3ο Φυλλάδιο Ασκήσεων - Θεωρία Μέτρου

Αναστάσιος Φράγκος: ΑΜ 1112201900239 Κυριακή, 19 Δεκεμβρίου 2021

Συμβολισμοί - Παρατηρήσεις

1. B_A^c: Για σύνολα $A \supseteq B$, με τον εν λόγω συμβολισμό θα συμβολίζουμε το συμπλήρωμα του B στο A.
2. $S(a,r) := \{x \in X \mid d(x,a) < r\}$, όπου (X,d) είναι ένας μετρικός χώρος.
3. $B(a,r) := \{x \in X \mid d(x,a) \leq r\}$, όπου (X,d) είναι ένας μετρικός χώρος.
4. $A \cdot B := \{\sum_{(i,j)\in I} a_i b_j \mid a_i \in A,\ b_i \in B,\ |I| \leq |A| \cdot |B|\}$.
5. $f_n \to_o f$: Η ακολουθία των συναρτήσεων f_n συγκλίνει ομοιόμορφα στη συνάρτηση f.
6. $\lim_a f(x) := \lim_{x\to a} f(x)$.

Άσκηση 1 – (01 στο φυλλάδιο). Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $A \in \mathcal{A}$. Αποδείξτε ότι κάθε μετρήσιμη συνάρτηση $f : A \to [0,\infty]$ γράφεται στη μορφή:

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \chi_{A_n},\ \text{όπου } 0 \leq a_n < \infty \text{ και } A_n \in \mathcal{A}$$

■

Λύση: Έστω y ένας τυχαίος αριθμός στο $[0,1)$. Θεωρούμε:

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{{}^{y}\delta_n}{2^n}$$

τη μοναδική δυαδική αναπαράσταση του αριθμού αυτού. Ορίζουμε $A_n = \{x \in A \mid {}^{f(x)}\delta_n = 1\}$ και ισχυριζόμαστε ότι καθένα απ' αυτά τα A_n είναι Lebesgue μετρήσιμο σύνολο. Πράγματι, οι συναρτήσεις $\delta_n(y) = {}^{y}\delta_n$ και f είναι μετρήσιμες, και το σύνολο A_n είναι ουσιαστικά η αντίστροφη εικόνα $A_n = \left[\delta_n \circ f\right]^{-1}\{1\}$. Επειδή το $\{1\}$ είναι κλειστό, το A_n ανήκει στην $\sigma-$άλγεβρα $\mathcal{A}$.

Μάλιστα, κάθε $f(x) \in [0,1)$ μπορεί να γραφεί (εξ' ορισμού των $\delta_n,\ A_n$) στη μορφή:

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} {}^{f(x)}\delta_n \chi_{A_n}$$

Αυτός ο τρόπος μπορεί να εκφράσει ως άθροισμα απλών συναρτήσεων κάθε τιμή της f που βρίσκεται στο $[0,1)$. Για να καλυφθούν και οι υπόλοιπες περιπτώσεις, ορίζουμε επιπλέον τα σύνολα $A_0 = \{x \in A \mid \infty > \lfloor f(x) \rfloor > 1\}$ (το οποίο προφανώς ανήκει στη $\sigma-$αλγεβρα). Γράφοντας κάθε πεπερασμένο $f(x)$ ως $\lfloor f(x) \rfloor + \big(\overbrace{f(x) - \lfloor f(x) \rfloor}^{\upsilon_{f(x)}}\big)$, μπορούμε (πάλι εξ' ορισμού) να παραστήσουμε κάθε πεπερασμένο $f(x)$ στη μορφή:

$$f(x) = \lfloor f(x) \rfloor \chi_{A_0} + \sum_{n\in\mathbb{N}} {}^{\upsilon_{f(x)}}\delta_n \chi_{A_n}$$

Μένει μόνο να συμπεριληφθεί η περίπτωση των απείρων. Εδώ δεν θα χρειαστεί εκ νέου ορισμός συνόλου, αρκεί να τροποποιηθούν οι ήδη υπάρχοντες. Συγκεκριμένα, αρκεί να παρατηρήσουμε ότι η μορφή:

$$f(x) = \lfloor f(x) \rfloor \chi_{A_0 \cup \{f=\infty\}} + \sum_{n\in\mathbb{N}} {}^{\upsilon_{f(x)}}\delta_n \chi_{A_n \cup \{f=\infty\}}$$

Συμπεριλαμβάνει και την περίπτωση των απείρων. Μάλιστα, οι επιθυμητή ιδιότητα $A_n \in \mathcal{A}$ μεταβιβάζεται εκ νέου στα νέα σύνολα $A_n \cup \{f = \infty\}$, και η δικαιολόγιση είναι βασικά αντίστοιχη της αρχικής μας περίπτωσης, της περίπτωσης δηλαδή των A_n.

□

Άσκηση 2 – (02 στο φυλλάδιο).

(α) Έστω E Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι υπάρχει ολοκληρώσιμη συνάρτηση $f : E \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f(x) > 0$ για κάθε $x \in E$.

(β) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lebesgue ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι $f(0) = 0$ και ότι υπάρχει η $f'(0)$. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο:

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)}{x}, \text{ εάν } x \neq 0 \\ 0, \text{ εάν } x = 0 \end{cases}$$

είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη.

■

Παρατήρηση 2.1: *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ μια Riemann ολοκληρώσιμη συνάρτηση και $B \subseteq A$ ένα Lebesgue μετρήσιμο σύνολο. Η συνάρτηση $f\chi_B$ είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Εάν μάλιστα $f(x) \geq 0$:*

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx \geq \int f\chi_B \, d\lambda$$

Απόδειξη: Γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση f ως Riemann ολοκληρώσιμη είναι και Lebesgue ολοκληρώσιμη, και μάλιστα:

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx = \int f \, d\lambda$$

Έστω τώρα $B \subseteq A$ ένα Lebesgue μετρήσιμο σύνολο. Η $f\chi_B$ είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη ως περιορισμός Lebesgue ολοκληρώσιμης συνάρτησης, και μάλιστα αν $f \geq 0$:

$$\int f\chi_B \, d\lambda = \int_B f \, d\lambda \leq \int_{\mathbb{R}} f \, d\lambda = \int f \, d\lambda$$

△

$\boxed{\text{(α)}}$ *Λύση:* Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{ εάν } x = 0 \\ x \cdot \text{sign}(x), \text{ εάν } x \in [-1,1] \backslash \{0\} \\ \dfrac{1}{x^2}, \text{ εάν } x \in \big[[-1,1]\backslash\{0\}\big]^c_{\mathbb{R}} \end{cases}$$

και παρατηρούμε ότι αυτή είναι πάντοτε θετική και κατά Riemann ολοκληρώσιμη και μάλιστα:

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{-1} f(x)\, dx + \int_{-1}^{0} f(x)\, dx + \int_{0}^{1} f(x)\, dx + \int_{1}^{\infty} f(x)\, dx = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1 = 3$$

Σύμφωνα με την **Παρατήρηση 2.1**, σε κάθε Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο E του $\mathbb{R}$ η f είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη και θετική.

□

$\boxed{\text{(β)}}$ Κατ' αρχάς παρατηρούμε ότι το όριο $\lim_0 \dfrac{f(x)}{x}$ υπάρχει, αφού:

$$\lim_0 \frac{f(x)}{x} = \lim_0 \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0) \in \mathbb{R}$$

Σε μία περιοχή του μηδενός λοιπόν, έστω στην $S(0,\varepsilon)$, η $\left|\dfrac{f(x)}{x}\right|$ είναι φραγμένη, έστω από ένα $y_\varepsilon > 0$. Στο σύνολο $S(0,1)$ ενδέχεται, αναλόγως το μέγεθος της ακτίνας ε, η $\left|\dfrac{f(x)}{x}\right|$ σίγουρα να φράσσεται από το y_ε. Στην περίπτωση που δεν φράσσεται όμως από το y_ε στο $S(0,1)$, θα δείξουμε ότι φράσσεται $\lambda-$σχεδόν παντού από έναν άλλο αριθμό y'. Πράγματι, παρατηρούμε ότι:

$$\int_{S(0,1)\backslash S(0,\varepsilon)} \left|\frac{f(x)}{x}\right| \, d\lambda(x) \leq \int_{S(0,1)\backslash S(0,\varepsilon)} \left|\frac{f(x)}{\varepsilon}\right| \, d\lambda(x) \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_{S(0,1)\backslash S(0,\varepsilon)} |f(x)| \, d\lambda(x)$$

(εδώ να σημειωθεί ότι το ολοκλήρωμα μπορεί να οριστεί χωρίς η συνάρτηση να είναι κατ' ανάγκη ολοκληρώσιμη)

Η συνάρτηση $|f|$ είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη στο $S(0,1)\backslash S(0,\varepsilon) \subseteq S(0,1)$, οπότε υπάρχει θετικός αριθμός M τέτοιος ώστε $\int_{S(0,1)\backslash S(0,\varepsilon)} |f(x)|\, d\lambda(x) \leq M$. Η συνάρτηση λοιπόν $\left|\dfrac{f(x)}{x}\right|$ είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη στο $S(0,1)\backslash S(0,\varepsilon)$, οπότε και φράσσεται $\lambda-$σχεδόν παντού από έναν αριθμό y'.

Σε κάθε περίπτωση, η $\left|\dfrac{f(x)}{x}\right|$ είναι φραγμένη $\lambda-$σχεδόν παντού στο $S(0,1)$ από τον αριθμό $y = \max\{y', y_\varepsilon\}$.

Έπεται πλέον ότι:

$$\int \left|\frac{f(x)}{x}\right| \, d\lambda(x) = \int_{S(0,1)} \left|\frac{f(x)}{x}\right| \, d\lambda(x) + \int_{[S(0,1)]^c_{\mathbb{R}}} \left|\frac{f(x)}{x}\right| \, d\lambda(x) \leq \lambda\big(S(0,1)\big) \cdot y + \int_{[S(0,1)]^c_{\mathbb{R}}} |f| \, d\lambda \in \mathbb{R}$$

οπότε η $\dfrac{f(x)}{x}$ είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη παντού.

□

Άσκηση 3 – (03 στο φυλλάδιο). Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lebesgue ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Ορίζουμε $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο:

$$g(x) = \int_{[x,x+1]} f \, d\lambda$$

Αποδείξτε ότι η g είναι συνεχής και ότι $\lim_\infty g(x) = 0$. ■

Λήμμα 3.1: *Έστω $f : \mathbb{R} \to [0,\infty]$ μία μη αρνητική, ολοκληρώσιμη συνάρτηση και $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η συνάρτηση - ολοκλήρωμα:*

$$g(x) = \int_{[x,x+1]} f \, d\lambda$$

Εάν $\lim_{\pm\infty} g(x) = 0$, τότε για κάθε ακολουθία απλών, μετρήσιμων συναρτήσεων $f_n \nearrow f$ η σύγκλιση:

$$\int_{[x,x+1]} f_n \, d\lambda \to \int_{[x,x+1]} f \, d\lambda$$

είναι ομοιόμορφη.

Απόδειξη: Ισχυριζόμαστε ότι το σύνολο:

$$\mathfrak{F} = \left\{ \int_{[x,x+1]} f \, d\lambda - \int_{[x,x+1]} f_n \, d\lambda \;\middle|\; x \in \mathbb{R} \right\}$$

έχει μέγιστο. Κατ' επέκταση, το supremum:

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left[\int_{[x,x+1]} f \, d\lambda - \int_{[x,x+1]} f_n \, d\lambda \right]$$

λαμβάνεται σε κάποια τιμή x_0 και είναι το $\int_{[x_0,x_0+1]} f \, d\lambda - \int_{[x_0,x_0+1]} f_n \, d\lambda$. Πράγματι, εφόσον οι f_n, f είναι ολοκληρώσιμες συναρτήσεις, ορίζουν φραγμένα ολοκληρώματα. Σε κάθε λοιπόν συμμετρικό διάστημα $[-y,y]$ το σύνολο $\mathfrak{F}$ είναι φραγμένο, αφού υπάρχει πεπερασμένη κάλυψη του $[-y,y]$ από διαστήματα της μορφής $[x,x+1]$. Στο άπειρο το $\mathfrak{F}$ δεν είναι δυνατόν να παίρνει μέγιστη (μη μηδενική) τιμή, αφού:

$$\lim_{x\to\infty} \left[\int_{[x,x+1]} f \, d\lambda - \int_{[x,x+1]} f_n \, d\lambda \right] = \lim_{x\to\infty} \left[g(x) - \int_{[x,x+1]} f_n \, d\lambda \right] \overset{f_n \leq f}{=} 0$$

Επιπλέον, κάθε άλλη τιμή της διαφοράς είναι μη αρνητική. Στο αρνητικό άπειρο δεν είναι και πάλι δυνατόν να λαμβάνεται μέγιστη (μη μηδενική) τιμή, και απόδειξη είναι εντελώς ανάλογη, για τη συμμετρική συνάρτηση $f(-x)$ της $f(x)$.

Το $\mathfrak{F}$ λοιπόν λαμβάνει, σε κάποιο x_0, μια μέγιστη τιμή.

Για να δείξουμε την ομοιομορφία της σύγκλισης, θεωρούμε τη νόρμα - supremum:

$$\left\| \int_{[x,x+1]} f \, d\lambda - \int_{[x,x+1]} f_n \, d\lambda \right\|_\infty$$

και παρατηρούμε ότι:

$$\left\|\left|\int_{[x,x+1]} f\ d\lambda - \int_{[x,x+1]} f_n\ d\lambda\right|\right\|_\infty = \int_{[x_0,x_0+1]} f\ d\lambda - \int_{[x_0,x_0+1]} f_n\ d\lambda \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Αυτό αποδεικνύει το ζητούμενο, ότι δηλαδή:

$$\int_{[x,x+1]} f_n\ d\lambda \to_o \int_{[x,x+1]} f\ d\lambda$$

$\triangle$

Λύση: Λόγω της προσθετικότητας του ολοκληρώματος Lebesgue, έπεται ότι:

$$\int_{-\infty}^{x} f\ d\lambda + \int_{x}^{x+1} f\ d\lambda \xrightarrow{x\to\infty} \int f\ d\lambda$$

και επειδή $\int_{-\infty}^{x} f\ d\lambda \xrightarrow{x\to\infty} \int f\ d\lambda$ έχουμε $\int_{x}^{x+1} f\ d\lambda \xrightarrow{x\to\infty} 0 \Rightarrow \lim_{\infty} g(x) = 0$. Όμοια, ακολουθώντας παρόμοια διαδικασία για τη συμμετρική συνάρτηση $f(-x)$, μπορεί να δειχθεί ότι $\lim_{-\infty} g(x) = 0$.

Σύμφωνα με το **Λήμμα 3.1**, εφόσον:

- $\lim_{\pm\infty} g(x) = 0$,
- Υπάρχουν απλές, μετρήσιμες f_n τέτοιες ώστε $f_n \nearrow f$ (αυτό έχει δειχθεί 'στην τάξη'),

εξασφαλίζεται ότι:

$$\int_{[x,x+1]} f_n\ d\lambda \to_o \int_{[x,x+1]} f\ d\lambda = g(x)$$

Για να δειχθεί λοιπόν η συνέχεια της g (στην περίπτωση φυσικά όπου $f \geq 0$), αρκεί να αποδειχθεί ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ οι απλές, μετρήσιμες συναρτήσεις f_n ορίζουν ολοκληρώματα $\int_{[x,x+1]} f_n\ d\lambda$ τα οποία είναι συνεχείς συναρτήσεις του x.

Η εν λόγω πρόταση θα δειχθεί σε βήματα.

Βήμα I: Για τις δείκτριες συναρτήσεις χ_A η πρόταση ισχύει: Πράγματι:

$$\int_{[x,x+1]} \chi_A\ d\lambda = \int \chi_{A\cap[x,x+1]}\ d\lambda = \mu(\chi_{A\cap[x,x+1]})$$

και η τελευταία είναι συνεχής συνάρτηση του x.

Βήμα II: Η πρόταση ισχύει για απλές, μετρήσιμες συναρτήσεις $r = \sum_{i\in[n]} r_i\chi_{A_i}$: Πράγματι:

$$\int_{[x,x+1]} \sum_{i\in[n]} r_i\chi_{A_i} = \sum_{i\in[n]} r_i \int_{[x,x+1]} \chi_{A_i}$$

και η τελευταία είναι συνεχής ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.

Ως τώρα έχει αποδειχθεί λοιπόν η άσκηση για μη αρνητικές, ολοκληρώσιμες συναρτήσεις f, ισχύει όμως και γενικότερα για ολοκληρώσιμες f. Εάν f είναι μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση, η προαναφερθήσα απόδειξη μπορεί να εφαρμοστεί για τις συναρτήσεις $|f|, f\chi_{\{f\geq 0\}}$. Επομένως, μπορεί να δειχθεί ότι οι:

$$\hat{g}(x) = \int_{[x,x+1]} |f|\ d\lambda \textbf{ και } \overline{g}(x) = \int_{[x,x+1]} f\chi_{\{f\geq 0\}}\ d\lambda$$

είναι συνεχείς συναρτήσεις του x. Επειδή όμως:

$$\hat{g}(x) = \overline{g}(x) - \int_{[x,x+1]} f\chi_{\{f<0\}}\ d\lambda \Rightarrow \int_{[x,x+1]} f\chi_{\{f<0\}}\ d\lambda = \overline{g}(x) - \hat{g}(x)$$

η $\dot{g}(x) = \int_{[x,x+1]} f\chi_{\{f<0\}}\ d\lambda$ είναι συνεχής. Γράφοντας τη συνάρτηση $g(x) = \int_{[x,x+1]} f\ d\lambda$ ισοδύναμα ως:

$$g(x) = \int_{[x,x+1]} f\ d\lambda = \hat{g}(x) + \dot{g}(x)$$

παρατηρούμε ότι η g είναι συνεχής συνάρτηση του x. Αυτό αποδεικνύει εν τέλει την άσκηση.

$\square$

Άσκηση 4 – (07 στο φυλλάδιο).

(α) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lebesgue ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Αποδείξτε ότι για κάθε $t > 0$ η συνάρτηση $g_t(x) = f(tx)$ είναι ολοκληρώσιμη και μάλιστα ισχύει:

$$\int_{\mathbb{R}} g_t \, d\lambda = \frac{1}{t} \int_{\mathbb{R}} f \, d\lambda$$

(β) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lebesgue ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Αποδείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f(n^2 x)$ συγκλίνει $\lambda-$σχεδόν παντού.

(γ) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ Lebesgue μετρήσιμο σύνολο με $\lambda(A) < \infty$. Αποδείξτε ότι $\lambda-$σχεδόν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ το σύνολο $D_n = \{n \in \mathbb{N} \mid n^2 x \in A\}$ είναι πεπερασμένο.

■

$\boxed{\text{(α)}}$ *Λύση:* Η απόδειξη του συγκεκριμένου θα γίνει σε βήματα:

Βήμα I: Η πρόταση αληθεύει για δείκτριες συναρτήσεις: Πράγματι, αν $g_t(x) = \chi_A(tx)$ και $f(x) = \chi_A(x)$:

$$\int \chi_A(tx) \, d\lambda(x) = \int_{(1/t)A} \chi_A(tx) \, d\lambda(x) = \frac{1}{t}\mu(A) = \frac{1}{t} \int_A \chi_A(x) \, d\lambda(x)$$

όπου η πρώτη ισότητα έπεται από το γεγονός ότι $tx \in A \Leftrightarrow x \in \dfrac{1}{t}A$.

Βήμα II: Η πρόταση αληθεύει για απλές, μετρήσιμες συναρτήσεις: Πράγματι, αν $g_t(x) = \sum_{n=1}^{N} a_n \chi_{A_n}(tx)$ και $f(x) = \sum_{n=1}^{N} a_n \chi_{A_n}(x)$:

$$\int \sum_{n=1}^{N} a_n \chi_{A_n}(tx) \, d\lambda(x) = \sum_{n=1}^{N} a_n \int \chi_{A_n}(tx) \, d\lambda(x) = \frac{1}{t} \sum_{n=1}^{N} a_n \int \chi_{A_n}(x) \, d\lambda(x) = \frac{1}{t} \int \sum_{n=1}^{N} a_n \chi_{A_n}(x) \, d\lambda(x)$$

Βήμα III: Η πρόταση αληθεύει για μη αρνητικές, μετρήσιμες συναρτήσεις: Πράγματι, έστω ότι οι f, g_t είναι μη αρνητικές, μετρήσιμες συναρτήσεις. Γνωρίζουμε ότι για την f υπάρχει ακολουθία απλών, μετρήσιμων συναρτήσεων $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ τέτοια ώστε $s_n \nearrow f$ και επιπλέον $\int s_n \, d\lambda \to \int f \, d\lambda$. Επομένως, βασιζόμενοι στο **Βήμα II**:

$$\int s_n(tx) \, d\lambda(x) \to \int f(tx) \, d\lambda(x) = \int g_t \, d\lambda \;\textbf{και}\; \int s_n(tx) \, d\lambda(x) = \frac{1}{t} \int s_n(x) \, d\lambda(x) \to \frac{1}{t} \int f \, d\lambda$$

και άρα:

$$\int g_t \, d\lambda = \frac{1}{t} \int f \, d\lambda$$

Βήμα IV: Η πρόταση ισχύει για κάθε ολοκληρώσιμη συνάρτηση: Έστω g_t, f ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Από το **Βήμα III**, για τις συναρτήσεις $g_t^{\pm}, f^{\pm}$ ισχύουν:

$$\int g_t^{+} \, d\lambda = \frac{1}{t} \int f^{+} \, d\lambda \;\textbf{και}\; \int g_t^{-} \, d\lambda = \frac{1}{t} \int f^{-} \, d\lambda$$

Επομένως:

$$\int g_t \, d\lambda = \int g_t^{+} \, d\lambda - \int g_t^{-} \, d\lambda = \frac{1}{t} \left[\int f^{+} \, d\lambda - \int f^{-} \, d\lambda \right] = \frac{1}{t} \int f \, d\lambda$$

□

$\boxed{\text{(β)}}$ *Λύση:* Χρησιμοποιώντας το πρώτο μέρος της άσκησης, θα δείξουμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} |f(n^2 x)|$ είναι ολοκληρώσιμη, κι επομένως είναι $\lambda-$σχεδόν παντού φραγμένη. Ως σειρά θετικών όρων λοιπόν θα συγκλίνει $\lambda-$σχεδόν παντού, κι άρα και η $\sum_{n=1}^{\infty} f(n^2 x)$ επίσης θα συγκλίνει $\lambda-$σχεδόν παντού.

Παρατηρούμε ότι:

$$\begin{aligned}\int \sum_{n=1}^{\infty} |f(n^2x)|\, d\lambda(x) &= \lim_{N\to\infty} \int \sum_{n=1}^{N} |f(n^2x)|\, d\lambda(x) \\ &= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \int |f(n^2x)|\, d\lambda(x) \\ &= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} \int |f(x)|\, d\lambda(x) \\ &= \frac{\pi^2}{6} \int |f|\, d\lambda < \infty\end{aligned}$$

όπου στην τρίτη ισότητα χρησιμοποιήθηκε το μέρος (α). Αυτό δείχνει ότι η $\sum_{n=1}^{\infty} |f(n^2x)|$ είναι ολοκληρώσιμη, κι άρα το ζητούμενο.

□

(γ) *Λύση:* Η λύση θα είναι σχετικά άμεση συνέπεια του (β). Συγκεκριμένα, η συνάρτηση χ_A είναι ολοκληρώσιμη αφού $\lambda(A) < \infty$, οπότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \chi_A(n^2x)$ συγκλίνει $\lambda-$σχεδόν παντού. Στα x λοιπόν που η σειρά συγκλίνει, δεν είναι δυνατόν να υπάρχουν άπειροι όροι στο D_n, αφού τότε:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \chi_A(n^2x) = \sum_{n\in D_n} = \infty$$

□

Άσκηση 5 – (10 στο φυλλάδιο). Υπολογίστε, με πλήρη αιτιολόγιση, τα όρια:

$$\lim_{x\to\infty} \int_{[0,1]} \frac{\ln(x+n)}{ne^x} \cos x \, d\lambda(x)$$

και:

$$\lim_{x\to\infty} \int_{(0,\infty)} 1 \Big/ \left(1+\frac{x}{n}\right)^n x^{1/n} \, d\lambda(x)$$

■

Θεώρημα: ***Κυριαρχημένης σύγκλισης:*** *Έστω $f_n, f : X \to \mathbb{C}$ μετρήσιμες συναρτήσεις και $f_n \to f$ $\mu-$σχεδόν παντού. Υποθέτουμε ότι υπάρχει μια συνάρτηση $g \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ τέτοια ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$:*

$$|f_n| \leq g, \;\; \mu - \textit{σχεδόν παντού}$$

Τότε:

- $f_n, f \in \mathscr{L}^1(\mu)$
- $\int |f_n - f|\, d\mu \to 0$
- $\int f_n \, d\mu \to \int f \, d\mu$

Λύση: Και στα δύο όρια θα εφαρμοστεί το **Θεώρημα:** ***Κυριαρχημένης σύγκλισης***.

Για το πρώτο: Παρατηρούμε ότι η ολοκληρωτέα συνάρτηση είναι θετική και άνω φραγμένη από το 1 (και άρα απολύτως φραγμένη από το 1), αφού:

- $0 \leq \cos x \leq 1$: Επειδή $x \in [0,1] \subseteq [0, \pi/2]$
- $0 \leq e^{-x} \leq 1$: Επειδή $x \in [0,1]$
- $\dfrac{\ln(x+n)}{n} \geq 0$: Επειδή $x+n \geq 1 \Rightarrow \ln(x+n) \geq 0$
- $\dfrac{\ln(x+n)}{n} \leq 1$: Επειδή $\ln(x+n) \leq x+n-1 \Rightarrow \dfrac{\ln(x+n)}{n} \leq \dfrac{x+n-1}{n} \leq \dfrac{n}{n} = 1$

Επομένως, από το προαναφερθέν θεώρημα, αρκεί να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα της οριακής συνάρτησης:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(x+n)}{ne^x}\cos x = \frac{\cos x}{e^x}\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(x+n)}{n} \overset{\infty/\infty}{=} \frac{\cos x}{e^x}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x+n} = 0$$

Ισχύει λοιπόν ότι:

$$\lim_{x\to\infty}\int_{[0,1]} \frac{\ln(x+n)}{ne^x}\cos x\; d\lambda(x) = \int_{[0,1]}\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(x+n)}{ne^x}\cos x\; d\lambda(x) = 0$$

Για το δεύτερο: Η ακολουθία:

$$\left(1\Big/\left(1+\frac{x}{n}\right)^n x^{1/n} \right)_{n\in\mathbb{N}}$$

είναι φθίνουσα, κι αυτό θα το δείξουμε ως εξής:

Η συνάρτηση του $n > 0$:

$$\ln\left[1\Big/\left(1+\frac{x}{n}\right)^n x^{1/n}\right] = -n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right) - \frac{1}{n}\ln x = \frac{1}{n}\left[-n^2\ln\left(1+\frac{x}{n}\right) - \ln x\right]$$

διατηρεί την μονοτονία της ακολουθίας. Οπότε μελετώντας αυτή μόνο, μπορεί να προσδιοριστεί η μονοτονία της ακολουθίας. Η τελευταία είναι όμως φθίνουσα, αφού οι $\frac{1}{n} \geq 0$, $-n^2$, $\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)$ είναι φθίνουσες.

Η ακολουθία είναι λοιπόν φθίνουσα, και μάλιστα:

$$\forall n\in\mathbb{N},\; 1\Big/\left(1+\frac{x}{n}\right)^n x^{1/n}\chi_{(0,n)} \leq \frac{1}{x(x+1)}\chi_{(0,n)}$$

Σύμφωνα με το προαναφερθέν θεώρημα, αρκεί να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα της οριακής συνάρτησης:

$$\lim_{n\to\infty} 1\Big/\left(1+\frac{x}{n}\right)^n x^{1/n}\chi_{(0,n)} = \frac{1}{e^x}$$

Ισχύει λοιπόν ότι:

$$\lim_{n\to\infty}\int_{(0,\infty)} 1\Big/\left(1+\frac{x}{n}\right)^n x^{1/n}\chi_{(0,n)}\; d\lambda(x) = \int_{(0,\infty)}\frac{1}{e^x}\; d\lambda(x) = 1$$

□

Άσκηση 6 – (08 στο φυλλάδιο). Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου και έστω f_n, f ολοκληρώσιμες συναρτήσεις με $\int |f_n - f|\; d\mu \to 0$. Υποθέτουμε επίσης ότι $A_n, A \in \mathcal{A}$ και $\mu(A_n \triangle A) \to 0$. Αποδείξτε ότι:

$$\int_{A_n} f_n\; d\mu \to \int_A f\; d\mu$$

■

Λύση: Εφόσον $\int |f_n - f|\; d\mu \to 0$, οι συναρτήσεις f_n προσεγγίζουν την f $\mu-$σχεδόν παντού. Δηλαδή, $f_n \to f$ $\mu-$σχεδόν παντού. Ειδικότερα, σε κάθε σύνολο $S \subseteq X$ ισχύει η εν λόγω σύγκλιση. Δηλαδή $f_n\chi_S \to f\chi_S$ $\mu-$σχεδόν παντού.

Παρατηρούμε επίσης ότι επειδή $A_n \triangle A \supseteq A\backslash A_n$, το μέτρο αυτού $\mu(A\backslash A_n)$ είναι μηδενικό. Επομένως:

$$f\chi_A \leftarrow f_n\chi_A = f_n\chi_{A_n\cap A} + f\chi_{A\backslash A_n} \Rightarrow f_n\chi_{A_n\cap A} \to f\chi_A,\; \mu - \text{σχεδόν παντού}$$

Επιπλέον, επειδή:

$$f_n\chi_{A\cup A_n} = f_n\chi_{A_n\cap A} + f\chi_{A_n\triangle A}\; \textbf{και}\; f_n\chi_{A_n\cap A} \to f\chi_A,\; \mu - \text{σχεδόν παντού}$$

αληθεύει η σύγκλιση $f_n\chi_{A\cup A_n} \to f\chi_A$, $\mu-$σχεδόν παντού. Έπεται λοιπόν από το κρητήριο της παρεμβολής ότι:

$$f\chi_A \leftarrow f\chi_{A_n\cap A} \leq f_n\chi_{A_n} \leq f_n\chi_{A\cup A_n} \to f\chi_A$$

η σύγκλιση $f_n\chi_{A_n} \to f\chi_A$ αληθεύει $\mu-$σχεδόν παντού. Αυτό εν τέλει δίνει ότι:

$$\int |f\chi_A - f_n\chi_{A_n}|\, d\lambda \to 0 \Rightarrow \int f_n\chi_{A_n}\, d\lambda \to \int f\chi_A\, d\lambda \Rightarrow \int_{A_n} f_n\, d\lambda \to \int_A f\, d\lambda$$

$\square$

Σημείωση: Οφείλω να ομολογήσω ότι δεν είμαι ικανοποιημένος με τις "λύσεις" που παρέδωσα σε αυτήν την εργασία.