τσολομύτη Αντώνιου: Kerkis © Department of Mathematics, University of the Aegean. Η στοιχειοθέτηση έγινε σε LaTeX.

Περιεχόμενα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Βασικά στοιχεία γεωμετρίας

1.1 Για τη γεωμετρία ευκλειδείων χώρων μέσω μοντέλων

Ήδη ακόμη από τον $17^{ο}$ αιώνα, οι μαθηματικοί της εποχής είχαν αντιληφθεί την δυσκολία της συνθετικής θεμελίωσης της γεωμετρίας, η οποία βασιζόταν κυρίως σε κατασκευαστικές μεθόδους και σε εφαρμογή αξιώματων (τα οποία βέβαια - να σημειωθεί - αναθεωρήθηκαν στην πορεία, κατά μια συνολοθεωρητικότερη προσέγγιση). Μια αναλυτικότερη και αλγεβρικότερη προσέγγιση της γεωμετρίας θα μπορούσε να προσφέρει μεγάλη ώθηση στη μαθηματική σκέψη, τόσο σε θέματα γεωμετρίας, όσο και σε αρκετούς άλλους μαθηματικούς και φυσικούς κλάδους, συμπεριλαμβανομένης της θεωρίας αριθμών, της μηχανικής και της αστρονομίας (κλάδοι που είχαν μια ισχυρή γεωμετρική 'αύρα' την εποχή εκείνη). Είναι σημαντικό κανείς να συνειδητοποιήσει ότι, ακόμη κι αν οι απαρχές μιας μαθηματικής ιδέας υπήρχαν σε περιόδους της μαθηματικής ιστορίας, η έλλειψη ενός ικανού μοντέλου για την έκφραση αυτών των ιδεών μπορεί να επηρεάσει σημαντικά την ανάπτυξή τους. Ακόμη λοιπόν κι αν ο Αρχιμήδης ήξερε την μέθοδο της εξάντλησης για τον υπολογισμό του εμβαδού, χωρίς την χρήση ενός αναλυτικού μοντέλου της γεωμετρίας, δεν θα μπορούσε να μετεξελήξει την εν λόγω μέθοδο σε ολοκλήρωμα.

Στην γεωμετρία μία «επανάσταση», όσον αφορά το μοντέλο, ήλθε υπό την μορφή του συστήματος συντεταγμένων.

Ορισμός 1.1 (Διατεταγμένα ζεύγη, άτυπος ορισμός). *Για κάθε δύο στοιχεία a και b (τα οποία σε εμάς θα είναι, εν γένει, πραγματικοί αριθμοί) ορίζουμε το σύμβολο:*

$$(a, b)$$

το οποίο έχει τις εξής ιδιότητες:

- *Καθορίζεται αποκλειστικά και μόνο από τα στοιχεία a, b.*
- $(a, b) \neq (b, a)$, *εκτός κι αν $a = b$ (δηλαδή η σειρά παίζει ρόλο).*

Ορισμός 1.2 (Διατεταγμένα ζεύγη, Kuratowski). *Ο προηγούμενος ορισμός είναι σαφώς περισσότερο διαισθητικός παρά οτιδήποτε άλλο. Σε μια σωστή δε θεμελίωση, συνήθως αναζητούμε μια συνολοθεωριτική έκφραση που ικανοποιεί τις επιθυμητές ιδιότητες του οριστέου αντικειμένου. Ένας συνολοθεωριτικός ορισμός για τα διατεταγμένα ζεύγη είναι αυτός του Kuratowski:*

$$\text{Για κάθε δύο αντικείμενα } a, b \text{ ορίζουμε } (a, b) := \big\{a, \{a, b\}\big\}$$

Ελέγξτε ότι ο **Ορισμός 1.2** (Διατεταγμένα ζεύγη, Kuratowski) πράγματι ικανοποιεί τις ζητούμενες ιδιότητες.

Ορισμός 1.3 (Καρτεσιανό γινόμενο). *Τα διατεταγμένα ζεύγη ουσιαστικά μας δίνουν έναν τρόπο να προσδιορίζουμε τη θέση σημείων στο επίπεδο. Δεδομένου ενός σημείου το οποίο ονομάζουμε αρχή (και το ταυτίζουμε με το $(0, 0)$), η πρώτη συντεταγμένη, προσδιορίζει (κατα κάποιον τρόπο) πόσο αριστερά ή δεξιά βρισκόμαστε από αυτό, ενώ η δεύτερη πόσο πάνω ή κάτω. Για τον ορισμό λοιπόν του επιπέδου, χρειάζεται να ορίσουμε το σύνολο όλων αυτών των διατεταγμένων ζευγών. Δεδομένων δύο συνόλων A, B, ορίζουμε το καρτεσιανό τους γινόμενο:*

$$A \times B := \{(a, b) \mid a \in A, \ b \in B\}$$

Στην ειδική περίπτωση όπου τα A, B είναι το $\mathbb{R}$, εφοδιάζουμε το γινόμενο με πράξεις, ώστε να αποκτήσει αλγεβρική δομή διανυσματικού χώρου:

$$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d) \textbf{ και } \lambda\cdot(a,b)=(\lambda a,\lambda b)$$

Ένας προσεκτικός αναγνώστης ίσως παρατηρήσει ότι ο ορισμός του καρτεσιανού γινομένου για την μελέτη του επιπέδου έχει ≪πρόβλημα≫. Συγκεκριμένα, χρειάζεται, αν φυσικά ευελπιστούμε να κάνουμε κάποιου είδους ταύτιση του $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ με το επίπεδο, ολόκληρη η επίπεδη ευκλείδεια γεωμετρία να εμφυτεύεται στην αλγεβρική δομή του $\mathbb{R}^2 := \mathbb{R}\times\mathbb{R}$. Θα πρέπει τα αξιώματα της ευκλείδειας γεωμετρίας να μεταφράζονται (με κάποιον τρόπο) σε (ισχύουσες) προτάσεις της αλγεβρικής δομής. Αυτό δεν είναι κάτι που έπεται άμεσα από τους ορισμούς, οπότε χρειάζεται να ελεγχθεί - εμείς φυσικά, σε αυτήν την παρουσίαση, θα κάνουμε μια συνοπτική ανάλυση του εν λόγω θέματος.

Όσον αφορά τώρα χώρους με μεγαλύτερη διάσταση, να σημειώσουμε ότι μπορούμε, δεδομένου ενός φυσικού n, να ορίσουμε διαδοχικά καρτεσιανά γινόμενα χρησιμοποιώντας τον **Ορισμό 1.3** (Καρτεσιανό γινόμενο), και προσέχοντας βέβαια ένα ≪τεχνικό≫ σημείο:

Ορισμός 1.4 (Πολυδιάστατοι ευκλείδειοι χώροι)**.** *Γενικά θα επιθυμούσαμε να ακολουθήσουμε μια ανάλογη με το επίπεδο διαδικασία για τον προσδιορισμό των σημείων σε μεγαλύτερες διαστάσεις: θα θέλαμε να δαθέτουμε $n-$άδες $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ οι οποίες καθορίζονται μονοσήμαντα από τις συντεταγμένες και τη σειρά των συντεταγμένων, και βάσει αυτών να ορίσουμε καρτεσιανό γινόμενο:*

$$\mathbb{R}^n=\overbrace{\mathbb{R}\times\cdots\times\mathbb{R}}^{n}:=\{(x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n)\mid x_1,x_2,\cdots,x_n\in\mathbb{R}\}$$

Μπορούμε λοιπόν επαγωγικά να ορίσουμε:

$$(x_1,x_2,\cdots,x_n):=\big((x_1,x_2,\cdots,x_{n-1}),x_n\big)$$

κι επιπλέον:

$$\mathbb{R}^n=\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}$$

Αυτός είναι ένας καλός ορισμός γι' αυτήν την παρουσίαση, αρκεί κανείς να έχει υπ' όψιν ότι δεν είναι γενικός, αφού δεν ισχύει όταν ο εκθέτης n δεν είναι καλά διατεταγμένος χώρος (παραπέμπεστε σε ένα μάθημα συνολοθεωρίας, αν θέλετε να δείτε λεπτομέριες).

1.2 Αξιώματα της γεωμετρίας και μοντέλα

Εδώ θα επιχειρήσουμε να δείξουμε λίγο συνοπτικά με ποιόν τρόπο και για ποιόν λόγο επιτρέπεται μια ταύτιση του ευκλειδείου επιπέδου με την αλγεβρική δομή του $\mathbb{R}^2$. Γι' αυτόν τον λόγο, ξεκινούμε με μερικά αξιώματα της γεωμετρίας.

Κάθε τυπικό αξιωματικό σύστημα αποτελείται από τέσσερεις θεμελιώδεις κατηγορίες όρων:

- απροσδιόριστους όρους,
- προσδιορισμένους όρους,
- αξιώματα,
- θεωρήματα.

Στην πρώτη κατηγορία περιλαμβάνονται ≪αρχικές έννοιες≫, οι οποίες αποτελούν ουσιαστικά τους θεμελιώδεις λίθους της θεωρίας. Αυτές τις έννοιες θεωρούμε δεδομένες, απλούστατα διότι δεν είναι δυνατόν να οριστεί κάθε αντικείμενο της θεωρίας χωρίς να γίνει χρήση κάποιας κοινής αρχής / κάποιας κοινής βάσης - διαφορετικά, η διαδικασία αναζήτησης ενός ορισμού θα ήταν ατέρμονη. Τέτοιοι όροι στην ευκλείδεια γεωμετρία είναι το ≪σημείο≫, η ≪ευθεία≫ και η έννοια του ≪κείται επί≫, η οποία είναι ουσιαστικά μία απροσδιόριστη σχέση μεταξύ σημείων και ευθειών.
Τα αξιώματα αποτελούν αρχικές προτάσεις, την αλήθεια των οποίων αποδεχόμαστε, και είναι απαραίτητα για τον προσδιορισμό των σχέσεων μεταξύ των απροσδιόριστων όρων.

Τα θεωρήματα (εννοείται και τα λήμματα, οι προτάσεις, κ.ο.κ.) είναι δημιουργήματα μιας λογικής διεργασίας και προκύπτουν μέσω μιας διαδοχικής εφαρμογής αξιωμάτων και θεωρημάτων. Προφανώς για να είναι λοιπόν δυνατόν να αναφερόμαστε σε θεωρήματα, θα πρέπει να υπάρχει ένα ≪σύστημα λογικής≫.

Για τη διατύπωση των αξιωμάτων, θεωρούμε $\mathcal{P}$ να είναι το σύνολο των σημείων και $\mathcal{L}$ να είναι το σύνολο των ευθειών της γεωμετρίας.

A. Αξιώματα του ≪ανήκειν≫ (αξιώματα πρόσπτωσης):

1. Για κάθε δύο διαφορετικά σημεία $A, B \in \mathcal{P}$ υπάρχει ακριβώς 1 ευθεία που τα περιέχει, την οποία θα συμβολίζουμε με $\underset{\longleftrightarrow}{AB}$.

2. Κάθε ευθεία περιέχει τουλάχιστον δύο σημεία (και άρα σε συνδιασμό με το 1., το σύνολο των ευθειών καθορίζεται πλήρως από αυτό των σημείων).

3. Υπάρχουν τουλάχιστον τρία μη συνευθειακά σημεία.

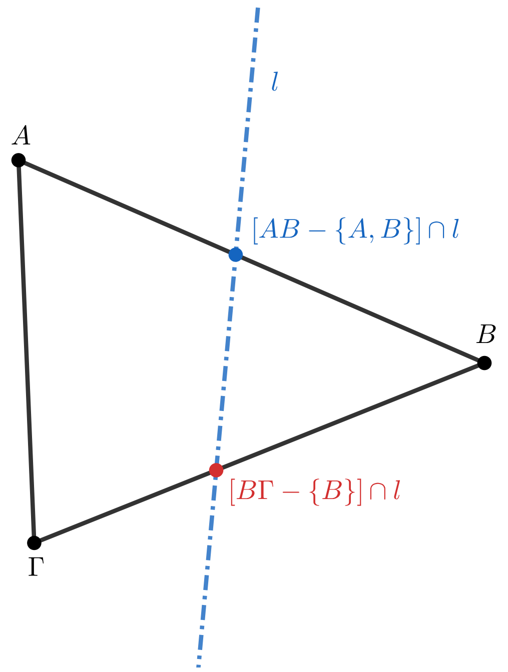
B. Αξιώματα του ≪μεταξύ≫ (αξιώματα διάταξης):

1. Υπάρχει μια σχέση μεταξύ τριών διαφορετικών σημείων, η οποία όταν $A - B - \Gamma$ (και διαβάζεται ≪B μεταξύ των A, Γ≫), τότε τα $A, B, \Gamma \in \mathcal{P}$ είναι συνευθειακά και επιπλέον $\Gamma - B - A$.

2. Για δεδομένα A και B στο σύνολο $\mathcal{P}$, υπάρχει $\Gamma \in \mathcal{P}$ τέτοιο ώστε $A - B - \Gamma$.

3. Εάν δωθούν τρία συνευθειακά σημεία, ακριβώς ένα βρίσκεται μεταξύ των άλλων δύο.

4. *(Αξίωμα του Pasch)* Έστω $A, B, \Gamma \in \mathcal{P}$ τα οποία είναι μη συνευθειακά. Εάν μια ευθεία $l \in \mathcal{L}$ τέμνει το τμήμα $AB - \{A, B\}$ σε ακριβώς ένα σημείο, τότε θα τέμνει το τμήμα $B\Gamma - \{B\}$ ή το τμήμα $A\Gamma - \{A\}$.



Παρατήρηση 1.1. *Θεωρούμε μία ευθεία $l \in \mathcal{L}$, η οποία λόγω του **A.2.** έχει τουλάχιστον δύο σημεία, έστω $A, B \in \mathcal{P}$. Λόγω του **B.2.**, υπάρχει άλλο ένα σημείο $\Gamma \in \mathcal{P}$ για το οποίο $A - B - \Gamma$. Εάν η σειρά των A, B ληφθεί διαφορετικά - δηλαδή θεωρήσουμε τα σημεία B, A - τότε εφαρμόζοντας και πάλι το **B.2.**, προκύπτει ότι θα υπάρχει σημείο $\Gamma' \in \mathcal{P}$ για το οποίο $B - A - \Gamma'$.*

Παρατήρηση 1.2. *Για τη μελέτη της γεωμετρίας θα χρησιμοποιήσουμε εργαλεία της συνολοθεωρίας. Επομένως θα είναι χρήσιμο να οριστούν τα αφηρημένα γεωμετρικά αντικείμενα και με περισσότερο συνολοθεωρητική υπόσταση.*

- *Τα σημεία είναι ως γνωστόν τα στοιχεία του συνόλου $\mathcal{P}$. Εδώ δεν έχουμε να ορίσουμε κάτι.*
- *Για τις ευθείες l του συνόλου $\mathcal{L}$, ορίζουμε τα σύνολα:*

$$\mathcal{J}(l) = \{A \in \mathcal{P} \mid \text{ το } A \text{ κείται επί της } l\}$$

τα οποία ονομάζουμε σημειοσειρές των ευθειών l.

Με τους ορισμούς αυτούς υπ' όψιν, μπορούμε να περιγράψουμε συνολοθεωρητικά κάποιες καταστάσεις της γεωμετρίας. Για παράδειγμα, για να πούμε ότι το σημείο A κείται επί μιας ευθείας l, αρκεί να γράψουμε $A \in \mathcal{J}(l)$. Για ευκολία στους συμβολισμούς, μπορούμε να δώσουμε τους εξής ορισμούς:

- *Υπάρχει μια συνάρτηση $\cap$ (όχι η συνήθης τομή) η οποία ορίζεται για κάθε διαφορετικές $l, m \in \mathcal{L}$ ως:*

$$l \cap m = \begin{cases} \emptyset, & \textit{εάν οι } l, m \textit{ δεν τέμνονται} \\ \textit{το μοναδικό σημείο τομής τους, εάν τέμνονται} \end{cases}$$

Παρατηρήστε ότι $\mathcal{J}(l) \cap \mathcal{J}(m) = \{l \cap m\}$, όταν $l \cap m \neq \emptyset$. Ανάλογη σχέση θα χρησιμοποιείται και μεταξύ ευθυγράμμων τμημάτων και ημιευθειών, αλλά δεν θα οριστεί αυστηρά.

- *Υπάρχει μία σχέση $\in$ (όχι το σύνηθες «ανήκει»), η οποία ορίζεται για κάθε $A \in \mathcal{P}$ και $l \in \mathcal{L}$ ως:*

$$A \in l :\Leftrightarrow A \in \mathcal{J}(l) \text{ (το δεύτερο «ανήκει» είναι το σύνηθες)}$$

Ορισμός 1.5 (Ευθύγραμμα τμήματα και ημιευθείες).
Ευθύγραμμο τμήμα** AB**: *Είναι το τμήμα της $\underleftrightarrow{AB}$ που περιέχει τα σημεία Γ για τα οποία $A - \Gamma - B$, μαζί με τα άκρα A, B. Με συνολοθεωρητικούς συμβολισμούς θα γράφαμε:*

$$AB = \{\Gamma \in \mathcal{P} \mid A - \Gamma - B\} \cup \{A, B\}$$

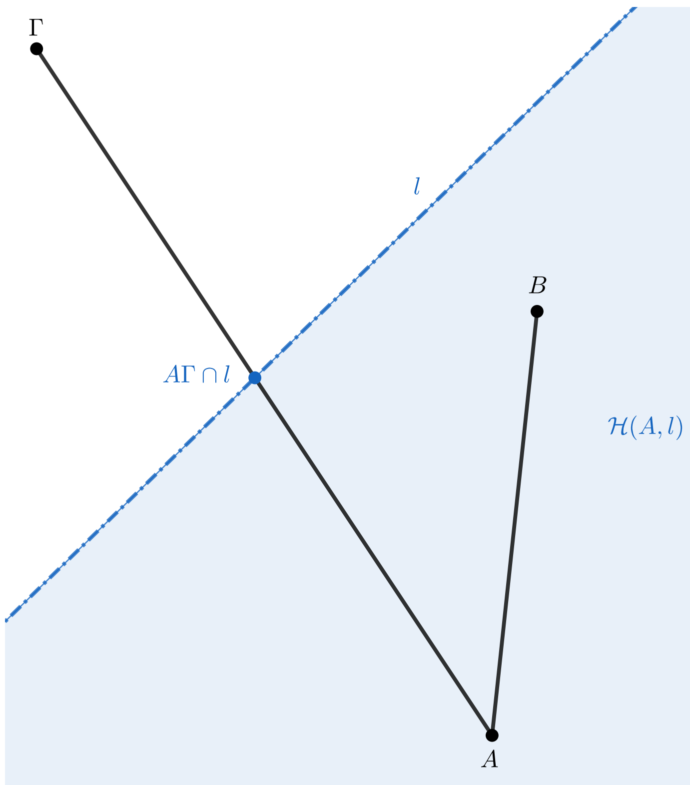
Ημιευθεία** $\underrightarrow{AB}$**: *Είναι το τμήμα της $\underleftrightarrow{AB}$ που περιέχει τα σημεία Γ για τα οποία $A - B - \Gamma$, μαζί με το AB. Με συνολοθεωρητικούς συμβολισμούς θα γράφαμε:*

$$\underrightarrow{AB} = \{\Gamma \in \mathcal{P} \mid A - B - \Gamma\} \cup AB$$

Πρόταση 1.1 Ισχύουν τα εξής: $\underrightarrow{AB} \cap \underrightarrow{BA} = AB$ και $\underrightarrow{AB} \cup \underrightarrow{BA} = \mathcal{J}(\underleftrightarrow{AB})$.

Πρόταση 1.2 Στο αξίωμα **Β.4.** ισχύει το ανάλογο της **Παρατήρησης 1.1**. Δηλαδή, εάν έχουμε τρία μη συνευθειακά σημεία A, B, Γ και μια ευθεία l τέμνει σε μοναδικό σημείο το τμήμα $B\Gamma - \{B, \Gamma\}$ ή $A\Gamma - \{A, \Gamma\}$, τότε αντίστοιχα τέμνει τα τμήματα $\left[AB - \{A\} \text{ ή } A\Gamma - \{\Gamma\}\right]$ ή $\left[AB - \{A\} \text{ ή } B\Gamma - \{\Gamma\}\right]$.

Ορισμός 1.6 (Σημεία στο ίδιο μέρος και ημιεπίπεδα).



Σημεία στο ίδιο μέρος: *Εάν A, B είναι σημεία και l ευθεία ώστε τα A, B να μην ανήκουν στην l, τότε θα λέμε ότι* *τα A και B ≪βρίσκονται προς το ίδιο μέρος της l≫ όταν $A = B$ ή το ευθύγραμμο τμήμα AB δεν περιέχει σημεία της l. Αντίστοιχα, τα A, B ≪βρίσκονται σε αντίθετα μέρη της l (εκατέρωθεν)≫ όταν $A \neq B$ και το ευθύγραμμο τμήμα AB έχει κοινό σημείο με την l (ουσιαστικά αυτό αποτελεί την άρνηση του πρώτου μέρους του ορισμού).*

Ημιεπίπεδα: *Έστω $A \in \mathcal{P}$ ένα σημείο και $l \in \mathcal{L}$ μια ευθεία που δεν το περιέχει. Ορίζουμε ως ημιεπίπεδο $\mathcal{H}(A, l)$ της l από την πλευρά του A όλα τα σημεία B που είναι προς το ίδιο μέρος της l με το A. Με συνολοθεωρητικούς συμβολισμούς θα γράφαμε:*

$$\mathcal{H}(A, l) = \{B \in \mathcal{P} \mid AB \text{ δεν τέμνει την } l\}$$

Γ. Αξιώματα ≪σύμπτωσης≫ (αξιώματα ≪συμφωνίας≫ - ισότητας) για ευθύγραμμα τμήματα και γωνίες:

1. *(Μεταφορά των ευθυγράμμων τμημάτων)* Υπάρχει μία σχέση μεταξύ ευθυγράμμων τμημάτων $\cong_{\text{ε.τ.}}$, η οποία εξασφαλίζει κατά μία έννοια την ελεύθερη μεταφορά των ευθυγράμμων τμημάτων. Συγκεκριμένα, για οποιαδήποτε διαφορετικά σημεία A, B και για κάθε σημείο A' και ημιευθεία $\underrightarrow{A'X}$, υπάρχει ένα σημείο $B' \in \underrightarrow{A'X}$, το οποίο ορίζει $A'B'$ με την ιδιότητα $AB \cong_{\text{ε.τ.}} A'B'$ (διαβάζεται ≪το AB σύμφωνο με το $A'B'$≫).

2. Για κάθε $A, B, \Gamma, \Delta, E, Z \in \mathcal{P}$, αν $AB \cong_{\text{ε.τ.}} \Gamma\Delta$ και $AB \cong_{\text{ε.τ.}} EZ$, τότε $\Gamma\Delta \cong_{\text{ε.τ.}} EZ$. Επίσης, κάθε ευθύγραμμο τμήμα είναι σύμφωνο με τον εαυτό του.

3. *(Προσθετικότητα των ευθυγράμμων τμημάτων)* Έστω $A, B, \Gamma \in \mathcal{P}$. Εάν ισχύει ότι $A - B - \Gamma$ και $A' - B' - \Gamma'$ με $AB \cong_{\text{ε.τ.}} A'B'$ και $B\Gamma \cong_{\text{ε.τ.}} B'\Gamma'$, τότε $A\Gamma \cong_{\text{ε.τ.}} A'\Gamma'$.

4. *(Μεταφορά των γωνιών)* Υπάρχει μία σχέση μεταξύ γωνιών $\cong_{\text{γων.}}$, η οποία εξασφαλίζει κατά μία έννοια την ελεύθερη μεταφορά των γωνιών. Συγκεκριμένα, έστω $O, O', X, Y \in \mathcal{P}$ και $\widehat{XOY}$ να είναι η γωνία με πλευρές $\underrightarrow{OX}$, $\underrightarrow{OY}$. Τότε για κάθε ημιευθεία $\underrightarrow{O'X'}$, μπορεί να βρεθεί μια ημιευθεία $\underrightarrow{O'Y'}$ (σε καθορισμένο ημιεπίπεδο) τέτοια ώστε $\widehat{XOY} \cong_{\text{γων.}} \widehat{X'O'Y'}$ (διαβάζεται ≪η $\widehat{XOY}$ σύμφωνη με την $\widehat{X'O'Y'}$≫).

5. Για κάθε τρεις γωνίες $\widehat{XOY}$, $\widehat{X'O'Y'}$, $\widehat{X''O''Y''}$, εάν $\widehat{XOY} \cong_{\text{τριγ.}} \widehat{X'O'Y'}$ και $\widehat{X'O'Y'} \cong_{\text{γων.}} \widehat{X''O''Y''}$, τότε $\widehat{XOY} \cong_{\text{γων.}} \widehat{X''O''Y''}$. Επίσης, κάθε γωνία είναι σύμφωνη με τον εαυτό της.

6. Έστω $A, A', B, B', \Gamma, \Gamma' \in \mathcal{P}$ και τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$, $\overset{\triangle}{A'B'\Gamma'}$. Εάν $AB \cong_{\text{ε.τ.}} A'B'$, $A\Gamma \cong_{\text{ε.τ.}} A'\Gamma'$ και $\widehat{BA\Gamma} \cong_{\text{γων.}} \widehat{B'A'\Gamma'}$, τότε $\widehat{AB\Gamma} \cong_{\text{γων.}} \widehat{A'B'\Gamma'}$.

Ορισμός 1.7 (Γωνίες). *Έστω $\underrightarrow{OX}, \underrightarrow{OY}$ να είναι δύο ημιευθείες. Ως γωνία $\widehat{XOY}$ των ημιευθειών αυτών ουσιαστικά ορίζουμε όλα τα σημεία που περικλύονται από τις ημιευθείες αυτές. Εάν τα O, X, Y δεν είναι συγγραμικά, με συνολοθεωρητικούς συμβολισμούς θα γράφαμε:*

$$\widehat{XOY} := \mathcal{H}(X, \underleftrightarrow{OY}) \cap \mathcal{H}(Y, \underleftrightarrow{OX})$$

Εάν τα O, X, Y είναι συγγραμικά, χρειαζόμαστε άλλο ένα εξωτερικό της ευθείας σημείο. Θεωρούμε ένα Z εκτός της $\underleftrightarrow{XY}$ και ορίζουμε $\widehat{XOY} := \mathcal{H}(Z, \underleftrightarrow{XY})$ εάν $X - O - Y$ και $\widehat{XOY} := \emptyset$ εάν οτιδήποτε άλλο συμβαίνει όσον αφορά τη διάταξη των O, X, Y. Οι ημιευθείες $\underrightarrow{OX}, \underrightarrow{OY}$ καλούνται πλευρές της γωνίας.

Ορισμός 1.8 (Τρίγωνα). *Έστω $A, B, \Gamma \in \mathcal{P}$ τρία μη συγγραμμικά σημεία. Ως τρίγωνο $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ ορίζουμε όλα τα σημεία των ευθυγράμμων τμημάτων $AB, A\Gamma, B\Gamma$. Με συνολοθεωρητικούς συμβολισμούς θα γράφαμε:*

$$\overset{\triangle}{AB\Gamma} = AB \cup A\Gamma \cup B\Gamma$$

Τα ε.τ. $AB, A\Gamma, B\Gamma$ καλούνται πλευρές του τριγώνου.

Επίσης, θα λέμε ότι δύο τρίγωνα είναι σύμφωνα $\cong_{\text{τριγ.}}$ εάν έχουν όλα τους τα στοιχεία σύμφωνα (πλευρές και γωνίες) ένα προς ένα.

Σύμβαση: *Από εδώ και στο εξής θα χρησιμοποιούμε το ίδιο σύμβολο $\cong$ για καθεμία από της σχέσεις συμφωνίας $\cong_{\text{ε.τ.}}, \cong_{\text{γων.}}, \cong_{\text{τριγ.}}$, εφόσον δεν υπάρχει πιθανότητα σύγχυσης.*

Δ. Αξιώματα συνέχειας:

1. *(Το αξίωμα τομών του Dedekind)* Ας υποθέσουμε ότι η σημειοσειρά μιας ευθείας l μπορεί να γραφεί ως ένωση δύο μη κενών υποσυνόλων Σ_1, Σ_2 που έχουν την ιδιότητα:

   Κανένα σημείο του ενός δεν βρίσκεται μεταξύ δύο σημείων του άλλου.

   Τότε υπάρχει ένα μοναδικό σημείο O που βρίσκεται στην l τέτοιο ώστε:

$$\forall P_1, P_2 \in l: \; P_1 - O - P_2 \Leftrightarrow [P_1 \in \Sigma_1, P_2 \in \Sigma_2] \;\textbf{ή}\; [P_2 \in \Sigma_1, P_1 \in \Sigma_2]$$

Τα αξιώματα της κατηγορίας **Δ** είναι αντικειμενικά περισσότερο περίπλοκα απ' αυτά των υπολοίπων ομάδων, κι αυτό διότι εκφράζουν μια ιδιαίτερη μαθηματική αρχή που χαρακτηρίζει τη γεωμετρία - είναι, κατά μία έννοια, αυτό που θα ονομάζαμε ≪πληρότητα≫ στην ανάλυση.

Θεώρημα 1.1 (Το αξίωμα Αρχιμήδη - Ευδόξου για τα ε.τ.). Εάν $AB, \Gamma\Delta$ είναι τυχαία ε.τ., τότε υπάρχει αριθμός $n \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε αν το $\Gamma\Delta$ επαναληφθεί n φορές στην ημιευθεία $\underrightarrow{AB}$ αρχίζοντας από το A, θα προκύψει ευθύγραμμο τμήμα AE τέτοιο ώστε $n \cdot \Gamma\Delta \cong AE$ και $A - B - E$.

Απόδειξη: Έστω $\underrightarrow{OX}$ μια ημιευθεία. Κατ' αρχάς, κάθε σύνολο $S \subseteq \underrightarrow{OX}$ το οποίο είναι *φραγμένο* (δηλαδή υπάρχει σημείο $U \in \underrightarrow{OX}$ τέτοιο ώστε $\forall \Sigma \in S, \; O - \Sigma - U$) έχει *ελάχιστο φράγμα*. Πράγματι (χωρίς πολλές λεπτομέριες) τα σύνολα:

$$S_1 = \{P \in \mathcal{P} \mid \text{ το } P \text{ δεν φράσσει το } S\} \;\textbf{και}\; S_2 = \{P \in \mathcal{P} \mid \text{ το } P \text{ φράσσει το } S\}$$

ικανοποιούν το αξίωμα των τομών του Dedekind, επομένως το οριακό σημείο Y που εξασφαλίζει το αξίωμα είναι το ελάχιστο φράγμα.
Τώρα, αν το αξίωμα Αρχιμήδη - Ευδόξου για τα ε.τ. δεν ήταν αληθές, με επανάληψη του τμήματος $\Gamma\Delta$ στην $\underrightarrow{AB}$ άπειρες φορές, το σύνολο:

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} AE_i, \; AE_i \cong i \cdot \Gamma\Delta$$

θα ήταν φραγμένο στην ημιευθεία $\underrightarrow{AB}$, και θα είχε ελάχιστο φράγμα Y με $A - Y - B$. Παρατηρούμε ότι το $AY - AE_1$ δεν περιέχει όλα τα σημεία του AY, επομένως υπάρχει $AE_i > AY - AE_1$. Κατ' επέκταση, $AY < AE_i + AE_1 < AY$, το οποίο είναι άτοπο.

□

Θεώρημα 1.2 (Όρια ακολουθιών με στοιχεία του $\mathcal{P}$). Έστω $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ μία ακολουθία σημείων τα οποία είναι όλα τους συγγραμμικά και επί μιας ευθείας l. Υποθέτουμε ότι για την $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ ισχύουν τα εξής:

i. Υπάρχουν $A, A' \in l$ τέτοια ώστε για κάθε σημείο X της ακολουθίας να ισχύει $A - X - A'$.

ii. Για κάθε $i \in \mathbb{N}$ ισχύει $A - A_i - A_{i+1}$.

Τότε αληθεύει ότι:

$$\exists O \in AA' : \; \lim_{i \to \infty} AA_i = AO - \{O\}$$

Το θεώρημα αυτό είναι ένα ανάλογο της πρότασης που αποδεικνύεται συχνά σε μαθήματα απειροστικού λογισμού:

Κάθε μονότονη και φραγμένη ακολουθία στο $\mathbb{R}$ συγκλίνει.

Απόδειξη: Θεωρούμε τα δύο σύνολα:

$$\Sigma_1 = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \underrightarrow{A_i A}$$
$$\Sigma_2 = \Sigma_1^c$$

και ισχυριζόμαστε ότι αυτά αποτελούν μια διαμέριση της $\mathcal{J}(l)$ για την οποία ισχύει το αξίωμα των τομών του Dedekind.

Πράγματι, εάν K, Λ είναι δύο σημεία του Σ_1, τότε υποθέτουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $K - \Lambda - A_j$, $A - K - \Lambda$ και προς άτοπο ότι υπάρχει X του συμπληρώματος το οποίο είναι μεταξύ των K, Λ. Επειδή λοιπόν $K - X - \Lambda$, $X \in \Sigma_1^c$ και $K - \Lambda - A_j$, $A - K - \Lambda$ θα ισχύει:

$$X \in \Sigma_1^c \;\textbf{και}\; X \in \underrightarrow{A_j A} \Rightarrow X \in \Sigma_1$$

δηλαδή:

$$X \in \Sigma_1^c \textbf{ και } X \in \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \underrightarrow{A_i A} \Rightarrow X \in \Sigma_1$$

Αυτό είναι άτοπο, αφού συγχρόνως $X \in \Sigma_1$ και $X \in \Sigma_1^c$. Επίσης, κανένα από τα Σ_1, Σ_2 δεν είναι κενά, αφού $\{A_i \mid i \in \mathbb{N}\} \neq \emptyset$ και αντίστοιχα $\underrightarrow{A'Y} \cap \Sigma_1 = \emptyset$, όπου Y είναι ένα σημείο για το οποίο ισχύει $A - A' - Y$.
Από το αξίωμα τομών του Dedekind, θα μπορεί να βρεθεί $O \in AA'$ τέτοιο ώστε $\forall P_1, P_2 \in l:\ P_1 - O - P_2 \Leftrightarrow [P_1 \in \Sigma_1, P_2 \in \Sigma_2]$ **ή** $[P_2 \in \Sigma_1, P_1 \in \Sigma_2]$. Αυτό ουσιαστικά δείχνει ότι $\underrightarrow{OA} - \{O\} = \Sigma_1$ και κατ' επέκταση ότι:

$$\lim_{i\to\infty} AA_i = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} AA_i = AO - \{O\}$$

□

Ε. Τα αξιώματα παραλληλίας της ευκλείδειας γεωμετρίας στις διάφορές τους διατυπώσεις:

1. *(Κατά Hilbert)* Το αξίωμα των παραλλήλων για την ευκλείδεια γεωμετρία: Για κάθε ευθεία l και για κάθε $A \notin l$, υπάρχει το πολύ μία ευθεία $l' \ni A$ που δεν συναντά την l.

2. *(Ευκλείδης)* Το $5^{\text{ο}}$ Αίτημα του Ευκλείδη: Αν δύο ευθείες τέμνονται από μία τρίτη έτσι ώστε οι εντός και επί τα αυτά γωνίες να έχουν άθροισμα μικρότερο των δύο ορθών, τότε οι ευθείες τέμνονται και το σημείο τομής βρίσκεται στο ημιεπίπεδο που ορίζουν οι γωνίες.

Ορισμός 1.9. *Δύο ευθείες l, m θα λέγονται παράλληλες εάν δεν τέμνονται ή εάν ταυτίζονται. Δηλαδή εάν $l \cap m = \emptyset$ ή $l = m$.*

Πρόταση 1.3 Οι διατυπώσεις 1. και 2. είναι μεταξύ τους ισοδύναμες.

Στα παρακάτω θα συμβολίζουμε με $=_c$ την ίση πληθικότητα δύο συνόλων, ενώ αντίστοιχα με $\leqslant_c$ και $\geqslant_c$ την μικρότερη και μεγαλύτερη πληθικότητα αντίστοιχα.

Θεώρημα 1.3 (Ευθείες, γωνίες και πραγματικοί αριθμοί). Τα για κάθε τρία μη συνευθειακά σημεία A, B, Γ και για κάθε ευθεία l ισχύει ότι σύνολα $\widehat{AB\Gamma}, \mathcal{J}(l)$ είναι υπεραριθμήσιμα και ισοπληθικά με το $\mathbb{R}$.

Απόδειξη: Πράγματι, αρχικά θα δείξουμε ότι $\mathcal{J}(l) =_c \mathbb{N} \times \{0,1\}^{\mathbb{N}} =_c \mathbb{R}$. Θεωρούμε OK ένα ε.τ. επί της l και ένα σημείο $P \in l$.

i. Θεωρούμε n τον μέγιστο φυσικό αριθμό για τον οποίον το $n \cdot OK$ με αρχή το O δεν περιέχει το P. Εάν τέτοιο n δεν υπάρχει, θέτουμε $n = 0$.

ii. Θεωρούμε $s_1 = 1$ και n_1 τον ελάχιστο φυσικό αριθμό για τον οποίον το τμήμα $n \cdot OK + \dfrac{s_1}{2^{n_1}} \cdot OK$ με αρχή το O δεν περιέχει το P. Εάν τέτοιο n_1 δεν υπάρχει, θέτουμε $n_1 = s_1 = 0$.

iii. Θεωρούμε $s_2 = 1$ και n_2 τον ελάχιστο φυσικό αριθμό για τον οποίον το τμήμα $n \cdot OK + \displaystyle\sum_{i=1}^{2} \frac{s_i}{2^{n_i}} \cdot OK$ με αρχή το O δεν περιέχει το P. Εάν τέτοιο n_2 δεν υπάρχει, θέτουμε $n_2 = s_2 = 0$.

iv. Συνεχίζουμε επαγωγικά.

Θεωρούμε μια απεικόνηση $\mathcal{E} : \mathcal{J}(l) \to \mathbb{N} \times \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ ως εξής: Σε κάθε σημείο $P \in \mathcal{J}(l)$ αντιστοιχούμε το διάνυσμα:

$$\mathcal{E}(P) = (n, s_1, s_2, \cdots, s_n, \cdots)$$

Η εν λόγω αντιστοιχία είναι $1-1$. Αν δύο σημεία P, Q διαφέρουν, θα απέχουν τουλάχιστον $1/2^j$ για κάποιον j, οπότε και οι αντίστοιχες ακολουθίες που αυτά ορίζουν μέσω της $\mathcal{E}$ επίσης θα διαφέρουν. Το επί δεν ισχύει (για παράδειγμα τι αντίστροφη εικόνα θα είχε η ακολουθία των 1;), οπότε εν γένει έχουμε δείξει ότι $\mathcal{J}(l) \leqslant_c \mathbb{N} \times \{0,1\}^{\mathbb{N}}$.

Για να αποδείξουμε την ισοπληθικότητα, ως ενδιάμεσο βήμα θα δείξουμε ότι $\mathbb{N} \times \{0,1\}^{\mathbb{N}} =_c \mathbb{R}$. Αυτό θα γίνει συνοπτικά μέσω των ακόλουθων ισοπληθικοτήτων:

$$\mathbb{N} \times \{0,1\}^{\mathbb{N}} =_c \mathbb{N} \times \mathbb{R} \overset{\forall n\in\mathbb{N}}{=_c} \mathbb{N} \times [n, n+1) =_c \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [n, n+1) = [1, \infty) =_c \mathbb{R}$$

Οπότε για να δείξουμε ότι $\mathcal{J}(l) =_c \mathbb{N} \times \{0,1\}^{\mathbb{N}} =_c \mathbb{R}$, αρκεί να δείξουμε ότι $\mathbb{R} \leqslant_c \mathcal{J}(l)$ (ή ισοδύναμα $[0,1] \leqslant_c \mathcal{J}(l)$).

Για τον σκοπό αυτόν, θεωρούμε την απεικόνιση $\mathcal{G} : [0,1] \to \mathcal{J}(l)$ η οποία ορίζεται ως εξής: Αν $(a_1, a_2, \cdots)$ είναι μια διαδική αναπαράσταση ενός $x \in [0,1]$, τότε:

$$\mathcal{G}(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i \cdot OK}{2^i}$$

Από το **Θεώρημα 1.2: *Όρια ακολουθιών με στοιχεία του*** $\mathcal{P}$ η συνάρτηση $\mathcal{G}$ έχει πράγματι εικόνα στο $\mathcal{J}(l)$. Επιπλέον, είναι $1-1$, οπότε $[0,1] \leqslant_c \mathcal{J}(l)$. Αυτά αποδεικνύουν την εν λόγω ισοπληθικότητα.

Όσον αφορά τις γωνίες, έστω $\widehat{AB\Gamma}$ η γωνία των A, B, Γ με κορυφή την B. Θεωρούμε Γ, Δ δύο σημεία τα οποία είναι εσωτερικά των πλευρών της γωνίας και παρατηρούμε ότι:

$$\mathbb{R} \leqslant_c \widehat{AB\Gamma} = \bigcup_{P \in \Gamma\Delta} \underrightarrow{BP} \leqslant_c \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2 =_c \mathbb{R} \Rightarrow \widehat{AB\Gamma} =_c \mathbb{R}$$

$\square$

Παρατήρηση 1.3.
I. *Το **Θεώρημα 1.3 (Ευθείες, γωνίες και πραγματικοί αριθμοί)** σε συνδυασμό με το αξίωμα Αρχιμήδη - Ευδόξου για τα ευθύγραμμα τμήματα (**Δ.1.**) δίνουν ότι κάθε ευθύγραμμο τμήμα είναι ισοπληθικό με το* $\mathbb{R}$. *Επιπλέον,* $\{AB \mid A, B \in \mathcal{P}\} \big/ _{\cong} =_c \mathbb{R}$.

II. *Το **I.** δίνει ότι κάθε ημιευθεία είναι ισοπληθική με το* $\mathbb{R}$.

III. *Το **Θεώρημα 1.3 (Ευθείες, γωνίες και πραγματικοί αριθμοί)** δίνει ότι το σύνολο των σημείων* $\mathcal{P}$ *της γεωμετρίας είναι ισοπληθικό με το* $\mathbb{R}$, *αφού το επίπεδο μπορεί να χωριστεί σε τέσσερεις ορθές γωνίες μέσω δύο κάθετων ευθειών.*

IV. *Το **III.** δίνει ότι σύνολο των ευθειών* $\mathcal{L}$ *της γεωμετρίας είναι ισοπληθικό με το* $\mathbb{R}$.

V. *Το **III.** επίσης δίνει ότι σύνολο των γωνιών της γεωμετρίας είναι ισοπληθικό με το* $\mathbb{R}$.

VI. *Θεωρούμε* l, m *δύο κάθετες ευθείες και επί τις* m *δύο σημεία* A, A' *που ισαπέχουν από την* l. *Για κάθε γωνία* θ *υπάρχουν ακριβώς δύο σημεία* $P, P' \in l$ *τέτοια ώστε* $\widehat{MP[l \cap m]} \cong \widehat{MP'[l \cap m]} \cong \dfrac{\theta}{2}$. *Κατ' επέκτασην,* $\widehat{MPM'} \cong \widehat{MP'M'} \cong \theta$. *Αυτό δείχνει ότι* $\{\widehat{AB\Gamma} \mid A, B, \Gamma \in \mathcal{P},\ A \neq B \neq \Gamma\} \big/ _{\cong} =_c \mathbb{R}$.

Παρατήρηση 1.4.
I. *Σε κάθε ευθύγραμμο τμήμα μπορούμε να αντιστοιχίσουμε μία τιμή, έναν θετικό πραγματικό αριθμό, έτσι ώστε η αντιστοιχία να είναι αύξουσα και σύμφωνα ευθύγραμμα τμήματα να έχουν ίσες τιμές. Πράγματι, θεωρούμε την απεικόνιση* $\mathcal{R} : \{AB \mid A, B \in \mathcal{P}\} \to \mathbb{R}^+$ *η οποία ορίζεται ως εξής:*

- *Θεωρούμε μια ημιευθεία* $\underrightarrow{OX}$.
- *Θεωρούμε ευθύγραμμο τμήμα* OK *επί τις ημιευθείας* $\underrightarrow{OX}$.
- *Για κάθε ευθύγραμμο τμήμα* AB, *θεωρούμε σημείο* $P \in \underrightarrow{OX}$ *τέτοιο ώστε* $OP \cong AB$.
- *Για το σημείο* P *θεωρούμε την (μοναδική) ακολουθία* $\left(n \cdot OK + \sum_{i=1}^{k} \frac{s_i}{2^{n_i}} \cdot OK\right)_{k \in \mathbb{N}}$, *η οποία κατασκευάζεται όπως στο **Θεώρημα 1.3 (Ευθείες, γωνίες και πραγματικοί αριθμοί)**, και για την οποία ισχύει:*

$$\lim_{\mathbb{N} \ni k \to \infty} \left[n \cdot OK + \sum_{i=1}^{k} \frac{s_i}{2^{n_i}} \cdot OK \right] = OP - \{P\}$$

- *Ορίζουμε* $\mathcal{R}(AB) = n + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{s_i}{2^{n_i}}$.

II. *Ανάλογη διαδικασία μπορεί να γίνει για τις γωνίες. Η κατασκευή σε αυτό το μέρος θα γίνει επαναλαμβάνοντας τμήματα μιας (τυχαίας) οξείας γωνίας $\widehat{\Lambda OK}$. Μπορεί να βρεθεί δηλαδή μία αύξουσα αντιστοιχία $\mathcal{A} : \{\widehat{AB\Gamma} \mid A, B, \Gamma \in \mathcal{P}\} \to [0, \pi]$ τέτοια ώστε σύμφωνες γωνίες να έχουν ίσες τιμές και επιπλέον:*

$$\mathcal{A}(\widehat{AB\Gamma}) = \frac{\pi}{c_{\widehat{\Lambda OK}}} \cdot \left(m + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{t_i}{2^{m_i}} \right), \text{ όπου } c_{\widehat{\Lambda OK}} \in \mathbb{R}^+ \text{ είναι τέτοιο ώστε } c_{\widehat{\Lambda OK}} \cdot \widehat{\Lambda OK} \cong 2\perp$$

Με $\perp$ συμβολίζουμε την ορθή γωνία.

Είναι σαφές από την προαναφερθήσα ανάλυσή μας ότι δύο ευθύγραμμα τμήματα AB, $A'B'$ είναι σύμφωνα εάν και μόνο αν $\mathcal{R}(AB) = \mathcal{R}(A'B')$. Αντίστοιχα για τις γωνίες, δύο γωνίες $\widehat{AB\Gamma}$, $\widehat{A'B'\Gamma'}$ είναι σύμφωνες εάν και μόνο αν $\mathcal{A}(\widehat{AB\Gamma}) = \mathcal{A}(\widehat{A'B'\Gamma'})$.

Θεωρούμε λοιπόν την αλγεβρική δομή του πραγματικού διανυσματικού χώρου $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$. Αν κανείς δει τη δομή αυτή γεωμετρικά, μπορεί να ορίσει ως σύνολο σημείων το $\mathbb{R}^2$ και ως σύνολο ευθειών το σύνολο των μετατοπισμένων (ή μη) υποχώρων διάστασης 1. Ορίζοντας καλάλληλα τις σχέσεις του μεταξύ και τις συμφωνίας, θα δείξουμε ότι η ευκλείδεια γεωμετρία μπορεί να εκφραστεί μέσω του $\mathbb{R}^2$.

Τα αξιώματα της ομάδας **Α.** ισχύουν τετριμμένα.

Για τα αξιώματα της ομάδας **Β.**:

Η σχέση του μεταξύ ορίζεται με τον προφανή τρόπο. Ας θεωρήσουμε $l = a + \text{span } v$ έναν μετατοπισμένο υπόχωρο και $a+x, a+y, a+z \in l$. Βρίσκουμε πραγματικούς αριθμούς $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ τέτοιους ώστε $a+x = \lambda_1 \cdot v$, $a + y = \lambda_2 \cdot v$, $a + x = \lambda_3 \cdot v$ και ορίζουμε:

$$(a + x) - (a + y) - (a + z) :\Leftrightarrow [\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \lambda_3] \textbf{ ή } [\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \lambda_3]$$

Για τα αξιώματα της ομάδας **Γ.**:

Η σχέση της συμφωνίας των ευθυγράμμων τμημάτων ορίζεται επηρεασμένη από την **Παρατήρηση 1.4.**. Δύο ευθύγραμμα τμήματα είναι σύμφωνα αν έχουν ίσα μήκη.

Η σχέση της συμφωνίας των γωνιών ορίζεται αναλόγως. Δύο γωνίες είναι σύμφωνες αν έχουν ίσα μέτρα.

Για το αξίωμα της ομάδας **Δ.**:

Το αξίωμα των τομών του Dedekind αντιστοιχεί στην αρχή της πληρότητας των πραγματικών αριθμών.

Για το αξίωμα της ομάδας **Ε.**:

Η σχέση παραλληλίας της γεωμετρίας αντιστοιχεί στην παραλληλία των μετατοπισμένων υποχώρων. Δεδομένου ενός σημείου b και ενός μετατοπισμένου υποχώρου $a + \text{span } v$, ο μετατοπισμένος υπόχωρος $b + \text{span } v$ είναι παράλληλος του $a + \text{span } v$.

Να υπενθυμίσουμε ότι, για $\Lambda-$διανυσματικό χώρο A, το σύνολο $\text{span } A$ ορίζεται ως:

$$\text{span } A := \left\{ \sum_{k=1}^{s} \lambda_k a_k \mid \lambda_k \in \Lambda,\ a_k \in A,\ s \in \mathbb{N} \right\}$$

Ιδιαιτέρως ορίζουμε $\text{span } a := \text{span } \{a\}$.

1.3 Η αλγεβρική δομή των ευκλειδείων χώρων

Η ταύτιση της (εν γένει πολυδιάστατης) γεωμετρίας με τους $\mathbb{R}^n$ προσφέρει πληθώρα «εργαλείων» για τη μελέτη της, κι ένα απ' αυτά είναι η πρόσδοση μιας δομής διανυσματικού χώρου.

Ορισμός 1.10 (Διανυσματικοί χώροι)**.** *Έστω Λ ένα σώμα με πράξεις $+, \cdot$. Μια τριάδα $(A, \oplus, \odot)$, όπου το A είναι σύνολο και οι $\oplus, \odot$ πράξεις, θα καλείται $\Lambda-$διανυσματικός χώρος αν:*

- *Η αλγεβρική δομή $(A, \oplus)$ είναι αντιμεταθετική ομάδα. Δηλαδή αν:*
  - ◇ $A \neq \emptyset$.
  - ◇ *Η $\oplus$ είναι καλά ορισμένη, προσεταιριστική και αντιμεταθετική.*
  - ◇ *Υπάρχει μηδενικό στοιχείο ως προς την $\oplus$ (ουδέτερο της πρόσθεσης).*

◇ *Για κάθε στοιχείο του A, υπάρχει το αντίθετό του ως προς την $\oplus$.*

- *Η πράξη $\odot$, είναι αυτό που λέμε, ≪εξωτερική≫ με σύνολο συντελεστών στο Λ. Για κάθε $a, b \in A$ και για κάθε $\kappa, \lambda \in \Lambda$ ισχύουν:*

  ◇ $\lambda \odot (a \oplus b) = (\lambda \odot a) \oplus (\lambda \odot b)$.

  ◇ $(\kappa + \lambda) \odot a = (\kappa \odot a) \oplus (\lambda \odot a)$.

  ◇ $(\kappa \cdot \lambda) \oplus a = \kappa \odot (\lambda \odot a)$.

Κάθε χώρος $\mathbb{R}^n$ είναι $\mathbb{R}-$διανυσματικός χώρος, εάν ορίσουμε τις δύο πράξεις ως εξής: για κάθε $a = (a_1, \cdots, a_n)$, $b = (b_1, \cdots, b_n)$ και $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$a + b := (a_1 + b_1, \cdots, a_n + b_n) \textbf{ και } \lambda \cdot a := (\lambda a_1, \cdots, \lambda a_n)$$

Οπότε οποιαδήποτε αληθής πρόταση υπεράνω διανυσματικών χώρων αληθεύει και σε αυτούς. Ένα πολύ σημαντικό τέτοιο αποτέλεσμα είναι η ύπαρξη (πεπερασμένης) βάσης των $\mathbb{R}^n$, καθώς επίσης και η μοναδικότητα της διάστασης. Κάθε χώρος $\mathbb{R}^n$ έχει βάση, και μάλιστα κάθε βάση του έχει ακριβώς το ίδιο πλήθος στοιχείων (μάλιστα n). Αυτό το n θα κελείται διάσταση του χώρου. Η βάση $E = \{e_1 = (1, 0, \cdots, 0), e_2 = (0, 1, \cdots, 0), \cdots, e_n = (0, 0, \cdots, 1)\}$ θα καλείται συνήθης βάση του $\mathbb{R}^n$ και είναι μια (όπως λέμε) ορθοκανονική βάση. Θα αναλύσουμε αργότερα τι σημαίνει αυτή η ορολογία - το σημαντικό είναι ότι μέσω ενός εσωτερικού γινομένου, οι συντεταγμένες που χρησιμοποιούμε για τον προσδιορισμό των σημείων βρίσκονται από ένα κάθετο σύστημα συντεταμένων, κι επιπλέον οι αποστάσεις μετρώνται ≪φυσιολογικά≫ (σύμφωνα με την προοπτική μας).

Πέρα από τον πληθάριθμο της βάσης, ειδικά στους $\mathbb{R}^n$, κανείς μπορεί να ορίσει λίγο διαφορετικά την διάσταση - το αναφέρουμε μόνο εγκυκλοπαιδικά. Εάν F είναι ένας ευκλείδειος χώρος, ορίζουμε ως διάσταση n αυτού του χώρου τον ελάχιστο αριθμό σημείων μείον ένα, τα οποία είναι σε γενική θέση και καθορίζουν πλήρως κάθε ισομετρία του χώρου. Αυτό φυσικά είναι απόρροια το ακόλουθου αποτελέσματος:

Πρόταση 1.4 Σε κάθε ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^n$ κάθε ισομετρία καθορίζεται μονοσήμαντα από $n + 1$ σημεία σε γενική θέση, κι ο αριθμός αυτός είναι ελάχιστος.

1.4 Οι ευκλείδειοι χώροι ως χώροι Banach κι ως χώροι Hilbert

Είναι σημαντικό κανείς να μπορεί να ορίσει μήκος ευθυγράμμων τμημάτων και μέτρο γωνιών στους χώρους $\mathbb{R}^n$, αφού αυτό χρειάζεται (όπως εξάλλου ήδη αναφέραμε) για να εξασφαλιστεί ότι αυτοί αποτελούν μοντέλο για την πολυδιάστατη ευκλείδεια γεωμετρία. Το μήκος στην ανάλυση εκφράζεται μέσω μετρικών και μετρικών χώρων.

Ορισμός 1.11 (Μετρικές). *Έστω X ένα σύνολο και d μια συνάρτηση $d : X \times X \to [0, \infty)$. Η d θα καλείται μετρική εάν:*

- *Για κάθε $x, y \in X$, εάν $d(x, y) = 0$ τότε $x = y$.*
- *Για κάθε $x, y \in X$ αληθεύει η συμμετρία $d(x, y) = d(y, x)$.*
- *Για κάθε $x, y, z \in X$ ισχύει η τριγωνική ανισότητα $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, x)$.*

Ορισμός 1.12 (Μετρικοί χώροι). *Έστω X ένα σύνολο και d μια συνάρτηση $d : X \times X \to [0, \infty)$ η οποία είναι μετρική. Το ζεύγος (X, d) θα καλείται μετρικός χώρος.*

Οι ευκλείδειοι χώροι είναι μετρικοί χώροι, και μάλιστα είναι πλήρεις μετρικοί χώροι. Δηλαδή, κάθε ακολουθία Cauchy σε αυτούς τους χώρους σίγουρα συγκλίνει. Στο $\mathbb{R}$ αυτό είναι γνωστό, για μεγαλύτερες δε διαστάσεις χρειάζεται να οριστεί μια έννοια σύγκλισης. Η αρχή έχει γίνει, δεδομένου ότι διαθέτουμε μια έννοια απόστασης - αυστηροί βέβαια ορισμοί θα δωθούν στο επόμενο κεφάλαιο.

Η εύρεση μιας μετρικής σε πολλές διαστάσεις γίνεται επηρεασμένη από την γεωμετρία του χώρου. Συγκεκριμένα στις τρεις διαστάσεις, εάν δύο σημεία $a = (a_1, a_2, a_3)$ και $b = (b_1, b_2, b_3)$ βρίσκονται στο $\mathbb{R}^3$, η απόσταση αυτών των δύο μπορεί να βρεθεί με τον εξής τρόπο: θεωρούμε το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο Π το οποίο έχει τις τριες κάθετες ακμές παράλληλες στους άξονες των x, y και z αντίστοιχα, και του οποίου η μία διαγώνιος είναι ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα a, b. Το Π έχει ακμές μηκών $|a_1 - b_1|$, $|a_2 - b_2|$, $|a_3 - b_3|$, κι επομένως με διαδοχική εφαρμογή (δύο φορές) του πυθαγορίου θεωρήματος, η διαγώνιος άκρων a, b έχει μήκος ακριβώς:

$$\sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2}$$

Εν γένει λοιπόν, σε πολυδιάστατους χώρους $\mathbb{R}^n$ κανείς μπορεί να ορίσει φυσιολογικά τη μετρική:

$$d(a,b) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n}(a_k - b_k)^2} \text{ για } a = (a_1, \cdots, a_n) \text{ και } b = (b_1, \cdots, b_n)$$

Η d είναι πράγματι μετρική, και για να επιβεβαιωθεί αυτό αρκεί να ελεγχθεί η τριγωνική ανισότητα (οι πρώτες δύο ιδιότητες ισχύουν τετριμμένα).

Ας θεωρήσουμε $c = (c_1, \cdots, c_n)$ διάνυσμα του $\mathbb{R}^n$. Παρατηρούμε ότι:

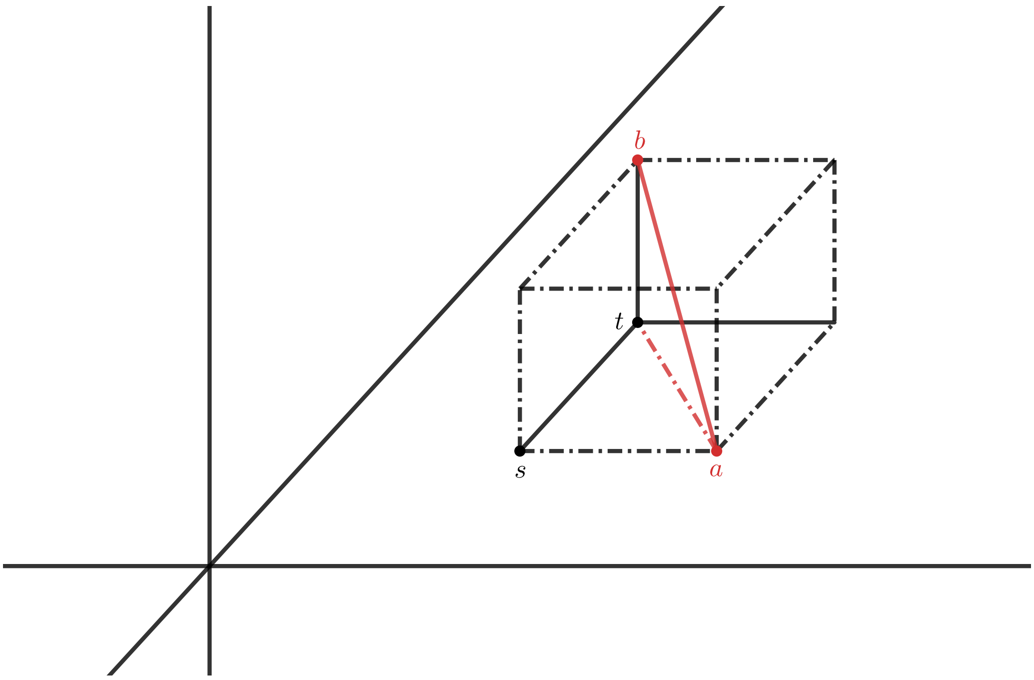
$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(a_k - b_k)^2} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n}(a_k - c_k + c_k - b_k)^2} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n}(a_k - c_k)^2 + \sum_{k=1}^{n}(c_k - b_k)^2 + 2\sum_{k=1}^{n}(a_k - c_k)(c_k - b_k)}$$

και χρησιμοποιώντας την ανισότητα Cauchy-Schwarz:

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k - c_k)(c_k - b_k) \leqslant \sqrt{\left(\sum_{k=1}^{n}(a_k - c_k)^2\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{n}(c_k - b_k)^2\right)}$$

έπεται η τριγωνική ανισότητα:

$$\begin{aligned}
\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(a_k - b_k)^2} &\leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n}(a_k - c_k)^2 + \sum_{k=1}^{n}(c_k - b_k)^2 + 2\sqrt{\left(\sum_{k=1}^{n}(a_k - c_k)^2\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{n}(c_k - b_k)^2\right)}} \\
&= \sqrt{\left(\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(a_k - c_k)^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n}(c_k - b_k)^2}\right)^2} \\
&= \sqrt{\sum_{k=1}^{n}(a_k - c_k)^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n}(c_k - b_k)^2}
\end{aligned}$$



Σχήμα (1.2.3): *Η εύρεση ενός φυσιολογικού τύπου απόστασης στις τρεις διαστάσεις γίνεται φέροντας το παραλληλεπίπεδο των διακεκομένων ακμών Π, και εφαρμόζοντας διαδοχικά δύο φορές ο πυθαγόρειο θεώρημα, μία φορά στο τρίγωνο $\overset{\triangle}{sta}$ κι άλλη μία στο $\overset{\triangle}{tab}$.*

Μια παρεμφερής αλλά ισχυρότερη έννοια είναι αυτή της νόρμας, την οποία ορίζουμε παρακάτω:

Ορισμός 1.13 (Νόρμα). *Έστω $(X, +, \cdot)$ ένας $\mathbb{R}-$διανυσματικός χώρος και $||\cdot||$ μια συνάρτηση $||\cdot|| : X \to [0, \infty)$. Η $||\cdot||$ θα καλείται νόρμα εάν:*

- *Για κάθε $x \in X$, εάν $||x|| = 0$ τότε $x = 0$.*
- *Για κάθε $x \in X$, $\lambda \in \mathbb{R}$ αληθεύει ότι $||\lambda x|| = |\lambda| \cdot ||x||$.*
- *Για κάθε $x, y \in X$ ισχύει η τριγωνική ανισότητα $||x + y|| \leqslant ||x|| + ||y||$.*

Ορισμός 1.14 (Χώρος με νόρμα). *Έστω $(X, +, \cdot)$ ένας $\mathbb{R}-$διανυσματικός χώρος και $||\cdot||$ μια νόρμα στον X. Το ζεύγος $(X, ||\cdot||)$ θα καλείται χώρος με νόρμα.*

Κάθε χώρος $\mathbb{R}^n$ είναι χώρος με νόρμα, και μάλιστα με την νόρμα:

$$||a|| := \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}, \text{ για } a = (a_1, \cdots, a_n)$$

Εμείς μπορούμε να φανταζόμαστε την νόρμα ως ένα τρόπο μέτρισης της απόστασης ενός σημείο από την αρχή των αξόνων, με επιπλέον μια υπόθεση συνέχειας (λόγω του δεύτερου σημείου (•)).

Η ιδιότητα του χώρου με νόρμα είναι ισχυρότερη απ' αυτήν του μετρικού χώρου, αφού κάθε νόρμα επάγει μια μετρική.

Πρόταση 1.5 Έστω $(X, ||\cdot||)$ ένας χώρος με νόρμα. Ορίζουμε τη συνάρτηση d με τύπο:

$$d(x, y) = ||x - y||$$

Η d είναι μετρική στον X, την οποία ονομάζουμε επαγόμενη μετρική.

Απόδειξη:

- Εάν $||x - y|| = 0$, τότε $x - y = 0$. Δηλαδή $x = y$.
- Για κάθε $x, y \in X$ ισχύει η συμμετρία $||x - y|| = ||-(y - x)|| = ||y - x||$.
- Για κάθε $x, y, z \in X$ ισχύει η τριγωνική ανισότητα $||x - y|| = ||x - z + z - y|| \leqslant ||x - z|| + ||z - y||$.

□

Κάθε ευκλείδειος χώρος $\mathbb{R}^n$ είναι πλήρης μετρικός χώρος, ως προς τη μετρική η οποία είναι επαγόμενη από μία νόρμα. Τέτοιοι χώροι στην ανάλυση λέγονται χώροι Banach.

Ορισμός 1.15 (Ευκλείδεια νόρμα). *Η νόρμα $||\cdot||$ (ή καμμιά φορά συμβολίζεται με $||\cdot||_2$) στον $\mathbb{R}^n$, η οποία ορίζεται για κάθε $a = (a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ ως εξής:*

$$||a|| := \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}$$

καλείται ευκλείδεια νόρμα στον $\mathbb{R}^n$. Από εδώ και στο εξής, οποτεδήποτε αναφερόμαστε στους $\mathbb{R}^n$ ως μετρικούς χώρους, θα υπονοούμε ότι η μετρική τους είναι η επαγόμενη της ευκλείδειας νόρμας.

Με αυτόν τον τρόπο καλύπτουμε τα προαπαιτούμενα για τον ορισμό του μήκους. Απομένει να οριστεί η έννοια της γωνίας στους $\mathbb{R}^n$, το οποίο θα επιτευχθεί μέσω των εσωτερικών γινομένων.

Ορισμός 1.16 (Εσωτερικό γινόμενο). *Έστω X ένα σύνολο το οποίο έχει δομή $\mathbb{R}-$διανυσματικού χώρου και $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση. Η $\langle \cdot, \cdot \rangle$ θα καλείται (πραγματικό) εσωτερικό γινόμενο αν:*

- *Είναι συμμετρική και διγραμμική - δηλαδή για $a, b, c \in X$ και $\lambda \in \mathbb{R}$ αληθεύει:*

$$\langle a, b \rangle = \langle b, a \rangle \textbf{ και } \langle a + \lambda b, c \rangle = \langle a, c \rangle + \lambda \langle b, c \rangle$$

- *Για κάθε $a \in X$, $\langle a, a \rangle \geqslant 0$.*
- *Για κάθε $a \in X$, $\langle a, a \rangle = 0 \Leftrightarrow a = 0$.*

Εάν για την συνάρτηση $\langle \cdot, \cdot \rangle$ δεν ισχυε η τρίτη ιδιότητα, θα την ονομάζαμε ημιεσωτερικό γινόμενο. Εμείς δεν θα ασχοληθούμε καθόλου με ημιεσωτερικά γινόμενα.

Ορισμός 1.17 (Χώροι με εσωτερικό γινόμενο). *Έστω X ένα σύνολο το οποίο έχει δομή $\mathbb{R}-$διανυσματικού χώρου και $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση η οποία είναι (πραγματικό) εσωτερικό γινόμενο. Θα καλούμε το ζεύγος $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ χώρο με εσωτερικό γινόμενο. Για τους χώρους με εσωτερικά γινόμενα χρησιμοποιείται (πιο σπάνια) η ορολογία του χώρου προ-Hilbert.*

Οι ευκλείδειοι χώροι είναι χώροι με εσωτερικό γινόμενο, και μάλιστα το:

$$\langle a, b \rangle := \sum_{k=1}^{n} a_k b_k, \text{ για } a = (a_1, \cdots, a_n) \text{ και } b = (b_1, \cdots, b_n)$$

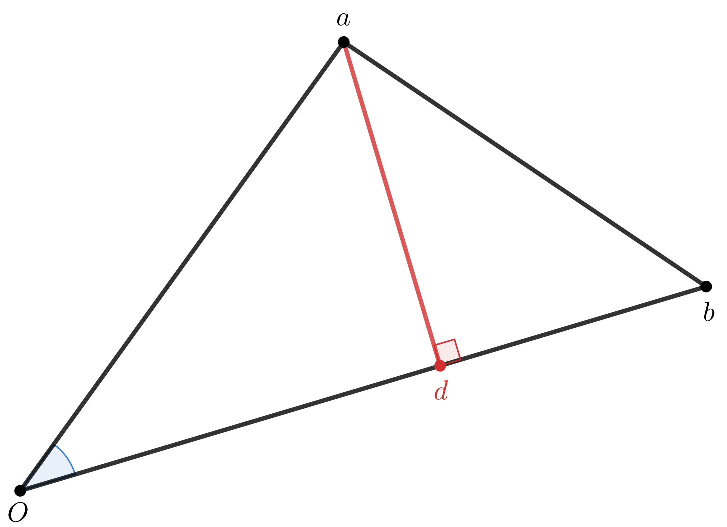
Ο συγκεκριμένος τύπος δεν είναι τυχαίος, αφού σχετίζεται πολύ στενά με τη γωνία που ξέρουμε στην ευκλείδεια γεωμετρία. Η σύνδεση αυτή θα φανεί από τις επόμενες προτάσεις.

Πρόταση 1.6 Έστω ένα τρίγωνο $\overset{\triangle}{O}ab$. Εάν $\theta = \widehat{aOb}$, ισχύει η ακόλουθη σχέση, η οποία είναι γνωστή ως γενικευμένο πυθαγόρειο θεώρημα:

$$\mathcal{R}(ab)^2 = \mathcal{R}(Oa)^2 + \mathcal{R}(Ob)^2 - 2\mathcal{R}(Oa)\mathcal{R}(Ob)\cos\theta$$

Να σημειωθεί ότι σε αυτή την πρόταση θα βλέπουμε τα σημεία σαν σημεία της γεωμετρίας και όχι στο $\mathbb{R}^2$. Επίσης, με $\mathcal{R}$ θα συμβολίζουμε τη συνάρτηση του μήκους των τμημάτων.

Απόδειξη: Θεωρούμε το τρίγωνο $\overset{\triangle}{O}ab$ και την κάθετο ad προς το Ob.



Παρατηρούμε ότι:

$$\mathcal{R}(ab)^2 = \mathcal{R}(ad)^2 + \mathcal{R}(db)^2 \textbf{ και } \mathcal{R}(Oa)^2 = \mathcal{R}(Od)^2 + \mathcal{R}(ad)^2$$

επομένως:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(ab)^2 &= \mathcal{R}(Oa)^2 - \mathcal{R}(Od)^2 + \mathcal{R}(db)^2 \\ &= \mathcal{R}(Oa)^2 - \mathcal{R}(Od)^2 + [\mathcal{R}(Ob) - \mathcal{R}(Od)]^2 \\ &= \mathcal{R}(Oa)^2 + \mathcal{R}(Ob)^2 - 2\mathcal{R}(Ob)\mathcal{R}(Od) \end{aligned}$$

Επειδή $\mathcal{R}(Od) = \mathcal{R}(Oa)\cos\theta$, έχουμε το ζητούμενο.

$$\mathcal{R}(ab)^2 = \mathcal{R}(Oa)^2 + \mathcal{R}(Ob)^2 - 2\mathcal{R}(Oa)\mathcal{R}(Ob)\cos\theta$$

$\square$

Πρόταση 1.7 Εάν $\langle \cdot, \cdot \rangle$ είναι το εσωτερικό γινόμενο του $\mathbb{R}^n$:

$$\langle a, b\rangle := \sum_{k=1}^{n} a_k b_k, \text{ για } a = (a_1, \cdots, a_n) \text{ και } b = (b_1, \cdots, b_n)$$

τότε:

$$\left[\sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}\right] \cdot \cos\theta = \langle a, b\rangle$$

Όπου θ είναι η γωνία $\widehat{aOb}$, $O = (0, 0, \cdots, 0)$. Ισοδύναμα, χρησιμοποιώντας τον συμβολισμό των ευκλειδείων νορμών:

$$||a|| \cdot ||b|| \cdot \cos\theta = \langle a, b\rangle$$

Απόδειξη: Εδώ να σημειωθεί ότι τα σημεία a, b θα τα βλέπουμε ως σημεία του $\mathbb{R}^n$ - θα χρησιμοποιήσουμε βέβαια την δυϊκότητα των ευκλειδείων χώρων $\mathbb{R}^n$ με τους γεωμετρικούς χώρους, καθώς θα χρησμοποιήσουμε την **Πρόταση 1.6**.

Από την **Πρόταση 1.6** έχουμε ότι:

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k - b_k)^2 = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + \sum_{k=1}^{n} b_k^2 - 2\left[\sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}\right] \cdot \cos\theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = -2\left[\sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}\right] \cdot \cos\theta$$

Επομένως:

$$\left[\sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}\right] \cdot \cos\theta = \langle a, b\rangle$$

□

Ο ορισμός λοιπόν του εσωτερικού γινομένου που δώσαμε προηγουμένως μας δίνει έναν τρόπο υπολογισμού των γωνιών. Αυτό συμβαίνει σε κάθε εσωτερικό γινόμενο βέβαια, όπως θα φανεί με την απόδειξη της ανισότητας Cauchy - Schwarz για τα εσωτερικά γινόμενα. Το ιδιαίτερο χαρακτηριστικό με το συγκεκριμένο εσωτερικό γινόμενο είναι ότι μπορεί να μας δώσει μέτρο γωνιών που συμφωνεί με τον συνήθη τρόπο υπολογισμού τους.

Θεώρημα 1.4 (Ανισότητα Cauchy - Schwarz για εσωτερικά γινόμενα). Για κάθε εσωτερικό γινόμενο $\langle \cdot, \cdot \rangle$ του $\mathbb{R}-$διανυσματικού χώρου X ισχύει η ανισότητα:

$$\langle a, b\rangle \leqslant \sqrt{\langle a, a\rangle} \cdot \sqrt{\langle b, b\rangle} \text{ για } a, b \in X$$

Κατ' επέκταση:

$$\left|\frac{\langle a, b\rangle}{\sqrt{\langle a, a\rangle} \cdot \sqrt{\langle b, b\rangle}}\right| \leqslant 1$$

και το μέτρο γωνίας $\theta \in [0, \pi]$ των a, b ορίζεται καλώς:

$$\cos\theta := \frac{\langle a, b\rangle}{\sqrt{\langle a, a\rangle} \cdot \sqrt{\langle b, b\rangle}}$$

είτε αυτό αντιπροσωπεύει τον συνήθη τρόπο μέτρισης γωνιών, είτε όχι.

Απόδειξη: Για κάθε $s, t \in \mathbb{R}^n$ ισχύει η σχέση:

$$\langle s - t, s - t\rangle \geqslant 0 \Rightarrow \langle s, s\rangle - 2\langle s, t\rangle + \langle t, t\rangle \geqslant 0 \Rightarrow 2\langle s, t\rangle \leqslant \langle s, s\rangle + \langle t, t\rangle$$

η οποία προκύπτει σχετικά άμεσα από τις ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου. Θέτοντας τώρα:

$$s = \frac{a}{\sqrt{\langle a, a\rangle}} \textbf{ και } t = \frac{b}{\sqrt{\langle b, b\rangle}}$$

προκύπτει η ανισότητα Cauchy - Schwarz.

$$2\left\langle \frac{a}{\sqrt{\langle a,a\rangle}}, \frac{b}{\sqrt{\langle b,b\rangle}} \right\rangle \leqslant \left\langle \frac{a}{\sqrt{\langle a,a\rangle}}, \frac{a}{\sqrt{\langle a,a\rangle}} \right\rangle + \left\langle \frac{b}{\sqrt{\langle b,b\rangle}}, \frac{b}{\sqrt{\langle b,b\rangle}} \right\rangle = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\langle \frac{a}{\sqrt{\langle a,a\rangle}}, \frac{b}{\sqrt{\langle b,b\rangle}} \right\rangle \leqslant 1 \Rightarrow \langle a,b\rangle \leqslant \sqrt{\langle a,a\rangle}\cdot\sqrt{\langle b,b\rangle}$$

Φυσικά η απόδειξη που δώσαμε ισχύει για την περίπτωση όπου $\langle a,a\rangle$, $\langle b,b\rangle \neq 0$ - η περίπτωση του μηδενός είναι σχετικά τετριμμένη. Εάν έστω κι ένα από αυτά τα εσωτερικά γινόμενα ήταν 0, υποθέτουμε χωρίς περιορισμό της γενικότητας ότι $\langle a,a\rangle = 0$ κι άρα $a = 0$. Επειδή $\langle 0,b\rangle = \langle b-b,b\rangle = \langle b,b\rangle - \langle b,b\rangle$, έχουμε ότι $\langle 0,b\rangle = 0$. Οπότε:

$$\langle a,b\rangle = \langle 0,b\rangle = 0 \leqslant 0 = \sqrt{\langle 0,0\rangle}\cdot\sqrt{\langle b,b\rangle} = \sqrt{\langle a,a\rangle}\cdot\sqrt{\langle b,b\rangle}$$

Αυτό αποδεικνύει το θεώρημα. Λέμε ότι το μέτρο γωνίας ορίζεται «είτε αυτό συμφωνεί με τον συνήθη τρόπο μέτρισης γωνιών είτε όχι», στην πραγματικότητα όμως κάθε δύο $n-$διάστατοι χώροι με εσωτερικό γινόμενο είναι ισόμορφοι (παραπέμπεστε στο [5], **Παρατήρηση (8.1), II**).

□

Ειδική περίπτωση αποτελεί το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο:

$$\langle a,b\rangle := \sum_{k=1}^{n} a_k b_k, \text{ για } a = (a_1,\cdots,a_n) \text{ και } b = (b_1,\cdots,b_n)$$

για το οποίο η ανισότητα Cauchy - Schwarz για εσωτερικά γινόμενα αποδεικνύει την γνωστή ανισότητα Cauchy - Schwarz για τους πραγματικούς αριθμούς.

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}\cdot\sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}$$

Εάν τώρα κανείς διαθέτει έναν χώρο με εσωτερικό γινόμενο $(X,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ μπορεί να ορίσει επαγόμενο χώρο με νόρμα, μέσω της λεγόμενης επαγόμενης νόρμας. Και φυσικά (από την **Πρόταση 1.5**) μπορεί επιπλέον να ορίσει μετρικό χώρο. Η ιδιότητα λοιπόν του χώρου με εσωτερικό γινόμενο είναι ισχυρότερη αυτής του χώρου με νόρμα, πόσο μάλλον του μετρικού χώρου.

Πρόταση 1.8 Έστω $(X,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Ορίζουμε τη συνάρτηση με τύπο:

$$N(a) = \sqrt{\langle a,a\rangle}, \text{ για } a \in X$$

Η N είναι νόρμα στον X, την οποία ονομάζουμε επαγόμενη νόρμα.

Απόδειξη: Κατ' αρχάς η συνάρτηση N είναι καλώς ορισμένη, αφού $\langle a,a\rangle \geqslant 0$. Για να δείξουμε ότι είναι νόρμα, ελέγχουμε διαδοχικά τις απαιτήσεις του ορισμού.

- Εάν $N(a) = 0$, τότε $\langle a,a\rangle = 0$ το οποίο εξασφαλίζει ότι $a = 0$.
- Για κάθε $a \in X$, $\lambda \in \mathbb{R}$ αληθεύει ότι $N(\lambda a) = \sqrt{\langle \lambda a,\lambda a\rangle} = \sqrt{\lambda^2}\cdot\sqrt{\langle a,a\rangle} = |\lambda|\cdot N(a)$.
- Για κάθε $a,b \in X$ ισχύει η τριγωνική ανισότητα. Πράγματι, αυτό είναι απόρροια της ανισότητας Cauchy - Schwarz για τα εσωτερικά γινόμενα:

$$\begin{aligned} N(a+b) &= \sqrt{\langle a+b,a+b\rangle} \\ &= \sqrt{\langle a,a\rangle + 2\langle a,b\rangle + \langle b,b\rangle} \\ &\leqslant \sqrt{\langle a,a\rangle + 2\sqrt{\langle a,a\rangle}\cdot\sqrt{\langle b,b\rangle} + \langle b,b\rangle} \\ &= \sqrt{\left(\sqrt{\langle a,a\rangle} + \sqrt{\langle b,b\rangle}\right)^2} \\ &= \sqrt{\langle a,a\rangle} + \sqrt{\langle b,b\rangle} \\ &= N(a) + N(b) \end{aligned}$$

□

Οι ευκλείδειοι χώροι $\mathbb{R}^n$ μπορούν να θεωρηθούν με το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο:

$$\langle a, b\rangle := \sum_{k=1}^{n} a_k b_k, \text{ για } a = (a_1, \cdots, a_n) \text{ και } b = (b_1, \cdots, b_n)$$

και μάλιστα η αντίστοιχη επαγόμενη νόρμα είναι η ευκλείδεια νόρμα $||\cdot|| = ||\cdot||_2$. Ο τρόπος λοιπόν μέτρισης των γωνιών μέσω του συνήθους εσωτερικού γινομένου μπορεί να μας δώσει έναν φυσιολογικό τρόπο μέτρισης του μήκους.

Σύμβαση: *Από εδώ και στο εξής, οποτεδήποτε αναφερόμαστε στους $\mathbb{R}^n$ ως χώρους με εσωτερικό γινόμενο, θα υπονοούμε ότι το εσωτερικό γινόμενο σε αυτούς είναι το σύνηθες.*

Ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο ο οποίος είναι πλήρης ως προς τη μετρική που επάγεται από αυτό ονομάζετα χώρος Hilbert. Οι χώροι λοιπόν $\mathbb{R}^n$, εκτός από χώροι Banach, είναι και Hilbert.

1.5 Στοιχειώδης διανυσματικός λογισμός

Το υποκεφάλαιο αυτό πραγματεύεται με στοιχειώδη αποτελέσματα του διανυσματικού λογισμού, της μελέτης δηλαδή των προσανατολισμένων ευθυγράμμων τμημάτων. Πέρα από την μελέτη των ευθυγράμμων τμημάτων, ο προσανατολισμός είναι ιδιαίτερα χρήσιμος ιδίως στον τομέα της φυσικής, καθώς συνήθως εκφράζει την κατεύθυνση των δυνάμεων που ασκούνται σε ένα σώμα.

Ας υποθέσουμε ότι a και b είναι δύο σημεία του $\mathbb{R}^n$. Εδώ θα συμβολίζουμε το ευθύγραμμο τμήμα των a, b με ab, οπότε καλό θα ήταν κανείς να προσέξει να μην συγχύσει τους συμβολισμούς των εσωτερικών γινομένων με των ευθυγράμμων τμημάτων. Σε άλλες παρουσιάσεις τα εσωτερικά γινόμενα συμβολίζονται με $a \cdot b$ και όχι με $\langle a, b\rangle$.

Ορισμός 1.18 (Ελεύθερα διανύσματα)**.** *Έστω a, b δύο σημεία του $\mathbb{R}^n$. Ο ορισμός που θα δώσουμε γίνεται γενικότερος, εάν τα a, b παρθούν ως σημεία της γεωμετρίας. Δεδομένου όμως κάποιου είδους δυϊσμού, όπως αυτόν στο υποκεφάλαιο **1.2**, η μελέτη μας μπορεί να περιοριστεί στους $\mathbb{R}^n$. Ορίζουμε ως διάνυσμα $\overrightarrow{ab}$ το προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα ab, με αρχή το a και πέρας το b. Το $\overrightarrow{ab}$ λέγεται επίσης ελεύθερο διάνυσμα.*

Ορισμός 1.19 (Εφαρμοστά διανύσματα)**.** *Έστω a, b δύο σημεία του $\mathbb{R}^n$ και $\overrightarrow{ab}$ το ελεύθερο διάνυσμα με αρχή το a και πέρας το b. Μπορούμε ότι μεταφέρουμε παράλληλα το $\overrightarrow{ab}$ έτσι ώστε το σημείο a να ταυτιστεί με το O, οπότε παίρνουμε ένα ελεύθερο διάνυσμα $\overrightarrow{Oc}$. Ορίζουμε τώρα μια σχέση ισοδυναμίας μεταξύ ελεύθερων διανυσμάτων ως εξής:*

$$\overrightarrow{ab} \sim \overrightarrow{Oc}$$

Επιπλέον, ορίζουμε την αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία $\overrightarrow{Oc} \mapsto c$ και την επεικονική συνάρτηση $\overrightarrow{ab} \mapsto \overrightarrow{Oc} \mapsto c$. Η τελευταία ουσιαστικά μας δείχνει ότι, μετά από παράλληλη μεταφορά ενός ελεύθερου διανύσματος, μπορούμε να το φανταζόμαστε ως ένα σημείο του $\mathbb{R}^n$. Καλούμε λοιπόν το c εφαρμοστό διάνυσμα του $\overrightarrow{ab}$.

Το c κανονικά είναι ένα σημείο του $\mathbb{R}^n$, εμείς όμως μπορούμε να το φανταζόμαστε ως ένα διάνυσμα με αρχή το O και πέρας το c, το οποίο είναι παράλληλη μεταφορά του $\overrightarrow{ab}$, έτσι ώστε το a να συμπτύπτει με το O.

Η σχέση $\sim$ είναι πράγματι σχέση ισοδυναμίας, κι αφήνεται να το αποδείξετε ως άσκηση. Η «ταύτιση» αυτή των διανυσμάτων με σημεία του $\mathbb{R}^n$ είναι πολύ βοηθητική, αφού επιτρέπει την εκτέλεση πράξεων - ο $\mathbb{R}^n$, ας μην ξεχνάμε, έχει μια ισχυρή αλγεβρική δομή, ενός διανυσματικού χώρου.

Ορισμός 1.20 (Πράξεις μεταξύ διανυσμάτων)**.** *Έστω $\overrightarrow{xy}$, $\overrightarrow{xz}$ δύο ελεύθερα διανύσματα και c, d τα αντίστοιχα εφαρμοστά διανύσματα (τα ελεύθερα διανύσματα πρέπει να έχουν κοινή αρχή). Εάν επιπλέον $\lambda \in \mathbb{R}$, ορίζουμε την πρόσθεση και τον βαθμωτό πολλαπλασιασμό στα εφαρμοστά διανύσματα ως εξής:*

Πρόσθεση: *Για το $\overrightarrow{xy} + \overrightarrow{xz}$, θεωρούμε το διάνυσμα με αρχή το O και πέρας το $c + d$, το οποίο μεταφέρουμε παράλληλα έτσι ώστε να έχει αρχή το x. Το διάνυσμα που προκύπτει έπειτα από αυτήν την μεταφορά είναι το αποτέλεσμα της πρόθεσης.*

Βαθμωτός πολλαπλασιασμός: *Για το $\lambda \cdot \overrightarrow{xy}$, θεωρούμε το διάνυσμα με αρχή το O και πέρας το $\lambda \cdot c$, το* *οποίο μεταφέρουμε παράλληλα έτσι ώστε να έχει αρχή το x. Το διάνυσμα που προκύπτει έπειτα από αυτήν την μεταφορά είναι το αποτέλεσμα του βαθμωτού πολλαπλασιασμού.*

Επιπλέον, μπορεί να οριστεί γωνία μεταξύ δύο διανυσμάτων, πάλι βάσει αυτής της ταύτισης.

Ορισμός 1.21 (Γωνία διανυσμάτων)**.** *Έστω $\overrightarrow{xy}$, $\overrightarrow{zw}$ δύο διανύσματα και c, d τα αντίστοιχα εφαρμοστά διανύσματα. Ορίζουμε ως γωνία των δύο διανυσμάτων τον αριθμό $\theta \in [0, \pi]$, ο οποίος ορίζεται ως το μέτρο της γωνίας $\widehat{cOd}$.*

Εδώ ουσιαστικά κάνουμε μια ταύτιση της έννοιας της γωνίας με το μέτρο της - αυτό από εδώ και στο εξής θα είναι κοινή πρακτική μας.

Ορισμός 1.22 (Εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων)**.** *Έστω $\overrightarrow{xy}$, $\overrightarrow{zw}$ δύο διανύσματα και c, d τα αντίστοιχα ελεύθερα διανύσματα. Ορίζουμε το εσωτερικό γινόμενο των δύο διανυσμάτων $\overrightarrow{xy}$, $\overrightarrow{zw}$ με τον αναμενόμενο τρόπο:*

$$\langle \overrightarrow{xy}, \overrightarrow{zw} \rangle := \langle c, d \rangle$$

Έχοντας δώσει όλους αυτούς τους ορισμούς, είναι πλέον φανερό ότι οποτεδήποτε εμφανίζονται διανύσματα στη μελέτη μας, εμείς θα μπορούμε να εργαζόμαστε χρησιμοποιώντας εφαρμοστά διανύσματα μόνο. Απο εδώ και στο εξής λοιπόν εργαζόμαστε μόνο με εφαρμοστά διανύσματα.

Ορισμός 1.23 (Κάθετα και παράλληλα διανύσματα)**.**
Κάθετα διανύσματα: *Έστω $a, b \in \mathbb{R}^n$. Θα λέμε ότι τα a, b είναι κάθετα εάν μεταξύ τους σχηματίζουν γωνία $\pi/2$. Δηλαδή αν:*

$$\langle a, b \rangle = 0$$

Όταν το a είναι κάθετο στο b, θα γράφουμε $a \perp b$.

Παράλληλα διανύσματα: *Έστω $a, b \in \mathbb{R}^n$. Θα λέμε ότι τα a, b είναι παράλληλα εάν μεταξύ τους σχηματίζουν γωνία 0 ή π. Δηλαδή αν:*

$$|\langle a, b \rangle| = ||a|| \cdot ||b||$$

Όταν το a είναι παράλληλο στο b, θα γράφουμε $a \parallel b$.

*Και οι δύο ορισμοί είναι λογικοί, αν κανείς λάβει υπ' όψιν τον τρόπο ορισμού της γωνίας, στο **Θεώρημα 1.3 (Ανισότητα Cauchy - Schwarz για εσωτερικά γινόμενα)**.*

Στο υποκεφάλαιο **1.3** είδαμε ότι κάθε ευκλείδειος χώρος $\mathbb{R}^n$ μπορεί να ειδωθεί ως διανυσματικός χώρος, οπότε έχει βάση. Μία βάση $\mathbb{B}$ ενός $\Lambda-$διανυσματικού χώρου A (υπενθυμίζοντας κάπως γρήγορα) είναι ένα γραμμικώς ανεξάρτητο σύνολο του A το οποίο τον παράγει. Δηλαδή:

- Εάν $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k b_k = 0$ για κάποια $\lambda_k \in \Lambda$ και $b_k \in \mathbb{B}$, τότε αναγκαστικά $\lambda_k = 0$ για κάθε $1 \leqslant k \leqslant n$. Δεν υπάρχει δηλαδή μη τετριμμένος γραμμικός συνδιασμός του μηδενός.
- Για κάθε $a \in A$, υπάρχουν $\lambda_k \in \Lambda$ τέτοια ώστε $a = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k b_k$, για $b_k \in \mathbb{B}$.

Τα στοιχεία κάθε τέτοιας βάσης $\mathbb{B}$ ορίζουν υπόχωρους διάστασης 1, τους οποίους κανείς μπορεί να τους φαντάζεται ως τους «άξονες» του συστήματος συντεταγμένων. Επιπλέον, κάθε πεπερασμένης διάστασης διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο έχει ορθοκανονική βάση, αφού αληθεύει η διαδικασία Gram - Schmidt (την οποία βέβαια δεν θα αναλύσουμε, παρά μόνο θα την αναφέρουμε). Επομένως, κάθε πεπερασμένης διάστασης διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο έχει, αυτό που λέμε, ορθογώνια βάση - δηλαδή βάση της οποίας όλα τα στοιχεία είναι ανά δύο κάθετα.

Θεώρημα 1.5 (Διαδικασία Gram - Schmidt). Εάν $\mathbb{B} = \{b_k \mid 1 \leqslant k \leqslant n\}$ είναι ένα γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο σε έναν χώρο με εσωτερικό γινόμενο, τότε υπάρχει μια (γραμμικά ανεξάρτητη) ορθογώνια οικογένεια $\mathbb{E} = \{\varepsilon_k \mid \ \leqslant k \leqslant n\}$ τέτοια ώστε:

$$\text{span } \mathbb{B} = \text{span } \mathbb{E}$$

Μάλιστα η επιλογή της ορθογώνιας βάσης μπορεί να γίνει έτσι ώστε όλα τα διανύσματά της να έχουν μήκος 1, το οποίο φυσικά γίνεται πολλαπλασιάζοντας κάθε διάνυσμα με το αντίστροφο της νόρμας του. Μια τέτοια «κανονικοποιημένη» βάση δεν καλείται πλέον απλώς ορθογώνια, αλλά ορθοκανονική. Αυτή η διαδικασία «κανονικοποίησης» των διανυσμάτων είναι πολύ τυπική, γι' αυτό πολλές φορές η γραμμικώς ανεξάρτητη, ορθογώνια οικογένεια $\mathbb{E}$ του **Θεωρήματος 1.4 (Διαδικασία Gram - Schmidt)** παίρνεται κατ' ευθείαν γραμμικώς ανεξάρτητη, ορθοκανονική.

Στους $\mathbb{R}^n$, τέτοιες ορθοκανονικές ακολουθίες είναι οι $\mathbb{E} = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$, όπου e_k είναι το διάνυσμα όπου παντού έχει μηδενικά και μονάδα στην $k-$οστή θέση.

$$e_k = (0, 0, \cdots, 0, \overbrace{\;1\;}^{k-\text{θέση}}, 0, \cdots, 0)$$

Η ύπαρξη τέτοιων βάσεων στους $\mathbb{R}^n$ εξασφαλίζει την ύπαρξη συστημάτων κάθετων αξόνων, των οποίων η ≪αρίθμηση≫ είναι ομοιόμορφη - δεν έχουμε κάποιου είδους συστολοδιαστολή σε κάποιον άξονα.

Στη συνέχεια θα μας απασχολήσει η εύρεση κάθετου διανύσματος σε $n-1$ διανύσματα του $\mathbb{R}^n$. Η αναλυτική μελέτη θα γίνει για την περίπτωση $n = 3$.

Βιβλιογραφία

[1] Λεώνη Ευαγγελάτου Δάλλα (2015-2016) ***Απειροστικός Λογισμός III***, Σημειώσεις του μαθήματος (301), Ε.Κ.Π.Α., Τμήμα Μαθηματικών.

[2] Χατζηαφράτης Τηλέμαχος (2009) ***Απειροστικός Λογισμός σε πολλές μεταβλητές***, Συμμετρία.

[3] Παβέλης Α., Τόλης Χ., Φράγκος Α. (2021) ***Απειροστικός Λογισμός III - Μερικές Αποδείξεις***, Προπτυχιακή εργασία, Ε.Κ.Π.Α, Τμήμα Μαθηματικών.

[4] Γιαλελής Ν., Μπιτσούνη Β. (2021) ***Γεωμετρική Ανάλυση***, Σημειώσεις του μαθήματος (615), Ε.Κ.Π.Α., Τμήμα Μαθηματικών.

[5] Φράγκος Α. (2021) ***Εισαγωγή στην Επίπεδη Υπερβολική Γεωμετρία***, Προπτυχιακή εργασία, Ε.Κ.Π.Α, Τμήμα Μαθηματικών.

[6] Churchill R.V., Brown J.W. (2020) ***Μιγαδικές συναρτήσεις και εφαρμογές***, 2η έκδοση, Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης.

[7] Φράγκος Α. (2022) ***Πρόχειρες σημειώσεις στη Μιγαδική Ανάλυση I***, Προπτυχιακή εργασία, Ε.Κ.Π.Α, Τμήμα Μαθηματικών.