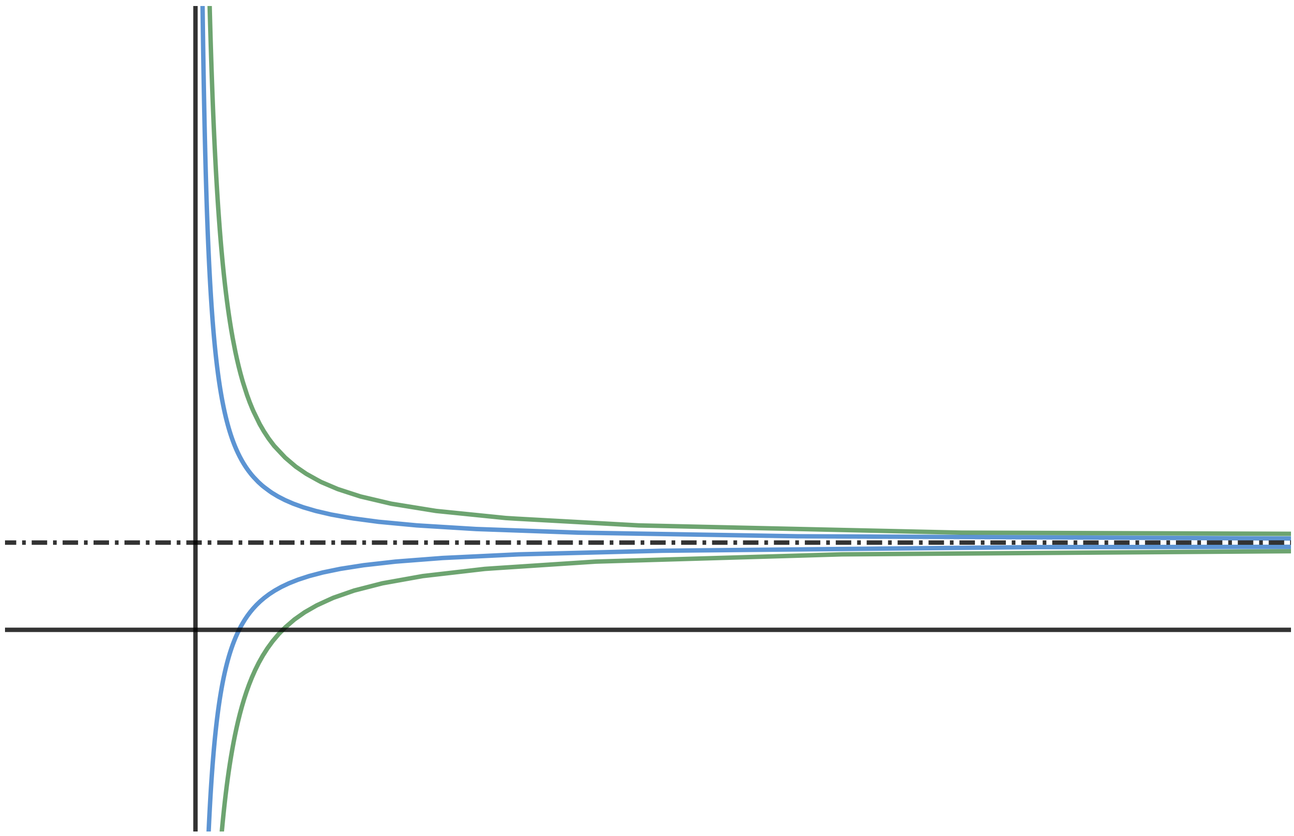
Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών
Τμήμα Μαθηματικών

Μάιος 2023

Η Γεωμετρία στις Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις

Πρόχειρες Σημειώσεις

Φράγκος Αναστάσιος



Τελευταία ενημέρωση: 02 Μαρτίου 2023

Πρόλογος

Αυτές οι (πολύ πρόχειρες) σημειώσεις δεν καλύπτουν κάποιο προπτυχιακό μάθημα του μαθηματικού του ΕΚΠΑ, γίνονται απλώς για να «διερευνηθούν» περισσότερο κάποια γεωμετρικά κομμάτια των συνήθων διαφορικών εξισώσεων, τα οποία θεωρώ ενδιαφέροντα.

Η θεματολογία εμπίπτει κυρίως στο μάθημα «*302. Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις*».

Ελπίζω να βοηθήσουν τον αναγνώστη στην κατανόηση κάποιων τμημάτων και εφαρμογών των συνήθων διαφορικών εξισώσεων. Ακόμη πιο ενδιαφέρον είναι πώς εμφανίζεται η γεωμετρία στις μερικές διαφορικές εξισώσεις, οπότε σας παροτρύνω να διερευνήσετε κι αυτό το κομμάτι. Δυστυχώς δεν υπάρχει χρόνος να καλυφθούν εδώ - ίσως βέβαια αυτό να είναι ένα κίνητρο!

Μπορείτε να με ενημερώσετε για διάφορα λάθη στην διεύθυνση ηλεκτρονικού ταχυδρομείου:

afragos@email.com

Οι επισημάνσεις σας είναι πολύ σημαντικές, καθώς λάθη είναι σίγουρο ότι έχουν συμβεί.

Φ.Α.

Συμβολισμοί

- $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, 4, \cdots\}$
- $\mathbb{Q}$ είναι το σύνολο των ρητών.
- $\mathbb{R}$ είναι το σύνολο των πραγματικών.
- $\subseteq$ είναι η σχέση του υποσυνόλου.
- $\subset$ είναι η σχέση του γνήσιου υποσυνόλου.
- Αν $X \subseteq \mathbb{R}$, $X^* := \{x \in X \mid x \neq 0\}$
- Αν $X \subseteq \mathbb{R}$, $X_+ := \{x \in X \mid x \geqslant 0\}$
- $\mathcal{P}(X) := \{A \mid A \subseteq X\}$
- $|A|$ είναι ο πληθάριθμος του συνόλου A.
- Εάν $\mathcal{A}$ είναι οικογένεια από σύνολα, $\bigcup \mathcal{A} := \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$
- Εάν $\mathcal{A}$ είναι οικογένεια από σύνολα, $\bigcap \mathcal{A} := \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A$
- Σε μετρικό χώρο (M, ϱ), $B(x, r) := \{y \in M \mid \varrho(x, y) < r\}$
- Σε μετρικό χώρο (M, ϱ), $\widehat{B}(x, r) := \{y \in M \mid \varrho(x, y) \leqslant r\}$

Περιεχόμενα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Παραγωγισιμότητα

1.1 Βασικοί ορισμοί

Είναι αδύνατον κανείς να μελετήσει διαφορικές εξισώσεις χωρίς να μιλήσει για την έννοια της παραγωγισιμότητας. Η παραγωγισιμότητα που διερευνούμε δεν είναι «τετριμμένη», με την έννοια ότι δεν μελετούμε συναρτήσεις $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$. Φανταστείτε μια συνεχή συνάρτηση $\gamma : (0,1) \to \mathbb{R}^n$, η οποία γεωμετρικά είναι μια καμπύλη σε πολλές διαστάσεις.

Η καμπύλη αυτή ενδέχεται να εκφράζει την τροχιά ενός κινητού, οπότε υπάρχει η έννοια της ταχύτητας, ενδεχομένως και της επιτάχυνσης. Όσον αφορά την ταχύτητα, είναι λογικό για να τη μελετήσουμε να «αναλύσουμε σε συνηστώσες». Δηλαδή, να γράψουμε $\gamma = (\gamma_1, \cdots, \gamma_n)$, $\gamma_k : (0,1) \to \mathbb{R}$, και να υπολογίσουμε τις παραγώγους γ_k'. Η διανυσματική συνάρτηση $\gamma' = (\gamma_1', \cdots, \gamma_n')$ αναμένεται να είναι η ταχύτητα του κινητού.

Τυπικά ορίζουμε την παραγωγισιμότητα μέσω εφαπτομένων «ευθειών».

Ορισμός 1.1: (Παράγωγος). Λέμε ότι μια καμπύλη $\gamma : (0,1) \to \mathbb{R}^n$ είναι παραγωγίσιμη σε ένα $t_0 \in (0,1)$ αν υπάρχει γραμμική συνάρτηση M_{γ,t_0} τέτοια ώστε:

$$\lim_{h\to 0} \frac{|\gamma(t_0+h) - \gamma(t_0) - M_{\gamma,t_0}(h)|}{|h|} = 0$$

Η M_{γ,t_0} λέγεται παράγωγος της γ στο t_0. Σημειώστε επίσης ότι το πεδίο ορισμού της καμπύλης είναι ενδεικτικό - θα αρκούσε (για να οριστεί η παραγωγισιμότητα της γ στο t_0 μέσω του ορίου) η γ να οριζόταν σε ανοικτό A που περιέχει το t_0 ή ακόμη και σε $A \supseteq (a, t_0]$ ή $[t_0, a)$.

Αυτός ο ορισμός συμφωνεί με την παραπάνω φυσική ερμηνεία, όπως δείχνει η ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 1.1: Η γραμμική συνάρτηση του **Ορισμού 1.1** είναι η:

$$M_{\gamma,t_0}(h) = \big(\gamma_1'(t_0), \cdots, \gamma_n'(t_0)\big) \cdot h$$

Απόδειξη: Γράφουμε $\gamma = (\gamma_1, \cdots, \gamma_n)$ κι επίσης $M_{\gamma,t_0}(h) = (\mu_1, \cdots, \mu_n) \cdot h$. Χρησιμοποιώντας τον **Ορισμό 1.1** έχουμε:

$$\lim_{h\to 0} \frac{\big|\big(\gamma_1(t_0+h) - \gamma_1(t_0) - \mu_1 h, \cdots, \gamma_n(t_0+h) - \gamma_n(t_0) - \mu_n h\big)\big|}{|h|}$$

δηλαδή ισοδύναμα:

$$\forall k \in \{1, \cdots, n\},\ \lim_{h\to 0} \frac{|\gamma_k(t_0+h) - \gamma_k(t_0) - \mu_k h|}{|h|}$$

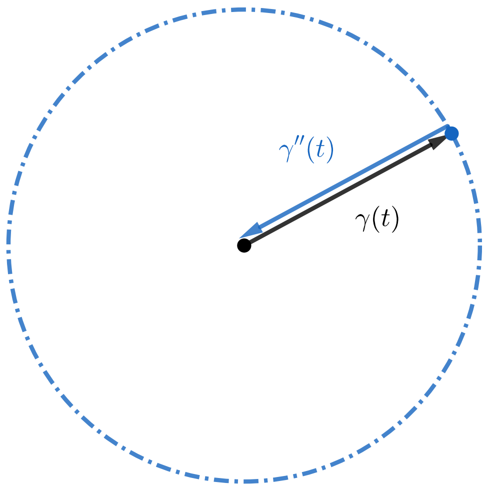
το οποίο δείχνει ότι $\gamma_k'(t_0) = \mu_k$, για κάθε $k \in \{1, \cdots, n\}$.

$\square$

Με αυτόν τον ορισμό υπόψη, είναι δυνατόν να περιγράψουμε προβλήματα μηχανικής, όπως το ακόλουθο: έστω ότι ένα σώμα κινείται στο επίπεδο με επιτάχυνση που κάθε στιγμή «κοιτάει» προς το $(0,0)$, και έχει μέτρο ίσο με την απόσταση από το $(0,0)$. Τι τροχιά διαγράφει το σώμα; Για να περιγράψουμε αυτό το πρόβλημα, θα γράψουμε:

$$\gamma''(t) = -\gamma(t) \text{ ή αλλιώς } \gamma''(t) + \gamma(t) = 0$$

Σε μεταγενέστερο κεφάλαιο θα δούμε πώς προσδιορίζεται η $\gamma(t)$ απ' αυτήν την εξίσωση. Πάντως φαίνεται (από τη γεωμετρική διαίσθηση) ότι θα είναι κάποιος κύκλος.



1.2 Διαφορικές εξισώσεις

Μια εξίσωση όπως η $\gamma''(t)+\gamma(t) = 0$ θα καλείται διαφορική εξίσωση, γιατί εμπλέκει έννοιες διαφορισιμότητας και ζητεί μια συνάρτηση (άγνωστος) να προσδιοριστεί.

Ορισμός 1.2: (Διαφορική εξίσωση). Κάθε εξίσωση της μορφής:

$$F\big(t, \gamma(t), \gamma'(t), \cdots, \gamma^{[m]}(t)\big) = 0$$

(όπου η F είναι συνάρτηση των t και $\gamma : A \to \mathbb{R}^n$, $A \subseteq \mathbb{R}$, $m-$φορές παραγωγίσιμη) θα καλείται διαφορική εξίσωση $m-$τάξεως. Σε τέτοιες εξισώσεις ζητείται να προσδιοριστούν οι γ που την ικανοποιούν.

Ας επιστρέψουμε στο παράδειγμα:

$$\gamma''(t) + \gamma(t) = 0$$

Κατ' αρχάς η εν λόγω εξίσωση είναι διαφορική εξίσωση, αφού γράφεται $F\big(t, \gamma(t), \gamma'(t)\gamma''(t)\big) = 0$, με $F\big(t, \gamma(t), \gamma'(t), \gamma''(t)\big) = \gamma''(t) + \gamma(t)$. Διαισθητικά είδαμε ότι η γ είναι κύκλος, πράγμα που μπορούμε να επιβεβαιώσουμε με έναν έλεγχο: Αν $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, τότε:

$$\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t) \Rightarrow \gamma''(t) = (-\cos t, -\sin t) = -\gamma(t)$$

δηλαδή $\gamma''(t) + \gamma(t) = 0$.

Είναι η $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ η μόνη λύση; Μήπως υπάρχουν κι άλλες; Λύσεις υπάρχουν πολλές της εν λόγω διαφορικής εξίσωσης, μάλιστα άπειρες.

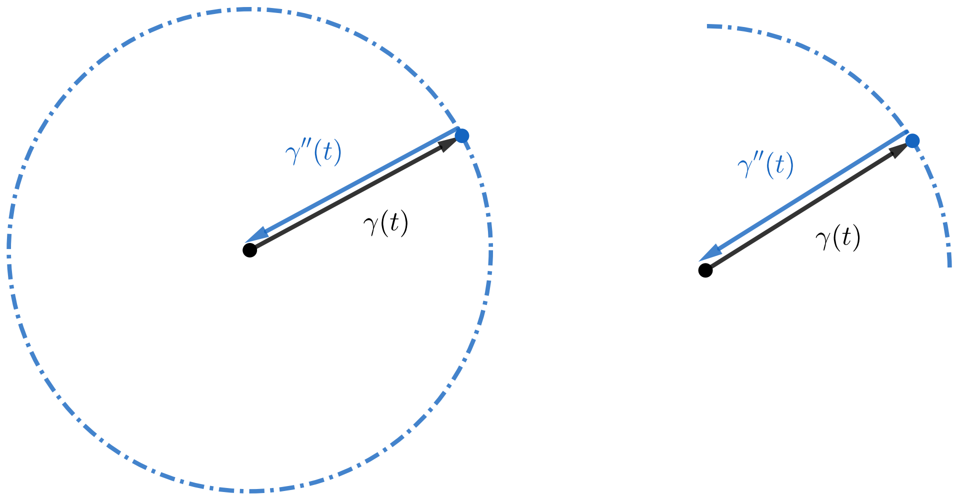
Σκεφτείτε ότι η $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ (που είναι λύση της εξίσωσης) εκφράζει την τροχιά του κινητού όταν αυτό ξεκινά από τη θέση $\gamma(0) = 1$ (αν για παράδειγμα $t \in [0, 2\pi)$). Αν βάλουμε το σώμα («με τα βίας») να ξεκινά από κάποια άλλη θέση στον κύκλο, τότε για τη θέση ${}^{\theta}\gamma(t) = \big(\cos(t-\theta), \sin(t-\theta)\big)$ θα έχουμε:

$${}^{\theta}\gamma'(t) = \big(-\sin(t-\theta), \cos(t-\theta)\big) \Rightarrow^{\theta} \gamma''(t) = \big(-\cos(t-\theta), -\sin(t-\theta)\big)$$

δηλαδή ${}^{\theta}\gamma''(t) + {}^{\theta}\gamma(t) = 0$, μάλιστα για κάθε θ.

Βέβαια οι διάφορες λύσεις ${}^{\theta}\gamma(t)$ δεν έχουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον, αφού ποιοτικά εκφράζουν το ίδιο πράγμα. Γεωμετρικά μιλώντας, είναι όλες τους κύκλοι. Οπότε στη μελέτη μας αργότερα θα ενδιαφερόμαστε για εν γένει διαφορετικές λύσεις.

Ένα άλλο ενδιαφέρον κομμάτι που κανείς αξίζει να προσέξει είναι το πού ορίζονται οι λύσεις. Γεωμετρικά μιλώντας πάλι, την εξίσωση $\gamma''(t) + \gamma(t) = 0$ θα πρέπει να ικανοποιεί και τμήμα κύκλου - μην ξεχνάτε ότι αυτή η διαφορική εξίσωση προέκυψε από την απαίτηση ≪ένα σώμα κινείται στο επίπεδο με επιτάχυνση που κάθε στιγμή ≪κοιτάει≫ προς το $(0,0)$, και έχει μέτρο ίσο με την απόσταση από το $(0,0)$≫.



Για παράδειγμα, και η $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in (0, \pi/2)$ ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση, εκτός από την $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi)$. Γενικά λοιπόν θα ενδιαφερόμαστε και για το σύνολο στο οποίο για διαφορική εξίσωση έχει λύση. Τώρα βέβαια, αν υπάρχει μια λύση $\gamma : A \to \mathbb{R}^n$, κάθε $\gamma : B \to \mathbb{R}^n$ με $B \subseteq A \subseteq \mathbb{R}$, οπότε είναι λογικό να περιοριζόμαστε στα ≪μεγαλύτερα≫ σύνολα στα οποία μία διαφορική εξίσωση έχει λύση.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Γραμμικοί χώροι και διαφορικές εξισώσεις

2.1 sas

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Βιβλιογραφία

(Χα) Χατζηαφράτης Τηλέμαχος: ***Απειροστικός Λογισμός σε Πολλές Μεταβλητές*** (Συμμετρία, 2009)

(Τσ) Τσίτσας Ν.: ***Εφαρμοσμένα Μαθηματικά***, (Κάλλιπος, 2015)

(ΑΚ) Αλικάκος Ν., Καλογερόπουλος Γ.: ***Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις***, (Σύγχρονη Εκδοτική, 2003)