691. Διδακτική των Μαθηματικών Ι

Παρουσίαση 8^{η}, συνέχεια της $7^{\eta\varsigma}$

Α. Φράγκος

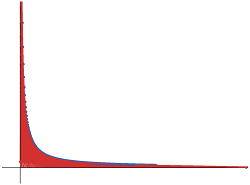
Δευτέρα 05 Δεκεμβρίου 2022

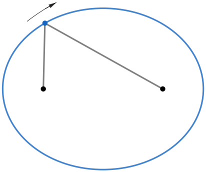
Τι θα διαπραγματευτούμε

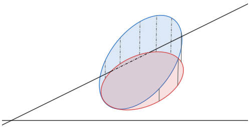
- Θα αναφέρουμε διάφορα έργα / εργασίες με τα οποία-ες οι μαθητές θα μπορούν να εμπλέκούν στα θέματα που μελετήσαμε στην 7η εργασία.
- Θα προσπαθήσουμε να εντοπίσουμε τις εμπλεκόμενες έννοιες, τις αναμενόμενες δράσεις των μαθητών καθώς επίσης και δυσκολίες που μπορούν να εμφανιστούν κατά τη διάρκεια της μελέτης.

Υπενθύμιση

Στην 7η εργασία διαπραγματευτήκαμε τρόπους με τους οποίους οι μαθητές μπορούν να έρθουν αντιμέτωποι με καμπύλες (υπερβολή, έλλειψη) μέσω πρακτικών ξυλουργικής.







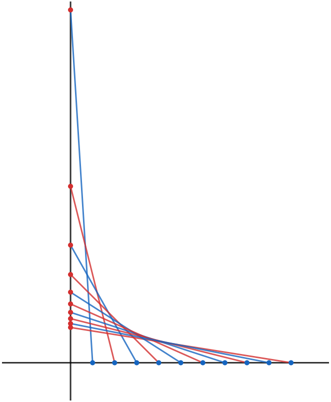
Γενικά η μελέτη μαθηματικών μέσω εργασιακού περιβάλλοντος είναι έργο υψηλών μαθηματικών απαιτήσεων, οπότε η χρήση κάποιων ψηφιακών (ή υλικών) μέσων είναι σχεδόν αναγκαία, για να υπάρξει στοιχειώδης κατανόηση. Επιπλέον, έτσι το αντικείμενο θα γίνει περισσότερο απτό, πράγμα που αποσκοπούμε δεδομένου ότι οι πρακτικές είναι εφαρμοσμένες.

Γι' αρχή, ας εξετάσουμε την υπερβολή.

Κατ' αρχάς, μπορεί να ζητηθεί από τους μαθητές η ανακατασκευή της κατασκευής, σε ψηφιακό τόπο. Αυτό αποσκοπεί στην καλύτερη κατανόηση της κατασκευής: μελετάται με λεπτομέρεια ο τρόπος με τον οποίο τραβούνται οι γραμμές και υπάρχει μια βάση για περαιτέρω μελέτη.

Έπειτα, μπορεί να ζητηθεί από τους μαθητές να περιγράψουν ποιές καμπύλες εντοπίζουν. Εδώ να σημειωθεί ότι οι γραμμές σχεδιάζουν το υπογράφημα μιας καμπύλης, όχι την ίδια την καμπύλη.

Παρατηρήστε μάλιστα ότι όταν το πλήθος των γραμμών είναι μικρό, ενδεχομένως δεν φαίνεται ιδιαίτερα ποιά ακριβώς είναι η καμπύλη.



Για να εντοπιστεί καλύτερα η καμπύλη, δύο πράγματα χρειάζεται να γίνουν (από πλευράς των μαθητών):

- Να προσέξουν πώς ο τεχνίτης διαχειρίζεται την καμπύλη! Ο τεχνίτης γνωρίζει (από εμπειρία, γνώση κ.ο.κ.) ποιό ακριβώς σχήμα χρειάζεται να προσέξει και να απομονώσει από την κατασκευή.
- Να τραβήξουν περισσότερες γραμμές. Η κατασκευή δεν είναι ακριβής, είναι προσεγγιστική. Μ' αυτόν τον τρόπο γίνεται κατανοητή η χρησιμότητα της προσέγγισης.

Μάλιστα (όπως και στην 7η εργασία) μπορεί να γίνει (από τον εκπαιδευτικό) χρήση του λογισμικού για να δειχθεί η κατασκευή με κίνηση. Δείτε εδώ. Έτσι θα γίνει ακόμη περισσότερο κατανοητή η προσέγγιση και το σχήμα που προσεγγίζεται.

Βέβαια ο τρόπος με τον οποίο γίνεται η προσέγγιση ενδεχομένως να μην είναι πλήρως αντιληπτός. Έχουν συνειδητοποιήσει οι μαθητές ότι η προσέγγιση γίνεται μέσω εφαπτόμενων ευθειών;

Το κινούμενο σχήμα μπορεί σαφώς να βοηθήσει για να παρθεί μια ιδέα για τον τρόπο προσέγγισης. Επιπλέον, εάν τα παιδιά κατασκευάσουν την υπερβολή $1/(\cdot)$ στην ήδη υπάρχουσα κατασκευή τους, θα μπορούν (ενδεχομένως) να δουν καλύτερα τις εφαπτόμενες ευθείες.

Άσκηση:

- Με χρήση του λογισικού GeoGebra Geometry να ανακατασκευάσετε την κατασκευή του τεχνίτη.
- Ποιές καμπύλες εντοπίζετε στο σχήμα σας; Αλλάζουν αυτές οι καμπύλες αν σχεδιάσετε περισσότερες γραμμές;
- Λέμε ότι η καμπύλη που φτιάχνουμε προσεγγίζεται μ' αυτήν την κατασκευή. Πώς καταλαβαίνετε εσείς αυτήν την προσέγγιση;
- Τι παρατηρείτε αν σχεδιάσετε (στο υπάρχον σχήμα σας στο GeoGebra) και την καμπύλη $1/x$;

Λύσεις: Παρουσιάστηκαν διάσπαρτα στις προηγούμενες διαφάνειες.

Έλλειψη - 1η προσέγγιση

Εδώ τα παιδιά γνωρίζουν τον ορισμό της ελλειψης από το λύκειο, αλλά δεν είναι ίσως άμεση η σύνδεση με την κατασκευή. Εδώ θα προσπαθήσουμε να κάνουμε αυτήν την σύνδεση. Εδώ μάλλον είναι καλύτερη η χρήση υλικών μέσων, αν κι αυτό είναι υποκειμενικό.

Είναι σημαντικό σε πρώτο βήμα να εντοπιστούν οι εστίες της έλλειψης - στην κατασκευή αυτές είναι τα καρφιά. Έπειτα, για να σχεδιάσουμε την έλλειψη χρειαζόμαστε κάποιου είδους απόσταση από τις εστίες, όπως χρειαζόμαστε κάποιου είδους (σταθερή) απόσταση από το κέντρο του κύκλου για να σχεδιάσουμε στον κύκλο. Στην κατασκευή, αυτή η σταθερή απόσταση δίνεται μέσω του σχοινιού.

Άσκηση:

- Διατυπώστε τον ορισμό της έλλειψης.
- Ποιές είναι οι εστίες της έλλειψης στην κατασκευή;
- Ποιά είναι η διάμετρος στην κατασκευή;
- Μπορείτε (χρησιμοποιώντας τα προηγούμενα) να περιγράψετε σε γενικές γραμμές γιατί αυτό που κατασκευάσαμε είναι πράγματι έλλειψη;

Λύσεις: Παρουσιάστηκαν διάσπαρτα στις προηγούμενες διαφάνειες.

Έλλειψη - 2η προσέγγιση

Η προβολές κύκλων είναι κάτι που εν γένει εμφανίζεται στην καθημερινότητα, και μάλιστα ίσως πολλοί μαθητές το έχουν δει αλλά δεν το έχουν παρατηρήσει. Ζητούμε λοπόν, γι' αρχή, να ρίξουν φως σε ένα νόμισμα κι έπειτα, στρίβοντάς το σιγά σιγά, να εντοπίσουν ποιά σχήματα εντοπίζονται στις προβολές.

Θα εντοπίσουν γραμμές, κύκλους, κι ενδιαμέσως; Τα ενδιάμεσα σχήματα είναι πεπλατισμένοι κύκλοι, άρα ίσως ελλείψεις. Είναι όντως ελλείψεις; Δεν φαίνεται κάπου η σύνδεση μεταξύ του ορισμού της έλλειψης και της προβολής του κύκλου.

Αυτό είναι ένα παράδειγμα του πώς λειτουργούν τα μαθηματικά «κατασκευαστικά». Όπως είδαμε και στην 7η παρουσίαση, δεν γίνεται άμεση συσχέτιση με τον ορισμό της έλλειψης, αλλά με κάτι που απορρέει από τον ορισμό (κι εν τέλει είναι ισοδύναμο μ' αυτόν), με την εξίσωση της έλλειψης.

$$\text{εξίσωση} \leftrightarrow \text{αναλυτική έκφραση} \boxed{\leftrightarrow \text{προβολές}}$$

Μπορούμε (δίνοντας διάφορες βοήθειες) να κατευθύνουμε τους μαθητές σε μια αιτιολόγιση για το πώς μπορεί η προβολή του κύκλου να είναι έλλειψη.

Έπειτα, είναι ωραία εφαρμογή να βρεθούν οι εστίες της έλλειψης και η διάμετρός της.

Θεωρούμε ότι η προβολή γίνεται με γωνία θ και ο κύκλος έχει ακτίνα ρ. Η διάμετρος της έλλειψης είναι 2ρ, κι αυτό προκύπτει λόγω του ότι η προβολή σ' έναν άξονα είναι αμετάβλητη. Μάλιστα, ο μεγάλος άξονας έχει μήκος ρ και ο μικρός $\rho \cos\theta$. Για τις εστίες, εάν O' είναι το προβαλλόμενο κέντρο του κύκλου (κι άρα το κέντρο της έλλειψης) και γ η απόσταση των εστιών από το O', γνωρίζουμε ότι:

$$\rho^2 = \rho^2 \cos\theta + \gamma^2, \text{ άρα } \gamma = \rho \sin\theta$$

Οπότε οι εστίες βρίσκονται στον μεγάλο άξονα, σε αποστάσεις $\gamma = \rho \sin\theta$ από το O'. Ενδιαφέρουσα είναι και η εκκεντρότητα της έλλειψης, που εν προκειμένω γίνεται $\gamma/\rho = \sin\theta$.

Άσκηση:

- Φαίνεται πουθενά - με άμεσο τρόπο - η συσχέτιση της προβολής του κύκλου με τον ορισμό της έλλειψης;
- Αν η προβολή του κύκλου ήταν έλλειψη, πώς θα βρίσκαμε τους άξονές της; Το κέντρο της; Τις εστίες της; Την εκκεντρότητά της;
  Υπόδειξη: χρησιμοποιείστε τη σχέση: $[\text{μεγάλος άξονας}]^2 = [\text{μικρός άξονας}]^2 + [\text{απόσταση εστιών}]^2$.
- Προσπαθήστε να συσχετίσετε την προβολή του κύκλου με την έλλειψη, χρησιμοποιώντας την εξίσωση της έλλειψης.

Λύσεις: Παρουσιάστηκαν διάσπαρτα στις προηγούμενες διαφάνειες.

Εμπλεκόμενες έννοιες, αναμενόμενες δράσεις, δυσκολίες

Εμπλεκόμενες έννοιες:

- Υπερβολή
- Προσέγγιση
- Εφαπτόμενες
- Κατασκευή
- Έλλειψη
    - Διάμετρος
    - Εστίες
    - Εκκεντρότητα
    - Άξονες
    - Εξίσωση της έλλειψης
- Προβολές

Αναμενόμενες δράσεις

- Συσχέτιση των μαθηματικών εννοιών με την πραγματικότητα.
- Σχεδιασμός με γεωμετρικά όργανα ή σε ψηφιακό περιβάλλον.
- Σύνδεση κατασκευών με «θεωρητικά» μαθηματικά.
- Κατανόηση της έννοιας της προσέγγισης.
- Μελέτη διδιάστατων μαθηματικών «out of the box», με μεταφορά στις τρεις διαστάσεις (αυτό είναι πολύ σημαντικό τέχνασμα στα μαθηματικά).
- Μια παρατήρηση στον φυσικό κόσμο μπορεί να περιγραφεί με μαθηματικά, με κάποιον τρόπο που οφείλουμε εμείς να σκεφτούμε.

Δυσκολίες:

- Πώς συσχετίζονται τα μαθηματικά με τον πραγματικό κόσμο;
- Πώς διαχειριζόμαστε όργανα / υλικά / το ψηφιακό περιβάλλον για να κάνουμε μαθηματικά;
- Γιατί κάνουμε προσέγγιση και δεν το βρήσκουμε ακριβώς; Γιατί η κατασκευή δεν είναι ακριβής, αφού φαίνεται με πολλές γραμμές να είναι; (Υπερβολή).
- Δυσκολία στον διαχειρισμό τρισδιάστατων αντεικειμένων.
- Δυσκολία στην εξήγηση παρατηρήσεων που γίνονται στον πραγματικό κόσμο, με μαθηματικά.