Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών
Τμήμα Μαθηματικών

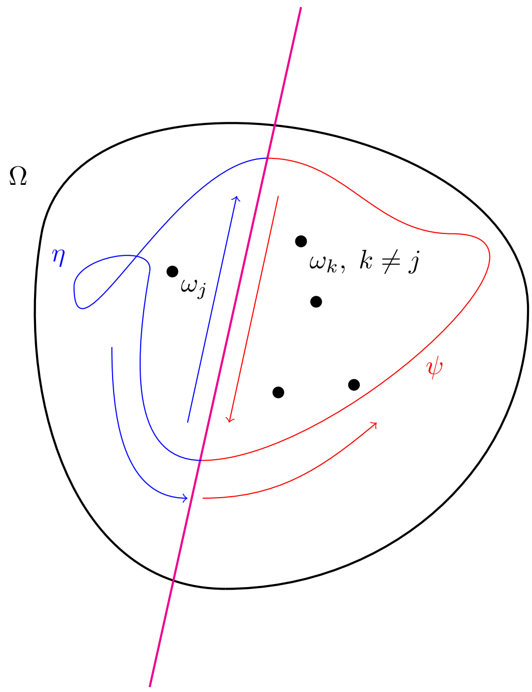
Φεβρουάριος 2022

Μιγαδική Ανάλυση I

Πρόχειρες Σημειώσεις

Επηρεασμένες από το μάθημα 701. Μιγαδική Ανάλυση I, όπως το δίδαξε ο κ. Χατζηαφράτης Τ.

Επιμέλεια - επεξεργασία: Φράγκος Αναστάσιος



$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \cdot \sum_{k\in[n+1]} \operatorname{Res}(f,\omega_k)\delta_\gamma(\omega_k)$$

Τελευταία ενημέρωση: 29 Μαρτίου 2022.

Πρόλογος

Οι σημειώσεις αυτές είναι επηρεασμένες από το μάθημα *701. Μιγαδική Ανάλυση I*, όπως αυτό διδάχθηκε το χειμερινό εξάμηνο του 2021-22 από τον κ. Χατζηαφράτη Τηλέμαχο. Μια πρώτη μορφή του παρόντος κειμένου είχε ανέβει στην η-τάξη των δακτυλογραφημένων σημειώσεων τον Φεβρουάριο του 2022, ήταν όμως αρκετά συνοπτική και με κάποιες αβλεψίες.

Η παρούσα «έκδοση» (ευελπιστώ) είναι αρκετά περισσότερο επεξηγηματική και με λιγότερα Λάθη. Επίσης έχουν υπάρξει μερικές προσθήκες που (νομίζω) αναδεικνύουν μια άλλη πτυχή της Μιγαδικής Ανάλυσης, μέσω της Αναλυτικής Θεωρίας Αριθμών.

Κανείς βέβαια δεν θα πρέπει να αρκεστεί σ' αυτές τις σημειώσεις - το πεδίο της Μιγαδικής Ανάλυσης είναι ευρύ και οι έννοιες κάπως θεμελιώδης για αρκετούς κλάδους των μαθηματικών και της φυσικής.

Φυσικά, θα είμαι ευγνώμων σε όποιον με ενημερώσει για τυχόντα λάθη παντός φύσεως, στη διεύθυνση:

afragos@email.com

Συμβολισμοί

- $\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, 3, \cdots\}$
- $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, 4, \cdots\}$
- $\mathbb{Q}$ είναι το σύνολο των ρητών.
- $\mathbb{R}$ είναι το σύνολο των πραγματικών.
- $\mathbb{C}$ είναι το σύνολο των μιγαδικών.
- $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \backslash \{0\}$
- $\mathbb{C}^+ := \{z \in \mathbb{C} \mid \Im z \geqslant 0\}$
- $[n] := \{1, 2, 3, \cdots, n\}$
- $\subseteq$ είναι η σχέση του υποσυνόλου.
- $\subset$ είναι η σχέση του γνήσιου υποσυνόλου.
- $\#A$ είναι ο πληθάριθμος του συνόλου A.
- ∂A είναι το (τοπολογικό) σύνορο του A
- $\underleftrightarrow{zw}$ είναι η ευθεία που διέρχεται από τα z, w.
- $\underrightarrow{zw}$ είναι η (κλειστή) ημιευθεία με αρχή το z, που διέρχεται από το w.
- $\angle(z, w)$ είναι η (ανοικτή) γωνία με πλευρές $\underrightarrow{Oz}$ και $\underrightarrow{Ow}$.
- $S(z, r) := \{\zeta \in \mathbb{C} \mid |\zeta - z| < r\}$
- $B(z, r) := \{\zeta \in \mathbb{C} \mid |\zeta - z| \leqslant r\}$

Η γραμματοσειρά είναι δημιούργημα του κ. Τσολομύτη Αντώνιου: Kerkis © Department of Mathematics, University of the Aegean. Η στοιχειοθέτηση έγινε σε LaTeX.

Περιεχόμενα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Εισαγωγή στους Μιγαδικούς Αριθμούς

1.1 Ιστορικά στοιχεία

Οι μιγαδικοί αριθμοί, όπως ενδεχομένως είναι γνωστό, προέκυψαν μέσω μιας ανάγκης για εφαρμογή τύπων επίλυσης τριτοβάθμιων πολυωνυμικών εξισώσεων. Η μελέτη των τριτοβάθμιων εξισώσεων είχε απασχολήσει τους μαθηματικούς ήδη από το 780-850 μ.Χ. (Al-Khwarzimi), χωρίς να υπήρχε αντίστοιχη γνωστή διαδικασία (τύπος) για την επίλυση τυχούσας τριτοβάθμιας εξίσωσης. Για δευτεροβάθμιες εξισώσεις ήταν γνωστές μέθοδοι επίλυσης (και αποδεικνύονταν μάλλον με γεωμετρικό τρόπο).

Τον $14^{\text{ο}}$ αιώνα σε δύο ανώνυμα γραπτά (Φλορεντία) εμφανίστηκε για πρώτη φορά ο λεγόμενος *μετασχηματισμός του Tschirnhaus*, οποίος μπορούσε να απλοποιήσει κάθε δεδομένη τριτοβάθμια πολυωνυμική εξίσωση $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$. Παρατηρήθηκε ότι αν θέσουμε $y = x - a/3$, η πολυωνυμική εξίσωση παίρνει την απλούστερη μορφή:

$$y^3 + py + q = 0, \text{ για κάποια } p, q$$

Αυτή η μορφή, η οποία ονομάζεται και *συνεπτυγμένη κυβική μορφή*, χρησιμοποιήθηκε μετέπειτα για την επίλυση τυχούσας τριτοβάθμιας πολυωνυμικής εξίσωσης. Εξάλλου αν βρεθεί τρόπος να επιλύονται εξισώσεις σε συνεπτυγμένη κυβική μορφή, μπορούν να προσδιοριστούν τα y για τα οποία $y^3+py+q = 0$ - οπότε εφαρμόζοντας τον μετασχηματισμό του Tschirnhaus αντίστροφα, τα x για τα οποία $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ μπορούν επίσης να βρεθούν.

Λέγεται ότι το 1526 ο Scipione del Ferro, λίγο πριν πεθάνει, έδωσε έναν τύπο επίλυσης εξισώσεων σε συνεπτυγμένη κυβική μορφή στον μαθητή του Antonio Maria Fiore. Ο τελευταίος κάλεσε τον Tartaglia σε «μαθηματική μονομαχία», στην οποία ζήτησε από τον Tartaglia να επιλύσει τριτοβάθμιες εξισώσεις. Προς κακή τύχη του Fiore, ο Tartaglia ανακάλυψε εκ νέου τον τύπο και κέρδισε την μονομαχία.

Ο Tartaglia εκμυστηρεύτηκε στον Cardano τον τύπο που ανακάλυψε, εφόσον ο δεύτερος έδωσε όρκο να μην τον διαρρεύσει. Εδώ να σημειωθεί ότι οι μαθηματικοί της εποχής δεν ήταν πολύ ανοικτοί με τις μαθηματικές τους ανακαλύψεις, διότι οι «μαθηματικές μονομαχίες» ήταν ένας τρόπος να δείξουν την αξία τους και (ενδεχομένως) να προσληφθούν απ' όποιον τους χρειαζόταν.

Ο Cardano βέβαια δεν ήταν μαθηματικός, ήταν έμπορος, και δεν κράτησε τον όρκο του. Δημοσίευσε την μέθοδο γράφοντας τους del Ferro και Tartaglia ως συγγραφείς, το 1545. Μια λύση εξίσωσης σε συνεπτυγμένη κυβική μορφή δίνεται από τη σχέση:

$$y = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{D}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{D}}, \text{ όπου } D = \left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^2$$

Αργότερα ο Rafael Bombelli παρατήρησε ότι η εξίσωση σε συνεπτυγμένη κυβική μορφή:

$$y^3 - 15y - 4 = 0$$

δίνει $D = -121 < 0$. Παρόλα αυτά, εάν θεωρήσουμε ότι ο $\sqrt{-1}$ είναι ένας περίεργος, φανταστικός αριθμός, οι τύποι του Cardano εφαρμόζουν και δίνουν σωστό αποτέλεσμα. Ο Bombelli έδωσε έναν συμβολισμό στον αριθμό $\sqrt{-1}$, όχι όμως το γνωστό i. Οι μαθηματικοί της εποχής δεν έμεναν και πολύ ικανοποιημένοι με αυτήν την «αυθαίρετη» ύπαρξη του αριθμού $\sqrt{-1}$. Εξάλλου, τι ερμηνεία θα είχε ένας τέτοιος αριθμός;

Ο John Wallis σημείωσε ότι, όπως οι αρνητικοί αριθμοί έχουν μια φυσική ερμηνεία (ανάκλαση των θετικών ως προς το 0 στην πραγματική ευθεία), έτσι και ο $\sqrt{-1}$ έχει γεωμετρική ερμηνεία (την οποία ανέπτυξε σε έναν βαθμό).

Η γεωμετρία του $\sqrt{-1}$ εξερευνήθηκε περισσότερο από τον Abraham de Moivre. Εάν οι διάφοροι αριθμοί $a+b\sqrt{-1}$ ταυτιστούν με τα σημεία (a,b) του επιπέδου, μπορεί να ληφθεί ο τύπος:

$$\big(\rho\cos\theta+\rho(\sqrt{-1})\sin\theta\big)^n=\rho^n\big(\cos(n\theta)+(\sqrt{-1})\sin(n\theta)\big),\ n\in\mathbb{N}$$

όπου (ρ,θ) είναι οι πολικές συνταταγμένες του (a,b). Αυτό δείχνει ότι κανείς μπορεί να φαντάζεται τις $n-$οστές μιγαδικές ρίζες ως κορυφές $n-$γώνων, πράγμα που είχε παρατηρήσει και ο Euler.

Ο Euler ήταν ο πρώτος που εισήγαγε τον γνωστό συμβολισμό $i=\sqrt{-1}$. Επίσης, ορίζοντας κατάλληλα τη συνάρτηση $e^{i\theta}$ απέδειξε ότι $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$.[Or] Θα δούμε ότι ο ορισμός του $e^{i\theta}$ δεν είναι εντελώς αυθαίρετος και έχει γεωμετρική / φυσική σημασία.

Αυτά καλύπτουν κάπως και πολύ περιληπτικά τις απαρχές της Μιγαδικής Ανάλυσης. Στη συνέχεια θα αναφερθούμε περισσότερο αυστηρά σ' αυτή τη θεωρία, με τον ≪σύγχρονο≫ μαθηματικό τρόπο.

1.2 Βασικοί ορισμοί

Πριν ορίσουμε τους μιγαδικούς αριθμούς, ας παρατηρήσουμε κάποιες σημαντικές ιδιότητές τους που θα οδηγήσουν στον ορισμό μας.

- Γενικά, εάν υποθέσουμε ότι ένας αριθμός i (με τις ιδιότητες του $\sqrt{-1}$) υπάρχει, μπορούμε να ορίσουμε τα πολλαπλάσια αυτού bi, $b\in\mathbb{R}$. Φυσικά, προσθέτοντας $a\in\mathbb{R}$, μας επιτρέπεται να γράψουμε αριθμούς της μορφής $a+bi$. Οι αριθμοί $a+bi$ ονομάζονται *μιγαδικοί* γιατί ≪μπλέκουν / αναμειγνύουν≫ το φανταστικό μέρος bi με το πραγματικό a. Το γιατί δεν ταυτίζουμε το i με το $\sqrt{-1}$ (όπως έκανε ο Euler) θα το δούμε αργότερα.
- Είναι δυναντόν να προσθέσουμε δύο μιγαδικούς αριθμούς $a+bi$, $c+di$ ως εξής:

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$$

- Εφόσον το i έχει ιδιότητες ανάλογες του $\sqrt{-1}$, αναμένουμε $i^2=-1$. Οπότε, αν πολλαπλασιάσουμε δύο μιγαδικούς αριθμούς $a+bi$, $c+di$ θα έχουμε:

$$(a+bi)\cdot(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$$

- Ένας τρόπος να αναπαρασταθούν οι μη αρνητικοί πραγματικοί αριθμοί μπορεί να επιτευχθεί μετρώντας αποστάσεις σε μια ημιευθεία.[Fr), σελ. 32-33] Για να επεκταθεί το σύνολο των αριθμών (ώστε να περιέχει και τους αρνητικούς) εισάγεται και η αντικείμενη ημιευθεία. Αναμένουμε ότι για να γεωμετρικοποιήσουμε τους μιγαδικούς αριθμούς ενδεχομένως θα χρειάζεται να χρησιμοποιηθεί ακόμη μια διάσταση, οπότε ένα υποσύνολο του επιπέδου (αφού εισάγεται ακόμη μία ≪πληροφορία≫, το μιγαδικό μέρος). Μάλιστα, επειδή ένας μιγαδικός αριθμός περιέχει δύο ειδών ≪πληροφορίες≫ (το πραγματικό και το φανταστικό μέρος), εκ των οποίων καθένα μπορεί να λάβει οποιαδήποτε πραγματική τιμή, αναμένουμε ότι το υποσύνολο που θα χρησιμοποιηθεί θα είναι όλο το επίπεδο.

Ορισμός 1.1: (Το σύνολο των μιγαδικών). Θεωρούμε το αλγεβρικό σώμα $(\mathbb{C},\oplus,\odot)$, το οποίο έχει τις εξής ιδιότητες:

- $\mathbb{C}=\mathbb{R}^2$
- Υπάρχουν δύο πράξεις $(\oplus,\odot)$, πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού, οι οποίες καθιστούν τη δομή $(\mathbb{C},\oplus,\odot)$ ένα αλγεβρικό σώμα, και ορίζονται με τον εξής τρόπο:
    - ◇ $(a,b)\oplus(c,d)=(a+c,b+d)$
    - ◇ $(a,b)\odot(c,d)=(ac-bd,ad+bc)$
    - ◇ $\mathbf{1}_{\mathbb{C}}=(1,0)$

Είναι επίσης δυνατός ο $\mathbb{R}-$βαθμωτός πολλαπλασιασμός.

Είναι υπόθεση ρουτίνας κανείς να δείξει ότι η αλγεβρική δομή του **Ορισμού 1.1** είναι πράγματι αλγεβρικό σώμα. Υπενθυμίζουμε μόνο (για χάρη πληρότητας) τον ορισμό του αλγεβρικού σώματος.

Ορισμός 1.2: (Αλγεβρικό σώμα). Ένα αλγεβρικό σώμα είναι μια δομή $(F, \oplus, \odot)$, με πράξεις $\oplus, \odot$ πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού, τέτοια ώστε:

- Η δομή $(F, \oplus, \odot)$ να μεταθετικός δακτύλιος, δηλαδή:
  - ◇ $F \neq \emptyset$
  - ◇ Η πράξη $\oplus$ είναι καλά ορισμένη, αντιμεταθετική, προσαιτεριστική.
  - ◇ Υπάρχει ουδέτερο στοιχείο ($\mathbf{0}_F$) της $\oplus$.
  - ◇ Υπάρχει για κάθε $f \in F$ το αντίθετό του $(-f)$, ως προς την $\oplus$.
  - ◇ Η $\odot$ είναι καλά ορισμένη, αντιμεταθετική, προσαιτεριστική.
  - ◇ Η πράξη $\odot$ είναι επιμεριστική ως προς $\oplus$.
- Υπάρχει ουδέτερο στοιχείο ($\mathbf{1}_F$) της $\odot$.
- Υπάρχει για κάθε $f \in F \backslash \{\mathbf{0}_F\}$ το αντίθετό του (f^{-1}), ως προς την $\odot$.
- Το σύνολο F δεν ταυτίζεται με το $\{\mathbf{0}_F\}$.

Το σώμα των μιγαδικών που ορίσαμε έχει πράγματι τις επιθυμητές ιδιότητες που διερευνήσαμε. Μάλιστα, το στοιχείο που παίζει τον ρόλο του $\sqrt{-1}$ είναι το $(0,1)$. Πράγματι, από τον τρόπο με τον οποίο ο πολλαπλασιασμός ορίστηκε:

$$(0,1) \odot (0,1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1,0) = -1 \cdot (1,0) = -1 \cdot \mathbf{1}_{\mathbb{C}}$$

Ορισμός 1.3: (Μιγαδική μονάδα). Ο αριθμός $(0,1)$ θα καλείται μιγαδική μονάδα και θα συμβολίζεται με i.

Υπάρχει λόγος που δεν ταυτίσαμε εξαρχής $i = \sqrt{-1}$. Η ύπαρξη της ρίζας στο $\sqrt{-1}$ μπορεί να οδηγήσει σε κάποιου είδους αντιφάσεις, τις οποίες δεν επιθημούμε κατά την ανάπτυξη της θεωρίας. Η σημαντικότερη είναι η ακόλουθη: Από τις ιδιότητες της ρίζας:

$$\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{(-1) \cdot (-1)} = \sqrt{1} = 1 \neq -1$$

το οποίο δεν είναι επιθυμητό, αφού θέλουμε $i^2 = -1$.

Παρατήρηση 1.1: Κάθε αριθμός του $\mathbb{C}$ μπορεί να γραφεί ως $(a,0) \oplus [(b,0) \odot (0,1)]$, οπότε $(a,b) = (a,0) \oplus [(b,0) \odot i]$.

Απόδειξη: Πράγματι, αρκεί να παρατηρήσουμε ότι:

$$(a,b) = (a,0) \oplus (0,b) = (a,0) \oplus [(b,0) \odot (0,1)]$$

□

Μερικές φορές παραποιούμε την παραπάνω μορφή και γράφουμε $a + bi$ αντί $(a,0) \oplus [(b,0) \odot i]$. Παρατηρήστε ότι κανονικά οι πραγματικοί αριθμοί *δεν* είναι υποσύνολο των μιγαδικών αριθμών - οι αντίστοιχοι πραγματικοί αριθμοί στο επίπεδο είναι οι $(x,0) \in \mathbb{R} \times \{0\}$. Κάνοντας όμως την ταύτηση $x \equiv (x,0)$ είναι δυνατόν να γράψουμε $a \oplus [b \odot i]$ για τον μιγαδικό αριθμό (a,b), κι απλοποιώντας ακόμη περισσότερο, να γράψουμε $a+bi$. Επιπλέον καταφέρνουμε τον «εγκλεισμό» $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ (αφού $a+0i = a \in \mathbb{R}$) το οποίο δικαιολογεί το ότι συχνά θεωρούμε τους μιγαδικούς ως επέκταση των πραγματικών.

Φυσικά αυτή η ταύτιση δικαιολογείται αυστηρότερα λόγω του ότι η απεικόνιση $(a,0) \mapsto a$ είναι ένας ισομορφισμός σωμάτων.

Παρατήρηση 1.2: Η απεικόνιση $\varphi : \mathbb{R} \times \{0\} \to \mathbb{R}$ με $(a,0) \mapsto a$ είναι ισομορφισμός σωμάτων. Παρατηρήστε ότι το $\mathbb{R} \times \{0\}$ είναι υπόσωμα του $\mathbb{C}$, κληρονομώντας τις πράξεις του $\mathbb{C}$.

Απόδειξη: Πράγματι, εξ ορισμού των πράξεων, οι σχέσεις:

$$\varphi((a,0) + (b,0)) = \varphi\big((a+b,0)\big) = a + b = \varphi\big((a,0)\big) + \varphi\big((b,0)\big)$$

και

$$\varphi((a,0)\cdot(b,0)) = \varphi\big((ab,0)\big) = ab = \varphi\big((a,0)\big)\cdot\varphi\big((b,0)\big)$$

αληθεύουν. Η φ είναι προφανώς αμφιμονοσήμαντη.

□

Σε κάθε μιγαδικό $z = (a,b)$ αυτά τα a και b καλούνται πραγματικά και (αντίστοιχα) φανταστικά μέρη. Αυστηρότερα:

Ορισμός 1.4: (Πραγματικά και φανταστικά μέρη). Έστω $z \in \mathbb{C}$. Το z πάντοτε γράφεται στη μορφή $z = (a,0) \oplus [(b,0) \odot i]$, όπου $a, b \in \mathbb{R}$. Ορίζουμε *πραγματικό μέρος του* z τον αριθμό $\Re(z) := ||(a,0)|| = a$, και ως *φανταστικό μέρος του* z τον αριθμό $\Im(z) := ||(0,b)|| = b$.

Φυσικά ο παραπάνω ορισμός είναι εφικτός επειδή ορίσαμε $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, οπότε είναι δυνατόν να οριστούν αποστάσεις μέσω της νόρμας $||\cdot||$:

$$||(a,b)|| = \sqrt{a^2+b^2}$$

Είναι επιπλέον δυνατόν να δώσουμε τον ακόλουθο ορισμό:

Ορισμός 1.5: (Μέτρο μιγαδικού αριθμού). Έστω $z \in \mathbb{C}$. Το z έχοντας μορφή διανύσματος, έχει ένα μέτρο $||z||$. Ορίζουμε λοιπόν ως μέτρο του μιγαδικού z τον θετικό πραγματικό αριθμό:

$$|z| := ||z|| = \sqrt{\Re(z)^2 + \Im(z)^2}$$

Πρόταση 1.1: Κάθε αριθμός $z = (a,b)$ του $\mathbb{C}\backslash\{0\} = \mathbb{C}^*$ έχει ως πολλαπλασιαστικό αντίστροφο τον αριθμό:

$$\frac{1}{z} := \frac{a}{a^2+b^2} + \frac{-b}{a^2+b^2}i$$

Απόδειξη: Πράγματι, εξ' ορισμού του πολλαπλασιασμού:

$$\left(\frac{a}{a^2+b^2} + \frac{-b}{a^2+b^2}i\right)\cdot(a+bi) = \left(\frac{a^2}{a^2+b^2} + \frac{b^2}{a^2+b^2}\right) + \left(\frac{-ab}{a^2+b^2} + \frac{ba}{a^2+b^2}\right)i = 1$$

Από τη μεταθετικότητα της «·» έπεται το ζητούμενο, αφού ισχύει και το ότι:

$$(a+bi)\cdot\left(\frac{a}{a^2+b^2} + \frac{-b}{a^2+b^2}i\right) = 1$$

□

Η ύπαρξη του πολλαπλασιαστικού αντιστρόφου στην επέκταση είναι πολύ ενδιαφέρουσα ιδιότητα. Όπως θα δούμε σε επόμενο κεφάλαιο, η ύπαρξη του πολλαπλασιαστικού αντιστρόφου επιτρέπει έναν πιο «άμεσο» ορισμό παραγώγου στο $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$. Σε μαθήματα πολυμεταβλητού απειροστικού λογισμού / γεωμετρικής ανάλυσης ορίζαμε την παράγωγο (γενικά) μέσω υπερεπιπέδων (του διαφορικού σ' ένα σημείο), μιας και δεν μπορούσαμε να διαιρέσουμε με διάνυσμα. Στους μιγαδικούς όμως η ποσότητα:

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h},\ z,h \in \mathbb{C}$$

έχει νόημα.

Μια έννοια που θα εμφανίζεται συχνά στη μετέπειτα ανάλυσή μας είναι η έννοια των συζυγών μιγαδικών αριθμών, δηλαδή των μιγαδικών αριθμών που είναι ανάκλαση ενός μιγαδικού αριθμού ως προς την πραγματική ευθεία.

Ορισμός 1.6: (Συζυγής μιγαδικός αριθμός). Ορίζουμε ως συζυγή μιγαδικό αριθμό του z τον $\overline{z}$, ο οποίος είναι συμμετρικός του z ως προς την ευθεία $\underleftrightarrow{xx'}$. Ειδικότερα:

$$\overline{z} := \Re(z) - \Im(z)i$$

Μερικές χρήσιμες ιδιότητες που προκύπτουν με πράξεις και που θα χρησιμοποιούμε είναι οι ακόλουθες:

Παρατήρηση 1.3: (Ιδιότητες της συζυγίας). Για κάθε (ενδεχομένως μη μηδενικούς) μιγαδικούς αριθμούς z και w ισχύουν οι σχέσεις:

- $\overline{(\overline{z})} = z$
- $z \cdot \overline{z} = |z|^2$
- $\dfrac{1}{\overline{z}} = \overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)}$
- $\overline{z}^n = \overline{z^n},\ n \in \mathbb{N}$
- $\overline{z} \cdot \overline{w} = \overline{z \cdot w}$
- $\overline{z} + \overline{w} = \overline{z + w}$
- $\dfrac{\overline{z}}{\overline{w}} = \overline{\left(\dfrac{z}{w}\right)}$

1.3 Η γεωμετρία των μιγαδικών αριθμών

Σε αυτό το σημείο θα αναφέρουμε βασικές γεωμετρικές ιδιότητες των μιγαδικών αριθμών, που θα χρησιμεύσουν στο υπόλοιπο αυτών των σημειώσεων. Εξάλλου η γεωμετρικοποίηση των μιγαδικών αριθμών, όπως και των πραγματικών, θα διευκολύνει την κατανόησή μας και θα επιτρέψει την ανάπτυξη κάποιων αποτελεσμάτων κι εννοιών.

Οι μιγαδικοί αριθμοί $(a, b) = a + ib$ έχουν οριστεί ως σημεία του καρτεσιανού επιπέδου (με μια επιπλέον αλγεβρική δομή, που τους καθιστούν σώμα). Ο ορισμός λοιπόν επιτρέπει την έκφραση των μιγαδικών αριθμών μέσω πολικών συντεταγμένων, την οποία ονομάζουμε *τριγωνομετρική αναπαράσταση*. Έτσι, ένας μιγαδικός αριθμός z μπορεί να γραφεί:

$$z = \rho_z(\cos\theta_z + i\sin\theta_z)$$

για κάποια ακτίνα $\rho_z \geqslant 0$ και γωνία $\theta_z \in \mathbb{R}$. Είναι ίσως ήδη γνωστό ότι αυτή δεν είναι μια μονοσήμαντη γραφή, αφού οποιαδήποτε γωνία:

$$\theta_z \in \left\{2\kappa\pi + \arccos\left(\frac{\Re(z)}{|z|}\right) \,\middle|\, \kappa \in \mathbb{Z}\right\}$$

(δοθέντως του ρ_z) εκφράζει τον ίδιο μιγαδικό αριθμό z. Αν αποσκοπούμε σε αυτό το μονοσήμαντο, είναι σκόπιμο να δώσουμε τον ακόλουθο ορισμό:

Ορισμός 1.7: (Όρισμα μιγαδικού αριθμού). Η γωνία θ_z του μιγαδικού αριθμού z δεν είναι μονοσήμαντα ορισμένη. Ειδικότερα, κάθε πραγματικός αριθμός στο σύνολο:

$$\left\{2\kappa\pi + \arccos\left(\frac{\Re(z)}{|z|}\right) \,\middle|\, \kappa \in \mathbb{Z}\right\}$$

μπορεί να χρησιμοποιηθεί στην τριγωνομετρική αναπαράσταση του αριθμού.

Για να εξασφαλιστεί λοιπόν το μονοσήμαντο της γωνίας, ορίζουμε τη συνάρτηση:

$$\arg : \mathbb{C}^* \to (-\pi, \pi] \text{ με } z \mapsto \begin{cases} \arccos\left(\dfrac{\Re(z)}{|z|}\right), & \text{εάν } z \in \mathbb{C}^*_+ \\ -\arg(\overline{z}), & \text{εάν } z \in \mathbb{C}^* \backslash \mathbb{C}^+ \end{cases}$$

(Ουσιαστικά χρησιμοποιούμε μόνο γωνίες με πλευρά $\overrightarrow{Ox}$ και μέτρο στο $(-\pi, \pi]$). Η τριγωνομετρική μορφή του z για $\theta_z = \arg(z)$ είναι μονοσήμαντη. Αυτή η ιδιότητα θα δειχθεί με την παρατήρηση που ακολουθεί.

Παρατήρηση 1.4: Η συνάρτηση $\arg : \mathbb{C}^* \to (-\pi, \pi]$ έχει αμφιμοσήμαντο περιορισμό $\arg|_{\partial S(0,1)}$, όπου $\partial S(0, 1) = \{z \in \mathbb{R}^2 \mid ||z|| = 1\} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. Ως πόρισμα, κάθε αριθμός $z \in \mathbb{C}$ έχει μοναδική τριγωνομετρική αναπαράσταση με $\theta_z = \arg(z)$.

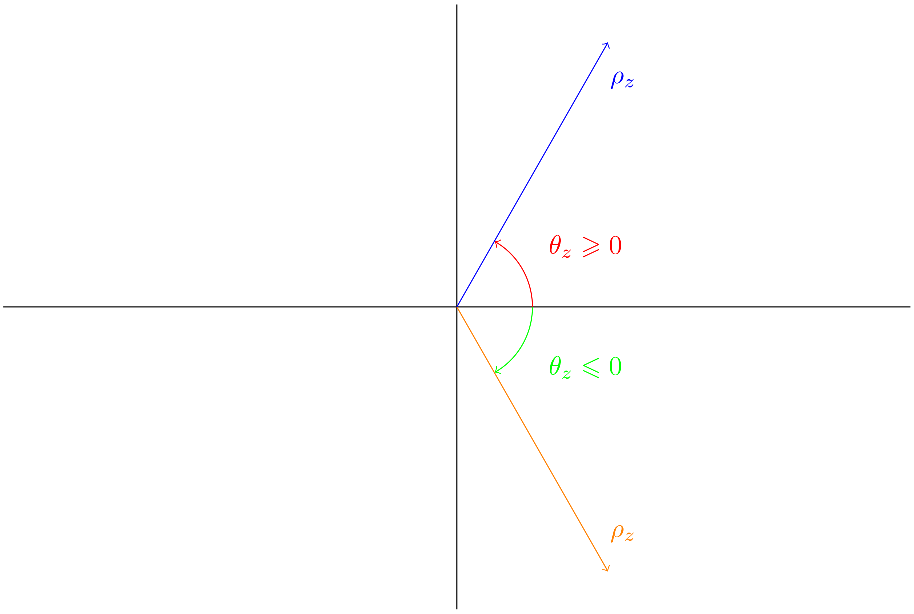
Απόδειξη: Για κάθε $\theta \in [0, \pi]$ επιλέγουμε σημείο $z \in \partial S(0, 1) \cap \mathbb{C}^+$ τέτοιο ώστε $\angle\big((1, 0), z\big) = \theta$. Αντίστοιχα, για κάθε $\theta \in (-\pi, 0)$ επιλέγουμε σημείο $z \in \partial S(0, 1) \cap (\mathbb{C}\backslash\mathbb{C}^+)$ τέτοιο ώστε $\angle\big((1, 0), z\big) = \theta$. Ορίζουμε τη συνάρτηση $\psi(\theta) = z$ και παρατηρούμε ότι αυτή αποτελεί αντίστροφη της $\arg$. Αυτό δείχνει το αμφιμονοσήμαντο της $\arg|_{\partial S(0,1)}$.

Το πόρισμα είναι άμεση συνέπεια του γεγονότος ότι:

$$\forall z \in \mathbb{C}^*,\ z = |z| \cdot \frac{z}{|z|} \textbf{ και } \frac{z}{|z|} \in \partial S(0, 1)$$

□

Πολλές φορές θα γράφουμε θ_z αντί $\arg(z)$, μιας και είναι ευκολότερο στη γραφή.



Αν θυμηθούμε την πρόσθεση διανυσμάτων από το σχολείο, είναι μάλλον σχετικά εύκολο να προσδώσουμε μια γεωμετρική εποπτεία στην πρόσθεση μιγαδικών αριθμών (ως πρόσθεση διανυσμάτων). Τι γίνεται όμως με τον πολλαπλασιασμό;

Είδαμε ότι, με αυτήν την επιπρόσθετη δομή στο επίπεδο, κανείς είναι δυνατόν να πολλαπλασιάσει και να διαιρέσει «σημεία» του επιπέδου. Με καρτεσιανές συντεταγμένες, ο πολλαπλασιασμός δύο μιγαδικών αριθμών z και w είδαμε ότι ορίζεται ως εξής:

$$z \cdot w = \big(\Re(z) + i\Im(z)\big) \cdot \big(\Re(w) + i\Im(w)\big) = \Re(z) \cdot \Re(w) - \Im(z) \cdot \Im(w) + i\big(\Re(z) \cdot \Im(w) + \Re(w) \cdot \Im(z)\big)$$

το οποίο, εκ πρώτης όψεως, δεν εμφανίζει κάποια γεωμετρική εποπτεία. «Μετασχηματίζοντας» τα z, w στην τριγωνομετρική τους μορφή, είναι δυνατόν να παρθεί ένας τύπος ο οποίος μπορεί να εκφραστεί γεωμετρικά.

Πρόταση 1.2: Έστω $z, w \in \mathbb{C}$ με τριγωνομετρικές αναπαραστάσεις:

$$z = \rho_z(\cos\theta_z + i\sin\theta_z) \ \textbf{και} \ w = \rho_w(\cos\theta_w + i\sin\theta_w)$$

Τότε το γινόμενο $z \cdot w$ είναι:

$$z \cdot w = \rho_z\rho_w\big(\cos(\theta_z + \theta_w) + i\sin(\theta_z + \theta_w)\big)$$

Δηλαδή, γεωμετρικά μιλώντας, ο πολλαπλασιασμός στρέφει τους μιγαδικούς αριθμούς και κάνει συστολοδιαστολή (rescaling).

Απόδειξη: Πράγματι, έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} z \cdot w &= \rho_z\rho_w\big(\cos\theta_z + i\sin\theta_z\big) \cdot \big(\cos\theta_w + i\sin\theta_w\big) \\ &= \rho_z\rho_w\big(\cos\theta_z\cos\theta_w - \sin\theta_z\sin\theta_w + i(\cos\theta_z\sin\theta_w + \sin\theta_z\cos\theta_w)\big) \end{aligned}$$

και χρησιμοποιώντας τις γνωστές σχέσεις:

$$\cos(\theta_z + \theta_w) = \cos\theta_z\cos\theta_w - \sin\theta_z\sin\theta_w \ \textbf{και} \ \sin(\theta_z + \theta_w) = \cos\theta_z\sin\theta_w + \sin\theta_z\cos\theta_w$$

παίρνουμε το ζητούμενο αποτέλεσμα:

$$z \cdot w = \rho_z\rho_w\big(\cos(\theta_z + \theta_w) + i\sin(\theta_z + \theta_w)\big)$$

□

Ένα άμεσο αλλά πολύ σημαντικό πόρισμα του παραπάνω είναι το ακόλουθο θεώρημα, το οποίο συσχετίζει τις δυνάμεις των μιγαδικών αριθμών με τη μορφή των κανονικών πολυγώνων.

Θεώρημα 1.1: (Τύπος του de Moivre). Έστω $z \in \mathbb{C}$ ένας μιγαδικός αριθμός με τριγωνομετρική αναπαράσταση:

$$z = \rho_z(\cos\theta_z + i\sin\theta_z)$$

Τότε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$:

$$z^n = \rho_z^n\big(\cos(n\cdot\theta_z) + i\sin(n\cdot\theta_z)\big)$$

Απόδειξη: Από την **Πρόταση 1.2**, με επαγωγή.

□

Παρατήρηση 1.5: Ειδικά για τους αριθμούς $z = \cos(2\pi/n) + i\sin(2\pi/n) \in \partial S(0,1)$, για τα διάφορα $n \in \mathbb{N}$ οι αριθμοί z^n είναι κορυφές $n-$γώνου στον κύκλο $\partial S(0,1)$ (εκτός όταν $n=1$ ή $n=2$, όπου είναι σημείο και αντιδιαμετρικά σημεία αντίστοιχα).

Απόδειξη: Αυτό συμβαίνει διότι ο z έχει μέτρο 1 (άρα και όλες του οι δυνάμεις), κι επίσης τα ορίσματα των z^n είναι (διαδοχικά):

$$\frac{2\pi}{n},\ 2\cdot\frac{2\pi}{n},\ 3\cdot\frac{2\pi}{n},\ \cdots, n\cdot\frac{2\pi}{n} = 2\pi$$

□

Αυτό το αποτέλεσμα θα το χρησιμοποιήσουμε για να μελετήσουμε εξισώσεις της μορφής $z^n = w$ - θα δούμε ότι οι λύσεις τέτοιων εξισώσεων είναι κορυφές $n-$γώνου.

1.4 Πολυωνυμικές εξισώσεις

Θεώρημα 1.2: ($n-$οστές μιγαδικές ρίζες). Στο μιγαδικό επίπεδο $\mathbb{C}$ κάθε εξίσωση (ως προς z):

$$z^n = w \text{ (με } n \geqslant 2 \text{ και } w \in \mathbb{C}^*)$$

έχει ακριβώς n το πλήθος λύσεις, οι οποίες σχηματίζουν διάμετρο -όταν $n=2$- και $n-$γωνο -όταν $n>2$- στον κύκλο $\partial S(0, \sqrt[n]{|w|})$.

Απόδειξη: Θεωρούμε την ισοδύναμη εξίσωση:

$$\left(\frac{z}{\sqrt[n]{|w|}}\right)^n = \frac{w}{|w|}$$

και χρησιμοποιούμε την **Παρατήρηση 1.5**. Τότε οι λύσεις της εν λόγω ισοδύναμης εξίσωσης βρίσκονται σε διάμετρο ή είναι κορυφές $n-$γώνου στον κύκλο $\partial S(0,1)$. Αν τώρα $z_0/\sqrt[n]{|w|} \in \partial S(0,1)$ είναι οποιαδήποτε λύση της ισοδύναμης εξίσωσης, η $z_0 \in \partial(0, \sqrt[n]{|w|})$ είναι λύση της αρχικής εξίσωσης, το οποίο αποδεικνύει ότι οι λύσεις z_0 βρίσκονται σε διάμετρο ή πολύγωνο στον κύκλο $\partial S(0, \sqrt[n]{|w|})$.

□

Προς το παρόν λοιπόν είμαστε σε θέση να λύσουμε εξισώσεις της μορφής $z^n = w$. Ειδικά για την περίπτωση $n=2$, είναι σκόπιμο (για ιστορικούς και όχι λόγους) να δούμε και την ≪καρτεσιανή≫ προσέγγιση της λύσης $z^2 = w$, και στην συνέχεια τη λύση της $z^2 + c_1 z + c_2 = 0$ (που είναι μιγαδικό τριώνυμο). Θα συμπεράνουμε ότι στα μιγαδικά τριώνυμα (όπως και στα πραγματικά) υπάρχουν τύποι εύρεσης λύσεων, που συντίθενται με ≪απλές≫ συναρτήσεις (δυνάμεις, ρίζες, προσθέσεις).

Παρατήρηση 1.6: Οι δευτεροβάθμιες πολυωνυμικές εξισώσεις (ως προς z), $z^2 = a+ib$ $(a,b\in\mathbb{R})$, έχουν λύσεις:

$$z = \begin{cases} \pm\left[\sqrt{\dfrac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} + i\cdot\sqrt{\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\right], & \text{εάν } b \geqslant 0 \\ \pm\left[\sqrt{\dfrac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} - i\cdot\sqrt{\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\right], & \text{εάν } b < 0 \end{cases}$$

Απόδειξη: Θεωρούμε $z = x+iy$, $(x,y\in\mathbb{R})$ και αναπτύσσουμε την πολυωνυμική εξίσωση σε:

$$x^2 - y^2 + 2xyi = a + bi \Rightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases}$$

Εάν $b = 0$, η περίπτωση ανάγεται στους πραγματικούς αριθμούς. Εάν $b \neq 0$ τότε $x, y \neq 0$, οπότε η ποσότητα $y = b/2x$ έχει νόημα. Με αντικατάσταση στο προκύπτον σύστημα παίρνουμε την ακόλουθη δευτεροβάθμια εξίσωση (ως προς x^2):

$$x^4 - \frac{b^2}{4} = ax^2 \Rightarrow x^4 - ax^2 - b^2 = 0$$

η οποία έχει λύσεις:

$$x^2 = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + b^2}}{2} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}$$

Για το y παρατηρούμε (κι αυτό για να αποφύγουμε τις πολλές πράξεις) ότι $x = b/2y$ κι επιπλέον ότι $y^2 - x^2 = -a$ (αυτό εμφανίζει κάποιου είδους συμμετρία με την προηγούμενη περίπτωση). Οπότε εφαρμόζουμε συμμετρικά τον τύπο του x για a το $-a$, και λαμβάνουμε τελικά ότι:

$$y = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}}$$

Έπεται πλέον η γενική λύση της πολυωνιμικής εξίσωσης:

$$z = \begin{cases} \pm\left[\sqrt{\dfrac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} + i \cdot \sqrt{\dfrac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}}\right], & \text{εάν } b \geqslant 0 \\ \pm\left[\sqrt{\dfrac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} - i \cdot \sqrt{\dfrac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}}\right], & \text{εάν } b < 0 \end{cases}$$

η οποία -σημειωτέον- επαλυθεύεται και στην περίπτωση $b = 0$ (ακόμη κι αν τη βρήκαμε υποθέτοντας $b \neq 0$).

□

Παρατήρηση 1.7: Οι δευτεροβάθμιες πολυωνυμικές εξισώσεις (ως προς z), $z^2 + c_1 z + c_2 = 0$ ($c_1, c_2 \in \mathbb{C}$), έχουν λύσεις:

$$z = -\frac{c_1}{2} + z_0$$

όπου z_0 είναι λύσεις της $z^2 = c_1^2/4 - c_2$.

Απόδειξη: Όπως και στην πραγματική περίπτωση, μπορούμε να γράψουμε:

$$z^2 + \frac{2c_1}{2}z + \frac{c_1^2}{4} - \frac{c_1^2}{4} + c_2 = 0 \Rightarrow \left(z + \frac{c_1}{2}\right)^2 = \frac{c_1^2}{4} - c_2$$

κι έπειτα να χρησιμοποιήσουμε την **Παρατήρηση 1.6**.

□

Έτσι λοιπόν αποδεικνύεται η ύπαρξη κλειστού τύπου για την επίλυση δευτεροβάθμιων εξισώσεων. Είναι δυνατόν κανείς να βρει κλειστό τύπο και για τις τριτοβάθμιες εξισώσεις, πρώτα όμως χρειάζεται ένα λήμμα.

Λήμμα 1.1: Έστω $P(z) = z^3 + c_1 z^2 + c_2 z + c_3$ ($c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{C}$) ένα τριτοβάθμιο πολυώνυμο. Με τον αμφιμονοσήμαντο μετασχηματισμό:

$$z \mapsto z - \frac{b}{3a}$$

το P αποκτά τη μορφή $P^*(z) = z^3 + c_2^* z + c_3^*$, ($c_2^*, c_3^* \in \mathbb{C}$). Το P^* ονομάζεται συνεπτυγμένη κυβική μορφή του P.

Επειδή ο μετασχηματισμός είναι αμφιμονοσήμαντος, οι λύσεις της $P^*(z) = 0$ δίνουν -μέσω του αντίστροφου μετασχηματισμού- τις λύσεις της $P(z) = 0$. ■

Θεώρημα 1.3: (Λύσεις τριτοβάθμιων εξισώσεων). Υπάρχει κλειστός τύπος που βρίσκει τις λύσεις κάθε τριτοβάθμιας πολυωνυμικής εξίσωσης:

$$P(z) = z^2 + c_1 z^2 + c_2 z + c_3 = 0$$

Μάλιστα, στους μιγαδικούς, κάθε τέτοια εξίσωση έχει τρεις πραγματικές λύσεις, ή μία πραγματική λύση και δύο μιγαδικές.

Απόδειξη: Δεδομένου του **Λήμματος 1.1**, μπορούμε να μετασχηματίσουμε την $P(z) = 0$ στην $P^*(z) = 0$ και να μελετήσουμε την τελευταία αντί της πρώτης. Τότε, λύσεις της $P(z) = 0$ θα είναι οι:

$$z = z_0 + \frac{b}{2a}, \text{ όπου } z_0 \text{ είναι λύση της } P^*(z) = 0$$

Έστω λοιπόν η πολυωνυμική εξίσωση $P^*(z) = z^3 + az + b = 0$. Θεωρούμε τον μετασχηματισμό $z = u + v$ με $uv = -a/3$ και η συνεπτυγμένη μορφή $P^*(z) = 0$ γίνεται:

$$\begin{aligned} 0 &= P^*(u+v) \\ &= (u+v)^3 + a(u+v) + b \\ &= u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 + a(u+v) + b \\ &= u^3 - a(u+v) + a(u+v) + v^3 + b \\ &= u^3 - \frac{a^3}{27} \cdot \frac{1}{u^3} + b \end{aligned}$$

Κατά συνέπεια:

$$u^6 + bu^3 - \frac{a^3}{27} = 0$$

το οποίο είναι τριώνυμο ως προς u^3. Το τριώνυμο αυτό έχει λύσεις που προσδιορίζονται σε κλειστή μορφή, βάση της **Παρατήρηση 1.7**. Καθεμία από τις προηγούμενες λύσεις, εφόσον τα u, v είναι υψωμένα εις την τρίτη, είναι εξισώσεις, που έχουν (τουλάχιστον) μια λύση στους πραγματικούς. Μάλιστα οι:

$$\operatorname{sign}(u^3) \cdot \sqrt[3]{|u^3|}, \ \operatorname{sign}(v^3) \cdot \sqrt[3]{|v^3|}$$

είναι λύσεις. Ας υποθέσουμε λοιπόν s την πραγματική ρίζα της u^3 και t την πραγματική ρίζα της v^3. Σύμφωνα με το **Θεώρημα 1.2**, οι άλλες δύο μιγαδικές λύσεις των εξισώσεων των u, v βρίσκονται στις δύο μιγαδικές κορυφές των ισοσκελών τριγώνων με κορυφές s και t αντίστοιχα, τα οποίο είναι εγγεγραμμένα στους κύκλους $\partial S(O, |s|)$ και $\partial S(O, |t|)$. Συγκεκριμένα:

$$u = \begin{cases} 1 \cdot s \textbf{ ή} \\ \left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) \cdot s \textbf{ ή} \\ \left(-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) \cdot s \end{cases}$$

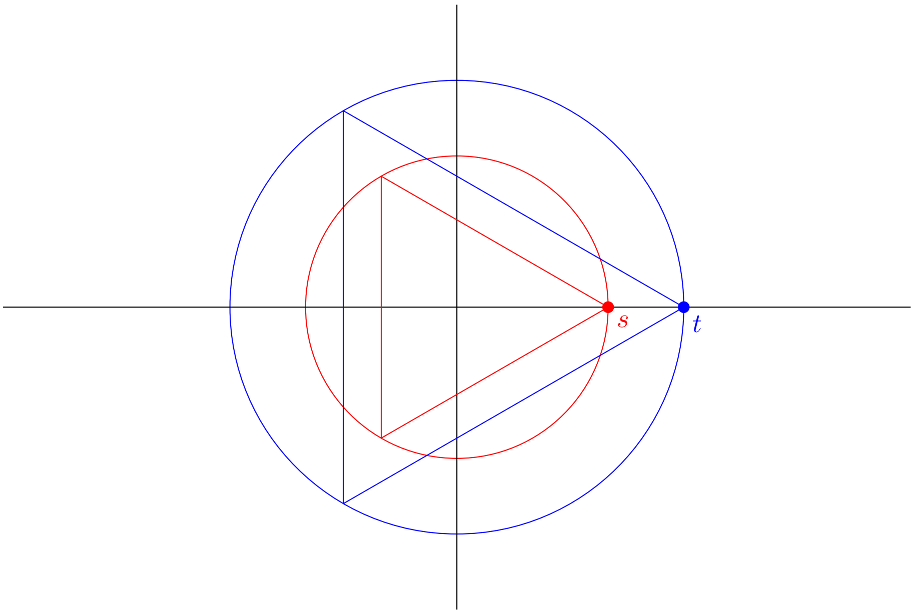
$$v = \begin{cases} 1 \cdot t \textbf{ ή} \\ \left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) \cdot t \textbf{ ή} \\ \left(-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) \cdot t \end{cases}$$

(όπου ο πολλαπλασιασμός των s, t γίνεται ώστε να ≪στραφούν≫ οι λύσεις s και t στις άλλες κορυφές των ισοσκελών τριγώνων, σύμφωνα με την **Πρόταση 1.2**).

Σε αυτό το σημείο πρέπει να παρατηρηθεί ότι δεν δίνουν όλοι οι 9 συνδυασμοί των u, v λύσεις της εξίσωσης $z^3 + az + b = 0$ (δηλ. $u + v = z$, $uv = -a/3$). Συγκεκριμένα, μόνο οι ακόλουθες αποτελούν λύσεις της εν λόγω εξίσωσης:

$$\begin{aligned} z_0 &= s + t \\ z_1 &= \left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) \cdot s + \left(-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) \cdot t \\ z_2 &= \left(-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) \cdot s + \left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) \cdot t \end{aligned}$$

Μάλιστα, $z_0 \in \mathbb{R}$ και $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.



□

Είναι ενδιαφέρον -αν και κουραστικό- κανείς να μελετήσει πώς προσδιορίζονται οι λύσεις μίας τεταρτοβάθμιας εξίσωσης, σαν λογικό βήμα από τις τριτοβάθμιες. Ακόμη πιο ενδιαφέρον είναι ότι δεν υπάρχει κλειστός τύπος για την επίλυση πεμπτοβάθμιων ή μεγαλύτερου βαθμού εξισώσεων. Εμείς δεν θα αναφερθούμε στο πώς αποδεικνύεται αυτή η μη ύπαρξη, καθώς μια τέτοια παρουσίαση θα απαιτούσε τεχνικές της Θεωρίας Galois. Παρόλα αυτά, παραπέμπουμε στο (Ma), σελ. 388-389.

Πάντως τουλάχιστον είναι δυνατόν να αποδειχθεί ότι κάθε $n-$οστού ($n \geqslant 1$) βαθμού πολυωνυμική εξίσωση έχει ακριβώς n (όχι κατ' ανάγκη διακεκριμένες) λύσεις.

Θεώρημα 1.4: (Θεμελιώδες θεώρημα της άλγεβρας). Κάθε πολυωνυμική εξίσωση $P(z) = 0$ βαθμού $n \geqslant 1$ (με μιγαδικούς συντελεστές) έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $\mathbb{C}$.

Κατ' επέκταση, λειτουργώντας επαγωγικά, η $P(z) = 0$ έχει ακριβώς n (όχι κατ' ανάγκη διακεκριμένες) λύσεις.

Απόδειξη: Έστω P ένα μιγαδικό πολυώνυμο, το οποίο γράφεται ως:

$$z^n + \sum_{k+1\in[n]} c_k z^k, \text{ με } c_k \in \mathbb{C}$$

Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι η μελέτη αρκεί να περιοριστεί στα μονικά πολυώνυμα, αφού ο μη μηδενικός μεγιστοβάθμιος συντελεστής μπορεί να διαιρέσει τα δύο μέλη της πολυωνυμικής εξίσωσης και να προσδώσει εξίσωση με μονικό πολυώνυμο μόνο.

Εφόσον κάθε όρος του πολυωνύμου είναι ουσιαστικά ένα διάνυσμα στο $\mathbb{R}^2$, μπορούμε εφαρμόζοντας την τριγωνική ανισότητα, να πάρουμε ότι:

$$|P(z)| \geqslant |z|^n - \sum_{k+1\in[n]} c_k |z|^k = |z|^n \left[1 - \sum_{k+1\in[n]} \frac{c^k}{|z|^{n-k}} \right]$$

Παρατηρούμε ότι καθώς $|z| \to \infty$, ισχύει $|P(z)| \to \infty$. Επομένως, θα υπάρχει ένας αριθμός $r_0 \in \mathbb{R}_+^*$ τέτοιος ώστε:

$$\forall z \in \mathbb{C},\ |z| > r_0 :\ |P(z)| > |P(w)| > 0, \text{ όπου } w \in \mathbb{C} :\ P(w) \neq 0$$

Θεωρούμε τον πραγματικό αριθμό $\mu = \min |P|\big(B(O, r_0)\big)$. Ο αριθμός μ υπάρχει, αφού το σύνολο $B(O, r_0)$ είναι συμπαγές στο $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ και η διανυσματική συνάρτηση $|P| : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής.

Ένα γνωστό λοιπόν θεώρημα δίνει, αξιοποιώντας τις δύο παρατηρήσεις, ότι υπάρχει ελάχιστο στοιχείο μ το συνόλου $|P|\big(B(O, r_0)\big)$. Το γεγονός ότι $\forall z \in B(O, r_0)^c$ ισχύει $|P(z)| > |P(w)| \geqslant \mu$ εξασφαλίζει ότι κάθε άλλη τιμή της συνάρτησης εκτός του $B(O, r_0)$ δεν μπορεί να γίνεται μικρότερη του μ. Επομένως, το

μ είναι επίσης το ελάχιστο στοιχείο του συνόλου $|P|(\mathbb{C})$.

Εφόσον λοιπόν $\mu = \min|P|(\mathbb{C})$, υπάρχει αριθμός $z_0 \in \mathbb{C}$ τέτοιος ώστε $|P|(z_0) = \mu$. Ισχυριζόμαστε ότι $P(z_0) = 0$.

Προς άτοπο υποθέτουμε ότι $P(z_0) \neq 0$ και θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$Q(z) = \frac{|P(z+z_0)|}{|P(z_0)|} = 1 + \sum_{k\in[n]} a_k z^k$$

Ο σταθερός όρος 1 προκύπτει από το γεγονός ότι $Q(0) = 1$. Για τη συνάρτηση Q ισχύει $Q(z) \geqslant 1$, αφού το $|P(z_0)|$ είναι ελάχιστο.

Θεωρούμε κ τον ελάχιστο φυσικό αριθμό για τον οποίο $a_\kappa \neq 0$. Εάν $\zeta \in \mathbb{C}$ είναι ένας αριθμός τέτοιος ώστε $\zeta^\kappa = -\dfrac{|a_\kappa|}{a_\kappa}$, τότε η τιμή του Q υπολογιζόμενη στον αριθμό $r\zeta$, όπου $r > 0$, δίνει:

$$\begin{aligned}|Q(r\zeta)| &= \Big|1 + \overbrace{a_\kappa r^\kappa \zeta^\kappa}^{-|a_\kappa| r^\kappa} + \sum_{\kappa<k\leqslant n} a_k r^k \zeta^k\Big| \\ &\leqslant \big|1 - |a_\kappa| r^\kappa\big| + \sum_{\kappa<k\leqslant n} |a_k r^k \zeta^k|\end{aligned}$$

Διαλέγουμε ακτίνα $0 < r < r_1 \in \mathbb{R}_+^*$ αρκετά μικρή, τέτοια ώστε $1 - |a_\kappa| r^\kappa > 0$, και κατ' επέκταση $\big|1 - |a_\kappa| r^\kappa\big| = 1 - |a_\kappa| r^\kappa$.

$$\begin{aligned}|Q(r\zeta)| &\leqslant 1 - |a_\kappa| r^\kappa + \sum_{\kappa<k\leqslant n} |a_k r^k \zeta^k| \\ &= 1 - |a_\kappa| r^\kappa + \sum_{\kappa<k\leqslant n} |a_k r^k| \\ &= 1 - r^\kappa \left(|a_\kappa| - \sum_{\kappa<k\leqslant n} |a_k r^{k-\kappa}| \right)\end{aligned}$$

Και πάλι, μπορούμε να διαλέξουμε ακτίνα $0 < r < r_2 \leqslant r_1 \in \mathbb{R}_+^*$ τέτοια ώστε $|a_\kappa| - \sum_{\kappa<k\leqslant n} |a_k r^{k-\kappa}| = \theta > 0$. Κατ' επέκταση:

$$Q(r\zeta) \leqslant 1 - r^\kappa \theta < 1 \Rightarrow Q(r\zeta) < 1$$

Αυτό είναι προφανώς άτοπο, το οποίο σημαίνει ότι $P(z_0) = 0$. Το θεώρημα λοιπόν αποδεικνύεται.

$\square$

Παρά το ότι ονομάζεται ≪θεμελιώδες θεώρημα της άλγεβρας≫ δεν χρησιμοποιείται και πολύ άλγεβρα στην απόδειξή του. Ακόμη μία αναλυτική απόδειξη θα δόσουμε αργότερα, όταν θα έχουμε περισσότερα εργαλεία στη διάθεσή μας. Μια αλγεβρική απόδειξη (με Θεωρία Galois) μπορεί να βρεθεί στο (Ma), σελ. 404-405.

1.5 Βασικές συναρτήσεις στο μιγαδικό επίπεδο

1.5.1 Η $n-$οστή ρίζα

Στο **Θεώρημα 1.2** είδαμε ότι η εξίσωση (ως προς z), $z^n = w$ ($w \in \mathbb{C}^*$), έχει ακριβώς n διακεκριμένες λύσεις. Όπως και στους πραγματικούς αριθμούς (που η $x^n = y$ μπορεί να έχει θετική κι αρνητική λύση) δεν μπορούμε να ορίσουμε συνάρτηση ρίζας $\sqrt[n]{w} =$ ρίζα της ≪$z^n = w$≫. Γι' αυτό θα ορίζουμε ως $n-$οστή ρίζα του w την πρώτη (με αριστερόστροφο προσανατολισμό) ρίζα της $z^n = w$, ώστε να εξασφαλίζεται το ≪καλώς ορισμένο≫ της συνάρτησης.

Ορισμός 1.8: ($n-$οστή ρίζα). Έστω $n \geqslant 1$ και $w \in \mathbb{C}$. Ορίζουμε ως $n-$οστή ρίζα του w τον αριθμό:

$$\sqrt[n]{w} = \begin{cases} 0, & \text{εάν } w = 0 \\ \sqrt[n]{|w|}\big(\cos(\theta_w/n) + i\sin(\theta_w/n)\big), & \text{εάν } w \neq 0 \end{cases}$$

ο οποίος (όταν $w \neq 0$) είναι η πρώτη, με αριστερόστροφο προσανατολισμό, λύση της $z^n = w$.

Δοθέντος του προηγούμενου ορισμού, μπορούμε να δούμε την ακόλουθη γεωμετρική ιδιότητα της ρίζας.

Πρόταση 1.3: Η $n-$οστή ρίζα ως συνάρτηση είναι ένας $1-1$ και επί μετασχηματισμός του μιγαδικού επιπέδου $\mathbb{C}$, προς τη γωνία:

$$\angle(\lambda, \overline{\lambda}) \cup \underrightarrow{O\lambda}$$

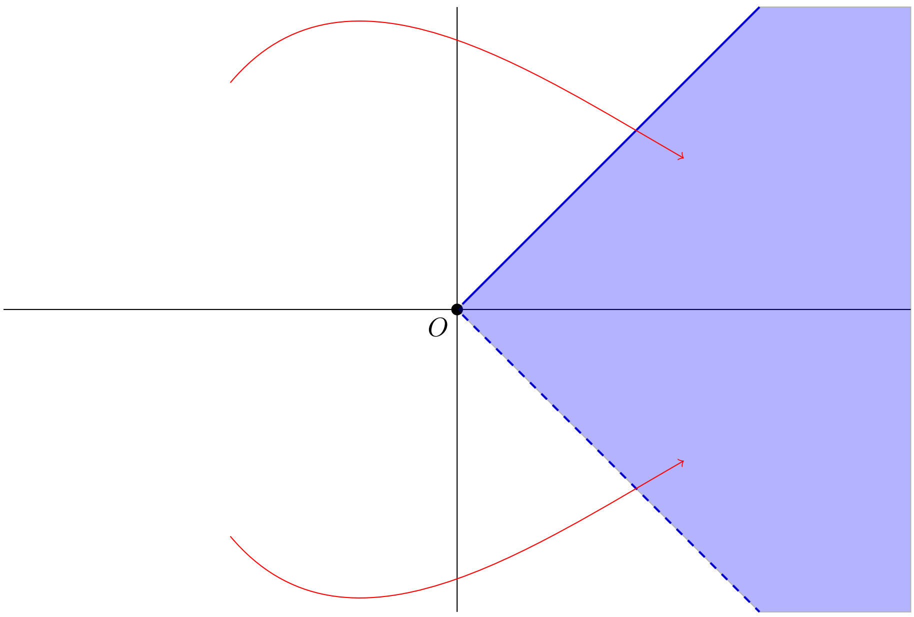
όπου $\lambda = \cos(\pi/n) + i\sin(\pi/n)$.

Απόδειξη: Πράγματι, ο τύπος του de Moivre μας εξασφαλίζει το επί της συνάρτησης:

$$\sqrt[n]{\cdot} : \mathbb{C} \to \angle(\lambda, \overline{\lambda}) \cup \underrightarrow{O\lambda}$$

μιας και αν $z = \rho_z(\cos\theta_z + i\sin\theta_z) \in \angle(\lambda, \overline{\lambda}) \cup \underrightarrow{O\lambda}$, τότε η τιμή $\sqrt[n]{z^n} = \sqrt[n]{\rho_z^n\big(\cos(n\theta_z) + i\sin(n\theta_z)\big)}$ είναι z.

Όσον αφορά το $1-1$, εάν u, v είναι δύο μιγαδικοί που ικανοποιούν την εξίσωση (ως προς z), $z^n = w$, τότε αυτοί βρίσκονται στο ίδιο πολύγωνο ($n-$γωνο) λύσεων. Εξ' ορισμού της ρίζας, $u = v$.



□

Γενικά οι μιγαδικές συναρτήσεις ως μετασχηματισμοί του επιπέδου είναι κάτι που χρησιμοποιείται αρκετά. Μάλιστα μερικές απ' αυτές έχουν καλές ιδιότητες, όπως η διατήρηση των γωνιών.

1.5.2 Η εκθετική συνάρτηση

Εδώ θα κάνουμε περισσότερη ανάλυση με σκοπό να παρουσιάσουμε φυσιολογικά την επέκταση της εκθετικής συνάρτησης στο επίπεδο. Μάλιστα θα ξεκινήσουμε με έναν όχι μαθηματικό, αλλά φυσικό τρόπο προσέγγισης της εν λόγω έννοιας, που θα δικαιολογίσει (ευελπιστούμε) τον ορισμό που θα ακολουθήσει.

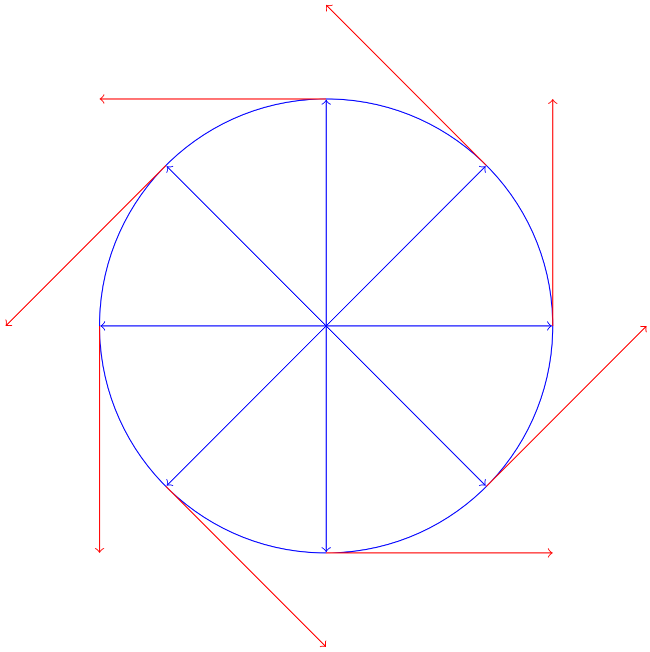
Εν τω μεταξύ εδώ αφήστε τη φαντασία σας κάπως ελεύθερη, και μην περιορίζεστε από το ότι δεν έχουμε ακόμη ορίσει παραγώγους ή ό,τι άλλο χρειαστεί. Εξάλλου, αυτό που θα ακολουθήσει είναι διαισθητικό και όχι μαθηματικό.

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε καταφέρει να ορίσουμε με κάποιον τρόπο την e^{s+it} ($s, t \in \mathbb{R}$), ως μιγαδική επέκταση της αντίστοιχης πραγματικής. Τότε κατ' αρχάς $e^{s+it} = e^s \cdot e^{it}$, με το e^s να είναι ορισμένο (στους πραγματικούς), οπότε χρειάζεται η ποσότητα e^{it} να μελετηθεί. Αν παραγωγίσουμε την e^{it} ως προς

t, τότε θα έχουμε:

$$\frac{de^{it}}{dt} = i \cdot e^{it}$$

το οποίο δείχνει, βάσει της **Πρότασης 1.2**, ότι η ≪ταχύτητα≫ ενός κινητού με ≪θέση≫ e^{it} είναι κάθε χρονική στιγμή t κάθετη στη ≪θέση≫. Παρατηρήστε ότι $i = \cos(\pi/2) + i\sin(\pi/2) = (0, 1)$, οπότε ο πολλαπλασιασμός με i στρέφει κατά $\pi/2$.



Επιπλέον, το μέτρο της ταχύτητας και της θέσης είναι σταθερά και ισούνται. Οπότε η τροχιά του κινούμενο σώματος θα είναι κύκλος, ο οποίος θα έχει ακτίνα 1 (αφού $e^{i0} = e^0 = 1$) και θα εκφράζεται μέσω μίας εξίσωσης:

$$e^{it} = \cos(at) + i\sin(at)$$

για κάποιο $a \in \mathbb{R}$. Επειδή θέλουμε τη χρονική στιγμή 0 η ταχύτητα να είναι 1 κατά μέτρο, έπεται ότι $a = 1$ και κατ' επέκταση:

$$e^{it} = \cos t + i\sin t$$

Έχοντας αυτή τη διαισθητική παρατήρηση υπόψη, μπορούμε να προχωρίσουμε σε έναν ορισμό.

Ορισμός 1.9: (Εκθετική συνάρτηση). Ορίζουμε ως εκθετική συνάρτηση $e^{(\cdot)} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ τη συνάρτηση με τύπο:

$$e^z = e^{\Re(z)}\big(\cos\Im(z) + i\sin\Im(z)\big)$$

Μερικές φορές συμβολίζουμε $\exp = e^{(\cdot)}$.

Παρατήρηση 1.8: Η εκθετική συνάρτηση του **Ορισμού 1.9** έχει ιδιότητες ανάλογες της πραγματικής εκθετικής συνάρτησης. Συγκεκριμένα:

i. Η συνάρτηση $e^{(\cdot)}|_{\mathbb{R}}$ είναι η πραγματική εκθετική.

ii. Για κάθε $z, w \in \mathbb{C}$ έχουμε $e^{z+w} = e^z \cdot e^w$

iii. Η $e^{(\cdot)}$ είναι επί του $\mathbb{C}^*$.

Απόδειξη: Με πράξεις.

□

Εν τω μεταξύ, με τον τρόπο που ορίσαμε την εκθετική συνάρτηση, η πολική αναπαράσταση ενός αριθμού μπορεί να πάρει μια νέα μορφή.

Παρατήρηση 1.9: Κάθε μιγαδικός αριθμός $z \in \mathbb{C}^*$ γράφεται στη μορφή:

$$z = \rho_z e^{i\theta_z} = |z| \cdot e^{i\theta_z}$$

Απόδειξη: Πράγματι, αυτό έπεται από τον ορισμό της εκθετικής συνάρτησης και του τύπου:

$$z = \rho_z(\cos\theta_z + i\sin\theta_z) = |z|(\cos\theta_z + i\sin\theta_z)$$

□

Πάντως, σε αντίθεση με την πραγματική εκθετική συνάρτηση, η μιγαδική συνάρτηση $e^{(\cdot)}$ δεν είναι επί. Αυτό έχει σχέση με αυτή τη γεωμετρική εποπτεία (κύκλος) που είδαμε.

Παρατήρηση 1.10: Η μιγαδική συνάρτηση $e^{(\cdot)}$ δεν είναι $1-1$, καθώς για κάθε $k \in \mathbb{N}$:

$$e^z = e^{2ik\pi + z}$$

Η **Παρατήρηση 1.10** φαίνεται να αποτελεί ≪πρόβλημα≫, αφού ο λογάριθμος δεν θα μπορεί να οριστεί φυσιολογικά ως αντίστροφη της εκθετικής.

1.5.3 Ο λογάριθμος

Ο συνήθης λογάριθμος ως πραγματική συνάρτηση, ορίζεται ως αντίστροφη συνάρτηση της πραγματικής εκθετικής. Παρόμοια διαδικασία δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί στο μιγαδικό επίπεδο για τον ορισμό του λογαρίθμου, απλούστατα διότι η συνάρτηση $e^{(\cdot)}$ δεν είναι $1-1$. Η εξίσωση λοιπόν ως προς z, για $w \in \mathbb{C}^*$:

$$e^z = w = |w|(\cos\theta_w + i\sin\theta_w)$$

αναμένεται να έχει παραπάνω από μία λύσεις. Ειδικότερα:

$$z \in \exp^{-1}(w) = \left\{ \log(|w|) + (2k\pi + \theta_w)\cdot i \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Θεωρούμε γι' αυτόν τον λόγο ως συνάρτηση - λογάριθμο $\log : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ στους μιγαδικούς, μόνο τον κλάδο:

$$\log w = \log(|w|) + i\theta_w$$

Οπότε, από εδώ και στο εξής, οι εξισώσεις της μορφής $e^z = w$ θα επιλύονται ως εξής:

$$e^z = w \Rightarrow z = \log w \mod (2\pi i)$$

Ορισμός 1.10: (Λογάριθμος). Ορίζουμε τη συνάρτηση λογάριθμο $\log : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ στους μιγαδικούς, μέσω του τύπου:

$$\log z = \log(|z|) + i\theta_z$$

Ο υπολογισμός της ποσότητας $\log(|z|)$ ουσιαστικά επαφίεται στην πραγματική περίπτωση, κι γι' αυτό δεν έχουμε πρόβλημα στον ορισμό.

Παρά το ότι ο λογάριθμος, στην περίπτωσή μας, δεν αποτελεί αντίστροφη συνάρτηση της εκθετικής, μπορούμε περιορίζοντας την εκθετική να πάρουμε αυτήν την έννοια αντιστρεψιμότητας.

Παρατήρηση 1.11: Έστω Λ να είναι το σύνολο $\Lambda = \{z \in \mathbb{C} \mid \Im(z) \in (-\pi, \pi]\}$. Η συνάρτηση $e^{(\cdot)}|_\Lambda : \Lambda \to \mathbb{C}^*$ είναι αμφιμονοσήμαντη, αφού υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση $\log : \mathbb{C}^* \to \Lambda$. Η ίδια παρατήρηση μας δίνει ότι η συνάρτηση του μιγαδικού λογαρίθμου είναι αμφιμονοσήμαντη.

Απόδειξη: Πράγματι, στο Λ δεν έχει νόημα να γράψουμε:

$$e^z = w \Rightarrow z = \log w \mod (2\pi i) = \log(|w|) + i\theta_w \mod (2\pi i)$$

αφού το z δεν μπορεί να είναι ≪πολύ μακρυά≫, κατακόρυφα από το 0. Σ' αυτήν την περίπτωση:

$$e^z = w \Rightarrow z = \log w = \log(|w|) + i\theta_w$$

□

Παρατήρηση 1.12: Γενικά, υπάρχουν εν γένει περισσότεροι από έναν $z \in \mathbb{C}$ τέτοιοι ώστε η εξίσωση ως προς z:

$$\log(e^z) = w$$

να επιλύεται. Αυτό διότι η $e^{(\cdot)}$ δεν είναι $1-1$, και ειδικότερα κάθε αριθμός z της μορφής $z = w \mod (2\pi i)$ ικανοποιεί την παραπάνω εξίσωση. Εν γένει λοιπόν, η σχέση:

$$\log(e^z) = w$$

δεν αληθεύει, παρά μόνο αν η $e^{(\cdot)}$ βρίσκεται σε χωρίο τέτοιο ώστε να αποτελεί αντίστροφο συνάρτηση της $\log$. Δηλαδή η σχέση αληθεύει μόνο στο χωρίο Λ, σύμφωνα με την **Παρατήρηση 1.11**.

Αντίθετα, η εξίσωση ως προς z:

$$e^{\log z} = w$$

έχει μοναδική λύση την $z = w$. Αυτό έπεται από το $1-1$ της συνάρτησης του μιγαδικού λογαρίθμου.

Μπορεί κανείς να πει πολλά πράγματα για την εκθετική συνάρτηση και τον λογάριθμο. Εμείς αργότερα θα δούμε τη παραγωγισιμότητα αυτών των συναρτήσεων και την ανάλυσή τους σε δυναμοσειρές.

1.5.4 Η εκθετική με γενική βάση

Ορισμός 1.11: (Εκθετική με γενική βάση). Έστω $a \in \mathbb{C}$. Ορίζουμε τη συνάρτηση $a^{(\cdot)} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ μέσω του τύπου:

$$a^z = e^{z \log a}$$

Αυτός ο ορισμός είναι φυσιολογικός, κατ' αναλογία με την πραγματική περίπτωση, και πράγματι πολλές ιδιότητες της εκθετικής μεταβιβάζονται στην μιγαδική περίπτωση. Παρόλα αυτά, με την παρακάτω πρόταση θα δείξουμε ότι μια βασική ιδιότητα δεν ισχύει.

Πρόταση 1.4: Η σχέση:

$$(\alpha^\beta)^\gamma = \alpha^{\beta\gamma}$$

δεν ισχύει για κάθε $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$.

Απόδειξη: Μπορούμε να βρούμε ένα αντιπαράδειγμα, και συγκεκιμένα $(e^{2\pi i})^{1/2} = 1^{1/2} = 1$ αλλά $e^{2\pi i/2} = e^{\pi i} = -1$.

Πέρα όμως από το αντιπαράδειγμα, γενικά υπάρχει μια «μεγάλη» οικογένεια αριθμών που δεν ικανοποιεί τη σχέση $(\alpha^\beta)^\gamma = \alpha^{\beta\gamma}$.

Βήμα I: Υποθέτουμε προς άτοπο ότι η σχέση $(\alpha^\beta)^\gamma$ ισχύει για κάθε $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$, και θεωρούμε (για λόγους που θα γίνουν σαφείς αργότερα) σταθεροποιημένα α, β ώστε $\alpha^\beta \neq 1 \Rightarrow \log(\alpha^\beta) \neq 0$.

Βήμα II: Έστω $\gamma \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε:

$$\gamma_1 = -\pi - \min\{0, \arg\log(\alpha^\beta)\} < \arg\gamma < \pi - \max\{0, \arg\log(\alpha^\beta)\} = \gamma_2 \tag{1.1}$$

δηλαδή $\gamma \in \angle(e^{i\gamma_1}, e^{i\gamma_2})$.

Βήμα III: Αν αληθεύει ότι $(\alpha^\beta)^\gamma = \alpha^{\beta\gamma}$, τότε:

$$\exp\big(\gamma\log(\alpha^\beta)\big) = \exp\big(\log(\alpha^{\beta\gamma})\big) \Rightarrow \gamma\log(\alpha^\beta) = \log(\alpha^{\beta\gamma}) + 2k\pi i, \text{ για κάποιο } k \in \mathbb{Z}$$

Επειδή $\Im\log(\alpha^{\beta\gamma}) \in (-\pi, \pi]$, έπεται ότι $\Im\big(\gamma\log(\alpha^\beta)\big) = \Im\big(\log(\alpha^\beta) + 2k\pi i\big) \in \big((2k-1)\pi, (2k+1)\pi\big]$.

Βήμα IV: Εφόσον ισχύει η (1.1), η γωνία $\theta = \arg\big(\gamma\log(\alpha^\beta)\big)$ είναι μεταξύ των $-\pi$ και π. Επιπλέον, θα επιλέξουμε γ τέτοιο ώστε $\arg\gamma \neq -\arg\log(\alpha^\beta)$ (ώστε $\theta \neq 0$). Επίσης, ορίζουμε $\varepsilon = \exp\big(-i\arg\log(\alpha^\beta)\big)$ και την ημιευθεία $\underrightarrow{O\xi}$ (που είναι η ημιευθεία των σημείων που δεν σχηματίζουν γωνία $-\arg\log(\alpha^\beta)$).

Βήμα V: Αν γράψουμε:

$$\Im\big(\gamma\log(\alpha^\beta)\big) = \big|\gamma\log(\alpha^\beta)\big|\sin\theta = |\gamma| \cdot \big|\log(\alpha^\beta)\big| \cdot \sin\theta \in \big((2k-1)\pi, (2k+1)\pi\big]$$

τότε:

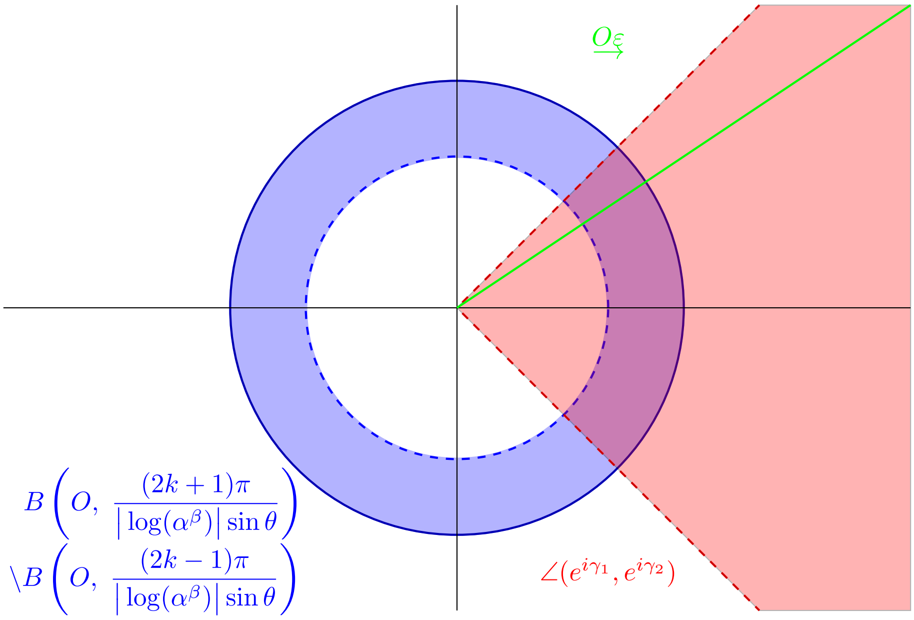
$$\frac{(2k-1)\pi}{\big|\log(\alpha^\beta)\big|\sin\theta} < |\gamma| \leqslant \frac{(2k+1)\pi}{\big|\log(\alpha^\beta)\big|\sin\theta}$$

και από τα προηγούμενα:

$$\gamma \in \angle(e^{i\gamma_1}, e^{i\gamma_2}) \cap B\left(O,\ \frac{(2k+1)\pi}{\big|\log(\alpha^\beta)\big|\sin\theta}\right) \backslash B\left(O,\ \frac{(2k-1)\pi}{\big|\log(\alpha^\beta)\big|\sin\theta}\right) \backslash \underrightarrow{O\xi} \backslash \mathbb{R}$$

Αυτό είναι άτοπο, διότι αν η σχέση $(\alpha^{\beta})^{\gamma} = \alpha^{\beta\gamma}$ ίσχυε για όλα τα α, β, γ, τότε δεν θα έπρεπε να εμφανιστούν περισσότεροι περιορισμοί για το γ απ' όσους επιβάλλαμε. Θυμηθείτε ότι:

$$\gamma \in \angle(e^{i\gamma_1}, e^{i\gamma_2}) \backslash \underrightarrow{O\xi} \backslash \mathbb{R}$$



Στο σχήμα λοιπόν (για σταθεροποιημένα α, β) η σχέση $(\alpha^{\beta})^{\gamma} = \alpha^{\beta\gamma}$ δεν αληθεύει όταν το γ βρίσκεται στην κόκκινη γωνία αλλά όχι στον μπλε δακτύλιο, την πράσινη ευθεία ή την οριζόντια **μαύρη**. $\square$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Ολόμορφες συναρτήσεις

2.1 Διαφορισιμότητα

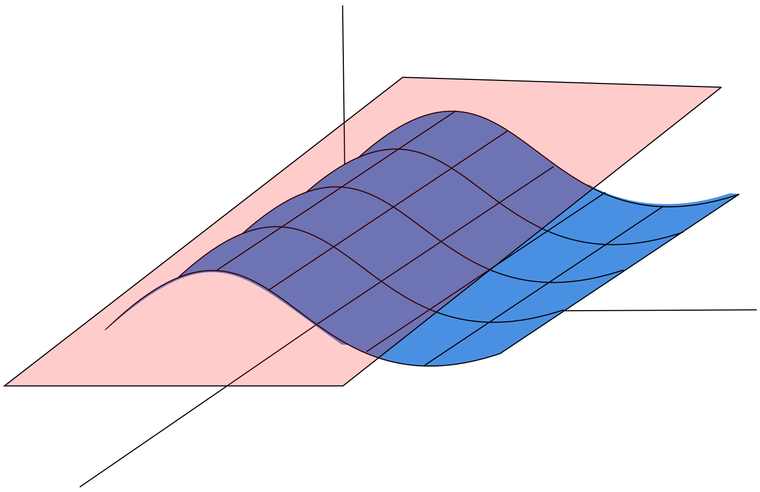
Σε μαθήματα απειροστικού λογισμού / γεωμετρικής ανάλυσης δεν υπάρχει η έννοια της διαίρεσης σε πολυδιάστατους χώρους. Γι' αυτόν τον λόγο γίνεται λόγος στη προσέγγιση μιας συνάρτησης (επιφάνειας λ.χ.) από υπερεπίπεδα, ή γενικότερα αφινικούς γραμμικούς χώρους.

Ορισμός 2.1: (Διαφορισιμότητα). Έστω $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ μία συνάρτηση, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό και $z_0 \in \Omega$. Λέμε ότι η f είναι διαφορίσιμη στο x_0 εάν υπάρχει γραμμική συνάρτηση M_{f,z_0} τέτοια ώστε:

$$\lim_{h \to 0_{\mathbb{R}^n}} \frac{|f(z_0 + h) - f(z_0) - M_{f,z_0}(h)|}{|h|} = 0$$

Εάν μαζέψουμε όλα τα z_0 στα οποία η f είναι διαφορίσιμη, μπορούμε να φτιάξουμε μια συνάρτηση $(Df)(\cdot) = M_{f,(\cdot)}$, την οποία ονομάζουμε διαφορικό της f. Η τιμή $(Df)(z_0) = M_{f,z_0}$ λέγεται διαφορικό της f στο z_0.

Ο παραπάνω ορισμός ουσιαστικά δείχνει ότι οι διαφορίσιμες συναρτήσεις προσεγγίζονται από πολυδιάστατα επίπεδα, όπως οι παραγωγίσιμες προσεγγίζονται από εφαπτόμενες ευθείες. Εν τω μεταξύ αυτή η προσέγγιση είναι μοναδική (αν υπάρχει), αλλά δεν θα το αποδείξουμε (μπορείτε να το ελέγξετε).



Η περίπτωση μιας συνάρτησης $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Ας θεωρήσουμε μία συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ η οποία είναι διαφορίσιμη σε ένα z_0. Εάν θέλουμε ένα επίπεδο να εφάπτεται στην επιφάνεια (του γραφήματος) της f, αναμένουμε οι εφαπτόμενες των καμπυλών $f(\cdot, y)$, $f(x, \cdot)$ (όπου $z = (x, y)$) να περιέχονται στο εφαπτόμενο επίπεδο. Οπότε ίσως το διαφορικό μιας συνάρτησης να μπορεί να προσδιοριστεί από απλούστερες συναρτήσεις, δηλαδή από τις μερικές παραγώγους:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(z) = \frac{df(\cdot, y)}{dx}(x) \textbf{ και } \frac{\partial f}{\partial y}(z) = \frac{df(x, \cdot)}{dy}(y)$$

Πρόταση 2.1: Έστω $f : \Omega \to \mathbb{R}$ με το $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ να είναι ανοικτό. Εάν η f είναι διαφορίσιμη στο $z_0 = (x_{1,0}, x_{2,0}, \cdots, x_{n,0})$, τότε:

$$(Df)(z_0) = (\nabla f)_{z_0}$$

όπου:

$$(\nabla f)_{z_0}(\cdot) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(z_0), \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(z_0)\right)(\cdot)^T$$

(Είναι δηλαδή η γραμμική απεικόνιση με πίνακα το διάνυσμα των μερικών παραγώγων. Οι αναστροφές γίνονται απλά για να ≪φτιάξουμε≫ τα διανύσματα ώστε να είναι γραμμές ή στήλες όπου χρειάζεται).

Απόδειξη: Πράγματι, εάν η f είναι διαφορίσιμη, θα υπάρχουν $\mu_1, \cdots, \mu_n \in \mathbb{R}$ ούτως ώστε, αν $h = (h_1, \cdots, h_n)$:

$$\lim_{h \to 0_{\mathbb{R}^n}} \frac{|f(z_0 + h) - f(z_0) - \sum_{k=1}^n \mu_k h_k|}{|h|} = 0$$

Έτσι λοιπόν, θεωρώντας τα υπο-όρια όταν $h_\ell \to 0$, $h_k = 0$ ($k \neq \ell$):

$$\lim_{h_\ell \to 0} \frac{|f(z_0 + h_\ell e_\ell) - f(z_0) - \mu_\ell h_\ell|}{|h_\ell|} = 0$$

(όπου $e_\ell = (0, \cdots, 0, \overset{\ell-\text{θέση}}{1}, 0, \cdots, 0)$). Αυτό δείχνει ότι $\mu_\ell = \partial f / \partial x_\ell(z_0)$ και κατ' επέκταση το ζητούμενο.

□

Έχοντας την **Πρόταση 2.1** υπόψη, μπορεί να δειχθεί κάτι γενικότερο.

Πρόταση 2.2: Έστω $f = (f_1, \cdots, f_m) : \Omega \to \mathbb{R}^m$ με το $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ να είναι ανοικτό. Εάν η f είναι διαφορίσιμη στο $z_0 = (x_{1,0}, x_{2,0}, \cdots, x_{n,0})$, τότε:

$$(Df)(z_0)(\cdot) = \left[\begin{pmatrix} (\nabla f_1)_{z_0}(\cdot)^T \\ \vdots \\ (\nabla f_m)_{z_0}(\cdot)^T \end{pmatrix}\right]^T = \left[\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(z_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(z_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(z_0) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(z_0) \end{pmatrix}(\cdot)^T\right]^T$$

(Είναι δηλαδή η γραμμική απεικόνιση με πίνακα τον πίνακα των μερικών παραγώγων. Οι αναστροφές γίνονται απλά για να ≪φτιάξουμε≫ τα διανύσματα ώστε να είναι γραμμές ή στήλες όπου χρειάζεται).

Απόδειξη: Γράφουμε την f στη διανυσματική της μορφή $f = (f_1, \cdots, f_m)$, κι έπειτα χρησιμοποιούμε την **Πρόταση 2.1**.

□

2.2 Ολομορφία

Στους μιγαδικούς υπάρχει η δυνατότητα εκτέλεσης διαίρεσης, οπότε ο ορισμός της μιγαδικής παραγώνου θα είναι ευκολότερος.

Ορισμός 2.2: (Ολομορφία). Έστω $f : \Omega \to \mathbb{C}$ και $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ένα ανοικτό σύνολο, $z_0 \in \Omega$. Λέμε ότι η f έχει μιγαδική παράγωγο στο z_0 αν το όριο:

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

υπάρχει (στο $\mathbb{R}$). Συμβολίζουμε με $f'(z_0)$ το όριο αυτό. Αν για κάθε $z_0 \in \Omega$ υπάρχει η μιγαδική παράγωγος, λέμε ότι η f είναι ολόμορφη στο Ω.

Οπότε μια μιγαδική συνάρτηση μπορεί να έχει δύο ≪ειδών≫ παραγώγους, το διαφορικό και τη μιγαδική παράγωγο. Έτσι όπως έχουμε παραθέσει τους ορισμούς δεν είναι σαφές αν οι δύο έννοιες ταυτίζονται, αργότερα θα δείξουμε ότι μια μιγαδική συνάρτηση που έχει μιγαδική παράγωγο σε ένα σημείο είναι διαφορίσιμη στο ίδιο σημείο. Κατά κάποιον τρόπο, ζητάμε παραπάνω πράγματα ώστε μία συνάρτηση να έχει μιγαδική παράγωγο.

Ορισμός 2.3: (Ολόμορφες συναρτήσεις). Έστω Ω ένα ανοικτό σύνολο. Συμβολίζουμε το σύνολο όλων των ολομόρφων συναρτήσεων $f : \Omega \to \mathbb{C}$ με $\mathcal{O}(\Omega)$.

■ **Παράδειγμα 2.1:**

- Η συνάρτηση $z \mapsto \overline{z}$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0, αφού:

$$\lim_{z\to 0} \frac{\overline{z}}{z} = \lim_{z\to 0} \frac{\overline{z}^2}{|z|^2}$$

προσεγγίζοντας το 0 από δύο διαφορετικές ευθείες που διέρχονται από το 0 (και άρα που έχουν διαφορετικές κλίσεις), το όριο παίρνει διαφορετικές τιμές. Επομένως δεν ορίζεται.

- Η συνάρτηση $z \mapsto \overline{z}$ δεν είναι παραγωγίσιμη σε κανένα $z_0 \in \mathbb{C}$, αφού:

$$\lim_{z\to z_0} \frac{\overline{z} - \overline{z_0}}{z - z_0} = \lim_{z-z_0\to 0} \frac{\overline{z - z_0}^2}{|z - z_0|^2}$$

- Η ταυτοτική συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $z_0 \in \mathbb{C}$, αφού:

$$\lim_{z\to z_0} \frac{z - z_0}{z - z_0} = 1$$

- Κατ' επέκταση, για κάθε $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό, το σύνολο $\mathcal{O}(\Omega)$ δεν είναι κενό και δεν ταυτίζεται με το σύνολο όλων των μιγαδικών συναρτήσεων.

■

Συνεχίζουμε αποδεικνύοντας μερικές σημαντικές ιδιότητες των μιγαδικών παραγώγων.

Πρόταση 2.3: Εάν μια συνάρτηση $f : \Omega \to \mathbb{C}$ (με το Ω να είναι ανοικτό) έχει μιγαδική παράγωγο στο $z_0 \in \Omega$, τότε είναι συνεχής στο z_0.

Απόδειξη: Πράγματι:

$$\lim_{z\to z_0} [f(z) - f(z_0)] = \lim_{z\to z_0} \left[\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \cdot (z - z_0)\right] = f'(z_0) \lim_{z\to z_0} (z - z_0) = 0$$

□

Πρόταση 2.4: (Παρατήρηση του Καραθεοδωρή). Έστω $f : \Omega \to \mathbb{C}$, $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό και $z_0 \in \Omega$. Η f έχει μιγαδική παράγωγο στο z_0 εάν και μόνο αν υπάρχει συνεχής συνάρτηση $\varepsilon_f : \Omega \to \mathbb{C}$ με $f(z) = f(z_0) + \varepsilon_f(z)(z - z_0)$. Επιπλέον, $\varepsilon_f(z_0) = f'(z_0)$.

Απόδειξη: ($\Rightarrow$) Ορίζουμε:

$$\varepsilon_f(z) = \begin{cases} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}, \text{ εάν } z \neq z_0 \\ f'(z_0), \text{ εάν } z = z_0 \end{cases}$$

και παρατηρούμε ότι η ε_f έχει τις ζητούμενες ιδιότητες.

($\Leftarrow$) Εάν $f(z) = f(z_0) + \varepsilon_f(z)(z - z_0)$, τότε:

$$\varepsilon_f(z) = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}, \text{ για } z \neq z_0$$

Λόγω της συνέχειας της ε_f έπεται κι αυτή η κατεύθυνση.

□

Πρόταση 2.5: Έστω $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ ($\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό) οι οποίες είναι παραγωγίσιμες στο $z_0 \in \Omega$. Τότε:

i. $(f + g)'(z_0) = f'(z_0) + g'(z_0)$

ii. $(f \cdot g)'(z_0) = f'(z_0) \cdot g(z_0) + f(z_0) \cdot g'(z_0)$

iii. Αν $\lambda \in \mathbb{C}$, $(\lambda f)'(z_0) = \lambda f'(z_0)$

Απόδειξη: Για το i., το αποτέλεσμα έπεται από τις ιδιότητες του ορίου.

$$\lim_{z \to z_0} \frac{(f+g)(z) - (f+g)(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} + \lim_{z \to z_0} \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0}$$

Για το ii., χρησιμοποιούμε την **Πρόταση 2.4** και γράφουμε $f(z) = f(z_0) + \varepsilon_f(z)(z - z_0)$, $g(z) = g(z_0) + \varepsilon_g(z)(z - z_0)$. Παρατηρούμε (με πράξεις) ότι:

$$(f \cdot g)(z) = (f \cdot g)(z_0) + \big(\varepsilon_f(z) g(z_0) + \varepsilon_f(z)\varepsilon_g(z)(z - z_0) + \varepsilon_f(z_0)\varepsilon_g(z)\big)(z - z_0)$$

οπότε αν ορίσουμε $\varepsilon_{f \cdot g} = \varepsilon_f(z) g(z_0) + \varepsilon_f(z)\varepsilon_g(z)(z - z_0) + \varepsilon_f(z_0)\varepsilon_g(z)$, θα παρατηρήσουμε ότι η $\varepsilon_{f \cdot g}$ είναι συνεχής και:

$$(f \cdot g)(z) = (f \cdot g)(z_0) + \varepsilon_{f \cdot g}(z)(z - z_0)$$

Δηλαδή, βάσει της **Πρότασης 2.4**, η $f \cdot g$ έχει μιγαδική παράγωγο στο z_0. Μάλιστα:

$$(f \cdot g)'(z_0) = \varepsilon_{f \cdot g}(z_0) = f'(z_0) \cdot g(z_0) + f(z_0) \cdot g'(z_0)$$

Το iii. είναι συνέπεια του ii..

□

Πρόταση 2.6: Έστω $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ ($\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό) δύο συναρτήσεις, $z_0 \in \Omega$ και $g(z_0) \neq 0$. Εάν οι f, g είναι παραγωγίσιμες στο z_0, τότε:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \frac{f'(z_0) g(z_0) - f(z_0) g'(z_0)}{g^2(z_0)}$$

Απόδειξη: Και πάλι θα γίνει χρήση της **Πρόταση 2.4**. Γράφουμε $f(z) = f(z_0) + \varepsilon_f(z)(z - z_0)$, $g(z) = g(z_0) + \varepsilon_g(z)(z - z_0)$ κι επίσης:

$$\frac{f(z)}{g(z)} - \frac{f(z_0)}{g(z_0)} = \frac{f(z_0) + \varepsilon_f(z)(z - z_0)}{g(z_0) + \varepsilon_g(z)(z - z_0)} - \frac{f(z_0)}{g(z_0)}$$

Με πράξεις στην παραπάνω σχέση καταλήγουμε στο ότι:

$$\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f(z_0)}{g(z_0)} + \frac{\varepsilon_f(z) g(z_0) - f(z_0)\varepsilon_g(z)}{g^2(z_0) + g(z_0)\varepsilon_g(z)(z - z_0)}(z - z_0)$$

το οποίο δίνει το ζητούμενο, χρησιμοποιώντας την **Πρόταση 2.4**.

□

Αυτά δείχνουν (δηλαδή οι προηγούμενες προτάσεις) ότι η μιγαδική παράγωγος, όπως και η πραγματική, συμπεριφέρεται αρκετά καλά στις πράξεις. Μία άμεση εφαρμογή (που μπορεί όμως να αποδειχθεί και κάπως ≪αυτόνομα≫) είναι το ακόλουθο παράδειγμα:

■ **Παράδειγμα 2.2:**

- Εφόσον η ταυτοτική συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη (με τη μιγαδική έννοια), η $x \mapsto x^2$ θα είναι παραγωγίσιμη (**Πρόταση 2.5, ii.**). Επαγωγικά μάλιστα, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, η $x \mapsto x^n$ είναι παραγωγίσιμη.

- Ως πόρισμα του προηγούμενου, κάθε πολυώνυμο έχει μιγαδική παράγωγο (**Πρόταση 2.5**).

- Είναι φανερό ότι $(x^2)' = 2x$. Επαγωγικά και χρησιμοποιώντας την **Πρόταση 2.5, ii.** κανείς μπορεί να δείξει ότι $(x^n)' = n x^{n-1}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

- Κάθε ρητή συνάρτηση P/Q είναι παραγωγίσιμη (στα σημεία που ορίζεται), βάσει της **Πρότασης 2.6**.

■

Τέλος θα δείξουμε άλλο ένα αποτέλεσμα που ≪μεταβιβάζεται≫ στις μιγαδικές παραγώγους, τον κανόνα της αλυσίδας.

Πρόταση 2.7: (Κανόνας της αλυσίδας). Έστω $f : A \to B$, $g : B \to \mathbb{C}$ δύο συναρτήσεις και $A, B \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτά. Ισχύει ότι:

$$(g \circ f)' = f' \cdot (g' \circ f)$$

Απόδειξη: Ίσως πλέον είναι φανερό πώς θα λειτουργήσουμε για την απόδειξη της πρότασης: θα χρησιμοποιήσουμε γι' ακόμη μια φορά την **Πρόταση 2.4**.

Έστω $z_0 \in A$. Θεωρούμε (όπως στην **Πρόταση 2.4**) τις συνεχείς συναρτήσεις ε_f, ε_g, για τις οποίες:

$$f(z) = f(z_0) + \varepsilon_f(z)(z - z_0) \textbf{ και } g(w) = g\big(f(z_0)\big) + \varepsilon_g(w)\big(w - f(z_0)\big)$$

Υπολογίζοντας λοιπόν τη δεύτερη στις εικόνες $w = f(z)$, έπεται με πράξεις (και συνδυάζοντας την πρώτη σχέση) ότι:

$$g \circ f(z) = g \circ f(z_0) = \varepsilon_f(z)\varepsilon_g\big(f(z)\big)(z - z_0)$$

και κατά συνέπεια το ζητούμενο.

□

2.2.1 Εξισώσεις Cauchy - Riemann

Προτύτερα είδαμε δύο «είδη» παραγώγων -όταν αναφερόμαστε σε μιγαδικές συναρτήσεις- αυτήν του διαφορικού και τις μιγαδικής παραγώγου. Αναφέραμε ότι κανείς ουσιαστικά ζητά περισσότερα αν αποσκοπεί μία συνάρτηση να έχει μιγαδική παράγωγο: αυτό θα προσπαθήσουμε να το αιτιολογίσουμε με το ακόλουθο σημαντικό θεώρημα.

Θεώρημα 2.1: (Εξισώσεις Cauchy - Riemann). Έστω $f : \Omega \to \mathbb{C}$ μία μιγαδική συνάρτηση, ορισμένη στο ανοικτό σύνολο $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, και $z_0 = (x_0, y_0) \in \Omega$. Γράφουμε $f(z) = \Re f(z) + i \cdot \Im f(z)$ (δηλαδή την f «κατά συντεταγμένες») και έχουμε την ακόλουθη ισοδυναμία:

Η f έχει μιγαδική παράγωγο στο z_0

$$\Longleftrightarrow$$

Οι $\Re f, \Im f$ είναι διαφορίσιμες στο z_0 και $\begin{cases} \dfrac{\partial \Re f}{\partial x}(z_0) = \dfrac{\partial \Im f}{\partial y}(z_0) \\[2ex] \dfrac{\partial \Re f}{\partial y}(z_0) = -\dfrac{\partial \Im f}{\partial x}(z_0) \end{cases}$

Απόδειξη: Στα παρακάτω θα γράφουμε $z = (x, y)$.

($\Rightarrow$) Εάν η μιγαδική παράγωγος υπάρχει σε ένα σημείο $z_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{C}$, τότε το ακόλουθο όριο υπάρχει:

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \Leftrightarrow \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)}{z - z_0} = 0$$

Ορίζουμε $\mathcal{E}(z) = f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)$ και παρατηρούμε ότι:

$$\frac{\mathcal{E}(z)}{z - z_0} \overset{z \to z_0}{\longrightarrow} 0 \Leftrightarrow \left|\frac{\mathcal{E}(z)}{z - z_0}\right| \overset{z \to z_0}{\longrightarrow} 0 \Leftrightarrow \left|\frac{\mathcal{E}(z)}{|z - z_0|}\right| \overset{z \to c}{\longrightarrow} 0 \Leftrightarrow \frac{\mathcal{E}(z)}{|z - z_0|} \overset{z \to c}{\longrightarrow} 0$$

Επιπλέον, για $f'(z_0) = (A, B) \in \mathbb{C}$, παρατηρούμε ότι:

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \mathcal{E}(z) \Rightarrow \begin{cases} \Re f(x, y) = \Re(f(x_0, y_0)) + A(x - x_0) - B(y - y_0) + \Re(\mathcal{E}(x, y)) \\ \Im f(x, y) = \Im(f(x_0, y_0)) + B(x - x_0) + A(y - y_0) + \Im(\mathcal{E}(x, y)) \end{cases}$$

Επειδή $\mathcal{E}(z)/|z - z_0| \overset{z \to z_0}{\longrightarrow} 0$, έπεται ότι:

$$\frac{\Re(\mathcal{E}(z))}{|z - z_0|} \overset{z \to z_0}{\longrightarrow} 0 \text{ και } \frac{\Im(\mathcal{E}(z))}{|z - z_0|} \overset{z \to z_0}{\longrightarrow} 0$$

Δηλαδή οι συναρτήσεις $\Re f$, $\Im f$ είναι διαφορίσιμες στο z_0. Μάλιστα:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Re f}{\partial x}(z_0) &= \lim_{x\to x_0}\frac{\Re f(x,y)-\Re(f(x_0,y_0))}{|x-x_0|} = \lim_{x\to x_0}\frac{A(x-x_0)-B(y_0-y_0)+\Re(\mathcal{E}(x,y_0))}{|x-x_0|} = A\\
\frac{\partial \Re f}{\partial y}(z_0) &= \lim_{y\to y_0}\frac{\Re f(x,y)-\Re(f(x_0,y_0))}{|y-y_0|} = \lim_{y\to y_0}\frac{A(x_0-x_0)-B(y-y_0)+\Re(\mathcal{E}(x_0,y))}{|y-y_0|} = -B\\
\frac{\partial \Im f}{\partial x}(z_0) &= \lim_{x\to x_0}\frac{\Im_f(x,y)-\Im(f(x_0,y_0))}{|x-x_0|} = \lim_{x\to x_0}\frac{B(x-x_0)+A(y_0-y_0)+\Im(\mathcal{E}(x,y_0))}{|x-x_0|} = B\\
\frac{\partial \Im f}{\partial y}(z_0) &= \lim_{y\to y_0}\frac{\Im f(x,y)-\Im(f(x_0,y_0))}{|y-y_0|} = \lim_{y\to y_0}\frac{B(x_0-x_0)+A(y-y_0)+\Im(\mathcal{E}(x_0,y))}{|y-y_0|} = A
\end{aligned}$$

($\Leftarrow$) Εάν οι $\Re f$, $\Im f$ είναι διαφορίσιμες στο z_0, τότε υπάρχουν συναρτήσεις δ και η αντίστοιχα, τέτοιες ώστε:

$$\begin{aligned}
\Re f(x,y) &= \Re f(x_0,y_0) + A(x-x_0) - B(y-y_0) + \delta(x,y)\\
\Im f(x,y) &= \Im f(x_0,y_0) + B(x-x_0) + A(y-y_0) + \eta(x,y)
\end{aligned}$$

και επιπλέον:

$$\frac{\delta(z)}{|z-z_0|} \overset{z\to z_0}{\longrightarrow} 0 \text{ και } \frac{\eta(z)}{|z-z_0|} \overset{z\to z_0}{\longrightarrow} 0$$

Τα A και B αντίστοιχα είναι οι τιμές $\partial\Re f/\partial x(z_0)$ και $\partial\Im f/\partial x(z_0)$. Εφόσον $f(z) = \Re_f(z) + i\Im_f(z)$, ο τύπος της f ισοδύναμα γίνεται:

$$f(z) = f(z_0) + (A+Bi)(z-z_0) + \delta(z) + i\eta(z)$$

Θέτοντας $\mathcal{E}(z) = \delta(z) + i\eta(z)$, έχουμε ότι $\mathcal{E}(z)/|z-z_0| \overset{z\to z_0}{\longrightarrow} 0 \Leftrightarrow \mathcal{E}(z)/(z-z_0) \overset{z\to z_0}{\longrightarrow} 0$ κι επιπλέον:

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)-(A+Bi)(z-z_0)+\mathcal{E}(z)}{z-z_0} = 0 \Leftrightarrow \lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = A+Bi$$

Επομένως η μιγαδική παράγωγος στο z_0 υπάρχει και μάλιστα είναι η τιμή $f'(z_0) = A+Bi$.

$\square$

Παρατήρηση 2.1: Από το **Θεώρημα 2.1** έπεται ότι αν η f έχει μιγαδική παράγωγο, τότε είναι διαφορίσιμη (για παράδειγμα, χρησιμοποιώντας επίσης την απόδειξη της **Πρότασης 2.2**).

Οπότε εάν κανείς έχει μιγαδική παραγωγίσιμη συνάρτηση, μπορεί να εξασφαλίσει τη διαφορισιμότητα.

Ένα ακόμη πόρισμα του παραπάνω θεωρήματος σχετίζεται με τη μορφή της μιγαδικής παραγώγου, σε σχέση με τις μερικές παραγώγους των συντεταγμένων.

Παρατήρηση 2.2: Από την απόδειξη του **Θεωρήματος 2.1** έπεται ότι, αν μία συνάρτηση $f : \Omega \to \mathbb{C}$ είναι παραγωγίσιμη στο z_0, τότε:

$$f'(z_0) = \frac{\partial \Re f}{\partial x}(z_0) + i\cdot\frac{\partial \Im f}{\partial x}(z_0)$$

ή αλλιώς:

$$f'(z_0) = \frac{\partial \Im f}{\partial y}(z_0) - i\cdot\frac{\partial \Re f}{\partial y}(z_0)$$

Με τις εξισώσεις Cauchy - Riemann είναι δυνατόν να μελετήσουμε την παραγωγισιμότητα περισσότερο ≪περίπλοκων≫ συναρτήσεων. Για παράδειγμα, η μιγαδική εκθετική και λογαριθμική (σε κατάλληλα πάντα σύνολα).

Πρόταση 2.8: Οι ακόλουθες συναρτήσεις είναι ολόμορφες, στα σύνολα που ορίζονται.

i. $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

ii. $\log|_{\mathbb{C}\setminus\underset{\longrightarrow}{Ox'}} : \mathbb{C}\setminus\underset{\longrightarrow}{Ox'} \to \mathbb{C}$

Απόδειξη: Για το i.: Συμβολίζουμε $z = (x,y)$. Όσον αφορά την exp, παρατηρούμε ότι ισχύει το **Θεώρημα 2.1**, αφού οι συντεταγμένες της είναι διαφορίσιμες και:

$$\begin{cases}
\dfrac{\partial e^x\cos(y)}{\partial x}(z_0) = e^{x_0}\cos(y_0) = \dfrac{\partial e^x\sin(y)}{\partial y}(z_0)\\[2ex]
\dfrac{\partial e^x\cos(y)}{\partial y}(z_0) = -e^{x_0}\sin(y_0) = -\dfrac{\partial e^x\sin(y)}{\partial x}(z_0)
\end{cases}$$

για κάθε $z_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{C}$. Οπότε η $\exp$ είναι παντού ολόμορφη. Μάλιστα, από την **Παρατήρηση 2.2**:

$$\exp' = \frac{\partial e^x \cos(y)}{\partial x} + i\frac{\partial e^x \sin(y)}{\partial x} = \exp$$

Για το ii.: Όσον αφορά τη συνάρτηση του λογαρίθμου, για κάθε $z_0 \in \mathbb{C} \backslash \underrightarrow{Ox'}$ ισχύει:

$$\lim_{z \to z_0} \frac{\log z - \log z_0}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \left[1 \Bigg/ \frac{\exp(\log(z)) - \exp(\log(z_0))}{\log(z) - \log(z_0)} \right] = \frac{1}{\exp(\log(z_0))} = \frac{1}{z_0}$$

Οπότε η συνάρτηση $\log$ είναι ολόμορφη στο $\mathbb{C} \backslash \underrightarrow{Ox'}$, με παράγωγο $1/(\cdot)$. Μάλιστα αυτό είναι το μεγαλύτερο σύνολο ως προς τη σχέση του υποσυνόλου, για το οποίο ο λογάριθμος $\log$ έχει μιγαδική παράγωγο, μιας και στο $\underrightarrow{Ox'}$ δεν είναι συνεχής συνάρτηση.

2.3 Δυναμοσειρές

Η μελέτη των δυναμοσειρών σ' αυτό το σημείο είναι κριτικής σημασίας για τη μελέτη της ομοιομορφίας. Ένα από τα σημαντικότερα απότελέσματα που θα δούμε είναι ότι κάθε δυναμοσειρά είναι ολόμορφη στον δίσκο σύγκλισής της. Έπειτα, σε επόμενο κεφάλαιο, θα δούμε επίσης ότι κάθε ολόμορφη συνάρτηση έχει ανάλυση σε δυναμοσειρά.

Ορισμός 2.4: (Δυναμοσειρές). Ως μιγαδική δυναμοσειρά ορίζουμε κάθε εν γένει «απειρόβαθμο» πολυώνυμο με μιγαδικούς συντελεστές. Δηλαδή κάθε συνάρτηση της μορφής:

$$P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$$

όπου $(a_k)_{k=0}^{\infty}$ είναι μία ακολουθία μιγαδικών αριθμών. Συμβολίζουμε το σύνολο των μιγαδικών δυναμοσειρών με:

$$\mathbb{C}[[z]] = \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \;\middle|\; a_k \in \mathbb{C},\ k \in \mathbb{N}_0 \right\}$$

Ο παραπάνω συμβολισμός του συνόλου των μιγαδικών δυναμοσειρών, $\mathbb{C}[[z]]$, γίνεται σε αναλογία με τον συμβολισμό του συνόλου $\mathbb{C}[z]$ των πολυωνύμων υπεράνω του $\mathbb{C}$.

Εν τω μεταξύ στα πολυώνυμα είναι γνωστό ότι $\mathbb{C}[z - c] = \mathbb{C}[z]$, δηλαδή τα πολυώνυμα «με κέντρο c» είναι (ή τουλάχιστον τα βλέπουμε ως) πολυώνυμα με μεταβλητή z.

$$P(z) = a_n(z-c)^n + \cdots + a_0$$

Το ίδιο δεν συμβαίνει με τις δυναμοσειρές. Δηλαδή, δεν αληθεύει η ισότητα $\mathbb{C}[[z - c]] = \mathbb{C}[z]$ - οι δυναμοσειρές κέντρου c ενδέχεται να μην είναι κέντρου 0. Ένα απλό παράδειγμα είναι το ακόλουθο:

$$P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (z+1)^k$$

Οπότε γενικά θα πρέπει να υπάρχει προσοχή στο τι είδους δυναμοσειρά είναι μία δυναμοσειρά, αν έχουμε δηλαδή κέντρο ή όχι. Είναι επίσης σκόπιμο να ορίσουμε

2.3.1 Σύγκλιση δυναμοσειρών

Κατ' αρχάς ο όρος «σύγκλιση δυναμοσειρών» είναι λογικός, αν και ίσως λίγο παραπλανητικός. Στην ουσία μια δυναμοσειρά (έστω κέντρου 0) με συντελεστές a_k ορίζεται στα z στα οποία το όριο $\lim_{n\in\mathbb{N}_0} \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ υπάρχει, οπότε ο όρος «σύγκλιση» έχει νόημα.

Επιπλέον, είναι σημαντικό κανείς να παρατηρήσει ότι οι σειρές (μερικών αθροισμάτων) στην ουσία δεν διαφέρουν πολύ από τις ακολουθίες. Κατ' αρχάς μία ακολουθία μερικών αθροισμάτων $\sum_{k=0}^{n} a_k$ είναι (προφανώς) μία ακολουθία του n, κι αντίστροφα μία ακολουθία $(a_k)_{k=0}^{\infty}$ μπορεί να γραφεί:

$$a_{n+1} = a_k + \sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k-1})$$

Με αυτό υπόψη, αρκετά αποτελέσματα που θα δώσουμε είναι στην πραγματικότητα αποτελέσματα ακολουθιών, οπότε ίσως γνωστά για κάποιους. Θα δούμε παρόλα αυτά αποδείξεις που εμπλέκουν σειρές, για να μπούμε στο κλίμα.

Πρόταση 2.9: Έστω $\big((a_k, b_k)\big)_{k\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία μιγαδικών αριθμών (a_k, b_k). Τότε η ακόλουθη ισοδυναμία αληθεύει:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k + ib_k \text{ συγκλίνει } \Leftrightarrow \text{ οι } \sum_{k=0}^{\infty} a_k,\ \sum_{k=0}^{\infty} b_k \text{ συγκλίνουν.}$$

Απόδειξη:

($\Rightarrow$) Υποθέτουμε ότι η σειρά $\sum_{k=0}^{\infty}(a_k + ib_k)$ συγκλίνει. Εάν s_n είναι η σειρά των μερικών αθροισμάτων της, τότε υπάρχει $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}$ τέτοιο ώστε:

$$s_n \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \alpha + i\beta$$

Γράφοντας ισοδύναμα την ακολουθία των μερικών αθροισμάτων στη μορφή $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k + i\sum_{k=0}^{n} b_k$, παρατηρούμε ότι:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k + i\sum_{k=0}^{n} b_k \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \alpha + i\beta \Rightarrow \sum_{k=0}^{n} a_k \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \alpha,\ \sum_{k=0}^{n} b_k \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \beta$$

Έτσι λοιπόν, οι σειρές $\sum_{k=0}^{\infty} a_k,\ \sum_{k=0}^{\infty} b_k$ συγκλίνουν στα α και β αντίστοιχα.

($\Leftarrow$) Έστω s_n, t_n να είναι οι σειρές των μερικών αθροισμάτων των $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ και $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ αντίστοιχα, οι οποίες συγκλίνουν στα α και β. Παρατηρούμε ότι:

$$\sum_{k=0}^{n}(a_k + ib_k) = \sum_{k=0}^{n} a_k + i\sum_{k=0}^{n} b_k = s_n + t_n$$

Επομένως, η $\sum_{k=0}^{\infty}(a_k + ib_k)$ συγκλίνει, και μάλιστα τον μιγαδικό αριθμό $\alpha + i\beta$.

□

Λήμμα 2.1: Μια γεωμετρική σειρά $\sum_{k=0}^{\infty} a^k,\ a \geq 0$ συγκλίνει αν και μόνο αν ο λόγος της a είναι αυστηρά μικρότερος του 1. ■

Απόδειξη: Πράγματι, η σειρά των μερικών αθροισμάτων:

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1},\ a \geq 0$$

συγκλίνει αν και μόνο αν $a < 1$. Μάλιστα, το όριό της είναι το $1/(1-a)$.

□

Θεώρημα 2.2: (Ύπαρξη ακτίνας σύγκλισης δυναμοσειράς). Έστω $P \in \mathbb{C}[[z]]$ μια μιγαδική δυναμοσειρά της μορφής:

$$P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$$

Υπάρχει ένας αριθμός $R \in [0, \infty]$, τέτοιος ώστε στον (ανοικτό) δίσκο $S(0, R)$ η P να συγκλίνει απολύτως και στην (κλειστή) περιοχή $\mathbb{C}\backslash B(0, R)$ να αποκλίνει.

Μάλιστα, αυτό το R είναι το:

$$R = \sup\left\{r \geq 0 \mid (|c_k| r^k)_{k\in\mathbb{N}_0} \text{ φραγμένη}\right\}$$

Απόδειξη: Έστω:

$$R = \sup\left\{r \geq 0 \mid (|c_k| r^k)_{k\in\mathbb{N}_0} \text{ φραγμένη}\right\}$$

Κατ'αρχάς παρατηρούμε ότι το supremum υπάρχει, αφού για $r = 0$ η $(|c_k|r^k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ είναι πάντοτε φραγμένη (δεν πέφτουμε σε τετριμμένες περιπτώσεις με κενά σύνολα).

Η περίπτωση όπου $R = 0$ είναι τετριμμένη. Εάν $R > 0$, κάθε πραγματικός αριθμός $0 \leqslant r_0 \leqslant R$ δίνει ακολουθία $(|c_k r_0^k|)_{k\in\mathbb{N}_0}$ η οποία είναι φραγμένη, έστω από έναν θετικό αριθμό M. Παρατηρούμε ότι για $|z| < r_0$:

$$|c_k z^k| = |c_k| r_0^k \cdot \left(\frac{|z|}{r_0}\right)^k \leqslant M \cdot \left(\frac{|z|}{r_0}\right)^k$$

Κατά συνέπεια:

$$0 \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} |c_k z^k| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} M \left(\frac{|z|}{r_0}\right)^k \overset{\star}{=} M \Bigg/ 1 - \left(\frac{|z|}{r_0}\right)^k$$

όπου στην ισότητα άστρο ($\star$) γίνεται χρήση του **Λήμματος 2.1**. Επειδή η τελευταία συγκλίνει και η πρώτη είναι σειρά αύξοντων μερικών αθροισμάτων (περιέχει μόνο θετικούς όρους), η $\sum_{k=0}^{\infty} |c_k z^k|$ συγκλίνει για κάθε $|z| < r_0$. Επειδή το εν λόγω αποτέλεσμα ισχύει για κάθε $R \geq r_0 \geq 0$, για κάθε $|z| < R$ η σειρά συγκλίνει.

Για να ολοκληρωθεί η απόδειξη, θα δείξουμε ότι αν $|z| > R$, η σειρά αποκλίνει. Πράγματι, το R είναι το supremum των θετικών αριθμών r, για τους οποίους η ακολουθία $(|c_k|r^k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ είναι φραγμένη. Επομένως, για $|z| > R$, υπάρχουν άπειροι όροι της $(|c_k z^k|)_{k\in\mathbb{N}_0}$ οι οποίοι είναι μεγαλύτεροι του 1 (αφού αν το αντίθετο συνέβαινε, η ακολουθία προφανώς θα φράσσοταν από το $1 + \max\{|c_k z^k| > 1\}$) και συνεπώς:

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} |c_\ell z^\ell| \geqslant \sum_{\ell \in \left\{k \;\middle|\; |c_k z^k| > 1\right\}} |c_\ell z^\ell| \geqslant \sum_{\ell \in \left\{k \;\middle|\; |c_k z^k| > 1\right\}} = \#\left\{k \;\middle|\; |c_k z^k| > 1\right\} = \infty$$

Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη.

□

Ένα ακόμη αποτέλεσμα που ίσως κανείς να θυμάται από τον απειροστικό λογισμό ή την πραγματική ανάλυση είναι το παρακάτω.

Πρόταση 2.10: (Κριτήριο λόγου για δυναμοσειρές). Έστω $P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ μια μιγαδική δυναμοσειρά. Εάν:

$$\left|\frac{c_k}{c_{k+1}}\right| \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} R$$

τότε το R αποτελεί την ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς P.

Ως γενίκευση, σε οποιαδήποτε άλλη δυναμοσειρά (με διαφορετικό κέντρο) $Q \in \mathbb{C}[[z-c]],\ a \in \mathbb{C}$, εφαρμόζει το εν λόγω κριτήριο.

Απόδειξη: Αρχικά υποθέτουμε ότι το R δεν είναι άπειρο. Για $|z| < R$ παρατηρούμε ότι εφαρμόζει το κριτήριο του λόγου για πραγματικές σειρές, αφού:

$$\left|\frac{c_{k+1} z^{k+1}}{c_k z^k}\right| = \frac{|c_{k+1}| \cdot |z|}{|c_k|} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \frac{|z|}{R} < 1$$

Επομένως, η σειρά $\sum_{k=0}^{\infty} |c_k z^k|$ συγκλίνει. Εάν τώρα $|z| > R$, ο προαναφερθής λόγος είναι μεγαλύτερος της μονάδας, οπότε $|c_k z^k| \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \infty$. Αυτό δίνει ότι η σειρά αποκλίνει, αφού εάν συνέκλινε, $|c_k z^k| \to 0$.

Εάν το R είναι άπειρο, για κάθε (σταθερό) $z \in \mathbb{C}$, η ποσότητα:

$$\frac{|c_{k+1}| \cdot |z|}{|c_k|}$$

τείνει στο $0 < 1$, οπότε και πάλι εφαρμόζει το κριτήριο του λόγου για πραγματικές σειρές. Η σειρά λοιπόν $\sum_{k=0}^{\infty} |c_k z^k|$, σε αυτήν την περίπτωση συγκλίνει για κάθε μιγαδικό z.

Τα προαναφερθέντα επιχειρήματα παραμένουν αναλλοίωτα στην περίπτωση όπου το z έχει αντικατασταθεί από το $z - c,\ c \in \mathbb{C}$ - οπότε το αποτέλεσμα γενικεύεται: σε οποιαδήποτε άλλη δυναμοσειρά $Q \in \mathbb{C}[[z-c]],\ c \in \mathbb{R}$, εφαρμόζει το εν λόγω κριτήριο.

□

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Υπό προετοιμασία...

3.1 Υπό προετοιμασία...

Υπό προετοιμασία...

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Βιβλιογραφία

Ξενόγλωσση βιβλιογραφία:

(ZS) Zill Denis, Shanahan Patrick: ***A First Course in Complex Analysis*** (Jones and Bartlett Publishers, 2003)

(Or) Orlando Merino: ***A Short History of Complex Numbers*** (Univ. of Rhode Island, 2006)

(ER) Eberhard Freitag, Rolf Busam: ***Complex Analysis*** (Springer, δεύτερη έκδοση, 2008)

Ελληνική βιβλιογραφία:

(Gi) Γιαννόπουλος Απόστολος: ***Αναλυτική Θεωρία Αρθμών*** (ΕΚΠΑ, σημειώσεις ΠΠΣ, 2022)

(Ha) Χατζηαφράτης Τηλέμαχος: ***Απειροστικός Λογισμός σε Πολλές Μεταβλητές*** (Συμμετρία, 2009)

(Ru) Walter Rudin: ***Αρχές Μαθηματικής Αναλύσεως*** (Leader Books, πρώτη έκδοση, 2000)

(At) Αθανασόπουλος Κωνσταντίνος: ***Διαφορική Γεωμετρία*** (Παν. Κρήτης, σημειώσεις ΠΠΣ, 2020)

(Fr) Φράγκος Αναστάσιος: ***Εισαγωγή στην Επίπεδη Υπερβολική Γεωμετρία*** (ΕΚΠΑ, σημειώσεις ΠΠΣ, επηρεασμένες από τον κ. Λάππα Διονύσιο, 2021)

(Ko) Κουρουνιώτης Χρήστος: ***Θεμέλια των Μαθηματικών*** (Παν. Κρήτης, σημειώσεις ΠΠΣ, 2016)

(Ma) Μαλιάκας Μιχαήλ: ***Μαθήματα Βασικής Άλγεβρας και Θεωρίας Galois*** (Τσότρας, 2022)

(Ts) Τσαρπαλιάς Αθανάσιος: ***Μιγαδική Ανάλυση*** (ΕΚΠΑ, σημειώσεις ΠΠΣ, 2013)

(CB) Churchill R.V., Brown J.W.: ***Μιγαδικές συναρτήσεις και εφαρμογές*** (Παν. εκδόσεις Κρήτης, δεύτερη έκδοση, 2020)

(Me) Μερκουράκης Σοφοκλής: ***Σημειώσεις Μιγαδικής Ανάλυσης*** (ΕΚΠΑ, σημειώσεις ΠΠΣ, 2022)

Ευρετήριο