Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών, Τμήμα Μαθηματικών

Στοιχεία Αλγεβρικής Γεωμετρίας

Τάσος Φράγκος & Κώστας Μπιζάνος

$$(\mathrm{H}^{\vee})^{1}(X, \mathbb{C}) \cong$$

$$\ker\left(\mathcal{E}^{1}(X) \xrightarrow{d} \mathcal{E}^{2}(X)\right) \Big/ \mathrm{im}\left(\mathcal{E}(X) \xrightarrow{d} \mathcal{E}^{1}(X)\right)$$

Ιανουάριος 2025

Τελευταία ενημέρωση: 50 Ιανουαρίου 2025

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Οι σημειώσεις αυτές βασίστηκαν σε ένα βαθμό στα μαθήματα των μεταπτυχιακών μαθημάτων "Αλγεβρική Γεωμετρία" και "Θεωρία Δραγμάτων", του μεταπτυχιακού των θεωρητικών μαθηματικών του Τμ. Μαθηματικών του ΕΚΠΑ, όπως διδάχθηκαν από τον Α. Κοντογεώργη και τη Μ. Παπατριανταφύλλου αντίστοιχα.

Σκοπός των σημειώσεων είναι να δοθεί μία πολύ γενική ιδέα για την αλγεβρική γεωμετρία. Συστήνεται λοιπόν ισχυρά να διαβάζετε παράλληλα τη βιβλιογραφία (στο τέλος παραθέτω, μεταξύ άλλων, κάποια -κατά τη γνώμη μου- καλά βιβλία [DS07], [Fo81], [Ha(R)77], [Mi24], [Ue91], [Ue00], [Va22], [AA21]). Μάλιστα είναι τόσο σημαντικό να συμβουλεύεστε κι άλλα βιβλιά, που η γραμματοσειρά αυτή επιλέχθηκε ακριβώς για να δυσκολέψει το διάβασμα αυτών των σημειώσεων.

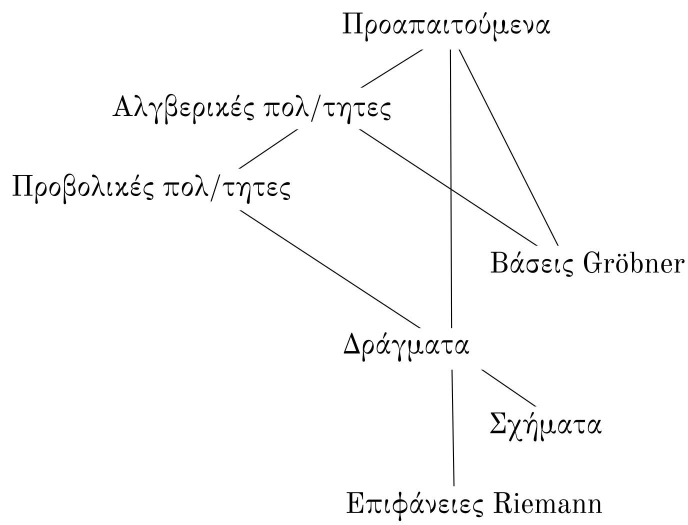
Ομολογούμε ότι η συγγραφή έγινε πρόχειρα (ιδίως τα προαπαιτούμενα), σε ένα αντικείμενο στο οποίο δεν είμαστε γνώστες. Προχωρίστε με προσοχή και ανοικτά μάτια, για λάθη και αβλεψίες. Όταν βρείτε λάθη, μπορείτε να μας ενημερώσετε στα email:

afragos@post.com, kostasbizanos@gmail.com

Τεχνικές λεπτομέρειες: Η συγγραφή έγινε σε LaTeX, με τη γραμματοσειρά Old Standard. Τα σχήματα έγιναν με TikZ, GeoGebra 3D και Desmos 3D.

Τ.Φ., Κ.Μ.

Η εξάρτηση των κεφαλαίων έχει ως εξής:



Κεφάλαιο 2

Μερικά προαπαιτούμενα

Προτείνεται να επιστρέφετε εδώ κατά την ανάγνωση του κειμένου, εάν χρειάζεστε κάποιες υπενθυμίσεις ή ορισμούς. Μην το διαβάσετε όλο εξαρχής!

2.1 Βασικές έννοιες άλγεβρας

2.1.1 Δακτύλιοι και πολυώνυμα

Ορισμός 2.1 (Δακτύλιος). *Έστω R ένα μη-κενό σύνολο και δύο πράξεις $+$ και $*$ (ή απλώς $\cdot$). Ο R λέγεται δακτύλιος εάν:*

1. *Το $(R, +)$ είναι αβελιανή ομάδα,*
2. *Ισχύει η προσεταιριστική ιδιότητα $(a * b) * c = a * (b * c)$,*
3. *Ισχύει η επιμεριστική ιδιότητα $a * (b + c) = a * b + a * c$, $(a + b) * c = a * c + b * c$*

για κάθε $a, b, c \in R$. Το ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης συμβολίζεται με 0. Εάν υπάρχε ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού, συμβολίζεται με 1. Εάν ο πολλαπλασιασμός $*$ είναι μεταθετικός, ο R λέγεται μεταθετικός.

Ορισμός 2.2 (Πολυώνυμα μίας μεταβλητής). *Έστω R ένας δακτύλιος. Ένα πολυώνυμο $f(x)$ με συντελεστές από το R είναι μία τυπική δυναμοσειρά:*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k,\ a_k \in R$$

όπου $a_k = 0$ εκτός από πεπερασμένο πλήθος δεικτών $k \in \mathbb{N}_0$. Ο βαθμός του f ορίζεται:

$$\deg f = \max\{k \mid a_k \neq 0\}$$

Το σύνολο των πολυωνύμων συμβολίζεται με $R[x]$. Προφανώς υπάρχει σχέση μεταξύ των πολυωνύμων $R[x]$ και των τελικά μηδενικών ακολουθιών R_{00}.

$$R[x] \ni \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \leftrightarrow (a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n, 0, 0, 0, 0, \cdots) \in R_{00}$$

Ορισμός 2.3 (Πολυώνυμα πολλών μεταβλητών). *Έστω R ένας δακτύλιος. Ένα πολυώνυμο δύο μεταβλητών x, y είναι ένα στοιχείο του $R[x][y]$. Επαγωγικά, ένα πολυώνυμο μεταβλητών $x_1, \cdots, x_n$ είναι ένα στοιχείο του $R[x_1, \cdots, x_{n-1}][x_n]$. Μπορούμε να παραστήσουμε το πολυώνυμο στη μορφή:*

$$f(X) = \sum_{K \in \mathbb{N}_0^n} a_K X^K,\ a_K \in R$$

όπου $a_K = 0$ εκτός από πεπερασμένο πλήθος δεικτών $K \in \mathbb{N}_0$ και το X^K ορίζεται με την έννοια του πολυδείκτη:

$$X^K = x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n},\ X = (X_1, \cdots, X_n),\ K = (k_1, \cdots, k_n)$$

2.1.2 Ιδεώδη και σώματα

Ορισμός 2.4 (Ιδεώδη). *Έστω R ένας δακτύλιος. Ένα ιδεώδες $\mathfrak{i}$ του R είναι ένα υποσύνολο του R με:*

1. $\mathfrak{i} \neq \emptyset$,
2. $a + b \in \mathfrak{i}$ *για κάθε* $a, b \in \mathfrak{i}$,
3. $r * a \in \mathfrak{i}$ *για κάθε* $a \in \mathfrak{i}$, $r \in R$.

Συμβολίζουμε $\mathfrak{i} \trianglelefteq R$.

Ορισμός 2.5 (Πρώτα ιδεώδη). *Έστω $\mathfrak{i}$ ένα ιδεώδες του δακτυλίου R. Εάν για κάθε $ab \in \mathfrak{i}$, $a, b \in R$ έπεται $a \in \mathfrak{i}$ ή $b \in \mathfrak{i}$, τότε το ιδεώδες $\mathfrak{i}$ λέγεται πρώτο.*

Παρατήρηση 2.1. *Κάθε μέγιστο ιδεώδες $\mathfrak{m}$ ενός δακτυλίου R είναι και πρώτο.*

Ορισμός 2.6 (Πράξεις με ιδεώδη). *Έστω $\mathfrak{i}, \mathfrak{j} \trianglelefteq R$ δύο ιδεώδη. Το άθροισμα $\mathfrak{i} + \mathfrak{j}$ ορίζεται:*

$$\mathfrak{i} + \mathfrak{j} = \{a + b \mid a \in \mathfrak{i},\ b \in \mathfrak{j}\}$$

Το γινόμενο ορίζεται:

$$\mathfrak{i} \cdot \mathfrak{j} = \left\{ \sum a_k b_k \;\middle|\; a_k \in \mathfrak{i},\ b_k \in \mathfrak{j} \right\}$$

Το ριζικό ορίζεται:

$$\sqrt{\mathfrak{i}} = \{a \in R \mid a^n \in \mathfrak{i} \text{ για κάποιο } n \in \mathbb{N}\}$$

Ορισμός 2.7 (Ριζικά, κύρια και μηδενικά ιδεώδη). *Ένα ιδεώδες καλείται ριζικό ιδεώδες εάν* $\sqrt{\mathfrak{i}} = \mathfrak{i}$. *Ένα ιδεώδες που παράγεται από ένα σύνολο* A *συμβολίζεται:*

$$\mathfrak{i} = \langle A \rangle = \bigcap_{\substack{\mathfrak{j} \supseteq A \\ \mathfrak{j} \trianglelefteq R}} \mathfrak{j}$$

δηλαδή $\langle A \rangle$ *είναι το μικρότερο ιδεώδες που περιέχει το* A. *Εάν* $A = \{a_1, \cdots, a_n\}$, *συμβολίζουμε* $\mathfrak{i} = \langle a_1, \cdots, a_n \rangle$. *Εάν* $A = \{a\}$, *τότε* $\mathfrak{i} = \langle a \rangle$ *και το ιδεώδες* $\mathfrak{i}$ *καλείται κύριο. Το μηδενικό ιδεώδες συμβολίζεται με* 0 *ή* $\{0\}$ *ή* $\langle 0 \rangle$.

Ορισμός 2.8 (Ακέραιες περιοχές). *Ένας δακτύλιος* R *λέγεται ακέραια περιοχή εάν:*

1. *Ο* R *είναι μεταθετικός,*
2. *Υπάρχει μοναδιαίο στοιχείο* $1 \neq 0$,
3. *Αν* $a * b = 0$, *τότε* $0 \in \{a, b\}$.

Παρατήρηση 2.2. *Έστω* R *ένας δακτύλιος και* $\mathfrak{i} \trianglelefteq R$ *ένα ιδεώδες. Το* $\mathfrak{i}$ *είναι πρώτο εάν και μόνο αν ο* $R/\mathfrak{i}$ *είναι δακτύλια περιοχή.*

Ορισμός 2.9 (Σώματα). *Ένας δακτύλιος* $\mathbb{K}$ *λέγεται σώμα εάν:*

1. *Ο* $\mathbb{K}$ *είναι μεταθετικός,*
2. *Υπάρχει μοναδιαίο στοιχείο* $1 \neq 0$,
3. *Κάθε μη-μηδενικό* $a \in \mathbb{K}$ *έχει πολλαπλασιαστικό αντίστροφο.*

Ένα σώμα $\mathbb{K}$ *λέγεται αλγεβρικά κλειστό εάν κάθε πολυώνυμο* $f \in \mathbb{K}[x]$ *έχει* $n = \deg f$ *(όχι κατ' ανάγκη διακεκριμένες) ρίζες στο* $\mathbb{K}$.

Πρόταση 2.1. *Έστω* $\mathbb{K}$ *ένα σώμα. Εάν το* $\mathbb{K}$ *είναι αλγεβρικά κλειστό, τότε είναι άπειρο σώμα.*

Απόδειξη. Εάν το $\mathbb{K}$ είναι πεπερασμένο, τότε το πολυώνυμο:

$$f(x) = 1 + \prod_{a \in \mathbb{K}} (x - a)$$

δεν έχει ρίζες στο $\mathbb{K}$. □

Παρατήρηση 2.3. *Έστω* R *ένας μεταθετικός δακτύλιος με μονάδα και* $\mathfrak{m}$ *ένα μεγιστικό ιδεώδες. Ο δακτύλιος* $R/\mathfrak{m}$ *είναι σώμα (και αντιστρόφως).*

Απόδειξη. Εάν το $\mathfrak{m}$ είναι μεγιστικό ιδεώδες, τότε θεωρούμε το σύνολο $R/\mathfrak{m}$ και παρατηρούμε ότι μεταξύ των $\mathfrak{m}/\mathfrak{m} = 0$, $R/\mathfrak{m}$ δεν υπάρχουν άλλα ιδεώδη. Άρα, για κάθε $a+\mathfrak{m} \in R/\mathfrak{m}$, $a \neq 0$, έχουμε:

$$\langle a + \mathfrak{m} \rangle = {}^{R}/_{\mathfrak{m}}$$

και κατά συνέπεια υπάρχει $r \in R$ με $ra + \mathfrak{m} = 1 + \mathfrak{m}$. Δηλαδή η κλάση $a + \mathfrak{m}$ αντιστρέφεται.

Αντιστρόφως, εάν $\mathfrak{i}$ είναι ένα ιδεώδες ώστε $\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{i} \subset R$, τότε:

$$0 \subseteq {}^{\mathfrak{i}}/_{\mathfrak{m}} \subset {}^{R}/_{\mathfrak{m}}$$

κι επειδή το $R/\mathfrak{m}$ είναι σώμα, $\mathfrak{i}/\mathfrak{m} = 0 \Rightarrow \mathfrak{i} = \mathfrak{m}$. □

Πρόταση 2.2. *Έστω $\mathbb{K}$ ένα σώμα και $A = \{f_1, \cdots, f_n\} \subseteq \mathbb{K}[x]$. Ισχύει:*

$$\langle A \rangle = \left\{ \sum_{k=1}^{n} g_k f_k \;\middle|\; g_k \in \mathbb{K}[x] \right\}$$

Απόδειξη. Εφόσον το $\langle A \rangle$ είναι ιδεώδες και $\{f_1, \cdots, f_n\} \subseteq A$, έπεται ότι:

$$\langle A \rangle \supseteq \left\{ \sum_{k=1}^{n} g_k f_k \;\middle|\; g_k \in \mathbb{K}[x] \right\}$$

Από την άλλη, δεν είναι δύσκολο να δούμε ότι το δεξιό σύνολο είναι ιδεώδες. Από την ιδιότητα του ελαχιστικού ιδεώδους, ισχύει η ισότητα:

$$\langle A \rangle = \left\{ \sum_{k=1}^{n} g_k f_k \;\middle|\; g_k \in \mathbb{K}[x] \right\}$$

□

Πρόταση 2.3. *Έστω $\mathbb{K}$ σώμα. Κάθε ιδεώδες $\mathfrak{i} \trianglelefteq \mathbb{K}[x]$ είναι κύριο.*

Απόδειξη. Η περίπτωση $\mathfrak{i} = 0$ είναι τετριμμένη, οπότε υποθέτουμε $\mathfrak{i} \neq 0$. Εφόσον $\mathfrak{i} \neq 0$, επιλέγουμε $f \in \mathfrak{i}\backslash\{0\}$ ελάχιστου βαθμού $n = \deg f$, κι από τον ευκλείδειο αλγόριθμο, για κάθε $g \in \mathfrak{i}$ έχουμε:

$$g = fq + r \Rightarrow r = g - fq \text{ με } r = 0 \text{ ή } \deg r < \deg f$$

Εφόσον το f είναι ελάχιστου βαθμού και $\deg r < \deg f$, έχουμε $r = 0$. Άρα $g \in \langle f \rangle$ και κατά συνέπεια $\mathfrak{i} = \langle f \rangle$. □

Πρόταση 2.4. *Έστω $\mathbb{K}$ σώμα και $f_1, \cdots, f_n \in \mathbb{K}[x]$. Τότε:*

$$\langle f_1, \cdots, f_n \rangle = \langle \gcd(f_1, \cdots, f_n) \rangle$$

Απόδειξη. Το $\langle f_1, \cdots, f_n \rangle$ είναι κύριο, οπότε μπορούμε να γράψουμε:

$$\langle f_1, \cdots, f_n \rangle = \langle g \rangle, \ g \in \mathbb{K}[x]$$

Θα δείξουμε ότι μπορεί να επιλεγεί $g = \gcd(f_1, \cdots, f_n)$. Καταρχάς γράφουμε:

$$g = \sum_{k=1}^{n} g_k f_k, \ g_k \in \mathbb{K}[x]$$

Εάν h είναι ένας κοινός διαιρέτης των f_k, τότε $h \mid \sum_{k=1}^{n} g_k f_k = g$. Το g είναι διαιρέτης καθενός f_k, αφού καθένα απ' αυτά παράγεται από το g. Αυτά δείχνουν ότι αν $g = \gcd(f_1, \cdots, f_n)$, τότε:

$$\langle f_1, \cdots, f_n \rangle = \langle \gcd(f_1, \cdots, f_n) \rangle$$

□

2.1.3 Δακτύλιοι της Noether και το θεώρημα βάσης του Hilbert

Ορισμός 2.10 (Δακτύλιοι της Noether). *Ένας δακτύλιος R λέγεται της Noether εάν κάθε αύξουσα αλυσίδα ιδεωδών:*

$$\mathfrak{i}_1 \subseteq \mathfrak{i}_2 \subseteq \mathfrak{i}_3 \subseteq \cdots$$

είναι τελικά σταθερή.

Παρατήρηση 2.4. *Ένας δακτύλιος R είναι της Noether εάν και μόνο αν κάθε $\mathfrak{i} \trianglelefteq R$ είναι πεπερασμένα παραγόμενο.*

Απόδειξη. ($\Rightarrow$) Ας υποθέσουμε προς άτοπο ότι υπάρχει ιδεώδες $\mathfrak{i} \trianglelefteq R$ που δεν είναι πεπερασμένα παραγόμενο. Τότε για κάθε $a_1 \in \mathfrak{i}$ έχουμε:

$$\mathfrak{i}_1 = \langle a_1 \rangle \subset \mathfrak{i}$$

Επίσης, για κάθε $a_2 \in \mathfrak{i} \backslash \mathfrak{i}_1$:

$$\mathfrak{i}_2 = \langle a_1, a_2 \rangle \subset \mathfrak{i}$$

αφού το $\mathfrak{i}$ δεν ειναι πεπερασμένα παραγόμενο. Επαγωγικά προκύπτει μία γνησίως αύξουσα αλυσίδα ιδεωδών:

$$\mathfrak{i}_1 \subset \mathfrak{i}_2 \subset \mathfrak{i}_3 \subset \cdots$$

πράγμα που αντιτίθεται στην υπόθεση ότι ο R είναι δακτύλιος της Noether.

($\Leftarrow$) Έστω μία αύξουσα αλυσίδα ιδεωδών:

$$\mathfrak{i}_1 \subseteq \mathfrak{i}_2 \subseteq \mathfrak{i}_3 \subseteq \cdots$$

Μπορεί να δειχθεί, λόγω της αλυσίδας, ότι το σύνολο $\mathfrak{i} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathfrak{i}_k$ είναι ιδεώδες του R, και μάλιστα πεπερασμένα παραγόμενο, λόγω της υπόθεσης. Εάν $\{a_1, \cdots, a_n\}$ είναι ένα σύνολο γεννητόρων, θεωρούμε m τον δείκτη αυτόν για τον οποίο $a_1, \cdots, a_n \in \mathfrak{i}_m$ και τότε:

$$\mathfrak{i}_k = \mathfrak{i}_m \text{ για κάθε } k \geqslant m$$

□

Θεώρημα 2.1 (Θεώρημα βάσης του Hilbert). *Εάν ο δακτύλιος R είναι της Noether, τότε ο $R[x]$ είναι κι αυτός της Noether. Κατά συνέπεια, κάθε $\mathfrak{i} \trianglelefteq R[x]$ είναι πεπερασμένα παραγόμενο. Επαγωγικά, εάν ο R είναι δακτύλιος της Noether, ο $R[x_1, \cdots, x_n]$ είναι δακτύλιος της Noether και κάθε $\mathfrak{i} \trianglelefteq R[x_1, \cdots, x_n]$ είναι πεπερασμένα παραγόμενο.*

Απόδειξη. Εάν $\mathfrak{j} \trianglelefteq R[x]$ είναι τυχόν, θα δείξουμε ότι το $\mathfrak{j}$ είναι πεπερασμένα παραγόμενο. Πρώτα ορίζουμε την οικογένεια ιδεωδών:

$$\mathfrak{i}_n = \{r \mid rx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 \in \mathfrak{j}\}$$

(μπορεί να ελεγχθεί από τον ορισμό ότι είναι πράγματι ιδεώδη) και παρατηρούμε ότι $\mathfrak{i}_n \subseteq \mathfrak{i}_{n+1}$ για κάθε n. Κατά συνέπεια, σχηματίζεται η αύξουσα αλυσίδα ιδεωδών:

$$\mathfrak{i}_0 \subseteq \mathfrak{i}_1 \subseteq \mathfrak{i}_2 \subseteq \mathfrak{i}_3 \subseteq \cdots$$

η οποία είναι (έστω μετά ενός m) τελικά σταθερή, λόγω του ότι ο R είναι δακτύλιος της Noether.

Επίσης, καθένα από τα $\mathfrak{i}_n$ είναι πεπερασμένα παραγόμενο, με γεννήτορες $\{r_{n,1}, \cdots, r_{n,t_n}\}$, αφού ο R είναι δακτύλιος της Noether. Από τον ορισμό των $\mathfrak{i}_n$ έπεται ότι για κάθε $r_{n,k}$ υπάρχει $f_{n,k}$:

$$f_{n,k} = r_{n,k}x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 \in \mathfrak{j}$$

Ο ισχυρισμός μας είναι ότι:

$$\mathfrak{j} = \langle f_{n,k} \mid 0 \leqslant n \leqslant m,\ 1 \leqslant k \leqslant t_n \rangle$$

και κατά συνέπεια το $\mathfrak{j}$ είναι πεπερασμένα παραγόμενο.

Έστω λοιπόν $\widetilde{\mathfrak{j}} = \langle f_{n,k} \mid 0 \leqslant n \leqslant m,\ 1 \leqslant k \leqslant t_n \rangle$. Είναι φανερό ότι $\widetilde{\mathfrak{j}} \subseteq \mathfrak{j}$, αφού $f_{n,k} \in \mathfrak{j}$, οπότε θέλουμε να δείξουμε ότι $\widetilde{\mathfrak{j}} \supseteq \mathfrak{j}$. Αυτό θα γίνει με επαγωγή στον βαθμό των πολυωνύμων: Έστω:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \in \mathfrak{j}$$

Εάν $n = \deg f = 0$, τότε $f = a_0 \in i_0 = \langle r_{0,1}, \cdots, r_{0,t_0} \rangle = \langle f_{0,1}, \cdots, f_{0,t_0} \rangle$. Άρα, $f \in \widetilde{j}$. Αυτό αποδεικνύει τη βάση της επαγωγής. Υποθέτουμε τώρα ότι $f \in \widetilde{\mathfrak{j}}$ για κάθε $n < N$ και θα δείξουμε ότι το αποτέλεσμα ισχύει και για $n = N$.

- Εάν $N \leqslant m$: Έστω $f(x) = \sum_{k=0}^{N} a_k x^k \in \mathfrak{j}$, οπότε $a_N \in \mathfrak{i}_N$. Από τη σχέση $a_N \in \mathfrak{i}_N$ έχουμε ότι υπάρχουν s_λ με:

$$a_N = \sum_{\lambda=1}^{t_N} s_\lambda r_{N,\lambda}$$

  Ορίζουμε τώρα:

$$g(x) = \sum_{\lambda=1}^{t_N} s_\lambda f_{N,\lambda}(x) = a_N x^N + \sum_{k=0}^{N} b_k x^k$$

  και έχουμε $g \in \widetilde{\mathfrak{j}} \subseteq \mathfrak{j}$. Επομένως $f - g \in \mathfrak{j}$. Όμως $\deg(f-g) \leqslant N-1$ και από την επαγωγική υπόθεση $f - g \in \widetilde{\mathfrak{j}}$. Κατά συνέπεια, $f = f - g + g \in \widetilde{\mathfrak{j}}$.

- Εάν $N > m$: Έστω $f(x) = \sum_{k=0}^{N} a_k x^k \in \mathfrak{j}$, οπότε $a_N \in \mathfrak{i}_N = \mathfrak{i}_m$. Από τη σχέση $a_N \in \mathfrak{i}_N$ έχουμε ότι υπάρχουν s_λ με:

$$a_N = \sum_{\lambda=1}^{t_m} s_\lambda r_{m,\lambda}$$

  Ορίζουμε τώρα:

$$g(x) = \sum_{\lambda=1}^{t_m} s_\lambda f_{m,\lambda}(x) x^{N-m} = a_N x^N + \sum_{k=0}^{N} b_k x^k$$

  και συνεχίζοντας όπως πριν, καταλήγουμε στο $f = f - g + g \in \widetilde{\mathfrak{j}}$.

□

2.1.4 Τοπικοποίηση

Μία χρήσιμη τεχνική στην άλγεβρα είναι αυτή της τοπικοποίησης, που δίνει τη δυνατότητα δημιουργίας αντιστρόφων σε έναν δακτύλιο. Με την τοπικοποίηση μπορεί κανείς να μελετήσει τοπικές ιδιότητες του δακτυλίου, εξού και η ονοματολογία.

Κατ' αναλογία με την κατασκευή τον ρητών από το $\mathbb{Z}$, είναι δυνατόν να οριστούν πηλίκα, τα οποία ταυτίζονται μέσω μίας σχέσης ισοδυναμίας. Στους ρητούς ορίζουμε τα κλάσματα:

$$\frac{p}{q},\ p, q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0$$

με τη σχέση ισοδυναμίας:

$$\frac{p}{q} \sim \frac{p'}{q'} \Leftrightarrow pq' = qp'$$

Ορισμός 2.11 (Πολλαπλασιαστικά κλειστά σύνολα). *Έστω R ένας δακτύλιος με μονάδα. Ένα $S \subseteq R$ θα λέγεται πολλαπλασιαστικό σύνολο εάν $1 \in S$, $0 \notin S$ και επιπλέον $S \cdot S = S$. Δηλαδή, το 1 ανήκει στο σύνολο, το 0 όχι και τα γινόμενα στοιχείων του συνόλου επίσης ανήκουν. Το S θα αποτελέσει το σύνολο των διαιρετών.*

Λήμμα 2.1. *Έστω R ένας μεταθετικός δακτύλιος με μονάδα και $S \subseteq R$ ένα πολλαπλασιαστικά κλειστό σύνολο. Στον $R \times S$ ορίζουμε:*

$$(a,b) \sim (a',b') \Leftrightarrow \exists s \in S \text{ με } s(ab' - a'b) = 0$$

Η $\sim$ είναι μία σχέση ισοδυναμίας.

Απόδειξη. Η συμμετρική και ανακλαστική ιδιότητα είναι άμεσες. Η μεταβατική είναι υπόθεση πράξεων. □

Ορισμός 2.12 (Τοπικοποίηση). *Έστω R ένας μεταθετικός δακτύλιος με μονάδα και $S \subseteq R$ ένα πολλαπλασιαστικά κλειστό σύνολο. Ορίζουμε το σύνολο RS^{-1}:*

$$RS^{-1} = {}^{R \times S}\big/_{\sim}$$

με πράξεις όπως ακριβώς ορίζονται στους ρητούς. Εάν συμβολίσουμε δηλαδή $a/b = (a,b)$, τότε:

$$\frac{a}{b} + \frac{a'}{b'} = \frac{ab' + a'}{bb'} \text{ και } \frac{a}{b} \cdot \frac{a'}{b'} = \frac{aa'}{bb'}$$

Ο δακτύλιος RS^{-1} μαζί με τον εγκλεισμό $R \hookrightarrow RS^{-1}$, $a \mapsto a/1 = (a,1)$, καλείται τοπικοποίηση του R στο S.

Πολλές φορές συμβολίζουμε R_S αντί RS^{-1}, ιδίως όταν το S είναι μονοσύνολο.

Πρόταση 2.5 (Καθολική ιδιότητα της τοπικοποίησης). *Έστω R ένας αντιμεταθετικός δακτύλιος με μονάδα, S ένα πολλαπλασιαστικά κλειστό σύνολο και RS^{-1} η αντίστοιχη τοπικοποίηση. Για κάθε ομομορφισμό $\psi : R \to P$ ούτως ώστε για κάθε $s \in S$ το $\psi(s)$ αντιστρέφεται στον δακτύλιο P, υπάρχει μοναδικός $\tau : RS^{-1} \to P$ που καθιστά το επόμενο διάγραμμα μεταθετικό.*

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\psi"'] & RS^{-1} \arrow[dl, dashed, "\tau"] \\ P & \end{tikzcd}$$

Εδώ η φ είναι ο εγκλεισμός $R \hookrightarrow RS^{-1}$.

Απόδειξη. Ορίζουμε την $\tau : RS^{-1} \to P$:

$$\tau\left(\frac{a}{b}\right) = \psi(a) \cdot \psi(b)^{-1}$$

Εάν η τ είναι καλά ορισμένη, τότε θα είναι ομομορφισμός με τη ζητούμενη ιδιότητα.

Δείχνουμε λοιπόν ότι η τ είναι καλά ορισμένη. Εάν $a/b = a'/b'$, από τη σχέση $s(ab' - a'b) = 0$ παίρνουμε:

$$\psi(s) \cdot \big(\psi(ab') - \psi(a'b)\big) = \psi(s) \cdot \big(\psi(a)\psi(b') - \psi(a')\psi(b)\big) = 0$$

κι επειδή το $\psi(s)$ είναι αντιστρέψιμο:

$$\psi(a)\psi(b')^{-1} = \psi(a')\psi(b)^{-1}$$

Όσον αφορά τη μοναδικότητα, εάν υπάρχει κι άλλος ομομορφισμός $\tau' : RS^{-1} \to P$, τότε για τυχόν $a \in R$ θα έχουμε:

$$\tau \circ \varphi(a) - \tau' \circ \varphi(a) = 0 \Rightarrow (\tau - \tau')(\varphi(a)) = 0$$

Παίρνοντας $a = 1$ έπεται $\tau(1) = \tau'(1)$, άρα $\tau = \tau'$. □

Η καθολική ιδιότητα έχει την ακόλουθη σημαντική συνέπεια:

Παρατήρηση 2.5. *Έστω RS^{-1}, $\widetilde{RS^{-1}}$ δύο τοπικοποιήσεις του δακτυλίου R στο S. Τότε $RS^{-1} \simeq \widetilde{RS^{-1}}$, οπότε η τοπικοποίηση είναι μοναδική ως προς ισομορφισμό.*

Απόδειξη. Από την καθολική ιδιότητα της τοπικοποίησης έχουμε:

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\psi"'] & RS^{-1} \arrow[dl, dashed, "\tau"] \\ \widetilde{RS^{-1}} & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} R \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\varphi"'] & \widetilde{RS^{-1}} \arrow[dl, dashed, "\sigma"] \\ RS^{-1} & \end{tikzcd}$$

κι οπότε οι σ, τ είναι η μία αντίστροφη της άλλης, άρα ισομορφισμοί. □

2.2 Βασικές έννοιες τοπολογίας

Σε αυτήν την παράγραφο θα υπενθυμίσουμε βασικές έννοιες από την πραγματική ανάλυση κι έπειτα θα γενικεύσουμε αξιωματικά τα ανοικτά σύνολα σε χώρους στους οποίους δεν προϋποτίθεται μετρική δομή.

2.2.1 Ο ορισμός της τοπολογίας

Ορισμός 2.13 (Μετρικές και μετρικοί χώροι)**.** *Έστω $M \neq \emptyset$ ένα σύνολο και $\varrho : M \times M \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση με τις ιδιότητες:*

1. $\forall x, y \in M,\ \varrho(x,y) \geqslant 0$
2. $\forall x, y \in M,\ [\varrho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y]$
3. $\forall x, y \in M,\ \varrho(x,y) = \varrho(y,x)$
4. $\forall x, y, z \in M,\ \varrho(x,z) \leqslant \varrho(x,y) + \varrho(y,z)$

Η συνάρτηση ϱ θα καλείται μετρική στο M. Το διατεταγμένο ζεύγος (M, ϱ) θα καλείται μετρικός χώρος.

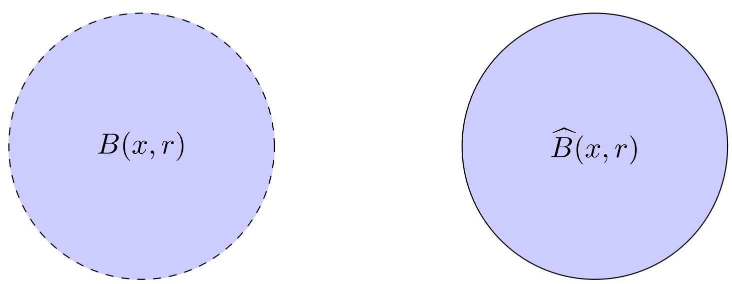
Ορισμός 2.14 (Ανοικτές και κλειστές μπάλες)**.** *Έστω (M, ϱ) ένας μετρικός χώρος, $x \in M$ και $r > 0$. Ορίζουμε ως ανοικτή μπάλα με κέντρο x και ακτίνα r το σύνολο:*

$$B(x,r) := \{y \in M \mid \varrho(x,y) < r\}$$

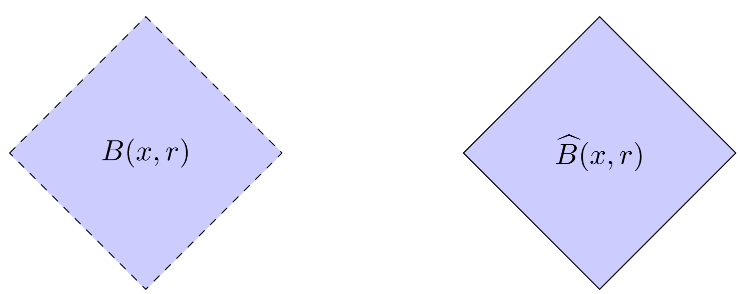
Ορίζουμε ως κλειστή μπάλα με κέντρο x και ακτίνα r το σύνολο:

$$\widehat{B}(x,r) := \{y \in M \mid \varrho(x,y) \leqslant r\}$$

Φυσικά (γενικά) αληθεύει ότι $x \in B(x,r) \subseteq \widehat{B}(x,r)$. Ειδικά στο επίπεδο, μετρώντας με τη συνήθη μετρική έχουμε εικόνες της μορφής:



ενώ μετρώντας με τη μετρική του ταχυδρόμου:



Ορισμός 2.15 (Ανοικτά σύνολα). *Έστω (M, ϱ) μετρικός χώρος. Ένα σύνολο $A \subseteq M$ θα λέγεται ανοικτό στον μετρικό χώρο αν και μόνο αν:*

$$\forall x \in A,\ \exists \varepsilon_x > 0 :\ B(x, \varepsilon_x) \subseteq A$$

Αυτομάτως ο ορισμός των ανοικτών συνόλων δίνει ότι κάθε ανοικτό σύνολο είναι ένωση ανοικτών μπαλών (και ισχύει και το αντίστροφο).

$$A \text{ ανοικτό } \Leftrightarrow \exists \big(B(x, \varepsilon_x)\big)_x \text{ με } A = \bigcup_x B(x, \varepsilon_x)$$

Θεώρημα 2.2. *Έστω (M, ϱ) μετρικός χώρος. Ορίζουμε το σύνολο των ανοικτών συνόλων του μετρικού χώρου:*

$$\mathfrak{T}_\varrho = \{A \subseteq X \mid A \text{ ανοικτό}\}$$

Τα ακόλουθα αληθεύουν:

1. $\emptyset, M \in \mathfrak{T}_\varrho$
2. *Εάν* $n \in \mathbb{N}$ *και* $\{A_i\}_{i=1}^n \subseteq \mathfrak{T}_\varrho$, *τότε* $\bigcap_{i=1}^n A_i \in \mathfrak{T}_\varrho$
3. *Εάν* I *είναι ένα αυθαίρετο σύνολο δεικτών και* $\{A_i\}_{i \in I} \subseteq \mathfrak{T}_\varrho$, *τότε* $\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathfrak{T}_\varrho$

Απόδειξη. Για το 1., το $\emptyset$ είναι ανοικτό σύνολο, αφού προτάσεις της μορφής "$\forall x \in \emptyset$" πάντοτε ισχύουν. Το M είναι επίσης ανοικτό σύνολο, αφού:

$$M = \bigcup_{r>0} B(x, r)$$

Για το 2., εφόσον η οικογένεια $\{A_i\}_{i=1}^n$ είναι οικογένεια ανοικτών συνόλων, για κάθε $x \in \bigcap_{i=1}^n A_i$ υπάρχουν ακτίνες r_i τέτοιες ώστε $B(x, r_i) \subseteq A_i$ (για τα διάφορα i). Θεωρώντας $r = \min\{r_i\}_{i=1}^n$, έχουμε ότι $B(x, r) \subseteq \bigcap_{i=1}^n A_i$.

Για το 3., εάν $x \in \bigcup_{i \in I} A_i$, τότε $x \in A_j$ για κατάλληλο δείκτη j. Οπότε, υπάρχει r_j τέτοιο ώστε $B(x, r_j) \subseteq A_j$ και κατ' επέκταση $B(x, r_j) \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$. □

Υπό το πρίσμα του πρηγγούμενου θεωρήματος, μπορούμε να ορίσουμε αξιωματικά τα ανοικτά σύνολα ως εξής:

Ορισμός 2.16 (Τοπολογίες, τοπολογικοί χώροι, ανοικτά και κλειστά σύνολα). *Έστω $X \neq \emptyset$ ένα σύνολο. Μια τοπολογία στον X είναι μια οικογένεια $\mathfrak{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$ με τις εξής ιδιότητες:*

1. $\emptyset, X \in \mathfrak{T}$
2. *Εάν* $n \in \mathbb{N}$ *και* $\{A_i\}_{i=1}^n \subseteq \mathfrak{T}$, *τότε* $\bigcap_{i=1}^n A_i \in \mathfrak{T}$
3. *Εάν* I *είναι ένα αυθαίρετο σύνολο δεικτών και* $\{A_i\}_{i \in I} \subseteq \mathfrak{T}$, *τότε* $\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathfrak{T}$

Το διατεταγμένο ζεύγος $(X, \mathfrak{T})$ θα καλείται τοπολογικός χώρος. Τα στοιχεία μιας τοπολογίας $\mathfrak{T}$ θα τα ονομάζουμε ανοικτά σύνολα στον X. Τα κλειστά σύνολα F στον X είναι ακριβώς αυτά για τα οποία $F^c = X \backslash F \in \mathfrak{T}$.

Ο ορισμός που δώσαμε για την έννοια της τοπολογίας δεν προϋποθέτει την ύπαρξη μετρικής δομής ούτε κανείς εν γένει μπορεί να εξάγει μετρική δομή χρησιμοποιώντας την τοπολογία. Αυτό το βλέπουμε παρακάτω.

Ορισμός 2.17 (Μετρικοποιήσιμες τοπολογίες)**.** *Έστω $X \neq \emptyset$. Μια τοπολογία $\mathfrak{T}$ στο X λέγεται μετρικοποιήσιμη εάν υπάρχει μετρική ϱ τέτοια ώστε $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}_\varrho$.*

Παρατήρηση 2.6. *Υπάρχουν μη μετρικοποιήσιμες τοπολογίες.*

Απόδειξη. Έστω ένα σύνολο X με την τετριμμένη τοπολογία του, δηλαδή την $\{\emptyset, X\}$. Έστω ϱ μία μετρική στο X. Για τυχόν $x \in X$ και για κάθε $r > 0$, η μπάλα $B(x, r)$ είναι ένα από τα σύνολα $\emptyset, X$ (αφού αυτά είναι τα μόνα ανοικτά σύνολα). Επειδή δεν είναι κενή, αναγκαστικά είναι ολόκληρος ο χώρος X. Τώρα ο X αναγκαστικά είναι μονοσύνολο, αφού οποιοδήποτε $x \neq y \in X$ βρίσκονται σε κάθε μπάλα $B(x, r)$ για οσοδήποτε μικρή απόσταση $r > 0$ - οπότε η απόσταση των x, y είναι μηδενική. Αυτό δείχνει ότι οι μόνες μετρικοποιήσιμες τετριμμένες τοπολογίες είναι αυτές στις οποίες $|X| = 1$. □

2.2.2 Βάσεις και υποβάσεις μίας τοπολογίας

Στους διάφορους μετρικούς χώρους (X, ϱ) υπάρχει μια οικογένεια συνόλων $\mathcal{B} \subseteq \mathfrak{T}_\varrho$ από "εύχρηστα" ανοικτά σύνολα για την περιγραφή της τοπολογίας. Για παράδειγμα, η οικογένεια των ανοικτών μπαλών του (X, ϱ) είναι τέτοιου είδους σύνολο, αφού κάθε ανοικτό σύνολο "παράγεται" από μπάλες. Το ανάλογο στους τοπολογικούς χώρους είναι η βάση της τοπολογίας.

Ορισμός 2.18 (Βάση μιας τοπολογίας)**.** *Έστω $(X, \mathfrak{T})$ ένας τοπολογικός χώρος. Ένα σύνολο $\mathcal{B} \subseteq \mathfrak{T}$ λέγεται βάση της τοπολογίας $\mathfrak{T}$ εάν και μόνο αν ισχύει η ακόλουθη συνθήκη:*

"Κάθε $A \in \mathfrak{T}$ γράφεται ως ένωση συνόλων της οικογένειας $\mathcal{B}$"

Παρατήρηση 2.7. *Έστω $(X, \mathfrak{T})$ ένας τοπολογικός χώρος και $\mathcal{B} \subseteq \mathfrak{T}$. Η οικογένεια $\mathcal{B}$ είναι βάση της τοπολογίας εάν και μόνο αν:*

$$\forall A \in \mathfrak{T},\ \forall x \in A,\ \exists B_x \in \mathcal{B} \text{ τέτοιο ώστε } x \in B_x \text{ και } B_x \subseteq A$$

Απόδειξη. $(\Rightarrow)$ Υποθέτουμε ότι η $\mathcal{B}$ είναι βάση για την τοπολογία $\mathfrak{T}$. Έστω $A \in \mathfrak{T}$ τυχόν ανοικτό σύνολο και $x \in A$. Επειδή η $\mathcal{B}$ είναι βάση για την τοπολογία, υπάρχει αυθαίρετα μεγάλο πλήθος συνόλων $\mathcal{B} \ni B_i,\ i \in I$ για τα οποία αληθεύει:

$$A = \bigcup_{i \in I} B_i$$

Εξ ορισμού τώρα της ένωσης, υπάρχει δείκτης $j_x \in I$ για τον οποίον $x \in B_{j_x}$, δηλαδή:

$$x \in B_{j_x} \subseteq \bigcup_{i\in I} B_i = A,\ \{B_i\}_{i\in I} \subseteq \mathcal{B}$$

($\Leftarrow$) Υποθέτουμε ότι:

$$\forall A \in \mathfrak{T},\ \forall x \in A,\ \exists B_x \in \mathcal{B} \text{ τέτοιο ώστε } x \in B_x \text{ και } B_x \subseteq A$$

Η ιδιότητα αυτή άμεσα δίνει ότι $\bigcup_{x\in A} B_x \supseteq A$ (διότι η ένωση γίνεται για κάθε $x \in A$, και $x \in B_x$). Επιπλέον $\bigcup_{x\in A} B_x \subseteq A$ (διότι $B_x \subseteq A$ για κάθε x). Ισχύει λοιπόν η ισότητα:

$$\bigcup_{x\in A} B_x = A$$

□

Ορισμός 2.19 (Υποβάσεις)**.** *Έστω $(X, \mathfrak{T})$ ένας τοπολογικός χώρος. Το σύνολο $\mathcal{C} \subseteq \mathfrak{T}$ θα καλείται υποβάση της τοπολογίας $\mathfrak{T}$ εάν και μόνο αν το σύνολο:*

$$\mathcal{B} = \left\{ \bigcap_{i=1}^{n} C_i \;\middle|\; n \in \mathbb{N},\ \{C_i\}_{i=1}^{n} \subseteq \mathcal{C} \right\} \cup \{X\}$$

είναι βάση της $\mathfrak{T}$.

Ορισμός 2.20. *(Εσωτερικό συνόλου και κλειστή θήκη) Έστω $(X, \mathfrak{T})$ ένας τοπολογικός χώρος. Για κάθε $A \subseteq X$ ορίζουμε τα εξής βοηθητικά σύνολα:*

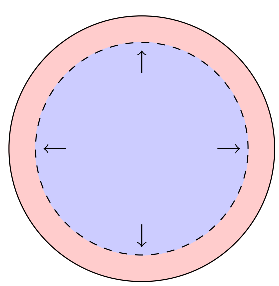
$$\mathcal{E}_A = \{G \in \mathfrak{T} \mid G \subseteq A\} \text{ και } \mathcal{F}_A = \{F \subseteq X \mid F \text{ κλειστό και } A \subseteq F\}$$

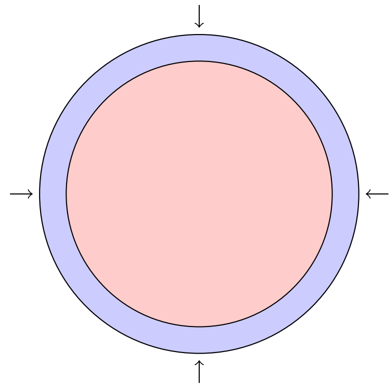
Ορίζουμε ως εσωτερικό του A το σύνολο:

$$A^\circ := \bigcup \mathcal{E}_A$$

Ορίζουμε ως κλειστή θήκη του A το σύνολο:

$$\overline{A} := \bigcap \mathcal{F}_A$$





Προσέγγιση του εσωτερικού με ανοικτά σύνολα, "από μέσα". Επίσης, προσέγγιση της θήκης με κλειστά σύνολα, "από έξω".

2.2.3 Περιοχές και συνέχεια

Με κατάλληλα ανοικτά σύνολα, τις περιοχές σημείων, μπορούν να οριστούν έννοιες συνέ-χειας στους τοπολογικούς χώρους.

Ορισμός 2.21 (Περιοχές). *Έστω $(X, \mathfrak{T})$ ένας τοπολογικός χώρος και $x \in X$, $A \subseteq X$, $\mathcal{B}$ μία βάση της $\mathfrak{T}$. Το σύνολο A λέγεται περιοχή του x εάν $x \in A^\circ$. Δύο άλλοι ισοδύναμοι ορισμοί είναι οι:*

$$\exists G \in \mathfrak{T} \text{ με } x \in G \subseteq A$$

και:

$$\exists B \in \mathcal{B} \text{ με } x \in B \subseteq A$$

Συμβολίζουμε με $\mathcal{N}_x$ το σύνολο όλων των περιοχών του x. Εάν ο τοπολογικός χώρος δεν υπονοείται, θα συμβολίζουμε με $\mathcal{N}_x^{\mathfrak{T}}$ το εν λόγω σύνολο.

Ορισμός 2.22 (Βάσεις περιοχών). *Έστω $(X, \mathfrak{T})$ ένας τοπολογικός χώρος και $x \in X$. Ένα σύνολο $\mathcal{B}_x \subseteq \mathcal{N}_x$ θα καλείται βάση περιοχών του x αν:*

$$\forall U \in \mathcal{N}_x,\ \exists B \in \mathcal{B}_x \text{ τέτοιο ώστε } B \subseteq U$$

Εάν ο τοπολογικός χώρος δεν υπονοείται, θα συμβολίζουμε με $\mathcal{B}_x^{\mathfrak{T}}$ το εν λόγω σύνολο. Επίσης, κάθε $B \in \mathcal{B}_x$ καλείται βασική περιοχή του x.

Έστω (X, ϱ), (Y, d) μετρικοί χώροι. Υπενθυμίζουμε ότι μια συνάρτηση $f : (X, \varrho) \to (Y, d)$ είναι συνεχής στο $x \in X$ όταν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε:

$$f\big(B_\varrho(x, \delta)\big) \subseteq B_d\big(f(x), \varepsilon\big)$$

Στην πραγματικότητα τα ε και δ ως αποστάσεις δεν χρειάζονται για την διατύπωση του ορισμού, ακόμη και στους μετρικούς χώρους.

$$f \text{ συνεχής } :\Leftrightarrow \forall B_d\big(f(x), \varepsilon\big),\ \exists B_\varrho(x, \delta) \text{ ώστε } f\big(B_\varrho(x, \delta)\big) \subseteq B_d\big(f(x), \varepsilon\big)$$

Το κύριο χαρακτηριστικό του ορισμού είναι η χρήση περιοχών του x. Διατυπώνουμε τον παρακάτω γενικό ορισμό:

Ορισμός 2.23 (Συνέχεια). *Έστω $(X, \mathfrak{T}_X), (Y, \mathfrak{T}_Y)$ δύο τοπολογικοί χώροι και $f : (X, \mathfrak{T}_X) \to (Y, \mathfrak{T}_Y)$. Η f θα λέγεται συνεχής συνάρτηση στο $x \in X$ εάν:*

$$\forall V \in \mathcal{N}_{f(x)}^{\mathfrak{T}_Y},\ \exists U \in \mathcal{N}_x^{\mathfrak{T}_X} \text{ ώστε } f(U) \subseteq V$$

Ο ίδιος ορισμός μπορεί να διατυπωθεί με βασικές περιοχές. Επιπλέον, η f θα καλείται συνεχής αν είναι συνεχής σε κάθε $x \in X$.

Πρόταση 2.6. *Έστω $(X, \mathfrak{T}_X), (Y, \mathfrak{T}_Y)$ δύο τοπολογικοί χώροι και $f : (X, \mathfrak{T}_X) \to (Y, \mathfrak{T}_Y)$. Αληθεύει η ισοδυναμία:*

$$f \text{ συνεχής στο } x \Leftrightarrow \forall V \in \mathcal{N}_{f(x)} \text{ ισχύει } f^{-1}(V) \in \mathcal{N}_x$$

Δηλαδή, κατά κάποιον τρόπο, η f αντιστρέφει περιοχές σε περιοχές.

Απόδειξη. Κατ' αρχάς ας θυμηθούμε μερικές χρήσιμες συνολοθεωρητικές σχέσεις, που δεν εξαρτώνται από τις τοπολογίες. Εάν $f : X \to Y$ είναι μια συνάρτηση και $A \subseteq X, B \subseteq Y$, τότε:

- $A \subseteq f^{-1}\big(f(A)\big)$, αφού εν γένει υπάρχουν περισσότερα στοιχεία απ' ότι αυτά του A των οποίων η εικόνα ανήκει στο $f(A)$.
- $f\big(f^{-1}(B)\big) \subseteq B$, αφού εν γένει υπάρχουν στοιχεία στο B που δεν είναι εικόνα μέσω της f.

($\Rightarrow$) Έστω ότι η f είναι συνεχής στο x. Τότε (από τον ορισμό της συνέχειας) για $V \in \mathcal{N}_{f(x)}$ υπάρχει $U \in \mathcal{N}_x$ με $f(U) \subseteq V$, δηλαδή $f^{-1}\big(f(U)\big) \subseteq f^{-1}(V)$. Από τις χρήσιμες συνολοθεωρητικές παρατηρήσεις:

$$U \subseteq f^{-1}\big(f(U)\big) = f^{-1}(V)$$

οπότε το σύνολο $f^{-1}(V)$ είναι περιοχή του x, ως υπερσύνολο περιοχής του x.

($\Leftarrow$) Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι για κάθε $V \in \mathcal{N}_{f(x)}$ έχουμε $f^{-1}(V) \in \mathcal{N}_x$. Σταθεροποιώντας ένα τέτοιο V, θέτουμε $U = f^{-1}(V)$ και θα δείξουμε ότι $U \in \mathcal{N}_x$, $f(U) \subseteq V$. Πράγματι, από την υπόθεση $U = f^{-1}(V) \in \mathcal{N}_x$ και από τις χρήσιμες συνολοθεωρητικές παρατηρήσεις $f(U) \subseteq f\big(f^{-1}(V)\big) \subseteq V$. $\square$

Ορισμός 2.24 (Ομοιομορφισμοί). *Έστω $(X, \mathfrak{T}_X), (Y, \mathfrak{T}_Y)$ δύο τοπολογικοί χώροι και $f : X \to Y$. Η f θα λέγεται ομοιομορφισμός εάν είναι αμφιμονοσήμαντη και συνεχής ως προς τις δύο κατευθύνσεις (δηλαδή η ίδια να είναι συνεχής και η αντίστροφή της να είναι συνεχής). Η ύπαρξη μιας τέτοιας $f : (X, \mathfrak{T}_X) \to (Y, \mathfrak{T}_Y)$ θα λέμε ότι καθιστά τους δύο τοπολογικούς χώρους ομοιομορφικούς.*

2.2.4 Αρχικές και σχετικές τοπολογίες

Ορισμός 2.25 (Αρχικές τοπολογίες). *Έστω X ένα σύνολο και $\big((Y_i, \mathfrak{T}_i)\big)_{i\in I}$ μια οικογένεια τοπολογικών χώρων. Επίσης θεωρούμε απεικονίσεις $f_i : X \to Y_i$, $i \in I$. Ονομάζουμε αρχική (ή ασθενή) τοπολογία που προκύπτει από την οικογένεια $(f_i)_{i\in I}$ την τοπολογία με υποβάση:*

$$\mathcal{C} = \bigcup_{i\in I} \{f_i^{-1}(G) \mid G \in \mathfrak{T}_i\}$$

Αφού η $\mathcal{C}$ είναι υποβάση αυτής της τοπολογίας, το σύνολο:

$$\mathcal{B} = \left\{ \bigcap_{i=1}^{n} C_i \;\middle|\; n \in \mathbb{N},\ \{C_i\}_{i=1}^{n} \subseteq \mathcal{C} \right\} \cup \{X\}$$

είναι βάση της τοπολογίας. Η ίδια η τοπολογία έχει τη μορφή:

$$\mathfrak{T} = \left\{ \bigcup \mathcal{A} \mid \mathcal{A} \subseteq \mathcal{B} \right\}$$

Από τον ορισμό της, η αρχική τοπολογία των $\{f_i\}_{i\in I}$ είναι η μικρότερη τοπολογία που κάνει κάθε f_i συνεχή.

Ειδική περίπτωση ασθενούς τοπολογίας είναι η ακόλουθη: Έστω $(X, \mathfrak{T})$ τοπολογικός χώρος, $A \subseteq X$ και $\mathrm{i}_A : A \hookrightarrow X$ η συνάρτηση εμφύτευσης. Το A μπορεί να εφοδιαστεί με την αρχική τοπολογία $\mathfrak{T}_A$ που προέρχεται από την (τετριμμένη) οικογένεια (i_A).

Ορισμός 2.26 (Σχετικές τοπολογίες). *Έστω $(X, \mathfrak{T})$ τοπολογικός χώρος, $A \subseteq X$ και $\mathrm{i}_A : A \hookrightarrow X$ η συνάρτηση εμφύτευσης. Η αρχική τοπολογία $\mathfrak{T}_A$ ονομάζεται σχετική τοπολογία του A που προέρχεται από την $\mathfrak{T}$.*

Η τοπολογία αυτή έχει υποβάση:

$$\mathcal{C} = \left\{ \mathrm{i}_A^{-1}(G) \mid G \in \mathfrak{T} \right\}$$

Επειδή όμως $\mathrm{i}_A^{-1}(G) = \{x \in A \mid \mathrm{i}_A(x) \in G\} = A \cap G$, έπεται:

$$\mathcal{C} = \left\{ A \cap G \mid G \in \mathfrak{T} \right\}$$

και περνώντας στα βασικά σύνολα $B = \bigcap_{k=1}^{n} C_k,\ \{C_k\}_{k=1}^{n} \subseteq \mathcal{C}$:

$$B = \bigcap_{k=1}^{n} C_k = \bigcap_{k=1}^{n} A \cap G_k = A \cap \left(\bigcap_{k=1}^{n} G_k \right)$$

Τώρα το $\bigcap_{k=1}^{n} G_k$ είναι ανοικτό σύνολο (έστω G) ως πεπερασμένη τομή τέτοιων, επομένως $B = A \cap G$. Παρατηρήστε ότι αυτό εξισώνει την οικογένεια $\mathcal{C}$ των υποβασικών συνόλων με την οικογένεια $\mathcal{B}$ των βασικών συνόλων.

Μάλιστα η ίδια η τοπολογία ταυτίζεται με τα προηγούμενα δύο σύνολα. Ένα τυχόν στοιχείο $U \in \mathfrak{T}_A$ γράφεται $U = \bigcup_{k\in I} B_k$ για αυθαίρετα μεγάλη οικογένεια $\{B_k\}_{k\in I} \subseteq \mathcal{B}$ και:

$$U = \bigcup_{k\in I} B_k = \bigcup_{k\in I} A \cap G_k = A \cap \left(\bigcup_{k\in I} G_k \right)$$

Το $\bigcup_{k\in I} G_k$ είναι ανοικτό σύνολο G, επομένως $U = A \cap G$. Έχουμε λοιπόν την ακόλουθη παρατήρηση:

Πόρισμα 2.1. *Έστω $(X, \mathfrak{T})$ ένας τοπολογικός χώρος, $A \subseteq X$ και $\mathfrak{T}_A$ η σχετική τοπολογία του A που προέρχεται από την $\mathfrak{T}$. Η υποβάση $\mathcal{C} = \big\{A \cap G \mid G \in \mathfrak{T}\big\}$ της σχετικής τοπολογίας ταυτίζεται με την αντίστοιχη βάση $\mathcal{B}$ καθώς και με την τοπολογία $\mathfrak{T}_A$. Δηλαδή:*

$$\mathcal{C} = \mathcal{B} = \mathfrak{T}_A$$

Ορισμός 2.27 (Προβολές και τοπολογίες γινόμενα)**.** *Έστω $\big((X_i, \mathfrak{T}_i)\big)_{i\in I}$ οικογένεια τοπολογικών χώρων και X το γινόμενο:*

$$X = \prod_{i\in I} X_i := \left\{ x : I \to \bigcup_{i\in I} X_i \mid x(i) \in X_i,\ i \in I \right\}$$

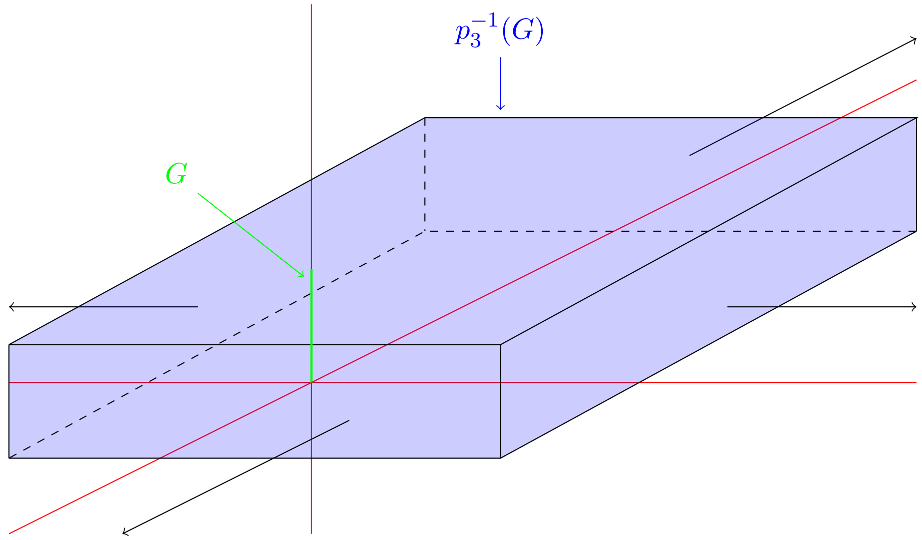
Για κάθε $j \in I$ ορίζουμε τη συνάρτηση προβολής $p_j : X \to X_j,\ x \mapsto x(j)$ στην $j-$συνιστώσα, κι επίσης θεωρούμε $\mathfrak{T}_\gamma$ την αρχική τοπολογία της οικογένειας των προβολών $(p_i)_{i\in I}$. Η $\mathfrak{T}_\gamma$ ονομάζεται τοπολογία γινόμενο (ή καρτεσιανή τοπολογία).

Από τον ορισμό της, η καρτεσιανή τοπολογία $\mathfrak{T}_\gamma$ είναι η μικρότερη τοπολογία που κάνει κάθε προβολή p_i συνεχή. Επιπλέον, η $\mathfrak{T}_\gamma$ έχει υποβάση $\mathcal{C} = \bigcup_{i\in I}\{p_i^{-1}(G) \mid G \in \mathfrak{T}_i\}$. Παρατηρήστε ότι ένα στοιχείο x ανήκει σε ένα υποβασικό σύνολο $p_i^{-1}(G)$ εάν και μόνο αν $p_i(x) \in G_i$, δηλαδή $x_i \in G_i$ (οι υπόλοιπες συντεταγμένες είναι "ελεύθερες").

Ορισμός 2.28 (Κανονική βάση μιας τοπολογίας γινόμενο)**.** *Έστω τοπολογικοί χώροι $(X_i, \mathfrak{T}_i)$, $i \in I$. Θεωρούμε το γινόμενο $X = \prod_{i\in I} X_i$ εφοδιασμένο με την τοπολογία γινόμενο $\mathfrak{T}_\gamma$. Γνωρίζουμε ότι η οικογένεια $\mathcal{C} = \bigcup_{i\in I}\{p_i^{-1}(G) \mid G \in \mathfrak{T}_i\}$ είναι υποβάση της $\mathfrak{T}_\gamma$, και κατ' επέκταση το σύνολο:*

$$\mathcal{B} = \left\{ \bigcap_{i=1}^{n} C_i \;\middle|\; n \in \mathbb{N},\ \{C_i\}_{i=1}^{n} \subseteq \mathcal{C} \right\} \cup \{X\}$$

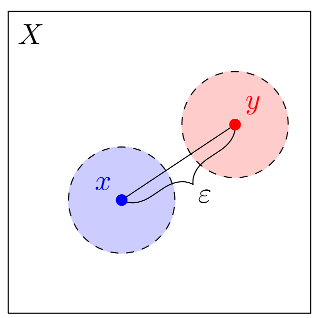
είναι βάση της τοπολογίας. Το ονομάζουμε κανονική βάση της τοπολογίας γινόμενο.



Ένα παράδειγμα στον χώρο $\mathbb{R}^3$, για την προβολή p_3 στον άξονα των z. Το μπλε χωρίο είναι μια άπειρη λωρίδα (όσον αφορά τα x, y).

2.2.5 Έννοιες διαχωρισιμότητας

Στους μετρικούς χώρους (X, ϱ) υπάρχουν κάποιες έννοιες διαχωρισιμότητας: Για παρά-δειγμα, δοθέντων δύο σημείων x, y, μπορούμε να διαχωρισουμε περιοχή του x από περιοχή του y.



Για παράδειγμα, εάν $\varepsilon = \varrho(x, y)$ τα σύνολα $B(x, \varepsilon/3),\ B(y, \varepsilon/3)$ είναι ανοικτά, ξένα, το πρώτο περιέχει το x και το δεύτερο το y. Δίνουμε λοιπόν τον ακόλουθο ορισμό:

Ορισμός 2.29 (Hausdorff τοπολογικοί χώροι)**.** *Ένας τοπολογικός χώρος $(X, \mathfrak{T})$ λέγεται Hausdorff εάν για κάθε $x, y \in X$ με $x \neq y$ υπάρχουν ανοικτά σύνολα $U, V \in \mathfrak{T}$ τέτοια ώστε $x \in U,\ y \in V$ και $U \cap V = \emptyset$.*

2.2.6 Τοπολογική διάσταση

Ορισμός 2.30 (Τοπολογική διάσταση)**.**

2.3 Βασικές έννοιες διαφορικής γεωμετρίας πολλαπλοτήτων

2.3.1 Διαφορικές πολλαπλότητες με σύνορο και χωρίς σύνορο

2.3.2 Προσανατολίσιμες πολλαπλότητες

2.3.3 Διαμερίσεις της μονάδας

2.4 Στοιχεία θεωρίας κατηγοριών

2.4.1 Γενικοί ορισμοί

2.4.2 Ομάδες ομολογίας

2.5 Βασικές έννοιες αλγεβρικής τοπολογίας

2.5.1 Τελικές τοπολογίες, πηλίκα και ομοτοπίες

2.5.2 Συμπλέγματα κελιών

2.5.3 Χώροι επικάλυψης

2.6 Βασική μιγαδική ανάλυση

2.6.1 Ολόμορφες συναρτήσεις

2.6.2 Το θεώρημα των ολοκληρωτικών υπολοίπων

2.6.3 Σειρές Laurent

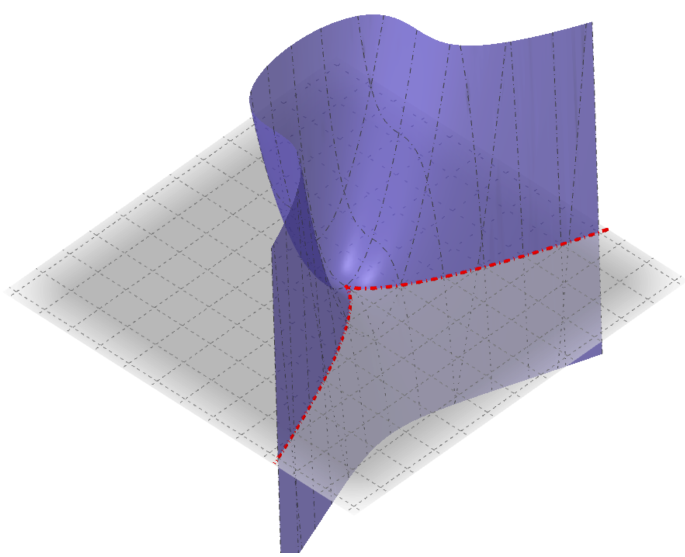
Κεφάλαιο 3

Αλγεβρικές πολλαπλότητες

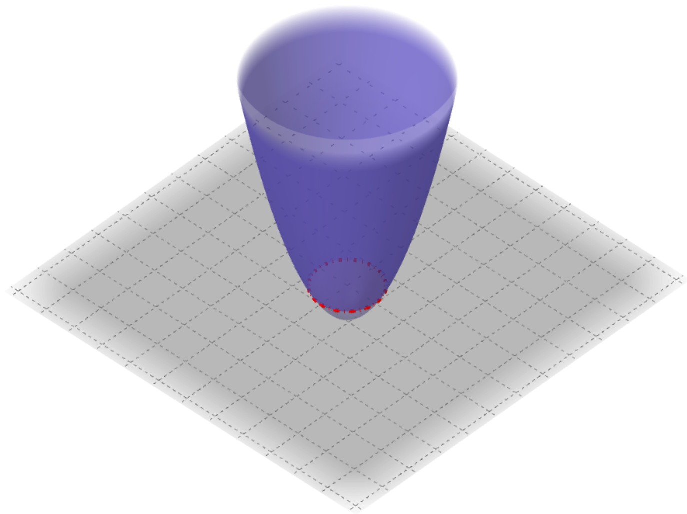
3.1 Αλγεβρικά σύνολα και η σχέση τους με τα ιδεώδη

Εάν f είναι μία ομαλή συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, γνωρίζουμε από τη γεωμετρία ότι το σύνολο μηδενισμού της είναι μία πολλαπλότητα χωρίς σύνορο, διάστασης n. Η εξίσωση $f(X) = 0$, $X = (x_1, \cdots, x_n)$, λέμε ότι περιγράφει μία πολλαπλότητα σε πεπελεγμένη μορφή.

Στην αλγεβρική γεωμετρία, μελετάμε τέτοιου είδους πολλαπλότητες όχι μέσω του απειροστικού λογισμού ή της γεωμετρίας, αλλά μέσω της άλγεβρας, μελετώντας τα ιδεώδη των συναρτήσεων που τις παράγουν. Εμείς εδώ θα θεωρούμε ότι η f είναι ένα πολυώνυμο, είναι όμως σύνηθες σε κάποιες παρουσιάσεις η f να είναι αναλυτική συνάρτηση.



Η $z = x^2 - y^3$ *και η τομή της με το επίπεδο* $z = 0$



Η $z = x^2 + y^2 - 1$ *και η τομή της με το επίπεδο* $z = 0$

Θα γίνουμε περισσότερο σαφείς όσον αφορά πώς υπεισέρχεται η άλγεβρα στη μελέτη αυτής της υποκατηγορίας πολλαπλοτήτων σε πεπλεγμένη μορφή στη συνέχεια. Πρώτα χρειαζόμαστε μερικούς ορισμούς.

Ορισμός 3.1 (Αφινικές πολλαπλότητες)**.** *Έστω* $\mathbb{K}$ *ένα σώμα. Ορίζουμε την αφινική πολλαπλότητα:*

$$\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}} = \{(x_1, \cdots, x_n) \mid x_k \in \mathbb{K}\}$$

Αυτός είναι στην ουσία ο χώρος των σημείων μας.

Ορισμός 3.2 (Αλγεβρικά σύνολα)**.** *Δεδομένης μίας (αυθαίρετα μεγάλης) οικογένειας πολυωνύμων* $\{f_k\}_{k \in I} \subseteq \mathbb{K}[x_1, \cdots, x_n]$*, ορίζουμε το αλγεβρικό σύνολο της οικογένειας ως εξής:*

$$\mathcal{V}(\{f_k\}_{k \in I}) = \bigcap_{k \in I} \{x \in \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}} \mid f_k(x) = 0\}$$

Παρατήρηση 3.1. *Έστω* $\{f_k\}_{k \in I} \subseteq \mathbb{K}[x_1, \cdots, x_n]$ *μία οικογένεια πολυωνύμων και* $\mathfrak{i} = \langle \{f_k\}_{k \in I} \rangle$*. Τότε:*

$$\mathcal{V}(\mathfrak{i}) = \mathcal{V}(\{f_k\}_{k \in I})$$

Παρατήρηση 3.2. *Έστω* $A, B \subseteq \mathbb{K}[x_1, \cdots, x_n]$ *δύο σύνολα με* $A \subseteq B$*. Τότε* $\mathcal{V}(A) \supseteq \mathcal{V}(B)$*.*

Αντιλαμβάνεστε ότι το γεωμετρικό αντικείμενο στην περίπτωση των αλγεβρικών συνόλων είναι το ίδιο το αλγεβρικό σύνολο $\mathcal{V}(\mathfrak{i})$, ενώ το γεωμετρικό είναι το ιδεώδες $\mathfrak{i}$. Το γενικό μοτίβο λοιπόν είναι να μελετήσουμε τα $\mathcal{V}(\mathfrak{i})$ μέσω των ιδεωδών $\mathfrak{i}$.

Πρόταση 3.1. *Έστω $\mathfrak{i}, \mathfrak{j}$ ιδεώδη του $\mathbb{K}[x_1, \cdots, x_n]$ και $\{\mathfrak{j}_k\}_{k\in I}$ μία οικογένεια ιδεωδών του $\mathbb{K}[x_1, \cdots, x_n]$. Τα ακόλουθα αληθεύουν:*

1. $\mathcal{V}(\mathfrak{i}) \cup \mathcal{V}(\mathfrak{j}) = \mathcal{V}(\mathfrak{i} \cap \mathfrak{j})$,
2. $\bigcap_{k\in I} \mathcal{V}(\mathfrak{i}_k) = \mathcal{V}\left(\sum_{k\in I} \mathfrak{i}_k\right)$,
3. *Ισχύει* $\mathcal{V}(\mathfrak{i}) = \mathcal{V}(\sqrt{\mathfrak{i}})$.

Απόδειξη. Για το 1. ο εγκλεισμός $\mathcal{V}(\mathfrak{i}) \cup \mathcal{V}(\mathfrak{j}) \subseteq \mathcal{V}(\mathfrak{i} \cap \mathfrak{j})$ είναι άμεσος, αφού $\mathfrak{i}, \mathfrak{j} \supseteq \mathfrak{i} \cap \mathfrak{j} \Rightarrow \mathcal{V}(\mathfrak{i}), \mathcal{V}(\mathfrak{j}) \subseteq \mathcal{V}(\mathfrak{i} \cap \mathfrak{j})$. Για τον άλλον εγκλεισμό, θεωρούμε $P \in \mathcal{V}(\mathfrak{i} \cap \mathfrak{j})$. Από τον ορισμό, για κάθε $f \in \mathfrak{i} \cap \mathfrak{j}$ θα έχουμε $f(P) = 0$. Εφόσον $f \in \mathfrak{i} \cap \mathfrak{j}$, γράφουμε:

$$f = f_{\mathfrak{i}} \cdot f_{\mathfrak{j}}, \text{ όπου } f_{\mathfrak{i}} \in \mathfrak{i} \text{ και } f_{\mathfrak{j}} \in \mathfrak{j}$$

και παίρνουμε περιπτώσεις:

- Εάν $f_{\mathfrak{i}}(P) \neq 0$ για κάποιο $f_{\mathfrak{i}}$, τότε σταθεροποιώντας το έπεται ότι $f_{\mathfrak{j}}(P) = 0$ για κάθε $f_{\mathfrak{j}} \in \mathfrak{j}$. Δηλαδή $P \in \mathcal{V}(\mathfrak{j})$.
- Εάν $f_{\mathfrak{j}}(P) \neq 0$ για κάποιο $f_{\mathfrak{j}}$, τότε αναλόγως $P \in \mathcal{V}(\mathfrak{i})$.
- Εάν τίποτε από τα παραπάνω δεν ισχύει, τότε $P \in \mathcal{V}(\mathfrak{i})$ και $P \in \mathcal{V}(\mathfrak{j})$.

Σε κάθε περίπτωση, $P \in \mathcal{V}(\mathfrak{i}) \cup \mathcal{V}(\mathfrak{j})$.

Για το 2., έχουμε $\mathfrak{i}_\lambda \subseteq \sum_{k\in I} \mathfrak{i}_k$, οπότε:

$$\mathcal{V}(\mathfrak{i}_\lambda) \supseteq \mathcal{V}\left(\sum_{k\in I} \mathfrak{i}_k\right) \text{ και } \bigcap_{\lambda\in I} \mathcal{V}(\mathfrak{i}_\lambda) \supseteq \mathcal{V}\left(\sum_{k\in I} \mathfrak{i}_k\right)$$

Από την άλλη, γράφουμε:

$$\mathfrak{i}_\lambda = \langle f_{\lambda,1}, \cdots, f_{\lambda,t_\lambda}\rangle$$

και αν $P \in \bigcap_{\lambda\in I} \mathfrak{i}_\lambda$, τότε $f_{\lambda,s} = 0$ για όλα τα $f_{\lambda,s}$. Όμως τα πολυώνυμα αυτά παράγουν το $\mathcal{V}\left(\sum_{\lambda\in I} \mathfrak{i}_\lambda\right)$ και κατά συνέπεια:

$$P \in \mathcal{V}\left(\sum_{\lambda\in I} \mathfrak{i}_\lambda\right)$$

Για το 3., από τη σχέση $\mathfrak{i} \subseteq \sqrt{\mathfrak{i}}$ έχουμε $\mathcal{V}(\mathfrak{i}) \supseteq \mathcal{V}(\sqrt{\mathfrak{i}})$. Επιπλέον, εάν $P \in \mathcal{V}(\mathfrak{i})$ και εάν $f \in \sqrt{\mathfrak{i}}$, τότε για κάποιο n έχουμε $f^n \in \mathfrak{i}$, δηλαδή $f^n(P) = 0$. Αυτό δείχνει ότι $f(P) = 0$ κι άρα $P \in \mathcal{V}(\sqrt{\mathfrak{i}})$. $\square$

Λήμμα 3.1. *Έστω R ακέραια περιοχή, πεπερασμένα παραγόμενη επί ενός σώματος $\mathbb{K}$. Εάν η R είναι σώμα, τότε κάθε στοιχείο της R είναι αλγεβρικό υπεράνω του $\mathbb{K}$.*

Απόδειξη. Εφόσον η R είναι πεπερασμένα παραγόμενη επί του $\mathbb{K}$, δεν βλάπτει να γράφουμε $R = \mathbb{K}[z_1, \cdots, z_m]$. Εάν $m = 1$, τότε, εφόσον το $R = \mathbb{K}[z_1]$ είναι σώμα:

$$z_1^{-1} = c_n z_1^n + \cdots + c_0$$

δηλαδή $c_n z^{n+1} + \cdots + c_0 z_1 - 1 = 0$ και το z_1 είναι αλγεβρικό.

Έστω $m \geqslant 2$. Τότε το $\mathbb{K}(z_1)$ είναι υπόσωμα του R και μπορούμε να γράφουμε $R = \mathbb{K}(z_1)[z_2, \cdots, z_m]$ (με $\mathbb{K}(z)$ συμβολίζουμε τα ρητά πολυώνυμα του z). Επαγωγικά υποθέτουμε ότι τα $z_2, \cdots, z_m$ είναι αλγεβρικά υπεράνω $\mathbb{K}(z_1)$ και θα δείξουμε ότι το z_1 είναι αλγεβρικό υπεράνω του $\mathbb{K}$.

Εφόσον κάθε z_k, $k \geqslant 2$, είναι αλγεβρικό στο $\mathbb{K}(z_1)$, έχουμε:

$$C^k(z_1) z_k^{n_k} + \sum_{\lambda=0}^{n_{k-1}} c_\lambda^k(z_1) z_k^\lambda = 0 \tag{3.1}$$

για κάποια $C^k, c_\lambda^k \in \mathbb{K}[z_1]$. Προσέξτε ότι μπορούμε να υποθέσουμε τους συντελεστές στο $\mathbb{K}[z_1]$ αντί στο $\mathbb{K}(z_1)$, πολλαπλασιάζοντας με κατάλληλο στοιχείο του $\mathbb{K}(z_1)$. Ορίζουμε τώρα:

$$C(z_1) = \prod_{k=2}^{m} C^k(z_1) \text{ και } S = \mathbb{K}\left[z_1, \frac{1}{C(z_1)}\right] \subseteq R$$

Με αυτόν τον ορισμό για το S έχουμε $R = S[z_2, \cdots, z_m]$. Πολλαπλασιάζοντας την 3.1 με C/C^k κι έπειτα με $1/C$, έχουμε:

$$z_k^{n_k} + \sum_{\lambda=1}^{n_{k-1}} b_\lambda^k z_k^\lambda = 0$$

οπότε κάθε στοιχείο του R είναι ακέραιο υπεράνω του S.

Θα δείξουμε ότι το S είναι σώμα. Πράγματι, αν $s \in S$, τότε $s^{-1} \in R$ και είναι ακέραιο υπεράνω του S. Οπότε:

$$(s^{-1})^{n_k} + \sum_{\lambda=1}^{n_{k-1}} \widetilde{b}_\lambda^k (s^{-1})^\lambda = 0 \Rightarrow 1 + \sum_{\lambda=1}^{n_{k-1}} \widetilde{b}_\lambda^k s^{n_k - \lambda} = 0 \Rightarrow s^{-1} = -\sum_{\lambda=1}^{n_{k-1}} \widetilde{b}_\lambda^k s^{n_k-\lambda-1}$$

κι άρα το s αντιστρέφεται στο S.

Τέλος, θα δείξουμε ότι το z_1 είναι αλγεβρικό υπεράνω του $\mathbb{K}$. Εφόσον το $S = \mathbb{K}[z_1, 1/C(z_1)]$ είναι σώμα, έχουμε:

$$z_1^{-1} = \sum_{k=1}^{n} F_k(z_1) z_1^k \Rightarrow 1 - \sum_{k=1}^{n} F_k(z_1) z_1^{k+1} = 0,\ F_k \in \mathbb{K}\left[1/C(z_1)\right]$$

Κατά συνέπεια, πολλαπλασιάζοντας με κατάλληλο πολυώνυμο του $C(z_1)$, έστω $P_C(z_1)$:

$$P_C(z_1) - \sum_{k=1}^{n} F_k(z_1) P_C(z_1) z_1^{k+1} = 0$$

με $P_C(z_1) - \sum_{k=1}^{n} F_k(z_1) P_C(z_1) z_1^{k+1} \in \mathbb{K}[z_1]$ (απαλείψαμε τους παρονομαστές με $C(z_1)$). Αυτό δείχνει ότι το z_1 είναι αλγεβρικό υπεράνω του $\mathbb{K}$. □

Θεώρημα 3.1 (Ασθενές Nullstellensatz[1]). *Έστω $\mathbb{K}$ ένα αλγεβρικά κλειστό σώμα. Εάν $\mathfrak{i} \trianglelefteq \mathbb{K}[x_1, \cdots, x_n]$ είναι ένα ιδεώδες με $1 \notin \mathfrak{i}$ (δηλαδή $\mathfrak{i} \neq \mathbb{K}[x_1, \cdots, x_n]$), τότε $\mathcal{V}(\mathfrak{i}) \neq \emptyset$. Επιπλέον, τα μεγιστικά ιδεώδη του $\mathbb{K}[x_1, \cdots, x_n]$ έχουν τη μορφή:*

$$\langle x_1 - a_1, \cdots, x_n - a_n \rangle$$

Απόδειξη. Εφόσον το $\mathfrak{i}$ είναι ιδεώδες που δεν ταυτίζεται με το $\mathbb{K}[x_1, \cdots, x_n]$ και ο δακτύλιος $\mathbb{K}[x_1, \cdots, x_n]$ είναι της Noether, υπάρχει μεγιστικό ιδεώδες $\mathfrak{i} \subseteq \mathfrak{m}$, κι οπότε τότε $\mathcal{V}(\mathfrak{i}) \supseteq \mathcal{V}(\mathfrak{m})$. Αυτό που θα χρειαστεί να δείξουμε είναι ότι $\mathcal{V}(\mathfrak{m}) \neq \emptyset$.

Αφού το $\mathfrak{m}$ είναι μεγιστικό, το $\mathbb{K}[x_1, \cdots, x_n]/\mathfrak{m}$ είναι σώμα που περιέχει το $\mathbb{K}$. Το προηγούμενο λήμμα θα μας δώσει ότι:

$$\mathbb{K}[x_1, \cdots, x_n] \Big/ \mathfrak{m} \cong \mathbb{K}$$

(αφού το $\mathbb{K}$ είναι αλγεβρικά κλειστό) κι οπότε $x_k + \mathfrak{m} \cong a_k \in \mathbb{K}$, δηλαδή $x_k - a_k \in \mathfrak{m}$. Κατά συνέπεια:

$$\langle x_1 - a_1, \cdots, x_n - a_n \rangle \subseteq \mathfrak{m}$$

Όμως:

$$\mathbb{K}[x_1, \cdots, x_n] \Big/ \langle x_1 - a_1, \cdots, x_n - a_n \rangle \cong \mathbb{K}$$

κι άρα το $\langle x_1 - a_1, \cdots, x_n - a_n \rangle$ είναι μεγιστικό. Κατά συνέπεια:

$$\mathcal{V}(\mathfrak{m}) = \{(a_1, \cdots, a_n)\}$$

□

Ορισμός 3.3 (Το ιδεώδες ενός αλγεβρικού συνόλου). *Έστω $V \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$. Ορίζουμε το ιδεώδες του V ως εξής:*

$$\mathcal{I}(V) = \{f \in \mathbb{K}[x_1, \cdots, x_n] \mid f(P) = 0 \text{ για κάθε } P \in V\}$$

Παρατηρήστε ότι $\mathfrak{i} \subseteq \mathcal{I}\big(\mathcal{V}(\mathfrak{i})\big)$.

[1] Στα Γερμανικά σημαίνει "θεώρημα τόπου μηδενισμού".

Θεώρημα 3.2 (Το Nullstellensatz του Hilbert). *Έστω $\mathbb{K}$ ένα αλγεβρικά κλειστό σώμα. Εάν $\mathfrak{i} \trianglelefteq \mathbb{K}[x_1, \cdots, x_n]$ είναι ένα ιδεώδες, τότε:*

$$\mathcal{I}\big(\mathcal{V}(\mathfrak{i})\big) = \sqrt{\mathfrak{i}}$$

Απόδειξη. Ο εγκλεισμός $\sqrt{\mathfrak{i}} \subseteq \mathcal{I}\big(\mathcal{V}(\mathfrak{i})\big)$ είναι άμεσος, αφού:

$$\sqrt{\mathfrak{i}} \subseteq \mathcal{I}\big(\mathcal{V}(\sqrt{\mathfrak{i}})\big) = \mathcal{I}\big(\mathcal{V}(\mathfrak{i})\big)$$

Για τον άλλον εγκλεισμό, θα δείξουμε ότι αν $f \in \mathcal{I}\big(\mathcal{V}(\mathfrak{i})\big)$, τότε υπάρχει $m > 0$ ώστε $f^m \in \mathfrak{i}$. Για αυτόν τον σκοπό, εισάγουμε μία νέα μεταβλητή, την x_0, η οποία θα παίξει τον ρόλο της τυπικής αντιστρόφου του f. Θεωρούμε λοιπόν το ιδεώδες $\mathfrak{j} \trianglelefteq \mathbb{K}[x_0, \cdots, x_n]$ με:

$$\mathfrak{j} = \langle 1 - x_0 f, \mathfrak{i} \rangle$$

Εάν $\mathcal{V}(\mathfrak{j}) \neq \emptyset$, τότε υπάρχει $(a_0, \cdots, a_n) \in \mathcal{V}(\mathfrak{i})$, με $(a_1, \cdots, a_n) \in \mathcal{V}(\mathfrak{i})$. Τότε $f(a_1, \cdots, a_n) = 0$ και αφού $1 - x_0 f \in j$, έχουμε $1 - a_0 f(a_1, \cdots, a_n) = 0$. Αυτό είναι άτοπο, αφού $1 \neq 0$.

Εφόσον $\mathcal{V}(\mathfrak{j}) \neq \emptyset$, από το ασθενές Nullstellensatz, $1 \in \mathfrak{j}$. Δηλαδή:

$$1 = g_0(x_0, \cdots, x_n)\big(1 - x_0 f(x_1, \cdots, x_n)\big) + \sum_{k=1}^{s} g_k(x_0, \cdots, x_n) f_k(x_1, \cdots, x_n)$$

όπου $f_k \in \mathfrak{i}$. Θέτοντας $x_0 = 1/f$ έπεται:

$$1 = \sum_{k=1}^{s} g_k(1/f, \cdots, x_n) f_k(x_1, \cdots, x_n)$$

και πολλαπλασιάζοντας με κατάλληλη δύναμη του f, έστω f^m, απαλείφουμε τους παρονομαστές:

$$f^m = \sum_{k=1}^{s} g_k(1/f, \cdots, x_n) f^m f_k(x_1, \cdots, x_n), \text{ όπου } g_k f^m \in \mathbb{K}[x_1, \cdots, x_n]$$

Άρα, $f^m \in \mathfrak{i}$. □

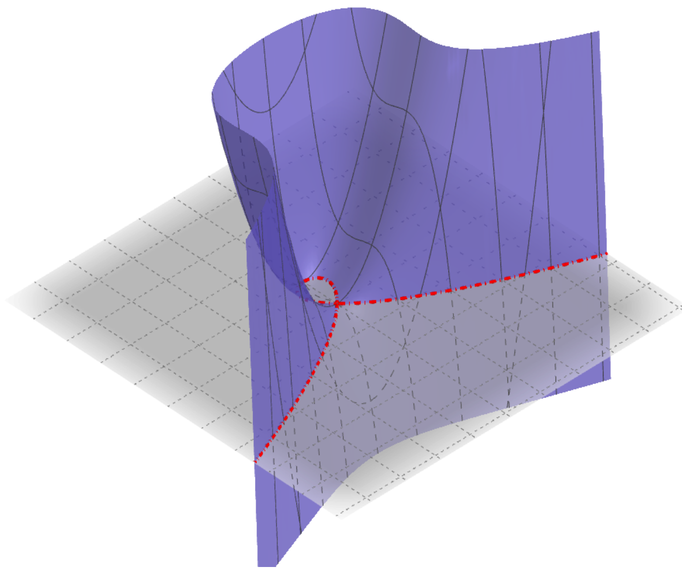
3.2 Η τοπολογία Zariski

Στον αφινικό χώρο $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ (για παράδειγμα στον $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$), τα σύνολα μηδενισμού $\mathcal{V}(f)$ είναι εν γένει "μικρά" (εκτός του $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$), αφού έχουν τοπολογική διάσταση $n - 1 < n$. Περιμένει λοιπόν κανείς ότι σε μία "λογική" τοπολογία, που σέβεται τη διάσταση, αυτά θα είναι στην καλύτερη περίπτωση κλειστά σύνολα κι όχι ανοικτά. Και πράγματι, στον $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ τα $\mathcal{V}(f)$ είναι εν γένει καμπύλες, όπως αυτή που παρίσταται παρακάτω.

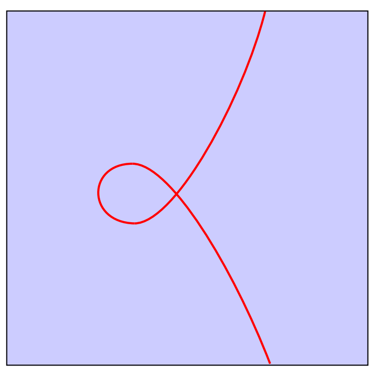
Η τοπολογία Zariski θα μπορούσαμε να πούμε ότι είναι αυτή η τοπολογία με την οποία τα $\mathcal{V}(f)$ γίνονται κλειστά.

Ορισμός 3.4 (Τοπολογία Zariski). *Στο σύνολο $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ ορίζουμε την τοπολογία Zariski:*

$$\mathfrak{T} = \left\{ \mathcal{V}(\mathfrak{i})^c \mid \mathfrak{i} \trianglelefteq \mathbb{K}[x_1, \cdots, x_n] \right\}$$



Η $z = y^2 - x^3 - x^2$ και η τομή της με το επίπεδο $z = 0$.



Η κόκκινη $y^2 - x^3 - x^2 = 0$ και το μπλε συμπλήρωμα.

Παρατήρηση 3.3. *Στο $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ η τοπολογία Zariski $\mathfrak{T}$ είναι πράγματι τοπολογία.* Δηλαδή:

1. $\emptyset, \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}} \in \mathfrak{T}$,
2. *Αν $\{A_k\}_{k=1}^m \subseteq \mathfrak{T}$ είναι μία πεπερασμένη οικογένεια, τότε $\bigcap_{k=1}^m A_k \in \mathfrak{T}$*
3. *Εάν I είναι ένα αυθαίρετο σύνολο δεικτών και $\{A_k\}_{k\in I} \subseteq \mathfrak{T}$, τότε $\bigcup_{k\in I} A_k \in \mathfrak{T}$*

Απόδειξη. Για το 1., έχουμε $\mathcal{V}(0) = \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ (άρα $\emptyset \in \mathfrak{T}$) και $\mathcal{V}(\mathbb{K}[x_1, \cdots, x_n]) = \emptyset$ (άρα $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}} \in \mathfrak{T}$).

Για το 2., έχουμε:

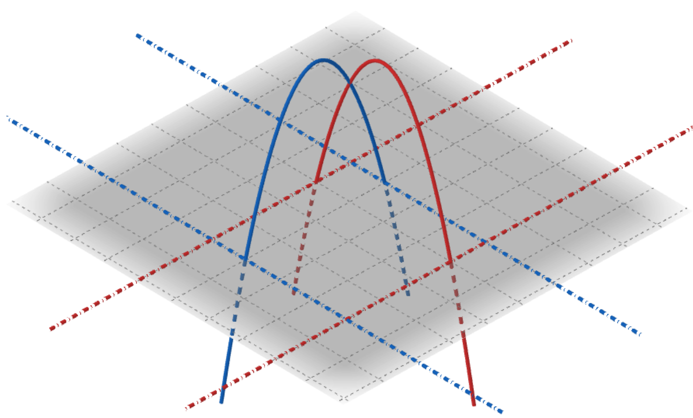
$$A_1 \cap A_2 = \mathcal{V}(\mathfrak{i}_1)^c \cap \mathcal{V}(i_2)^c = \big(\mathcal{V}(\mathfrak{i}_1) \cup \mathcal{V}(\mathfrak{i}_2)\big)^c = \mathcal{V}(\mathfrak{i}_1 \cap \mathfrak{i}_2)^c$$

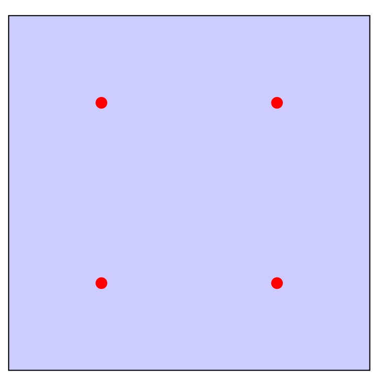
Για το 3.:

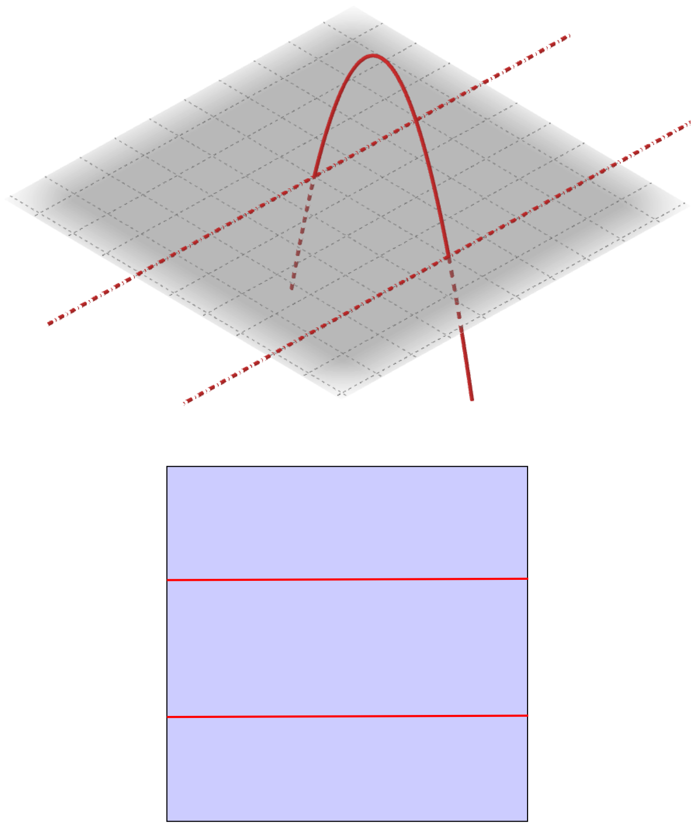
$$\bigcup_{k\in I} A_k = \bigcup_{k\in I} \mathcal{V}(\mathfrak{i}_k)^c = \left(\bigcap_{k\in I} \mathcal{V}(\mathfrak{i}_k)\right)^c = \mathcal{V}\left(\sum_{k\in I} \mathfrak{i}_k\right)^c$$

□

Παρατήρηση 3.4. *Προσέξτε ότι οι τοπολογίες Zariski δεν είναι τοπολογίες γινόμενο. Για παράδειγμα, η τοπολογία του $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}} = \mathbb{A}^1_{\mathbb{R}} \times \mathbb{A}^1_{\mathbb{R}}$ δεν είναι η τοπολογία γινόμενο των επιμέρους τοπολογιών Zariski των $\mathbb{A}^1_{\mathbb{R}}$. Επίσης, αφού τα ανοικτά σύνολα είναι "πολύ μεγάλα", καμία τοπολογία Zariski δεν είναι Hausdorff.*







Η τυπική μορφή κάποιων συνόλων στο γινόμενο.

Πρόταση 3.2. *Για κάθε $A \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ έχουμε $\mathcal{V}(\mathcal{I}(A)) = \overline{A}$.*

Απόδειξη. Επειδή $A \subseteq \mathcal{V}(\mathcal{I}(A))$, έχουμε $\overline{A} \subseteq \mathcal{V}(\mathcal{I}(A))$. Για τον άλλον εγκλεισμό, εάν $V(\mathfrak{i}) \supseteq A$, τότε $\sqrt{\mathfrak{i}} \subseteq \mathcal{I}(A)$ και:

$$\mathfrak{i} \subseteq \sqrt{\mathfrak{i}} \subseteq \mathcal{I}(A)$$

Παίρνοντας $\mathcal{V}$, έπεται $\mathcal{V}(\mathfrak{i}) \supseteq \mathcal{V}(\mathcal{I}(A))$. Το τελευταίο ουσιαστικά μας δείχνει ότι το σύνολο $\mathcal{V}(\mathcal{I}(A))$ είναι το μικρότερο κλειστό που περιέχει το A, κι άρα το ζητούμενο. □

Ορισμός 3.5 (Ανάγωγα σύνολα)**.** *Ένα αλγεβρικό σύνολο $V \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ θα λέγεται ανάγωγο εάν δεν υπάρχουν αλγεβρικά σύνολα $V_1, V_2 \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$, με $V_1, V_2 \neq V$, ούτως ώστε $V = V_1 \cup V_2$.*

Πρόταση 3.3 (Σχέση μεταξύ αναγώγων συνόλων και πρώτων ιδεωδών). *Ένα αλγεβρικό σύνολο $V \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ είναι ανάγωγο εάν και μόνο αν το $\mathcal{I}(V)$ είναι πρώτο ιδεώδες, δηλαδή οποτεδήποτε $ab \in \mathcal{I}(V)$, τότε $a \in \mathcal{I}(V)$ ή $b \in \mathcal{I}(V)$.*

Απόδειξη. ($\Rightarrow$) Έστω ότι το V είναι ανάγωγο και ότι για κάποια πολυώνυμα έχουμε $f_1 f_2 \in \mathcal{I}(V)$. Τότε ορίζουμε $\mathfrak{j}_k = \langle f_k, \mathcal{I}(V)\rangle$ και έχουμε τα εξής:

$$\mathcal{V}(\mathfrak{j}_k) = \{P \in \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}} \mid f_k(P) = 0 \text{ και } \forall f \in \mathcal{I}(V),\ f(P) = 0\} \subseteq V$$

οπότε $\mathcal{V}(\mathfrak{j}_1) \cup \mathcal{V}(\mathfrak{j}_2) \subseteq V$. Από την άλλη, όλα τα σημεία του V μηδενίζουν το πολυώνυμο $f_1 f_2$, άρα κάποιο από τα f_k (και ταυτόχρονα μηδενίζουν κάθε $f \in \mathcal{I}(V)$). Επομένως:

$$\mathcal{V}(\mathfrak{j}_1) \cup \mathcal{V}(\mathfrak{j}_2) \subseteq V \subseteq \mathcal{V}(\langle f_1, \mathcal{I}(V)\rangle) \cup \mathcal{V}(\langle f_2, \mathcal{I}(V)\rangle) = \mathcal{V}(\mathfrak{j}_1) \cup \mathcal{V}(\mathfrak{j}_2)$$

δηλαδή $V = \mathcal{V}(\mathfrak{j}_1) \cup \mathcal{V}(\mathfrak{j}_2)$. Εφόσον είναι ανάγωγο, χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε $\mathcal{V}(\mathfrak{j}_1) = \emptyset$, $\mathcal{V}(\mathfrak{j}_2) = V$. Κατά συνέπεια, το f_2 μηδενίζεται σε κάθε σημείο του V, οπότε $f_2 \in \mathcal{I}(V)$. Αυτά δείχνουν ότι το $\mathcal{I}(V)$ είναι πρώτο.

($\Leftarrow$) Εάν γράψουμε $V = \mathcal{V}(\mathfrak{i}) = \mathcal{V}(\mathfrak{j}_1) \cup \mathcal{V}(\mathfrak{j}_2)$, τότε $\mathcal{V}(\mathfrak{j}_k) \subseteq \mathcal{V}(\mathfrak{i})$ κι άρα:

$$\sqrt{\mathfrak{j}_k} = \mathcal{I}\big(\mathcal{V}(\mathfrak{j}_k)\big) \supseteq \mathcal{I}\big(\mathcal{V}(\mathfrak{i})\big) = \sqrt{\mathfrak{i}}$$

Θεωρούμε τώρα πολυώνυμα f_1, f_2 με $f_k \in \sqrt{\mathfrak{j}_k}$. Εφόσον τα f_k μηδενίζονται στο $\mathcal{V}(\mathfrak{j}_k)$, το $f_1 f_2$ μηδενίζεται στο $\mathcal{V}(\mathfrak{i})$, δηλαδή $f_1 f_2 \in \sqrt{i}$. Σταθεροποιώντας το f_1, διακρύνουμε περιπτώσεις.

- Εφόσον για κάθε f_2 έχουμε $f_1 f_2 \in \sqrt{i}$ και το $\sqrt{\mathfrak{i}}$ είναι πρώτο, υπάρχει περίπτωση είτε $f_1 \in \sqrt{\mathfrak{i}}$ είτε για κάθε $f_2 \in \sqrt{\mathfrak{j}_2}$ να έχουμε $f_2 \in \sqrt{\mathfrak{i}}$. Το δεύτερο, σε συνδυασμό με τα παραπάνω, θα δώσει $\sqrt{\mathfrak{j}_2} = \sqrt{\mathfrak{i}}$, δηλαδή:

$$\mathcal{V}(\mathfrak{i}) = \mathcal{V}(\sqrt{\mathfrak{i}}) = \mathcal{V}(\sqrt{\mathfrak{j}_2}) = \mathcal{V}(\mathfrak{j}_2) \text{ και } \mathcal{V}(\mathfrak{j}_1) = \emptyset$$

- Εάν υπάρχει $f_1 \in \sqrt{\mathfrak{i}}$, τότε πάλι έχουμε δύο περιπτώσεις: Είτε όλα τα $f_1 \in \sqrt{\mathfrak{j}_1}$ ανήκουν στο $\sqrt{\mathfrak{i}}$, είτε υπάρχει $\widetilde{f_1} \in \sqrt{\mathfrak{j}_1} \backslash \sqrt{\mathfrak{i}}$. Η πρώτη περίπτωση δίνει:

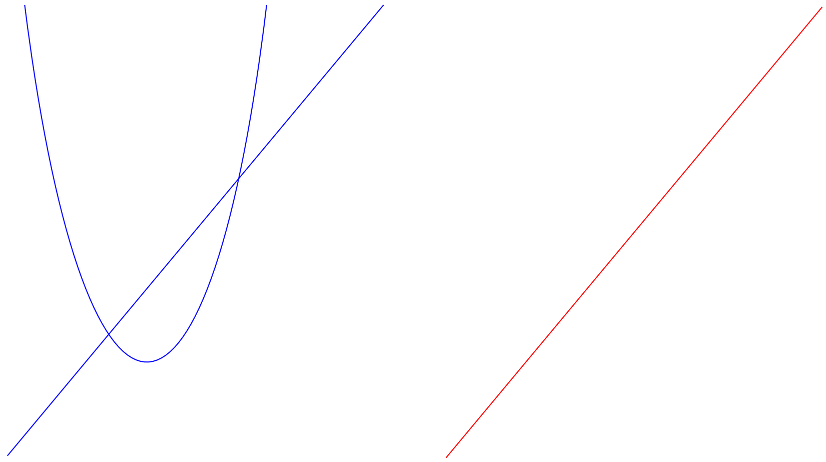
$$\mathcal{V}(\mathfrak{i}) = \mathcal{V}(\sqrt{\mathfrak{i}}) = \mathcal{V}(\sqrt{\mathfrak{j}_1}) = \mathcal{V}(\mathfrak{j}_1) \text{ και } \mathcal{V}(\mathfrak{j}_2) = \emptyset$$

  Για τη δεύτερη, εάν ακολουθήσουμε τη διαδικασία του πρώτου σημείου, θα βρούμε:

$$\mathcal{V}(\mathfrak{i}) = \mathcal{V}(\sqrt{\mathfrak{i}}) = \mathcal{V}(\sqrt{\mathfrak{j}_2}) = \mathcal{V}(\mathfrak{j}_2) \text{ και } \mathcal{V}(\mathfrak{j}_1) = \emptyset$$

Άρα, το $V = \mathcal{V}(\mathfrak{i})$ είναι ανάγωγο. □

Παρατήρηση 3.5. *Εάν f είναι ένα πολυώνυμο, το $V(f)$ είναι ανάγωγο εάν και μόνο αν το f είναι ανάγωγο.*



Η περίπτωση ενός μη-ανάγωγου συνόλου $V = \mathcal{V}\big((y-x)(y-x^2-1)\big)$ (αριστερά) και η περίπτωση ενός ανάγωγου συνόλου $V = \mathcal{V}(y-x)$ (δεξιά).

Ορισμός 3.6 (Τοπολογικοί χώροι της Noether)**.** *Ένας τοπολογικός χώρος $(X, \mathfrak{T})$ λέγεται της Nother εάν κάθε φθίνουσα αλυσίδα κλειστών συνόλων:*

$$A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \cdots$$

είναι τελικά σταθερή. Η ορολογία "της Noether" προκύπτει από την περίπτωση των αλγεβρικών συνόλων: Παίρνοντας ιδεώδη, έχουμε ότι η αύξουσα ακολουθία ιδεωδών:

$$\mathcal{I}(A_1) \subseteq \mathcal{I}(A_2) \subseteq \mathcal{I}(A_3) \subseteq \cdots$$

είναι τελικά σταθερή.

Στην περίπτωσή μας οι $A^n_{\mathbb{K}}$ είναι τοπολογικοί χώροι της Noether, αφού οι $\mathbb{K}[x_1, \cdots, x_n]$ είναι της δακτύλιοι της Noether.

Πρόταση 3.4. *Έστω $(X, \mathfrak{T})$ ένας τοπολογικός χώρος της Noether. Κάθε κλειστό σύνολο $\emptyset \neq V \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ γράφεται ως πεπερασμένη ένωση αναγώγων κλειστών συνόλων.*

$$V = \bigcup_{k=1}^{\ell} V_k$$

Απόδειξη. Προς άτοπο θεωρούμε ότι η κλάση $\mathcal{A}$ των κλειστών $V \neq \emptyset$ που δεν μπορούν να γραφούν ως πεπερασμένη ένωση κλειστών αναγώγων είναι κενή.

Εφόσον ο τοπολογικός χώρος είναι της Noether, μπορούμε να βρούμε ένα στοιχείο V_0 το οποίο είναι ελάχιστο στην $\mathcal{A}$, κι άρα γράφεται:

$$V_0 = V_1 \cup V_2, \ V_1, V_2 \neq \emptyset$$

όπου κάποιο από τα V_1, V_2 δεν είναι ανάγωγα. Αυτό προφανώς είναι άτοπο, αφού τότε το V_0 δεν θα ήταν ελάχιστο. Έπεται ότι $\mathcal{A} = \emptyset$ και κατά συνέπεια το ζητούμενο. □

3.3 Ο δακτύλιος συντεταγμένων και αλγεβρικές πολλαπλότητες

Στην άλγεβρα μία από τις πιο κοινές πρακτικές μελέτης αλγεβρικών (και όχι μόνο) αντικειμένων είναι η μελέτη των αντίστοιχων συναρτήσεων στα εν λόγω αντικείμενα.

Εδώ λοιπόν ας θεωρήσουμε ότι έχουμε ένα αλγεβρικό σύνολο V. Στο V θεωρούμε τον δακτύλιο των πολυωνύμων $\mathbb{K}[V]$, ο οποίος περιέχει όλους τους περιορισμούς των πολυωνύμων του $\mathbb{K}[x_1, \cdots, x_n]$ στο V. Εφόσον δύο πολυώνυμα $f, g \in \mathbb{K}[x_1, \cdots, x_n]$ ταυτίζονται στο V εάν και μόνο αν $f - g \equiv 0$ στο V, έχουμε:

$$\mathbb{K}[V] \cong \left. \mathbb{K}[x_1, \cdots, x_n] \middle/ \mathcal{I}(V) \right.$$

πράγμα που δικαιολογεί τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 3.7 (Δακτύλιος συντεταγμένων)**.** *Έστω $V \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ ένα αλγεβρικό σύνολο. Ο δακτύλιος συντεταγμένων του V είναι το πηλίκο:*

$$\mathbb{K}[V] = \left. \mathbb{K}[x_1, \cdots, x_n] \middle/ \mathcal{I}(V) \right.$$

Η ορολογία “δακτύλιος συντεταγμένων” προέρχεται από την εξής παρατήρηση: Εάν θεωρήσουμε τις διάφορες προβολές (συναρτήσεις συντεταγμένων) $\varphi_k : \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}} \to \mathbb{A}^1_{\mathbb{K}}$, όπου:

$$\varphi_k(x_1, \cdots, x_n) = x_k$$

τότε ο δακτύλιος $\mathbb{K}[V]$ παράγεται από τους περιορισμούς των συναρτήσεων συντεταγμένων $\varphi_k|_V$. Δηλαδή, είναι ένας δακτύλιος που παράγεται από τις συναρτήσεις συντεταγμένων, άρα ένας δακτύλιος συντεταγμένων.

Παρατήρηση 3.6. *Ένα αλγεβρικό σύνολο $V \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ είναι ανάγωγο εάν και μόνο αν ο δακτύλιος συντεταγμένων είναι ακέραια περιοχή.*

Απόδειξη. Πράγματι, είδαμε ήδη ότι το V είναι ανάγωγο εάν και μόνο αν το $\mathcal{I}(V)$ είναι πρώτο, οπότε εάν και μόνο αν ο:

$$\mathbb{K}[V] = \left. \mathbb{K}[x_1, \cdots, x_n] \middle/ \mathcal{I}(V) \right.$$

είναι ακέραια περιοχή. □

Ορισμός 3.8 (Μορφισμοί αλγεβρικών συνόλων)**.** *Έστω $V \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$, $W \subseteq \mathbb{A}^m_{\mathbb{K}}$ δύο αλγεβρικά σύνολα. Μία συνάρτηση $\varphi : V \to W$ λέγεται μορφισμός μεταξύ των αλγεβρικών συνόλων V, W, εάν υπάρχουν πολυώνυμα $\{f_k\}_{k=1}^m \subseteq \mathbb{K}[x_1, \cdots, x_n]$ ούτως ώστε για κάθε $(v_1, \cdots, v_n) \in V$:*

$$\varphi(v_1, \cdots, v_n) = \big(f_1(v_1, \cdots, v_n), \cdots, f_m(v_1, \cdots, v_n)\big) \in W$$

Δηλαδή η φ απεικονίζει μέσω “πολυωνυμικής αλλαγής μεταβλητής” το V σε ένα τμήμα του W. Τα f_k, $k \leqslant m$, δεν είναι κατ' ανάγκη μονοσήμαντα ορισμένα.

Ορισμός 3.9 (Ανάσυρση-Pullback)**.** *Δεδομένης μίας συνάρτησης $\varphi : V \to W$ μεταξύ αλγεβρικών συνόλων $V \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$, $W \subseteq \mathbb{A}^m_{\mathbb{K}}$, υπάρχει ένας πολύ φυσιολογικός τρόπος να μεταβούμε μεταξύ των δακτυλίων συντεταγμένων, που είναι η ανάσυρση (pullback). Ορίζουμε:*

$$\varphi^\sharp : \mathbb{K}[W] \to \mathbb{K}[V] \text{ με } \varphi^\sharp\big(f + \mathcal{I}(W)\big) = f \circ \varphi + \mathcal{I}(V)$$

Πρόταση 3.5. *Μία συνάρτηση $\varphi : V \to W$, $V \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$, $W \subseteq \mathbb{A}^m_{\mathbb{K}}$ αλγεβρικά σύνολα, είναι μορφισμός εάν και μόνο αν η ανάσυρση $\varphi^\sharp : \mathbb{K}[W] \to \mathbb{K}[V]$ είναι ομομορφισμός δακτυλίων.*

Στην πραγματικότητα η παραπάνω πρόταση δίνει έναν ισοδύναμο ορισμό των μορφισμών, που δεν εξαρτάται από τα πολυώνυμα f_k, $k \leqslant m$.

Απόδειξη. ($\Rightarrow$) Εάν ο $\varphi : V \to W$ είναι μορφισμός αλγεβρικών συνόλων, τότε:

$$\varphi(v_1, \cdots, v_n) = \big(f_1(v_1, \cdots, v_n), \cdots, f_m(v_1, \cdots, v_n)\big),\ f_k \in \mathbb{K}[x_1, \cdots, x_n]$$

και επιπλέον η:

$$\varphi^\sharp\big(f + \mathcal{I}(W)\big) = f(f_1, \cdots, f_m) + \mathcal{I}(W)$$

είναι καλά ορισμένη και ομομορφισμός.

($\Leftarrow$) Αντιστρόφως, γράφουμε:

$$\mathbb{K}[V] = \mathbb{K}[x_1, \cdots, x_n] \big/ \mathcal{I}(V),\ \mathbb{K}[W] = \mathbb{K}[y_1, \cdots, y_m] \big/ \mathcal{I}(W)$$

και θεωρούμε τις απεικονίσεις πηλίκο:

$$\pi_V : \mathbb{K}[x_1, \cdots, x_n] \to \mathbb{K}[V],\ \pi_W : \mathbb{K}[y_1, \cdots, y_m] \to \mathbb{K}[W]$$

Παρατηρούμε τότε ότι:

$$\varphi^\sharp \circ \pi_W(y_k) = y_k \circ \varphi + \mathcal{I}(W) = \varphi_k + \mathcal{I}(W)$$

με τις φ_k να είναι πολυώνυμα. Δεν είναι δύσκολο κανείς να διαπιστώσει ότι για οποιαδήποτε επιλογή αντιπροσώπων φ_k:

$$\varphi = (\varphi_1, \cdots, \varphi_m)$$

□

Ορισμός 3.10 (Ισομορφισμοί αλγεβρικών συνόλων)**.** *Έστω $\varphi : V \to W$ ένας μορφισμός μεταξύ των αλγεβρικών συνόλων $V \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$, $W \subseteq \mathbb{A}^m_{\mathbb{K}}$ και $\varphi^\sharp : \mathbb{K}[W] \to \mathbb{K}[V]$ η ανάσυρση. Εάν η φ είναι αμφιμονοσήμαντη και η $\varphi^\sharp$ ισομορφισμός δακτυλίων, τα V, W θα καλούνται ισόμορφα.*

Έχουμε ήδη δει, μέσω του ασθενούς θεωρήματος Nullstellensatz, ότι τα μεγιστικά ιδεώδη του $\mathbb{K}[x_1, \cdots, x_n]$ είναι ακριβώς τα:

$$\langle x_1 - a_1, \cdots, x_n - a_n \rangle$$

στην περίπτωση του αλγεβρικά κλειστού σώματος $\mathbb{K}$. Είναι επίσης φανερό ότι μπορεί να υπάρξει μία αντιστοιχία μεταξύ των μεγιστικών ιδεωδών του $\mathbb{K}[x_1, \cdots, x_n]$ και των σημείων του $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$. Ειδικότερα, κάθε σημείο ενός αλγεβρικού συνόλου V αντιστοιχεί σε ένα μεγιστικό ιδεώδες.

Το ερώτημα που θα μας απασχολήσει σε γενικές γραμμές είναι εάν τα στοιχεία του V μπορούν να περιγραφούν από τα μεγιστικά ιδεώδη του δακτυλίου συντεταγμένων. Η απάντηση που θα δώσουμε είναι καταφατική. Θα δούμε ότι, εάν:

$$\pi : \mathbb{K}[x_1, \cdots, x_n] \to \mathbb{K}[V]$$

είναι η απεικόνιση πηλίκο, τότε τα $\pi(\mathfrak{m})$, $\pi^{-1}(\overline{\mathfrak{m}})$ είναι αμφότερα μεγιστικά ιδεώδη, όπου τα $\mathfrak{m} \trianglelefteq \mathbb{K}[x_1, \cdots, x_n]$, $\overline{\mathfrak{m}} \trianglelefteq \mathbb{K}[V]$ είναι μεγιστικά και $\mathcal{V}(\pi^{-1}(\overline{\mathfrak{m}})) \subseteq V$. Πρώτα όμως χρειαζόμαστε λίγη προετοιμασία.

Σημειώνουμε ότι εν γένει, αν R, S είναι δύο δακτύλιοι και $\varphi : R \to S$ ομομορφισμός, τα μεγιστικά ιδεώδη του S δεν αντιστρέφονται σε μεγιστικά ιδεώδη του R, όπως στην περίπτωση όπου $R = \mathbb{Z}$, $S = \mathbb{K}$ σώμα, $\varphi = \mathrm{i} : R \hookrightarrow S$ και $\overline{\mathfrak{m}} = 0 \trianglelefteq \mathbb{K}$.

Λήμμα 3.2. *Έστω R, S δακτύλιοι και $\varphi : R \to S$ ομομορφισμός δακτυλίων. Εάν $\mathfrak{p} \trianglelefteq S$ είναι πρώτο ιδεώδες, τότε το $\varphi^{-1}(\mathfrak{p})$ είναι πρώτο ιδεώδες.*

Απόδειξη. Η απεικόνιση:

$$\psi : \ {}^{R}\!\big/_{\varphi^{-1}(\mathfrak{p})} \to {}^{S}\!\big/_{\mathfrak{p}} \text{ με } r + \varphi^{-1}(\mathfrak{p}) \mapsto \varphi(r) + \mathfrak{p}$$

είναι μονομορφισμός, και κατά συνέπεια:

$${}^{R}\!\big/_{\varphi^{-1}(\mathfrak{p})} \cong {}^{S/\mathfrak{p}}\!\big/_{\ker\psi}$$

δηλαδή το πρώτο είναι υποδακτύλιος μίας ακέραιας περιοχής. Κατά συνέπεια, είναι ακέραια περιοχή κι άρα το $\varphi^{-1}(\mathfrak{p})$ είναι πρώτο. □

Λήμμα 3.3. *Εάν το R είναι ακέραια περιοχή και κάθε $r \in R$ είναι αλγεβρικό υπεράνω του $\mathbb{K}$, τότε το R είναι αναγκαστικά σώμα.*

Απόδειξη. Θεωρούμε $r \in R$. Εφόσον το r είναι αλγεβρικό, θεωρούμε το ανάγωγο πολυώνυμο $\mathrm{Irr}(r, \mathbb{K})$, που είναι το ελάχιστο μονικό πολυώνυμο του $\mathbb{K}[x_1, \cdots, x_n]$ που έχει ρίζα το r. Παρατηρούμε ότι:

$${}^{\mathbb{K}[x_1, \cdots, x_n]}\!\big/_{\langle \mathrm{Irr}(r, \mathbb{K}) \rangle} = \mathbb{K}[r]$$

με το $\mathcal{I}(r) = \langle \mathrm{Irr}(r, \mathbb{K}) \rangle$ να είναι μεγιστικό, κι άρα το $\mathbb{K}[r]$ είναι σώμα.

- Εάν $\deg \mathrm{Irr}(r, \mathbb{K}) = 1$, τότε $\mathbb{K}[r] = \mathbb{K}$ και το r είναι αντιστρέψιμο. Η ισότητα $\mathbb{K}[r] \cong \mathbb{K}$ (για την ακρίβεια η ισομορφία $\mathbb{K}[r] = \mathbb{K}$) προκύπτει από τη μελέτη της συνάρτησης εκτίμησης ev_r στο r.

$$\mathrm{ev}_r : \mathbb{K}[x_1, \cdots, x_n] \to \mathbb{K}, \ f \mapsto f(r)$$

Εφόσον $\ker \mathrm{ev}_r = \langle \mathrm{Irr}(r, \mathbb{K}) \rangle$, έπεται:

$$\mathbb{K}[r] = {\mathbb{K}[x_1, \cdots, x_n]} \Big/ {\langle \mathrm{Irr}(r, \mathbb{K}) \rangle} = {\mathbb{K}[x_1, \cdots, x_n]} \Big/ {\ker \mathrm{ev}_r} \cong \mathbb{K}$$

- Εάν $\deg \mathrm{Irr}(r, \mathbb{K}) > 1$, τότε, αφού το $\mathbb{K}[r] = \mathbb{K}[x_1, \cdots, x_n]/\langle \mathrm{Irr}(r, \mathbb{K}) \rangle$ είναι σώμα, υπάρχει $f \in \mathbb{K}[x_1, \cdots, x_n]$ με:

$$f \cdot x + \langle \mathrm{Irr}(r, \mathbb{K}) \rangle = 1 + \langle \mathrm{Irr}(r, \mathbb{K}) \rangle$$

Επομένως το $f(r)$ είναι το αντίστροφο στοιχείο του r, κι άρα το R είναι σώμα.

$\square$

Πρόταση 3.6. *Έστω $V \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$, $W \subseteq \mathbb{A}^m_{\mathbb{K}}$ δύο αλγεβρικά σύνολα και $\psi : \mathbb{K}[W] \to \mathbb{K}[V]$ ένας ομομορφισμός μεταξύ των δακτυλίων συντεταγμένων. Υποθέτουμε ότι το $\mathbb{K}[W]$ είναι ακέραια περιοχή. Ισχύει ότι, εάν το $\mathfrak{m} \trianglelefteq \mathbb{K}[V]$ είναι μέγιστο ιδεώδες, τότε το $\psi^{-1}(\mathfrak{m}) \trianglelefteq \mathbb{K}[W]$ είναι μέγιστο ιδεώδες.*

Απόδειξη. Καταρχάς, παρατηρούμε ότι η απεικόνιση:

$$\overline{\psi} : {\mathbb{K}[W]} \Big/ {\psi^{-1}(\mathfrak{m})} \to {\mathbb{K}[V]} \Big/ {\mathfrak{m}}, \ f + \psi^{-1}(\mathfrak{m}) \mapsto \psi(f) + \mathfrak{m}$$

είναι μονομορφισμός, οπότε δεν βλάπτει να υποθέσουμε τον εγκλεισμό:

$$ {\mathbb{K}[W]} \Big/ {\psi^{-1}(\mathfrak{m})} \hookrightarrow {\mathbb{K}[V]} \Big/ {\mathfrak{m}}$$

Η στρατηγική μας έχει ως εξής: Αφού το $\mathfrak{m}$ είναι μέγιστο, το $\mathbb{K}[V]/\mathfrak{m}$ είναι σώμα. Μάλιστα είναι αλγεβρικά κλειστό, αφού όπως στο προηγούμενο Λήμμα 3.3:

$${\mathbb{K}[V]} \Big/ {\mathfrak{m}} \cong \mathbb{K}[r]$$

και η $\mathbb{K}[r]$ είναι επέκταση του $\mathbb{K}$. Επιπλέον, το $\mathfrak{m}$ είναι πρώτο (ως μεγιστικό) και κατά συνέπεια το $\psi^{-1}(\mathfrak{m})$ είναι πρώτο. Δηλαδή το $\mathbb{K}[W]/\psi^{-1}(\mathfrak{m})$ είναι ακέραια περιοχή.

Συνοψίζοντας, το $\mathbb{K}[W]/\psi^{-1}(\mathfrak{m})$ είναι ακέραια περιοχή που εμφυτεύεται στο αλγεβρικά κλειστό σώμα $\mathbb{K}[r]$, επομένως από το προηγούμενο Λήμμα 3.3, το $\mathbb{K}[W]/\psi^{-1}(\mathfrak{m})$ είναι σώμα. Άρα το $\psi^{-1}(\mathfrak{m})$ είναι μεγιστικό. $\square$

Θεώρημα 3.3. *Έστω $\mathbb{K}$ ένα αλγεβρικά κλειστό σώμα. Για κάθε αλγεβρικό σύνολο $V \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ υπάρχει μία αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ των σημείων του V και των μεγιστικών ιδεωδών του $\mathbb{K}[V]$.*

$$(a_1, \cdots, a_n) \leftrightarrow \big\langle x_1 - a_1 + \mathcal{I}(V), \cdots, x_n - a_n + \mathcal{I}(V)\big\rangle$$

Απόδειξη. Θεωρούμε $\mathfrak{m}_a \trianglelefteq \mathbb{K}[V]$ το μεγιστικό ιδεώδες:

$$\mathfrak{m}_a = \langle x_1 - a_1, \cdots, x_n - a_n\rangle$$

Από τα προηγούμενα έπεται ότι η $(\varphi^\sharp)^{-1}$ απεικονίζει το $\mathfrak{m}_a$ σε μεγιστικό ιδεώδες, το οποίο θα πρέπει να έχει τη μορφή:

$$(\varphi^\sharp)^{-1}(\mathfrak{m}_a) = \big\langle y_1 - f_1(a_1, \cdots, a_n), \cdots, y_m - f_m(a_1, \cdots, a_n)\big\rangle$$

όπου f_k, $k \leqslant m$, είναι οι συντεταγμένες του μορφισμού του οποίου η $\varphi^\sharp$ είναι ανάσυρση.

$$\varphi(v_1, \cdots, v_n) = \big(f_1(v_1, \cdots, v_n), \cdots, f_m(v_1, \cdots, v_n)\big)$$

Ο τελευταίος ισχυρισμός επαλυθεύεται σε γενικές γραμμές ως εξής: Καταρχάς:

$$y_k - f_k(a_1, \cdots, a_n) = f(v_1, \cdots, v_n) - f(a_1, \cdots, a_n)$$

Εφόσον το:

$$y_k - f_k(a_1, \cdots, a_n) = f(v_1, \cdots, v_n) - f(a_1, \cdots, a_n)$$

μηδενίζεται στο $(a_1, \cdots, a_n)$, έχουμε $y_k - f_k(a_1, \cdots, a_n) \in \mathcal{I}\big(\mathcal{V}(\mathfrak{m}_a)\big) = \sqrt{\mathfrak{m}_a} = \mathfrak{m}_a$, και κατά συνέπεια $y_k - f_k(a_1, \cdots, a_n) \in (\varphi^\sharp)^{-1}(\mathfrak{m}_a)$. Έτσι:

$$\big\langle y_1 - f_1(a_1, \cdots, a_n), \cdots, y_m - f_m(a_1, \cdots, a_n)\big\rangle \subseteq (\varphi^\sharp)^{-1}(\mathfrak{m}_a)$$

με το αριστερό να είναι μέγιστο ιδεώδες. Έπεται η ισότητα. □

Ορισμός 3.11 (Αφινικές αλγεβρικές πολλαπλότητες). *Έστω $\mathbb{K}$ ένα αλγεβρικά κλειστό σώμα και $V \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ μία αλγεβρική πολλαπλότητα. Το ζεύγος $(V, \mathbb{K}[V])$ θα καλείται αφινική αλγεβρική πολλαπλότητα. Οι ομομορφισμοί μεταξύ των αφινικών αλγεβρικών πολλαπλοτήτων είναι της μορφής:*

$$(\varphi, \varphi^\sharp) : (V, \mathbb{K}[V]) \to (W, \mathbb{K}[W])$$

όπου $\varphi : V \to W$ και $\varphi^\sharp : \mathbb{K}[W] \to \mathbb{K}[V]$ ομομορφισμός $\mathbb{K}-$αλγεβρών με:

$$(\varphi^\sharp)^{-1}(\mathfrak{m}_a) = \mathfrak{m}_{\varphi(a)}$$

Γενικά συμβολίζουμε με $\mathfrak{m}_c$ τα μέγιστα ιδεώδη (όπου κι αν αυτά ανήκουν) που αντιστοιχούν στο c. Η συνθήκη που συσχετίζει τις $\varphi, \varphi^\sharp$ είναι μία συνθήκη “συμβατότητας”.

Ο ορισμός αυτός θα μας οδηγήσει αργότερα σε μία γενικευμένη έννοια αλγεβρικών πολλαπλοτήτων. Ως τώρα πάντοτε προϋποθέταμε μία εμφύτευση σε αφινική πολλαπλότητα, πράγμα που (ιδίως στη γεωμετρία) αποφεύγεται. Η παραπάνω ανάλυση δικαιολογεί τη μελέτη του δακτυλίου των μεγιστικών ιδεωδών $\operatorname{Spm} \mathbb{K}[V]$ του $\mathbb{K}[V]$ αντί του V.

3.4 Γενικευμένες αλγεβρικές πολλαπλότητες

Αντικαθιστώντας τον δακτύλιο $\mathbb{K}[V]$ από έναν οποιονδήποτε δακτύλιο, παίρνουμε τα ακόλουθα.

Ορισμός 3.12. *Έστω R ένας αντιμεταθετικός δακτύλιος. Συμβολίζουμε με $\mathrm{Spm}\ R$ το σύνολο των μεγιστικών ιδεωδών του R.*

Ορισμός 3.13 (Γενικευμένες αλγεβρικές πολλαπλότητες)**.** *Έστω R μία πεπερασμένα παραγόμενη $\mathbb{K}-$άλγεβρα, χωρίς να απαιτούμε την ανυπαρξία μηδενοδύναμων στοιχείων. Το ζεύγος $(\mathrm{Spm}\ R, R)$ θα καλείται γενικευμένη αλγεβρική πολλαπλότητα.*

Στις αλγεβρικές πολλαπλότητες το $\mathrm{Spm}\ \mathbb{K}[V]$ είχε τον ρόλο των σημείων, ενώ το $\mathbb{K}[V]$ τον ρόλο των συναρτήσεων σε αυτό το σύνολο σημείων. Στις γενικευμένες αλγεβρικές πολλαπλότητες, δεν είναι εμφανές γιατί ο τυχαίος δακτύλιος R μπορεί να θεωρηθεί ως δακτύλιος συναρτήσεων, κι οπότε χρειαζόμαστε κάποια αιτιολόγιση.

Έστω $(\mathrm{Spm}\ R, R)$ μία γενικευμένη αλγεβρική πολλαπλότητα. Εάν $R = \mathbb{K}[V]$, $V \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$, τότε οι συναρτήσεις του $\mathbb{K}[V]$ μπορούν να ταυτιστούν με τις αναγωγές modulo $\mathfrak{m}$, όπου το $\mathfrak{m} \trianglelefteq \mathbb{K}[V]$ είναι μεγιστικό. Πράγματι, εάν θεωρήσουμε ένα σημείο $a = (a_1, \cdots, a_n) \in V$ και το αντίστοιχο σημείο-ιδεώδες $\mathfrak{m} = \langle x_1 - a_1, \cdots, x_n - a_n \rangle \in \mathrm{Spm}\ \mathbb{K}[V]$, τότε:

$$f(a) = f(x) \mod \mathfrak{m}$$

οπότε ο υπολογισμός της τιμής $f(a)$ ανάγεται στον υπολογισμό του $f \mod \mathfrak{m}$. Γενικά δίνουμε τον ακόλουθο ορισμό:

Ορισμός 3.14 (Ο δακτύλιος των συναρτήσεων στις γενικευμένες αλγεβρικές πολλαπλότητες)**.** *Έστω $(\mathrm{Spm}\ R, R)$ μία γενικευμένη αφινική πολλαπλότητα. Ο δακτύλιος R μπορεί να ειδωθεί ως δακτύλιος συναρτήσεων στα μεγιστικά ιδεώδη του R, με την έννοια ότι κάθε $r \in R$ ορίζει συνάρτηση $\mathfrak{m} \mapsto R/\mathfrak{m} \cong \mathbb{K}$:*

$$f(\mathfrak{m}) = r \mod \mathfrak{m}$$

Η τοπολογία που δίνεται στις γενικευμένες αφινικές πολλαπλότητες είναι η αναμενόμενη γενίκευση της τοπολογίας Zariski. Στην κλασική περίπτωση, υπενθυμίζουμε ότι έχουμε ορίσει τα ανοικτά σύνολα:

$$\mathcal{V}(\mathfrak{i})^c = \bigcup_{k \in I} \{x \in \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}} \mid f_k(x) \neq 0\},\ \mathfrak{i} = \langle \{f_k\}_{k \in I} \rangle$$

Λαμβάνοντας υπόψη τα παραπάνω, και συγκεκριμένα τη μορφή των συναρτήσεων στις γενικευμένες αφινικές πολλαπλότητες, θέλουμε στη γενικότερη περίπτωση τα σύνολα $\mathcal{V}(f_k)^c$ να περιέχουν τα σημεία που δεν μηδενίζουν τις $r_k \in R$. Δηλαδή, θέλουμε τα ιδεώδη $\mathfrak{m}$ για τα οποία $r_k \mod \mathfrak{m} \neq 0$, και κατά συνέπεια $r_k \notin \mathfrak{m}$.

$$\mathcal{V}(f_k) \leftrightarrow \mathcal{V}(r_k)^c = \{\mathfrak{m} \in \mathrm{Spm}\ R \mid r_k \notin \mathfrak{m}\}$$

Ορισμός 3.15 (Τοπολογία Zariski σε γενικευμένες αφινικές πολλαπλότητες)**.** *Έστω* (Spm R, R) *μία γενικευμένη αφινική πολλαπλότητα. Ορίζουμε την τοπολογία Zariski* $\mathfrak{T}$ *με βάση:*

$$\mathcal{B} = \{\mathcal{V}(r)^c \mid r \in R\}$$

όπου:

$$\mathcal{V}(r)^c = \{\mathfrak{m} \in \operatorname{Spm} R \mid r \notin \mathfrak{m}\}$$

Δηλαδή τα ανοικτά είναι τα σύνολα της μορφής:

$$\bigcup_{k \in I} \mathcal{V}(r_k)^c$$

Η απόδειξη ότι το $\mathfrak{T}$ είναι πράγματι τοπολογία είναι υπόθεση ρουτίνας και παραλείπεται.

Δεν θα σταθούμε στις γενικευμένες αλγεβρικές πολλαπλότητες, καθώς αργότερα θα γενικεύσουμε αυτήν την έννοια πολλαπλοτήτων σε πρώτα ιδεώδη αντί των μεγίστων. Αυτή δεν είναι καθόλου αυθαίρετη γενίκευση, και μάλιστα είναι απολύτως φυσιολογική, εάν (λόγου χάρη) κανείς ασχολείται με διοφαντικές εξισώσεις, στις οποίες ο δακτύλιος υπό μελέτη είναι αυτός των ακεραίων $\mathbb{Z}$. Εκεί τα πρώτα ιδεώδη είναι πλούσια σε σχέση με τα μεγιστικά, που είναι μονάχα δύο.

3.5 Τομές καμπυλών και ιδιομορφίες

Σημείωση 2

Κεφάλαιο 4

Προβολικές πολλαπλότητες

4.1 Προβολική γεωμετρία

Πριν δώσουμε τους ορισμούς για τις προβολικές πολλαπλότητες, θεωρούμε ότι είναι σημαντικό να αναφερθούμε σύντομα σε στοιχεία της προβολικής γεωμετρίας.

Η μελέτη των μη-ευκλείδειων γεωμετριών ήταν σημαντικής φιλοσοφικής αξίας από τους μαθηματικούς της αρχαιότητας κι έπειτα. Στόχος αρχικά ήταν η απόδειξη ή η διάψευση του 5ου αιτήματος του Ευκλείδη, κατά το οποίο για κάθε ευθεία και κάθε εξωτερικό σημείο, μπορεί να φερθεί παράλληλη προς την ευθεία. Πρώτος που έφτασε σε άτοπο δεδομένης της άρνησης του 5ου αιτήματος ήταν ο Saccheri, δείχνοντας με τα αξιώματα της ευκλείδειας γεωμετρίας συν την άρνηση του 5ου αιτήματος ότι τα τρίγωνα δεν έχουν άθροισμα γωνιών 180 μοίρες. Ο ίδιος βέβαια δεν κατάλαβε την αξία του αποτελέσματός του και θεώρησε ότι αυτά που έκανε ήταν ασυναρτησίες. Η συστηματική μελέτη και ανακάλυψη της υπερβολικής γεωμετρίας ήρθε αρκετά αργότερα, το 1830, από τους Bolyai και Lobachevski. Η φιλοσοφική αξία είναι φυσικά ότι δεν υπάρχει μόνο μία “σωστή” ή “αληθής” γεωμετρία, αλλά καθεμία είναι ανεξάρτητη πάνω στο αξιωματικό της πλαίσιο. Για περισσότερα παραπέμπουμε στο [Φρ21].

Μία άλλη μη-ευκλείδεια γεωμετρία στην πραγματικότητα είχε χρησιμοποιηθεί νωρίτερα, από τους ζωγράφους της αναγέννησης, και ήταν η προβολική γεωμετρία. Η απεικόνιση του βάθους προϋποθέτει τη σύγκλιση φαινομενικά παράλληλων ευθειών, κι οπότε στην ουσία απαιτεί μία γεωμετρία στην οποία δεν υπάρχουν παράλληλες ευθείες. Αυτή δεν είναι ακριβώς η άρνηση του 5ου αιτήματος, αλλά σε κάθε περίπτωση συνηστά μία μη-ευκλείδεια γεωμετρία.

Στη συνέχεια θα αναφέρουμε μερικά στοιχεία προβολικής γεωμετρίας, επιγραμματικά. Για περισσότερα παραπέμπουμε στο [Βα09].

Ορισμός 4.1 (Αφινικό επίπεδο). *Ένα αφινικό επίπεδο είναι μία τριάδα $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \in)$, όπου:*

1. *Το $\mathcal{P}$ είναι ένα μη κενό σύνολο, το οποίο ονομάζεται σύνολο σημείων,*

2. *Το $\mathcal{L}$ είναι ένα μη κενό σύνολο, το οποίο ονομάζεται σύνολο ευθειών,*

3. *Η $\in$ είναι μία σχέση μεταξύ των $P \in \mathcal{P}$, $\ell \in \mathcal{L}$, η οποία ονομάζεται σχέση του ανήκειν.*

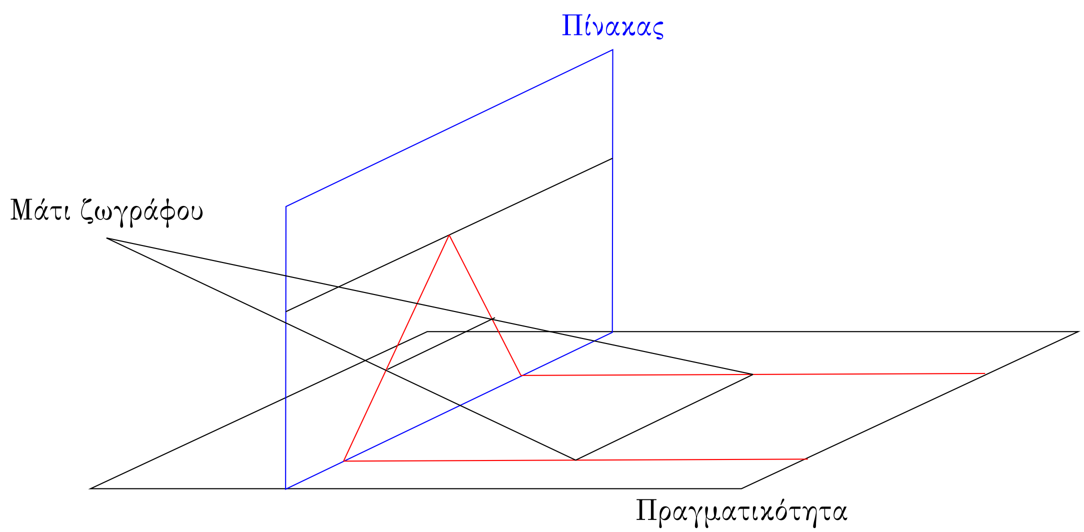
Επιπλέον, ικανοποιούνται τα αξιώματα:

1. *Για κάθε $P, Q \in \mathcal{P}$ υπάρχει μοναδική $\ell \in \mathcal{L}$ ούτως ώστε $P, Q \in \ell$.*

2. *Έστω $P \in \mathcal{P}$ και $\ell \in \mathcal{L}$ με $P \notin \ell$. Τότε από το P διέρχεται μοναδική παράλληλη m προς την ℓ, που περιέχει το P. Δηλαδή υπάρχει μοναδική $m \in \mathcal{L}$ με $P \in m$ και δεν υπάρχει $Q \in \ell$, $Q \in m$.*

3. *Υπάρχουν τουλάχιστον τρία σημεία, τα οποία είναι διαφορετικά μεταξύ τους και μη συγγραμικά. Δηλαδή δεν υπάρχει $\ell \in \mathcal{L}$ με $P, Q, R \in \ell$.*

Προσέξτε ότι τα $\mathcal{P}$, $\mathcal{L}$, $\in$ είναι αυθαίρετα ορισμένα, κι οπότε η διαισθητική ερμηνεία που τους δίνουμε εξαρτάται από εμάς. Για παράδειγμα, αντί για σημεία και ευθείες, θα δούμε αργότερα ότι μπορούμε να ασχολούμαστε με ευθείες και επίπεδα. Το σύνολο των ευθειών έχει τον ρόλο των σημείων και το σύνολο των επιπέδων έχει τον ρόλο των ευθειών.



Ορισμός 4.2 (Προβολικά επίπεδα)**.** *Ένα προβολικό επίπεδο είναι μία τριάδα $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \in)$, όπου τα $\mathcal{P}$, $\mathcal{L}$, όπου:*

1. *Το $\mathcal{P}$ είναι ένα μη κενό σύνολο, το οποίο ονομάζεται σύνολο σημείων,*

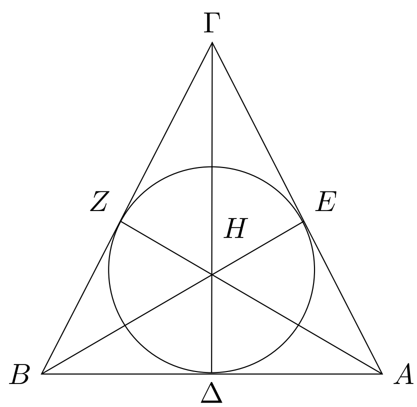
2. *Το $\mathcal{L}$ είναι ένα μη κενό σύνολο, το οποίο ονομάζεται σύνολο ευθειών,*

3. *Η $\in$ είναι μία σχέση μεταξύ των $P \in \mathcal{P}$, $\ell \in \mathcal{L}$, η οποία ονομάζεται σχέση του ανήκειν.*

Επιπλέον, ικανοποιούνται τα αξιώματα:

1. *Για κάθε $P, Q \in \mathcal{P}$ υπάρχει μοναδική $\ell \in \mathcal{L}$ ούτως ώστε $P, Q \in \ell$.*
2. *Για οποιεσδήποτε $\ell, m \in \mathcal{L}$ υπάρχει κοινό σημείο $P \in \ell$, $P \in m$. Δηλαδή, δεν υπάρχουν παράλληλες.*
3. *Υπάρχουν τουλάχιστον τέσσερα σημεία, τα οποία ανά τρία είναι μη συγγραμικά.*

Δεν είναι δύσκολο κανείς να δείξει ότι το μικρότερο αφινικό επίπεδο έχει ισχύ $|\mathcal{P}| = 4$ (είναι το τετράγωνο), ενώ το μικρότερο προβολικό έχει ισχύ $|\mathcal{P}| = 7$. Μάλιστα το μικρότερο προβολικό επίπεδο ονομάζεται "το προβολικό επίπεδο του Fano" και απεικονίζεται παρακάτω.



Όλες οι ευθείες είναι ευθύγραμμα τμήματα, εκτός από μία, που είναι κύκλος.

4.2 Αφινικές και προβολικές πολλαπλότητες μέσω των αντίστοιχων επιπέδων

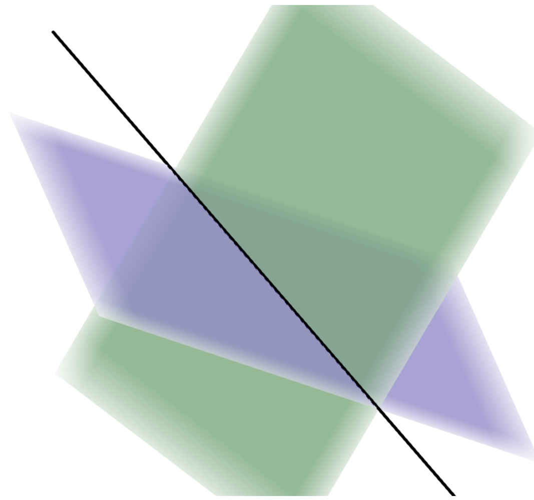
Τα πεπερασμένα αφινικά και προβολικά επίπεδα είναι χρήσιμα στην συνδυαστική, αλλά εάν κανείς θέλει να ενσωματώσει αναλυτικά ή γεωμετρικά εργαλεία, πρέπει κατ' ανάγκη να μεταβεί σε μία γενικότερη περίπτωση.

Τα αφινικά επίπεδα έχουν συνεχές ανάλογο (όταν λόγου χάρη $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$), και μάλιστα το έχουμε δει ήδη: είναι οι αφινικές πολλαπλότητες:

$$\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}} = \{(x_1, \cdots, x_n) \mid x_k \in \mathbb{K}\}$$

Δηλαδή το σύνολο των σημείων είναι $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$, οι ευθείες είναι κατά την συνήθη έννοια, κι επιπλέον το ανήκει είναι το συνολοθεωρητικό.

Για την προβολική περίπτωση, θα ασχοληθούμε πρώτα με τις δύο διαστάσεις και το $\mathbb{P}^2_{\mathbb{K}}$, όπου $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Η ιδέα εδώ είναι να θεωρήσουμε όχι σημεία και ευθείες με τη συνήθη έννοια, αλλά ευθείες και επίπεδα που είναι γραμμικοί υπόχωροι. Οι ευθείες περιέχονται στα επίπεδα, όπως τα σημεία περιέχονται στις ευθείες. Επιπλέον, η τομή δύο επιπέδων είναι μία ευθεία, όπως η τομή δύο ευθειών είναι σημείο.



Ορισμός 4.3 (Γεωμετρικός ορισμός του $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$). *Ορίζουμε το πραγματικό προβολικό επίπεδο* $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ *ως εξής:*

1. *Τα σημεία* $\mathcal{P}$ *είναι οι υπόχωροι διάστασης* 1 *του* $\mathbb{R}^3$, *δηλαδή τα σύνολα:*
$$\operatorname{span}(a_1, a_2, a_3)$$
2. *Οι ευθείες* $\mathcal{L}$ *είναι οι υπόχωροι διάστασης* 2 *του* $\mathbb{R}^3$, *δηλαδή τα σύνολα:*
$$\operatorname{span}\{(a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3)\} = \operatorname{span}^{\perp}(a_1, a_2, a_3) \times (b_1, b_2, b_3)$$
(με $\times$ *συμβολίζουμε το εξωτερικό γινόμενο διανυσμάτων).*
3. *Η σχέση του ανήκειν είναι ο εκλεισμός* $\subseteq$.

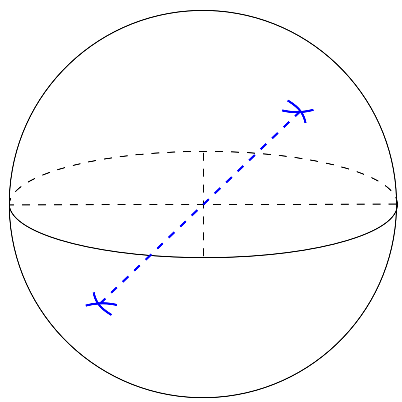
Είναι φανερό ότι το παραπάνω ορίζει πράγματι ένα προβολικό επίπεδο. Ένας άλλος τρόπος ορισμού, που κατά μία έννοια είναι περισσότερο εποπτικός, αντικαθιστά τις ευθείες από σημεία και τα επίπεδα από ευθείες. Η ιδέα είναι ότι οι υπόχωροι που χρησιμοποιούμε για τον ορισμό του $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$, εάν περιοριστούν στη σφαίρα, γίνονται μίας διάστασης λιγότερη, δηλαδή οι ευθείες γίνονται ένα ζευγάρι σημείων και τα επίπεδα γίνονται ζεύγη τόξων που ενώνουν τα σημεία. Επομένως, ένας άλλος ορισμός είναι ο εξής:

Ορισμός 4.4 (Εναλλακτικός ορισμός του $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$). *Στον* $\mathbb{R}^3\backslash\{0\}$ *ορίζουμε τη σχέση ισοδυναμίας:*
$$(a_1, a_2, a_3) \sim (b_1, b_2, b_3) \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \text{ τέτοιο ώστε } (a_1, a_2, a_3) = \lambda(b_1, b_2, b_3)$$
και θεωρούμε το σύνολο πηλίκο $(\mathbb{R}^3\backslash\{0\})/\sim$. *Το πραγματικό προβολικό επίπεδο* $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ *μπορεί εναλλακτικά να οριστεί ως εξής:*

1. *Οι κλάσεις των $[a]$ σημείων $a = (a_1, a_2, a_3)$ αποτελούν τα σημεία του $\mathcal{P}$. Τις κλάσεις των σημείων μπορούμε να τις φανταζόμαστε σαν τις προβολές του σημείου στη σφαίρα $\mathbb{S}^2$, και στα δύο ημισφαίρια (αφού οι αντιπρόσωποι της κλάσης είναι οι (a_1, a_2, a_3) αλλά και οι $-(a_1, a_2, a_3)$).*

2. *Τα σύνολα:*
$$\langle b \rangle = \{[a] \in \mathcal{P} \mid b_1a_1 + b_2a_2 + b_3a_3 = 0\}$$
αποτελούν τις ευθείες του $\mathcal{L}$. Οι ευθείες αυτές είναι ουσιαστικά τα επίπεδα που είναι κάθετα το $b = (b_1, b_2, b_3)$, από τα οποία διαλέγουμε έναν αντιπρόσωπο από κάθε κλάση σημείου κι όχι όλα τα σημεία. Δηλαδή, μπορούμε να σκεφτόμαστε ότι διαλέγουμε μόνο σημεία πάνω στη σφαίρα για αντιπροσώπους, άρα η ευθεία γίνεται ένα ζεύγος τόξων (συμμετρικά ως προς κέντρο).

3. *Η σχέση του ανήκειν είναι το σύνηθες συνολοθεωρητικό $\in$.*



Για τη γενική περίπτωση, δίνουμε τον ακόλουθο ορισμό:

Ορισμός 4.5 (Προβολικές πολλαπλότητες). *Έστω $\mathbb{K}$ ένα αλγεβρικά κλειστό σώμα. Ορίζουμε την προβολική πολλαπλότητα:*
$$\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}} = {}^{\mathbb{K}^{n+1}\setminus\{0\}}\big/_{\sim}$$
όπου η σχέση ισοδυναμίας ορίζεται ως εξής:
$$(a_1, \cdots, a_n) \sim (b_1, \cdots, b_n) \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K}\setminus\{0\} \text{ τέτοιο ώστε } (a_1, \cdots, a_n) = \lambda(b_1, \cdots, b_n)$$
Τα σημεία είναι και πάλι αλγεβρικοί υπόχωροι διάστασης 1 στους οποίους έχουμε πάρει μία σχέση ισοδυναμίας, ενώ οι ευθείες είναι υπόχωροι διάστασης 2 στους οποίους έχουμε πάρει μία σχέση ισοδυναμίας. Το ανήκειν ορίζεται όπως και στην πραγματική διδιάστατη περίπτωση, δηλαδή μέσω του $\in$.

Οι προβολικές πολλαπλότητες είναι $\mathbb{K}$-πολλαπλότητες διάστασης n, και μάλιστα μπορούμε να βρούμε τους χάρτες. Η ιδέα είναι ακριβώς όπως στην περίπτωση της σφαίρας (εξάλλου είδαμε ότι υπάρχει κάποια συσχέτιση).

Παρατήρηση 4.1. *Οι χάρτες (U_k, φ_k), $k \leqslant n$, με:*

$$U_k = \{[a] \in \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}} \mid a_k \neq 0\}$$

και $\varphi_k : \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}} \to U_k$:

$$\varphi_k(x_1, \cdots, x_n) = [x_1, \cdots, x_{k-1}, 1, x_{k+1}, \cdots, x_n]$$

καθιστούν την προβολική πολλαπλότητα $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ μία $\mathbb{K}-$πολλαπλότητα. Για τις μεταβάσεις των χαρτών:

$$\varphi_k^{-1} \circ \varphi_\ell : \varphi_\ell^{-1}(U_k \cap U_\ell) \to \varphi_k^{-1}(U_k \cap U_\ell)$$

έχουμε:

$$\begin{aligned}(x_1, \cdots, x_n) \mapsto [x_1, \cdots, x_k, 1, x_{k+1}, \cdots x_n] &= \left[\frac{x_1}{x_{\ell+1}}, \cdots, \frac{x_k}{x_{\ell+1}}, \frac{1}{x_{\ell+1}}, \frac{x_{k+1}}{x_{\ell+1}}, \cdots, \frac{x_n}{x_{\ell+1}}\right] \\ &\mapsto \left[\frac{x_1}{x_{\ell+1}}, \cdots, \frac{x_\ell}{x_{\ell+1}}, \frac{x_{\ell+2}}{x_{\ell+1}}, \cdots, \frac{x_k}{x_{\ell+1}}, \frac{1}{x_{\ell+1}}, \frac{x_{k+1}}{x_{\ell+1}}, \cdots, \frac{x_n}{x_{\ell+1}}\right]\end{aligned}$$

(εδώ έχουμε υποθέσει $\ell < k$, για ευκολία και χωρίς βλάβη της γενικότητας).

4.3 Ομογενή πολυώνυμα και εφαπτόμενοι κώνοι

Από την εποπτεία που έχουμε για τις προβολικές πολλαπλότητες, φαίνεται ότι τα κατάλληλα πολυώνυμα για τη μελέτη αυτών των πολλαπλοτήτων είναι τα ομογενή πολυώνυμα και όχι γενικά όλα τα πολυώνυμα. Αρκετά αποτελέσματα της αφινικής περίπτωσης περνούν άμεσα και στην προβολική περίπτωση, αλλά δεν θα τα καταγράψουμε όλα παρακάτω.

Ορισμός 4.6 (Ομογενή πολυώνυμα και ιδεώδη)**.** *Έστω $\mathbb{K}$ ένα αλγεβρικά κλειστό σώμα. Ένα πολυώνυμο $f \in \mathbb{K}[x_0, x_1, \cdots, x_n]$ λέγεται ομογενές βαθμού d εάν για κάθε $\lambda \in \mathbb{K}$, $f(\lambda x) = \lambda^d f(x)$. Δηλαδή:*

$$f(X) = \sum_{\substack{K \in \{0, \cdots, d\}^n \\ k_0 + \cdots + k_n = d}} c_K X^K, \text{ όπου } X^K = \prod_{i=1}^n x_i^{k_i}$$

Ένα ιδεώδες $\mathfrak{i}$ θα λέγεται ομογενές εάν παράγεται από ομογενή πολυώνυμα.

Παρατήρηση 4.2. *Εάν $\mathfrak{i} \trianglelefteq \mathbb{K}[x_0, \cdots, x_n]$ είναι ένα ομογενές ιδεώδες, τότε κάθε $f \in \mathfrak{i}$ γράφεται ως άθροισμα ομογενών πολυωνύμων. Κατά συνέπεια, εάν συμβολίσουμε με S_d το σύνολο των ομογενών πολυωνύμων βαθμού d, τότε:*

$$\mathbb{K}[x_0, \cdots, x_n] = \bigoplus_{d=0}^{\infty} S_d \text{ και } \mathfrak{i} = \bigoplus_{d=0}^{\infty} (\mathfrak{i} \cap S_d)$$

Αντιστρόφως, εάν το $\mathfrak{i}$ έχει την παραπάνω διάσπαση, είναι ομογενές.

Ορισμός 4.7 (Προβολικά σύνολα). *Δεδομένης μίας αυθαίρετα μεγάλης οικογένειας $\{f_k\}_{k\in I}$ ομογενών πολυωνύμων, ορίζουμε τα προβολικά σύνολα:*

$$\mathcal{V}(\{f_k\}_{k\in I}) = \bigcap_{k\in I}\{[x] \in \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}} \mid f_k(x) = 0\}$$

Είναι φανερό ότι αν $\mathfrak{i} = \langle\{f_k\}_{k\in I}\rangle$, τότε $\mathcal{V}(\mathfrak{i}) = \mathcal{V}(\{f_k\}_{k\in I})$.

Τα αντίστοιχα σύνολα $\mathcal{I}(V)$ μπορούν επίσης να οριστούν, όπως μπορεί να αποδειχθεί και μία προβολική εκδοχή του θεωρήματος του Nullstellensatz του Hilbert.

Ορισμός 4.8. *Για κάθε προβολικό σύνολο $V \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$, ορίζουμε:*

$$\mathcal{I}(V) = \{f \in \mathbb{K}[x_0, \cdots, x_n] \mid f(x) = 0 \text{ για κάθε } [x] \in V\}$$

Το $\mathcal{I}(V)$ είναι ομογενές ιδεώδες: Εφόσον το V είναι προβολικό σύνολο, για κάθε σημείο $x \in V$ και για κάθε $\lambda \in \mathbb{K}$ έχουμε:

$$0 = f(x) = \sum_{k=1}^{m} f_k(x)$$

όπου τα f_k είναι ομογενή βαθμού d_k και:

$$0 = f(\lambda x) = \sum_{k=1}^{m} \lambda^{d_k} f_k(x)$$

Το τελευταίο μπορεί να ειδωθεί ως πολυώνυμο του λ, κι αφού το $\mathbb{K}$ είναι άπειρο (ως αλγεβρικά κλειστό), έπεται $f_k(x) = 0$ για όλα τα k. Δηλαδή $f_k \in \mathcal{I}(V)$ και το $\mathcal{I}(V)$ έχει τη μορφή της Παρατήρησης 4.2.

Πρόταση 4.1. *Εάν το $\mathfrak{i} \trianglelefteq \mathbb{K}[x_0, \cdots, x_n]$ είναι ομογενές ιδεώδες, τότε το $\sqrt{\mathfrak{i}}$ είναι επίσης ομογενές.*

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι εάν $f \in \sqrt{i}$, τότε το f είναι άθροισμα ομογενών πολυωνύμων του $\sqrt{\mathfrak{i}}$, οπότε το ζητούμενο θα προκύψει από την Παρατήρηση 4.2. Αυτό θα γίνει με επαγωγή.

Η περίπτωση που το f είναι βαθμού 1 είναι απλή. Εάν το f γράφεται:

$$f = \sum_{k=1}^{\ell} f_k$$

όπου τα f_k είναι ομογενή βαθμού d_k. Θα υποθέσουμε για ευκολία και για τους συμβολισμούς ότι οι d_k είναι γνησίως αύξοντες. Υψώνοντας σε κατάλληλη δύναμη έχουμε $f^m \in \mathfrak{i}$:

$$f^m = \sum_{k_1,\cdots,k_n} c_{k_1,\cdots,k_n} \prod_{s=1}^{\ell} f_s^{k_s} \in \mathfrak{i}$$

Τώρα, εάν αναδιατάξουμε το άθροισμα και γράψουμε το f^m ως άθροισμα ομογενών πολωνύμων, μπορούμε (όπως πριν) να δείξουμε ότι καθένας από τους όρους ανήκει στο $\mathfrak{i}$, εφόσον $f^m \in \mathfrak{i}$. Από αυτούς τους όρους, ο μεγιστοβάθμιος είναι ο $f_{d_\ell}^m$, κι οπότε έτσι δείχνουμε ότι $f_{d_\ell} \in \sqrt{\mathfrak{i}}$.

Αφαιρώντας παίρνουμε το πολυώνυμο $f - f_{d_\ell}$, το οποίο είναι μικρότερου βαθμού από το f. Από την επαγωγική υπόθεση, $f - f_{d_\ell} \in \sqrt{\mathfrak{i}}$ κι επειδή $f_{d_\ell} \in \sqrt{\mathfrak{i}}$, έχουμε το ζητούμενο. $\square$

Για την προβολική εκδοχή του θεωρήματος του Nullstellensatz θα θέλαμε να χρησιμοποιήσουμε την κλασική εκδοχή που έχουμε ήδη αποδείξει. Κατά συνέπεια, χρειαζόμαστε έναν τρόπο να μεταβαίνουμε από τα προβολικά σύνολα στα αφινικά. Αυτό γίνεται με την έννοια του κώνου:

Ορισμός 4.9 (Κώνοι προβολικών συνόλων). *Έστω $V \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ ένα προβολικό σύνολο. Ορίζουμε τον κώνο του V ως εξής:*

$$C(V) = \{x \in \mathbb{A}^{n+1}_{\mathbb{K}} \mid [x] \in V\} \cup \{0\}$$

Από τον ορισμό αυτόν έχουμε ότι για κάθε ομογενές ιδεώδες $\mathfrak{i}$:

$$C\big(\mathcal{V}_{\text{προβ.}}(\mathfrak{i})\big) = \mathcal{V}_{\text{αφιν.}}(\mathfrak{i}) \cup \{0\}$$

Παρατήρηση 4.3. *Εάν θεωρήσουμε το ομογενές ιδεώδες που αντιστοιχεί το 0, δηλαδή το $\mathfrak{i} = \langle x_0 - 0, \ldots, x_n - 0\rangle \trianglelefteq \mathbb{K}[x_0, \cdots, x_n]$, τότε $\mathcal{V}(\mathfrak{i}) = \emptyset$, αφού $0 \notin \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$. Το ίδιο συμβαίνει κι όταν $\mathfrak{i} = \mathbb{K}[x_0, \cdots, x_n]$, ή γενικότερα όταν $\mathfrak{i} \supseteq \langle x_0 - 0, \ldots, x_n - 0\rangle$, αφού το $\mathcal{V}$ αντιστρέφει τους εγκλεισμούς.*

Λήμμα 4.1. *Εάν $\emptyset \neq V \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$, τότε:*

$$\mathcal{I}_{\alpha\phi\iota\nu.}\big(C(V)\big) = \mathcal{I}_{\pi\varrho o\beta.}(V)$$

Επιπλέον, εάν το $\mathfrak{i} \trianglelefteq \mathbb{K}[x_0, \cdots, x_n]$ είναι ομογενές και $\mathcal{V}_{\pi\varrho o\beta.}(\mathfrak{i}) \neq \emptyset$, τότε:

$$C\big(\mathcal{V}_{\pi\varrho o\beta.}(\mathfrak{i})\big) = \mathcal{V}_{\alpha\phi\iota\nu.}(\mathfrak{i})$$

Απόδειξη. Έχουμε ότι εάν $f \in \mathcal{I}_{\text{προβ.}}(V)$, τότε $f(x) = 0$ για κάθε $[x] \in V$. Δηλαδή, $f(x) = 0$ στον κώνο $C(V)$ και κατά συνέπεια $f \in \mathcal{I}_{\text{αφιν.}}\big(C(V)\big)$. Οι συλλογισμοί αντιστρέφονται.

Όσον αφορά τα ιδεώδη, εφόσον:

$$C\big(\mathcal{V}_{\text{προβ.}}(\mathfrak{i})\big) = \mathcal{V}_{\text{αφιν.}}(\mathfrak{i}) \cup \{0\}$$

χρειάζεται να ελέγξουμε εάν $0 \in \mathcal{V}_{\text{αφιν.}}(\mathfrak{i})$. Αυτό όμως είναι φανερό, αφού τα $f \in \mathfrak{i}$ είναι ομογενή. □

Θεώρημα 4.1 (Προβολική εκδοχή του Nullstellensatz του Hilbert). *Έστω $\mathbb{K}$ ένα αλγεβρικά κλειστό σώμα και $\mathfrak{i} \trianglelefteq \mathbb{K}[x_0, \cdots, x_n]$ ένα ομογενές ιδεώδες. Ισχύουν τα ακόλουθα:*

1. *$\mathcal{V}(\mathfrak{i}) = \emptyset$ εάν και μόνο αν $\sqrt{\mathfrak{i}} \supseteq \langle x_0, \cdots, x_n \rangle$.*
2. *Εάν $\mathcal{V}(\mathfrak{i}) \neq \emptyset$, τότε $\mathcal{I}\big(\mathcal{V}(\mathfrak{i})\big) = \sqrt{\mathfrak{i}}$.*

Απόδειξη. Για το 1.: Εάν έχουμε ότι $\mathcal{V}_{\text{προβ.}}(\mathfrak{i}) = \emptyset$, τότε $\mathcal{V}_{\text{αφιν.}}(\mathfrak{i}) \subseteq \{0\}$. Από την κλασική μορφή του θεωρήματος Nullstellensatz:

$$\sqrt{\mathfrak{i}} = \mathcal{I}_{\text{αφιν.}}\big(\mathcal{V}_{\text{αφιν.}}(\mathfrak{i})\big) \supseteq \langle x_0, \cdots, x_n \rangle$$

Τα επιχειρήματα είναι αντιστρέψιμα.

Για το 2.: Έχουμε ότι:

$$\mathcal{I}_{\text{προβ.}}\big(\mathcal{V}_{\text{προβ.}}(\mathfrak{i})\big) = \mathcal{I}_{\text{αφιν.}}\big(C(\mathcal{V}_{\text{προβ.}}(\mathfrak{i}))\big) = \mathcal{I}_{\text{αφιν.}}\big(\mathcal{V}_{\text{αφιν.}}\big)$$

κι από την κλασική μορφή του Nullstellensatz, $\mathcal{I}_{\text{αφιν.}}\big(\mathcal{V}_{\text{αφιν.}}\big) = \sqrt{\mathfrak{i}}$. □

Στις προβολικές πολλαπλότητες $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ μπορεί να δοθεί και η αντίστοιχη τοπολογία Zariski.

Ορισμός 4.10 (Τοπολογία Zariski). *Στο σύνολο $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ ορίζουμε την τοπολογία Zariski:*

$$\mathfrak{T} = \{\mathcal{V}(\mathfrak{i})^c \mid \mathfrak{i} \trianglelefteq \mathbb{K}[x_0, \cdots, x_n] \text{ ομογενές}\}$$

Η εφαρμογή των ομογενών πολυωνύμων στην περίπτωσή μας θα είναι η μελέτη των εφαπτόμενων κώνων των αλγεβρικών συνόλων. Στην ομαλή περίπτωση, είναι δυνατόν κανείς να προσεγγίσει με γραμμικό τρόπο μία πολλαπλότητα, μέσω του εφαπτόμενου επιπέδου της. Στην περίπτωση των αλγεβρικών συνόλων, παρότι οι πολυωνυμικές συναρτήσεις είναι ομαλές, το σύνολο μηδενισμού τους μπορεί να παρουσιάζει ανωμαλίες (όπως αιχμές), και κατά συνέπεια η έννοια του εφαπτόμενου επιπέδου δεν υφίσταται. Το κατάλληλο γεωμετρικό αντικείμενο που προσεγγίζει τα αλγεβρικά σύνολα σε αυτήν την περίπτωση είναι οι εφαπτόμενοι κώνοι.

Ορισμός 4.11 (Εφαπτόμενοι κώνοι). *Για κάθε πολυώνυμο f, γνωρίζουμε ότι υπάρχει μοναδική διάσπαση:*

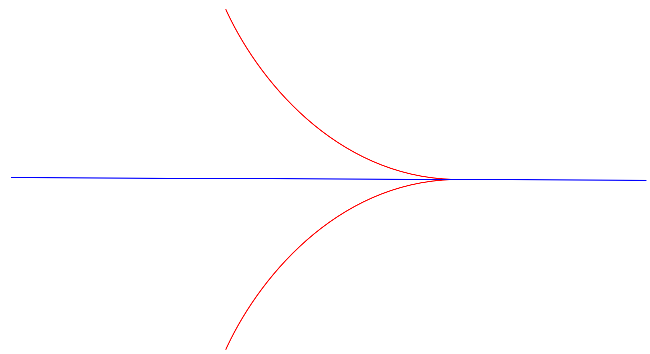
$$f = \sum_{k=1}^{m} f_k$$

όπου τα f_k είναι ομογενή πολυώνυμα βαθμού d_k. Κατ' αναλογία με τους εφαπτόμενους χώρους, που είναι γραμμικές προσεγγίσεις, μπορούμε να θεωρήσουμε το f_{k^*}, το οποίο είναι το μη-μηδενικό f_k ελαχίστου βαθμού. Εάν λοιπόν $V \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ είναι ένα αλγεβρικό σύνολο, τότε το ζεύγος:

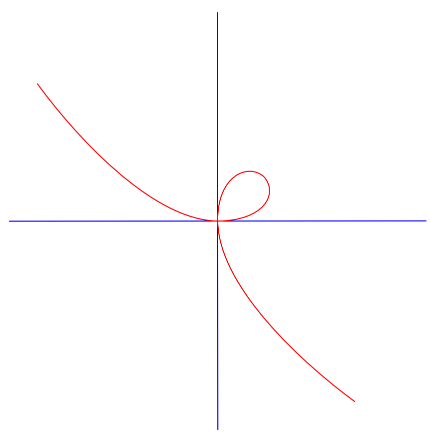
$$(\mathcal{V}(\mathfrak{i}), \mathbb{K}[x_1, \cdots, x_n]/\mathfrak{i})$$

όπου το $\mathfrak{i}$ παράγεται από τα f_{k^*} των διαφόρων $f \in \mathcal{I}(V)$, καλείται εφαπτόμενος κώνος.

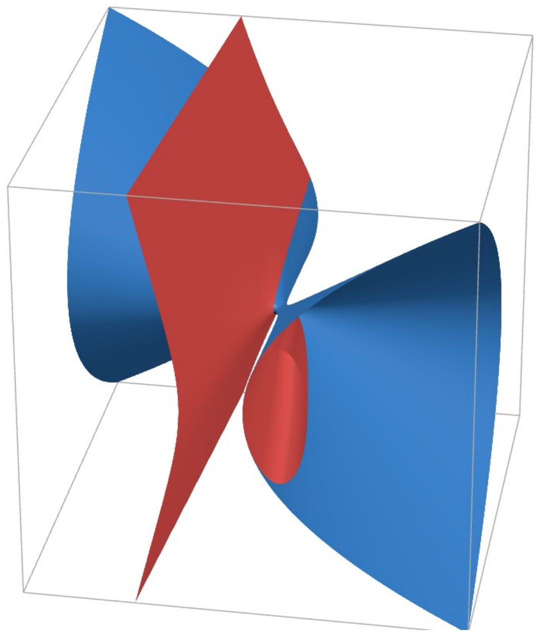
Παρακάτω εικονίζονται μερικά παραδείγματα αλγεβρικών συνόλων και των αντίστοιχων εφαπτόμενων χώρων. Παρατηρείστε ότι ο εφαπτόμενος κώνος μπορεί να είναι ευθεία, ένωση ευθειών, κώνος ή ακόμα και κάτι αρκετά ιδιόμορφο.



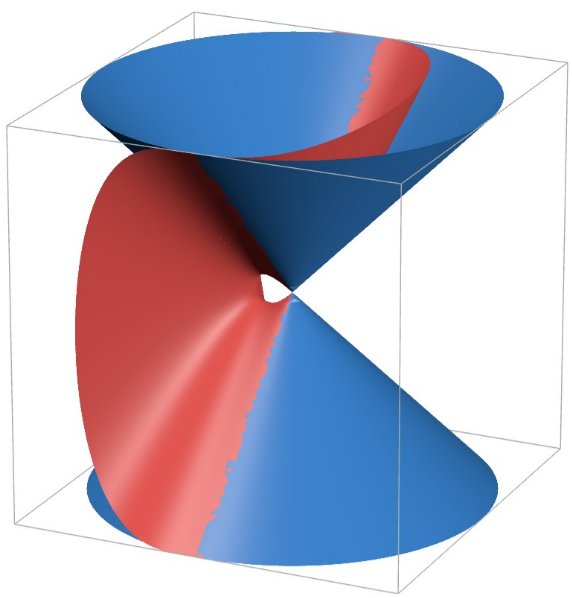
Η κόκκινη $\mathcal{V}(x^3 + y^2)$ *και ο μπλε εφαπτόμενος κώνος* $\mathcal{V}(y^2)$.



Η κόκκινη $\mathcal{V}(x^3 + xy + y^3)$ *και ο μπλε εφαπτόμενος κώνος* $\mathcal{V}(xy)$.



Η κόκκινη $\mathcal{V}(x^3 + xy + z^2)$ *και ο μπλε εφαπτόμενος κώνος* $\mathcal{V}(xy + z^2)$.



Η κόκκινη $\mathcal{V}(x^3 + x^2 + y^2 - z^2)$ *και ο μπλε εφαπτόμενος κώνος* $\mathcal{V}(x^2 + y^2 - z^2)$.

Κεφάλαιο 5

Βάσεις Gröbner και απαλοιφή πολυωνυμικών συστημάτων

Προσεχώς!

5.1 Διατάξεις και διαίρεση

5.2 Μονωνυμικά ιδεώδη και το αρχικό ιδεώδες

5.3 Βάσεις Gröbner

5.4 Ο αλγόριθμος του Buchberger

5.5 Γεωμετρική απαλοιφή

5.6 Syzygies και το θεώρημα syzygy του Hilbert

Κεφάλαιο 6

Δράγματα (sheaves)

6.1 Κανονικές συναρτήσεις

Τα δράγματα είναι ουσιαστικά εργαλείο της μιγαδικής ανάλυσης, εάν τουλάχιστον κανείς τα δει από την ιστορική τους πλευρά. Εάν θεωρήσουμε δύο σειρές Laurent με πεπερασμένο κύριο μέρος:

$$f(z) = \sum_{k=-m}^{\infty} b_k z^k \text{ και } g(z) = \sum_{k=-m}^{\infty} c_k z^k$$

τότε ξέρουμε από την αρχή της αναλυτικής συνέχισης ότι εάν οι f, g ταυτίζονται σε ένα ανοικτό σύνολο, θα πρέπει η μία να είναι επέκταση της άλλης. Αυτό είναι ένα αποτέλεσμα που χρησιμοποιείται συχνά στην θεωρία αριθμών: Η συνάρτηση ζ:

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$$

φυσιολογικά ορίζεται στο ημιεπίπεδο $\Re z > 1$. Κανείς όμως μπορεί να δείξει ότι:

$$\zeta(z) = \frac{1}{z-1} - z \cdot \int_1^{\infty} \frac{t - \lfloor t \rfloor}{t^{z+1}}\, dt, \text{ στο ανοικτό } \{z \mid \Re z > 1\}$$

κι επομένως η ζ μπορεί να επεκταθεί στο $\Re z > 0$ αναλυτικά, με πόλο στο 1 τάξης 1 (αφού το δεύτερο μέλος ορίζεται καλά στο εν λόγω σύνολο).

Είναι λοιπόν φυσιολογικό κανείς να θέλει να ταυτίζει συναρτήσεις που συμφωνούν σε ανοικτά σύνολα. Επειδή ασχολούμαστε ακόμα με άλγεβρα, θα ασχοληθούμε για αρχή με πεπερασμένες σειρές Laurent $f(z) = \sum_{k=-m}^{m} c_k z^k$, δηλαδή με πηλίκα πολυωνύμων $f = g/h$.

Ορισμός 6.1 (Κανονικές συναρτήσεις στο $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$). *Έστω $V \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ ένα αλγεβρικό σύνολο, $p \in V$ και $f : V \to \mathbb{K}$. Η f θα λέγεται κανονική στο p εάν υπάρχει ανοικτή περιοχή $p \in A \subseteq V$*

ούτως ώστε $f = g/h$, με τα $g, h \in \mathbb{K}[x_1, \cdots, x_n]$ να είναι πολυώνυμα και το h δεν μηδενίζεται στο A. Η f λέγεται κανονική εάν είναι κανονική σε κάθε $p \in V$. Με $\mathcal{O}(V)$ συμβολίζουμε τον δακτύλιο των κανονικών συναρτήσεων στο V.

Παρατήρηση 6.1. *Εάν ταυτίσουμε το $\mathbb{K}$ με το $\mathbb{A}^1_{\mathbb{K}}$, δηλαδή θεωρήσουμε την τοπολογία Zariski στο $\mathbb{K}$, τότε κάθε κανονική $f : V \to \mathbb{K} = A^1_{\mathbb{K}}$, $V \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$, είναι συνεχής.*

Απόδειξη. Τα κλειστά σύνολα του $\mathbb{K} = A^1_{\mathbb{K}}$ είναι ακριβώς τα πεπερασμένα σύνολα σημείων (εκτός του $\mathbb{K}$), επομένως αρκεί να δείξουμε ότι τα:

$$f^{-1}(a) = \{p \in V \mid f(p) = a\}$$

είναι κλειστά για κάθε $a \in U$. Ας θεωρήσουμε λοιπόν ότι στο $A \subseteq V$ η f γράφεται $f = g/h$. Τότε:

$$f^{-1}(a) \cap A = \{p \in A \mid (g - ah)(p) = 0\} = \mathcal{V}(g - ah) \cap A$$

οπότε το $f^{-1}(a) \cap A$ είναι κλειστό. Παίρνοντας κάλυψη του V από A, έχουμε το ζητούμενο. □

Ορισμός 6.2 (Κανονικές συναρτήσεις στο $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$). *Έστω $V \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ ένα προβολικό σύνολο, $p \in V$ και $f : V \to \mathbb{K}$. Η f θα λέγεται κανονική στο p εάν υπάρχει ανοικτή περιοχή $p \in A \subseteq V$ ούτως ώστε $f = g/h$, με τα $g, h \in \mathbb{K}[x_1, \cdots, x_n]$ να είναι ομογενή πολυώνυμα ίδιου βαθμού και το h δεν μηδενίζεται στο A. Η f λέγεται κανονική εάν είναι κανονική σε κάθε $p \in V$. Με $\mathcal{O}(V)$ συμβολίζουμε τον δακτύλιο των κανονικών συναρτήσεων στο V.*

Παρατήρηση 6.2. *Αναλόγως, οι κανονικές συναρτήσεις $f : V \to \mathbb{K} = \mathbb{A}^1_{\mathbb{K}}$, $V \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$, είναι συνεχείς.*

Ορισμός 6.3 (Μορφισμοί συνόλων). *Έστω $\mathbb{K}$ ένα αλγβερικά κλειστό σώμα. Εάν V, U είναι ένα αλγεβρικά ή προβολικά σύνολα, ένας μορφισμός $\varphi : V \to U$ είναι μία συνεχής απεικόνιση που διατηρεί τις κανονικές συναρτήσεις. Δηλαδή, για κάθε $B \subseteq U$ και για κάθε $f : B \to \mathbb{K}$ κανονική, η:*

$$f \circ \varphi : \varphi^{-1}(B) \to \mathbb{K}$$

είναι επίσης κανονική.

Ορισμός 6.4 (Σπόροι). *Έστω $\mathbb{K}$ ένα αλγεβρικά κλειστό σώμα, V ένα αλγεβρικό ή προβολικό σύνολο και $p \in V$. Με $\mathcal{O}_{V,p}$ (όταν το V εννοείται, συνηθίζεται να γράφουμε $\mathcal{O}_p$) θα συμβολίζουμε το εξής σύνολο: Το $\mathcal{O}_{V,p}$ περιέχει τις κανονικές συναρτήσεις στο p, $f : V \to \mathbb{K}$, οι οποίες ταυτίζονται με μια σχέση ισοδυναμίας $\sim$ εάν συμφωνούν σε κοινό ανοικτό σύνολο. Μπορούμε εναλλακτικά να θεωρούμε ότι ο $\mathcal{O}_{V,p}$ έχει στοιχεία της μορφής:*

$$(A, f),\ \text{με } f : A \to \mathbb{K} \text{ κανονική στο } p \in A \subseteq V,\ A \text{ ανοικτό}$$

και $(A, f) \sim (B, g)$ εάν $f = g$ στο $A \cap B$. Ο $\mathcal{O}_{V,p}$ καλείται ο δακτύλιος των σπόρων στο p.

Η ορολογία "σπόροι" δεν είναι τυχαία. Θα γίνει κατανοητή αργότερα.

Θεώρημα 6.1 ([Ha(R)77], Thm. 3.2). *Έστω $\mathbb{K}$ ένα αλγεβρικά κλειστό σώμα και $V \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ ένα αλγεβρικό σύνολο. Τότε:*

$$\mathcal{O}(V) \cong \mathbb{K}[V]$$

Επιπλέον, για κάθε $p \in V$, εάν $\mathfrak{m}_p \subseteq \mathbb{K}[V]$ είναι το ιδεώδες των συναρτήσεων που μηδενίζονται στο p, η αντιστοιχία:

$$p \mapsto \mathfrak{m}_p$$

είναι $1-1$ μεταξύ των σημείων του p και των μεγιστικών ιδεωδών του $\mathbb{K}[V]$.

6.2 Προδράγματα και δράγματα

Εδώ ο Κώστας κάνει τη δουλειά του–

6.3 Επαγωγικά συστήματα και επαγωγικά όρια

6.4 Συναρτητής τομή και δραγματοποίηση

Κεφάλαιο 7

Σχήματα (schemes)

7.1 Αφινικά σχήματα

7.2 Χώροι δακτυλίων (ringed spaces)

7.3 Το προβολικό σχήμα

7.4 Ο εφαπτόμενος χώρος Zariski

7.5 Κατηγορικά και ινώδη γινόμενα

Κεφάλαιο 8

Επιφάνειες Riemann

8.1 Τριγωνοποιήσεις και ο τύπος των Riemann-Hurwitz

Σε αυτό το κεφάλαιο το κύριο αντικείμενο μελέτης είναι οι επιφάνειες Riemann. Στην ουσία οι επιφάνειες Riemann είναι διδιάστατες πολλαπλότητες με μία μιγαδική δομή.

Ορισμός 8.1 (Ολόμορφα συμβιβαστοί χάρτες και μιγαδική δομή). *Έστω X μία διδιάστατη πολλαπλότητα. Ένας μιγαδικός χάρτης είναι:*

1. *Είτε μία απεικόνιση $\varphi : U \to \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ που είναι τοπολογικός ομοιομορφισμός προς ένα ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{C}$.*

2. *Είτε μία απεικόνιση $\varphi : U \to \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ που είναι τοπολογικός ομοιομορφισμός προς ένα σχετικά ανοικτό υποσύνολο του άνω ημιεπιπέδου του $\mathbb{C}$.*

Η χρήση των διαφορετικών φ συνήσταται στο αν χρησιμοποιούμε πολλαπλότητες X με σύνορο ή χωρίς σύνορο. Δύο μιγαδικοί χάρτες $\varphi : U \to \mathbb{C}$, $\psi : V \to \mathbb{C}$ θα λέγονται ολόμορφα συμβιβαστοί εάν οι μεταβάσεις:

$$\psi \circ \varphi : \varphi^{-1}(U \cap V) \to \psi(U \cap V) \text{ και } \varphi \circ \psi : \psi^{-1}(U \cap V) \to \varphi(U \cap V)$$

είναι αμφιολόμορφες. Μία μιγαδική δομή ή ένας μιγαδικός άτλαντας για την πολλαπλότητα X είναι ένα σύνολο $\mathcal{A}$ που αποτελείται από ολόμορφα συμβιβαστούς μιγαδικούς χάρτες του X.

Ορισμός 8.2 (Επιφάνειες Riemann). *Μία επιφάνεια Riemann είναι μία διδιάστατη διαφορική πολλαπλότητα X, μαζί με μία μιγαδική δομή (μιγαδικό άτλαντα) για την X. Η X μπορεί να έχει σύνορο ή να μην έχει.*

Οι ολόμορφες συναρτήσεις μεταξύ επιφανειών Riemann μπορούν να οριστούν σύμφωνα με τον παρακάτω ορισμό.

Ορισμός 8.3 (Ολόμορφες συναρτήσεις μεταξύ επιφανειών Riemann). *Έστω X, Y δύο επιφάνειες Riemann. Θα λέμε ότι μία απεικόνιση:*

$$f : X \to Y$$

είναι ολόμορφη στο $x \in X$ εάν υπάρχουν χάρτες (U, φ), (V, ψ) των x και $f(x)$ αντίστοιχα με $f(U) \subseteq V$, ώστε η τοπική παράσταση:

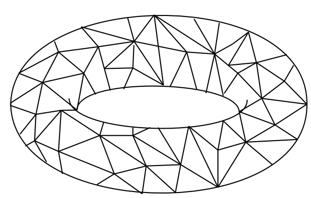
$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi^{-1}(U) \to \psi(V)$$

να είναι ολόμορφη.

Λίγα είναι τα αμειγώς τοπολογικά αποτελέσματα που μας ενδιαφέρουν για τις επιφάνειες Riemann σε αυτήν την παρουσίαση, και θα τα συνοψίσουμε όλα τους σε αυτήν την παράγραφο. Πρώτα θα αναφερθούμε στην τριγωνοποίηση των επιφανειών Riemann και στην τοπολογική αναλλοίωτη που είναι το γένος. Η τριγωνοποίηση γενικά δεν είναι εύκολο εγχείρημα και οι περισσότερες αποδείξεις αξιοποιούν το θεώρημα Schoenflies-Mazur-Morse-Brown [Τσ20], Θεώρ. 7.7.13, το οποίο είναι μία γενικευμένη εκδοχή του θεωρήματος του Jordan [Τσ20], Θεώρ. 7.7.10. Μία απλούστερη απόδειξη που αποφεύγει τέτοιου είδους θεωρήματα μπορεί να γίνει χρησιμοποιώντας το [Ha(A)22].

Ορισμός 8.4 (Τριγωνίσιμοι τοπολογικοί χώροι). *Ένας τοπολογικός χώρος X λέγεται τριγωνίσιμος εάν υπάρχει μονοπλεκτικό σύμπλεγμα K και τοπολογικός ομοιομορφισμός $h : |K| \to X$, όπου $|K|$ είναι η γεωμετρική εκδοχή του K. Η $|K|$ λέγεται τριγωνισμός του X.*

Θεώρημα 8.1 (Τριγωνοποίηση). *Κάθε συμπαγής επιφάνεια Riemann είναι τριγωνίσιμη.*



Ένας τριγωνισμός του τόρου.

Ο ορισμός του γένους στην πραγματικότητα είναι σύνθετος και, για του λόγου το αληθές, δεν υπάρχει συναίνεση για το ποιος πρέπει να είναι ο "σωστός" ορισμός. Υπάρχουν πολλοί ισοδύναμοι ορισμοί, εκ των οποίων άλλοι είναι περισσότερο στοιχειώδεις και άλλοι χρησιμοποιούν τύπους που εμπεριέχουν το γένος, όπως είναι αυτός του θεωρήματος των Riemann-Roch [HK09]. Εμείς θα χρησιμοποιήσουμε αυτόν που εμπλέκει τη χαρακτηριστική του Euler. Λίγο-πολύ, έχει προκύψει απο παρατηρήσεις σε απλά σχήματα, όπως σε πολύεδρα, στον τόρο και ούτω καθεξής.

Ορισμός 8.5 (Χαρακτηριστική του Euler). *Έστω X μία συμπαγής επιφάνεια Riemann με τριγωνισμό $|K|$ και n_k, $k \in \{0,1,2\}$, ο αριθμός των $k-$διάστατων μονοπλόκων του τριγωνισμού $|K|$. Τότε ορίζουμε τη χαρακτηριστική του Euler:*

$$\chi(X) = \chi(|K|) = n_0 - n_1 + n_2$$

Είναι απλό κανείς να παρατηρήσει ότι η χαρακτηριστική Euler είναι ανεξάρτητη του τριγωνισμού.

Ορισμός 8.6 (Γένος). *Ο υποτυπώδης ορισμός του γένους μίας επιφάνειας Riemann που δίνουμε είναι ο εξής:*

1. *Για προσανατολίσιμες, συμπαγείς επιφάνειες Riemann X χωρίς σύνορο:*

$$\chi(X) = 2 - 2g(X)$$

2. *Για μη-προσανατολίσιμες, συμπαγείς επιφάνειες Riemann X χωρίς σύνορο:*

$$\chi(X) = 2 - g(X)$$

Το γένος g είναι η κατάλληλη αλγεβρική αναλλοίωτη για την ταξινόμιση των συμπαγών επιφανειών Riemann χωρίς σύνορο. Αυτό θα το δούμε παρακάτω -πρώτα χρειαζόμαστε κάποιους ορισμούς.

Τα δομικά εργαλεία είναι οι θεμελιώδεις προσανατολίσιμες και μη-προσανατολίσιμες επιφάνειες, οι οποίες είναι κατουσίαν γεμάτα πολύγωνα με κάποιες συγκεκριμένες ταυτίσεις στο σύνορο.

Ορισμός 8.7 (Θεμελιώδης προσανατολίσιμη επιφάνεια). *Έστω $g \in \mathbb{N}$. Ορίζουμε:*

$$C_{4g} = \mathrm{conv}\{z_n \mid z_n^{4g} = 1 \text{ με } 1 \leqslant n \leqslant 4g\} \subseteq \mathbb{C}$$

όπου με $\mathrm{conv}A$ συμβολίζουμε την κυρτή θήκη του A, δηλαδή το μικρότερο κυρτό σύνολο που περιέχει το A. Βασικά το C_{4g} είναι το γεμάτο πολύγωνο με κορυφές τις $4g-$ρίζες τις μονάδας. Ορίζουμε τη σχέση ισοδυναμίας $\sim$:

$$\zeta \sim \eta \Leftrightarrow \begin{cases} \zeta = \eta \\ \text{ή } \begin{cases} \zeta = (1-t)z_{4k-3} + tz_{4k-2}, \ t \in [0,1], \text{ και} \\ \eta = (1-t)z_{4k} + tz_{4k-1}, \ k \in \{1, \cdots, g\} \end{cases} \\ \text{ή } \begin{cases} \zeta = (1-t)z_{4k-2} + tz_{4k-1}, \ t \in [0,1], \text{ και} \\ \eta = (1-t)z_{4k+1} + tz_{4k}, \ k \in \{1, \cdots, g\} \end{cases} \end{cases}$$

όπου έχουμε συμβολίσει για ευκολία $z_{4g+1} = z_1$. Ορίζουμε τώρα τη θεμελιώδη προσανατολίσιμη επιφάνεια:

$$X_g^{\mathrm{or}} = {}^{C_{4g}}\big/_{\sim}, \ g \geqslant 1$$

Όταν $g = 0$, ορίζουμε $X_0^{\mathrm{or}} = \mathbb{S}^2$.

Ορισμός 8.8 (Θεμελιώδης μη-προσανατολίσιμη επιφάνεια)**.** *Έστω $g \in \mathbb{N}_{\geqslant 2}$. Ορίζουμε και πάλι το γεμάτο πολύγωνο:*

$$C_{2g} = \mathrm{conv}\{z_n \mid z_n^{2g} = 1 \text{ με } 1 \leqslant n \leqslant 2g\} \subseteq \mathbb{C}$$

και τη σχέση ισοδυναμίας $\sim$:

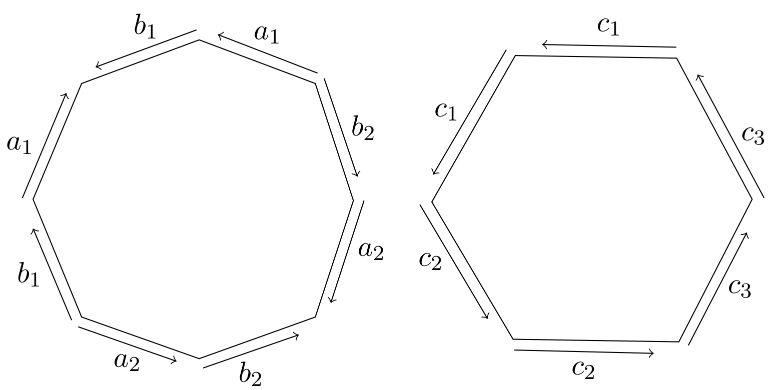
$$\zeta \sim \eta \Leftrightarrow \begin{cases} \zeta = \eta \\ \text{ή } \begin{cases} \zeta = (1-t)z_{2k-1} + tz_{2k}, \ t \in [0,1], \text{ και} \\ \eta = (1-t)z_{2k} + tz_{2k+1}, \ k \in \{1, \cdots, g\} \end{cases} \end{cases}$$

Ορίζουμε τώρα τη θεμελιώδη μη-προσανατολίσιμη επιφάνεια:

$$X_g^{\mathrm{nor}} = {C_{2g}}/{\sim}, \ g \geqslant 2$$

Όταν $g = 1$, ορίζουμε $X_1^{\mathrm{nor}} = \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$.

Παρακάτω σχεδιάζουμε τη μορφή των πολυγώνων με ετικέτες που υποδεικνύουν τη συγκόλληση μέσω των $\sim$ και βέλη που δείχνουν την κατεύθυνσή της.



Η X_2^{or} στα αριστερά και η X_3^{nor} στα δεξιά.

Η ιδέα για τον ορισμό των X_g^{or}, X_g^{nor} είναι στην πραγματικότητα απλή, παρά την περίπλοκη μορφή των $C_{4g}/\sim$, $C_{2g}/\sim$. Πρώτα για την προσανατολίσιμη περίπτωση, η σχέση ισοδυναμίας είναι ακριβώς αυτή που διπλώνει κατάλληλα το πολύγωνο ώστε οι 4 πρώτες πλευρές να σχηματίσουν κάτι σαν τόρο. Έπειτα, οι επόμενες 4 πλευρές (ξεχνώντας τις προηγούμενες) σχηματίζουν κι αυτές κάτι σαν τόρο, και ούτω καθεξής. Στο τέλος λοιπόν το σχήμα που προκύπτει είναι μία συνένωση g τόρων. Για την μη-προσανατολίσιμη περίπτωση, το δίπλωμα γίνεται ανά δύο πλευρές και τα προκύπτοντα αντικείμενα είναι κάτι σαν προβολικά επίπεδα (ένα "μπουκέτο" από προβολικά επίπεδα).

Οι προηγούμενες παρατηρήσεις μας συνοψίζονται στην ακόλουθη πρόταση:

Πρόταση 8.1. *Για κάθε $g \geqslant 1$ έχουμε:*

$$X_g^{\mathrm{or}} = \overbrace{\mathbb{T}\# \cdots \#\mathbb{T}}^{g}$$

όπου με $\mathbb{T}$ συμβολίζουμε τον τόρο. Λαμβάνοντας υπόψη και την περίπτωση $X_0^{\mathrm{or}} = \mathbb{S}^2$ του $g = 0$, παίρνουμε τον γενικό τύπο:

$$X_g^{\mathrm{or}} \cong \mathbb{S}^2\#\overbrace{\mathbb{T}\# \cdots \#\mathbb{T}}^{g},\ g \in \mathbb{N}_0$$

Επιπλέον έχουμε:

$$X_g^{\mathrm{nor}} \cong \overbrace{\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}\# \cdots \#\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}}^{g},\ g \in \mathbb{N}$$

Θεώρημα 8.2 (Ταξινόμιση των επιφανειών). *Κάθε συνεκτική επιφάνεια (Riemann) χωρίς σύνορο είναι ομοιομορφική με ακριβώς μία από τις:*

$$X_g^{\mathrm{or}},\ g \in \mathbb{N}_0 \text{ ή } X_g^{\mathrm{nor}},\ g \in \mathbb{N}$$

Επιπλέον, καμία από τις X_g^{or} δεν είναι ομοιομορφική με κάποια $X_{g'}^{\mathrm{nor}}$.

Συνέπεια της ταξινόμισης είναι και μία διαισθητική εικόνα για το γένος g: Στην προσανατολίσιμη περίπτωση, μετράει το πλήθος των τρυπών (χερουλιών) της επιφάνειας, ενώ στην μη-προσανατολίσιμη το πλήθος των επισυνατόμενων προβολικών χώρων.

Στη συνέχεια θα μας απασχολήσει το θεώρημα των Riemann-Hurwitz.

Ορισμός 8.9 (Σημεία διακλάδωσης). *Έστω X, Y δύο επιφάνειες Riemann και $f : X \to Y$ μία μη-σταθερή, ολόμορφη απεικόνιση. Ένα σημείο $x \in X$ θα λέγεται σημείο διακλάδωσης της f εάν δεν υπάρχει καμία ανοικτή περιοχή $x \in U$ ούτως ώστε η $f|_U$ να είναι $1-1$.*

8.2 Στοιχεία πλειογραμμικής άλγεβρας

8.3 Διαφορικές μορφές και διαφορικά

8.4 Ολοκλήρωση των διαφορικών μορφών

8.5 Το πρόβλημα της παράγουσας

8.6 Ολοκληρωτικά υπόλοιπα

8.7 Το λήμμα του Dolbeault

8.8 Ομάδες συνομολογίας του Čech

8.9 Τα θεωρήματα Dolbeault και de Rahm

8.10 Διαιρέτες και το θεώρημα των Riemann-Roch

Βιβλιογραφία

[DS07] W. Decker, F. O. Schreyer, ***Gröbner Bases and Algebraic Curves***. Universität des Saarlandes, 2007.

[Fo81] O. Foster, ***Lectures on Riemann Surfaces***. Springer, 1981.

[Ha(R)77] R. Hartshorne, ***Algebraic Geometry***. Springer, 1977.

[Ha(A)22] A. Hatcher, ***The Kirby torus trick for surfaces***. arXiv:1312.3518v2 [math.GT] 4 May 2022.

[HK09] F. E. P. Hirzebrunch, M. Kreck, ***On the concenpt of genus in topology and complex analysis***. Notices of the AMS, June/July 2009.

[Mi24] J. S. Milne, ***Algebraic Geometry***. University of Michigan, 2024.

[Ue91] K. Ueno, ***Algebraic Geometry 1***. American Mathematical Society, 1991.

[Ue00] K. Ueno, ***Algebraic Geometry 2***. American Mathematical Society, 2000.

[Va22] R. Vakil, ***The rising sea - Foundations of algebraic geometry***. Princeton, 2022.

[Wi16] F. Winkler, ***Kommutative Algebra und Algebraische Geometrie***, Johannes Kepler Universität Linz, 2016.

[AA18] I. A. Αντωνιάδης, A. I. Κοντογεώργης, ***Αριθμητική Γεωμετρία, Ιστορία, Επιτεύγματα και Μέλλον***. Τόμος της ΕΜΕ για τα 100 έτη από την ίδρυσή της, 2018.

[AA21] I. A. Αντωνιάδης, A. I. Κοντογεώργης, ***Αλγεβρικές Καμπύλες***. Κάλλιπος, 2021.

[Βα09] Ε. Ε. Βασιλείου, ***Στοιχεία Προβολικής Γεωμετρίας***. Συμμετρία, 2009.

[ΘΤ20] Α. Θωμά, Χ. Τατάκης, ***Σημειώσεις στις βάσεις Gröbner***. Παν. Κρήτης, 2020.

[Μπ23] Κ. Μπιζάνος, ***Ομολογική άλγεβρα και κατηγορίες***. ΕΚΠΑ, 2023.

[Συ23] Μ. Συκιώτης, ***Ομάδες και Τοπολογία***. Κάλλιπος, 2023.

[Τσ20] Ι. Τσελεπίδης, ***Αλγεβρικές εκδοχές των θεωρημάτων Mayer-Vietoris και Künneth και τοπολογικές εφαρμογές αυτών***. Παν. Κρήτης, 2020.

[Φρ24] Α. Φράγκος, ***Γεωμετρική πλειογραμμική άλγεβρα***. ΕΚΠΑ, 2024.

[Φρ21] Α. Φράγκος, ***Εισαγωγή στην επίπεδη υπερβολική γεωμετρία***. ΕΚΠΑ, 2021.

[Φρ22] Α. Φράγκος, ***Μιγαδική ανάλυση Ι***. ΕΚΠΑ, 2022.

[Φρ23] Α. Φράγκος, ***Τοπολογία - Σημειώσεις παραδόσεων***. ΕΚΠΑ, 2023.

—Σημειώσεις για την αλγεβρική γεωμετρία, ΕΚΠΑ, 2025—