Αλγεβρική Τοπολογία - Ασκήσεις

Αναστάσιος Φράγκος Τελ. ενημέρωση: Δευτέρα, 20 Μαρτίου 2023

Συμβολισμοί - Παρατηρήσεις

- $\mathfrak{T}^X$ είναι η τοπολογία του τοπολογικού χώρου $(X, \mathfrak{T}^X)$.
- $\mathfrak{T}^X_A$ είναι η σχετική τοπολογία του $A \subseteq X$ στον τοπολογικό χώρο $(X, \mathfrak{T}^X)$.
- $\mathfrak{T}_\gamma$ είναι η τοπολογία γινόμενο του $(\prod_{i\in I} X_i, \mathfrak{T}_\gamma)$.
- $\mathfrak{T}_\varrho$ είναι η μετρική τοπολογία του μετρικού χώρου (X, ϱ).
- ∂M είναι το σύνορο της πολλαπλότητας M.
- $M^\circ := M \backslash \partial M$ είναι η πολλαπλότητα M χωρίς το σύνορό της.
- $\overline{M} := M \cup \partial M$ είναι η πολλαπλότητα M με το σύνορό της.
- $\mathrm{cl}_{\mathfrak{T}} A$ είναι η κλειστή θήκη του A στην τοπολογία $\mathfrak{T}$.
- $\mathrm{int}_{\mathfrak{T}} A$ είναι το εσωτερικό του A στην τοπολογία $\mathfrak{T}$.
- $\mathbb{D}^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid ||x|| \leqslant 1\}$.
- $\mathbb{S}^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid ||x|| = 1\} = \partial \mathbb{D}^{n+1}$.
- $A \approx B$ το A είναι ομοιομορφικό με το B.
- $\underrightarrow{ab}$ είναι η (κλειστή) ημιευθεία, με αρχή το a και που περνά από το b.
- $A \overline{\cap} B$ είναι το σημείο τομής των σχημάτων A, B, όταν αυτή υπάρχει και είναι μοναδική.

Περιεχόμενα

1 Ομοιομορφικοί χώροι

Άσκηση 1.1. Δείξτε ότι το γράφημα μιας συνεχούς συνάρτησης $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ είναι ομοιομορφικό με το $(0,1)$. Δηλαδή:

$$\left(\mathrm{Gr}\ f, \mathfrak{T}^{\mathbb{R}^2}_{\mathrm{Gr} f}\right) \simeq \left((0,1), \mathfrak{T}^{\mathbb{R}}_{(0,1)}\right)$$

όπου $\mathfrak{T}^{\mathbb{R}^2}_{\mathrm{Gr} f}$ και $\mathfrak{T}^{\mathbb{R}}_{(0,1)}$ είναι οι σχετικές τοπολογίες του γραφήματος και του διαστήματος αντίστοιχα. ■

Απόδειξη: Θα βρούμε μια αμφιμονοσήμαντη και αμφισυνεχή συνάρτηση $F : \left((0,1), \mathfrak{T}^{\mathbb{R}}_{(0,1)}\right) \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow \left(\mathrm{Gr}\ f, \mathfrak{T}^{\mathbb{R}^2}_{\mathrm{Gr} f}\right)$.

Ορίζουμε $F(x) = \big(x, f(x)\big)$ και παρατηρούμε ότι:

- Η F είναι αμφιμονοσήμαντη, με αντίστροφη $F^{-1} = p_1|_{\mathrm{Gr} f}$.
- Η F είναι συνεχής, αφού οι προβολες $p_1 = \mathrm{id}$ και $p_2 = f$ είναι συνεχείς.
- Η F^{-1} είναι συνεχής ως σύνθεση συνεχών, μιας και μπορεί να γραφεί $F^{-1} = p_1 \circ \mathrm{i}_{\mathrm{Gr} f}$. Η συνάρτηση $\mathrm{i}_{\mathrm{Gr} f} : \mathrm{Gr} f \to \mathbb{R}^2$ είναι εμφύτευση.

□

Άσκηση 1.2. Δείξτε ότι τα ακόλουθα υποσύνολα του $(\mathbb{R}^2, \mathfrak{T}_{|\cdot|})$ είναι ομοιομορφικά μεταξύ τους.

i. $\mathbb{S}^2_+$, όπου $\mathbb{S}^2_+ = \mathbb{S}^2 \cap \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z > 0\}$

ii. $(\mathbb{D}^2)^\circ$

iii. $(0,1)^2$

iv. $\Lambda = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < y < 1\}$

v. $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y > 0\}$

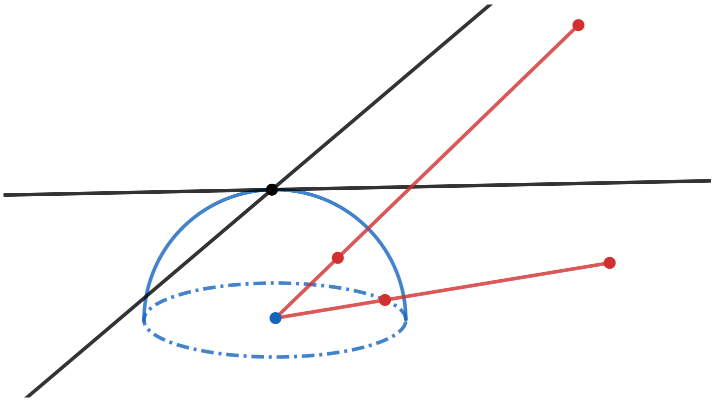
vi. Το εσωτερικό ενός τριγωνικού χωρίου.

■

Απόδειξη: Για την απόδειξη θα χρειαστούμε ένα λήμμα.

Λήμμα: *Τα σύνολα $\mathbb{S}^2_+$ και $\mathbb{R}^2$ είναι ομοιομορφικά.*

Απόδειξη του λήμματος: Το λήμμα μπορεί να αποδειχθεί παραποιώντας της απόδειξη του ομοιομορφισμού $\mathbb{S}^2 \backslash \{(0,0,1)\} \approx \mathbb{R}^2$. Ειδικότερα θα γίνει χρήση κάποιας «στερεογραφικής προβολής».



Θεωρούμε S το μετατοπισμένο ημισφαίριο $S = (0,0,-1) + \mathbb{S}^2_+$ και K το κέντρο του. Για κάθε $x \in \mathbb{R}^2 \times \{0\}$ θεωρούμε την ημιευθεία $\underrightarrow{Kx}$ και το σημείο τομής αυτής με το S, έστω $x_S = S \sqcap \underrightarrow{Kx}$.

Ορίζουμε συνάρτηση $\varphi : \mathbb{R}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^2 \times \{0\} \to S$ με $x \mapsto x_S$, και παρατηρούμε -όπως και στην περίπτωση του ομοιομορφισμού $\mathbb{R}^2 \approx \mathbb{S}^2 \backslash \{(0,0,1)\}$- ότι είναι αμφιμονοσήμαντη και αμφισυνεχής. Κατά συνέπεια, ένας ομοιομορφισμός. Με μεταφορά προκύπτει εκ νέου ένας ομοιομορφισμός $(0,0,1) + \varphi : \mathbb{R}^2 \to (0,0,1) + S = \mathbb{S}^2_+$.

△

(i.≈ ii.) Θεωρούμε φ την απεικόνιση-προβολή $\varphi = p_{\mathbb{R}^2}|_{\mathbb{S}^2_+} : \mathbb{S}^2_+ \to (\mathbb{D}^2)^\circ$:

$$\varphi\big((x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2})\big) = (x, y)$$

η οποία είναι αμφιμονοσήμαντη με εμφανή τρόπο (μιας και έχει αντίστροφο $\varphi^{-1} : (\mathbb{D}^2)^\circ \to \mathbb{S}^2_+$ την αντίστροφη προβολή $\varphi^{-1}\big((x,y)\big) = (x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2})$).

Η φ είναι επιπλέον συνεχής: Πράγματι, είναι γνωστό επιχείρημα κανείς να ελέγξει ότι οι:

$$\mathbb{S}^2_+ \xrightarrow{\varphi \times \{0\}} (\mathbb{D}^2)^\circ \times \{0\} \xrightarrow{p_{\mathbb{R}}} \mathbb{R}$$

(όπου $p_{\mathbb{R}}$ είναι οι προβολές στις συντεταγμένες) είναι συνεχείς συναρτήσεις ([Φρ] **Πρόταση 11.1**).

Επιπλέον, η φ^{-1} είναι συνεχής συνάρτηση, για παρόμοιο λόγο.

$$(\mathbb{D}^2)^\circ \xrightarrow{\varphi} \mathbb{S}^2_+ \xrightarrow{p_{\mathbb{R}}} \mathbb{R}$$

Βέβαια στο συγκεκριμένο ερώτημα η συνέχεια και η αντίστοφη συνέχεια είναι άμεσες από τον τύπο των συναρτήσεων και την κατά συντεταγμένες συνέχεια.

(ii. ≈ iii.) Σε αυτό το σημείο θα κάνουμε χρήση της απόδειξης του **Λήμματος**, μέσω του οποίου αποδείξαμε τον ομοιομορφισμό $\mathbb{S}^2_+ \approx \mathbb{R}^2$. Εντός του ημισφαιρίου $\mathbb{S}^2_+$ μπορεί να εγγραφεί μισό οκτάεδρο $O = O^\circ$ (ή γενικότερα μία πυραμίδα τετραπλευρικής κυρτής βάσης, χωρίς βάση και σύνορο) κι έπειτα το ημισφαίριο να απεικονιστεί σ' αυτό μέσω της $\psi : \mathbb{S}^2_+ \to O$, όπου η ψ είναι η ακόλουθη απεικόνιση:

Εάν $\omega : \mathbb{R}^2 \to O$ είναι η «στερεογραφική προβολή» στο O (δηλαδή η $x \mapsto \underrightarrow{Kx} \sqcap O$), ορίζουμε:

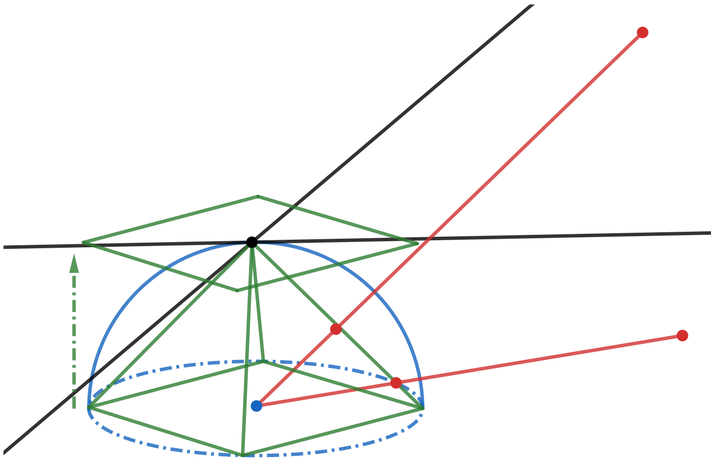
$$\psi = \omega \circ \varphi^{-1} : \mathbb{S}^2_+ \to \mathbb{R}^2 \to O$$

(όπου φ είναι η απεικόνιση του **Λήμματος**). Η απεικόνιση ψ είναι ένας ομοιομορφισμός.

Έπειτα το μισό οκτάεδρο μπορεί να προβαλθεί ομοιομορφικά σε ένα τετράγωνο (ή τετράπλευρο). Μάλιστα, επιλέγοντας ≪κατάλληλα≫ το οκτάεδρο, αποδεικνύουμε μέσω της προβολής $p^{O}_{(0,1)^2} : O \to (0,1)^2 \times \{0\} \hookrightarrow (0,1)^2$ την ομοιομορφία $O \approx (0,1)^2$. Γενικά λοιπόν (συνδυάζοντας και το ότι i. $\approx$ ii.) έχουμε αποδείξει ότι:

$$(\mathbb{D}^2)^\circ \approx \mathbb{S}^2_+ \approx \mathbb{R}^2 \approx O \approx (0,1)^2$$

Για την ακρίβεια έχουμε δείξει κάτι ≪καλύτερο≫: Στον τελευταίο ομοιομορφισμό το $(0,1)^2$ μπορεί να αντικατασταθεί από οποιοδήποτε ανοικτό (κυρτό) τετράπλευρο.



(iii. $\approx$ iv.) Προσεχώς, τώρα νυστάζω.

$\square$

Βιβλιογραφία

[Φρ] Φράγκος Αναστάσιος: ***Τοπολογία - Σημειώσεις παραδόσεων*** (Σημειώσεις ΕΚΠΑ, από τα μαθήματα της κ. Παπατριανταφύλλου Μ., 2023)