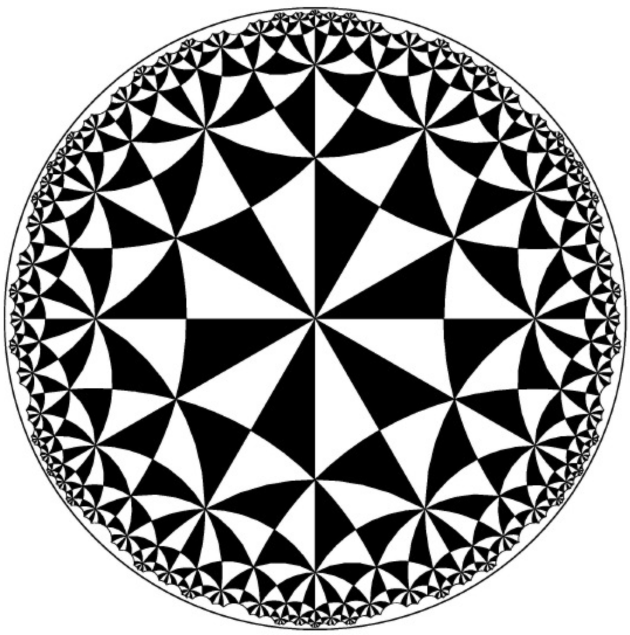
ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΕΠΙΠΕΔΗ

ΥΠΕΡΒΟΛΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Τμήμα Μαθηματικών, Σεπτέμβριος 2021



Αφορμή για τη συγγραφή των σημειώσεων
αποτέλεσαν οι διαλέξεις του μαθήματος:

Εισαγωγή στην Θεμελίωση της Γεωμετρίας (533)

όπως αυτό διδάχθηκε από τον ***κ. Λάππα Διονύσιο***

Επιμέλεια - επεξεργασία: *Φράγκος Αναστάσιος*

4η Μορφή Ιούλιος 2022

ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΙ

Α

1. α.α.τριγ: Απλά Ασυμπτωτικό Τρίγωνο

Γ

2. Γ.Κ.: Γεωμετρία Klein
3. γων.: Γωνία

Δ

4. δ.α.τριγ.: Διπλά Ασυμπτωτικό Τρίγωνο

Ε

5. Ε.Γ.: Ευκλείδεια Γεωμετρία
6. ε.τ.: Ευθύγραμμο Τμήμα

Ο

7. Ο.Γ.: Ουδέτερη Γεωμετρία

Σ

8. σ.τ.: Σημείο Τομής

Τ

9. τριγ.: Τρίγωνο
10. τ.α.τριγ.: Τριπλά Ασυμπτωτικό Τρίγωνο

Υ

11. Υ.Α.: Υπερβολικό Αξίωμα
12. Υ.Γ.: Υπερβολική Γεωμετρία

Προ του προλόγου

Οι παρούσες σημειώσεις γράφτηκαν ακολουθώντας σε έναν βαθμό τις σημειώσεις του διδάσκοντα, κ. Διονυσίου Λάππα. Έχουν υπάρξει βέβαια τροποποιήσεις (συμβολισμοί, σύνταξη, διάταξη) και αρκετές προσθήκες. Ειδικότερα σε αυτό το σύγγραμμα:

- Το πρώτο μέρος (Επίπεδη Υπερβολική Γεωμετρία), είναι *τροποποιημένο* και *εμπλουτισμένο* τμήμα των σημειώσεων του κ. Λάππα.

- Το δεύτερο μέρος (Κατά Klein Θεμελίωση), είναι *τροποποιημένο* και *εμπλουτισμένο* τμήμα των σημειώσεων του κ. Λάππα.

- Το τρίτο μέρος (Διαφορική Υπερβολική Γεωμετρία) δεν άνηκε στην εξεταστέα ύλη του μαθήματος, ούτε διδάχθηκε κατά την διάρκεια του εξαμήνου. Αποτελεί ολόκληρο μία προσθήκη.

Το μάθημα είχε ουσιαστικά δύο μέρη, αυτό τις συνθετικής Υ.Γ. και αυτό της κατά Klein θεμελίωσης. Αν σκοπεύετε να μελετήσετε το μάθημα μέσω αυτών των σημειώσεων, να έχετε υπόψη ότι οπωσδήποτε θα χρειαστείτε (σε συνδιασμό) και κάποιο καλογραμμένο σύγγραμμα, καθώς αυτές οι σημειώσεις είναι κάτι λιγότερο από πρόχειρες!

Νεότερες εκδόσεις μπορούν να βρεθούν στον σύνδεσμο: https://tinyurl.com/277p7y7r. Επίσης, θα είμαι ευγνώμων σε όποιον αναγνώστη με ενημερώσει για τυχόντα λάθη (τυπογραφικά ή μαθηματικής φύσεως), μέσω της διεύθυνσης ηλ. ταχυδρομείου: afragos@email.com

Ευχαριστώ θερμά την μητέρα μου και φιλόλογο Μπαφίτη Μαργαρίτα για τις διορθώσεις της σύνταξης και ορθογραφίας κάποιων τμημάτων αυτών των σημειώσεων.

Φ.Α.

Η γραμματοσειρά είναι δημιούργημα του κ. Τσολομύτη Αντώνιου: Kerkis © Department of Mathematics, University of the Aegean. Η στοιχειοθέτηση έγινε σε LaTeX.

Περιεχόμενα

I Επίπεδη Υπερβολική Γεωμετρία

1 Πρόλογος του πρώτου μέρους **9**
1.1 Πρόλογος . . . 9
1.2 Συνοπτική παρουσίαση των αποτελεσμάτων της Ουδέτερης Γεωμετρίας . . . 10
1.2.1 Αξιώματα της Ουδέτερης Γεωμετρίας . . . 10
1.2.2 Απαραίτητες γνώσεις από την Ουδέτερη Γεωμετρία . . . 25
1.3 Ασκήσεις του Κεφαλαίου 1 . . . 34

2 Στοιχεία από την Υπερβολική Γεωμετρία **35**
2.1 Άμεσες επιπτώσεις του Υπερβολικού Αξιώματος . . . 35
2.2 Οι μη τεμνόμενες ευθείες στην Υπερβολική Γεωμετρία . . . 40
2.3 Η γωνία παραλληλίας . . . 49
2.4 Το εμβαδόν στην Υπερβολική Γεωμετρία . . . 54
2.5 Περιγραφή των μοντέλων του Poincaré . . . 59
2.5.1 Το μοντέλο του Δίσκου του Poincaré . . . 59
2.5.2 Το μοντέλο του Πάνω Ημιεπιπέδου του Poincaré . . . 60
2.5.3 Σχέση μεταξύ των δύο μοντέλων . . . 61
2.5.4 Αποδείξεις για το μοντέλο του Δίσκου του Poincaré . . . 62
2.5.5 Για τη Γεωμετρία του μοντέλου του Δίσκου του Poincaré . . . 70
2.6 Ασκήσεις του Κεφαλαίου 2 . . . 72

3 Παράρτημα **73**
3.1 Λοιπά μοντέλα της Υ.Γ. . . . 73
3.1.1 Το μοντέλο του Υπερβολοειδούς του Minkowski . . . 73
3.1.2 Το Προβολικό μοντέλο των Beltrami - Klein . . . 74
3.2 Απεικονίσεις μεταξύ των μοντέλων . . . 75
3.2.1 Μεταξύ του Υπερβολοειδούς του Minkowski και του Δίσκου του Poincaré . . . 75
3.2.2 Μεταξύ του Υπερβολοειδούς του Minkowski και του Προβολικού Beltrami - Klein . . . 76
3.3 Περί της ‘αλήθειας’ των γεωμετριών . . . 77
3.4 Καλλιτεχνικές αναπαραστάσεις των μοντέλων της Υ.Γ. . . . 79

4 Βιβλιογραφία **83**

II Κατά Klein Θεμελίωση

5 Εισαγωγικές έννοιες **87**
5.1 Εισαγωγή . . . 87
5.2 Παραδείγματα γεωμετριών κατά Klein . . . 90
5.2.1 Η Ευκλείδεια Γεωμετρία . . . 90
5.2.2 Τοπολογικοί χώροι . . . 90

6 Χώροι με εσωτερικό γινόμενο και ισομετρίες **93**
6.1 Γενικά . . . 93
6.2 Η Ευκλείδεια γεωμετρία ως γεωμετρία κατά Klein . . . 97

7 Μη εκφυλισμένες τετραγωνικές μορφές στον $\mathbb{R}^n$ **103**
7.1 Γενικοί τύποι και κανονικές παραστάσεις . . . 103
7.2 Ισόμορφοι χώροι με εσωτερικό γινόμενο . . . 113
7.3 Ασκήσεις του Κεφαλαίου 7 . . . 115

8 Η Ευκλείδεια Γεωμετρία του $\mathbb{R}^n$ **117**
8.1 Θετικά ορισμένες τετραγωνικές μορφές 117
8.2 Αναλλοίωτοι υπόχωροι για τις ορθογώνιες απεικονίσεις της Ευκλείδειας γεωμετρίας του $\mathbb{R}^n$ 121
8.3 Απλοποιημένες μορφές πινάκων ορθογώνιων απεικονίσεων 124

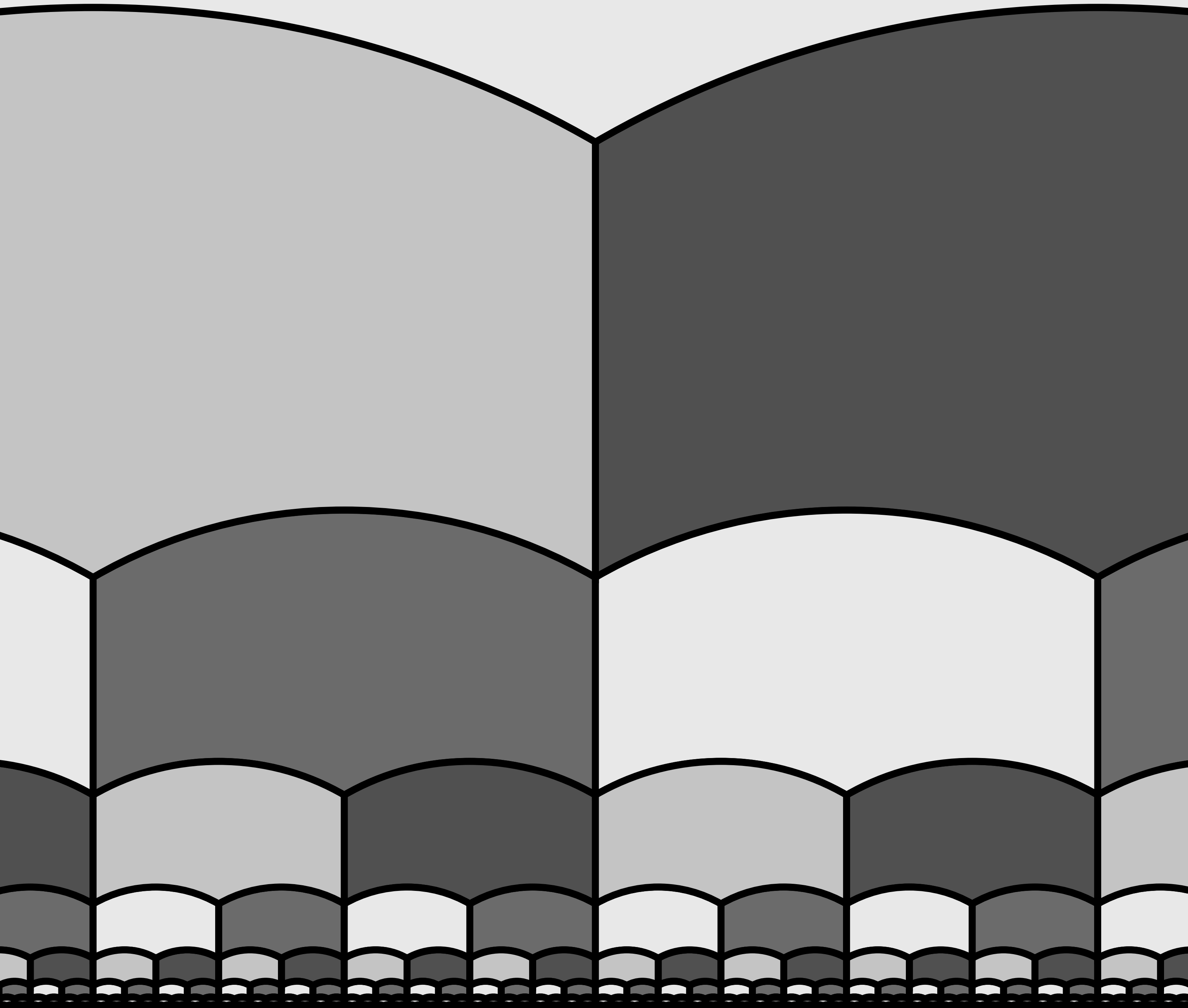
9 Χώροι Minkowski **129**
9.1 Οι χώροι Minkowski μέσω της γεωμετρίας 129
9.2 Οι χώροι Minkowski μέσω της φυσικής 133

10 Βιβλιογραφία **135**

III Διαφορική Υπερβολική Γεωμετρία

I

Επίπεδη Υπερβολική Γεωμετρία



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Πρόλογος του πρώτου μέρους

1.1 Πρόλογος

Η Υπερβολική Γεωμετρία (Υ.Γ) προέκυψε σαν ώριμο αποτέλεσμα στην κριτική του $5^{ου}$ Αιτήματος και σαν τέτοιο επιτεύχθηκε ταυτόχρονα από πολλούς ερευνητές. Αναμφίβολα την πατρότητα για τη δυνατότητα ύπαρξης γεωμετριών όπου το $5^{ο}$ Αίτημα δεν ισχύει διεκδικεί ο Gauss, που γύρω στο 1815 είχε αναπτύξει θεωρήματα αυτών των γεωμετριών, χωρίς όμως *ποτέ* να δημοσιοποιήσει τις έρευνές του.

Η τιμή της ανακάλυψης της Υ.Γ. ανήκει στον Bolyai και Lobachevski που δημοσίευσαν σχεδόν ταυτόχρονα, γύρω στο 1830, αποτελέσματα από τον κλάδο που με σημερινή ορολογία λέμε 'Υπερβολική Γεωμετρία'. Βέβαια, μια γεωμετρία εκείνη την εποχή όφειλε να έχει 'πραγματική' ύπαρξη και έτσι η Υ.Γ. συνήθως αναφερόταν φανταστική και η αυτηρότητά της αμφισβητούταν. Μια τέτοια φαινομενικά αυθαίρετη θεωρία άρχισε να δημιουργεί ερωτήματα, πλέον θεμελιώδη για μια αξιωματική θεμελίωση, της μορφής: *"Αρκεί η απουσία αντιφάσεων στα πρώτα αποτελέσματα για να εξασφαλήσει ότι τελικά δεν θα πασουσιαστούν αντιφάσεις κατά την ανάπτυξη της θεωρίας;"*

Προς το τέλος του $19^{ου}$ αιώνα αναθεωρήθηκαν πολλές απόψεις που αφορούσαν τη φύση των μαθηματικών σαν επιστήμη. Ερωτήματα όπως το προαναφερθέν αντιμετωπίστηκαν με επιτυχία, μέσα από αυστηρές θεμελιώσεις που βασίζονταν σε ένα σύστημα αξιωμάτων, επιλεγμένων χωρίς αναγκαίες αντιστοιχίες με φυσικά πρότυπα. Ένα πλήρες σύστημα αξιωμάτων για τις υπ' όψιν γεωμετρίες δόθηκε από τον Hilbert γύρω στο 1900. Η δυνατότητα 'ύπαρξης' της Υ.Γ. είχε απαντηθεί λίγο πριν από τους Beltrami και Klein πρώτα και από τον Poincaré αργότερα, με κατασκευή *μοντέλων* της γεωμετρίας αυτής.

Όσον αφορά τη σειρά που θα ακολουθηθεί στην παρουσίαση, σημειώνουμε τα εξής:

α. Τίθενται τα αξιώματα, που είναι αυτά κατά Hilbert, με μικρές όμως παραλλαγές, για να είναι πιο άμεσα χρησιμοποιήσιμα,

β. Αναπτύσσονται αποτελέσματα της Ουδέτερης Γεωμετρίας (Ο.Γ.), δηλαδή της Γεωμετρίας χωρίς κανένα αξίωμα παραλλήλων και κατά συνέπεια τα θεωρήματά της ισχύουν τόσο στην Ευκλείδεια, όσο και στην Υπερβολική Γεωμετρία,

γ. Με βάση το Υπερβολικό Αξίωμα αποδεικνύονται τα κύρια αποτελέσματα της Επίπεδης Υπερβολικής Γεωμετρίας, σε αντιπαράθεση με την Ευκλείδεια Γεωμετρία. Γίνεται προσπάθεια ώστε τα αποτελέσματα που αποδεικνύονται να είναι χαρακτηριστικά για την ιδιαιρετότητά τους,

δ. Περιγράφονται με αρκετές λεπτομέριες τα μοντέλα Poincaré για την Υ.Γ. και *αποδεικνύεται πλήρως* ότι είναι πράγματι μοντέλα.

1.2 Συνοπτική παρουσίαση των αποτελεσμάτων της Ουδέτερης Γεωμετρίας

Για τη διευκόλυνση του αναγνώστη και για τον καθορισμό της ορολογίας, γίνεται μια συνοπτική παρουσίαση της Ο.Γ., δηλαδή της Γεωμετρίας που αναπτύσσεται χωρίς την χρήση κανενός αξιώματος παραλληλίας, στα πλαίσια της αξιωματικής κατά Hilbert θεμελίωσης. Για μια ολοκληρωμένη ανάπτυξη του θέματος, ο αναγνώστης παραπέμπεται στο βιβλίο: "Χ. Στραντζαλής: ***Η Εξέλιξη των Ευκλείδειων και μη Ευκλείδειων Γεωμετριών***, Αθήνα 1989".

Ο Hilbert θεμελίωσε αξιωματικά τη γεωμετρία αρχίζοντας από "*σημεία*" και "*ευθείες*", θεωρώντας ότι μεταξύ αυτών βρίσκονται "*σχέσεις*" (καταρχήν αόριστες), της "*πρόσπτωσης*", του "*μεταξύ*" και της "*συμφωνίας*", και απαίτησε οι "*σχέσεις*" αυτές να υπόκεινται σ' ένα σύνολο αξιωμάτων. Μια τέτοια θεμελίωση πρέπει να ικανοποιεί τις στοιχειώδεις απαιτήσεις μιας αξιωματικής θεωρίας - δηλαδή τα αξιώματα που τελικά θα επιλεγούν να είναι *ανεξάρτητα* μεταξύ τους, να μην οδηγούμαστε σε *αντιφάσεις* και επίσης η θεωρία να είναι *πλήρης*, δηλαδή για κάθε γεωμετρική πρόταση να μπορούμε να αποφανθούμε αν είναι αληθής η ψευδής. Οι απαιτήσεις αυτές εν τέλει δεν μπορούν εύκολα να ελεγχθούν. Μάλιστα κάποιες από αυτές δεν είναι δυνατόν να ισχύουν σε κάθε γεωμετρία που προκύπτει από την Ο.Γ.

Οι 'αποδείξεις' για το ότι η θεωρία πληροί ή δεν πληροί τις ελάχιστες προϋποθέσεις, ανάγονται στην κατασκευή *μοντέλων* για τη θεωρία - δηλαδή απεικονίζονται τα "*αντικείμενα*" και οι "*σχέσεις*" σε γνωστές θεωρίες, οπότε έτσι αποδεικνύεται η ισοδυναμία δύο θεωριών. Εάν μια ισοδύναμη θεωρία πληροί (ή δεν πληροί) τις προϋποθέσεις, τότε και η ίδια η θεωρία τις πληροί (ή δεν τις πληροί). Κάθε αξίωμα της θεωρίας "*μεταφράζεται*" σε μια πρόταση του μοντέλου, και σε μία πρόταση της οποίας η αλήθεια πρέπει να αποδειχθεί. Ο Hilbert θεώρησε το σύστημα των πραγματικών αριθμών, οπότε μπόρεσε να αποδείξει ότι το σύνηθες Καρτεσιανό επίπεδο είναι ένα "*μοντέλο*" για την Ευκλείδεια Γεωμετρία (Ε.Γ.) του επιπέδου, στα πλαίσια της Αξιωματικής του παρουσίασης. Έτσι η θεωρία γίνεται αποδεκτή σαν Αξιωματική θεωρία.

1.2.1 Αξιώματα της Ουδέτερης Γεωμετρίας

Κάθε τυπικό αξιωματικό σύστημα αποτελείται από τέσσερεις θεμελιώδεις κατηγορίες όρων:

- απροσδιόριστους όρους,
- προσδιορισμένους όρους,
- αξιώματα,
- θεωρήματα.

Στην πρώτη κατηγορία περιλαμβάνονται *αρχικές έννοιες*, οι οποίες αποτελούν ουσιαστικά τους θεμελιώδεις λίθους της θεωρίας. Αυτές τις έννοιες θεωρούμε δεδομένες, απλούστατα διότι δεν είναι δυνατόν να οριστεί κάθε αντικείμενο της θεωρίας χωρίς να γίνει χρήση κάποιας κοινής αρχής / κάποιας κοινής βάσης - διαφορετικά, η διαδικασία αναζήτησης ενός ορισμού θα ήταν ατέρμονη. Τέτοιοι όροι στην Ο.Γ. είναι το *σημείο*, η *ευθεία* και η έννοια του *κείται επί*, η οποία είναι ουσιαστικά μία απροσδιόριστη σχέση μεταξύ σημείων και ευθειών.

Τα αξιώματα αποτελούν αρχικές προτάσεις, την αλήθεια των οποίων αποδεχόμαστε, και είναι απαραίτητα για τον προσδιορισμό των σχέσεων μεταξύ των απροσδιόριστων όρων.

Τα θεωρήματα (εννοείται και τα λήμματα, οι προτάσεις, κ.ο.κ.) είναι δημιουργήματα μιας λογικής διεργασίας και προκύπτουν μέσω μιας διαδοχικής εφαρμογής αξιωμάτων και θεωρημάτων. Προφανώς για να είναι λοιπόν δυνατόν να αναφερόμαστε σε θεωρήματα, θα πρέπει να υπάρχει ένα *σύστημα λογικής*.

Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε τα αξιώματα της Ο.Γ. και σε μεταγενέστερο υποκεφάλαιο θα δούμε ότι, παρόλο που η θεωρία αυτή της Ο.Γ. είναι συνεπής, εν τέλει είναι μη πλήρης, αφού υπάρχουν προτάσεις των οποίων η αλήθεια δεν μπορεί να αποδειχθεί ούτε να διαψευσθεί (συγκεκριμένα εάν ισχύει το 5^o Αίτημα του Ευκλείδη ή η άρνησή του). Για τη διατύπωση των αξιωμάτων, θεωρούμε $\mathcal{P}$ να είναι το σύνολο των σημείων και $\mathcal{L}$ να είναι το σύνολο των ευθειών της Γεωμετρίας.

Α. Αξιώματα του 'ανήκειν' (αξιώματα πρόσπτωσης):

1. Για κάθε δύο διαφορετικά σημεία $A, B \in \mathcal{P}$ υπάρχει ακριβώς 1 ευθεία που τα περιέχει, την οποία θα συμβολίζουμε με $\overleftrightarrow{AB}$.

2. Κάθε ευθεία περιέχει τουλάχιστον δύο σημεία (και άρα σε συνδιασμό με το 1., το σύνολο των ευθειών καθορίζεται πλήρως από αυτό των σημείων).

3. Υπάρχουν τουλάχιστον τρία μη συνευθειακά σημεία.

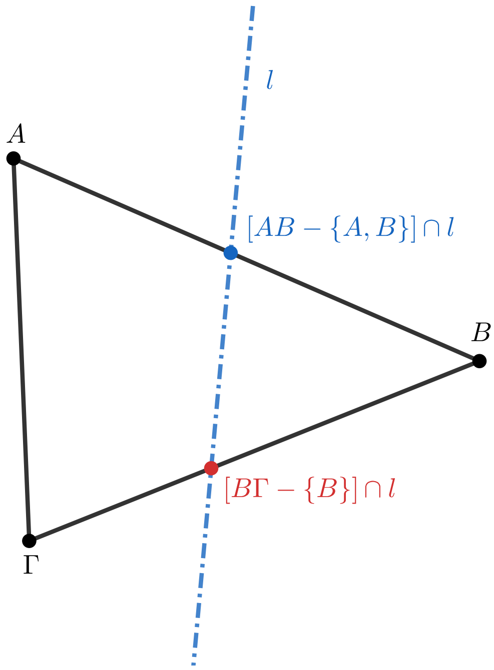
B. Αξιώματα του 'μεταξύ' (αξιώματα διάταξης):

1. Υπάρχει μια σχέση μεταξύ τριών διαφορετικών σημείων, η οποία όταν $A - B - \Gamma$ (και διαβάζεται "B μεταξύ των A, Γ"), τότε τα $A, B, \Gamma \in \mathcal{P}$ είναι συνευθειακά και επιπλέον $\Gamma - B - A$.

2. Για δεδομένα A και B στο σύνολο $\mathcal{P}$, υπάρχει $\Gamma \in \mathcal{P}$ τέτοιο ώστε $A - B - \Gamma$.

3. Εάν δωθούν τρία συνευθειακά σημεία, ακριβώς ένα βρίσκεται μεταξύ των άλλων δύο.

4. *(Αξίωμα του Pasch)* Έστω $A, B, \Gamma \in \mathcal{P}$ τα οποία είναι μη συνευθειακά. Εάν μια ευθεία $l \in \mathcal{L}$ τέμνει το τμήμα $AB - \{A, B\}$ σε ακριβώς ένα σημείο, τότε θα τέμνει το τμήμα $B\Gamma - \{B\}$ ή το τμήμα $A\Gamma - \{A\}$.



Παρατηρήσεις (1.1):
I. Θεωρούμε μία ευθεία $l \in \mathcal{L}$, η οποία λόγω του **A.2.** έχει τουλάχιστον δύο σημεία, έστω $A, B \in \mathcal{P}$. Λόγω του **B.2.**, υπάρχει άλλο ένα σημείο $\Gamma \in \mathcal{P}$ για το οποίο $A - B - \Gamma$. Εάν η σειρά των A, B ληφθεί διαφορετικά - δηλαδή θεωρήσουμε τα σημεία B, A - τότε εφαρμόζοντας και πάλι το **B.2.**, προκύπτει ότι θα υπάρχει σημείο $\Gamma' \in \mathcal{P}$ για το οποίο $B - A - \Gamma'$.

II. Για τη μελέτη της Γεωμετρίας θα χρησιμοποιήσουμε εργαλεία της συνολοθεωρίας. Επομένως θα είναι χρήσιμο να οριστούν τα αφηρημένα γεωμετρικά αντικείμενα και με περισσότερο συνολοθεωρητική υπόσταση.

- Τα σημεία είναι ως γνωστόν τα στοιχεία του συνόλου $\mathcal{P}$. Εδώ δεν έχουμε να ορίσουμε κάτι.

- Για τις ευθείες l του συνόλου $\mathcal{L}$, ορίζουμε τα σύνολα:

$$\mathcal{J}(l) = \{A \in \mathcal{P} \mid \text{ το } A \text{ κείται επί της } l\}$$

  τα οποία ονομάζουμε *σημειοσειρές* των ευθειών l.

Με τους ορισμούς αυτούς υπ' όψιν, μπορούμε να περιγράψουμε συνολοθεωρητικά κάποιες καταστάσεις της γεωμετρίας. Για παράδειγμα, για να πούμε ότι το σημείο A κείται επί μιας ευθείας l, αρκεί να γράψουμε $A \in \mathcal{J}(l)$. Για ευκολία στους συμβολισμούς, μπορούμε να δώσουμε τους εξής ορισμούς:

- Υπάρχει μια συνάρτηση '$\cap$' (όχι η συνήθης τομή) η οποία ορίζεται για κάθε διαφορετικές $l, m \in \mathcal{L}$ ως:

$$l \cap m = \begin{cases} \emptyset, & \text{εάν οι } l, m \text{ δεν τέμνονται} \\ \text{το μοναδικό σημείο τομής τους, εάν τέμνονται} \end{cases}$$

  Παρατηρήστε ότι $\mathcal{J}(l) \cap \mathcal{J}(m) = \{l \cap m\}$, όταν $l \cap m \neq \emptyset$. Ανάλογη σχέση θα χρησιμοποιείται και μεταξύ ευθυγράμμων τμημάτων και ημιευθειών, αλλά δεν θα οριστεί αυστηρά.

- Υπάρχει μία σχέση '$\in$' (όχι το σύνηθες 'ανήκει'), η οποία ορίζεται για κάθε $A \in \mathcal{P}$ και $l \in \mathcal{L}$ ως:

$$A \in l :\Leftrightarrow A \in \mathcal{J}(l) \text{ (το δεύτερο 'ανήκει' είναι το σύνηθες)}$$

Ορισμός: *Ευθύγραμμα τμήματα και Ημιευθείες:*
I. *Ευθύγραμμο τμήμα AB: Είναι το τμήμα της $\underleftrightarrow{AB}$ που περιέχει τα σημεία Γ για τα οποία $A - \Gamma - B$, μαζί με τα άκρα A, B. Με συνολοθεωρητικούς συμβολισμούς θα γράφαμε:*

$$AB = \{\Gamma \in \mathcal{P} \mid A - \Gamma - B\} \cup \{A, B\}$$

II. *Ημιευθεία $\underrightarrow{AB}$: Είναι το τμήμα της $\underleftrightarrow{AB}$ που περιέχει τα σημεία Γ για τα οποία $A - B - \Gamma$, μαζί με το AB. Με συνολοθεωρητικούς συμβολισμούς θα γράφαμε:*

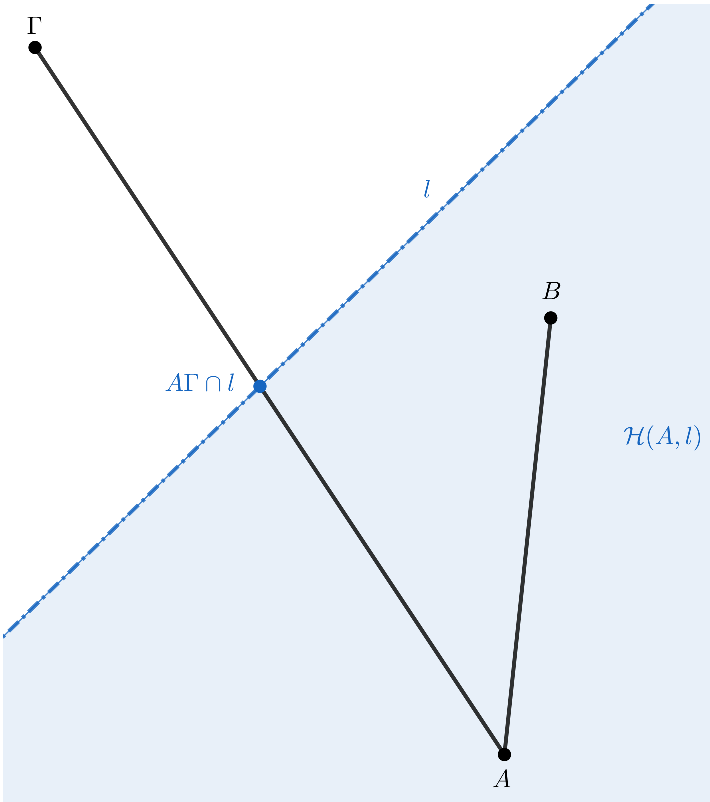
$$\underrightarrow{AB} = \{\Gamma \in \mathcal{P} \mid A - B - \Gamma\} \cup AB$$

Παρατηρήσεις (1.2):
I. Ισχύουν τα εξής: $\underrightarrow{AB} \cap \underrightarrow{BA} = AB$ και $\underrightarrow{AB} \cup \underrightarrow{BA} = \mathcal{J}(\underleftrightarrow{AB})$.

II. Στο αξίωμα **B.4.** ισχύει το ανάλογο της **Παρατήρησης (1.1), I**. Δηλαδή, εάν έχουμε τρία μη συνευθειακά σημεία A, B, Γ και μια ευθεία l τέμνει σε μοναδικό σημείο το τμήμα $B\Gamma - \{B, \Gamma\}$ ή $A\Gamma - \{A, \Gamma\}$, τότε αντίστοιχα τέμνει τα τμήματα $\big[AB - \{A\}$ ή $A\Gamma - \{\Gamma\}\big]$ ή $\big[AB - \{A\}$ ή $B\Gamma - \{\Gamma\}\big]$.

Ορισμός: *Σημεία στο ίδιο μέρος και Ημιεπίπεδα:*
I. *Σημεία στο ίδιο μέρος: Εάν A, B είναι σημεία και l ευθεία ώστε τα A, B να μην ανήκουν στην l, τότε θα λέμε ότι τα A και B "βρίσκονται προς το ίδιο μέρος της l" όταν $A = B$ ή το ευθύγραμμο τμήμα AB δεν περιέχει σημεία της l. Αντίστοιχα, τα A, B "βρίσκονται σε αντίθετα μέρη της l (εκατέρωθεν)" όταν $A \neq B$ και το ευθύγραμμο τμήμα AB έχει κοινό σημείο με την l (ουσιαστικά αυτό αποτελεί την άρνηση του πρώτου μέρους του ορισμού).*
II. *Ημιεπίπεδα: Έστω $A \in \mathcal{P}$ ένα σημείο και $l \in \mathcal{L}$ μια ευθεία που δεν το περιέχει. Ορίζουμε ως ημιεπίπεδο $\mathcal{H}(A, l)$ της l από την πλευρά του A όλα τα σημεία B που είναι προς το ίδιο μέρος της l με το A. Με συνολοθεωρητικούς συμβολισμούς θα γράφαμε:*

$$\mathcal{H}(A, l) = \{B \in \mathcal{P} \mid AB \text{ δεν τέμνει την } l\}$$



Πρόταση (1.1): Εάν AA' είναι ένα ευθύγραμμο τμήμα που δεν τέμνει την ευθεία l, τότε $\mathcal{H}(A,l) = \mathcal{H}(A',l)$.

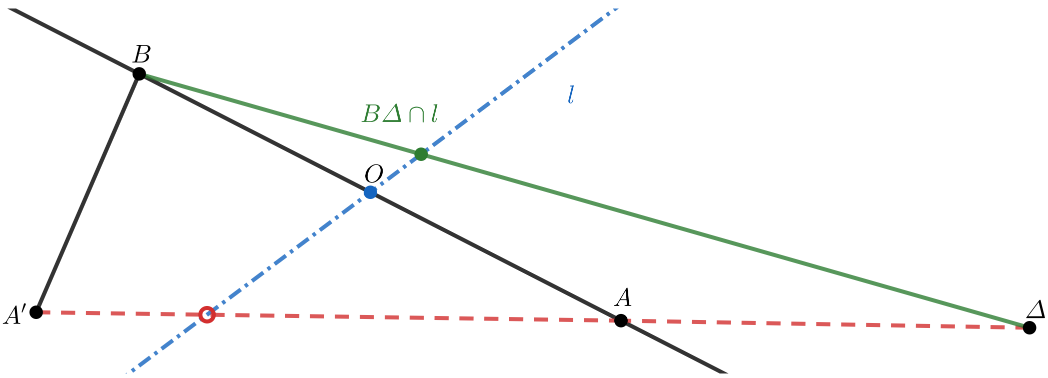
Απόδειξη: Εάν προς άτοπο θεωρήσουμε ότι τα δύο ημιεπίπεδα διαφέρουν σε ένα σημείο B, τότε χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $AB \cap l = \emptyset$ και επίσης ότι $A'B \cap l \neq \emptyset$. Από το αξίωμα **B.4.**, η l θα πρέπει να τέμνει το AA', το οποίο είναι άτοπο.

□

Πρόταση (1.2): Με τη βοήθεια του αξιώματος **B.4.** μπορεί να εξασφαλιστεί ότι κάθε ευθεία "*περιβάλλει*" δύο ημιεπίπεδα (χωρίζει το επίπεδο), τα οποία δεν έχουν κοινά σημεία. Ειδικότερα, θεωρούμε για κάθε $l \in \mathcal{L}$ ένα σημείο $A \notin l$. Διαλέγουμε οποιοδήποτε $O \in l$ και φέρουμε την ευθεία $\overleftrightarrow{AO}$. Από το **B.2.**, είναι δυνατόν να βρεθεί $B \in \overleftrightarrow{AO}$ τέτοιο ώστε $A - O - B$. Αυτό που θα δειχθεί είναι ότι:

$$\mathcal{H}(A,l) \cap \mathcal{H}(B,l) = \emptyset$$

Απόδειξη:



Υποθέτουμε προς άτοπο ότι υπάρχει σημείο A' στην τομή $\mathcal{H}(A,l) \cap \mathcal{H}(B,l)$ και κατά συνέπεια τα ευθύγραμμα τμήματα $A'A, A'B$ δεν τέμνουν την l.

Εάν η ευθεία $\overleftrightarrow{A'A}$ τέμνει την l, τότε το σημείο τομής $\overleftrightarrow{A'A} \cap l$ δεν θα είναι στο $A'A$. Υποθέτουμε λοιπόν χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι για το σημείο τομής ισχύει $\overleftrightarrow{A'A} \cap l - A' - A$ και διαλέγουμε σημείο Δ τέτοιο ώστε $A' - A - \Delta$. Το σημείο αυτό Δ βρίσκεται στο ίδιο ημιεπίπεδο με το A, αφού αν το αντίθετο συνέβαινε, η l θα έτεμνε το $A\Delta$ στο σημείο $\overleftrightarrow{A'A} \cap l$. Αυτό δεν είναι δυνατόν να συμβαίνει, αφού τότε ταυτόχρονα θα ίσχυε $A - \overleftrightarrow{A'A} \cap l - \Delta$ και $\overleftrightarrow{A'A} \cap l - A - \Delta$, το οποίο αντιβαίνει στο **B.3.**.

Εάν η ευθεία $\overleftrightarrow{A'A}$ δεν τέμνει την l, διαλέγουμε ως σημείο Δ οποιοδήποτε σημείο ικανοποιεί κάποια από τις σχέσεις $A' - A - \Delta$, $\Delta - A' - A$.

Σε κάθε περίπτωση, το ευθύγραμμο τμήμα $B\Delta$ τέμνεται από την l, αφού $\mathcal{H}(A,l) = \mathcal{H}(\Delta,l)$ και το B είναι εκατέρωθεν του A ως προς την l. Να σημειωθεί ότι η σχέση $\mathcal{H}(A,l) = \mathcal{H}(\Delta,l)$ προέκυψε από την **Πρόταση (1.1)**. Επομένως, από το αξίωμα **B.4.**, η l τέμνει το $A'B$ ή το $A'\Delta$. Εξ ορισμού δεν τέμνει το $A'B$, οπότε τέμνει το $A'\Delta$. Το $A'\Delta$ εξ ορισμού δεν το τέμνει στο $A'A$, αλλά ούτε στο $A\Delta$, αφού το Δ επιλέχθηκε έτσι ώστε τα A, Δ να είναι στο ίδιο μέρος της l. Αυτό μας οδηγεί σε άτοπο και συνεπώς θα πρέπει να μην υπάρχει σημείο τομής των $\mathcal{H}(A,l), \mathcal{H}(B,l)$.

□

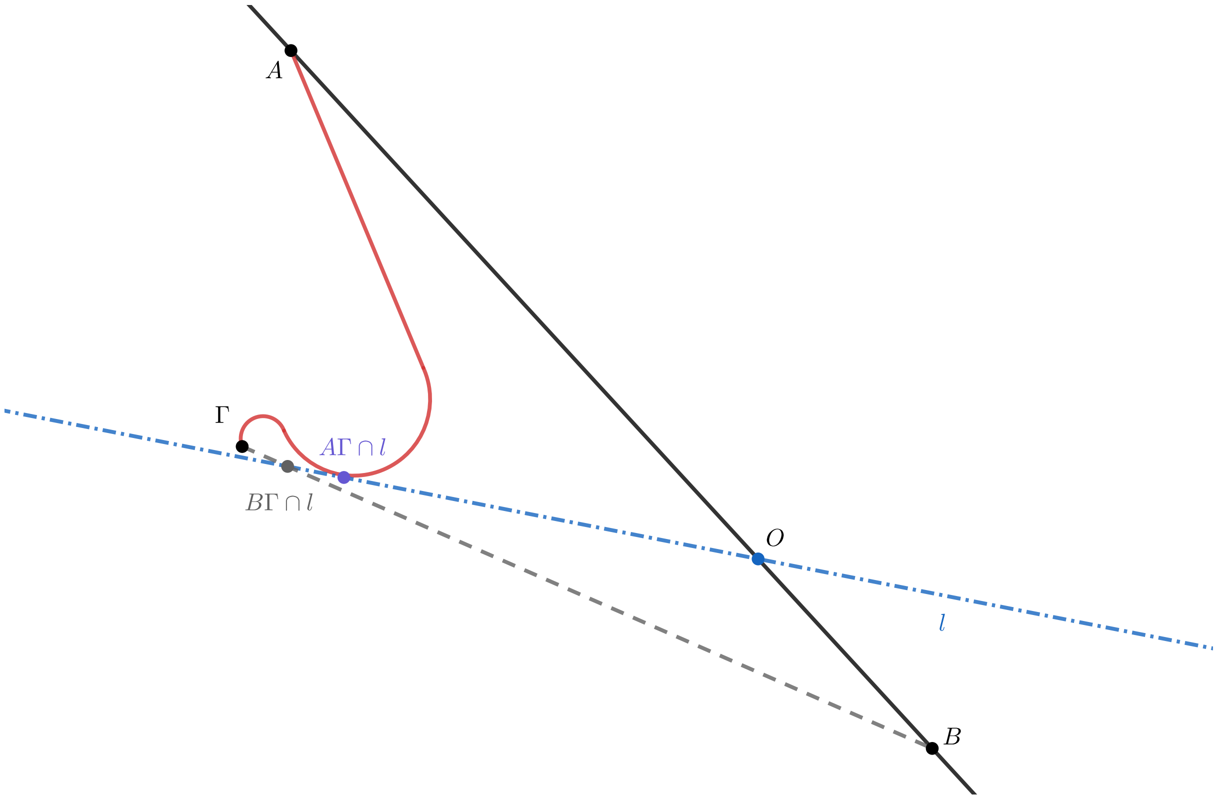
Πρόταση (1.3): Τα δύο ημιεπίπεδα που ορίζονται από μια ευθεία l, μαζί με την ευθεία αυτή, καλύπτουν όλο το επίπεδο. Ειδικότερα, θεωρούμε $l \in \mathcal{L}$ μια τυχαία ευθεία και ένα σημείο $A \in \mathcal{P}$ εκτός αυτής. Διαλέγουμε οποιοδήποτε $O \in l$ και φέρουμε την ευθεία $\overleftrightarrow{AO}$. Από το **B.2.**, είναι δυνατόν να βρεθεί $B \in \overleftrightarrow{AO}$ τέτοιο ώστε $A - O - B$. Αυτό που θα δειχθεί είναι ότι:

$$\mathcal{H}(A,l) \cup \mathcal{H}(B,l) \cup l = \mathcal{P}$$

Απόδειξη: Αρκεί να δείξουμε ότι $[\mathcal{H}(A,l)]^c \subseteq \mathcal{H}(B,l) \cup l$. Τότε κάθε σημείο του επιπέδου θα ανήκει είτε στο $\mathcal{H}(A,l)$ είτε στο συμπλήρωμά του $[\mathcal{H}(A,l)]^c \subseteq \mathcal{H}(B,l) \cup l$, επομένως θα ανήκει στο $\mathcal{H}(A,l) \cup \mathcal{H}(B,l) \cup l$.

Προς άτοπο, υποθέτουμε ότι υπάρχει σημείο $\Gamma \in \mathcal{P}$ το οποίο ανήκει στο $[\mathcal{H}(A,l)]^c$, αλλά όχι στο $\mathcal{H}(B,l) \cup l$. Εφόσον δεν ανήκει ούτε στο $\mathcal{H}(A,l)$, ούτε στο $\mathcal{H}(B,l)$, ούτε στην l, η ευθεία l θα τέμνει τα $A\Gamma - \{A,\Gamma\}$, $B\Gamma - \{B,\Gamma\}$ σε σημεία $A\Gamma \cap l$, $B\Gamma \cap l$. Παρατηρούμε ότι η $\overleftrightarrow{A\Gamma}$ τέμνει το τμήμα $[B\Gamma \cap l]O$ στο $A\Gamma \cap l$, αλλά κανένα από τα ευθύγραμμα τμήματα $[B\Gamma \cap l]B$, OB. Αυτό είναι άτοπο του **B.4.** και συνεπώς ισχύει το ζητούμενο. Δηλαδή:

$$[\mathcal{H}(A,l)]^c \subseteq \mathcal{H}(B,l) \cup l$$

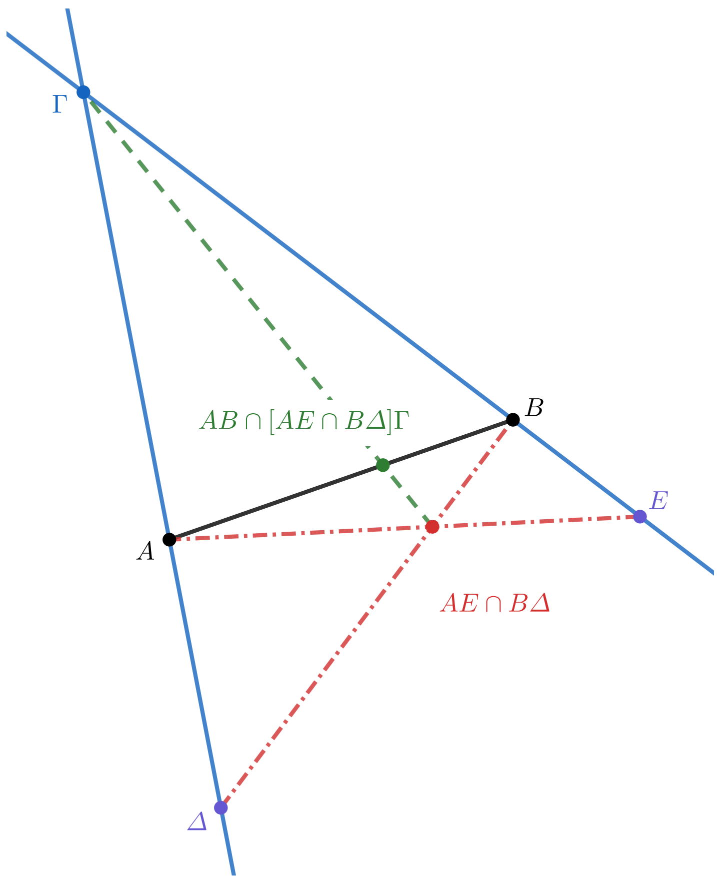


□

Παρατήρηση (1.3): Το σύνολο $\{\mathcal{H}(A,l), \mathcal{H}(B,l), \mathcal{J}(l)\}$ αποτελεί διαμέριση του συνόλου $\mathcal{P}$ των σημείων.

Πρόταση (1.4): Για οποιαδήποτε δύο σημεία A, B, στο ευθύγραμμο τμήμα AB μπορεί να βρεθεί και ένα (διαφορετικό των A, B) τρίτο σημείο X.

Απόδειξη:



Θεωρούμε ένα σημείο Γ το οποίο δεν κείται επί της ευθείας $\overleftrightarrow{AB}$. Φέρουμε τις ευθείες $\overleftrightarrow{A\Gamma}, \overleftrightarrow{B\Gamma}$ και διαλέγουμε σημεία $\Delta \in \overleftrightarrow{A\Gamma}$ και $E \in \overleftrightarrow{B\Gamma}$ τέτοια ώστε $\Gamma - A - \Delta$ και $\Gamma - B - E$ αντίστοιχα. Παρατηρούμε ότι τα $AE, B\Delta$ τέμνονται σε σημείο $AE \cap B\Delta$. Αυτό διότι το AE τέμνει το $\Gamma\Delta$ στο A και άρα θα πρέπει επίσης να τέμνει το $B\Gamma$ ή το $B\Delta$. Αν τέμνει το $B\Gamma$, αναγκαστικά θα το τέμνει στο $\overleftrightarrow{B\Gamma} \cap AE = E$. Αυτό δεν είναι δυνατόν να συμβαίνει, αφού τότε ταυτόχρονα θα ίσχυαν $\Gamma - B - E$ και $\Gamma - B - E$. Επομένως θα τέμνει αναγκαστικά το $B\Delta$. Τέλος, φέρουμε την ευθεία $\overleftrightarrow{[AE \cap B\Delta]\Gamma}$ και παρατηρούμε ότι αυτή τέμνει το AB σε σημείο διαφορετικό των A, B. Αυτό διότι η $\overleftrightarrow{[AE \cap B\Delta]\Gamma}$ τέμνει το $B\Delta$ στο $AE \cap B\Delta$, άρα και το $A\Delta$ ή το AB. Το $A\Delta$ δεν το τέμνει, αφού αν το έτεμνε θα ίσχυε $\Gamma - A - \Delta$ και $A - \Gamma - \Delta$. Επομένως τέμνει αναγκαστικά το AB, κι αυτό σε σημείο διαφορετικό των A, B, αφού αλλιώς το Γ θα συνέπιπτε με ένα από αυτά.

□

Γ. Αξιώματα 'σύμπτωσης' (αξιώματα 'συμφωνίας' - ισότητας) για ευθύγραμμα τμήματα και γωνίες:

1. *(Μεταφορά των ε.τ.)* Υπάρχει μία σχέση μεταξύ ε.τ. '$\cong_{\text{ε.τ.}}$', η οποία εξασφαλίζει κατά μία έννοια την ελεύθερη μεταφορά των ε.τ. Συγκεκριμένα, για οποιαδήποτε διαφορετικά σημεία A, B και για κάθε σημείο A' και ημιευθεία $\overrightarrow{A'X}$, υπάρχει ένα σημείο $B' \in \overrightarrow{A'X}$, το οποίο ορίζει $A'B'$ με την ιδιότητα $AB \cong_{\text{ε.τ.}} A'B'$ (διαβάζεται "το AB σύμφωνο με το $A'B'$").

2. Για κάθε $A, B, \Gamma, \Delta, E, Z \in \mathcal{P}$, αν $AB \cong_{\text{ε.τ.}} \Gamma\Delta$ και $AB \cong_{\text{ε.τ.}} EZ$, τότε $\Gamma\Delta \cong_{\text{ε.τ.}} EZ$. Επίσης, κάθε ευθύγραμμο τμήμα είναι σύμφωνο με τον εαυτό του.

3. *(Προσθετικότητα των ε.τ.)* Έστω $A, B, \Gamma \in \mathcal{P}$. Εάν ισχύει ότι $A - B - \Gamma$ και $A' - B' - \Gamma'$ με $AB \cong_{\text{ε.τ.}} A'B'$ και $B\Gamma \cong_{\text{ε.τ.}} B'\Gamma'$, τότε $A\Gamma \cong_{\text{ε.τ.}} A'\Gamma'$.

4. *(Μεταφορά των γων.)* Υπάρχει μία σχέση μεταξύ γωνιών '$\cong_{\text{γων.}}$', η οποία εξασφαλίζει κατά μία έννοια την ελεύθερη μεταφορά των γωνιών. Συγκεκριμένα, έστω $O, O', X, Y \in \mathcal{P}$ και $\widehat{XOY}$ να είναι η γωνία με πλευρές $\overrightarrow{OX}$, $\overrightarrow{OY}$. Τότε για κάθε ημιευθεία $\overrightarrow{O'X'}$, μπορεί να βρεθεί μια ημιευθεία $\overrightarrow{O'Y'}$ (σε καθορισμένο ημιεπίπεδο) τέτοια ώστε $\widehat{XOY} \cong_{\text{γων.}} \widehat{X'O'Y'}$ (διαβάζεται "η $\widehat{XOY}$ σύμφωνη με την $\widehat{X'O'Y'}$").

5. Για κάθε τρεις γωνίες $\widehat{XOY}$, $\widehat{X'O'Y'}$, $\widehat{X''O''Y''}$, εάν $\widehat{XOY} \cong_{\text{τριγ.}} \widehat{X'O'Y'}$ και $\widehat{X'O'Y'} \cong_{\text{γων.}} \widehat{X''O''Y''}$, τότε $\widehat{XOY} \cong_{\text{γων.}} \widehat{X''O''Y''}$. Επίσης, κάθε γωνία είναι σύμφωνη με τον εαυτό της.

6. Έστω $A, A', B, B', \Gamma, \Gamma' \in \mathcal{P}$ και τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$, $\overset{\triangle}{A'B'\Gamma'}$. Εάν $AB \cong_{\text{ε.τ.}} A'B'$, $A\Gamma \cong_{\text{ε.τ.}} A'\Gamma'$ και $\widehat{BA\Gamma} \cong_{\text{γων.}} \widehat{B'A'\Gamma'}$, τότε $\widehat{AB\Gamma} \cong_{\text{γων.}} \widehat{A'B'\Gamma'}$.

Ορισμός: ***Γωνίες:***

Έστω $\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OY}$ να είναι δύο ημιευθείες. Ως γωνία $\widehat{XOY}$ των ημιευθειών αυτών ουσιαστικά ορίζουμε όλα τα σημεία που περικλύονται από τις ημιευθείες αυτές. Εάν τα O, X, Y δεν είναι συγγραμικά, με συνολοθεωρητικούς συμβολισμούς θα γράφαμε:

$$\widehat{XOY} := \mathcal{H}(X, \overleftrightarrow{OY}) \cap \mathcal{H}(Y, \overleftrightarrow{OX})$$

Εάν τα O, X, Y είναι συγγραμικά, χρειαζόμαστε άλλο ένα εξωτερικό της ευθείας σημείο. Θεωρούμε ένα Z εκτός της $\overleftrightarrow{XY}$ και ορίζουμε $\widehat{XOY} := \mathcal{H}(Z, \overleftrightarrow{XY})$ εάν $X - O - Y$ και $\widehat{XOY} := \emptyset$ εάν οτιδήποτε άλλο συμβαίνει όσον αφορά τη διάταξη των O, X, Y.

Οι ημιευθείες $\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OY}$ καλούνται πλευρές της γωνίας.

Ορισμός: ***Τρίγωνα:***

Έστω $A, B, \Gamma \in \mathcal{P}$ τρία μη συγγραμμικά σημεία. Ως τρίγωνο $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ ορίζουμε όλα τα σημεία των ευθυγράμμων τμημάτων AB, $A\Gamma$, $B\Gamma$. Με συνολοθεωρητικούς συμβολισμούς θα γράφαμε:

$$\overset{\triangle}{AB\Gamma} = AB \cup A\Gamma \cup B\Gamma$$

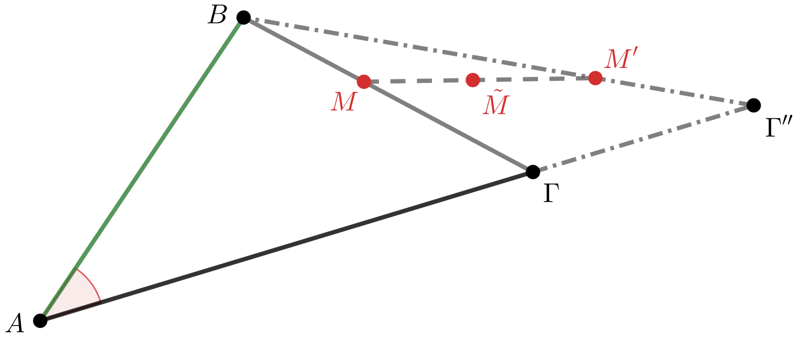
Τα ε.τ. AB, $A\Gamma$, $B\Gamma$ καλούνται πλευρές του τριγώνου.

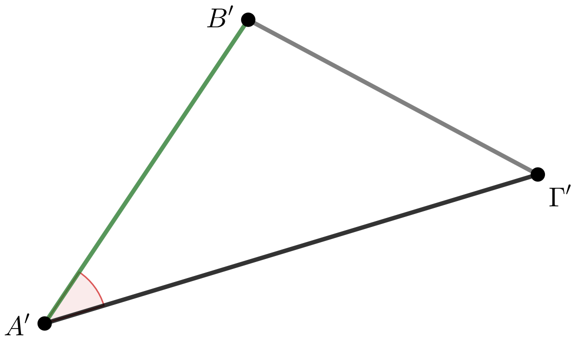
Επίσης, θα λέμε ότι δύο τρίγωνα είναι σύμφωνα '$\cong_{\text{τριγ.}}$' εάν έχουν όλα τους τα στοιχεία σύμφωνα (πλευρές και γωνίες) ένα προς ένα.

Σύμβαση: Από εδώ και στο εξής θα χρησιμοποιούμε το ίδιο σύμβολο '$\cong$' για καθεμία από της σχέσεις συμφωνίας $\cong_{\varepsilon.\tau.}, \cong_{\gamma\omega\nu.}, \cong_{\tau\rho\iota\gamma.}$, εφόσον δεν υπάρχει πιθανότητα σύγχυσης.

Πρόταση (1.5): *(Κριτήριο Π-Γ-Π)* Εάν δύο τρίγωνα έχουν δυο πλευρές σύμφωνες μία προς μία και τις γωνίες που αυτές οι δύο ορίζουν σύμφωνες, τότε τα τρίγωνα είναι σύμφωνα.

Απόδειξη: Θεωρούμε δύο τρίγωνα $A\overset{\triangle}{B}\Gamma, A'\overset{\triangle}{B'}\Gamma'$ για τα οποία ισχύει $AB = A'B', A\Gamma = A'\Gamma'$ και $\widehat{BA\Gamma} = \widehat{B'A'\Gamma'}$.





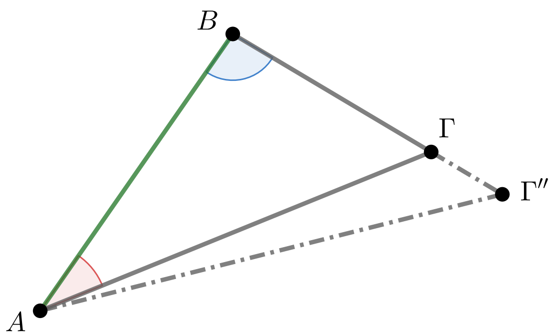
Εφαρμόζοντας το **Γ.6.**, μια φορά για τις πλευρές $AB, A'B'$ και $A\Gamma, A'\Gamma'$ και τη μεταξύ τους γωνία, και ακόμη μία για τις πλευρές $A\Gamma, A'\Gamma'$ και $AB, A'B'$ τη μεταξύ τους γωνία, προκύπτει ότι $\widehat{AB\Gamma} \cong \widehat{A'B'\Gamma'}$ και αντίστοιχα ότι $\widehat{A\Gamma B} \cong \widehat{A'\Gamma'B'}$. Οι γωνίες λοιπόν είναι μια προς μία όλες μεταξύ τους σύμφωνες.

Υποθέτουμε προς άτοπο ότι η πλευρά $B\Gamma''$ για την οποία ισχύει $\Gamma'' \in \overleftrightarrow{A\Gamma}$ και $B\Gamma'' \cong B'\Gamma'$ δεν είναι σύμφωνη με την $B\Gamma$, και ειδικότερα, δεν θα ταυτίζεται με την $B\Gamma$. Σε αυτήν την περίπτωση, υποθέτουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $A - \Gamma - \Gamma''$. Έπειτα διαλέγουμε ένα σημείο M εσωτερικό της $B\Gamma$, ένα M' εσωτερικό της $B\Gamma''$ και τέλος ένα $\tilde{M}$ εσωτερικό της MM'. Παρατηρούμε ότι το σημείο $\tilde{M}$ ανήκει στην $\widehat{AB\Gamma''}$, αλλά όχι στην $\widehat{AB\Gamma}$. Αυτό είναι άτοπο, αφού $\widehat{AB\Gamma''} = \widehat{AB\Gamma}$.

$\square$

Πρόταση (1.6): *(Κριτήριο Γ-Π-Γ)* Εάν δύο τρίγωνα έχουν μια πλευρά τους σύμφωνη και τις προσκείμενες γωνίες σύμφωνες μία προς μία, τότε τα τρίγωνα είναι σύμφωνα.

Απόδειξη: Ουσιαστικά αρκεί να δείξουμε ότι εάν $AB \cong A'B'$, $\widehat{AB\Gamma} \cong \widehat{A'B'\Gamma'}$ και $\widehat{BA\Gamma} \cong \widehat{B'A'\Gamma'}$, τότε $A\Gamma \cong A'\Gamma'$ ή $B\Gamma \cong B'\Gamma'$ - παρατηρήστε ότι δεν χρειάζεται να δείξουμε και τις δύο συμφωνίες, αφού ήδη έχουμε δείξει το κριτήριο Π-Γ-Π. Υποθέτουμε λοιπόν προς άτοπο ότι $A\Gamma' \ncong A'\Gamma'$ και $B\Gamma \ncong B'\Gamma'$. Στην ημιευθεία $\overrightarrow{B\Gamma}$ επιλέγουμε σημείο Γ'' τέτοιο ώστε $B\Gamma'' \cong B'\Gamma'$, και υποθέτουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $B - \Gamma - \Gamma''$.



Από το κριτήριο $\Pi - \Gamma - \Pi$ στα τρίγωνα $\overset{\triangle}{A'B'\Gamma'}$, $\overset{\triangle}{AB\Gamma''}$ έχουμε ότι $\widehat{BA\Gamma''} \cong \widehat{B'A'\Gamma'}$, οπότε και $\widehat{BA\Gamma''} = \widehat{BA\Gamma}$. Η τελευταία ισότητα είναι αυτή που μας οδηγεί στο άτοπο - μπορούμε να βρούμε ένα σημείο στην μια γωνία που δεν ανήκει στην άλλη, για παράδειγμα όπως στην **Πρόταση (1.5)**.

□

Πρόταση (1.7): Εάν ένα τρίγωνο έχει δύο του πλευρές σύμφωνες, τότε οι γωνίες που έχουν πλευρά την άλλη (εναπομείνουσα) πλευρά του τριγώνου είναι σύμφωνες.

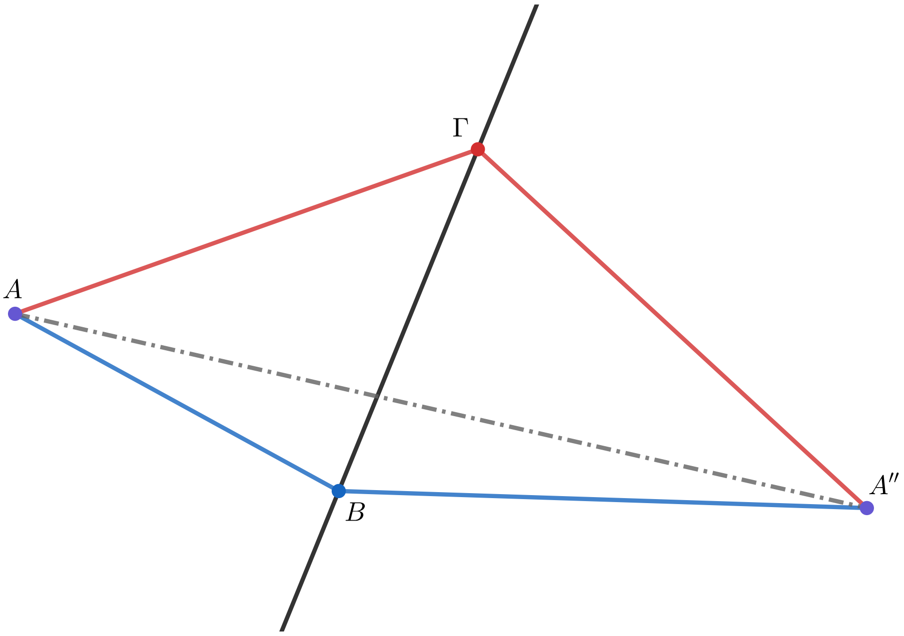
Απόδειξη: Έστω $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ ένα τρίγωνο στο οποίο ισχύει $AB \cong A\Gamma$. Παρατηρούμε ότι από το κριτήριο $\Pi - \Gamma - \Pi$, το $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ είναι σύμφωνο με το $\overset{\triangle}{A\Gamma B}$, αφού $AB \cong A\Gamma$, $A\Gamma \cong AB$ και $\widehat{BA\Gamma} \cong \widehat{\Gamma AB}$. Επομένως προκύπτει το ζητούμενο, ότι δηλαδή $\widehat{AB\Gamma} \cong \widehat{A\Gamma B}$.

□

Ορισμός: ***Ισοσκελή τρίγωνα:***
Εάν ένα τρίγωνο έχει δύο του πλευρές σύμφωνες, τότε ονομάζεται ισοσκελές.

Πρόταση (1.8): *(Κριτήριο Π-Π-Π)* Εάν δύο τρίγωνα έχουν όλες τους τις πλευρές μία προς μία σύμφωνες, τότε είναι και τα ίδια σύμφωνα.

Απόδειξη: Έστω $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ και $\overset{\triangle}{A'B'\Gamma'}$ να είναι δύο τρίγωνα τα οποία έχουν όλες τους τις πλευρές μία προς μία σύμφωνες. Υποθέτουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $B\Gamma \cong B'\Gamma'$ και θεωρούμε την ευθεία $\underleftrightarrow{B\Gamma}$. Στο ημιεπίπεδο $\left[\mathcal{H}(A, \underleftrightarrow{B\Gamma})\right]^c - \mathcal{J}(\underleftrightarrow{B\Gamma})$ κατασκευάζουμε τρίγωνο $\overset{\triangle}{A''B\Gamma}$ το οποίο είναι σύμφωνο με το $\overset{\triangle}{A'B'\Gamma'}$, με $AB \cong A''B$, $A\Gamma \cong A''\Gamma$ και φέρουμε το ε.τ. AA''.



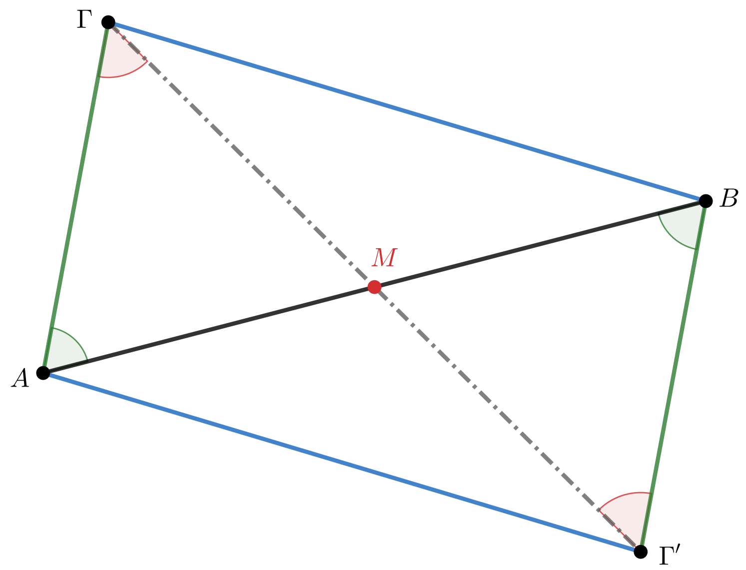
Παρατηρούμε ότι τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{A\Gamma A''}$ και $\overset{\triangle}{ABA''}$ είναι ισοσκελή με $A\Gamma \cong A''\Gamma$ και $AB \cong A''B$. Επομένως, από την **Πρόταση (1.7)**, $\widehat{\Gamma AA''} \cong \widehat{\Gamma A''A}$ και $\widehat{A''AB} \cong \widehat{AA''B}$. Αυτό ουσιαστικά δείχνει ότι $\widehat{BA\Gamma} \cong \widehat{BA''\Gamma}$, και συνεπώς στα $\overset{\triangle}{AB\Gamma}, \overset{\triangle}{A''B\Gamma}$ εφαρμόζεται το κριτήριο Π-Γ-Π. Αυτό δείχνει το ζητούμενο.

□

Πρόταση (1.9): Σε κάθε ε.τ. AB υπάρχει σημείο $M \in AB$ τέτοιο ώστε $AM \cong MB$. Το M ονομάζεται *μέσο* του AB.

Απόδειξη: Θεωρούμε στο τμήμα AB μια γωνία $\widehat{BA\Gamma}$ η οποία δεν είναι κενή. Μεταφέρουμε τη γωνία αυτή στο ημιεπίπεδο $\left[\mathcal{H}(\Gamma, \underleftrightarrow{AB})\right]^c - \mathcal{J}(\underleftrightarrow{AB})$ έτσι ώστε να δημιουργηθεί γωνία $\widehat{AB\Gamma'} \cong \widehat{BA\Gamma}$, και παρατηρούμε ότι τα $\overset{\triangle}{AB\Gamma}, \overset{\triangle}{AB\Gamma'}$ είναι σύμφωνα, αφού $AB \cong AB$, $A\Gamma \cong B\Gamma'$ και $\widehat{BA\Gamma} \cong \widehat{AB\Gamma'}$. Επομένως, $A\Gamma' \cong B\Gamma$ και $\widehat{AB\Gamma} \cong \widehat{BA\Gamma'}$. Έπειτα φέρουμε το ε.τ. $\Gamma\Gamma'$, θεωρούμε $M = AB \cap \Gamma\Gamma'$ και παρατηρούμε ότι τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{A\Gamma\Gamma'}$ και $\overset{\triangle}{B\Gamma\Gamma'}$ είναι σύμφωνα, αφού $A\Gamma \cong B\Gamma'$, $A\Gamma' \cong B\Gamma$ και $\widehat{\Gamma A\Gamma'} \cong \widehat{\Gamma B\Gamma'}$. Επομένως, $\widehat{A\Gamma\Gamma'} \cong \widehat{\Gamma\Gamma' B}$. Τέλος, παρατηρούμε ότι τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{A\Gamma M}$ και $\overset{\triangle}{BM\Gamma'}$ είναι σύμφωνα, αφού $A\Gamma \cong B\Gamma'$, $\widehat{\Gamma AM} \cong \widehat{MB\Gamma'}$ και

$\widehat{A\Gamma M} \cong \widehat{M\Gamma' B}$. Επομένως $AM \cong MB$, κι αυτό δείχνει εν τέλει το ζητούμενο.



□

Ορισμός: ***Ορθές και Παραπληρωματικές γωνίες:***

I. *Δύο γωνίες $\widehat{XOY}, \widehat{YOZ}$ με κοινή κορυφή O λέγονται παραπληρωματικές εάν είναι ξένες και μαζί καλύπτουν ένα ημιεπίπεδο. Εάν τα X, Y, Z δεν είναι συνευθειακά, με συνολοθεωρητικούς συμβολισμούς θα γράφαμε:*

$$\widehat{XOY}, \widehat{YOZ} \text{ παραπληρωματικές } :\Leftrightarrow \widehat{XOY} \cap \widehat{YOZ} = \emptyset \textbf{ και } \widehat{XOY} \cup \widehat{YOZ} = \mathcal{H}(Y, \overleftrightarrow{XZ}) - \overrightarrow{OY}$$

Για λόγους πληρότητας, θεωρούμε και την περίπτωση όπου τα X, Y, Z είναι συνευθειακά:

$$\widehat{XOY}, \widehat{YOZ} \text{ παραπληρωματικές } :\Leftrightarrow X - O - Y \textbf{ και } \widehat{YOZ} = \emptyset \text{ (ή το συμμετρικό αυτού)}$$

II. *Μία γωνία θα λέγεται ορθή εάν είναι σύμφωνη με την παραπληρωματική της.*

Πρόταση (1.10): Υπάρχουν ορθές γωνίες.

Απόδειξη: Θεωρούμε $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ ένα οποιοδήποτε ισοσκελές τρίγωνο με $AB \cong A\Gamma$ και επίσης M το μέσον της $B\Gamma$. Ισχύουν ότι $AM \cong AM, AB \cong A\Gamma$ και επειδή το M είναι το μέσον του $B\Gamma$, $AM \cong BM$. Επομένως τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{ABM}, \overset{\triangle}{A\Gamma M}$ είναι σύμφωνα και κατ' επέκταση $\widehat{AMB} \cong \widehat{AM\Gamma}$.

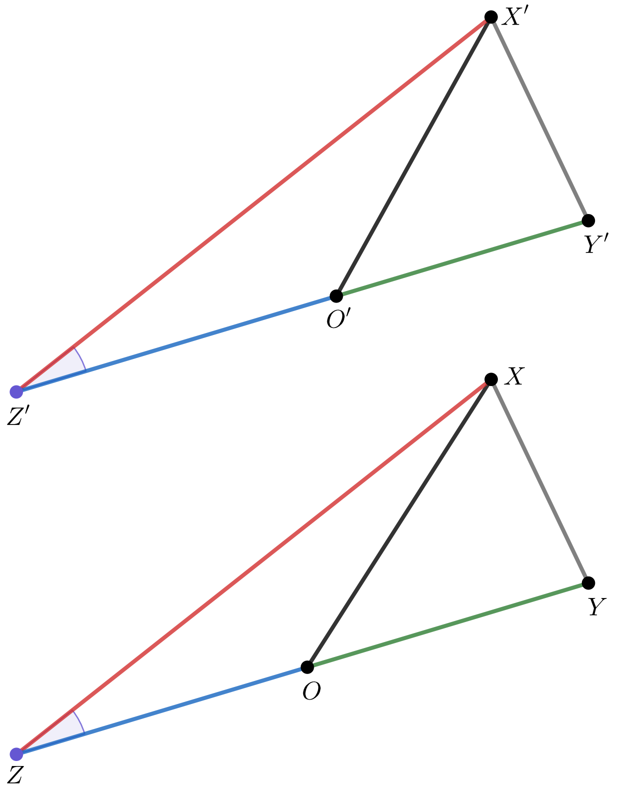
Οι γωνίες $\widehat{AMB}, \widehat{AM\Gamma}$ είναι από τις ζητούμενες ορθές, αφού μαζί καλύπτουν το χωρίο $\mathcal{H}(A, \overleftrightarrow{B\Gamma}) - \overrightarrow{MA}$.

□

Σύμβαση: Την ορθή γωνία θα τη συμβολίζουμε με '$\perp$'.

Πρόταση (1.11): Εάν δύο γωνίες είναι σύμφωνες, οι παραπληρωματικές τους είναι επίσης σύμφωνες.

Απόδειξη: Έστω δύο σύμφωνες γωνίες $\widehat{XOY}, \widehat{X'O'Z'}$, στις οποίες χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε $OX \cong O'X', OY \cong O'Y', OZ \cong O'Z'$. Παρατηρούμε ότι τα $\overset{\triangle}{XOY}, \overset{\triangle}{X'O'Y'}$ είναι σύμφωνα, αφού $\widehat{YOX} \cong \widehat{Y'O'X'}$, $OX \cong O'X', OY \cong O'Y'$. Επομένως, $\widehat{OYX} \cong \widehat{O'Y'X'}$ και $XY \cong X'Y'$. Τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{XZY}, \overset{\triangle}{X'Z'Y'}$ είναι σύμφωνα, αφού $ZY \cong Z'Y', XY \cong X'Y'$ και $\widehat{ZYX} \cong \widehat{Z'Y'X'}$. Επομένως, $\widehat{YZX} \cong \widehat{Y'Z'X'}$ και $XZ \cong X'Z'$. Τέλος, τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{XOZ}, \overset{\triangle}{X'O'Z'}$ είναι σύμφωνα, αφού $OZ \cong O'Z', XZ \cong X'Z'$ και $\widehat{XZO} \cong \widehat{X'Z'O'}$. Επομένως $\widehat{XOZ} \cong \widehat{X'O'Z'}$, το οποίο είναι το ζητούμενο αποτέλεσμα.



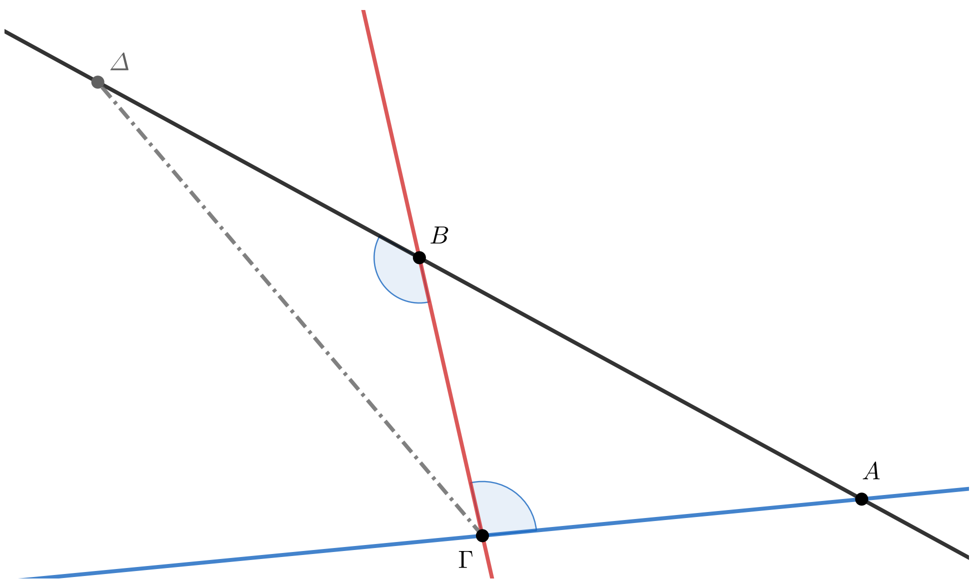
□

Παρατήρηση (1.4): Οι κατακορυφήν γωνίες είναι σύμφωνες ως παραπληρωματικές τις ίδιας γωνίας.

Πρόταση (1.12): Εάν δύο ευθείες τέμνονται από μία τρίτη, έτσι ώστε η τελευταία να δημιουργεί μεταξύ των δύο πρώτων ευθειών και εναλλάξ της τρίτης ευθείας, γωνίες οι οποίες είναι σύμφωνες, τότε οι δύο πρώτες ευθείες δεν τέμνονται.

Απόδειξη: Έστω l, m να είναι δύο ευθείες, n μία τρίτη ευθεία που τις τέμνει, και $A = l \cap m$, $b = l \cap n$ και $\Gamma = m \cap n$. Υποθέτουμε επίσης ότι για τις l, m, n ισχύουν οι υποθέσεις της παρατήρησης, αλλά προς άτοπο οι l, m τέμνονται.

Στην ημιευθεία $[\mathcal{J}(l) - \overleftrightarrow{BA}] \cup \{B\}$ (δηλαδή στην αντικείμενη της $\overrightarrow{BA}$) θεωρούμε σημείο Δ τέτοιο ώστε $B\Delta \cong B\Gamma$. Παρατηρούμε ότι τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ και $\overset{\triangle}{B\Gamma\Delta}$ είναι σύμφωνα, από το κριτήριο Π-Γ-Π - επομένως $\widehat{\Delta\Gamma B} \cong \widehat{\Gamma BA}$. Τώρα παρατηρούμε ότι οι παραπληρωματικές των $\widehat{\Gamma B\Delta}$, $\widehat{B\Gamma A}$ είναι σύμφωνες, ως παραπληρωματικές σύμφωνων γωνιών. Επειδή όμως $\widehat{\Gamma BA} \cong \widehat{\Delta\Gamma B}$, η παραπληρωματική της $\widehat{B\Gamma A}$ θα είναι σύμφωνη με την μικρότερή της $\widehat{\Delta\Gamma B}$. Αυτό είναι άτοπο, επομένως η παρατήρηση αποδεικνύεται.

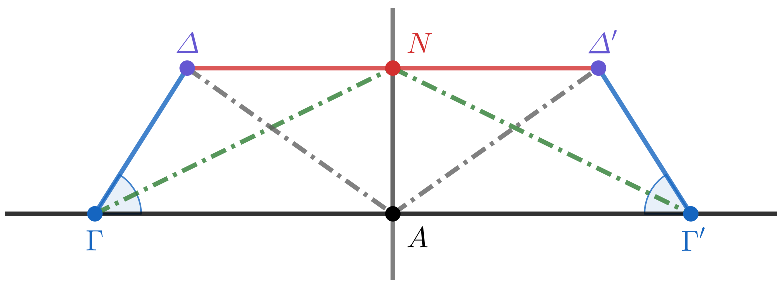


□

Ορισμός: *Παράλληλες ευθείες:*
Δύο ευθείες l, m θα λέγονται παράλληλες εάν δεν τέμνονται ή εάν ταυτίζονται. Δηλαδή εάν $l \cap m = \emptyset$ ή $l = m$.

Πρόταση (1.13): Εάν l είναι μια ευθεία του επιπέδου και A ένα σημείο εκτός αυτής, τότε από το A διέρχεται τουλάχιστον μια παράλληλη προς την l.

Απόδειξη: Θεωρούμε ένα σημείο $B \in l$ και επίσης ένα $A' \in [\mathcal{H}(A,l)]^c - \mathcal{J}(l)$ για το οποίο $AB \cong A'B$ και η l διχοτομεί την $\widehat{ABA'}$. Παρατηρούμε ότι το τμήμα AA' τέμνει κάθετα την l.



Έπειτα θα επιχειρήσουμε να φέρουμε κάθετη ευθεία από το A προς την $\overleftrightarrow{AA'}$.

Θεωρούμε σημεία $\Gamma, \Gamma' \in \overleftrightarrow{AA'}$ τέτοια ώστε $\Gamma - A - \Gamma'$ και επιπλέον $A\Gamma \cong A\Gamma'$. Επίσης θεωρούμε σημεία $\Delta, \Delta' \notin l$ τέτοια ώστε $\widehat{\Delta\Gamma A} \cong \widehat{\Delta'\Gamma' A}$ και $\Gamma\Delta \cong \Gamma'\Delta'$. Φέρουμε το ε.τ. $\Delta\Delta'$ και θεωρούμε N το μέσον του. Επειδή $\widehat{\Delta\Gamma A} \cong \widehat{\Delta'\Gamma' A}$, $\Gamma\Delta \cong \Gamma'\Delta'$ και $A\Gamma \cong A\Gamma'$, τα τρίγωνα $\Gamma\overset{\triangle}{\Delta}A$ και $\Gamma'\overset{\triangle}{\Delta'}A$ είναι μεταξύ τους σύμφωνα. Άρα $\widehat{\Gamma\Delta A} \cong \widehat{\Gamma'\Delta' A}$ και $A\Delta \cong A\Delta'$.

Επειδή $A\Delta \cong A\Delta'$, $AN \cong AN$ και $\Delta N \cong \Delta' N$, τα τρίγωνα $\Delta\overset{\triangle}{N}A$ και $\Delta'\overset{\triangle}{N}A$ είναι μεταξύ τους σύμφωνα. Άρα $\widehat{A\Delta N} \cong \widehat{A\Delta' N}$. Συνδυασμό με το ότι $\widehat{\Gamma\Delta A} \cong \widehat{\Gamma'\Delta' A}$, έπεται $\widehat{\Gamma\Delta N} \cong \widehat{\Gamma'\Delta' N}$.

Επειδή $\Gamma\Delta \cong \Gamma\Delta$, $\Delta N \cong \Delta N$ και $\widehat{\Gamma\Delta N} \cong \widehat{\Gamma'\Delta' N}$, τα τρίγωνα $\Gamma\overset{\triangle}{\Delta}N$ και $\Gamma'\overset{\triangle}{\Delta'}N$ είναι μεταξύ τους σύμφωνα. Άρα $\Gamma N \cong \Gamma' N$.

Τέλος, επειδή $\Gamma N \cong \Gamma' N$, $AN \cong AN$ και $A\Gamma \cong A\Gamma'$, τα τρίγωνα $\Gamma\overset{\triangle}{N}A$ και $\Gamma'\overset{\triangle}{N}A$ είναι μεταξύ τους σύμφωνα, οπότε $\widehat{\Gamma AN} \cong \widehat{\Gamma' AN}$. Αυτό δείχνει ότι η $\overleftrightarrow{AA'}$ τέμνεται κάθετα από την $\overleftrightarrow{AN}$.

Από την **Πρόταση (1.12)** προκύπτει ότι η $\overleftrightarrow{AN}$ είναι μια παράλληλη προς την l ευθεία, που διέρχεται από το A.

□

Δ. Αξιώματα συνέχειας:

1. *(Το αξίωμα τομών του Dedekind)* Ας υποθέσουμε ότι η σημειοσειρά μιας ευθείας l μπορεί να γραφεί ως ένωση δύο μη κενών υποσυνόλων Σ_1, Σ_2 που έχουν την ιδιότητα:

   - *Κανένα σημείο του ενός δεν βρίσκεται μεταξύ δύο σημείων του άλλου.*

   Τότε υπάρχει ένα μοναδικό σημείο O που βρίσκεται στην l τέτοιο ώστε:

$$\forall P_1, P_2 \in l: \ P_1 - O - P_2 \Leftrightarrow [P_1 \in \Sigma_1, P_2 \in \Sigma_2] \ \textbf{ή} \ [P_2 \in \Sigma_1, P_1 \in \Sigma_2]$$

Θεώρημα: *Το αξίωμα Αρχιμήδη - Ευδόξου για τα ε.τ.:*
Εάν $AB, \Gamma\Delta$ είναι τυχαία ε.τ., τότε υπάρχει αριθμός $n \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε αν το $\Gamma\Delta$ επαναληφθεί n φορές στην ημιευθεία $\overrightarrow{AB}$ αρχίζοντας από το A, θα προκύψει ευθύγραμμο τμήμα AE τέτοιο ώστε $n \cdot \Gamma\Delta \cong AE$ και $A - B - E$.

Απόδειξη: Έστω $\overrightarrow{OX}$ μια ημιευθεία. Κατ' αρχάς, κάθε σύνολο $S \subseteq \overrightarrow{OX}$ το οποίο είναι *φραγμένο* (δηλαδή υπάρχει σημείο $U \in \overrightarrow{OX}$ τέτοιο ώστε $\forall \Sigma \in S$, $O - \Sigma - U$) έχει *ελάχιστο φράγμα*. Πράγματι (χωρίς πολλές λεπτομέρειες) τα σύνολα:

$$S_1 = \{P \in \mathcal{P} \mid \ \text{το } P \text{ δεν φράσσει το } S\} \ \textbf{και} \ S_2 = \{P \in \mathcal{P} \mid \ \text{το } P \text{ φράσσει το } S\}$$

ικανοποιούν το αξίωμα των τομών του Dedekind, επομένως το οριακό σημείο Y που εξασφαλίζει το αξίωμα είναι το ελάχιστο φράγμα.

Τώρα, αν το αξίωμα Αρχιμήδη - Ευδόξου για τα ε.τ. δεν ήταν αληθές, με επανάληψη του τμήματος $\Gamma\Delta$ στην $\underrightarrow{AB}$ άπειρες φορές, το σύνολο:

$$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} AE_i,\ AE_i \cong i\cdot\Gamma\Delta$$

θα ήταν φραγμένο στην ημιευθεία $\underrightarrow{AB}$, και θα είχε ελάχιστο φράγμα Y με $A-Y-B$. Παρατηρούμε ότι το $AY-AE_1$ δεν περιέχει όλα τα σημεία του AY, επομένως υπάρχει $AE_i > AY - AE_1$. Κατ' επέκταση, $AY < AE_i + AE_1 < AY$, το οποίο είναι άτοπο.

□

Θεώρημα: ***Όρια ακολουθιών με στοιχεία του $\mathcal{P}$:***
Έστω $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ μία ακολουθία σημείων τα οποία είναι όλα τους συγγραμμικά και επί μιας ευθείας l. Υποθέτουμε ότι για την $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ισχύουν τα εξής:

i. Υπάρχουν $A, A' \in l$ τέτοια ώστε για κάθε σημείο X της ακολουθίας να ισχύει $A-X-A'$.

ii. Για κάθε $i\in\mathbb{N}$ ισχύει $A-A_i-A_{i+1}$.

Τότε αληθεύει ότι:

$$\exists O \in AA' :\ \lim_{i\to\infty} AA_i = AO - \{O\}$$

Απόδειξη: Θεωρούμε τα δύο σύνολα:

$$\Sigma_1 = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \underrightarrow{A_iA}$$
$$\Sigma_2 = \Sigma_1^c$$

και ισχυριζόμαστε ότι αυτά αποτελούν μια διαμέριση της $\mathcal{J}(l)$ για την οποία ισχύει το αξίωμα των τομών του Dedekind.

Πράγματι, εάν K,Λ είναι δύο σημεία του Σ_1, τότε υποθέτουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $K-\Lambda-A_j$, $A-K-\Lambda$ και προς άτοπο ότι υπάρχει X του συμπληρώματος το οποίο είναι μεταξύ των K,Λ. Επειδή λοιπόν $K-X-\Lambda$, $X\in\Sigma_1^c$ και $K-\Lambda-A_j$, $A-K-\Lambda$ θα ισχύει:

$$X\in\Sigma_1^c \textbf{ και } X\in\underrightarrow{A_jA}$$

δηλαδή:

$$X\in\Sigma_1^c \textbf{ και } X\in\bigcup_{i\in\mathbb{N}}\underrightarrow{A_iA} \Rightarrow X\in\Sigma_1$$

Αυτό είναι άτοπο, αφού συγχρόνως $X\in\Sigma_1$ και $X\in\Sigma_1^c$. Επίσης, κανένα από τα Σ_1,Σ_2 δεν είναι κενά, αφού $\{A_i \mid i\in\mathbb{N}\}\neq\emptyset$ και αντίστοιχα $\underrightarrow{A'Y}\cap\Sigma_1=\emptyset$, όπου Y είναι ένα σημείο για το οποίο ισχύει $A-A'-Y$.

Από το αξίωμα τομών του Dedekind, θα μπορεί να βρεθεί $O\in AA'$ τέτοιο ώστε $\forall P_1,P_2\in l:\ P_1-O-P_2 \Leftrightarrow [P_1\in\Sigma_1, P_2\in\Sigma_2]$ **ή** $[P_2\in\Sigma_1, P_1\in\Sigma_2]$. Αυτό ουσιαστικά δείχνει ότι $\underrightarrow{OA}-\{O\}=\Sigma_1$ και κατ' επέκταση ότι:

$$\lim_{i\to\infty} AA_i = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} AA_i = AO-\{O\}$$

□

Ορισμός: ***Σχέσεις διάταξης στις γωνίες και στα ε.τ.:***
I. *Έστω $\widehat{AB\Gamma}$, $\widehat{\Delta EZ}$ να είναι δύο γωνίες. Ορίζουμε μία σχέση (ολικής) διάταξης '$\leqslant_{\text{γων.}}$' ως εξής:*

$$\widehat{AB\Gamma}\leqslant_{\text{γων.}}\widehat{\Delta EZ} :\Leftrightarrow \text{ για την } \widehat{ABZ'}\cong\widehat{\Delta EZ} \text{ ισχύει } \widehat{AB\Gamma}\subseteq\widehat{ABZ'}$$

II. *Έστω AB, $\Gamma\Delta$ να είναι ε.τ. Ορίζουμε μία σχέση (ολικής) διάταξης '$\leqslant_{\text{ε.τ.}}$' ως εξής:*

$$AB\leqslant_{\text{ε.τ.}}\Gamma\Delta :\Leftrightarrow \text{ για κάποιο } A\Delta'\cong\Gamma\Delta \text{ ισχύει } AB\subseteq A\Delta'$$

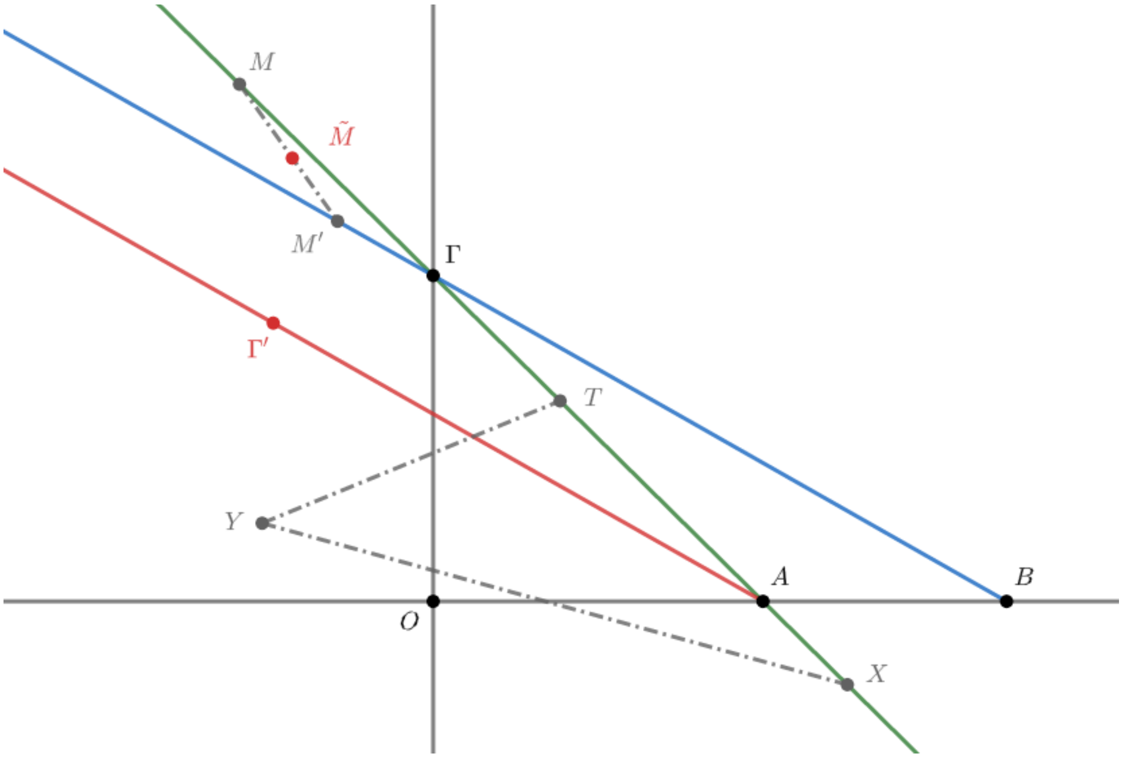
Σύμβαση: Από εδώ και στο εξής θα χρησιμοποιούμε το ίδιο σύμβολο '$\leqslant$' για καθεμία από τις $\leqslant_{\text{γων.}}, \leqslant_{\text{ε.τ.}}$, εφόσον δεν υπάρχει πιθανότητα σύγχυσης.

Πρόταση (1.14): Έστω l μια ευθεία και επί αυτής τρία σημεία O, A, B για τα οποία $O - A - B$. Από το O φέρουμε κάθετη m στην l και διαλέγουμε $O \neq \Gamma \in m$. Ισχύει ότι $\widehat{OB\Gamma} < \widehat{OA\Gamma}$.

Απόδειξη: Στις ημιευθείες $\underrightarrow{A\Gamma}, \underrightarrow{B\Gamma}$ επιλέγουμε σημεία M και M' αντίστοιχα, τέτοια ώστε $A - \Gamma - M$ και $B - \Gamma - M'$. Στο ευθύγραμμο τμήμα MM' επιλέγουμε εσωτερικό σημείο $\tilde{M}$ και παρατηρούμε ότι το τελευταίο ανήκει στη γωνία $\widehat{OA\Gamma}$. Έπειτα κατασκευάζουμε γωνία $\widehat{OA\Gamma'} \cong \widehat{OB\Gamma}$ η οποία σύμφωνα με την **Πρόταση (1.12)** ορίζει παράλληλες ευθείες $\underleftrightarrow{B\Gamma}, \underleftrightarrow{A\Gamma'}$. Κατ' επέκταση, $\mathcal{H}(O, \underleftrightarrow{A\Gamma'}) \subset \mathcal{H}(O, \underleftrightarrow{B\Gamma})$.

Ισχυριζόμαστε ότι $\tilde{M} \notin \widehat{OA\Gamma'}$. Πράγματι, το $\tilde{M}$ από την επιλογή του δεν ανήκει στο ημιεπίπεδο $\mathcal{H}(O, \underleftrightarrow{B\Gamma})$, κι εμείς επιπλέον είδαμε ότι $\mathcal{H}(O, \underleftrightarrow{A\Gamma'}) \subset \mathcal{H}(O, \underleftrightarrow{B\Gamma})$. Επομένως το $\tilde{M}$ δεν ανήκει ούτε στο ημιεπίπεδο $\mathcal{H}(O, \underleftrightarrow{A\Gamma'})$, κι επειδή $\widehat{OA\Gamma'} \subseteq \mathcal{H}(O, \underleftrightarrow{A\Gamma'})$ δεν ανήκει ούτε στη γωνία $\widehat{OA\Gamma'}$.

Τέλος θα δείξουμε ότι $\widehat{OA\Gamma'} \subseteq \widehat{OA\Gamma}$, οπότε σε συνδιασμό με την ύπαρξη το σημείου $\tilde{M}$, θα αληθεύει $\widehat{OA\Gamma'} \subset \widehat{OA\Gamma}$. Πράγματι, προς άτοπο υποθέτουμε ότι υπάρχει $Y \in \widehat{OA\Gamma'} - \widehat{OA\Gamma}$ και παρατηρούμε τα εξής:



- Εάν το Y δεν ανήκει στην γωνία $\widehat{OA\Gamma}$, τότε δεν θα ανήκει στο ημιεπίπεδο $\mathcal{H}(O, \underleftrightarrow{A\Gamma})$, και κατ' επέκταση θα τέμνει την ευθεία $\underleftrightarrow{A\Gamma}$.
- Αν τέμνει την $\underrightarrow{A\Gamma}$ στο T, τότε θα καταλήξουμε σε άτοπο χρησιμοποιώντας το αξίωμα **B.4** σε κατάλληλο τρίγωνο. Συγκεκριμένα, σε ένα τρίγωνο $\overset{\triangle}{XYT}$, όπου $T - A - X$.
- Αν τέμνει την αντικείμενη ημιευθεία $[\mathcal{J}(\underleftrightarrow{A\Gamma}) - \underrightarrow{A\Gamma}] \cup \{A\}$ στο S, τότε και πάλι θα καταλήξουμε σε άτοπο χρησιμοποιώντας το αξίωμα **B.4** σε κατάλληλο τρίγωνο. Συγκεκριμένα, σε ένα τρίγωνο $\overset{\triangle}{XYS}$, όπου $A - X - \Gamma$.

Το πώς αποδεικνύουμε τα προηγούμενα θα το δούμε αναλυτικότερα στο **Θεώρημα: *Cross - Bar***. Σε κάθε περίπτωση λοιπόν, $Y \in \widehat{OA\Gamma'} \Rightarrow Y \in \widehat{OA\Gamma}$. Με αυτά λοιπόν δείξαμε ότι $\widehat{OA\Gamma'} \subseteq \widehat{OA\Gamma}$ και $\exists \tilde{M} \in \widehat{OA\Gamma} - \widehat{OA\Gamma'}$, επομένως $\widehat{OA\Gamma'} \subset \widehat{OA\Gamma}$. Αυτό εν τέλει δίνει το ζητούμενο $\widehat{OB\Gamma} < \widehat{OA\Gamma}$.

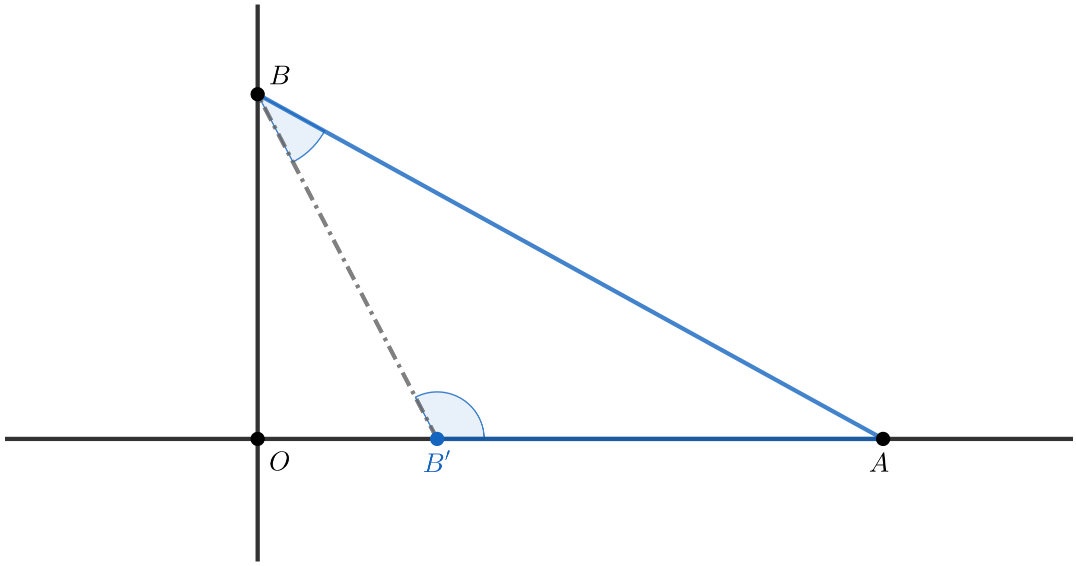
$\square$

Σημείωση: Η προηγούμενη απόδειξη είναι αρκετά περίπλοκη (τουλάχιστον όσον αφορά το πλήθος των διακεκριμένων περιπτώσεων) κι αυτό γιατί ακόμη δεν έχουμε αναφερθεί στο **Θεώρημα: *Το ασθενές θεώρημα της εξωτερικής γωνίας***. Θεωρητικά θα μπορούσαμε να είχαμε πρώτα αποδείξει το εν λόγω θεώρημα, και συνεπώς να είχαμε αποφύγει την περίπλοκη αυτή απόδειξη. Θα δοθεί ως άσκηση να αποδείξετε αυτήν την πρόταση σε μια καλύτερη περίπτωση, δεδομένου ότι γνωρίζετε το **Θεώρημα: *Το ασθενές θεώρημα της εξωτερικής γωνίας***.

Πρόταση (1.15): Έστω l μια ευθεία και m η κάθετή της στο $O \in l$. Στην m θεωρούμε οποιοδήποτε B. Για κάθε A στην l ισχύει $OA \leqslant AB$.

Απόδειξη: Υποθέτουμε προς άτοπο ότι $OA > AB$ και επιλέγουμε επί της OA ένα τμήμα $AB' \cong AB$, έτσι ώστε να δημιουργηθεί ισοσκελές τρίγωνο $\overset{\triangle}{ABB'}$. Επειδή το $\overset{\triangle}{ABB'}$ είναι ισοσκελές, $\widehat{BB'A} \cong \widehat{B'BA}$. Παρατηρούμε επίσης ότι $\widehat{OB'B} \cup \widehat{BB'A} = 2\perp$, επομένως αν ληφθεί υπ' όψιν το αποτέλεσμα της **Πρότασης (1.14)** στο $\overset{\triangle}{OB'B}$, θα πρέπει να αληθεύει ότι $\widehat{OB'B} < 1\perp$ και κατ' επέκταση ότι $\widehat{BB'A} > 1\perp$.

Τέλος, εάν εφαρμοστεί ξανά η **Πρόταση (1.14)** στο $\overset{\triangle}{BOA}$, θα προκύψει ότι $\widehat{OBA} < 1\perp$ και επιπλέον ότι $\widehat{B'BA} < 1\perp$, αφού $\widehat{B'BA} < \widehat{OBA}$. Αυτό είναι άτοπο, αφού προηγουμένως βρήκαμε ότι $\widehat{B'BA} \cong \widehat{BB'A} > 1\perp$.



□

Θεώρημα: *Πλάγια τοποθέτηση ε.τ.:*
Έστω l μια ευθεία και m η κάθετή της στο $O \in l$. Θεωρούμε ένα ευθύγραμμο τμήμα XY και ένα $B \in m$ τέτοιο ώστε $OB < XY$. Τότε υπάρχει $A \in l$ τέτοιο ώστε $AB \cong XY$.

Απόδειξη: Θεωρούμε σημείο $A_1 \in l$ τέτοιο ώστε $OA_1 \cong XY$ και παρατηρούμε ότι από την **Πρόταση (1.15)**, το τμήμα A_1B θα είναι μεγαλύτερο του XY. Εν συνεχεία κατασκευάζουμε ακολουθία σημείων $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ως εξής:

- Το A_1 είναι αυτό που έχει επιλεγεί.
- Για το $i \in \mathbb{N} - \{1\}$ θεωρούμε τυχαίο M_i τέτοιο ώστε $O - M_i - A_{i-1}$ και επιπλέον σημείο A_i τέτοιο ώστε το ε.τ. $\kappa_i \cdot M_iA_{i-1} = A_{i-1}A_i$ να είναι το ελάχιστο ως προς το $\kappa_i \in \mathbb{N}$ με την ιδιότητα $A_iB \geqslant XY$. Εάν τέτοιο M_i δεν υπάρχει, θέτουμε $A_i = A_{i-1}$.

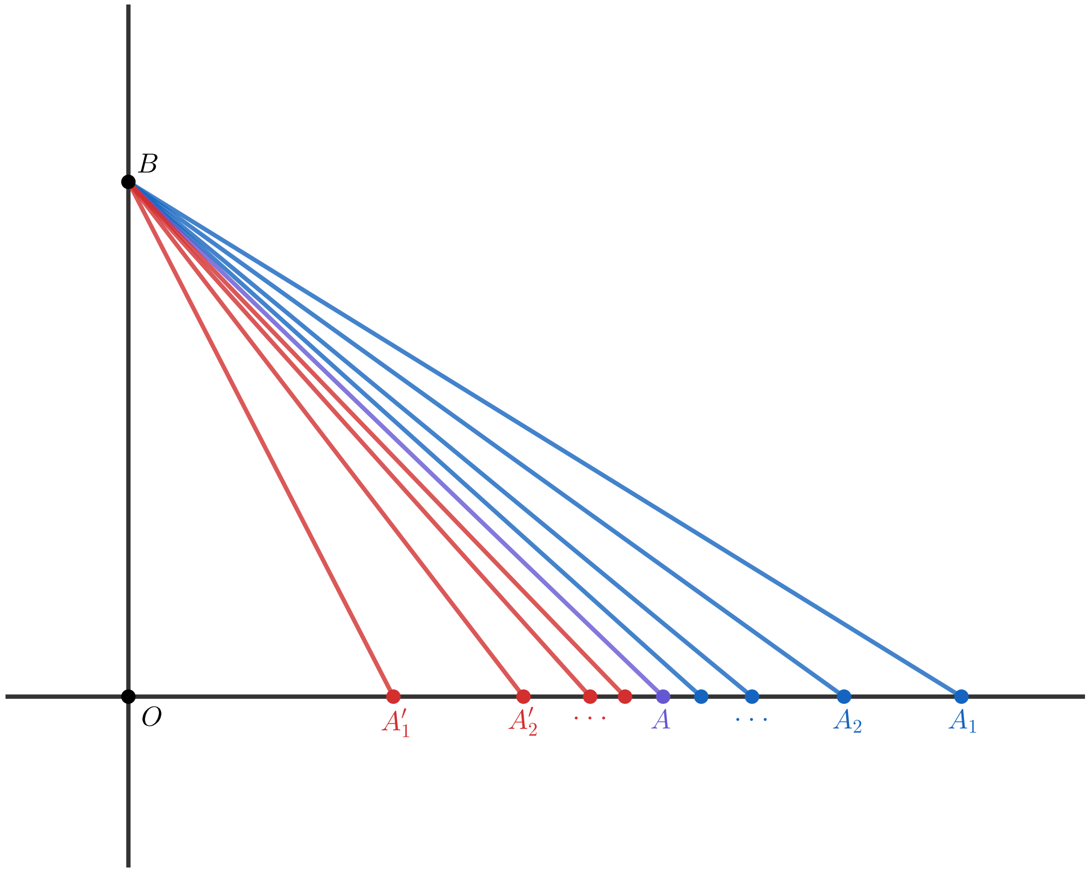
Αυτή η ακολουθία $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ικανοποιεί τις συνθήκες του **Θεωρήματος: *Όρια ακολουθιών με στοιχεία του $\mathcal{P}$***, επομένως υπάρχει σημείο A τέτοιο ώστε $\lim_{i\to\infty} A_1A_i = A_1A - \{A\}$ και επιπλέον $AB \geqslant XY$.

Ισχυριζόμαστε ότι στο σημείο αυτό δεν ισχύει απλώς η ανισότητα $AB \geqslant XY$, αλλά η ισότητα $AB = XY$. Πράγματι, θεωρούμε προς άτοπο ότι η ακολουθία συγκλίνει σε σημείο A τέτοιο ώστε $AB > XY$. Δεν θα υπάρχει $A' : O - A' - A$ και $A'B > XY$, αφού αν κάτι τέτοιο συνέβαινε, θα διαλέγαμε (εάν υπάρχει) ένα τμήμα A_iA_{i-1} τέτοιο ώστε $A_iA_{i-1} \leqslant AA'$, και θα παρατηρούσαμε ότι αυτό θα μπορούσε να είχε επαναληφθεί για ακόμη μία φορά στην επιλογή της ακολουθίας, το οποίο είναι άτοπο της δεύτερης υπόθεσης (•). Εάν $\lim_{i\to\infty} A_iA_{i-1} \neq \emptyset$ (δηλαδή δεν υπάρχει τμήμα σαν αυτό της προηγούμενης περίπτωσης), τότε η ακολουθία είναι τελικά σταθερή, αφού αλλιώς το τμήμα A_1A θα απειρίζοταν. Διαλέγουμε τον πρώτο όρο από τους σταθερούς και παρατηρούμε ότι το μέσο M του AA' μπορεί να συνεχίσει την επιλογή των όρων της ακολουθίας, σύμφωνα με τη δεύτερη υπόθεση (•). Αυτό είναι και πάλι άτοπο.

Αφού λοιπόν έχει εξασφαλιστεί η ύπαρξη ενός σημείου A τέτοιου ώστε $\lim_{i\to\infty} A_1A_i = A_1A - \{A\}$, $AB \geqslant XY$ και για κάθε $A' : O - A' - A$ να ισχύει $A'B \leqslant XY$, ορίζουμε μια νέα ακολουθία $(A_i')_{i\in\mathbb{N}}$ ως εξής:

- Το A_1' είναι ένα σημείο τέτοιο ώστε $O - A_1' - A$.
- Για κάθε $i \in \mathbb{N} - \{1\}$, το A_i' είναι το μέσο του $A_{i-1}'A$.

Αυτή η νέα ακολουθία έχει την ιδιότητα $\lim_{i\to\infty} OA_i' = OA - \{A\}$ και επιπλέον $AB \leqslant XY$. Σε συνδιασμό με την ανάλυση που έγινε νωρίτερα, προκύπτει τελικά το ζητούμενο, ότι δηλαδή $AB \cong XY$.



□

Πρόταση (1.16): *(Κριτήριο ισότητας ορθογωνίων τριγώνων)* Έστω $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ ένα ορθογώνιο τρίγωνο με $\widehat{AB\Gamma} = \perp$ και $\overset{\triangle}{\Delta EZ}$ ένα άλλο άλλο ορθογώνιο τρίγωνο με $\widehat{\Delta EZ} = \perp$, $\widehat{E\Delta Z} \cong \widehat{BA\Gamma}$ και $\Delta Z \cong A\Gamma$. Ισχύει η συμφωνία των δύο τριγώνων, $\overset{\triangle}{AB\Gamma} \cong \overset{\triangle}{\Delta EZ}$.

Απόδειξη: Πράγματι, θεωρούμε $E' \in \overleftrightarrow{AB}$ τέτοιο ώστε $AE' \cong \Delta E$. Παρατηρούμε ότι από το κριτήριο Π-Γ-Π τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{\Delta EZ}$, $\overset{\triangle}{AE'\Gamma}$ είναι σύμφωνα και κατ' επέκταση $\widehat{AE'\Gamma} \cong \widehat{\Delta EZ} = \perp$. Από την **Πρόταση (1.14)** προκύπτει τώρα το ζητούμενο, αφού τα σημεία B, E' δεν μπορούν παρά να ταυτίζονται.

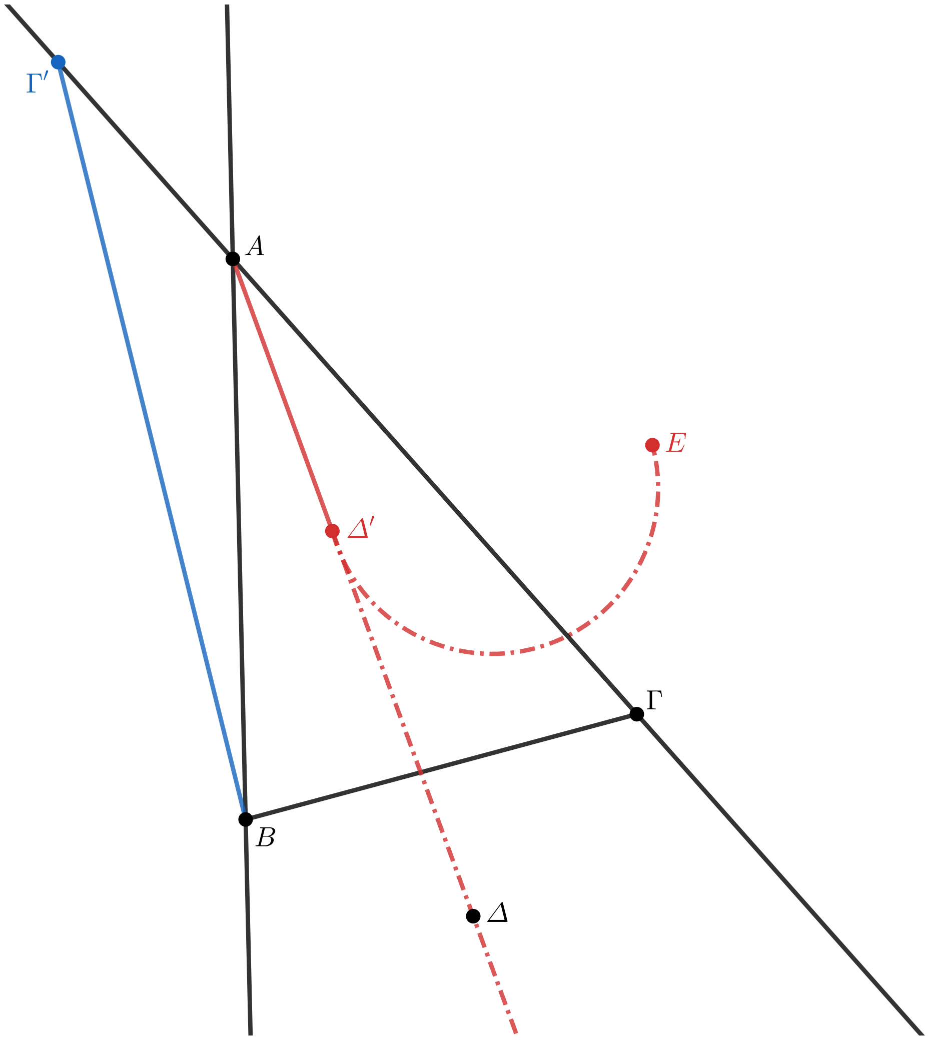
□

1.2.2 Απαραίτητες γνώσεις από την Ουδέτερη Γεωμετρία

Θεώρημα: *Cross - Bar:*
Εάν $A, B, \Gamma \in \mathcal{P}$ είναι τρία μη συγγραμμικά σημεία και $\underrightarrow{A\Delta}$ είναι μία ημιευθεία τέτοια ώστε $\underrightarrow{A\Delta} \cap \widehat{BA\Gamma} \neq \emptyset$, τότε $\underrightarrow{A\Delta} \cap \big(B\Gamma - \{B, \Gamma\}\big) \neq \emptyset$.

Απόδειξη: Αυτό που αρχικά θα δείξουμε είναι ότι αν $\underrightarrow{A\Delta} \cap \widehat{BA\Gamma} \neq \emptyset$, τότε κάθε σημείο της $\underrightarrow{A\Delta} - \{A\}$ θα βρίσκεται εντός της $\widehat{BA\Gamma}$. Πράγματι, εφόσον $\underrightarrow{A\Delta} \cap \widehat{BA\Gamma} \neq \emptyset$, μπορούμε να θεωρήσουμε $\Delta' \in \underrightarrow{A\Delta} \cap \widehat{BA\Gamma} \neq \emptyset$ και επίσης προς άτοπο ότι υπάρχει σημείο E το οποίο βρίσκεται στην $\underrightarrow{A\Delta} - \{A\}$ αλλά εκτός της γωνίας $\widehat{BA\Gamma}$. Σε αυτήν την περίπτωση, τα E, Δ' ανήκουν σε διαφορετικά ημιεπίπεδα που ορίζει η ημιευθεία $\underrightarrow{A\Gamma}$ ή $\underrightarrow{AB}$, επομένως το τμήμα $\Delta' E \subset \underrightarrow{A\Delta}$ τέμνει την $\underrightarrow{A\Gamma}$ ή $\underrightarrow{AB}$ αντίστοιχα. Για να συμβαίνει αυτό, θα πρέπει οποσδήποτε είτε το Δ' να ταυτίζεται με το A, είτε το E να ταυτίζεται με το A. Η πρώτη περίπτωση δεν ισχύει, αφού τότε το Δ' δεν ανήκει στη γωνία $\widehat{BA\Gamma}$ και αντίστοιχα η δεύτερη και πάλι δεν ισχύει, αφού το E πάρθηκε στο $\big(\underrightarrow{A\Delta} - \{A\}\big) \cap \big[\widehat{BA\Gamma}\big]^c$.

Εν συνεχεία θεωρούμε σημείο Γ' επί της $\underleftrightarrow{A\Gamma}$ τέτοιο ώστε $\Gamma' - A - \Gamma$ και παρατηρούμε ότι στο τρίγωνο $\overset{\triangle}{B\Gamma\Gamma'}$, σύμφωνα με το αξίωμα του Pasch, η $\underrightarrow{A\Delta}$ θα τέμνει την $B\Gamma'$ ή την $B\Gamma$. Την $B\Gamma'$ δεν την τέμνει, αφού εάν το αντίθετο συνέβαινε, τότε η $\underrightarrow{A\Delta} - \{A\}$ θα περιείχε σημείο εξωτερικό της γωνίας $\widehat{BA\Gamma}$. Επομένως τέμνει την $B\Gamma$, κι αυτήν όχι στο B, αφού δεν τέμνει την $B\Gamma'$. Ούτε στο Γ την τέμνει, αφού τότε η $\underrightarrow{A\Delta}$ θα ταυτίζοταν της $\underrightarrow{A\Gamma}$ και συνεπώς θα είχε κενή τομή με την $\widehat{BA\Gamma}$.

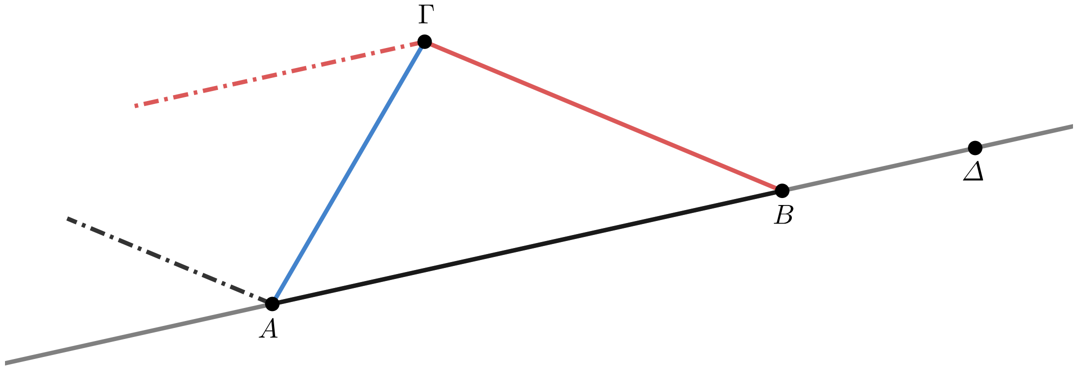


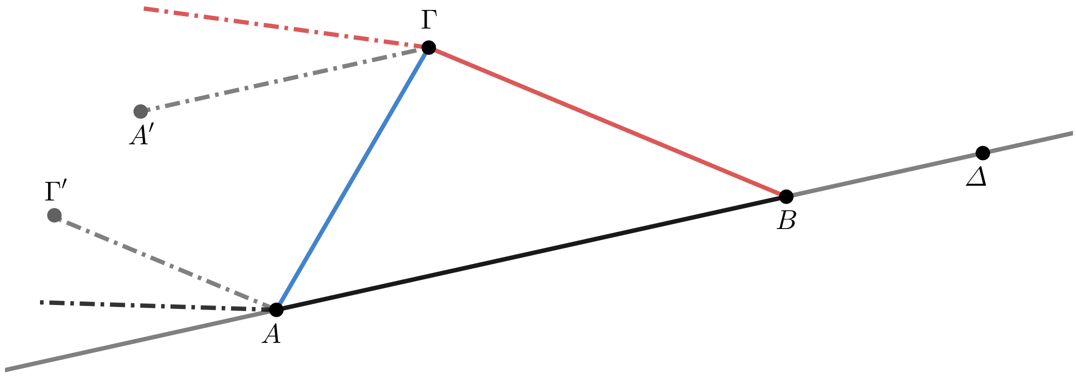
□

Θεώρημα: *Ασθενές θεώρημα της εξωτερικής γωνίας:*
Σε κάθε τρίγωνο $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ με σημείο Δ τέτοιο ώστε $\Delta - B - A$, ισχύει ότι $\widehat{A\Gamma B}, \widehat{BA\Gamma} < \widehat{\Gamma B\Delta}$.

Απόδειξη: Εάν προς άτοπο θεωρήσουμε ότι η $\widehat{A\Gamma B}$ ή η $\widehat{BA\Gamma}$ είναι σύμφωνη με την $\widehat{\Gamma B\Delta}$, τότε σύμφωνα με την **Πρόταση (1.12)** το σημείο $A = \overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{A\Gamma}$ ή το $\Gamma = \overleftrightarrow{A\Gamma} \cap \overleftrightarrow{B\Gamma}$ δεν θα υφίσταται. Αυτό είναι άτοπο.

Εάν πάλι η $\widehat{A\Gamma B}$ ή η $\widehat{BA\Gamma}$ είναι μεγαλύτερη της $\widehat{\Gamma B\Delta}$, τότε κατασκευάζουμε τη σύμφωνή της $\widehat{A'\Gamma B}$ ή $\widehat{BA\Gamma'}$ και παρατηρούμε ότι με βάση την **Πρόταση (1.12)** το σημείο $A = \overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{A\Gamma}$ ή το $\Gamma = \overleftrightarrow{A\Gamma} \cap \overleftrightarrow{B\Gamma}$ δεν θα υφίσταται. Αυτό είναι άτοπο.





□

Πρόταση (1.17): Σε κάθε τρίγωνο δεν υπάρχουν δύο γωνίες των οποίων το άθροισμα υπερβαίνει τις δύο ορθές.

Απόδειξη: Πράγματι, θεωρούμε προς άτοπο ότι υπάρχει τρίγωνο $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ με $\widehat{BA\Gamma} + \widehat{AB\Gamma} \geqslant 2\perp$. Εφόσον η σχέση αυτή ισχύει, κάποια από τις δύο γωνίες θα είναι μεγαλύτερη ή ίση της $1\perp$. Εάν και οι δύο είναι ορθές, άμεσα καταλήγουμε σε άτοπο. Υποθέτουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι η υπόθεση $> 1\perp$ ισχύει για την $\widehat{AB\Gamma}$ και μεταφέρουμε την άλλη στην πρώτη έτσι ώστε να δημιουργηθεί γωνία $\widehat{EB\Delta}$, με $B - A - E$ και $\Delta \in \widehat{BA\Gamma}$. Παρατηρούμε ότι η $\overleftrightarrow{B\Delta}$ είναι παράλληλη της $\overleftrightarrow{A\Gamma}$ και επιπλέον ότι οι $\overrightarrow{B\Gamma} - \{B\}$, $\overleftrightarrow{A\Gamma}$ βρίσκονται σε άλλα ημιεπίπεδα της $\overleftrightarrow{B\Delta}$. Επομένως το Γ δεν είναι στο ίδιο ημιεπίπεδο με τον εαυτό του, το οποίο είναι άτοπο.

□

Παρατήρηση (1.5): Σε όλα τα τρίγωνα το άθροισμα των γωνιών δεν υπερβαίνει τις τρεις ορθές.

Απόδειξη: Από την **Πρόταση (1.17)**, σε κάθε τρίγωνο $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ ισχύουν οι σχέσεις:

$$\widehat{AB\Gamma} + \widehat{A\Gamma B} < 2\perp$$
$$\widehat{A\Gamma B} + \widehat{BA\Gamma} < 2\perp$$
$$\widehat{BA\Gamma} + \widehat{AB\Gamma} < 2\perp$$

Με πρόσθεση κατά μέλη, προκύπτει το ζητούμενο:

$$2(\widehat{AB\Gamma} + \widehat{A\Gamma B} + \widehat{BA\Gamma}) < 6\perp \Rightarrow \widehat{AB\Gamma} + \widehat{A\Gamma B} + \widehat{BA\Gamma} < 3\perp$$

□

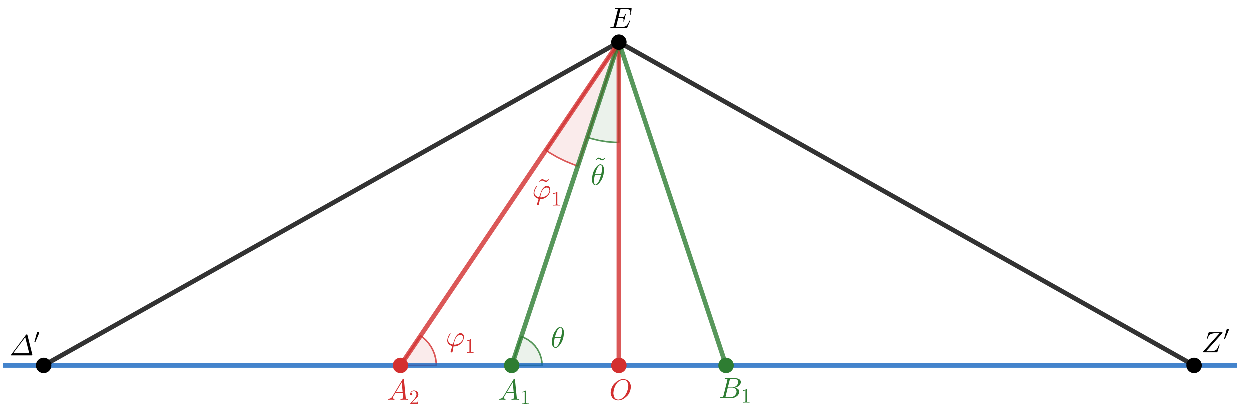
Θεώρημα: ***Αρχιμήδη - Ευδόξου για τις γωνίες:***
Εάν $\widehat{AB\Gamma}$ και $\widehat{\Delta EZ}$ είναι δύο γωνίες οι οποίες και οι δύο τους δεν υπερβαίνουν τη μία ορθή, τότε υπάρχει ένας φυσικός n τέτοιος ώστε:

$$n \cdot \widehat{AB\Gamma} \geqslant \widehat{\Delta EZ}$$

Απόδειξη: Η απόδειξη του συγκεκριμένου θεωρήματος είναι αρκετά μακροσκελής και γι' αυτό θα γίνει σε βήματα. Εάν $\widehat{AB\Gamma} \geqslant \widehat{\Delta EZ}$, δεν έχει να δειχθεί κάτι, οπότε δεν βλάπτει να υποθέσουμε ότι $\widehat{\Delta EZ} > \widehat{AB\Gamma}$.

Βήμα I: Στις πλευρές ΔE και EZ της γωνίας $\widehat{\Delta EZ}$ θεωρούμε σημεία Δ', Z' έτσι ώστε $E\Delta' \cong EZ'$. Στην ευθεία $\overleftrightarrow{\Delta' Z'}$ φέρουμε κάθετο ε.τ. EO που την τέμνει στο O. Εκατέρωθεν του τελευταίου σημείου θεωρούμε σημεία A_1, B_1 με $\Delta' - A_1 - O$, $O - B_1 - Z'$, τέτοια ώστε $\widehat{A_1EO} \cong \widehat{OEB_1} \cong \widehat{AB\Gamma}/2 = \tilde{\theta}$.

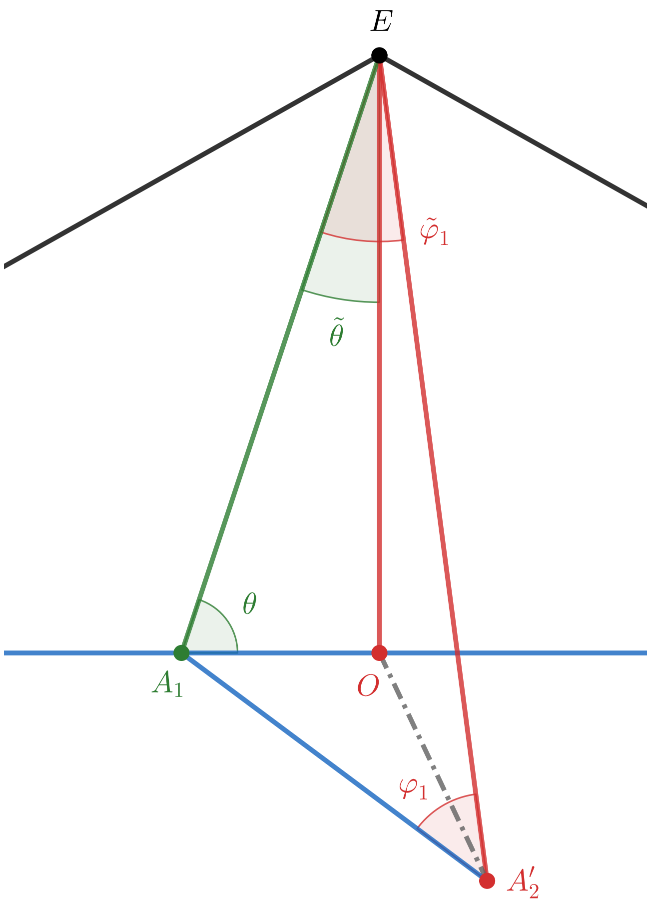
Στο σημείο αυτό θα συνεχίσουμε την περιγραφή της απόδειξης μόνο στο ημιεπίπεδο $\mathcal{H}(\Delta', \overleftrightarrow{OE})$, αφού λόγω συμμετρίας εντελώς ανάλογα επιχειρήματα μπορούν να εφαρμοστούν στο άλλο ημιεπίπεδο $\mathcal{H}(Z', \overleftrightarrow{OE})$.



Βήμα II: Θεωρούμε $\theta = \widehat{EA_1O}$. Επίσης θεωρούμε σημείο $A_2 \in \overrightarrow{O\Delta'}$ τέτοιο ώστε $A_2A_1 \cong OA_1$ και τις γωνίες $\varphi_1 = \widehat{EA_2O}$, $\tilde{\varphi}_1 = \widehat{A_2EA_1}$. Θα αποδείξουμε ότι $\tilde{\varphi}_1 < \tilde{\theta}$.

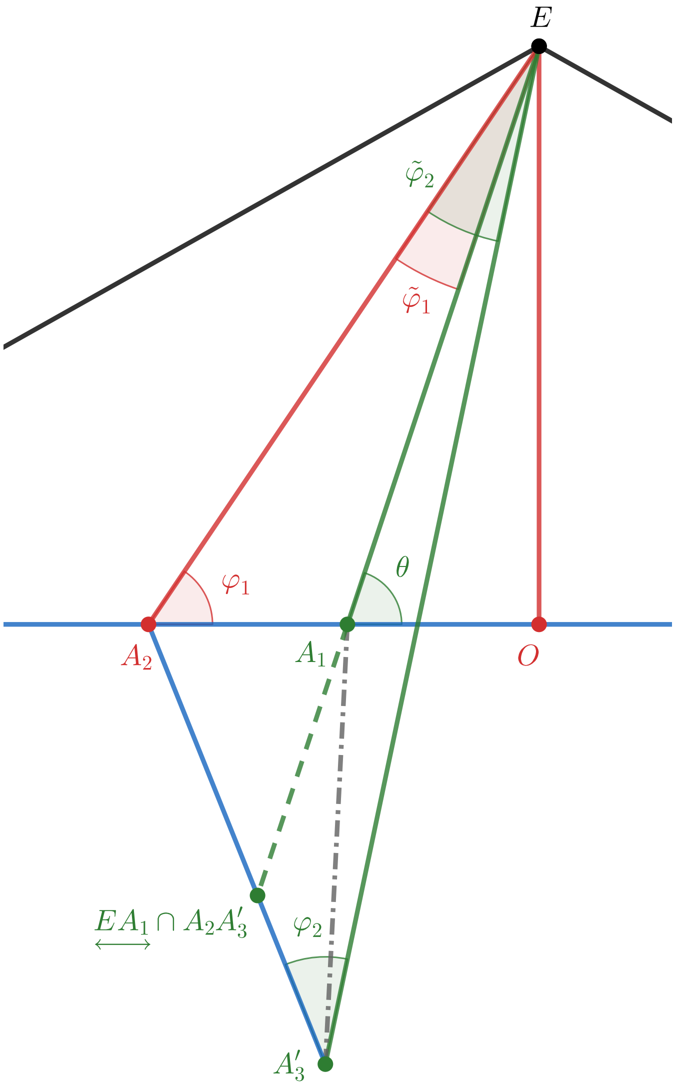
Πράγματι, υποθέτοντας ότι $\tilde{\varphi}_1 \geqslant \tilde{\theta}$, θα καταλήξουμε σε άτοπο. Όπως θα γίνει φανερό από τα ακόλουθα, τα επιχειρήματα που θα χρησιμοποιήσουμε για να καταλήξουμε σε άτοπο της υπόθεσης $\tilde{\varphi}_1 > \tilde{\theta}$ μπορούν με μικρές τροποποιήσεις να εφαρμοστούν και στην περίπτωση όπου $\tilde{\varphi}_1 = \tilde{\theta}$. Επομένως θα ασχοληθούμε μόνο με την περίπτωση όπου $\tilde{\varphi}_1 > \tilde{\theta}$.

Εφόσον $\tilde{\varphi}_1 > \tilde{\theta}$, υπάρχει σημείο $A_2' \in \mathcal{H}(Z', \overleftrightarrow{OE})$ τέτοιο ώστε $\widehat{A_2'EA_1} \cong \tilde{\varphi}_1$, $EA_2 \cong EA_2'$ και (κατ' επέκταση) $A_1A_2 \cong A_1A_2'$. Παρατηρούμε ότι το τρίγωνο $\overset{\triangle}{OA_1A_2'}$ είναι ισοσκελές με $\widehat{A_1OA_2'} \cong \widehat{A_1A_2'O}$. Επειδή η $\widehat{A_1OA_2'}$ είναι αμβλεία, η $\widehat{A_1A_2'O}$ είναι αμβλεία. Αυτό είναι άτοπο της **Πρότασης (1.17)**.



Βήμα III: Θεωρούμε σημείο A_3 : $A_3 - A_2 - A_1$ τέτοιο ώστε $A_3A_2 \cong A_2A_1$ και επίσης θεωρούμε τις γωνίες $\varphi_2 = \widehat{EA_3O}$, $\tilde{\varphi}_2 = \widehat{A_3EA_2}$. Σε αυτό το βήμα θα δείξουμε και πάλι κάτι ανάλογο του **Βήματος I**, δηλαδή ότι $\tilde{\varphi}_2 < \tilde{\varphi}_1$. Υποθέτουμε λοιπόν προς άτοπο ότι $\tilde{\varphi}_2 \geqslant \tilde{\varphi}_1$. Όπως θα γίνει φανερό από τα ακόλουθα, τα επιχειρήματα που θα χρησιμοποιήσουμε για να καταλήξουμε σε άτοπο της υπόθεσης $\tilde{\varphi}_2 > \tilde{\varphi}_1$ μπορούν με μικρές τροποποιήσεις να εφαρμοστούν και στην περίπτωση όπου $\tilde{\varphi}_2 = \tilde{\varphi}_1$. Επομένως θα ασχοληθούμε μόνο με την περίπτωση όπου $\tilde{\varphi}_2 > \tilde{\varphi}_1$.

Εφόσον $\tilde{\varphi}_2 > \tilde{\varphi}_1$, υπάρχει σημείο $A_3' \in \mathcal{H}(O, \overleftrightarrow{EA_1})$ τέτοιο ώστε $\widehat{A_2EA_3'} \cong \tilde{\varphi}_2$, $EA_3 \cong EA_3'$ και (κατ' επέκταση) $A_2A_3 \cong A_2A_3'$. Παρατηρούμε ότι η γωνία θ είναι μικρότερη της $\widehat{A_2A_1A_3'}$, αφού η σύμφωνη κατακορυφήν της $\widehat{A_2A_1[\overleftrightarrow{EA_1} \cap A_2A_3']}$ είναι μικρότερη της $\widehat{A_2A_1A_3'}$. Παρατηρούμε ότι το τρίγωνο $\overset{\triangle}{A_2A_1A_3'}$ είναι ισοσκελές με $\widehat{A_2A_1A_3'} \cong \widehat{A_2A_3'A_1}$. Επειδή $\theta \cong \widehat{A_2A_1[\overleftrightarrow{EA_1} \cap A_2A_3']} < \widehat{A_2A_1A_3'}$ και $\varphi_2 \cong \widehat{A_2A_3'E} > \widehat{A_2A_3'A_1}$, έπεται ότι $\theta < \varphi_2$. Αυτό είναι άτοπο της **Πρότασης (1.14)**.



Βήμα IV: Συνεχίζουμε επαγωγικά τη διαδικασία με σημεία $A_4, A_5, A_6, \cdots$ και κατασκευάζουμε μια φθίνουσα ακολουθία γωνιών $\tilde{\theta} > \tilde{\varphi}_1 > \tilde{\varphi}_2 > \tilde{\varphi}_3 > \tilde{\varphi}_4 > \cdots$.

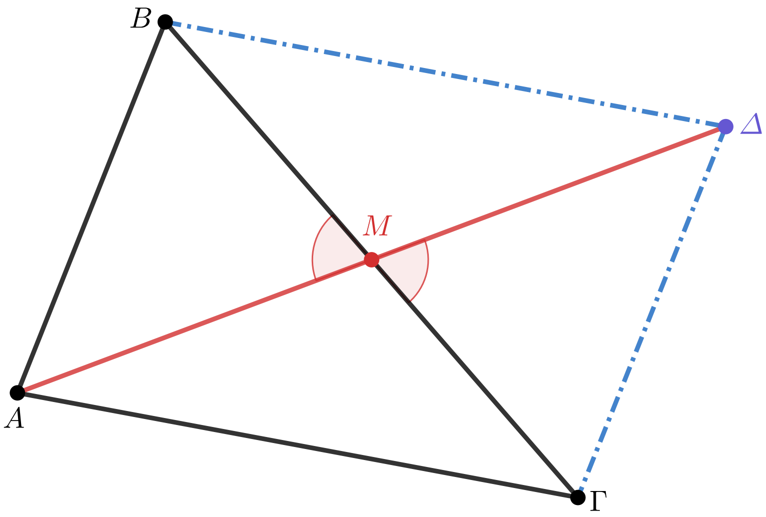
Βήμα V: Από το αξίωμα Αρχιμήδη - Ευδόξου για τα ε.τ., παρατηρούμε ότι υπάρχει φυσικός αριθμός $\tilde{n}$ τέτοιος ώστε $OA_{\tilde{n}} = \tilde{n} \cdot OA_1 \geqslant O\Delta'$. Ειδικότερα, επειδή $\tilde{\varphi}_i < \tilde{\theta}$, εάν η $\tilde{n} \cdot \theta$ δεν υπερβαίνει την $\perp$, θα ισχύει ότι $\tilde{n} \cdot \tilde{\theta} \geqslant \widehat{\Delta' EO} \Rightarrow \tilde{n} \cdot \widehat{AB\Gamma} \geqslant \widehat{\Delta EZ}$. Εάν η $\tilde{n} \cdot \tilde{\theta}$ έχει υπερβεί την $\perp$ (ή δεν ορίζεται), διαλέγουμε τον αριθμό $n < \tilde{n}$ για τον οποίο ισχύει $n = \max\{k \mid k \cdot \tilde{\theta} < \perp\}$ και ισχυριζόμαστε ότι $n \cdot \tilde{\theta} \geqslant \widehat{\Delta' EO}$. Πράγματι, εάν το αντίθετο συνέβαινε θα ίσχυε $\perp \leqslant (n+1) \cdot \tilde{\theta} < \widehat{\Delta' EO} + \tilde{\theta} \Rightarrow \widehat{\Delta EZ} + \widehat{AB\Gamma} > 2\perp$. Αυτό είναι άτοπο, αφού εξ αρχής υποθέσαμε ότι καθεμία από της γωνίες δεν υπερβαίνει την $\perp$.

$\square$

Θεώρημα: *Saccheri - Legendre (Θεμελιώδες Θεώρημα της Ο.Γ.):*
Σε κάθε τρίγωνο το άθροισμα των γωνιών δεν υπερβαίνει τις δύο ορθές.

Απόδειξη: Η απόδειξη αυτού του θεωρήματος θα γίνει ουσιαστικά σε τέσσερα βήματα:

Βήμα I: Για κάθε τρίγωνο $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ μπορεί να βρεθεί ένα άλλο $\overset{\triangle}{A\Delta\Gamma}$ το οποίο έχει ίδιο άθροισμα γωνιών και επιπλέον $\widehat{\Delta A\Gamma} < \frac{1}{2} \cdot \widehat{BA\Gamma}$. Πράγματι, θεωρούμε M το μέσο της $B\Gamma$ και φέρουμε ε.τ. $A\Delta$ τέτοιο ώστε $M \in A\Delta$ και $AM \cong A\Delta$. Με τον τρόπο αυτό δημιουργούνται δύο ίσα τρίγωνα $\overset{\triangle}{AMB} \cong \overset{\triangle}{\Gamma M\Delta}$ λόγω του κριτηρίου $\Pi - \Gamma - \Pi$, και συνεπώς τα $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ και $\overset{\triangle}{A\Delta\Gamma}$ έχουν ίδιο άθροισμα γωνιών. Εάν $\widehat{\Delta A\Gamma} < \frac{1}{2} \cdot \widehat{BA\Gamma}$, τότε το $\overset{\triangle}{A\Delta\Gamma}$ είναι το ζητούμενο τρίγωνο. Διαφορετικά, αποδεικνύουμε με παρόμοια διαδικασία ότι το τρίγωνο $\overset{\triangle}{A\Delta B}$ έχει άθροισμα γωνιών ίσο με αυτό του $A\overset{\triangle}{B}\Gamma$ και παρατηρούμε ότι $\widehat{BA\Delta} < \frac{1}{2}\cdot\widehat{BA\Gamma}$.



Βήμα II: Συνεχίζουμε με μία επαγωγική διαδικασία: Σχηματίζουμε τρίγωνα $A_i\overset{\triangle}{B_i}\Gamma_i$ καθένα εκ των οποίων έχει άθροισμα γωνιών, το άθροισμα των γωνιών του $A\overset{\triangle}{B}\Gamma$ και επιπλέον $\widehat{B_{i+1}A_{i+1}\Gamma_{i+1}} < \frac{1}{2}\cdot\widehat{B_iA_i\Gamma_i}$. Για κάθε γωνία $\widehat{B_iA_i\Gamma_i}$ ισχύει $\widehat{B_iA_i\Gamma_i} < \frac{1}{2^i}\cdot\widehat{BA\Gamma}$.

Βήμα III: Υποθέτουμε προς άτοπο ότι το άθροισμα των γωνιών του $A\overset{\triangle}{B}\Gamma$ είναι $2\perp+\delta$, για κάποια μη κενή γωνία $\delta < 1\perp$. Από το **Θεώρημα:** ***Αρχιμήδη - Ευδόξου για τις γωνίες***, για τις $\widehat{BA\Gamma}$ και δ, θα υπάρχουν φυσικοί αριθμοί m,n τέτοιοι ώστε $2^n \geqslant m$ και $m\cdot\delta \geqslant \widehat{BA\Gamma} \Rightarrow \delta \geqslant \frac{1}{2^n}\cdot\widehat{BA\Gamma}$. Επομένως στο τρίγωνο $A_n\overset{\triangle}{B_n}\Gamma_n$ θα έχουμε ότι $\widehat{B_nA_n\Gamma_n} < \frac{1}{2^n}\cdot\widehat{BA\Gamma} \leqslant \delta$.

Βήμα IV: Από το προηγούμενο βήμα προκύπτει ότι $\widehat{A_nB_n\Gamma_n} + \widehat{B_n\Gamma_nA_n} = 2\perp + (\delta - \widehat{B_nA_n\Gamma_n}) > 2\perp$, το οποίο είναι ένα αποτέλεσμα που αντιβαίνει στην **Πρόταση (1.17)**.

Με αυτά προκύπτει εν τέλει το ζητούμενο, ότι δηλαδή σε κάθε τρίγωνο το άθροισμα των γωνιών δεν υπερβαίνει τις δύο ορθές.

$\square$

Τα αξιώματα παραλληλίας της Ε.Γ. στις διάφορές τους διατυπώσεις:

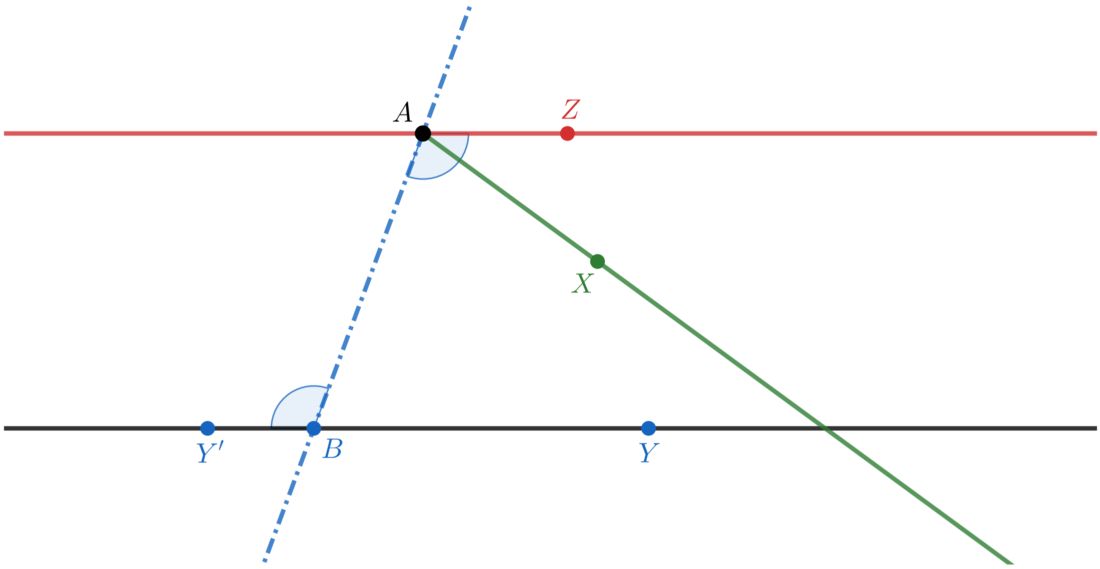
1. *(Κατά Hilbert)* Το αξίωμα των παραλλήλων για την Ε.Γ.: Για κάθε ευθεία l και για κάθε $A \notin l$, υπάρχει το πολύ μία ευθεία $l' \ni A$ που δεν συναντά την l.

2. *(Ευκλείδης)* Το 5$^{\text{ο}}$ Αίτημα του Ευκλείδη: Αν δύο ευθείες τέμνονται από μία τρίτη έτσι ώστε οι εντός και επί τα αυτά γωνίες να έχουν άθροισμα μικρότερο των δύο ορθών, τότε οι ευθείες τέμνονται και το σημείο τομής βρίσκεται στο ημιεπίπεδο που ορίζουν οι γωνίες.

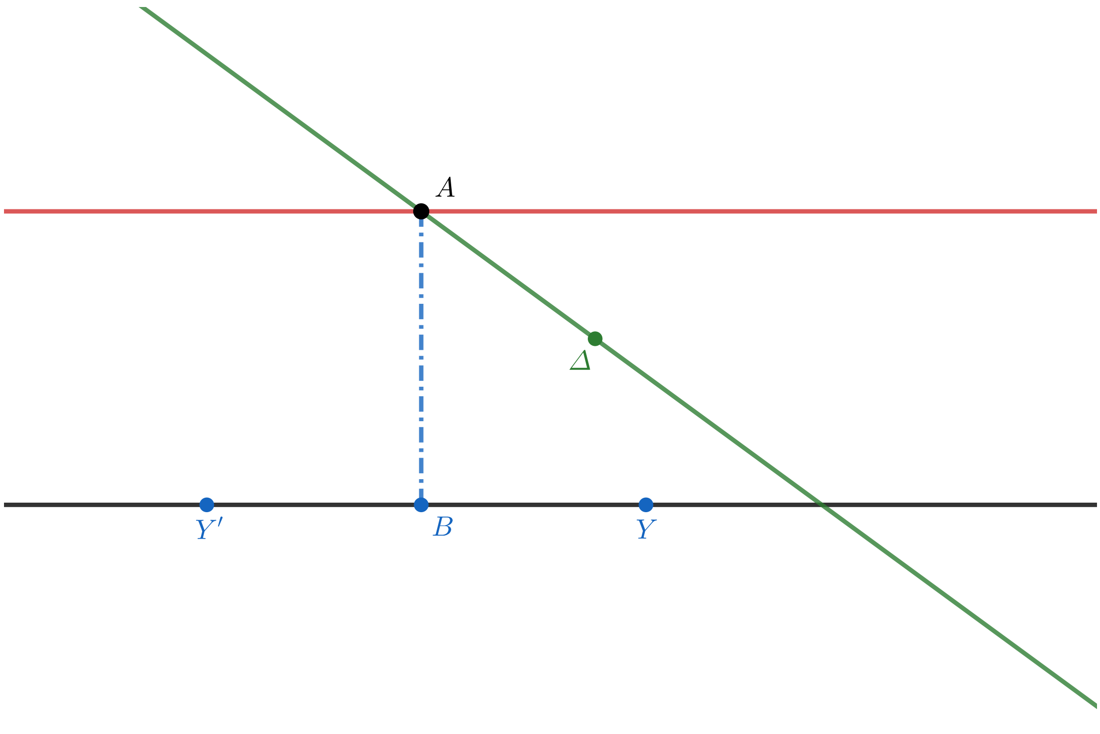
Πρόταση (1.18): Οι διατυπώσεις 1. και 2. είναι μεταξύ τους ισοδύναμες.

Απόδειξη:
1. $\Rightarrow$ 2.: Έστω l,m δύο ευθείες οι οποίες δεν ταυτίζονται (διότι διαφορετικά η περίπτωση είναι τετριμμένη) και A,B σημεία τέτοια ώστε $A\in l, B\in m$ και επιπλέον $A,B \neq l\cap m$. Εάν X,Y είναι διαφορετικά σημεία τέτοια ώστε $X\in l, Y\in m$, υποθέτουμε ότι $\widehat{ABY}+\widehat{BAX} < 2\perp$ και θα δείξουμε ότι οι $\underrightarrow{AX}\cap\underrightarrow{BY}\neq\emptyset$.

Μεταφέρουμε τη γωνία $\widehat{Y'BA}$ (όπου $Y'-B-Y$) στην $\underrightarrow{AB}$ έτσι ώστε να δημιουργηθεί γωνία $\widehat{BAZ}$. Αφού $\widehat{Y'BA}+\widehat{ABY} = 2\perp$ και $\widehat{ABY}+\widehat{BAX} < 2\perp$, η $\underrightarrow{AZ}$ είναι εξωτερική της $\widehat{BAX}$. Επιπλέον, οι $\underleftrightarrow{AZ}, \underleftrightarrow{BY}$ δεν τέμνονται και συνεπώς το 1. μας εξασφαλίζει ότι η $\underrightarrow{AX}$ συναντά την $\underrightarrow{BY}$. Το κοινό τους σημείο Γ είναι στο ημιεπίπεδο $\mathcal{H}(Y,\underrightarrow{AB})$, αφού καθεμία από τις $\underrightarrow{AX}-\{A\}, \underrightarrow{BY}-\{B\}$ είναι σε αυτό.



2. $\Rightarrow$ 1.: Έστω l μία ευθεία και $A \notin l$ ένα σημείο. Από το A φέρουμε κάθετο προς την l ε.τ. AB, διαλέγουμε $Y, Y' : Y' - B - Y$ και στο AB φέρουμε κάθετη ευθεία l' που διέρχεται από το A. Παρατηρούμε ότι οι l, l' είναι παράλληλες. Έπειτα θεωρούμε οποιαδήποτε διαφορετική της l' ευθεία $m \ni A$ που οπωσδήποτε σχηματίζει μη μηδενική γωνία με την l' (αφού δεν ταυτίζεται με αυτήν). Διαλέγουμε σημείο Δ το οποίο είναι μεταξύ των l, l' και επί της m, και παρατηρούμε ότι $\widehat{\Delta AB} + \widehat{ABY} < 2\perp$, επομένως οι l, m τέμνονται. Εδώ ουσιαστικά υποθέτουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $\Delta \in \mathcal{H}(Y, \overleftrightarrow{AB})$ - αν το Δ βρισκόταν στο άλλο ημιεπίπεδο, θα δουλεύαμε με το Y' αντί του Y. Αυτό δείχνει ότι από το A διέρχεται μοναδική προς το l παράλληλη.



□

Θεώρημα: *Ευθείες, γωνίες και πραγματικοί αριθμοί:*

Τα για κάθε τρία μη συνευθειακά σημεία A, B, Γ και για κάθε ευθεία l ισχύει ότι σύνολα $\widehat{AB\Gamma}, \mathcal{J}(l)$ είναι υπεραριθμήσιμα και ισοπληθικά με το $\mathbb{R}$.

Απόδειξη: Πράγματι, αρχικά θα δείξουμε ότι $\mathcal{J}(l) =_c \mathbb{N} \times \{0,1\}^{\mathbb{N}} =_c \mathbb{R}$. Θεωρούμε OK ένα ε.τ. επί της l και ένα σημείο $P \in l$.

i. Θεωρούμε n τον μέγιστο φυσικό αριθμό για τον οποίον το $n \cdot OK$ με αρχή το O δεν περιέχει το P. Εάν τέτοιο n δεν υπάρχει, θέτουμε $n = 0$.

ii. Θεωρούμε $s_1 = 1$ και n_1 τον ελάχιστο φυσικό αριθμό για τον οποίον το τμήμα $n \cdot OK + \frac{s_1}{2^{n_1}} \cdot OK$ με αρχή το O δεν περιέχει το P. Εάν τέτοιο n_1 δεν υπάρχει, θέτουμε $n_1 = s_1 = 0$.

iii. Θεωρούμε $s_2 = 1$ και n_2 τον ελάχιστο φυσικό αριθμό για τον οποίον το τμήμα $n \cdot OK + \sum_{i=1}^{2} \frac{s_i}{2^{n_i}} \cdot OK$ με αρχή το O δεν περιέχει το P. Εάν τέτοιο n_2 δεν υπάρχει, θέτουμε $n_2 = s_2 = 0$.

iv. Συνεχίζουμε επαγωγικά.

Θεωρούμε μια απεικόνηση $\mathcal{E} : \mathcal{J}(l) \to \mathbb{N} \times \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ ως εξής: Σε κάθε σημείο $P \in \mathcal{J}(l)$ αντιστοιχούμε το διάνυσμα:

$$\mathcal{E}(P) = (n, s_1, s_2, \cdots, s_n, \cdots)$$

Η εν λόγω αντιστοιχία είναι $1-1$. Αν δύο σημεία P, Q διαφέρουν, θα απέχουν τουλάχιστον $1/2^j$ για κάποιον j, οπότε και οι αντίστοιχες ακολουθίες που αυτά ορίζουν μέσω της $\mathcal{E}$ επίσης θα διαφέρουν. Το επί δεν ισχύει (για παράδειγμα τι αντίστροφη εικόνα θα είχε η ακολουθία των 1;), οπότε εν γένει έχουμε δείξει ότι $\mathcal{J}(l) \leqslant_c \mathbb{N} \times \{0,1\}^{\mathbb{N}}$.

Για να αποδείξουμε την ισοπληθικότητα, ως ενδιάμεσο βήμα θα δείξουμε ότι $\mathbb{N} \times \{0,1\}^{\mathbb{N}} =_c \mathbb{R}$. Αυτό θα γίνει συνοπτικά μέσω των ακόλουθων ισοπληθικοτήτων:

$$\mathbb{N} \times \{0,1\}^{\mathbb{N}} =_c \mathbb{N} \times \mathbb{R} \overset{\forall n \in \mathbb{N}}{=_c} \mathbb{N} \times [n, n+1) =_c \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [n, n+1) = [1, \infty) =_c \mathbb{R}$$

Οπότε για να δείξουμε ότι $\mathcal{J}(l) =_c \mathbb{N} \times \{0,1\}^{\mathbb{N}} =_c \mathbb{R}$, αρκεί να δείξουμε ότι $\mathbb{R} \leqslant_c \mathcal{J}(l)$ (ή ισοδύναμα $[0,1] \leqslant_c \mathcal{J}(l)$).

Για τον σκοπό αυτόν, θεωρούμε την απεικόνιση $\mathcal{G} : [0,1] \to \mathcal{J}(l)$ η οποία ορίζεται ως εξής: Αν $(a_1, a_2, \cdots)$ είναι μια διαδική αναπαράσταση ενός $x \in [0,1]$, τότε:

$$\mathcal{G}(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i \cdot OK}{2^i}$$

Από το **Θεώρημα: *Όρια ακολουθιών με στοιχεία του*** $\mathcal{P}$ η συνάρτηση $\mathcal{G}$ έχει πράγματι εικόνα στο $\mathcal{J}(l)$. Επιπλέον, είναι $1-1$, οπότε $[0,1] \leqslant_c \mathcal{J}(l)$. Αυτά αποδεικνύουν την εν λόγω ισοπληθικότητα.

Όσον αφορά τις γωνίες, έστω $\widehat{AB\Gamma}$ η γωνία των A, B, Γ με κορυφή την B. Θεωρούμε Γ, Δ δύο σημεία τα οποία είναι εσωτερικά των πλευρών της γωνίας και παρατηρούμε ότι:

$$\mathbb{R} \leqslant_c \widehat{AB\Gamma} = \bigcup_{P \in \Gamma\Delta} \underrightarrow{BP} \leqslant_c \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2 =_c \mathbb{R} \Rightarrow \widehat{AB\Gamma} =_c \mathbb{R}$$

□

Παρατηρήσεις (1.6):
I. Το **Θεώρημα: *Ευθείες, γωνίες και πραγματικοί αριθμοί*** σε συνδυασμό με το αξίωμα Αρχιμήδη - Ευδόξου για τα ε.τ. δίνουν ότι κάθε ε.τ. είναι ισοπληθικό με το $\mathbb{R}$. Επιπλέον, $\{AB \mid A, B \in \mathcal{P}\} \big/ _{\cong} =_c \mathbb{R}$.

II. Το **I.** δίνει ότι κάθε ημιευθεία είναι ισοπληθική με το $\mathbb{R}$.

III. Το **Θεώρημα: *Ευθείες, γωνίες και πραγματικοί αριθμοί*** δίνει ότι το σύνολο των σημείων $\mathcal{P}$ της γεωμετρίας είναι ισοπληθικό με το $\mathbb{R}$, αφού το επίπεδο μπορεί να χωριστεί σε τέσσερεις ορθές γωνίες μέσω δύο κάθετων ευθειών.

IV. Το **III.** δίνει ότι σύνολο των ευθειών $\mathcal{L}$ της γεωμετρίας είναι ισοπληθικό με το $\mathbb{R}$.

V. Το **III.** επίσης δίνει ότι σύνολο των γωνιών της γεωμετρίας είναι ισοπληθικό με το $\mathbb{R}$.

VI. Θεωρούμε l, m δύο κάθετες ευθείες και επί τις m δύο σημεία A, A' που ισαπέχουν από την l. Για κάθε γωνία θ υπάρχουν ακριβώς δύο σημεία $P, P' \in l$ τέτοια ώστε $\widehat{MP[l \cap m]} \cong \widehat{MP'[l \cap m]} \cong \frac{\theta}{2}$. Κατ' επέκτασην, $\widehat{MPM'} \cong \widehat{MP'M'} \cong \theta$. Αυτό δείχνει ότι $\{\widehat{AB\Gamma} \mid A, B, \Gamma \in \mathcal{P},\ A \neq B \neq \Gamma\} \big/ _{\cong} =_c \mathbb{R}$.

Παρατηρήσεις (1.7):
I. Σε κάθε ε.τ. μπορούμε να αντιστοιχίσουμε μία τιμή, έναν θετικό πραγματικό αριθμό, έτσι ώστε η αντιστοιχία να είναι αύξουσα και σύμφωνα ε.τ. να έχουν ίσες τιμές. Πράγματι, θεωρούμε την απεικόνιση $\mathcal{R} : \{AB \mid A, B \in \mathcal{P}\} \to \mathbb{R}^+$ η οποία ορίζεται ως εξής:

- Θεωρούμε μια ημιευθεία $\underrightarrow{OX}$.
- Θεωρούμε ε.τ. OK επί τις ημιευθείας $\underrightarrow{OX}$.
- Για κάθε ε.τ. AB, θεωρούμε σημείο $P \in \underrightarrow{OX}$ τέτοιο ώστε $OP \cong AB$.
- Για το σημείο P θεωρούμε την (μοναδική) ακολουθία $\left(n \cdot OK + \sum_{i=1}^{k} \frac{s_i}{2^{n_i}} \cdot OK\right)_{k\in\mathbb{N}}$, η οποία κατασκευάζεται όπως στο **Θεώρημα:** ***Ευθείες, γωνίες και πραγματικοί αριθμοί***, και για την οποία ισχύει:

$$\lim_{\mathbb{N}\ni k\to\infty} \left[n \cdot OK + \sum_{i=1}^{k} \frac{s_i}{2^{n_i}} \cdot OK\right] = OP - \{P\}$$

- Ορίζουμε $\mathcal{R}(AB) = n + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{s_i}{2^{n_i}}$.

II. Ανάλογη διαδικασία μπορεί να γίνει για τις γωνίες. Η κατασκευή σε αυτό το μέρος θα γίνει επαναλαμβάνοντας τμήματα μιας (τυχαίας) οξείας γωνίας $\widehat{\Lambda OK}$. Μπορεί να βρεθεί δηλαδη μία αύξουσα αντιστοιχία $\mathcal{A} : \{\widehat{AB\Gamma} \mid A, B, \Gamma \in \mathcal{P}\} \to [0, \pi]$ τέτοια ώστε σύμφωνες γωνίες να έχουν ίσες τιμές και επιπλέον:

$$\mathcal{A}(\widehat{AB\Gamma}) = \frac{\pi}{c_{\widehat{\Lambda OK}}} \cdot \left(m + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{t_i}{2^{m_i}}\right), \text{ όπου } c_{\widehat{\Lambda OK}} \in \mathbb{R}^+ \text{ είναι τέτοιο ώστε } c_{\widehat{\Lambda OK}} \cdot \widehat{\Lambda OK} = 2\perp$$

1.3 Ασκήσεις του Κεφαλαίου 1

1. Παρατηρήστε ότι η μοναδικότητα του σημείου τομής δύο διαφορετικών ευθειών l, m δεν είναι αξίωμα. Αποδείξτε τη μοναδικότητα του σημείου τομής δύο διαφορετικών ευθειών l, m.

2. Έστω $l \in \mathcal{L}$ μία ευθεία του επιπέδου. Θεωρούμε μία σχέση H στο $\left\{\underrightarrow{AB} \mid (A,B) \in \mathcal{P}^2 \text{ και } \underrightarrow{AB} \cap l = \emptyset\right\}^2$ η οποία ορίζεται ως:
$$\underrightarrow{AB}\ H\ \underrightarrow{\Gamma\Delta} :\Leftrightarrow A = \Gamma \text{ και } \mathcal{H}(B,l) = \mathcal{H}(\Delta,l)$$
Είναι η H μία σχέση ισοδυναμίας;

3. Σε ένα σύστημα με αξιώματα αυτά της ομάδας **A**, μαζί με το αξίωμα: "*Για κάθε ευθεία και για κάθε σημείο εκτός της ευθείας υπάρχει μοναδική παράλληλος προς την ευθεία που να διέρχεται από το σημείο αυτό*", δείξτε ότι εξασφαλίζεται η ύπαρξη τεσσάρων σημείων τα οποία είναι ανά τρία μη συγγραμμικά. Ισχύει το ίδιο για πέντε σημεία;

4. Εξετάστε εάν το αξίωμα **B.4.** μπορεί να αντικατασταθεί από το (δηλ. αν είναι ισοδύναμο με το):

   Για κάθε ευθεία l και για κάθε τρία σημεία A, B, Γ που δεν βρίσκονται επί αυτής:

   i. *Αν τα A και B βρίσκονται προς το ίδιο μέρος της l και το ίδιο συμβαίνει και για τα B, Γ, τότε και τα A και Γ βρίσκονται προς το ίδιο μέρος της l.*
   ii. *Αν τα A και B βρίσκονται εκατέρωθεν της l και το ίδιο συμβαίνει και για τα B, Γ, τότε και τα A και Γ βρίσκονται προς το ίδιο μέρος της l.*

5. Θυμηθείτε την απόδειξη της **Πρότασης (1.4)** και δείξτε ότι κάθε ευθεία περιέχει άπειρο πλήθος σημείων.

6. Αποδείξτε ότι όλες οι ορθές γωνίες είναι μεταξύ τους ίσες.

7. Αποδείξτε την αντισυμμετρία των '$\leqslant_{\text{ε.τ.}}, \leqslant_{\text{γων.}}$'.

8. Αποδείξτε την **Πρόταση 1.14**, δεδομένου ότι γνωρίζετε το **Θεώρημα:** ***Το ασθενές θεώρημα της εξωτερικής γωνίας***.

9. Δείξτε ότι το αξίωμα του Pasch μπορεί να αποδειχθεί, εάν θεωρηθεί ότι ισχύει το **Θεώρημα:** ***Cross - Bar***.

10. Έστω ότι l, m, n είναι τρείς ευθείες που ανά δύο τέμνονται. Δείξτε ότι οι l, m τέμνονται στο ημιεπίπεδο της n που το άθροισμα των γωνιών των l, n και των m, n είναι μικρότερο.

11. Αποδείξτε ότι κάθε γωνία είναι δυνατόν να διχοτομηθεί.

12. Δείξτε ότι το αξίωμα Αρχιμήδη - Ευδόξου για τους θετικούς πραγματικούς αριθμούς μπορεί να αποδειχθεί μέσω του αξιώματος Αρχιμήδη - Ευδόξου για τα ε.τ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Στοιχεία από την Υπερβολική Γεωμετρία

Η Υ.Γ. είναι η γεωμετρία που προκύπτει από την Ο.Γ., αφού επισυνάψουμε την άρνηση του αιτήματος των παραλλήλων της Ε.Γ., στην κατά Hilbert διατύπωση. Το αξίωμα αυτό θα το ονομάζουμε *Υπερβολικό Αξίωμα* (Υ.Α.).

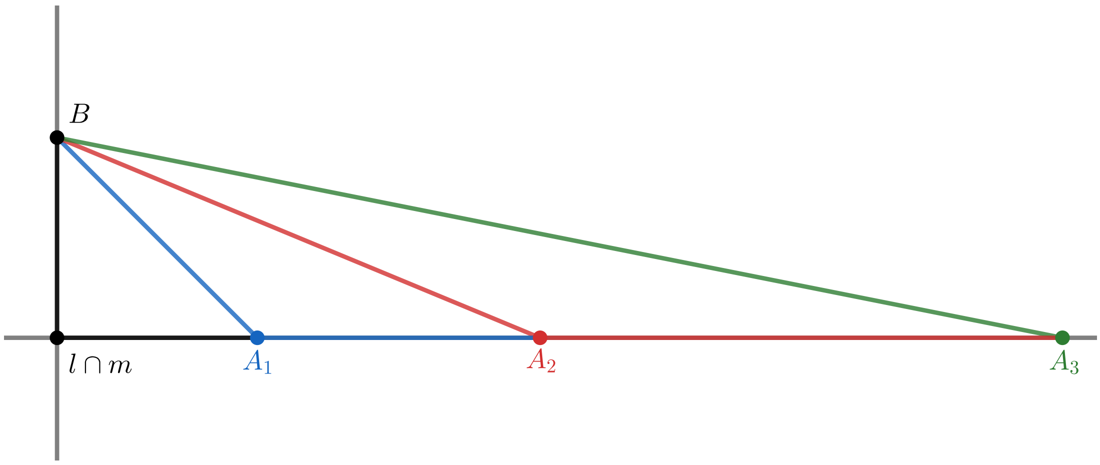
Αξίωμα: *Υπερβολικό Αξίωμα:*
Υπάρχει ευθεία l και υπάρχει σημείο A, εκτός της l, έτσι ώστε από το A να διέρχονται τουλάχιστον δύο ευθείες m και n οι οποίες δεν τέμνουν την l.

Στα επόμενα θα παρουσιάσουμε στοιχεία της Υ.Γ., χαρακτηριστικά για την ιδιαιτερότητά τους.

2.1 Άμεσες επιπτώσεις του Υπερβολικού Αξιώματος

Παρατήρηση (2.1): Έστω ω μια γωνία, m, l δύο κάθετες ευθείες και $l \cap m \neq B \in m$. Τότε μπορεί να βρεθεί $A \in l$ τέτοιο ώστε $\widehat{[l \cap m]AB} < \omega$.

Απόδειξη:



Κατασκευάζουμε ακολουθία σημείων $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ επί της l ως εξής:

- Το $A_1 \in l$ είναι σημείο τέτοιο ώστε $[l \cap m]B \cong [l \cap m]A_1$.
- Το $A_i \in l$ είναι σημείο τέτοιο ώστε $A_{i-1}A_i \cong BA_{i-1}$.

και παρατηρούμε ότι καθένα από τα τρίγωνα $B[l \overset{\triangle}{\cap} m]A_1, BA_i\overset{\triangle}{A}_{i+1}$ είναι ισοσκελές, επομένως οι γωνίες των βάσεων ισούνται. Από αυτό προκύπτει τελικά ότι:

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} \widehat{[l \cap m]A_iB} = \widehat{[l \cap m]BA_1} + \sum_{i \in \mathbb{N}} \widehat{A_iBA_{i+1}} \leqslant 2\perp$$

και:

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{A}(\widehat{[l \cap m]A_iB}) = \mathcal{A}(\widehat{[l \cap m]BA_1}) + \sum_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{A}(\widehat{A_iBA_{i+1}}) \leqslant 2\pi$$

το οποίο ουσιαστικά δειχνει ότι η ακολουθία γωνιών $\left(\widehat{[l \cap m]A_iB}\right)_{i \in \mathbb{N}}$ είναι φθίνουσα προς το $\emptyset$ (αφού η ακολουθία των $\mathcal{A}(\widehat{[l \cap m]A_iB})$ φθίνει στο 0). Εάν λοιπόν ω είναι μια τυχαία γωνία, οπωσδήποτε θα μπορεί να βρεθεί κάποιο $A = A_n$ τέτοιο ώστε $\widehat{[l \cap m]AB} < \omega$.

□

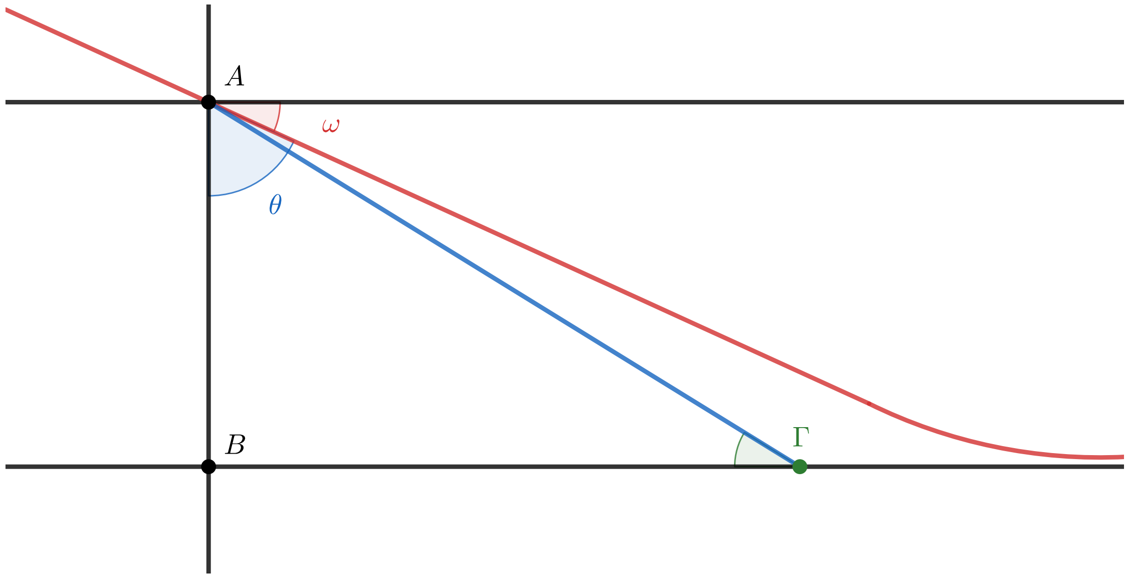
Πρόταση (2.1): Στην Υ.Γ. υπάρχει τουλάχιστον ένα τρίγωνο με άθροισμα γωνιών μικρότερο των δύο ορθών.

Απόδειξη: Έστω l μια ευθεία και A ένα σημείο τα οποία ικανοποιούν το Υ.Α. Από το A φέρουμε κάθετη m προς την l που την τέμνει στο B. Από το A επίσης φέρουμε κάθετη l' στην m και παρατηρούμε ότι οι l, l' δεν τέμνονται. Εφόσον για τα A, l ισχύει το Υ.Α., μπορεί να βρεθεί ακόμη μια ευθεία m', η οποία θα είναι παράλληλη στην l, θα διέρχεται με το A και δεν θα ταυτίζεται της l'. Κατ' επέκταση, η m' δημιουργεί μία μη κενή γωνία ω με την l.

Θεωρούμε σύμφωνα με την **Παρατήρηση (2.1)** ένα σημείο $\Gamma \in l$ τέτοιο ώστε $\widehat{B\Gamma A} < \omega$, και ισχυριζόμαστε ότι το $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ έχει άθροισμα γωνιών μικρότερο της $2\perp$. Πράγματι, εάν $\theta = 1\perp - \omega$ είναι η γωνία των m, m', τότε:

$$\widehat{\Gamma BA} + \widehat{BA\Gamma} + \widehat{B\Gamma A} < 1\perp + \theta + \omega = 2\perp$$

όπως ακριβώς επιδιώκαμε.



□

Θα προσπαθήσουμε να απαντήσουμε στο ερώτημα αν το άθροισμα των γωνιών κάθε τριγώνου είναι μικρότερο των δύο ορθών στην Υ.Γ. Για να μπορέσει όμως να δωθεί απάντηση, χρειάζεται να οριστεί η έννοια του *ελλείματος*.

Ορισμός: ***Έλλειμμα και ελλειμματικά τρίγωνα:***
I. *Από το* **Θεώρημα: *Saccheri* - *Legendre*** *στην Ο.Γ., το άθροισμα των γωνιών ενός τυχαίου τριγώνου είναι το πολύ* $2\perp$. *Αν λοιπόν στο τρίγωνο* $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ *θεωρήσουμε τη διαφορά:*

$$D\left(\overset{\triangle}{AB\Gamma}\right) = 2\perp - \widehat{AB\Gamma} - \widehat{BA\Gamma} - \widehat{B\Gamma A}$$

αυτή θα ορίζεται (ως 'μη αρνητική'). Την ποσότητα $D\left(\overset{\triangle}{AB\Gamma}\right)$ *θα την ονομάζουμε έλλειμμα του* $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$.

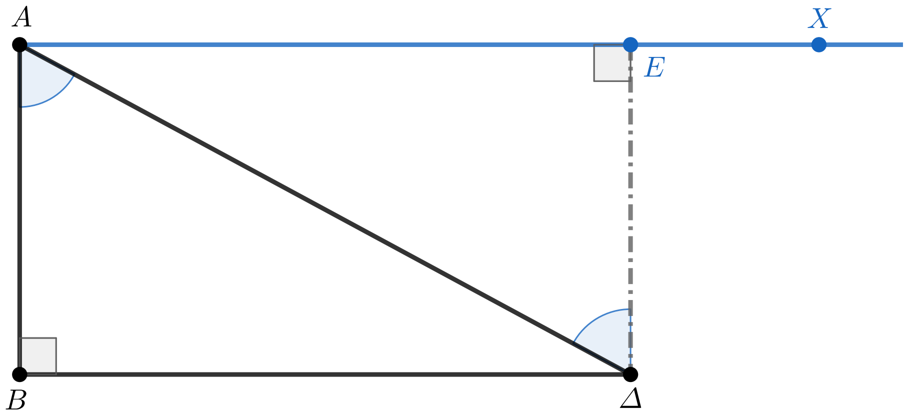
II. *Εάν σε ένα τρίγωνο* $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ *ισχύει* $D\left(\overset{\triangle}{AB\Gamma}\right) > \emptyset$, *τότε ονομάζουμε το τρίγωνο* $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ *ελλειμματικό.*

Παρατήρηση (2.2): Η συνάρτηση του ελλείμματος είναι προσθετική με την εξής έννοια: Εάν στο $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ για κάποιο σημείο Δ έχουμε $B - \Delta - \Gamma$, τότε $D\left(\overset{\triangle}{AB\Gamma}\right) = D\left(\overset{\triangle}{AB\Delta}\right) + D\left(\overset{\triangle}{A\Delta\Gamma}\right)$.

Λήμμα (2.1): Εάν υπάρχει μη ελλειμματικό τρίγωνο στην Υ.Γ., τότε υπάρχει ένα ορθογώνιο τετράπλευρο.

Απόδειξη: Κατ' αρχάς παρατηρούμε ότι η ύπαρξη ενός μη ελλειμματικού τριγώνου εξασφαλίζει την ύπαρξη ενός ορθογώνιου μη ελλειμματικού τριγώνου, αφού αν φέρουμε την κάθετο προς την πλευρά που έχει προσκείμενες δύο οξείες γωνίες, αυτή θα είναι εσωτερική του τριγώνου και θα σχηματίζει δύο ορθογώνια τρίγωνα, τα οποία λόγω της προσθετικότητας του ελλείμματος, θα είναι μη ελλειμματικά.

Επιλέγουμε ένα από αυτά τα τρίγωνα (έστω το $\overset{\triangle}{AB\Delta}$), φέρουμε ημιευθεία $\underrightarrow{AX}$ τέτοια ώστε $\widehat{B\Delta A} \cong \widehat{\Delta AX}$ και επιλέγουμε σημείο E στην $\underrightarrow{AX}$ τέτοιο ώστε $AE \cong B\Delta$. Από το κριτήριο Π-Γ-Π, τα σχηματιζόμενα τρίγωνα $\overset{\triangle}{AB\Delta}, \overset{\triangle}{A\Delta E}$ θα είναι ίσα και συνεπώς $\widehat{BA\Delta} \cong \widehat{A\Delta E}$, $\widehat{AE\Delta} \cong \widehat{\Delta BA} = 1\perp$. Επειδή επιπλέον $\widehat{AB\Delta} + \widehat{B\Delta A} + \widehat{\Delta AB} = 2\perp$, προκύπτει ότι $\widehat{BA\Delta} + \widehat{\Delta AE} \cong \widehat{B\Delta A} + \widehat{A\Delta E} = \perp$. Αυτά δείχνουν ότι το $AB\Delta E$ είναι ένα ορθογώνιο τετράπλευρο.

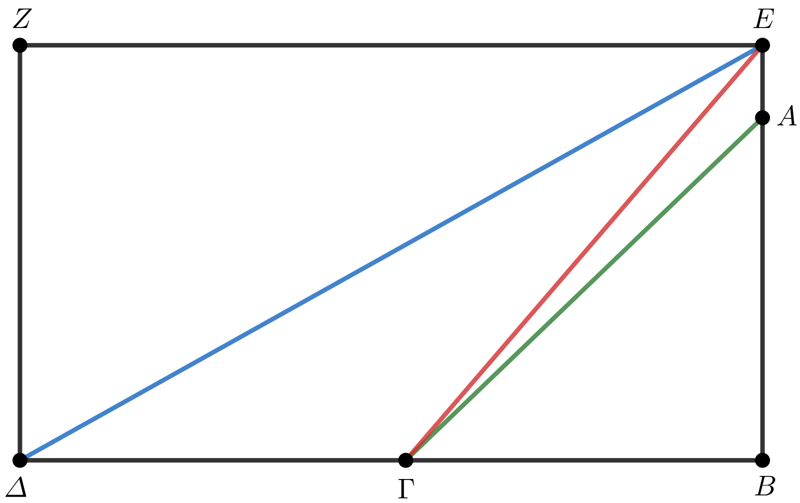


□

Παρατήρηση (2.3): Εάν υπάρχει ορθογώνιο τετράπλευρο, τότε υπάρχουν αυθαίρετα μεγάλα ορθογώνια τετράπλευρα, τα οποία προκύπτουν από το πρώτο με επαναλήψεις του (‘μερική’ ψηφίδωση του υπερβολικού επιπέδου).

Λήμμα (2.2): Εάν υπάρχει ορθογώνιο τετράπλευρο, όλα τα ορθογώνια τρίγωνα είναι μη ελλειμματικά.

Απόδειξη: Έστω $AB\Gamma$ ένα τρίγωνο με $\widehat{AB\Gamma} = \perp$. Επιλέγουμε ένα ορθογώνιο τετράπλευρο ΔBEZ με πλευρές μεγαλύτερες από αυτές του τριγώνου και με $\widehat{\Delta BE} = \widehat{\Gamma BA}$. Έπειτα φέρουμε το ε.τ. ΔE και παρατηρούμε ότι $D\left(\overset{\triangle}{\Delta EZ}\right) = D\left(\overset{\triangle}{\Delta EB}\right) = \emptyset$. Φέρουμε επιπλέον το $E\Gamma$ και βλέπουμε ότι λόγω της προσθετικότητας του ελλείμματος, $D\left(\overset{\triangle}{\Delta E\Gamma}\right) = D\left(\overset{\triangle}{E\Gamma B}\right) = \emptyset$. Τέλος, παρατηρούμε ότι και πάλι από την προσθετικότητα του ελλείμματος, $D\left(\overset{\triangle}{\Gamma EA}\right) = D\left(\overset{\triangle}{AB\Gamma}\right) = \emptyset$. Αυτό δείχνει ότι το $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ είναι ένα τρίγωνο μη ελλειμματικό.

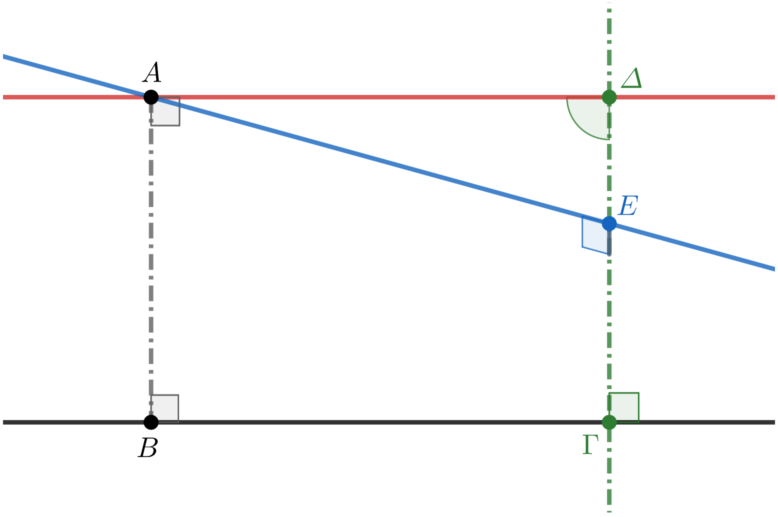


□

Θεώρημα: *Τα τρίγωνα της Υ.Γ. είναι ελλειμματικά:*
Κάθε τρίγωνο στην Υ.Γ. είναι ελλειμματικό.

Απόδειξη: Υποθέτουμε προς άτοπο ότι υπάρχει ένα μη ελλειμματικό τρίγωνο στην Υ.Γ. Με βάση τα **Λήμματα (2.1), (2.2)**, κάθε ορθογώνιο τρίγωνο είναι μη ελλειμματικό, το οποίο αντιβαίνει στην **Πρόταση (2.1)**. □

Θεώρημα: *Το Υ.Α. σε κάθε σημείο του επιπέδου:*
Το Υ.Α. ισχύει για κάθε ζεύγος A, l, όπου $l \in \mathcal{L}$ και $A \in \mathcal{P} - \mathcal{J}(l)$.



Απόδειξη: Φέρουμε κάθετο τμήμα AB προς την l, που την τέμνει στο B, και έπειτα κάθετη ευθεία l' στο AB που διέρχεται από το A. Οι l, l' θα είναι υποχρεωτικά ευθείες παράλληλες. Στην l επιλέγουμε ένα σημείο Γ και από αυτό φέρουμε κάθετη ευθεία m' προς την l, που τέμνει την l' (αν την τέμνει) στο Δ.

Παρατηρούμε ότι ένα κάθετο τμήμα AE προς την m', που την τέμνει στο E, δεν μπορεί να ταυτίζεται με το $A\Delta$, αφού αν κάτι τέτοιο συνέβαινε, το $AB\Gamma\Delta = AB\Gamma E$ θα ήταν ορθογώνιο τετράπλευρο. Εφόσον λοιπόν οι $\overleftrightarrow{AE}, l$ τέμνουν την $\overleftrightarrow{\Gamma\Delta}$ κάθετα, οι ίδιες είναι παράλληλες. Επειδή $\overleftrightarrow{AE} \neq l'$, από το A διέρχονται τουλάχιστον δύο παράλληλες προς την l ευθείες. Αυτό αποδεικνύει το ζητούμενο. □

Θεώρημα: *Συμφωνία τριγώνων στην Υ.Γ.:*
Εάν δύο τρίγωνα έχουν μία προς μία τις γωνίες τους σύμφωνες, είναι σύμφωνα στην Υ.Γ.

Απόδειξη: Έστω $\overset{\triangle}{AB\Gamma}, \overset{\triangle}{\Delta EZ}$ δύο τρίγωνα που έχουν μία προς μία ίσες τις γωνίες τους. Υποθέτουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $\widehat{AB\Gamma} \cong \widehat{\Delta EZ}$, $\widehat{A\Gamma B} \cong \widehat{\Delta ZE}$, $\widehat{BA\Gamma} \cong \widehat{E\Delta Z}$ και μεταφέρουμε το τρίγωνο $\overset{\triangle}{\Delta EZ}$ έτσι ώστε $\widehat{E\Delta Z} \cong \widehat{B'A\Gamma'} = \widehat{BA\Gamma}$, και επιπλέον $\widehat{\Delta EZ} \cong \widehat{AB'\Gamma'} \cong \widehat{AB\Gamma}$ και $\widehat{\Delta ZE} \cong \widehat{B'\Gamma' A} \cong \widehat{B\Gamma A}$.

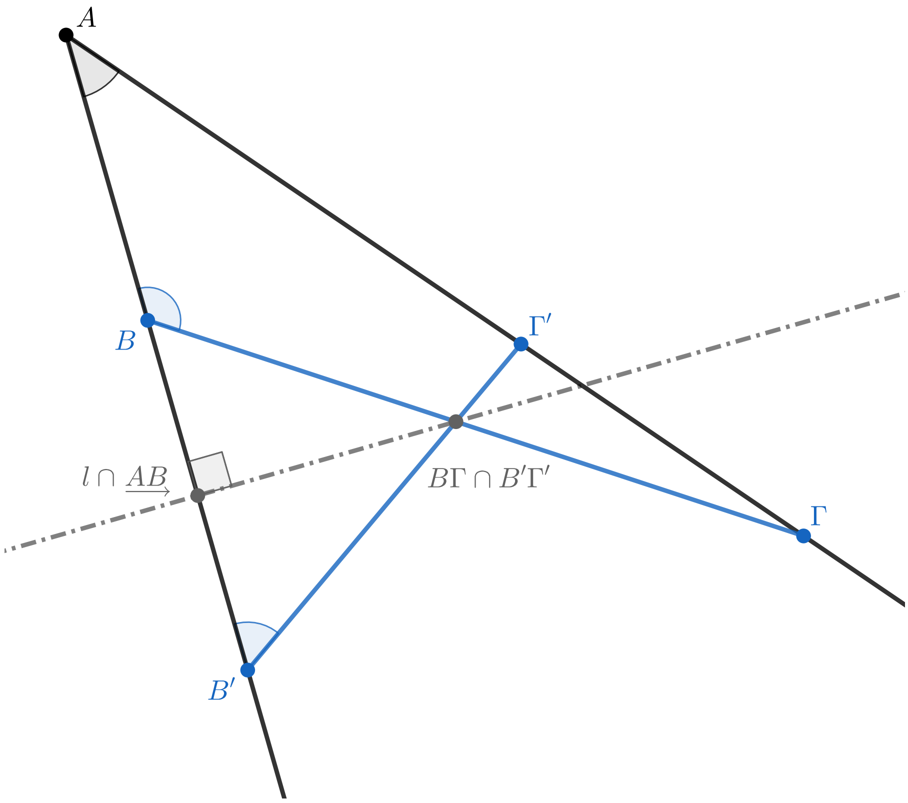
Υποθέτουμε προς άτοπο ότι τα δύο τρίγωνα δεν είναι σύμφωνα και διακρίνουμε τις εξής τρεις περιπτώσεις:

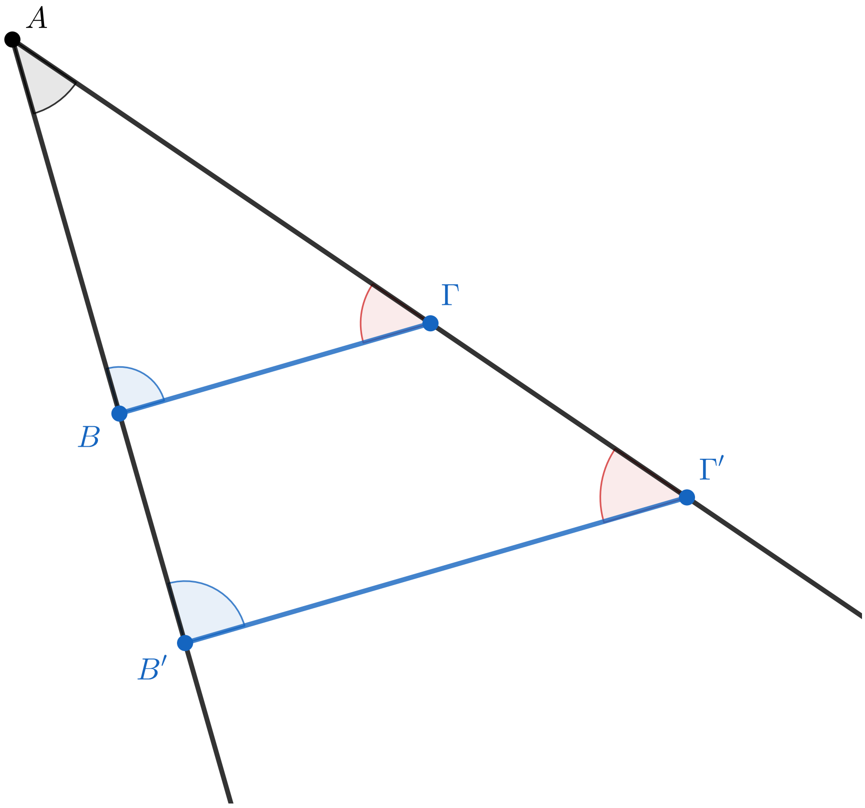
I. Εάν ισχύει $[A - B - B'$ **και** $A - \Gamma' - \Gamma]$ **ή** $[A - B' - B$ **και** $A - \Gamma - \Gamma']$, τότε υποθέτουμε λόγω συμμετρίας και χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι το πρώτο ισχύει. Παρατηρούμε ότι οι $B\Gamma, B'\Gamma'$ τέμνονται σε σημείο $B\Gamma \cap B'\Gamma'$ και από αυτό φέρουμε κάθετη ευθεία l προς την $\overrightarrow{AB}$. Εάν $B - [l \cap \overrightarrow{AB}] - B'$, θα ισχύει ότι $B \in A[l \cap \overrightarrow{AB}]$ και τότε από την **Πρόταση (1.14)**, $\widehat{B'B\Gamma}, \widehat{BB'\Gamma'} < 1\perp \Rightarrow \widehat{AB\Gamma} > 1\perp, \widehat{BB'\Gamma'} < 1\perp$, το οποίο είναι άτοπο. Εάν $B - B' - [l \cap \overrightarrow{AB}]$ υποθέτουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $B, B' \notin A[l \cap \overrightarrow{AB}]$ (ανάλογα γίνεται η περίπτωση $B, B' \in A[l \cap \overrightarrow{AB}]$) και τότε, ξανά από την **Πρόταση (1.14)**, $\widehat{AB\Gamma} > \widehat{AB'\Gamma'}$, το οποίο είναι άτοπο.

II. Εάν ισχύει $A - B - B'$ **και** $A - \Gamma - \Gamma'$, τότε παρατηρούμε ότι το τετράπλευρο $BB'\Gamma'\Gamma$ έχει άθροισμα γωνιών $4\perp$. Επομένως τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{BB'\Gamma}, \overset{\triangle}{B'\Gamma\Gamma'}$ είτε θα έχουν ένα από αυτά άθροισμα γωνιών $< 2\perp$ και το άλλο $> 2\perp$ (άτοπο του **Θεωρήματος: *Saccheri - Legendre***), είτε θα έχουν και τα δύο άθροισμα γωνιών $2\perp$ (άτοπο του **Θεωρήματος: *Τα τρίγωνα της Υ.Γ. είναι ελλειμματικά***).

III. Εάν ακριβώς ένα ζευγάρι από τα B, B' **και** Γ, Γ' έχει σημεία που ταυτίζονται, τότε εφαρμόζεται ανάλογο επειχείρημα με αυτό που παρουσιάστηκε στο **Ι.**, για τα σημεία που δεν ταυτίζονται.

Σε κάθε περίπτωση, καταλήγουμε σε άτοπο και συνεπώς τα $\overset{\triangle}{AB\Gamma}, \overset{\triangle}{\Delta EZ}$ είναι μεταξύ τους σύμφωνα.





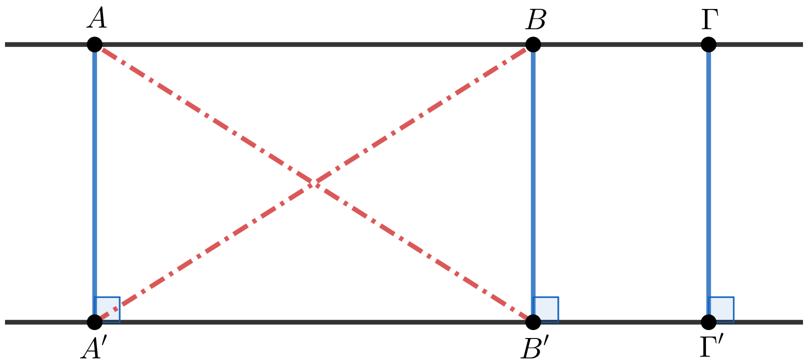
□

2.2 Οι μη τεμνόμενες ευθείες στην Υπερβολική Γεωμετρία

Στο υποκεφάλαιο αυτό θα γίνει μελέτη της *παραλληλίας* ατην Υ.Γ. με στόχο την *κατάταξη*, σε διάφορες κατηγορίες, των μη τεμνόμενων ευθειών.

Πρόταση (2.2): Αν δύο ευθείες l, l' δεν τέμνονται, τότε το πολύ δύο σημεία της l ισαπέχουν από την l'.

Απόδειξη: Υποθέτουμε προς άτοπο ότι υπάρχουν τρία σημεία A, B, Γ στην l τα οποία ισαπέχουν από την l'. Εάν φέρουμε τα αντίστοιχα κάθετα ε.τ. $AA', BB', \Gamma\Gamma'$ προς την l' που την τέμνουν στα A', B', Γ', θα πρέπει να ισχύει ότι $AA' \cong BB' \cong \Gamma\Gamma'$.



Τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{AA'}B, \overset{\triangle}{BB'}A'$ είναι σύμφωνα, λόγω του Π-Γ-Π, επομένως $AB' \cong A'B$, $\widehat{A'AB'} \cong \widehat{A'BB'}$ και $\widehat{AB'A'} \cong \widehat{BA'B'} \Rightarrow \widehat{AB'B} \cong \widehat{AA'B'}$. Παρατηρούμε επίσης ότι τα $\overset{\triangle}{AA'}B, \overset{\triangle}{AB'}B$ είναι σύμφωνα, λόγω του Π-Γ-Π, επομένως $\widehat{B'AB} \cong \widehat{A'BA}$. Αυτά δείχνουν ότι εν τέλει οι γωνίες $\widehat{A'AB}, \widehat{B'BA}$ είναι σύμφωνες μεταξύ τους.

Παρόμοια διαδικασία μπορεί να εφαρμοστεί στα τετράπλευρα $A\Gamma\Gamma'A'$, $B\Gamma\Gamma'B'$, επομένως αληθεύουν επίσης τα $\widehat{A'AB} \cong \widehat{A\Gamma\Gamma'}$ και $\widehat{\Gamma BB'} \cong \widehat{B\Gamma\Gamma'}$.

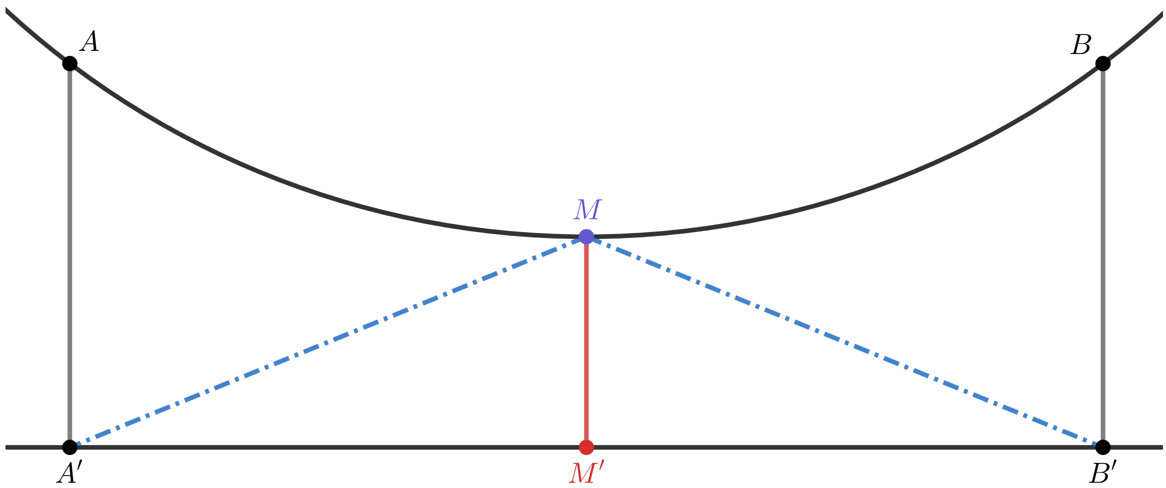
Επειδή $\widehat{BAA'} \cong \widehat{A\Gamma\Gamma'}$ και $\widehat{BAA'} \cong \widehat{ABB'}$ και $\widehat{\Gamma BB'} \cong \widehat{B\Gamma\Gamma'}$, έπεται ότι $\widehat{ABB'} \cong \widehat{\Gamma BB'} = 1\perp$. Άρα, $\widehat{BAA'} \cong \widehat{B\Gamma\Gamma'} = 1\perp$ και το τετράπλευρο $A\Gamma\Gamma'A'$ είναι ορθογώνιο. Αυτό είναι άτοπο στην Υ.Γ.

Επομένως, το πολύ δύο σημεία της l ισαπέχουν από την l'.

□

Πρόταση (2.3): Έστω ότι οι ευθείες l, l' είναι παράλληλες και έστω ακόμη ότι στην l υπάρχουν δύο σημεία A, B τα οποία ισαπέχουν από την l'. Τότε οι l και l' δέχονται ένα κοινό κάθετο ε.τ.

Απόδειξη:



Έστω AA', BB' να είναι τα κάθετα ε.τ. από τα A, B προς την l', που την τέμνουν στα A', B' αντίστοιχα. Επιλέγουμε $M \in l, M' \in l'$ τα μέσα των $AB, A'B'$ και ισχυριζόμαστε ότι το MM' είναι κοινό κάθετο τμήμα στις l, l'.

Ακολουθώντας ισχυρισμούς ανάλογους της απόδειξης της **Πρότασης (2.2)**, μπορούμε να αποδείξουμε ότι $\widehat{A'AM} \cong \widehat{MBB'}$. Επομένως μπορεί επίσης να δειχθεί ότι $A'\overset{\triangle}{A}M \cong B'\overset{\triangle}{B}M$ (από το Π-Γ-Π), και κατ' επέκταση ότι $\widehat{AA'M} \cong \widehat{MB'B}$, $\widehat{AMA'} \cong \widehat{BMB'}$ και $A'M \cong MB'$. Επειδή $\widehat{AA'M} \cong \widehat{MB'B}$, θα πρέπει $\widehat{M'A'M} \cong \widehat{MB'M'}$. Και πάλι, μέσω του κριτηρίου Π-Γ-Π μπορεί να δειχθεί ότι $A'\overset{\triangle}{M'}M \cong B'\overset{\triangle}{M'}M$, επομένως $\widehat{A'MM'} \cong \widehat{B'MM'}$ και $\widehat{A'M'M} \cong \widehat{B'M'M}$

Επειδή $\widehat{AMA'} \cong \widehat{BMB'}$ και $\widehat{A'MM'} \cong \widehat{B'MM'}$, έπεται $\widehat{AMM'} \cong \widehat{BMM'}$. Άρα $\widehat{AMM'} \cong \widehat{BMM'} = 1\perp$ και κατ' επέκταση η MM' τέμνει κάθετα την l.

Επειδή $\widehat{A'M'M} \cong \widehat{B'M'M}$, τότε $\widehat{A'M'M} \cong \widehat{B'M'M} = 1\perp$ και κατ' επέκταση η MM' τέμνει κάθετα την l'.

□

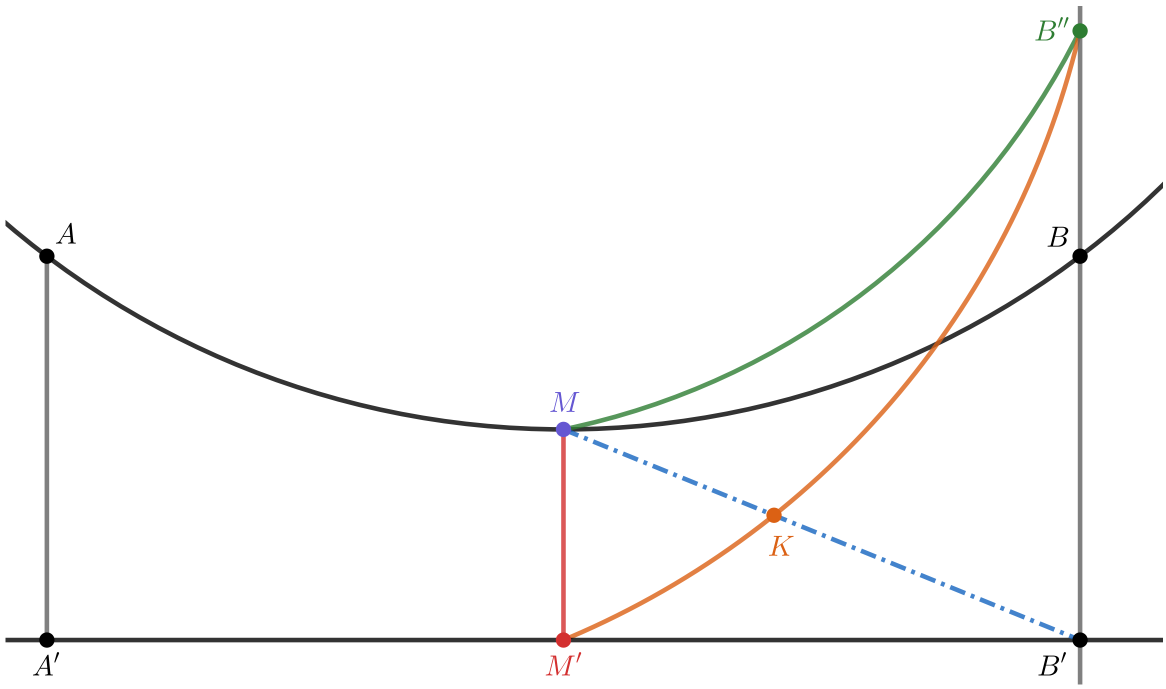
Παρατήρηση (2.4): Το τμήμα MM' στην απόδειξη της **Πρότασης (2.3)** είναι ελάχιστο, με την έννοια για ότι οποιαδήποτε τμήματα AA', BB' όπως στην **Πρόταση (2.3)**, ισχύει $MM' \leqslant AA', BB'$.

Απόδειξη: Αρκεί να δειχθεί ότι $MM' \leqslant BB'$. Η περίπτωση του AA' είναι συμμετρική.

Υποθέτουμε προς άτοπο ότι $MM' > BB'$ και μεταφέρουμε το MM' στην $\overrightarrow{B'B}$ έτσι ώστε να δημιουργηθεί ε.τ. $B''B' \cong MM'$. Φέρουμε τις $B''M'$ και MB', οι οποίες τέμνονται σε ένα σημείο $K = B''M' \cap MB'$ και παρατηρούμε ότι (λόγω του Π-Γ-Π) τα τρίγωνα $M\overset{\triangle}{B'}M'$ και $B''\overset{\triangle}{M'}B'$ είναι σύμφωνα. Επομένως, $MB' \cong M'B''$ και $\widehat{B''M'B'} \cong \widehat{M'B'M}$.

Το τρίγωνο $K\overset{\triangle}{M'}B'$ είναι ισοσκελές, αφού $\widehat{B''M'B'} \cong \widehat{M'B'M}$. Επομένως, $KM' \cong KB'$ και κατ' επέκταση $KB'' \cong KM$. Άρα, το τρίγωνο $M\overset{\triangle}{K}B''$ είναι κι αυτό ισοσκελές, και συνεπώς $\widehat{B'MB''} \cong MB''M'$.

Έτσι λοιπόν, η αμβλεία γωνία $\widehat{M'MB''} = \widehat{M'MB'} + \widehat{B'MB''}$ μεταφέρεται στην $\widehat{MB''B'} = \widehat{M'B''B'} + \widehat{M'B''M}$. Η τελευταία όμως είναι οξεία, από το **Θεώρημα: *Saccheri* - *Legendre***. Αυτό μας οδηγεί σε άτοπο.



□

Παρατήρηση (2.5): Αν δύο ευθείες δέχονται κοινό κάθετο τμήμα, τότε είναι παράλληλες και επιπλέον τα σημεία της μίας ευθείας, συμμετρικά από την κοινή κάθετη, ισαπέχουν από την άλλη ευθεία.

Ορισμός: ***Αποκλίνουσες παράλληλες:***
Εάν δύο ευθείες δέχονται κοινό κάθετο τμήμα, τότε ονομάζονται αποκλίνουσες παράλληλες.

Θεώρημα: *Ύπαρξη γωνίας παραλληλίας:*
Έστω A ένα σημείο και l μία ευθεία έτσι ώστε $A \notin l$. Έστω επίσης AB το κάθετο ε.τ. προς την l, που την τέμνει στο B. Τότε υπάρχουν δύο μοναδικές ημιευθείες $\underrightarrow{A\Sigma}, \underrightarrow{A\Sigma'}$ εκατέρωθεν της $\underleftrightarrow{AB}$ και σε ίσες γωνίες με αυτήν, με την ιδιότητα:

$$\underrightarrow{AY} \cap l \neq \emptyset \Leftrightarrow \underrightarrow{AY} - \{A\} \subset \widehat{\Sigma A \Sigma'}$$

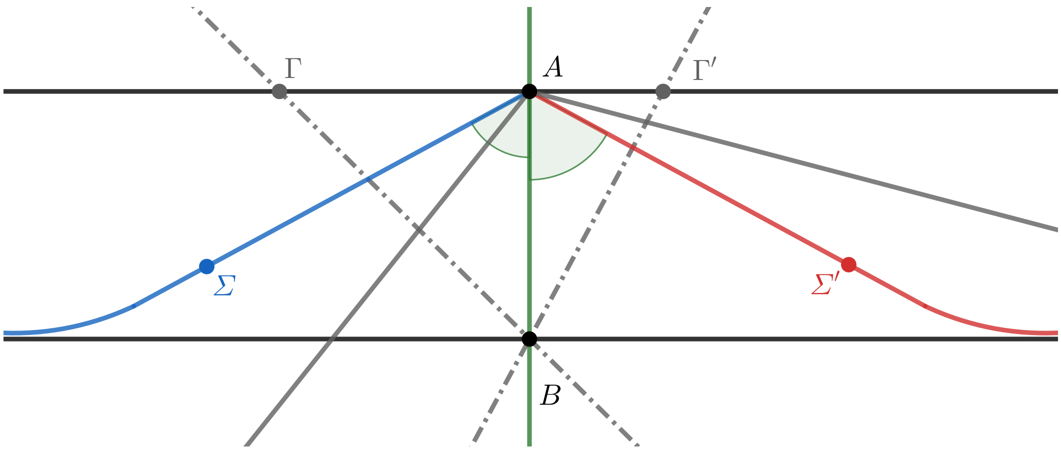
Απόδειξη: Θεωρούμε l' την παράλληλη προς την l ευθεία, η οποία είναι κάθετη στο AB και διέρχεται από το A. Θεωρούμε επίσης τα σημεία $A \neq \Gamma \in l'$, $X, X' \in \underrightarrow{B\Gamma}$ με $X - \Gamma - X'$, $\Gamma - B - X'$ και θα επιχειρήσουμε να κατασκευάσουμε στην $\underleftrightarrow{B\Gamma}$ μια διαμέριση που θα ικανοποιεί το αξίωμα των τομών του Dedekind.

$$O_1 = \left\{P \in \underleftrightarrow{B\Gamma} \mid \underrightarrow{AP} \cap l = \emptyset\right\} \cup \underrightarrow{\Gamma X}$$
$$O_2 = \left\{P \in \underleftrightarrow{B\Gamma} \mid \underrightarrow{AP} \cap l \neq \emptyset\right\} \cup \underrightarrow{BX'}$$

Τα O_1, O_2 ικανοποιούν το αξίωμα των τομών του Dedekind αφού:

- Δεν είναι κενά.
- Εάν $P \in \underrightarrow{\Gamma X}$, τότε $\underrightarrow{AP} \cap l = \emptyset$.
- Εάν $P \in \underrightarrow{BX'}$, τότε $\underrightarrow{AP} \cap l \neq \emptyset$.
- Αν η $\underrightarrow{AP}$ με $P \in B\Gamma - \{B, \Gamma\}$ δεν τέμνει την l, τότε δεν υπάρχει $\underrightarrow{AP'}$ με $\underrightarrow{AP'} \cap l \neq \emptyset$ και $\Gamma - P' - P$, αφού από το **Θεώρημα: *Cross - Bar***, αν το αντίθετο συνέβαινε θα είχαμε $\underrightarrow{AP} \cap l \neq \emptyset$, το οποίο είναι άτοπο.
- Παρομοίως δεν είναι δυνατόν αν η $\underrightarrow{AP}$ με $P \in B\Gamma - \{B, \Gamma\}$ τέμνει την l, να υπάρχει $\underrightarrow{AP'}$ με $\underrightarrow{AP'} \cap l = \emptyset$ και $\Gamma - P - P'$.

Θεωρούμε Δ να είναι το οριακό σημείο που εξασφαλίζει η τομή Dedekind και παρατηρούμε ότι $\underrightarrow{A\Delta} \cap l = \emptyset$. Αν το αντίθετο συνέβαινε, διαλέγοντας Δ' τέτοιο ώστε $B - [\underrightarrow{A\Delta} \cap l] - \Delta'$ θα προέκυπτε ότι $\underrightarrow{A[\underrightarrow{A\Delta'} \cap \underleftrightarrow{B\Gamma}]} \cap l = \Delta' \neq \emptyset$, και κατ' επέκταση $\underrightarrow{A\Delta'} \cap \underleftrightarrow{B\Gamma} \in O_2$. Αυτό είναι άτοπο.



Υπάρχει λοιπόν μία ημιευθεία $\underrightarrow{A\Sigma}$ και μία γωνία $\widehat{\Sigma AB}$, για την οποία ισχύει:

$$P \in \mathcal{H}(\Gamma, \underleftrightarrow{AB}) \textbf{ και } \underrightarrow{AP} \cap l \neq \emptyset \Leftrightarrow P \in \widehat{\Sigma AB}$$

Εάν Γ' είναι σημείο τέτοιο ώστε $\Gamma - A - \Gamma'$, ανάλογη διαδικασία μπορεί να εφαρμοστεί και στο ημιεπίπεδο $\mathcal{H}(\Gamma', \underleftrightarrow{AB})$. Επομένως, μπορεί να βρεθεί ημιευθεία $\underrightarrow{A\Sigma'}$ και μία γωνία $\widehat{BA\Sigma'}$, για την οποία ισχύει:

$$P \in \mathcal{H}(\Gamma', \underleftrightarrow{AB}) \textbf{ και } \underrightarrow{AP} \cap l \neq \emptyset \Leftrightarrow P \in \widehat{BA\Sigma'}$$

Εάν λοιπόν μία ημιευθεία $\underrightarrow{AP}$ τέμνει την l, τότε:

$$P \in \widehat{\Sigma AB} \textbf{ ή } P \in \widehat{BA\Sigma'} \textbf{ ή } P \in AB \Leftrightarrow P \in \widehat{\Sigma AB} \cup \widehat{BA\Sigma'} \cup AB \Leftrightarrow P \in \widehat{\Sigma A\Sigma'}$$

Μένει μόνο να δειχθεί ότι $\widehat{\Sigma AB} \cong \widehat{BA\Sigma'}$. Αυτό θα γίνει με άτοπο, υποθέτοντας χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $\widehat{\Sigma AB} < \widehat{BA\Sigma'}$. Μεταφέρουμε τη γωνία $\widehat{\Sigma AB}$ στην $\widehat{BA\Sigma}$ έτσι ώστε να δημιουργηθεί γωνία $\widehat{BA\Sigma''} \cong \widehat{\Sigma AB}$, και παρατηρούμε ότι η $\underrightarrow{A\Sigma''}$ θα πρέπει να τέμνει την l σε σημείο T. Κατασκευάζοντας τώρα τρίγωνο $\overset{\triangle}{BAT'}$ με $BT \cong BT'$ και $T' - B - T$, παρατηρούμε (λόγω του Π-Γ-Π) ότι $\widehat{T'AB} \cong \widehat{BA\Sigma''} \cong \widehat{\Sigma AB}$ και επομένως η ημιευθεία $\underrightarrow{AT'} = \underrightarrow{A\Sigma}$ τέμνει την l. Αυτό είναι άτοπο και συνεπώς $\widehat{\Sigma AB} \cong \widehat{BA\Sigma'}$.

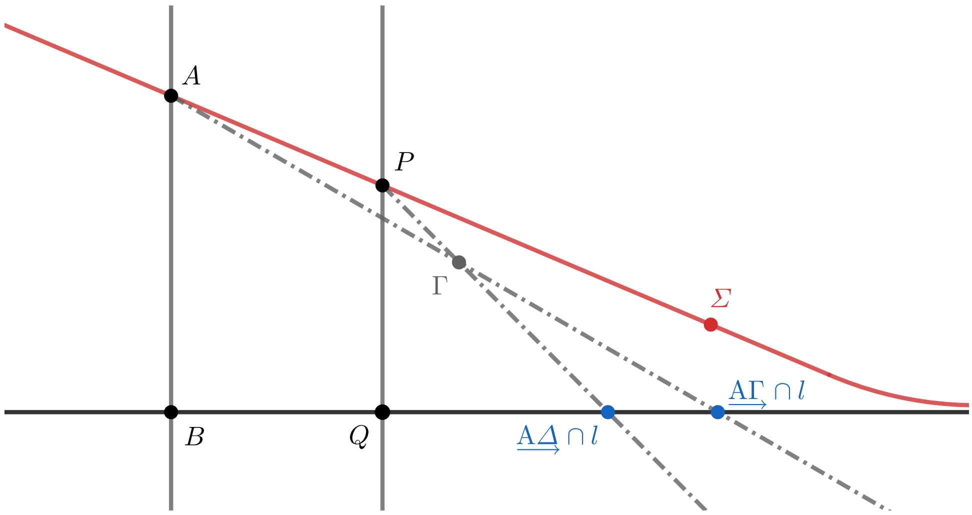
□

Παρατήρηση (2.6): Στην Υ.Γ. οι ημιευθείες $\underrightarrow{A\Sigma}, \underrightarrow{A\Sigma'}$ του **Θεωρήματος: *Ύπαρξη γωνίας παραλληλίας*** δεν περιέχονται στην παράλληλο l', αφού αλλιώς η γεωμετρία θα ήταν Ευκλείδεια. Οι $\underrightarrow{A\Sigma}, \underrightarrow{A\Sigma'}$ ονομάζονται *οριακά* ή *ασυμπτωτικά παράλληλες ημιευθείες* από το A προς την l. Η οξεία γωνία $\widehat{\Sigma A\Sigma'}/2$ λέγεται *γωνία παραλληλίας* στο A για την l, και συμβολίζεται με $\Pi(AB)$, που υποδεικνύει ότι εξαρτάται μόνο από το ε.τ. AB.

Η επόμενη πρόταση εξετάζει τον ρόλο του A στην κατασκευή της $\underrightarrow{A\Sigma}$.

Πρόταση (2.4): Εάν τα $A, l, \underrightarrow{A\Sigma}$ είναι όπως στο **Θεώρημα: *Ύπαρξη γωνίας παραλληλίας*** και για το P ισχύει $A - P - \Sigma$, τότε η $\underrightarrow{P\Sigma}$ είναι η οριακά παράλληλη ημιευθεία από το P προς την l.

Απόδειξη:

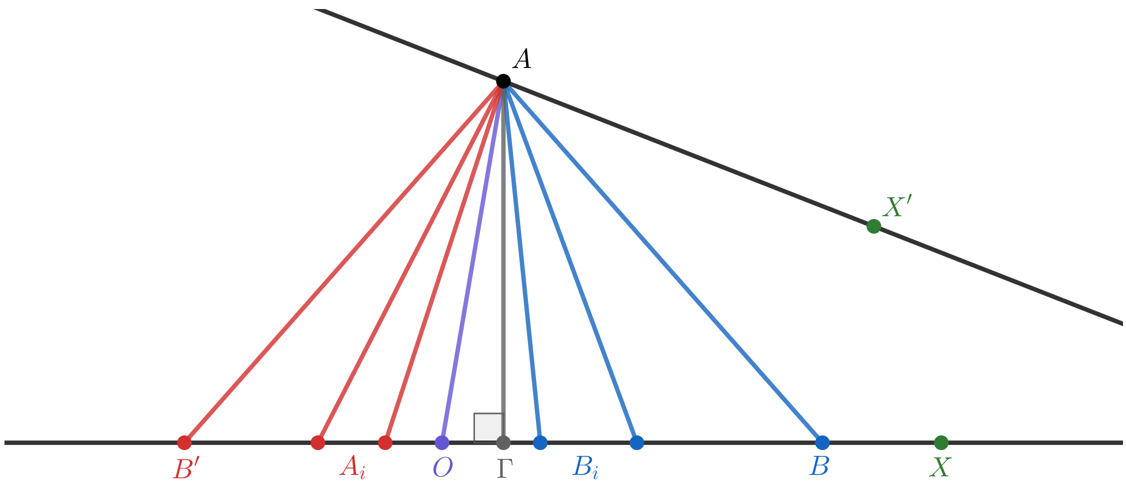


Εάν προς άτοπο η $\underrightarrow{P\Sigma}$ δεν είναι οριακά παράλληλη προς την l, τότε θα υπάρχει σημείο $\Gamma \in \widehat{QP\Sigma}$ με την $\underrightarrow{P\Gamma}$ να είναι οριακά παράλληλη στην l. Θεωρώντας τώρα την ημιευθεία $\underrightarrow{A\Gamma}$, παρατηρούμε ότι αυτή τέμνει την l. Εφαρμόζοντας το αξίωμα του Pasch στο τρίγωνο $\overset{\triangle}{AB[\underrightarrow{A\Gamma} \cap l]}$, η ημιευθεία $\underrightarrow{P\Gamma}$ θα πρέπει να τέμνει την l στο ε.τ. $B[\underrightarrow{A\Gamma} \cap l]$. Αυτό είναι άτοπο.

□

Πρόταση (2.5): Εάν η l' είναι η οριακά παράλληλη ευθεία προς την l που διέρχεται από το A, τότε υπάρχει O στην l τέτοιο ώστε η (οξεία) γωνία που σχηματίζουν τα l', AO να είναι ακριβώς η (οξεία) γωνία που σχηματίζουν τα l, AO.

Απόδειξη:



Φέρουμε κάθετο ε.τ. $A\Gamma$ προς την l τέτοιο ώστε $\Gamma \in l$ και επιλέγουμε σημεία X, X' τέτοια ώστε $X' \in l' \cap \mathcal{H}(X, \overleftrightarrow{A\Gamma})$ και $X \in l$. Επιλέγουμε ως B ένα σημείο στην $\underrightarrow{\Gamma X}$ με $\Gamma - B - X$ και παρατηρούμε ότι η $\widehat{XBA}$ είναι αμβλεία, και άρα μεγαλύτερη της οξείας $\widehat{BAX'}$. Έπειτα διαλέγουμε σημείο B' στην $\mathcal{J}(l) - \underrightarrow{\Gamma X}$, αρκετά μακρυά από το Γ έτσι ώστε (σύμφωνα με την **Παρατήρηση (2.1)**) να συμβαίνει $\widehat{\Gamma B'A} < \widehat{BAX'}$ και κατ' επέκταση $\widehat{\Gamma B'A} < \widehat{B'AX'}$.

Θεωρούμε τα σύνολα:

$$O_1 = \{P \in \underrightarrow{B\Gamma} \mid \varphi(P) = \widehat{APX} < \widehat{PAX'} = \theta(P)\}$$
$$O_2 = \{P \in \underrightarrow{B\Gamma} \mid \varphi(P) = \widehat{APX} \geqslant \widehat{PAX'} = \theta(P)\} \cup \underrightarrow{BX}$$

Τα σύνολα O_1, O_2 ικανοποιούν το αξίωμα των τομών του Dedekind. Κατ' αρχάς, παρατηρούμε ότι δεν είναι κενά ($\emptyset \neq O_1 \supseteq \{B'\}$, $\emptyset \neq O_2 \supseteq \{B\}$).

Για να δείξουμε την άλλη συνθήκη του αξιώματος των τομών, θα δείξουμε κάτι παρεμφερές: Συγκεκριμένα, αν $P_1 \in O_1$ και P_2 είναι τέτοιο ώστε $P_2 - P_1 - B$, τότε εξ υποθέσεως $\varphi(P_1) < \theta(P_1)$. Επειδή $\varphi(P_2) < \varphi(P_1)$ και $\theta(P_2) > \theta(P_1)$, έχουμε ότι $\varphi(P_2) < \varphi(P_1) < \theta(P_1) < \theta(P_2)$. Επομένως $\varphi(P_2) < \theta(P_2)$ και κατ' επέκταση το P_2 κι αυτό ανήκει στο σύνολο O_1. Δείξαμε δηλαδή ότι για κάθε P_2 με $P_2 - P_1 - B$ και $P_1 \in O_1$, αληθεύει $P_2 \in O_1$ - αναλόγως μπορούμε να δείξουμε ότι για κάθε P_2 τέτοιο ώστε $B' - P_1 - P_2$ και $P_1 \in O_2$, αληθεύει $P_2 \in O_2$.

Από το αξίωμα των τομών του Dedekind, υπάρχει ένα σημείο O τέτοιο ώστε:

$$\forall P_1, P_2 \in l: \ P_1 - O - P_2 \Leftrightarrow [P_1 \in O_1, P_2 \in O_2] \ \textbf{ή} \ [P_2 \in O_1, P_1 \in O_2]$$

Διαλέγουμε ακολουθίες $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$, $(B_i)_{i\in\mathbb{N}}$ σημείων των O_1 και O_2 αντίστοιχα, τέτοιες ώστε $B' - A_i - A_{i+1}$, $B - B_i - B_{i+1}$ και $\lim_{i\to\infty} B'A_i = B'O - \{O\}$, $\lim_{i\to\infty} BB_i = BO - \{O\}$ και παρατηρούμε ότι:

$$\varphi(O) = \lim_{i\to\infty} \varphi(A_i) \leqslant \lim_{i\to\infty} \theta(A_i) = \theta(O)$$
$$\varphi(O) = \lim_{i\to\infty} \varphi(B_i) \geqslant \lim_{i\to\infty} \theta(B_i) = \theta(O)$$

Επομένως το O είναι το επιθυμητό σημείο, αφού $\varphi(O) = \theta(O)$.

□

Πρόταση (2.6): Η σχέση της οριακής παραλληλίας είναι συμμετρική.

Απόδειξη: Έστω l μία ευθεία και l' μία οριακή της παράλληλη. Θα δείξουμε ότι η l είναι οριακή παράλληλη της l'.

Θεωρούμε σημεία $A \in l, B \in l'$, σύμφωνα με την **Πρόταση (2.6)**, τέτοια ώστε η (οξεία) γωνία θ του AB με την l να ισούται με την (οξεία) γωνία του AB με την l'. Υποθέτουμε προς άτοπο ότι υπάρχει μία γωνία φ μικρότερη της θ τέτοια ώστε η ημιευθεία $\underrightarrow{AX}$ που σχηματίζει γωνία $\widehat{BAX} \cong \varphi < \theta$ να μην τέμνει την l'. Μεταφέρουμε τη γωνία φ έτσι ώστε να δημιουργηθεί γωνία $\widehat{ABX'} \cong \varphi$ και παρατηρούμε ότι η $\underrightarrow{BX'}$ τέμνει την l. Τέλος, στην l' επιλέγουμε τμήμα $B\Gamma \cong A[\underrightarrow{BX'} \cap l]$ και παρατηρούμε ότι τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{AB}[\underrightarrow{AX'} \cap l]$, $\overset{\triangle}{AB}\Gamma$ είναι σύμφωνα λόγω του Π-Γ-Π. Επομένως η $\underrightarrow{BX}$ τέμνει την l' στο Γ. Αυτό είναι άτοπο.

□

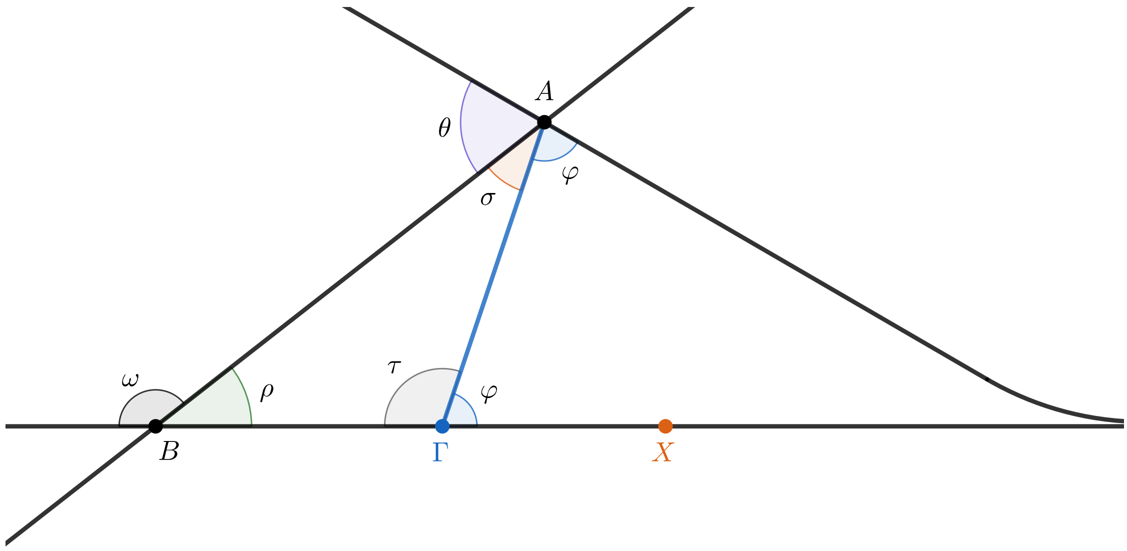
Ορισμός: ***Απλά ασυμπτωτικά τρίγωνα (δίγωνα):***
Δύο οριακά παράλληλες ημιευθείες $\underrightarrow{AX}, \underrightarrow{BX'}$ και το ε.τ. AB με άκρα τις αρχές των ημιευθειών ονομάζεται απλά ασυμπτωτικό τρίγωνο. Θα το συμβολίζουμε με $\overset{\triangle}{A, \underrightarrow{BX'}}$.

Θεώρημα: ***Το θεώρημα της εξωτερικής γωνίας για απλά ασυμπτωτικά τρίγωνα:***
Σε κάθε απλά ασυμπτωτικό τρίγωνο ισχύει το θεώρημα της εξωτερικής γωνίας, για τις δύο του γωνίες.

Απόδειξη:

Βήμα Ι: Κάθε ισοσκελές ασυμπτωτικό τρίγωνο έχει οξείες γωνίες. Πράγματι, έστω l, l' δύο οριακά παράλληλες ευθείες στις ημιευθείες $\underrightarrow{AX'} \subseteq \mathcal{J}(l')$ και $\underrightarrow{\Gamma X} \subseteq \mathcal{J}(l)$, όπου $\Gamma \in l$ είναι σημείο τέτοιο ώστε το $A\Gamma$ να τέμνει κάθετα την l. Εάν ισχύει $\Gamma - B - X$, τότε $\widehat{XBA} \geqslant 1\perp > \widehat{BAX'}$, και συνεπώς το ισοσκελές απλά ασυμπτωτικό τρίγωνο με πλευρές $AB, \underrightarrow{AX'}, \underrightarrow{BX}$ δεν μπορεί να κατασκευαστεί. Αναγκαστικά λοιπόν, κάθε ισοσκελές απλά ασυμπτωτικό τρίγωνο έχει οξείες γωνίες.

Βήμα ΙΙ: Θεωρούμε τυχαίο απλά ασυμπτωτικό τρίγωνο $A, \overset{\triangle}{\underrightarrow{BX}}$ και κατασκευάζουμε ένα ισοσκελές ασυμπτωτικό τρίγωνο $A, \overset{\triangle}{\underrightarrow{\Gamma X}}$, όπως εικονίζεται στο σχήμα.



Επιπλέον θεωρούμε τις γωνίες $\theta, \rho, \sigma, \tau, \varphi, \omega$ όπως στο σχήμα και παρατηρούμε ότι:

- $\tau > \varphi$
- $\rho + \sigma + \tau < 2\perp$
- $\omega + \rho = 2\perp$

Συνδυάζοντας τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει ότι $\omega = 2\perp - \rho > \sigma + \tau > \sigma + \varphi$. Επομένως το θεώρημα της εξωτερικής γωνίας ισχύει για τη γωνία ω και τη σύμφωνη κατακορυφήν της.

Μένει μόνο να δειχθεί ότι $\theta > \rho$. Πράγματι, $2\perp - \theta = \sigma + \varphi < 2\perp - \rho \Rightarrow \theta > \rho$.

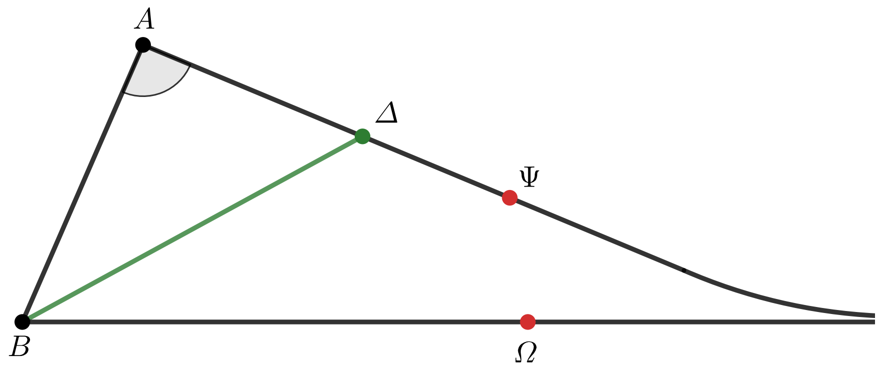
□

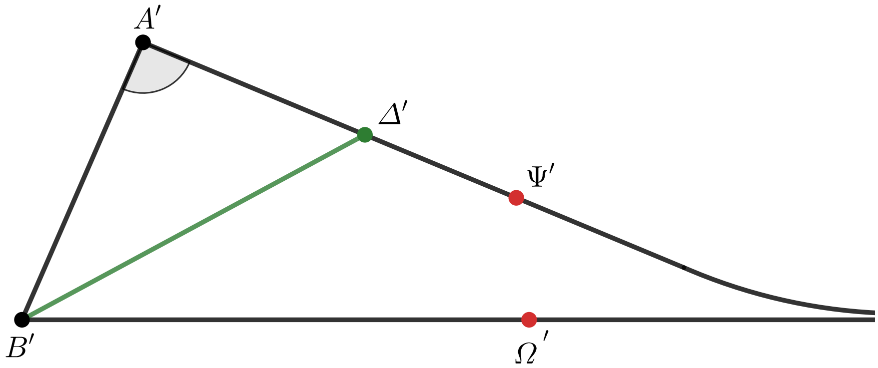
Πρόταση (2.7): *(Συμφωνία των α.α.τριγ.)* Έστω τα απλά ασυμπτωτικά τρίγωνα $A, \overset{\triangle}{\underrightarrow{B\Omega}}, A', \overset{\triangle}{\underrightarrow{B'\Omega'}}$ και $\underrightarrow{A\Psi}, \underrightarrow{A'\Psi'}$ να είναι οι οριακές παράλληλες ημιευθείες που διέρχονται από το A, προς τις $\underrightarrow{B\Omega}$ και $\underrightarrow{B\Omega'}$ αντίστοιχα. Εάν $\widehat{BA\Psi} \cong \widehat{B'A'\Psi'}$, τότε ισχύει η ισοδυναμία $AB \cong A'B' \Leftrightarrow \widehat{AB\Omega} \cong \widehat{A'B'\Omega'}$.

Απόδειξη:

($\Rightarrow$): Εάν ισχύει $AB \cong A'B'$, τότε εάν (προς άτοπο) $\widehat{AB\Omega} > \widehat{A'B'\Omega'}$, η $\underrightarrow{B\Delta}$ που σχηματίζει γωνία $\widehat{AB\Delta} \cong \widehat{A'B'\Omega'}$ είναι εσωτερική της $\widehat{AB\Omega}$ και συναντά την $\underrightarrow{A\Psi}$ στο Δ. Παίρνοντας $\Delta' \in \underrightarrow{A'\Psi'}$ τέτοιο ώστε $A'\Delta' \cong A\Delta$, παρατηρούμε ότι $A\overset{\triangle}{B}\Delta \cong A'\overset{\triangle}{B'}\Delta'$. Από το τελευταίο προκύπτει ότι $\widehat{AB\Delta} \cong \widehat{A'B'\Delta'} \cong \widehat{A'B'\Omega'}$, το οποίο είναι άτοπο, αφού τότε το σημείο $\Delta' = \underrightarrow{B'\Delta'} \cap \underrightarrow{A'\Psi'}$ δεν θα υπήρχε.

($\Leftarrow$): Με ανάλογη διαδικασία μπορούμε να δείξουμε ότι ισχύει και αυτή η κατεύθυνση.





□

Ορισμός: ***Συμφωνία των α.α.τριγ.:***

Υπάρχει μία σχέση συμφωνίας '$\cong_{\text{α.α.τριγ.}}$' μεταξύ δύο α.α.τριγ. $A,\overset{\triangle}{\underrightarrow{B\Omega}}, A',\overset{\triangle}{\underrightarrow{B'\Omega'}}$, η οποία ορίζεται ως εξής: Εάν $\underrightarrow{A\Psi}, \underrightarrow{A'\Psi'}$ να είναι οι οριακά παράλληλες ημιευθείες που διέρχονται από το A, προς τις $\underrightarrow{B\Omega}$ και $\underrightarrow{B\Omega'}$ αντίστοιχα:

$$A,\overset{\triangle}{\underrightarrow{B\Omega}} \cong_{\text{α.α.τριγ.}} A',\overset{\triangle}{\underrightarrow{B'\Omega'}} :\Leftrightarrow \widehat{\Psi AB} \cong \widehat{\Psi' A'B'} \textbf{ και } \widehat{\Omega BA} \cong \widehat{\Omega' A'B'} \textbf{ και } AB \cong A'B'$$

*Ένα κριτήριο συμφωνίας α.α.τριγ. δίνεται στην **Πρόταση (2.7)**.*

Σύμβαση: Θα συμβολίζουμε με '$\cong$' τη σχέση '$\cong_{\text{α.α.τριγ}}$', εφόσον δεν υπάρχει πιθανότητα σύγχυσης.

Λήμμα (2.3): Εάν οι ευθείες l, m, n περιέχουν ημιευθείες $\underrightarrow{LX}, \underrightarrow{MY}, \underrightarrow{NZ}$ αντίστοιχα, τέτοιες ώστε η $\underrightarrow{LX}$ να είναι οριακά παράλληλη προς την $\underrightarrow{MY}$ και η $\underrightarrow{MY}$ να είναι οριακά παράλληλη προς την $\underrightarrow{NZ}$, τότε οι l, m, n δέχονται κοινή τέμνουσα.

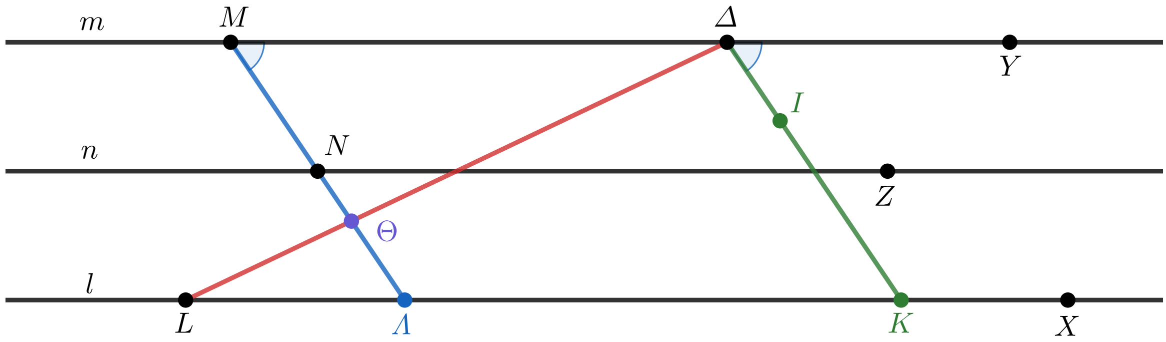
Απόδειξη: Αν το Δ είναι τέτοιο ώστε $M - \Delta - Y$, τότε:

- Αν τα L, N βρίσκονται εκατέρωθεν της m, η ευθεία $\underleftrightarrow{LN}$ τέμνει την m, οπότε οι l, m, n δέχονται κοινή τέμνουσα.

- Αν τα L, N βρίσκονται στο ίδιο μέρος της m, υπάρχουν δύο περιπτώσεις: Είτε τα L, Δ βρίσκονται στο ίδιο μέρος της $\underleftrightarrow{NM}$, είτε σε διαφορετικό.

  Αν η πρώτη περίπτωση ισχύει, η ημιευθεία $\underrightarrow{ML}$ είναι εσωτερική στη γωνία $\widehat{NM\Delta}$, άρα συναντά την $\underrightarrow{NZ}$. Πάλι λοιπόν οι l, m, n δέχονται κοινή τέμνουσα.

  Αν η δεύτερη περίπτωση ισχύει, τότε η $\underleftrightarrow{L\Delta}$ συναντά την $\underleftrightarrow{NM}$ σε ένα σημείο Θ. Στο τρίγωνο $\overset{\triangle}{M\Theta\Delta}$ το θεώρημα της εξωτερικής γωνίας δίνει $\widehat{\Theta\Delta Y} > \widehat{\Theta M\Delta}$, άρα υπάρχει ημιευθεία $\underrightarrow{\Delta I}$, εσωτερική της $\widehat{\Theta\Delta Y}$, τέτοια ώστε $\widehat{\Theta M\Delta} \cong \widehat{I\Delta Y}$. Όμως τότε οι $\underleftrightarrow{MN}, \underleftrightarrow{\Delta I}$ δεν τέμνονται, ενώ η $\underrightarrow{\Delta I}$ συναντά την l στο σημείο K. Σχηματίζεται λοιπόν ένα τρίγωνο $L\overset{\triangle}{\Delta}K$. Η $\underrightarrow{MN}$ συναντά την πλευρά $L\Delta$ του $L\overset{\triangle}{\Delta}K$ και δεν συναντά στη ΔK, οπότε σίγουρα συναντά την LK, έστω στο σημείο Λ. Η $\underleftrightarrow{M\Lambda}$ είναι μία κοινή τέμνουσα των l, m, n.



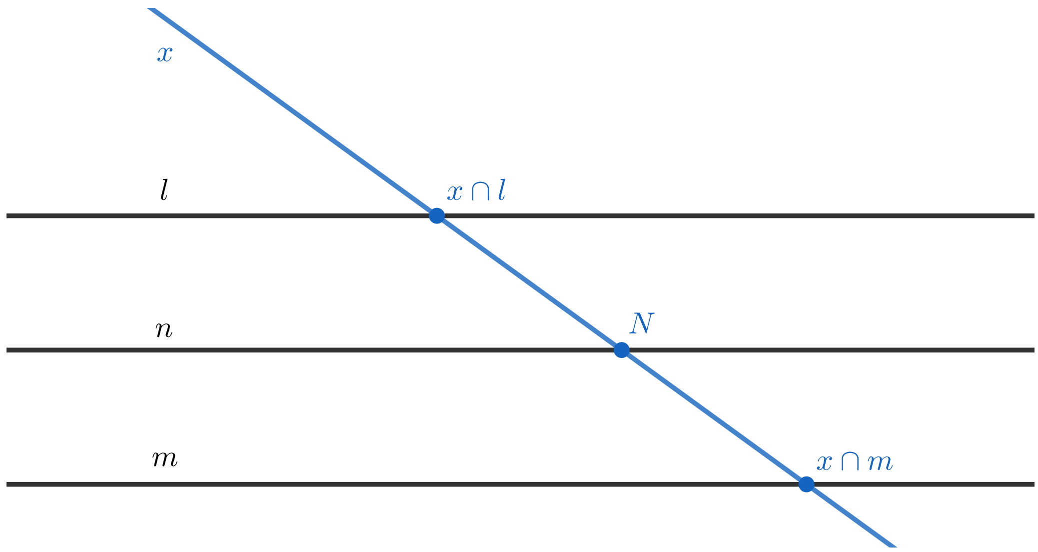
□

Παρατήρηση (2.7): Απο το **Λήμμα (2.3)** προκύπτει ότι εάν l, m, n είναι ευθείες τέτοιες ώστε η l να είναι οριακά παράλληλη προς την m και η m προς την n, τότε υπάρχει μία ευθεία από τις l, m, n, τέτοια ώστε οι σημειοσειρές των άλλων δύο να περιέχονται σε διαφορετικά ημιεπίπεδα που ορίζει η πρώτη.

Πρόταση (2.8): Η σχέση της οριακής παραλληλίας είναι μεταβατική.

Απόδειξη: Έστω ότι l, m, n είναι ευθείες τέτοιες ώστε η l να είναι οριακά παράλληλη προς την m και η m προς την n. Σύμφωνα με την **Παρατήρηση (2.7)**, μπορούμε (ενδεικτικά) να θεωρήσουμε ότι η n βρίσκεται 'μεταξύ' των l, m (δηλαδή: n μεταξύ των $l, m :\Leftrightarrow \forall N \in n,\ \mathcal{J}(n) \subset \mathcal{H}(N, l) \cap \mathcal{H}(N, m)$).

Διαλέγουμε σημείο $N \in n$ και φέρουμε μια οποιαδήποτε ευθεία $x \neq n$. Επειδή οι n, m είναι οριακά παράλληλες, η x τέμνει την m στο $x \cap m$. Επειδή οι l, m είναι οριακά παράλληλες, η x τέμνει την l στο $x \cap l$. Αυτό δείχνει ότι οι l, n είναι οριακά παράλληλες.



□

Θεώρημα: *Οριακά παράλληλες και αποκλίνουσες παράλληλες ευθείες*
Αν δύο μη τεμνόμενες ευθείες δεν περιέχουν κανένα ζεύγος οριακά παράλληλων ημιευθειών, τότε δέχονται κοινό κάθετο τμήμα, οπότε είναι αποκλίνουσες παράλληλες.

Απόδειξη (Κατασκευαστική - Hilbert):

Βήμα I: Έστω $\varepsilon, \varepsilon'$ να είναι δύο ευθείες που ικανοποιούν τις υποθέσεις του θεωρήματος. Για σημεία $A, B \in \varepsilon$ φέρουμε τα κάθετα τμήματα AA', BB' προς την ε', που τέμνουν την τελευταία στα A', B'.

Αν $AA' \cong BB'$, τότε το ε.τ. που ενώνει τα μέσα K, K' των $AB, A'B'$ είναι το μοναδικό κοινό κάθετο τμήμα των $\varepsilon, \varepsilon'$, σύμφωνα με την **Πρόταση (2.3)**. Επομένως, οι $\varepsilon, \varepsilon'$ είναι αποκλίνουσες παράλληλες.

Αν $AA' \ncong BB'$, τότε υποθέτουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας $AA' > BB'$, οπότε υπάρχει σημείο $E \in AA'$ τέτοιο ώστε $A'E \cong BB'$. Θεωρούμε σημείο X τέτοιο ώστε $A - B - X$ και μεταφέρουμε τη γωνία $\widehat{XBB'}$ στο E, έτσι ώστε να δημιουργηθεί γωνία $\widehat{YEA'} \cong \widehat{XBB'}$. Στο **Βήμα II** θα δείξουμε ότι υπάρχει σημείο Γ τέτοιο ώστε

$\Gamma = \underrightarrow{EY} \cap \underrightarrow{AX}$. Εάν το σημείο Δ ληφθεί έτσι ώστε $B\Delta \cong E\Gamma$, τότε φέροντας την κάθετο $\Gamma\Gamma'$ από το Γ προς την ε' με $\Gamma' \in \varepsilon'$, παρατηρούμε ότι $\Gamma\Gamma' \cong \Delta\Delta'$. Άρα, υπάρχει σύμφωνα με την **Πρόταση (2.3)** μοναδικό κοινό κάθετο τμήμα των $\varepsilon, \varepsilon'$, και κατ' επέκταση αυτές είναι αποκλίνουσες παράλληλες.

Βήμα ΙΙ: Απόδειξη της ύπαρξης του Γ: Φέρουμε τις εξής οριακά παράλληλες ημιευθείες:

$$\underrightarrow{B'\Sigma} \text{ οριακά παράλληλη προς την } \underrightarrow{BX}$$
$$\underrightarrow{A'P} \text{ οριακά παράλληλη προς την } \underrightarrow{AX}$$
$$\underrightarrow{A'T} \text{ οριακά παράλληλη προς την } \underrightarrow{EY}$$

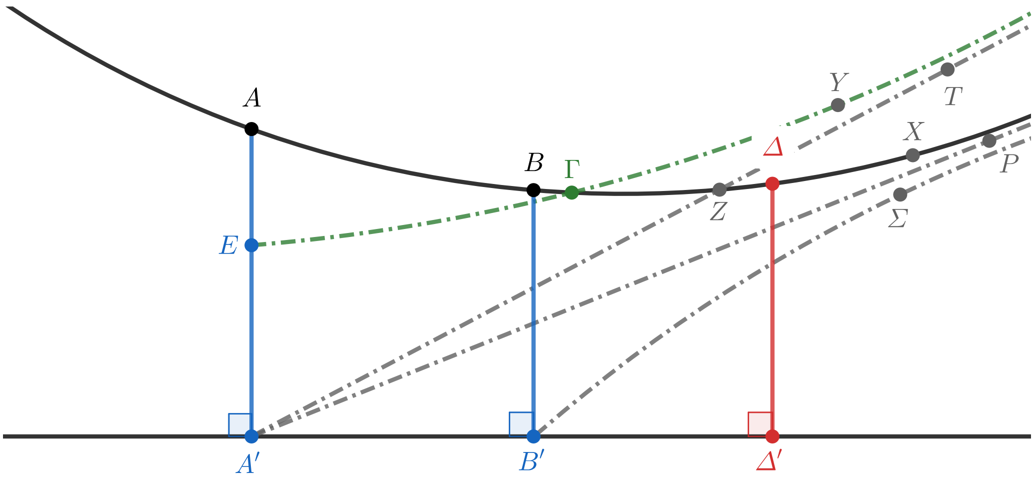
Εάν αποδείξουμε ότι η $\underrightarrow{A'T}$ είναι εσωτερική ημιευθεία της $\widehat{AA'P}$, τότε από την οριακή παραλληλία των $\underrightarrow{AX}, \underrightarrow{A'P}$, η $\underrightarrow{A'T}$ θα συναντούσε την $\underrightarrow{AX}$ σε ένα σημείο Z. Τότε θα εφαρμόσουμε το αξίωμα του Pasch στο τρίγωνο $\overset{\triangle}{AA'Z}$ και θα προκύψει ότι η $\underrightarrow{EY}$ συναντά στην πλευρά AZ. Αρκεί λοιπόν να δειχθεί ότι $\widehat{AA'T} < \widehat{AA'P}$.

i. Συγκρίνοντας τα α.α.τριγ. $\overset{\triangle}{A', \underrightarrow{EY}}, \overset{\triangle}{B', \underrightarrow{BX}}$, παρατηρούμε ότι $\widehat{EA'T} \cong \widehat{BB'\Sigma}$.

ii. Από τη μεταβατικότητα της οριακής παραλληλίας, σχηματίζεται το α.α.τριγ. $\overset{\triangle}{A', \underrightarrow{B'\Sigma}}$. Από το αντίστοιχο **Θεώρημα:** ***Το θεώρημα της εξωτερικής γωνίας για τα απλά ασυμπτωτικά τρίγωνα*** έχουμε ότι $\widehat{\Sigma B'X'} > \widehat{PA'X'}$, όπου X' είναι σημείο τέτοιο ώστε $X' - A' - B'$.

iii. Τέλος υπολογίζουμε ότι $\widehat{BB'\Sigma} = 1\perp - \widehat{\Sigma B'X'} < 1\perp - \widehat{PA'X'} = \widehat{AA'P}$.

Τα i., ii. και iii. δίνουν ότι $\widehat{AA'T} < \widehat{AA'P}$, όπως ακριβώς επιθυμούσαμε. Δηλαδή η ημιευθεία $\underrightarrow{A'T}$ είναι πράγματι εσωτερική της $\widehat{AA'P}$.



□

2.3 Η γωνία παραλληλίας

Παρατήρηση (2.8): Η γωνία παραλληλίας είναι φθίνουσα με την εξής έννοια: για σημεία $A-B-\Gamma$ ισχύει $\Pi(AB) > \Pi(A\Gamma)$.

Απόδειξη: Είναι άμεση εφαρμογή του **Θεωρήματος: *Θεώρημα της εξωτερικής γωνίας στα απλά ασυμπτωτικά τρίγωνα***.

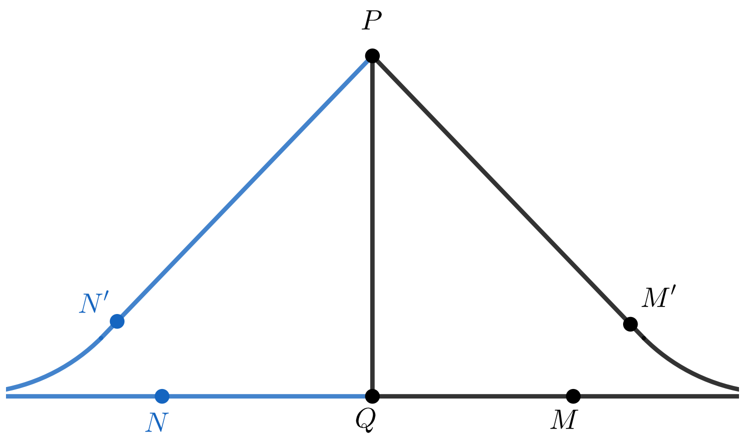
□

Ό,τι ακολουθεί γίνεται με στόχο να αποδειχθεί το αμφιμονοσήμαντο της αντιστοιχίας που δημιουργείται μεταξύ κλάσεων συμφωνίας οξειών γωνιών και των κλάσεων συμφωνίας ε.τ., μέσω της γωνίας παραλληλίας. Δηλαδή η αντιστοιχία:

$$\widehat{\Pi} : \{AB \mid A, B \in \mathcal{P},\ A \neq B\}\Big/_{\cong} \to \{\emptyset < \widehat{AB\Gamma} < 2\bot \mid A, B, \Gamma \in \mathcal{P},\ A \neq B \neq \Gamma\}\Big/_{\cong}$$

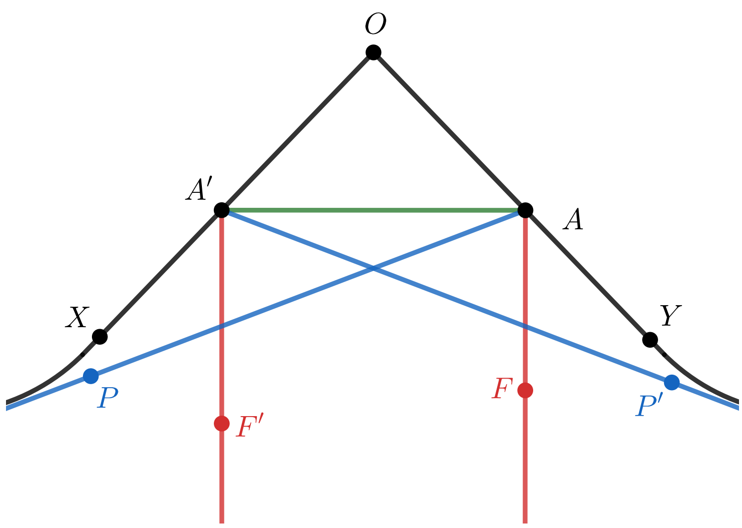
που ορίζεται ως $\widehat{\Pi}\left(\left[{AB}/_{\cong}\right]\right) = \left[{\Pi(AB)}/_{\cong}\right]$ είναι καλά ορισμένη και αμφιμονοσήμαντη.

Πρόβλημα (1): Να κατασκευαστεί ένα ορθογώνιο α.α.τριγ., εάν η οξεία του γωνία είναι γνωστή.



Ανάλυση: Έστω ότι τέτοιο τρίγωνο έχει κατασκευαστεί και είναι το $P,\underrightarrow{\overset{\triangle}{Q}M}$. Φέροντας την άλλη οριακή παράλληλη από το P προς την $\underrightarrow{NQ}$, παρατηρούμε ότι η $\underrightarrow{MN}$ είναι κοινή οριακά παράλληλη προς τις $\underrightarrow{PN'}, \underrightarrow{PM'}$. Επιπλέον, $\widehat{N'PM'} = 2\Pi(PQ)$. Αναγώμαστε λοιπόν στο ακόλουθο πρόβλημα:

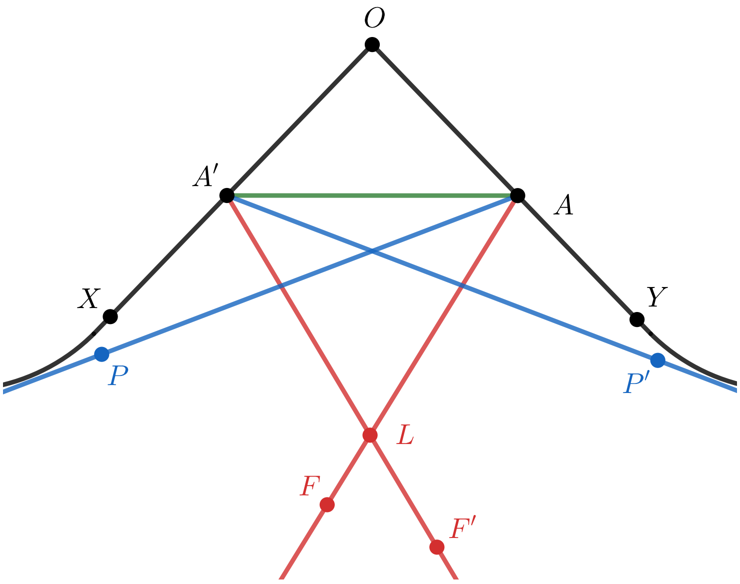
Πρόβλημα (2): Να κατασκευαστεί μία κοινή οριακά παράλληλη ευθεία προς δύο ημιευθείες με κοινή αρχή.



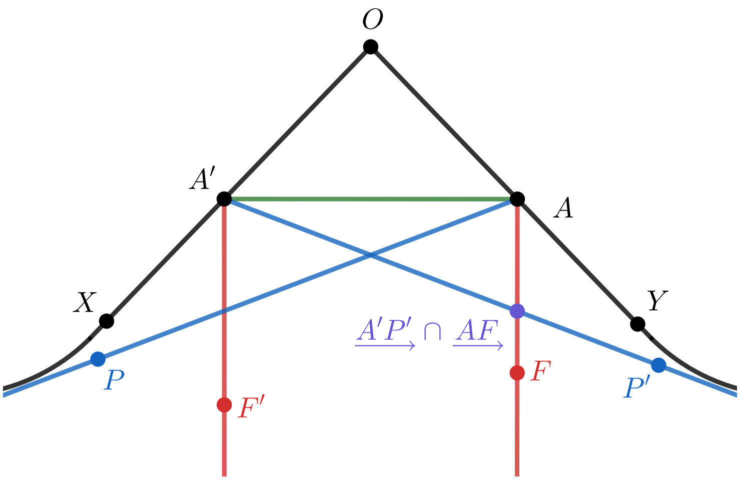
Ανάλυση:

Βήμα Ι: Εάν $\widehat{XOY}$ είναι η γωνία των ημιευθειών, παίρνουμε A στην $\underrightarrow{OY}$ και A' στην $\underrightarrow{OX}$ τέτοια ώστε $OA \cong OA'$. Φέρουμε τις οριακά παράλληλες ημιευθείες $\underrightarrow{AP}, \underrightarrow{A'P'}$ προς τις $\underrightarrow{OX}$ και $\underrightarrow{OY}$ αντίστοιχα, και διχοτομούμε τις προκύπτουσες $\widehat{XA'A}, \widehat{A'AY}$ με τις $\underrightarrow{A'F'}, \underrightarrow{AF}$ αντίστοιχα. Από τη σύμφωνία των α.α.τριγ. $A,\underrightarrow{\overset{\triangle}{O}X}, A',\underrightarrow{\overset{\triangle}{O}Y}$ έχουμε ότι $\widehat{OAP} \cong \widehat{OA'P'}$ και κατ' επέκταση $\widehat{XA'P'} \cong \widehat{PAY}$ και $\widehat{XA'F'} \cong \widehat{F'A'P'} \cong \widehat{YAF} \cong \widehat{FAP}$. Επιπλέον, επειδή το $\overset{\triangle}{OAA'}$ είναι ισοσκελές, προκύπτει ότι $\widehat{AA'O} \cong \widehat{A'AO}$ και άρα $\widehat{P'A'A} \cong \widehat{PAA'}$.

Βήμα II: Οι ημιευθείες $\underrightarrow{AF}, \underrightarrow{A'F'}$ δεν είναι δυνατόν να τέμνονται. Έστω L το κοινό τους σημείο και $\underrightarrow{LQ}$ η οριακά παράλληλη από το L προς την $\underrightarrow{AY}$. Παρατηρούμε ότι $\widehat{LAA'} \cong \widehat{FAP} + \widehat{PAA'} \cong \widehat{F'A'P'} + \widehat{P'A'A} \cong \widehat{LA'A}$ και επομένως (από το ισοσκελές προκύπτον τρίγωνο) $LA \cong LA'$. Από τη συμφωνία των α.α.τριγ. $\overset{\triangle}{A, \underrightarrow{LQ}}$ και $\overset{\triangle}{A', \underrightarrow{LQ}}$ προκύπτει ότι $\widehat{QLA} \cong \widehat{QLA'}$. Αυτό είναι άτοπο, αφού $A \neq A'$.

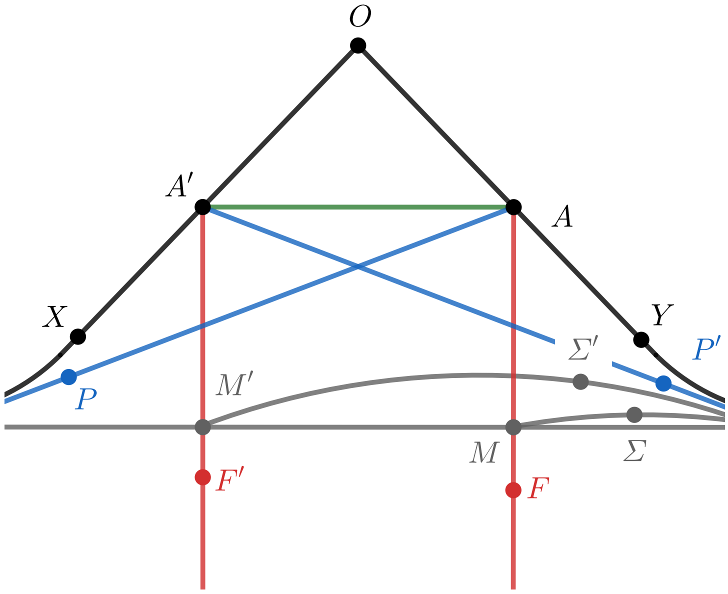


Βήμα III: Οι $\underrightarrow{AF}, \underrightarrow{AF'}$ δεν μπορεί να είναι οριακά παράλληλες. Έστω προς άτοπο ότι είναι οριακά παράλληλες. Τότε δημιουργούνται σύμφωνα α.α.τριγ. $\overset{\triangle}{\overbrace{A, \underrightarrow{[\underrightarrow{AF} \cap \underrightarrow{A'P'}]P'}}}$ και $\overset{\triangle}{\overbrace{A', \underrightarrow{[\underrightarrow{AF} \cap \underrightarrow{A'P'}]F}}}$.[1] Επομένως, $A'[\underrightarrow{AF} \cap \underrightarrow{A'P'}] \cong A[\underrightarrow{AF} \cap \underrightarrow{A'P'}]$, το οποίο είναι άτοπο αφού τότε $\widehat{P'A'A} \cong \widehat{FAP} + \widehat{PAA'}$ και $\widehat{FAP} \neq \emptyset$.



Βήμα IV: Οι $\underrightarrow{AF}, \underrightarrow{A'F'}$ είναι αποκλίνουσες παράλληλες και συνεπώς δέχονται κοινό κάθετο τμήμα MM'. Η ευθεία που περιέχει το ε.τ. αυτό είναι η ζητούμενη κοινή οριακά παράλληλη ευθεία. Πράγματι, εάν προς άτοπο δεν ήταν, θα μπορούσαμε να φέρουμε τις $\underrightarrow{M\Sigma}, \underrightarrow{M'\Sigma'}$, οι οποίες είναι οριακά παράλληλες προς την $\underrightarrow{OY}$. Από τη συμφωνία των α.α.τριγ. $\overset{\triangle}{A, \underrightarrow{M\Sigma}}, \overset{\triangle}{A', \underrightarrow{M'\Sigma'}}$ προκύπτει ότι $\widehat{AM\Sigma} \cong \widehat{A'M'\Sigma'}$ και κατ' επέκταση $\widehat{\Sigma'M'M} \cong \widehat{\Sigma MW}$, όπου $W: M' - M - W$. Αυτό είναι άτοπο του **Θεωρήματος:** ***Το θεώρημα της εξωτερικής γωνίας για τα απλά ασυμπτωτικά τρίγωνα***, στο α.α.τριγ. $\overset{\triangle}{M', \underrightarrow{M\Sigma}}$.

[1] Τα P', F είναι δυνατόν να παρθούν έτσι ώστε $A' - [\underrightarrow{AF} \cap \underrightarrow{A'P'}] - P'$ και $A - [\underrightarrow{AF} \cap \underrightarrow{A'P'}] - F$.



$\square$

Παρατήρηση (2.9): Παραφράζοντας το **Πρόβλημα (2)**, μπορούμε να πούμε ότι στην Υ.Γ. υπάρχουν ευθείες που βρίσκονται στο εσωτερικό μιας γωνίας, χωρίς να συναντούν καμμία από τις πλευρές τις γωνίας. Ειδικότερα:

$$\forall \underset{\longrightarrow}{OX}, \underset{\longrightarrow}{OY},\ \exists l \in \mathcal{L}:\ \mathcal{J}(l) \subset \widehat{XOY}$$

> **Ορισμός: *Διπλά ασυμπτωτικά τρίγωνα:***
> *Δύο ημιευθείες $\underset{\longrightarrow}{OX}, \underset{\longrightarrow}{OY}$ με κοινή αρχή, και η κοινή τους οριακή παράλληλη l θα αποτελούν ένα διπλά ασυμπτωτικό τρίγωνο. Το διπλά ασυμπτωτικό τρίγωνο αυτό θα το συμβολίζουμε με $\overset{\triangle}{O}, l$.*

Πρόταση (2.9): *(Συμφωνία των δ.α.τριγ.)* Δύο δ.α.τριγ. θα είναι σύμφωνα εάν έχουν τη μοναδική τους γωνία σύμφωνη.

Απόδειξη: Κάθε δ.α.τριγ. οδηγεί σε ένα μοναδικό ορθογώνιο α.α.τριγ., όπου η οξεία του γωνία είναι το μισό της γωνίας του αρχικού τριγώνου. Επομένως απόδειξη της πρότασης είναι συνέπεια της **Πρότασης (2.7)**. $\square$

Πλέον είναι δυνατόν να δείξουμε το 'καλά ορισμένο' και το 'αμφιμονοσήμαντο' της απεικόνισης $\widehat{\Pi}$.

Για το καλά ορισμένο, ουσιαστικά χρειάζεται να δείξουμε ότι η συγκεκριμένη επιλογή αντιπροσώπων στο όρισμα δεν μεταβάλλει την εικόνα. Θεωρούμε ένα δ.α.τριγ. $\overset{\triangle}{A}, l$ με γωνία θ, κι ένα (οποιοδήποτε) σύμφωνό του $\overset{\triangle}{\Gamma}, m$. Φέρνοντας τα κάθετα ε.τ. AB, $\Gamma\Delta$ προς τις l και m αντίστοιχα, από την **Πρόταση (2.7)** προκύπτει ότι $AB \cong \Gamma\Delta$. Δείξαμε ότι οποιοδήποτε τμήμα $\Gamma\Delta$ έχει γωνία παραλληλίας θ είναι σύμφωνο με το AB, οπότε έχουμε το καλά ορισμένο της $\widehat{\Pi}$.

Παρατηρήστε ότι τα προηγούμενα επιχειρήματα ουσιαστικά αποδεικνύουν και το $1-1$. Το επί είναι άμεσο, από την **Παρατήρηση (2.9)**.

Πρόταση (2.10): Επί μίας ημιευθείας $\underset{\longrightarrow}{AP}$, για κάθε γωνία $\varphi \neq \emptyset$, μπορεί να βρεθεί σημείο B τέτοιο ώστε $\Pi(AB) < \varphi$. Ειδικότερα ισχύει ότι:

$$\lim_{\mathcal{R}(AB)\to\infty} \mathcal{A}\big(\Pi(AB)\big) = 0$$

Απόδειξη: Έστω ότι υπάρχει $\varepsilon > 0$ με την ιδιότητα $0 < \varepsilon < \mathcal{A}\big(\Pi(AB)\big)$ για κάθε ε.τ. AB. Θεωρούμε την ορθή γωνία $\widehat{XOY}$ και στην πλευρά $\underset{\longrightarrow}{OY}$ τα σημεία $A_1, A_2, A_3, \cdots$ τέτοια ώστε $OA_1 \cong A_1A_2$, $A_iA_{i+1} \cong A_{i+1}A_{i+2}$. Επιπλέον θεωρούμε ημιεθείες με ένα τουλάχιστον σημείο στην $\widehat{XOY}$, που σχηματίζουν με την $\underset{\longrightarrow}{OY}$ γωνία με τιμή ε. Αφού $\forall AB,\ 0 < \varepsilon < \mathcal{A}\big(\Pi(AB)\big)$, οι ημιευθείες συνατούν την $\underset{\longrightarrow}{OX}$ στα $B_1, B_2, B_3, \cdots$ με $O - B_i - B_{i+1}$. Από τα σημεία $O, A_1, A_2, \cdots$ φέρουμε τα κάθετα ε.τ. $O\Gamma_1, A_1\Gamma_2, A_2\Gamma_3, \cdots$ προς τα αντίστοιχα ε.τ. $A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, \cdots$, σχηματίζοντας έτσι τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{OA_1\Gamma_1}$, $\overset{\triangle}{A_iA_{i+1}\Gamma_{i+1}}$. Τα τρίγωνα αυτά είναι μεταξύ τους σύμφωνα. Λόγω τις συμφωνίας αυτής, τα ελλείμματά τους είναι αναγκαστικά σύμφωνα. Θεωρούμε τώρα ακολουθίες $(d_i)_{i\in\mathbb{N}}$, $(\delta_i)_{i\in\mathbb{N}}$ με τον εξής τρόπο:

$$d_i = \mathcal{A}\left(D\left(\overset{\triangle}{OA_iB_i}\right)\right)$$

και

$$\delta_i = \mathcal{A}\left(D\left(\overset{\triangle}{A_iB_iB_{i+1}}\right)\right) + \mathcal{A}\left(D\left(\overset{\triangle}{A_i\Gamma_iB_{i+1}}\right)\right)$$

Παρατηρούμε ότι:

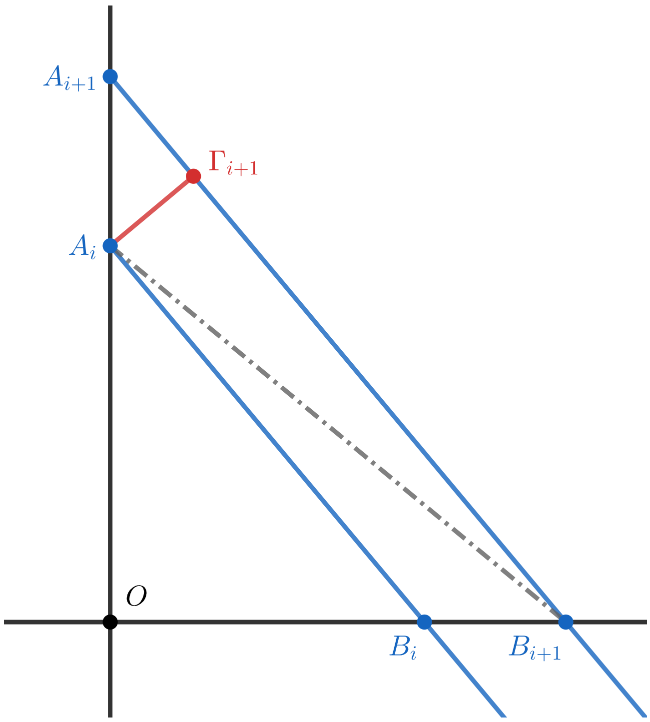
$$d_{i+1} = d_i + \mathcal{A}\left(D\left(\overset{\triangle}{A_i\Gamma_{i+1}A_{i+1}}\right)\right) + \delta_i > \mathcal{A}\left(D\left(\overset{\triangle}{OA_1\Gamma_1}\right)\right) + d_i$$

Οπότε επαγωγικά μπορεί να προκύψει ο τύπος:

$$d_{i+1} > d_1 + i\cdot\overbrace{\mathcal{A}\left(D\left(\overset{\triangle}{OA_1\Gamma_1}\right)\right)}^{d_0} \Rightarrow d_{i+1} > d_1 + i\cdot d_0$$

Επειδή $d_0, \pi > 0$, σύμφωνα με το αξίωμα Αρχιμήδη - Ευδόξου για τους θετικούς πραγματικούς αριθμούς, μπορεί να βρεθεί φυσικός n τέτοιος ώστε $n\cdot d_0 > \pi$. Εφαρμόζοντας το αποτέλεσμα αυτό στις προηγούμενες σχέσεις, έπεται ότι $d_{n+1} - d_1 > n\cdot d_0 > \pi \Rightarrow d_{n+1} > \pi$. Αυτό αντιβαίνει στις ιδιότητες του ελλείμματος για τα τρίγωνα, αφού $\forall \overset{\triangle}{PQZ}$, $D\left(\overset{\triangle}{PQZ}\right) < 2\perp \Rightarrow \mathcal{A}\left(D\left(\overset{\triangle}{PQZ}\right)\right) < \pi$. Αυτό, σε συνδυασμό με τη μονοτονία της Π, δείχνει το ζητούμενο:

$$\lim_{\mathcal{R}(AB)\to\infty} \mathcal{A}\big(\Pi(AB)\big) = 0$$



$\square$

Ορισμός: ***Τριπλά ασυμπτωτικά τρίγωνα:***
Τρεις ευθείες l, m, n που ανά δύο περιέχουν ζεύγη οριακά παράλληλων ημιευθειών αποτελούν ένα τριπλά ασυμπτωτικό τρίγωνο. Το τρίγωνο αυτό θα το συμβολίζουμε με $\overset{\triangle}{l,m,n}$.

Πρόταση (2.11): *(Συμφωνία των τ.α.τριγ.)* Κάθε τριπλά ασυμτωτικό τρίγωνο οδηγεί σε ένα ορθογώνιο διπλά ασυμπτωτικό τρίγωνο. Με αυτήν την έννοια, κάθε δύο τ.α.τριγ. είναι σύμφωνα.

Απόδειξη: Έστω $\overset{\triangle}{l,m,n}$ να είναι ένα τ.α.τριγ. Διαλέγουμε σημείο $A \in m$ και φέρουμε οριακά παράλληλη ημιευθεία $\overrightarrow{AQ_A}$ προς την l, έτσι ώστε να δημιουργηθεί δ.α.τριγ. $\overset{\triangle}{A}, l$. Υποθέτουμε ότι η γωνία των m, $\overrightarrow{AQ_A}$ που περιέχει την n είναι αμβλεία (οι άλλες περιπτώσεις, όπως θα διαπιστώσετε, είναι απλούστερες). Παρατηρούμε ότι το δ.α.τριγ. $\overset{\triangle}{A}, n$ είναι οξυγώνιο, οπότε παίρνοντας αντίστοιχο σύμφωνο δ.α.τριγ. $\overset{\triangle}{A'}, l$ (με $A' \in m$ και την $\overrightarrow{A'Q_{A'}}$ οριακά παράλληλη προς την l) παρατηρούμε ότι η γωνία των m, $\overrightarrow{A'Q_{A'}}$ που περιέχει την l είναι οξεία.

Θεωρούμε επίσης σημεία $\Sigma, \Sigma' \in m$ τέτοια ώστε $A - A' - \Sigma'$, $\Sigma - A - A'$, καθώς επίσης και τη συνάρτηση $\forall X \in AA' : \ \theta(X) = \widehat{Q_X X \Sigma'}$. Παρατηρούμε ότι τα σύνολα:

$$O_1 = \{X \in AA' \mid \theta(X) \leqslant \perp\} \cup \overrightarrow{A\Sigma}$$
$$O_2 = \{X \in AA' \mid \theta(X) > \perp\} \cup \overrightarrow{A'\Sigma'}$$

ικανοποιούν το αξίωμα τομών του Dedekind και συνεπώς υπάρχει σημείο $O \in m$ τέτοιο ώστε $\theta(O) = \perp$. Αυτό ουσιαστικά μας δείχνει ότι η ημιευθεία $\overrightarrow{OQ_O}$ είναι οριακά παράλληλη προς τις l, n και κάθετη στην m.

□

2.4 Το εμβαδόν στην Υπερβολική Γεωμετρία

Η αριθμητική έκφραση του εμβαδού των τριγώνων στην Ε.Γ. ($1/2 \cdot$ βάση $\cdot$ ύψος) είναι μία έκφραση που δεν μεταφέρεται στην Υ.Γ., αφού ο τύπος ανάγει τον υπολογισμό στο εμβαδόν ενός ορθογωνίου τετραπλεύρου, σχήμα που δεν υπάρχει στα πλαίσια της Υ.Γ. Εάν όμως θεωρήσουμε το εμβαδόν ως μια έκφραση με χαρακτηριστικές ιδιότητες πάνω σε *ισοδύναμα* σχήματα, τότε μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι κάθε συνάρτηση εμβαδού είναι:

Μία αντιστοιχία με θετικές τιμές από όλα τα τρίγωνα, έτσι ώστε:

i. Σύμφωνα τρίγωνα έχουν σύμφωνα εμβαδά.

ii. Εάν ένα τρίγωνο χωριστεί σε δύο τρίγωνα με μία ευθεία που διέρχεται από μία κορυφή του, τότε το εμβαδόν του τριγώνου ισούται με το άθροισμα των εμβαδών των επιμέρους τριγώνων.

Συμπέρασμα: Το εμβαδόν είναι *θετικό* και *προσθετικό* για τα τρίγωνα.

Αυτές είναι και οι ελάχιστες προϋποθέσεις που πρέπει να ικανοποιούνται από κάθε συνάρτηση εμβαδού. Στις ελάχιστες λοιπόν προϋποθέσεις μίας συνάρτησης εμβαδού, αναγνωρίζουμε στην Υ.Γ. τις ιδιότητες του ελλείμματος για τα τρίγωνα. Πράγματι, στο θεώρημα που θα δούμε παρακάτω, κάθε συνάρτηση εμβαδού της Υ.Γ. είναι ένα πολλαπλάσιο του ελλείμματος.

Θεώρημα: *Gauss:*
Στην Υ.Γ. κάθε πιθανή συνάρτηση εμβαδού E στα τρίγωνα έχει τη μορφή

$$E\left(\overset{\triangle}{AB\Gamma}\right) = k \cdot \mathcal{A}\left(D\left(\overset{\triangle}{AB\Gamma}\right)\right)$$

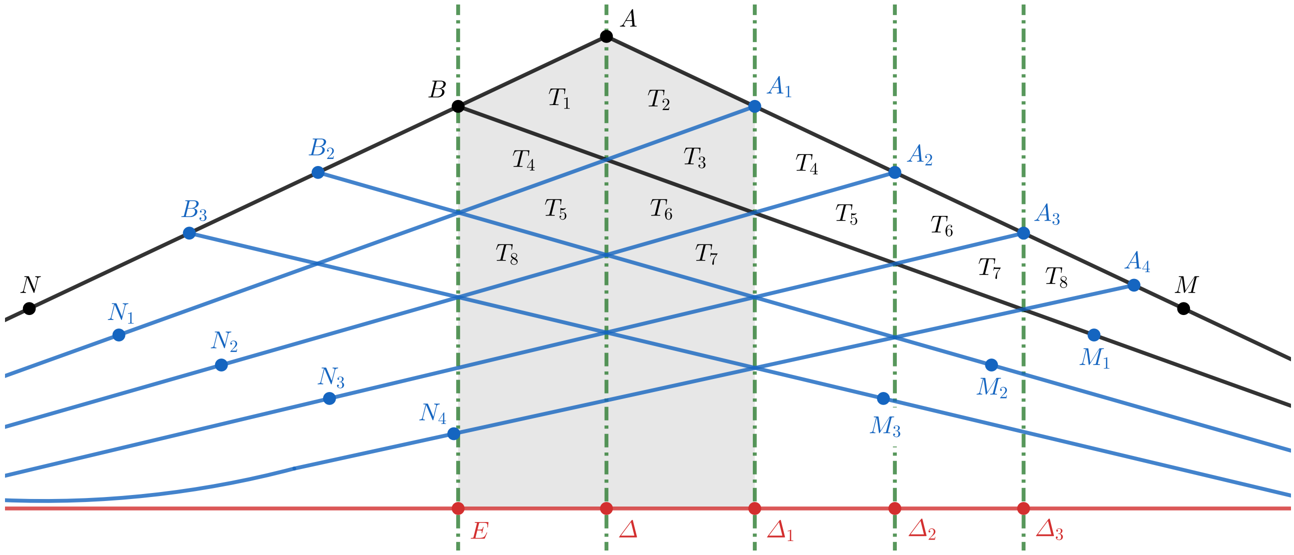
όπου το k είναι σταθερά που δεν εξαρτάται από το τρίγωνο.

Για ιστορικούς λόγους στην απόδειξη θα χρησιμοποιήσουμε την προσέγγιση του Gauss, επομένως θα θεωρήσουμε δεδομένο το ότι η τιμή του εμβαδού ενός σχήματος που προκύπτει από τον χωρισμό του σχήματος σε τρίγωνα (τριγωνοποίηση) δεν εξαρτάται από τον συγκεκριμένο τρόπο που έγινε η τριγωνοποίηση. Η απόδειξη βέβαια του προηγούμενου ισχυρισμού είναι έξω από τα πλαίσια αυτής της παρουσίασης.

Η απόδειξη του **Θεωρήματος: *Gauss*** θα γίνει με μία σειρά από βήματα.

Απόδειξη:

Βήμα Ι: Η συνάρτηση εμβαδού ενός τ.α.τριγ. έχει πεπερασμένη τιμή. Για να αποδείξουμε τον ισχυρισμό αυτόν, αρκεί να δείξουμε ότι κάθε α.α.τριγ. έχει πεπερασμένο εμβαδόν, αφού κάθε τ.α.τριγ. μπορεί να οδηγήσει σε δύο ορθογώνια δ.α.τριγ., και καθένα από αυτά με τη σειρά τους, σε δύο α.α.τριγ. Έστω λοιπόν $B, \overset{\triangle}{\underrightarrow{AM}}$ ένα α.α.τριγ. Θεωρούμε $\underrightarrow{M'N'}$ την κοινή οριακή παράλληλη των $\underrightarrow{AM}$, $\underrightarrow{AN}$, $A\Delta$ τη διχοτόμο της $\widehat{NAM}$ και κάνουμε την ακόλουθη κατασκευή:



i. Κάνουμε ανάκλαση του σχήματος ως προς την $\overleftrightarrow{A\Delta}$, έτσι ώστε η $\overrightarrow{AN}$ να μεταφερθεί επί της $\overrightarrow{AM}$ και το α.α.τριγ. $B, \overset{\triangle}{\overrightarrow{AM}}$ στο $A_1, \overset{\triangle}{\overrightarrow{AN}}$. Η $\overrightarrow{A_1N_1}$ είναι η οριακά παράλληλη ημιευθεία προς την $\overrightarrow{AN}$.

ii. Διχοτομούμε την $\widehat{N_1A_1M}$ με τη διχοτόμο $A_1\Delta_1$ και παίρνουμε τη συμμετρική της ημιευθείας $\overrightarrow{BM_1}$ ως προς την $\overleftrightarrow{A_1\Delta_1}$, όπου $\overrightarrow{BM_1}$ είναι οριακά παράλληλη προς την $\overrightarrow{AM}$. Θεωρούμε $\overrightarrow{A_2N_2}$ το αποτέλεσμα της ανάκλασης αυτής.

iii. Κάνουμε ανάκλαση την $\overrightarrow{A_2N_2}$ ως προς την $\overleftrightarrow{A\Delta}$, κατασκευάζοντας έτσι ημιευθεία $\overrightarrow{B_2M_2}$.

iv. Διχοτομούμε τη γωνία $\widehat{N_2A_2M}$ και συνεχίζουμε τη διαδικασία επαγωγικά, για τη διχοτόμο $A_2\Delta_2$.

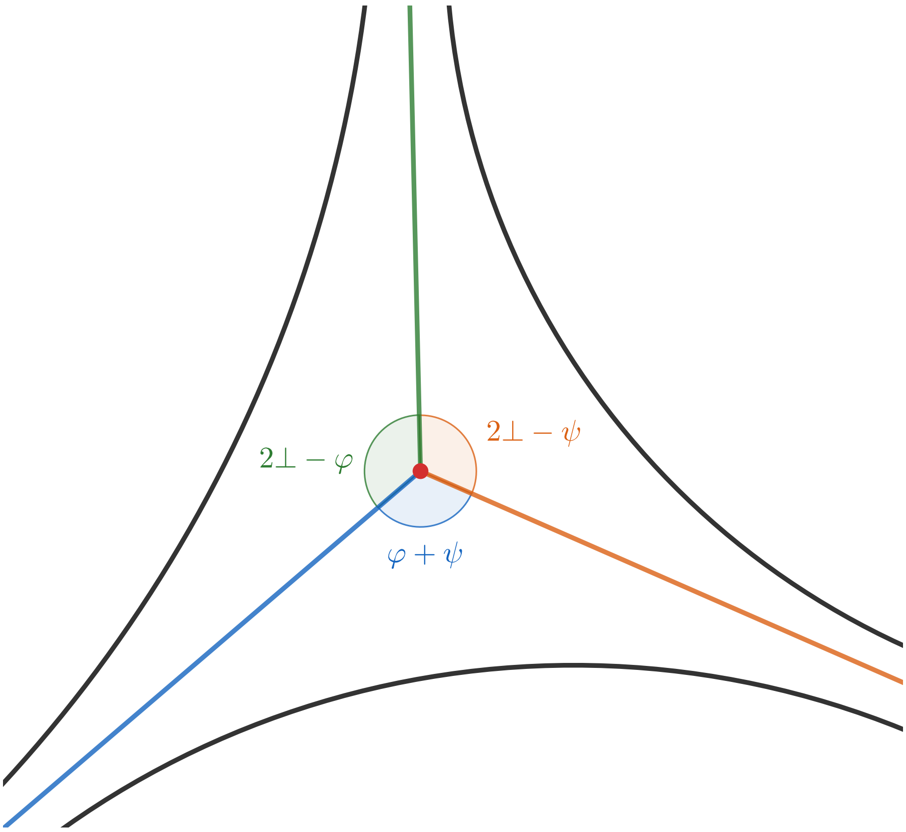
Με αυτόν τον τρόπο επιτυγχάνεται μία τριγωνοποίηση του $B, \overset{\triangle}{\overrightarrow{AM}}$ με τρίγωνα της ακολουθίας $(T_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Τα τρίγωνα αυτά βρίσκουν, μέσω συμμετριών, σύμφωνα αντίστοιχα που όλα περιορίζονται στο κυρτό χωρίο $ABE\Delta_1A_1A$. Το τελευταίο έχει βέβαια πεπερασμένο εμβαδόν.

Βήμα ΙΙ: Το εμβαδόν ενός δ.α.τριγ. είναι συνάρτηση της μοναδικής του γωνίας. Πράγματι, κάθε δ.α.τριγ. καθορίζεται μονοσήμαντα από τη γωνία του, σύμφωνα με την **Πρόταση (2.9)**. Ο Gauss σε αυτό το σημείο εξέφρασε το εμβαδόν συναρτήσει της εξωτερικής γωνίας, αφού έτσι θα ικανοποιούταν η απαίτηση το 'όλον' να έχει μεγαλύτερο εμβαδόν από κάθε 'μέρος' και έτσι η συνάρτηση του εμβαδού θα γινόταν αύξουσα. Δηλαδή για κάθε δ.α.τριγ. $\overset{\triangle}{O}, l$ ο Gauss θεώρησε:

$$E\left(\overset{\triangle}{O}, l\right) = f\big(\mathcal{A}(\varphi)\big), \text{ όπου } \varphi \text{ η μοναδική εξωτερική γωνία του } \overset{\triangle}{O}, l$$

Βήμα ΙΙΙ: Για κάθε γωνία φ ισχύει ο τύπος $f\big(\mathcal{A}(\varphi)\big) + f\big(\mathcal{A}(2\perp - \varphi)\big) = E\left(l, \overset{\triangle}{m}, n\right) = t$. Πράγματι, δύο δ.α.τριγ. με γωνίες $\varphi, 2\perp - \varphi$ κατασκευάζουν πάντοτε ένα τριπλά ασυμπτωτικό τρίγωνο, τοποθετώντας τις γωνίες τους έτσι ώστε δύο πλευρές τους να είναι αντικείμενες ημιευθείες και οι άλλες να ταυτίζονται.

Βήμα IV: Για κάθε δύο γωνίες φ, ψ ισχύει ο τύπος $f\big(\mathcal{A}(\varphi)\big) + f\big(\mathcal{A}(\psi)\big) + f\big(\pi - \mathcal{A}(\varphi) - \mathcal{A}(\psi)\big) = t$. Πράγματι, οι γωνίες $\varphi + \psi, 2\perp - \varphi, 2\perp - \psi$ μπορούν να τοποθετηθούν όπως στο σχήμα, έτσι ώστε κάθε δύο γωνίες να έχουν μοναδική κοινή πλευρά. Φέροντας τις οριακά παράλληλες ευθείες προς τις πλευρές καθεμίας από τις γωνίες, κατασκευάζουμε ένα τ.α.τριγ. το οποίο έχει σταθερό εμβαδόν t. Από την παρατήρηση αυτή έπεται ο ζητούμενος τύπος.



Βήμα V: Από τις σχέσεις στα **Βήματα III, IV** προκύπτει η σχέση $f\big(\mathcal{A}(\varphi+\psi)\big) = f\big(\mathcal{A}(\varphi)\big) + f\big(\mathcal{A}(\psi)\big)$.

Βήμα VI: Για κάθε γωνία φ ισχύει ο τύπος $f\big(\mathcal{A}(\varphi)\big) = \frac{t}{\pi} \cdot \mathcal{A}(\varphi)$. Για να αποδείξουμε το συγκεκριμένο, πρώτα θα δείξουμε ότι για κάθε θετικό πραγματικό αριθμό c ισχύει $f\big(\mathcal{A}(c\varphi)\big) = c \cdot f\big(\mathcal{A}(\varphi)\big)$.

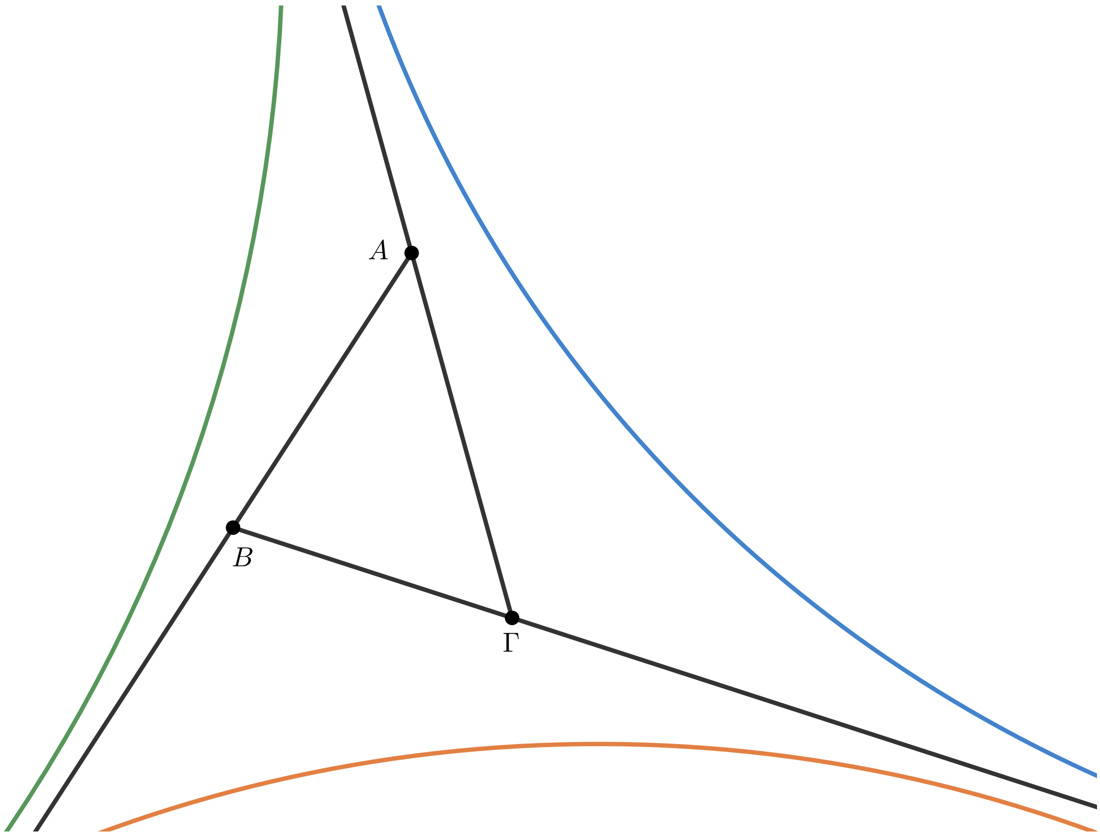
- Ισχύει για τους φυσικούς αριθμούς και το 0, αφού $f(0) = f(0) + f(0) \Rightarrow f(0) = 0$, $f\big(\mathcal{A}(\varphi)\big) = f\big(\mathcal{A}(\varphi)\big)$ και αν θεωρήσουμε ότι η υπόθεση ισχύει για τον $c-1$, τότε:
$$f\big(\mathcal{A}(c\varphi)\big) = f\big((c-1)\mathcal{A}(\varphi)\big) + f\big(\mathcal{A}(\varphi)\big) = (c-1) \cdot f\big(\mathcal{A}(\varphi)\big) + f\big(\mathcal{A}(\varphi)\big) = c \cdot f\big(\mathcal{A}(\varphi)\big)$$
Ισχύει δηλαδή και για το c, οπότε επαγωγικά αποδεικνύεται το ζητούμενο.

- Ισχύει για όλους τους θετικούς ρητούς. Για να αποδείξουμε το συγκεκριμένο, παρατηρούμε ότι αρκεί να δειχθεί ο τύπος $\forall d \in \mathbb{N}$, $f\Big(\mathcal{A}\Big(\frac{1}{d}\varphi\Big)\Big) = \frac{1}{d} \cdot f\big(\mathcal{A}(\varphi)\big)$. Ο τύπος αυτός αποδεικνύεται άμεσα από το πρώτο σημείο (•), εάν θέσουμε όπου c το d και όπου φ το $\frac{1}{d}\varphi$.

- Λόγω της μονοτονίας της f, ο τύπος $f\big(\mathcal{A}(c\varphi)\big) = c \cdot f\big(\mathcal{A}(\varphi)\big)$ ισχύει για κάθε θετικό πραγματικό αριθμό c. Πράγματι, έστω $(q_i)_{i\in\mathbb{N}}$, $(p_i)_{i\in\mathbb{N}}$ να είναι δύο ακολουθίες ρητών οι οποίες προσεγγίζουν τον αριθμό c, τέτοιες ώστε $q_i \leqslant c$ και $p_i \geqslant c$. Παρατηρούμε ότι:
$$f\big(\mathcal{A}(q_i\varphi)\big) \leqslant f\big(\mathcal{A}(c\varphi)\big) \leqslant f\big(\mathcal{A}(p_i\varphi)\big) \Rightarrow q_i \cdot f\big(\mathcal{A}(\varphi)\big) \leqslant f\big(\mathcal{A}(c\varphi)\big) \leqslant p_i \cdot f\big(\mathcal{A}(\varphi)\big)$$
και άρα:
$$\lim_{i\to\infty} \big[q_i \cdot f\big(\mathcal{A}(\varphi)\big)\big] \leqslant f\big(\mathcal{A}(c\varphi)\big) \leqslant \lim_{i\to\infty} \big[p_i \cdot f\big(\mathcal{A}(\varphi)\big)\big] \Rightarrow cf\big(\mathcal{A}(\varphi)\big) \leqslant f\big(\mathcal{A}(c\varphi)\big) \leqslant c \cdot f\big(\mathcal{A}(\varphi)\big) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f\big(\mathcal{A}(c\varphi)\big) = c \cdot f\big(\mathcal{A}(\varphi)\big)$$

Ο τύπος λοιπόν $f\big(\mathcal{A}(c\varphi)\big) = c \cdot f\big(\mathcal{A}(\varphi)\big)$ ισχύει για κάθε γωνία φ και κάθε θετικό πραγματικό αριθμό c. Για τυχαία γωνία φ, θεωρούμε c_φ τον θετικό πραγματικό αριθμό αυτόν για τον οποίο $c_\varphi \perp = \varphi \Rightarrow \frac{c_\varphi \pi}{2} = \mathcal{A}(\varphi)$. Παρατηρούμε ότι $f\big(\mathcal{A}(\varphi)\big) = f\big(\mathcal{A}(c_\varphi \perp)\big) = c_\varphi \cdot f\big(\mathcal{A}(\perp)\big)$ και επιπλέον ότι $2f\big(\mathcal{A}(\perp)\big) = t$. Επομένως:
$$f\big(\mathcal{A}(\varphi)\big) = c_\varphi \cdot \frac{t}{2} = \frac{t}{\pi} \cdot \mathcal{A}(\varphi)$$

Βήμα VII:



Έστω $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ ένα σύνηθες τρίγωνο. Στις ημιευθείες $\underset{\longrightarrow}{AB}, \underset{\longrightarrow}{\Gamma A} - [\Gamma A - \{A\}]$ φέρουμε κοινή οριακή παράλληλη l. Το ίδιο κάνουμε για τις ημιευθείες $\underset{\longrightarrow}{\Gamma A}, \underset{\longrightarrow}{B\Gamma} - [B\Gamma - \{\Gamma\}]$ και $\underset{\longrightarrow}{B\Gamma}, \underset{\longrightarrow}{AB} - [AB - \{B\}]$, και θεωρούμε n, m τις αντίστοιχες οριακές παράλληλες. Λόγω της προσθετικότητας του εμβαδού προκύπτει:

$$E\left(l,n,m\right) = E\left(\overset{\triangle}{AB\Gamma}\right) + E\left(\overset{\triangle}{A,l}\right) + E\left(\overset{\triangle}{B,m}\right) + E\left(\overset{\triangle}{\Gamma,n}\right) = E\left(\overset{\triangle}{AB\Gamma}\right) + \frac{t}{\pi}\cdot\left[\mathcal{A}(\widehat{BA\Gamma}) + \mathcal{A}(\widehat{\Gamma BA}) + \mathcal{A}(\widehat{B\Gamma A})\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E\left(\overset{\triangle}{AB\Gamma}\right) = t + \frac{t}{\pi}\cdot\mathcal{A}\left(D\left(\overset{\triangle}{AB\Gamma}\right) - 2\bot\right) = \overbrace{\frac{t}{\pi}}^{k}\cdot\left[\pi - \mathcal{A}\left(D\left(\overset{\triangle}{AB\Gamma}\right)\right) - \mathcal{A}(2\bot)\right] = k\cdot\mathcal{A}\left(D\left(\overset{\triangle}{AB\Gamma}\right)\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E\left(\overset{\triangle}{AB\Gamma}\right) = k\cdot\mathcal{A}\left(D\left(\overset{\triangle}{AB\Gamma}\right)\right)$$

Αυτός όμως είναι ο ζητούμενος τύπος. Έτσι ολοκληρώνεται η απόδειξη.

□

Παρατήρηση (2.10): Το εμβαδόν κάθε τριγώνου της Υ.Γ. φράσσεται από το εμβαδόν ενός τ.α.τριγ. Δηλαδή $E\left(\overset{\triangle}{AB\Gamma}\right) < t$.

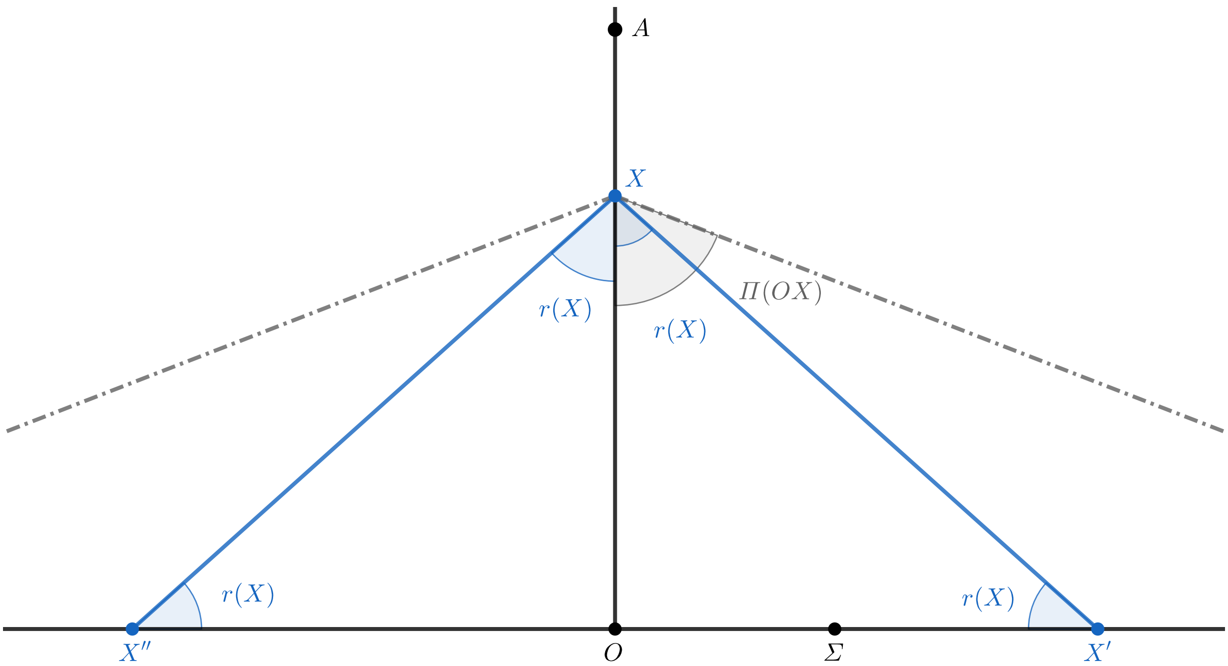
Στην ουσία μπορεί να αποδειχθεί κάτι αρκετά ισχυρότερο από την **Παρατήρηση (2.10)**. Συγκεκριμένα:

Πρόταση (2.12): Για κάθε γωνία $\theta \neq 2\bot$ υπάρχει τρίγωνο $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ τέτοιο ώστε $\theta < D\left(\overset{\triangle}{AB\Gamma}\right) < 2\bot$. Ισοδύναμα:

$$\forall\theta \neq 2\bot,\ \exists\overset{\triangle}{AB\Gamma}:\ k\cdot\mathcal{A}(\theta) < k\cdot\mathcal{A}\left(D\left(\overset{\triangle}{AB\Gamma}\right)\right) = E\left(\overset{\triangle}{AB\Gamma}\right) < t$$

Το t λοιπόν αποτελεί supremum για τα εμβαδά των συνήθων τριγώνων.

Απόδειξη:



Έστω l μια ευθεία, $\underset{\longrightarrow}{OA}$, $O \in l$ μια κάθετη προς την l ημιευθεία και Σ ένα σημείο τέτοιο ώστε $O \neq \Sigma \in l$. Θεωρούμε για κάθε $X \in \underset{\longrightarrow}{OA} - \{O\}$ ένα σημείο $X' \in \underset{\longrightarrow}{O\Sigma}$ τέτοιο ώστε $OX \cong OX'$, οπότε δημιουργείται το ισοσκελές τρίγωνο $\overset{\triangle}{OXX'}$. Θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση $\forall X \in \underset{\longrightarrow}{OX'} - \{O\}:\ r(X) = \widehat{OXX'}$ και παρατηρούμε ότι για καθένα από αυτά τα X ισχύει $r(X) < \Pi(OX)$.

Τέλος, θεωρούμε σημείο $X'' \in l$ τέτοιο ώστε $X'' - O - X'$ και επιπλέον $OX'' \cong OX$. Με αυτόν τον τρόπο δημιουργούμε το τρίγωνο $\overset{\triangle}{XX'X''}$, το οποίο έχει άθροισμα γωνιών $r(X) + r(X) + 2r(X) = 4r(X)$ και έλλειμμα:

$$2\bot > D\left(\overset{\triangle}{XX'X''}\right) = 2\bot - 4r(X) > 2\bot - 4\min\left\{\Pi(OX), \frac{\bot}{2}\right\}$$

Έστω $\theta \neq 2\perp$ μια τυχαία γωνία. Από την **Πρόταση (2.10)**, μπορεί να βρεθεί σημείο X τέτοιο ώστε $\Pi(OX) \leqslant \dfrac{2\perp - \theta}{4} \leqslant \dfrac{\perp}{2}$, επομένως:

$$2\perp > D\Big(X\overset{\triangle}{X'}X''\Big) = 2\perp - 4r(X) > 2\perp - 4\Pi(OX) > 2\perp - 2\perp + \theta = \theta$$

Δηλαδή για κάθε γωνία $\theta \neq 2\perp$ υπάρχει τρίγωνο $X\overset{\triangle}{X'}X''$ τέτοιο ώστε $\theta < D\Big(X\overset{\triangle}{X'}X''\Big) < 2\perp$.

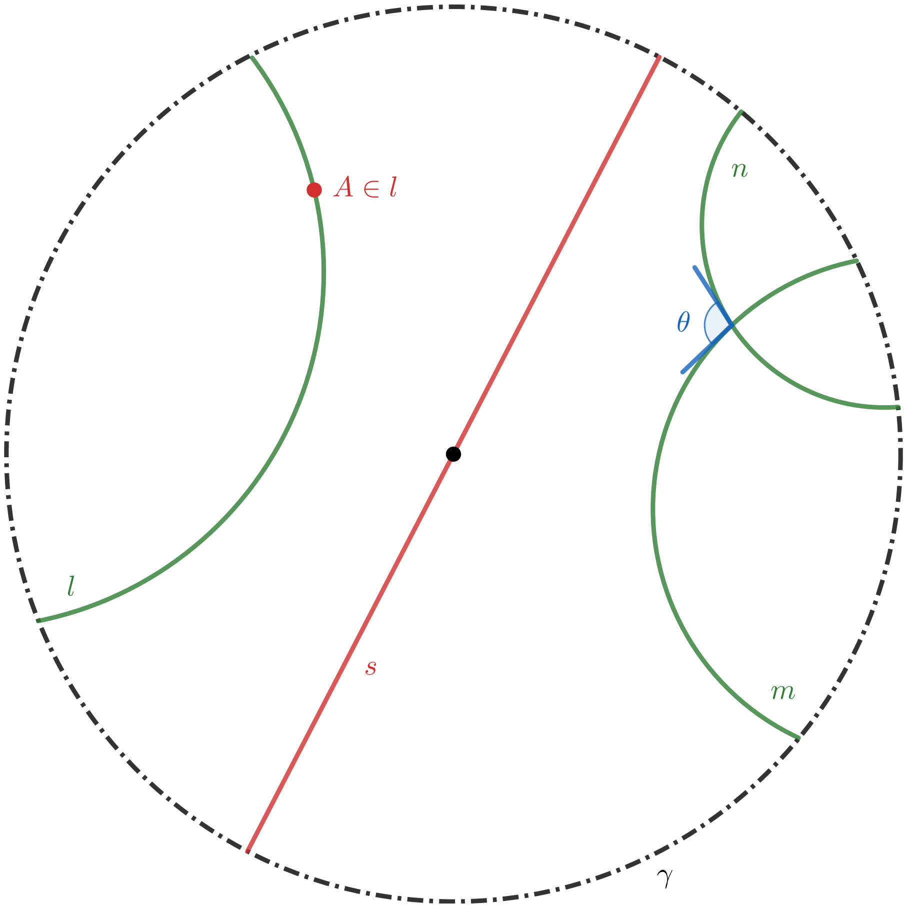
$\square$

2.5 Περιγραφή των μοντέλων του Poincaré

Τα αποτελέσματα της Υ.Γ. ήταν γνωστά από νωρίς, από τους Saccheri - Gauss, και η δυνατότητα ανάπτυξης μιας γεωμετρίας χωρίς το αίτημα των παραλλήλων αναγνωρίστηκε από τους Bolayi - Lobachevsky. Παρόλα αυτά, η αυστηρή απόδειξη της ύπαρξης της Υ.Γ. (τουλάχιστον τόσο αυστηρή όσο αυτή της Ε.Γ.) άργησε να γίνει. Η απόδειξη αυτή επιτεύχθηκε με την κατασκευή ενός μοντέλου για την Υ.Γ. από τον Klein γύρω στο 1860, με μεθόδους από την Προβολική Γεωμετρία, και είναι γνωστό ως το μοντέλο των Beltrami - Klein. Το μοντέλο αυτό είναι βέβαια αρκετά περίπλοκο, λόγω του τρόπου μέτρησης του μήκους, και ακόμη περισσότερο λόγω του τρόπου που ορίζεται η συμφωνία των γωνιών.

Μετά από το μοντέλο αυτό δώθηκαν κάποια απλούστερα, εκ των οποίων θα παρουσιαστούν αυτά που οφείλονται στον Poincaré.

2.5.1 Το μοντέλο του Δίσκου του Poincaré



Στο μοντέλο αυτό τα σημεία (ή αλλιώς D-σημεία) του υπερβολικού επιπέδου ταυτίζονται με τα σημεία ενός ανοιχτού δίσκου γ του ευκλείδειου επιπέδου. Οι ευθείες (ή αλλιώς D-ευθείες) είναι δύο ειδών:

i. Οι διάμετροι του δίσκου γ, χωρίς τα άκρα.

ii. Τα τόξα ορθογώνιων προς τον γ κύκλων, χωρίς τα άκρα.

Ορθογώνιοι προς τον γ κύκλοι είναι οι κύκλοι αυτοί που σχηματίζουν ορθές ευκλείδειες γωνίες με την περιφέρεια ($\partial\gamma$) του γ. Οι γωνίες (ή αλλιώς D-γωνίες) είναι οι συνήθεις ευκλείδειες γωνίες μεταξύ καμπυλών. Όσον αφορά τις σχέσεις που απαιτούνται:

i Η σχέση *πρόσπτωσης* είναι η συνήθης της Ε.Γ.: ένα σημείο βρίσκεται επί της καμπύλης.

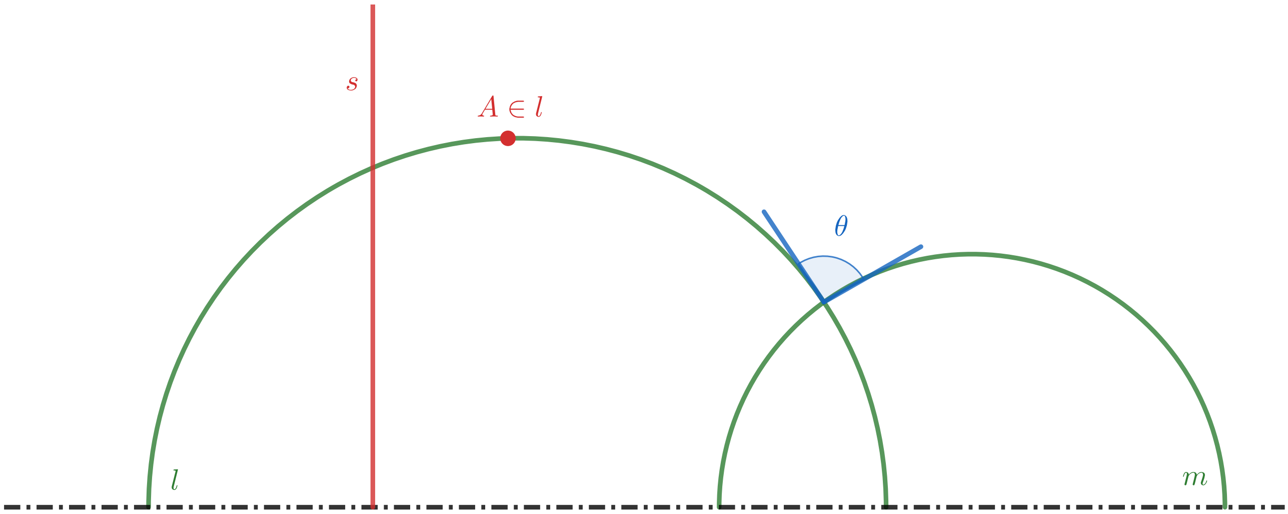
ii. Ανάλογα ορίζεται και η σχέση του *μεταξύ* για τα σημεία, κατά την ευκλείδεια δηλαδή έννοια.

iii. Η σχέση *σύμπτωσης* για τα ε.τ. είναι κάτι αρκετά δυσκολότερο να οριστεί. Οπότε ο ορισμός της θα δωθεί στο μέρος των αποδείξεων (**2.5.4.**).

iv. Η σχέση *σύμπτωσης* των γωνιών είναι ακριβώς αυτή της Ε.Γ.

Το πλεονέκτημα του μοντέλου αυτού βρίσκεται στο σημείο iv., στη συμφωνία δηλαδή των γωνιών.

2.5.2 Το μοντέλο του Πάνω Ημιεπιπέδου του Poincaré



Εάν χρησιμοποιήσουμε μιγαδικές συντεταγμένες για το ευκλείδειο επίπεδο, τότε το *πάνω ημιεπίπεδο* $\{z \in \mathbb{C} \mid \Im(z) > 0\}$ μπορεί να χρησιμεύσει σαν υπερβολικό επίπεδο. Τα σημεία της γεωμετρίας (H-σημεία) θα είναι τα σημεία του $\{z \in \mathbb{C} \mid \Im(z) > 0\}$. Οι ευθείες σε αυτό το μοντέλο (H-ευθείες) αναπαρίστανται και πάλι με δύο τρόπους:

i. Ως κάθετες ημιευθείες με αρχή στον άξονα των x, χωρίς όμως την αρχή αυτή.

ii. Ως ημικύκλια με άκρα στον άξονα των x, χωρίς τα άκρα τους.

Οι γωνίες (ή αλλιώς H-γωνίες) είναι οι συνήθεις ευκλείδειες γωνίες μεταξύ καμπυλών. Όσον αφορά τις σχέσεις που απαιτούνται:

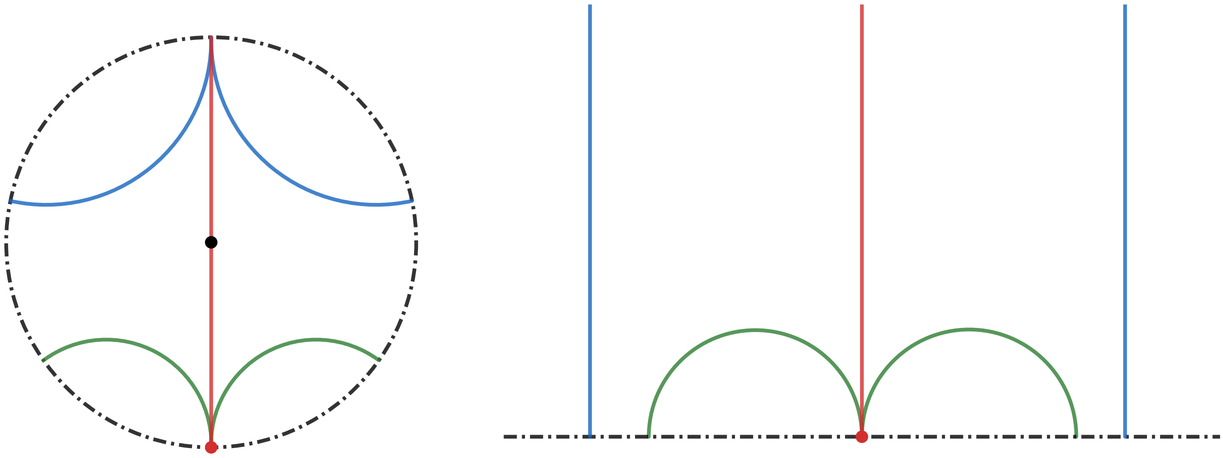
i Η σχέση *πρόσπτωσης* είναι η συνήθης της Ε.Γ.: ένα σημείο βρίσκεται επί της καμπύλης.

ii. Ανάλογα ορίζεται και η σχέση του *μεταξύ* για τα σημεία, κατά την ευκλείδεια δηλαδή έννοια.

iii. Η σχέση *σύμπτωσης* για τα ε.τ. είναι κάτι αρκετά δυσκολότερο να οριστεί. Η σχέση αυτή μπορεί να επέλθει μέσω του μοντέλου του δίσκου, αφού όπως θα δείξουμε στο (**2.5.3**) υπάρχουν ιδιαίτερες αντιστοιχίες των δύο μοντέλων.

iv. Η σχέση *σύμπτωσης* των γωνιών είναι ακριβώς αυτή της Ε.Γ.

2.5.3 Σχέση μεταξύ των δύο μοντέλων



Τα μοντέλα του Δίσκου και του Πάνω Ημιεπιπέδου του Poincaré είναι μεταξύ τους ισόμορφα με την ακόλουθη έννοια: Υπάρχει μια αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ των συνόλων $\mathcal{P}_D = \{X \mid X \text{ είναι D-σημείο}\}$, $\mathcal{P}_H = \{X \mid X \text{ είναι H-σημείο}\}$ που διατηρεί τη γεωμετρία. Δηλαδή απεικονίζει ευθείες σε ευθείες, διατηρώντας τις σχέσεις πρόσπτωσης, μεταξύ και σύμπτωσης, όπως υπάρχουν στα δύο μοντέλα.

Τα προηγούμενα πραγματώνονται ως εξής: Εάν αναπαραστήσουμε τα σύνολα $\mathcal{P}_D, \mathcal{P}_H$ ως υποσύνολα των μιγαδικών, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι:

$$\mathcal{P}_D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$$
$$\mathcal{P}_H = \{z \in \mathbb{C} \mid \Im(z) > 0\}$$

Η απεικόνιση $E : \mathcal{P}_D \to \mathcal{P}_H$ που ορίζεται ως:

$$E : z \mapsto i \cdot \frac{i+z}{i-z}$$

απεικονίζει το $\mathcal{P}_D$ επί του $\mathcal{P}_H$ με $1-1$ τρόπο και διατηρεί τη γεωμετρία. Εποπτικά η E απεικονίζει κάθε στοιχείο του $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\} - \{i\}$ στον άξονα των x, ενώ το i έχει την έννοια του απείρου. Οι ορθογώνιες περιφέρειες από το i καθώς και η διάμετρος από το ίδιο σημείο απεικονίζονται σε κάθετες ημιευθείες στο άλλο μοντέλο. Οι υπόλοιπες D-ευθείες απεικονίζονται σε ημικύκλια.

Η E είναι επίσης σύμμορφη, δηλαδή διατηρεί τις ευκλείδειες γωνίες (άρα και τις D-γωνίες). Όσον αφορά τη σχέση σύμπτωσης στο Πάνω Ημιεπίπεδο, εάν μια σχέση σύμπτωσης οριστεί στον Δίσκο, τότε μέσω της E μπορεί να οριστεί *επαγόμενη* σχέση σύμπτωσης στο ημιεπίπεδο. Έτσι τα μοντέλα αυτά γίνονται μεταξύ τους ισόμορφα.

Παρατήρηση (2.11): Λόγω του ισομορφισμού των δύο μοντέλων, αρκεί να περιοριστούμε στο μοντέλο του Δίσκου για να περιγράψουμε και τα δύο τους.

2.5.4 Αποδείξεις για το μοντέλο του Δίσκου του Poincaré

Έστω $\mathcal{R}^*, \mathcal{A}^*$ οι συναρτήσεις μέτρισης των ε.τ. και των γωνιών αντίστοιχα, στο επίπεδο της Ε.Γ. Έστω επίσης $\mathcal{R}, \mathcal{A}$ οι αντίστοιχες συναρτήσεις στο μοντέλο του Δίσκου, για τα ε.τ. των D-ευθειών και για τις D-γωνίες.

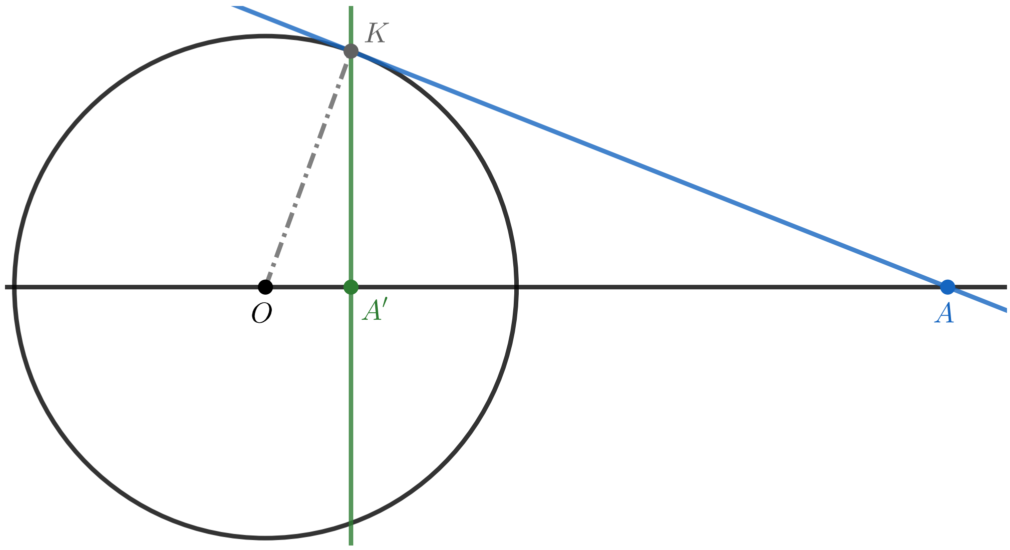
Παρατήρηση (2.12): Μπορεί να θεωρηθεί ότι $\mathcal{A} = \mathcal{A}^*|_\gamma$.

Ορισμός: ***Αντιστροφή κέντρου O και δύναμης r^2 στην Ε.Γ.:***
Αντιστροφή κέντρου $O \in \mathcal{P}$ και δύναμης $r^2 \in \mathbb{R}^*_+$ στην Ε.Γ. είναι κάθε συνάρτηση $I^O_{r^2} : \mathcal{P} - \{O\} \to \mathcal{P} - \{O\}$ τέτοια ώστε:

$$I^O_{r^2} : A \mapsto A' : \ \mathcal{R}^*(OA) \cdot \mathcal{R}^*(OA') = r^2$$

Πρόταση (2.13): Έστω (O, r) ένας κύκλος κέντρου O και ακτίνας r. Για οποιοδήποτε σημείο A εκτός του δίσκου περιφέρειας (O, r) θεωρούμε $\overleftrightarrow{AK}$ την εφαπτόμενη από το A προς τον (O, r), που τον τέμνει στο K. Έπειτα φέρουμε κάθετη $\overleftrightarrow{KA'}$ προς την $\overleftrightarrow{OA}$, η οποία την τέμνει στο A'. Εάν το $A \neq O$ είναι εντός του δίσκου περιφέρειας (O, r) εφαρμόζουμε την αντίστροφη διαδικασία. Η συνάρτηση που απεικονίζει κάθε $A \neq O$ στο αντίστοιχο A' είναι μια αντιστροφή κέντρου O και δύναμης r^2. Αυτήν την αντιστροφή θα την ονομάζουμε *συνήθη αντιστροφή* κέντρου O και δύναμης r^2.

Απόδειξη:



Παρατηρούμε ότι τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{OKA}$ και $\overset{\triangle}{OKA'}$ είναι όμοια, επομένως:

$$\frac{\mathcal{R}^*(OA')}{\mathcal{R}^*(OK)} = \frac{\mathcal{R}^*(OK)}{\mathcal{R}^*(OA)} \Rightarrow \mathcal{R}^*(OA') \cdot \mathcal{R}^*(OA) = \mathcal{R}^*(OK)^2 = r^2$$

□

Ορισμός: ***Δύναμη σημείου P ως προς κύκλο (O, r) στην Ε.Γ.:***
Ως δύναμη σημείου P ως προς κύκλο (O, r) ορίζουμε τον πραγματικό αριθμό:

$$\underset{(O,r)}{\Delta}(P) = \mathcal{R}^*(OP)^2 - r^2$$

Θεώρημα: ***Τέμνουσες του κύκλου στην Ε.Γ.:***
Έστω (O, r) ένας κύκλος και $P \neq O$ ένα σημείο. Για κάθε σημείο A στον (O, r), εάν B είναι το άλλο σ.τ. της $\overrightarrow{PA}$ με τον (O, r), ισχύει:

$$\mathcal{R}^*(PA) \cdot \mathcal{R}^*(PB) = \left| \underset{(O,r)}{\Delta}(P) \right|$$

Αποδειξη: Έστω A, A' σημεία του (O,r) και B, B' τα άλλα σ.τ. των $\underrightarrow{PA}$ και $\underrightarrow{PA'}$ αντίστοιχα, με τον (O,r). Αρχικά θα δείξουμε ότι $\mathcal{R}^*(PA)\cdot\mathcal{R}^*(PB) = \mathcal{R}^*(PA')\cdot\mathcal{R}^*(PB')$. Πράγματι, τα τρίγωνα $P\overset{\triangle}{A}B'$ και $P\overset{\triangle}{A'}B$ είναι όμοια, αφού $\widehat{APB'} = \widehat{A'PB}$ και $\widehat{PBA'} \cong \widehat{AB'P}$. Επομένως:

$$\frac{\mathcal{R}^*(PA)}{\mathcal{R}^*(PA')} = \frac{\mathcal{R}^*(PB')}{\mathcal{R}^*(PB)} \Rightarrow \mathcal{R}^*(PA)\cdot\mathcal{R}^*(PB) = \mathcal{R}^*(PA')\cdot\mathcal{R}^*(PB')$$

Έχοντας δείξει αυτό, για την περίπτωση όπου $\underset{(O,r)}{\Delta}(P) > 0$, παρατηρούμε ότι αν $P\Gamma$ είναι μια εφαπτόμενη του (O,r) ισχύει:

$$\mathcal{R}^*(PA)\cdot\mathcal{R}^*(PB) = \mathcal{R}^*(P\Gamma)^2 = \mathcal{R}^*(OP)^2 - \mathcal{R}^*(O\Gamma)^2 = \mathcal{R}^*(OP) - r^2 = \underset{(O,r)}{\Delta}(P)$$

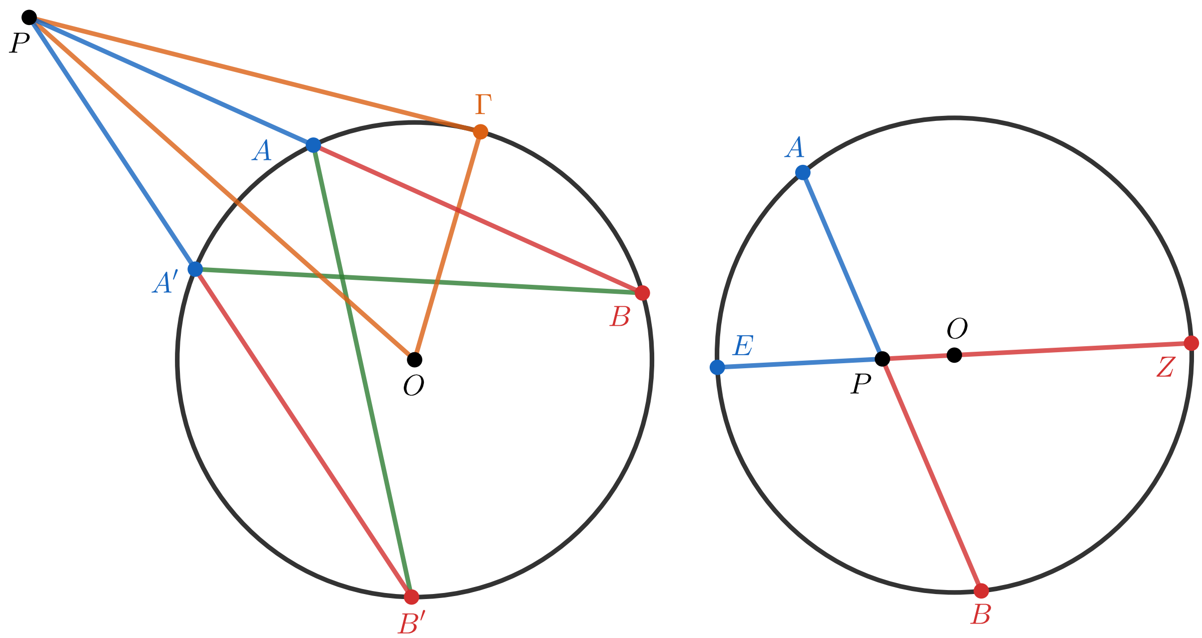
Για την περίπτωση όπου $\underset{(O,r)}{\Delta}(P) < 0$, παρατηρούμε ότι αν τα P, E, O, Z είναι συνευθειακά:

$$\mathcal{R}^*(PA)\cdot\mathcal{R}^*(PB) = \mathcal{R}^*(PE)\cdot\mathcal{R}^*(PZ) = \big(\mathcal{R}^*(OE) - \mathcal{R}^*(OP)\big)\cdot\big(\mathcal{R}^*(OZ) + \mathcal{R}^*(OP)\big) =$$

$$= \big(r - \mathcal{R}^*(OP)\big)\cdot\big(r + \mathcal{R}^*(OP)\big) \Rightarrow \mathcal{R}^*(PA)\cdot\mathcal{R}^*(PB) = -\underset{(O,r)}{\Delta}(P)$$

Η περίπτωση όπου $\underset{(O,r)}{\Delta}(P) = 0$ είναι τετριμμένη. Έτσι λοιπόν ισχύει το γενικό αποτέλεσμα:

$$\mathcal{R}^*(PA)\cdot\mathcal{R}^*(PB) = \Big|\underset{(O,r)}{\Delta}(P)\Big|$$



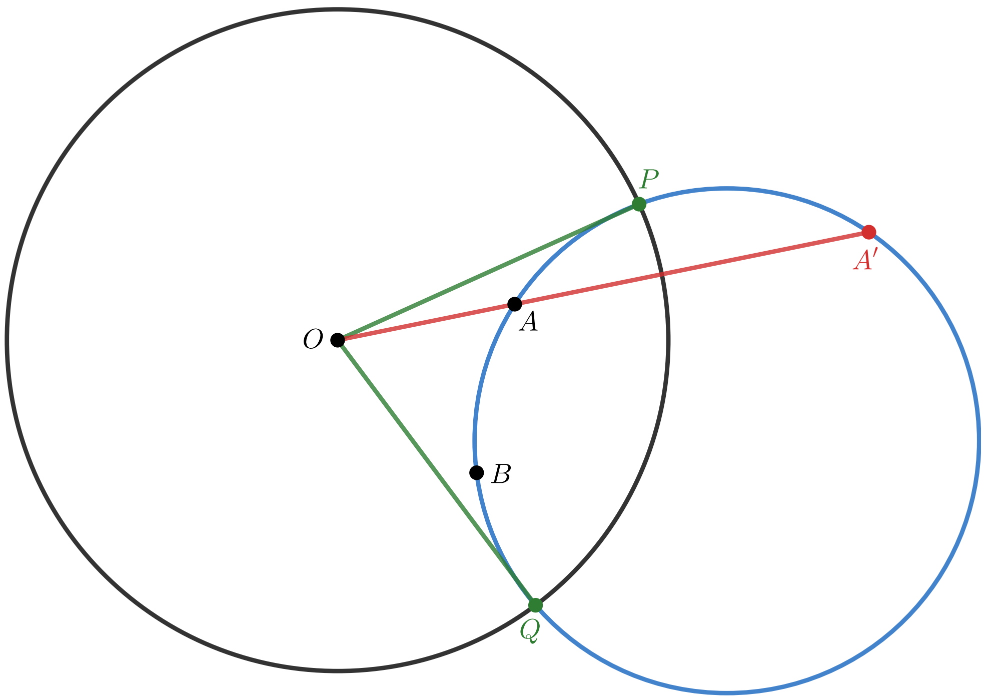
□

I. Αξιώματα πρόσπτωσης:

Το αξίωμα που θα χρειαστεί να πιστοποιήσουμε είναι το **A.1**. Δηλαδή το:

- Για κάθε δύο διαφορετικά σημεία $A, B \in \mathcal{P}_D$ υπάρχει μια D-ευθεία που τα περιέχει.

Ουσιαστικά αυτό που θέλουμε να δείξουμε είναι ότι για κάθε $A, B \in \mathcal{P}_D$ υπάρχει ορθογώνια περιφέρεια προς τον γ με $\partial\gamma = (O,\rho)$. Εφαρμόζουμε τη διαδικασία της συνήθους αντιστροφής με κέντρο O και δύναμη ρ^2 στο A και θεωρούμε A' την εικόνα της. Από τα τρια σημεία A, A', B διέρχεται μοναδικός κύκλος C, ο οποίος ισχυριζόμαστε ότι τέμνει ορθογώνια τον γ. Πράγματι, αν P, Q είναι τα σ.τ. των $\partial\gamma, C$, τότε $\rho^2 = \mathcal{R}^*(OP)^2 = \mathcal{R}^*(OQ)^2 = \underset{C}{\Delta}(O)$, το οποίο δείχνει ότι οι OP, OQ εφάπτονται στον C, και κατ' επέκταση ότι ο C είναι ορθογώνιος προς τον γ.

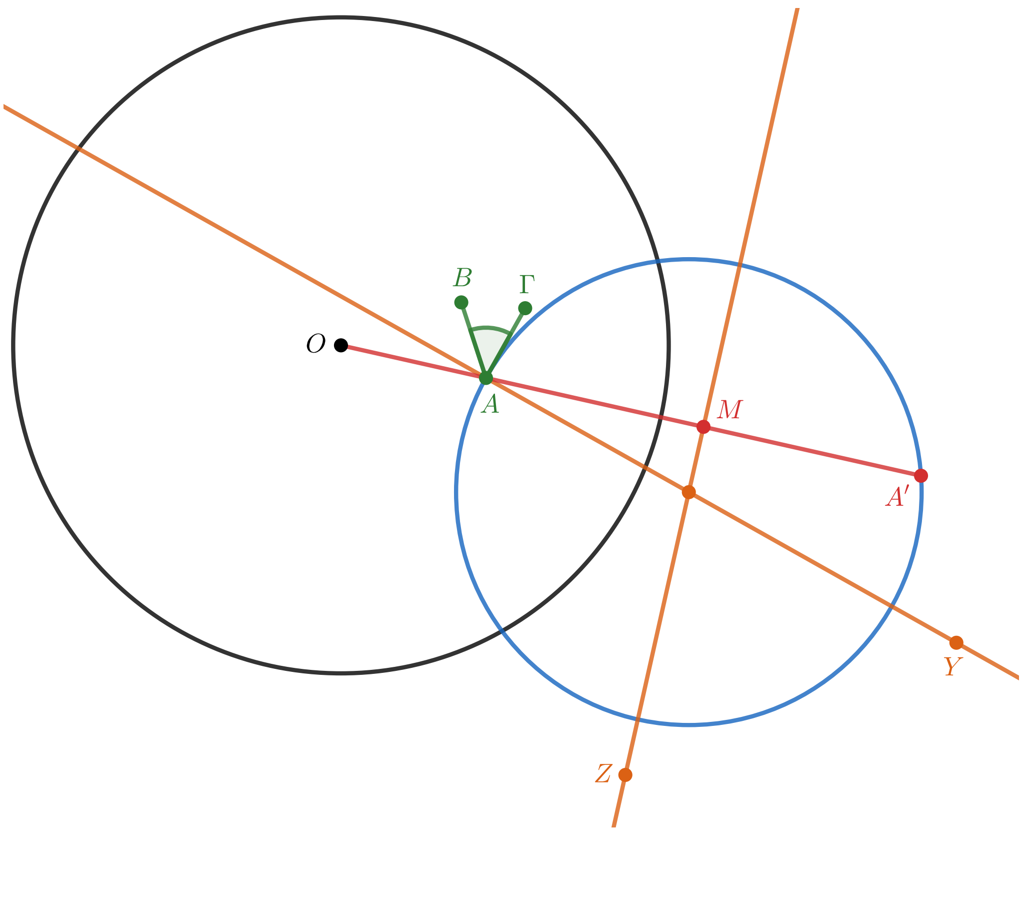


II. Αξιώματα σύμπτωσης (γων.):

Το αξίωμα που θα χρειαστεί να πιστοποιήσουμε είναι η ελεύθερη μεταφορά των γωνιών. Δηλαδή το **Γ.4**, κατά το οποίο:

- Υπάρχει μία σχέση μεταξύ γωνιών '$\cong_{\text{γων.}}$', η οποία εξασφαλίζει κατά μία έννοια την ελεύθερη μεταφορά των γωνιών. Συγκεκριμένα, έστω $O, O', X, Y \in \mathcal{P}_D$ και $\widehat{XOY}$ να είναι η γωνία με πλευρές $\overrightarrow{OX}$, $\overrightarrow{OY}$. Τότε για κάθε ημιευθεία $\overrightarrow{O'X'}$, μπορεί να βρεθεί μια ημιευθεία $\overrightarrow{O'Y'}$ (σε καθορισμένο ημιεπίπεδο) τέτοια ώστε $\widehat{XOY} \cong_{\text{γων.}} \widehat{X'O'Y'}$.

Η ελεύθερη μεταφορά των γωνιών είναι κάτι που ισχύει στην Ε.Γ. και ειδικότερα ισχύει για τις ευκλείδειες γωνίες του γ με $\partial\gamma = (O, \rho)$. Αυτό που θα χρειαστεί λοιπόν να πιστοποιηθεί είναι ότι για κάθε ευκλείδεια γωνία $\theta = \widehat{BA\Gamma}$ με κορυφή A στον γ, υπάρχουν δύο D-ευθείες που τη σχηματίζουν.



Εάν κάποιο από τα ε.τ. $AB, A\Gamma$ ανήκει σε διάμετρο του γ, τότε η αντίστοιχη πλευρά της γωνίας θα είναι τμήμα ημιευθείας τις Ε.Γ. με αρχή το A, που περιέχει το B ή το Γ αντίστοιχα, και που βρίσκεται εντός του γ. Έστω ότι το ε.τ. AX, $X \in \{B, \Gamma\}$ δεν ανήκει σε διάμετρο του γ. Σε αυτήν την περίπτωση, θα αναζητήσουμε μια ορθογώνια περιφέρεια προς τον γ, η οποία θα εφάπτεται του AX στο A. Παρατηρούμε ότι αν η $\underleftrightarrow{AY}$ είναι η ευθεία της Ε.Γ. που είναι κάθετη προς το AX, το κέντρο της περιφέρειας που αναζητούμε βρίσκεται κάπου επί αυτής της ευθείας. Έπειτα εφαρμόζουμε τη συνήθη αντοστροφή κέντρου O και δύναμης ρ^2 στο σημείο A και παίρνουμε σημείο A'. Στο ε.τ. AA' φέρουμε τη μεσοκάθετη ευθεία $\underleftrightarrow{MZ}$ της Ε.Γ. και παρατηρούμε ότι το κέντρο της ζητούμενης περιφέρειας επίσης βρίσκεται επί της $\underleftrightarrow{MZ}$. Επομένως η ζητούμενη ορθογώνια περιφέρεια είναι η $\big(\underleftrightarrow{AY} \cap \underleftrightarrow{MZ}, \mathcal{R}^*(A[\underleftrightarrow{AY} \cap \underleftrightarrow{MZ}])\big)$.

Η γωνία λοιπόν θ θα έχει ως πλευρές είτε ε.τ. της Ε.Γ. είτε ορθογώνιες περιφέρειες οι οποίες κατασκευάζονται κατά τον προηγούμενο τρόπο.

III. Αξιώματα σύμπτωσης (ε.τ.):

Η αναγκαιότητα του ορισμού της σχέσης *συμφωνίας* όπως τελικά θα δοθεί μπορεί να γίνει σύντομα κατανοητή από τα εξής: Εάν δούμε την Υ.Γ. σαν γεωμετρία κατά Klein, θα αναζητήσουμε εντελώς φυσιολογικά τους *αυτομορφισμούς* ($f \in \mathrm{Aut}(\mathcal{P})$) του υπερβολικού επιπέδου, που διατηρούν τις σχέσεις στις οποίες θεμελιώνεται η υπερβολική γεωμετρία. Δηλαδή τους $1-1$ και επί μετασχηματισμούς που διατηρούν τις σχέσεις στις οποίες θεμελιώνεται η Υ.Γ. Στο μοντέλο του Δίσκου όπως έχει αναπτυχθεί ως τώρα, οι αυτομορφισμοί θα πρέπει να διατηρούν την οικογένεια των κύκλων και των ευθειών, να διατηρούν τις γωνίες και να απεικονίζουν σύμφωνα ε.τ. σε σύμφωνα ε.τ.

Μια μεγάλη οικογένεια μετασχηματισμών που διατηρεί όλες αυτές τις σχέσεις (αν αναφερθούμε σε μιγαδικές συντεταγμένες) είναι οι μετασχηματισμοί Möbius, δηλαδή οι απεικονίσεις της μορφής:

$$M : z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}, \text{ όπου } |ad-cb| \neq 0$$

Ένα αναλλοίωτο αυτών των απεικονίσεων είναι ο *διπλός λόγος*, δηλαδή η ποσότητα:

$$(z_1, z_2 : z_3, z_4) := \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4} \bigg/ \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_4}$$

που είναι πραγματικός αριθμός, εάν τα τέσσερα σημεία είναι συνευθειακά ή ομοκύκλια. Πιθανόν λοιπόν οι ιδιότητες του διπλού λόγου να μπορούν να οδηγήσουν σε έναν ορισμό μιας σχέσης συμφωνίας, σε συνδυασμό με τα αξιώματα της Ο.Γ. και με τη διαίσθηση που παρέχεται από την Ε.Γ., όπου δύο ε.τ. είναι σύμφωνα εάν έχουν ίσα ευκλείδεια μήκη (με ό,τι αυτό συνεπάγεται: *θετικότητα* και *προσθετικότητα*).

Συμβολισμοί: Με $\overline{AB}$ θα συμβολίζουμε το ευκλείδειο μήκος του τμήματος της D-ευθείας που ορίζεται από τα A, B. Με $\widehat{AB}$ θα συμβολίζουμε το υπερβολικό μήκος του τμήματος της D-ευθείας που ορίζεται από τα A, B. Δηλαδή $\widehat{AB} = \mathcal{R}(AB)$.

Ορισμός: ***Poincaré μήκος:***
Έστω A, B δύο D-σημεία. Εάν P, Q είναι τα οριακά ευκλείδεια σημεία της D-ευθείας $\underleftrightarrow{AB}$ (δηλ. $P, Q \in \partial\underleftrightarrow{AB} - \underleftrightarrow{AB}$) τότε ορίζεται ο διπλός λόγος:

$$(AB : PQ) := \frac{\overline{AP}}{\overline{AQ}} \bigg/ \frac{\overline{BP}}{\overline{BQ}}$$

Ορίζουμε τώρα ως Poincaré μήκος $\widehat{AB}$ τον αριθμό:

$$\widehat{AB} := |\log(AB : PQ)| \in \mathbb{R}^+$$

Παρατηρήσεις (2.13):

I. Το $\widehat{AB}$ δεν εξαρτάται από τη σειρά των A, B αφού:

$$|\log(AB:PQ)| = |-\log(AB:PQ)| = \left|\log\frac{1}{(AB:PQ)}\right| = |\log(BA:PQ)|$$

II. Το $\widehat{AB}$ δεν εξαρτάται από τη σειρά των P, Q αφού:

$$|\log(AB:PQ)| = |-\log(AB:PQ)| = \left|\log\frac{1}{(AB:PQ)}\right| = |\log(AB:QP)|$$

Ορισμός: *Συμφωνία κατά Poincaré:*
Τα ε.τ. $AB, \Gamma\Delta$ του μοντέλου του Δίσκου είναι σύμφωνα κατά Poincaré εάν έχουν ίσα Poincaré μήκη. Δηλαδή:

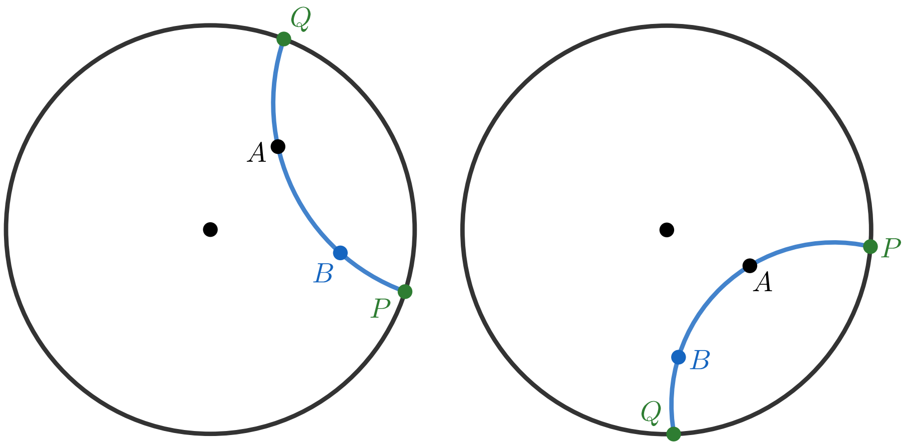
$$AB \cong \Gamma\Delta :\Leftrightarrow \widehat{AB} = \widehat{\Gamma\Delta}$$

Σε αυτό το σημείο θα πρέπει να πιστοποιηθούν τα εξής αξιώματα *συμφωνίας* για τα ε.τ.

Για το Γ.1: *(Μεταφορά των ε.τ.)* Για κάθε σημείο A και για κάθε ημιευθεία της Υ.Γ. του Δίσκου όπως στο σχήμα, ένα σημείο B κινούμενο στο στην ημιευθεία αυτή ορίζει διπλό λόγο:

$$1 \leqslant (AB:PQ) < \infty \textbf{ ή } 0 < (AB:PQ) \leqslant 1$$

Μάλιστα, κάθε τιμή του $[1,\infty)$ ή του $(0,1]$ λαμβάνεται ακριβώς μία φορά. Λόγω των ιδιοτήτων του λογαρίθμου, η ποσότητα $|\log(AB:PQ)|$ λαμβάνει κάθε τιμή του $[0,\infty)$. Επομένως υπάρχει ένα D-σημείο στην ημιευθεία της Υ.Γ. του Δίσκου έτσι ώστε το μήκος $\widehat{AB}$ να γίνεται οποιοσδήποτε θετικός πραγματικός αριθμός.



Για το Γ.3: *(Προσθετικότητα των ε.τ.)* Αυτό που θα χρειαστεί να δειχθεί είναι ότι εάν για τρια D-σημεία ισχύει $A-B-\Gamma$ (στην Υ.Γ.), τότε $\widehat{A\Gamma} = \widehat{AB} + \widehat{B\Gamma}$. Για να αποδείξουμε το συγκεκριμένο παρατηρούμε τα εξής δύο:

- $(A\Gamma:PQ) = \dfrac{\overline{AP}}{\overline{AQ}} \Big/ \dfrac{\overline{\Gamma P}}{\overline{\Gamma Q}} = \left[\dfrac{\overline{AP}}{\overline{AQ}} \Big/ \dfrac{\overline{BP}}{\overline{BQ}}\right] \cdot \left[\dfrac{\overline{BP}}{\overline{BQ}} \Big/ \dfrac{\overline{\Gamma P}}{\overline{\Gamma Q}}\right] = (AB:PQ)\cdot(B\Gamma:PQ).$

- Εάν $A-B-\Gamma$ και $B-\Gamma-P$, τότε $\dfrac{\overline{AP}}{\overline{AQ}} \geqslant \dfrac{\overline{BP}}{\overline{BQ}} \geqslant \dfrac{\overline{\Gamma P}}{\overline{\Gamma Q}}$. Άρα:

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{AQ}} \Big/ \frac{\overline{BP}}{\overline{BQ}},\ \frac{\overline{AP}}{\overline{AQ}} \Big/ \frac{\overline{\Gamma P}}{\overline{\Gamma Q}},\ \frac{\overline{BP}}{\overline{BQ}} \Big/ \frac{\overline{\Gamma P}}{\overline{\Gamma Q}} \geqslant 1 \Rightarrow \log(AB:PQ), \log(A\Gamma:PQ), \log(B\Gamma:PQ) \geqslant 0$$

  Εάν $A-B-\Gamma$ και $B-\Gamma-Q$, τότε $\dfrac{\overline{AP}}{\overline{AQ}} \leqslant \dfrac{\overline{BP}}{\overline{BQ}} \leqslant \dfrac{\overline{\Gamma P}}{\overline{\Gamma Q}}$. Άρα:

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{AQ}} \Big/ \frac{\overline{BP}}{\overline{BQ}},\ \frac{\overline{AP}}{\overline{AQ}} \Big/ \frac{\overline{\Gamma P}}{\overline{\Gamma Q}},\ \frac{\overline{BP}}{\overline{BQ}} \Big/ \frac{\overline{\Gamma P}}{\overline{\Gamma Q}} \leqslant 1 \Rightarrow \log(AB:PQ), \log(A\Gamma:PQ), \log(B\Gamma:PQ) \leqslant 0$$

Δηλαδή σε κάθε περίπτωση, οι λογάριθμοι είναι ομόσημοι.

Λόγω των δύο προηγούμενων σημείων (•) μπορεί να προκύψει ο ζητούμενος τύπος, αφού:

$$\widehat{A\Gamma} = |\log(A\Gamma : PQ)| = \left|\log\big((AB : PQ)(B\Gamma : PQ)\big)\right| = |\log(AB : PQ)| + |\log(B\Gamma : PQ)| = \widehat{AB} + \widehat{B\Gamma}$$

IV. Αξιώματα συμπτωσης (τριγ.):

Ουσιαστικά στο μέρος αυτό θα πιστοποιήσουμε το αξίωμα **Γ.6**:

- Έστω $A, A', B, B', \Gamma, \Gamma' \in \mathcal{P}_D$ και τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$, $\overset{\triangle}{A'B'\Gamma'}$. Εάν $AB \cong_{\text{ε.τ.}} A'B'$, $A\Gamma \cong_{\text{ε.τ.}} A'\Gamma'$ και $\widehat{BA\Gamma} \cong_{\text{γων.}} \widehat{B'A'\Gamma'}$, τότε $\widehat{AB\Gamma} \cong_{\text{γων.}} \widehat{A'B'\Gamma'}$.

Η απόδειξη του αξιώματος αυτού είναι αρκετά ευρηματική και θα γίνει σε βήματα.

Βήμα I: Εάν $\delta = (K, r)$, $\varepsilon = (O, \rho)$ είναι δύο κύκλοι που τέμνονται ορθογώνια, τότε:

i. Η συνήθης αντιστροφή κέντρου K και δύναμης r^2 απεικονίζει την περιφέρεια του ε στον εαυτό της και το εσωτερικό του δίσκου που έχει ως περιφέρεια την ε στον εαυτό του.

ii. Η συνήθης αντιστροφή κέντρου K και δύναμης r^2 διατηρεί τις σχέσεις *πρόσπτωσης*, *διάταξης* και *συμφωνίας*, όταν το εσωτερικό της ε είναι ο Δίσκος γ του μοντέλου.

Βήμα II: Εάν θεωρήσουμε $\partial\gamma = \varepsilon$, τότε ισχύει ο τύπος:

$$\forall B \in \mathcal{P}_D : \ \overline{OB} = \rho \cdot \frac{e^{\widehat{OB}} - 1}{e^{\widehat{OB}} + 1}$$

Κατ' επέκταση, εάν δύο Poincaré μήκη είναι ίσα στις διαμέτρους, τότε τα αντίστοιχα ευκλείδεια είναι ίσα.

Στα παρακάτω θα θεωρούμε $\sigma = \operatorname{sign}((OB : PQ) - 1)$. Πράγματι λοιπόν, ισχύει ότι $\widehat{OB} = |\log(OB : PQ)| \Rightarrow (OB : PQ) = e^{\sigma \cdot \widehat{OB}}$. Επιπλέον παρατηρούμε ότι:

$$(OB : PQ) = \frac{\overline{OP}}{\overline{OQ}} \Big/ \frac{\overline{BP}}{\overline{BQ}} = \frac{\rho}{\rho} \Big/ \frac{\overline{BP}}{\overline{BQ}} = \frac{\overline{BQ}}{\overline{BP}} = \frac{\rho + \sigma \cdot \overline{OB}}{\rho - \sigma \cdot \overline{OB}}$$

Και συνεπώς:

$$e^{\sigma \cdot \widehat{OB}} = \frac{\rho + \sigma \cdot \overline{OB}}{\rho - \sigma \cdot \overline{OB}} \Rightarrow \rho\big(e^{\sigma \cdot \widehat{OB}} - 1\big) = \sigma \cdot \overline{OB}\big(e^{\sigma \cdot \widehat{OB}} + 1\big) \Rightarrow \overline{OB} = \rho\sigma \cdot \frac{e^{\sigma \cdot \widehat{OB}} - 1}{e^{\sigma \cdot \widehat{OB}} + 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{Εάν } \sigma = -1 : \ \overline{OB} = -\rho \cdot \dfrac{e^{-\widehat{OB}} - 1}{e^{-\widehat{OB}} + 1} = -\rho \cdot \left[\dfrac{1 - e^{\widehat{OB}}}{e^{\widehat{OB}}} \Big/ \dfrac{e^{\widehat{OB}} + 1}{e^{\widehat{OB}}} \right] = \rho \cdot \dfrac{e^{\widehat{OB}} - 1}{e^{\widehat{OB}} + 1} \\[2ex] \text{Εάν } \sigma = 1 : \ \overline{OB} = \rho \cdot \dfrac{e^{\widehat{OB}} - 1}{e^{\widehat{OB}} + 1} \end{cases}$$

Βήμα III: Εάν στο μοντέλο του Δίσκου δοθεί ένα τρίγωνο $\overset{\triangle}{XYZ}$, τότε μπορεί να βρεθεί τρίγωνο $\overset{\triangle}{OY'Z'}$ το οποίο είναι σύμφωνό του.

Πράγματι, αυτό που θα επιχειρίσουμε είναι να βρούμε μια απεικόνιση που να διατηρεί τη γεωμετρία του Δίσκου, τέτοια ώστε $X \mapsto O$, όταν βέβαια $X \neq O$ - διαφορετικά δεν έχει να βρεθεί απεικόνιση. Μία οικογένεια απεικονίσεων που διατηρούν τη γεωμετρία είναι οι συνήθεις αντιστροφές, όταν αυτές χρησιμοποιούν ορθογώνιους προς τον γ κύκλους (**Βήμα I**). Επομένως ειδικότερα θα αναζητήσουμε μία συνήθη αντιστροφή που χρησιμοποιεί ορθογώνιο προς τον γ κύκλο και που απεικονίζει το X στο O.

Φέρουμε την ημιευθεία $\underrightarrow{OX}$ της Ε.Γ. και παρατηρούμε ότι το κέντρο της συνήθους αντιστροφής θα βρίσκεται επί της ημιευθείας αυτής. Ας θεωρήσουμε $\delta = (K, r)$ τον κύκλο ως προς τον οποίον γίνεται η αντιστροφή, και επιπλέον Ξ το σημείο τομής του δ με την $\underrightarrow{OX}$, το οποίο βρίσκεται εντός του γ. Εάν ο δ είναι ορθογώνιος προς τον γ, τότε σύμφωνα με το **Θεώρημα:** ***Τέμνουσες του κύκλου στην Ε.Γ.***:

$$\rho^2 = \mathcal{R}^*(O\Xi)\cdot\big(\mathcal{R}^*(OK)+r\big) = \big(\mathcal{R}^*(OK)-r\big)\cdot\big(\mathcal{R}^*(OK)+r\big) = \mathcal{R}^*(OK)^2 - r^2$$

Επειδή επιπλέον $r^2 = \mathcal{R}^*(KX)\cdot\mathcal{R}^*(OK) = \big(\mathcal{R}^*(OK)-\mathcal{R}^*(OX)\big)\cdot\mathcal{R}^*(OK)$, έπεται ότι $\rho^2 = \mathcal{R}^*(OK)\cdot\mathcal{R}^*(OX)$.

Επομένως:

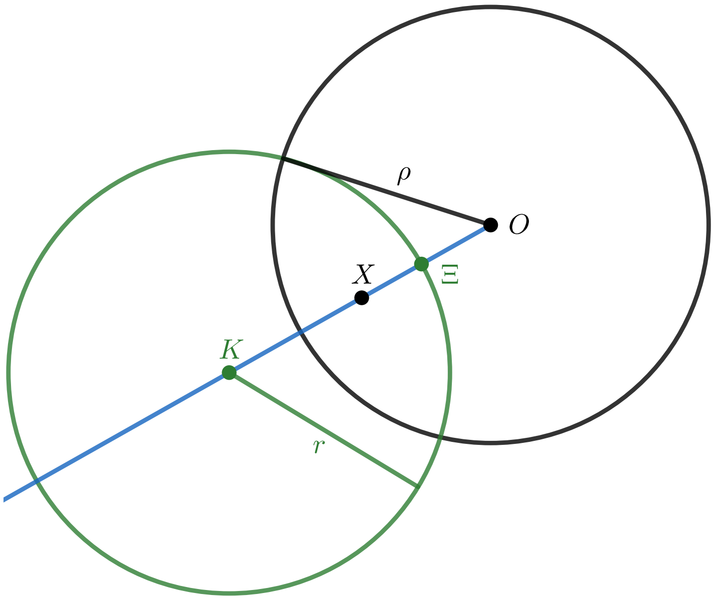
$$r^2 = \left(\frac{\rho^2}{\mathcal{R}^*(OX)} - \mathcal{R}^*(OX)\right)\cdot\frac{\rho^2}{\mathcal{R}^*(OX)} \Rightarrow r = \frac{\rho}{\mathcal{R}^*(OX)}\cdot\sqrt{\rho^2-\mathcal{R}^*(OX)^2}$$

Ο ζητούμενος λοιπόν κύκλος $\delta = (K, r)$ έχει κέντρο $K \in \underrightarrow{OX}$ τέτοιο ώστε να ορίζεται μήκος:

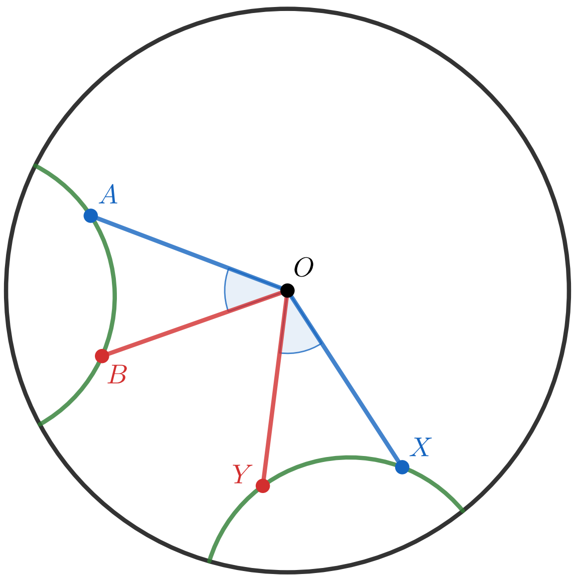
$$\mathcal{R}^*(OK) = \frac{\rho^2}{\mathcal{R}^*(OX)}$$

και έχει ακτίνα r ίση με:

$$r = \frac{\rho}{\mathcal{R}^*(OX)}\cdot\sqrt{\rho^2-\mathcal{R}^*(OX)^2}$$



Βήμα IV: Λόγω του **Βήματος III**, η πιστοποίηση του αξιώματος ανάγεται στην περίπτωση όπου δύο τρίγωνα $\overset{\triangle}{OB}\Gamma$, $\overset{\triangle}{OXY}$ του Δίσκου έχουν κοινή την κορυφή της σύμφωνης γωνίας τους και μάλιστα η κορυφή αυτή είναι το κέντρο O. Επιπλέον, οι πλευρές με $\widehat{OA} = \widehat{OX}$, $\widehat{OB} = \widehat{OY}$ των σύμφωνων γωνιών $\widehat{AOB} \cong \widehat{XOY}$ είναι πάνω σε ακτίνες.



Επειδή $\widehat{OA} = \widehat{OX},\ \widehat{OB} = \widehat{OY}$, από το **Βήμα II**, $\mathcal{R}^*(OA) = \overline{OA} = \overline{OX} = \mathcal{R}^*(OX)$ και $\mathcal{R}^*(OB) = \overline{OB} \cong \overline{OY} = \mathcal{R}^*(OY)$. Τα ευκλείδεια λοιπόν τρίγωνα $\overset{\triangle}{AOB},\ \overset{\triangle}{AOB}$ είναι ίσα και συνεπώς υπάρχει μία ισομετρία που απεικονίζει το ένα επί του άλλου. Αυτή η ισομετρία είναι σύνθεση μίας στροφής κέντρου O, η οποία ενδεχομένως ακολουθείται από μία ανάκλαση σε μία ευθεία που περιέχει το O. Καθένας από αυτούς τους μετασχηματισμούς του Δίσκου διατηρεί τη γεωμετρία, επομένως και η αντίστοιχη ισομετρία διατηρεί τη γεωμετρία του Δίσκου. Από αυτό έπεται ότι $\widehat{BAO} \cong \widehat{YXO}$ και το αξίωμα πιστοποιείται.

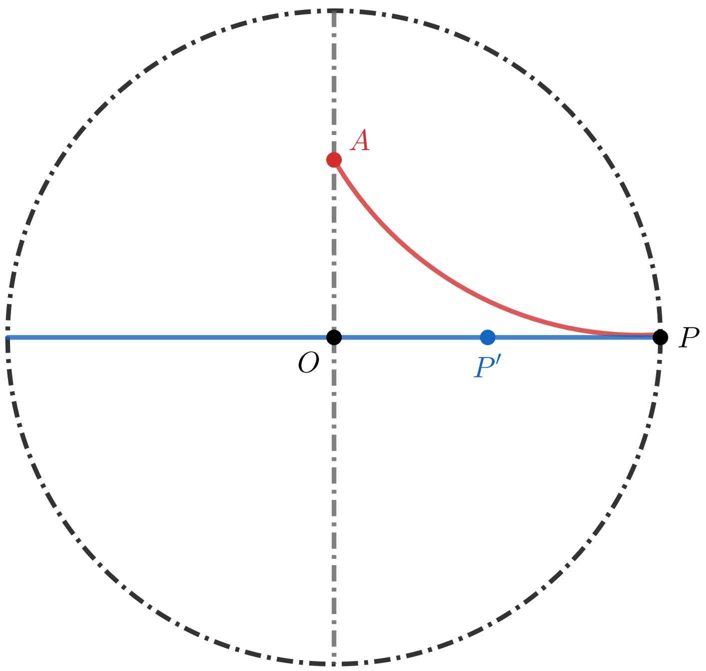
2.5.5 Για τη Γεωμετρία του μοντέλου του Δίσκου του Poincaré

I. Η οριακά παράλληλη ευθεία:

Ακολουθώντας συλλογισμούς ανάλογους του **2.5.4, IV., Βήμα III**, μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι είναι δυνατόν να βρεθεί μετασχηματισμός I (συγκεκριμένα συνήθης αντιστροφή) που διατηρεί τη γεωμετρία του Δίσκου και επιπλέον απεικονίζει την D-ευθεία l σε διάμετρο l' του γ και το σημείο A στο $I(A)$, το οποίο κείται στην κάθετη διάμετρο από το O προς την l'.

Εάν τώρα P είναι το σ.τ. της l' με την περιφέρεια $\partial\gamma$, μπορεί να βρεθεί ορθογώνια προς τον γ περιφέρεια C, η οποία διέρχεται από τα A, P, σύμφωνα με την παράγραφο **2.5.4, III**. Να σημειωθεί ότι στην παράγραφο αυτή δείξαμε το αποτέλεσμα για σημεία A, P του ανοιχτού δίσκου γ, όμως η απόδειξη μένει αναλλοίωτη όταν το P ανήκει στην περιφέρεια $\partial\gamma$. Οπότε το αποτέλεσμα ισχύει και στην περίπτωση αυτή.

Η ορθογώνια περιφέρεια C μεταξύ των A, P παριστά την οριακά παράλληλη ημιευθεία από το A προς την ημιευθεία $\underrightarrow{OP'}$, όπου $O - P' - P$.



II. Η γωνία παραλληλίας:

Έστω $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ και A ένα σημείο τέτοιο ώστε $\widehat{OA} = \alpha$. Θεωρούμε $P \in \partial\gamma$ ένα σημείο τέτοιο ώστε τα ε.τ. OA, OP να τέμνονται κάθετα, και C την ορθογώνια προς τον γ περιφέρεια που διέρχεται από τα A, P. Παρατηρούμε ότι η ευθεία $l = C \cap \gamma$ είναι οριακά παράλληλη προς την ημιευθεία $s = OP \cap \gamma$ του Δίσκου.

Εφόσον οι γωνίες του μοντέλου του Δίσκου είναι οι ευκλείδειες γωνίες των καμπυλών, για να υπολογιστεί η γωνία παραλληλίας $\Pi(OA)$ αρκεί να βρεθεί η γωνία $\widehat{OA\Gamma}$, όπου $\underleftrightarrow{A\Gamma}$ είναι εφαπτόμενη της οριακά παράλληλης l και $\Gamma \in s$.

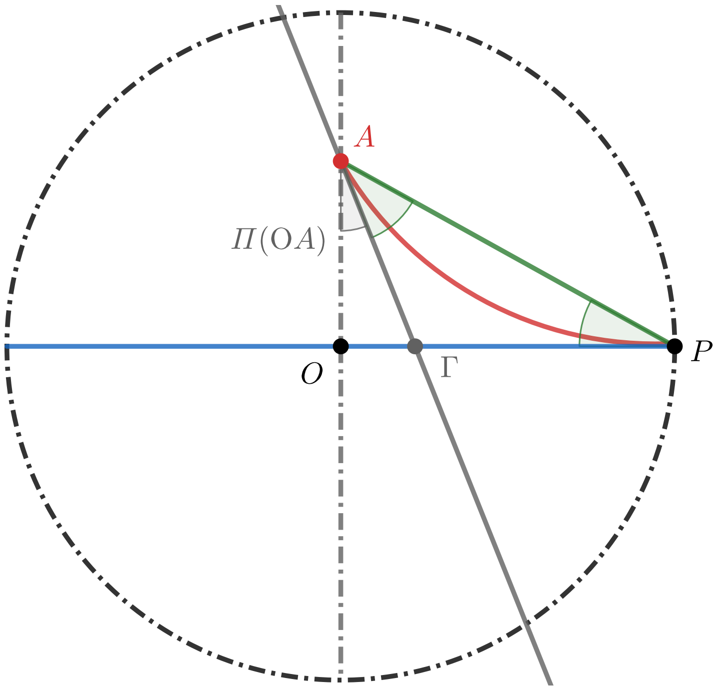
Παρατηρούμε ότι οι ΓA, ΓP είναι εφαπτόμενες του ίδιου κύκλου C, επομένως είναι σύμφωνες. Το ευκλείδειο λοιπόν τρίγωνο $\overset{\triangle}{A\Gamma P}$ είναι ισοσκελές με $\Gamma A \cong \Gamma P$, και άρα σε αυτό ισχύει $\widehat{\Gamma AP} \cong \Gamma PA = \theta$.

Από το τρίγωνο $\overset{\triangle}{OAP}$ μπορούν να προκύψουν οι σχέσεις:

$$\tan \mathcal{A}(\theta) = \frac{\mathcal{R}^*(OA)}{\mathcal{R}^*(OP)} \Rightarrow \overline{OA} = \rho \cdot \tan \mathcal{A}(\theta)$$

και:

$$\Pi(OA) + 2\theta = \perp \Rightarrow \mathcal{A}(\theta) = \frac{\pi}{4} - \frac{\mathcal{A}(\Pi(OA))}{2} \Rightarrow \tan \mathcal{A}(\theta) = \left(1 - \tan \frac{\mathcal{A}(\Pi(OA))}{2}\right) \Big/ \left(1 + \tan \frac{\mathcal{A}(\Pi(OA))}{2}\right)$$



Αντικαθιστώντας την πρώτη από αυτές τις σχέσεις στον τύπο $e^{\widehat{OA}} = \dfrac{\rho + \overline{OA}}{\rho - \overline{OA}}$ προκύπτει ότι:

$$e^{\widehat{OA}} = \frac{1 + \tan \mathcal{A}(\theta)}{1 - \tan \mathcal{A}(\theta)}$$

Αντικαθιστώντας τη δεύτερη σχέση αυτήν τη φορά, μπορεί να ληφθεί ο τύπος:

$$e^{\widehat{OA}} = 1 \Big/ \tan \frac{\mathcal{A}\big(\Pi(OA)\big)}{2} \Rightarrow \mathcal{A}\big(\Pi(OA)\big) = 2 \arctan \left(e^{-\widehat{OA}}\right)$$

Το τελευταίο αποτέλεσμα αρκεί για να προσδιοριστεί επακριβώς η γωνία παραλληλίας $\Pi(OA)$.

2.6 Ασκήσεις του Κεφαλαίου 2

1. i. Δείξτε ότι στην Υ.Γ. κάθε τετράπλευρο έχει άθροισμα γωνιών μικρότερο των τεσσάρων ορθών.

   ii. Γενικεύστε το παραπάνω αποτέλεσμα δείχνοντας ότι κάθε πολύπλευρο n πλευρών της Υ.Γ. έχει άθροισμα γωνιών μικρότερο του $(n-2) \cdot 2\perp$.

2. Στη **Πρόταση (2.7)** αποδείξτε με λεπτομέρεια την κατεύθυνση ($\Leftarrow$).

3. Έστω ένα ισοσκελές α.α.τριγ $\underrightarrow{A, \overset{\triangle}{B} M}$ και AH, BK τα κάθετα ε.τ. προς της οριακά παράλληλες πλευρές του. Έστω επίσης $O = AH \cap BK$. Να αποδειχθεί ότι η κάθετος $\underrightarrow{\Lambda Q}$ προς την AB είναι οριακά παράλληλη προς τις μη πεπερασμένες πλευρές του α.α.τριγ.

4. Δείξτε ότι η Ο.Γ. οδηγεί στην Ε.Γ. εάν και μόνο αν για κάθε τέμνουσα δύο μη ταυτιζομένων, παράλληλων ευθειών ισχύει το θεώρημα για τις 'εντός - εναλλάξ' γωνίες.

5. Αποδείξτε ότι στην Υ.Γ. δεν υπάρχει ευθεία που τέμνει και τις τρεις πλευρές ενός τ.α.τριγ.

6. Στα πλαίσια της Ο.Γ. να αποδειχθεί ότι κάθε δύο εσωτερικοί διχοτόμοι ενός τριγώνου τέμνονται. Από αυτό συμπεράνετε ότι για κάθε τρίγωνο της Υ.Γ. υπάρχει σημείο που ισαπέχει των τριών πλευρών.

7. Στα πλαίσια της Ε.Γ. αποδείξτε ότι κάθε δύο μεσοκάθετοι στις πλευρές ενός τριγώνου τέμνονται. Πώς ακριβώς χρησιμοποιήσατε το 5^o αίτημα του Ευκλείδη;

8. α. Στα πλαίσια της Υ.Γ., εάν οι μεσοκάθετοι σε δύο πλευρές ενός τριγώνου δεν τέμνονται, να αποδειχθεί ότι:

      i. Αν δέχονται κοινή κάθετο, τότε αυτή είναι κάθετος της μεσοκάθέτου της τρίτης πλευράς.

      ii. Αν είναι οριακά παράλληλες, τότε η μεσοκάθετος της τρίτης πλευράς είναι οριακά παράλληλη προς τις άλλες δύο.

   β. Χρησιμοποιώντας το 'α.', διατυπώστε μία ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε για ένα τρίγωνο της Υ.Γ. να υπάρχει σημείο που ισαπέχει από τις τρεις κορυφές του.

9. Έστω Λ, M, N τα μέσα των πλευρών AB, $B\Gamma$ και ΓA αντίστοιχα ενός τριγώνου $A\overset{\triangle}{B}\Gamma$ της Υ.Γ. Να δείξετε ότι τα τρίγωνα $A\overset{\triangle}{\Lambda}N$, $A\overset{\triangle}{B}\Gamma$ δεν μπορούν να έχουν τις γωνίες τους μία προς μία σύμφωνες. Επιπλέον, τα ευθύγραμμα τμήματα ΛN, BM δεν είναι δυνατόν να είναι σύμφωνα.

10. Αποδείξτε ότι στην Υ.Γ. υπάρχει ένα τρίγωνο του οποίου οι μεσοκάθετοι από δύο πλευρές δεν τέμνονται.

11. Δείξτε ότι σε κάθε τ.α.τριγ. υπάρχει ένα σημείο που ισαπέχει των τριών πλευρών του.

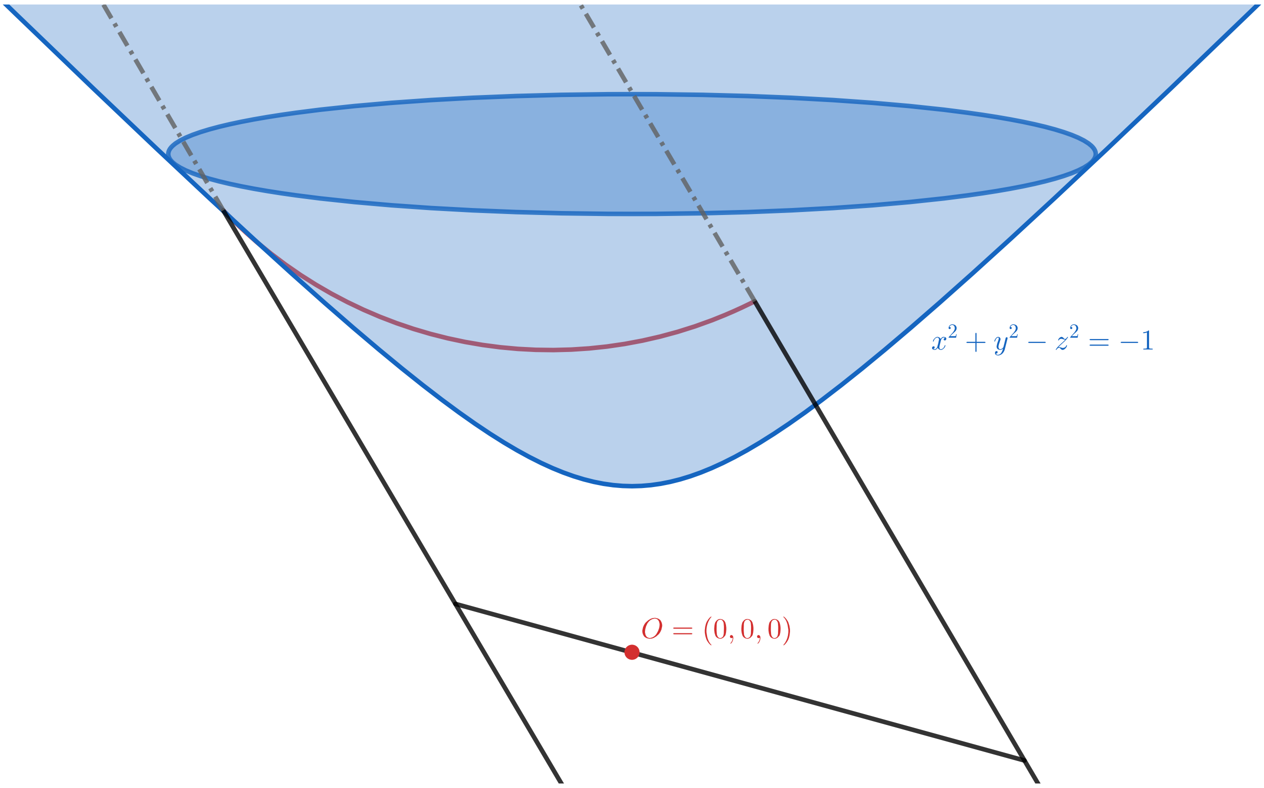
12. Γιατί ο Poincaré διάλεξε για το μοντέλο του ανοιχτό δίσκο γ και όχι κλειστό;

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Παράρτημα

3.1 Λοιπά μοντέλα της Υ.Γ.

3.1.1 Το μοντέλο του Υπερβολοειδούς του Minkowski



Το μοντέλο του Υπερβολοειδούς του Minkowski είναι σχετικά νέο στη Μαθηματική κοινότητα, τουλάχιστον συγκριτικά με τα υπόλοιπα μοντέλα, και σχετίζεται πολύ στενά με το μοντέλο του Δίσκου του Poincaré και με το προβολικό μοντέλο των Beltrami - Klein. Η στενή αυτή σύνδεση των τριών θα δειχθεί μέσω των απεικονίσεων που θα παρουσιαστούν στο αντίστοιχο μέρος **3.2**.

Υπάρχουν ενδείξεις ότι ο ίδιος ο Poincaré το χρησιμοποίησε στις προσωπικές του σημειώσεις, πριν ακόμη ο W. Killing (1847 - 1923) δημοσιεύσει τη μελέτη του στο μοντέλο. Το μοντέλο του Υπερβολοειδούς είναι χαρακτηριστικό για την Υ.Γ., αφού διακαιολογεί την ονομασία της.

Το μοντέλο αυτό χρησιμοποιείται επίσης σε κάποια κομμάτια της Θεωρίας της Σχετικότητας, οπότε δεν αποτελεί απλώς ένα καθαρά μαθηματικό δημιούργημα, αλλά έχει και μια πιο εφαρμοσμένη υπόσταση.

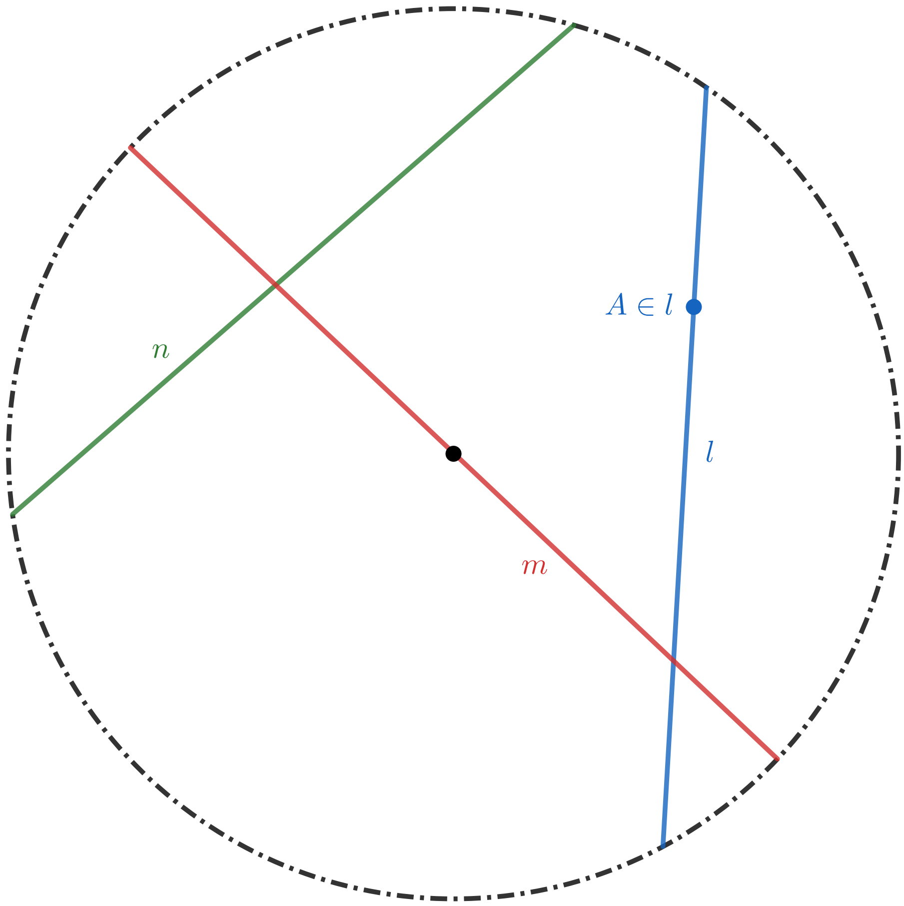
Ως υπερβολικό επίπεδο θεωρείται το άνω μέρος του υπερβολοειδούς με εξίσωση $x^2 + y^2 - z^2 = -1$ στο καρτεσιανό τριασδιάστατο σύστημα συντεταγμένων. Επομένως το σύνολο των σημείων (Μ-σημείων) της γεωμετρίας είναι ακριβώς το:

$$\mathcal{P}_M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = -1\}$$

Οι ευθείες του μοντέλου (Μ-ευθείες) είναι οι τομές του Υπερβολοειδούς με επίπεδα του $\mathbb{R}^3$, τα οποία διέρχονται από το O. Το σύνολο λοιπόν των ευθειών του μοντέλου είναι το:

$$\mathcal{L}_M = \bigcup_{(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3_*} \Big\{\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = -1 \textbf{ και } \alpha x + \beta y + \gamma z = 0\}\Big\}$$

3.1.2 Το Προβολικό μοντέλο των Beltrami - Klein



Το Προβολικό μοντέλο των Beltrami - Klein μοιάζει οπτικά αρκετά με το μοντέλο του Δίσκου του Poincaré. Συγκεκριμένα, τα δύο μοντέλα έχουν το ίδιο σύνολο σημείων, τα σημεία δηλαδή ενός ανοικτού δίσκου γ. Το σύνολο λοιπόν των σημείων (B-σημείων) του μοντέλου (αν αναφερθούμε σε καρτεσιανές συντεταγμένες) μπορούμε να θεωρήσουμε ότι είναι το:

$$\mathcal{P}_B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$$

Η ιδιαιτερότητα αυτού το μοντέλου είναι ότι χρησιμοποιεί ευκλείδεια ε.τ. ως ευθείες (B-ευθείες). Ειδικότερα χρησιμοποιεί χορδές του δίσκου γ, οι οποίες έχουν άκρα οριακά σημεία D-ευθειών.

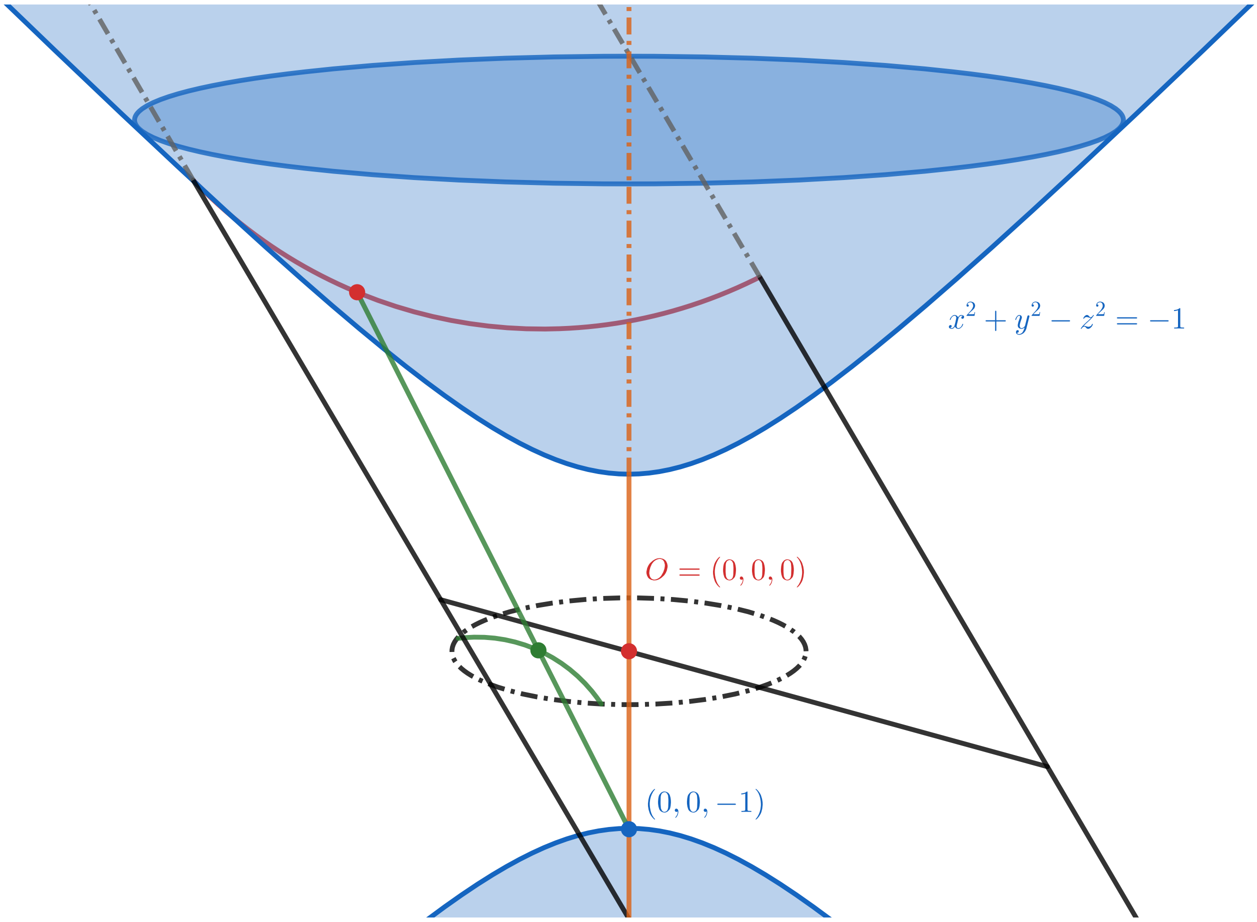
Είναι φανερό ότι στα δύο μοντέλα - στο Προβολικό μοντέλο και στο μοντέλο του Δίσκου - η διαφορά στον ορισμό της 'ευθείας γραμμής' στο ίδιο χωρίο γ οδηγεί σε διαφορά στον τρόπο μέτρησης του μήκους. Μάλιστα στο Προβολικό μοντέλο οι συναρτήσεις ($\mathcal{R}$) μέτρησης του μήκους μπορούν να γίνουν αρκετά περίπλοκες. Ενδεικτικά αναφέρουμε την παρακάτω συνάρτηση:

$$\forall A, B \in \mathcal{P}_B : \ \mathcal{R}(AB) = \int_{[a,b]} \sqrt{\frac{(1 - y(t)^2) \cdot x'(t)^2 + 2x(t)y(t) \cdot x'(t)y'(t) + (1 - x(t)^2) \cdot y'(t)^2}{(1 - x(t)^2 - y(t)^2)^2}} \, dt$$

όπου το ε.τ. AB παραμετροποιείται μέσω της $\big(x(t), y(t)\big), \ t \in [a, b] \subset \mathbb{R}$.

3.2 Απεικονίσεις μεταξύ των μοντέλων

3.2.1 Μεταξύ του Υπερβολοειδούς του Minkowski και του Δίσκου του Poincaré



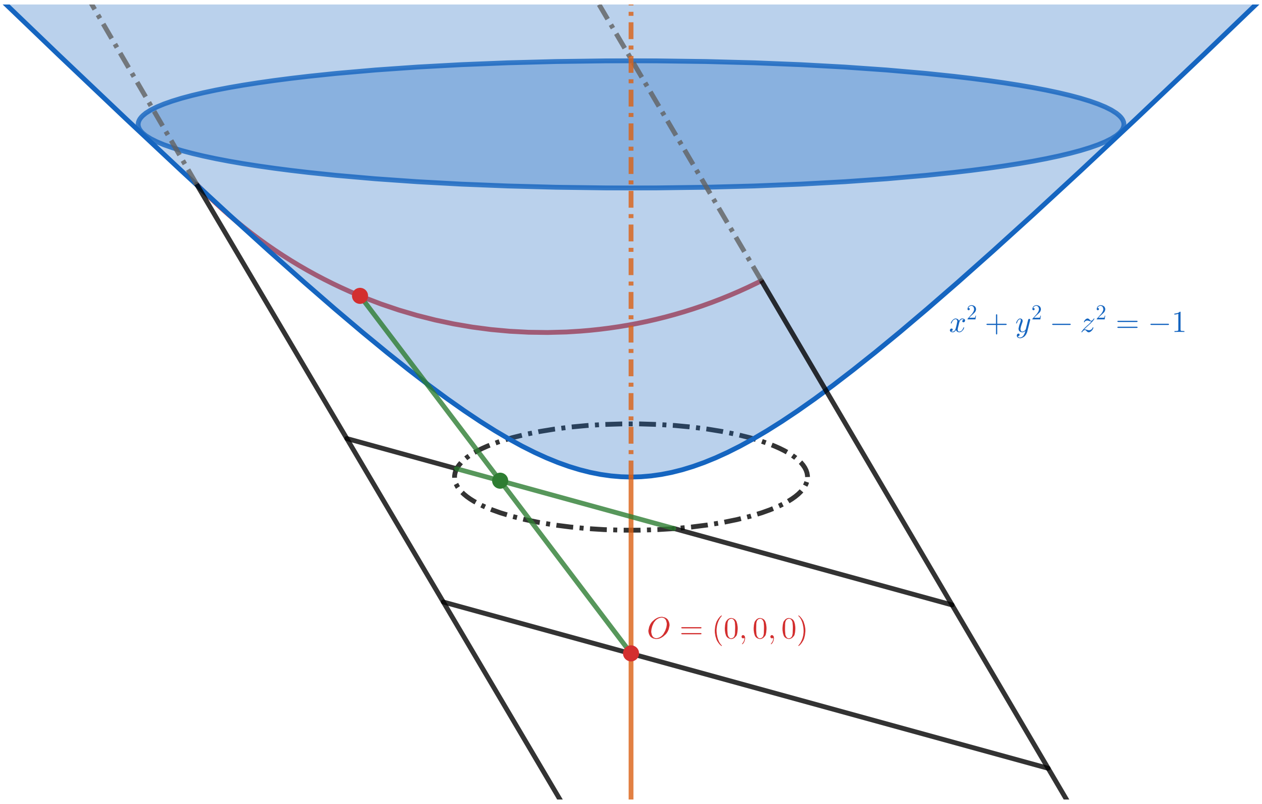
Θεωρούμε γ τον δίσκο του επιπέδου $z = 0$ με κέντρο το O. Ξεκινώντας από ένα σημείο A του Υπερβολοειδούς του Minkowski, φέρουμε το ευκλείδειο ε.τ. $A[(0, 0, -1)]$ και θεωρούμε P_A το σημείο τομής του ε.τ. αυτού με τον δίσκο γ. Εάν θεωρήσουμε τον δίσκο γ ως υπερβολικό επίπεδο του μοντέλου του Δίσκου, μπορεί να αποδειχθεί ότι απεικόνιση $MD : \mathcal{P}_M \to \mathcal{P}_D = \gamma$ που ορίζεται ως:

$$MD : A \mapsto P_A$$

είναι αμφιμονοσήμαντη και διατηρεί τη γεωμετρία των δύο μοντέλων.

Παρατήρηση (3.1): Τα μοντέλα λοιπόν του Υπερβολοειδούς του Minkowski και του Δίσκου του Poincaré είναι μεταξύ τους ισοδύναμα.

3.2.2 Μεταξύ του Υπερβολοειδούς του Minkowski και του Προβολικού Beltrami - Klein



Η απεικόνιση μεταξύ του Υπερβολοειδούς του Minkowski και του Προβολικού Beltrami - Klein μοιάζει αρκετά με την απεικόνιση που παρουσιάστηκε στο μέρος **3.2.1**.

Σε αυτήν την περίπτωση, θεωρούμε τον (εφαπτόμενο προς το υπερβολοειδές) δίσκο γ ο οποίος βρίσκεται στο επίπεδο $z = 1$ και έχει κέντρο το $(0, 0, 1)$. Ξεκινώντας από ένα σημείο A του Υπερβολοειδούς του Minkowski, φέρουμε το ευκλείδειο ε.τ. AO και θεωρούμε P_A το σημείο τομής του ε.τ. αυτού με τον δίσκο γ. Εάν θεωρήσουμε τον δίσκο γ ως υπερβολικό επίπεδο του μοντέλου του Δίσκου, μπορεί να αποδειχθεί ότι η απεικόνιση $MB : \mathcal{P}_M \to \mathcal{P}_D = \gamma$ που ορίζεται ως:

$$MB : A \to P_A$$

είναι αμφιμονοσήμαντη και διατηρεί τη γεωμετρία των δύο μοντέλων.

Παρατηρήσεις (3.2):
I. Τα μοντέλα του Υπερβολοειδούς του Minkowski και του Προβολικού Beltrami - Klein είναι μεταξύ τους ισοδύναμα.

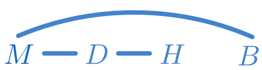
II. Στο κομμάτι αυτό θα προσπαθήσουμε να αυστηροποιήσουμε την ισοδυναμία των μοντέλων. Μεταξύ δύο μοντέλων A, B της Υ.Γ. θεωρούμε τη σχέση '$\sim$' η οποία ορίζεται ως:

$$A \sim B :\Leftrightarrow \exists f : \mathcal{P}_A \to \mathcal{P}_B \text{ αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση που διατηρεί τη γεωμετρία των } A, B$$

όπου $\mathcal{P}_A, \mathcal{P}_B$ είναι τα σύνολα σημείων των μοντέλων. Η σχέση '$\sim$' είναι μια σχέση ισοδυναμίας. Πράγματι, τετριμμένα ισχύει η αυτοπαθητική ιδιότητα και η συμμετρία. Θα πρέπει λοιπόν να δειχθεί η μεταβατικότητα.

Εάν $A \sim B$ και $B \sim \Gamma$, υπάρχουν αμφιμονοσήμαντες απεικονίσεις $f : \mathcal{P}_A \to \mathcal{P}_B$, $g : \mathcal{P}_B \to \mathcal{P}_\Gamma$ που διατηρούν τη γεωμετρία. Η σύνθεση $g \circ f$ είναι αμφιμονοσήμαντη και διατηρεί επίσης της γεωμετρία, επομένως $A \sim \Gamma$.

III. Από το **II.** μπορούμε να συνάγουμε ότι όλα τα μοντέλα που αναφέραμε είναι μεταξύ τους ισοδύναμα. Στο παρακάτω γράφημα φαίνεται ότι πράγματι από κάθε μοντέλο σε κάθε άλλο υπάρχει ένα μονοπάτι, μια διαδρομή από ισοδύναμα μοντέλα, που τα ενώνει.



Όπου M: Το μοντέλο του Υπερβολοειδούς, D: Το μοντέλο του Δίσκου, H: Το μοντέλο του Άνω Ημιεπιπέδου, B: Το Προβολικό μοντέλο.

3.3 Περί της 'αλήθειας' των γεωμετριών

Οι πρώτες αντιδράσεις από τους περισσότερους επιστήμονες της εποχής και κυρίως από τους 'απλούς' ανθρώπους απέναντι στην Υ.Γ. ήταν κυρίως αρνητικές. Αυτό εν μέρει συνέβαινε διότι, σύμφωνα με τη θεωρία του Kant, η Ε.Γ. είναι ένα προϊόν της ανθρώπινης διαίσθησης και γενικότερα του τρόπου με τον οποίο το ανθρώπινο μυαλό σκέφτεται. Επομένως, μόνο αυτή θα μπορούσε να αποτελεί "αληθινή γεωμετρία".

Η Υ.Γ. βέβαια, άρχισε σταδιακά να γίνεται δημοφιλής στη μαθηματική κοινότητα, μετά από προσπάθεια μιας νέας γενιάς Φυσικών και Μαθηματικών, όπως οι Helmholtz, Riemann, Beltrami και Klein. Ιδίως μετά τον θάνατο του Gauss και αφού δημοσιεύθηκε αλληλογραφία του στην οποία ο ίδιος διατύπωνε ότι πλέον είχε πειστεί για την ανεξαρτησία του $5^{ου}$ Αιτήματος, οι περισσότεροι μαθηματικοί αποδέχθηκαν τη νέα θεωρία.

Πέρα όμως από τη διαισθητική αποδοχή, η οποία ενέχει μια έννοια 'πίστης' (τουλάχιστον σε έναν βαθμό), πώς μπορούμε αυστηρά να αποφασίσουμε εάν μια μαθηματική θεωρία ισχύει; Μαθηματικά μιλώντας, θα πρέπει το αντίστοιχο αξιωματικό σύστημα να είναι:

- *Ανεξάρτητο*, δηλαδή κανένα αξίωμα της θεωρίας να μην αποδεικνύεται από τα υπόλοιπα.
- *Συνεπές*, δηλαδή να μην περιέχει αντιφάσεις.
- *Πλήρες*, δηλαδή όλες οι γεωμετρικές προτάσεις να μπορούν είτε να αποδειχθούν είτε να διαψευσθούν.

Η σύχρονη προσέγγιση για την αξιολόγηση της ανεξαρτησίας ενός αξιωματικού συστήματος είναι η κατασκευή *μοντέλων*. Έστω ότι θέλουμε να ελέγξουμε την ανεξαρτησία του αξιώματος χ στο αξιωματικό σύστημα S. Θεωρούμε το σύστημα S', που προκύπτει από το S όταν το χ αντικατασταθεί με την άρνησή του. Έπειτα προσπαθούμε να κατασκευάσουμε μοντέλο M' για το S'.

Πρόταση (3.1): Αν κατασκευάζεται ένα τέτοιο μοντέλο, τότε το χ είναι ανεξάρτητο.

Απόδειξη: Πράγματι, εάν το χ ήταν εξαρτημένο, θα ήταν θεώρημα που θα προέκυπτε από τα υπόλοιπα αξιώματα του S, συνεπώς θα ήταν μια αληθής πρόταση στο M'. Αυτό δεν μπορεί να συμβεί, αφού στο ίδιο το M' θα αληθεύει το χ και η άρνησή του.

□

Η αξιολόγηση της συνέπειας είναι κάτι αρκετά πιο περίπλοκο και γίνεται πάλι με την κατασκευή *μοντέλων*. Ουσιαστικά, όσον αφορά τη συνέπεια, συνήθως δεν αποσκοπούμε να αποδείξουμε τη συνέπεια του αξιωματικού συστήματος αυτή καθαυτή, αλλά να δείξουμε ότι ένα αξιωματικό σύστημα "είναι τόσο συνεπές όσο ένα άλλο αξιωματικό σύστημα". Αυτήν ακριβώς τη διαδικασία ακολουθήσαμε με την κατασκευή του μοντέλου του Δίσκου του Poincaré - εμφυτεύοντας ολόκληρη την Υ.Γ. στην Ε.Γ., δείξαμε κατά μία έννοια ότι "η Υ.Γ. ισχύει όσο και η Ε.Γ.".

Παραμένει βέβαια ακόμη το ερώτημα εάν όντως η Ε.Γ. (και κατ' επέκταση η Υ.Γ.) είναι συνεπής. Το ίδιο και για την πληρότητα των δύο συστημάτων: μπορούμε να αποφανθούμε εάν τα συστήματα είναι πλήρη; Συγκεκριμένα για την Ε.Γ., το καρτεσιανό επίπεδο του Descartes, με σύνολο σημείων $\mathcal{P}_E = \mathbb{R}^2$ και σύνολο ευθειών $\mathcal{L}_E = \bigcup_{(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3_*} \left\{\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \alpha x + \beta y + \gamma = 0\}\right\}$, αποτελεί μοντέλο. Επομένως τα τελευταία ερωτήματα απαντήθηκαν το 1931 με το επόμενο διάσημο θεώρημα:

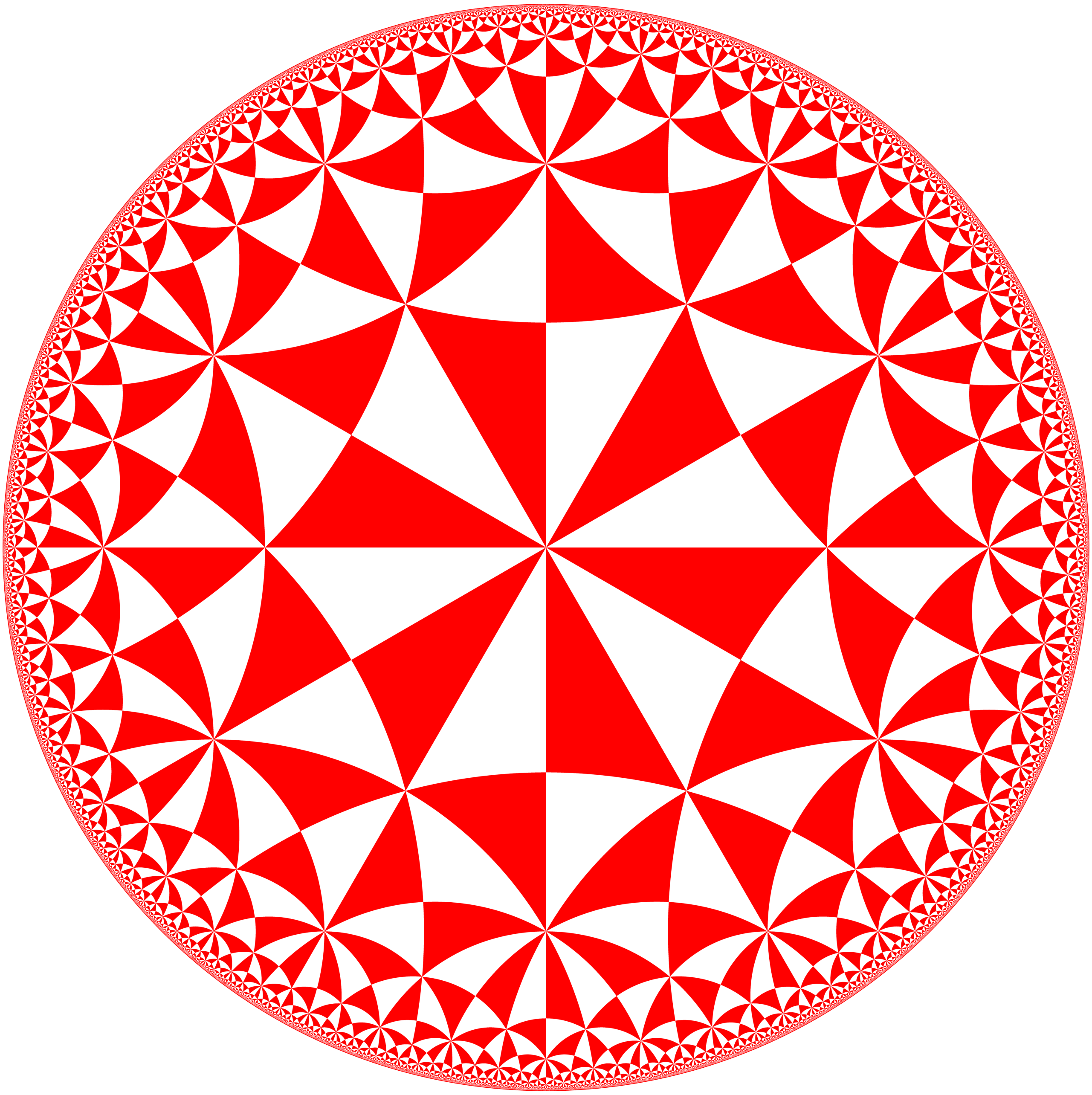
Θεώρημα: *Μη πληρότητας του Gödel ($1^η$ διατύπωση):*
Οποιαδήποτε αποτελεσματικά παραχθείσα θεωρία που είναι ικανή να εκφράσει τη στοιχειώδη αριθμητική δεν μπορεί να είναι και συνεπής και πλήρης. Συγκεκριμένα, για κάθε συνεπή, αποτελεσματικά παραχθείσα τυπική θεωρία που αποδεικνύει συγκεκριμένες αλήθειες βασικής αριθμητικής, υπάρχει μία αριθμητική δήλωση η οποία είναι αληθής, αλλά δεν μπορεί να αποδειχθεί από τη θεωρία.

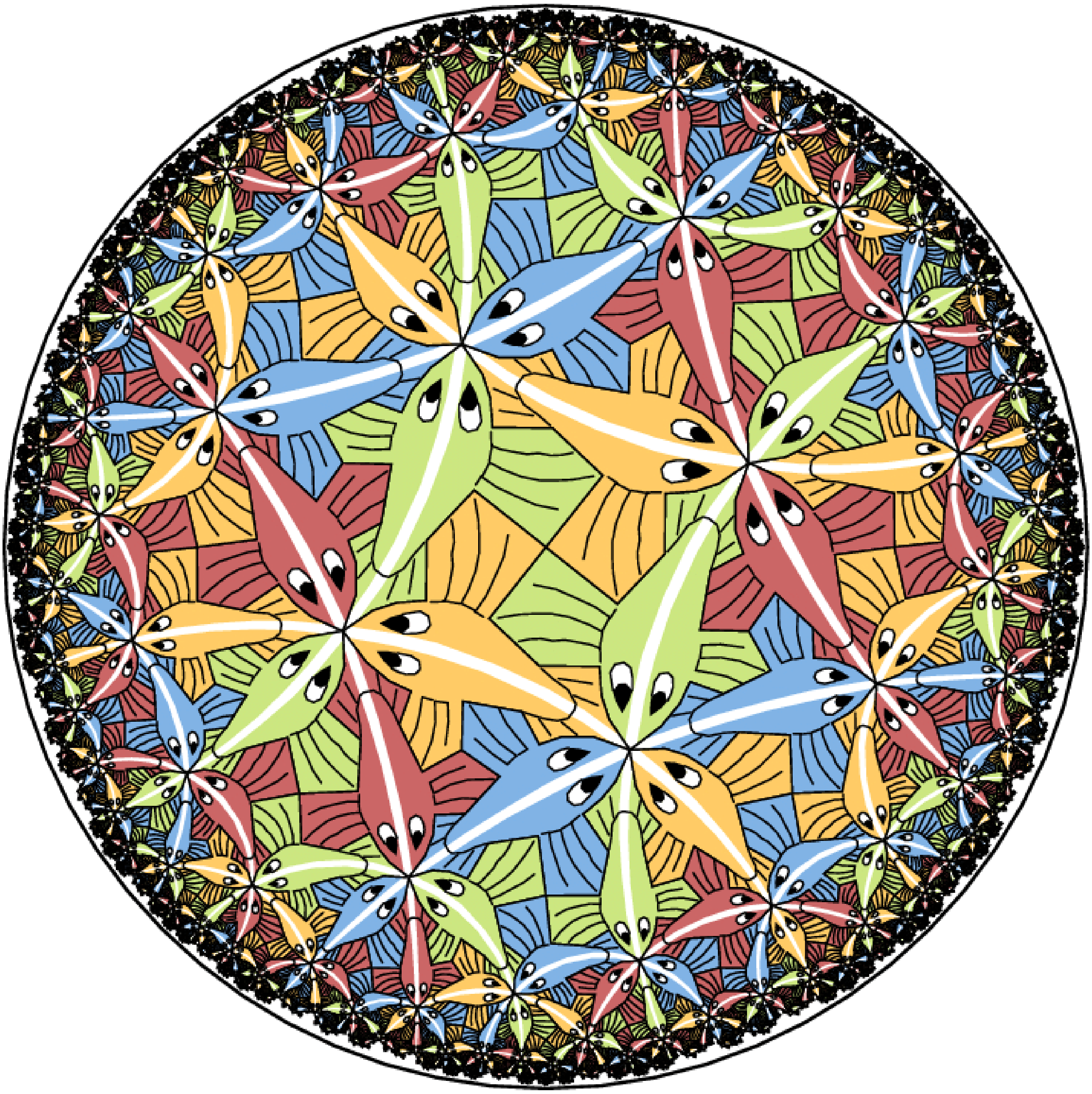
Θεώρημα: *Μη πληρότητας του Gödel ($2^η$ διατύπωση):*
Δεν μπορούμε να αποδείξουμε τη λογική συνέπεια ενός αξιωματικού συστήματος που είναι αρκετά περίπλοκο ώστε να περιέχει τους πραγματικούς αριθμούς, χωρίς να υποθέσουμε ένα άλλο σύνολο αξιωμάτων το οποίο είναι εξίσου περίπλοκο.

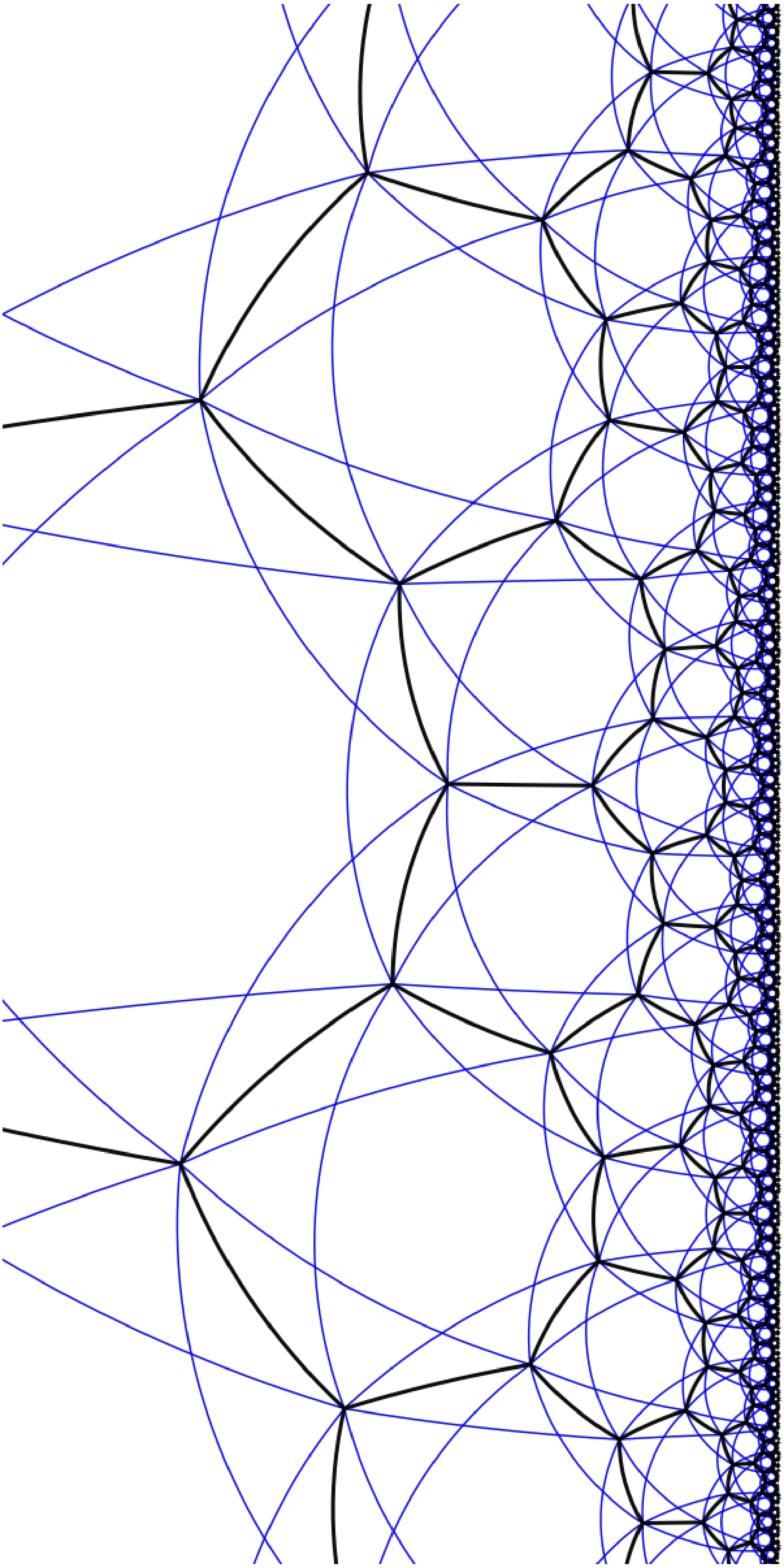
Επομένως κάθε προσπάθεια να αποδείξουμε την ‘απόλυτη αλήθεια’ οποιουδήποτε εκτός των απλούστερων συστημάτων είναι καταδικασμένη να αποτύχει. Θα πρέπει λοιπόν να είμαστε ευχαριστημένοι με το αποτέλεσμα ότι “η Υ.Γ. ισχύει όσο και η Ε.Γ.”. Όπως χαρακτηριστικά είχε διατυπώσει ο ίδιος ο Poincaré στο ‘*Science and Hypothesis*’ (σελ. 50):

> *“[...] Επομένως τα γεωμετρικά αξιώματα δεν είναι ούτε συνθετική εκ των προτέρων (a priori) διαίσθηση, ούτε πειραματικά γεγονότα. Είναι συμβάσεις. Η επιλογή μας από όλες τις πιθανές συμβάσεις καθοδηγείται μεν από πειραματικά γεγονότα, αλλά παραμένει ελεύθερη και περιορίζεται μόνο από την απαίτηση να αποφευχθεί κάθε άτοπο. Με άλλα λόγια, τα αξιώματα της γεωμετρίας είναι μόνο μεταμφιεσμένοι ορισμοί. Τότε λοιπόν, τι πρέπει να σκεφθούμε για το ερώτημα: ‘ισχύει η ευκλείδεια γεωμετρία;’. Δεν έχει νόημα. Είναι σαν να ρωτάμε αν ισχύει το μετρικό σύστημα, και αν τα παλιά μέτρα και σταθμά είναι λάθος· αν οι καρτεσιανές συντεταγμένες είναι αληθείς και οι πολικές συντεταγμένες είναι λάθος. Μια γεωμετρία δεν μπορεί να ισχύει περισσότερο από μία άλλη, μπορεί μόνο να είναι πιο βολική.”*

3.4 Καλλιτεχνικές αναπαραστάσεις των μοντέλων της Υ.Γ.







ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Βιβλιογραφία

Εδώ θα σταματήσουμε την παράθεση αποτελεσμάτων της Υ.Γ. ακολουθώντας μια αυστηρά αξιωματική μέθοδο, γιατί όπως ακριβώς και στην Ε.Γ., η βαθιά γνώση της γεωμετρίας αυτής επιτυγχάνεται αφ' ενός με την αλγεβρικοποίηση και αφ' ετέρου με την έρευνα της γεωμετρίας στα πλαίσια της Γεωμετρίας κατά Klein. Επιπλέον, στην παρουσίαση που επιχειρήθηκε δεν ακολουθήθηκε πιστά, όσον αφορά την ιστορική σειρά, η διαμόρφωση της Υ.Γ.

Τόσο αυτά τα θέματα όσο και άλλα της Υ.Γ. που δεν ήταν δυνατόν να παρουσιαστούν, μπορούν να αναζητηθούν στη βιβλιογραφία που ακολουθεί και που βοήθησε ουσιαστικά στη διαμόρφωση του κειμένου.

Βιβλιογραφία που χρησιμοποιήθηκε:

(*κ. Λάππας Διονύσιος*)

(1) Bornola,R.: ***Non Euclidian Geometry*** (Dover)

(2) Coexeter, H.S.M.: ***Introduction to Geometry*** (J.Wiley)

(3) Greenberg, M.J.: ***Euclidian and Non-Euclidian Geometries*** (Freeman)

(4) Moise, E.E.: ***Elementary Geometry from and Advanced Standpoint*** (Addison - Wesley)

(*Φράγκος Αναστάσιος*)

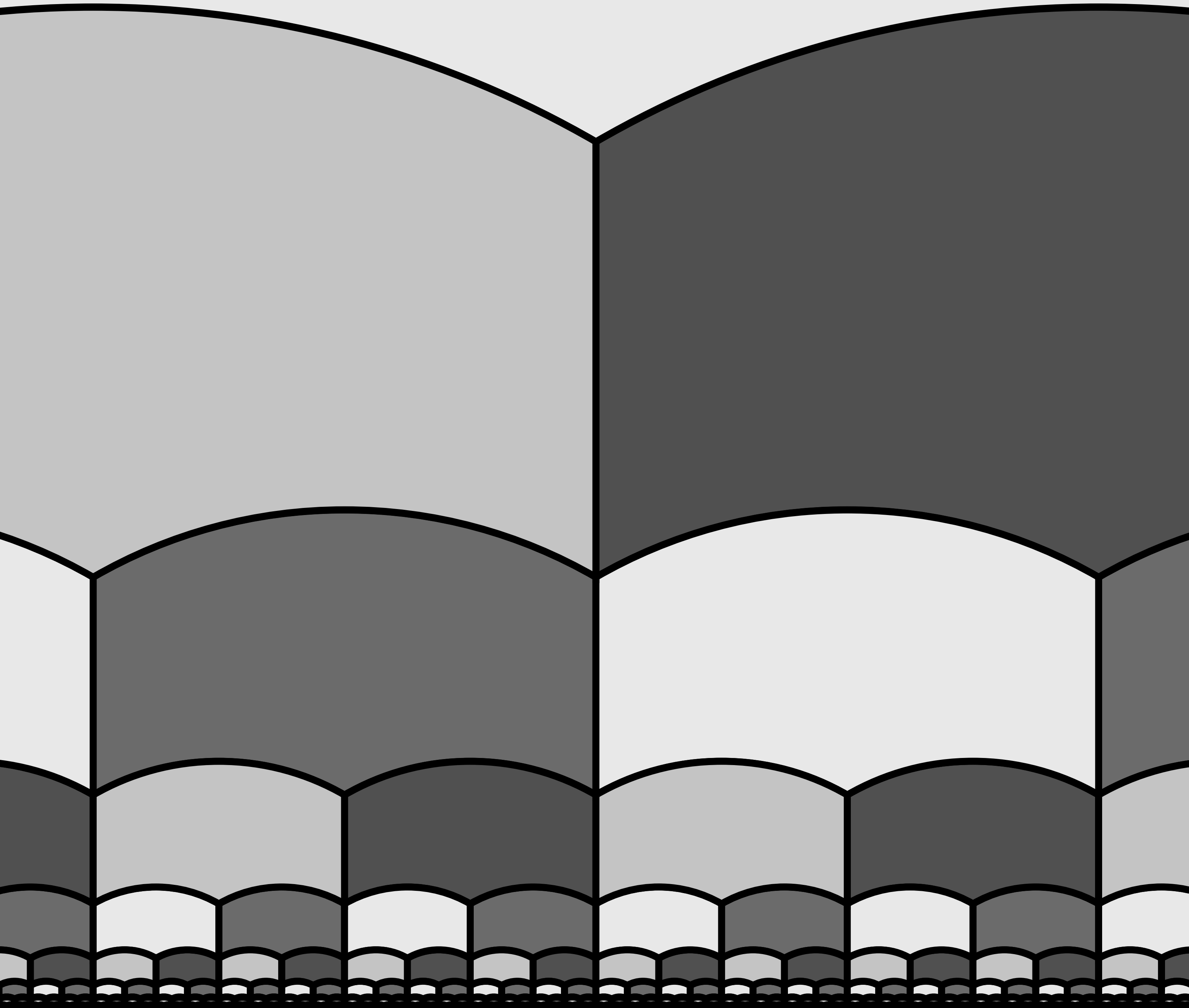
(1) Jonker, S.: ***Hyperbolic Geometry*** (Πτυχιακή εργασία, Rijksuniversiteit Groningen)

(2) Kinsey, C., L., Moore, E.,T., Πρασσίδης, Ε.: ***Geometry & Symmetry*** (J.Wiley)

(3) Βασιλείου, Ε.: ***Γεωμετρία για τη Διδακτική*** (Σημειώσεις Μ.Π.Σ., Ε.Κ.Π.Α.)

(4) Βασιλείου, Ε.: ***Στοιχεία Προβολικής Γεωμετρίας*** (Συμμετρία)

II Κατά Klein Θεμελίωση



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Εισαγωγικές έννοιες

5.1 Εισαγωγή

Η ιδέα μιας αυστηρά θεμελιωμένης γεωμετρίας μέσω των απαιτήσεων της μαθηματικής λογικής ήταν μια σαφώς επαναστατική ιδέα για τη γεωμετρία. Μια εξίσου σημαντική πρόοδος έγινε από τον Klein (1849-1925), του οποίου η οπτική της γεωμετρίας ήταν αλγεβρική - ομαδοθεωρητική. Χωρίς αυστηρή διατύπωση, μια γεωμετρία *χαρακτηρίζεται* από τους *μετασχηματισμούς* του συνόλου στο οποίο ορίζεται, οπότε η μελέτη της δεν προϋποθέτει κανενός είδους εποπτεία (όπως ενδεχομένως θα χρειάζονταν σε μια συνθετική μορφή της). Μια πρώιμη ιδέα αυτής της θεώρησης είδαμε κατά την πιστοποίηση των αξιωμάτων σύμπτωσης στα τρίγωνα της υπερβολικής γεωμετρίας, στον Δίσκο του Poincaré: αφού αναγάγαμε την συμφωνία των τριγώνων γενικά σε συμφωνία τριγώνων όπου έχουν κοινή την κορυφή της σύμφωνης γωνίας τους (και μάλιστα η κοινή κορυφή είναι το κέντρο O του δίκου), χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι οι στροφές κέντρου O και οι ανακλάσεις σε ευθείες που διέρχονται από το O διατηρούν τη γεωμετρία του Δίσκου, για να 'αποδείξουμε' (αυστηρότερα να πιστοποιήσουμε) το αξίωμα Π-Γ-Π.

Για να γίνουμε περισσότερο ακριβείς, λέμε τα εξής:

Ορισμός: ***Το σύνολο των αυτομορφισμών:***
Έστω X ένα μη κενό σύνολο. Ορίζουμε ως αυτομορφισμό του X κάθε αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση $f : X \to X$. Επιπλέον ορίζουμε το σύνολο των αυτομορφισμών του X:

$$\mathrm{Aut}(X) := \{f : X \to X \mid f \text{ αμφιμονοσήμαντη}\} = \{f \mid f : X \rightarrowtail\!\!\!\!\rightarrow X\}$$

όπου το σύμβολο '$\rightarrowtail\!\!\!\!\rightarrow$' υποδηλώνει το $1-1$ και επί. Να σημειωθεί ότι γενικά σε μαθήματα άλγεβρας το εν λόγω σύνολο ορίζεται όχι σε αμφιμονοσήμαντες αντιστοιχίες, αλλά σε ομομορφισμούς (οι οποιοί έχουν κάποια 'γραμμική δομή'). Εμείς εδώ δεν θα ακολουθήσουμε αυτήν την προσέγγιση.

Το σύνολο $\mathrm{Aut}(X)$ εφοδιασμένο με την πράξη της σύνθεσης αποτελεί *ομάδα*. Σε κάθε υποομάδα $(H, \circ) \leq (\mathrm{Aut}(X), \circ)$ αντιστοιχούμε το ζεύγος (H, X), το οποίο ονομάζουμε *Γεωμετρία Klein* (Γ.Κ.) που ορίζεται από το X και την υποομάδα H. Η ομάδα H αποτελείται από όλους τους επιτρεπτούς μετασχηματισμούς αυτής της Γ.Κ. πάνω στο X.

Ο βασικός προβληματισμός μιας Γ.Κ. (H, X) είναι η μελέτη των ιδιοτήτων των υποσυνόλων του X οι οποίες μένουν αναλλοίωτες ως προς τα στοιχεία της H.

Ορισμός: ***Αναλλοίωτες ιδιότητες στις Γ.Κ.:***
Έστω (H, X) μια γεωμετρία κατά Klein. Μια ιδιότητα (μαθηματική πρόταση) $\mathcal{V}$ ενός $A \subseteq X$ θα λέμε ότι μένει αναλλοίωτη ως προς την H εάν:

$$\text{Η ιδιότητα } \mathcal{V} \text{ ισχύει για το } A \Rightarrow \text{Η ιδιότητα } \mathcal{V} \text{ ισχύει για το } f(A), \forall f \in H$$

Η μελέτη των αναλλοίωτων ιδιοτήτων των υποσυνόλων του X είναι πολύ εύλογη - κατ' αρχάς, ήδη αναφέραμε ένα παράδειγμα μελέτης του αναλλοίωτου της γεωμετρίας (όταν $A = X = \mathcal{P}_D$) στο μοντέλο του Δίσκου. Μια άλλη εφαρμογή είναι η μελέτη των σχημάτων: τα σχήματα στην Γ.Κ. είναι ουσιαστικά τα υποσύνολα του X. Έχουμε δει ακόμη μια αναλλοίωτη ιδιότητα της γεωμετρίας: εάν $\mathcal{V}$ είναι η ιδιότητα 'το σύνολο A είναι κύκλος ή ευθεία' και H είναι το σύνολο των μετασχηματισμών Möbius, η $\mathcal{V}$ μένει αναλλοίωτη ως προς την H.

Ορισμός: ***Σχήματα στην Γ.Κ.:***
Έστω (H, X) μια γεωμετρία κατά Klein. Κάθε $A \subseteq X$ θα ονομάζεται σχήμα στην Γ.Κ. (H, X).

Μια από τις πιο ενδιαφέρουσες περιπτώσεις Γ.Κ. είναι εκείνες που αναφέρονται σε ένα σύνολο X στο οποίο μπορεί να προσδοθεί δομή μετρικού χώρου (X, ϱ).

Ορισμός: ***Μετρικές και μετρικοί χώροι:***
I. *Έστω $X \neq \emptyset$. Μια συνάρτηση $\varrho : X^2 \to \mathbb{R}^+$ θα λέγεται μετρική εάν ικανοποιεί τις ακόλουθες τρεις συνθήκες:*

- *Εάν για κάποια $x, y \in X$ αληθεύει $\varrho(x, y) = 0$, τότε $x = y$. Ισχύει και το αντίστροφο.*
- *Είναι συμμετρική, δηλαδή $\forall x, y \in X,\ \varrho(x, y) = \varrho(y, x)$.*
- *Ισχύει η τριγωνική ανισότητα: $\forall x, y, z \in X,\ \varrho(x, z) \leqslant \varrho(x, y) + \varrho(y, z)$.*

II. *Εάν $X \neq \emptyset$ και η συνάρτηση ϱ είναι μετρική στο X, τότε το διατεταγμένο ζεύγος (X, ϱ) καλείται μετρικός χώρος.*

Όταν λοιπόν θέλουμε να μελετήσουμε μέσω Γ.Κ. έναν μετρικό χώρο (X, ϱ), είναι εύλογο να μας ενδιαφέρουν κυρίως απεικονίσεις που διατηρούν τη μετρική, δηλαδή οι *ισομετρίες*.

Ορισμός: ***Ισομετρίες:***
Έστω (X, ϱ) ένας μετρικός χώρος. Μια απεικόνιση $\sigma : X \to X$ θα καλείται ισομετρία αν:

$$\forall x, y \in X,\ \varrho(x, y) = \varrho\big(\sigma(x), \sigma(y)\big)$$

Το σύνολο των ισομετριών του (X, ϱ) θα το συμβολίζουμε με $\mathrm{I}_\varrho(X)$, η απλούστερα (αν η μετρική εννοείται) $\mathrm{I}(X)$.
Γενικότερα, εάν (X, ϱ), (Y, d) είναι δύο μετρικοί χώροι, μια $\sigma : X \to Y$ θα καλείται ισομετρία αν:

$$\forall x, y \in X,\ \varrho(x, y) = d\big(\sigma(x), \sigma(y)\big)$$

Το αντίστοιχο σύνολο ισομετριών θα το συμβολίζουμε με $\mathrm{I}_{\varrho,d}(X, Y)$

Πρόταση (5.1): Έστω (X, ϱ) ένας μετρικός χώρος. Τότε αληθεύουν τα ακόλουθα:

i. Μία $\sigma \in \mathrm{I}_\varrho(X)$ είναι πάντοτε $1-1$, αλλά όχι πάντοτε επί.

ii. Η δομή $(\widehat{\mathrm{I}}_\varrho(X), \circ)$, όπου $\widehat{\mathrm{I}}_\varrho(X) := \mathrm{I}_\varrho(X) \cap \mathrm{Aut}(X)$, αποτελεί υποομάδα της $(\mathrm{Aut}(X), \circ)$.

Αντίστοιχη απόδειξη μπορεί να δοθεί για τον γενικότερο τύπο ισομετριών.

Απόδειξη: Όσον αφορά το **i.**, εάν υποθέσουμε ότι για κάποια $x, y \in X$ αληθεύει η ισότητα των εικόνων $\sigma(x) = \sigma(y)$, τότε επίσης θα αληθεύει λόγω ισομετρίας ότι:

$$\varrho(x, y) = \varrho\big(\sigma(x), \sigma(y)\big) = 0$$

όπου στην τελευταία ισότητα γίνεται χρήση της πρώτης ιδιότητας της ισομετρίας. Ξανά από την πρώτη ιδιότητα της ισομετρίας έπεται ότι $x = y$, οπότε η σ είναι $1-1$. Ένα παράδειγμα μιας μη επεικονικής ισομετρίας είναι το ακόλουθο: θεωρήστε τον μετρικό χώρο $(\mathbb{N}, |\cdot - \cdot|)$ και την συνάρτηση $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ η οποία ορίζεται από τον τύπο $\sigma(x) = x + 1$. Η σ είναι ισομετρία αφού:

$$\forall x, y \in \mathbb{N},\ |x - y| = |(x+1) - (y+1)|$$

Επιπλέον, $1 \notin \sigma(\mathbb{N}) = \mathbb{N}_{\geqslant 2}$.

Όσον αφορά το **ii.**, δείχνουμε διαδοχικά ότι:

- Το σύνολο $\widehat{\mathrm{I}}_\varrho(X)$ είναι κλειστό ως προς την πράξη $\circ$: Πράγματι, εάν σ, τ είναι ισομετρίες:

  $$\forall x, y \in X,\ \varrho(x, y) = \varrho\big(\sigma(x), \sigma(y)\big) = \varrho\big(\tau \circ \sigma(x), \tau \circ \sigma(y)\big)$$

  Δηλαδή $\varrho(x, y) = \varrho\big(\tau \circ \sigma(x), \tau \circ \sigma(y)\big)$.

- Η ιδιότητα της προσεταιριστικότητας της σύνθεσης είναι γνωστή.
- Η ταυτοτική συνάρτηση id αποτελεί το στοιχείο $\mathbf{1}_{\widehat{\mathrm{I}}_\varrho(X)}$.
- Εάν $\sigma \in \widehat{\mathrm{I}}_\varrho(X)$, τότε και $\sigma^{-1} \in \widehat{\mathrm{I}}_\varrho(X)$: Πράγματι, αληθεύει ότι:

  $$\forall x, y \in X,\ \varrho(x,y) = \varrho\big(\sigma \circ \sigma^{-1}(x), \sigma \circ \sigma^{-1}(y)\big) = \varrho\big(\sigma^{-1}(x), \sigma^{-1}(y)\big)$$

  όπου η τελευταία ισότητα δικαιολογείται από το ότι η σ είναι ισομετρία. Παρατηρήστε ακόμη ότι το επί είναι αναγκαίο, για να ορίζεται η σ^{-1} σε κάθε σημείο του X.

□

Από την **Πρόταση (5.1), ii** συμπεραίνουμε ότι μια Γ.Κ. $(\widehat{\mathrm{I}}_\varrho(X), X)$ που μελετά τις ισομετρικά αναλλοίωτες ιδιότητες των υποσυνόλων του X έχει νόημα. Η Γ.Κ. $(\widehat{\mathrm{I}}_\varrho(X), X)$ σε μετρικό χώρο (X, ϱ) δεν είναι άλλη ουσιαστικά από τη θεωρία του (X, ϱ).

5.2 Παραδείγματα γεωμετριών κατά Klein

Μερικά παραδείγματα Γ.Κ. ίσως σας είναι γνωστά, ενδεχομένως με διαφορετική ορολογία. Ας παραθέσουμε μερικά εξ αυτών για να γίνει σαφές το πόσο ευρύ είναι το πλαίσιο μιας Γ.Κ.

5.2.1 Η Ευκλείδεια Γεωμετρία

Μεταξύ της (επίπεδης) Ε.Γ. και του μετρικού χώρου $(\mathbb{R}^2, \varrho_E)$, όπου $\varrho_E\big((x_1,x_2),(y_1,y_2)\big) = \sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}$, υπάρχει μια αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία η οποία καθιστά αυτόν τον μετρικό χώρο μοντέλο για την Ε.Γ. Δηλαδή, όλα τα αξιώματα της Ε.Γ. μεταφράζονται (με κάποιον τρόπο) σε ισχύουσες προτάσεις στον μετρικό χώρο. Συγκεκριμένα, ορίζουμε:

- Ως σημεία τα στοιχεία του $\mathbb{R}^2$.
- Ως ευθείες τα σύμπλοκα του $\mathbb{R}^2$, δηλαδή τους μετατοπισμένους γραμμικούς υπόχωρους διάστασης 1 (τα σύνολα της μορφής $a + \operatorname{span} v$).
- Ως σχέση πρόσπτωσης, τη συνήθη σχέση του 'ανήκειν'.
- Ως σχέση του 'μεταξύ', την σχέση $x - y - z$, η οποία αληθεύει όταν το y είναι κυρτός συνδυασμός των x, z. Δηλαδή αληθεύει αν και μόνο αν υπάρχει $k \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $y = kx + (1-k)z$.
- Ως σχέση συμφωνίας μεταξύ ε.τ., την σχέση που τα ταυτίζει αν υπάρχει ισομετρία από το ένα στο άλλο.
- Ως σχέση συμφωνίας μεταξύ γων., την σχέση που τα ταυτίζει αν υπάρχει ισομετρία από το ένα στο άλλο.
- Ως σχέση συμφωνίας μεταξύ τριγ., την σχέση που τα ταυτίζει αν υπάρχει ισομετρία από το ένα στο άλλο.

και παρατηρούμε ότι τα αξιώματα της Ε.Γ. μεταφέρονται σε αντίστοιχες ισχύουσες προτάσεις στον μετρικό χώρο $(\mathbb{R}^2, \varrho_E)$.

Τα αξιώματα των ομάδων **Α.**, **Β.**, **Γ.** ισχύουν τετριμμένα.

Όσον αφορά τα αξιώματα της ομάδας **Δ.**:

- Το αξίωμα Αρχιμήδη - Ευδόξου για τα ε.τ. ουσιαστικά αντιστοιχεί στο αξίωμα Αρχιμήδη - Ευδόξου για τους πραγματικούς αριθμούς.
- Το αξίωμα των τομών του Dedekind αντιστοιχεί στην αρχή της πληρότητας των πραγματικών αριθμών.

Όσον αφορά το αξίώμα της ομάδας **Ε.**:

- Η σχέση παραλληλίας της γεωμετρίας αντιστοιχεί στην παραλληλία των μετατοπισμένων υποχώρων. Δεδομένων δύο σημείων b, w και ενός μετατοπισμένου υπόχωρου $a + \operatorname{span} v$, ο μετατοπισμένος υπόχωρος $b + \operatorname{span} w$ είναι παράλληλος στον $a + \operatorname{span} v$ αν οι δύο μετατοπισμένοι υπόχωροι δεν έχουν κοινά σημεία ή ταυτίζονται. Δηλαδή αν τα διανύσματα w, v είναι παράλληλα.

Με τη σειρά της η θεωρία του μετρικού χώρου $(\mathbb{R}^2, \varrho_E)$ είναι ουσιαστικά η Γ.Κ. $\big(\widehat{\mathrm{I}}_{\varrho_E}(\mathbb{R}^2), \mathbb{R}^2\big)$, οπότε ολόκληρη η Ε.Γ. μπορεί να μελετηθεί ως γεωμετρία ισομετρικών μετασχηματισμών. Περισσότερες λεπτομέρειες για το εν λόγω θέμα θα αναφέρουμε παρακάτω.

5.2.2 Τοπολογικοί χώροι

Ορισμός: ***Τοπολογία και τοπολογικοί χώροι:***
Έστω X ένα σύνολο. Μια οικογένεια $\mathfrak{T}$ υποσυνόλων του X λέγεται τοπολογία στο X αν:

- $\emptyset, X \in \mathfrak{T}$.
- *Κάθε πεπερασμένη τομή στοιχείων της $\mathfrak{T}$ ανήκει σ' αυτήν. Δηλαδή, εάν $n \in \mathbb{N}$ και $G_1, G_2, \cdots, G_n \in \mathfrak{T}$, τότε:*
$$\bigcap_{i=1}^{n} G_i \in \mathfrak{T}$$
- *Κάθε ένωση (αυθαίρετα μεγάλη η μικρή) στοιχείων της $\mathfrak{T}$ ανήκει σ' αυτήν. Δηλαδή, εάν I είναι σύνολο δεικτών και $\{G_i\}_{i\in I} \subseteq \mathfrak{T}$, τότε:*
$$\bigcup_{i\in I} G_i \in \mathfrak{T}$$

II. *Εάν X είναι ένα σύνολο και $\mathfrak{T}$ μια τοπολογία στον X, το ζεύγος $(X, \mathfrak{T})$ καλείται τοπολογικός χώρος και τα στοιχεία του $\mathfrak{T}$ ανοικτά σύνολα.*

Έστω $(X, \mathfrak{T})$ ένας τοπολογικός χώρος και $\mathfrak{H}_{\mathfrak{T}}(X)$ (ή για συντομία $\mathfrak{H}(X)$) το σύνολο των ομοιομορφισμών του X. Δηλαδή:

$$\mathfrak{H}_{\mathfrak{T}}(X) := \{f : X \to X \mid f \text{ αμφιμονοσήμαντη και αμφισυνεχής}\}$$

Η ομάδα $(\mathfrak{H}_{\mathfrak{T}}(X), \circ)$ είναι υποομάδα της $(\mathrm{Aut}(X), \circ)$, οπότε ορίζεται η Γ.Κ. $(\mathfrak{H}_{\mathfrak{T}}(X), X)$, η μελέτη της οποίας αντιστοιχεί στη μελέτη του τοπολογικού χώρου $(X, \mathfrak{T})$.

Εάν υποθέσουμε ότι στον τοπολογικό αυτόν χώρο υπάρχει μια μετρική ϱ τέτοια ώστε τα ανοικτά σύνολα που αυτή ορίζει να είναι ακριβώς τα στοιχεία της τοπολογίας (δηλαδή υπάρχει μετρική η οποία επάγει την τοπολογία), μπορεί επιπλέον να οριστεί η Γ.Κ. $(\widehat{\mathrm{I}}_{\varrho}(X), X)$ του τοπολογικού μετρικού χώρου (X, ϱ). Επειδή $\widehat{\mathrm{I}}_{\varrho}(X) \subseteq \mathfrak{H}_{\mathfrak{T}}(X)$, λέμε ότι η $(\widehat{\mathrm{I}}_{\varrho}(X), X)$ είναι υπογεωμετρία Klein της $(\mathfrak{H}_{\mathfrak{T}}(X), X)$.

Οι ιδιότητες που μένουν αναλλοίωτες από κάθε στοιχείο της $\mathfrak{H}_{\mathfrak{T}}(X)$ λέγονται *τοπολογικές ιδιότητες*, και αντίστοιχα οι ιδιότητες που μένουν αναλλοίωτες από κάθε στοιχείο της $\widehat{\mathrm{I}}_{\varrho}(X)$ λέγονται *μετρικές ιδιότητες*. Ένα παράδειγμα μιας τοπολογικής ιδιότητας είναι το ακόλουθο: 'το $A \subseteq X$ είναι συμπαγές σύνολο' - πράγματι, η εικόνα ενός συμπαγούς συνόλου μέσω μιας συνεχούς απεικόνισης είναι συμπαγές σύνολο. Αντίθετα, η ιδιότητα: 'Η $(x_n)_n$ είναι βασική ακολουθία στον X' δεν είναι τοπολογική ιδιότητα - για παράδειγμα στο $\mathbb{R}^*$ η $(1/n)_n$ είναι βασική ακολουθία, η $\eta(x) = 1/x$ είναι ομοιομορφισμός $\eta \in \mathfrak{H}(\mathbb{R}^*)$, αλλά η ακολουθία $\big(\eta(1/n)\big)_n = (n)_n$ προφανώς δεν είναι βασική. Παρατηρήστε ότι η προηγούμενη ιδιότητα είναι μετρική ιδιότητα - μια ακολουθία $(x_n)_n$ παραμένει $\varrho-$βασική μέσω $\varrho-$ισομετριών.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

Χώροι με εσωτερικό γινόμενο και ισομετρίες

6.1 Γενικά

Ας ξεκινήσουμε με μερικές βασικές υπενθυμίσεις.

Ορισμός: ***Νόρμες και χώροι με νόρμα:***
I. *Έστω $(X,+,\cdot)$ ένας $\mathbb{R}-$διανυσματικός χώρος και $||\cdot||: X \to \mathbb{R}^+$ μια συνάρτηση. Η $||\cdot||$ θα καλείται νόρμα αν ικανοποιεί τις ακόλουθες συνθήκες:*

- *Για κάθε $x \in X$, εάν $||x|| = 0$ τότε $x = 0$.*
- *Για κάθε $x \in X$ και για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ αληθεύει $||\lambda x|| = |\lambda| \cdot ||x||$.*
- *Για κάθε $x, y \in X$ αληθεύει η τριγωνική ανισότητα: $||x+y|| \leqslant ||x|| + ||y||$.*

II. *Έστω X ένα σύνολο στο οποίο μπορεί να προσδοθεί δομή $\mathbb{R}-$διανυσματικού χώρου, και $||\cdot||$ μια συνάρτηση η οποία αποτελεί νόρμα στον $(X,+,\cdot)$. Το διατεταγμένο ζεύγος $(X, ||\cdot||)$ θα το ονομάζουμε χώρο με νόρμα.*

Παρατήρηση (6.1): Η έννοια ενός χώρου με νόρμα είναι ισχυρότερη αυτής του μετρικού χώρου. Συγκεκριμένα, ένας χώρος με νόρμα μπορεί να γίνει μετρικός χώρος, μέσω της λεγόμενης *επαγόμενης μετρικής*. Εάν $(X, ||\cdot||)$ είναι χώρος με νόρμα και ϱ είναι η συνάρτηση $\varrho(x,y) = ||x-y||$, ο χώρος (X, ϱ) καθίσταται μετρικός χώρος.

Απόδειξη: Πράγματι, αρκεί να ελέγξουμε ότι η ϱ είναι μετρική. Ελέγχουμε διαδοχικά τις απαιτήσεις του ορισμού της μετρικής:

- Εάν για κάποια $x, y \in X$ αληθεύει $||x-y|| = 0$, εξ ορισμού της νόρμας $x = y$. Εάν πάλι $x = y$, τότε $||x-y|| = ||0|| = 0 \cdot ||x|| = 0$.
- Για κάθε $x, y \in X$, ισχύει η συμμετρία: $||x-y|| = |-1| \cdot ||(x-y)|| = ||-(x-y)|| = ||y-x||$.
- Για κάθε $x, y, z \in X$, ισχύει η τριγωνική ανισότητα: $||x-z|| = ||x-y+y-z|| \leqslant ||x-y|| + ||y-z||$, όπου η τελευταία ανισότητα είναι η τριγωνική ανισότητα της νόρμας $||\cdot||$.

$\square$

Ορισμός: ***Εσωτερικά γινόμενα και χώροι με εσωτερικά γινόμενα:***
I. *Έστω $(X,+,\cdot)$ ένας $\mathbb{R}-$διανυσματικός χώρος και $\langle\cdot,\cdot\rangle : X^2 \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση. Η $\langle\cdot,\cdot\rangle$ θα καλείται (πραγματικό) εσωτερικό γινόμενο αν ικανοποιεί τις ακόλουθες συνθήκες:*

- *Η $\langle\cdot,\cdot\rangle$ είναι συμμετρική και διγραμμική συνάρτηση - δηλαδή για κάθε $x, y, z \in X$ και $\lambda \in \mathbb{R}$:*

$$\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle \ \textbf{\textit{και}}\ \langle x+\lambda y, z\rangle = \langle x,z\rangle + \lambda\langle y,z\rangle$$

- *Για κάθε $x \in X$, $\langle x,x\rangle \geqslant 0$.*
- *Για κάθε $x \in X$, $\langle x,x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$.*

II. *Έστω X ένα σύνολο στο οποίο μπορεί να προσδοθεί δομή $\mathbb{R}-$διανυσματικού χώρου, και $\langle\cdot,\cdot\rangle$ μια συνάρτηση η οποία αποτελεί (πραγματικό) εσωτερικό γινόμενο στον $(X,+,\cdot)$. Το διατεταγμένο ζεύγος $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ θα το ονομάζουμε χώρο με εσωτερικό γινόμενο.*

Ορισμός: ***Τετραγωνικές μορφές:***
Έστω $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Ορίζουμε ως τετραγωνική μορφή του εσωτερικού γινομένου $\langle\cdot,\cdot\rangle$ τη συνάρτηση $T : X \to \mathbb{R}^+$ με τύπο:

$$T(x) = \langle x, x\rangle$$

Παρατήρηση (6.2): Η έννοια της τετραγωνικής μορφής φαίνεται κάπως ειδικότερη σε σχέση με αυτή του εσωτερικού γινομένου. Στην πραγματικότητα όμως, αν κανείς γνωρίζει ένα εσωτερικό γινόμενο μπορεί να κατασκευάσει μια τετραγωνική μορφή, και αντίστροφα, μέσω μιας τετραγωνικής μορφής μπορεί να κατασκευαστεί το εσωτερικό γινόμενο από το οποίο αυτή προήλθε.

Απόδειξη: Εξ ορισμού ένα εσωτερικό γινόμενο κατασκευάζει μια τετραγωνική μορφή. Αν τώρα διαθέτουμε μια τετραγωνική μορφή T η οποία έχει προέλθει από κάποιο εσωτερικό γινόμενο $\langle\cdot,\cdot\rangle$, ορίζουμε τη συνάρτηση:

$$\mathcal{E}(x,y) = \frac{1}{2}\cdot\big(T(x+y) - T(x) - T(y)\big)$$

και ισχυριζόμαστε ότι αυτή είναι εσωτερικό γινόμενο. Πράγματι:

$$\mathcal{E}(x,y) = \frac{1}{2}\cdot\big(\langle x+y, x+y\rangle - \langle x,x\rangle - \langle y,y\rangle\big)$$

και από την πρώτη ιδιότητα του εσωτερικού γινομένου:

$$\mathcal{E}(x,y) = \frac{1}{2}\cdot\big(\langle x,x\rangle + 2\langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle - \langle x,x\rangle - \langle y,y\rangle\big) = \langle x,y\rangle$$

Επομένως η $\mathcal{E}$ είναι εσωτερικό γινόμενο και μάλιστα το $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

□

Όπως η έννοια ενός χώρου με νόρμα είναι ισχυρότερη αυτής του μετρικού χώρου, έτσι και η έννοια του χώρου με εσωτερικό γινόμενο είναι ισχυρότερη αυτής του χώρου με νόρμα. Αυτό το δείχνουμε μέσω της επόμενης πρότασης.

Πρόταση (6.1): Έστω $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο και T η αντίστοιχη τετραγωνική μορφή του εσωτερικού γινομένου. Η συνάρτηση $N : X \to \mathbb{R}^+$ με τύπο $N(x) = \sqrt{T(x)}$ είναι νόρμα - επομένως κάθε χώρος με εσωτερικό γινόμενο $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ μπορεί να ειδωθεί ως χώρος με νόρμα (X, N).

Απόδειξη: Ελέγχουμε διαδοχικά τις απαιτήσεις του ορισμού της νόρμας και δείχνουμε το ζητούμενο. Ειδικά για την τρίτη ιδιότητα της νόρμας, θα χρειαστεί να αποδείξουμε τη λεγόμενη ανισότητα Cauchy - Schwarz για τα εσωτερικά γινόμενα.

Λήμμα (6.1): *(Ανισότητα Cauchy - Schwarz για τα εσωτερικά γινόμενα)* Έστω $\langle\cdot,\cdot\rangle : X^2 \to \mathbb{R}^+$ ένα πραγματικό εσωτερικό γινόμενο. Για κάθε $x, y \in X$ αληθεύει η ανισοτική σχέση:

$$\langle x,y\rangle \leqslant \sqrt{\langle x,x\rangle\cdot\langle y,y\rangle}$$

Απόδειξη του λήμματος: Έστω $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ένα εσωτερικό γινόμενο και $s, t \in X$. Λόγω της συμμετρίας και διγραμμικότητας του εσωτερικού γινομένου:

$$\langle s-t, s-t\rangle \geqslant 0 \Rightarrow \langle s,s\rangle - 2\langle s,t\rangle + \langle t,t\rangle \geqslant 0 \Rightarrow 2\langle s,t\rangle \leqslant \langle s,s\rangle + \langle t,t\rangle$$

Αφού η εν λόγω σχέση ισχύει για κάθε $s, t \in X$, θα αληθεύει και για τα:

$$s = \frac{x}{\sqrt{\langle x,x\rangle}} \textbf{ και } t = \frac{y}{\sqrt{\langle y,y\rangle}}$$

όταν φυσικά $x, y \neq 0$. Κατ' επέκταση:

$$2\left\langle \frac{x}{\sqrt{\langle x,x\rangle}}, \frac{y}{\sqrt{\langle y,y\rangle}}\right\rangle \leqslant \left\langle \frac{x}{\sqrt{\langle x,x\rangle}}, \frac{x}{\sqrt{\langle x,x\rangle}}\right\rangle + \left\langle \frac{x}{\sqrt{\langle x,x\rangle}}, \frac{x}{\sqrt{\langle x,x\rangle}}\right\rangle = 2$$

όπου η τελευταία ισότητα δικαιολογείται από τη γραμμικότητα του εσωτερικού γινομένου. Χρησιμοποιώντας και πάλι τη γραμμικότητα του εσωτερικού γινομένου στο αριστερό μέλος της ανισότητας, έπεται το ζητούμενο στην περίπτωση $x, y \neq 0$.

$$\frac{\langle x,y\rangle}{\sqrt{\langle x,x\rangle}\cdot\sqrt{\langle y,y\rangle}} \leqslant 1 \Rightarrow \langle x,y\rangle \leqslant \sqrt{\langle x,x\rangle\cdot\langle y,y\rangle}$$

Εάν το x ή το y είναι μηδέν, τότε η ανισότητα και πάλι ισχύει, μάλιστα ως ισότητα. Αν χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέσουμε $x = 0$, τότε:

$$\langle x, y\rangle = \langle 0, y\rangle = \langle y - y, y\rangle = 0 \leqslant 0 = \sqrt{\langle 0,0\rangle \cdot \langle y,y\rangle} = \sqrt{\langle x,x\rangle \cdot \langle y,y\rangle}$$

Αυτά αποδεικνύουν το λήμμα.

△

Δεδομένου λοιπόν του **Λήμματος (6.1)**, έχουμε τα εξής:

- Εάν $N(x) = \sqrt{T(x)} = 0$, τότε $T(x) = 0$. Δηλαδή $\langle x, x\rangle = 0 \Rightarrow x = 0$. Προφανώς οι ισχυρισμοί αντιστρέφονται.
- Έστω $x \in X$ και $\lambda \in \mathbb{R}$. Αληθεύει ότι:

  $$N(\lambda x) = \sqrt{T(\lambda x)} = \sqrt{\langle \lambda x, \lambda x\rangle} = |\lambda| \cdot \sqrt{\langle x,x\rangle} = |\lambda| \cdot \sqrt{T(x)} = |\lambda| \cdot N(x)$$

- Έστω $x, y, z \in X$. Ισχύει ότι:

  $$N(x+y) = \sqrt{T(x+y)} = \sqrt{\langle x+y, x+y\rangle} = \sqrt{\langle x,x\rangle + 2\langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle}$$

  Χρησιμοποιώντας στο δεξί μέλος το **Λήμμα (6.1)** παίρνουμε το ζητούμενο.

  $$N(x+y) = \sqrt{\langle x,x\rangle + 2\langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle} \leqslant \sqrt{\langle x,x\rangle + \langle y,y\rangle + 2\sqrt{\langle x,x\rangle \cdot \langle y,y\rangle}} = \sqrt{\langle x,x\rangle} + \sqrt{\langle x,x\rangle}$$

  Δηλαδή $N(x+y) \leqslant N(x) + N(y)$.

□

Κύριο χαρακτηριστικό των χώρων με εσωτερικό γινόμενο είναι φυσικά το εσωτερικό γινόμενο, όπως η μετρική είναι για τους μετρικούς χώρους. Είναι λοιπόν εύλογο, αν θέλουμε να μελετήσουμε χώρους με εσωτερικά γινόμενα μέσω Γ.Κ., να ασχολούμαστε με απεικονίσεις που διατηρούν το εκάστοτε εσωτερικό γινόμενο.

Ορισμός: ***Ορθογώνιες απεικονίσεις:***
Έστω $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Κάθε συνάρτηση $\tau : X^2 \to X^2$ η οποία ικανοποιεί τη συνθήκη:

$$\forall x, y \in X,\ \langle x, y\rangle = \big\langle \tau(x), \tau(y)\big\rangle$$

ονομάζεται ορθογώνια συνάρτηση. Το σύνολο των ορθογώνιων απεικονίσεων του $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ θα το συμβολίζουμε με $\mathrm{O}_{\langle\cdot,\cdot\rangle}(X)$, ή απλούστερα (αν το εσωτερικό γινόμενο εννοείται) $\mathrm{O}(X)$. Γενικότερα, εάν $(X, \mathcal{E})$, $(Y, \mathcal{G})$ είναι δύο χώροι με εσωτερικό γινόμενο, μια $\tau : X^2 \to Y^2$ θα καλείται ορθογώνια αν:

$$\forall x, y \in X,\ \mathcal{E}(x,y) = \mathcal{G}\big(\tau(x), \tau(y)\big)$$

Ας συμβολίσουμε με $\mathrm{GL}(X)$ το σύνολο των αυτομορφισμών του X οι οποίοι είναι γραμμικές απεικονίσεις, δηλαδή:

$$\mathrm{GL}(X) := \{f : X \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow X \mid f \text{ γραμμική}\}$$

Η ομάδα $(\mathrm{GL}(X), \circ)$ είναι υποομάδα της $(\mathrm{Aut}(X), \circ)$, επομένως ορίζεται η Γ.Κ. $(\mathrm{GL}(X), X)$.

Οι Γ.Κ. που θα μας απασχολήσουν ιδιαιτέρως είναι αυτές της μορφής $(\widehat{\mathrm{I}}(X), X)$. Υποθέτουμε ότι στον χώρο X μπορούμε να προσδώσουμε την ισχυρότερη δομή που διαθέτουμε αυτήν την στιγμή, τη δομή ενός χώρου με εσωτερικό γινόμενο $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Θα δείξουμε εν συνεχεία κάποια σημαντικά αποτελέσματα που συσχετίζουν τις γεωμετρίες των $\widehat{\mathrm{I}}(X)$, $\mathrm{O}(X)$ και $\mathrm{GL}(X)$. Πρώτα όμως, αποδεικνύουμε μερικά λήμματα.

Λήμμα (6.2): Κάθε $\tau \in \mathrm{O}(X)$ είναι γραμμική.

Απόδειξη: Για κάθε $x, y \in X$ και για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, θέλουμε να δείξουμε ότι $\tau(x + \lambda y) = \tau(x) + \lambda\tau(y)$. Ισοδύναμα, λόγω της τρίτης ιδιότητας του εσωτερικού γινομένου, αρκεί να δειχθεί ότι:

$$T\big(\tau(x+\lambda y) - \tau(x) - \lambda\tau(y)\big) = 0$$

όπου T είναι η τετραγωνική μορφή του εσωτερικού γινομένου $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Πράγματι, με πολλές πράξεις στην ισοδύναμη σχέση μπορούμε να καταλήξουμε στο ζητούμενο. Ενδεικτικά γράφουμε το αριστερό μέλος:

$$\langle \tau(x+\lambda y), \tau(x+\lambda y)\rangle + \langle \tau(x), \tau(x)\rangle + \lambda^2\langle \tau(y), \tau(y)\rangle - 2\langle \tau(x+\lambda y), \tau(x)\rangle - 2\lambda^2\langle \tau(x+\lambda y), \tau(y)\rangle + 2\langle \tau(x), \tau(y)\rangle$$

κι επειδή η τ είναι ορθογώνια, η παραπάνω ποσότητα μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\langle x+\lambda y, x+\lambda y\rangle+\langle x,x\rangle+\lambda^2\langle y,y\rangle-2\langle x+\lambda y,x\rangle-2\lambda^2\langle x+\lambda y,y\rangle+2\langle x,y\rangle=\langle x+\lambda y-x-\lambda y, x+\lambda y-x-\lambda y\rangle=0$$

□

Λήμμα (6.3): Οι γραμμικές ισομετρίες είναι ακριβώς οι γραμμικές σ για τις οποίες $\sigma(0)=0$, σε χώρους με εσωτερικό γινόμενο $(X,\langle\cdot,\cdot\rangle)$. Δηλαδή:

$$\sigma\in \mathrm{I}(X)\cap \mathrm{GL}(X)\Leftrightarrow \sigma\in\mathrm{I}(X)\ \textbf{και}\ \sigma(0)=0$$

Απόδειξη: Το ευθύ ισχύει. Για το αντίστροφο, παρατηρούμε ότι:

$$\sigma\in\mathrm{I}(X)\Leftrightarrow ||x-y||=||\sigma(x)-\sigma(y)||\Leftrightarrow T(x-y)=T\big(\sigma(x),\sigma(y)\big),\ \forall x,y\in X$$

Μάλιστα, εφαρμόζοντας την παραπάνω σχέση για $y=0$, έπεται ότι $||x||=||\sigma(x)||\Rightarrow T(x)=T\big(\sigma(x)\big)$.

Έχουμε λοιπόν ότι:

$$\langle x-y,x-y\rangle=\langle\sigma(x)-\sigma(y),\sigma(x)-\sigma(y)\rangle\Leftrightarrow\langle x,x\rangle-2\langle x,y\rangle+\langle y,y\rangle=\langle\sigma(x),\sigma(x)\rangle-2\langle\sigma(x),\sigma(y)\rangle+\langle\sigma(y),\sigma(y)\rangle$$

Επειδή τώρα $\langle x,x\rangle=T(x)=T\big(\sigma(x)\big)=\langle\sigma(x),\sigma(x)\rangle$, τελικά παίρνουμε ότι:

$$\langle x,y\rangle=\langle\sigma(x),\sigma(y)\rangle$$

δηλαδή $\sigma\in\mathrm{O}(X)$. Από το **Λήμμα (6.2)** έχουμε το ζητούμενο.

□

Λήμμα (6.4): *(Θεώρημα ιεραρχίας δομών)* Αληθεύει η ισότητα $\mathrm{I}(X)\cap\mathrm{GL}(X)=\mathrm{O}(X)$. Κατ' επέκταση, κάθε ορθογώνια είναι αμφιμονοσήμαντη, οπότε η $(\mathrm{O}(X),X)$ είναι Γ.Κ. Μάλιστα υπογεωμετρία Klein της $(\widehat{\mathrm{I}}(X),X)$.

Απόδειξη: Από την απόδειξη του **Λήμματος (6.3)**, κάθε ισομετρία με $\sigma(0)=0$ είναι ορθογώνια. Δηλαδή:

$$\sigma\in\mathrm{I}(X)\ \textbf{και}\ \sigma(0)=0\Rightarrow\sigma\in\mathrm{O}(X)$$

οπότε ισχύει ο εγκλεισμός $\mathrm{I}(X)\cap\mathrm{GL}(X)\subseteq\mathrm{O}(X)$. Αν δείξουμε ότι κάθε ορθογώνια συνάρτηση σ είναι ισομετρία με $\sigma(0)=0$, χρησιμοποιώντας επίσης το **Λήμμα (6.3)** θα έχουμε δείξει το ζητούμενο, αφού επιπλέον θα αληθεύει $\mathrm{I}(X)\cap\mathrm{GL}(X)\supseteq\mathrm{O}(X)$.

Έστω $\sigma\in\mathrm{O}(X)$. Επειδή $\langle x-y,x-y\rangle=\langle\sigma(x-y),\sigma(x-y)\rangle$, θα έχουμε την ισότητα των νορμών $||x-y||=||\sigma(x-y)||$. Από το **Λήμμα (6.2)** έχουμε ισότητα και σε μετρικές, αφού η $\sigma(x-y)$ μπορεί να γραφεί $\sigma(x)-\sigma(y)$. Μένει να δείξουμε ότι $\sigma(0)=0$ - θέτουμε στην ισότητα των νορμών $x=y$ και έχουμε $||\sigma(0)||=0$, δηλαδή $\sigma(0)=0$. Αυτά αποδεικνύουν το λήμμα.

□

Θεώρημα: *Μορφή των ισομετριών:*
Έστω $(X,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο και $\sigma\in\mathrm{I}(X)$ μια ισομετρία. Η σ μπορεί να γραφεί με μοναδικό τρόπο στη μορφή:

$$\sigma=\mu\circ\tau$$

όπου $\tau\in\mathrm{O}(X)$ και μ είναι μια μεταφορά (δηλαδή $\mu(x)=x+a$, για κάποιο a).

Απόδειξη: Καταρχάς είναι φανερό ότι κάθε μεταφορά είναι ισομετρία. Οπότε η συνάρτηση $\tau(x)=\sigma(x)-\sigma(0)$ είναι ισομετρία, και μάλιστα $\tau(0)=0$. Από το **Λήμμα (6.3)** η τ είναι γραμμική ισομετρία, και από το **Λήμμα (6.4)** είναι ορθογώνια. Θεωρούμε τώρα τη μεταφορά $\mu(x)=x+\sigma(0)$. Είναι σαφές ότι $\sigma=\mu\circ\tau$, οπότε έχουμε αποδείξει την αναγραφή των ισομετριών ως σύνθεση ορθογώνιων απεικονίσεων με μεταφορές.

Εν συνεχεία θα δείξουμε ότι η παραπάνω γραφή είναι μοναδική. Εάν υποθέσουμε ότι η σ έχει δύο αναγραφές $\sigma=\mu\circ\tau=\mu^*\circ\tau^*$, τότε:

- Επειδή $\tau,\tau^*\in\mathrm{O}(X)$, είναι γραμμικές - επομένως $\tau(0)=\tau^*(0)=0$. Εάν λοιπόν $\mu(x)=x+a,\ \mu^*(x)=x+b$:

  $$\sigma(0)=\tau(0)+a=\tau^*(0)+b\Rightarrow a=b$$

  Οπότε $\mu=\mu^*$.
- Εάν γράψουμε $\sigma(x)=\tau(x)+a=\tau^*(x)+a$, έχουμε άμεσα ότι $\tau=\tau^*$.

□

Έτσι λοιπόν, κάθε ομάδα ισομετριών $\mathrm{I}(X)$ κατά μία έννοια *παράγεται* από μεταφορές και από ένα σύνολο γεννητόρων της αντίστοιχης ορθογώνιας ομάδας $\mathrm{O}(X)$. Για την αναζήτηση λοιπόν ενός συνόλου γεννητόρων της $\mathrm{I}(X)$, αρκεί να περιοριστούμε στην αναζήτηση γεννητόρων της $\mathrm{O}(X)$. Στην συνέχεια θα δούμε πώς τα παραπάνω εφαρμόζονται, για παράδειγμα στην επίπεδη Ε.Γ.

6.2 Η Ευκλείδεια γεωμετρία ως γεωμετρία κατά Klein

Στο υποκεφάλαιο **5.2** είδαμε πώς η επίπεδη Ε.Γ. μπορεί να μελετηθεί μέσω της Γ.Κ. $(\widehat{\mathrm{I}}_{\varrho_E}(\mathbb{R}^2), \mathbb{R}^2)$, όπου ϱ_E είναι η συνήθης ευκλείδεια μετρική. Επειδή η ϱ_E μπορεί να προκύψει ως μετρική επαγόμενη από το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο $\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2$, μας επιτρέπεται η μελέτη των ισομετριών στο $\mathrm{I}(\mathbb{R}^2)$ μέσω ορθογώνιων απεικονίσεων και μεταφορών.

Θα μελετήσουμε λοιπόν την ορθογώνια ομάδα $\mathrm{O}(\mathbb{R}^2)$. Έστω $\tau \in \mathrm{O}(\mathbb{R}^2)$ μια ορθογώνια απεικόνιση. Βάσει του **Λήμματος (6.4)** η τ είναι γραμμικός ισομορφισμός, οπότε ορίζεται από έναν πίνακα:

$$M_\tau = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}, \text{ με } \det M_\sigma = a_1 a_4 - a_2 a_3 \neq 0$$

Η σ λοιπόν γράφεται:

$$[\tau(x,y)]^T = M_\tau \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 x + a_2 y \\ a_3 x + a_4 y \end{pmatrix} \textbf{ ή } \tau(x,y) = (x,y) \cdot M_\tau^T = (x,y) \cdot \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ a_2 & a_4 \end{pmatrix}$$

Το **Λήμμα (6.4)** εξασφαλίζει επιπλέον ότι η τ διατηρεί τη μετρική, άρα και τη νόρμα (που επάγεται από το εσωτερικό γινόμενο). Αληθεύει λοιπόν επιπλέον ότι:

$$||(x,y)||^2 = ||\tau(x,y)||^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = (a_1^2 + a_3^2)x + 2(a_1 a_2 + a_3 a_4)xy + (a_2^2 + a_4^2)y^2 \Rightarrow \begin{cases} a_1^2 + a_3^2 = 1 \\ a_1 a_2 + a_3 a_4 = 0 \\ a_2^2 + a_4^2 = 1 \end{cases}$$

το οποίο θέτει κάποιες προϋποθέσεις για τα a_1, a_2, a_3, a_4. Μέχρι τώρα λοιπόν έχουμε τις ακόλουθες προϋποθέσεις:

i. $a_1 a_4 - a_2 a_3 \neq 0$

ii. $a_1^2 + a_3^2 = 1$

iii. $a_1 a_2 + a_3 a_4 = 0$

iv. $a_2^2 + a_4^2 = 1$

Υποθέτουμε αρχικά ότι $a_1 = 0$: Τότε από τις i. και iii., $a_2 a_3 \neq 0$ και $a_3 a_4 = 0$, δηλαδή $a_1 = a_4 = 0$ και $a_2, a_3 \neq 0$. Επιπλέον από τις i. και iv., $a_2, a_3 \in \{\pm 1\}$. Έτσι ο πίνακας της σ λαμβάνει τη μορφή:

$$M_\tau = \begin{pmatrix} 0 & \pm 1 \\ \pm 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Υποθέτουμε ότι $a_1 \neq 0$: Τότε από τη σχέση iii. γράφουμε $a_2 = -\dfrac{a_3 a_4}{a_1}$. Θέτοντας τώρα $\lambda = \dfrac{a_4}{a_1}$, παρατηρούμε ότι $a_2 = -\lambda a_3$ και εξ ορισμού $a_4 = \lambda a_1$. Από τις ii. και iv., $a_1^2 + a_3^2 = 1 = \lambda^2(a_1^2 + a_3^2)$, δηλαδή $\lambda = \pm 1$. Έτσι ο πίνακας της τ λαμβάνει τη μορφή:

$$M_\tau = \begin{pmatrix} a_1 & -a_3 \\ a_3 & a_1 \end{pmatrix}, \text{ εάν } \lambda = 1 \textbf{ ή } M_\tau = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ a_3 & -a_1 \end{pmatrix}, \text{ εάν } \lambda = -1$$

Εν γένει λοιπόν, υπάρχουν αριθμοί $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε:

$$\tau(x,y)^T = \begin{cases} \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ \textbf{ή} \\ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & -\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{cases}, \text{ με } \alpha^2 + \beta^2 = 1$$

Γνωρίζοντας λοιπόν τη μορφή των ορθογώνιων απεικονίσεων $\tau \in \mathrm{O}(\mathbb{R}^2)$, βάσει του **Θεωρήματος: *Μορφή των ισομετριών*** μπορεί να καθοριστεί πλήρως η μορφή των ισομετριών $\sigma \in \mathrm{I}(\mathbb{R}^2)$. Έχουμε λοιπόν το ακόλουθο σημαντικό θεώρημα:

Θεώρημα: ***Μορφή των ισομετριών στον*** $\mathbb{R}^2$**:**
Κάθε $\sigma \in \mathrm{I}(\mathbb{R}^2)$ *μπορεί να λάβει τη μορφή:*

$$\sigma(x,y)^T = \begin{cases} \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix} \\ \quad \textit{ή} \\ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & -\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix} \end{cases}, \ \textit{με}\ \alpha^2+\beta^2=1,\ \gamma,\delta \in \mathbb{R}$$

Παρατήρηση (6.3): Υπενθυμίζουμε από τη γραμμική άλγεβρα ότι η γραμμική απεικόνιση με πίνακα:

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

είναι στροφή κατά θ με κέντρο την αρχή των αξόνων. Έστω $\sigma \in \mathrm{I}(\mathbb{R}^2)$. Αναγράφοντας την σ σε μια μορφή όπως αυτή του **Θεωρήματος:** ***Μορφή των ισομετριών στον*** $\mathbb{R}^2$, επειδή $\alpha^2+\beta^2=1$, εάν βρούμε κατάλληλη γωνία θ τέτοια ώστε $\alpha = \cos\theta,\ \beta = \sin\theta$, η σ θα έχει τον πίνακα των α, β ίσο με:

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \ \textbf{ή} \ \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

Ο δεξιός πίνακας γράφεται ισοδύναμα:

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

οπότε αντιστοιχεί σε κατοπτρισμό (ως προς τον άξονα $\underleftrightarrow{xx'}$) ακολουθούμενο από στροφή. Εν γένει λοιπόν, μια ισομετρία $\sigma \in \mathrm{I}(\mathbb{R}^2)$ είναι κατοπτρισμός και στροφή ακολουθούμενα από μεταφορά, ή στροφή ακολουθούμενη από μεταφορά.

Ειδικότερα, μια ορθογώνια απεικόνιση είναι κατοπτρισμός και στροφή ή στροφή.

Ορισμός: ***Κατοπτρισμοί στον*** $\mathbb{R}^2$**:**
Ένας κατοπτρισμός (ή ανάκλαση) στο επίπεδο ως προς την ευθεία ℓ *είναι μια συνάρτηση που απεικονίζει ταυτοτικά τα στοιχεία της* ℓ *και κάθε άλλο σημείο του επιπέδου το απεικονίζει στο συμμετρικό του ως προς την* ℓ.

Πρόταση (6.2): Όπως αναφέραμε στην **Παρατήρηση (6.3)**, ένα σύνολο γεννητόρων της ορθογώνιας ομάδας $\mathrm{O}(\mathbb{R}^2)$ είναι η οικογένεια των κατοπτρισμών και των στροφών. Μάλιστα οι κατοπτρισμοί επιλέγονται μόνο ως προς την ευθεία $\underleftrightarrow{xx'}$.

Θα δείξουμε ότι αν η οικογένεια των κατοπτρισμών ως προς την $\underleftrightarrow{xx'}$ επεκταθεί σε μεγαλύτερη οικογένεια κατοπτρισμών στο επίπεδο, η οικογένεια των στροφών δεν είναι αναγκαία για την κατασκευή της ορθογώνιας ομάδας. Συγκεκριμένα δείχνουμε το εξής:

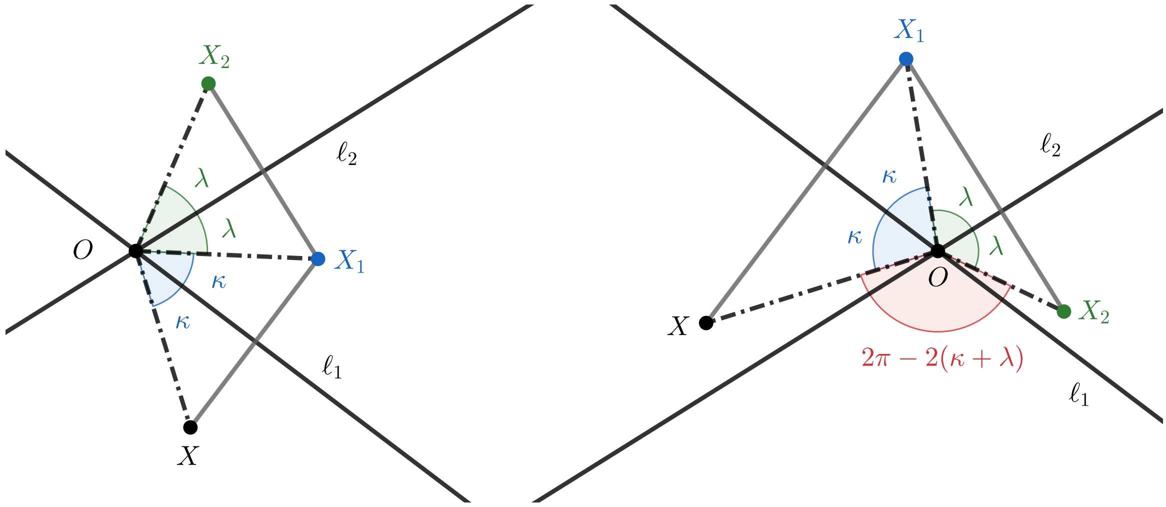
Πρόταση (6.3): Κάθε στροφή είναι σύνθεση δύο κατοπτρισμών ως προς ευθείες που διέρχονται από την αρχή των αξόνων.

Απόδειξη: Θα δώσουμε μια καθαρά γεωμετρική απόδειξη για την εν λόγω πρόταση. Κατ' αρχάς, ας θεωρήσουμε δύο τυχαίες ευθείες ℓ_1, ℓ_2 στο επίπεδο (όπως στο σχήμα), οι οποίες διέρχονται από το O και σχηματίζουν γωνία μέτρου $\theta/2$. Επίσης θεωρούμε και ένα σημείο X, το οποίο θα περιστρέψουμε κατά θ. Αν X_1 είναι ο κατοπτρισμός του X ως προς την ℓ_1 και X_2 ο κατοπτρισμός του X_1 ως προς την ℓ_2, ισχυριζόμαστε ότι η γωνία $\widehat{XOX_2}$ έχει μέτρο ακριβώς θ. Δηλαδή $\mathcal{A}(\widehat{XOX_2}) = \theta$.

Θεωρούμε $\kappa = \dfrac{1}{2} \cdot \mathcal{A}(\widehat{XOX_1})$, $\lambda = \dfrac{1}{2} \cdot \mathcal{A}(\widehat{X_1OX_2})$ και διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

Εάν το X_1 βρίσκεται εντός της 'αριστερής' γωνίας των ℓ_1, ℓ_2, τότε παρατηρούμε ότι $\kappa + \lambda = \theta/2$ και $2(\kappa+\lambda) = \mathcal{A}(\widehat{XOX_2})$. Επομένως $\mathcal{A}(\widehat{XOX_2}) = \theta$ και το ζητούμενο σ' αυτήν την περίπτωση ισχύει.

Διαφορετικά, αν το X_1 δεν βρίσκεται εντός της 'αριστερής' γωνίας των ℓ_1, ℓ_2, τότε παρατηρούμε ότι $\pi - \kappa - \lambda = \theta/2$ και $2\pi - 2(\kappa+\lambda) = \mathcal{A}(\widehat{XOX_2})$. Επομένως $\mathcal{A}(\widehat{XOX_2}) = \theta$ και το ζητούμενο ισχύει γενικά.



□

Μέχρι τώρα έχουμε δείξει ότι οι κατοπτρισμοί σε ευθείες που διέρχονται από το O αποτελούν οικογένεια που παράγει την ορθογώνια ομάδα $\mathrm{O}(\mathbb{R}^2)$. Με την παρακάτω πρόταση, σε συνδυασμό με το **Θεώρημα: *Μορφή των ισομετριών στο*** $\mathbb{R}^2$, ουσιαστικά δείχνουμε ότι κάθε ισομετρία παράγεται από την οικογένεια των κατοπτρισμών. Πριν όμως την πρόταση, παρατηρήστε το εξής:

Παρατήρηση (6.4): Εάν ο μετρικός χώρος (X, ϱ) είναι πεπερασμένης διάστασης, τότε κάθε ισομετρία είναι αμφιμονοσήμαντη. Κατ' επέκταση, σε χώρους πεπερασμένης διάστασης:

$$\mathrm{I}_\varrho(X) = \widehat{\mathrm{I}}_\varrho(X)$$

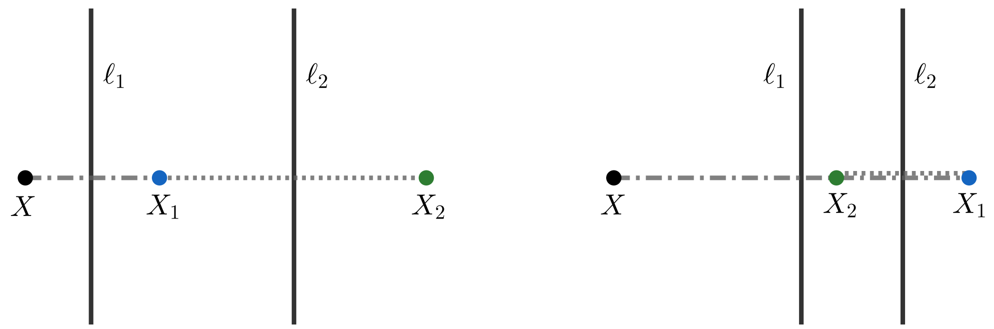
και ειδικά για την επίπεδη Ε.Γ., $\mathrm{I}(\mathbb{R}^2) = \widehat{\mathrm{I}}(\mathbb{R}^2)$.

Απόδειξη: Στην **Πρόταση (5.1), i.** δείξαμε ότι κάθε ισομετρία είναι ενεικονική. Για το επί, θεωρούμε $\sigma \in \mathrm{I}(\mathbb{R}^2)$ και ορίζουμε $\tau(x) = \sigma(x) - \sigma(0)$. Από τα **Λήμματα (6.3), (6.4), (6.2)** (με αυτήν την σειρά) η τ είναι γραμμική απεικόνιση. Μάλιστα, επειδή η σ είναι $1-1$, και η τ είναι $1-1$. Επειδή η $\tau : X \to X$ είναι $1-1$ και γραμμική σε χώρο πεπερασμένης διάστασης, θα είναι επί (από το θεώρημα διάστασης πυρήνα - εικόνας). Επειδή η ιδιότητα του επί δεν μεταβάλλεται από μεταφορές, και η σ είναι επί.

□

Πρόταση (6.4): Κάθε μεταφορά είναι σύνθεση δύο κατοπτρισμών. Κατ' επέκταση η ομάδα $\mathrm{I}(\mathbb{R}^2)$ παράγεται από κατοπτρισμούς.

Απόδειξη:



Θεωρούμε δύο παράλληλες ευθείες ℓ_1, ℓ_2 οι οποίες απέχουν απόσταση $a/2$ (όπως στο σχήμα) κι επίσης X_1 τον κατοπτρισμό του X ως προς την ℓ_1 και X_2 τον κατοπτρισμό του X_1 ως προς την ℓ_2. Θα δείξουμε ότι το ε.τ. XX_2 έχει μήκος a. Για την απόδειξη θεωρούμε $\kappa = \dfrac{1}{2} \cdot \varrho_E(X, X_2)$ και $\lambda = \dfrac{1}{2} \cdot \varrho_E(X_1, X_2)$, όπου ϱ_E είναι η ευκλείδεια μετρική.

Εάν το X_1 βρίσκεται μεταξύ των ℓ_1, ℓ_2, τότε παρατηρούμε ότι $\kappa + \lambda = a/2$ και επιπλέον $\varrho_E(X, X_2) = 2(\kappa + \lambda)$. Οπότε σε αυτήν την περίπτωση $\varrho_E(X, X_2) = a$.

Εάν το X_1 βρίσκεται στο ημιεπίπεδο της ℓ_2 που δεν περιέχει το X, τότε παρατηρούμε ότι $\kappa - \lambda = a/2$ και επιπλέον $\varrho_E(X, X_2) = 2(\kappa - \lambda)$. Οπότε η πρόταση ισχύει και σε αυτήν την περίπτωση.

□

Παρατήρηση (6.5): Κάθε ισομετρία $\sigma \in \mathrm{I}(\mathbb{R}^2)$ διατηρεί την οικογένεια των ευθειών, αφού οι κατοπτρισμοί απεικονίζουν ευθείες σε ευθείες.

Πρόταση (6.5): Εάν δύο τρίγωνα $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$, $\overset{\triangle}{\Delta EZ}$ είναι σύμφωνα, τότε υπάρχει ισομετρία που απεικονίζει το ένα στο άλλο. Ισχύει φυσικά και το αντίστροφο.

Απόδειξη: Για την απόδειξη της πρότασης θα εργαστούμε σε βήματα. Υποθέτουμε ότι $AB \cong \Delta E$, $B\Gamma \cong EZ$ και $A\Gamma \cong \Delta Z$.

Βήμα I: Θα δείξουμε ότι υπάρχει ισομετρία μ_1 που απεικονίζει την κορυφή A στην Δ. Πράγματι, αυτή η ισομετρία είναι μια μεταφορά του A στο Δ.

Βήμα II: Στην συνέχεια θα θέλαμε να μετακινήσουμε το $\mu_1(B)$ έτσι ώστε να συμπέσει στο E, χωρίς να μετακινηθεί το Δ. Εφαρμόζουμε λοιπόν μεταφορά μ_2 έτσι ώστε το Δ να συμπέσει στο O, κι έπειτα στροφή σ έτσι ώστε το $\mu_2 \circ \mu_1(B)$ να συμπέσει στο $\mu_2(E)$. Με ακόμη μία μεταφορά μ_2^{-1} παρατηρούμε ότι τελικά το $\mu_1(B)$ μετακινείται στο E και επιπλέον το Δ δεν αλλάζει θέση. Δηλαδή:

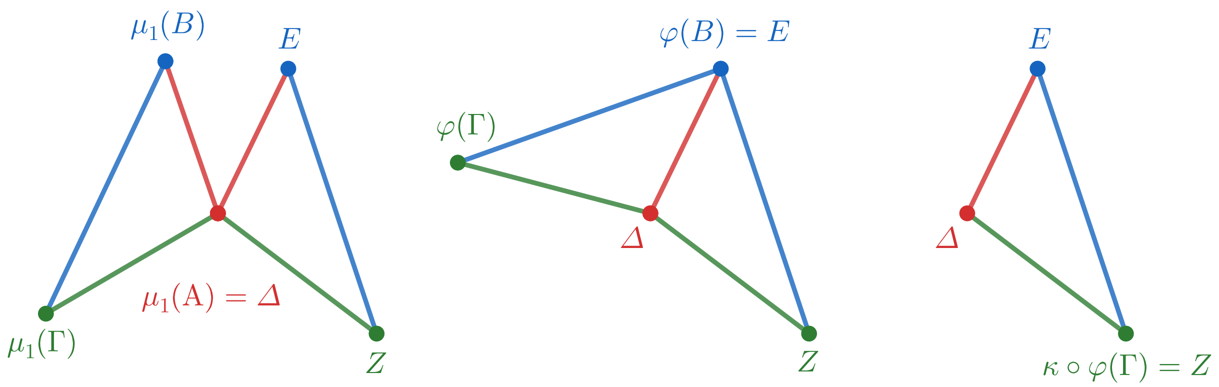
$$\mu_2^{-1} \circ \sigma \circ \mu_2 \circ \mu_1(B) = E \textbf{ και } \mu_2^{-1} \circ \sigma \circ \mu_2(\Delta) = \Delta$$

Βήμα III: Θέτουμε $\varphi = \mu_2^{-1} \circ \sigma_1 \circ \mu_2 \circ \mu_1$. Μένει να μετακινήσουμε το $\varphi(\Gamma)$ στο Z, χωρίς να μετακινήσουμε τα Δ και E.

Εάν $\varphi(\Gamma) \in \mathcal{H}(Z, \underleftrightarrow{\Delta E})$, τότε αναγκαστικά $\varphi(\Gamma) = Z$. Πράγματι, εάν ίσχυε $\varphi(\Gamma) \neq Z$, τότε στις σύμφωνες γωνίες $\widehat{\varphi(\Gamma)E\Delta} \cong \widehat{ZE\Delta}$ μπορεί να βρεθεί σημείο που ανήκει στη μία αλλά όχι στην άλλη (για παράδειγμα, όπως στην **Πρόταση (1.5)**).

Εάν $\varphi(\Gamma) \notin \mathcal{H}(Z, \underleftrightarrow{\Delta E})$, τότε με κατοπτρισμό κ ως προς την ευθεία $\underleftrightarrow{\Delta E}$ αναγόμαστε στην προηγούμενη περίπτωση, όπου τα σημεία βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο.

Σε κάθε περίπτωση, υπάρχει μια απεικόνιση f η οποία είναι σύνθεση μεταφορών, στροφών και κατοπτρισμών, τέτοια ώστε $f(A) = \Delta$, $f(B) = E$, $f(\Gamma) = Z$. Κατά συνέπεια η f είναι ισομετρία, αφού οι μεταφορές, οι στροφές και οι κατοπτρισμοί είναι ισομετρίες.



Βήμα IV: Η ισομετρία που έχουμε μέχρι τώρα βρει μετακινεί με 'σωστό' τρόπο τις κορυφές A, B, Γ στις Δ, E, Z, αλλά δεν έχει εξασφαλιστεί η 'σωστή' μετακίνηση για τα υπόλοιπα σημεία των πλευρών του τριγώνου. Δείχνουμε λοιπόν ότι αν μια ισομετρία f απεικονίζει το X στο Y και το V στο W, τότε απεικονίζει κάθε κυρτό συνδυασμό $\lambda X + (1-\lambda)V$ στον αντίστοιχο κυρτό συνδυασμό $\lambda Y + (1-\lambda)W$. Πράγματι, θεωρούμε $g(x) = f(x) - f(0)$ και βάσει του **Λήμματος (6.3)** η g είναι γραμμική. Δηλαδή:

$$g\big(\lambda X + (1-\lambda)V\big) = \lambda g(X) + (1-\lambda)g(V) = \lambda Y + (1-\lambda)W - \lambda f(0) - (1-\lambda)f(0) = \lambda Y + (1-\lambda)W - f(0)$$

Επειδή $g\big(\lambda X + (1-\lambda)V\big) = f\big(\lambda X + (1-\lambda)V\big) - f(0)$, έχουμε το ζητούμενο:

$$f\big(\lambda X + (1-\lambda)V\big) = \lambda Y + (1-\lambda)W$$

Βήμα V: Το αντίστροφο είναι συνέπεια του κριτηρίου ισότητας τριγώνων Π-Π-Π.

□

Παρατηρήσεις (6.6):
I. Η προηγούμενη απόδειξη υπολοίπεται αυστηρότητας. Γιατί, για παράδειγμα, όταν $\varphi(\Gamma) \notin \mathcal{H}(Z, \overleftrightarrow{\Delta E})$ ένας κατοπτρισμός ως προς την ευθεία $\overleftrightarrow{\Delta E}$ πράγματι απεικονίζει το $\varphi(\Gamma)$ στο Z; Μπορείτε ως άσκηση να αποδείξετε τις λεπτομέρεις της απόδειξης.

II. Ουσιαστικά οι μετασχηματισμοί που χρησιμοποιούνται για την εύρεση της ισομετρίας στην **Πρόταση (6.5)** είναι μια μεταφορά του A στο Δ, μία στροφή γύρω από το Δ έτσι ώστε το $\mu_1(B)$ να συμπέσει με το E, και ένας κατοπτρισμός ως προς την ευθεία $\overleftrightarrow{\Delta E}$. Επειδή η μεταφορά μπορεί να ειδωθεί ως κατοπτρισμός ως προς τη μεσοκάθετο του $A\Delta$, και η στροφή γύρω από το Δ μπορεί να ειδωθεί ως κατοπτρισμός ως προς τη διχοτόμο της $\widehat{\mu_1(\Gamma)\Delta E}$, ουσιαστικά αυτή η ισομετρία που αναζητούμε μπορεί να γραφεί ως σύνθεση το πολύ τριών κατοπτρισμών.

III. Στο **Βήμα IV** της προηγούμενης πρότασης δείξαμε το εξής αποτέλεσμα, το οποίο έχει ενδιαφέρον από μόνο του: Εάν μια ισομετρία f απεικονίζει το X στο Y και το V στο W, τότε απεικονίζει κάθε κυρτό συνδυασμό $\lambda X + (1-\lambda)V$ στον αντίστοιχο κυρτό συνδυασμό $\lambda Y + (1-\lambda)W$.

IV. Η **Πρόταση (6.5)** ουσιαστικά δείχνει ότι η συμφωνία των τριγώνων στην Ε.Γ. δεν είναι απλώς μια σχέση μεταξύ πλευρών και γωνιών. Η συμφωνία ουσιαστικά προκύπτει από τον περιορισμό μιας ισομετρίας ολόκληρου του χώρου.

Ορισμός: ***Συμφωνία σχημάτων σε μια Γ.Κ.:***
Έστω (H, X) μια Γ.Κ. και A, B δύο σχήματα αυτής την Γ.Κ. Τα σχήματα A, B λέγονται σύμφωνα (ή καταχρηστικά 'ίσα') αν υπάρχει $f \in H$ τέτοια ώστε $f(A) = B$. Συμβολίζουμε $A \cong B$.

Πρόταση (6.6): Επειδή η H είναι ομάδα, η σχέση '$\cong$' είναι σχέση ισοδυναμίας.

Απόδειξη: Πράγματι, η αυτοπαθητικότητα αληθεύει επειδή $\mathrm{id} \in H$ για κάθε ομάδα συναρτήσεων H. Η συμμετρία ισχύει διότι για κάθε $f \in H$, έχουμε $f^{-1} \in H$. Τέλος, η μεταβατικότητα αληθεύει κι αυτή, αφού για κάθε $f, g \in H$, έχουμε $f \circ g \in H$.

□

Θεώρημα: ***Καθορισμός των ισομετριών του $\mathbb{R}^2$:***
Κάθε $f \in \mathrm{I}(\mathbb{R}^2)$ καθορίζεται μονοσήμαντα από τις εικόνες τριών μη συνευθειακών σημείων του $\mathbb{R}^2$.

Απόδειξη: Θα δώσουμε δύο αποδείξεις. Η πρώτη απλώς θα αποδεικνύει ότι πράγματι μια ισομετρία καθορίζεται από τις εικόνες τριών μη συνευθειακών σημείων στο $\mathbb{R}^2$, χωρίς να βρίσκει ακριβώς τον τύπο της, ενώ η δεύτερη θα προσδιορίζει τη μορφή της ισομετρίας βάσει του **Θεωρήματος:** ***Μορφή των ισομετριών στον $\mathbb{R}^2$.***

(Πρώτη απόδειξη) Ας θεωρήσουμε την ευθεία που διέρχεται από κάποια σημεία X, Y. Η ευθεία αυτή λαμβάνει τη μορφή:

$$\big\{w \mid w = \lambda(X-Y) + Y,\ \lambda \in \mathbb{R}^2\big\} = \big\{w \mid w = \lambda X + (1-\lambda)Y,\ \lambda \in \mathbb{R}^2\big\}$$

Ουσιαστικά, κάθε ευθεία μπορεί να ειδωθεί ως επέκταση του κυρτού συνδυασμού οποιονδήποτε δύο σημείων της. Με αυτό υπόψη, επειδή η απόδειξη της **Παρατήρησης (6.6), III** δεν χρησιμοποιεί τη συνθήκη $\lambda \in [0,1]$, ισχύει γενικά, για κάθε λ.

Θεωρούμε τώρα μια ισομετρία f τέτοια ώστε $f(A) = \Delta$, $f(B) = E$, $f(\Gamma) = Z$ για κάποια μη συνευθειακά σημεία A, B, Γ. Λόγω της **Πρότασης (6.5)**, τα σημεία Δ, E, Z είναι επίσης μη συνευθειακά.

Κατ' αρχάς, από την **Παρατήρηση (6.6), III**, κάθε σημείο στο εσωτερικό του τριγώνου $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ απεικονίζεται στο αντίστοιχό του σημείο στο εσωτερικό του $\overset{\triangle}{\Delta EZ}$. Δηλαδή, αν X και Y είναι δύο σημεία στις πλευρές του $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$, τότε ο κυρτός συνδιασμός $\lambda X + (1-\lambda)Y$ απεικονίζεται στον $\lambda f(X) + (1-\lambda)f(Y)$. Επιλέγουμε W ένα σημείο στο εσωτερικό του $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ και για κάθε X στο εξωτερικό του τριγώνου, το ε.τ. XW τέμνει το τρίγωνο, έστω στο Y

(αφού το τρίγωνο είναι κλειστή καμπύλη). Βάσει της γενίκευσης της **Παρατήρησης (6.6), III**, εάν το X γράφεται $X = \lambda W + (1-\lambda)Y$, τότε $f(X) = \lambda f(W) + (1-\lambda)f(Y)$ (με $\lambda \in \mathbb{R}$). Επομένως η ισομετρία f καθορίζεται πλήρως σε όλο το επίπεδο από τις εικόνες των τριών μη συνευθειακών σημείων A, B, Γ.

(Δεύτερη απόδειξη) Σύμφωνα με το **Θεώρημα:** ***Μορφή των ισομετριών του*** $\mathbb{R}^2$, κάθε ισομετρία $f \in \mathrm{I}(\mathbb{R}^2)$ μπορεί να γραφεί στη μορφή:

$$[f(x,y)]^T = \begin{pmatrix} \alpha & \tilde{\beta} \\ \beta & \tilde{\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix}$$

για κάποια $\alpha, \tilde{\alpha}, \beta, \tilde{\beta}, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ με $\alpha = \tilde{\alpha},\ \beta = -\tilde{\beta}$ ή $\alpha = -\tilde{\alpha},\ \beta = \tilde{\beta}$.

Παρατηρούμε ότι $f(0,0) = (\gamma, \delta)$, οπότε η μεταφορά κατά (γ, δ) ουσιαστικά προσδιορίζεται από την εικόνα του $(0,0)$.

Στην συνέχεια θα προσδιορίσουμε τον πίνακα των $a, \tilde{\alpha}, \beta, \tilde{\beta}$ (ο οποίος αντιστοιχεί σε ορθογώνια απεικόνιση). Διαλέγουμε δύο σημεία A, B τέτοια ώστε να μην ανήκουν στον ίδιο μονοδιάστατο υπόχωρο του $\mathbb{R}^2$. Επειδή δεν ανήκουν στον ίδιο μονοδιάστατο υπόχωρο, παράγουν το $\mathbb{R}^2$ και συνεπώς η εξίσωση ως προς κ, λ:

$$\kappa \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \kappa \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

έχει για κάθε x, y μονοσήμαντη λύση. Κατ' επέκταση:

$$\det \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{pmatrix} = A_1 B_2 - A_2 B_1 \neq 0$$

Δεδομένου ότι γνωρίζουμε τις εικόνες των δύο σημείων $A = (A_1, A_2)$ και $B = (B_1, B_2)$, θα έχουμε τις σχέσεις:

$$f(A) - (\gamma, \delta) = (\alpha A_1 + \tilde{\beta} A_2,\ \beta A_1 + \tilde{\alpha} A_2)$$

και:

$$f(B) - (\gamma, \delta) = (\alpha B_1 + \tilde{\beta} B_2,\ \beta B_1 + \tilde{\alpha} B_2)$$

οπότε θα έχουμε το σύστημα:

$$\begin{pmatrix} \alpha A_1 + \tilde{\beta} A_2 & \beta A_1 + \tilde{\alpha} A_2 \\ \alpha B_1 + \tilde{\beta} B_2 & \beta B_1 + \tilde{\alpha} B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(A) - (\gamma, \delta) \\ f(B) - (\gamma, \delta) \end{pmatrix}$$

ή αλλιώς:

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_1 & B_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \tilde{\beta} \\ \beta \\ \tilde{\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [f(A) - (\gamma, \delta)]^T \\ [f(B) - (\gamma, \delta)]^T \end{pmatrix}$$

Το σύστημα αυτό έχει ορίζουσα:

$$\det \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_1 & B_2 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & 0 & 0 \\ B_1 & B_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_1 & A_2 \\ 0 & 0 & B_1 & B_2 \end{pmatrix} = -(A_1 B_2 - A_2 B_1)^2 \neq 0$$

οπότε έχει μονοσήμαντη λύση. Δείξαμε λοιπόν ότι και τα $\alpha, \tilde{\alpha}, \beta, \tilde{\beta}$ καθορίζονται μονοσήμαντα.

□

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

Μη εκφυλισμένες τετραγωνικές μορφές στον $\mathbb{R}^n$

Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε μια ασθενέστερη έννοια εσωτερικών γινομένων και τετραγωνικών μορφών, τα λεγόμενα μη εκφυλισμένα εσωτερικά γινόμενα και τις μη εκφυλισμένες τετραγωνικές μορφές.

Ας θεωρήσουμε X ένα σύνολο με δομή διανυσματικού χώρου και μια συνάρτηση $\mathcal{E} : X^2 \to \mathbb{R}$ η οποία έχει την πρώτη ιδιότητα του εσωτερικού γινομένου, ενώ οι άλλες δύο έχουν αντικατασταθεί από τη συνθήκη μη εκφυλισμού:

$$\text{Εάν } \forall y \in X,\ \mathcal{E}(x,y) = 0,\ \text{τότε υποχρεωτικά } x = 0$$

Αντίστοιχα, για κάθε μη εκφυλισμένο εσωτερικό γινόμενο, ορίζεται μη εκφυλισμένη τετραγωνική μορφή $T(x) = \mathcal{E}(x,x)$. Έχουμε λοιπόν τους εξής ορισμούς:

Ορισμός: ***Μη εκφυλισμένα εσωτερικά γινόμενα και μη εκφυλισμένες τετραγωνικές μορφές:***
I. *Έστω $(X,+,\cdot)$ ένας διανυσματικός χώρος και $\mathcal{E} : X^2 \to \mathbb{R}^2$ μια συνάρτηση με τις ιδιότητες*

- *Η $\langle \cdot,\cdot \rangle$ είναι συμμετρική και διγραμμική συνάρτηση - δηλαδή για κάθε $x,y,z \in X$ και $\lambda \in \mathbb{R}$:*

$$\langle x,y \rangle = \langle y,x \rangle \ \textbf{και}\ \langle x+\lambda y, z \rangle = \langle x,z \rangle + \lambda \langle y,z \rangle$$

- *Εάν $\forall y \in X,\ \mathcal{E}(x,y) = 0,$ τότε υποχρεωτικά $x = 0$*

Η $\mathcal{E}$ θα καλείται μη εκφυλισμένο εσωτερικό γινόμενο.

II. *Εάν $\mathcal{E} : X^2 \to \mathbb{R}$ είναι ένα μη εκφυλισμένο εσωτερικό γινόμενο, τότε η συνάρτηση $T : X \to \mathbb{R}$ με τύπο:*

$$T(x) = \mathcal{E}(x,x)$$

καλείται μη εκφυλισμένη τετραγωνική μορφή του $\mathcal{E}$.

7.1 Γενικοί τύποι και κανονικές παραστάσεις

Παρατήρηση (7.1): Για τα μη εκφυλισμένα εσωτερικά γινόμενα ισχύει το ανάλογο της **Παρατήρησης (6.2)**. Μάλιστα, επειδή στην απόδειξη της τελευταίας χρησιμοποιείται μόνο τη πρώτη ιδιότητα του εσωτερικού γινομένου, η απόδειξη εφαρμόζει απαράλλακτη και αποδεικνύει ότι: Για κάθε μη εκφυλισμένο εσωτερικό γινόμενο $\mathcal{E}$ και για τη μη εκφυλισμένη τετραγωνική μορφή αυτού T, αληθεύει:

$$\mathcal{E}(x,y) = \frac{1}{2} \cdot \big(T(x+y) - T(x) - T(y)\big)$$

Πρόταση (7.1): Έστω $\mathbb{B} = \{b_1, b_2, \cdots, b_n\}$ μια βάση του πεπερασμένου χώρου (δηλαδή πεπερασμένης διάστασης) X και $\mathcal{E} : X^2 \to \mathbb{R}$ ένα μη εκφυλισμένο εσωτερικό γινόμενο. Εάν $x_1, x_2, \cdots, x_n$ και $y_1, y_2, \cdots, y_n$ είναι οι συντεταγμένες (ως προς τη βάση $\mathbb{B}$) των $x, y \in X$, τότε υπάρχει πίνακας $M_{\mathcal{E}}(\mathbb{B}) \in \mathbb{R}^{n,n}$ που εξαρτάται από τη βάση $\mathbb{B}$ (και εννοείται το εσωτερικό γινόμενο), τέτοιος ώστε:

$$\mathcal{E}(x,y) = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \cdot M_{\mathcal{E}}(\mathbb{B}) \cdot (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$$

Απόδειξη: Η απόδειξη του συγκεκριμένου είναι εφαρμογή της πρώτης ιδιότητας του μη εκφυλισμένου εσωτερικού γινομένου:

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(x,y) &= \mathcal{E}(x_1 b_1 + x_2 b_2 + \cdots + x_n b_n, y_1 b_1 + y_2 b_2 + \cdots + y_n b_n) \\ &= \sum_{i \leqslant n} x_i \mathcal{E}(b_i, y_1 b_1 + y_2 b_2 + \cdots + y_n b_n)\end{aligned}$$

$$= (x_1, x_2, \cdots, x_n) \cdot \begin{pmatrix} \mathcal{E}(b_1, y_1b_1 + y_2b_2 + \cdots + y_nb_n) \\ \mathcal{E}(b_2, y_1b_1 + y_2b_2 + \cdots + y_nb_n) \\ \vdots \\ \mathcal{E}(b_n, y_1b_1 + y_2b_2 + \cdots + y_nb_n) \end{pmatrix}$$

$$= (x_1, x_2, \cdots, x_n) \cdot \begin{pmatrix} \sum_{j\leqslant n} y_j\mathcal{E}(b_1, b_j) \\ \sum_{j\leqslant n} y_j\mathcal{E}(b_2, b_j) \\ \vdots \\ \sum_{j\leqslant n} y_j\mathcal{E}(b_n, b_j) \end{pmatrix}$$

$$= (x_1, x_2, \cdots, x_n) \cdot \begin{pmatrix} \big(\mathcal{E}(b_1, b_1), \mathcal{E}(b_1, b_2), \cdots, \mathcal{E}(b_1, b_n)\big) \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \\ \big(\mathcal{E}(b_2, b_1), \mathcal{E}(b_2, b_2), \cdots, \mathcal{E}(b_2, b_n)\big) \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \\ \vdots \\ \big(\mathcal{E}(b_n, b_1), \mathcal{E}(b_n, b_2), \cdots, \mathcal{E}(b_n, b_n)\big) \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= (x_1, x_2, \cdots, x_n) \cdot \begin{pmatrix} \mathcal{E}(b_1, b_1) & \mathcal{E}(b_1, b_2) & \cdots & \mathcal{E}(b_1, b_n) \\ \mathcal{E}(b_2, b_1) & \mathcal{E}(b_2, b_2) & \cdots & \mathcal{E}(b_2, b_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{E}(b_n, b_1) & \mathcal{E}(b_n, b_2) & \cdots & \mathcal{E}(b_n, b_n) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Η πρόταση λοιπόν ισχύει με:

$$M_{\mathcal{E}}(\mathbb{B}) = \begin{pmatrix} \mathcal{E}(b_1, b_1) & \mathcal{E}(b_1, b_2) & \cdots & \mathcal{E}(b_1, b_n) \\ \mathcal{E}(b_2, b_1) & \mathcal{E}(b_2, b_2) & \cdots & \mathcal{E}(b_2, b_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{E}(b_n, b_1) & \mathcal{E}(b_n, b_2) & \cdots & \mathcal{E}(b_n, b_n) \end{pmatrix}$$

□

Παρατηρήσεις (7.2):
I. Επειδή κάθε μη εκφυλισμένο εσωτερικό γινόμενο είναι συμμετρικό, ο αντίστοιχος πίνακας είναι συμμετρικός. Αυτό προκύπτει από τη μορφή του πίνακα στην **Πρόταση (7.1)**.

II. Από την **Πρόταση (7.1)** προκύπτει ότι η μη εκφυλισμένη τετραγωνική μορφή ενός μη εκφυλισμένου εσωτερικού γινομένου (εννοείται σε χώρο πεπερασμένης διάστασης) παίρνει τη μορφή:

$$T(x) = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \cdot M_{\mathcal{E}}(\mathbb{B}) \cdot (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$$

όπου $x_1b_1 + x_2b_2 + \cdots + x_nb_n$ είναι μια αναγραφή του x ως προς τη βάση $\mathbb{B} = \{b_i\}_{i=1}^n$.

Παρατήρηση (7.3): Έστω $\mathcal{E} : X^2 \to \mathbb{R}$ ένα μη εκφυλισμένο εσωτερικό γινόμενο (σε πεπερασμένο χώρο) και $M_{\mathcal{E}}(\mathbb{B})$ ο πίνακας αυτού ως προς τη βάση $\mathbb{B}$. Η συνθήκη μη εκφυλισμού:

$$\text{Εάν } \forall y \in X,\ \mathcal{E}(x, y) = 0,\ \text{τότε υποχρεωτικά } x = 0$$

συνεπάγεται την $\det M_{\mathcal{E}}(\mathbb{B}) \neq 0$.

Απόδειξη: Έστω $x = \sum_{i\leqslant n} x_ib_i,\ b_i \in \mathbb{B}$. Εφαρμόζουμε τη συνθήκη μη εκφυλισμού για τα διάφορα $y \in \mathbb{B} = \{b_i\}_{i=1}^n$ και παίρνουμε τις n στο πλήθος σχέσεις:

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n) \cdot \begin{pmatrix} \mathcal{E}(b_1, b_1) & \mathcal{E}(b_1, b_2) & \cdots & \mathcal{E}(b_1, b_n) \\ \mathcal{E}(b_2, b_1) & \mathcal{E}(b_2, b_2) & \cdots & \mathcal{E}(b_2, b_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{E}(b_n, b_1) & \mathcal{E}(b_n, b_2) & \cdots & \mathcal{E}(b_n, b_n) \end{pmatrix} (0, \cdots, 0, \overbrace{1}^{i}, 0, \cdots, 0)^T = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

ή αλλιώς:

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n) \cdot \begin{pmatrix} \mathcal{E}(b_1, b_i) \\ \mathcal{E}(b_2, b_i) \\ \vdots \\ \mathcal{E}(b_n, b_i) \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Συνδυάζοντας τις παραπάνω σχέσεις παίρνουμε:

$$\begin{pmatrix} \mathcal{E}(b_1, b_1) & \mathcal{E}(b_1, b_2) & \cdots & \mathcal{E}(b_1, b_n) \\ \mathcal{E}(b_2, b_1) & \mathcal{E}(b_2, b_2) & \cdots & \mathcal{E}(b_2, b_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{E}(b_n, b_1) & \mathcal{E}(b_n, b_2) & \cdots & \mathcal{E}(b_n, b_n) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

το οποίο δείχνει ότι το παραπάνω σύστημα έχει μοναδική λύση την τετριμμένη. Οπότε:

$$\det \begin{pmatrix} \mathcal{E}(b_1, b_1) & \mathcal{E}(b_1, b_2) & \cdots & \mathcal{E}(b_1, b_n) \\ \mathcal{E}(b_2, b_1) & \mathcal{E}(b_2, b_2) & \cdots & \mathcal{E}(b_2, b_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{E}(b_n, b_1) & \mathcal{E}(b_n, b_2) & \cdots & \mathcal{E}(b_n, b_n) \end{pmatrix}^T \neq 0 \Rightarrow \det \begin{pmatrix} \mathcal{E}(b_1, b_1) & \mathcal{E}(b_1, b_2) & \cdots & \mathcal{E}(b_1, b_n) \\ \mathcal{E}(b_2, b_1) & \mathcal{E}(b_2, b_2) & \cdots & \mathcal{E}(b_2, b_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{E}(b_n, b_1) & \mathcal{E}(b_n, b_2) & \cdots & \mathcal{E}(b_n, b_n) \end{pmatrix} \neq 0$$

Παρατηρήστε ότι οι ισχυρισμοί αντιστρέφονται, οπότε κανείς μπορεί να δείξει την ισοδυναμία των δύο συνθηκών της παρατήρησης.

□

Ας σημειωθεί ότι σε μια μη εκφυλισμένη τετραγωνική μορφή δεν είναι απαραίτητο να ισχύει $T(x) \geqslant 0$, οπότε η έννοια της απόστασης όπως αυτή ορίζεται στις τετραγωνικές μορφές, δεν έχει νόημα. Στο πλαίσιο του κεφαλαίου αυτού εντάσσεται η μελέτη των Γ.Κ. $(H, \mathbb{R}^n)$, όπου $(H, \circ)$ είναι μια υποομάδα της $(\mathrm{Aut}(\mathbb{R}^n), \circ)$, της οποίας κάθε στοιχείο $f \in H$ διατηρεί μια μη εκφυλισμένη τετραγωνική μορφή. Δηλαδή ισχύει:

$$T(x - y) = T(f(x) - f(y)), \ \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

Η μελέτη των Γ.Κ. θα διευκολυνθεί δεδομένου ότι ο πίνακας των τετραγωνικών μορφών μπορεί να πάρει την 'απλούστερη δυνατή μορφή' - υπάρχει, για παράδειγμα, βάση τέτοια ώστε ο πίνακας της τετραγωνικής μορφής να καθίσταται σε διαγώνια μορφή; Η απάντηση που θα δώσουμε θα είναι καταφατική.

Έστω ότι οι τιμές μιας μη εκφυλισμένης τετραγωνικής μορφής $T : X \to \mathbb{R}$ (στον πεπερασμένο χώρο X) δίνονται από τον τύπο:

$$T(x) = \sum_{i,j \leqslant n} a_{i,j} x_i x_j$$

όπου $(a_{i,j})_{i,j}$ είναι ο πίνακας της T και $x = \sum_{i \leqslant n} x_i b_i$ είναι μια αναγραφή του x ως προς τη βάση $\mathbb{B} = \{b_i\}_{i=1}^n$. Εάν $\mathbb{G} = \{g_i\}_{i=1}^n$ είναι μια άλλη βάση, τότε υπάρχει ο πίνακας αλλαγής βάσης $S = (s_{i,j})_{i,j}$ για τον οποίον:

$$\begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{1,1} & s_{1,2} & \cdots & s_{1,n} \\ s_{2,1} & s_{2,2} & \cdots & s_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{n,1} & s_{n,2} & \cdots & s_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι αν $\sum_{i \leqslant n} y_i g_i$ είναι μια αναγραφή του x ως προς τη βάση $\mathbb{G}$:

$$x = \sum_i y_i g_i = \sum_i y_i \Big(\sum_j s_{i,j} b_j \Big) = \sum_i \sum_j s_{j,i} y_j b_i$$

οπότε $x_i = \sum_j s_{j,i} y_j$. Γράφουμε τώρα:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{1,1} & s_{2,1} & \cdots & s_{n,1} \\ s_{1,2} & s_{2,2} & \cdots & s_{n,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{1,n} & s_{2,n} & \cdots & s_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

και παρατηρούμε ότι ο παραπάνω $n \times n$ πίνακας είναι ο S^T. Δηλαδή:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = S^T \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow (x_1, x_2, \cdots, x_n) = (y_1, y_2, \cdots, y_n) \cdot S$$

Με αυτά υπόψη, έχουμε την ακόλουθη παρατήρηση:

Παρατήρηση (7.4): Έστω $T : X \to \mathbb{R}$ είναι μια μη εκφυλισμένη τετραγωνική μορφή και $\mathbb{B} = \{b_i\}_{i=1}^n$, $\mathbb{G} = \{g_i\}_{i=1}^n$ δύο βάσεις του X με πίνακα αλλαγής βάσης $S = (\mathbb{G} : \mathbb{B})$. Εάν M, M' είναι οι πίνακες αυτού ως προς τις βάσεις $\mathbb{B}$ και $\mathbb{G}$ αντίστοιχα, τότε:

$$M' = SMS^T$$

Απόδειξη: Πράγματι, από την **Παρατήρηση (7.2), II** και από την προηγούμενη ανάλυση:

$$T(x) = (y_1, y_2, \cdots, y_n) \cdot SMS^T \cdot (y_1, y_2, \cdots, y_n)^T$$

όπου x_i, y_i είναι οι συμβολισμοί που χρησιμοποιήσαμε παραπάνω.

$\square$

Πρόταση (7.2): Έστω $T : X \to \mathbb{R}$ μια μη εκφυλισμένη τετραγωνική μορφή στον πεπερασμένο χώρο X και M ο πίνακας αυτής ως προς τη βάση $\mathbb{B}$. Υπάρχει βάση $\mathbb{G}$ του X τέτοια ώστε ο πίνακας της T, έστω M', ως προς τη βάση $\mathbb{G}$ να είναι διαγώνιος - κατ' επέκταση η T λαμβάνει τη μορφή:

$$T(x) = \sum_{i \leqslant n} \lambda_i y_i^2$$

όπου $x = \sum_{i \leqslant n} y_i g_i,\ g_i \in \mathbb{G}$ είναι μια αναγραφή του x ως προς τη βάση $\mathbb{G}$ και $\lambda_i \in \mathbb{R}^*$.

Απόδειξη: Ο πίνακας του T είναι συμμετρικός, οπότε υπάρχει διαγωνοποίηση μέσω ορθογώνιων πινάκων (δηλαδή πινάκων με την ιδιότητα $AA^T = A^T A = \mathrm{Id}_n$):

$$M \simeq AMA^T = M' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Οι $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ είναι όλες πραγματικές ιδιοτιμές του πίνακα M. Επειδή επιπλέον η ορίζουσα είναι αμετάβλητη από την ομοιότητα πινάκων, από τη σχέση $\det M \neq 0$ (της **Παρατήρησης (7.3)**) έχουμε $\det M' \neq 0$. Άρα, $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \ldots \cdot \lambda_n \neq 0 \Rightarrow \lambda_i \in \mathbb{R}^*$.

$\square$

Πρόταση (7.3) Έστω $T : X \to \mathbb{R}$ μια μη εκφυλισμένη τετραγωνική μορφή στον πεπερασμένο χώρο X. Υπάρχει βάση $\mathbb{G}$ του X τέτοια ώστε:

$$T(x) = \sum_{i=1}^{k} y_i^2 - \sum_{i=k+1}^{n} y_i^2$$

όπου y_i είναι οι συντεταγμένες του x, ως προς τη βάση $\mathbb{G}$.

Απόδειξη: Από την **Πρόταση (7.2)** υπάρχει βάση $\mathbb{G}' = \{g_i'\}_{i=1}^n$ τέτοια ώστε:

$$T(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2$$

όπου x_i είναι οι συντεταγμένες του x ως προς τη βάση αυτή. Αναδιατάσσουμε κατάλληλα τα g_i' και παίρνουμε βάση $\mathbb{G}^* = \{g_i^*\}_{i=1}^n$ τέτοια ώστε για κάποιο k να ισχύει $\lambda_i^* > 0,\ i \leqslant k$ και $\lambda_i^* < 0,\ i > k$.

$$T(x) = \sum_{i=1}^{k} |\lambda_i^*| x_i^{*2} - \sum_{i=k+1}^{n} |\lambda_i^*| x_i^{*2}$$

Τώρα μετασχηματίζοντας την τελευταία βάση σε $\mathbb{G} = \left\{ g_i = \dfrac{g_i^*}{\sqrt{|\lambda_i^*|}} \right\}_{i=1}^n$, έπεται η ζητούμενη μορφή:

$$T(x) = \sum_{i=1}^{k} y_i^2 - \sum_{i=k+1}^{n} y_i^2$$

με $y_i = \sqrt{|\lambda_i^*|} \cdot x_i^*$ (εδώ χρησιμοποιήσαμε την **Παρατήρηση (7.4)**).

$\square$

Ορισμός: *Θετικός δείκτης:*
Έστω $T : X \to \mathbb{R}$ μία μη εκφυλισμένη εσωτερική μορφή σε πεπερασμένο χώρο X κι έστω επίσης μια γραφή της:

$$T(x) = \sum_{i=1}^{k} y_i^2 - \sum_{i=k+1}^{n} y_i^2$$

*όπως αυτή που εξασφαλίζεται από την **Πρόταση (7.3)**. Ορίζουμε ως θετικό δείκτη της τετραγωνικής μορφής (αντίστοιχα του εσωτερικού γινομένου από το οποίο προέρχεται) τον αριθμό:*

$$\delta_T = k \text{ (αντίστοιχος συμβολισμός: } \delta_{\mathcal{E}} = k)$$

Παρατήρηση (7.5) Ο προηγούμενος ορισμός είναι καλός ορισμός, με την έννοια ότι ο θετικός δείκτης είναι καλά ορισμένος. Εάν:

$$T(x) = \sum_{i=1}^{k} y_i^2 - \sum_{i=k+1}^{n} y_i^2 \textbf{ και } T(x) = \sum_{i=1}^{\ell} y_i^{*2} - \sum_{i=\ell+1}^{n} y_i^{*2}$$

είναι δύο γραφές της μη εκφυλισμένης τετραγωνικής μορφής (όπως αυτές εξασφαλίζονται από την **Πρόταση (7.3)**), τότε $k = \ell$.

Απόδειξη: Ας υποθέσουμε ότι η πρώτη γραφή της T είναι ως προς τη βάση $\mathbb{B} = \{b_i\}_{i=1}^n$ και η δεύτερη ως προς τη $\mathbb{G} = \{g_i\}_{i=1}^n$. Θεωρούμε $S = (s_{i,j})_{i,j}$ τον πίνακα αλλαγής βάσης:

$$\begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{1,1} & s_{1,2} & \cdots & s_{1,n} \\ s_{2,1} & s_{2,2} & \cdots & s_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{n,1} & s_{n,2} & \cdots & s_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Υποθέτουμε $k \neq 0$ και επίσης, χωρίς βλάβη της γενικότητας, $k > \ell$ (η περίπτωση $0 < k < \ell$ είναι ανάλογη). Παρατηρούμε ότι το σύστημα:

$$(\star) \qquad \begin{pmatrix} s_{1,1} & \cdots & s_{1,k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{\ell,1} & \cdots & s_{\ell,k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

έχει μη μηδενική λύση $(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_\ell)^T$ (εφόσον $k > \ell$), επομένως αν θεωρήσουμε το διάνυσμα:

$$\mu^T = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_k \\ \mu_{\kappa+1} \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{1,1} & s_{1,2} & \cdots & s_{1,n} \\ s_{2,1} & s_{2,2} & \cdots & s_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{k,1} & s_{k,2} & \cdots & s_{k,n} \\ s_{k+1,1} & s_{k+1,2} & \cdots & s_{k+1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{n,1} & s_{n,2} & \cdots & s_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

θα δούμε ότι, για κάθε $i \leqslant \ell$:

$$\mu_i = \sum_{j=1}^{n} s_{i,j}\lambda_j = \sum_{j=1}^{k} s_{i,j}\lambda_j = 0$$

και οπότε $\mu = (0, \cdots, 0, \mu_{k+1}, \cdots, \mu_n)$. Να σημειωθεί ότι στην τελευταία ισότητα στον υπολογισμό των μ_i χρησιμοποιείται η σχέση ($\star$).

Παρατηρήστε τώρα ότι το μ ως προς τη βάση $\mathbb{G}$ έχει συντεταγμένες $(0, \cdots, 0, \mu_{k+1}, \cdots, \mu_n)$ και ως προς τη βάση $\mathbb{B}$ έχει συντεταγμένες $(\lambda_1, \cdots, \lambda_k, 0, \cdots, 0)$. Υπολογίζοντας λοιπόν την τιμή $T(\mu)$ ως προς τις δύο βάσεις έχουμε:

$$T(\mu) = -\sum_{i=k+1}^{n} \mu_i^2 \textbf{ και } T(\mu) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i^2$$

το οποίο είναι άτοπο, αφού η πρώτη σχέση δίνει $T(\mu) \leqslant 0$ και η δεύτερη $T(\mu) > 0$.

□

Έχουμε δείξει ότι για κάθε πεπερασμένο χώρο X υπάρχει βάση $\mathbb{G} = \{g_i\}_{i=1}^n$ τέτοια ώστε μια μη εκφυλισμένη τετραγωνική μορφή T να παίρνει τη μορφή:

$$T(x) = \sum_{i=1}^{\delta_T} x_i^2 - \sum_{i=\delta_T+1}^{n} x_i^2$$

όπου x_i είναι οι συντεταγμένες του x ως προς την εν λόγω βάση. Αντίστοιχα λοιπόν, το εσωτερικό γινόμενο από το οποίο η μη εκφυλισμένη τετραγωνική μορφή προέρχεται έχει πίνακα:

$$M_{\mathcal{E}}(\mathbb{G}) = \begin{pmatrix} \overbrace{\begin{matrix}1 & 0 & \cdots & 0\end{matrix}}^{\mathrm{Id}_{\delta_T}} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \begin{matrix}0 & 1 & \cdots & 0\end{matrix} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \begin{matrix}\vdots & \vdots & \ddots & \vdots\end{matrix} & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \begin{matrix}0 & 0 & \cdots & 1\end{matrix} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \begin{matrix}0 & 0 & \cdots & 0\end{matrix} & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \begin{matrix}0 & 0 & \cdots & 0\end{matrix} & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \begin{matrix}\vdots & \vdots & \ddots & \vdots\end{matrix} & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \begin{matrix}0 & 0 & \cdots & 0\end{matrix} & \underbrace{\begin{matrix}0 & 0 & \cdots & -1\end{matrix}}_{-\mathrm{Id}_{n-\delta_T}} \end{pmatrix}$$

Ορισμός: *Κανονική μορφή μη εκφυλισμένων εσωτερικών γινομένων και τετραγωνικών μορφών:*
I. *Θα ονομάζουμε κανονική παράσταση της μη εκφυλισμένης τετραγωνικής μορφής T την αναγραφή της όπως στην **Πρόταση (7.3)**.*

II. *Αντίστοιχα, ονομάζουμε κανονική παράσταση ενός εσωτερικού γινομένου τη γραφή αυτού βάσει της **Πρότασης (7.1)**, με πίνακα:*

$$M_{\mathcal{E}}(\mathbb{G}) = \begin{pmatrix} \overbrace{\begin{matrix}1 & 0 & \cdots & 0\end{matrix}}^{\mathrm{Id}_{\delta_{\mathcal{E}}}} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \begin{matrix}0 & 1 & \cdots & 0\end{matrix} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \begin{matrix}\vdots & \vdots & \ddots & \vdots\end{matrix} & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \begin{matrix}0 & 0 & \cdots & 1\end{matrix} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \begin{matrix}0 & 0 & \cdots & 0\end{matrix} & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \begin{matrix}0 & 0 & \cdots & 0\end{matrix} & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \begin{matrix}\vdots & \vdots & \ddots & \vdots\end{matrix} & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \begin{matrix}0 & 0 & \cdots & 0\end{matrix} & \underbrace{\begin{matrix}0 & 0 & \cdots & -1\end{matrix}}_{-\mathrm{Id}_{n-\delta_{\mathcal{E}}}} \end{pmatrix}$$

Με δεδομένο ένα μη εκφυλισμένο εσωτερικό γινόμενο $\mathcal{E}$, μια βάση $\mathbb{G}$ τέτοια ώστε $\left|\mathcal{E}(g_i, g_j)\right| = \delta_{i,j}$ (όπου το δ είναι του Kronecker), θα καλείται ορθοκανονική βάση του χώρου. Είναι φανερό ότι ως προς κάθε ορθοκανονική βάση (ενδεχομένως με κατάλληλη αναδιάταξή της) κάθε τετραγωνική μορφή εκφράζεται με την κανονική της παράσταση. Επομένως, εν γένει υπάρχουν περισσότερες από μία βάσεις ώστε μια δεδομένη τετραγωνική μορφή να παίρνει την κανονική της παράσταση.

Η μέθοδος που περιγράψαμε για την 'κανονικοποίηση' μιας τετραγωνικής μορφής, ουσιαστικά είναι η λεγόμενη *μέθοδος Lagrange*. Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε ακόμη μία, την *μέθοδο Jacobi*, η οποία ουσιαστικά γενικεύει τη μέθοδο Gram - Schmidt. Πριν όμως προχωρίσουμε σ' αυτήν, χρειαζόμαστε έναν ορισμό.

Ορισμός: *Κύριες ορίζουσες:*
Έστω $A = (a_{i,j})_{i,j} \in \mathbb{R}^{n,n}$ ένας πίνακας και $k \in \{1, 2, \cdots, n\}$. Η $k \times k$ κύρια ορίζουσα του A (θα τη συμβολίζουμε $D_A(k)$) είναι η ορίζουσα του άνω αριστερά $k \times k$ υποπίνακα του A. Δηλαδή η:

$$D_A(k) = \det \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k,1} & \cdots & a_{k,k} \end{pmatrix}$$

Για λόγους ομοιομορφίας, θα θεωρούμε επίσης ότι $D_A(0) = 1$.

Θεώρημα: ***Μέθοδος Jacobi:***
Έστω $\mathcal{E} : X^2 \to \mathbb{R}$ ένα μη εκφυλισμένο εσωτερικό γινόμενο (σε πεπερασμένο χώρο X), $T : X \to \mathbb{R}$ η αντίστοιχη τετραγωνική μορφή και $\mathbb{B}$ μια βάση του X. Εάν κάθε κύρια ορίζουσα $D_{M_{\mathcal{E}}(\mathbb{B})}(k),\ k \in \{1, 2, \cdots, n\}$ είναι μη μηδενική, υπάρχει βάση $\mathbb{G}$ ως προς την οποία η T παίρνει την κανονική της μορφή (και αντίστοιχα το εσωτερικό γινόμενο $\mathcal{E}$ παίρνει την κανονική του μορφή).

Απόδειξη: Η απόδειξη θα γίνει σε βήματα.

Βήμα I: Αναζητούμε αλλαγή βάσης (από την $\mathbb{B} = \{b_i\}_{i=1}^n$ στην $\mathbb{G}' = \{g_i'\}_{i=1}^n$) με κάτω τριγωνικό πίνακα αλλαγής βάσης:

$$\begin{pmatrix} g_1' \\ g_2' \\ \vdots \\ g_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{1,1} & & & \mathbf{O} \\ s_{2,1} & s_{2,2} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ s_{n,1} & s_{n,2} & \cdots & s_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

τέτοια ώστε η τετραγωνική μορφή να γράφεται (ως προς αυτή τη βάση $\mathbb{G}'$):

$$T(x) = \sum_{i \leqslant n} t_{i,i} {y_i'}^2,\ t_i \in \mathbb{R}$$

όπου y_i' είναι οι συντεταγμένες του x ως προς τη βάση $\mathbb{G}'$. Κατ' αρχάς, εν γένει η T γράφεται:

$$T(x) = \sum_{i,j \leqslant n} t_{i,j} y_i y_j,\ \text{με } t_{i,j} = \mathcal{E}(g_i', g_j')$$

Επομένως, εάν αυτή βρίσκεται σε κανονική παράσταση, θα πρέπει $\mathcal{E}(g_i', g_j') = 0$ για κάθε $i \neq j\ , i, j \leqslant n$. Μάλιστα, λόγω της συμμετρίας των μη εκφυλισμένων εσωτερικών γινομένων κανείς χρειάζεται απλώς να απαιτήσει $\mathcal{E}(g_i', g_j') = 0$ για κάθε $i < j$ και $j \leqslant n$. Φυσικά τα 'διαγώνια' στοιχεία $\mathcal{E}(g_j', g_j')$ δεν θα πρέπει να είναι μηδενικά.

Ένας τρόπος να πετύχουμε την "$\mathcal{E}(g_i', g_j') = 0$ για κάθε $i \neq j\ , i, j \leqslant n$", είναι να απαιτήσουμε:

$$\mathcal{E}(b_i, g_j') = 0,\ \text{για } i < j,\ j \leqslant n$$

Πράγματι, εάν η παραπάνω σχέση ισχύει, για $i < j$:

$$\mathcal{E}(g_i', g_j') = \mathcal{E}\Big(\sum_{k \leqslant i} s_{i,k} b_k, g_j'\Big) = \sum_{k \leqslant i} s_{i,k} \overbrace{\mathcal{E}(b_k, g_j')}^{0} = 0$$

Χρειάζεται βέβαια ακόμη να απαιτήσουμε ότι $\mathcal{E}(b_j, g_j') \neq 0$, για να ικανοποιήσουμε και τη συνθήκη ότι τα 'διαγώνια' στοιχεία είναι μη μηδενικά - για ευκολία στις πράξεις θα τα υποθέσουμε όλα αυτά τα εσωτερικά γινόμενα ίσα με 1. Έχουμε λοιπόν την οικογένεια συστημάτων (για τα διάφορα $i < j$ και $j \leqslant n$):

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(b_i, g_j') &= 0,\ i < j \leqslant n \\ \mathcal{E}(b_j, g_j') &= 1,\ j \leqslant n \end{aligned}$$

την οποία θα μελετήσουμε επαγωγικά ως προς j.

Για $j = 1$, έχουμε:

$$\mathcal{E}(b_1, s_{1,1} b_1) = 1 \Rightarrow s_{1,1} \cdot \mathcal{E}(b_1, b_1) = 1 \Rightarrow s_{1,1} \cdot D(1) = 1 \Rightarrow s_{1,1} = \frac{1}{D_{M_{\mathcal{E}}(\mathbb{B})}(1)} = \frac{D_{M_{\mathcal{E}}(\mathbb{B})}(0)}{D_{M_{\mathcal{E}}(\mathbb{B})}(1)}$$

Για $j = \lambda$, έχουμε $\mathcal{E}(b_i, g_\lambda') = 0,\ i < \lambda$, δηλαδή ότι:

$$\mathcal{E}(b_i, g_\lambda') = 0 \Rightarrow \mathcal{E}\Big(b_i, \sum_{k \leqslant \lambda} s_{\lambda,k} b_k\Big) = 0 \Rightarrow \sum_{k \leqslant \lambda} s_{\lambda,k} \mathcal{E}(b_i, b_k) = 0$$

Γράφουμε τώρα:

$$\mathcal{E}(b_\lambda, g_\lambda') = 1 \Rightarrow \mathcal{E}\Big(b_\lambda, \sum_{k \leqslant \lambda} s_{\lambda,k} b_k\Big) = 1 \Rightarrow \sum_{k \leqslant \lambda} s_{\lambda,k} \mathcal{E}(b_\lambda, b_k) = 1$$

και παίρνουμε το σύστημα:

$$\begin{cases} s_{\lambda,1}\mathcal{E}(b_1,b_1)+s_{\lambda,2}\mathcal{E}(b_1,b_2)+\cdots+s_{\lambda,\lambda}\mathcal{E}(b_1,b_\lambda)=0 \\ s_{\lambda,1}\mathcal{E}(b_2,b_1)+s_{\lambda,2}\mathcal{E}(b_2,b_2)+\cdots+s_{\lambda,\lambda}\mathcal{E}(b_2,b_\lambda)=0 \\ \vdots \\ s_{\lambda,1}\mathcal{E}(b_\lambda,b_1)+s_{\lambda,2}\mathcal{E}(b_\lambda,b_2)+\cdots+s_{\lambda,\lambda}\mathcal{E}(b_\lambda,b_\lambda)=1 \end{cases}$$

το οποίο είναι ισοδύναμο με το:

$$\begin{pmatrix} \mathcal{E}(b_1,b_1) & \mathcal{E}(b_1,b_2) & \cdots & \mathcal{E}(b_1,b_\lambda) \\ \mathcal{E}(b_2,b_1) & \mathcal{E}(b_2,b_2) & \cdots & \mathcal{E}(b_2,b_\lambda) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{E}(b_\lambda,b_1) & \mathcal{E}(b_\lambda,b_2) & \cdots & \mathcal{E}(b_\lambda,b_\lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_{\lambda,1} \\ s_{\lambda,2} \\ \vdots \\ s_{\lambda,\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Το παραπάνω γραμμικό σύστημα έχει ορίζουσα $D_{M_{\mathcal{E}}(\mathbb{B})}(\lambda) \neq 0$, οπότε έχει μοναδική λύση. Μ' αυτόν τον τρόπο προσδιορίζονται τα $s_{\lambda_1}, s_{\lambda,2}, \cdots, s_{\lambda,\lambda}$.

Μάλιστα, με τη μέθοδο των οριζουσών κανείς μπορεί να δείξει ότι:

$$s_{\lambda,\lambda} = \frac{1}{D_{M_{\mathcal{E}}(\mathbb{B})}(\lambda)} \cdot \det \begin{pmatrix} \mathcal{E}(b_1,b_1) & \cdots & \mathcal{E}(b_1,b_{\lambda-1}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{E}(b_{\lambda-1},b_1) & \cdots & \mathcal{E}(b_{\lambda-1},b_{\lambda-1}) \end{pmatrix} = \frac{D_{M_{\mathcal{E}}(\mathbb{B})}(\lambda-1)}{D_{M_{\mathcal{E}}(\mathbb{B})}(\lambda)}$$

Παρατηρήστε ότι τα g_i' όπως αυτά ορίζονται από τη σχέση:

$$\begin{pmatrix} g_1' \\ g_2' \\ \vdots \\ g_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{1,1} & & & \mathbf{O} \\ s_{2,1} & s_{2,2} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ s_{n,1} & s_{n,2} & \cdots & s_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

αποτελούν βάση του χώρου, αφού:

$$\det \begin{pmatrix} s_{1,1} & & & \mathbf{O} \\ s_{2,1} & s_{2,2} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ s_{n,1} & s_{n,2} & \cdots & s_{n,n} \end{pmatrix} = \prod_{i\leqslant n} s_{i,i} = \prod_{i\leqslant n} \frac{D_{M_{\mathcal{E}}(\mathbb{B})}(i-1)}{D_{M_{\mathcal{E}}(\mathbb{B})}(i)} = \frac{D_{M_{\mathcal{E}}(\mathbb{B})}(0)}{D_{M_{\mathcal{E}}(\mathbb{B})}(n)} \neq 0$$

(δηλαδή η αντιστοιχία μεταξύ των δύο χώρων που παράγονται από τα b_i, g_i' είναι αμφιμονοσήμαντη).

Βήμα II: Στη συνέχεια θα προσδιορίσουμε τους αριθμούς $t_{j,j}$. Για τη συγκεκριμένη επιλογή της βάσης $\mathbb{G}' = \{g_i'\}_{i=1}^n$ έχουμε:

$$\mathcal{E}(b_i, g_j') = 0,\ i < j \leqslant n$$
$$\mathcal{E}(b_j, g_j') = 1,\ j \leqslant n$$

οπότε:

$$t_{j,j} = \mathcal{E}(g_j', g_j') = \mathcal{E}\Big(\sum_{k\leqslant j} s_{j,k} b_k, g_j'\Big) = \sum_{k\leqslant j} s_{j,k}\mathcal{E}(b_k, g_j') = s_{j,j} = \frac{D_{M_{\mathcal{E}}(\mathbb{B})}(j-1)}{D_{M_{\mathcal{E}}(\mathbb{B})}(j)}$$

Η τετραγωνική μορφή λοιπόν γράφεται:

$$T(x) = \sum_{j\leqslant n} \frac{D_{M_{\mathcal{E}}(\mathbb{B})}(j-1)}{D_{M_{\mathcal{E}}(\mathbb{B})}(j)} \cdot {y_j'}^2$$

όπου y_j' είναι οι συντεταγμένες του x ως προς τη βάση $\mathbb{G}'$.

Βήμα III: Έστω $\xi_j = \dfrac{D_{M_{\mathcal{E}}(\mathbb{B})}(j-1)}{D_{M_{\mathcal{E}}(\mathbb{B})}(j)}$ και ξ_j^* μια αναδιάταξη αυτών, τέτοια ώστε να φέρνει τα δ_T θετικά

ξ_j στην αρχή και τα αρνητικά στο τέλος, και g_j^* η αντίστοιχη αναδιάταξη της $\mathbb{G}'$. Θεωρώντας τη βάση $\mathbb{G} = \left\{ g_j = \dfrac{g_j^*}{\sqrt{|\xi_j^*|}} \right\}_{j=1}^{n}$ παρατηρούμε ότι η τετραγωνική μορφή T παίρνει την κανονική της μορφή:

$$T(x) = \sum_{j=1}^{\delta_T} y_j^2 - \sum_{j=\delta_T+1}^{n} y_j^2$$

όπου $y_j = \sqrt{|\xi_j^*|} \cdot y_j^*$ και y_j^* είναι η αναδιάταξη των y_j που αντιστοιχεί στην αναδιάταξη ξ_j^* των ξ_j.

□

Ας δούμε πώς εφαρμόζεται η μέθοδος Jacobi με ένα παράδειγμα. Έστω ένα μη εκφυλισμένο εσωτερικό γινόμενο $\mathcal{E} : X^2 \to \mathbb{R}$ και T η αντίστοιχη τετραγωνική μορφή με τύπο:

$$T\big((x_1, x_2, x_3)\big) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - 2x_1x_3$$

ως προς την κανονική βάση $\big\{e_1 = (1,0,0),\ e_2 = (0,1,0),\ e_3 = (0,0,1)\big\}$. Θα επιχειρήσουμε να βρούμε τον πίνακα της T ώστε αυτή να εκφράζεται στην κανονική της παράσταση.

Κατ'αρχάς, επειδή:

$$\mathcal{E}(a,b) = \frac{1}{2} \cdot \big(T(a+b) - T(a) - T(b)\big)$$

έχουμε:

$$\mathcal{E}(e_1,e_1) = 1,\ \mathcal{E}(e_1,e_2) = 0,\ \mathcal{E}(e_1,e_3) = -1,\ \mathcal{E}(e_2,e_2) = 1,\ \mathcal{E}(e_2,e_3) = 0,\ \mathcal{E}(e_3,e_3) = -1$$

Οπότε αν η T είναι τετραγωνική μορφή, θα έχει πίνακα:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Θεωρούμε την συνάρτηση $\mathcal{E}(x,y) = x \cdot M \cdot y^T$ και δείχνουμε ότι αυτή είναι μη εκφυλισμένο εσωτερικό γινόμενο με τετραγωνική μορφή την T (δεν θα μπούμε σε λεπτομέρειες). Οπότε η T είναι πράγματι τετραγωνική μορφή. Επιπλέον, καθεμία κύρια ορίζουσα του M δεν είναι μηδενική.

Στη συνέχεια αναζητούμε πίνακα αλλαγής βάσης:

$$\begin{pmatrix} g_1' \\ g_2' \\ g_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_{1,1} & 0 & 0 \\ \delta_{2,1} & \delta_{2,2} & 0 \\ \delta_{3,1} & \delta_{3,2} & \delta_{3,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}$$

τέτοιον ώστε η νέα βάση που αυτός ορίζει να θέτει την τετραγωνική μορφή στην διαγώνιά της μορφή:

$$T(x) = \sum_{i \leqslant 3} t_{i,i} {y_i'}^2,\ t_i \in \mathbb{R}$$

Όπως στην απόδειξη του **Θεωρήματος: *Μέθοδος Jacobi***, θεωρούμε την οικογένεια συστημάτων:

$$\mathcal{E}(e_i, g_j') = 0,\ i < j \leqslant 3$$
$$\mathcal{E}(e_j, g_j') = 1,\ j \leqslant 3$$

από την οποία θα προσδιορίσουμε τα $\delta_{i,j}$. Για $j = 1$ έχουμε:

$$\mathcal{E}(e_1, \delta_{1,1}e_1) = 1 \Rightarrow \delta_{1,1} = 1$$

Για $j = 2$:

$$\mathcal{E}(e_1, \delta_{2,1}e_1 + \delta_{2,2}e_2) = 0 \Rightarrow \delta_{2,1} + \delta_{2,2} \cdot 0 = 0 \Rightarrow \delta_{2,1} = 0$$

και:

$$\mathcal{E}(e_2, \delta_{2,1}e_1 + \delta_{2,2}e_2) = 1 \Rightarrow \delta_{2,1} \cdot 0 + \delta_{2,2} = 1 \Rightarrow \delta_{2,2} = 1$$

Τέλος, για $j = 3$:

$$\mathcal{E}(e_1, \delta_{3,1}e_1 + \delta_{3,2}e_2 + \delta_{3,3}e_3) = 0 \Rightarrow \delta_{3,1} + \delta_{3,2} \cdot 0 + \delta_{3,3} \cdot (-1) = 0 \Rightarrow \delta_{3,1} = \delta_{3,3}$$

και:

$$\mathcal{E}(e_2, \delta_{3,1}e_1 + \delta_{3,2}e_2 + \delta_{3,3}e_3) = 0 \Rightarrow \delta_{3,1} \cdot 0 + \delta_{3,2} + \delta_{3,3} \cdot 0 = 0 \Rightarrow \delta_{3,2} = 0$$

και:

$$\mathcal{E}(e_3, \delta_{3,1}e_1 + \delta_{3,2}e_2 + \delta_{3,3}e_3) = 0 \Rightarrow \delta_{3,1} \cdot (-1) + \delta_{3,2} \cdot 0 + \delta_{3,3} \cdot (-1) = 1 \Rightarrow \delta_{3,1} + \delta_{3,3} = -1$$

δηλαδή: $\delta_{3,1} = \delta_{3,3} = 1/2$ και $\delta_{3,2} = 0$.

Η βάση λοιπόν $\mathbb{G}' = \{g_1', g_2', g_3'\}$ προσδιορίζεται από το σύστημα:

$$\begin{pmatrix} g_1' \\ g_2' \\ g_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}$$

και η τετραγωνική μορφή ως προς την $\mathbb{G}'$ γράφεται:

$$T(x) = {y_1'}^2 + {y_2'}^2 - \frac{1}{2}{y_3'}^2$$

Μετασχηματίζοντας την $\mathbb{G}'$ στη νέα βάση $\mathbb{G} = \{g_1 = g_1',\ g_2 = g_2',\ g_3 = \sqrt{2} \cdot g_3'\}$, η T παίρνει την κανονική της μορφή.

$$T(x) = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$$

Ο θετικός δείκτης της τετραγωνικής μορφής είναι 2.

7.2 Ισόμορφοι χώροι με εσωτερικό γινόμενο

Ορισμός: *Ισόμορφοι χώροι με εσωτερικό γινόμενο:*
Έστω $(X, \mathcal{E})$ και $(Y, \mathcal{G})$ δύο χώροι με μη εκφυλισμένα εσωτερικά γινόμενα. Οι χώροι αυτοί θα καλούνται ισόμορφοι αν υπάρχει γραμμικός ισομορφισμός $f : X \to Y$ που διατηρεί τα εσωτερικά γινόμενα. Δηλαδή:

$$\forall x, y \in X,\ \mathcal{E}(x, y) = \mathcal{G}\big(f(x), f(y)\big)$$

Παρατήρηση (7.6): Βάσει του **Ορισμού: *Ορθογώνιες απεικονίσεις***, δύο χώροι με μη εκφυλισμένα εσωτερικά γινόμενα είναι ισόμορφοι εάν υπάρχει ορθογώνιος (γραμμικός) ισομορφισμός (με τη γενικότερη έννοια του 'ορθογώνιου') μεταξύ των X, Y. Παρατηρήστε όμως ότι το **Λήμμα (6.4)** έχει γενίκευση για τον γενικότερο τύπο ορθογώνιων απεικονίσεων, αφού η απόδειξή του μπορεί να εφαρμοστεί με μικρές τροποποιήσεις για ορθογώνιες απεικονίσεις μεταξύ εν γένει διαφορετικών χώρων (θα δοθεί ως άσκηση να αποδείξετε το θεώρημα στη γενική του μορφή). Επομένως, αρκεί να υπάρχει ορθογώνια απεικόνιση μεταξύ δύο χώρων ίδιας διάστασης ώστε αυτοί να γίνονται ισόμορφοι.

Φυσικά μια απόδειξη βασισμένη στο **Λήμμα (6.4)** θα είναι αρκετά κουραστική - θυμηθείτε πόσα λήμματα χρησιμοποιήσαμε για την απόδειξή του. Θα δώσουμε λοιπόν έναν ανάλογο χαρακτηρισμό με κάπως απλούστερη απόδειξη.

Πρόταση (7.4) Οι χώροι $(X, \mathcal{E})$ και $(Y, \mathcal{G})$ είναι ισόμορφοι εάν και μόνο αν $\dim X = \dim Y$ και οι αντίστοιχες μη εκφυλισμένες τετραγωνικές μορφές T, P έχουν τον ίδιο θετικό δείκτη.

Απόδειξη: ($\Rightarrow$) Εάν οι χώροι $(X, \mathcal{E})$, $(Y, \mathcal{G})$ είναι ισόμορφοι, υπάρχει γραμμικός ισομορφισμός $f : X \to Y$ που διατηρεί τα εσωτερικά γινόμενα. Δηλαδή:

$$\forall x, y,\ \mathcal{E}(x, y) = \mathcal{G}\big(f(x), f(y)\big)$$

Επειδή η f είναι γραμμικός ισομορφισμός, οι δύο χώροι X, Y είναι ισόμορφοι ως διανυσματικοί χώροι, κι επομένως έχουν την ίδια διάσταση $\dim X = \dim Y = n$.

Θεωρούμε $\mathbb{B}$ μια βάση του X, για την οποία το μη εκφυλισμένο εσωτερικό γινόμενο $\mathcal{E}$ λαμβάνει την κανονική του παράσταση:

$$M_{\mathcal{E}}(\mathbb{B}) = \begin{array}{c} \overbrace{\hphantom{1\ 0\ \cdots\ 0}}^{\mathrm{Id}_{\delta_{\mathcal{E}}}} \hphantom{0\ 0\ \cdots\ 0} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{pmatrix} \\ \hphantom{1\ 0\ \cdots\ 0} \underbrace{\hphantom{0\ 0\ \cdots\ -1}}_{-\mathrm{Id}_{n-\delta_{\mathcal{E}}}} \end{array}$$

Επειδή η f είναι γραμμικός ισομορφισμός, το σύνολο $f(\mathbb{B})$ θα αποτελεί βάση του Y. Μάλιστα, επειδή η f διατηρεί τα εσωτερικά γινόμενα:

$$\mathcal{E}(b_i, b_j) = \mathcal{G}\big(f(b_i), f(b_j)\big)$$

δηλαδή:

$$\mathcal{G}\big(f(b_i), f(b_j)\big) = 0,\ i \neq j \text{ **και** } \mathcal{G}\big(f(b_i), f(b_i)\big) = 1,\ i \leqslant \delta_{\mathcal{E}} \text{ **και** } \mathcal{G}\big(f(b_i), f(b_i)\big) = -1,\ i > \delta_{\mathcal{E}}$$

Η $\mathcal{G}$ λοιπόν, ως προς τη βάση $f(\mathbb{B})$ παίρνει την κανονική της μορφή και μάλιστα $\delta_{\mathcal{E}} = \delta_{\mathcal{G}}$. Επειδή $\delta_{\mathcal{E}} = \delta_T$ και $\delta_{\mathcal{G}} = \delta_P$, έχουμε το ζητούμενο.

($\Leftarrow$) Υποθέτουμε ότι $\delta_T = \delta_P = \delta$ και $\dim X = \dim Y = n$, και θέλουμε να δείξουμε ότι υπάρχει γραμμικός ισομορφισμός $f : X \to Y$ που διατηρεί τα εσωτερικά γινόμενα $\mathcal{E}, \mathcal{G}$. Θεωρούμε $\mathbb{B} = \{b_i\}_{i=1}^n$ και $\mathbb{G} = \{g_i\}_{i=1}^n$

δύο βάσεις των X και Y τέτοιες ώστε να θέτουν τις τετραγωνικές μορφές T, P στην κανονική τους παράσταση, καθώς επίσης και την γραμμική συνάρτηση:

$$f : X \to Y,\ \forall i \in \{1, 2, \cdots, n\},\ f(b_i) = g_i$$

Ισχυριζόμαστε ότι αυτή η f είναι η ζητούμενη απεικόνιση.

Πράγματι, είναι γραμμικός ισομορφισμός εξ ορισμού της, οπότε χρειάζεται μονάχα να δειχθεί ότι διατηρεί τα εσωτερικά γινόμενα $\mathcal{E}, \mathcal{G}$. Ισοδύναμα, (λόγω αυτής της 'δυϊκότητας' μεταξύ εσωτερικών γινομένων και τετραγωνικών μορφών) αρκεί να διατηρεί τις αντίστοιχες τετραγωνικές μορφές T, P. Εάν λοιπόν $x = x_1 b_1 + \cdots + x_n b_n$ είναι ένα στοιχείο του X, τότε:

$$T(x) = \sum_{i=1}^{\delta} x_i^2 - \sum_{i=\delta+1}^{n} x_i^2$$

κι επειδή $f(x) = f(x_1 b_1 + \cdots + x_n b_n) = x_1 f(b_1) + \cdots + x_n f(b_n) = x_1 g_1 + \cdots + x_n g_n$:

$$P\big(f(x)\big) = \sum_{i=1}^{\delta} x_i^2 - \sum_{i=\delta+1}^{n} x_i^2$$

Συνεπώς:

$$T(x) = P\big(f(x)\big)$$

και κατ' επέκταση οι χώροι $(X, \mathcal{E}),\ (Y, \mathcal{G})$ είναι ισόμορφοι.

$\square$

7.3 Ασκήσεις του Κεφαλαίου 7

1. Δείξτε την ισοδυναμία των δύο συνθηκών στην **Παρατήρηση (7.3)**.

2. Δείξτε ότι μια απεικόνιση $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ είναι μια τετραγωνική μορφή που προκύπτει από μη εκφυλισμένο εσωτερικό γινόμενο $\mathcal{E}$ εάν και μόνο αν αληθεύει $T(\lambda x) = \lambda^2 T(x)$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^n$ κι επιπλέον η $\frac{1}{2} \cdot \big(T(x+y) - T(x) - T(y)\big)$ είναι διγραμμική.

3. Αποδείξτε ότι αν μια μη εκφυλισμένη τετραγωνική μορφή T παίρνει τη 'διαγώνια μορφή':
$$T(x) = \sum_{i=1}^{\delta_T} \lambda_i x_i - \sum_{i=\delta_T+1}^{n} \lambda_i x_i$$
ως προς κάποια βάση $\mathbb{B} = \{b_i\}_{i=1}^n$ (όπου $\lambda_i > 0$ και x_i είναι οι συντεταγμένες του x ως προς την $\mathbb{B}$), με την αλλαγή βάσης:
$$b_i \rightsquigarrow \frac{b_i}{\sqrt{\lambda_i}}$$
η T παίρνει την κανονική της μορφή.

4. Έστω $X = C([0,1])$ ο διανυσματικός χώρος των συνεχών συναρτήσεων f με πεδίο ορισμού $\operatorname{dom} f = [0,1]$. Δείξτε ότι ο χώρος X είναι απειροδιάστατος κι επιπλέον η απεικόνιση:
$$T : X \to \mathbb{R},\ T(f) = \int_0^1 f(t)^2\, dt$$
είναι μια τετραγωνική μορφή στον X. Ποιό είναι το εσωτερικό γινόμενο από το οποίο αυτή προέρχεται;

5. Δίνεται η απεικόνιση $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ με $T\big((x,y,z)\big) = x^2 - y^2 - z^2 + 4xy$, όπου οι συντεταγμένες x, y, z νοούνται ως προς τη συνήθη βάση του $\mathbb{R}^3$. Δείξτε ότι η T ορίζει μια μη εκφυλισμένη τετραγωνική μορφή και υπολογίστε τον πίνακά της ως προς τη βάση $\mathbb{G}$ που την καθιστά στην κανονική της μορφή. Έπειτα, βρείτε τον θετικό δείκτη της T και την κανονική της παράσταση.

6. Αποδείξτε το **Λήμμα (6.4)** στη γενικότερή του μορφή:

   Για δύο χώρους $(X, \mathcal{E}),\ (Y, \mathcal{G})$ ορίζουμε τα σύνολα:
   - $\mathrm{I}(X,Y) = \{f : X \to Y \mid f$ *ισομετρία*$\}$
   - $\mathrm{GL}(X,Y) = \{f : X \to Y \mid f$ *γραμμικός ισομορφισμός*$\}$
   - $\mathrm{O}(X,Y) = \{f : X \to Y \mid f$ *ορθογώνια*$\}$

   Εάν οι X, Y έχουν την ίδια πεπερασμένη διάσταση, τότε $\mathrm{I}(X,Y) \cap \mathrm{GL}(X,Y) = \mathrm{O}(X,Y)$.

7. Θεωρούμε τους χώρους με μη εκφυλισμένο εσωτερικό γινόμενο $(\mathbb{R}^3, \mathcal{E})$ και $(\mathbb{R}^3, \mathcal{E}')$, όπου:
$$\begin{aligned}
\mathcal{E}\big((x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2)\big) &= 2x_1x_2 - y_1y_2 + 3z_1z_2 \\
\mathcal{E}'\big((x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2)\big) &= x_1x_2 + y_1y_2 + y_2z_1 + y_1z_2 - z_1z_2
\end{aligned}$$
(φυσικά οι συντεταγμένες νοούνται ως προς τη συνήθη βάση του $\mathbb{R}^3$). Εξηγήστε γιατί οι δύο χώροι είναι ισόμορφοι ή γιατί δεν είναι ισόμορφοι.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8

Η Ευκλείδεια Γεωμετρία του $\mathbb{R}^n$

8.1 Θετικά ορισμένες τετραγωνικές μορφές

Στο υποκεφάλαιο **6.2** μελετήσαμε την επίπεδη Ε.Γ. μέσω της Γ.Κ. $(\widehat{\mathrm{I}}(\mathbb{R}^2), \mathbb{R}^2) = (\mathrm{I}(\mathbb{R}^2), \mathbb{R}^2)$, και γι' αυτόν τον σκοπό μας απασχόλησε ιδιαιτέρως η ορθογώνια ομάδα $\mathrm{O}(\mathbb{R}^2)$. Φυσικά, η μελέτη των ορθογώνιων απεικονίσεων δικαιολογήθηκε από το γενικό **Θεώρημα:** ***Μορφή των ισομετριών***, κατά το οποίο κάθε ισομετρία ενός χώρου με εσωτερικό γινόμενο $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ είναι σύνθεση ορθογώνιας απεικόνισης με μεταφορά. Για την μελέτη λοιπόν μιας πολυδιάστατης Ε.Γ. $(\mathbb{R}^n, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, θα ασχοληθούμε με την κατά Klein μορφή αυτής $(\widehat{\mathrm{I}}(\mathbb{R}^n), \mathbb{R}^n) = (\mathrm{I}(\mathbb{R}^n), \mathbb{R}^n)$, και κατ' επέκταση με τις διάφορες ιδιότητες και ιδιαιτερότητες της αντίστοιχης ορθογώνιας ομάδας $\mathrm{O}(\mathbb{R}^n)$. Συγκεκριμένα το πρόβλημα είναι να βρεθούν λειτουργικές παραστάσεις (ως προς κατάλληλες βάσεις) για τα στοιχεία της ορθογώνιας ομάδας $\mathrm{O}(\mathbb{R}^n)$.

Ορισμός: ***Θετικά ορισμένα εσωτερικά γινόμενα και θετικά ορισμένες τετραγωνικές μορφές:***
I. *Έστω $(X, \mathcal{E}^+)$ ένας χώρος με διάσταση n και μη εκφυλισμένο εσωτερικό γινόμενο θετικού δείκτη $\delta_{\mathcal{E}^+} = n$. Το εσωτερικό γινόμενο αυτό $\mathcal{E}^+$ θα καλείται θετικά ορισμένο.*

II. *Εάν $\mathcal{E}^+ : X^2 \to \mathbb{R}$ είναι ένα θετικά ορισμένο εσωτερικό γινόμενο, τότε η αντίστοιχη μη εκφυλισμένη τετραγωνική μορφή T^+ θα καλείται θετικά ορισμένη.*

Παρατηρήσεις (8.1):
I. Ως τώρα έχουμε δώσει αρκετούς ορισμούς 'εσωτερικών γινομένων'. Κατ' αρχάς, έχουμε την γενικότερη έννοια των *μη εκφυλισμένων εσωτερικών γινομένων* και την υποκατηγορία αυτών, τα *εσωτερικά γινόμενα*. Επίσης, μόλις ορίσαμε τα *θετικά ορισμένα εσωτερικά γινόμενα*. Η σχέση αυτών είναι η εξής: Κάθε εσωτερικό γινόμενο είναι μη εκφυλισμένο και η έννοια του εσωτερικού γινομένου ταυτίζεται αυτής του θετικά ορισμένου εσωτερικού γινομένου.

Απόδειξη: Δείχνουμε τα εξής: Πρώτον, εάν $\langle\cdot,\cdot\rangle : X^2 \to \mathbb{R}$ είναι ένα εσωτερικό γινόμενο, τότε αν για κάθε $y \in X$ έχουμε $\langle x, y\rangle = 0$, αναγκαστικά $x = 0$. Πράγματι, αυτό προκύπτει θέτοντας $y = x$.

Δεύτερον, κάθε εσωτερικό γινόμενο $\langle\cdot,\cdot\rangle : X^2 \to \mathbb{R}$ έχει θετικό δείκτη $n = \dim X$ και κάθε θετικά ορισμένο εσωτερικό γινόμενο είναι εσωτερικό γινόμενο. Πράγματι, εάν ένα εσωτερικό γινόμενο δεν είχε δείκτη n, τότε η αντίστοιχη τετραγωνική μορφή (ως προς κάποια βάση $\mathbb{B} = \{b_i\}_{i=1}^n$) θα γραφόταν:

$$\langle x, x\rangle = T(x) = \sum_{i=1}^{\delta_T} x_i^2 - \sum_{i=\delta_T+1}^{n} x_i^2$$

με x_i να είναι οι συντεταγμένες ως προς τη βάση $\mathbb{B}$. Έτσι λοιπόν, για $x = b_n$ θα είχαμε $T(x) < 0$, το οποίο είναι άτοπο από τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου. Επιπλέον, αν $\mathcal{E}^+$ είναι ένα θετικά ορισμένο εσωτερικό γινόμενο, η αντίστοιχη τετραγωνική μορφή T^+ (ως προς κάποια βάση $\mathbb{G} = \{g_i\}_{i=1}^n$) θα γράφεται:

$$\mathcal{E}^+(x, x) = T^+(x) = \sum_{i \leqslant n} x_i^2$$

με x_i να είναι οι συντεταγμένες ως προς τη βάση $\mathbb{G}$. Επομένως, $T(x) \geqslant 0$ και η ισότητα αληθεύει αν και μόνο αν $x = 0$.

$\square$

II. Βάσει της **Πρότασης (7.4)**, ένας χώρος $(X, \mathcal{E})$ με μη εκφυλισμένο εσωτερικό γινόμενο είναι ισόμορφος με τον $(\mathbb{R}^n, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, όπου $\big\langle (x_1, \cdots, x_n), (y_1, \cdots, y_n)\big\rangle = \sum_{i\leqslant n} x_i y_i$, αν και μόνο αν $\dim X = \dim \mathbb{R}^n = n$ και $\delta_{\mathcal{E}} = \delta_{\langle\cdot,\cdot\rangle}$. Δηλαδή αν οι $X, \mathbb{R}^n$ έχουν ίδια διάσταση και το $\mathcal{E}$ είναι θετικά ορισμένο.

Θεώρημα: ***Κριτήριο του Sylvester:***
Μια μη εκφυλισμένη τετραγωνική μορφή $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ με πίνακα $A = (a_{i,j})_{i,j}$ είναι θετικά ορισμένη εάν και μόνο αν καθεμία από τις κύριες ορίζουσες $D_A(k),\ k \in \{1, 2, \cdots, n\}$ είναι θετική.

Απόδειξη: ($\Rightarrow$) Εάν μια τετραγωνική μορφή είναι θετικά ορισμένη, τότε ο περιορισμός αυτής στις $k \leqslant n$ διαστάσεις θα είναι κι αυτή θετικά ορισμένη τετραγωνική μορφή. Δηλαδή η συνάρτηση:

$$T_k({}^k x) = (x_1, x_2, \cdots, x_k) \cdot \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,k} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k,1} & a_{k,2} & \cdots & a_{k,k} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix}$$

με x_i να είναι οι συντεταγμένες του ${}^k x \in \mathbb{R}^k \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ ως προς την βάση ${}^k\mathbb{B} = \{b_i\}_{i=1}^k$ του $\mathbb{R}^k$ (που αποτελεί 'περιορισμό' της βάσης $\mathbb{B} = \{b_i\}_{i=1}^n$ του $\mathbb{R}^n$) είναι θετικά ορισμένη τετραγωνική μορφή. Υπάρχει λοιπόν βάση ${}^k\mathbb{G}$ του $\mathbb{R}^k$ ως προς την οποία ο πίνακας M_k της T_k γίνεται ταυτοτικός. Κατ' επέκταση, αν S_k είναι ο πίνακας αλλαγής βάσης $S_k = ({}^k\mathbb{G} :\ {}^k\mathbb{B})$, τότε:

$$\mathrm{Id}_k = S_k \cdot M_k \cdot S_k^T \Rightarrow (\det S_k)^2 \cdot \det M_k = 1 \Rightarrow \det M_k > 0$$

(ο S_k είναι πίνακας αλλαγής βάσης, και συνεπώς $\det S_k \neq 0$). Αυτό φυσικά ισχύει για κάθε $k \leqslant n$, οπότε σε συνδυασμό με το ότι $M_k = D_A(k)$, αποδεικνύεται το ευθύ.

($\Leftarrow$) Αντιστρόφως, εάν υποθέσουμε ότι για κάθε $k \in \{1, 2, \cdots, n\}$ αληθεύει $D_A(k) > 0$, από την απόδειξη του **Θεωρήματος:** ***Μέθοδος Jacobi*** υπάρχει βάση $\mathbb{G}' = \{g_i'\}_{i=1}^n$ ως προς την οποία η T λαμβάνει τη διαγώνια μορφή:

$$T(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{D_A(i-1)}{D_A(i)} {y_i'}^2$$

Θεωρώντας λοιπόν τη βάση $\mathbb{G} = \left\{ \sqrt{\dfrac{D_A(i)}{D_A(i-1)}} \cdot g_i' \right\}_{i=1}^n$, η T γράφεται στην κανονική της μορφή:

$$T(x) = \sum_{i=1}^{n} y_i^2$$

με θετικό δείκτη $\delta_T = n$. Αποδεικνύουμε λοιπόν και το αντίστροφο.

$\square$

Πρόταση (8.1): *(Ορίζουσα Gramm)* Έστω $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_k \in \mathbb{R}^n$ με $k \leqslant n$. Έστω επίσης η θετικά ορισμένη τετραγωνική μορφή $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ που προέρχεται από το εσωτερικό γινόμενο $\mathcal{E} : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$. Τότε ισχύει:

$$D_{\mathcal{E}}(\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n) = \det \begin{pmatrix} \mathcal{E}(\gamma_1, \gamma_1) & \mathcal{E}(\gamma_1, \gamma_2) & \cdots & \mathcal{E}(\gamma_1, \gamma_k) \\ \mathcal{E}(\gamma_2, \gamma_1) & \mathcal{E}(\gamma_2, \gamma_2) & \cdots & \mathcal{E}(\gamma_2, \gamma_k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{E}(\gamma_k, \gamma_1) & \mathcal{E}(\gamma_k, \gamma_2) & \cdots & \mathcal{E}(\gamma_k, \gamma_k) \end{pmatrix} \geqslant 0$$

με την ισότητα εάν και μόνο αν τα γ_i είναι γραμμικώς εξαρτημένα.

Απόδειξη: Εδώ θα διακρύνουμε δύο περιπτώσεις: Κατ'αρχάς, εάν τα γ_i είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, θα παράγουν έναν υπόχωρο V του $\mathbb{R}^n$ διάστασης k. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : V \to \mathbb{R}^k$ του ορθογώνιου ισομορφισμού $V \simeq \mathbb{R}^k$, με τύπο $f(x) = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, όπου $x = \sum_{i \leqslant k} x_i \gamma_i$. Παρατηρήστε ότι εάν στον χώρο V θεωρήσουμε το εσωτερικό γινόμενο $\mathcal{E}$ και στον $\mathbb{R}^k$ το εσωτερικό γινόμενο με πίνακα:

$$A = \begin{pmatrix} \mathcal{E}(\gamma_1, \gamma_1) & \mathcal{E}(\gamma_1, \gamma_2) & \cdots & \mathcal{E}(\gamma_1, \gamma_k) \\ \mathcal{E}(\gamma_2, \gamma_1) & \mathcal{E}(\gamma_2, \gamma_2) & \cdots & \mathcal{E}(\gamma_2, \gamma_k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{E}(\gamma_k, \gamma_1) & \mathcal{E}(\gamma_k, \gamma_2) & \cdots & \mathcal{E}(\gamma_k, \gamma_k) \end{pmatrix}$$

(ως προς τη βάση $\{\gamma_i\}_{i=1}^k$), η f πράγματι γίνεται ορθογώνιος ισομορφισμός.

Επομένως η αντίστοιχη τετραγωνική μορφή που ορίζει το εσωτερικό γινόμενο αυτό στον $\mathbb{R}^k$ θα είναι θετικά ορισμένη (**Πρόταση (7.4)**), και από το **Θεώρημα: *Κριτήριο του Sylvester*** η ορίζουσα:

$$D_A(k) = \det \begin{pmatrix} \mathcal{E}(\gamma_1,\gamma_1) & \mathcal{E}(\gamma_1,\gamma_2) & \cdots & \mathcal{E}(\gamma_1,\gamma_k) \\ \mathcal{E}(\gamma_2,\gamma_1) & \mathcal{E}(\gamma_2,\gamma_2) & \cdots & \mathcal{E}(\gamma_2,\gamma_k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{E}(\gamma_k,\gamma_1) & \mathcal{E}(\gamma_k,\gamma_2) & \cdots & \mathcal{E}(\gamma_k,\gamma_k) \end{pmatrix}$$

θα είναι θετική.

Εάν τώρα τα γ_i είναι γραμμικώς εξαρτημένα, θα υπάρχει μη τετριμμένος γραμμικός συνδυασμός αυτών που είναι μηδέν - δηλαδή $\sum_{i\leqslant k} \lambda_i\gamma_i = 0,\ \lambda_i \in \mathbb{R}$. Παρατηρούμε ότι για τα διάφορα $i \in \{1,2,\cdots,k\}$:

$$0 = \mathcal{E}(\gamma_i, 0) = \mathcal{E}\Big(\gamma_i, \sum_{j\leqslant k} \lambda_j\gamma_j\Big) = \sum_{j\leqslant k} \lambda_j \mathcal{E}(\gamma_i,\gamma_j)$$

οπότε αν θεωρήσουμε το σύστημα ως προς μ_i:

$$\begin{pmatrix} \mathcal{E}(\gamma_1,\gamma_1) & \mathcal{E}(\gamma_1,\gamma_2) & \cdots & \mathcal{E}(\gamma_1,\gamma_k) \\ \mathcal{E}(\gamma_2,\gamma_1) & \mathcal{E}(\gamma_2,\gamma_2) & \cdots & \mathcal{E}(\gamma_2,\gamma_k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{E}(\gamma_k,\gamma_1) & \mathcal{E}(\gamma_k,\gamma_2) & \cdots & \mathcal{E}(\gamma_k,\gamma_k) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

αυτό θα έχει τη μηδενική λύση και την $(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k)^T \neq 0$. Οπότε η ορίζουσα των συντελεστών αναγκαστικά θα πρέπει να είναι μηδέν.

$$\det \begin{pmatrix} \mathcal{E}(\gamma_1,\gamma_1) & \mathcal{E}(\gamma_1,\gamma_2) & \cdots & \mathcal{E}(\gamma_1,\gamma_k) \\ \mathcal{E}(\gamma_2,\gamma_1) & \mathcal{E}(\gamma_2,\gamma_2) & \cdots & \mathcal{E}(\gamma_2,\gamma_k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{E}(\gamma_k,\gamma_1) & \mathcal{E}(\gamma_k,\gamma_2) & \cdots & \mathcal{E}(\gamma_k,\gamma_k) \end{pmatrix} = 0$$

□

Η προηγούμενη πρόταση έχει αρκετό ενδιαφέρον, αφού ουσιαστικά γενικεύει την ανισότητα των Cauchy - Schwarz, όπως δείχνει η ακόλουθη παρατήρηση.

Παρατήρηση (8.2): Χρησιμοποιώντας την **Πρόταση (8.1)** μπορεί να αποδειχθεί η ανισότητα Cauchy - Schwarz για τα εσωτερικά γινόμενα (**Λήμμα (6.1)**). Εάν ο $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ είναι πεπερασμένος χώρος με εσωτερικό γινόμενο:

$$\forall x,y \in X,\ \langle x,y\rangle \leqslant \sqrt{\langle x,x\rangle \cdot \langle y,y\rangle}$$

Απόδειξη: Ας ασχοληθούμε πρώτα με την περίπτωση των $(\mathbb{R}^n, \langle\cdot,\cdot\rangle)$. Από την **Πρόταση (8.1)**, για $\gamma_1 = x$, $\gamma_2 = y$ έχουμε:

$$\det \begin{pmatrix} \langle x,x\rangle & \langle x,y\rangle \\ \langle y,x\rangle & \langle y,y\rangle \end{pmatrix} \geqslant 0 \Rightarrow \langle x,y\rangle^2 \leqslant \langle x,x\rangle \cdot \langle y,y\rangle$$

το οποίο είναι το ζητούμενο στην ειδική περίπτωση. Για την γενικότερη περίπτωση, αρκεί να παρατηρήσουμε ότι κάθε χώρος διάστασης n με εσωτερικό γινόμενο είναι ισόμορφος με τον $\mathbb{R}^n$ με το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο. Αυτό φυσικά προκύπτει από την **Πρόταση (7.4)**.

□

Η ανισότητα Cauchy - Schwarz δεν ισχύει για μη θετικά ορισμένα εσωτερικά γινόμενα. Για παράδειγμα, δεν ισχύει για το μη εκφυλισμένο εσωτερικό γινόμενο που προκύπτει από την τετραγωνική μορφή $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με $T\big((x_1,x_2)\big) = x_1^2 - x_2^2$.

Ορισμός: *Γωνίες στον $\mathbb{R}^n$:*
Στον χώρο $\mathbb{R}^n$ θεωρούμε το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Παρατηρούμε ότι, από την ανισότητα Cauchy - Schwarz:

$$\frac{\langle x,y\rangle}{\langle x,x\rangle \cdot \langle y,y\rangle} \leqslant 1$$

οπότε ορίζεται καλώς το μέτρο γωνίας $\theta \in [0,\pi]$ για το οποίο:

$$\cos\theta = \frac{\langle x,y\rangle}{\langle x,x\rangle \cdot \langle y,y\rangle}$$

(όταν φυσικά $x, y \neq 0$). Εμείς (κάπως απερίσκεπτα) θα ταυτίζουμε το μέτρο της γωνίας με τη γωνία στον $\mathbb{R}^n$. Θα λέμε δηλαδή ότι η γωνία $\angle(x, y)$ ή $\widehat{(x, y)}$ είναι θ, υπονοώντας ότι η γωνία των x, y έχει μέτρο θ.

Πρόταση (8.2): Κάθε $\tau \in \mathrm{O}(\mathbb{R}^n)$ διατηρεί τη γωνία $\angle(x, y)$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^n$. Δηλαδή ισχύει:

$$\angle(x, y) = \angle\big(\tau(x), \tau(y)\big)$$

Απόδειξη: Προκύπτει από τον ορισμό των γωνιών $\angle(x, y),\ \angle\big(\tau(x), \tau(y)\big)$.

□

Ορισμός: ***Κάθετα διανύσματα:***
Δύο διανύσματα $x, y \in \mathbb{R}^n$ θα λέγονται κάθετα αν $\angle(x, y) = \pi/2$ ή κάποιο από τα x, y είναι μηδέν.

Παρατήρηση (8.3): Ο συγκεκριμένος τρόπος ορισμού των γωνιών είναι φυσιολογικός, αφού ουσιαστικά αποτελεί γενίκευση αυτού της επίπεδης Ε.Γ. Βέβαια για να μπορεί να σταθεί ο ίδιος ως φυσιολογικός ορισμός, προϋποτείθενται γεωμετρίες στις οποίες ισχύει η ανισότητα Cauchy - Schwarz. Σε διαφορετικές περιπτώσεις (όπως στους χώρους Minkowski) η σύνδεση των γωνιών με μετρικά μεγέθη είναι δυσκολότερη.

8.2 Αναλλοίωτοι υπόχωροι για τις ορθογώνιες απεικονίσεις της Ευκλείδειας Γεωμετρίας του $\mathbb{R}^n$

Έστω $\tau \in \mathrm{O}(\mathbb{R}^n)$. Σύμφωνα με το **Λήμμα (6.4)**, η τ είναι γραμμική συνάρτηση και ισομετρία, όπου η μετρική θεωρείται επαγόμενη ενός εσωτερικού γινομένου $\langle\cdot,\cdot\rangle$ (και αντίστοιχη τετραγωνική μορφή T). Δηλαδή η τ είναι γραμμική κι επιπλέον:

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ ||x|| = ||\tau(x)|| \Rightarrow ||x||^2 = ||\tau(x)||^2 \Rightarrow T(x) = T\big(\tau(x)\big)$$

Εάν λοιπόν θεωρήσουμε M τον $n \times n$ πίνακα της τ (δηλαδή $\tau(x) = M \cdot x^T$) και A τον $n \times n$ πίνακα της T, θα αληθεύει:

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ T(x) = x \cdot A \cdot x^T = x \cdot M^T AM \cdot x^T = T(\tau(x))$$

οπότε $A = M^T AM$. Κατ' επέκταση, αφού ο πίνακας A έχει μη μηδενική ορίζουσα (αυτό προκύπτει από την **Παρατήρηση (7.3)**), θα έχουμε:

$$\det A = \det(M^T AM) = (\det M)^2 \cdot \det A \Rightarrow \det M = \pm 1$$

Πρόταση (8.3): Μια απεικόνιση $\tau : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ είναι ορθογώνια (ο χώρος $\mathbb{R}^n$ θεωρείται με θετικά ορισμένο εσωτερικό γινόμενο) αν και μόνο αν ορίζεται από έναν $n \times n$ πίνακα M με την ιδιότητα $M^T M = \mathrm{Id}_n$

Απόδειξη: ($\Rightarrow$) Εάν θεωρήσουμε την τετραγωνική μορφή T του $\mathbb{R}^n$ ως προς μια βάση που της δίνει κανονική μορφή, από την προηγούμενη ανάλυση θα έχουμε:

$$\mathrm{Id}_n = M^T \mathrm{Id}_n M = M^T M$$

(εδώ παρατηρήστε ότι ο πίνακας είναι ταυτοτικός, αφού το εσωτερικό γινόμενο είναι θετικά ορισμένο).

($\Leftarrow$) Θεωρούμε την απεικόνιση με τύπο $\tau(x) = M \cdot x^T$ και ισχυριζόμαστε ότι αυτή είναι ορθογώνια ως προς ένα (τυχόν) εσωτερικό γινόμενο του $\mathbb{R}^n$. Πράγματι, αν θεωρήσουμε μια θετικά ορισμένη τετραγωνική μορφή T στον $\mathbb{R}^n$, θα έχει κανονική παράσταση:

$$T(x) = x \cdot \mathrm{Id}_n \cdot x^T$$

οπότε:

$$T\big(\tau(x)\big) = x \cdot M^T \mathrm{Id}_n M \cdot x^T = x \cdot M^T M \cdot x^T = x \cdot \mathrm{Id}_n \cdot x^T = T(x)$$

□

Μία ορθογώνια απεικόνιση $\tau \in \mathrm{O}(\mathbb{R}^n)$ δεν είναι ορθογώνια αν και μόνο αν ο πίνακάς της ικανοποιεί τη σχέση $\det M = \pm 1$, επομένως δεν υφίσταται 'απλοποίηση' της **Πρότασης (8.3)** μ' αυτόν τον τρόπο. Για παράδειγμα, η γραμμική συνάρτηση με πίνακα:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

έχει ορίζουσα $\det M = 1$, αλλά δεν είναι ορθογώνια.

Λήμμα (8.1): Έστω τ μια ορθογώνια απεικόνιση του $\mathbb{R}^n$ (ως προς εσωτερικό γινόμενο) με πίνακα M. Εάν ο πίνακας M έχει πραγματική ιδιοτιμή ξ, θα αληθεύει $\xi \in \{\pm 1\}$.

Απόδειξη: Εάν $\mathcal{X}_M$ είναι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του M, επειδή $\mathcal{X}_M(0) = \det M \neq 0$, η ιδιοτιμή ξ είναι μη μηδενική.

Έστω τώρα T μια τετραγωνική μορφή του $\mathbb{R}^n$. Εάν v^T είναι ένα μη μηδενικό ιδιοδιάνυσμα της τ για την ιδιοτιμή ξ, θα έχουμε:

$$\tau(v) = M \cdot v^T = \xi \cdot v^T$$

Παίρνοντας τώρα τετραγωνικές μορφές και χρησιμοποιώντας το ότι η τ είναι ορθογώνια, δείχνουμε ότι $\xi \in \{\pm 1\}$.

$$T\big(\tau(v)\big) = T(\xi \cdot v^T) = \xi^2 \cdot T(v) = \xi^2 \cdot T\big(\tau(v)\big) \Rightarrow \xi^2 = 1$$

□

Λήμμα (8.2): Έστω τ μια ορθογώνια απεικόνιση του $\mathbb{R}^n$ (ως προς εσωτερικό γινόμενο) με πίνακα M. Εάν ο πίνακας M έχει μιγαδική ιδιοτιμή $\xi = a + bi \in \mathbb{C}$ και αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα $v = x + yi \neq 0$, θα αληθεύει:

$$\tau(x) = ax^T - by^T \ \textbf{και}\ \tau(y) = bx^T + ay^T$$

Απόδειξη: Εάν η ξ είναι μιγαδική ιδιοτιμή της τ με αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα v, θα έχουμε:

$$\tau(v) = \xi \cdot v^T \Rightarrow (M - \xi \cdot \mathrm{Id}_n) \cdot v^T = 0$$

Η τελευταία σχέση ουσιαστικά μπορεί να ειδωθεί ως σύστημα με αγνώστους τις συντεταγμένες του v^T. Μάλιστα, το σύστημα αυτό θα έχει μηδενική ορίζουσα $\mathcal{X}_M(\xi) = \det(M - \xi \cdot \mathrm{Id}_n)$, αφού το ξ είναι ιδιοτιμή της τ.

Εφόσον η ορίζουσα είναι μηδέν, υπάρχει ένα μη μηδενικό ιδιοιδιάνυσμα $v = x + yi$. Με αντικατάσταση στο σύστημα έχουμε:

$$\big(M - (a+bi) \cdot \mathrm{Id}_n\big) \cdot (x+iy)^T = 0 \Rightarrow$$

$$\big[(M - a \cdot \mathrm{Id}_n) \cdot x^T + b \cdot \mathrm{Id}_n \cdot y^T\big] + i\big[(M - a \cdot \mathrm{Id}_n) \cdot y^T - b \cdot \mathrm{Id}_n \cdot x^T\big] = 0$$

Εξισώνοντας λοιπόν τα πραγματικά και φανταστικά μέρη με το μηδέν, παίρνουμε το ζητούμενο.

$$\tau(x) = M \cdot x^T = ax^T - by^T \ \textbf{και}\ \tau(y) = M \cdot y^T = bx^T + ay^T$$

□

Παρατήρηση (8.4): Αν υποθέσουμε ότι τα x και y είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, τότε θα αποτελούν βάση του χώρου $V = \mathrm{span}\ \{x, y\}$. Επειδή από το **Λήμμα (8.2)** η τ έχει τη μορφή:

$$\tau(x) = ax^T - by^T \ \textbf{και}\ \tau(y) = bx^T + ay^T$$

(όταν το $v = x+yi$ είναι ιδιοδιάνυσμα στην ιδιοτιμή $\xi = a+bi$), ο διδιάστατος χώρος V μένει αναλλοίωτος από την τ.

Πρόταση (8.4): Έστω $\tau \in \mathrm{O}(\mathbb{R}^n)$. Υπάρχει αναλλοίωτος μονοδιάστατος ή διδιάστατος υπόχωρος V της τ, τέτοιος ώστε το ορθοσυμπλήρωμα αυτού $V^\perp$ να είναι κι αυτό αναλλοίωτο από την τ.

Απόδειξη: Έστω ξ μια πραγματική ιδιοτιμή του τ (αν αυτή υπάρχει), v ένα ιδιοδιάνυσμα της ξ και $\omega = \dfrac{v}{||v||}$ το αντίστοιχο διάνυσμα μοναδιαίου μήκους. Παρατηρούμε ότι το $\{\omega\}$ αποτελεί ορθοκανονική βάση για τον μονοδιάστατο υπόχωρο $V = \mathrm{span}\ \omega$ κι επίσης ότι ο V είναι αναλλοίωτος από την τ (εδώ η ορθοκανονικότητα της βάσης δεν μας απασχολεί, θα την χρησιμοποιήσουμε όμως σε επόμενες προτάσεις).

Θα δείξουμε ότι και ο $V^\perp$ είναι αναλλοίωτος από την τ: Πράγματι, εάν $u \in V^\perp$, τότε $u \perp \omega$. Από την **Πρόταση (8.2)**, η τ διατηρεί τις γωνίες, επομένως $\tau(u) \perp \tau(\omega)$. Επειδή το $\tau(\omega)$ παράγει τον V, έχουμε ότι $\tau(u) \in V^\perp$ κι άρα το ζητούμενο για την πραγματική περίπτωση.

Εάν $\xi = a + bi$ είναι μιγαδική ιδιοτιμή της τ με ιδιοδιάνυσμα $v = x + yi$, σύμφωνα με το **Λήμμα (8.2)**:

$$\tau(x) = ax^T - by^T \ \textbf{και}\ \tau(y) = bx^T + ay^T$$

Εάν τα x, y είναι γραμμικώς εξαρτημένα, μπορούμε να αναχθούμε στην πραγματική περίπτωση την οποία αναλύσαμε προηγουμένως. Διαφορετικά, αν τα x, y είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, από την **Παρατήρηση (8.4)** εξασφαλίζεται η ύπαρξη ενός διδιάστατου υποχώρου $V = \mathrm{span}\ \{x, y\}$ που είναι $\tau-$αναλλοίωτος. Μάλιστα, με κανονικοποίηση της βάσης $\{x, y\}$ του V, το σύνολο:

$$\left\{ \omega = \frac{x}{||x||},\ \psi = {y - \dfrac{\langle x, y\rangle \cdot x}{||x||}} \Bigg/ {\left|\left| y - \dfrac{\langle x, y\rangle \cdot x}{||x||} \right|\right|} \right\}$$

αποτελεί ορθοκανονική βάση του V. Η μορφή της συγκεκριμένης βάσης μην σας φοβίζει - ουσιαστικά προκύπτει όπως και στην κανονικοποίηση της βάσης στο *Θεώρημα Gramm - Schmidt).* Εάν $\langle \cdot, \cdot \rangle$ είναι ένα εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^n$, η προβολή του y στο x θα είναι το διάνυσμα:

$$\mathrm{pr}_x y = \big[||y|| \cdot \cos \widehat{(x, y)}\big] \cdot y = \frac{\langle x, y\rangle \cdot y}{||x||}$$

Επομένως το διάνυσμα $y - \mathrm{pr}_x y$ είναι κάθετο στο x, και το σύνολο $\{x, y - \mathrm{pr}_x y\}$ είναι ορθογώνια βάση του V. Διαιρώντας και με τα μέτρα των διανυσμάτων, προκύπτει η προαναφερθήσα ορθοκανονική βάση (εδώ η ορθοκανονικότητα της βάσης πάλι δεν μας απασχολεί, αλλά θα την χρησιμοποιήσουμε σε επόμενες προτάσεις).

Για να αποδείξουμε συνολικά την πρόταση, θα δείξουμε ότι ο $V^\perp$ είναι αναλλοίωτος από την τ. Αυτό θα γίνει όπως και στην πραγματική περίπτωση: αν $u \in V^\perp$, τότε $u \perp \omega$ και $u \perp \psi$. Επειδή τα $\tau(\omega)$, $\tau(\psi)$ παράγουν τον

V και η τ διατηρεί τις γωνίες, $\tau(u) \in V^\perp$.

$\square$

Παρατήρηση (8.5) Έστω $\xi = a + bi$ μια μιγαδική ιδιοτιμή της ορθογώνιας απεικόνισης $\tau \in \mathrm{O}(\mathbb{R}^n)$, με ιδιοδιάνυσμα $v = x + yi$. Υποθέτουμε ότι τα x, y είναι γραμμικώς ανεξάρτητα και θεωρούμε $V = \mathrm{span}\,\{x, y\}$.

Από την απόδειξη της **Πρότασης (8.4)**, υπάρχει ορθοκανονική βάση $\{\omega, \psi\}$ του V, της οποίας τα στοιχεία εξαρτόνται γραμμικά από τα x, y. Έτσι λοιπόν μπορούμε να παραποιήσουμε τη γραφή του **Λήμματος (8.1)** και να γράψουμε:

$$\tau(\omega) = \kappa\omega^T + \lambda\psi^T \text{ και } \tau(\psi) = \mu\omega^T + \nu\psi^T$$

οπότε ο περιορισμός $\tau|_V$ της τ στον V έχει πίνακα:

$$M_V = \begin{pmatrix} \kappa & \lambda \\ \mu & \nu \end{pmatrix}$$

(ως προς τη βάση $\{\omega, \psi\}$). Μάλιστα είναι ορθογώνια απεικόνιση, ως περιορισμός ορθογώνιας απεικόνισης.

Ισχυριζόμαστε ότι η ορίζουσα M_V είναι θετική. Πράγματι, επειδή:

$$\tau(x) = ax^T - by^T \textbf{ και } \tau(y) = bx^T + ay^T$$

ο πίνακας της $\tau|_V$ ως προς τη βάση $\{x, y\}$ έχει ορίζουσα $a^2 + b^2 > 0$. Συνεπώς και ως προς την ορθοκανονική βάση $\{\omega, \psi\}$ θα ισχύει:

$$\det M_V = a^2 + b^2 > 0$$

Από την **Παρατήρηση (6.3)**, η M_V χαρακτηρίζει στροφή και κατ' επέκταση για κάποιο $\theta \in [0, \pi]$ λαμβάνει τη μορφή:

$$M_V = M_V(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

(αφού η ορίζουσα του M_V είναι θετική).

8.3 Απλοποιημένες μορφές πινάκων ορθογώνιων απεικονίσεων

Θεώρημα: ***Απλοποιημένη μορφή των ορθογώνιων απεικονίσεων:***
Έστω $\tau \in \mathrm{O}(\mathbb{R}^n)$, όπου ο χώρος $\mathbb{R}^n$ θεωρείται με εσωτερικό γινόμενο. Τότε υπάρχει ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^n$ ως προς την οποία η τ ορίζεται από πίνακα σε block διαγώνια μορφή:

$$W = \begin{pmatrix} -1 & & & & & \mathbf{O} \\ & 1 & & & & \\ & & R(\theta_1) & & & \\ & & & R(\theta_2) & & \\ & & & & \ddots & \\ \mathbf{O} & & & & & R(\theta_r) \end{pmatrix}$$

όπου οι πίνακες $R(\theta_k)$ είναι πίνακες στροφής κατά $\theta_k \in [0, \pi]$ και $2r + 2 = n$. Ενδέχεται κάποια από τα ± 1 στην αρχή να λείπουν, οπότε αντίστοιχα $2r + 1 = n$ ή $2r = n$ (αναλόγως με το αν λείπει ένα από αυτά ή και τα δύο).

Απόδειξη: Για την απόδειξη αυτού του θεωρήματος θα εργαστούμε σε βήματα. Υποθέτουμε ότι M είναι ο πίνακας της τ ως προς κάποια βάση $\mathbb{B}_0$ του $\mathbb{R}^n$.

Βήμα I: Έστω $\xi_1 \in \{\pm 1\}$ μια πραγματική ιδιοτιμή του M (αν αυτή φυσικά υπάρχει) και v_1 ένα ιδιοδιάνυσμα στην ιδιοτιμή αυτή. Εάν V_1 είναι ο χώρος $\mathrm{span}\, v_1$, από την **Πρόταση (8.4)** υπάρχει ορθοκανονική βάση $\mathbb{B}_1 = \{\omega_1\}$ του V_1, ο V_1 είναι $\tau-$αναλλοίωτος και το ορθοσυμπλήρωμα αυτού $V_1^\perp$ είναι κι αυτό $\tau-$αναλλοίωτο. Θεωρώντας $\mathbb{G}_1$ μια βάση του $V_1^\perp$, ο πίνακας M ως προς τη βάση $\mathbb{B}_1 \cup \mathbb{G}_1$ γίνεται:

$$W_1 = \begin{pmatrix} \xi_1 & & & & \mathbf{O} \\ & {}^1\mu_{1,1} & {}^1\mu_{1,2} & \cdots & {}^1\mu_{1,n-1} \\ & {}^1\mu_{2,1} & {}^1\mu_{2,2} & \cdots & {}^1\mu_{2,n-1} \\ & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{O} & {}^1\mu_{n-1,1} & {}^1\mu_{n-1,2} & \cdots & {}^1\mu_{n-1,n-1} \end{pmatrix}$$

Βήμα II: Η γραμμική απεικόνιση με πίνακα $({}^1\mu_{i,j})_{i,j \leqslant n-1}$ είναι ορθογώνια απεικόνιση, ουσιαστικά ως 'περιορισμός' της τ στις $n-1$ διαστάσεις. Μπορούμε λοιπόν να συνεχίσουμε επαγωγικά τη διαδικασία του **Βήματος I** στον πίνακα $({}^1\mu_{i,j})_{i,j \leqslant n-1}$. Σε κάποιο βήμα, ο πίνακας $({}^\ell\mu_{i,j})_{i,j \leqslant n-\ell}$ δεν θα έχει πραγματικές ιδιοτιμές και ο πίνακας της τ ως προς τη βάση $\left(\bigcup_{k=1}^{\ell} \mathbb{B}_k\right) \cup \mathbb{G}_\ell$ θα έχει γίνει:

$$W_\ell = \begin{pmatrix} \xi_1 & & & & & & \mathbf{O} \\ & \ddots & & & & & \\ & & \xi_\ell & & & & \\ & & & {}^\ell\mu_{1,1} & {}^\ell\mu_{1,2} & \cdots & {}^\ell\mu_{1,n-\ell} \\ & & & {}^\ell\mu_{2,1} & {}^\ell\mu_{2,2} & \cdots & {}^\ell\mu_{2,n-\ell} \\ & & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{O} & & & {}^\ell\mu_{n-\ell,1} & {}^\ell\mu_{n-\ell,2} & \cdots & {}^\ell\mu_{n-\ell,n-\ell} \end{pmatrix}$$

Βήμα III: Εφόσον ο πίνακας $({}^\ell\mu_{i,j})_{i,j \leqslant n-\ell}$ δεν έχει πραγματικές ιδιοτιμές, θα έχει μονάχα μιγαδικές. Έστω $\zeta_1 = \varepsilon_1 + \epsilon_1 i$ η ιδιοτιμή αυτή και $u_1 = x_1 + y_1 i$ ένα ιδιοδιάνυσμα στην ιδιοτιμή αυτή. Ισχυριζόμαστε ότι τα x_1, y_1 είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Πράγματι, ο περιορισμός της τ που έχει πίνακα $({}^\ell\mu_{i,j})_{i,j \leqslant n-\ell}$ είναι ορθογώνια απεικόνιση, οπότε σύμφωνα με το **Λήμμα (8.2)** παίρνει τη μορφή

$$({}^\ell\mu_{i,j})_{i,j \leqslant n-\ell} \cdot x_1^T = \varepsilon_1 x_1^T - \epsilon_1 y_1^T \ \textbf{και}\ ({}^\ell\mu_{i,j})_{i,j \leqslant n-\ell} \cdot y_1^T = \epsilon_1 x_1^T + \varepsilon_1 y_1^T$$

Παρατηρήστε ότι αν τα x, y ήταν γραμμικώς εξαρτημένα, ο πίνακας $({}^\ell\mu_{i,j})_{i,j \leqslant n-\ell}$ θα είχε πραγματική ιδιοτιμή, το οποίο είναι άτοπο από την επιλογή του.

Από την απόδειξη της **Πρότασης (8.4)**, ο διδιάστατος χώρος $U_1 = \mathrm{span}\ \{x, y\}$ έχει ορθοκανονική βάση $\mathbb{E}_1 = \{\chi_1, \psi_1\}$, είναι $({}^\ell\mu_{i,j})_{i,j \leqslant n-\ell}-$αναλλοίωτος και το ορθοσυμπλήρωμα αυτού $V_\ell^\perp \cap U_1^\perp$ είναι κι αυτό $({}^\ell\mu_{i,j})_{i,j \leqslant n-\ell}-$αναλλοίωτο. Αν λοιπόν $\mathbb{G}_{\ell+1}$ είναι μια βάση του $V_\ell^\perp \cap U_1^\perp$, ο πίνακας της τ ως προς τη βάση

$\left(\bigcup_{k=1}^{\ell}\mathbb{B}_k\right)\cup\mathbb{E}_1\cup\mathbb{G}_{\ell+1}$ γίνεται:

$$W_{\ell+1}=\begin{pmatrix} \xi_1 & & & & & & & & \mathbf{O} \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & \xi_\ell & & & & & & \\ & & & {}^1\lambda_{1,1} & {}^1\lambda_{1,2} & & & & \\ & & & {}^1\lambda_{2,1} & {}^1\lambda_{2,2} & & & & \\ & & & & & {}^{\ell+1}\mu_{1,1} & {}^{\ell+1}\mu_{1,2} & \cdots & {}^{\ell+1}\mu_{1,n-\ell-1} \\ & & & & & {}^{\ell+1}\mu_{2,1} & {}^{\ell+1}\mu_{2,2} & \cdots & {}^{\ell+1}\mu_{2,n-\ell-1} \\ & & & & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{O} & & & & & {}^{\ell+1}\mu_{n-\ell-1,1} & {}^{\ell+1}\mu_{n-\ell-1,2} & \cdots & {}^{\ell+1}\mu_{n-\ell-1,n-\ell-1} \end{pmatrix}$$

Μάλιστα, από την **Παρατήρηση (8.5)** ο πίνακας $({}^1\lambda_{i,j})_{i,j}$ είναι πίνακας στροφής, έστω $R(\varphi_1)$ για κατάλληλο $\varphi_1\in[0,\pi]$.

$$W_{\ell+1}=\begin{pmatrix} \xi_1 & & & & & & & \mathbf{O} \\ & \ddots & & & & & & \\ & & \xi_\ell & & & & & \\ & & & R(\varphi_1) & & & & \\ & & & & {}^{\ell+1}\mu_{1,1} & {}^{\ell+1}\mu_{1,2} & \cdots & {}^{\ell+1}\mu_{1,n-\ell-1} \\ & & & & {}^{\ell+1}\mu_{2,1} & {}^{\ell+1}\mu_{2,2} & \cdots & {}^{\ell+1}\mu_{2,n-\ell-1} \\ & & & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{O} & & & & {}^{\ell+1}\mu_{n-\ell-1,1} & {}^{\ell+1}\mu_{n-\ell-1,2} & \cdots & {}^{\ell+1}\mu_{n-\ell-1,n-\ell-1} \end{pmatrix}$$

Βήμα IV: Συνεχίζουμε επαγωγικά, έως ότου όλες οι μιγαδικές και πραγματικές ιδιοτιμές να έχουν εξαντληθεί. Στο τελευταίο βήμα, έστω t, ο πίνακας της τ ως προς τη βάση $\mathcal{B}=\left(\bigcup_{k=1}^{\ell}\mathbb{B}_k\right)\cup\left(\bigcup_{k=1}^{t-\ell}\mathbb{E}_k\right)$ παίρνει τη μορφή:

$$W_t=\begin{pmatrix} \xi_1 & & & & & \mathbf{O} \\ & \ddots & & & & \\ & & \xi_\ell & & & \\ & & & R(\varphi_1) & & \\ & & & & \ddots & \\ \mathbf{O} & & & & & R(\varphi_s) \end{pmatrix}$$

όπου $\xi_k\in\{\pm1\}$, οι πίνακες $R(\varphi_k)$ είναι πίνακες στροφής κατά φ_k, και $\ell+2s=n$.

Βήμα V: Ο πίνακας W_t μοιάζει πολύ με τον πίνακα της εκφώνισης W. Από τον W_t παίρνουμε τον W με τον εξής τρόπο: κατ' αρχάς, αναδιατάσσοντας κατάλληλα τα στοιχεία της βάσης $\mathcal{B}$ μπορούμε να φέρουμε σε ζεύγη τα 1 και τα -1. Αν κάποια $-1,1$ περισσέψουν, θα τα τοποθετήσουμε στις θέσεις $(1,1)$ και $(2,2)$ αντίστοιχα (φυσικά με κατάλληλη αναδιάταξη των στοιχείων της βάσης). Τώρα οι πίνακες σε μορφή block:

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\ \textbf{και}\ \begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$$

αντιστοιχούν σε στροφές κατά 0 και κατά π, οπότε είναι πίνακες στροφής $R(0)$ και $R(\pi)$. Αλλάζοντας τον συμβολισμό των γωνιών από $0,\pi,\varphi_k$ σε θ_k, ο πίνακας W_t τελικά μετασχηματίζεται σε:

$$W=\begin{pmatrix} -1 & & & & & \mathbf{O} \\ & 1 & & & & \\ & & R(\theta_1) & & & \\ & & & R(\theta_2) & & \\ & & & & \ddots & \\ \mathbf{O} & & & & & R(\theta_r) \end{pmatrix}$$

η οποία είναι η ζητούμενη μορφή.

□

Παρατήρηση (8.6): Το προηγούμενο θεώρημα δείχνει ότι όπως και στην ειδική περίπτωση του $\mathbb{R}^2$, στην γενική περίπτωση του $\mathbb{R}^n$ υπάρχουν ορθοκανονικές βάσεις ως προς τις οποίες οι ορθογώνιες απεικονίσεις παίρνουν 'απλή μορφή'. Το βασικό μειονέκτημα της μορφής αυτής είναι ότι κάθε $\tau \in \mathrm{O}(\mathbb{R}^n)$ παίρνει την απλή της μορφή ως προς μια συγκεκριμένη ορθοκανονική βάση, οπότε η μελέτη της ορθογώνιας ομάδας $\mathrm{O}(\mathbb{R}^n)$ γίνεται δύσκολη σε μεγάλες διαστάσεις.

Όσον αφορά τις μεθόδους για τη επίλυση προβλημάτων στην Ε.Γ. του $\mathbb{R}^n$, υπάρχει μια πολυμορφία - κάποιες φορές οι γενικές μέθοδοι δεν βοηθούν ιδιαίτερα, οπότε απαιτείται κάποιου είδους ευρηματικότητα. Συνήθως μερικοποιούμε τα προβλήματα τα οποία μελετούμε προκειμένου να εφαρμόσουμε γενικές μεθόδους - για παράδειγμα, ενώ μια επιφάνεια δευτέρου βαθμού θα έπρεπε να οριστεί ως ο γεωμετρικός τόπος των σημείων $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ για τα οποία:

$$\sum_{i,j \leqslant n} a_{i,j} x_i x_j + \sum_{i \leqslant n} b_i x_i + c = 0 \text{ (για κάποια } a_i, b_i, c \in \mathbb{R})$$

η θεωρία των επιφανειών δευτέρου βαθμού αναπτύσσεται για επιφάνειες δευτέρου βαθμού της μορφής του παρακάτω ορισμού.

Ορισμός: *Τετραγωνικές υπερεπιφάνειες:*
Μια τετραγωνική υπερεπιφάνεια στον $\mathbb{R}^n$ είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ που ικανοποιούν εξίσωση της μορφής:

$$\sum_{i,j \leqslant n} a_{i,j} x_i x_j + 2 \sum_{i \leqslant n} b_i x_i + c = 0 \text{ (για κάποια } a_i, b_i, c \in \mathbb{R})$$

με τη συνάρτηση $T(x) = \sum_{i,j \leqslant n} a_{i,j} x_i x_j$ να είναι τετραγωνική μορφή του $\mathbb{R}^n$.

Ο περιορισμός η $T(x) = \sum_{i,j \leqslant n} a_{i,j} x_i x_j$ τετραγωνική μορφή μας διευκολίνει διότι μ' αυτήν την υπόθεση η εξίσωση της τετραγωνικής υπερεπιφάνειας παίρνει την απλούστερη μορφή:

$$(x_1, \cdots, x_n) \cdot \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + 2(b_1, \cdots, b_n) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + c = 0$$

Στην Ε.Γ. του $\mathbb{R}^n$ θεωρούμε συνήθως ορθοκανονικές βάσεις. Ως προς τέτοιες, ένας συμμετρικός πίνακας (όπως είναι ο πίνακας της T) είναι ερμητιανός, οπότε έχει μόνο πραγματικές ιδιοτιμές λ_i, και επίσης υπάρχει ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^n$ που αποτελείται από ιδιοδιανύσματα του πίνακα. Δεδομένης αυτής της ορθοκανονικής βάσης, ο πίνακας παίρνει διαγώνια μορφή με τα στοιχεία της διαγωνίου να αποτελούν οι πραγματικές ιδιοτιμές λ_i. Λαμβάνοντας αυτό υπόψη, υπάρχει ορθοκανονική βάση τέτοια ώστε η εξίσωση της τετραγωνικής υπερεπιφάνειας να γράφεται:

$$\sum_{i \leqslant n} \lambda_i y_i^2 + 2 \sum_{i \leqslant n} b_i y_i + c = 0$$

όπου y_i είναι η συντεταγμένες του x ως προς την εν λόγω βάση.

Κάπως έτσι απλοποιείται το 'δευτεροβάθμιο' μέλος της εξίσωσης. Για το 'πρωτοβάθμιο', ενδέχεται να υπάρχει κάποια ευκολότερη μορφή με κάποιου είδους μεταφορά (θα δούμε αργότερα ότι πάντοτε υπάρχει).

Με μία μεταφορά ουσιαστικά αλλάζουμε την αρχή των αξόνων, χωρίς να μεταβάλλουμε το δευτεροβάθμιο μέλος της εξίσωσης. Αν $t = (t_1, \cdots, t_n)$ είναι το διάνυσμα της μεταφοράς, οι συντεταγμένες y_i μεταφέρονται στις $z_i = y_i + t_i$, οπότε η εξίσωση της τετραγωνικής υπερεπιφάνειας γίνεται:

$$\sum_{i \leqslant n} \lambda_i (z_i^2 - 2t_i z_i + t_i^2) + 2 \sum_{i \leqslant n} b_i (z_i - t_i) + c = 0 \Rightarrow$$

$$\sum_{i \leqslant n} \lambda_i z_i^2 + 2 \sum_{i \leqslant n} (b_i - t_i \lambda_i) z_i + c' = 0$$

όπου $c' = c + \sum_{i \leqslant n} \lambda_i t_i^2 - 2 \sum_{i \leqslant n} b_i t_i$.

Ο ρόλος της μεταφοράς παίζει ιδιαίτερο ρόλο στις λεγόμενες *κεντρικές* τετραγωνικές υπερεπιφάνειες.

Ορισμός: ***Κεντρικές τετραγωνικές υπερεπιφάνειες:***
Μια τετραγωνική υπερεπιφάνεια στον $\mathbb{R}^n$ είναι κεντρική αν υπάρχει ακριβώς ένα σημείο $t = (t_1, \cdots, t_n)$, έτσι ώστε μετά από μεταφορά κατά t, η εξίσωση της υπερεπιφάνειας να γίνεται:

$$\sum_{i,j \leqslant n} a_{i,j} z_i z_j + c(t) = 0$$

Οι συντεταγμένες z_i του $x = (x_1, \cdots, x_n)$ είναι οι αντίστοιχες μεταφορές $z_i = x_i + t_i$ των x_i. Το σημείο t λέγεται κέντρο της υπερεπιφάνειας, διότι αν το $y - t = (y_1 - t_1, \cdots, y_n - t_n)$ ικανοποιεί την προηγούμενη εξίσωση, τότε και το $-y - t = (-y_1 - t_1, \cdots, -y_n - t_n)$ επίσης την ικανοποιεί. Επιπλέον, τα $y, -y$ που προκύπτουν μετά από μεταφορά κατά t είναι σημεία συμμετρικά.

Μια πολύ σημαντική πρόταση είναι η ακόλουθη, αφού ουσιαστικά μας εξασφαλίζει μια ακόμη πιο απλή μορφή των εξισώσεων των τετραγωνικών υπερεπιφανειών.

Πρόταση (8.5): Μια τετραγωνική υπερεπιφάνεια με εξίσωση:

$$\sum_{i,j \leqslant n} a_{i,j} x_i x_j + 2 \sum_{i \leqslant n} b_i x_i + c = 0$$

είναι κεντρική εάν και μόνο αν $\det(a_{i,j})_{i,j} \neq 0$.

Απόδειξη: ($\Rightarrow$) Υποθέτουμε ότι με μεταφορά κατά $t = (t_1, \cdots, t_n)$ η εξίσωση της τετραγωνικής υπερεπιφάνειας γίνεται:

$$\sum_{i,j \leqslant n} a_{i,j} z_i z_j + c = 0$$

Γενικά τώρα, με μία μεταφορά η εξίσωση της υπερεπιφάνειας παίρνει τη μορφή:

$$\sum_{i,j \leqslant n} a_{i,j} (z_i - t_i)(z_j - t_j) + 2 \sum_{i \leqslant n} b_i (z_i - t_i) + \gamma = 0 \Rightarrow$$

$$\sum_{i,j \leqslant n} a_{i,j} z_i z_j + 2 \sum_{i \leqslant n} \Big(b_i - \sum_{j \leqslant n} a_{i,j} t_j \Big) z_i + \gamma^* = 0$$

(για κάποια σταθερά γ^*). Επομένως θα πρέπει να αληθεύουν οι σχέσεις:

$$b_i - \sum_{j \leqslant n} a_{i,j} t_j = 0, \text{ για κάθε } i \in \{1, 2, \cdots, n\}$$

οι οποίες ορίζουν ένα σύστημα:

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

με αγνώστους τις συντεταγμένες του t. Το προαναφερθέν σύστημα έχει μοναδική λύση, αφού από τον ορισμό της τετραγωνικής υπερεπιφάνειας το κέντρο συμμετρίας t είναι μοναδικό. Άρα $\det(a_{i,j})_{i,j} \neq 0$.

($\Leftarrow$) Το αντίστροφο αντιμετωπίζεται ανάλογα.

$\square$

Παρατήρηση (8.7): Εφόσον ο πίνακας $(a_{i,j})_{i,j}$ αποτελεί πίνακα τετραγωνικής μορφής, αληθεύει (από την **Παρατήρηση (7.3)**) ότι $\det(a_{i,j})_{i,j} \neq 0$. Από την **Πρόταση (8.5)**, κάθε τετραγωνική υπερεπιφάνεια είναι κεντρική. Κατ' επέκταση η εξίσωση μιας τετραγωνικής υπερεπιφάνειας λαμβάνει την απλούστερη μορφή:

$$\sum_{i \leqslant n} \lambda_i z_i^2 + c = 0$$

Παρακάτω θα δούμε μερικά παραδείγματα επιφανειών δευτέρου βαθμού και θα διαπιστώσουμε ότι, όποτε αυτές είναι τετραγωνικές, λαμβάνουν απλοποιημένη μορφή.

Μερικές τετραγωνικές επιφάνειες είναι οι ακόλουθες:

- Το ελλειψοειδές (άρα και η σφαίρα): $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$
- Το μονόφυλλο υπερβολοειδές: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$
- Το δίφυλλο υπερβολοειδές: $-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$
- Ο κώνος $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$

Μερικές μη τετραγωνικές επιφάνειες είναι οι ακόλουθες:

- Το ελλειπτικό παραβολοειδές: $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} - 2z = 0$ (όπου $a, b > 0$)
- Το υπερβολικό παραβολοειδές: $\frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{b} - 2z = 0$ (όπου $a, b > 0$)
- Ο παραβολικός κύλινδρος: $y^2 - 2ax = 0$
- Ο ελλειπτικός κύλινδρος: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ (όπου $a, b > 0$).

Ο ελλειπτικός κύλινδρος φαίνεται να έχει μια απλοποιημένη μορφή, παρά το ότι δεν αποτελεί τετραγωνική επιφάνεια. Αυτό δεν είναι σφάλμα της θεωρίας, αφού εμείς αποδείξαμε ότι κάθε τετραγωνική επιφάνεια έχει εξίσωση απλής μορφής (ως προς κάποια βάση) - δεν δείξαμε ότι αν μια επιφάνεια δεν είναι τετραγωνική τότε δεν έχει απλή εξίσωση.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9

Χώροι Minkowski

9.1 Οι χώροι Minkowski μέσω της γεωμετρίας

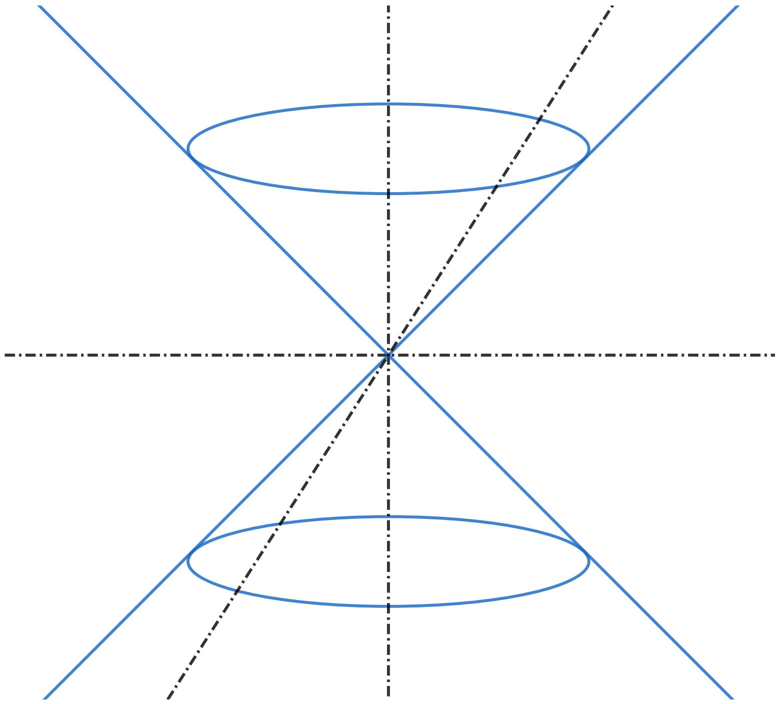
Ουσιαστικά με την **Πρόταση (7.4)** αποδείξαμε την ύπαρξη μη ευκλείδειων χώρων, την ύπαρξη δηλαδή των λεγόμενων *ψευδοευκλείδειων χώρων*. Μια ειδική κατηγορία ψευδοευκλείδειων χώρων είναι αυτή των χώρων Minkowski, η οποία χρησιμοποιείται και στη θεωρία της σχετικότητας.

Ορισμός: *Χώροι Minkowski:*
Ένας χώρος $\mathbb{R}^n$ εφοδιασμένος με μη εκφυλισμένο εσωτερικό γινόμενο $\mathcal{E}$ θετικού δείκτη $\delta_{\mathcal{E}} = n-1$ θα καλείται χώρος Minkowski. Το εσωτερικό γινόμενο $\mathcal{E}$ λέγεται Lorentzιανό.

Επιπλέον, σε έναν χώρο Minkowski υπάρχουν οι εξής ορολογίες, για μη μηδενικά διανύσματα v των χώρων:

- Εάν $\mathcal{E}(v,v) < 0$, το v ονομάζεται *χρονοειδές*.
- Εάν $\mathcal{E}(v,v) = 0$, το v ονομάζεται *φωτοειδές*.
- Εάν $\mathcal{E}(v,v) > 0$, το v ονομάζεται *χωροειδές*.

Πρόταση (9.1): Ειδικά για τον $\mathbb{R}^3$, το σύνολο των φωτοειδών σημείων σχηματίζει έναν (διπλό) κώνο, ο οποίος καλείται *φωτοειδής κώνος* (ή κώνος φωτός). Εντός του κώνου βρίσκονται όλα τα χρονοειδή διανύσματα και εκτός του όλα τα χωροειδή.



Απόδειξη: Πράγματι, παρατηρήστε ότι για $v = (x,y,z)$ η τετραγωνική μορφή του χώρου Minkowski έχει κανονική μορφή:

$$T(v) = (x,y,z) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Επομένως το σύνολο των φωτοειδών σημείων είναι το σύνολο για το οποίο $T(v) = x^2 + y^2 - z^2 = 0$, δηλαδή ένας διπλός κώνος με περιστροφική συμμετρία γύρω από τον $\overleftrightarrow{zz'}$ και με γωνία $\pi/4$ από το x, y επίπεδο.

$\square$

Παρατήρηση (9.1): Η προηγούμενη παρατήρηση ισχύει και για χώρους με μεγαλύτερη διάσταση, εάν φυσικά δοθεί κατάλληλος ορισμός για κώνους μεγαλύτερης διάστασης. Συγκεκριμένα ορίζουμε ως συνήθη κώνο στις $n-$διαστάσεις το σύνολο:

$$\left\{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + x_2^2 + \cdots - x_n^2 = 0\right\}$$

και παρατηρούμε ότι ο φωτοειδής κώνος στις $n-$διαστάσεις είναι ακριβώς ο κώνος των $n-$διαστάσεων. Επιπλέον, όλα τα χρονοειδή διανύσματα είναι εντός του και όλα τα χωροειδή εκτός του.

Ορισμός: ***Χρονοειδείς και χωροειδείς υπόχωροι:***
Έστω $(\mathbb{R}^n, \mathcal{E})$ ένας χώρος Minkowski.

I. *Ένας υπόχωρος του χώρου Minkowski θα λέγεται χρονοειδής εάν περιέχει χρονοειδές διάνυσμα.*

II. *Ένας υπόχωρος του χώρου Minkowski θα λέγεται χωροειδής εάν τα μη μηδενικά του διανύσματα είναι μόνο χωροειδή.*

Στα παρακάτω η καθετότητα θα ορίζεται με το μη εκφυλισμένο εσωτερικό γινόμενο $\mathcal{E}$ ως εξής: $v \perp u :\Leftrightarrow \mathcal{E}(u, v) = 0$.

Παρατήρηση (9.2): Έστω $U \neq \{0\}$ ένας χωροειδής υπόχωρος του $(\mathbb{R}^n, \mathcal{E})$. Ο χώρος $U^\perp$ είναι χρονοειδής.

Απόδειξη: Ισχύει ότι $\mathbb{R}^n = U \oplus U^\perp$ (αλλά δεν θα το αποδείξουμε - διαισθητικά πάντως είναι αναμενόμενο, αν κανείς λάβει υπ' όψη τη μορφή έχουν τα κάθετα διανύσματα σε έναν χώρο Minkowski). Επομένως εάν προς άτοπο δεν υπήρχε στον $U^\perp$ χρονοειδές διάνυσμα, δεν θα υπήρχε σε ολόκληρο τον $\mathbb{R}^n$.

$\square$

Λήμμα (9.1): Ο συνήθης κώνος στις $n-$διαστάσεις εμφανίζει περιστροφική συμμετρία γύρω από τον άξονα των x_n.

Απόδειξη: Συγκεκριμένα θα δείξουμε ότι περιστρέφοντας στο επίπεδο των x_i, x_j με $i \neq j,\ i, j \neq n$ ο κώνος δεν μεταβάλλεται. Πράγματι, για κάθε $\theta \in [0, \pi]$:

$$x_1^2 + \cdots + (x_i \cos\theta - x_j \sin\theta)^2 + \cdots + (x_i \sin\theta + x_j \cos\theta)^2 + \cdots + x_{n-1}^2 = x_1^2 + \cdots + x_i^2 + \cdots + x_j^2 + \cdots + x_{n-1}^2$$

(με πράξεις). Κατ' επέκταση, εάν το $(x_1, \cdots, x_n)$ ανήκει στον κώνο, τότε:

$$x_1^2 + \cdots + (x_i \cos\theta - x_j \sin\theta)^2 + \cdots + (x_i \sin\theta + x_j \cos\theta)^2 + \cdots + x_{n-1}^2 - x_n = 0$$

Επομένως ο κώνος στις $n-$διαστάσεις εμφανίζει περιστροφική συμμετρία.

$\square$

Παρατήρηση (9.3): Έστω U ένας χρονοειδής υπόχωρος του $(\mathbb{R}^n, \mathcal{E})$. Ο χώρος $U^\perp$ είναι χωροειδής.

Απόδειξη: Για να αποφύγουμε διάφορες διακεκριμένες περιπτώσεις, θα θεωρήσουμε ότι $U = \operatorname{span} u$. Η απόδειξη για χώρους μεγαλύτερης διάστασης είναι ανάλογη.

Για $n = 2$, ο φωτοειδής κώνος είναι το ζεύγος των διαγωνίων του συστήματος συντεταγμένων. Τώρα αν το (u_1, u_2) ανήκει εντός του κώνου, κάθε κάθετο διάνυσμα (v_1, v_2) ικανοποιεί τη σχέση $v_1 u_1 - v_2 u_2 = 0$ και συνεπώς ανήκει στην ευθεία $u_1 x - u_2 y = 0$. Μπορεί λοιπόν κανείς να δει ότι το κάθετο θα είναι πολλαπλάσιο του συμμετρικού του u ως προς μια από τις ευθείες που κατασκευάζουν τον κώνο - έτσι έχουμε το ζητούμενο.

Για $n > 2$, χρειάζεται να δείξουμε ότι κάθε $v \perp u$ ανήκει στο εξωτερικό του φωτοειδούς κώνου. Για να το κατορθώσουμε αυτό, θα επικαλεστούμε τη συμμετρία του κώνου, από το **Λήμμα (9.1)**. Έστω λοιπόν $\tilde{u}_0 = u = (u_{0,1}, u_{0,2}, \cdots, u_{0,n})$ - με μία στροφή στο επίπεδο των x_1, x_2, προκύπτει διάνυσμα $\tilde{u}_1 = (0, u_{1,2}, \cdots, u_{1,n})$ το οποίο κι αυτό ανήκει στον κώνο. Συνεχίζουμε επαγωγικά έως ότου να βρούμε διάνυσμα στον κώνο με συντεταγμένες $\tilde{u}_{n-2} = (0, \cdots, 0, u_{n-2,n-1}, u_{n-2,n})$.

Παρατηρούμε τώρα τα εξής:

- Εάν ένα κάθετο προς το $\tilde{u}_{n-2}$ διάνυσμα ανήκει στο επίπεδο x_{n-1}, x_n, τότε από την περίπτωση των δύο διαστάσεων, το κάθετο διάνυσμα είναι εκτός του διδιάστατου κώνου. Επομένως δεν μπορεί να ανήκει στον $n-$διάστατο φωτοειδή κώνο (παρατηρήστε ότι αυτός ο διδιάστατος κώνος είναι ουσιαστικά η τομή του πολυδιάστατου με το επίπεδο x_{n-1}, x_n).

- Εάν το κάθετο προς το $\tilde{u}_{n-2}$ είναι της μορφής $(v_1, \cdots, v_{n-2}, 0, 0)$, τότε είναι χωροειδές κι άρα είναι εξωτερικά του κώνου.

- Εάν ένα $v = (v_1, v_2, \cdots, v_n)$ είναι κάθετο στο $u = (u_1, u_2, \cdots, u_n)$, τότε:

$$v_1 u_1 + v_2 u_2 + \cdots - v_n u_n = 0$$

Οπότε όλα τα κάθετα προς το u βρίσκονται σε υπερεπίπεδο διάστασης $n-1$. Επιλέγουμε:

$$\begin{aligned} b_1 &= (1, 0, \cdots, 0, 0, 0) \\ b_2 &= (0, 1, \cdots, 0, 0, 0) \\ &\vdots \\ b_{n-2} &= (0, 0, \cdots, 1, 0, 0) \\ b_{n-1} &= g, \text{ όπου το } g \text{ ανήκει στο επίπεδο των } x_{n-1}, x_n \text{ και είναι κάθετο στο } u. \end{aligned}$$

Παρατηρήστε ότι δεν μπορούν να υπάρχουν δύο γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα στο x_{n-1}, x_n επίπεδο που είναι κάθετα στο u (επικαλούμαστε τη διδιάστατη περίπτωση).

Το σύνολο $\{b_i\}_{i=1}^{n}$ είναι βάση του ορθοσυμπληρώματος του U, και μάλιστα περιέχει ανά δύο κάθετα διανύσματα. Εάν λοιπόν γράψουμε:

$$v = \sum_{k \leqslant n-1} \lambda_k b_k$$

τότε από τα δύο προηγούμενα σημεία (•):

$$\mathcal{E}(v, v) = \mathcal{E}\Big(\sum_{k \leqslant n-1} \lambda_k b_k, \sum_{k \leqslant n-1} \lambda_k b_k \Big) = \sum_{k \leqslant n-1} \lambda_k^2 \mathcal{E}(b_k, b_k) > 0$$

αφού τα b_k είναι στο εξωτερικό του κώνου, και συνεπώς είναι χωροειδή.

Τώρα στο διάνυσμα $\tilde{u}_{n-2}$ μπορούμε να εφαρμόσουμε την προηγούμενη διαδικασία με τις στροφές αντιστροφα, και να συνάγουμε απ' αυτό (λόγω περιστροφικής συμμετρίας) ότι κάθε κάθετο $v \perp u$ είναι εξωτερικά του φωτοειδούς κώνου.

□

Στους χώρους Minkowski η έννοια της απόστασης δυστυχώς δεν μπορεί να οριστεί καλά. Κατ' αρχάς, επαγόμενη νόρμα $\sqrt{\mathcal{E}(x,x)}$ (άρα και αντίστοιχα η μετρική) δεν μπορεί να οριστεί όπως στις περιπτώσεις χώρων με εσωτερικό γινόμενο, αφού η ποσότητα $\mathcal{E}(x,x)$ παίρνει και αρνητικές τιμές. Τι γίνεται όμως αν αγνοήσουμε την αρνητικότητα της $\mathcal{E}$ και ορίσουμε την 'νόρμα' $\sqrt{|\mathcal{E}(x,x)|}$; Ακόμη κι έτσι δεν μπορεί να οριστεί νόρμα, αφού για κάθε x στον φωτοειδή κώνο αληθεύει $\sqrt{|\mathcal{E}(x,x)|} = 0$, χωρίς το ίδιο το x να είναι μηδέν. Γενικά δεν μπορεί να οριστεί φυσιολογικά η απόσταση σε έναν χώρο Minkowski.

Γενικά ούτε γωνίες μπορούν να οριστούν σε έναν χώρο Minkowski. Παρόλα αυτά, μεταξύ χρονοειδών διανυσμάτων ισχύει μια αντίστροφη ανισότητα Cauchy - Schwarz, οπότε μπορεί να οριστεί μια *υπερβολική γωνία*.

Πρόταση (9.2): Για κάθε δύο χρονοειδή διανύσματα x, y σε χώρο Minkowski $(\mathbb{R}^n, \mathcal{E})$ ισχύει:

$$\mathcal{E}(x,y)^2 \geqslant \mathcal{E}(x,x) \cdot \mathcal{E}(y,y)$$

Απόδειξη: Εάν τα x, y είναι συγγραμμικά, η ανισότητα ισχύει ως ισότητα. Διαφορετικά, θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$f(t) = \mathcal{E}(x+ty, x+ty) = t^2 \mathcal{E}(y,y) + 2t\mathcal{E}(x,y) + \mathcal{E}(x,x)$$

και παρατηρούμε ότι αυτή είναι αρνητική για $t = 0$. Επιπλέον δεν διατηρεί πρόσημο, αφού αν διατηρούσε ολόκληρη η ευθεία $x + \mathrm{span}\ y$ θα έπρεπε να ανήκει στον φωτοειδή κώνο. Οπότε, αφού η f αποτελεί επίσης τριώνυμο, θα έχει μη αρνητική ορίζουσα:

$$\mathcal{E}(x,y)^2 - \mathcal{E}(x,x) \cdot \mathcal{E}(y,y) \geqslant 0$$

Αυτό δίνει το ζητούμενο.

□

Ορισμός: ***Υπερβολική γωνία:***
Έστω x, y δύο χωροειδή διανύσματα σε χώρο Minkowski $(\mathbb{R}^n, \mathcal{E})$. Ως υπερβολική γωνία των x, y ορίζουμε τον (μοναδικό) μη αρνητικό αριθμό $\widehat{(x,y)}$ ή $\angle(x,y)$ για τον οποίο:

$$\mathcal{E}(x,y)^2 = \mathcal{E}(x,x)\mathcal{E}(y,y) \cdot \cosh^2 \widehat{(x,y)}$$

Υπενθυμίζουμε ότι το υπερβολικό συνημίτονο $\cosh\theta$ ορίζεται ως εξής:

$$\cosh\theta = \frac{e^{\theta} + e^{-\theta}}{2}$$

9.2 Οι χώροι Minkowski μέσω της φυσικής

Αυτό που προβλέπει η θεωρία του Galilei της κλασικής φυσικής είναι ουσιαστικά η γραμμική μεταβολή της θέσης, δεδομένης σταθερής ταχύτητας. Στην μονοδιάστατη περίπτωση, αν δύο συστήματα αναφοράς κινούνται με ομαλή σχετική ταχύτητα u, τότε οι συντεταγμένες x, x' του χώρου και t, t' του χρόνου συνδέονται μέσω των σχέσεων:

$$\begin{aligned} x' &= x + ut \\ t' &= t \end{aligned}$$

Από τις σχέσεις αυτές προκύπτει ο λεγόμενος *νόμος πρόσθεσης ταχυτήτων*.

Ο Einstein διαπίστωσε ότι η υπόθεση του σταθερού της ταχύτητας του φωτός (c) οδηγεί σε ασυμφωνία με τους νόμους της κλασικής φυσικής, και απέδωσε την ασυμφωνία αυτή στους μετασχηματιμούς της θέσης και του χρόνου.

Στη συνέχεια θα αναζητήσουμε (πολύ συνοπτικά) τους 'σωστούς' μετασχηματισμούς, δηλαδή τη Γ.Κ. του χωροχρόνου $\mathbb{R}^2$, με την υπόθεση του σταθερού της ταχύτητας του φωτός.

Θεωρώντας τον $\mathbb{R}$ με συντεταγμένη την x και παρατηρώντας μια ακτίνα φωτός προς τα δεξιά, θα έχουμε $c = x/t$ - αντίστοιχα για την προς τα αριστερά διάδοση του φωτός, $c = -x/t$. Λόγω του σταθερού της ταχύτητας του φωτός, οι ζητούμενοι μετασχηματισμοί θα πρέπει να διατηρούν τις σχέσεις:

$$\begin{aligned} x &= ct = y \\ x &= -ct = -y \end{aligned}$$

εάν $y = ct$. Μια φυσική απαίτηση σε αυτό το σημείο είναι η γραμμικότητα των μετασχηματισμών, οπότε ουσιαστικά αναζητούμε τους γραμμικούς μετασχηματισμούς του $\mathbb{R}^2$ που διατηρούν τις προαναφερθήσες σχέσεις. Αναζητούμε λοιπόν πίνακες:

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, \text{ με } \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$$

τέτοιους ώστε:

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\alpha+\beta)x \\ (\gamma+\delta)x \end{pmatrix}, \text{ με } (\alpha+\beta)x = (\gamma+\delta)x \Leftrightarrow \alpha+\beta = \gamma+\delta$$

και:

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\alpha-\beta)x \\ (\gamma-\delta)x \end{pmatrix}, \text{ με } (\alpha-\beta)x = (\gamma-\delta)x \Leftrightarrow \alpha-\beta = \gamma-\delta$$

Μια δεύτερη φυσική απαίτηση είναι η διατήρηση των όγκων, δηλαδή η ορίζουσα του προηγούμενου πίνακα να ισούται με 1. Τα $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ θα υπολογιστούν λοιπόν από το σύστημα:

$$\alpha+\beta = \gamma+\delta,\ \alpha-\beta = \delta-\gamma,\ \alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

Από το σύστημα αυτό προκύπτει $\alpha = \delta,\ \beta = \gamma$ και $\alpha^2 - \beta^2 = 1$. Επομένως οι ζητούμενοι μετασχηματισμοί έχουν πίνακα:

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}, \text{ με } \alpha^2 - \beta^2 = 1$$

Υποθέτουμε ότι $\alpha \geqslant 1,\ \beta < 0$, οπότε $\beta = -\sqrt{\alpha^2 - 1}$ και εν συνεχεία έχουμε ότι για $x' = 0$, ο τύπος:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x + \beta y \\ \beta x + \alpha y \end{pmatrix}$$

δίνει $\alpha x + \beta y = 0$. Επομένως:

$$\alpha x + \beta(ct) = 0 \Rightarrow \alpha u = \beta c \Rightarrow \alpha u = -\beta c \Rightarrow \alpha u = c\sqrt{\alpha^2 - 1} \Rightarrow \alpha^2 u^2 = (\alpha^2 - 1)c^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{c}{c^2 - u^2} \textbf{ και } \beta = -\frac{u}{c^2 - u^2}$$

Τώρα γράφουμε:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{c}{c^2 - u^2} & -\dfrac{u}{c^2 - u^2} \\ -\dfrac{u}{c^2 - u^2} & \dfrac{c}{c^2 - u^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

και παίρνουμε τους λεγόμενους *μετασχηματισμούς Lorentz*.

Θεώρημα: ***Μετασχηματισμοί Lorentz:***
Οι μετασχηματισμοί του Galilei υποκαθίστανται από τους μετασχηματισμούς Lorentz:

$$x' = {x - ut} \Big/ {\sqrt{1 - \left(\frac{u}{c}\right)^2}}$$

$$t' = {-\frac{ux}{c} + ct} \Big/ {\sqrt{1 - \left(\frac{u}{c}\right)^2}}$$

Από τους προηγούμενους μετασχηματισμούς συνάγεται η μεταβολή των μηκών κατά την κίνηση:

$$|x_1' - x_2'| = \left| {x_1 - ut} \Big/ {\sqrt{1 - \left(\frac{u}{c}\right)^2}} - {x_2 - ut} \Big/ {\sqrt{1 - \left(\frac{u}{c}\right)^2}} \right| = {|x_1 - x_2|} \Big/ {\sqrt{1 - \left(\frac{u}{c}\right)^2}}$$

Η Γ.Κ. στον $\mathbb{R}^2$ που χαρακτηρίζει την ειδική θεωρία της σχετικότητας (στη μονοδιάστατη περίπτωση) είναι η ομάδα γραμμικών συναρτήσεων:

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ r \end{pmatrix} \;\Big|\; \alpha^2 - \beta^2 = 1 \right\}$$

Για να κατανοήσουμε καλύτερα την ομάδα αυτή, θα βρούμε τους γραμμικούς ισομορφισμούς που διατηρούν την τετραγωνική μορφή:

$$T(s, r) = s^2 - r^2$$

Αν η γραμμική απεικόνιση:

$$[f((s, r))]^T = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ r \end{pmatrix}$$

διατηρεί την τετραγωνική μορφή T, τότε με πράξεις μπορούμε να βρούμε ότι:

$$s^2 - r^2 = (\alpha^2 - \gamma^2)s^2 + (\beta^2 - \delta^2)r^2 + 2(\alpha\beta - \gamma\delta)sr$$

και συνεπώς:

$$\alpha^2 - \gamma^2 = 1,\ \delta^2 - \beta^2 = 1,\ \alpha\beta = \gamma\delta$$

Θέτοντας $\lambda = \delta/\alpha$, το σύστημα των τριών αυτών εξισώσεων έχει λύση:

$$\lambda = \pm 1,\ \delta = \lambda\alpha,\ \gamma = \frac{\beta}{\lambda}$$

Για $\lambda = 1$, η f ανήκει στην ομάδα H. Με αυτή μας την ανάλυση μπορούμε πλέον να γράψουμε την ακόλουθη σημαντική παρατήρηση:

Παρατήρηση (9.4): Έστω $\mathcal{E}$ να είναι το Lorentzιανό εσωτερικό γινόμενο με τετραγωνική μορφή την T. Η Γ.Κ. $(H, \mathbb{R}^2)$ είναι υπογεωμετρία Klein ενός χώρου Minkowski $(\mathbb{R}^2, \mathcal{E})$, όταν αυτόν τον βλέπουμε ως την Γ.Κ. που τον χαρακτηρίζει (εδώ η Γ.Κ. θα ορίζεται από μετασχηματισμούς που διατηρούν την τετραγωνική μορφή T).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 10

Βιβλιογραφία

(κ. *Λάππας Διονύσιος*)

(1) Ανδρεαδάκης Σ.: ***Γραμμική Άλγεβρα*** (Συμμετρία)

(*Φράγκος Αναστάσιος*)

(1) Brice L.: ***Hyperbolic geometry*** (arXiv:2003.11180v2)

(2) Μπιζάνος, Κ.: ***Γραμμική Άλγεβρα ΙΙ, Πρόχειρες Σημειώσεις και Ασκήσεις*** (Σημειώσεις Π.Π.Σ. από τον κ. Μαλιάκα Μ., Ε.Κ.Π.Α.)

III

Διαφορική Υπερβολική Γεωμετρία