Φράγκος Αναστάσιος : 1112201900239

3ο Φυλλάδιο Ασκήσεων στην
Αναλυτική Θεωρία Αριθμών.

Παρατηρήσεις/Σχόλια:

Άσκηση 1η (01 στο φυλλάδιο): Ορίζουμε $P(x)=\prod_{p\le x} p$. Αποδείξτε ότι το θεώρημα των πρώτων αριθμών είναι ισοδύναμο με την:

$$\lim_{x\to\infty} P(x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

Λύση: Πριν προβούμε στη λύση της άσκησης, υπενθυμίζουμε τα εξής αποτελέσματα:

Υπενθύμιση πρώτη: Το θεώρημα των πρώτων αριθμών εξασφαλίζει ότι το πλήθος των πρώτων μικρότερων ενός δεδομένου $x>0$ ικανοποιεί τη συνθήκη:

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}$$

Δ

Υπενθύμιση δεύτερη: Έστω η συνάρτηση 'θήτα':

$$\vartheta(x) = \sum_{p\le x} \log p, \quad x>0$$

Το θεώρημα των πρώτων αριθμών είναι ισοδύναμο με τη συνθήκη:

$$\vartheta(x) \sim x.$$

Δ

Δεδομένων των δύο υπενθυμίσεων, δείχνουμε τα εξής:

($\Longrightarrow$): Το θεώρημα των πρώτων αριθμών συνεπάγεται τη σχέση

$$\lim_{x\to\infty} P(x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

Πράγματι, γράφουμε:

$$\Big(\prod_{p\le x} p\Big)^{\frac{1}{x}} \sim e^{\frac{1}{x}\overbrace{\sum_{p\le x}\log p}^{\vartheta(x)}} \sim e^{\frac{1}{x}x} \sim e$$

Επομένως $P(x)^{\frac{1}{x}} \sim e.$

2

($\Leftarrow$): Η σχέση $\lim_{x\to\infty} P(x)^{\frac{1}{x}} = e$ συνεπάγεται το Θεώρημα των πρώτων αριθμών.

Πράγματι:

$$\Big(\prod_{p\le x} p\Big)^{\frac{1}{x}} \sim e \Rightarrow e^{\frac{1}{x}\sum_{p\le x}\log p} \sim e \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x}\overbrace{\sum_{p\le x}\log p}^{\vartheta(x)} \sim 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vartheta(x) \sim x.$$

$\square$

Άσκηση 2η (03 στο φυλλάδιο): Για $x \geq 2$ ορίζουμε:

$$Li(x) = \int_2^x \frac{dt}{\ln t}$$

(α) Αποδείξτε ότι:

$$Li(x) = \frac{x}{\ln x}\left(1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k!}{(\ln x)^k}\right) + n!\int_2^x \frac{dt}{(\ln t)^{n+1}} + C_n$$

Όπου η C_n είναι σταθερά ανεξάρτητη του x.

(β) Για $x \geq 2$ αποδείξτε ότι:

$$\int_2^x \frac{dt}{(\ln t)^n} = O\left(\frac{x}{(\ln x)^n}\right)$$

Λύση:

(α) Η ζητούμενη σχέση θα προκύψει με διαδοχικές ολοκληρώσεις κατά παράγοντες (και προφανώς επαγωγή).

Με μια ολοκλήρωση κατά παράγοντες προκύπτει η σχέση:

$$Li(x) = \int_2^x (t)'\frac{1}{\ln t} + t\left(-\frac{1}{(\ln t)^2}\right)\cdot\frac{1}{t} + \frac{1}{(\ln t)^2}\,dt$$

$$= \left[t\frac{1}{\ln t}\right]_2^x + \int_2^x \frac{1}{(\ln t)^2}\,dt$$

$$= \frac{x}{\ln x} - \frac{2}{\ln 2} + \int_2 \frac{1}{(\ln t)^2}\,dt.$$

Υποθέτουμε ότι, έπειτα από n διαδοχικές ολοκληρώσεις κατά παράγοντες αληθεύει η σχέση:

$$Li(x) = \frac{x}{\ln x}\left(1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k!}{(\ln x)^k}\right) + n!\int_2^x \frac{dt}{(\ln t)^{n+1}} + \tilde{c}_n$$

για κάποια σταθερά $\tilde{c}_n$ ανεξάρτητη του x. Με μια ακόμη παραγοντική ολοκλήρωση του $\int_2^x \frac{dt}{(\ln t)^{n+1}}$ παρατηρούμε ότι:

$$\int_2^x \frac{dt}{(\ln t)^{n+1}} = \int_2^x \left[t\,\frac{1}{(\ln t)^{n+1}}\right]' dt - \int_2^x t\left(-\frac{1}{(\ln t)^{n+2}}\right)\frac{1}{t}\,(n+1)$$

$$= \frac{x}{(\ln x)^{n+1}} - \frac{2}{(\ln 2)^{n+1}} + (n+1)\int_2^x \frac{dt}{(\ln t)^{n+2}}$$

Άρα, $$Li(x) = \frac{x}{\ln x}\left(1+\sum_{k=1}^{n}\frac{k!}{(\ln x)^k}\right) + (n+1)!\int_2^x \frac{dt}{(\ln t)^{n+2}} + c_n$$

όπου $c_n = \tilde{c}_n + \dfrac{n!\cdot 2}{(\ln 2)^{n+1}}$ είναι μια σταθερά που εξαρτάται μόνο από το n.

□

(β) Αφαιρώντας δύο διαδοχικές σχέσεις του (α) έπεται

$$\underbrace{Li(x)-Li(x)}_{0} = \frac{x}{\ln x}\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k!}{(\ln x)^k} - \sum_{k=1}^{n-2}\frac{k!}{(\ln x)^k}\right) + n!\int_2^x \frac{dt}{(\ln t)^{n+1}} - (n-1)!\int_2^x \frac{dt}{(\ln t)^n} + c_n - c_{n-1}$$

$$\Rightarrow n\int_2^x \frac{dt}{(\ln t)^{n+1}} - \int_2^x \frac{dt}{(\ln t)^n} = -\frac{x}{\ln x}\,\frac{n}{(\ln x)^n}$$

$$\Rightarrow \int_2^x \frac{dt}{(\ln t)^n} = \frac{x\cdot n}{(\ln x)^n} + n\int_2^x \frac{dt}{(\ln t)^{n+1}}.$$

Επαγωγικά λοιπόν, $\forall m \geq n+1$:

$$\int_2^x \frac{dt}{(\ln t)^n} = \frac{x\cdot n}{(\ln x)^n} + \frac{x\cdot(n+1)}{(\ln x)^{n+1}} + \dots + \frac{x\cdot m}{(\ln x)^m} + \int_2^x \frac{dt}{(\ln t)^{m+1}}.$$

Οπότε αφήνοντας $m\to\infty$, $\int_2^x \frac{dt}{(\ln t)^n} \ll \frac{x n}{(\ln x)^n} \ll \frac{x}{(\ln x)^n}$ □

Άσκηση 3η (σ4 στο φυλλάδιο)

Έστω $S(x)$ και $T(x)$ πραγματικές συναρτήσεις τέτοιες ώστε:

$$T(x)=\sum_{n\le x} S\left(\frac{x}{n}\right)$$

για κάθε $x\geq 1$. Αν $S(x)=O(x)$ και c είναι μια θετική σταθερά, δ.ο. η σχέση:

$$S(x)\sim x \quad (\text{καθώς } x\to\infty)$$

συνεπάγεται την

$$T(x)\sim cx\ln x \quad (\text{καθώς } x\to\infty)$$

<u>Λύση:</u> Για τη λύση της άσκησης θα χρησιμοποιήσουμε τα παρακάτω

$\boxed{\text{ΛΗΜΜΑ 3.1:}}$ Για κάθε συνάρτηση $f(x)\sim g(x)$ υπάρχει πραγματική συνάρτηση $\mathcal{E}$ τ.ω.

$$f(x)=g(x)+\mathcal{E}(x) \quad \text{με} \quad \mathcal{E}(x)/g(x)\xrightarrow{x\to\infty} 0$$

<u>Απόδειξη:</u> Η σχέση ισχύει κάθως περιττά, αν γράψουμε:

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{g(x)}{g(x)}+\frac{f(x)-g(x)}{g(x)}\xrightarrow{x\to\infty} 1$$

και θέσουμε $\mathcal{E}(x)=f(x)-g(x)$. Δ

$\boxed{\text{ΠΡΟΤΑΣΗ 3.1:}}$ Ισχύει η σχέση:

$$\sum_{n\le x}\frac{1}{n}=\ln x+\gamma+O(1/x)$$

<u>Απόδειξη:</u> Στη γνωστή σχέση:

$$\sum_{n\le x} f(n)=\int_1^x f(t)\,dt+\int_1^x \{t\}f'(t)\,dt+f(1)-f(x)\{x\}$$

θέτουμε $f(t)=1/t$ και έχουμε:

$$\sum_{n\le x}\frac{1}{n}=\int_1^x\frac{1}{t}\,dt+\int_1^x\{t\}\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt+1-\frac{1}{x}\{x\}$$

$$\sum_{n\leq x}\frac{1}{n} = \ln x - \int_1^x \frac{\{t\}}{t^2}\,dt + 1 + O\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$= \ln x - \int_1^\infty \frac{\{t\}}{t^2}\,dt + \int_x^\infty \frac{\{t\}}{t^2}\,dt + 1 + O\left(\frac{1}{x}\right)$$

Επειδή επιπλέον:

$$\int_x^\infty \frac{\{t\}}{t^2}\,dt \ll \int_x^\infty \frac{1}{t^2}\,dt = \frac{1}{x} \quad \text{και} \quad \int_1^\infty \frac{\{t\}}{t^2}\,dt \ll \int_1^\infty \frac{1}{t^2}\,dt$$

Έπεται ότι:

$$\sum_{n\leq x}\frac{1}{n} = \ln x + k + O(1/x), \quad k\in\mathbb{R}.$$

Μπορεί επίσης να αποδειχθεί ότι $k=\gamma$ (όπου γ η σταθερά του Euler) - στην παρούσα άσκηση βέβαια δεν έχει ιδιαίτερη σημασία η συγκεκριμένη σταθερά k, οπότε δεν θα δείξουμε ότι $k=\gamma$ Δ

Αποδεικνύουμε λοιπόν την άσκηση: Ας υποθέσουμε τυχόν $k\in(0,1)$. Γράφουμε:

$$T(x) = \sum_{n\leq x} S\left(\frac{x}{n}\right) = \sum_{n\leq x^k} S\left(\frac{x}{n}\right) + \sum_{x^k<n\leq x} S\left(\frac{x}{n}\right)$$

και χρησιμοποιούμε το ΛΗΜΜΑ 3.1 στα 'μεγάλα' $\frac{x}{n}$ (δηλ. στο πρώτο άθροισμα):

$$T(x) = \sum_{n\leq x^k}\left[c\left(\frac{x}{n}\right) + \varepsilon\left(\frac{x}{n}\right)\right] + \sum_{x^k<n\leq x} \overbrace{S\left(\frac{x}{n}\right)}^{O(x)} \Rightarrow$$

$$T(x) = \sum_{n\leq x^k} c\left(\frac{x}{n}\right) + O\left(\sum_{n\leq x^k}\varepsilon\left(\frac{x}{n}\right)\right) + \overbrace{x^{1-k}\,O(x)}^{O(x^{2-k})}$$

$$T(x) = \sum_{n\leq x^k} c\left(\frac{x}{n}\right) + O\left(\sum_{n\leq x^k}\varepsilon\left(\frac{x}{n}\right)\right) + O\left(x^{2-k}\right)$$

$$\frac{T(x)}{x} = \sum_{n\leq x^k}\frac{c}{n} + O\left(\sum_{n\leq x^k}\frac{1}{n}\,\varepsilon\left(\frac{x}{n}\right)\Big/\frac{x}{n}\right) + O\left(x^{1-k}\right)$$

Η ποσότητα $\varepsilon\left(\frac{x}{n}\right)\Big/x$ είναι φραγμένη τελικά. Επομένως:

$$\frac{T(x)}{x} = \sum_{n\le x^k} \frac{c}{n} + O((1-k)\ln x) + O(x^{1-k})$$

Βάσει τώρα της ΠΡΟΤΑΣΗΣ 3.1:

$$\frac{T(x)}{x} = c\ln x^k + c\gamma + \cancel{O\left(\frac{1}{x}\right)} + O(k\ln x) + O(x^{1-k})$$

$$\frac{T(x)}{cx\ln x} = k + O\left(\frac{1}{\ln x}\right) + O(1-k) + O\left(\frac{x^{1-k}}{\ln x}\right)$$

Με όριο τώρα $k\to 1$, έπεται το ζητούμενο

$$\frac{T(x)}{cx\ln x} = 1 + O\left(\frac{1}{\ln x}\right) \Rightarrow \frac{T(x)}{cx\ln x} \xrightarrow{x\to\infty} 1$$

$$\Rightarrow T(x) \sim cx\ln x.$$

□

Άσκηση 4η (07 στο φυλλάδιο): Έστω n ένας θετικός ακέραιος. Συμβολίζουμε με $\omega(n)$ το πλήθος των διακεκριμένων πρώτων διαιρετών του n. Συγκεκριμένα:

$$\omega(n) := \begin{cases} 0, & n = 1 \\ k, & n = p_1^{a_1}\cdot\ldots\cdot p_n^{a_n} \end{cases}$$

Αποδείξτε ότι:

$$\sum_{n\le x} \omega(n) = x\ln\ln x + O(x)$$

Λύση:

$\boxed{\text{Υπενθύμιση:}}$ $\displaystyle\sum_{p\le x} \frac{1}{p} = \ln\ln x + A + O(1/\ln x)$ για κάποια σταθερά A

△

$\boxed{\text{ΛΗΜΜΑ 4.1:}}$ Για τη συνάρτηση $\sum_{n\le x} \omega(n)$ αληθεύει η σχέση:

$$\sum_{n\le x} \omega(n) = \sum_{p\le x} \left\lfloor \frac{x}{p} \right\rfloor$$

Απόδειξη: Πράγματι, αν $\chi_{\mathbb{P}}$ είναι η δείκτρια συνάρτηση των πρώτων:

$$\sum_{n\le x}\omega(n) = \sum_{n\le x}\sum_{p\mid n} = \sum_{n\le x}\sum_{d\mid n}\chi_{\mathbb{P}}(d)$$

Επομένως:

$$\sum_{n\le x}\omega(n) = \sum_{d\le x}\chi_{\mathbb{P}}(d)\left\lfloor\frac{x}{d}\right\rfloor = \sum_{p\le x}\left\lfloor\frac{x}{p}\right\rfloor$$

Δ

Η λύση λοιπόν της άσκησης έχει ως ακολούθως: Γράφουμε:

$$\sum_{n\le x}\omega(n) = \sum_{p\le x}\frac{x}{p} - \sum_{p\le x}\left\{\frac{x}{p}\right\}$$

και παρατηρούμε ότι $-\sum_{p\le x}\left\{\frac{x}{p}\right\} = O(x)$. Επομένως:

$$\sum_{n\le x}\omega(n) = x\sum_{p\le x}\frac{1}{p} + O(x).$$

Από την υπενθύμιση προκύπτει το ζητούμενο:

$$\sum_{n\le x}\omega(n) = x\ln\ln x + \overbrace{Ax + O(x/\ln x) + O(x)}^{O(x)}$$
$$= x\ln\ln x + O(x).$$

$\square$

Άσκηση 5η (08 απο φυλλάδιο): Αποδείξτε ότι, για κάθε $x\geq 2$,

$$\sum_{n\le x}\psi\left(\frac{x}{n}\right) = x\ln x + O(x).$$

Λύση:

$\boxed{\text{Υπενθύμιση:}}$ Υπάρχει σταθερά c τέτοια ώστε $\psi(x)\le cx$.

Δ

$\boxed{\text{Πόρισμα:}}$ $\psi(x) = O(x)$.

Δ

$\boxed{\text{ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 5.1:}}$ Ακολουθώντας τη λύση της Άσκησης 3, βλέπουμε ότι: Αν $S(x) \sim cx$ και $S(x) = O(x)$, τότε:

$$T(x) = \sum_{n \leq x} S\left(\frac{x}{n}\right) = cx\ln x + O\left(\frac{cx\ln x}{\ln x}\right)$$
$$= cx\ln x + O(x).$$

Δ

Η λύση λοιπόν της άσκησης προκύπτει από την ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 5.1, για $S(x) = \psi(x) = O(x)$, και από το Θεώρημα των πρώτων αριθμών, επειδή $\psi(x) \sim x$:

$$\sum_{n \leq x} \psi\left(\frac{x}{n}\right) = 1 \cdot x\ln x + O(x) = x\ln x + O(x)$$

$\square$

Άσκηση 6η (10 στο φυλλάδιο):

(α) Έστω f, f_0, g αριθμητικές συναρτήσεις τέτοιες ώστε $f = f_0 * g$. Αν $F(x) = \sum_{n \leq x} f(n)$ και $F_0(x) = \sum_{n \leq x} f_0(n)$, αποδείξτε ότι:

$$F(x) = \sum_{d \leq x} g(d)\, F_0\left(\frac{x}{d}\right)$$

(β) Γράφοντας $\mu^2 = u * (\mu^2 * \mu)$ και χρησιμοποιώντας το (α), δείξτε ότι:

$$\sum_{n \leq x} \mu^2(n) = \frac{6}{\pi^2}x + O(\sqrt{x})$$

Επιπλέον, με την υπόθεση ότι το Θεώρημα των πρώτων αριθμών ισχύει, αποδείξτε ότι:

$$\sum_{n \leq x} \mu^2(n) = \frac{6}{\pi^2}x + o(\sqrt{x})$$

<u>Λύση:</u> Πριν προβούμε στην λύση θα χρειαστεί να αποδείξουμε αρκετά πράγματα.

$\boxed{\text{ΠΡΟΤΑΣΗ 6.1:}}$ Δεδομένων δυο αριθμητικών συναρτήσεων f_0, g, για κάθε $1 \leq y \leq x$ αληθεύει:

$$\sum_{n \leq x} (f_0 * g)(n) = \sum_{d \leq y} g(d)\, F_0\left(\frac{x}{d}\right) + \sum_{m \leq x/y} f_0(m)\, G\left(\frac{x}{m}\right) - F_0\left(\frac{x}{y}\right) G(y)$$

<u>Απόδειξη (σύντομη):</u>

$$\sum_{n\le x}(f_0*g)(n) = \sum_{md\le x} f_0(m)g(d)$$

$$= \sum_{\substack{md\le x\\ d\le y}} f_0(m)g(d) + \sum_{\substack{md\le x\\ d>y}} f_0(m)g(d)$$

$$= \sum_{d\le y} g(d)\sum_{m\le \frac{x}{d}} f_0(m) + \sum_{m\le x/y} f_0(m)\sum_{y<d\le x/m} g(d)$$

$$= \sum_{d\le y} g(d)F_0\left(\frac{x}{d}\right) + \sum_{m\le x/y} f_0(m)\left[G\left(\frac{x}{m}\right)-G(y)\right]$$

$$= \sum_{d\le y} g(d)F_0\left(\frac{x}{d}\right) + \sum_{m\le \frac{x}{y}} G\left(\frac{x}{m}\right) - G(y)\sum_{m\le x/y} f_0(m)$$

$$= \sum_{d\le y} g(d)F_0\left(\frac{x}{d}\right) + \sum_{m\le x/y} f_0(m)G\left(\frac{x}{m}\right) - F_0\left(\frac{x}{y}\right)G(y)$$

Δ

Υπενθύμιση: $\zeta(2)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n^2} = 1$ Δ

Υπενθύμιση: Το θεώρημα των πρώτων αριθμών είναι ισοδύναμο με τη συνθήκη:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n} = 0$$

Δ

ΛΗΜΜΑ 6.1: Η συνάρτηση $(\mu^2*\mu)(n)$ είναι ίση με την $\mu(\sqrt{n})$ όταν $n=k^2$ για κάποιον $k\in\mathbb{N}$. Επιπλέον, $\mu^2*\mu(n)=0$ όταν $n\neq k^2$.

<u>Απόδειξη:</u> Η συνάρτηση $\mu^2*\mu$ είναι πολλαπλασιαστική, αφού οι μ^2,μ είναι πολλαπλασιαστικές. Επομένως, αρκεί να την μελετήσουμε σε δυνάμεις πρώτων.

$$(\mu^2*\mu)(p^s) = \sum_{t=0}^{s}\mu^2(p^t)\mu(p^{s-t}) = \begin{cases}-1 & \text{μόνον όταν } s=2\\ 0\end{cases}$$

αφού για $s=1$, $(\mu^2*\mu)(p) = \mu^2(p^0)\mu(p)+\mu^2(p)\mu(p^0) = -1+1=0$ και για $s\geq 3$ $\mu(p^t)\mu(p^{s-t})=0$ $\forall t\in\{0,1,\dots,s\}$. Δ

Έχοντας πει αυτά, ξεκινάμε τη λύση.

(α) Από την ΠΡΟΤΑΣΗ 6.1, για $y=1$ προκύπτει:

$$F(x)=\sum_{n\le x} f(n) = \sum_{d\le x} g(d)\, F_0\left(\frac{x}{d}\right)$$

$\square$

(β) Γράφουμε $\mu^2 = u*(\mu^2*\mu)$. Για $f_0=u$, $g=\mu^2*\mu$ στο (α) έχουμε:

$$\sum_{n\le x}\mu^2(n) = \sum_{d\le x}\Big(g(d)\overbrace{\sum_{s\le \frac{x}{d}}}^{\lfloor \frac{x}{d}\rfloor}\Big) = \sum_{d\le x}(\mu^2*\mu)(d)\left\lfloor\frac{x}{d}\right\rfloor$$

Τώρα, από το ΛΗΜΜΑ 6.1:

$$\sum_{n\le x}\mu^2(n) = \sum_{k\le\sqrt{x}}\mu(k)\left\lfloor\frac{x}{k^2}\right\rfloor$$

$$= x\sum_{k\le\sqrt{x}}\mu(k)/k^2 - \sum_{k\le\sqrt{x}}\mu(k)\left\{\frac{x}{k^2}\right\}$$

$$= x\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mu(k)}{k^2} - \underbrace{x\sum_{k>\sqrt{x}}\frac{\mu(k)}{k^2}}_{O(1/\sqrt{x})} - \underbrace{\sum_{k\le\sqrt{x}}\mu(k)\left\{\frac{x}{k^2}\right\}}_{O(\sqrt{x})}$$

Επομένως:

$$\sum_{n\le x}\mu^2(n) = x\frac{6}{\pi^2} + O\left(\frac{x}{\sqrt{x}}\right) + O(\sqrt{x})$$

$$= \frac{6}{\pi^2}x + O(\sqrt{x}).$$

Εάν υποθέσουμε ότι το Θεώρημα των πρώτων αριθμών ισχύει, τότε:

$$0 \ge \frac{-x\sum_{k>\sqrt{x}}\frac{\mu(k)}{k^2}}{\sqrt{x}} \ge \frac{-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\sum_{k>\sqrt{x}}\frac{\mu(k)}{k} \xrightarrow{x\to\infty} 0$$

και επιπλέον:

$$0 \geq \frac{-\sum_{k\leq\sqrt{x}} \mu(k)\left\{\frac{x}{k^2}\right\}}{\sqrt{x}} \geq -\sum_{k\leq\sqrt{x}} \frac{\mu(k)}{k} \xrightarrow{k\to\infty} 0$$

Ουσιαστικά αυτά μας δείχνουν ότι:

$$-x\sum_{k>\sqrt{x}} \frac{\mu(k)}{k^2} - \sum_{k\leq\sqrt{x}} \mu(k)\left\{\frac{x}{k^2}\right\} = o(\sqrt{x})$$

Και κατ' επέκταση ότι:

$$\sum_{n\leq x} \mu^2(n) = x\,\frac{6}{\pi^2} + o(\sqrt{x}).$$

□.