Το μικρό εγχειρίδιο των μαθηματικών της Γ' λυκείου

Σύντομες σημειώσεις

Α. Φράγκος

Τελ. ενημέρωση: 19 Οκτωβρίου 2023

Περιεχόμενα II

Ορισμός (Σύνολα)

Ως σύνολο ορίζουμε κάθε συλλογή από αντικείμενα, των οποίων η σειρά και το πλήθος ίδιων όρων δεν μας ενδιαφέρει.[1] Συνήθως τα σύνολα τα συμβολίζουμε με κεφαλαία γράμματα και τα στοιχεία τους με μικρά γράμματα.

Ορισμός (Ανήκει)

Εάν A είναι ένα σύνολο, θα γράφουμε $a \in A$ εάν το a είναι στοιχείο του A. Λέμε επίσης ότι το a ανήκει στο A.

Ένα παράδειγμα συνόλου είναι το $A = \{1, 2, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Το σύνολο $\{1, 2\}$ είναι ίδιο με το $\{2, 1\}$, αφού -όπως είπαμε- η σειρά των όρων δεν μας ενδιαφέρει. Επειδή ούτε το πλήθος ίδιων όρων μας ενδιαφέρει, το $\{1, 2\}$ είναι ίδιο και με το $\{1, 1, 1, 2\}$.

Ορισμός (Υποσύνολο)

Εάν έχουμε δύο σύνολα A, B και το B περιέχει όλα τα στοιχεία του A (ενδεχομένως και μερικά ακόμα), θα λέμε ότι το A είναι υποσύνολο του B. Συμβολικά:

$$A \subseteq B$$

[1] Αυτός δεν είναι καλός ορισμός. Το σύνολο είναι έννοια που δεν μπορεί να οριστεί.

Εάν το B περιέχει όλα τα στοιχεία του A και σίγουρα έχει και μερικά παραπάνω, λέμε ότι το A είναι γνήσιο υποσύνολο του B και συμβολίζουμε:

$$A \subset B$$

Ορισμός (Υπερσύνολο)

Μερικές φορές θέλουμε να σκεφτόμαστε, όχι ότι ένα σύνολο είναι μικρότερο από ένα άλλο, αλλά ότι αυτό το άλλο είναι μεγαλύτερο από το πρώτο. Η ιδέα δεν αλλάζει και η σχέση μεταξύ των συνόλων παραμένει ίδια, εμείς όμως (για λόγους οπτικούς ή γραφής), μπορεί να θέλουμε να γράψουμε:

$$B \supseteq A \text{ αντί για } A \subseteq B$$

και:

$$B \supset A \text{ αντί για } A \subset B$$

Το $B \supseteq A$ εκφράζει το υπερσύνολο (το B είναι υπερσύνολο του A) και το $B \supset A$ το γνήσιο υπερσύνλο (το B είναι γνήσιο υπερσύνολο του A).

Ορισμός (Ισότητα συνόλων)

Γενικά, ξεχνώντας επαναλήψεις στοιχείων και τη διαφορετική σειρά, λέμε ότι δύο σύνολα είναι ίσα εάν έχουν ακριβώς τα ίδια στοιχεία.

Παρατήρηση

Εάν ένα σύνολο είναι υποσύνολο ενός άλλου, μπορεί να είναι ίσα. Αν είναι γνήσιο υποσύνολο όμως, δεν μπορεί να είναι ίδια. Αντίστοιχα για τα υπερσύνολα.

Για παράδειγμα, το $A = \{0, 1\}$ είναι υποσύνολο του $B = \{0, 1\}$, αφού το B περιέχει όλα τα στοιχεία του A. Αντίστοιχα, το B είναι υποσύνολο του A. Το A δεν είναι γνήσιο υποσύνολο του B, αφού κάτι τέτοιο θα σήμαινε ότι το B έχει ένα στοιχείο που το A δεν έχει.

1. Ελέγξτε εάν τα παρακάτω σύνολα είναι υποσύνολα ή υπερσύνολα του $\{0, 1, 3, \triangle, \$\}$. Ποια είναι ίσα με το $\{0, 1, 3, \triangle, \$\}$;
   1.1 $\{0, 0, 0, 0, 1, 3, \triangle, \triangle, \$\}$
   1.2 $\{0, 1, 2, 3, \triangle, \triangle, \$\}$
   1.3 $\{\triangle, \$\}$
   1.4 $\{0, 1, 3, \triangle, \$\}$
   1.5 $\{0, 1, 3, \triangle, \$\}$
   1.6 $\{0, 2, 8, \Diamond\}$
   1.7 $\{3, 1, 3, \$, \triangle\}$
2. Κατασκευάστε ένα γνήσιο υποσύνολα κι ένα γνήσιο υπερσύνολο για καθένα από τα παρακάτω:
   2.1 $\{-1, 0, \triangle, \$\}$
   2.2 $\{\triangle, \Diamond, \$\}$
   2.3 $\{\triangle\}$
   2.4 $\{\}$ (αυτό το σύνολο δεν έχει τίποτε μέσα. Ονομάζεται ≪κενό≫ και συμβολίζεται με $\emptyset$).
   2.5 $\{\Phi, O\}$
   2.6 $\{-1, 1, \Pi\}$
   2.7 $\{\{1\}\}$ (αυτό το σύνολο περιέχει μέσα του ένα σύνολο).

Ορισμός (Ένωση)

Για κάθε δύο σύνολα A, B μπορούμε να κατασκευάσουμε την ένωσή τους, που είναι ένα καινούριο σύνολο το οποίο περιέχει όλα τα στοιχεία των A, B. Το συμβολίζουμε $A \cup B$ και λέμε ότι είναι η ένωση των A και B.

Για παράδειγμα, εάν $A = \{a, a_*\}$ και $B = \{b, b_*\}$, τότε:

$$A \cup B = \{a, a_*, b, b_*\}$$

Ορισμός (Τομή)

Για κάθε δύο σύνολα A, B ορίζεται το σύνολο που περιέχει μόνο τα κοινά τους στοιχεία. Το συμβολίζουμε με $A \cap B$ και λέμε ότι είναι η τομή των A και B. Εάν τα A, B δεν έχουν κοινά στοιχεία, η τομή τους είναι το κενό σύνολο $\{\}$ (αλλιώς συμβολίζεται με $\emptyset$).

Για παράδειγμα, αν $A = \{a, x\}$ και $B = \{x, b\}$:

$$A \cap B = \{x\}$$

Ορισμός (Συνολοθεωρητική διαφορά)

Εάν A, B είναι δύο σύνολα, ορίζεται το σύνολο που περιέχει το A, από το οποίο έχουν αφαιρεθεί τα στοιχεία του B (εννοείται όσα απ' αυτά είναι στο A). Το συμβολίζουμε με $A \backslash B$ και το λέμε συνολοθεωρητική διαφορά.

Για παράδειγμα, εάν $A = \{a, a_*, b\}$ και $B = \{b, b_*\}$, τότε:

$$A \backslash B = \{a, a_*\}$$

(το b αφαιρέθηκε).

Παρατήρηση

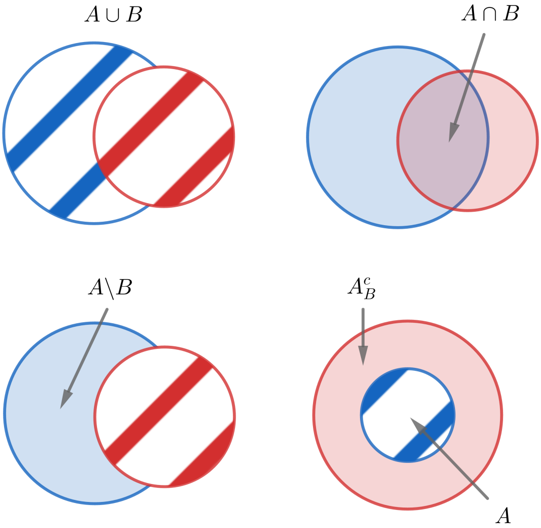
Το σύνολο $A \backslash B$ είναι ίδιο με το $A \backslash (A \cap B)$.

Ορισμός (Συμπληρώματα)

Έστω δύο σύνολα A, B με $A \subseteq B$. Το σύνολο που περιέχει όλα τα στοιχεία του B που δεν είναι στο A το λέμε συμπλήρωμα του A στο B. Το συμβολίζουμε με A_B^c (ή με A^c, αν το B εννοείται).

Παρατήρηση

Τα σύνολα A_B^c και $B \backslash A$ είναι ίσα.


$A \cup B$
$A \cap B$
$A \backslash B$
A^c_B
A

Ως τώρα έχουμε δει τον τρόπο γραφής των συνόλων με αναγραφή των στοιχείων τους. Για παράδειγμα, έχουμε δει τη γραφή:

$$A = \{0, 1, 3, \triangle, \$\}$$

Αυτός είναι ένας καλός τρόπος κανείς να ορίσει ένα σύνολο, μόνο όμως όταν το σύνολο δεν έχει άπειρα στοιχεία ή είναι εμφανές ένα μοτίβο στα στοιχεία του. Μπορούμε δηλαδή να γράψουμε το A όπως προηγουμένως ή το:

$$B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, \cdots\}$$

αλλά, εάν το σύνολο Γ είναι το σύνολο όλων των πολυγώνων, δεν είναι εύκολο να το γράψουμε. Γι' αυτό χρησιμοποιούμε τη γραφή του συνόλου με περιγραφή των στοιχείων του. Μπορούμε να αναπαραστήσουμε το Γ ως εξής:

$$\Gamma = \{P \mid P \text{ είναι πολύγωνο}\}$$

Η γραφή σημαίνει το εξής: ≪Το Γ είναι το σύνολο των P, ούτως ώστε τα P είναι πολύγωνα≫. Η κάθετη γραμμή ξεχωρίζει την ονομασία των στοιχείων από την περιγραφή τους.

Ορισμός (Φυσικοί αριθμοί)

Κάθε αριθμός που εκφράζει ποσότητα από (ομοειδή) αντικείμενα ονομάζεται φυσικός αριθμός. Αν συμβολίσουμε με 1 τη μονάδα, προσθέτοντας μία μονάδα κάθε φορά, κατασκευάζουμε τους αριθμούς:

$$2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, \cdots$$

Το σύνολο των φυσικών αριθμών είναι το:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 20, 11, 12, 13, 14, \cdots\}$$

Ορισμός (Ακέραιοι αριθμοί)

Οι προσημασμένοι φυσικοί αριθμοί, μαζί με το 0, λέγονται ακέραιοι αριθμοί. Το σύνολο των ακεραίων αριθμών είναι το:

$$\mathbb{Z} = \{\cdots, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \cdots\}$$

Ορισμός (Ρητοί αριθμοί)

Ρητοί είναι οι αριθμοί που μπορούν να γραφούν ως λόγος ακεραίων (ακέραιος δια μη-μηδενικό ακέραιο). Το σύνολο των ρητών είναι το:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{\kappa}{\lambda} \;\middle|\; \kappa, \lambda \in \mathbb{Z},\ \lambda \neq 0 \right\}$$

Οι ρητοί αριθμοί μπορούν να προσεγγίζουν πολύ καλά άλλους αριθμούς. Για παράδειγμα, έχουμε δει ότι:

$$\pi \approx 3.1415$$

Αυτό είναι στην ουσία μία προσέγγιση από ρητούς, αφού:

$$\pi \approx 3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{5}{10000}$$

Ορισμός (Πραγματικοί αριθμοί)

Πραγματικοί είναι όλοι οι αριθμοί που προσεγγίζονται από ρητούς. Το σύνολο των πραγματικών αριθμών είναι το:

$$\mathbb{R} = \{x \mid \text{ για κάθε } \varepsilon > 0 \text{ υπάρχει } q \in \mathbb{Q} \text{ ώστε } |x - q| < \varepsilon\}$$

(το ε δηλώνει πόσο καλή θέλουμε να κάνουμε την προσέγγιση. Το q είναι μία ρητή προσέγγιση $\varepsilon-$κοντά στο x).

Για το $\mathbb{R}$ (αλλά και για άλλα σύνολα), χρησιμοποιούμε τους ακόλουθους βοηθητικούς συμβολισμούς:

- $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \backslash \{0\}$ (οι πραγματικοί αριθμοί που δεν είναι μηδέν).
- $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 0\}$ (οι θετικοί πραγματικοί αριθμοί).
- $\mathbb{R}_- = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 0\}$ (οι αρνητικοί πραγματικοί αριθμοί).
- $\mathbb{R}_+^* = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$
- $\mathbb{R}_-^* = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$

Χρησιμοποιώντας τα άπειρα ∞ και $-\infty$, τα οποία τα φανταζόμαστε ως οντότητες $\infty > x$, $-\infty < x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, συμβολίζουμε:

- $\widetilde{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$

Άλλοι χρήσιμοι συμβολισμοί είναι οι:

- $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ (το ανοικτό διάστημα άκρων a, b).
- $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leqslant b\}$ (το αριστερά ημιανοικτό διάστημα άκρων a, b).
- $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x < b\}$ (το δεξιά ημιανοικτό διάστημα άκρων a, b).
- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\}$ (το κλειστό διάστημα άκρων a, b).
- $(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$ (η ανοικτή ημιευθεία πάνω από το a).
- $[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x\}$ (η κλειστή ημιευθεία πάνω από το a).
- $(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$ (η ανοικτή ημιευθεία κάτω από το b).
- $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant b\}$ (η κλειστή ημιευθεία κάτω από το b).

Βοηθητικοί συμβολισμοί για αθροίσματα και γινόμενα είναι οι ακόλουθοι:

Ορισμός (Ο τελεστής $\sum$)

Εάν έχουμε ένα άθροισμα της μορφής:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \cdots + x_n$$

μπορούμε να το συμπυκνώσουμε γράφοντας:

$$\sum_{k=1}^{n} x_k$$

Ορισμός (Ο τελεστής $\prod$)

Εάν έχουμε ένα γινόμενο της μορφής:

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot \ \ldots \ \cdot x_n$$

μπορούμε να το συμπυκνώσουμε γράφοντας:

$$\prod_{k=1}^{n} x_k$$

1. Βρείτε τα σύνολα $A \cup B$, $A \cap B$, $A \backslash B$ στις ακόλουθες περιπτώσεις:
   1.1 $A = \{1, 2, 3\}, \; B = \{3, 4, 5\}$
   1.2 $A = \{\triangle, \circ, \$\}, \; B = \{0, 1, 2\}$
   1.3 $A = \mathbb{Q}, \; B = \{m/n \mid m, n \in \mathbb{N}\}$
   1.4 $A = (0, 2), \; B = (1, 3]$
2. Βρείτε το σύνολο A_B^c στις ακόλουθες περιπτώσεις:
   2.1 $B = \{0, 1, 2\}, \; A = \{0, 2\}$
   2.2 $B = \mathbb{R}, \; A = \emptyset$
   2.3 $B = \mathbb{R}, \; A = (a, b)$
   2.4 $B = \mathbb{R}, \; A = (-\infty, 0] \cup [1, \infty)$
   2.5 $B = \{P \mid P \text{ πολύγωνο}\}, \; A = \{T \mid T \text{ ισοσκελές τρίγωνο}\}$
3. Αποδείξτε ότι το σύνολο:

$$(1, \infty) \cap (2, \infty) \cap (3, \infty) \cap (4, \infty) \cap \cdots$$

είναι το κενό $\emptyset$.

Τα μαθηματικά της Γ' λυκείου όπως και ο απειροστικός λογισμός Ι (που διδάσκεται τα πρώτα εξάμηνα σε πολλές σχολές) έχει ως κύριο αντικείμενο μελέτης τις πραγματικές συναρτήσεις και τις ιδιότητές τους.

Ορισμός (Συναρτήσεις)

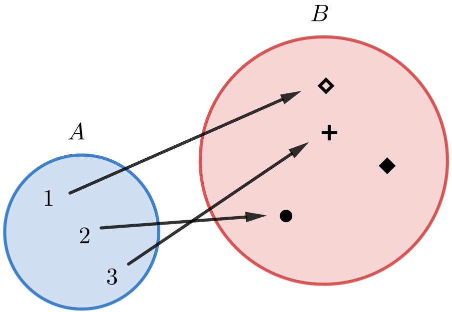
Ας θεωρήσουμε A και B δύο σύνολα. Μία συνάρτηση (ας τη συμβολίσουμε f) είναι μία διαδικασία η οποία αντιστοιχεί κάθε $a \in A$ σε μία και μοναδική τιμή b_a εντός του B (το b_a εξαρτάται από το a, γι' αυτό έχει δείκτη a). Το b_a το συμβολίζουμε και με $f(a)$. Οι συναρτήσεις λέγονται και ≪απεικονίσεις≫, ιδίως όταν έχουν έντονα γεωμετρικά χαρακτηριστικά (λ.χ. οι ≪γραμμικές απεικονίσεις≫).

Ορισμός (Πεδία ορισμού και τιμών)

Έστω $f : A \to B$ μία συνάρτηση.

- Το σύνολο A λέγεται ≪πεδίο ορισμού≫ της f.
- Το σύνολο B λέγεται ≪πεδίο τιμών≫ της f.

Παρακάτω θα δούμε μερικά παραδείγματα συναρτήσεων.



Στο παραπάνω σχήμα απεικονίζεται μία αντιστοιχία από το σύνολο:

$$A = \{1, 2, 3\}$$

στο σύνολο:

$$B = \{\lozenge, +, \bullet, \blacklozenge\}$$

Το 1 αντιστοιχεί στο $\lozenge$, το 2 στο $\bullet$ και το 3 στο $+$. Οι συναρτήσεις μπορεί να είναι περίπλοκες και όχι κατ' ανάγκη από αριθμούς σε αριθμούς.

Ας ονοματήσουμε αυτήν την συνάρτηση f. Το A είναι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης και B το πεδίο τιμών. Προσέξτε ότι το B περιέχει ένα στοιχείο που δεν «πιάνεται» από ένα στοιχείο του A μέσω της f. Αυτό δεν είναι πρόβλημα.

Ορισμός (Σύνολο τιμών)

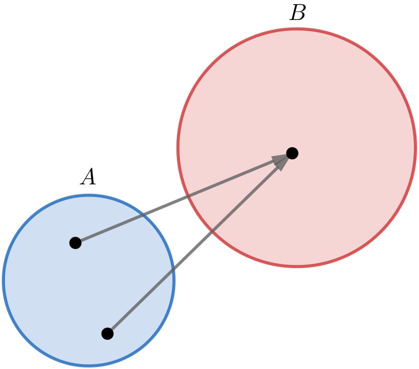
Εάν $f : A \to B$ είναι μία συνάρτηση, το σύνολο των σημείων του B που η συνάρτηση f «πιάνει», λέγεται σύνολο τιμών. Συμβολίζεται με $f(A)$, και αυστηρά ορίζεται ως εξής:

$$f(A) = \{b \in B \mid \text{υπάρχει } a \in A \text{ με } f(a) = b\}$$

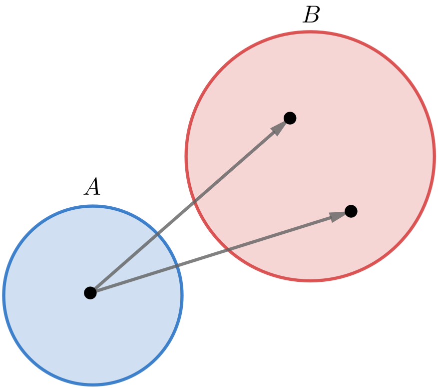
Παρατήρηση

Εάν $f : A \to B$ είναι μία συνάρτηση, τότε $f(A) \subseteq B$.

Επιτρέπεται επίσης μία συνάρτηση να αντιστοιχεί δύο στοιχεία στο πεδίο ορισμού στο ίδιο στοιχείο του πεδίου τιμών.



Αυτό που δεν επιτρέπεται είναι μία τιμή του πεδίου ορισμού να αντιστοιχίζεται σε δύο τιμές του συνόλου τιμών



Εφόσον τη συνάρτηση τη βλέπουμε ως διαδικασία, θέλουμε να έχει ένα αποτέλεσμα κι όχι πολλά. Από την άλλη, αν ξεκινήσουμε από δύο διαφορετικές καταστάσεις, μπορεί και να καταλήξουμε στο ίδιο αποτέλεσμα.

Ορισμός (Σύνθεση)

Στις συναρτήσεις ορίζεται η πράξη της σύνθεσης, η οποία συμβολίζεται με $\circ$. Εάν $f : A_f \to A_g$ και $g : A_g \to B$ είναι δύο συναρτήσεις, ορίζεται η:

$$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$$

Διαγραμματικά:

$$\begin{tikzcd}
A_f \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g \circ f"'] & A_g \arrow[d, "g"] \\
 & B
\end{tikzcd}$$

Η σύνθεση ορίζεται και σε μία γενικότερη περίπτωση, όπου το σύνολο τιμών $f(A_f)$ είναι υποσύνολο του πεδίου ορισμού της g.

Παράδειγμα

- Εάν $f(x) = 3x - 2$ και $g(x) = e^x$, η σύνθεση $g \circ f$ γίνεται e^{3x-2}.
- Εάν $f(x) = \sqrt{x}$ και $g(x) = \log x$, η σύνθεση $g \circ f$ γίνεται $\log \sqrt{x}$.
- Προσέχουμε σε περιπτώσεις τις οποίες το σύνολο τιμών της f δεν είναι υποσύνολο του πεδίου ορισμού της g. Για παράδειγμα, αν $f = x^2$ και $g(x) = 1/x$, τότε $A_f = \mathbb{R}$, $A_g = \mathbb{R} \backslash \{0\}$ και:

  $$f(A_f) = [0, \infty), \text{ που δεν είναι υποσύνολο του } A_g$$

  Η σύνθεση δεν ορίζεται από το A_f στο $f(A_f)$ κι έπειτα στο B, αλλά από το $A_f \backslash \{0\}$ στο $f(A_f \backslash \{0\})$ κι έπειτα στο B. Εν ολίγοις, λέμε ότι η:

  $$(g \circ f)(x) = \frac{1}{x^2}$$

  ορίζεται όταν $x \neq 0$.
- Εάν $f(x) = \log x$ και $g(x) = 1/\sqrt{x}$, τότε $A_f = \mathbb{R}_+^*$, $A_g = \mathbb{R}_+^*$ και η σύνθεση:

  $$(g \circ f)(x) = \frac{1}{\sqrt{\log x}}$$

  ορίζεται όταν $x > 1$, δηλαδή στο σύνολο $(1, \infty)$.

Εμείς γενικά θα ασχοληθούμε με πραγματικές συναρτήσεις, δηλαδή με συναρτήσεις $f : A \to \mathbb{R}$, όπου $A \subseteq \mathbb{R}$.

Παράδειγμα

- Τα πολυώνυμα $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, που για κάθε x παίρνουν τη μορφή:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k, \;\; a_k \in \mathbb{R}$$

  είναι πραγματικές συναρτήσεις. Παράδειγμα πολυωνύμου:

$$p(x) = 2x^{54} - 5x^4 - 8x + 2$$

- Οι ρητές συναρτήσεις $q : \mathbb{R} \backslash \{\text{πεπερασμένο πλήθος αριθμών}\} \to \mathbb{R}$ που αποτελούν κλάσμα πολυωνύμων (μη-μηδενικού παρονομαστή):

$$q(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0} = \frac{\sum_{k=0}^{n} a_k x^k}{\sum_{k=0}^{n} b_k x^k}$$

  (όπου $a_k, b_k \in \mathbb{R}$ και κάποιο b_k δεν είναι μηδέν) είναι πραγματικές συναρτήσεις. Παράδειγμα ρητής συνάρτησης:

$$q(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$$

- Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις $\eta\mu, \sigma\upsilon\nu, \varepsilon\varphi$ είναι πραγματικές συναρτήσεις. Ειδικότερα:

$$\begin{aligned} \eta\mu &: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ \sigma\upsilon\nu &: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ \varepsilon\varphi = \frac{\eta\mu}{\sigma\upsilon\nu} &: \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\pi/2 \mid k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R} \end{aligned}$$

- Η συνάρτηση του Dirichlet $\chi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & \text{εάν } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

- Η εκθετική συνάρτηση $e^x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
- Ο δεκαδικός λογάριθμος $\log : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ (δηλαδή ο $\log_{10}$).
- Ο φυσικός λογάριθμος $\ln : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ (δηλαδή $\log_e$).
- Οι ρίζες $\sqrt{x} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ (όχι κατ' ανάγκη τετραγωνικές).
- Πολλές ακόμη συναρτήσεις...

Παρατήρηση

Όταν μας δίνεται μία συνάρτηση μέσω του τύπου της, για παράδειγμα η:

$$q(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$$

και μας ζητείται το πεδίο ορισμού της, εμείς θα ψάχνουμε το μεγαλύτερο σύνολο στο οποίο η συνάρτηση έχει νόημα. Συγκεκριμένα για την q, δεν είναι δυνατόν να την ορίσουμε στο 0 (παντού αλλού δεν υπάρχει πρόβλημα), οπότε το πεδίο ορισμού της είναι το σύνολο:

$$A_q = \mathbb{R}\backslash\{0\} = \mathbb{R}^*$$

Αντίστοιχα, η:

$$r(x) = \frac{1}{x^2 + 2x + 1}$$

δεν ορίζεται όταν ο παρονομαστής είναι μηδέν, δηλαδή όταν $x = -1$. Οπότε το πεδίο ορισμού της είναι το $A_r = \mathbb{R}\backslash\{-1\}$.

Άλλα προβλήματα που μπορεί να συναντήσουμε είναι στις ρίζες, στις οποίες η υπόριζη ποσότητα πρέπει να είνα μη-αρνητική. Εάν θεωρήσουμε τη συνάρτηση:

$$s(x) = \sqrt{x-4}$$

πρέπει $x - 4 \geqslant 0$, δηλαδή $x \geqslant 4$. Το πεδίο ορισμού της s γίνεται:

$$A_s = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 4\} = [4, \infty)$$

Θυμηθείτε ότι η ρίζα ενός αριθμού $\sqrt{a}$ αποτελεί τη θετική λύση της $x^2 = a$, επομένως (για να έχει νόημα ο συμβολισμός) πρέπει $a \geqslant 0$ (δηλαδή η υπόριζη ποσότητα να είναι μη-αρνητική). Στους λογαρίθμους, πρέπει το όρισμά τους να είναι θετικό. Θυμηθείτε πάλι ότι η ποσότητα $\log a$ είναι ο αριθμός αυτός για τον οποίο:

$$10^{\log a} = a$$

οπότε (για να έχει νόημα ο συμβολισμός) πρέπει $a > 0$.

1. Ελέγξτε εάν τα παρακάτω αντικείμενα είναι συναρτήσεις:
   1.1 Το f_1 ώστε $f_1(\$) = 0,\ f_1(\%) = 2,\ f_1(\&) = 3$.
   1.2 Το f_2 ώστε $f_2(0) = \triangle,\ f_2(0) = \Diamond,\ f_2(1) = \Box$
   1.3 Το f_3 ώστε $f_3(0) = 0,\ f_3(1) = 0,\ f_4(2) = 1$
   1.4 Το f_4 για το οποίο:
   $$f_4(x) = \frac{x^2 + x + 1}{8 - 2x^2}$$
   σε κατάλληλο σύνολο A_4.
   1.5 Το f_5 για το οποίο:
   $$f_5(x) = \frac{x}{\log x}$$
   σε κατάλληλο σύνολο A_5.
   1.6 Το f_6 για το οποίο:
   $$f_6(x) = \sqrt{f_4(x) \cdot f_5(x)}$$
   σε κατάλληλο σύνολο A_6.
   1.7 Το f_7 για το οποίο:
   $$f_7(x) = \begin{cases} 2 - x, & \text{όταν } x \in (0, 1] \\ 2x, & \text{όταν } x \in [1, \infty) \end{cases}$$

   Έπειτα, βρείτε τα πεδία ορισμού των παραπάνω συναρτήσεων.

2. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της σύνθεσης $g \circ f$ και τον τύπο της, όταν:
   2.1 $f(x) = x^3$ και $g(x) = \sqrt{x}$, με πεδία ορισμού $A_f = \mathbb{R}$ και $A_g = \mathbb{R}_+$.
   2.2 $f(x) = \log x$ και $g(x) = 1/\sqrt{x}$, με πεδία ορισμού $A_f = \mathbb{R}_+^*$ και $A_g = \mathbb{R}_+^*$.
   2.3 $f(x) = -x^2$ και $g(x) = \sqrt{x}$, με πεδία ορισμού $A_f = \mathbb{R}$ και $A_g = \mathbb{R}_+$.
   2.4 $f(x) = \sqrt{x}$ και $g(x) = \log x$, με πεδία ορισμού $A_f = \mathbb{R}_+$ και $A_g = \mathbb{R}_+^*$.
   2.5 $f(x) = ημ(x)$ και $g(x) = 1/x$, με πεδία ορισμού $A_f = \mathbb{R}$ και $A_g = \mathbb{R}^*$.
3. Είναι οι παρακάτω προτάσεις ψευθείς (Ψ) ή αληθείς (Α);
   3.1 (Ψ,Α) Για κάθε δύο συναρτήσεις f, g έχουμε $f \circ g = g \circ f$.
   3.2 (Ψ,Α) Για κάθε δύο συναρτήσεις f, g οι $f \circ g$, $g \circ f$ έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού.
   3.3 (Ψ,Α) Υπάρχουν συναρτήσεις f, g ώστε η $f \circ g$ να ορίζεται μόνο στο κενό σύνολο.
   3.4 (Ψ,Α) Η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x(1-x)}$ έχει πεδίο ορισμού $A_f = [0, 1]$.
   3.5 (Ψ,Α) Η συνάρτηση $f(x) = \log |x|$ έχει πεδίο ορισμού $A_f = \mathbb{R}$
   3.6 (Ψ,Α) Εάν $f(x) = x$, για οποιαδήποτε πραγματική συνάρτηση $g : A_g \to B$ οι $f \circ g$ και $g \circ f$ ισούνται. Δηλαδή, έχουν τον ίδιο τύπο και το ίδιο πεδίο ορισμού.