691. Διδακτική των Μαθηματικών Ι

Παρουσίαση 6η (Δεν θα παρουσιαστεί)

Α. Φράγκος

Δευτέρα 21 Νοεμβρίου 2022

Τι θα διαπραγματευτούμε

- Θα αναλύσουμε τη δραστηριότητα 6 των «διερευνητικών δραστηριοτήτων».[1]
- Θα αναλύσουμε τη δραστηριότητα 7 των «διερευνητικών δραστηριοτήτων».[1]
- Θα βρούμε τις εμπλεκόμενες μαθηματικές έννοιες και προκλήσεις αυτών των δραστηριοτήτων.
- Θα σκεφτούμε ποιές μαθηματικές δράσεις αναμένεται να αναπτύξουν οι μαθητές καθώς εμπλέκονται με την κάθε δραστηριότητα.
- Θα αναφέρουμε ενδεικτικές δυσκολίες των μαθητών ανάλογα με την τάξη/βαθμίδα στην οποία φοιτούν (όσον αφορά αυτές τις δραστηριότητες).

[1] Στην eclass, μαθήματα 5&6.

Δραστηριότητα 6 - Δανάη

Η Δανάη έχει παρατηρήσει (στα «πειράματά» της) το εξης: Ας θεωρήσουμε έναν τριψήφιο αριθμό $\overline{a_1 a_2 a_3} = 100a_1 + 10a_2 + a_3$. Αντιστρέφουμε τα ψηφία του και αφαιρούμε τον ανεστραμένο αριθμό στον πρώτο. Ορίζουμε $S = \overline{a_1 a_2 a_3} - \overline{a_3 a_2 a_1}$. Αναστρέφουμε ξανά τον αριθμό S (δηλ. $S \rightsquigarrow S^*$) και τον προσθέτουμε στον S. Το αποτέλεσμα $S + S^*$ είναι πάντα (;) 1089.

Η Δανάη έχει *σχεδόν* δίκιο. Το άθροισμα $S + S^*$ είναι με μεγάλη πιθανότητα 1089, αλλά όχι πάντα.

Μπορούμε να κάνουμε μια διερεύνηση όσον αφορά το πότε $S + S^* = 1089$.

Λήμμα 1:

Το S είναι πολλαπλάσιο του 99.

Απόδειξη: Πράγματι:

$$100a_1 + 10a_2 + a_3 - 100a_3 - 10a_2 - a_1 = 99(a_1 - a_3)$$

Παρατηρήστε ότι για να «ορίζεται» (στο δημοτικό λόγου χάρη) η διαφορά της Δανάης, θα πρέπει $a_1 - a_3 \geqslant 0 \Leftrightarrow a_1 \geqslant a_3$.

Λήμμα 2:

Υπάρχουν 9 ζεύγη (a_1, a_3) έτσι ώστε $a_1 - a_3 = 0$, και $9 - \delta + 1$ ζεύγη (a_1, a_3) έτσι ώστε $a_1 - a_3 = \delta$ (με $\delta \in \{1, 2, \cdots, 9\}$).

Απόδειξη: Πράγματι, αν $a_1 = a_3$, επειδή $a_1 \in \{1, \cdots, 9\}$ έχουμε 9 ζεύγη. Διαφορετικά, τα ζεύγη:

$$(a_1, a_1 - \delta), \;\; a_1 \geqslant \delta$$

είναι στο πλήθος $9 - \delta + 1$.

Από το Λήμμα 2 έπεται ότι το πλήθος των ζευγών (a_1, a_3) είναι 45.

Πίνακας 1:

Πολλαπλάσιο $S = k \cdot 99$	*Πιθανότητα* $\mathbb{P}(S)$
$0 \cdot 99$	$9/45$
$1 \cdot 99$	$9/45$
$2 \cdot 99$	$8/45$
$3 \cdot 99$	$7/45$
$4 \cdot 99$	$6/45$
$5 \cdot 99$	$5/45$
$6 \cdot 99$	$4/45$
$7 \cdot 99$	$3/45$
$8 \cdot 99$	$2/45$
$9 \cdot 99$	$1/45$

Από τον Πίνακα 1 έπεται ο Πίνακας 2.

Πίνακας 2:

S	*Άθροισμα* $S + S^*$	*Πιθανότητα* $\mathbb{P}(S + S^*)$
$0 \cdot 99 = 0$	0	$9/45$
$1 \cdot 99 = 99$	198	$9/45$
$2 \cdot 99 = 198$	1089	$8/45$
$3 \cdot 99 = 297$	1089	$7/45$
$4 \cdot 99 = 396$	1089	$6/45$
$5 \cdot 99 = 495$	1089	$5/45$
$6 \cdot 99 = 594$	1089	$4/45$
$7 \cdot 99 = 693$	1089	$3/45$
$8 \cdot 99 = 792$	1089	$2/45$
$9 \cdot 99 = 891$	1089	$1/45$

Από τον Πίνακα 2 έπεται ότι:

$$\mathbb{P}(S+S^*=1089)=\frac{1}{45}(8+7+\cdots+1)=\frac{28}{45}\approx 62,2\%$$

Είναι καλό ένας μαθητής να συσχετίσει το παραπάνω αποτέλεσμα με τις «προπαίδειες» των $\overline{99\cdots 9}$. Στην περίπτωση του ενός 9, η προπαίδεια του 9 έχει το γνωστό κόλπο που μαθαίναμε στο σχολείο: Το αρχικό ψηφίο αυξάνεται κατά 1, το τελικό μειώνεται κατά 1. Το ίδιο και στον περίπτωση των τριών ή τεσσάρων 9, μόνο που ενδιαμέσως υπάρχουν ένα ή δύο εννέα αντίστοιχα. Οπότε είναι κάπως αναμενόμενο το αποτέλεσμά μας, δεδομένου του Λήμματος 1.

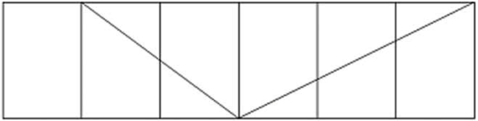
Η δραστηριότητα 6 στους μαθητές

Κατ' αρχάς, για να υπάρχει μια καλή κατανόηση όσον αφορά τη συχνότητα εμφάνισης του αριθμού 1089, χρειάζεται κάποιος στοιχειώδης στατιστικός λογισμός. Διαφορετικά, μόνο με την έννοια του κλάσματος η κατανόηση θα είναι μεν εφικτή αλλά δυσκολότερη.

Επομένως πριν το λύκειο ενδέχεται η πλήρης κατανόηση του προβλήματος να μην επιτευχθεί. Παρόλα αυτά, η διατύπωση του προβλήματος είναι αρκετά απλή ώστε να είναι δυνατή η διερεύνηση σε οποιαδήποτε τάξη.

Σε κάθε περίπτωση, η δραστηριότητα απαιτεί διάφορες εννοιολογικές συνδέσεις, όπως το ότι σε μία επιλογή αριθμών μπορεί να προσδωθεί μια πιθανότητα. Η δραστηριότητα είναι υψηλών μαθηματικών απαιτήσεων.

Δραστηριότητα 7 - Κλάσματα και μέρη



Δίνεται το παραπάνω σχήμα και ζητείται να εντοπιστούν οι αριθμοί:

- $\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{6}$
- $\frac{1}{4} + \frac{1}{6}$

Κατ' αρχάς, οι αριθμοί αυτοί καθαυτοί αποκλείεται να εντοπιστούν, γιατί δεν υπάρχουν. Ο μαθητής θα πρέπει να κατανοήσει ότι όλο το σχήμα μπορεί (ενδεχομένως) να λειτουργήσει όσο το «όλο», και να εκφραστεί μέσο της μονάδας. Έπειτα, μέρη αυτού αντιστοιχούν σε αριθμούς όγκος(μέρους).

Εδώ οι μαθητές πρέπει επίσης να συνδέσουν τις μαθηματικές πράξεις με πράξεις πάνω σε μέρη. Για παράδειγμα, το $1/2 \cdot 5/6$ (εκτός από αριθμό) εκφράζει και το μισό του $5/6$.

Απαιτείται λοιπόν αλγεβρικός και γεωμετρικός συλλογισμός, και η δραστηριότητα μπορεί να παρουσιαστεί από την πέμπτη δημοτικού κιόλας, στους μαθητές.

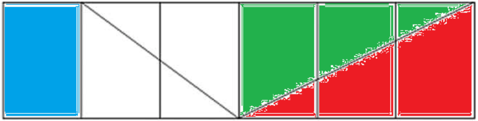
Έχοντας υπόψη ότι το $1/2 \cdot 5/6$ εκφράζει το μισό του $5/6$, βρίσκοντας ότι το κόκκινο και μπλέ χωρίο (μαζί) είναι $5/6$, καθώς επίσης και ότι οι δύο λοξές γραμμές χωρίζουν τα $2/6$ και $3/6$ στη μέση, το μπλέ μόνο του ή το κόκκινο μόνο του θα είναι $1/2 \cdot 5/6$.

Ίσως χρειαστεί ο συλλογισμός:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{6} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{6}$$

αλλά δεν είναι απαραίτητος (αφού «φαίνεται»).

Ο μαθητής μπορεί να παρατηρήσει ότι το πράσινο και κόκκινο χωρίο μαζί είναι $1/2$. Επομένως, αφού η αντίστοιχη λοξή γραμμή κόπτει στην μέση το $1/2$, το πράσινο ή το κόκκινο μόνο του είναι $1/4$. Το μπλέ κουτάκι είναι $1/6$.



Επομένως, το $1/4 + 1/6$ είναι το μπλε μαζί με το πράσινο ή το κόκκινο.