ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις
Προσομοιώσεις και Ασκήσεις

Προπτυχιακή Εργασία || 2020-2021

Τμήμα Μαθηματικών

Ιωσιφίνα Αναστάση, 3^o εξάμηνο
Βασίλειος Δημητροκάλλης, 3^o εξάμηνο
Αναστάσιος Φράγκος, 3^o εξάμηνο

Επιβλέπουσα καθηγήτρια: κ. Ευαγγελία Αθανασιάδου Κόττα

$$\begin{aligned}
\mu\frac{dy}{dx} + \mu P y &= \mu\frac{dy}{dx} + e^{\int P dx} \cdot P y \\
&= \mu\frac{dy}{dx} + y\frac{d}{dx}\left(e^{\int P dx}\right) \\
&= \mu\frac{dy}{dx} + y\frac{d\mu}{dx} \\
&= \frac{d}{dx}(\mu y)
\end{aligned}$$

Τελευταία ενημέρωση: 16/12/2020

Περιεχόμενα

I Προσομοιώσεις **3**
1 Προσομοίωση $1^η$ || 08/10/2020 . . . 3
2 Προσομοίωση $2^η$ || 21/10/2020 . . . 6
3 Προσομοίωση $3^η$ || 11/11/2020 . . . 12
4 Προσομοίωση $4^η$ || 02/12/2020 . . . 16
5 Προσομοίωση $5^η$ || 07/12/2020 . . . 20

II Περαιτέρω Ασκήσεις **27**

Μέρος I

Προσομοιώσεις

Προσομοίωση 1^{η} 08/10/2020

Άσκηση 1: *Να λυθεί η Διαφορική εξίσωση:*

$$t \cdot y' - y - y^2 \cdot lnt = 0, \;\; \text{για } t > 0$$

Λύση:

$$t \cdot y' - y - y^2 \cdot lnt = 0 \overset{t>0}{\iff} y' - \frac{1}{t} \cdot y = y^2 \cdot \frac{lnt}{t}$$

Η τελευταία εξίσωση είναι της μορφής $Bernoulli$, με $r = 2$. Συνεπώς προφανής είναι η ιδιάζουσα λύση:

$$y(t) = 0, t > 0$$

Θέτουμε:

$$u = y^{1-2} = \frac{1}{y} \Rightarrow u' = \frac{y'}{y^2}$$

Πολλαπλασιάζουμε την προηγούμενη εξίσωση με $-\frac{1}{y^2}$, οπότε προκύπτει:

$$-\frac{y'}{y^2} + \frac{1}{t}\frac{1}{y} = -\frac{lnt}{t} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{y}\right)' + \frac{1}{t}\frac{1}{y} = -\frac{lnt}{t}$$

Θέτουμε, εν συνεχεία:

$$m(t) = e^{\int \frac{1}{t} dt} = e^{lnt} = t$$

και πολλαπλασιάζουμε την τελευταία εξίσωση με $m(t)$, οπότε προκύπτει:

$$t\frac{1}{y} + \frac{1}{y} = -lnt \Leftrightarrow \left(\frac{1}{y}\right)' = -lnt$$

Τέλος, ολοκληρώνοντας ως προς t έχουμε:

$$t\frac{1}{y} = -\int lntdt + c$$

$$\Leftrightarrow \frac{t}{y} = t(1 - lnt) + c$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{y} = \frac{1}{1 - lnt + \frac{c}{t}}$$

Άρα $y(t) = \dfrac{1}{1 - lnt + \frac{c}{t}}$

Το σύνολο λύσεων της $t \cdot y' - y - y^2 \cdot lnt = 0, \;\; \text{για } t > 0$ είναι:

$$\left\{0, \frac{1}{1 - lnt + \frac{c}{t}}\right\}$$

Άσκηση 2: *Να λυθεί η Διαφορική εξίσωση:*

$$(t+y+1)dt+(t-y^2+3)dy=0$$

Λύση:

$$(t+y+1)dt+(1-y^2+3)dy=0$$
$$\Leftrightarrow t+y+1+(t-y^2+3)\frac{dy}{dt}=0$$
$$\Leftrightarrow (t+y+1)+(t-y^2+3)y'=0$$

Θέτουμε:

$$M(t,y)=t+y+1 \text{ και } N(t,y)=t-y^2+3$$

Παρατηρούμε ότι:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial M}{\partial y}=1\\ \dfrac{\partial N}{\partial t}=1\end{array}\right\} \quad \frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial t}$$

Συνεπώς η $(t+y+1)+(t-y^2+3)y'=0$ είναι ακριβής Διαφορική εξίσωση και έχει γενική λύση $F(t,y)=c$
Για να προσδιορίσουμε την λύση, θα επιλύσουμε το σύστημα:

$$\frac{\partial F}{\partial t}=t+y+1 \tag{1.1}$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}=1-y^2+3 \tag{1.2}$$

Από την (1.1), ολοκληρώνοντας ως προς t έχουμε:

$$F(t,y)=\int t+y+1dt+h(y)\Leftrightarrow F(t,y)=\frac{t^2}{2}+yt+t+h(y)$$

Ολοκληρώνουμε ως προς y:

$$\frac{\partial F}{\partial t}=t+h'(y)$$
$$\Leftrightarrow 1-y^2+3=t+h'(y)$$
$$\Leftrightarrow h'(y)=3-y^2$$
$$\Leftrightarrow h(y)=3y-\frac{y^3}{3}+c_1$$

Επομένως $F(t,y)=\dfrac{t^2}{2}+3y-\dfrac{y^3}{3}+c_1=c_2$

Οπότε η γενική λύση είναι σε πεπλεγμένη μορφή:

$$\frac{t^2}{2}+3y-\frac{y^3}{3}=c$$

Άσκηση 3: *Να βρεθεί διαφορίσιμη συνάρτηση f, για την οποία η Διαφορική εξίσωση:*

$$2+y^3cost+f(t)y^2y'=0 \text{ εάν ισχύει ότι } f(0)=0$$

είναι ακριβής. Για την προκύπτουσα f, να λυθεί η Διαφορική εξίσωση.

Λύση:

Θέτουμε:

$$M(t,y)=2+y^3cost \text{ και } N(t,y)=f(t)y^2$$

Υπό την υπόθεση ότι η αρχική μας Διαφορική Εξίσωση είναι ακριβής, παίρνουμε:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 3y^2 cost \text{ και } \frac{\partial N}{\partial t} = y^2 f'(t) \text{ με } \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial t}$$

$$\Rightarrow f'(t) = 3cost \Leftrightarrow f(t) = 3sint + c$$

Η λύση $y = 0$ είναι τετριμμένη, δεν λαμβάνεται όμως υπόψην γιατί δεν δίδει διαφορική εξίσωση.

Χρησιμοποιώντας την υπόθεση $f(0) = 0$, μπορούμε να δούμε ότι $c = 0$, και συνεπώς η f γράφεται: $f(t) = 3sint$.

Οπότε η αρχική εξίσωση γίνεται:

$$2 + y^3 cost + 3y^2 y' sint = 0$$

Η λύση της ακριβούς Διαφορικής εξίσωσης αυτής παίρνει την γενική μορφή $F(t, y) = 0$.
Για να προσδιορίσουμε την λύση, θα επιλύσουμε το σύστημα:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = 2 + y^3 cost \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 3y^2 sint \tag{1.4}$$

Από την (1.3), ολοκληρώνοντας ως προς t έχουμε:

$$F(t, y) = \int 2 + y^3 costdt + h(y)$$

$$\Leftrightarrow F(t, y) = 2t + y^3 sint + h(y)$$

Παραγωγίζουμε ως προς y:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 3y^2 sint + h'(y)$$

$$\Leftrightarrow 3y^2 sint = 3y^2 sint + h'(y)$$

$$\Leftrightarrow h'(y) = 0 \Rightarrow h(y) = c_1$$

Επομένως:

$$F(t, y) = 2t + y^3 sint + c_1 = c_2$$

Και η γενική λύση που προκύπτει είναι σε πεπλεγμένη μορφή:

$$2t + y^3 sint = c$$

Προσομοίωση 2^{η} 21/10/2020

Άσκηση 1: *Να βρεθεί η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης:*

$$y^2 + 4ye^t + 2(y + e^t)\frac{dy}{dt} = 0$$

Να ληφθεί υπόψην ότι υπάρχει ολοκληρωτικός παράγοντας που είναι συνάρτηση του t.

Λύση: 1:

Η παρούσα Διαφορική εξίσωση μπορεί να λυθεί και χωρίς ολοκληρωτικό παράγοντα. Συγκεκριμένα, εάν $y' = \dfrac{dy}{dt}$, η εξίσωση γίνεται:

$$y^2 + 4ye^t + 2(y + e^t)y' = 0 \Leftrightarrow y^2 + 2yy' + 4ye^t + 2y'e^t = 0 \Leftrightarrow$$

$$y^2 + (y^2)' + 4ye^t + 2y'e^t = 0 \Leftrightarrow y^2e^t + (y^2)'e^t + 2 \cdot 2ye^{2t} + 2y'e^{2t} = 0 \Leftrightarrow$$

$$(y^2e^t)' + (2ye^{2t})' = 0 \Leftrightarrow (y^2e^t + 2ye^{2t})' = c' \text{ με } c \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$y^2e^t + 2ye^{2t} = c \Leftrightarrow y^2 + 2ye^t = ce^{-t} \Leftrightarrow$$

$$y^2 + 2ye^t + e^{2t} = ce^{-t} + e^{2t} \Leftrightarrow (y + e^t)^2 = ce^{-t} + e^{2t} \Leftrightarrow$$

$$y = \pm\sqrt{ce^{-t} + e^{2t}} - e^t$$

Επειδή η $y = 0$ είναι τετριμμένη λύση της Διαφορικής εξίσωσης, θα πρέπει να περιέχεται στον άνωθεν τύπο. Εάν $c \neq 0$, η $y \neq 0$. Οπότε $c = 0 \Leftrightarrow y = 0$. Όμως τότε $y = 0 = \pm\sqrt{e^{2t}} - e^t \rightarrow$ το πρόσημο της ρίζας είναι $+$.

Τελικά:

$$y = \sqrt{ce^{-t} + e^{2t}} - e^t \text{ με } c \in \mathbb{R}$$

Λύση: 2:

Θέτουμε:

$$M(t, y) = y^2 + 4ye^t \text{ και } N(t, y) = 2(e^t + y)$$

Η αρχική εξίσωση δεν είναι ακριβής, καθώς:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 4e^t + 2y \neq 2e^t = \frac{\partial N}{\partial t}$$

Οπότε ψάχνουμε έναν ολοκληρωτικό παράγοντα $\mu(t)$ τέτοιο ώστε εάν η αρχική εξίσωση πολλαπλασιαστεί με αυτόν να προκύψει ακριβής διαφορική εξίσωση. Δηλαδή θέλουμε:

$$\mu(t)M(t, y) + \mu(t)N(t)\frac{dy}{dt} = 0$$

να είναι ακριβής. Αυτό συμβαίνει αν και μόνον αν:

$$\frac{\partial \mu M}{\partial y} = \frac{\partial \mu N}{\partial t} \Leftrightarrow$$

$$(4e^t + 2y)\mu = 2\frac{\partial \mu}{\partial t}(e^t + y) + 2e^t\mu \Leftrightarrow$$

$$2e^t\mu + 2y\mu = \frac{d\mu}{dt}(2e^t + 2y) \overset{y \neq -e^t}{\Longleftrightarrow}$$

$$\frac{d\mu}{dt} = \mu \Leftrightarrow \mu = e^t$$

Συνεπώς με την χρήση του $\mu(t)$ μπορούμε να γράψουμε την ακριβή πλέον εξίσωση:

$$ye^t(4e^t + y) + 2e^t(e^t + y)\frac{dy}{dt} = 0 \tag{2.1}$$

που έχει γενική λύση $f(t, y) = c$, $c \in \mathbb{R}$, ως ακριβής. Θέτουμε:

$$P(t, y) = ye^t(4e^t + y) \text{ και } Q(t, y) = 2e^t(e^t + y)$$

Για να προσδιορίσουμε αυτήν την λύση f, αρκεί να επιλύσουμε το σύστημα:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = P(t, y) \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = Q(t, y) \tag{2.3}$$

Ολοκληρώνουμε την (2.2) ως προς t και έχουμε:

$$f(t, y) = \int ye^t(4e^t + y)dt$$

Για να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα θέτουμε: $u = 4e^t + y \Rightarrow \frac{du}{dt} = 4e^t \Rightarrow dt = \frac{e^{-t}}{4}du$ επομένως:

$$f(t, y) = \frac{y}{4}\int udu = \frac{y}{4}\frac{u^2}{2} + h(y) \Leftrightarrow$$

$$f(t, y) = y(2e^{2t} + ye^t) + h(y) \tag{2.4}$$

Παραγωγίζουμε την (2.4) ως προς y και έχουμε:

$$\frac{df}{dy} = 2e^{2t} + 2ye^t + \frac{dh}{dy} \overset{(2.3)}{\Longleftrightarrow}$$

$$2e^t(e^t + y) = 2e^{2t} + 2ye^t + \frac{dh}{dy} \Leftrightarrow \frac{dh}{dy} = 0 \Leftrightarrow$$

$$h = c \text{ με } c \in \mathbb{R}$$

Άρα:

$$f(t, y) = 2ye^{2t} + y^2e^t = c \Leftrightarrow$$

$$y^2 + 2ye^t + e^{2t} = ce^{-t} + e^{2t} \Leftrightarrow (y + e^t)^2 = ce^{-t} + e^{2t} \Leftrightarrow$$

$$y = \pm\sqrt{ce^{-t} + e^{2t}} - e^t$$

Επειδή η $y = 0$ είναι τετριμμένη λύση της Διαφορικής εξίσωσης, θα πρέπει να περιέχεται στον άνωθεν τύπο. Εάν $c \neq 0$, η $y \neq 0$. Οπότε $c = 0 \Leftrightarrow y = 0$. Όμως τότε $y = 0 = \pm\sqrt{e^{2t}} - e^t \rightarrow$ το πρόσημο της ρίζας είναι $+$.

Τελικά:

$$y = \sqrt{ce^{-t} + e^{2t}} - e^t \text{ με } c \in \mathbb{R}$$

Άσκηση 2: *Δίνεται η διαφορική εξίσωση Ricatti:*

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{t^2} - \frac{3}{t}u + u^2 \text{ με } t > 0$$

Με την αντικατάσταση:

$$u(t) = -\frac{y'(t)}{y(t)}$$

να μετασχηματιστεί σε γραμμική διαφορική εξίσωση $2^{ης}$ τάξης. Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα αυτό, να βρείτε τη γενική λύση της.

Λύση:

Εάν $\dfrac{du}{dt} = u'$, τότε η αρχική διαφορική εξίσωση γίνεται:

$$u' = \frac{1}{t^2} - \frac{3}{t}u + u^2 \text{ με } t > 0$$

Χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό: $u(t) = -\dfrac{y'(t)}{y(t)}$:

$$u' = -y''\frac{1}{y} + (y')^2\frac{1}{y^2}$$

$$u^2 = (y')^2\frac{1}{y^2}$$

προκύπτει:

$$-\frac{y''}{y} + \frac{(y')^2}{y^2} - \frac{3}{t}\frac{y'}{y} = \frac{(y')^2}{y^2} + \frac{1}{t^2} \Leftrightarrow$$

$$-y'' - y'\frac{3}{t} = \frac{y}{t^2} \Leftrightarrow -y''t^2 - 3ty' - y = 0 \Leftrightarrow$$

$$-y''t^2 - 2ty' - y't - y = 0 \Leftrightarrow (y't^2 + yt)' = c' \text{ με } c \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$y't^2 + yt = c \Leftrightarrow y't + y = \frac{c}{t}$$

$$(yt)' = (clnt + q)' \text{ με } q \in \mathbb{R} \Leftrightarrow y = \frac{clnt + q}{t}$$

Και τελικά με πράξεις:

$$u = -\frac{1}{t}\left(\frac{c - q - lnt}{clnt + q}\right)$$

Άσκηση 3: *Να λυθεί η διαφορική εξίσωση:*

$$y'' - 3y' + 2y = e^{3t} + e^{2t}$$

Λύση: 1:

Εδώ αρκεί να παρατηρήσουμε ότι:

$$y'' - 3y' + 2y = e^{3t} + e^{2t} \Leftrightarrow y'' - y' - 2y' + 2y = e^{3t} + e^{2t}$$

$$y''e^{-t} - y'e^{-t} - 2\big(y'e^{-t} - ye^{-t}\big) = e^{2t} + e^{t}$$

Από αυτό έχουμε:

$$(y'e^{-t} - 2ye^{-t})' = \left(\frac{e^{2t}}{2} + e^t + c\right)' \text{ με } c \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$y' - 2y = \frac{e^{3t}}{2} + e^{2t} + ce^t \Leftrightarrow y'e^{-2t} - 2ye^{-2t} = \frac{e^t}{2} + 1 + ce^{-t} \Leftrightarrow$$

$$\left(ye^{-2t}\right)' = \left(\frac{e^t}{2} + t - ce^{-t} + q\right)' \text{ με } q \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$y = \frac{e^{3t}}{2} + te^{2t} - ce^t + qe^{2t} = \frac{e^{3t}}{2} + (t+q)e^{2t} - ce^t$$

Λύση: 2:

Η εξίσωση είναι γραμμική Διαφορική εξίσωση $2^{ης}$ τάξης.
Η γενική λύση της θα είναι το άθροισμα της γενικής λύσης της αντίστοιχης ομογενούς και της ειδικής λύσης της μη ομογενούς.

Βρίσκουμε την $1^η$ λύνοντας την εξίσωση:

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 3\frac{dy}{dt} + 2y = 0 \tag{2.5}$$

Υποθέτουμε ότι η λύση της (2.5) είναι ανάλογη του $e^{\lambda t}$, για κάποιο $\lambda \in \mathbb{R}$.
Αντικαθιστούμε την $y = e^{\lambda t}$ στην (2.5) και έχουμε:

$$\frac{d^2e^{\lambda t}}{dt^2} - 3\frac{de^{\lambda t}}{dt} + 2e^{\lambda t} = 0 \Leftrightarrow$$

$$(\lambda^2 - 3\lambda + 2)e^{\lambda t} = 0 \Leftrightarrow \lambda \in \{1, 2\}$$

Για $\lambda = 1$, η λύση της (2.5) είναι $y_{c_1} = c_1e^t$ για $c_1 \in \mathbb{R}$
Για $\lambda = 2$, η λύση της (2.5) είναι $y_{c_2} = c_2e^{2t}$ για $c_2 \in \mathbb{R}$
Οπότε η γενική λύση είναι:

$$y_c = c_1e^t + c_2e^{2t}$$

Τώρα θα βρούμε την ειδική λύση της:

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 3\frac{dy}{dt} + 2y = e^{3t} + e^{2t}$$

Η προκύπτουσα λύση θα είναι το άθροισμα των ειδικών λύσεων των εξισώσεων:

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 3\frac{dy}{dt} + 2y = e^{3t} \tag{2.6}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 3\frac{dy}{dt} + 2y = e^{2t} \tag{2.7}$$

Η ειδική λύση της (2.6) είναι της μορφής: $y_{p_1} = a_1e^{3t}$ για $a_1 \in \mathbb{R}$
Η ειδική λύση της (2.7) είναι της μορφής: $y_{p_1} = a_2e^{2t}t$ για $a_2 \in \mathbb{R}$
Άρα $y_p = a_1e^{3t} + a_2e^{2t}t$ με $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ είναι η ειδική λύση.

Εν συνεχεία θα πρέπει να βρούμε τις σταθερές a_1, a_2.
Υπολογίζουμε την δεύτερη παράγωγο της y_p:

$$\frac{dy_p}{dt} = 3a_1e^{3t} + 2a_2e^{2t}t + a_2e^{2t} \Rightarrow \frac{d^2y_p}{dt^2} = 9a_1e^{3t} + a_2(4e^{2t} + 4e^{2t}t)$$

Αντικαθιστούμε τα παραπάνω στην αρχική μας εξίσωση και παίρνουμε:

$$9a_1e^{3t} + a_2(4e^{2t} + 4e^{2t}t) - 3(3a_1e^{3t} + 2a_2e^{2t}t + a_2e^{2t}) - 2(a_1e^{3t} + a_2e^{2t}t) = e^{3t} + e^{2t}$$

Μετά από πράξεις καταλήγουμε στο ότι:

$$2a_1e^{3t} + a_2e^{2t} = e^{3t} + e^{2t} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = \dfrac{1}{2} \\ \\ a_2 = 1 \end{cases}$$

Επομένως: $y_p = \dfrac{e^{3t}}{2} + e^{2t}$ και η γενική λύση της αρχικής εξίσωσης είναι:

$$y = y_c + y_p = \frac{e^{3t}}{2} + e^{2t}t + c_1e^t + c_2e^{2t} = \frac{e^{3t}}{2} + (t + c_2)e^{2t} + c_1e^t$$

Άσκηση 4: *Έστω a, b θετικές σταθερές. Αν $y_1(t), y_2(t)$ είναι δύο λύσεις της διαφορικής εξίσωσης:*

$$ay''(t) + by'(t) + y(t) = f(t)$$

Να αποδειχθεί ότι:

$$\lim_{t\to\infty} \big(y_1(t) - y_2(t)\big) = 0$$

Λύση:

Καθώς y_1 αποτελεί λύση της εξίσωσης, θα πρέπει να παίρνει την μορφή:

$$y_1 = y_c + y_p$$

όπου y_c μια λύση της αντίστοιχης ομογενούς και y_p μια ειδική λύση. Επειδή y_2 ικανοποιεί την αρχική σχέση, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι:

$$y_1 = y_2 + y_c \text{ για κάποια λύση } y_c \text{ της ομογενούς} \Leftrightarrow y_1 - y_2 = y_c$$

Οπότε εν συνεχεία χρειάζεται να μελετήσουμε την ομογενή Διαφορική εξίσωση:

$$ay'' + by' + y = 0 \tag{2.8}$$

Εδώ θα αναζητήσουμε λύσεις ανάλογες της μορφής $e^{\lambda t}$, για $\lambda \in \mathbb{R}$. Αντικαθιστώντας, λοιπόν $y = e^{\lambda t}$ στην (2.8), παίρνουμε:

$$(a\lambda^2 + b\lambda + 1)e^{\lambda t} = 0$$

Εάν $b^2 - 4a \geq 0$, τότε: $a\lambda^2 + b\lambda + 1 = a\left(\lambda - \dfrac{-b+\sqrt{b^2-4a}}{2a}\right)\left(\lambda - \dfrac{-b-\sqrt{b^2-4a}}{2a}\right)$ και συνεπώς η:

$$ce^{\frac{-b+\sqrt{b^2-4a}}{2a}t} + qe^{\frac{-b-\sqrt{b^2-4a}}{2a}t} = c \cdot exp\Big(\frac{-b+\sqrt{b^2-4a}}{2a}t\Big) + q \cdot exp\Big(\frac{-b-\sqrt{b^2-4a}}{2a}t\Big)$$

για $c.q \in \mathbb{R}$, είναι λύση της (2.8). Οπότε η y_c είναι της μορφής:

$$y_c = c \cdot exp\Big(\frac{-b+\sqrt{b^2-4a}}{2a}t\Big) + q \cdot exp\Big(\frac{-b-\sqrt{b^2-4a}}{2a}t\Big)$$

Επειδή $\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4a}}{2a}, \dfrac{-b-\sqrt{b^2-4a}}{2a} < 0$, έχουμε:

$$y_c = c \cdot exp\Big(\frac{-b+\sqrt{b^2-4a}}{2a}t\Big) + q \cdot exp\Big(\frac{-b-\sqrt{b^2-4a}}{2a}t\Big) \xrightarrow{t\to\infty} 0 + 0 = 0$$

Εάν $b^2 - 4a < 0$, τότε: $a\lambda^2 + b\lambda + 1 = a\left(\lambda - \dfrac{-b+i\sqrt{4a-b^2}}{2a}\right)\left(\lambda - \dfrac{-b-i\sqrt{4a-b^2}}{2a}\right)$ και συνεπώς η:

$$ce^{\frac{-b+i\sqrt{4a-b^2}}{2a}t} + qe^{\frac{-b-i\sqrt{4a-b^2}}{2a}t} = c \cdot exp\Big(\frac{-b+i\sqrt{4a-b^2}}{2a}t\Big) + q \cdot exp\Big(\frac{-b-i\sqrt{4a-b^2}}{2a}t\Big)$$

για $c.q \in \mathbb{R}$, είναι λύση της (2.8). Οπότε η y_c είναι της μορφής:

$$y_c = c \cdot exp\Big(\frac{-b+i\sqrt{4a-b^2}}{2a}t\Big) + q \cdot exp\Big(\frac{-b-i\sqrt{4a-b^2}}{2a}t\Big) \Leftrightarrow$$

$$y_c = exp\Big(\frac{-b}{2a}t\Big)\left(c \cdot exp\Big(\frac{i\sqrt{4a-b^2}}{2a}t\Big) + q \cdot exp\Big(\frac{-i\sqrt{4a-b^2}}{2a}t\Big)\right) \Leftrightarrow$$

$$y_c = exp\Big(\frac{-b}{2a}t\Big)\frac{c \cdot exp\Big(\frac{i^2\sqrt{4a-b^2}}{2a}\frac{\sqrt{4a-b^2}}{2a}t^2\Big) + q}{exp\Big(i\frac{\sqrt{4a-b^2}}{2a}t\Big)} \Leftrightarrow$$

$$y_c = exp\Big(\frac{-b}{2a}t\Big)\frac{c\cdot exp\Big(-\Big(\frac{\sqrt{4a-b^2}}{2a}\Big)^2t^2\Big)+q}{exp\Big(i\frac{\sqrt{4a-b^2}}{2a}t\Big)}$$

Επειδή $-\Big(\frac{\sqrt{4a-b^2}}{2a}\Big)^2$, $\frac{-b}{2a}<0$ και $\frac{\sqrt{4a-b^2}}{2a}>0$, έχουμε:

$$y_c = exp\Big(\frac{-b}{2a}t\Big)\frac{c\cdot exp\Big(-\Big(\frac{\sqrt{4a-b^2}}{2a}\Big)^2t^2\Big)+q}{exp\Big(i\frac{\sqrt{4a-b^2}}{2a}t\Big)} \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0\cdot(0+q)\cdot 0 = 0$$

Με αυτό η λύση ολοκληρώνεται.

Προσομοίωση 3^{η} 11/11/2020

Άσκηση 1: *Να λυθεί η Διαφορική εξίσωση:*

$$ty' = 3y + t^5 y^{\frac{1}{3}}, \ \text{για } t > 0$$

Λύση:

Εφόσον $t > 0$ η εξίσωση είναι ισοδύναμη με την:

$$y' - \frac{3}{t}y = t^4 y^{\frac{1}{3}}$$

η οποία είναι *Bernoulli* με $r = \dfrac{1}{3}$. Η ιδιάζουσα λύση $y = 0$ είναι προφανής. Για $y \neq 0$, μπορούμε να θεωρήσουμε τον μετασχηματισμό:

$$u = y^{1-\frac{1}{3}} = y^{\frac{2}{3}} \Rightarrow u' = \frac{2}{3}y'y^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2}{3}y'y^{-\frac{1}{3}}$$

με τον οποίον η Διαφορική εξίσωση γίνεται:

$$y'y^{-\frac{1}{3}} - \frac{3}{t}yy^{-\frac{1}{3}} = t^4 \Leftrightarrow \frac{3}{2}u' - \frac{3}{t}u = t^4 \Leftrightarrow$$

$$u' - \frac{2}{t}u = \frac{2}{3}t^4 \Leftrightarrow u't^2 - 2tu = \frac{2}{3}t^6 \Leftrightarrow$$

$$\frac{u't^2 - 2tu}{t^4} = \frac{2}{3}t^2 \Leftrightarrow \left(\frac{u}{t^2}\right)' = \left(\frac{2}{9}t^3 + c\right)', \ \text{για } c \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$u = \frac{2}{9}t^5 + ct^2 \Leftrightarrow y = \sqrt{\left(\frac{2}{9}t^5 + ct^2\right)^3}$$

Οπότε, το σύνολο λύσεων της εξίσωσης είναι:

$$\left\{0, \sqrt{\left(\frac{2}{9}t^5 + ct^2\right)^3}\right\}$$

Άσκηση 2: *Να λυθεί η Διαφορική εξίσωση:*

$$y' = \frac{t(y+1) + (y+1)^2}{t^2}, \ \text{για } t \neq 0$$

Λύση: 1: *Ως Διαφορική εξίσωση Bernoulli:*

Θέτοντας $v = y + 1, v' = y', v^2 = (y+1)^2$ μπορούμε να δούμε ότι η εξίσωση γίνεται:

$$v't^2 = tv + v^2 \Leftrightarrow v't^2 - tv = v^2$$

Η παραπάνω είναι της μορφής *Bernoulli* με $r = 2$. Η $v = 0 \Leftrightarrow y = -1$ είναι προφανής, ιδιάζουσα λύση. Για $v \neq 0$, θεωρούμε τους μετασχηματισμούς:

$$u = v^{-1} = \frac{1}{v} \Rightarrow u' = -\frac{v'}{v^2}$$

με τους οποίους προκύπτει:

$$-\frac{v'}{v^2}t^2 + t\frac{v}{v^2} = -1 \Leftrightarrow u't^2 + tu = -1 \Leftrightarrow u't + u = -\frac{1}{t} \Leftrightarrow$$

$$(ut)' = (-ln|t| + c) \Leftrightarrow u = \frac{c - ln|t|}{t} \Leftrightarrow v = \frac{t}{c - ln|t|} \Leftrightarrow y = \frac{t}{c - ln|t|} - 1, \text{ με } c \in \mathbb{R}$$

Τελικά, το σύνολο λύσεων είναι:

$$\left\{ -1, \frac{t}{c - ln|t|} - 1 \right\}$$

Λύση: 2: *Ως ομογενή Διαφορική εξίσωση* $2^{ου}$ *βαθμού:*

Θέτοντας $v = y + 1, v' = y', v^2 = (y+1)^2$ μπορούμε να δούμε ότι η εξίσωση γίνεται:

$$v't^2 = tv + v^2$$

Εδώ παρατηρούμε ότι για $P(t) = t^2$ και $Q(t, v) = tv + v^2$ οι P, Q είναι ομογενείς συναρτήσεις βαθμού 2, καθώς:

$$P(\lambda t) = \lambda^2 t^2 = \lambda^2 P(t) \text{ και } Q(\lambda t, \lambda v) = \lambda^2 v' t + \lambda^2 v^2 = \lambda^2 Q(t, v)$$

Οπότε η αντίστοιχη εξίσωση είναι ομογενής βαθμού 2. Η λύση $v = 0 \Leftrightarrow y = -1$ είναι προφανής. Ας υποθέσουμε $v \neq 0$. Σε αυτήν την περίπτωση εφαρμόζουμε τον μετασχηματισμό:

$$u = \frac{v}{t} \Leftrightarrow v = ut$$

από τον οποίον προκύπτει:

$$(ut)'t^2 = tut + (ut)^2 \Leftrightarrow (ut)' = u + u^2 \Leftrightarrow u't + u = u + u^2 \Leftrightarrow$$

$$u't = u^2$$

Η τελευταία Διαφορική εξίσωση είναι χωριζομένων μεταβλητών:

$$u't = u^2 \Leftrightarrow -\frac{u'}{u^2} = -\frac{1}{t} \Leftrightarrow \left(\frac{u'}{u^2}\right)' = (-ln|t| + c)' \Leftrightarrow$$

$$u = \frac{1}{c - ln|t|} \Leftrightarrow v = \frac{t}{c - ln|t|} \Leftrightarrow y = \frac{t}{c - ln|t|} - 1, \text{ για } c \in \mathbb{R}$$

Τελικά, το σύνολο λύσεων είναι:

$$\left\{ -1, \frac{t}{c - ln|t|} - 1 \right\}$$

Άσκηση 3: *Να υπολογιστούν οι 3 πρώτες προσεγγίσεις του Προβλήματος Αρχικών Τιμών:*

$$y' = 2y + 3, \text{ όταν } y(0) = 1$$

Λύση:

Ας θεωρήσουμε $(\varphi_i)_{i \in \mathbb{N}}$ τις προσεγγίσεις $Picard$ καθώς και την συνάρτηση f για την οποία ισχύει:

$$f(t, \varphi(t)) = 2\varphi(t) + 3$$

Για τις 3 πρώτες προσεγγίσεις ισχύει:

$$\varphi_0(t) = y(0) = 1$$

$$\varphi_1(t) = 1 + \int_0^x f(t, \varphi_0(t))dt = 1 + \int_0^x 2 + 3dt = 5x + 1$$

$$\varphi_2(t) = 1 + \int_0^x f(t, \varphi_1(t))dt = 1 + \int_0^x 10x + 5dt = 5x^2 + 5x + 1$$

Εάν κανείς υποθέσει την πρώτη προσέγγιση $\varphi_0(t) = 1$ αρχική συνθήκη, η τρίτη προσέγγιση είναι:

$$\varphi_3(t) = 1 + \int_0^x f(t, \varphi_2(t))dt = 1 + \int_0^x 10x^2 + 10x + 5dt = \frac{10}{3}x^3 + 5x^2 + 5x + 1$$

Άσκηση 4: *Δίνεται η Διαφορική εξίσωση:*

$$y' - 2y = 2$$

Να αποδώσετε γραφικά την μορφή των λύσεών της που ικανοποιούν τις αρχικές συνθήκες:

i) $y(0) = 1$

ii) $y(0) = 2$

iii) $y(0) = -2$

Σχολιάστε την συμπεριφορά των λύσεων της Διαφορικής εξίσωσης.

Λύση: 1:

Αρχικά λύνουμε την εξίσωση:

$$y' - 2y = 2$$

Πολλαπλασιάζοντας με τον ολοκληρωτικό παράγοντα $\mu(t) = e^{-2t}$, μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι:

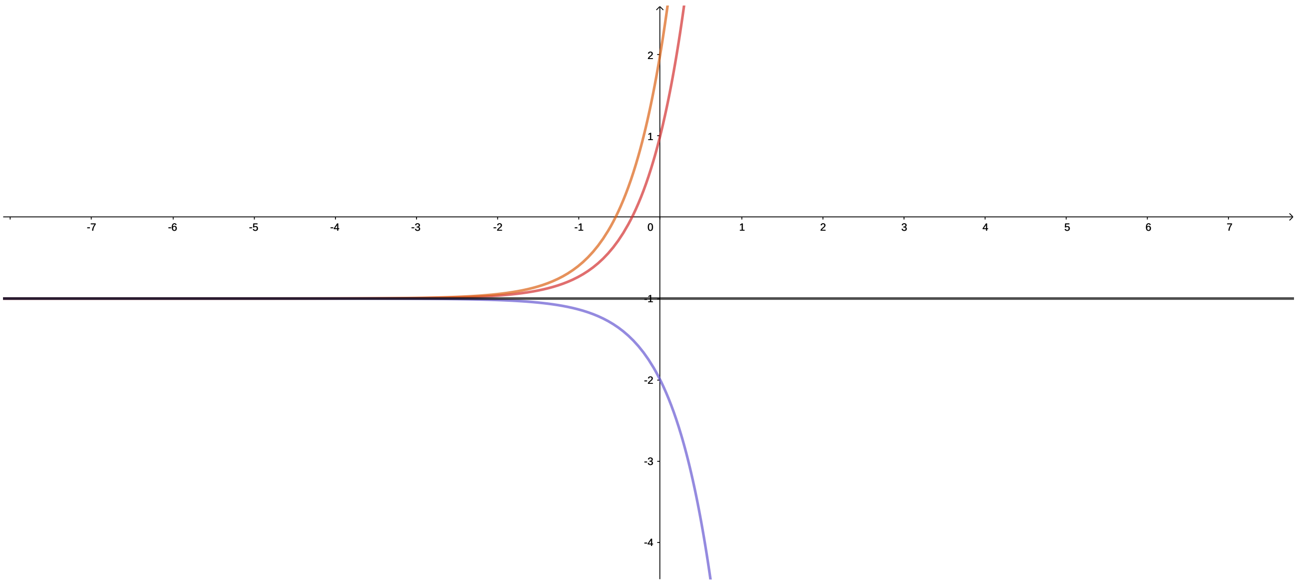
$$y' - 2y = 2 \Leftrightarrow y'e^{-2t} - 2e^{-2t}y = 2e^{-2t} \Leftrightarrow (ye^{-2t})' = (-e^{-2t} + c)' \Leftrightarrow$$

$$y = -1 + ce^{2t}, \text{ με } c \in \mathbb{R}$$

1. Λαμβάνοντας υπόψην την αρχική συνθήκη (i), απαιτείται $1 = -1 + ce^0 \Rightarrow c = 2$, οπότε η μορφή της λύσης είναι $y = 2e^{2t} - 1$

2. Λαμβάνοντας υπόψην την αρχική συνθήκη (ii), απαιτείται $2 = -1 + ce^0 \Rightarrow c = 3$, οπότε η μορφή της λύσης είναι $y = 3e^{2t} - 1$

3. Λαμβάνοντας υπόψην την αρχική συνθήκη (iii), απαιτείται $-2 = -1 + ce^0 \Rightarrow c = -1$, οπότε η μορφή της λύσης είναι $y = -e^{2t} - 1$



Σχήμα 3.1: *Η* ***κόκκινη*** *συνάρτηση είναι η* $\mathbf{2e^{2t} - 1}$*, η* ***πορτοκαλί*** *συνάρτηση είναι η* $\mathbf{3e^{2t} - 1}$*, η* ***μπλέ*** *συνάρτηση είναι η* $\mathbf{-e^{2t} - 1}$ *και η* ***μαύρη*** *ευθεία είναι η* $\mathbf{-1}$*.*

Όπως φαίνεται λοιπόν στο Σχήμα (3.1), οι λύσεις εμφανίζουν ασύμπτωτο στο $-\infty$ την ευθεία $y = -1$. Επίσης, η ευθεία $y = -1$ αποτελεί σημείο ασταθούς ισορροπίας.

Λύση: 2:

Μπορούμε ισοδύναμα να γράψουμε την εξίσωση ως:

$$y' = 2y + 2 = 2(y + 1)$$

και από αυτό να παρατηρήσουμε ότι:

$$y' \geq 0 \Leftrightarrow y \geq -1 \text{ και } y' < 0 \Leftrightarrow y < -1$$

Οπότε η ευθεία $y = -1$ αποτελεί σημείο ασταθούς ισορροπίας. Λαμβάνοντας υπόψην τις (i), (ii) και (iii), μια συνάρτηση θα διέρχεται από το $(0, 1)$, μια άλλη από το $(0, 2)$ και η τελευταία από το $(0, -2)$. Συνεπώς παίρνουμε την μορφή των συναρτήσεων που εικονίζεται στο Σχήμα (3.1).

Προσομοίωση 4^{η} 02/12/2020

Άσκηση 1: *Να αποδειχθεί ότι ο πίνακας* $\Phi(t) = \begin{pmatrix} t^2 & t \\ 2t & 1 \end{pmatrix}$ *είναι ένας θεμελιώδης για το σύστημα:*

$$\psi'(t) = A\psi(t) \text{ με } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2t^{-2} & 2t^{-1} \end{pmatrix}$$

Λύση:

Ο πίνακας Φ είναι θεμελιώδης πίνακας λύσεων αφού γι΄ αυτόν ισχύει:

$$A(t)\Phi(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2t^{-2} & 2t^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t^2 & t \\ 2t & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t & 1 \\ -2+4 & 0 \end{pmatrix} = \Phi'(t)$$

Αρκεί, επομένως, να εξεταστεί η γραμμική ανεξαρτησία των λύσεων που περιέχονται στον Φ. Αυτό θα υλοποιηθεί με την χρήση της ορίζουσας $Wronski$:

$$W(t) = \begin{vmatrix} t^2 & t \\ 2t & 1 \end{vmatrix} = t^2 - 2t^2 = -t^2$$

Επειδή $\forall t \in \mathbb{R}* : W(t) = -t^2 \neq 0$, ειδικότερα $\exists t_0 \in \mathbb{R}* : W(t_0) \neq 0$. Από το τελευταίο έπεται η γραμμμική ανεξαρτησία των λύσεων, και κατ΄ επέκτασην ότι ο Φ είναι θεμελιώδης πίνακας λύσεων του συστήματος.

Άσκηση 2: *Δίνεται ο πίνακας* $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$:

i) *Να υπολογιστεί ο πίνακας* e^{At}.

ii) *Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών:* $\begin{cases} y' = Ay \\ y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \end{cases}$

Λύση:

i) Εν αρχή αξίζει να παρατηρηθεί για τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα A το εξής:
Εάν $\underset{A}{\mathcal{X}}$ είναι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A, τότε:

$$\underset{A}{\mathcal{X}}(\lambda) = (1-\lambda)(1-\lambda) = (1-\lambda)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underset{A}{\mathcal{X}}(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$$

Στην (μοναδική) ιδιοτιμή 1, τα ιδιοδιανύσματα (v) είναι:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} v_1 - 2v_2 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v = c\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Δηλαδή ο ιδιόχωρος της ιδιοτιμής 1 έχει διάσταση 1. Επειδή ο χώρος των λύσεων του συστήματος $\mathcal{L}$ έχει διάσταση 2, ψάχνουμε άλλη μια λύση. Συγκεκριμένα, λύνουμε το σύστημα:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1' = y_1 - 2y_2 \\ y_2' = y_2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y_1' = y_1 - 2ce^t \\ y_2 = ce^t, c \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = -2cte^t + qe^t, q \in \mathbb{R} \\ y_2 = ce^t, c \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Οπότε, τελικά, μπορούμε να συλλέξουμε τις λύσεις:

1. Από την ανάλυση σε ιδιοδιανύσματα: $e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

2. Από το σύστημα, για $c = q + 1 = 1$: $e^t \begin{pmatrix} -2t \\ 1 \end{pmatrix}$

Οι 2 λύσεις αυτές είναι γραμμικώς ανεξάρτητες, όπως φαίνεται από την ακόλουθη ορίζουσα $Wronski$:

$$W(t) = \begin{vmatrix} -2te^t & e^t \\ e^t & 0 \end{vmatrix} = -e^{2t} \neq 0, \forall t \in \mathbb{R}$$

Συνεπώς, ένας θεμελιώδης πίνακας Φ είναι ο:

$$\Phi(t) = e^t \begin{pmatrix} -2t & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

και ο e^{At} γίνεται:

$$e^{At} = \Phi(t)\Phi^{-1}(0) = \frac{e^t}{|\Phi(0)|} \begin{pmatrix} -2t & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} adj \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -e^t \begin{pmatrix} -2t & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{At} = e^t \begin{pmatrix} 1 & -2t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$ii)$ Όσον αφορά το πρόβλημα αρχικών τιμών, εάν $y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, επειδή $e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e^t \begin{pmatrix} -2t \\ 1 \end{pmatrix}$ είναι 2 γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις σε χώρο διάστασης 2, αρκεί να μελετηθεί το σύστημα ως προς a, b:

$$a\Big[e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\Big|_{t=0} + b\Big[e^t \begin{pmatrix} -2t \\ 1 \end{pmatrix}\Big|_{t=0} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b = a + 1 = 2$$

Οπότε η ζητούμενη λύση είναι:

$$y = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2e^t \begin{pmatrix} -2t \\ 1 \end{pmatrix}$$

Άσκηση 3: *Να αποδειχθεί ότι ο* $\Phi(t) = \begin{pmatrix} t^2 & t^{-1} \\ 2t & -t^{-2} \end{pmatrix}$ *με* $t > 0$ *είναι θεμελιώδης πίνακας λύσεων του συστήματος:*

$$y'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2t^{-2} & 0 \end{pmatrix} y(t) \ \text{με} \ t > 0$$

Επίσης να βρεθεί η λύση του συστήματος που ικανοποιεί την αρχική συνθήκη $y(1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Λύση:

Ο πίνακας Φ είναι θεμελιώδης πίνακας λύσεων αφού γι' αυτόν ισχύει:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2t^{-2} & 0 \end{pmatrix} \Phi(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2t^{-2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^2 & t^{-1} \\ 2t & -t^{-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -t^{-2} \\ 2 & 2t^{-3} \end{pmatrix} = \Phi'(t)$$

Ο πίνακας Φ περιέχει γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις, όπως μπορεί να φανερωθεί από τον υπολογισμό της ορίζουσας $Wronski$:

$$W(t) = \begin{vmatrix} t^2 & t^{-1} \\ 2t & -t^{-2} \end{vmatrix} = -1 - 2 = -3 \neq 0$$

Στον χώρο λύσεων $\mathcal{L}$ διάστασης 2, οι λύσεις $\begin{pmatrix} t^2 \\ 2t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t^{-1} \\ -t^{-2} \end{pmatrix}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητες, οπότε παράγουν τον $\mathcal{L}$. Άρα κάθε λύση του συστήματος μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδιασμός των 2 προαναφερθείσων λύσεων:

$$y = a\begin{pmatrix} t^2 \\ 2t \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} t^{-1} \\ -t^{-2} \end{pmatrix}$$

Λαμβάνοντας υπ΄ όψην την αρχική συνθήκη $y(1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, λύνουμε το σύστημα:

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1^2 \\ 2 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1^{-1} \\ -1^{-2} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 = a + b \\ 1 = 2a - b \end{cases}$$

$$\Rightarrow a = b + 1 = 0$$

Οπότε η ζητούμενη λύση είναι η:

$$y = -\begin{pmatrix} t^{-1} \\ -t^{-2} \end{pmatrix}$$

Άσκηση 4: *Τα ακόλουθα προβλήματα αρχικών τιμών να γραφούν σε μορφή συστήματος πρώτης τάξης:*

i) $2y'' - 5t^2y' + ycost = lnt, \ \mu\epsilon \ t > 0$

ii) $y''' - 6y'' + 3y' + e^{-t}y = sint, \ \mu\epsilon \ t \in \mathbb{R}$

iii) $y^{[4]} + 16y = te^t, \ \mu\epsilon \ t \in \mathbb{R}$

Λύση:

Εδώ αρκεί να θεωρίσουμε: $\left| \begin{array}{l} y_0 = y \\ y_1 = y' \\ y_2 = y'' \\ y_3 = y''' \end{array} \right.$ και προκύπτει:

i)

- $y_0' = y_1$
- $y_1' = lnt - y_0cost + 5t^2y_1$

Εναλλακτικά, με την μορφή πινάκων:

$$\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -cost & 5t^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ lnt \end{pmatrix}$$

ii)

- $y_0' = y_1$
- $y_1' = y_2$
- $y_2' = sint - e^{-t}y_0 - 3y_1 + 6y_2$

Εναλλακτικά, με την μορφή πινάκων:

$$\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -e^{-t} & -3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ sint \end{pmatrix}$$

iii)

- $y_0' = y_1$
- $y_1' = y_2$
- $y_2' = y_3$

- $y_3' = te^t - 16y_0$

Εναλλακτικά, με την μορφή πινάκων:

$$\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -16 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ te^t \end{pmatrix}$$

Προσομοίωση 5^{η} 07/12/2020

Άσκηση 1: *Δίνεται η Διαφορική εξίσωση:* $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$. *Εάν* φ_1, φ_2 *είναι δύο λύσεις της και* $W(t) = W(\varphi_1, \varphi_2)(t)$ *είναι η ορίζουσα* $Wronski$ *αυτών, να δείξετε ότι:*

$$W(t) = W(t_0)e^{-\int_{t_0}^{t} p(s)ds}$$

για κάθε t_0 *κατάλληλα παρμένο από τα πεδία ορισμού των λύσεων.*

Λύση:

Η ορίζουσα $Wronski$ των 2 αυτών λύσεων ορίζεται ως:

$$W(t) = \begin{vmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) \\ \varphi_1'(t) & \varphi_2'(t) \end{vmatrix} = (\varphi_1\varphi_2' - \varphi_2\varphi_1')(t)$$

Εάν παραγωγίσουμε την προηγούμενη ορίζουσα, μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι:

$$W' = \boxed{\varphi_1'\varphi_2'} + \varphi_1\varphi_2'' - \boxed{\varphi_2'\varphi_1'} - \varphi_2\varphi_1'' = \varphi_1\varphi_2'' - \varphi_2\varphi_1''$$

Επειδή οι φ_1, φ_2 είναι λύσεις της εξίσωσης, γι΄ αυτές θα ισχύει:

$$\varphi_1'' = -p\varphi_1 - q\varphi_1$$

$$\varphi_2'' = -p\varphi_2 - q\varphi_2$$

Οπότε με αντικατάσταση στον τύπο της ορίζουσας προκύπτει:

$$\begin{aligned} W' &= -\varphi_1(p\varphi_2' + q\varphi_2 + \varphi_2(p\varphi_1' + q\varphi_1) = \\ &= -p\varphi_1\varphi_2' - \boxed{q\varphi_1\varphi_2} + p\varphi_2\varphi_1' + \boxed{q\varphi_1\varphi_2} = \\ &= -p(\varphi_1\varphi_2' + \varphi_2\varphi_1') = -pW \end{aligned}$$

Επειδή W είναι μία συνάρτηση ως προς t, η σχέση $W' = -pW$ δίνει μία διαφορική εξίσωση, η οποία, όταν λυθεί, μπορεί να μας δώσει έναν τύπο για την W. Επομένως, στην $W' + pW = 0$, πολλαπλασιάζοντας με τον ολοκληρωτικό παράγοντα $e^{\int pdt}$ μπορεί να προκύψει:

$$W'e^{\int pdt} + pWe^{\int pdt} = 0 \Leftrightarrow We^{\int pdt} = c, \text{ με } c \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$W = ce^{-\int pdt}$$

Η μελέτη μας όσον αφορά την ορίζουσα δεν έχει τελειώσει ακόμη· μένει να υπολογιστεί η σταθερά c. Για τον προσδιορισμό της, εάν μια αρχική συνθήκη $W(t_0)$ είναι γνωστή, αντικαθιστώστας $t = t_0$ στην προηγούμενη εξίσωση μπορούμε να πάρουμε:

$$W(t_0) = ce^{-\int_{\hat{d}}^{t_0} pds} \Leftrightarrow c = W(t_0)e^{\int_{\hat{d}}^{t_0} pds} = W(t_0)e^{-\int_{t_0}^{\hat{d}} pds}$$

και έτσι ο τύπος της ορίζουσας γίνεται:

$$W = W(t_0)e^{-\int_{t_0}^{\hat{d}} pds}e^{-\int_{\hat{d}}^{t} pds} = W(t_0)e^{-\int_{t_0}^{\hat{d}} pds - \int_{\hat{d}}^{t} pds} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow W(t) = W(t_0)e^{-\int_{t_0}^{t} p(s)ds}$$

που είναι το ζητούμενο.

Άσκηση 2: *Δείξτε ότι δεν υπάρχουν συνεχείς συναρτήσεις p, q τέτοιες ώστε η $\varphi(t) = t^3$ να είναι λύση του διαφορικού συστήματος:*

$$y'' + py' + qy = 0$$

Σημειωτέον, οι p και q ορίζονται σε όλο το $\mathbb{R}$.

Λύση:

Εάν t^3 είναι μία λύση της διαφορικής εξίσωσης, τότε η ορίζουσα $Wronski$ του συστήματος θα παίρνει την μορφή:

$$\begin{vmatrix} t^3 & * \\ 3t^2 & * \end{vmatrix}$$

Έχοντας υπόψη τον τύπο: $W(t) = W(t_0)e^{\int_{t_0}^{t} p(s)ds}$, παρατηρούμε ότι εάν υπολογίσουμε την ορίζουσα στο 0, προκύπτει:

$$\begin{vmatrix} 0^3 & * \\ 3 \cdot 0^2 & * \end{vmatrix} = 0, \text{ αφού η πρώτη στήλη είναι μηδενική.}$$

Οπότε παίρνουμε ότι και η ορίζουσα στο σύνολό της είναι 0 (ταυτοτικά μηδέν), εάν χρησιμοποιήσουμε τον τύπο από τα υπόψη για $t_0 = 0$. Δεν είναι δυνατόν λοιπόν να βρεθούν 2 γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις του συστήματος, ή ισοδύναμα, κάθε λύση του συστήματος είναι της μορφής $c_i t^3$. Ας πάρουμε $c_i \neq c_j$ και τις αντίστοιχες λύσεις της Διαφορικής εξίσωσης $c_i t^3, c_j t^3$, όταν $t \neq 0$. Υπό αυτές τις υποθέσεις, τα ακόλουθα θα πρέπει να ισχύουν:

$$(c_i t^3)'' + p(c_i t^3)' + q(c_i t^3) = 0 \overset{t \neq 0}{\Leftrightarrow} 6c_i + 3c_i pt + c_i qt^2 = 0 \tag{5.1}$$

$$(c_j t^3)'' + p(c_j t^3)' + q(c_j t^3) = 0 \overset{t \neq 0}{\Leftrightarrow} 6c_j + 3c_j pt + c_j qt^2 = 0 \tag{5.2}$$

Υποθέτουμε επιπλέον και προς άτοπο ότι υπάρχουν συνεχείς p, q για τις οποίες η t^3 είναι λύση του αρχικού μας συστήματος. Ως συνεχείς συναρτήσεις θα πρέπει:

$$\lim_{t \to 0} p(t), \lim_{t \to 0} q(t) \in \mathbb{R}$$

Τέλος, με όρια προς το 0 στις (5.1) και (5.2), προκύπτει το ζητούμενο, αφού:
Από την (5.1):

$$\lim_{t \to 0} \left(6c_i + 3c_i pt + c_i qt^2\right) = 0 \Leftrightarrow \lim_{t \to 0} \left(6c_i\right) + \underbrace{\lim_{t \to 0} \left(3c_i pt\right)}_{\substack{\Cap \\ \mathbb{R}}} + \underbrace{\lim_{t \to 0} \left(c_i qt^2\right)}_{\substack{\Cap \\ \mathbb{R}}} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow c_i = 0$$

και ομοίως για την (5.2):

$$\lim_{t \to 0} \left(6c_j + 3c_j pt + c_j qt^2\right) = 0 \Leftrightarrow \lim_{t \to 0} \left(6c_j\right) + \underbrace{\lim_{t \to 0} \left(3c_j pt\right)}_{\substack{\Cap \\ \mathbb{R}}} + \underbrace{\lim_{t \to 0} \left(c_j qt^2\right)}_{\substack{\Cap \\ \mathbb{R}}} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow c_j = 0$$

Δηλαδή $c_i = c_j = 0$. Αυτό είναι άτοπο.

Σημείωση: *Σε αυτήν την άσκηση θα μπορούσαμε επίσης, υποθέτοντας ότι η ct^3 είναι η γενική λύση, να δείξουμε ότι κάθε λύση είναι μηδενική (από την (5.1) με όρια προς το 0). Το συμπέρασμα αυτό είναι άτοπο, αφού από την υπόθεση, η t^3 είναι λύση, προφανώς μη μηδενική.*

Άσκηση 3: *Να λυθεί η Διαφορική εξίσωση:*

$$y''' - 4y'' - y' + 4y = 3e^{-t}$$

Λύση: 1:

Γνωρίζουμε, λόγω της αρχής της υπέρθεσης, ότι η γενική λύση της παρούσας Διαφορικής εξίσωσης θα είναι το άθροισμα των λύσεων της ομογενούς και μία της μη ομογενούς διαφορικής εξίσωσης. Όσον αφορά την ομογενή:

$$y''' - 4y - y' + 4y = 0$$

οι $n \leq 3$ στο πλήθος ρίζες (λ_i) του πολυώνυμου $\lambda^3 - 4\lambda^2 - \lambda + 4 = 0$ έρχονται σε αντιστοιχία με n διακεκριμένους τύπους λύσεων, $y = c_i e^{\lambda_i t}$. Μελετούμε λοιπόν το πολυώνυμο αυτό και βρίσκουμε ότι:

$$\lambda^3 - 4\lambda^2 - \lambda + 4 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 4)(\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0 \Leftrightarrow \lambda \in \{-1, 1, 4\}$$

Επομένως έχουμε τις λύσεις της ομογενούς Διαφορικής εξίσωσης:

$$y_{o,1} = c_1 e^{-t} \text{ με } c_1 \in \mathbb{R}$$
$$y_{o,2} = c_2 e^{t} \text{ με } c_2 \in \mathbb{R}$$
$$y_{o,3} = c_3 e^{4t} \text{ με } c_3 \in \mathbb{R}$$

και συνεπώς η γενική λύση της ομογενούς θα παίρνει την μορφή:

$$y_o = y_{o,1} + y_{o,2} + y_{o,3} = c_1 e^{-t} + c_2 e^{t} + c_3 e^{4t}$$

Όσον αφορά την μη ομογενή Διαφορική εξίσωση, εδώ θα αναζητήσουμε λύσεις της μορφής $y_{\not o} = ate^{-t}$.

$$y_{\not o} = ate^{-t} \Rightarrow \frac{dy_{\not o}}{dt} = a(e^{-t} - te^{-t}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 y_{\not o}}{dt^2} = a(-2e^{-t} + te^{-t}) \Rightarrow \frac{d^3 y_{\not o}}{dt^3} = a(3e^{-t} - te^{-t})$$

Αντικαθιστώντας τώρα στην αρχική εξίσωση, μπορούμε να προσδιορίσουμε την τιμή του a:

$$a(3e^{-t} - te^{-t}) - 4a(-2e^{-t} + te^{-t}) - a(e^{-t} - te^{-t}) + 4ate^{-t} = 3e^{-t} \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 10ae^{-t} = 3e^{-t} \Leftrightarrow a = \frac{3}{10}$$

και τελικά η γενική μορφή της λύσης της αρχικής Διαφορικής εξίσωσης θα είναι:

$$y = y_o + y_{\not o} = \frac{3}{10} te^{-t} + c_1 e^{-t} + c_2 e^{t} + c_3 e^{4t}$$

Λύση: 2:

Θα μπορούσαμε να βρούμε την λύση και (σχετικά) απ΄ ευθείας. Συγκεκριμένα, επειδή η ομογενής Διαφορική εξίσωση έχει εντός της τις ποσότητες $-4y'' + 4y$ και $y''' - y'$, διαλέγουμε μία συνάρτηση που να μην αλλάζει τον τύπο της υπό διαδοχικές παραγωγίσεις. Πιο συγκεκριμένα, επιτρέπεται μόνο να εναλάσσει το πρόσημό της. Δύο τέτοιες συναρτήσεις είναι προφανώς οι e^{-t}, e^{t}. Αυτές οι συναρτήσεις θα πρέπει να είναι και λύσεις της ομογενούς Διαφορικής εξίσωσης. Οπότε στην συνέχεια, θεωρώντας τον μετασχηματισμό:

$$y = e^{-t} \int u \Rightarrow y' = -e^{-t} \int u + ue^{-t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y'' = e^{-t} \int u - 2ue^{-t} + u'e^{-t} \Rightarrow y''' = -e^{-t} \int u + 3ue^{-t} - 3u'e^{-t} + u''e^{-t}$$

παρατηρούμε ότι η διαφορική μας εξίσωση γίνεται 2ου βαθμού:

$$\Big(-e^{-t} \int u + 3ue^{-t} - 3u'e^{-t} + u''e^{-t} \Big) - 4\Big(e^{-t} \int u - 2ue^{-t} + u'e^{-t} \Big) - \Big(-e^{-t} \int u + ue^{-t} \Big) +$$

$$+4\Big(e^{-t}\int u\Big) = 3e^{-t} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow u'' - 7u' + 10u = 3$$

Η τελευταία λύνεται σχετικά εύκολα, εάν παρατηρήσουμε ότι:

$$u'' - 7u' + 10u = 3 \Leftrightarrow u'' - 2u' - 5u' + 10u = 3 \Leftrightarrow u''e^{-2t} - 2e^{-2t}u' - 5(u'e^{-2t} - 2e^{-2t}u) = 3e^{-2t} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \big((u' - 5u)e^{-2t}\big)' = \Big(-\frac{3}{2}e^{-2t} + c_1\Big)' \Leftrightarrow u' - 5u = -\frac{3}{2} + c_1e^{2t} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (ue^{-5t})' = \Big(\frac{3}{10}e^{-5t} - \frac{c_1}{3}e^{-3t} + c_2\Big)' \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u = \frac{3}{10} - \frac{c_1}{3}e^{2t} + c_2e^{5t}$$

Τελικά, η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης θα πρέπει να είναι:

$$y = e^{-t}\int\Big(\frac{3}{10} - \frac{c_1}{3}e^{2t} + c_2e^{5t}\Big) + \overbrace{c_3e^{-t}}^{\text{Αρχ. λύση}} = \frac{3}{10}te^{-t} - \frac{c_1}{6}e^{t} + \frac{c_2}{5}e^{4t} + c_3e^{-t}$$

ή αλλιώς, μετά από αλλαγή των σταθερών:

$$y = \frac{3}{10}te^{-t} + c_1e^{-t} + c_2e^{t} + c_3e^{4t}$$

Άσκηση 4: *Να βρεθεί η γενική λύση της Διαφορικής εξίσωσης:*

$$t^2y'' - 3ty' + 4y = t^2,\ \text{με } t > 0$$

Λύση:

Για την επίλυση της παρούσας Διαφορικής εξίσωσης, θα χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο $Lagrange$. Αρχικά ας μελετήσουμε την ομογενή της μορφή:

$$t^2y'' - 3ty' + 4y = 0$$

Η μορφή αυτή είναι $Euler$, οπότε θα αναζητήσουμε μία λύση της μορφής $t^r, r \in \mathbb{N}$:

$$r(r-1)t^2t^{r-2} - 3rtt^{r-1} + 4t^r = 0 \Leftrightarrow \big(r(r-1) - 3r + 4\big)t^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow r^2 - 4r + 4 = 0 \Leftrightarrow r = 2$$

Προκύπτει ότι η t^2 είναι λύση της ομογενούς. Επειδή χρειαζόμαστε ακόμη μία λύση της ομογενούς Διαφορικής εξίσωσης, εφαρμόζουμε τον μετασχηματισμό $t = e^s$ και θεωρούμε $g = y \circ exp$:

$$e^{2s}y''(e^s) - 3e^sy'(e^s) + 4y(e^s) = e^{2s} \Leftrightarrow \overbrace{e^{2s}y''(e^s) + e^sy'(e^s)}^{\frac{d^2g}{ds^2}} - 4\overbrace{e^sy'(e^s)}^{\frac{dg}{ds}} + 4\overbrace{y(e^s)}^{g} = e^{2s} \Leftrightarrow$$

$$g'' - 4g' + 4g = e^{2s} \Leftrightarrow g'' - 2g' - 2(g' - 2g) = e^{2s} \Leftrightarrow g''e^{-2s} - 2e^{-2s}g' - 2(g'e^{-2s} - 2e^{-2s}g) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow g'e^{-2s} - 2e^{-2s}g = c \Leftrightarrow g(s) = y(e^s) = cse^{2s} + \hat{d}e^{2s} = ce^{2s}ln(e^s) + \hat{d}e^{2s} \Leftrightarrow$$

$$\overset{t=e^s}{\Longleftrightarrow} y = ct^2lnt + \hat{d}t^2,\ \text{με } c, \hat{d} \in \mathbb{R}$$

Προηγουμένως είχαμε βρει ότι η t^2 είναι λύση της ομογενούς, οπότε από τον αμέσως προηγούμενο τύπο, η t^2lnt θα είναι και αυτή λύση της ομογενούς. Οι t^2, t^2lnt είναι γραμμικώς ανεξάρτητες (υπόθεση ρουτίνας, μέσω της ορίζουσας $Wronski$, να επαληθευτεί ο ισχυρισμός), επομένως για την λύση της μη ομογενούς Διαφορικής εξίσωσης θεωρούμε το σύστημα ως προς τις συναρτήσεις u, v:

$$u't^2 + v't^2lnt = 0$$
$$2tu' + (2tlnt + t)v' = 2t$$

Η ορίζουσα αυτού του συστήματος είναι:

$$W = \begin{vmatrix} t^2 & t^2 lnt \\ 2t & 2tlnt + t \end{vmatrix} = t^3$$

Συνεπώς, με την μέθοδο $Cramer$, οι u', v' είναι:

$$u' = \frac{1}{W} \begin{vmatrix} 0 & t^2 lnt \\ 2t & 2tlnt + t \end{vmatrix} = -2lnt$$

και:

$$v' = \frac{1}{W} \begin{vmatrix} t^2 & 0 \\ 2t & 2t \end{vmatrix} = 2$$

Ολοκληρώνοντας τώρα τις u', v', βρίσκουμε:

$$u = \int u' = -2tlnt + 2t + p, \text{ με } p \in \mathbb{R}$$

και:

$$v = \int v' = 2t + q, \text{ με } q \in \mathbb{R}$$

Τελικά, η γενική λύση της Διαφορικής εξίσωσης γίνεται:

$$y = \overbrace{u + v}^{\text{μη ομογ.}} + \overbrace{ct^2lnt + \hat{d}t^2}^{\text{ομογ.}} = -2tlnt + 4t + ct^2lnt + \hat{d}t^2 + \overbrace{p + q}^{l} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow y = ct^2lnt - 2tlnt + \hat{d}t^2 + 4t + l$$

Άσκηση 5: *Να λυθεί με την μέθοδο των δυναμοσειρών η Διαφορική εξίσωση:*

$$y'' + ty = 0$$

εάν επιπλέον $y(0) = y'(0) = 1$.

Λύση:

Ας θεωρήσουμε την γραφή της λύσης y ως σειρά $Taylor$, με κέντρο το 0 (το ανάπτυγμα $Maclaurin$ δηλαδή):

$$y = \sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i$$

Παραγωγίζοντας την παραπάνω, βρίσκουμε ότι οι 2 πρώτες παράγωγοι είναι:

$$y' = \sum_{i=1}^{\infty} i a_i t^{i-1} \Rightarrow y'' = \sum_{i=2}^{\infty} i(i-1) a_i t^{i-2}$$

οπότε με αντικατάσταση στην αρχική Διαφορική εξίσωση έχουμε:

$$\sum_{i=2}^{\infty} i(i-1) a_i t^{i-2} + \sum_{i=0}^{\infty} a_i t^{i+1} = 0 \Leftrightarrow$$

$$2a_2 t^0 + \sum_{i=0}^{\infty} (i+3)(i+2) a_{i+3} t^{i+1} + \sum_{i=0}^{\infty} a_i t^{i+1} = 0 \Leftrightarrow$$

$$2a_2 + \sum_{i=0}^{\infty} \Big((i+3)(i+2) a_{i+3} + a_i \Big) t^{i+1} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a_2 = 0 \\ (i+3)(i+2) a_{i+3} + a_i = 0 \end{cases}$$

Από αυτό βρίσκουμε, λοιπόν, μία αναδρομική σχέση για τους συντελεστές του πολυωνύμου:

$$a_{i+3} = -\frac{a_i}{(i+3)(i+2)}, \text{ όταν } i \geq 0$$

Για τους 2 αρχικούς όρους a_0, a_1, χρησιμοποιούμε τις αρχικές συνθήκες. Συγκεκριμένα από τις ιδιότητες του πολυωνύμου $Taylor$, $a_0 = y(0) = 1$ και $a_1 = y'(0) = 1$. Οπότε τώρα η ακολουθία των συντελεστών παίρνει την μορφή:

$a_0 = 1$	$a_1 = 1$	$a_2 = 0$	$a_3 = -\dfrac{1}{2\cdot 3}$	$a_4 = -\dfrac{1}{3\cdot 4}$
$a_5 = 0$	$a_6 = \dfrac{1}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6}$	$a_7 = \dfrac{1}{3\cdot 4\cdot 7\cdot 8}$	$a_8 = 0$	$a_9 = -\dfrac{1}{2\cdot 3\cdot 9\cdot 10}$
$a_{10} = -\dfrac{1}{3\cdot 4\cdot 7\cdot 8\cdot 10\cdot 11}$	$a_{11} = 0$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$

και η λύση της διαφορικής εξίσωσης γίνεται:

$$y = 1 + t - \frac{1}{2\cdot 3}t^3 - \frac{1}{3\cdot 4}t^4 + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6}t^6 + \frac{1}{3\cdot 4\cdot 7\cdot 8}t^7 - \frac{1}{2\cdot 3\cdot 9\cdot 10}t^9 - \frac{1}{3\cdot 4\cdot 7\cdot 8\cdot 10\cdot 11}t^{10} + \cdots$$

Άσκηση 6: *Να λυθούν οι Διαφορικές εξισώσεις:*

i) $y'' - y' - 2y = e^{3t} + sin(2t)$

ii) $y'' - 4y' + 4y = 0$

Λύση:

i) Λόγω της αρχής της υπέρθεσης, η λύση της Διαφορικής εξίσωσης θα είναι το άθροισμα των λύσεων της ομογενούς και μίας λύσης της (γενικής) μη ομογενούς. Όσον αφορά την ομογενή:

$$y'' - y' - 2y = 0$$

λύνοντας το τριώνυμο:

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda \in \{-1, 2\}$$

προκύπτει ότι οι $y_{o,1} = c_1 e^{-t}$ και $y_{o,2} = c_2 e^{2t}$ είναι λύσεις της ομογενούς. Οπότε η γενική λύση της ομογενούς είναι:

$$y_o = c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t}$$

Εν συνεχεία θα αναζητήσουμε λύσεις της μη ομογενούς:

$$y'' - y' - 2y = e^{3t}$$

της μορφής $y_{\not{o},1} = ae^{3t}$. Αντικαθιστώντας λοιπόν στην μη ομογενή Διαφορική εξίσωση προσδιορίζουμε την σταθερά:

$$9ae^{3t} - 3ae^{3t} - 2ae^{3t} = e^{3t} \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow a = \frac{1}{4}$$

Άρα $y_{\not{o},1} = \frac{1}{4}e^{3t}$. Για την άλλη μη ομογενή εξίσωση:

$$y'' - y' - 2y = sin(2t)$$

θα αναζητήσουμε λύσεις της μορφής $y_{\not{o},2} = acos(2t) + bsin(2t)$. Αντικαθιστώντας στην μη ομογενή Διαφορική εξίσωση προσδιορίζουμε τις σταθερές:

$$-4acos(2t) - 4bsin(2t) - \big(-2asin(2t) + 2bcos(2t) - 2acos(2t) + bsin(2t)\big) = sin(2t) \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a - 6b = 0 \\ -6a - 2b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = \frac{1}{20}, b = -\frac{3}{20}$$

Άρα $y_{\not{o},2} = \frac{1}{20}cos(2t) - \frac{3}{20}sin(2t)$. Έχουμε, λοιπόν, ότι μία λύση της ‘‘γενικής’’, μη ομογενούς διαφορικής εξίσωσης είναι η:

$$y_{\not{o}} = y_{\not{o},1} + y_{\not{o},2} = \frac{1}{20}cos(2t) - \frac{3}{20}sin(2t) + \frac{1}{4}e^{3t}$$

Τελικά, η γενική λύση της Διαφορικής εξίσωσης γίνεται:

$$y = y_o + y_{\not{o}} = \frac{1}{20}cos(2t) - \frac{3}{20}sin(2t) + \frac{1}{4}e^{3t} + c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t}$$

ii) Στην ομογενή αυτή Διαφορική εξίσωση, παρατηρούμε ότι:

$$y'' - 4y' + 4y = 0 \Leftrightarrow y'' - 2y' - 2y' + 4y = 0$$

Οπότε πολλαπλασιάζοντας με τον (κοινό) ολοκληρωτικό παράγοντα e^{-2t} των εξισώσεων $y'' - 2y' = 0$ και $2(y' - 2y) = 0$ μπορούμε να πάρουμε:

$$y''e^{-2t} - 2e^{-2t} - 2(y'e^{-2t} - 2e^{-2t}y) = 0 \Leftrightarrow \left(y'e^{-2t} - 2e^{-2t}y\right)' = (c)' \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y'e^{-2t} - 2e^{-2t} = c \Leftrightarrow ye^{-2t} = ct + p \Leftrightarrow y = cte^{2t} + pe^{2t}, \text{ με } c, p \in \mathbb{R}$$

Εάν δεν κάναμε αυτήν την παρατήρηση στην αρχή, για να προσδιορίσουμε την λύση της Διαφορικής εξίσωσης αυτής θα θεωρούσαμε το τριώνυμο $\lambda^2 - 4\lambda + 4$, το οποίο έχει διπλή ρίζα το 2. Επειδή το 2 είναι ρίζα, η pe^{2t} είναι λύση. Επειδή το 2 είναι διπλή ρίζα, η cte^{2t} είναι λύση. Προσθέτοντας τις 2 αυτές λύσεις, φτάνουμε στο ίδιο αποτέλεσμα.

Παρατήρηση στο* i*: *Θα μπορούσαμε ακολουθώντας το ίδιο σκεπτικό με το* ii *να γράψουμε την διαφορική εξίσωση ως:* $y'' + y' - 2y' - 2y = e^{3t} + sin(2t)$*. Έπειτα, πολλαπλασιάζοντας με τον (κοινό) ολοκληρωτικό παράγοντα* e^t *των εξισώσεων* $y'' + y' = 0$ *και* $2(y' + y) = 0$*, και μετά από (πάρα πολλές) αρκετές πράξεις, θα καταλήγαμε στο ίδιο αποτέλεσμα.*

Μέρος II

Περαιτέρω Ασκήσεις

Άσκηση 1: *Να λυθεί η μη γραμμική Διαφορική εξίσωση:*

$$y'' + y(y')^3 = 0, \text{ εάν } y = y(t) \text{ και } y' = \frac{dy}{dt}$$

Λύση:

Για την λύση της παρούσας μη γραμμικής Διαφορικής εξίσωσης θα χρησιμοποιήσουμε τον μετασχηματισμό:

$$y' = u$$

Από τον μετασχηματισμό αυτό προκύπτει:

$$y' = u \Leftrightarrow \frac{dy}{du}\frac{du}{dt} = u \Leftrightarrow u' = u\frac{du}{dy}$$

Επιπλέον, για την 2^η παράγωγο του y, χρησιμοποιώντας τον προαναφερθέντα τύπο έχουμε:

$$\frac{d}{dt}\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(u) = \frac{du}{dt} = u' = u\frac{du}{dy}$$

Οπότε, κάνοντας αντικατάσταση στον αρχικό τύπο, παίρνουμε:

$$u\frac{du}{dy} + yu^3 = 0$$

Εάν $u = 0$, ή ισοδύναμα $y' = 0$, η αρχική εξίσωση επαληθεύεται. Οπότε $u = 0$ είναι μια τετριμμένη λύση. Για $u \neq 0$:

$$\frac{du}{dy} + yu^2 = 0$$

προκύπτει εξίσωση που λύνεται με την μέθοδο των χωριζομένων μεταβλητών. Συγκεκριμένα:

$$-\frac{\frac{du}{dy}}{u^2} = y$$

$$\Leftrightarrow -\int \frac{\frac{du}{dy}}{u^2} dy = \int y dy$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{u} = \frac{y^2}{2} + c, \text{ με } c \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow 1 = u\frac{y^2}{2} + uc$$

$$\Leftrightarrow y'y^2 + 2y'c = 2$$

$$\Leftrightarrow (y^3 + 6cy)' = (6t + q)', \text{ με } q \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow y^3 + 6cy = 6t + q \Leftrightarrow y(y^2 + 6c) = 6t + q$$

Παρατηρούμε ότι αυτή η οικογένεια λύσεων που προκύπτει είναι σε πεπλεγμένη μορφή.

Τελικά, το σύνολο λύσεων της y είναι:

$$\left\{u = y' = 0, y(y^2 + 6c) = 6t + q \text{ με } c, q \in \mathbb{R}\right\}$$

$$= \left\{y = p \text{ με } p \in \mathbb{R}, y(y^2 + 6c) = 6t + q \text{ με } c, q \in \mathbb{R}\right\}$$

Άσκηση 2: *Να λυθεί η μη γραμμική Διαφορική εξίσωση:*

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0, \text{ εάν } p, q \text{ είναι συναρτήσεις ως προς } t \text{ και } y \geq 0$$

Λύση:

Η $y = 0$ είναι τετριμμένη. Για $y \neq 0$, για την λύση της παρούσας μη γραμμικής Διαφορικής εξίσωσης θα χρησιμοποιήσουμε τον μετασχηματισμό:

$$y = e^{\int udt}$$

Από τον μετασχηματισμό αυτό προκύπτει:

$$y = e^{\int udt} \Rightarrow y' = ue^{\int udt} \Rightarrow y'' = u'e^{\int udt} + u^2 e^{\int udu}$$

Οπότε, αντικαθιστώντας στην αρχική μας εξίσωση, παίρνουμε:

$$u'e^{\int udt} + u^2 e^{\int udu} + pue^{\int udt} + qe^{\int udt} = 0$$

$$\overset{e^{\int udt} \neq 0}{\Longleftrightarrow} u' + u^2 + pu + q = 0$$

$$\Leftrightarrow u' + pu = -u^2 - q \tag{5.3}$$

Η τελευταία εξίσωση παρατηρούμε είναι Διαφορική εξίσωση της μορφής $Riccati$, η οποία για να επιλυθεί χρειάζεται μια γνωστή λύση. Ας είναι y_0 αυτή η λύση. Σε αυτήν την περίπτωση εφαρμόζουμε τον παρακάτω μετασχηματισμό:

$$u = y_0 + \frac{1}{w} \Rightarrow u' = y_0' - \frac{w'}{w^2} \text{ και } u = y_0 + \frac{1}{w} \Rightarrow u^2 = y_0^2 + 2\frac{y_0}{w} + \frac{1}{w}$$

Αντικαθιστώντας στην (5.3) προκύπτει:

$$y_0' - \frac{w'}{w^2} + p\Big(y_0 + \frac{1}{w}\Big) = -\Big(y_0^2 + 2\frac{y_0}{w} + \frac{1}{w}\Big) - q$$

$$\Leftrightarrow y_0' + py_0 - \frac{w'}{w^2} + \frac{p}{w} = -y_0^2 - q + 2\frac{y_0}{w} + \frac{1}{w}$$

$$\Rightarrow -\frac{w'}{w^2} + \frac{p}{w} = 2\frac{y_0}{w} + \frac{1}{w}$$

$$\Leftrightarrow pw - w' = (2y_0 + 1)w$$

$$\Leftrightarrow w' + (2y_0 - p + 1)w = 0$$

$$\Leftrightarrow w'e^{\int 2y_0 - p + 1dt} + (2y_0 - p + 1)e^{\int 2y_0 - p + 1dt}w = 0$$

$$\Leftrightarrow \Big(we^{\int 2y_0 - p + 1dt}\Big)' = 0 \Leftrightarrow we^{\int 2y_0 - p + 1dt} = c, \text{ με } c \in \mathbb{R}^*$$

Παρατηρούμε ότι αν $c = 0$, τότε $w = 0 \to$ άτοπο. Οπότε $c \neq 0$. Τελικά, η γενική λύση της Διαφορικής μας εξίσωσης για $c \neq 0$ είναι:

$$\frac{1}{w} = \frac{e^{\int 2y_0 - p + 1dt}}{c}$$

$$\Leftrightarrow u = y_0 + \frac{e^{\int 2y_0 - p + 1dt}}{c}$$

$$\Leftrightarrow \int udt = \int y_0 + \frac{e^{\int 2y_0 - p + 1dt}}{c} dt$$

$$\Leftrightarrow e^{\int udt} = e^{\displaystyle\int y_0 + \frac{e^{\int 2y_0 - p + 1dt}}{c} dt}$$

$$\Leftrightarrow y = e^{\displaystyle\int y_0 + \frac{e^{\int 2y_0 - p + 1dt}}{c} dt}$$

Οπότε το σύνολο λύσεων είναι:

$$\left\{0, exp\Bigg(\int y_0 + \frac{e^{\int 2y_0 - p + 1dt}}{c} dt\Bigg)\right\}$$

Άσκηση 3: *Να λυθεί η Διαφορική εξίσωση:*

$$y' + 2y = q(t) \text{ με } y(0) = 1$$

εάν: $q(t) = \begin{cases} 1 \text{ εάν } t \in [0,1] \\ 0 \text{ εάν } t \in (1,\infty) \end{cases}$

Λύση:

Για την λύση της εξίσωσης αυτής διακρύνουμε τις περιπτώσεις:

Εάν $t \in [0,1]$ τότε $q(t) = 0$ και η Διαφορική μας εξίσωση παίρνει την μορφή:

$$y' + 2y = 0$$

που λύνεται με την μέθοδο των χωριζομένων μεταβλητών. Εάν $y = 0$, η λύση είναι τετριμμένη. Για $y \neq 0$:

$$\Rightarrow y' + 2y = 0 \Rightarrow y'e^{2t} + 2ye^{2t} = 0 \Rightarrow (ye^{2t})' = (c)' \Rightarrow y = ce^{-2t}, \text{ με } c \in \mathbb{R}$$

Επειδή $y(0) = 1$, προκύπτει $c = 1$ και το σύνολο λύσεων για $t \in [0,1]$ είναι:

$$\Big\{0, e^{-2t}\Big\}$$

Εάν $t \in (1,\infty)$, τότε $q(t) = 1$ και η Διαφορική μας εξίσωση παίρνει την μορφή:

$$y' + 2y = 1 \Rightarrow y'e^{2t} + 2ye^{2t} = e^{2t} \Rightarrow (ye^{2t})' = \Big(\frac{e^{2t}}{2} + c\Big)'$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{2} + ce^{-2t}, \text{ με } c \in \mathbb{R}$$

Επειδή $y(0) = 1$, προκύπτει $c = \dfrac{1}{2}$ και το σύνολο λύσεων για $t \in (1,\infty)$ είναι:

$$\Big\{\frac{1}{2}\Big(1 + e^{-2t}\Big)\Big\}$$

Άσκηση 4: *Να λυθεί η μη γραμμική Διαφορική εξίσωση:*

$$y'' + y = tant$$

χρησιμοποιώντας την μέθοδο Lagrange

Λύση: 1:

Αρχικά θεωρούμε την ομογενή Διαφορική εξίσωση:

$$y'' + y = 0$$

και παρατηρούμε ότι οι $c_1 sint, c_2 cost$ είναι λύσεις της. Από την γραμμικότητα της παραγώγου, η $c_1 sint + c_2 cost$ επίσης αποτελεί λύση. Στην συνέχεια, αντικαθιστώντας τις c_1, c_2 από συναστήσεις u, v, θα αναζητήσουμε λύση $u(t)sint + v(t)cost$ της αρχικής μας εξίσωσης.
Για τον προσδιορισμό των u, v, θα χρησιμοποιήσουμε την αντίστοιχη μη ομογενή μορφή της εξίσωσης. Συγκεκριμένα, θεωρούμε το σύστημα:

$$c_1 u' sint + c_2 v' cost = 0 \tag{5.4}$$

$$c_1 u' cost - c_2 v' sint = tant \tag{5.5}$$

Εάν W είναι η ακόλουθη ορίζουσα:

$$W = \begin{vmatrix} c_1 sint & c_2 cost \\ c_1 cost & -c_2 sint \end{vmatrix} = (-sin^2 t - cos^2 t)c_1 c_2 = -c_1 c_2$$

το σύστημα έχει λύσεις:

$$u' = -\frac{cost \cdot tant}{W} = \frac{sint}{W} \text{ και } v' = \frac{sint \cdot tant}{W} = \frac{sin^2 t}{Wcost} \text{ (προκύπτουν με την μέθοδο } Cramer\text{)}$$

Από τις σχέσεις αυτές, ολοκληρώνοντας ως προς t, βρίσκουμε τις u, v:

$$u = -\frac{1}{W}\int sintdt = \frac{cost}{W} + p, \text{ με } p \in \mathbb{R}$$

και:

$$v = \frac{1}{W}\int \frac{sin^2 t}{cost}dt = \frac{1}{W}\int \Big(\frac{1}{cost} - cost\Big)\, dt$$

Για τον υπολογισμό του $\displaystyle\int \frac{1}{cost}dt$ κάνουμε το εξής τέχνασμα:

$$\int \frac{1}{cost}dt = \int \frac{1}{1+sint}\frac{1+sint}{cost}dt = \int \frac{1}{\frac{1}{cost}+\frac{sint}{cost}}\Big(\frac{1}{cos^2 t} + \frac{sint}{cos^2 t}\Big)\, dt =$$

$$\int \frac{1}{\frac{1}{cost}+tant}\Big((tant)' + \frac{sint}{cos^2 t}\Big)\, dt = \int \Big(ln\Big(tant + \frac{1}{cost}\Big)\Big)'\, dt \Leftrightarrow$$

$$\int \frac{1}{cost}dt = ln\Big(tant + \frac{1}{cost}\Big) + s, \text{ με } s \in \mathbb{R}$$

Άρα έχουμε ότι:

$$v = \frac{1}{W}\Big(ln\Big(tant + \frac{1}{cost}\Big) + s - sint + h\Big), \text{ με } h \in \mathbb{R}$$

Και τελικά η γενική λύση της Διαφορικής εξίσωσης παίρνει την μορφή:

$$usint + vcost + c_1 sint + c_2 cost = \Big(\frac{cost}{W} + p\Big)\, sint + \frac{cost}{W}\Big(ln\Big(tant + \frac{1}{cost}\Big) + s - sint + h\Big) +$$

$$+c_1 sint + c_2 cost =$$

$$= \overbrace{(p + c_1)}^{r_1} sint + \frac{cost}{W} ln\Big(tant + \frac{1}{cost}\Big) + \frac{\overbrace{s + h + c_2}^{r_2}}{W} cost =$$

$$= \frac{cost}{W} ln\Big(tant + \frac{1}{cost}\Big) + r_1 sint + r_2 cost$$

Λύση: 2: *Χωρίς την μέθοδο Lagrange:*

Αρχικά γράφουμε ισοδύναμα την Διαφορική εξίσωση:

$$y'' + y = tant \Leftrightarrow y'' cost + ycost = sint$$

και παρατηρούμε ότι:

$$y'' cost - y' sint + y' sint + ycost = sint \Leftrightarrow (y' cost + ysint)' = (-cost + c)', \text{ με } c \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$y' cost + ysint = -cost + c \Leftrightarrow y' \frac{1}{cost} + y\frac{sint}{cos^2 t} = -\frac{1}{cost} + \frac{c}{cos^2 t} \Leftrightarrow$$

$$\Big(y\frac{1}{cost}\Big)' = -\frac{1}{cost} + (ctant)' \tag{5.6}$$

Μένει μόνον, λοιπόν, να υπολογιστεί το $\displaystyle\int \frac{1}{cost}dt$. Για τον υπολογισμό του κάνουμε το εξής τέχνασμα:

$$\int \frac{1}{cost}dt = \int \frac{1}{1+sint}\frac{1+sint}{cost}dt = \int \frac{1}{\frac{1}{cost}+\frac{sint}{cost}}\Big(\frac{1}{cos^2 t} + \frac{sint}{cos^2 t}\Big)\, dt =$$

$$\int \frac{1}{\frac{1}{cost}+tant}\Big((tant)' + \frac{sint}{cos^2 t}\Big)\, dt = \int \Big(ln\Big(tant + \frac{1}{cost}\Big)\Big)'\, dt \Leftrightarrow$$

$$\int \frac{1}{cost}dt = ln\Big(tant + \frac{1}{cost}\Big) + q,\ \text{με } q \in \mathbb{R}$$

Οπότε, με αντικατάσταση στην (5.6) προκύπτει:

$$y\frac{1}{cost} = -ln\Big(tant + \frac{1}{cost}\Big) + ctant + q \Leftrightarrow y = -cost \cdot ln\Big(tant + \frac{1}{cost}\Big) + csint + qcost$$

Επειδή και τα μη μηδενικά πολλαπλάσια της λύσης αυτής αποτελούν λύσεις, γενικά η διαφορική εξίσωση επιλύεται από συναρτήσεις της μορφής:

$$-r_0 cost \cdot ln\Big(tant + \frac{1}{cost}\Big) + \overbrace{cr_0}^{r_1} sint + \overbrace{qr_0}^{r_2} cost =$$

$$= -r_0 cost \cdot ln\Big(tant + \frac{1}{cost}\Big) + r_1 sint + r_2 cost,\ \text{με } r_0 \in \mathbb{R}*$$

Άσκηση 5: *Να υπολογιστεί ο πίνακας e^{At} εάν ισχύει ότι:*

$$y'(t) = Ay(t) \text{ και } A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Λύση:

Ας υποθέσουμε ότι λ είναι μια ιδιοτιμή ενός A και v ένα ιδιοδιάνυσμα σε αυτήν την ιδιοτιμή. Επειδή λ ιδιοτιμή και v ιδιοδιάνυσμα, θα ισχύει: $Av = \lambda v \Rightarrow e^{\lambda t}Av = \lambda e^{\lambda t}v \Rightarrow \big(e^{\lambda t}v\big)' = A\big(e^{\lambda t}v\big)$, οπότε μπορούμε να συνάγουμε ότι η $e^{\lambda t}\nu$ είναι λύση της Διαφορικής εξίσωσης $y' = Ay$.

Ειδικότερα, για τα δεδομένα της άσκησης, μελετώντας τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα A μπορούμε να δούμε ότι:

$$\underset{A}{\mathcal{X}}(\lambda) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 \\ 3 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \cdots = (\lambda+2)(\lambda-5) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underset{A}{\mathcal{X}}(\lambda) \Leftrightarrow \lambda \in \{-2, 5\}$$

και επίσης:

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_{1,1} \\ v_{2,1} \end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix} v_{1,1} \\ v_{2,1} \end{pmatrix} \Rightarrow \cdots \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} v_{1,1} \\ v_{2,1} \end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_{1,2} \\ v_{2,2} \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} v_{1,2} \\ v_{2,2} \end{pmatrix} \Rightarrow \cdots \Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} v_{1,2} \\ v_{2,2} \end{pmatrix} = c_2\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Οπότε, βάση των όσων αναφέρθηκαν, αναμένουμε οι $y_1 = e^{-2t}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}, y_2 = e^{5t}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ να είναι λύσεις τις Διαφορικής εξίσωσης $y' = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} y$. Πράγματι, μια αντικατάσταση επαλυθεύει τον ισχυρισμό.

Οι 2 λύσεις αυτές που βρήκαμε δημιουργουν γραμμικά όλες τις υπόλοιπες. Δηλαδή κάθε άλλη λύση y_3 γράφεται ως $y_3 = ay_1 + by_2$. Αυτό θα το αποδείξουμε δείχνοντας το γενικότερο:

Λήμμα: *Εάν $A \in \mathbb{R}^{n \cdot n}$ πίνακας και το σύστημα $y' = Ay$ έχει n γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις $\big(f_i\big)_{i\in[n]}$, τότε κάθε άλλη λύση f_{n+1} είναι γραμμικός συνδιασμός των $\big(f_i\big)_{i\in[n]}$.*

Εάν $\big(f_i\big)_{i\in[n+1]}$ ήταν γραμμικώς ανεξάρτητες, τότε:

$$c_1 f_1 + c_2 f_2 + \cdots c_{n+1} f_{n+1} = \vec{0}$$

θα είχε λύση μόνο το $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = \vec{0}$. Όμως, γράφοντας τις f_i ως $\begin{pmatrix} f_{1,i} \\ f_{2,i} \\ \vdots \\ f_{n,i} \end{pmatrix}$, προκύπτει ότι το $(n+1)\cdot(n+1)$ σύστημα:

$$c_1 f_{1,1} + c_2 f_{1,2} + \cdots c_{n+1} f_{1,n+1} = 0$$
$$c_1 f_{2,1} + c_2 f_{2,2} + \cdots c_{n+1} f_{2,n+1} = 0$$
$$\vdots$$
$$c_1 f_{n,1} + c_2 f_{n,2} + \cdots c_{n+1} f_{n,n+1} = 0$$
$$0 + 0 + \cdots 0 = 0$$

έχει λύση μόνο την μηδενική. Αυτο είναι άτοπο καθώς η ορίζουσα του συστήματος είναι 0:

$$\begin{vmatrix} f_{1,1} & f_{1,2} & \cdots & f_{1,n+1} \\ f_{2,1} & f_{2,2} & \cdots & f_{2,n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n,1} & f_{n,2} & \cdots & f_{n,n+1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Οπότε, ειδικά για τα δεδομένα της άσκησης, επειδή οι y_1, y_2 είναι γραμμικώς ανεξάρτητες, κάθε άλλη λύση ε-ίναι γραμμικός συνδιασμός των y_1, y_2. Άρα, η γενική λύση είναι:

$$y = ay_1 + by_2 \text{ με } a, b \in \mathbb{R}$$

Τελικά, $\Phi(t) = (y_1, y_2) = \begin{pmatrix} e^{-2t} & 2e^{5t} \\ -3e^{-2t} & e^{5t} \end{pmatrix} \Rightarrow \Phi(0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ και συνεπώς:

$$e^{At} = \Phi(t)\Phi^{-1}(0) = \cdots = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} e^{-2t} & 2e^{5t} \\ -3e^{-2t} & e^{5t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Άσκηση 6: *Εάν $A \in \mathbb{R}^{2\cdot 2}$ είναι πίνακας με ιδιοτιμές $1, 2$ και αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών:*

$$y'(t) = Ay(t), \text{ όταν } y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Λύση:

Επειδή $1, 2$ ιδοτιμές των ιδιοδιανυσμάτων $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ του A, οι συναρτήσεις $y_1 = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ και $y_2 = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις. Επομένως η γενική μορφή της λύσης είναι:

$$y = ay_1 + by_2 = ae^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + be^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Οπότε:

$$y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow a + 1 = b = 1$$

και η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών είναι $y = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Άσκηση 7: *Έστω ο πίνακας* $A = \begin{pmatrix} -1 & e^{2t} \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ *και το σύστημα:*

$$y'(t) = Ay$$

i) Δείξτε ότι τα $\hat{y} = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix}$ *και* $\overset{\vee}{y} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^{t} \\ e^{-t} \end{pmatrix}$ *είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.*

ii) Να βρεθεί ο θεμελιώδης πίνακας λύσεων και ο πίνακας μεταφοράς κατάστασης.

iii) Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών εάν επιπλέον $y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Λύση:

$i)$ Για να ελέγξουμε εάν οι $\hat{y}$ και $\overset{\vee}{y}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητες, αρκεί να υπολογίσουμε την ορίζουσα $Wronski$:

$$W(t) = \left|\hat{y}(t), \overset{\vee}{y}(t)\right| = \begin{vmatrix} e^{-t} & \frac{1}{2}e^{t} \\ 0 & e^{-t} \end{vmatrix} = e^{-2t}$$

Για να είναι οι λύσεις γραμμικώς ανεξάρτητες, αρκεί να υπάρχει ένας $t_0 \in \mathbb{R}$ που να μην μηδενίζει την ορίζουσα W. Πράγματι, πολλοί τέτοιοι υπάρχουν αφού $e^{-2t} \neq 0, \ \forall t \in \mathbb{R}$.

$ii)$ Εδώ θα χρειαστεί να επιλύσουμε το σύστημα $y' = Ay$ το οποίο είναι ισοδύναμο με το:

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & e^{2t} \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

εάν $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$. Οπότε συνεχίζουμε λύνοντας τα επιμέρους:

$$y_1' = -y_1 + e^{2t}y_2 \tag{5.7}$$
$$y_2' = -y_2 \tag{5.8}$$

Η (5.8) έχει λύση:

$$y_2' + y_2 = 0 \Leftrightarrow e^t y_2' + e^t y_2 = 0 \Leftrightarrow (y_2 e^t)' = (c)' \Leftrightarrow y_2 = ce^{-t}, \text{ με } c \in \mathbb{R}$$

Αντικαθιστώντας στην (5.7) προκύπτει:

$$y_1' = -y_1 + e^{2t}\frac{c}{e^t} = -y_1 + ce^t$$

η οποία έχει λύση:

$$y_1' + y_1 = ce^t \Leftrightarrow e^t y_1' + e^t y_1 = ce^{2t} \Leftrightarrow (y_1 e^t)' = \left(\frac{c}{2}e^{2t} + p\right)' \Leftrightarrow$$
$$y_1 = \frac{c}{2}e^t + pe^{-t}, \text{ με } p \in \mathbb{R}$$

Για την κατασκευή του θεμελιώδους πίνακα λύσεων χρειαζόμαστε 2 λύσεις γραμμικώς ανεξάρτητες. Έχοντας λοιπόν υπόψην ότι τα $\hat{y}, \overset{\vee}{y}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, παίρνουμε τις λύσεις y_1, y_2 για $c = p + 1 = 1$ και παρατηρούμε ότι το διάνυσμα $\overset{\vee}{y} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^t \\ e^{-t} \end{pmatrix}$ είναι λύση του συστήματος. Αντίστοιχα, για $c + 1 = p = 1$ το $\hat{y} = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix}$ είναι λύση του συστήματος. Οπότε, θεμελιώδης πίνακας λύσεων θα είναι ο:

$$\Phi(t) = \left(\hat{y}(t), \overset{\vee}{y}(t)\right) = \begin{pmatrix} e^{-t} & \frac{1}{2}e^t \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$$

Όσον αφορά τον πίνακα μεταφοράς κατάστασης, αυτός ορίζεται ως: $G(t, t_0) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)$. Οπότε:

$$G(t, t_0) = \frac{1}{|\Phi(t_0)|} \begin{pmatrix} e^{-t} & \frac{1}{2}e^t \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} adj \begin{pmatrix} e^{-t_0} & \frac{1}{2}e^{t_0} \\ 0 & e^{-t_0} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{e^{-2t_0}} \begin{pmatrix} e^{-t} & \frac{1}{2}e^{t} \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} +det(e^{-t_0}) & -det\left(\frac{1}{2}e^{t_0}\right) \\ -0 & +det(e^{-t_0}) \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{e^{-2t_0}} \begin{pmatrix} e^{-t} & \frac{1}{2}e^{t} \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-t_0} & -\frac{1}{2}e^{t_0} \\ -0 & e^{-t_0} \end{pmatrix}$$

Παρατήρηση: Εδώ χρησιμοποιήθηκε ο τύπος: $A \cdot adjA = |A| \cdot Id_n$, για πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n \cdot n}$.

$iii)$ Εάν $y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ τότε θα πρέπει:

$$y_1(0) = 1 \Rightarrow \frac{c}{2} + p = 1$$

και επίσης:

$$y_2(0) = 2 \Rightarrow c = 2$$

Οπότε $c = p + 2 = 2$ και η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών είναι η:

$$y(t) = \begin{pmatrix} e^{t} \\ 2e^{-t} \end{pmatrix}$$

Άσκηση 8: *Αφού το σύστημα:*

$$y_1' = 4y_1 + 2y_2$$

$$y_2' = 3y_1 - y_2$$

γραφεί με την μορφή πινάκων, να λυθεί.

Λύση:

Το Διαφορικό σύστημα μπορεί να γραφεί με την βοήθεια πινάκων ως εξής:

$$y' = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \overbrace{\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}}^{A} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = Ay$$

Για να επιλύσουμε το παρόν σύστημα, μελετούμε τον πίνακα A ως προς τα ιδιοδιανύσματα:

$$\underset{A}{\mathcal{X}}(\lambda) = (4 - \lambda)(-1 - \lambda) - 6 = (\lambda - 5)(\lambda + 2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underset{A}{\mathcal{X}}(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda \in \{-2, 5\}$$

Για την ιδιοτιμή -2, τα ιδιοδιανύσματα είναι:

$$Av = -2v \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4v_1 + 2v_2 = -2v_1 \\ 3v_1 - v_2 = -2v_2 \end{cases} \Rightarrow v = c \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Για την ιδιοτιμή 5, τα ιδιοδιανύσματα είναι:

$$Av = 5v \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4v_1 + 2v_2 = 5v_1 \\ 3v_1 - v_2 = 5v_2 \end{cases} \Rightarrow v = q \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Οπότε 2 λύσεις του Διαφορικού συστήματος είναι: $e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}, e^{5t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Εύκολα μπορεί να επαλυθευτεί με την ορίζουσα $Wronski$ ότι είναι γραμμικώς ανεξάρτητες. Επειδή ο χώρος λύσεων $\mathcal{L}$ έχει διάσταση 2, οι 2 προηγούμενες λύσεις τον παράγουν και η γενική λύση είναι της μορφής:

$$y = ae^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} + be^{5t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Άσκηση 9: *Έστω* $\lambda = \kappa + i\mu \in \mathbb{C}$ *μια μιγαδική ιδιοτιμή του πίνακα* $A \in \mathbb{R}^{n \cdot n}$ *με ιδιοδιάνυσμα* $\vec{v} = \vec{\xi} + i\vec{\eta}$. *Να δείξετε ότι το σύστημα:*

$$z'(t) = Az(t)$$

έχει τις πραγματικές λύσεις:

$$z_1 = e^{kt}\Big(cos(\mu t)\vec{\xi} - sin(\mu t)\vec{\eta}\Big)$$

$$z_2 = e^{kt}\Big(cos(\mu t)\vec{\eta} + sin(\mu t)\vec{\xi}\Big)$$

Λύση:

Για να λύσουμε την άσκηση αυτή πρώτα αποδεικνύουμε το παρακάτω λήμμα:

Λήμμα: *Εάν η* $z(t)$ *είναι (μιγαδική) λύση ενός Διαφορικού συστήματος* $z' = Az$, *τότε οι* $Re(z)(t), Im(z)(t)$ *είναι πραγματικές λύσεις του συστήματος αυτού.*

Πράγματι, έστω $z(t) = x(t) + iy(t)$. Έχουμε ότι:

$$z' = Az \Leftrightarrow x' + iy' = A(x + iy) \Leftrightarrow x' + iy' = Ax + iAy$$

Για να αληθεύει αυτή η ισότητα θα πρέπει τα πραγματικά μέρη να ισούνται μεταξύ τους και τα αντίστοιχα φανταστικά, επίσης το ίδιο. Οπότε προκύπτει:

$$x' = Ax \text{ και επίσης } y' = Ay$$

Συνεπώς οι $Re(z)(t) = x(t), Im(z)(t) = y(t)$ είναι πραγματικές λύσεις του συστήματος $z' = Az$.

Επειδή $\vec{v}$ ιδιοδιάνυσμα της ιδιοτιμής λ, η συνάρτηση $z = e^{\lambda t}\vec{v} = e^{\kappa t + i\mu t}(\vec{\xi} + i\vec{\eta})$ είναι λύση του συστήματος. Επιπλέον:

$$z = e^{\kappa t + i\mu t}(\vec{\xi} + i\vec{\eta}) = e^{\kappa t}e^{i\mu t}(\vec{\xi} + i\vec{\eta}) = e^{\kappa t}\vec{\xi}\Big(cos(\mu t) + isin(\mu t)\Big) + e^{\kappa t}i\vec{\eta}\Big(cos(\mu t) + isin(\mu t)\Big) =$$

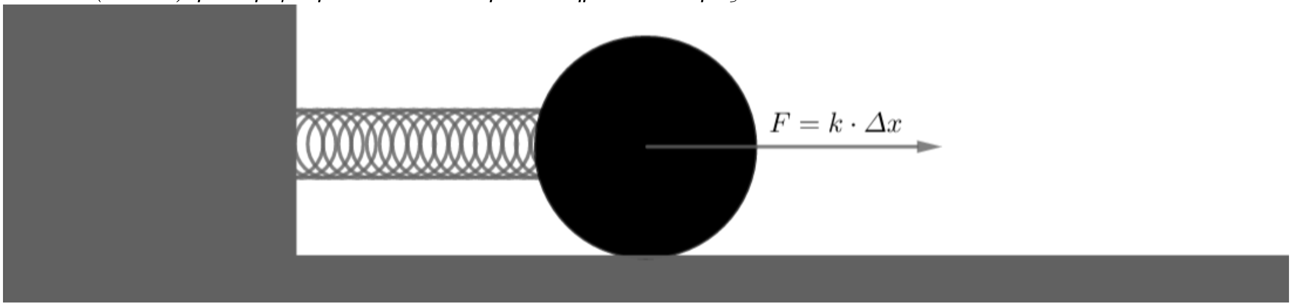
$$= e^{kt}\Big(cos(\mu t)\vec{\xi} - sin(\mu t)\vec{\eta}\Big) + ie^{kt}\Big(cos(\mu t)\vec{\eta} + sin(\mu t)\vec{\xi}\Big)$$

Οπότε, από το λήμμα, θα πρέπει οι $z_1 = Re(z)(t), z_2 = Im(z)(t)$ να είναι πραγματικές λύσεις του συστήματός μας.

$$z_1(t) = e^{kt}\Big(cos(\mu t)\vec{\xi} - sin(\mu t)\vec{\eta}\Big)$$

$$z_2(t) = e^{kt}\Big(cos(\mu t)\vec{\eta} + sin(\mu t)\vec{\xi}\Big)$$

Άσκηση 10: *Να βρεθεί η εξίσωση θέσης του σώματος μάζας m που ταλαντώνεται με κάποιο πλάτος σε οριζόντιο επίπεδο (δάπεδο) με την βοήθεια ταλαντωτή - ελατηρίου σταθεράς k.*



Λύση:

Γνωρίζουμε από τον νόμο του *Hooke* ότι η δύναμη επαναφοράς ενός ελατηρίου σταθεράς k και επιμήκυνσης Δx έχει μέτρο $F = k\Delta x$. Ας θεωρήσουμε στην θέση 0 το σημείο ισορροπίας του ελατηρίου και $x(t)$ την επιμίκυνσή του συναρτήσει του χρόνου (t). Επειδή το ελατήριο ασκεί δύναμη επαναφοράς προς την θέση ισορροπίας, η F διανυσματικά θα παίρνει την μορφή: $\vec{F}(t) = -kx(t)$.

Από τον 2^o νόμο του Νεύτωνα, γνωρίζουμε ότι: $\sum\limits_i \vec{F}_i = \dfrac{dp}{dt}$. Στην περίπτωσή μας, λόγω της σταθερότητας της μάζας και της μοναδικότητας της δύναμης δίνει:

$$\vec{F} = \frac{dm\vec{v}}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m \cdot \vec{a}$$

Εξισώνοντας τις δυνάμεις μπορούμε να πάρουμε την γραμμική διαφορική εξίσωση $2^{ης}$ τάξεως:

$$m\vec{a} = -kx \Leftrightarrow m\ddot{x} + kx = 0$$

(*εδώ θα χρησιμοποιήσουμε τιμητικά τους συμβολισμούς των φίλων Φυσικών:* $\dot{x} := x'$ *και* $\ddot{x} := x''$)

Για να επιλύσουμε την παρούσα Διαφορική εξίσωση αυτή, θα την μετασχηματίσουμε σε σύστημα. Συγκεκριμένα, εάν: $\left| \begin{array}{l} x_0 = x \\ x_1 = x' \end{array} \right.$, τότε προκύπτει το σύστημα:

- $\dot{x_0} = x_1$
- $\dot{x_1} = -\dfrac{k}{m}x_0$

που εναλλακτικά μπορεί να γραφεί με την μορφή πινάκων:

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}' = \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{k}{m} & 0 \end{pmatrix}}^{A} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

Για να προσδιορίσουμε γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις του διαφορικού συστήματος αυτού, μελετούμε τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα A.

$$\underset{A}{\mathcal{X}}(\lambda) = \lambda^2 + \frac{k}{m} = \left(\lambda - i\sqrt{\frac{k}{m}}\right)\left(\lambda + i\sqrt{\frac{k}{m}}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underset{A}{\mathcal{X}}(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda \in \left\{ -i\sqrt{\frac{k}{m}}, i\sqrt{\frac{k}{m}} \right\}$$

Τα ιδιοδιανύσματα $\left(v_1 = \begin{pmatrix} v_{1,1} \\ v_{2,1} \end{pmatrix} \right)$ στην ιδιοτιμή $\lambda = -i\sqrt{\dfrac{k}{m}}$ είναι:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{k}{m} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{1,1} \\ v_{2,1} \end{pmatrix} = -i\sqrt{\frac{k}{m}} \begin{pmatrix} v_{1,1} \\ v_{2,1} \end{pmatrix} \Rightarrow \cdots$$

$$\cdots \Rightarrow v = \begin{pmatrix} v_{1,1} \\ v_{2,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i\sqrt{\dfrac{k}{m}} \end{pmatrix}$$

Τα ιδιοδιανύσματα $\left(v_2 = \begin{pmatrix} v_{1,2} \\ v_{2,2} \end{pmatrix}\right)$ στην ιδιοτιμή $\lambda = i\sqrt{\frac{k}{m}}$ είναι:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{k}{m} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{1,2} \\ v_{2,2} \end{pmatrix} = i\sqrt{\frac{k}{m}} \begin{pmatrix} v_{1,2} \\ v_{2,2} \end{pmatrix} \Rightarrow \cdots$$

$$\cdots \Rightarrow v = \begin{pmatrix} v_{1,2} \\ v_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ i\sqrt{\dfrac{k}{m}} \end{pmatrix}$$

Οπότε 2 γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις του διαφορικού μας συστήματος είναι οι: $e^{-i\sqrt{\frac{k}{m}}t} \begin{pmatrix} 1 \\ -i\sqrt{\dfrac{k}{m}} \end{pmatrix}$ και $e^{i\sqrt{\frac{k}{m}}t} \begin{pmatrix} 1 \\ i\sqrt{\dfrac{k}{m}} \end{pmatrix}$. Καθώς ο χώρος λύσεων $\mathcal{L}$ έχει διάσταση 2, οι προηγούμενες λύσεις τον παράγουν και η γενική λύση θα παίρνει την μορφή:

$$\begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix} = ae^{-i\sqrt{\frac{k}{m}}t} \begin{pmatrix} 1 \\ -i\sqrt{\dfrac{k}{m}} \end{pmatrix} + be^{i\sqrt{\frac{k}{m}}t} \begin{pmatrix} 1 \\ i\sqrt{\dfrac{k}{m}} \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

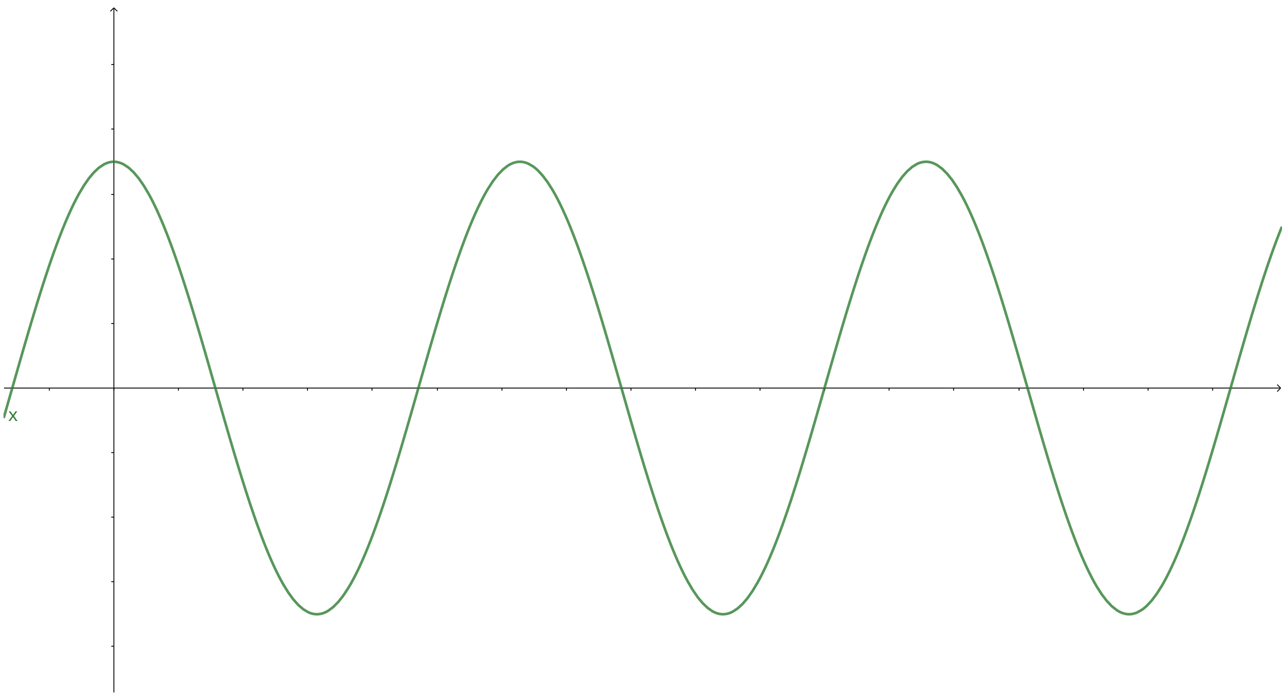
$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae^{-i\sqrt{\frac{k}{m}}t} + be^{i\sqrt{\frac{k}{m}}t} \\ -ai\sqrt{\dfrac{k}{m}}e^{-i\sqrt{\frac{k}{m}}t} + bi\sqrt{\dfrac{k}{m}}e^{i\sqrt{\frac{k}{m}}t} \end{pmatrix}$$

Συγκεκριμένα, η λύση x μπορεί να γραφεί ισοδύναμα ως:

$$x = ae^{-i\sqrt{\frac{k}{m}}t} + be^{i\sqrt{\frac{k}{m}}t} = acos\left(-\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + aisin\left(-\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + bcos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + bisin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$$

Για μιγαδικές λύσεις μιας Διαφορικής εξίσωσης, όπως είναι η x, γνωρίζουμε ότι το πραγματικό τους μέρος επίσης αποτελεί λύση. Οπότε, επειδή στην περίπτωσή μας το φανταστικό μέρος της x δεν έχει κάποια (εμφανή) φυσική ερμηνεία, κρατούμε μόνο το πραγματικό μέρος:

$$Re(x) = acos\left(-\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + bcos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$$



Σχήμα 5.1: *Στο σχήμα εικονίζεται το διάγραμμα χρόνου (t) - θέσης $(x(t))$ του σώματος που ταλαντώνεται.*