Εθνικό και Καποδιστριακό Παν. Αθηνών, Τμ. Μαθηματικών

# Εισαγωγή στην Τοπολογία

Φράγκος Αναστάσιος

$$\emptyset, X \in \mathfrak{T}$$

$$\{A_i\}_{i=1}^{n} \subseteq \mathfrak{T} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathfrak{T}$$

$$\{A_i\}_{i\in I} \subseteq \mathfrak{T} \Rightarrow \bigcup_{i\in I} A_i \in \mathfrak{T}$$

— Βασισμένο στις παραδόσεις της κ. Παπατριανταφύλλου Μαρίας —

——— 2024 Τελευταία ενημέρωση: 16 Μαρτίου 2024

Η γραμματοσειρά που χρησιμοποιήθηκε είναι η Κέρκης. Περισσότερες πληροφορίες μπορείτε να βρείτε εδώ:

http://iris.math.aegean.gr/kerkis/

---

ΑΒΓΔΕΖΗΘΙΚΛΜΝΞΟΠΡΣΤΥΦΧΨΩ

αβγδεζηϑικλμνξοπρστυφχψω

*ΑΒΓΔΕΖΗΘΙΚΛΜΝΞΟΠΡΣΤΥΦΧΨΩ*

*αβγδεζηϑικλμνξοπρστυφχψω*

**ΑΒΓΔΕΖΗΘΙΚΛΜΝΞΟΠΡΣΤΥΦΧΨΩ**

**αβγδεζηϑικλμνξοπρστυφχψω**

ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ

abcdedghijklmnopqrstuvwxyz

*BCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ*

*abcdedghijklmnopqrstuvwxyz*

**ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ**

**abcdedghijklmnopqrstuvwxyz**

0123456789,./:“”()[]{}<>-!#$%&*

0123456789,./:‘“’’()[]<>{}-!#$%&*

0123456789,./:“’’()[]<>{}-!#$%&*

---

Το μέγεθος της γραμματοσειράς επιτρέπει εκτύπωση σε A5 ή B5.

# Πρόλογος

ddddd

# Περιεχόμενα

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

# Τοπολογίες και ανοικτά σύνολα

## 1.1 Τοπολογίες και βάσεις

Οι τοπολογικοί χώροι εμφανίζονται στα μαθηματικά με πολύ φυσιολογικό τρόπο, για τη μελέτη της στοιχειώδους γεωμετρία ενός χώρου, χωρίς να υπεισέρχεται κάποια συγκεκριμένη μετρική δομή. Οι εφαρμογές τους, όπως θα γίνει φανερό στα επόμενα κεφάλαια (και ιδίως στα 6,7 και 8) είναι πολλές και θεμελιώδεις.

Πριν ξεκινήσουμε την περιγραφή τους, είναι βοηθητικό διαισθητικά να δούμε ένα γνωστό παράδειγμα τοπολογικών χώρων, τους μετρικούς και ψευδομετρικούς χώρους.

**Ορισμός 1.1: (Μετρικές και μετρικοί χώροι).**
**I.** Έστω $M \neq \emptyset$ ένα σύνολο και $\varrho : M \times M \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση με τις ιδιότητες:

i. $\forall x, y \in M,\ \varrho(x, y) \geqslant 0$

ii. $\forall x, y \in M,\ [\varrho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y]$

iii. $\forall x, y \in M,\ \varrho(x, y) = \varrho(y, x)$

iv. $\forall x, y, z \in M,\ \varrho(x, z) \leqslant \varrho(x, y) + \varrho(y, z)$

Η συνάρτηση $\varrho$ θα καλείται μετρική στο $M$.
**II.** Έστω $M \neq \emptyset$ ένα σύνολο και $\varrho$ μια μετρική στο $M$. Το διατεταγμένο ζεύγος $(M, \varrho)$ θα καλείται μετρικός χώρος.

Όσον αφορά τις ψευδομετρικές, ορίζουμε:

**Ορισμός 1.2: (Ψευδομετρικές).** Έστω $M \neq \emptyset$ ένα σύνολο και $\varrho : M \times M \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση που έχει τις ιδιότητες **i**, **iii**, **iv** της μετρικής, και έχει στην θέση της **ii** την:

ii*. $\forall x, y \in M,\ [x = y \Rightarrow \varrho(x, y) = 0]$

Η $\varrho$ καλείται ψευδομετρική στον $M$.

■ **Παράδειγμα 1.1:**

- Θεωρούμε $M \neq \emptyset$ τυχαίο σύνολο και τη συνάρτηση $\varrho : M \times M \to \mathbb{R}$:

$$\varrho(x, y) = \begin{cases} 1 \text{ αν } x \neq y \\ 0 \text{ αν } x = y \end{cases}$$

Η $\varrho$ είναι μετρική και μάλιστα ονομάζεται ≪διακριτή μετρική≫.

- Εάν πάλι $M \neq \emptyset$ είναι τυχαίο σύνολο, η συνάρτηση $d : M \times M \to \mathbb{R}$:

$$\forall x, y \in M,\ d(x, y) = 0$$

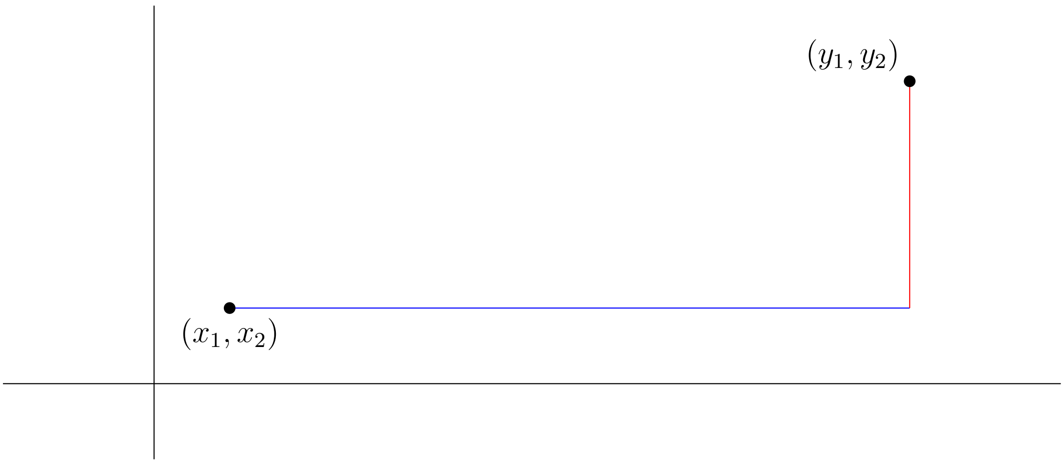
είναι ψευδομετρική στο $M$ και ονομάζεται «τετριμμένη ψευδομετρική».

- Ιδιαίτερο ενδιαφέρον έχουν οι ευκλείδειοι χώροι ($\mathbb{R}^n$, για τα διάφορα $n \in \mathbb{N}$), με τις λεγόμενες $k-$μετρικές. Στον $\mathbb{R}^n$ οι συναρτήσεις $d_k : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$:

$$d_k\big((x_1, \cdots, x_n), (y_1, \cdots, y_n)\big) := \sqrt[k]{\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^k}$$

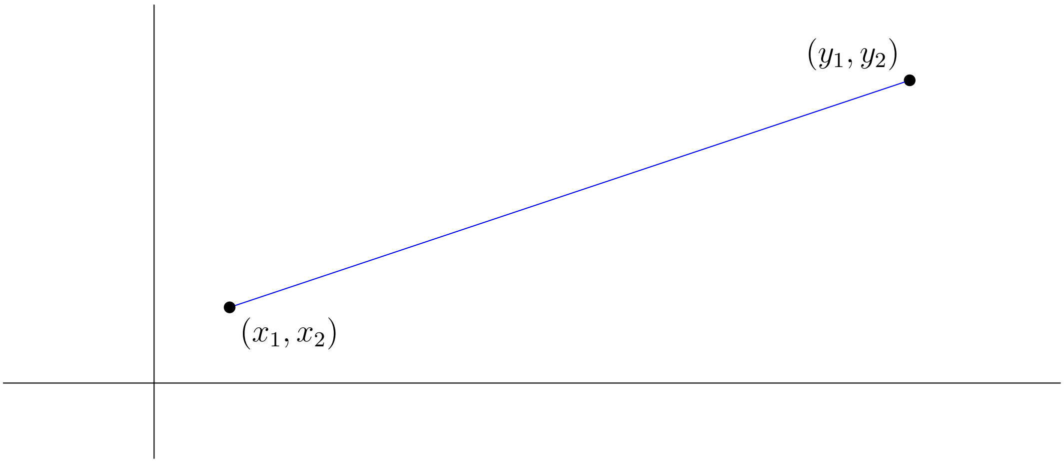
για τα διάφορα $k \in \mathbb{N}$ είναι μετρικές (αυτό το αποτέλεσμα αποδεικνύεται σε μαθήματα πραγματικής ανάλυσης). Ειδικές περιπτώσεις $k-$μετρικών είναι η μετρική του ταχυδρόμου ($k = 1$):

$$d_1\big((x_1, \cdots, x_n), (y_1, \cdots, y_n)\big) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$$




και η συνήθης απόσταση στον $\mathbb{R}^n$ ή αλλιώς ευκλείδεια μετρική ($k = 2$).

$$d_2\big((x_1, \cdots, x_n), (y_1, \cdots, y_n)\big) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2}$$



- Συνεχίζοντας στο προηγούμενο παράδειγμα, για κάθε δύο $x, y \in \mathbb{R}^n$, η ακολουθία $\big(d_k(x,y)\big)_{k\in\mathbb{N}}$ έχει όριο, το οποίο φυσικά εξαρτάται από τα $x, y$. Το συμβολίζουμε $\alpha(x,y)$. Η συνάρτηση τώρα $d_\infty : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$:

$$d_\infty(x,y) = \alpha(x,y)$$

  αποδεικνύεται ότι είναι μετρική, και την ονομάζουμε «μετρική supremum». Μάλιστα αληθεύει ότι:

$$d_\infty(x,y) = \max\{|x_i - y_i|\}_{i=1}^n$$

  όπου $x_i, y_i$ είναι οι συντεταγμένες των $x$ και $y$ αντίστοιχα.

■

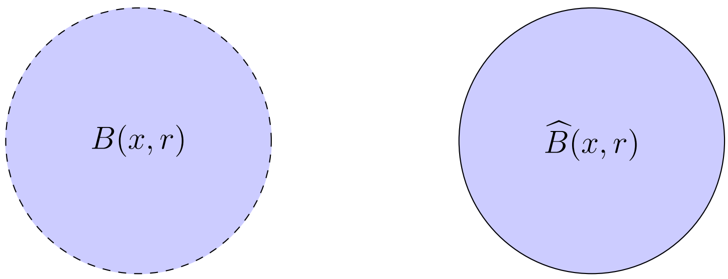
**Ορισμός 1.3: (Ανοικτές και κλειστές μπάλες).** Έστω $(M,\varrho)$ ένας μετρικός χώρος, $x \in M$ και $r > 0$.
**I.** Ορίζουμε ως ανοικτή μπάλα με κέντρο $x$ και ακτίνα $r$ το σύνολο:

$$B(x,r) := \{y \in M \mid \varrho(x,y) < r\}$$

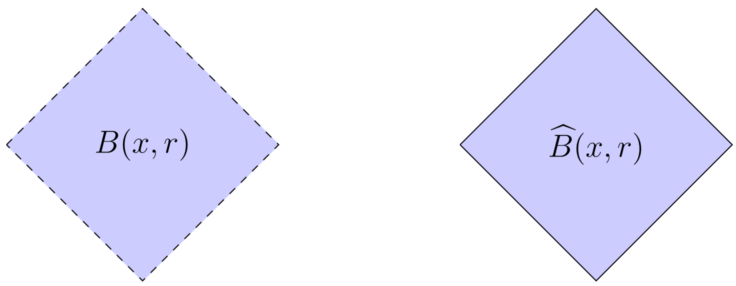
**II.** Ορίζουμε ως κλειστή μπάλα με κέντρο $x$ και ακτίνα $r$ το σύνολο:

$$\widehat{B}(x,r) := \{y \in M \mid \varrho(x,y) \leqslant r\}$$

Φυσικά (γενικά) αληθεύει ότι $x \in B(x,r) \subseteq \widehat{B}(x,r)$. Ειδικά στο επίπεδο, μετρώντας με τη συνήθη μετρική έχουμε εικόνες της μορφής:




ενώ μετρώντας με τη μετρική του ταχυδρόμου:




**Ορισμός 1.4: (Ανοικτά σύνολα).** Έστω $(M,\varrho)$ μετρικός χώρος. Ένα σύνολο $A \subseteq M$ θα λέγεται ανοικτό στον μετρικό χώρο αν και μόνο αν:

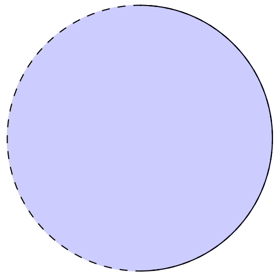
$$\forall x \in A,\ \exists \varepsilon_x > 0 :\ B(x,\varepsilon_x) \subseteq A$$

Αυτομάτως ο ορισμός των ανοικτών συνόλων δίνει ότι κάθε ανοικτό σύνολο είναι ένωση ανοικτών μπαλών (και ισχύει και το αντίστροφο).

$$A \text{ ανοικτό } \Leftrightarrow \exists \big\{B(x,\varepsilon_x)\big\}_x \text{ με } A = \bigcup_x B(x,\varepsilon_x)$$

**Ορισμός 1.5: (Κλειστά σύνολα).** Έστω $(M, \varrho)$ μετρικός χώρος. Ένα σύνολο $A \subseteq M$ θα λέγεται κλειστό στον μετρικό χώρο αν και μόνο αν το συμπλήρωμά του $A^c = M \backslash A$ είναι ανοικτό στον μετρικό χώρο.

**Παρατήρηση 1.1:** Έστω ένας μετρικός χώρος $(M, \varrho)$. Υπάρχουν σύνολα που είναι και κλειστά και ανοικτά (για παράδειγμα το $\emptyset$). Επιπλέον, εν γένει ένα σύνολο δεν είναι υποχρεωτικό να είναι ανοικτό ή κλειστό - για παράδειγμα στο επίπεδο, η ένωση μισής κλειστής μπάλας (δίσκου) με μισή ανοικτή μπάλα (η δεύτερη να μην είναι όλη εντός της πρώτης) είναι σύνολο ούτε ανοικτό ούτε κλειστό.



Στους μετρικούς χώρους $(M, \varrho)$ η τοπολογία είναι το σύνολο όλων των ανοικτών υποσυνόλων του $M$. Εάν θέλουμε να περιγράψουμε τα ανοικτά σύνολα σε χώρους χωρίς απαραιτήτως μετρική δομή, δεν έχουμε άλλη επιλογή από το να δουλέψουμε αξιωματικά με αυτά.

Με το ακόλουθο θεώρημα της πραγματικής ανάλυσης, θα περιγράψουμε χαρακτηριστικές ιδιότητες των ανοικτών συνόλων, οι οποίες θα βοηθήσουν σε μία γενίκευσή τους, και κατ'επέκταση στον ορισμό της τοπολογίας.

**Θεώρημα 1.1: (Ιδιότητες των μετρικών τοπολογικών χώρων).** Έστω $(M, \varrho)$ μετρικός χώρος. Ορίζουμε την τοπολογία του $M$ ως το σύνολο των ανοικτών υποσυνόλων του μετρικού χώρου, δηλαδή:

$$\mathfrak{T}_\varrho = \{A \subseteq X \mid A \text{ ανοικτό}\}$$

Τα ακόλουθα αληθεύουν:

i. $\emptyset, M \in \mathfrak{T}_\varrho$

ii. Εάν $n \in \mathbb{N}$ και $\{A_i\}_{i=1}^n \subseteq \mathfrak{T}_\varrho$, τότε $\bigcap_{i=1}^n A_i \in \mathfrak{T}_\varrho$

iii. Εάν $I$ είναι ένα αυθαίρετο σύνολο δεικτών και $\{A_i\}_{i \in I} \subseteq \mathfrak{T}_\varrho$, τότε $\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathfrak{T}_\varrho$

*Απόδειξη:* Για το i., παρατηρούμε ότι το να μην είναι ανοικτό το $\emptyset$ παραβιάζει τον ορισμό του κενού συνόλου. Εάν το $M$ δεν είναι ανοικτό σύνολο, για τυχόν $x \in M$ και για κάθε $r > 0$ θα ίσχυει ότι:

$$B(x, r) \nsubseteq M$$

το οποίο είναι άτοπο από τον ορισμό της μπάλας.

Για το ii., εφόσον η οικογένεια $\{A_i\}_{i=1}^n$ είναι οικογένεια ανοικτών συνόλων, για κάθε $x \in \bigcap_{i=1}^n A_i$ υπάρχουν ακτίνες $r_i$ τέτοιες ώστε $B(x, r_i) \subseteq A_i$ (για τα διάφορα $i$). Θεωρώντας $r = \min\{r_i\}_{i=1}^n$, έχουμε ότι $B(x, r) \subseteq \bigcap_{i=1}^n A_i$.

Για το iii., εάν $x \in \bigcup_{i \in I} A_i$, τότε $x \in A_j$ για κατάλληλο δείκτη $j$. Οπότε, υπάρχει $r_j$ τέτοιο ώστε $B(x, r_j) \subseteq A_j$ και κατ' επέκταση $B(x, r_j) \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$.

$\square$

Κανείς ανατρέχοντας σε διάφορες αποδείξεις της πραγματικής ανάλυσης, μπορεί να δει ότι οι τρεις ιδιότητες του παραπάνω θεωρήματος αρκούν για την απόδειξη διαφόρων θεωρημάτων. Η έννοια της απόστασης δεν είναι πάντοτε αναγκαία για να εξάγουμε συμπεράσματα για τον χώρο στον οποίο βρισκόμαστε, κι οπότε ορισμός της τοπολογίας που θα δώσουμε είναι φυσιολογικό να βασίζεται στις τρεις ιδιότητες του Θεωρήματος 1.1.

**Ορισμός 1.6: (Τοπολογίες και τοπολογικοί χώροι).** Έστω $X \neq \emptyset$ ένα σύνολο.
**I.** Μια τοπολογία στον $X$ είναι μια οικογένεια $\mathfrak{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$ με τις εξής ιδιότητες:

i. $\emptyset, X \in \mathfrak{T}$

ii. Εάν $n \in \mathbb{N}$ και $\{A_i\}_{i=1}^n \subseteq \mathfrak{T}$, τότε $\bigcap_{i=1}^n A_i \in \mathfrak{T}$

iii. Εάν $I$ είναι ένα αυθαίρετο σύνολο δεικτών και $\{A_i\}_{i\in I} \subseteq \mathfrak{T}$, τότε $\bigcup_{i\in I} A_i \in \mathfrak{T}$

**II.** Το διατεταγμένο ζεύγος $(X, \mathfrak{T})$ θα καλείται τοπολογικός χώρος.

**Ορισμός 1.7: (Ανοικτά και κλειστά σύνολα σε τοπολογίες).** Έστω $(X, \mathfrak{T})$ ένας τοπολογικός χώρος.
**I.** Τα στοιχεία μιας τοπολογίας $\mathfrak{T}$ θα τα ονομάζουμε ανοικτά σύνολα στον $X$.
**II.** Τα κλειστά σύνολα $F$ στον $X$ είναι ακριβώς αυτά για τα οποία $F^c = X \backslash F \in \mathfrak{T}$.

**Παρατήρηση 1.2:** Παρατηρήστε ότι $\{\emptyset, X\} \subseteq \mathfrak{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$.

Μέχρι τώρα έχουμε δει την τοπολογία με τον ορισμό της. Μερικά συγκεκριμένα παραδείγματα τοπολογιών είναι τα ακόλουθα:

■ **Παράδειγμα 1.2:**

- Η $\{\emptyset, X\}$ είναι μια τοπολογία στον $X$, που ονομάζεται «τετριμμένη τοπολογία».
- Το $\mathcal{P}(X)$ είναι μια τοπολογία στον $X$, που ονομάζεται «διακριτή τοπολογία».
- Έστω $(M, \varrho)$ ένας μετρικός χώρος. Βάσει του Θεωρήματος 1.1, το σύνολο $\mathfrak{T}_\varrho$ (όπως αυτό ορίζεται στην διατύπωση του θεωρήματος) είναι τοπολογία στο $M$.
- Έστω $X \neq \emptyset$ ένα σύνολο και $x_0 \in X$. Το σύνολο:
$$\mathfrak{T} = \{A \subseteq X \mid x_0 \in A\} \cup \{\emptyset\}$$
είναι τοπολογία στον $X$, που ονομάζεται «τοπολογία του ιδιαιτέρου σημείου».
- Αντίστοιχα, το σύνολο:
$$\mathfrak{T} = \{A \subseteq X \mid x_0 \notin A\} \cup \{X\}$$
είναι τοπολογία στον $X$, που ονομάζεται «τοπολογία του εξαιρουμένου σημείου».
- Έστω $X \neq \emptyset$ ένα σύνολο. Το σύνολο:
$$\mathfrak{T} = \{A \subseteq X \mid A^c \text{ πεπερασμένο}\} \cup \{\emptyset\}$$
είναι τοπολογία στον $X$, που ονομάζεται «συμπεπερασμένη τοπολογία».
- Αντίστοιχα, το σύνολο:
$$\mathfrak{T} = \{A \subseteq X \mid A^c \text{ αριθμήσιμο}\} \cup \{\emptyset\}$$
είναι τοπολογία στον $X$, που ονομάζεται «συναριθμήσιμη τοπολογία».

■

Ο ορισμός των τοπολογικών χώρων προήλθε από την ενασχόλησή μας με τους μετρικούς χώρους, και μάλιστα από αρκετά χαρακτηριστικές ιδιότητες των ανοικτών συνόλων σε αυτούς. Είναι αναγκαίο λοιπόν να εξασφαλιστεί ότι αυτή ήταν πράγματι μία γενίκευση, δηλαδή ότι υπάρχουν μετρικοί χώροι στους οποίους καμία μετρική δομή (συμβατή με την τοπολογία) δεν μπορεί να προστεθεί.

**Ορισμός 1.8: (Μετρικοποιήσιμες τοπολογίες).** Έστω $X \neq \emptyset$. Μια τοπολογία $\mathfrak{T}$ στο $X$ λέγεται μετρικοποιήσιμη εάν υπάρχει μετρική $\varrho$ τέτοια ώστε $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}_\varrho$.

**Παρατήρηση 1.3:** Υπάρχουν μη μετρικοποιήσιμες τοπολογίες.

*Απόδειξη:* Ας υποθέσουμε ότι $|X| \geqslant 2$ κι ας πάρουμε την τετριμμένη τοπολογία του $X$, δηλαδή την $\{\emptyset, X\}$. Ας υποθέσουμε ότι είναι μετρικοποιήσιμη. Για τυχόν $x \in X$ και για κάθε $r > 0$, η μπάλα $B(x, r)$ είναι ένα από τα σύνολα $\emptyset, X$ (αφού αυτά είναι τα μόνα ανοικτά σύνολα). Επειδή δεν είναι κενή, αναγκαστικά είναι ολόκληρος ο χώρος $X$. Εάν τώρα ο $X$ δεν είναι μονοσύνολο, ένα οποιοδήποτε $x \neq y \in X$ βρίσκεται σε κάθε μπάλα $B(x, r)$ για οσοδήποτε μικρή απόσταση $r > 0$ - οπότε η απόσταση των $x, y$ θα έπρεπε να είναι μηδενική χωρίς τα ίδια να ταυτίζονται. Αυτό παραβιάζει την ιδιότητα ii. της μετρικής και μας δίνει άτοπο.

□

Επιστρέφοντας στο Παράδειγμα 1.2, η διακριτή τοπολογία του $X$ είναι μετρικοποιήσιμη τοπολογία, με τη διακριτή μετρική. Είναι επίσης σαφές ότι κάθε μετρική τοπολογία είναι μετρικοποιήσιμη.

Για τις υπόλοιπες τοπολογίες του παραδείγματος, χρειάζεται να κάνουμε μεγαλύτερη ανάλυση για να εξάγουμε συμπεράσματα.

**Πρόταση 1.1:** Έστω $(X, \varrho)$ ένας μετρικός χώρος. Τα μονοσύνολα είναι κλειστά.

*Απόδειξη:* Θα δείξουμε για κάθε μονοσύνολο $\{x\}$, το $\{x\}^c = X \setminus \{x\}$ είναι ανοικτό. Η περίπτωση $|X| = 1$ είναι προφανής.

Εάν $|X| \geqslant 2$, τότε για οποιοδήποτε $y \in \{x\}^c$ η απόσταση $\rho = \varrho(x, y)$ δεν είναι μηδέν. Οπότε η μπάλα $B(y, \rho/2)$ δεν τέμνει το $\{x\}$, και συνεπώς $B(y, \rho/2) \subseteq \{x\}^c$.

□

**Πρόταση 1.2:** Έστω $(X, \varrho)$ ένας μετρικός χώρος με $|X| \geqslant 2$. Υπάρχουν δύο ανοικτά, μη κενά, ξένα σύνολα.

*Απόδειξη:* Εφόσον υπάρχουν τουλάχιστον δύο στοιχεία στον χώρο, μπορούμε να επιλέξουμε δύο, τα $x, y$. Εάν $\rho = \varrho(x, y)$, τα σύνολα $B(x, \rho/3),\ B(y, \rho/3)$ είναι ανοικτά, μη κενά και ξένα.

□

**Πρόταση 1.3:** Έστω $X = \{x\}$. Κάθε τοπολογία στον $X$ είναι η διακριτή τοπολογία, οπότε είναι μετρικοποιήσιμη.

*Απόδειξη:* Για κάθε τοπολογία $\mathfrak{T}$ αληθεύουν οι εγκλεισμοί $\{\emptyset, X\} \subseteq \mathfrak{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Επειδή όμως το $X$ είνα μονοσύνολο:

$$\mathcal{P}(X) = \big\{\emptyset, \{x\}\big\} = \{\emptyset, X\}$$

κι επομένως $\mathfrak{T} = \mathcal{P}(X)$.

□

**Παρατήρηση 1.4:** Έστω $X$ ένα σύνολο και $x \neq x_0$ δύο στοιχεία του.

i. Εφοδιάζοντας τον χώρο με την τοπολογία $\mathfrak{T}^+$ του ιδιαιτέρου σημείου $x_0$, το σύνολο $\{x_0\}$ δεν είναι κλειστό. Επομένως, βάσει της Πρότασης 1.1, αυτή η τοπολογία δεν είναι μετρικοποιήσιμη.

ii. Εφοδιάζοντας τον χώρο με την τοπολογία $\mathfrak{T}^-$ του εξαιρουμένου σημείου $x_0$, το σύνολο $\{x\}$ δεν είναι κλειστό. Επομένως, βάσει της Πρότασης 1.1, αυτή η τοπολογία δεν είναι μετρικοποιήσιμη.

*Απόδειξη:* Θα δούμε το i., και το ii. μπορεί να γίνει αναλόγως. Εάν το $\{x_0\}$ ήταν κλειστό, τότε το $\{x_0\}^c = X \backslash \{x_0\}$ θα ήταν ανοικτό. Δηλαδή $\{x_0\}^c \in \mathfrak{T}^+$, το οποίο είναι άτοπο από τον ορισμό της εν λόγω τοπολογίας.

□

**Παρατήρηση 1.5:** Έστω $X \neq \emptyset$ ένα σύνολο.

i. Εάν $\mathfrak{T}$ είναι η συμπεπερασμένη τοπολογία του $X$:

$$(X, \mathfrak{T}) \text{ μετρικοποιήσιμος} \Leftrightarrow X \text{ πεπερασμένο}$$

ii. Ανάλογο συμπέρασμα ισχύει και για τις συναριθμήσιμες τοπολογίες. Εάν $\mathfrak{T}$ είναι η συναριθμήσιμη τοπολογία του $X$:

$$(X, \mathfrak{T}) \text{ μετρικοποιήσιμος} \Leftrightarrow X \text{ αριθμήσιμο}$$

*Απόδειξη:* Και πάλι θα ασχοληθούμε με το i.. Το ii. μπορεί να γίνει αναλόγως. Εάν το $X$ είναι πεπερασμένο, θα αληθεύει αναγκαστικά ότι $\mathfrak{T} = \mathcal{P}(X)$. Οπότε η τοπολογία είναι μετρικοποιήσιμη (με τη διακριτή μετρική).

Εάν το $X$ είναι άπειρο, υποθέτουμε προς άτοπο ότι είναι μετρικοποιήσιμο. Από την Πρόταση 1.2, υπάρχουν ανοικτά σύνολα $A, B$ με κενή τομή, δηλαδή:

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow A \subseteq B^c$$

Επειδή το $B$ είναι ανοικτό, το $B^c$ είναι πεπερασμένο κι επομένως και το $A$. Το $A^c$ είναι κι αυτό πεπερασμένο ως συμπλήρωμα ανοικτού, οπότε το $X = A \cup A^c$ είναι πεπερασμένο. Αυτό είναι άτοπο.

□

Έχουμε αναφέρει ξανά ότι, δοθείσης μίας τοπολογίας $\mathfrak{T}$, υπάρχει μια μεγαλύτερη τοπολογία (ως προς τη σχέση του υποσυνόλου), και μάλιστα μια απ' αυτές είναι η διακριτή τοπολογία $\mathfrak{T}_\delta = \mathcal{P}(X)$. Ένα ερώτημα που είχαμε πει ότι θα μας απασχολήσει είναι η εύρεση της μικρότερης δυνατής τοπολογίας (ως προς τη σχέση του υποσυνόλου). Βέβαια ψάχνοντας γενικά και αόριστα την «μικρότερη» τοπολογία δεν έχει ιδιαίτερο νόημα - η τετριμμένη τοπολογία $\{\emptyset, X\}$ είναι τοπολογία. Αυτό που θα αναζητήσουμε είναι η μικρότερη τοπολογία που περιέχει τα στοιχεία ενός $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(X)$.

**Πρόταση 1.4:** Έστω $X$ ένα μη κενό σύνολο και $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Υπάρχει τοπολογία $\mathfrak{t}$ του $X$ που περιέχεται (ως υποσύνολο) σε όλες τις άλλες τοπολογίες του $X$ που είναι υπερσύνολα του $\mathcal{C}$.

*Απόδειξη:* Θεωρούμε το σύνολο:

$$\mathcal{S} = \{\mathfrak{T} \subseteq \mathcal{P}(X) \mid \mathfrak{T} \text{ είναι τοπολογία του } X \text{ και } \mathcal{C} \subseteq \mathfrak{T}\} \neq \emptyset \text{ (αφού } \mathcal{P}(X) \in \mathcal{S})$$

καθώς επίσης και την τομή:

$$\mathfrak{t} = \bigcap \mathcal{S}$$

Είναι στοιχειώδες κανείς να ελέγξει ότι η $\mathfrak{t}$ είναι πράγματι τοπολογία - η τομή οσοδήποτε μεγάλου πλήθους τοπολογιών είναι τοπολογία. Οπότε, εξ ορισμού της $\mathfrak{t}$, για οποιαδήποτε άλλη τοπολογία $\mathfrak{T} \supseteq \mathcal{C}$ του $X$, $\mathfrak{t} \subseteq \mathfrak{T}$.

□

Όσον αφορά τα κλειστά σύνολα στους τοπολογικούς χώρους (όπως και στους μετρικούς), γνωρίζοντας τα ανοικτά σύνολα, ορίσαμε φυσιολογικά τα κλειστά. Ένα σύνολο $F$ λέγεται κλειστό εάν το $F^c = X \backslash F$ είναι ανοικτό. Γι' αυτά τα κλειστά σύνολα ισχύουν ιδιότητες αντίστοιχες (και όχι ίδιες) με τα ανοικτά σύνολα. Χαρακτηριστική είναι η ακόλουθη πρόταση:

**Πρόταση 1.5:** Σε έναν τοπολογικό χώρο $(X, \mathfrak{T})$ συμβολίζουμε:

$$\mathfrak{F} = \{F \subseteq X \mid F \text{ κλειστό}\}$$

Τότε:

i. $\emptyset, X \in \mathfrak{F}$

ii. Εάν $n \in \mathbb{N}$ και $\{F_i\}_{i=1}^n \subseteq \mathfrak{F}$, τότε $\bigcup_{i=1}^n F_i \in \mathfrak{F}$

iii. Εάν $I$ είναι ένα αυθαίρετο σύνολο δεικτών και $\{F_i\}_{i \in I} \subseteq \mathfrak{F}$, τότε $\bigcap_{i \in I} F_i \in \mathfrak{F}$

*Απόδειξη:* Για το i.: Έχουμε:

$$\emptyset \in \mathfrak{T} \Rightarrow \emptyset^c = X \in \mathfrak{F}$$
$$X \in \mathfrak{T} \Rightarrow X^c = \emptyset \in \mathfrak{F}$$

Για τα ii. και iii.: Εφαρμόζουμε τον κανόνα de Morgan για τις ενώσεις και τις τομές αντίστοιχα.

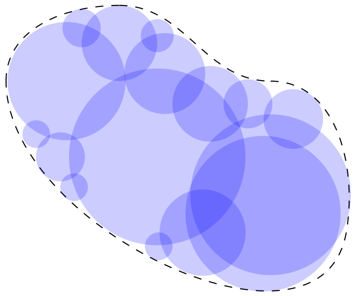
□

## 1.2 Βάσεις και υποβάσεις μίας τοπολογίας

Στους διάφορους μετρικούς χώρους $(X, \varrho)$ υπάρχει μια οικογένεια συνόλων $\mathcal{B} \subseteq \mathfrak{T}_\varrho$ από «εύχρηστα» ανοικτά σύνολα για την περιγραφή της τοπολογίας. Για παράδειγμα, η οικογένεια των ανοικτών μπαλών του $(X, \varrho)$ είναι τέτοιου είδους σύνολο.

Για να γίνει περισσότερο κατανοητή αυτή η έννοια «χρησιμότητας», υπενθυμίζουμε την παρακάτω συνεπαγωγή (σε μετρικούς χώρους):

$$A \text{ ανοικτό } \Leftrightarrow \exists \big\{B(x, \varepsilon_x)\big\}_x \text{ με } A = \bigcup_x B(x, \varepsilon_x)$$



Διατυπώνοντας το ίδιο, αλλά με κάπως διαφορετικό τρόπο, έχουμε την ακόλουθη πρόταση:

**Πρόταση 1.6:** Έστω $(X, \varrho)$ ένας μετρικός χώρος. Οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες:

i. $\forall A \in \mathfrak{T}, \forall x \in A, \exists B(x, \varepsilon_x)$ τέτοιο ώστε $x \in B(x, \varepsilon_x)$ και $B(x, \varepsilon_x) \subseteq A$

ii. Κάθε ανοικτό σύνολο γράφεται ως ένωση ανοικτών μπαλών.

Γενικά λοιπόν, στους μετρικούς χώρους υπάρχουν σύνολα (οι ανοικτές μπάλες) που κατασκευάζουν όλα τα ανοικτά σύνολα. Την ίδια κατάσταση θα θέλαμε να μεταφέρουμε, κατά κάποιον τρόπο, στα ανοικτά σύνολα μιας τυχαίας (εν γένει μη μετρικοποιήσιμης) τοπολογίας. Δίνουμε λοιπόν τον ακόλουθο ορισμό:

**Ορισμός 1.9: (Βάση μιας τοπολογίας).** Έστω $(X, \mathfrak{T})$ ένας τοπολογικός χώρος. Ένα σύνολο $\mathcal{B} \subseteq \mathfrak{T}$ λέγεται βάση της τοπολογίας $\mathfrak{T}$ εάν και μόνο αν ισχύει η ακόλουθη συνθήκη:

$$\ll \text{Κάθε } A \in \mathfrak{T} \text{ γράφεται ως ένωση συνόλων της οικογένειας } \mathcal{B} \gg$$

Ο ορισμός είναι σαφώς επηρεασμένος από τους μετρικούς χώρους. Λαμβάνοντας την Πρόταση 1.6 υπόψη, έχουμε την παρακάτω παρατήρηση:

**Παρατήρηση 1.6:** Έστω $(X, \mathfrak{T})$ ένας τοπολογικός χώρος και $\mathcal{B} \subseteq \mathfrak{T}$. Η οικογένεια $\mathcal{B}$ είναι βάση της τοπολογίας εάν και μόνο αν:

$$\forall A \in \mathfrak{T}, \ \forall x \in A, \ \exists B_x \in \mathcal{B} \text{ τέτοιο ώστε } x \in B_x \text{ και } B_x \subseteq A$$

*Απόδειξη:* $(\Rightarrow)$ Υποθέτουμε ότι η $\mathcal{B}$ είναι βάση για την τοπολογία $\mathfrak{T}$. Έστω $A \in \mathfrak{T}$ τυχόν ανοικτό σύνολο και $x \in A$. Επειδή η $\mathcal{B}$ είναι βάση για την τοπολογία, υπάρχει αυθαίρετα μεγάλο πλήθος συνόλων $\mathcal{B} \ni B_i, \ i \in I$ για τα οποία αληθεύει:

$$A = \bigcup_{i \in I} B_i$$

Εξ ορισμού τώρα της ένωσης, υπάρχει δείκτης $j_x \in I$ για τον οποίον $x \in B_{j_x}$, δηλαδή:

$$x \in B_{j_x} \subseteq \bigcup_{i \in I} B_i = A, \ \{B_i\}_{i \in I} \subseteq \mathcal{B}$$

$(\Leftarrow)$ Υποθέτουμε ότι:

$$\forall A \in \mathfrak{T}, \ \forall x \in A, \ \exists B_x \in \mathcal{B} \text{ τέτοιο ώστε } x \in B_x \text{ και } B_x \subseteq A$$

Η ιδιότητα αυτή άμεσα δίνει ότι $\bigcup_{x\in A} B_x \supseteq A$ (διότι η ένωση γίνεται για κάθε $x \in A$, και $x \in B_x$). Επιπλέον $\bigcup_{x\in A} B_x \subseteq A$ (διότι $B_x \subseteq A$ για κάθε $x$). Ισχύει λοιπόν η ισότητα:

$$\bigcup_{x\in A} B_x = A$$

□

■ **Παράδειγμα 1.3:**

- Έστω $(X, \varrho)$ ένας μετρικός χώρος. Το σύνολο:

  $$\mathcal{B} = \{B(x,r) \mid x \in X,\ r > 0\}$$

  είναι βάση της τοπολογίας $\mathfrak{T}_\varrho$.

- Έστω $(X, \mathfrak{T})$ ένας τοπολογικός χώρος και $\mathcal{B}$ μια βάση της τοπολογίας. Κάθε σύνολο $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}' \subseteq \mathfrak{T}$ είναι βάση της τοπολογίας, και ειδικότερα η $\mathfrak{T}$ είναι βάση του εαυτού της. Γενικά λοιπόν η ύπαρξη «μεγάλων» βάσεων δεν έχει ιδιαίτερο ενδιαφέρον και γι' αυτό θα επικεντρωνόμαστε στην εύρεση της «μικρότερης» βάσης (ως προς τη σχέση του υποσυνόλου).

- Έστω $(X, \mathfrak{T}_\delta)$ με $\mathfrak{T}_\delta = \mathcal{P}(X)$ να είναι η διακριτή τοπολογία. Σε αυτήν την τοπολογία κάθε υποσύνολο του $X$ είναι ανοικτό, οπότε η οικογένεια:

  $$\mathcal{B} = \big\{\{x\} \mid x \in X\big\}$$

  αποτελεί βάση της $\mathfrak{T}_\delta$. Μάλιστα αυτή είναι η μικρότερη δυνατή βάση ως προς τη σχέση του υποσυνόλου - κάθε $\{x\}$ είναι ανοικτό και ο μόνος τρόπος να «παραχθεί» από μια βάση είναι να βρίσκεται ήδη στη βάση.

■

Στους μετρικούς χώρους μπορούμε να δουλέψουμε και κάπως αντίστροφα. Δοθείσης της οικογένειας των ανοικτών μπαλών, κανείς μπορεί να κατασκευάσει τη (μοναδική) τοπολογία της οποίας είναι βάση. Αυτό γίνεται με τον εξής τρόπο, ορίζοντας:

$$\mathfrak{T} = \left\{ \bigcup_{x\in\mathcal{X}} \bigcup_{\varepsilon\in\mathcal{E}} B(x,\varepsilon) \;\middle|\; \mathcal{X} \subseteq X,\ \mathcal{E} \subseteq (0,\infty) \right\}$$

Γενικά όμως, εάν μας δοθεί ένα σύνολο $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$, μπορεί να κατασκευαστεί κατάλληλη τοπολογία της οποίας να είναι βάση; Η απάντηση είναι αρνητική.

Για παράδειγμα, σε κάθε τοπολογία $\mathfrak{T}$ το $X$ είναι ανοικτό σύνολο, οπότε θα πρέπει να καλύπτεται από στοιχεία μιας βάσης $\mathcal{B}$. Επομένως η $\mathcal{B}$ δεν είναι τυχαία οικογένεια, αλλά κάλυψη του $X$:

$$X = \bigcup \mathcal{B} = \bigcup_{B\in\mathcal{B}} B$$

Κάθε «υποψήφιο» σύνολο στο να αποτελέσει βάση μιας τοπολογίας πρέπει να είναι κάλυψη του $X$.

Ας δούμε και μια άλλη απαίτηση για μια βάση. Δοθέντων δύο συνόλων $A, C \in \mathcal{B}$ σε μια βάση μιας τοπολογίας $\mathfrak{T}$, η τομή $A \cap C$ είναι ανοικτό σύνολο. Οπότε, για κάθε $x \in A \cap C$ υπάρχει $B_x \in \mathcal{B}$ τέτοιο ώστε $x \in B_x$ και $B_x \subseteq A \cap C$ (σύμφωνα φυσικά με την Παρατήρηση 1.6).

Κανείς μπορεί να συνεχίσει να βρίσκει διάφορες ιδιότητες που πρέπει να ικανοποιούνται από ένα σύνολο $\mathcal{B}$, εάν ευελπιστούμε ότι μπορεί να αποτελέσει βάση μιας τοπολογίας. Το παρακάτω θεώρημα μας δείχνει ότι οι δύο προηγούμενες είναι αρκετές.

**Θεώρημα 1.2:** Έστω $X \neq \emptyset$ και $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Η $\mathcal{B}$ είναι βάση μιας (μοναδικής) τοπολογίας $\mathfrak{T}$ εάν και μόνο αν:

i. Το $\mathcal{B}$ είναι κάλυψη του $X$, δηλαδή $X = \bigcup \mathcal{B}$ (αφού $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$).

ii. $\forall A, C \in \mathcal{B}$, $\forall x \in A \cap C$, $\exists B_x \in \mathcal{B}$ τέτοιο ώστε $x \in B_x$ και $B_x \subseteq A \cap C$.

*Απόδειξη:* ($\Rightarrow$) Για το i.: Έστω $\mathcal{B}$ βάση μιας τοπολογίας $\mathfrak{T}$. Τότε $X \in \mathfrak{T}$ κι επομένως υπάρχει κάποιο πλήθος από σύνολα της $\mathcal{B}$ που κατασκευάζουν (μέσω ενώσεων) το $X$. Ειδικότερα, $\bigcup \mathcal{B} \supseteq X$ κι επειδή $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ έπεται τελικά ότι $\bigcup \mathcal{B} = X$.

Για το ii.: Εφαρμόζουμε την Παρατήρηση 1.6 για το ανοικτό σύνολο $A \cap C$.

($\Leftarrow$) Ορίζουμε το σύνολο:

$$\mathfrak{T} = \left\{ \bigcup \mathcal{C} \mid \mathcal{C} \subseteq \mathcal{B} \right\}$$

και θα δείξουμε ότι αυτό είναι τοπολογία στον $X$.

Για την πρώτη ιδιότητα της τοπολογίας, $\emptyset = \bigcup \emptyset \in \mathfrak{T}$ κι επιπλέον (από την ιδιότητα i. του θεωρήματος) $X = \bigcup \mathcal{B} \in \mathfrak{T}$.

Για τη δεύτερη ιδιότητα της τοπολογίας, εάν $A, G \in \mathfrak{T}$, τότε:

$$A = \bigcup \mathcal{C} \text{ και } G = \bigcup \mathcal{D}$$

για κάποια υποσύνολα $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ του $\mathcal{B}$. Παρατηρούμε ότι:

$$\begin{aligned} A \cap G &= \left(\bigcup \mathcal{C}\right) \cap \left(\bigcup \mathcal{D}\right) \\ &= \left(\bigcup_{C \in \mathcal{C}} C\right) \cap \left(\bigcup_{D \in \mathcal{D}} D\right) \\ &= \bigcup_{C \in \mathcal{C}} \bigcup_{D \in \mathcal{D}} C \cap D \end{aligned}$$

Λόγω της ιδιότητας ii. του θεωρήματος, υπάρχει $\mathcal{V}(C \cap D) \subseteq \mathcal{B}$ τέτοιο ώστε:

$$C \cap D = \bigcup \mathcal{V}(C \cap D)$$

Οπότε μέχρι τώρα:

$$\begin{aligned} A \cap G &= \bigcup_{C \in \mathcal{C}} \bigcup_{D \in \mathcal{D}} \bigcup \mathcal{V}(C \cap D) \\ &= \bigcup \underbrace{\left(\bigcup_{C \in \mathcal{C}} \bigcup_{D \in \mathcal{D}} \mathcal{V}(C \cap D)\right)}_{\subseteq \mathcal{B}} \end{aligned}$$

Αυτά δείχνουν ότι η τομή $A \cap G$ γράφεται ως ένωση στοιχείων της $\mathcal{B}$ και συνεπώς ότι $A \cap G \in \mathfrak{T}$.

$\mathfrak{T}$ Κανονικά ο έλεγχος της δεύτερης ιδιότητας της τοπολογίας θα έπρεπε να γίνει για τυχόν πεπερασμένο πλήθος συνόλων. Είναι ισοδύναμο κανείς να ελέγξει μόνο την τομή δύο συνόλων, αφού επαγωγικά το αποτέλεσμα μεταφέρεται στην φαινομενικά πιο ≪γενική≫ περίπτωση. Από εδώ και στο εξής, πολλές φορές θα ελέγχουμε τη δεύτερη ιδιότητα μόνο σε δύο σύνολα.

Για την τρίτη ιδιότητα της τοπολογίας, θεωρούμε $\mathcal{G} \subseteq \mathfrak{T}$ και θα εξετάσουμε αν η ένωση $\bigcup \mathcal{G}$ ανήκει στο $\mathfrak{T}$. Κατ' αρχάς, επειδή $\mathcal{G} \subseteq \mathfrak{T}$, κάθε $G \in \mathcal{G}$ γράφεται ως ένωση στοιχείων της $\mathcal{B}$. Δηλαδή $G = \bigcup \mathcal{V}(G)$ με $\mathcal{V}(G) \subseteq \mathcal{B}$. Επομένως:

$$\begin{aligned}\bigcup \mathcal{G} &= \bigcup_{G\in\mathcal{G}} \bigcup \mathcal{V}(G) \\ &= \bigcup \underbrace{\left(\bigcup_{G\in\mathcal{G}} \mathcal{V}(G)\right)}_{\subseteq \mathcal{B}}\end{aligned}$$

το οποίο δείχνει ότι κάθε ένωση στοιχείων της $\mathfrak{T}$ ανήκει στην $\mathfrak{T}$.

Τελικά αποδεικνύεται και το αντίστροφο. Παρατηρήστε ότι δεν έχουμε κάνει αναφορά στη μοναδικότητα της τοπολογίας. Αυτό δεν προκύπτει από το θεώρημα και ουσιαστικά χρειάζεται αυτόνομη απόδειξη.

**Λήμμα 1.1:** Εάν $\mathcal{B}$ είναι βάση μιας τοπολογίας $\mathfrak{T}$ του $X$, τότε δεν είναι βάση καμμίας άλλης τοπολογίας. ■

*Απόδειξη του λήμματος:* Κατ' αρχάς είδαμε ότι η $\mathcal{B}$ είναι βάση της τοπολογίας:

$$\mathfrak{T} = \left\{ \bigcup \mathcal{C} \mid \mathcal{C} \subseteq \mathcal{B} \right\}$$

Ας υποθέσουμε ότι $\mathfrak{T}'$ είναι μια άλλη τοπολογία της οποίας η $\mathcal{B}$ είναι επίσης βάση. Από τον ορισμό της τοπολογίας, παρατηρούμε ότι θα πρέπει να αληθεύει ο εγκλεισμός $\mathfrak{T} \subseteq \mathfrak{T}'$ (αφού οι αυθαίρετα μεγάλες ενώσεις στοιχείων της $\mathcal{B}$ ανήκουν στην τοπολογία $\mathfrak{T}'$ και το σύνολο αυτών των ενώσεων είναι η $\mathfrak{T}$). Εάν ο εγκλεισμός είναι γνήσιος, θα μπορεί να βρεθεί $A \in \mathfrak{T}' \setminus \mathfrak{T}$, κι επειδή η $\mathcal{B}$ είναι βάση της $\mathfrak{T}'$:

$$A = \bigcup \mathcal{C} \text{ για κάποιο } \mathcal{C} \subseteq \mathcal{B}$$

Από τον ορισμό της $\mathfrak{T}$ έπεται ότι $A \in \mathfrak{T}$, το οποίο είναι άτοπο.

△

Τώρα πλέον έχουμε ολοκληρώσει την απόδειξη.

□

■ **Παράδειγμα 1.4:** Θεωρούμε τον χώρο $X = \mathbb{R}$ και το σύνολο:

$$\mathcal{B}_S = \left\{ (a, b] \mid a, b \in \mathbb{R},\ a < b \right\}$$

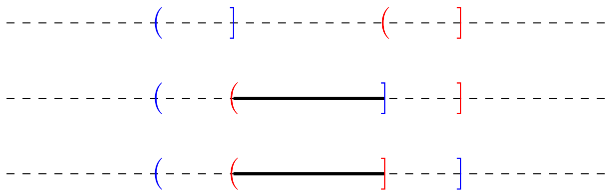
Η $\mathcal{B}_S$ είναι βάση μιας μοναδικής τοπολογίας, σύμφωνα με το Θεώρημα 1.2, αφού:

- Η $\mathcal{B}_S$ είναι κάλυψη του $\mathbb{R}$ (αφού $\mathbb{R} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (-n, n] \subseteq \bigcup \mathcal{B}_S$).
- Ας θεωρήσουμε δύο σύνολα $A, C \in \mathcal{B}_S$. Αντί να δείξουμε τη δεύτερη συνθήκη του Θεωρήματος 1.2, θα δείξουμε κάτι αρκετά ισχυρότερο, που ισχύει στην περίπτωσή μας: το ίδιο το σύνολο $A \cap C$ ανήκει στην οικογένεια $\mathcal{B}_S$ ή είναι το κενό σύνολο.

  Πράγματι, εάν $A = (a_1, b_1]$ και $C = (a_2, b_2]$, υπάρχουν οι εξής περιπτώσεις: εάν $a_i < b_i \leqslant a_j < b_j$, τότε $(a_1, b_1] \cap (a_2, b_2] = \emptyset$. Εάν $a_i \leqslant a_j \leqslant b_i \leqslant b_j$ ή $a_i \leqslant a_j < b_j \leqslant b_i$, τότε αντίστοιχα:

  $$(a_i, b_i] \cap (a_j, b_j] = (a_j, b_i] \in \mathcal{B}_S \text{ ή } (a_i, b_i] \cap (a_j, b_j] = (a_j, b_j] \in \mathcal{B}_S$$

Τους δείκτες $i \neq j$ τους χρησιμοποιούμε για να αποφύγουμε την ανάλυση συμμετρικών περιπτώσεων. Επίσης, οι διακεκριμένες περιπτώσεις για το πώς μπορούν να τέμνονται τα δύο σύνολα $(a_1, b_1]$, $(a_2, b_2]$ προκύπτουν διατάσσοντας με τους διάφορους τρόπους τα $a_1, a_2, b_1, b_2$ στην πραγματική ευθεία (η διάταξη του $\mathbb{R}$ είναι ολική).



Θεωρούμε $\mathfrak{T}_S$ την μοναδική τοπολογία της οποίας η $\mathcal{B}_S$ είναι βάση. Παρατηρήστε ότι η $\mathfrak{T}_S$ έχει τη μορφή:

$$\mathfrak{T}_S = \left\{ \bigcup \mathcal{C} \mid \mathcal{C} \subseteq \mathcal{B}_S \right\}$$

Η $\mathfrak{T}_S$ ονομάζεται «τοπολογία των αριστερά ημιάνοικτων διαστημάτων». ■

Η τοπολογία $\mathfrak{T}_S$ είναι μια ενδιαφέρουσα τοπολογία με την οποία θα ασχοληθούμε και αργότερα. Κατ' αρχάς δεν ταυτίζεται με τη συνήθη τοπολογία του $\mathbb{R}$, όταν αυτόν τον βλέπουμε σαν μετρικό χώρο με τη μετρική $\varrho(x, y) = |x - y|$. Πράγματι, $(0, 1] \in \mathfrak{T}_S \setminus \mathfrak{T}_\varrho$, οπότε $\mathfrak{T}_S \nsubseteq \mathfrak{T}_\varrho$.

Ένα από τα πράγματα που μπορεί κανείς να πει για αυτήν την νέα τοπολογία είναι ο αντίστροφος εγκλεισμός $\mathfrak{T}_S \supseteq \mathfrak{T}_\varrho$. Ας επιλέξουμε τυχόν $A \in \mathfrak{T}_\varrho$ κι ας το γράψουμε στη μορφή:

$$A = \bigcup_{i \in I} (a_i, b_i), \text{ για αυθαίρετο σύνολο δεικτών } I$$

Η μορφή αυτή είναι δυνατόν να διατυπωθεί διότι η οικογένεια:

$$\begin{aligned} \mathcal{B} &= \{B(x, \varepsilon) \mid x \in \mathbb{R},\ \varepsilon > 0\} = \left\{ B\left(\frac{a+b}{2}, \frac{|a-b|}{2}\right) \;\middle|\; a, b \in \mathbb{R},\ a < b \right\} \\ &= \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R},\ a < b\} \end{aligned}$$

είναι βάση της τοπολογίας $\mathfrak{T}_\varrho$. Κανείς μπορεί να δείξει ότι κάθε ανοικτό σύνολο $(a, b)$ μπορεί να γραφεί ως ένωση αριστερά ημιάνοικτων διαστημάτων, και μάλιστα:

$$(a, b) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left(a, b - \frac{1}{n}\right]$$

Επομένως το ανοικτό σύνολο $A \in \mathfrak{T}_\varrho$ μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$A = \bigcup_{i \in I} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{\left(a_i, b_i - \frac{1}{n}\right]}_{\in \mathcal{B}_S}$$

και κατ' επέκταση είναι ένωση στοιχείων της $\mathcal{B}_S$. Αυτό δείχνει ότι $A \in \mathfrak{T}_S$ και ότι $\mathfrak{T}_\varrho \subseteq \mathfrak{T}_S$.

Μία έννοια συναφής με αυτήν της βάσης είναι η έννοια της υποβάσης.

**Ορισμός 1.10: (Υποβάσεις).** Έστω $(X, \mathfrak{T})$ ένας τοπολογικός χώρος. Το σύνολο $\mathcal{C} \subseteq \mathfrak{T}$ θα καλείται υποβάση της τοπολογίας $\mathfrak{T}$ εάν και μόνο αν το σύνολο:

$$\mathcal{B} = \left\{ \bigcap_{i=1}^{n} C_i \;\middle|\; n \in \mathbb{N},\ \{C_i\}_{i=1}^{n} \subseteq \mathcal{C} \right\} \cup \{X\}$$

είναι βάση της $\mathfrak{T}$.

Δοθέντος ενός υποσυνόλου $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(X)$, υπάρχει τοπολογία της οποίας η $\mathcal{C}$ είναι υποβάση; Η απάντηση είναι καταφατική, κι αυτό θα το δείξουμε με το ακόλουθο θεώρημα:

**Θεώρημα 1.3:** Έστω $X \neq \emptyset$ ένα σύνολο και $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Το σύνολο:

$$\mathcal{B} = \left\{ \bigcap_{i=1}^{n} C_i \;\middle|\; n \in \mathbb{N},\ \{C_i\}_{i=1}^{n} \subseteq \mathcal{C} \right\} \cup \{X\}$$

είναι πάντοτε βάση μοναδικής τοπολογίας.

*Απόδειξη:* Εδώ θα γίνει φυσικά χρήση του Θεωρήματος 1.2. Η $\mathcal{B}$ είναι με τετριμμένο τρόπο κάλυψη του $X$, αφού $X \in \mathcal{B}$. Η δεύτερη ιδιότητα είναι κι αυτή κάπως άμεση, αφού για κάθε δύο σύνολα $C, G \in \mathcal{B}$ μπορούμε να γράψουμε:

$$C = \bigcap_{i=1}^{n} C_i \text{ και } G = \bigcap_{j=1}^{m} G_j$$

οπότε:

$$C \cap G = \left( \bigcap_{i=1}^{n} C_i \right) \cap \left( \bigcap_{j=1}^{m} G_j \right)$$

κι αν ορίσουμε την πεπερασμένη οικογένεια $\mathcal{D} = \{C_i\}_{i=1}^{n} \cup \{G_j\}_{j=1}^{m}$, έχουμε:

$$C \cap G = \bigcap \mathcal{D} \in \mathcal{B}$$

□

Αναδιατυπώνοντας το παραπάνω θεώρημα, έχουμε ότι κάθε $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(X)$ είναι υποβάση κάποιας τοπολογίας.

**Παρατήρηση 1.7:** Έστω $(X, \mathfrak{T})$ τοπολογικός χώρος και $\mathcal{B}$ μια βάση της τοπολογίας. Η $\mathcal{B}$ είναι υποβάση της $\mathfrak{T}$.

*Απόδειξη:* Το σύνολο:

$$\mathcal{B}' = \left\{ \bigcap_{i=1}^{n} B_i \;\middle|\; n \in \mathbb{N},\ \{B_i\}_{i=1}^{n} \subseteq \mathcal{B} \right\} \cup \{X\} \supseteq \mathcal{B}$$

είναι βάση της τοπολογίας $\mathfrak{T}$, από το Παράδειγμα 1.3 (δεύτερο •).

□

■ **Παράδειγμα 1.5:** Για $X = \mathbb{R}$, θεωρούμε το σύνολο:

$$\mathcal{C} = \big\{(-\infty, b) \mid b \in \mathbb{R}\big\} \cup \big\{(a, \infty) \mid a \in \mathbb{R}\big\}$$

Το $\mathcal{C}$ είναι υποβάση της τοπολογίας $\mathfrak{T}_\varrho$, όπου $\varrho$ είναι η συνήθης μετρική.

Πράγματι, παρατηρούμε ότι οι «πεπερασμένες τομές» της $\mathcal{C}$, δηλαδή το σύνολο:

$$\left\{ \bigcap_{i=1}^{n} C_i \;\middle|\; n \in \mathbb{N},\ \{C_i\}_{i=1}^{n} \subseteq \mathcal{C} \right\}$$

περιέχει μόνο στοιχεία της τοπολογίας $\mathfrak{T}_\varrho$ (δηλαδή είναι υποσύνολο της $\mathfrak{T}_\varrho$). Επειδή επιπλέον:

$$\mathcal{B}' = \left\{ \bigcap_{i=1}^{n} C_i \;\middle|\; n \in \mathbb{N},\ \{C_i\}_{i=1}^{n} \subseteq \mathcal{C} \right\} \cup \{\mathbb{R}\} = \mathcal{C} \cup \mathcal{B} \cup \{\mathbb{R}\} \supseteq \mathcal{B}$$

(όπου $\mathcal{B}$ είναι η οικογένεια των ανοικτών μπαλών του $(\mathbb{R}, \varrho)$), ξανά από το Παράδειγμα 1.3 (δεύτερο •) έπεται ότι η $\mathcal{B}'$ είναι βάση της $\mathfrak{T}_\varrho$. ■

## 1.3 Στοιχειώδης γεωμετρία των ανοικτών συνόλων

Έχοντας την έννοια των ανοικτών συνόλων, είναι δυνατόν να έχουμε μία περισσότερο γεωμετρική εποπτεία, ακόμη και σε αρκετά αφηρημένους χώρους. Ακόμη και χωρίς μετρική ή άλλες γεωμετρικές ιδιότητες, θα δούμε ότι πολλά αποτελέσματα είναι δυνατόν να αποδειχθούν.

Στη συνέχεια λοιπόν θα ορίσουμε τις έννοιες των εσωτερικών των συνόλων, των κλειστών θηκών και διάφορες άλλες συναφείς έννοιες, συνεχίζοντας κατά κάποιον τρόπο την «γενίκευση» της πραγματικής ανάλυσης.

**Ορισμός 1.11:** (Εσωτερικό συνόλου και κλειστή θήκη) Έστω $(X, \mathfrak{T})$ ένας τοπολογικός χώρος. Για κάθε $A \subseteq X$ ορίζουμε τα εξής βοηθητικά σύνολα:

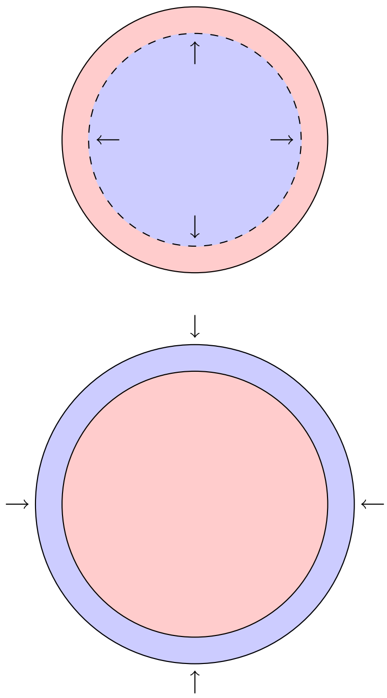
$$\mathcal{E}_A = \{G \in \mathfrak{T} \mid G \subseteq A\} \text{ και } \mathcal{F}_A = \{F \subseteq X \mid F \text{ κλειστό και } A \subseteq F\}$$

**I.** Ορίζουμε ως εσωτερικό του $A$ το σύνολο:

$$A^\circ := \bigcup \mathcal{E}_A$$

**II.** Ορίζουμε ως κλειστή θήκη του $A$ το σύνολο:

$$\overline{A} := \bigcap \mathcal{F}_A$$



*Προσέγγιση του εσωτερικού με ανοικτά σύνολα, «από μέσα». Επίσης, προσέγγιση της θήκης με κλειστά σύνολα, «από έξω».*

Κανείς μπορεί να ελέγξει ότι σε έναν τοπολογικό μετρικό χώρο οι γνωστοί ορισμοί από την πραγματική ανάλυση για τα εσωτερικά και τις θήκες είναι ισοδύναμοι με αυτούς που μόλις αναφέραμε.

Εκτός από το ότι οι ορισμοί «μοιάζουν» με τους αντίστοιχους της πραγματικής, διάφορες σχέσεις από τους μετρικούς χώρους μεταφέρονται αυτούσια και στους τοπολογικούς, όσον αφορά τα εσωτερικά συνόλων και τις θήκες τους.

**Πρόταση 1.7:** Έστω $(X, \mathfrak{T})$ τοπολογικός χώρος και $A, B \subseteq X$. Τότε:

i. $A^\circ \subseteq A$

ii. $A^\circ = A \Leftrightarrow A \in \mathfrak{T}$ (Ένας ακόμη χαρακτηρισμός των ανοικτών συνόλων)

iii. $(A^\circ)^\circ = A^\circ$ (Δεν έχουν νόημα «πολλαπλά» εσωτερικά)

iv. $A \subseteq B \Rightarrow A^\circ \subseteq B^\circ$ (Το εσωτερικό διατηρεί την μονοτονία)

v. $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$ (Το εσωτερικό συμπεριφέρεται καλά στις τομές)

vi. $(A \cup B)^\circ \supseteq A^\circ \cup B^\circ$ (Το εσωτερικό συμπεριφέρεται σχετικά καλά στις ενώσεις)

*Απόδειξη:* Για το i., για κάθε $G \in \mathcal{E}_A$ αληθεύει $G \subseteq A$. Επομένως, $\bigcup \mathcal{E}_A \subseteq A$.

Για το ii.: ($\Rightarrow$) Το $A^\circ$ είναι ανοικτό ως ένωση ανοικτών. Επομένως, επειδή $A^\circ = A$ έχουμε ότι και το $A$ είναι ανοικτό.

($\Leftarrow$) Εάν το ίδιο το $A$ είναι ανοικτό, τότε $A \in \mathcal{E}_A$. Οπότε $\bigcup \mathcal{E}_A \supseteq A$ και σε συνδυασμό με το i., $A^\circ = A$.

Για το iii.: Το $A^\circ$ είναι ανοικτό σύνολο, επομένως το ii. δίνει $(A^\circ)^\circ = A^\circ$.

Για το iv., εάν $G$ είναι ένα ανοικτό σύνολο με $G \subseteq A$, τότε $G \subseteq B$. Οπότε $\mathcal{E}_A \subseteq \mathcal{E}_B$ και συνεπώς:

$$A \subseteq B \Rightarrow \bigcup \mathcal{E}_A \subseteq \bigcup \mathcal{E}_B \Rightarrow A^\circ \subseteq B^\circ$$

Για το v.: Επειδή $A^\circ \subseteq A,\ B^\circ \subseteq B$, το σύνολο $A^\circ \cap B^\circ$ περιέχεται στην τομή $A \cap B$ (ως υποσύνολο). Είναι επίσης ανοικτό, οπότε:

$$A^\circ \cap B^\circ \in \mathcal{E}_{A \cap B} \Rightarrow A^\circ \cap B^\circ \subseteq \bigcup \mathcal{E}_{A \cap B} = (A \cap B)^\circ$$

Για τον αντίστροφο εγκλεισμό, παρατηρούμε ότι το $(A \cap B)^\circ$ είναι υποσύνολο των $A^\circ, B^\circ$ (αφού το εσωτερικό διατηρεί την μονοτονία), και συνεπώς $(A \cap B)^\circ \subseteq A^\circ \cap B^\circ$.

Για το vi.: Επειδή $A^\circ \subseteq A,\ B^\circ \subseteq B$, το σύνολο $A^\circ \cup B^\circ$ περιέχεται στην ένωση $A \cup B$ (ως υποσύνολο). Είναι επίσης ανοικτό, οπότε $A^\circ \cup B^\circ \in \mathcal{E}_{A \cup B} \Rightarrow A^\circ \cup B^\circ \subseteq (A \cup B)^\circ$. Η ισότητα εδώ δεν ισχύει πάντα, όπως θα δούμε με το επόμενο παράδειγμα.

□

■ **Παράδειγμα 1.6:** Στο $\mathbb{R}$ (όταν αυτό το βλέπουμε ως τον συνήθη τοπολογικό μετρικό χώρο) υπάρχουν σύνολα $A, B \subseteq \mathbb{R}$ για τα οποία:

$$(A \cup B)^\circ \supset A^\circ \cup B^\circ$$

Πράγματι, εάν $A = \mathbb{Q}$ και $B = \mathbb{Q}^c$, τότε:

$$(A \cup B)^\circ = \mathbb{R} \supset \emptyset = A^\circ \cup B^\circ$$

■

Αντίστοιχη πρόταση της Πρότασης 1.7 έχουμε και για τις κλειστές θήκες.

**Πρόταση 1.8:** Έστω $(X, \mathfrak{T})$ τοπολογικός χώρος και $A, B \subseteq X$. Τότε:

i. $A \subseteq \overline{A}$

ii. $A = \overline{A} \Leftrightarrow A$ κλειστό (Ένας χαρακτηρισμός των κλειστών συνόλων)

iii. $\overline{(\overline{A})} = \overline{A}$ (Δεν έχουν νόημα «πολλαπλές» θήκες)

iv. $A \subseteq B \Rightarrow \overline{A} \subseteq \overline{B}$ (Η θήκη διατηρεί την μονοτονία)

v. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ (Η θήκη συμπεριφέρεται καλά στις ενώσεις)

vi. $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$ (Η θήκη συμπεριφέρεται σχετικά καλά στις τομές)

*Απόδειξη:* Οι συλλογισμοί στην απόδειξη είναι ανάλογοι αυτών στην προηγούμενη πρόταση. Ας τους ξαναγράψουμε όπως και να 'χει, για χάρη πληρότητας.

Για το i., επειδή $A \subseteq F$ για κάθε $F \in \mathcal{F}_A$, έχουμε $A \subseteq \bigcap \mathcal{F}_A$.

Για το ii.: ($\Rightarrow$) Το $\overline{A}$ είναι κλειστό σύνολο ως τομή κλειστών, επομένως το $A = \overline{A}$ θα είναι κι αυτό κλειστό.

($\Leftarrow$) Εάν το $A$ είναι κλειστό, θα ανήκει στην οικογένεια των $\mathcal{F}_A$. Οπότε $A \supseteq \bigcap \mathcal{F}_A$ και σε συνδυασμό με το i. έχουμε την ισότητα.

Για το iii., επειδή το $\overline{A}$ είναι κλειστό σύνολο, από το ii. έχουμε τη σχέση $\overline{(\overline{A})} = \overline{A}$.

Για το iv., χρησιμοποιώντας το i. έχουμε $A \subseteq B \subseteq \overline{B}$, οπότε $\overline{B} \in \mathcal{F}_A$. Κατ' επέκταση:

$$\bigcap \mathcal{F}_A \subseteq \overline{B} \Rightarrow \overline{A} \subseteq \overline{B}$$

Για το v., και πάλι θα δείξουμε τους δύο εγκλεισμούς. Κατ' αρχάς, $A \subseteq \overline{A},\ B \subseteq \overline{B}$, οπότε $A \cup B \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}$. Μάλιστα το σύνολο $\overline{A} \cup \overline{B}$ είναι κλειστό ως ένωση τέτοιων,, κι άρα $\overline{A} \cup \overline{B} \in \mathcal{F}_{A \cup B}$. Αυτά δείχνουν ότι:

$$\overline{A \cup B} = \bigcap \mathcal{F}_{A \cup B} \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}$$

Για τον αντίστροφο εγκλεισμό, καθένα από τα $\overline{A}, \overline{B}$ είναι υποσύνολα του $\overline{A \cup B}$ (λόγω του ότι η θήκη διατηρεί τη μονοτονία). Επομένως $\overline{A} \cup \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$.

Για το vi., και πάλι λόγο μονοτονίας το $\overline{A \cap B}$ είναι υποσύνολο των $\overline{A}, \overline{B}$. Οπότε $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$. Η ισότητα εδώ δεν ισχύει πάντα, όπως θα δούμε με το επόμενο παράδειγμα.

□

■ **Παράδειγμα 1.7:** Στο $\mathbb{R}$ (όταν αυτό το βλέπουμε ως τον συνήθη τοπολογικό μετρικό χώρο) υπάρχουν σύνολα $A, B \subseteq \mathbb{R}$ για τα οποία:

$$\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$$

Πράγματι, εάν $A = \mathbb{Q}$ και $B = \mathbb{Q}^c$, τότε:

$$\overline{A \cap B} = \emptyset \subset \mathbb{R} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

■

Φαίνεται (κατά κάποιον τρόπο) η θήκη να είναι «δυϊκή» έννοια του εσωτερικού του συνόλου. Η παρακάτω παρατήρηση δείχνει κάπως καλύτερα αυτήν την σχέση.

**Παρατήρηση 1.8:** Έστω $(X, \mathfrak{T})$ ένας τοπολογικός χώρος και $A \subseteq X$. Ισχύουν οι ισοδυναμίες:

$$\begin{aligned} G \in \mathcal{E}_A &\Leftrightarrow G \in \mathfrak{T} \text{ και } G \subseteq A \\ &\Leftrightarrow G^c \text{ κλειστό και } G^c \supseteq A^c \\ &\Leftrightarrow G^c \in \mathcal{F}_{A^c} \end{aligned}$$

**Πρόταση 1.9:** Έστω $(X, \mathfrak{T})$ ένας τοπολογικός χώρος και $A \subseteq X$. Ισχύουν τα ακόλουθα:

i. $\overline{X \backslash A} = X \backslash A^\circ$

ii. $(X \backslash A)^\circ = X \backslash \overline{A}$

*Απόδειξη:* Για το i., γράφουμε:

$$X \backslash A^\circ = (A^\circ)^c = \left(\bigcup \mathcal{E}_A\right)^c = \Big(\bigcup_{G \in \mathcal{E}_A} G\Big)^c = \bigcap_{G \in \mathcal{E}_A} G^c \overset{\star}{=} \bigcap_{G^c \in \mathcal{F}_{A^c}} G^c = \overline{X \backslash A}$$

Στην ισότητα άστρο ($\star$) γίνεται χρήση της Παρατήρησης 1.8.

Για το ii., γράφουμε:

$$X \backslash \overline{A} = (\overline{A})^c = \left(\bigcap \mathcal{F}_A\right)^c = \Big(\bigcap_{F \in \mathcal{F}_A} F\Big)^c = \bigcup_{F \in \mathcal{F}_A} F^c \overset{\star\star}{=} \bigcup_{F^c \in \mathcal{E}_{A^c}} F^c = (X \backslash A)^\circ$$

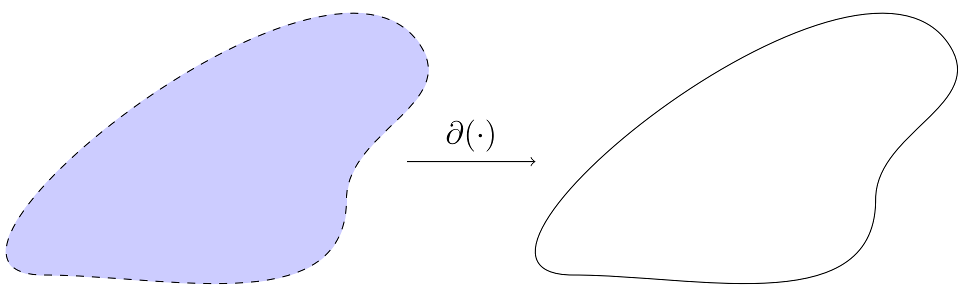
Στην ισότητα διπλό άστρο ($\star\star$) γίνεται ξανά χρήση της Παρατήρησης 1.8.

□

Με τη θήκη ενός συνόλου, μπορούμε να ορίσουμε το σύνορο.

**Ορισμός 1.12:** (Σύνορο συνόλου) Έστω $(X, \mathfrak{T})$ ένας τοπολογικός χώρος και $A \subseteq X$. Ορίζουμε ως σύνορο του $A$ το σύνολο:

$$\partial A = \overline{A} \cap \overline{X \backslash A}$$




Ενδεχομένως κανείς θα ήθελε να ορίσει το σύνορο του συνόλου με κάποιον άλλον τρόπο, για παράδειγμα $\partial A = \overline{A} \backslash A^\circ$. Οι ορισμοί θα δείξουμε ότι εν τέλει είναι ισοδύναμοι, κι ο λόγος που χρησιμοποιούμε τον Ορισμό 1.12 είναι καθαρά για διευκόλυνσή μας όσον αφορά τα εξής δύο πράγματα: Κατ' αρχάς μ' αυτόν τον ορισμό φαίνεται ότι δύο συμπληρωματικά σύνολα έχουν το ίδιο σύνορο, κι επιπλέον φαίνεται ότι το σύνορο είναι κλειστό, ως τομή κλειστών.

**Παρατήρηση 1.9:** Έστω $(X, \mathfrak{T})$ ένας τοπολογικός χώρος και $A \subseteq X$. Αληθεύουν:

- $\partial A = \partial(X \backslash A)$
- Το $\partial A$ είναι κλειστό σύνολο.

**Πρόταση 1.10:** Έστω $(X, \mathfrak{T})$ ένας τοπολογικός χώρος και $A \subseteq X$. Αληθεύουν:

i. $\partial A = \overline{A} \backslash A^\circ$ (Ένας εναλλακτικός ορισμός)

ii. $A^\circ \cup \partial A = \overline{A}$ και $A^\circ \cap \partial A = \emptyset$ (Δηλαδή το εσωτερικό ενός συνόλου και το σύνορό του διαμερίζουν τη θήκη του)

iii. Τα σύνολα $A^\circ, \partial A, (X \backslash A)^\circ$ διαμερίζουν τον χώρο $X$.

*Απόδειξη:* Για το i., γράφουμε:

$$\partial A = \overline{A} \cap \overline{X \backslash A} = \overline{A} \cap (X \backslash A^\circ) = \overline{A} \cap (A^\circ)^c = \overline{A} \backslash A^\circ$$

Για το ii., οι Προτάσεις 1.7, i. και 1.8, i. μας δίνουν ότι $A^\circ \subseteq \overline{A}$. Επομένως έχουμε:

$$\overline{A} = \overline{A} \cup A^\circ = A^\circ \cup (\overline{A} \backslash A^\circ) = A^\circ \cup \partial A$$

(Θυμηθείτε τη σχέση $A \cup B = B \cup (A \backslash B)$). Επιπλέον, η τομή $A^\circ \cap \partial A$ είναι κενή, από το i..

Για το iii., γράφουμε:

$$X = \overline{A} \cup (X \backslash \overline{A}) = A^\circ \cup \partial A \cup (X \backslash A)^\circ$$

Τα $A^\circ, \partial A$ είναι ξένα από το ii.. Επίσης, το $(X \backslash A)^\circ$ είναι ξένο με τα άλλα δύο, αφού το ίδιο είναι ίσο με το $X \backslash \overline{A}$ και η ένωση των άλλων δύο είναι το $\overline{A}$.

□

**Πρόταση 1.11:** Έστω $(X, \mathfrak{T})$ ένας τοπολογικός χώρος και $A, B \subseteq X$. Αληθεύουν:

i. $\partial \emptyset = \partial X = \emptyset$

ii. $A$ κλειστό $\Leftrightarrow \partial A \subseteq A$.

iii. $A$ ανοικτό $\Leftrightarrow \partial A \subseteq A^c$.

iv. $\partial \partial A \subseteq \partial A$

v. $A \cap B \cap \partial(A \cap B) = A \cap B \cap (\partial A \cup \partial B)$ (Αυτή η ιδιότητα είναι αξιοσημείωτη: Γενικά το σύνορο της τομής δύο συνόλων δεν συμπεριφέρεται καλά, αλλά τουλάχιστον στην τομή των συνόλων εμφανίζει μια καλή διάσπαση)

*Απόδειξη:* Για το i. έχουμε $\partial \emptyset = \overline{\emptyset} \backslash \emptyset^\circ = \emptyset \backslash \emptyset = \emptyset$ (γιατί το $\emptyset$ είναι ανοικτό και κλειστό). Επιπλέον, $\partial \emptyset = \partial \emptyset^c = \partial X$.

Για το ii.: ($\Rightarrow$) Έχουμε $A = \overline{A} = A^\circ \cup \partial A \supseteq \partial A$.

($\Leftarrow$) Αντιστρόφως, εάν $\partial A \subseteq A$, τότε $\overline{A} = A^\circ \cup \partial A \subseteq A^\circ \cup A = A$. Λόγω του εγκλεισμού $A \subseteq \overline{A}$ έπεται τελικά η ισότητα. Άρα το $A$ είναι κλειστό.

Για το iii.: Εφαρμόζοντας το ii. για το συμπλήρωμα $A^c$:

$$A \text{ ανοικτό } \Leftrightarrow A^c \text{ κλειστό } \Leftrightarrow \partial A^c \subseteq A^c \Leftrightarrow \partial A \subseteq A^c$$

Για το iv., επειδή το $\partial A$ είναι κλειστό σύνολο, $\partial\partial A \subseteq \partial A$ (λόγω του ii.). Η ισότητα εν γένει δεν αληθεύει, όπως θα δείξουμε με το παράδειγμα που θα ακολουθήσει μετά την απόδειξη.

Για το v.: Κάνοντας «πράξεις» στα δύο μέλη της ισότητας θα καταλήξουμε σε δύο ίσες μορφές. Για το σύνολο αριστερά:

$$\begin{aligned} A\cap B\cap \partial(A\cap B) &= A\cap B\cap \overline{A\cap B}\cap \overline{X\backslash(A\cap B)} \\ &= A\cap B\cap \overline{(A\cap B)^c} \\ &= A\cap B\cap \overline{A^c\cup B^c} \\ &= A\cap B\cap (\overline{A^c}\cup \overline{B^c}) \\ &= (A\cap B\cap \overline{A^c})\cup (A\cap B\cap \overline{B^c}) \quad \boxed{\star} \end{aligned}$$

Για το σύνολο δεξιά:

$$\begin{aligned} A\cap B\cap (\partial A\cup \partial B) &= (A\cap B\cap \partial A)\cup (A\cap B\cap \partial B) \\ &= (A\cap B\cap \overline{A}\cap \overline{X\backslash A})\cup (A\cap B\cap \overline{B}\cap \overline{X\backslash B}) \\ &= (A\cap B\cap \overline{A^c})\cup (A\cap B\cap \overline{B^c}) \quad \boxed{\star} \end{aligned}$$

Επομένως, για τα δύο σύνολα ισχύει τελικά η ισότητα.

□

■ **Παράδειγμα 1.8:** Η ισότητα $\partial\partial A = \partial A$ δεν ισχύει πάντοτε. Εν γένει ισχύει ο εγκλεισμός $\partial\partial A \subseteq \partial A$, και μάλιστα στον συνήθη τοπολογικό μετρικό χώρο του $\mathbb{R}$, για $A = \mathbb{Q}$, έχουμε:

$$\partial\partial\mathbb{Q} = \partial\mathbb{R} = \emptyset \subset \mathbb{R} = \partial\mathbb{Q}$$

■

**Παρατήρηση 1.10:** Οι σχέσεις $\overline{A\cup B} = \overline{A}\cup\overline{B}$ και $(A\cap B)^\circ = A^\circ\cap B^\circ$ ισχύουν για πεπερασμένο πλήθος συνόλων (επαγωγικά κανείς μπορεί από δύο σύνολα να «περάσει» την ιδιότητα σε οσοδήποτε μεγάλο φυσικό πλήθος). Όμως για άπειρο πλήθος συνόλων, γενικά δεν ισχύουν.

*Απόδειξη:* Και πάλι στον συνήθη τοπολογικό μετρικό χώρο του $\mathbb{R}$, θεωρούμε την οικογένεια $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ με $A_n = (-1/n, 1/n)$. Τότε:

$$\Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big)^\circ = \{0\}^\circ = \emptyset \neq \{0\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n^\circ$$

Επίσης θεωρούμε την οικογένεια $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ με $B_n = [1/n, 1]$. Τότε:

$$\overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n} = \overline{(0,1]} = [0,1] \neq (0,1] = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{B_n}$$

□

Για να γίνουν περισσότερο αντιληπτές οι έννοιες του εσωτερικού, της κλειστής θήκης και του συνόρου γενικά στις τοπολογίες, ας δούμε ποιά μορφή έχουν σε γνωστές τοπολογίες αυτά τα σύνολα.

■ **Παράδειγμα 1.9:** Έστω $(X,\mathfrak{T})$ ένας τοπολογικός χώρος με την τετριμμένη τοπολογία $\mathfrak{T} = \{\emptyset, X\}$. Για τα διάφορα $A\subseteq X$ έχουμε:

$$A^\circ = \begin{cases} A,\ A\in\mathfrak{T} \\ \emptyset,\ A\notin\mathfrak{T} \end{cases} \qquad \overline{A} = \begin{cases} A,\ A\in\mathfrak{T} \\ X,\ A\notin\mathfrak{T} \end{cases} \qquad \partial A = \begin{cases} \emptyset,\ A\in\mathfrak{T} \\ X, A\notin\mathfrak{T} \end{cases}$$

Για το εσωτερικό: Επειδή τα ανοικτά σύνολα ταυτίζονται με το εσωτερικό τους, $A^\circ = A$ στην περίπτωση όπου $A \in \mathfrak{T}$. Εάν $A$ είναι ένα τυχαίο σύνολο που δεν είναι ανοικτό, τότε το εσωτερικό του είναι ένα ανοικτό υποσύνολό του. Επειδή το $A$ δεν είναι ανοικτό, δεν ταυτίζεται με το $X$ και συνεπώς το μόνο ανοικτό υποσύνολο είναι το $\emptyset$. Αυτά δείχνουν ότι $A^\circ = \emptyset$.

Για τη θήκη: Εφόσον η τοπολογία είναι τετριμμένη, τα κλειστά σύνολα είναι ακριβώς τα ανοικτά σύνολα. Επομένως, $\overline{A} = A$. Εάν το $A$ είναι ένα τυχαίο σύνολο που δεν είναι ανοικτό, τότε η θήκη του θα είναι ένα κλειστό υπερσύνολό του. Επειδή το μόνο κλειστό υπερσύνολό του είναι το $X$, έχουμε $\overline{A} = X$.

Το σύνορο είναι τετριμμένο να βρεθεί μέσω της σχέσης $\partial A = \overline{A} \backslash A^\circ$. ■

■ **Παράδειγμα 1.10:** Έστω $(X, \mathfrak{T}_\delta)$ ένας τοπολογικός χώρος με τη διακριτή τοπολογία $\mathfrak{T}_\delta = \mathcal{P}(X)$. Για τα διάφορα σύνολα $A \subseteq X$ έχουμε:

$$A^\circ = A,\ A \subseteq X \qquad \overline{A} = A,\ A \subseteq X \qquad \partial A = \emptyset,\ A \subseteq X$$

Αυτό διότι όλα τα υποσύνολα του $X$ είναι ανοικτά, άρα και κλειστά. ■

■ **Παράδειγμα 1.11:** Έστω $(X, \mathfrak{T})$ ένας τοπολογικός χώρος με $X$ άπειρο και $\mathfrak{T}$ την συμπεπερασμένη τοπολογία. (Εδώ δεν παίρνουμε το παράδειγμα όπου το $X$ είναι πεπερασμένο, γιατί τότε η τοπολογία γίνεται διακριτή). Για τα διάφορα σύνολα $A \subseteq X$ έχουμε:

$$A^\circ = \begin{cases} A,\ A \in \mathfrak{T} \\ \emptyset,\ A \notin \mathfrak{T} \end{cases} \qquad \overline{A} = \begin{cases} A,\ A^c \in \mathfrak{T} \\ X,\ A^c \notin \mathfrak{T} \end{cases} \qquad \partial A = \begin{cases} X \backslash A,\ A \in \mathfrak{T}, A^c \notin \mathfrak{T} \\ A, A \notin \mathfrak{T}, A^c \in \mathfrak{T} \\ X,\ A \notin \mathfrak{T}, A^c \notin \mathfrak{T} \end{cases}$$

Για το εσωτερικό: Εάν $A \in \mathfrak{T}$, τότε $A^\circ = A$. Διαφορετικά, εάν το $A$ δεν είναι ανοικτό, το $A^c$ είναι άπειρο. Επομένως, εάν ψάξουμε ανοικτό υποσύνολο του $A$, αυτό σίγουρα θα έχει μεγαλύτερο συμπλήρωμα από το $A^c$ - οπότε δεν υπάρχει «μικρότερο» ανοικτό, πέραν του $\emptyset$.

Για τη θήκη: Εάν το $A$ είναι κλειστό (δηλαδή το συμπλήρωμά του είναι ανοικτό) τότε $\overline{A} = A$. Διαφορετικά, εάν το $A$ δεν είναι κλειστό, το συμπλήρωμά του δεν είναι ανοικτό. Επομένως το $A$ είναι άπειρο. Τώρα κάθε κλειστό υπερσύνολο του $A$ θα πρέπει να έχει ανοικτό συμπλήρωμα, δηλαδή το ίδιο να είναι πεπερασμένο. Αυτό δεν μπορεί να συμβαίνει (αφού το κλειστό υπερσύνολο είναι «μεγαλύτερο» του $A$), εκτός κι αν αυτό το υπερσύνολο ταυτίζεται με το $X$.

Για το σύνορο: Παρατηρούμε ότι δεν είναι δυνατόν $A \in \mathfrak{T}$ και $A^c \in \mathfrak{T}$, διότι τότε τα $A^c, A$ θα ήταν πεπερασμένα (άρα και όλος ο χώρος $X$). Για όλους τους υπόλοιπους συνδυασμούς (ανήκει, δεν ανήκει), μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη σχέση $\partial A = \overline{A} \backslash A^\circ$ για να προσδιορίσουμε το σύνορο. ■

Για τη συναριθμίσιμη τοπολογία μπορεί να ακολουθηθεί παρόμοια διαδικασία.

■ **Παράδειγμα 1.12:** Έστω $(X, \mathfrak{T})$ ένας τοπολογικός χώρος με $\mathfrak{T}$ την τοπολογία του ιδιαιτέρου σημείου $x_0$. Για τα διάφορα $A \subseteq X$ έχουμε:

$$A^\circ = \begin{cases} A,\ A \in \mathfrak{T} \\ \emptyset,\ A \notin \mathfrak{T} \end{cases} \qquad \overline{A} = \begin{cases} A,\ A \notin \mathfrak{T} \\ X,\ A \in \mathfrak{T} \end{cases} \qquad \partial A = \begin{cases} A,\ A \notin \mathfrak{T} \\ X \backslash A,\ A \in \mathfrak{T} \end{cases}$$

Για το εσωτερικό: Εάν $A \in \mathfrak{T}$, τότε $A^\circ = A$. Διαφορετικά, το $x_0$ δεν ανήκει στο $A$ και κατ' επέκταση, οποιοδήποτε υποσύνολό του δεν περιέχει το $x_0$. Το μόνο λοιπόν «μικρότερο» ανοικτό είναι το $\emptyset$.

Για τη θήκη: Εάν το $A$ είναι κλειστό (δηλαδή $x_0 \in A^c \Rightarrow A \notin \mathfrak{T}$) τότε $\overline{A} = A$. Διαφορετικά, το $x_0$ θα ανήκει στο $A$ και κατ' επέκταση οποιοδήποτε άλλο «μεγαλύτερο» σύνολο θα είναι ανοικτό και όχι κλειστό, πέραν του $X$.

Το σύνορο μπορεί να βρεθεί από τη σχέση $\partial A = \overline{A} \backslash A^\circ$. ■

Για την τοπολογία του εξαιρουμένου σημείου $x_0$ μπορεί να ακολουθηθεί παρόμοια διαδικασία.

■ **Παράδειγμα 1.13:** Έστω $(\mathbb{R}, \mathfrak{T}_S)$ ο τοπολογικός χώρος του Παραδείγματος 1.4. Εδώ τα σύνολα έχουν μια σαφώς περιπλοκότερη μορφή, οπότε θα μας ήταν πολύ δυσκολότερο να προσδιορίσουμε επακριβώς τα εσωτερικά, τις θήκες και τα σύνορά τους. Γι' αυτό θα περιοριστούμε στη βάση $\mathcal{B}_S$.

Παρατηρούμε ότι $(a, b]^c = (-\infty, a] \cup (b, \infty)$ είναι κι αυτό ανοικτό σύνολο. Αυτό διότι το $(b, \infty)$ είναι ούτως ή άλλως ανοικτό στον συνήθη τοπολογικό μετρικό χώρο ($\mathfrak{T}_\varrho \subseteq \mathfrak{T}_S$) κι επιπλέον:

$$(-\infty, a] = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (a-n, a], \text{ με } (a-n, a] \in \mathcal{B}_S$$

Οπότε κάθε στοιχείο της βάσης είναι ανοικτό και κλειστό. Άρα, για κάθε $B \in \mathcal{B}_S$:

$$B^\circ = B \qquad \overline{B} = B \qquad \partial B = \emptyset$$

■

Με τη κλειστή θήκη μπορούμε επίσης να ορίσουμε με τον αναμενόμενο τρόπο τα πυκνά σύνολα.

**Ορισμός 1.13:** Έστω $(X, \mathfrak{T})$ ένας τοπολογικός χώρος και $D \subseteq X$. Το $D$ λέγεται πυκνό εάν και μόνο αν $\overline{D} = X$.

■ **Παράδειγμα 1.14:**

- Έστω $(X, \mathfrak{T})$ ένας τοπολογικός χώρος με την τετριμμένη τοπολογία. Κάθε $A \neq \emptyset$ είναι πυκνό.
- Έστω $(X, \mathfrak{T}_\delta)$ ένας τοπολογικός χώρος με τη διακριτή τοπολογία. Το μοναδικό πυκνό σύνολο είναι το $X$.
- Έστω $(X, \mathfrak{T})$ ένας τοπολογικός χώρος με τη συμπεπερασμένη τοπολογία. Τα άπειρα σύνολα είναι πυκνά.
- Έστω $(X, \mathfrak{T})$ ένας τοπολογικός χώρος με την τοπολογία του ιδιαιτέρου σημείου $x_0$. Κάθε ανοικτό μη κενό σύνολο είναι πυκνό, και ιδιαιτέρως το $\{x_0\}$ είναι πυκνό.

■

■ **Παράδειγμα 1.15:** Έστω $(\mathbb{R}, \mathfrak{T}_S)$ ο τοπολογικός χώρος του Παραδείγματος 1.4. Το σύνολο $\mathbb{Q}$ είναι πυκνό. Πράγματι, εάν $\overline{\mathbb{Q}} \neq \mathbb{R}$, τότε εξ ορισμού της θήκης:

$$\bigcap \mathcal{F}_\mathbb{Q} \neq \mathbb{R} \Rightarrow \exists x \in \mathbb{R} \backslash \bigcap \mathcal{F}_\mathbb{Q}$$

Δηλαδή μπορεί να βρεθεί $F_x \in \mathcal{F}_\mathbb{Q}$ (που να μην είναι όλος ο χώρος) τέτοιο ώστε $x \notin F_x \Rightarrow x \in F_x^c$. Το $F_x^c$ είναι όμως ανοικτό σύνολο, οπότε υπάρχει κάποιο στοιχείο $B_x$ της βάσης $\mathcal{B}_S$ τέτοιο ώστε $x \in B_x \subseteq F_x^c \Rightarrow B_x \cap F_x = \emptyset$. Επειδή το $F_x$ περιέχει ολόκληρο το $\mathbb{Q}$, θα έχουμε $B_x \cap \mathbb{Q} = \emptyset$, το οποίο είναι άτοπο (το $B_x$ είναι αριστερά ημιάνοικτο, μη κενό διάστημα). ■

**Πρόταση 1.12: (Χαρακτηρισμοί για τα πυκνά σύνολα).** Έστω $(X, \mathfrak{T})$ ένας τοπολογικός χώρος. Τα ακόλουθα αποτελούν χαρακτηρισμούς για τα πυκνά σύνολα.

i. Ένα σύνολο $D \subseteq X$ είναι πυκνό $\Leftrightarrow \forall \emptyset \neq G \in \mathfrak{T},\ D \cap G \neq \emptyset$.

ii. Ένα σύνολο $D \subseteq X$ είναι πυκνό $\Leftrightarrow \forall \emptyset \neq B \in \mathcal{B},\ D \cap B \neq \emptyset$, όπου $\mathcal{B}$ είναι μια βάση της τοπολογίας.

*Απόδειξη:* Για το i., αποδεικνύουμε πρώτα την κατεύθυνση (⇒). Εάν προς άτοπο υπήρχε $\emptyset \neq G \in \mathfrak{T}$ τέτοιο ώστε $D \cap G \neq \emptyset$, θα είχαμε $G \subseteq D^c$. Επομένως:

$$G = G^\circ \subseteq (D^c)^\circ = (X \backslash D)^\circ = X \backslash \overline{D} \stackrel{\star}{=} X \backslash X = \emptyset$$

Στην ισότητα άστρο ($\star$) χρησιμοποιείται το ότι το $D$ είναι πυκνό σύνολο. Η σχέση $G \subseteq \emptyset$ δίνει το άτοπο, αφού το $G$ υποτέθηκε μη κενό.

Για την αντίστροφη κατεύθυνση (⇐), θεωρούμε $A$ το σύνολο $X \backslash \overline{D}$. Το $A$ είναι ανοικτό σύνολο (για παράδειγμα επειδή $X \backslash \overline{D} = (X \backslash D)^\circ$), οπότε είτε είναι το κενό σύνολο είτε δεν είναι (και στην τελευταία περίπτωση $D \cap A \neq \emptyset$, από την υπόθεση). Η δεύτερη συνθήκη δεν μπορεί να αληθεύει εξ ορισμού του $A$, οπότε αναγκαστικά:

$$A = \emptyset \Rightarrow X \backslash \overline{D} = \emptyset \Rightarrow X = \overline{D}$$

Η απόδειξη του ii. ουσιαστικά προκύπτει από το i., αφού κάθε ανοικτό σύνολο γράφεται ως ένωση στοιχείων της βάσης $\mathcal{B}$.

□

**Παρατήρηση 1.11:** Έστω $(X, \mathfrak{T})$ ένας τοπολογικός χώρος και $\mathcal{B} = \{B_i\}_{i \in I}$ μια βάση της τοπολογίας $\mathfrak{T}$. Για κάθε μη κενό $B_i \in \mathcal{B}$ επιλέγουμε ένα $x_i \in B_i$ και κατασκευάζουμε σύνολο:

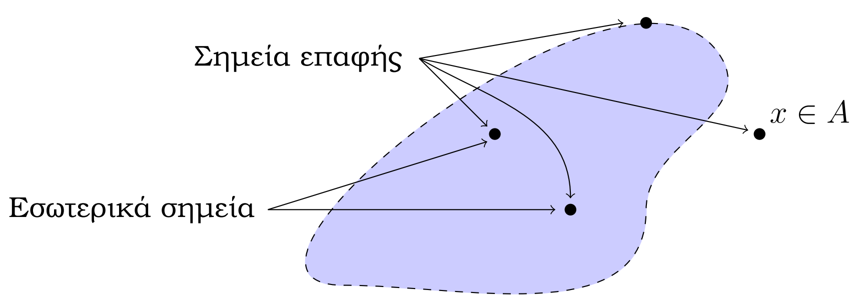
$$D = \{x_i\}_{i \in J} \text{ (όπου } B_i = \emptyset \text{ ακριβώς όταν } i \in I \backslash J)$$

Το $D$ είναι πυκνό σύνολο.

*Απόδειξη:* Είναι άμεσο από το ii. της προηγούμενης πρότασης.

□

**Ορισμός 1.14: (Εσωτερικά σημεία και σημεία επαφής).** Έστω $(X, \mathfrak{T})$ ένας τοπολογικός χώρος και $A \subseteq X$, $x \in X$.
**I.** Το σημείο $x \in X$ θα καλείται εσωτερικό σημείο του $A$ εάν και μόνο αν $x \in A^\circ$.
**II.** Το σημείο $x \in X$ θα καλείται σημείο επαφής του $A$ εάν και μόνο αν $x \in \overline{A}$.




*Μερικά σημεία επαφής και μερικά εσωτερικά σημεία σε ένα σύνολο του επιπέδου.*

Εάν φανταστούμε τα ανοικτά σύνολα στους μετρικούς χώρους, θα θέλαμε (διαισθητικά) ένα σημείο $x$ να βρίσκεται στο εσωτερικό ενός συνόλου $A$ εάν περιέχεται σε ένα ανοικτό υποσύνολο του $A$. Αντίστοιχα, ένα σημείο $x$ να βρίσκεται στη θήκη του $A$ αν το $A$ τέμνει κάθε ανοικτό σύνολο που περιέχει το $x$. Με την παρακάτω πρόταση φαίνεται ότι στους τοπολογικούς χώρους αυτές οι ιδιότητες έχουν μεταβιβαστεί.

**Πρόταση 1.13:** Έστω $(X, \mathfrak{T})$ ένας τοπολογικός χώρος και $A \subseteq X$, $x \in X$. Τα ακόλουθα αληθεύουν:

i. $x \in A^\circ \Leftrightarrow$ Υπάρχει $G \in \mathfrak{T}$ τέτοιο ώστε $x \in G \subseteq A$.

ii. $x \in \overline{A} \Leftrightarrow$ Για κάθε $G \in \mathfrak{T}$ με $x \in G$, η τομή $G \cap A$ δεν είναι κενή.

*Απόδειξη:* Για το i.: ($\Rightarrow$) Εξ ορισμού του εσωτερικού $A^\circ$, μπορούμε να γράψουμε:

$$x \in A^\circ \Rightarrow x \in \bigcup \mathcal{E}_A$$

Εξ ορισμού της ένωσης, υπάρχει κάποιο ανοικτό $G \in \mathcal{E}_A$ (δηλαδή ανοικτό τέτοιο ώστε $G \subseteq A$) με $x \in G$.

($\Leftarrow$) Για το αντίστροφο, παρατηρήστε ότι η προηγούμενη διαδικασία λειτουργεί και αντίστροφα.

Για το ii., ένα σημείο $x$ της θήκης $\overline{A}$ δεν ανήκει στο σύνολο $X \backslash \overline{A}$, οπότε δεν ανήκει στο $(X \backslash A)^\circ$. Τώρα το τελευταίο είναι εσωτερικό συνόλου, οπότε με άρνηση του i., $\forall G \in \mathfrak{T}$, $x \in G \nsubseteq X \backslash A$. Δηλαδή:

$$\forall G \in \mathfrak{T},\ G \cap A \neq \emptyset$$

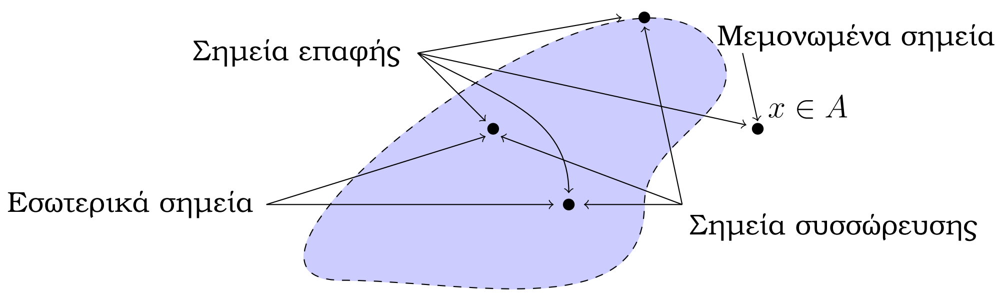
Και πάλι παρατηρήστε ότι μπορούμε να εργαστούμε και αντίστροφα.

□

**Ορισμός 1.15: (Σημεία συσσώρευσης και μεμονωμένα σημεία).** Έστω $(X, \mathfrak{T})$ ένας τοπολογικός χώρος και $A \subseteq X$, $x \in X$.
**I.** Το σημείο $x$ λέγεται σημείο συσσώρευσης του $A$ εάν και μόνο αν για κάθε $G \in \mathfrak{T}$ με $x \in G$, η τομή $G \cap (A \backslash \{x\})$ δεν είναι κενή. Έχοντας την Πρόταση 1.13, ii. υπόψη, το σημείο $x$ είναι σημείο συσσώρευσης του $A$ εάν και μόνο αν ανήκει στη θήκη $\overline{A \backslash \{x\}}$.
**II.** Το σημείο $x$ λέγεται μεμονωμένο σημείο του $A$ εάν ανήκει στο $A$ και δεν είναι σημείο συσσώρευσης του $A$. Δηλαδή εάν υπάρχει $G \in \mathfrak{T}$ τέτοιο ώστε $G \cap A = \{x\}$.

**Ορισμός 1.16: (Παράγωγο σύνολο).** Έστω $(X, \mathfrak{T})$ ένας τοπολογικός χώρος και $A \subseteq X$. Το παράγωγο σύνολο του $A$ είναι το σύνολο των σημείων συσσώρευσης του $A$. Συμβολίζουμε:

$$A' = \{x \in X \mid \text{το } x \text{ είναι σημείο συσσώρευσης του } A\}$$



*Μερικά σημεία επαφής, εσωτερικά, συσσώρευσης και μεμωνομένα, σε ένα σύνολο του επιπέδου.*

■ **Παράδειγμα 1.16:**

- Έστω $(X, \mathfrak{T}_\delta)$ ένας τοπολογικός χώρος με τη διακριτή τοπολογία. Για κάθε $A \subseteq X$ έχουμε $A' = \emptyset$. Πράγματι, εάν ένα $x \in X$ ήταν σημείο συσσώρευσης του $A$, τότε κάθε ανοικτό σύνολο που το περιέχει, αναγκαστικά θα περιέχει κι άλλα σημεία του $A$ (πέρα από το $x$, αν αυτό ανήκει στο $A$) - όμως το $\{x\}$ είναι ανοικτό σύνολο που δεν περιέχει άλλα σημεία του $A$. Αυτό μας δίνει άτοπο.

- Έστω $(X, \mathfrak{T})$ ένας τοπολογικός χώρος με την τοπολογία του ιδιαιτέρου σημείου $x_0$ και με $|X| \geqslant 2$. Το σύνολο $A = \{x_0\}$ είναι ανοικτό. Ισχυριζόμαστε ότι $A' = X\backslash\{x_0\}$. Πράγματι, ένα $x_0 \neq x \in X$ ανήκει στο $A'$ εάν και μόνο αν $x \in \overline{A\backslash\{x\}} = \overline{\{x_0\}\backslash\{x\}}$, δηλαδή εάν και μόνο αν $x \in \overline{\{x_0\}} = X$ (το οποίο ισχύει προφανώς - επίσης, θυμηθείτε το Παράδειγμα 1.12). Αντίστοιχα το $x_0$ δεν είναι σημείο συσσώρευσης, αφού $x_0 \notin \overline{\{x_0\}\backslash\{x_0\}} = \emptyset$.

■

**Πρόταση 1.14:** Έστω $(X, \mathfrak{T})$ ένας τοπολογικός χώρος και $A \subseteq X$. Αληθεύουν τα ακόλουθα:

i. $\overline{A} = A \cup A'$

ii. $A$ κλειστό $\Leftrightarrow A' \subseteq A$.

*Απόδειξη:* Για το i., θα αποδείξουμε τους δύο εγκλεισμούς. Κάθε σημείο συσσώρευσης είναι σημείο επαφής, οπότε $A' \subseteq \overline{A}$ (από την Πρόταση 1.13, ii. και τον Ορισμό 1.15, I.). Επειδή επιπλέον $A \subseteq \overline{A}$ έχουμε τον εγκλεισμό $A \cup A' \subseteq \overline{A}$.

Για τον άλλο εγκλεισμό, ένα $x \in \overline{A}$ ανήκει στο $A$ ή δεν ανήκει στο $A$. Αν δεν ανήκει στο $A$, τότε $x \in \overline{A} = \overline{A\backslash\{x\}}$. Αυτό δείχνει ότι $x \in A'$. Κατ' επέκταση το $x$ ανήκει στο $A$ ή στο $A'$, κι επομένως $\overline{A} \subseteq A \cup A'$.

Το ii. αποδεικνύεται από το i. σε συνδυασμό με την Πρόταση 1.8, ii..

□

## 1.4 Περιοχές και βάσεις περιοχών

Είδαμε ότι σε μια τοπολογία είναι δυνατόν κανείς να ορίσει σημεία επαφής, εσωτερικά και συσσώρευσης, που (όπως στην πραγματική ανάλυση) είχαν μια ισχυρή γεωμετρική εικόνα. Χωρίς την χρήση αποστάσεων, μπορούμε να μελετήσουμε «τοπικά» τον χώρο, χρησιμοποιώντας τα ανοικτά σύνολα.

**Ορισμός 1.17: (Περιοχές).** Έστω $(X, \mathfrak{T})$ ένας τοπολογικός χώρος και $x \in X$, $A \subseteq X$, $\mathcal{B}$ μία βάση της $\mathfrak{T}$. Το σύνολο $A$ λέγεται περιοχή του $x$ εάν $x \in A^\circ$. Δύο άλλοι ισοδύναμοι ορισμοί είναι οι:

$$\exists G \in \mathfrak{T} \text{ με } x \in G \subseteq A$$

και:

$$\exists B \in \mathcal{B} \text{ με } x \in B \subseteq A$$

Συμβολίζουμε με $\mathcal{N}_x$ το σύνολο όλων των περιοχών του $x$. Εάν ο τοπολογικός χώρος δεν υπονοείται, θα συμβολίζουμε με $\mathcal{N}_x^{\mathfrak{T}}$ το εν λόγω σύνολο.

**Πρόταση 1.15:** Έστω $(X, \mathfrak{T})$ ένας τοπολογικός χώρος και $x \in X$. Το $\mathcal{N}_x$ έχει τις εξής ιδιότητες:

i. Κάθε περιοχή $U \in \mathcal{N}_x$ περιέχει το $x$ (οπότε δεν είναι κενή).

ii. Εάν $U, V \in \mathcal{N}_x$, τότε και η τομή $U \cap V \in \mathcal{N}_x$.

iii. Αν $U \in \mathcal{N}_x$, κάθε υπερσύνολο $V \supseteq U$ ανήκει στο $\mathcal{N}_x$.

iv. Αληθεύει η ισοδυναμία $G \in \mathfrak{T} \Leftrightarrow \forall x \in G,\ G \in \mathcal{N}_x$ (δηλαδή τα ανοικτά σύνολα είναι περιοχές όλων των σημείων τους).

v. Αληθεύει η ισοδυναμία: $U \in \mathcal{N}_x \Leftrightarrow \exists G \in \mathcal{N}_x$ τέτοιο ώστε $G \subseteq U$ και $(\forall y \in G,\ G \in \mathcal{N}_y)$ (εδώ ουσιαστικά μπορούσαμε στην παρένθεση να γράψουμε ότι το $G$ είναι ανοικτό, λόγω του iv.. Όμως για λόγους που θα γίνουν σαφείς αργότερα, προτιμούμε αυτήν την διατύπωση).

*Απόδειξη:* Το i. είναι άμεσο. Για το ii., από τον ορισμό των περιοχών, υπάρχουν ανοικτά σύνολα $G_U, G_V$ τέτοια ώστε $x \in G_U \subseteq U$ και $x \in G_V \subseteq V$. Επειδή η τομή $G_U \cap G_V$ είναι ανοικτή και περιέχει το $x$, έχουμε το ζητούμενο.

Για το iii. εργαζόμαστε όπως στο ii., βρίσκοντας δηλαδή ανοικτό $G_U \subseteq U$ με $x \in G_U$.

Το iv. είναι ένας ακόμη χαρακτηρισμός για τα ανοικτά σύνολα. ($\Rightarrow$) Εάν το $G$ είναι ανοικτό, τότε $x \in G^\circ$ για κάθε $x \in G$ (αφού $G^\circ = G$). Δηλαδή το $G$ είναι περιοχή για κάθε σημείο του.

($\Leftarrow$) Εάν αληθεύει το δεξί μέλος της ισοδυναμίας, τότε το $G$ είναι ένα από τα σύνολα της οικογένειας $\mathcal{E}_G$. Οπότε $G \subseteq G^\circ \Rightarrow G = G^\circ$ (αφού επιπλέον $G^\circ \subseteq G$).

Το v. προκύπτει από το iv. και την πρώτη ισοδύναμη μορφή του Ορισμού 1.17.

□

Οι παραπάνω ιδιότητες (i., ii., iii., v.) είναι χαρακτηριστικές για τις περιοχές, όπως θα δείξουμε στο θεώρημα που θα ακολουθήσει. Εάν μια οικογένεια συνόλων τις ικανοποιεί, τότε μπορεί να οριστεί μια τοπολογία της οποίας οι περιοχές είναι ακριβώς τα σύνολα της εν λόγω οικογένειας. Χονδρικά μιλώντας, κανείς μπορεί να κατασκευάσει την τοπολογία γνωρίζοντας τις περιοχές.

**Θεώρημα 1.4:** Έστω $X \neq \emptyset$ ένα σύνολο και για κάθε $x \in X$ υπάρχει μη κενή οικογένεια $N_x \subseteq \mathcal{P}(X)$ με τις ιδιότητες:

α. Εάν $U \in N_x$, τότε $x \in U$ (αντίστοιχη της προηγούμενης i.).

β. Εάν $U_1, U_2 \in N_x$, τότε $U_1 \cap U_2 \in N_x$ (αντίστοιχη της προηγούμενης ii.).

γ. Εάν $U \in N_x$ και $V \supseteq U$, τότε $V \in N_x$ (αντίστοιχη της προηγούμενης iii.).

δ. $U \in N_x \Rightarrow \exists G \in N_x$ τέτοιο ώστε $G \subseteq U$ και $(\forall y \in G,\ G \in N_y)$ (αντίστοιχη της προηγούμενης v.).

Η οικογένεια:

$$\mathfrak{T} = \{G \subseteq X \mid \forall y \in G,\ G \in N_y\}$$

είναι τοπολογία, και μάλιστα για κάθε $x \in X,\ N_x = \mathcal{N}_x^{\mathfrak{T}}$.

*Απόδειξη:* Αρχικά θα δείξουμε ότι η $\mathfrak{T}$ ικανοποιεί τις συνθήκες του ορισμού της τοπολογίας.

- Το $\emptyset$ και το $X$ ανήκουν τετριμμένα στο $\mathfrak{T}$ (το πρώτο λόγω του «για κάθε» στη συνθήκη της συγκεκριμένης τοπολογίας $\mathfrak{T}$, και το δεύτερο γιατί το $X$ είναι υπερσύνολο καθενός $G \in N_x$ και ισχύει η ιδιότητα γ.).
- Έστω ένα τυχόν $x \in U_1 \cap U_2$ με $U_1, U_2 \in \mathfrak{T}$. Τότε $U_1, U_2 \in N_x$ και από το β., $U_1 \cap U_2 \in N_x$ για το τυχόν αυτό $x$ (άρα και για κάθε τέτοιο).
- Η ένωση αντιμετωπίζεται αναλόγως. Έστω ένα τυχόν $x \in \bigcup_{i \in I} U_i$ για αυθαίρετα μεγάλη οικογένεια $\{U_i\}_{i \in I} \subseteq \mathfrak{T}$. Το $x$ ανήκει σε κάποιο $U_j$ και $U_j \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$, οπότε από το γ., $\bigcup_{i \in I} U_i \in N_x$. Αυτό ισχύει για τυχόν $x \in \bigcup_{i \in I} U_i$, οπότε έχουμε το ζητούμενο.

Αυτά δείχνουν ότι η $\mathfrak{T}$ είναι τοπολογία.

Ισχυριζόμαστε ότι για κάθε $x \in X,\ N_x = \mathcal{N}_x^{\mathfrak{T}}$. Για τυχόν $x \in X$, έχουμε:

$$U \in \mathcal{N}_x^{\mathfrak{T}} \Rightarrow \exists G \in \mathfrak{T},\ x \in G \subseteq U$$

(από τον ορισμό της τοπολογίας $\mathfrak{T}$). Αν αντικαταστήσουμε το δεξί μέλος με το ισοδύναμό του, έχουμε:

$$U \in \mathcal{N}_x^{\mathfrak{T}} \Rightarrow \exists G \subseteq U \text{ τέτοιο ώστε } x \in G \text{ και } \forall y \in G,\ G \in N_y$$

και ιδίως για $x = y$:

$$\begin{aligned} U \in \mathcal{N}_x^{\mathfrak{T}} &\Rightarrow \exists G \in N_x \text{ και } G \subseteq U \\ &\overset{\text{γ.}}{\Rightarrow} U \in N_x \end{aligned}$$

Δηλαδή $\mathcal{N}_x^{\mathfrak{T}} \subseteq N_x$. Για τον αντίστροφο εγκλεισμό, γράφουμε:

$$U \in N_x \Rightarrow \exists G \in N_x \text{ τέτοιο ώστε } G \subseteq U \text{ και } (\forall y \in G,\ G \in N_y)$$

(από το δ.). Ισοδύναμα, από τον ορισμό της $\mathfrak{T}$:

$$U \in N_x \Rightarrow \exists G \in \mathfrak{T} \text{ με } x \in G \subseteq U$$

Δηλαδή $U \in \mathcal{N}_x^{\mathfrak{T}}$, το οποίο αποδεικνύει τον αντίστροφο εγκλεισμό $N_x \subseteq \mathcal{N}_x^{\mathfrak{T}}$.

□

**Ορισμός 1.18: (Βάσεις περιοχών).** Έστω $(X, \mathfrak{T})$ ένας τοπολογικός χώρος και $x \in X$. Ένα σύνολο $\mathcal{B}_x \subseteq \mathcal{N}_x$ θα καλείται βάση περιοχών του $x$ αν:

$$\forall U \in \mathcal{N}_x,\ \exists B \in \mathcal{B}_x \text{ τέτοιο ώστε } B \subseteq U$$

Εάν ο τοπολογικός χώρος δεν υπονοείται, θα συμβολίζουμε με $\mathcal{B}_x^{\mathfrak{T}}$ το εν λόγω σύνολο. Επίσης, κάθε $B \in \mathcal{B}_x$ καλείται βασική περιοχή του $x$.

■ **Παράδειγμα 1.17:**

- Έστω $(X, \mathfrak{T})$ τοπολογικός χώρος. Το σύνολο $\mathcal{N}_x$ είναι βάση περιοχών του $x$.
- Έστω $(X, \mathfrak{T})$ τοπολογικός χώρος. Το σύνολο $\mathcal{B}_x = \mathcal{N}_x \cap \mathfrak{T}$ είναι βάση περιοχών του $x$.

- Σε μετρικό χώρο $(X, \varrho)$, το σύνολο $\mathcal{B}_x = \{B(x, \varepsilon) \mid \varepsilon > 0\}$ είναι βάση περιοχών του $x$. Το $\mathcal{B}_x$ εξακολουθεί να είναι βάση περιοχών του $x$, αν η συνθήκη «$\varepsilon > 0$» αντικατασταθεί από την «$\varepsilon \in \mathbb{Q} \cap (0, \infty)$» ή την «$\varepsilon \in \{1/n\}_{n\in\mathbb{N}}$».

- Σε μετρικό χώρο $(X, \varrho)$, το σύνολο $\widehat{\mathcal{B}}_x = \{\widehat{B}(x, \varepsilon) \mid \varepsilon > 0\}$ είναι βάση περιοχών του $x$. Το $\widehat{\mathcal{B}}_x$ εξακολουθεί να είναι βάση περιοχών του $x$, αν η συνθήκη «$\varepsilon > 0$» αντικατασταθεί από την «$\varepsilon \in \mathbb{Q} \cap (0, \infty)$» ή την «$\varepsilon \in \{1/n\}_{n\in\mathbb{N}}$».

- Έστω $(X, \mathfrak{T}_\delta)$ ένας τοπολογικός χώρος με τη διακριτή τοπολογία $\mathfrak{T}_\delta$. Το $\{x\}$ είναι ένα σύνολο του συνόλου περιοχών $\mathcal{N}_x$, αφού $x \in \{x\} = \{x\}^\circ$. Μάλιστα, το $\{x\}$ πρέπει να περιέχεται σε κάθε βάση περιοχών του $x$, και το $\{x\}$ αρκεί για για να κατασκευαστεί μια βάση περιοχών. Δηλαδή η $\mathcal{B}_x = \{\{x\}\}$ είναι βάση περιοχών του $x$.

■

Όπως από περιοχές καταφέραμε να κατασκευάσουμε τις «αντίστοιχες» τοπολογίες, έτσι κι εδώ θα κατασκευάσουμε από βάσεις περιοχών τις «αντίστοιχες» τοπολογίες. Ο τρόπος με τον οποίον θα εργαστούμε θα θυμίσει πολύ την κατασκευή τοπολογιών από περιοχές.

**Πρόταση 1.16:** Έστω $(X, \mathfrak{T})$ ένας τοπολογικός χώρος και $x \in X$. Μια βάση περιοχών $\mathcal{B}_x$ έχει τις εξής ιδιότητες:

i. Κάθε βασική περιοχή $B \in \mathcal{B}_x$ περιέχει το $x$ (οπότε δεν είναι κενή).

ii. Εάν $B_1, B_2 \in \mathcal{B}_x$, τότε $\exists B_3 \in \mathcal{B}_x$ τέτοιο ώστε $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.

iii. Αληθεύει η ισοδυναμία $G \in \mathfrak{T} \Leftrightarrow \forall x \in G,\ \exists B_x \in \mathcal{B}_x$ τέτοιο ώστε $B_x \subseteq G$.

iv. Για κάθε $B \in \mathcal{B}_x$ υπάρχει $x \in G \subseteq B$ τέτοιο ώστε ($\forall y \in G,\ \exists B_y \in \mathcal{B}_y$ τέτοιο ώστε $B_y \subseteq G$) (η συνθήκη εντός της παρένθεσης είναι χαρακτηρισμός ανοικτού συνόλου. Και πάλι η διατύπωση είναι συγκεκριμένη λόγω του θεωρήματος που θα ακολουθήσει).

*Απόδειξη:* Το i. ισχύει. Για το ii., παρατηρούμε ότι $B_1, B_2 \in \mathcal{N}_x$ (αφού $\mathcal{B}_x \subseteq \mathcal{N}_x$) οπότε $B_1 \cap B_2 \in \mathcal{N}_x$. Από τον ορισμό των βάσεων περιοχών, υπάρχει $B_3 \in \mathcal{B}_x$ τέτοιο ώστε $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.

Για το iii., θα αναχθούμε στην Πρόταση 1.15, iv.. Αρκεί λοιπόν να δείξουμε την ισοδυναμία:

$$\forall x \in G,\ G \in \mathcal{N}_x \Leftrightarrow \forall x \in G,\ \exists B_x \in \mathcal{B}_x \text{ τέτοιο ώστε } B_x \subseteq G$$

Η κατεύθυνση ($\Rightarrow$) είναι άμεση από τον ορισμό των βάσεων περιοχών. Η άλλη κατεύθυνση ($\Leftarrow$) προκύπτει από την Πρόταση 1.15, iii., σε συνδυασμό με το $\mathcal{B}_x \subseteq \mathcal{N}_x$.

Το iv., εάν λάβουμε υπόψη το iii., είναι μετάφραση της Πρότασης 1.15, v..

□

Με τις ιδιότητες i., ii., iv. κανείς μπορεί να κατασκευάσει τοπολογία.

**Θεώρημα 1.5:** Έστω $X \neq \emptyset$ ένα σύνολο. Για κάθε $x \in X$ υποθέτουμε ότι υπάρχει μη κενό σύνολο $B_x \subseteq \mathcal{P}(X)$ με τις ιδιότητες:

a. Εάν $B \in B_x$, τότε $x \in B$ (αντίστοιχη της προηγούμενης i.).

β. Εάν $B, C \in \mathcal{B}_x$, τότε $\exists E \in B_x$ τέτοιο ώστε $E \subseteq B \cap C$ (αντίστοιχη της προηγούμενης ii.).

γ. $B \in B_x \Rightarrow \exists G \subseteq X$ με $x \in G \subseteq B$ και $(\forall y \in G,\ \exists C_y \in B_y$ με $C_y \subseteq G)$ (αντίστοιχη της προηγούμενης iv.).

Τότε το σύνολο:

$$\mathfrak{T} = \{G \subseteq X \mid \forall x \in G,\ \exists C_x \in B_x \text{ τέτοιο ώστε } C_x \subseteq G\}$$

είναι τοπολογία, και μάλιστα για τα διάφορα $x \in X$, $B_x = \mathcal{B}_x^{\mathfrak{T}} \subseteq \mathcal{N}_x^{\mathfrak{T}}$.

*Απόδειξη:* Παρόμοια με την απόδειξη του Θεωρήματος 1.4.

□

**Παρατήρηση 1.12:** Έστω $(X, \mathfrak{T})$ ένας τοπολογικός χώρος και $\mathcal{B} \subseteq \mathfrak{T}$. Η $\mathcal{B}$ είναι βάση της $\mathfrak{T}$ εάν και μόνο αν $\forall x \in X,\ \mathcal{B}_x = \{B \in \mathcal{B} \mid x \in \mathcal{B}\}$ είναι βάση περιοχών του $x$.

Προσοχή: Κάθε βάση $\mathcal{B}$ δίνει βάσεις περιοχών $\mathcal{B}_x$ (για τα διάφορα $x$). Αντίστροφα, δεν προκύπτει από πουθενά ότι - δεδομένης μιας οικογένειας βάσεων περιοχών $\mathfrak{B} = \{\mathcal{B}_x\}_{x \in X}$ - το $\bigcup \mathfrak{B}$ είναι βάση της $\mathfrak{T}$. Μάλιστα εν γένει δεν είναι, γιατί στις βάσεις περιοχών ενδέχεται να υπάρχουν και μη ανοικτά σύνολα.

**Ορισμός 1.19: (Μεγαλύτερες και μικρότερες τοπολογίες).** Έστω $X \neq \emptyset$ ένα σύνολο και $\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2$ δύο τοπολογίες του $X$. Η $\mathfrak{T}_2$ θα λέγεται μεγαλύτερη (ή λεπτότερη ή ισχυρότερη) από την $\mathfrak{T}_1$ εάν $\mathfrak{T}_1 \subseteq \mathfrak{T}_2$. Αντίστοιχα, η $\mathfrak{T}_1$ θα λέγεται μικρότερη (ή χονδροειδέστερη ή ασθενέσθερη) από την $\mathfrak{T}_2$ εάν $\mathfrak{T}_1 \subseteq \mathfrak{T}_2$.

Προσέξτε ότι η διάταξη στις τοπολογίες δεν είναι ολική, όπως δεν είναι ολική η σχέση του υποσυνόλου. Το παρακάτω θεώρημα δίνει μια συνθήκη συγκρισιμότητας για τις τοπολογίες.

**Θεώρημα 1.6: (Κριτήριο Hausdorff).** Έστω $(X, \mathfrak{T}_1)$, $(X, \mathfrak{T}_2)$ δύο τοπολογικοί χώροι και για κάθε $x \in X$ βάσεις περιοχών $\mathcal{B}_x^{\mathfrak{T}_1}$, $\mathcal{B}_x^{\mathfrak{T}_2}$, ως προς τις τοπολογίες $\mathfrak{T}_1$ και $\mathfrak{T}_2$ αντίστοιχα. Αληθεύει η ισοδυναμία:

$$\mathfrak{T}_1 \subseteq \mathfrak{T}_2 \Leftrightarrow \forall x \in X,\ \forall B_1 \in \mathcal{B}_x^{\mathfrak{T}_1},\ \exists B_2 \in \mathcal{B}_x^{\mathfrak{T}_2} \text{ τέτοιο ώστε } B_2 \subseteq B_1$$

Για την απόδειξη αυτή θα χρειαστεί να εισάγουμε έναν συμβολισμό. Σε τοπολογικό χώρο $(X, \mathfrak{T})$ θα συμβολίζουμε με $\mathrm{int}_{\mathfrak{T}} A$ το εσωτερικό του $A$ (για να γίνεται εμφανής η τοπολογία).

*Απόδειξη:* $(\Rightarrow)$ Για τυχόν $x \in X$, και για κάθε σύνολο $B_1$ τέτοιο ώστε $x \in B_1 \in \mathcal{B}_x^{\mathfrak{T}_1} \subseteq \mathcal{N}_x^{\mathfrak{T}_1}$, έχουμε:

$$x \in \mathrm{int}_{\mathfrak{T}_1} B_1, \text{ αφού } B_1 \in \mathcal{N}_x^{\mathfrak{T}_1}$$

Επειδή $\mathrm{int}_{\mathfrak{T}_1} B_1 \in \mathfrak{T}_1 \subseteq \mathfrak{T}_2$, έπεται ότι $\mathrm{int}_{\mathfrak{T}_1} B_1 \in \mathfrak{T}_2$ - ειδικότερα:

$$\mathrm{int}_{\mathfrak{T}_1} B_1 \subseteq \mathrm{int}_{\mathfrak{T}_2} B_1 \text{ και συνεπώς } x \in \mathrm{int}_{\mathfrak{T}_2} B_1$$

Άρα $B_1 \in \mathcal{N}_x^{\mathfrak{T}_2}$ κι εξ ορισμού των βάσεων περιοχών, υπάρχει $B_2 \in \mathcal{B}_x^{\mathfrak{T}_2}$ τέτοιο ώστε $B_2 \subseteq B_1$. Φυσικά αυτά ισχύουν για τυχόν $x$, οπότε και για κάθε $x$.

$(\Leftarrow)$ Ας θεωρήσουμε τυχόν $A \in \mathfrak{T}_1$. Από την Πρόταση 1.15, iv. έχουμε ότι $\forall x \in A,\ A \in \mathcal{N}_x^{\mathfrak{T}_1}$, οπότε:

$$\exists B_1 \in \mathcal{B}_x^{\mathfrak{T}_1},\ B_1 \subseteq A \text{ και από την υπόθεση } \exists B_2 \in \mathcal{B}_x^{\mathfrak{T}_2},\ B_2 \subseteq B_1 \subseteq A$$

Συμμαζεύοντας:

$$\forall x \in A,\ \exists B_2 \in \mathcal{B}_x^{\mathfrak{T}_2} \text{ τέτοιο ώστε } B_2 \subseteq A$$

κι από την Πρόταση 1.16, iii. έπεται $A \in \mathfrak{T}_2$. Επειδή το $A$ ήταν τυχόν, αποδεικνύεται ο εγκλεισμός $\mathfrak{T}_1 \subseteq \mathfrak{T}_2$.

$\square$

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

# Συνέχεια και δίκτυα

## 2.1 Συνέχεια

Έστω $(X, \varrho)$, $(Y, d)$ μετρικοί χώροι. Υπενθυμίζουμε ότι μια συνάρτηση $f : (X, \varrho) \to (Y, d)$ είναι συνεχής στο $x \in X$ όταν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε:

$$f\big(B_\varrho(x, \delta)\big) \subseteq B_d\big(f(x), \varepsilon\big)$$

Στην πραγματικότητα τα «$\varepsilon$» και «$\delta$» ως αποστάσεις δεν χρειάζονται για την διατύπωση του ορισμού, ακόμη και στους μετρικούς χώρους.

$$f \text{ συνεχής } :\Leftrightarrow \forall B_d\big(f(x), \varepsilon\big),\ \exists B_\varrho(x, \delta) \text{ ώστε } f\big(B_\varrho(x, \delta)\big) \subseteq B_d\big(f(x), \varepsilon\big)$$

Το κύριο χαρακτηριστικό του ορισμού είναι η χρήση περιοχών του $x$. Διατυπώνουμε τον παρακάτω γενικό ορισμό:

**Ορισμός 2.1: (Συνέχεια).** Έστω $(X, \mathfrak{T}_X), (Y, \mathfrak{T}_Y)$ δύο τοπολογικοί χώροι και $f : (X, \mathfrak{T}_X) \to (Y, \mathfrak{T}_Y)$. Η $f$ θα λέγεται συνεχής συνάρτηση στο $x \in X$ εάν:

$$\forall V \in \mathcal{N}_{f(x)}^{\mathfrak{T}_Y},\ \exists U \in \mathcal{N}_x^{\mathfrak{T}_X} \text{ ώστε } f(U) \subseteq V$$

Ο ίδιος ορισμός μπορεί να διατυπωθεί με βασικές περιοχές. Επιπλέον, η $f$ θα καλείται συνεχής αν είναι συνεχής σε κάθε $x \in X$.

**Πρόταση 2.1:** Έστω $(X, \mathfrak{T}_X), (Y, \mathfrak{T}_Y)$ δύο τοπολογικοί χώροι και $f : (X, \mathfrak{T}_X) \to (Y, \mathfrak{T}_Y)$. Αληθεύει η ισοδυναμία:

$$f \text{ συνεχής στο } x \Leftrightarrow \forall V \in \mathcal{N}_{f(x)} \text{ ισχύει } f^{-1}(V) \in \mathcal{N}_x$$

Δηλαδή, κατά κάποιον τρόπο, η $f$ αντιστρέφει περιοχές σε περιοχές.

*Απόδειξη:* Κατ' αρχάς ας θυμηθούμε μερικές χρήσιμες συνολοθεωρητικές σχέσεις, που δεν εξαρτώνται από τις τοπολογίες. Εάν $f : X \to Y$ είναι μια συνάρτηση και $A \subseteq X, B \subseteq Y$, τότε:

- $A \subseteq f^{-1}\big(f(A)\big)$, αφού εν γένει υπάρχουν περισσότερα στοιχεία απ' ότι αυτά του $A$ των οποίων η εικόνα ανήκει στο $f(A)$.
- $f\big(f^{-1}(B)\big) \subseteq B$, αφού εν γένει υπάρχουν στοιχεία στο $B$ που δεν είναι εικόνα μέσω της $f$.

($\Rightarrow$) Έστω ότι η $f$ είναι συνεχής στο $x$. Τότε (από τον ορισμό της συνέχειας) για $V \in \mathcal{N}_{f(x)}$ υπάρχει $U \in \mathcal{N}_x$ με $f(U) \subseteq V$, δηλαδή $f^{-1}\big(f(U)\big) \subseteq f^{-1}(V)$. Από τις χρήσιμες συνολοθεωρητικές παρατηρήσεις:

$$U \subseteq f^{-1}\big(f(U)\big) = f^{-1}(V)$$

οπότε το σύνολο $f^{-1}(V)$ είναι περιοχή του $x$, ως υπερσύνολο περιοχής του $x$.

($\Leftarrow$) Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι για κάθε $V \in \mathcal{N}_{f(x)}$ έχουμε $f^{-1}(V) \in \mathcal{N}_x$. Σταθεροποιώντας ένα τέτοιο $V$, θέτουμε $U = f^{-1}(V)$ και θα δείξουμε ότι $U \in \mathcal{N}_x$, $f(U) \subseteq V$. Πράγματι, από την υπόθεση $U = f^{-1}(V) \in \mathcal{N}_x$ και από τις χρήσιμες συνολοθεωρητικές παρατηρήσεις $f(U) \subseteq f\big(f^{-1}(V)\big) \subseteq V$.

□

**■ Παράδειγμα 2.1:**

- Έστω $(X, \mathfrak{T}_X), (Y, \mathfrak{T}_Y)$ δύο τοπολογικοί χώροι και $f : (X, \mathfrak{T}_X) \to (Y, \mathfrak{T}_Y)$. Εάν $f \equiv c \in X$ (είναι δηλαδή σταθερή συνάρτηση), τότε είναι και συνεχής. Πράγματι, $\forall V \in \mathcal{N}_c$, $f^{-1}(V) = X \in \mathcal{N}_x$ (για οποιοδήποτε $x$).

- Έστω $(X, \mathfrak{T}_\delta), (Y, \mathfrak{T}_Y)$ δύο τοπολογικοί χώροι με τον πρώτο να έχει τη διακριτή τοπολογία, και $f : (X, \mathfrak{T}_X) \to (Y, \mathfrak{T}_Y)$. Η $f$ είναι συνεχής (δηλαδή κάθε $f$ είναι συνεχής). Πράγματι, οποιαδήποτε αντίστροφη εικόνα είναι υποσύνολο του $X$, οπότε είναι ανοικτό σύνολο.

- Έστω $(X, \mathfrak{T}_X), (Y, \mathfrak{T}_Y)$ δύο τοπολογικοί χώροι με τον τελευταίο να έχει την τετριμμένη τοπολογία, και $f : (X, \mathfrak{T}_X) \to (Y, \mathfrak{T}_Y)$. Η $f$ είναι συνεχής (δηλαδή κάθε $f$ είναι συνεχής). Πράγματι, αν $x \in X$ είναι τυχόν και $V \in \mathcal{N}_{f(x)}$, τότε αναγκαστικά $V = Y$. Επομένως, $f^{-1}(Y) = X \in \mathcal{N}_x$.

■

**Πρόταση 2.2:** Έστω $(X, \mathfrak{T}_X), (Y, \mathfrak{T}_Y), (Z, \mathfrak{T}_Z)$ τοπολογικοί χώροι και δύο συνεχείς συναρτήσεις $f : (X, \mathfrak{T}_X) \to (Y, \mathfrak{T}_Y)$ και $g : (Y, \mathfrak{T}_Y) \to (Z, \mathfrak{T}_Z)$, στα σημεία $x_0 \in X$ και $f(x_0) \in Y$ αντίστοιχα. Η σύνθεση $g \circ f : (X, \mathfrak{T}_X) \to (Z, \mathfrak{T}_Z)$ είναι συνεχής στο $x_0 \in X$.

*Απόδειξη:* Έστω $W \in \mathcal{N}_{g \circ f(x_0)}$. Επειδή η $g$ είναι συνεχής στο $f(x_0)$, υπάρχει $V \in \mathcal{N}_{f(x_0)}$ ώστε $g(V) \subseteq W$. Επιπλέον, η $f$ είναι συνεχής στο $x_0$, οπότε υπάρχει $U \in \mathcal{N}_{x_0}$ ώστε $f(U) \subseteq V$. Τελικά:

$$U \in \mathcal{N}_{x_0} \text{ και } g \circ f(U) \subseteq g(V) \subseteq W$$

□

**Θεώρημα 2.1:** Έστω $(X, \mathfrak{T}_X), (Y, \mathfrak{T}_Y)$ δύο τοπολογικοί χώροι και μια συνάρτηση $f : X \to Y$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

i. Η $f$ είναι συνεχής.

ii. Για κάθε $G \in \mathfrak{T}_Y$ έχουμε $f^{-1}(G) \in \mathfrak{T}_X$ (οι συνεχείς συναρτήσεις αντιστρέφουν ανοικτά σε ανοικτά).

iii. Για κάθε $F \subseteq Y$ κλειστό, το σύνολο $f^{-1}(F) \subseteq X$ είναι κλειστό (οι συνεχείς συναρτήσεις αντιστρέφουν κλειστά σε κλειστά).

iv. Για κάθε $A \subseteq X$, $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.

v. Για κάθε $B \subseteq Y$, $\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}(\overline{B})$.

vi. Για κάθε $B \subseteq Y$, $f^{-1}(B^\circ) \subseteq \big(f^{-1}(B)\big)^\circ$

*Απόδειξη:* (i. $\Rightarrow$ ii.) Έστω ότι η $f$ είναι συνεχής και $G \in \mathfrak{T}_Y$. Εάν $x \in f^{-1}(G)$ είναι τυχόν σημείο, τότε $f(x) \in G$. Επειδή το $G$ είναι ανοικτό, είναι και περιοχή του $f(x)$, οπότε από την συνέχεια της $f$ εξασφαλίζεται η ύπαρξη μιας περιοχής $U$ του $x$ για την οποία $f(U) \subseteq G \Rightarrow U \subseteq f^{-1}(G)$. Τώρα η $f^{-1}(G)$ είναι περιοχή του $x$ ως υπερσύνολο περιοχής του $x$, κι αυτό μάλιστα συμβαίνει για κάθε $x \in f^{-1}(G)$. Δηλαδή το $f^{-1}(G)$ είναι περιοχή κάθε σημείου του, άρα είναι ανοικτό

(ii. $\Rightarrow$ iii.) Εάν $F \subseteq Y$ είναι ένα κλειστό σύνολο, το $Y \backslash F$ θα είναι ανοικτό σύνολο. Επομένως από το ii., το $f^{-1}(Y \backslash F)$ είναι ανοικτό κι αυτό. Επειδή $f^{-1}(Y \backslash F) = X \backslash f^{-1}(F)$, το $f^{-1}(F)$ είναι κλειστό σύνολο.

(iii. $\Rightarrow$ iv.) Έστω $A \subseteq X$. Το σύνολο $\overline{f(A)}$ είναι κλειστό σύνολο στον $Y$, οπότε από το ii. το $f^{-1}\big(\overline{f(A)}\big)$ είναι κλειστό στο $X$. Όπως και στην Πρόταση 2.1, κανείς μπορεί - συνολοθεωρητικά μόνο - να αποδείξει ότι $A \subseteq f^{-1}\big(f(A)\big)$ οπότε:

$$f^{-1}\big(\overline{f(A)}\big) \overset{\star}{\supseteq} f^{-1}\big(f(A)\big) \overset{\star\star}{\supseteq} A$$

(Στον εγκλεισμό ($\star$) χρησιμοποιείται ότι $\overline{f(A)} \supseteq f(A)$, και στον εγκλεισμό ($\star\star$) η συνολοθεωρητική παρατήρηση). Τελικά:

$$\overline{f^{-1}\big(\overline{f(A)}\big)} = f^{-1}\big(\overline{f(A)}\big) \supseteq \overline{A} \Rightarrow f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$$

(iv. $\Rightarrow$ v.) Έστω $B \subseteq Y$. Εάν ορίσουμε $A = f^{-1}(B)$, από το iv. θα έχουμε:

$$f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)} \Rightarrow f\big(\overline{f^{-1}(B)}\big) \subseteq \overline{f\big(f^{-1}(B)\big)} \overset{\star}{\subseteq} \overline{B}$$

(όπου στον εγκλεισμό ($\star$) χρησιμοποιείται άλλη μια συνολοθεωρητική παρατήρηση). Τελικά, $\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}(\overline{B})$.

(v. $\Rightarrow$ vi.) Έστω $B \subseteq Y$. Εφαρμόζουμε το v. για το σύνολο $Y \backslash B$ και έχουμε:

$$\overline{f^{-1}(Y \backslash B)} \subseteq f^{-1}(\overline{Y \backslash B}) \Rightarrow \overline{X \backslash f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}(\overline{Y \backslash B})$$

Από τον «δυϊσμό» των θηκών και των εσωτερικών έπεται το ζητούμενο.

$$X \backslash \big(f^{-1}(B)\big)^\circ \subseteq f^{-1}(Y \backslash B^\circ) = X \backslash f^{-1}(B^\circ) \Rightarrow \big(f^{-1}(B)\big)^\circ \supseteq f^{-1}(B^\circ)$$

(vi. $\Rightarrow$ i.) Έστω $x \in X$ και $V \in \mathcal{N}_{f(x)} \Rightarrow f(x) \in V^\circ \Rightarrow x \in f^{-1}(V^\circ)$. Χρησιμοποιώντας το vi. έχουμε:

$$f^{-1}(V^\circ) \subseteq \big(f^{-1}(V)\big)^\circ \Rightarrow x \in \big(f^{-1}(V)\big)^\circ$$

Δηλαδή $U = f^{-1}(V) \in \mathcal{N}_x$. Επειδή το $V$ ήταν τυχόν, για κάθε $V \in \mathcal{N}_{f(x)}$ έχουμε δείξει ότι υπάρχει $U \in \mathcal{N}_x$ για το οποίο:

$$f(U) = f\big(f^{-1}(V)\big) \subseteq V$$

κι επομένως η $f$ είναι συνεχής στο $x$. Όμως και το $x$ ήταν τυχόν, οπότε η συνέχεια αποδεικνύεται παντού.

□

Έχοντας αποδείξει τις διάφορες ισοδυναμίες, μπορούμε να δούμε κάτι που μοιάζει κάπως «παράδοξο».

■ **Παράδειγμα 2.2:** Έστω $(X, \mathfrak{T}_1), (X, \mathfrak{T}_2)$ δύο τοπολογικοί χώροι και η συνάρτηση $\mathrm{id} : X \to X$. Η id δεν είναι κατ' ανάγκη συνεχής. Πράγματι, η id θα είναι συνεχής εάν και μόνο αν $\forall G \in \mathfrak{T}_2$, $\mathrm{id}^{-1}(G) = G \in \mathfrak{T}_1$, δηλαδή εάν και μόνο αν $\mathfrak{T}_2 \subseteq \mathfrak{T}_1$. ■

Παρατηρώντας τα v. και vii. του Θεωρήματος 2.1, βλέπουμε κάποιου είδους «δυϊσμό» όσον αφορά τα εσωτερικά και τις θήκες στις αντίστροφες εικόνες της $f$. Το iv. που αναφέρεται στην ίδια την $f$ δεν έχει αντίστοιχη ιδιότητα για εσωτερικά - μάλιστα θα δείξουμε ότι η προφανής αντίστοιχη ιδιότητα δεν χαρακτηρίζει συνέχεια.

**Ορισμός 2.2: (Ανοικτές και κλειστές απεικονίσεις).** Έστω $(X, \mathfrak{T}_X), (Y, \mathfrak{T}_Y)$ δύο τοπολογικοί χώροι και $f : X \to Y$.
**I.** Η $f$ θα ονομάζεται ανοικτή αν για κάθε $A \in \mathfrak{T}_X$, $f(A) \in \mathfrak{T}_Y$.
**II.** Αντίστοιχα, η $f$ θα ονομάζεται κλειστή αν για κάθε $A \subseteq X$ κλειστό, το σύνολο $f(A) \subseteq Y$ είναι κλειστό.

**Πρόταση 2.3:** Έστω $(X, \mathfrak{T}_X), (Y, \mathfrak{T}_Y)$ δύο τοπολογικοί χώροι και $f : X \to Y$.

i. Η $f$ είναι ανοικτή εάν και μόνο αν για κάθε $A \subseteq X$, $f(A^\circ) \subseteq \big(f(A)\big)^\circ$.

ii. Η $f$ είναι κλειστή εάν και μόνο αν για κάθε $A \subseteq X$, $\overline{f(A)} \subseteq f(\overline{A})$.

*Απόδειξη:* Για το i.: (⇒) Επειδή η $f$ είναι ανοικτή και το $A^\circ$ είναι ανοικτό, το $f(A^\circ)$ είναι ανοικτό. Επομένως το εσωτερικό $\big(f(A)\big)^\circ$ είναι υπερσύνολο του άλλου ανοικτού $f(A^\circ)$, γιατί $f(A^\circ) \subseteq f(A)$ και το $\big(f(A)\big)^\circ$ είναι το μεγαλύτερο ανοικτό υποσύνολο του $f(A)$.

(⇐) Έστω $A \in \mathfrak{T}_X$. Τότε:

$$A = A^\circ \Rightarrow f(A) = f(A^\circ) \subseteq \big(f(A)\big)^\circ$$

κι επειδή εν γένει ισχύει ο εγκλεισμός $f(A) \supseteq \big(f(A)\big)^\circ$, το $f(A)$ ισούται με το εσωτερικό του (άρα είναι ανοικτό).

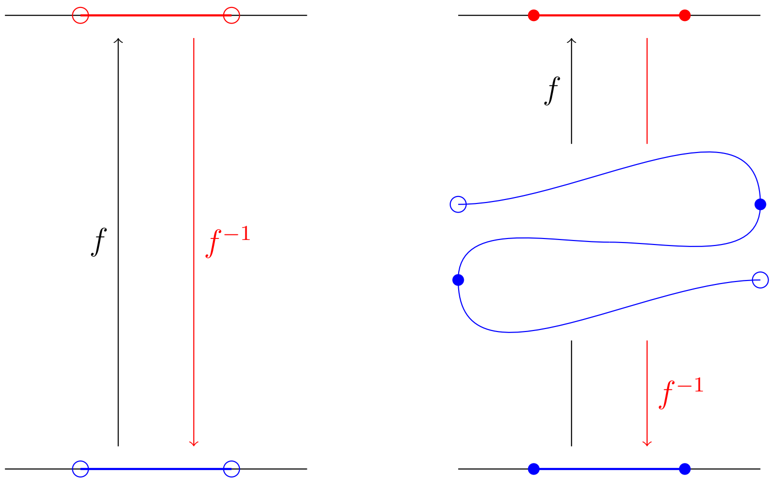
Το ii. αντιμετωπίζεται ανάλογα.

□

Η ιδιότητα i. της Πρότασης 2.3 είναι η αντίστοιχη ιδιότητα για τα εσωτερικά που θα θέλαμε στο Θεώρημα 2.1. Μέσω της i. εκφράζονται όμως οι ανοικτές απεικονίσεις και όχι οι συνεχείς. Επίσης ξέρουμε ότι οι συνεχείς δεν ταυτίζονται με τις ανοικτές, αφού υπάρχουν παραδείγματα συνεχών που δεν είναι ανοικτές, καθώς επίσης και ανοικτών που δεν είναι συνεχείς. Για την ακρίβεια:

$$\begin{array}{ll} f \text{ συνεχής} \not\Rightarrow f \text{ ανοικτή}, & f \text{ ανοικτή} \not\Rightarrow f \text{ συνεχής}, \\ f \text{ συνεχής} \not\Rightarrow f \text{ κλειστή}, & f \text{ κλειστή} \not\Rightarrow f \text{ συνεχής}, \\ f \text{ ανοικτή} \not\Rightarrow f \text{ κλειστή}, & f \text{ κλειστή} \not\Rightarrow f \text{ ανοικτή}. \end{array}$$

Ας δούμε, με κάπως διαισθητικό τρόπο, πώς ένα ανοικτό μπορεί να απεικονιστεί σε ένα κλειστό σύνολο. Στο δεύτερο σχήμα που ακολουθεί, το ανοικτό (τοπολογικά) μπλε ευθύγραμμο τμήμα μπορεί να «διπλώσει» με συνεχή τρόπο και να καταλήξει στο κλειστό κόκκινο ευθύγραμμο τμήμα. Αν όμως «διπλώσουμε» με ανάλογο τρόπο όλον τον κάτω χώρο προς τον πάνω χώρο, μπορούμε έπειτα να αναρρωτηθούμε ποια σημεία του πρώτου χώρου έπεσαν πάνω στο κόκκινο. Οπότε γυρνώντας αντίστροφα, παίρνουμε το κλειστό (τοπολογικά) μπλε ευθύγραμμο τμήμα, κι όχι το αντίστοιχο ανοικτό, πράγμα που συμφωνεί με το Θεώρημα 2.1, iii., κατά το οποίο οι συνεχείς συναρτήσεις είναι ακριβώς αυτές που αντιστρέφουν κλειστά σε κλειστά.




Στη συνέχεια θα αναφερθούμε σε απεικονίσεις που διατηρούν την τοπολογική δομή.

**Ορισμός 2.3: (Ομοιομορφισμοί).** Έστω $(X, \mathfrak{T}_X), (Y, \mathfrak{T}_Y)$ δύο τοπολογικοί χώροι και $f : X \to Y$. Η $f$ θα λέγεται ομοιομορφισμός εάν είναι αμφιμονοσήμαντη και συνεχής ως προς τις δύο κατευθύνσεις (δηλαδή η ίδια να είναι συνεχής και η αντίστροφή της να είναι συνεχής). Η ύπαρξη μιας τέτοιας $f : (X, \mathfrak{T}_X) \to (Y, \mathfrak{T}_Y)$ θα λέμε ότι καθιστά τους δύο τοπολογικούς χώρους ομοιομορφικούς, και θα συμβολίζουμε $(X, \mathfrak{T}_X) \sim (Y, \mathfrak{T}_Y)$.

Ο συμβολισμός $(X, \mathfrak{T}) \sim (Y, \mathfrak{T}_Y)$ είναι εύλογος, αφού η «$\sim$» είναι σχέση ισοδυναμίας.

**Παρατήρηση 2.1:** Οι ομοιομορφισμοί απεικονίζουν ανοικτά σύνολα σε ανοικτά σύνολα, και ως προς τις δύο κατευθύνσεις.

*Απόδειξη:* Πράγματι, ας θεωρήσουμε $A$ ένα τυχόν υποσύνολο του $X$. Από το Θεώρημα 2.1, επειδή η $f^{-1}$ είναι συνεχής, θα έχουμε:

$$f(A) \subseteq \big(f(A)\big)^{\circ}$$

οπότε από την Πρόταση 2.3 η $f$ είναι ανοικτή.

Αντίστοιχα, εάν $B$ είναι τυχόν υποσύνολο του $Y$, επειδή η $f$ είναι συνεχής:

$$f^{-1}(B) \subseteq \big(f^{-1}(B)\big)^{\circ}$$

οπότε η $f^{-1}$ είναι ανοικτή.

□

■ **Παράδειγμα 2.3:**

- Θεωρούμε τους τοπολογικούς μετρικούς χώρους $(\mathbb{R}, \mathfrak{T}_\varrho), \big((-1,1), \mathfrak{T}_{\varrho|_{(-1,1)}}\big)$ με τη συνήθη μετρική, και τη συνάρτηση:

$$f : \mathbb{R} \to (-1,1) \text{ με } x \mapsto \frac{x}{1+|x|}$$

Η $f$ είναι $1-1$, επί, συνεχής και έχει συνεχή αντίστροφο. Οπότε $(\mathbb{R}, \mathfrak{T}_\varrho) \sim \big((-1,1), \mathfrak{T}_{\varrho|_{(-1,1)}}\big)$.

- Έστω $X$ ένα σύνολο και $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$. Θεωρούμε τους δύο τοπολογικούς χώρους $(X, \mathfrak{T}_1), (X, \mathfrak{T}_2)$, όπου $\mathfrak{T}_i$ είναι η τοπολογία του ιδιαιτέρου σημείου $x_i$, και τη συνάρτηση:

$$f : (X, \mathfrak{T}_1) \to (X, \mathfrak{T}_2) \text{ με } x \mapsto \begin{cases} x_1, \text{ εάν } x = x_2 \\ x_1, \text{ εάν } x = x_2 \\ x, \text{ εάν } x \notin \{x_1, x_2\} \end{cases}$$

Η $f$ είναι $1-1$, επί, συνεχής και έχει συνεχή αντίστροφο. Οπότε $(X, \mathfrak{T}_1) \sim (X, \mathfrak{T}_2)$.

- Έστω $(X, \mathfrak{T}_X), (Y, \mathfrak{T}_Y)$ δύο τοπολογικοί χώροι και μια συνάρτηση $f : X \to Y$. Εάν οι $\mathfrak{T}_X, \mathfrak{T}_Y$ είναι διακριτές τοπολογίες:

  $$f \text{ ομοιομορφισμός } \Leftrightarrow f \text{ αμφιμονοσήμαντη } \Leftrightarrow |X| = |Y|$$

  οπότε ένας ομοιομορφισμός δεν διατηρεί κάποια ιδιαίτερη δομή (πέρα από την πληθικότητα) στους διακριτούς τοπολογικούς χώρους.

- Θεωρούμε τους τοπολογικούς χώρους $(\mathbb{R}, \mathfrak{T}_S), (\mathbb{R}, \mathfrak{T}_\varrho)$ και τη συνάρτηση $\mathrm{id} : (\mathbb{R}, \mathfrak{T}_S) \to (\mathbb{R}, \mathfrak{T}_\varrho)$. Η id δεν είναι ανοικτή, αφού το $\mathfrak{T}_S$ είναι γνήσιο υπερσύνολο του $\mathfrak{T}_\varrho$. Επομένως, σύμφωνα με την Παρατήρηση 2.1, δεν είναι ομοιομορφισμός. Υπάρχει άραγε άλλη συνάρτηση-ομοιομορφισμός;

■

## 2.2 Δίκτυα

Στη συνέχεια θα ασχοληθούμε με ακολουθίες σε τοπολογικούς χώρους. Θα δούμε ότι εν γένει δεν διατηρούν ιδιότητες από τους μετρικούς χώρους, και θα ορίσουμε την έννοια των δικτύων.

**Ορισμός 2.4: (Σύγκλιση ακολουθιών).** Έστω $(X, \mathfrak{T})$ ένας τοπολογικός χώρος και $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία $\mathbb{N} \to X$. Θα λέμε ότι η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει στο $x \in X$ εάν:

$$\forall V \in \mathcal{N}_x, \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ τέτοιο ώστε } \forall n \geqslant n_0, \ x_n \in V$$

Σε αυτήν την περίπτωση θα συμβολίζουμε $x_n \to x$ ή $x_n \xrightarrow{n} x$.

**■ Παράδειγμα 2.4:**

- Έστω $(X, \mathfrak{T}_\delta)$ ένας διακριτός τοπολογικός χώρος και $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία του με $x_n \to x$. Επειδή το $\{x\}$ είναι ανοικτό σύνολο, είναι περιοχή του $x$ και συνεπώς:

  $$\exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ τέτοιο ώστε } \forall n \geqslant n_0, \ x_n \in \{x\}$$

  Δηλαδή κάθε συγκλίνουσα ακολουθία είναι τελικά σταθερή.

- Θεωρούμε τον τοπολογικό χώρο $(\mathbb{N}, \mathfrak{T})$ με την συμπεπερασμένη τοπολογία $\mathfrak{T}$, και την ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (n)_{n\in\mathbb{N}}$. Για τυχόν $m \in \mathbb{N}$ έχουμε τα εξής: Εάν $V \in \mathcal{N}_m$, τότε $m \in V^\circ$, το οποίο είναι ανοικτό σύνολο και έχει (κατ' επέκταση) πεπερασμένο συμπλήρωμα. Η μορφή του συμπληρώματος μπορούμε να πούμε ότι θα είναι η $(V^\circ)^c = \{n_1 < n_2 < \cdots < n_k\}$, οπότε το στοιχείο $n_k + 1$ ανήκει στο $V^\circ$ όπως και κάθε επόμενό του. Θέτουμε $n_0 = n_k + 1$ και έχουμε:

  $$\text{Εάν } V \in \mathcal{N}_m, \text{ τότε } \forall n \geqslant n_0, \ x_n = n \in V^\circ \subseteq V$$

  Δηλαδή η ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει σε κάθε $m \in \mathbb{N}$.

- Έστω $(X, \mathfrak{T})$ ένας τοπολογικός χώρος με το $X$ να είναι υπεραριθμήσιμο και $\mathfrak{T}$ να είναι η συναριθμήσιμη τοπολογία. Θεωρούμε ότι $x_n \to x$ και θα δείξουμε ότι η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι τελικά σταθερή και ίση με $x$. Αυτό θα επιτευχθεί με άτοπο: Αν η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ δεν ήταν τελικά σταθερή και ίση με $x$:

  $$\forall n_0 \in \mathbb{N},\ \exists n \geqslant n_0 \text{ τέτοιο ώστε } x_n \neq x$$

  Οπότε υπάρχει μια ολόκληρη υπακολουθία $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ στοιχείων που δεν είναι το $x$ (και πάλι εδώ χρησιμοποιείται το αξίωμα της επιλογής). Θεωρούμε το σύνολο $V = X \backslash \{x_{k_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ και παρατηρούμε ότι είναι ανοικτό (αφού έχει αριθμήσιμο συμπλήρωμα) και περιέχει το $x$ (από την επιλογή της υπακολουθίας). Οπότε είναι περιοχή του $x$. Από την σύγκλιση της ακολουθίας στο $x$:

  $$\exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ τέτοιο ώστε } \forall n \geqslant n_0,\ x_n \in V$$

  Δηλαδή, από ένα σημείο και μετά, όλοι οι όροι της ακολουθίας περιορίζονται εντός του $V$, ακόμη και οι όροι της υπακολουθίας (από ένα σημείο και μετά). Αυτό είναι άτοπο, από τον ορισμό του $V$.

- Θεωρούμε δύο τοπολογικούς χώρους $(\mathbb{R}, \mathfrak{T}), (\mathbb{R}, \mathfrak{T}_\varrho)$, με τον πρώτο να έχει τη συναριθμήσιμη τοπολογία και τον δεύτερο τη συνήθη μετρική τοπολογία. Η συνάρτηση $\mathrm{id} : (\mathbb{R}, \mathfrak{T}) \to (\mathbb{R}, \mathfrak{T}_\varrho)$ δεν είναι συνεχής, αφού δεν αντιστρέφει ανοικτά σε ανοικτά. Παρόλα αυτά, ισχύει κάτι που μοιάζει με την «αρχή της μεταφοράς»: Μια ακολουθία $x_n \to x$ στον πρώτο χώρο δείξαμε ότι είναι τελικά σταθερή, οπότε η $\mathrm{id}(x_n) = x_n$ θα είναι συγκλίνουσα και στον δεύτερο τοπολογικό χώρο.

■

## 2.3 Ασθενείς τοπολογίες

## 2.4 Τοπολογίες γινόμενο

## 2.5 Βασικές συνθήκες μετρικοποιησιμότητας

ΚΕΦΑΛΑΙΟ **3**

# Διαχωριστικά αξιώματα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

# Συνεκτικότητα και συμπάγεια

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

# Αριθμησιμότητα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

# Πολλαπλότητες

**ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7**

# Τοπολογικοί γραμμικοί χώροι και ασθενείς* τοπολογίες

## 7.1 Βασική συναρτησιακή ανάλυση

## 7.2 Τοπολογικοί γραμμικοί χώροι

## 7.3 Ασθενείς* τοπολογίες

ΚΕΦΑΛΑΙΟ **8**

# Στοιχεία αλγεβρικής τοπολογίας

**ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9**

# Ασκήσεις

# Βιβλιογραφία


[Ha] Hatcher A.: ***Algebraic Topology*** (Cambridge University Press, 2001)

[Mu] Munkres J.: ***Topology*** (Pearson Education Limited, 2014)

[My] Mysior A.: ***A Regular Space which is not Completely Regular***, (Proceedings of the American Mathematical Society, 1981)

[Ra] Raha B. A..: ***An Example of a Regular Space that is not Completely Regular***, (Proc. Indian Acad. Sci. (Math Sci.) Vol. 102, No. 1, 1992)

[Γι] Γιαννόπουλος Α.: ***Μεταπτυχιακή Ανάλυση ΙΙ*** (Σημειώσεις ΠΜΣ ΕΚΠΑ, 2007)

[Γρ] Γραπερίτης Μ.: ***Σημειώσεις Γενικής Τοπολογίας*** (Σημειώσεις ΠΠΣ ΕΚΠΑ, 2013)

[ΝΖΚΦ] Νεγρεπόντης Σ., Ζαχαριάδης Θ., Καλαμίδας Ν., Φαρμάκη Β.: ***Γενική Τοπολογία και Συναρτησιακή Ανάλυση*** (Συμμετρία, 1997)

[Συ] Συκιώτης Μ.: ***Αλγεβρική Τοπολογία*** (Σημειώσεις ΠΜΣ ΕΚΠΑ, 2023)

[Φρ1] Φράγκος Α.: ***Γεωμετρική Πλειογραμμική Άλγεβρα*** (Σημειώσεις ΠΜΣ ΕΚΠΑ, 2024)

[Φρ2] Φράγκος Α.: ***Τοπολογία - Σημειώσεις παραδόσεων*** (Σημειώσεις ΠΠΣ ΕΚΠΑ, από τις διαλέξεις της κ. Παπατριανταφύλλου, 2023)

# Ευρετήριο

Σημειώσεις για το μάθημα «*714. Τοπολογία*»