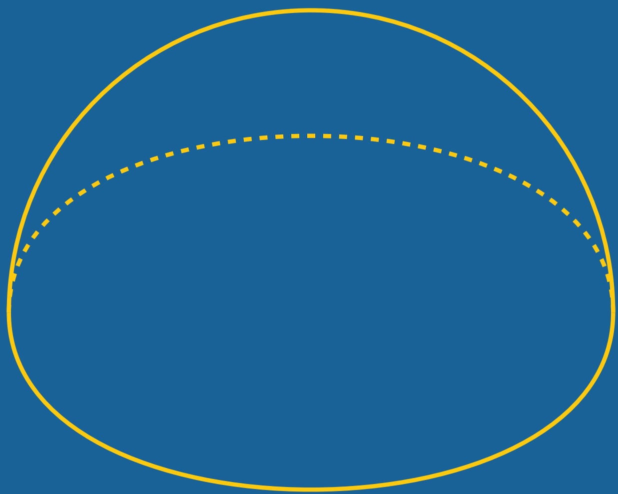
Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών, Τμήμα Μαθηματικών

Γεωμετρική Πλειογραμμική Άλγεβρα

Φράγκος Αναστάσιος



$$\int_{\partial \mathcal{M}} \omega = \int_{\mathcal{M}} d\omega$$

Ιανουάριος 2024

Τελευταία ενημέρωση: 01 Ιανουαρίου 2024

Για τη στοιχειοθέτηση χρησιμοποιήθηκε η γραμματοσειρά «Κερκής».

http://iris.math.aegean.gr/kerkis/

ΑΒΓΔΕΖΗΘΙΚΛΜΝΞΟΠΡΣΤΥΦΧΨΩ

αβγδεζηϑικλμνξοπρστυφχψω

ΑΒΓΔΕΖΗΘΙΚΛΜΝΞΟΠΡΣΤΥΦΧΨΩ

αβγδεζηϑικλμνξοπρστυφχψω

ΑΒΓΔΕΖΗΘΙΚΛΜΝΞΟΠΡΣΤΥΦΧΨΩ

αβγδεζηϑικλμνξοπρστυφχψω

ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ

abcdedghijklmnopqrstuvwxyz

BCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ

abcdedghijklmnopqrstuvwxyz

ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ

abcdedghijklmnopqrstuvwxyz

0123456789,./:“”()[]{}<>-!#$%&*

*0123456789,./:“”()[]<>{}-!#$%&**

0123456789,./:“”()[]<>{}-!#$%&*

Το template αυτής της παρουσίασης μπορεί να βρεθεί εδώ:
https://afragos-math.github.io/files/latex/template-I.html

Πίνακας Περιεχομένων

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Πολλαπλότητες και διαφορική δομή

1.1 Τοπολογικές πολλαπλότητες

Εφορμώντας από τους χώρους $\mathbb{R}^n$ (με την τοπολογική δομή τους), η γεωμετρία μελετά αντικείμενα που μπορεί μεν να μην είναι οι $\mathbb{R}^n$, αλλά έχουν σημαντικές ομοιότητες. Οι τοπολογικές πολλαπλότητες $\mathscr{M}$ είναι τέτοιου είδους αντικείμενα, στα οποία κατ' αρχάς απαιτείται τοπικά να μοιάζουν με τους ευκλείδιους χώρους, δηλαδή να είναι τοπικά ομοιομορφικοί με κάποιον $\mathbb{R}^n$. Από την άλλη -επειδή μαθηματικά και φιλοσοφικά μιλώντας οι $\mathbb{R}^n$ χαρακτηρίζονται από τα αποτελέσματά τους- υπάρχουν και κάποιες «ολικές»/βοηθητικές συνθήκες. Αυτές είναι οι ιδιότητες του Hausdorff και δεύτερου αριθμήσιμου τοπολογικού χώρου, εκ των οποίων η δεύτερη αντικαθιστά τα δίκτυα από ακολουθίες και η πρώτη εξασφαλίζει τη μοναδικότητα του ορίου των ακολουθιών.

Ορισμός 1.1 (Τοπολογικές πολλαπλότητες)**.** *Ένας τοπολογικός χώρος $(\mathscr{M}, \mathfrak{T}_{\mathscr{M}})$ θα καλείται $n-$διάστατη τοπολογική πολλαπλότητα εάν τα ακόλουθα αληθεύουν:*

i. Για κάθε $x \in \mathscr{M}$ και για κάθε ανοικτή περιοχή U_x του x, υπάρχει ομοιομορφισμός:

$$\varphi_{U_x} : (U_x, \mathfrak{T}_{\mathscr{M}|U_x}) \to (\mathbb{R}^n, \mathfrak{T}_{\mathbb{R}^n})$$

Σημειωτέον ότι με $\mathfrak{T}_{\mathscr{M}|U_x}$ συμβολίζουμε τη σχετική τοπολογία του U_x που προέρχεται από την $\mathfrak{T}_{\mathscr{M}}$.

ii. Ο $(\mathscr{M}, \mathfrak{T}_{\mathscr{M}})$ είναι Hausdorff τοπολογικός χώρος (δηλαδή T_2).

iii. Ο $(\mathscr{M}, \mathfrak{T}_{\mathscr{M}})$ είναι δεύτερος αριθμήσιμος τοπολογικός χώρος.

Παραδείγματα πολλαπλοτήτων υπάρχουν άφθονα, από τις σφαίρες διάστασης n (που γράφονται ως ένωση $2n$ «ημισφαιρών»), τα ανοικτά υποσύνολα των διάφορων ευκλειδίων χώρων, τις επιφάνειες, τις ευθείες, τις καμπύλες, έως ακόμη πιο περίπλοκα σύνολα όπως τα προβολικά επίπεδα και οι πολλαπλότητες του Grassmann. Γενικά μιλώντας, ένα σχήμα στο οποίο μπορούν να τεθούν τοπικές συντεταγμένες (όπως για παράδειγμα είναι οι επιφάνειες), πιθανότατα θα μπορεί να αποκτήσει δομή πολλαπλότητας. Την απόδοση συντεταγμένων υλοποιούν οι τοπικοί ομοιομορφισμοί φ_{U_x}.

Εμείς δεν θα ασχοληθούμε παραπάνω με τη διαισθητική μελέτη των πολλαπλοτήτων και τα διάφορα παραδείγματα, καθώς δεν είναι σκοπός μας μία εισαγωγή στις πολλαπλότητες. Παραπέμπουμε στα [Bo], [Le], [ΒΠ], [ΦρΙΙ].

Οι τρεις απαιτήσεις του ορισμού της πολλαπλότητας είναι αρκετές όχι μόνο για να προσδώσουν μία δομή που εκ πρωτης όψεως μοιάζει με την αντίστοιχη των χώρων $\mathbb{R}^n$, αλλά μπορούν να αποδείξουν διάφορα άλλα γνωστά αποτελέσματα που ισχύουν στους $\mathbb{R}^n$. Κάποια πολύ χρήσιμα θα παραθέσουμε παρακάτω.

Πρόταση 1.1 (Αριθμήσιμα υποκαλύμματα)**.** *Κάθε πολλαπλότητα $(\mathcal{M}, \mathfrak{T})$ είναι Lindelöf τοπολογικός χώρος, δηλαδή κάθε ανοικτό κάλυμμα $\{U_i\}_{i\in I}$ του $\mathcal{M}$ έχει αριθμήσιμο υποκάλυμμα. Αυτό μας επιτρέπει να θεωρούμε όλα τα ανοικτά καλύμματα αριθμήσιμα.*

Απόδειξη: Αυτό το αποτέλεσμα προκύπτει από τη δεύτερη αριθμησιμότητα του χώρου. Θεωρούμε ένα ανοικτό κάλυμμα $\{U_i\}_{i\in I}$ του $\mathcal{M}$ και ορίζουμε το σύνολο:

$$\mathcal{B}_U = \{B \in \mathcal{B} \mid \exists i \in I \text{ με } B \subseteq U_i\}$$

όπου $\mathcal{B}$ είναι μία αριθμήσιμη βάση της τοπολογίας $\mathfrak{T}$. Το $\mathcal{B}_U$ είναι αριθμήσιμο, αφού $\mathcal{B}_U \subseteq \mathcal{B}$, και επιπλεόν:

$$\mathcal{M} = \bigcup \mathcal{B}_U = \bigcup_{B\in\mathcal{B}_U} B$$

Αν τώρα διαλέξουμε για κάθε $B \in \mathcal{B}_U$ ένα $i_B \in I$ ούτως ώστε $B \subseteq U_{i_B}$, τότε μπορούμε να κατασκευάσουμε το σύνολο:

$$J = \{i_B \mid B \in \mathcal{B}_U\}$$

για το οποίο:

$$\mathcal{M} = \bigcup_{B\in\mathcal{B}_U} B \subseteq \bigcup_{j\in J} U_j \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i = \mathcal{M}$$

Κατα συνέπεια έχουμε το ζητούμενο, αφού:

$$\mathcal{M} = \bigcup_{j\in J} U_j$$

και το J είναι αριθμήσιμο (και ισοπληθικό με το $\mathcal{B}_U$).

□

Πρόταση 1.2 (Τοπική συμπάγεια)**.** *Κάθε πολλαπλότητα $(\mathcal{M}, \mathfrak{T})$ είναι τοπικά συμπαγής τοπολογικός χώρος. Δηλαδή για κάθε $x \in \mathcal{M}$ υπάρχει περιοχή K_x του x που είναι συμπαγής.*

Απόδειξη: Για κάθε $x \in \mathcal{M}$ θεωρούμε τον τοπικό ομοιομορφισμό $\varphi_{U_x} : U_x \to \mathbb{R}^n$. Στον $\mathbb{R}^n$ θεωρούμε μπάλα $B_x = \overline{B}\big(\varphi_{U_x}(x), \varepsilon\big) \subseteq \varphi_{U_x}(U_x)$ (για αρκετά μικρό $\varepsilon > 0$), και κατά συνέπεια δημιουργούμε τοπικό ομοιομορφισμό:

$$\varphi_{U_x}|_{\varphi_{U_x}^{-1}(B_x)} : \varphi_{U_x}^{-1}(B_x) \to B_x$$

Επειδή το B_x είναι συμπαγής περιοχή του $\varphi_{U_x}(x)$ στον $\mathbb{R}^n$, η αντίστροφη εικόνα (μέσω τοπικού ομοιομορφισμού) $K_x = \varphi_{U_x}^{-1}(B_x)$ είναι συμπαγής περιοχή του $x \in \mathcal{M}$.

□

Πρόταση 1.3 (Προσυμπαγείς περιοχές)**.** *Κάθε τοπολογικός χώρος $(\mathcal{M}, \mathfrak{T})$ έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:*

i. Για κάθε $x \in \mathcal{M}$ υπάρχει προσυμπαγής περιοχή F_x του x, δηλαδή περιοχή του x με το $\overline{F_x}$ να είναι συμπαγές.

... *ii. Για κάθε $x \in \mathscr{M}$ και ανοικτή περιοχή V_x του x υπάρχει προσυμπαγής ανοικτή περιοχή F_x του x ώστε:*

$$x \in F_x \subseteq \overline{F_x} \subseteq V_x$$

Απόδειξη: Για το i.: Από την απόδειξη της Πρότασης 1.2 μπορούμε να δούμε ότι το σύνολο $A_x = B\big(\varphi_{U_x}(x), \varepsilon\big)$ δίνει αντίστροφη εικόνα $F_x = \varphi_{U_x}|_{A_x}^{-1}(A_x)$ που (λόγω ομοιομορφισμού) είναι προσυμπαγές σύνολο.

Για το ii.: Θεωρούμε περιοχή U_x του x και τοπικό ομοιομορφισμό $\varphi_{U_x} : U_x \to \mathbb{R}^n$. Θεωρώντας την τομή $U_x \cap V_x$, η $\varphi_{U_x}|_{U_x \cap V_x}$ καθίσταται τοπικός ομοιομορφισμός, οπότε (όπως στο i.) μπορεί να βρεθεί προσυμπαγές σύνολο $F_x = \varphi_{U_x}|_{U_x \cap V}^{-1}(A_x)$ με την ιδιότητα $F_x \subseteq \overline{F_x} \subseteq U_x \cap V_x \subseteq V_x$.

□

Η ιδιότητα ii. της Πρότασης 1.3 είναι πολύ χρήσιμη, καθώς στην ουσία αποδεικνύει ότι κάθε πολλαπλότητα έχει βάση από προσυμπαγή ανοικτά σύνολα.

Παρατήρηση 1.1 (Βάση από προσυμπαγή ανοικτά σύνολα). *Κάθε πολλαπλότητα $(\mathscr{M}, \mathfrak{T})$ έχει βάση από προσυμπαγή ανοικτά σύνολα. Ειδικότερα, υπάρχει αριθμήσιμη οικογένεια προσυμπαγών ανοικτών συνόλων που συνιστά κάλυμμα του $\mathscr{M}$.*

Απόδειξη: Έστω $V \in \mathfrak{T}$. Για κάθε $x \in V$, από την Πρόταση 1.3, ii. είδαμε ότι υπάρχουν προσυμπαγή ανοικτά σύνολα F_x ώστε $x \in F_x \subseteq \overline{F_x} \subseteq V$. Δηλαδή, εάν για κάθε $x \in V$ επιλέξουμε προσυμπαγές ανοικτό σύνολο F_x με την προηγούμενη ιδιότητα:

$$V = \bigcup_{x \in V} F_x$$

Έτσι δείξαμε ότι κάθε ανοικτό σύνολο είναι ένωση προσυμπαγών συνόλων, κι άρα υπάρχει βάση από προσυμπαγή ανοικτά σύνολα.

Ειδικότερα, το $\mathscr{M}$ καλύπτεται από προσυμπαγή ανοικτά σύνολα, οπότε από την Πρόταση 1.1 υπάρχει αριθμήσιμη κάλυψη από προσυμπαγή ανοικτά σύνολα.

□

Πρόταση 1.4 (Εξάντληση από συμπαγή σύνολα). *Κάθε πολλαπλότητα $(\mathscr{M}, \mathfrak{T})$ εξαντλείται από συμπαγή σύνολα. Δηλαδή, υπάρχει οικογένεια συμπαγών συνόλων $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $K_n \subseteq \mathscr{M}$, ώστε:*

$$\textit{Για κάθε } n \in \mathbb{N},\ K_n \subseteq K_{n+1}^{\circ} \textit{ και } \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n = \mathscr{M}$$

Απόδειξη: Από την Παρατήρηση 1.1 μπορεί να βρεθεί αριθμήσιμο κάλυμμα $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ του $\mathscr{M}$ από προσυμπαγή ανοικτά σύνολα. Ορίζουμε $K_1 = \overline{F_1}$ και υποθέτουμε ότι επαγωγικά έχουμε ορίσει καταλλήλως τα συμπαγή σύνολα K_k, $k \leqslant n$. Για να ορίσουμε το K_{n+1}, παρατηρούμε ότι (λόγω της συμπάγειας του K_n) υπάρχει κάποιος ελάχιστος δείκτης m_n ούτως ώστε:

$$K_n \subseteq \bigcup_{k=1}^{m_n} F_k$$

Αν ορίσουμε $K_{n+1} = \overline{\bigcup_{k=1}^{m_n} F_k}$, θα έχουμε επεκτείνει τη ζητούμενη οικογένεια, αφού $K_n \subseteq K_{n+1}^{\circ}$.

□

Τα παραπάνω επιτρέπουν να αποδειχθεί μία βασική ιδιότητα των πολλαπλοτήτων, η παρασυμπάγεια. Για να οριστεί η παρασυμπάγεια, θα δώσουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 1.2 (Εκλέπτυνση)**.** *Έστω ένα κάλυμμα $\{U_i\}_{i\in I}$ ενός τοπολογικού χώρου $(X, \mathfrak{T})$. Θα λέμε ότι η οικογένεια $\{V_j\}_{j\in J}$ είναι εκλέπτυνση του $\{U_i\}_{i\in I}$ εάν $X = \bigcup_{j\in J} V_j$ και:*

$$\text{Για κάθε } j \in J \text{ υπάρχει } i_j \in I \text{ ώστε } V_j \subseteq U_{i_j}$$

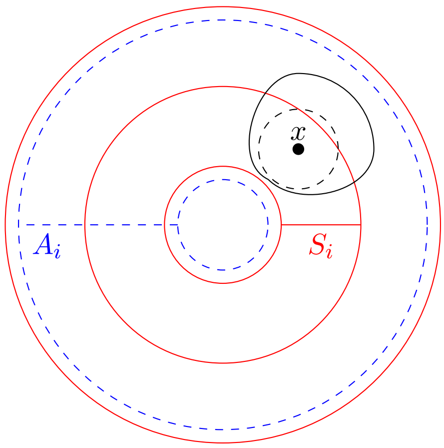
Ορισμός 1.3 (Παρασυμπάγεια)**.** *Λέμε ότι ένας τοπολογικός χώρος $(X, \mathfrak{T})$ είναι παρασυμπαγής εάν κάθε ανοικτό κάλυμμα $\{U_i\}_{i\in I}$ έχει τοπικά πεπερασμένη εκλέπτυνση $\{V_j\}_{j\in J}$. Δηλαδή, η $\{V_j\}_{j\in J}$ είναι εκλέπτυνση του $\{U_i\}_{i\in I}$ και για κάθε $x \in X$ τα σύνολα:*

$$J_x = \{j \in J \mid V_j \ni x\}$$

έχουν πεπερασμένα το πλήθος στοιχεία.

Πρόταση 1.5 (Παρασυμπάγεια των πολλαπλοτήτων)**.** *Κάθε πολλαπλότητα $(\mathcal{M}, \mathfrak{T})$ είναι παρασυμπαγής τοπολογικός χώρος. Μάλιστα η εν λόγω τοπικά πεπερασμένη εκλέπτυνση μπορεί να θεωρηθεί αριθμήσιμη.*

Απόδειξη: Έστω $\{U_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ ένα ανοικτό κάλυμμα του $\mathcal{M}$. Από την Πρόταση 1.4 μπορούμε να βρούμε συμπαγή υποσύνολα K_n που εξαντλούν την πολλαπλότητα $\mathcal{M}$.



Ορίζουμε τώρα τα εξής σύνολα:

$$S_1 = K_1,\ S_n = K_n \backslash K^\circ_{n-1} \text{ για } n > 1$$

και

$$A_1 = \emptyset,\ A_n = K^\circ_{n+1} \backslash K_{n-1} \text{ για } n > 1$$

και παρατηρούμε ότι τα S_n είναι συμπαγή και τα A_n ανοικτά. Για κάθε $x \in S_n$, επιλέγουμε U_{k_x} που περιέχει αυτό το x κι έπειτα μία ανοικτή περιοχή $B_{k_x} \subseteq A_{n+1} \cap U_{k_x}$. Μαζεύοντας όλες αυτές τις περιοχές, μπορούμε να κατασκευάσουμε κάλυμμα $\{B_{k_x}\}_{x\in S_n}$ του S_n με την ιδιότητα $B_{k_x} \subseteq U_{k_x}$.

Λόγω συμπάγειας, αρκεί από την προαναφερθείσα οικογένεια ένα πεπερασμένο πλήθος ώστε να επιτευχθεί κάλυμμα του S_n, έστω $\{B^n_k\}_{k\leqslant m_n}$. Ενώνοντας τα καλύματα μεταξύ τους για τα διάφορα n, λαμβάνουμε το ανοικτό κάλυμμα $\{B^n_k\}_{k\leqslant m_n, n\in\mathbb{N}}$ το οποίο είναι εκλέπτυνση του

$\{U_k\}_{k\in\mathbb{N}}$. Το ότι είναι επίσης τοπικά πεπερασμένη είναι συνέπεια της κατασκευής, αφού κάθε S_n καλύπτεται από πεπερασμένα το πλήθος ανοικτά σύνολα, τα οποία περιέχονται στα A_{n+1}. Τα A_n με τη σειρά τους είτε έχουν κενή τομή, είτε τέμνονται σε σύνολο που περιέχεται σε ένωση δύο S_n.

□

Μέσω της παρασυμπάγειας των πολλαπλοτήτων μπορεί να αποδειχθεί η φυσιολογικότητά τους. Με τη φυσιολογικότητα (δηλαδή την ιδιότητα T_4) είναι δυνατόν να αποδειχθούν αποτελέσματα επέκτασης, όπως είναι το (συνεχές) λήμμα του Urisohn.

Λήμμα 1.1 (Η κανονικότητα των πολλαπλοτήτων). *Κάθε πολλαπλότητα $(\mathcal{M},\mathfrak{T})$ είναι κανονικός χώρος (δηλαδή είναι T_3).*

Απόδειξη: Ας θεωρήσουμε K κλειστό στο $\mathcal{M}$ και $x\in\mathcal{M}$ με $x\notin K$. Εφόσον ο $\mathcal{M}$ είναι Hausdorff τοπολογικός χώρος, για κάθε $y\in K$ υπάρχει ανοικτή περιοχή U_y του y που διαχωρίζει τα x,y, δηλαδή $x\notin\overline{U_y}$.

Είναι φανερό ότι το σύνολο $\{U_y \mid y\in K\}$ είναι κάλυμμα του K, αυτό που δεν ξέρουμε είναι εάν διαχωρίζει το x από το K (αφού δεν ξέρουμε, για παράδειγμα, αν αληθεύει η σχέση $\overline{\bigcup_{y\in K}U_y}=\bigcup_{y\in K}\overline{U_y}$). Θεωρούμε λοιπόν το σύνολο $\{U_y \mid y\in K\}\cup\{\mathcal{M}\backslash K\}$ το οποίο αποτελεί ανοικτό κάλυμμα του $\mathcal{M}$. Λόγω παρασυμπάγειας, υπάρχει $\{V_j\}_{j\in J}\cup\{\mathcal{M}\backslash K\}$ τοπικά πεπερασμένη εκλέπτυνση του $\{U_y \mid y\in K\}\cup\{\mathcal{M}\backslash K\}$, που -αφού είναι τοπικά πεπερασμένη- έχει την ιδιότητα:

$$\overline{\bigcup_{j\in J}V_j}=\bigcup_{j\in J}\overline{V_j}$$

(αυτό μπορεί να αποδειχθεί, για παράδειγμα, με τον χαρακτηρισμό των κλειστών θηκών με δίκτυα).

Έτσι έχουμε δείξει ότι $K\subseteq\bigcup_{j\in J}V_j$ και $x\in\mathcal{M}\backslash\overline{\bigcup_{j\in J}V_j}$ (αφού $x\notin\overline{V_j}$), και κατά συνέπεια την κανονικότητα της πολλαπλότητας.

□

Πρόταση 1.6 (Η φυσιολογικότητα των πολλαπλοτήτων). *Κάθε πολλαπλότητα $(\mathcal{M},\mathfrak{T})$ είναι φυσιολογικός χώρος (δηλαδή είναι T_4).*

Απόδειξη: Θα αποδείξουμε αυτήν την πρόταση χρησιμοποιώντας το Λήμμα 1.1 και την ιδέα της απόδειξής του. Κατ' αρχάς, θεωρούμε $K,F\subseteq\mathcal{M}$ δύο κλειστά σύνολα. Από το Λήμμα 1.1 (δηλαδή από την κανονικότητα του χώρου), για κάθε $y\in F$ μπορούμε να βρούμε ανοικτό σύνολο V_y ώστε $y\in V_y$ και $\overline{V_y}\cap K=\emptyset$.

Τώρα το σύνολο $\{V_y \mid y\in F\}\cup\{\mathcal{M}\backslash F\}$ αποτελεί κάλυμμα του $\mathcal{M}$, οπότε από τη παρασυμπάγεια μπορεί να βρεθεί τοπικά πεπερασμένη εκλέπτυνση $\{A_j\}_{j\in J}\cup\{\mathcal{M}\backslash F\}$. Παρατηρούμε ότι:

$$F\subseteq\bigcup_{j\in J}A_j \text{ και } \overline{\bigcup_{j\in J}A_j}=\bigcup_{j\in J}\overline{A_j}$$

Από τη δεύτερη ιδιότητα προκύπτει ότι $\overline{\bigcup_{j\in J}A_j}\cap K=\emptyset$, και κατά συνέπεια $F\subseteq\bigcup_{j\in J}A_j$ και $K\subseteq\mathcal{M}\backslash\overline{\bigcup_{j\in J}A_j}$. Αυτό αποδεικνύει τη φυσιολογικότητα του χώρου.

□

Θεώρημα 1.1 (Λήμμα του Urisohn). *Έστω $(\mathcal{M},\mathfrak{T})$ μία πολλαπλότητα και $K,F\subseteq\mathcal{M}$ κλειστά και ξένα σύνολα. Υπάρχει συνάρτηση $f : X\to\mathbb{R}$ (ο $\mathbb{R}$ θεωρείται με τη συνήθη μετρική τοπολογία) η οποία είναι συνεχής με $f(K)=\{0\}$ και $f(F)=\{1\}$ (μάλιστα $f(\mathcal{M})\subseteq[0,1]$).*

Απόδειξη: Η απόδειξη είναι εκτενής και θα γίνει σε βήματα. Η ιδέα είναι να κατασκευαστούν διάφορα ανοικτά U ούτως ώστε $K \subseteq U \subseteq \overline{U} \subseteq F^c$. Σε καθένα $x \in \mathscr{M}$ θα δίνεται μια τιμή $f(x)$ που θα εξαρτάται από τα U στα οποία το x ανήκει.

Βήμα Ι: Για αρχή θα κατασκευάσουμε ένα σύνολο δεικτών, που θα χρησιμεύσει για τη σήμανση των διάφορων $U = U(d)$. Ορίζουμε:

$$\begin{aligned}
\Delta_0 &= \{0, 1\} \\
\Delta_1 &= \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{2} = 1\right\} \\
\Delta_2 &= \left\{0, \frac{1}{4}, \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{4}{4} = 1\right\} \\
&\vdots \\
\Delta_n &= \left\{\frac{k}{2^n} \;\middle|\; k \in \{1, \cdots, 2^n\}\right\} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

κι επίσης $\Delta = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta_n$. Το Δ είναι πυκνό στο $[0,1]$, οπότε αν ορίσουμε $D = \Delta \cup (1, \infty)$, το D θα είναι πυκνό στο $[0, \infty)$.

Βήμα ΙΙ: Στη συνέχεια θα κατασκευάσουμε τα σύνολα $\big(U(d)\big)_{d \in D}$. Στα επόμενα λοιπόν θα θεωρούμε ότι $d \in D$.

Εάν $d > 1$, ορίζουμε $U(d) = \mathscr{M}$. Επιπλέον ορίζουμε $U(1) = F^c$.

Εάν $d \in \Delta$, υπάρχει κάποιος φυσικός $n \in \mathbb{N}$ ούτως ώστε $d \in \Delta_n$. Σε αυτήν την περίπτωση θα ορίσουμε επαγωγικά τα $U(d)$:

- Για $n = 1$ θα ορίσουμε τα $U(d)$ με $d \in \Delta_1 \backslash \{1\} = \{0\}$. Επειδή ο χώρος $(\mathscr{M}, \mathfrak{T})$ είναι T_4, υπάρχει ανοικτό σύνολο $U(0)$ τέτοιο ώστε:

$$K \subseteq U(0) \subseteq \overline{U(0)} \subseteq U(1)$$

- Για $n = 2$ θα ορίσουμε τα $U(d)$ με $d \in \Delta_2 \backslash \Delta_1 = \{1/2\}$. Από το T_4 του χώρου, υπάρχει ανοικτό $U(1/2)$ τέτοιο ώστε:

$$U(0) \subseteq U(1/2) \subseteq \overline{U(1/2)} \subseteq U(1)$$

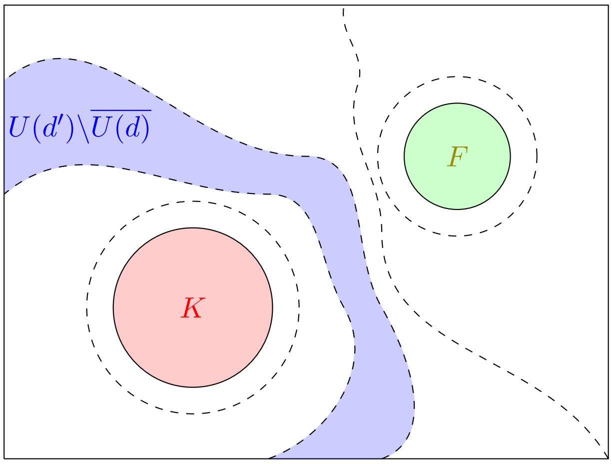
- Εάν τα διάφορα σύνολα $U(d)$ έχουν οριστεί για δείκτες $d \in \Delta_n$, θα ορίσουμε τα $U(d)$ με $d \in \Delta_{n+1} \backslash \Delta_n$. Παρατηρούμε ότι τα διάφορα $d \in \Delta_{n+1} \backslash \Delta_n$ είναι ακριβώς τα $k/2^{n+1}$ για τα οποία το k είναι περιττός -πράγματι, αν ήταν άρτιος, θα μπορούσαμε (κάνοντας απλοποίηση αριθμητή και παρονομαστή με το 2) να αναχθούμε σε στοιχείο του Δ_n. Για κάθε περιττό $k < 2^{n+1}$ έχουμε λοιπόν ότι:

$$\frac{k-1}{2^{n+1}}, \frac{k+1}{2^{n+1}} \in \Delta_n, \text{ οπότε τα αντίστοιχα } U\left(\frac{k-1}{2^{n+1}}\right), U\left(\frac{k+1}{2^{n+1}}\right) \text{ έχουν οριστεί (επαγωγικά)}$$

  Ξανά από το T_4 του χώρου, βρίσκουμε σύνολα:

$$\overline{U\left(\frac{k-1}{2^{n+1}}\right)} \subseteq U\left(\frac{k}{2^{n+1}}\right) \subseteq \overline{U\left(\frac{k}{2^{n+1}}\right)} \subseteq U\left(\frac{k+1}{2^{n+1}}\right)$$

  Μάλιστα τα σύνολα που βρίσκουμε εμφανίζουν κάποια μονοτονία: $d \leqslant d' \Rightarrow U(d) \subseteq U(d')$.



Βήμα III: Για κάθε $x \in \mathscr{M}$ ορίζουμε $D_x = \{d \in D \mid x \in U(d)\}$. Είναι ίσως φανερό ότι $D_x \neq \emptyset$, αφού προηγουμένως ορίσαμε $U(d) = \mathscr{M}$ για $d > 1$ -οπότε σίγουρα $(1, \infty) \subseteq D_x$. Ορίζουμε τώρα συνάρτηση $f : \mathscr{M} \to \mathbb{R}$ μέσω του τύπου:

$$f(x) = \inf D_x$$

και παρατηρούμε ότι επειδή $(1, \infty) \subseteq D_x$ (παίρνοντας infimum) $1 = \inf(1, \infty) \geqslant f(x)$. Επιπλέον, με ανάλογο σκεπτικό, επειδή $D_x \subseteq [0, \infty)$ θα έχουμε $f(x) \geqslant 0$. Δηλαδή $f(\mathscr{M}) \subseteq [0, 1]$.

Τώρα αν $x \in K$, επειδή $x \in U(0)$ και $U(0) \subseteq U(d)$ για κάθε d, έπεται $f(x) = 0$. Επομένως $f(A) = \{0\}$. Αν πάλι $x \in F$, τότε $x \notin F^c = U(1)$, κι επειδή για κάθε $d \in \Delta$ έχουμε $U(d) \subseteq U(1)$, το x δεν ανήκει σε κανένα $U(d)$, $d \in \Delta$. Οπότε $d > 1$ και $D_x = (1, \infty) \Rightarrow f(x) = 1$. Από αυτό έπεται ότι $f(F) = \{1\}$.

Βήμα IV: Αυτό που μένει να αποδειχθεί είναι η συνέχεια της f. Θεωρούμε λοιπόν τυχαίο $x \in \mathscr{M}$ και δείχνουμε τα εξής δύο πράγματα:

- Εάν $x \in \overline{U(d)}$, τότε $f(x) \leqslant d$. Πράγματι, αν $x \in \overline{U(d)}$ τότε $x \in U(d')$ για κάθε $d' > d$. Έχουμε λοιπόν ότι $D_x \supseteq (d, \infty)$ κι επομένως $f(x) \leqslant d$.

- Εάν $x \notin U(d)$, τότε $f(x) \geqslant d$. Πράγματι, αν $x \notin U(d)$ τότε $x \notin U(d')$ για κάθε $d' < d$. Οπότε $D_x \subseteq (d, \infty)$ και $f(x) \geqslant d$.

Για να δείξουμε τη συνέχεια της f, αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ανοικτή περιοχή U ούτως ώστε:

$$f(U) \subseteq \big(f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon\big)$$

Εφόσον το D είναι πυκνό στο $[0, \infty)$, επιλέγουμε d, d' τέτοια ώστε $f(x) - \varepsilon < d < f(x) < d' < f(x) + \varepsilon$. Τότε το σύνολο $U = U(d')\backslash\overline{U(d)}$ είναι ανοικτό και μάλιστα περιέχει το x. Πράγματι, εφόσον $f(x) < d'$, το **δεύτερο** • δίνει ότι $x \in U(d')$ (αφού αν δεν άνηκε η ανισότητα θα αντιστρεφόταν). Επιπλέον, εφόσον $f(x) > d$, το **πρώτο** • δίνει ότι $x \notin \overline{U(d)}$, δηλαδή τελικά $x \in U(d')\backslash\overline{U(d)}$. Από τον ορισμό του U παρατηρήστε ότι:

$$f(U) \subseteq (d, d') \subseteq \big(f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon\big)$$

οπότε το U είναι το ζητούμενο ανοικτό που αποδεικνύει τη συνέχεια της f.

□

Ως τώρα ασχοληθήκαμε με πολλαπλότητες που είναι τοπικά ομοιομορφικές με τους $\mathbb{R}^n$. Αυτή η μορφή τοπικού ομοιομορφισμού απαιτεί, κατά μία έννοια, να μην υπάρχει «σύνορο» στις πολλαπλότητες. Επομένως, σύνολα όπως είναι τα κλειστά διαστήματα, δεν μπορούν να αποτελούν (με τη συνήθη τοπολογία) τοπολογικές πολλαπλότητες. Εισάγουμε λοιπόν τον ορισμό της πολλαπλότητας με σύνορο:

Ορισμός 1.4 (Τοπολογικές πολλαπλότητες με σύνορο)**.** *Ένας τοπολογικός χώρος* $(\mathscr{M}, \mathfrak{T}_{\mathscr{M}})$ *θα καλείται* $n-$*διάστατη τοπολογική πολλαπλότητα με σύνορο εάν τα ακόλουθα αληθεύουν:*

i. *Για κάθε* $x \in \mathscr{M}$ *και για κάθε ανοικτή περιοχή* U_x *του* x *υπάρχει τοπικός ομοιομορφισμός:*

$$\varphi_{U_x} : (U_x, \mathfrak{T}_{\mathscr{M}|U_x}) \to (\mathbb{R}^n, \mathfrak{T}_{\mathbb{R}^n})$$

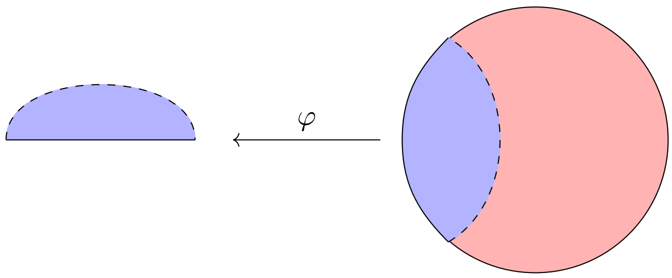
ή

$$\varphi_{U_x} : (U_x, \mathfrak{T}_{\mathscr{M}|U_x}) \to (\overline{\mathbb{R}^n_+}, \mathfrak{T}_{\mathbb{R}^n|\overline{\mathbb{R}^n_+}})$$

όπου $\mathbb{R}^n_+$ *είναι ο ημιχώρος* $\{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n > 0\}$*. Η κλειστή θήκη νοείται στον* $\mathbb{R}^n$*.*

ii. *Ο* $(\mathscr{M}, \mathfrak{T}_{\mathscr{M}})$ *είναι Hausdorff τοπολογικός χώρος.*

iii. *Ο* $(\mathscr{M}, \mathfrak{T}_{\mathscr{M}})$ *είναι δεύτερος αριθμήσιμος τοπολογικός χώρος.*



Γενικά τα αποτελέσματα που έχουμε ήδη δει στις πολλαπλότητες χωρίς σύνορο μεταβιβάζονται στην περίπτωση των πολλαπλοτήτων με σύνορο. Αυτό είναι φυσιολογικό, αφού για την απόδειξη των αποτελεσμάτων ουσιαστικά χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι οι ομοιομορφισμοί έχουν εικόνα σύνολα με μη κενό εσωτερικό. Από τη μορφή των συνόλων της σχετικής τοπολογίας $\mathfrak{T}_{\mathbb{R}^n|\overline{\mathbb{R}^n_+}}$, πράγματι τα ανοικτά σύνολα έχουν μη κενό εσωτερικό στην τοπολογία $\mathfrak{T}_{\mathbb{R}^n}$.

Για να γίνουμε περισσότερο σαφείς, θα σταθούμε στην περίπτωση της τοπικής συμπάγειας. Από τον ορισμό, μπορούμε για κάθε $x \in \mathscr{M}$ να βρούμε τοπικό ομοιομορφισμό $\varphi_{U_x} : U_x \to \mathbb{R}^n$ ή $\varphi_{U_x} : U_x \to \overline{\mathbb{R}^n_+}$. Η πρώτη περίπτωση ομοιομορφισμού συναντάται και στις πολλαπλότητες χωρίς σύνορο, οπότε ουσιαστικά χρειάζεται να μελετηθεί η δεύτερη. Επιλέγοντας $\varepsilon > 0$ ώστε $B\big(\varphi_{U_x}(x), \varepsilon\big) \cap \overline{\mathbb{R}^n_+} \subseteq \overline{B}\big(\varphi_{U_x}(x), \varepsilon\big) \cap \overline{\mathbb{R}^n_+} \subseteq \overline{\mathbb{R}^n_+}$, μπορούμε να ορίσουμε $B_x = \overline{B}\big(\varphi_{U_x}(x), \varepsilon\big) \cap \overline{\mathbb{R}^n_+}$ και να λάβουμε τοπικό ομοιομορφισμό:

$$\varphi_{U_x}\big|_{\varphi^{-1}_{U_x}(B_x)} : \varphi^{-1}_{U_x}(B_x) \to B_x$$

Επειδή το B_x είναι συμπαγές στο $\overline{\mathbb{R}^n_+}$, αποδεικνύεται η τοπική συμπάγεια στο $x \in \mathscr{M}$.

Έτσι λοιπόν δεν θα σταθούμε στην επέκταση των διάφορων ιδιοτήτων των πολλαπλοτήτων χωρίς σύνορο στις πολλαπλότητες με σύνορο. Αυτό που χρειάζεται να μελετηθεί είναι η ειδοποιός διαφορά των δύο αυτών κατηγοριών πολλαπλοτήτων, που είναι το σύνορο.

Ορισμός 1.5 (Συνοριακά σημεία και σύνορο)**.** *Έστω* $(\mathscr{M}, \mathfrak{T}_{\mathscr{M}})$ *μία τοπολογική πολλαπλότητα.*

i. *Ένα σημείο* $x \in \mathscr{M}$ *για το οποίο υπάρχουν μόνο τοπικοί ομοιομορφισμοί της μορφής:*

$$\varphi_{U_x} : (U_x, \mathfrak{T}_{\mathscr{M}|U_x}) \to (\overline{\mathbb{R}^n_+}, \mathfrak{T}_{\mathbb{R}^n|\overline{\mathbb{R}^n_+}})$$

θα καλείται συνοριακό σημείο της $\mathscr{M}$*.*

... *ii. Συμβολίζουμε με $\partial\mathscr{M}$ το σύνολο των συνοριακών σημείων της πολλαπλότητας, δηλαδή το σύνορο της πολλαπλότητας. Για να μην υπάρχει πιθανότητα σύγχυσης με το τοπολογικό σύνορο, θα συμβολίζουμε με* bd *το τοπολογικό σύνορο.*

Παρατήρηση 1.2. *Έστω $(\mathscr{M},\mathfrak{T})$ μία τοπολογική πολλαπλότητα.*

i. Εάν η $(\mathscr{M},\mathfrak{T})$ είναι πολλαπλότητα χωρίς σύνορο, τότε $\partial\mathscr{M}=\emptyset$.

ii. Η $\mathscr{M}\backslash\partial\mathscr{M}$ είναι πολλαπλότητα χωρίς σύνορο.

Πρόταση 1.7 (Το σύνορο ως πολλαπλότητα)**.** *Έστω $(\mathscr{M},\mathfrak{T})$ μία $n-$διάστατη τοπολογική πολλαπλότητα με σύνορο. Η $(\partial\mathscr{M},\mathfrak{T}_{\partial\mathscr{M}})$ με τη σχετική τοπολογία αποτελεί $(n-1)-$διάστατη πολλαπλότητα χωρίς σύνορο. Ως συνέπεια, για κάθε πολλαπλότητα $(\mathscr{M},\mathfrak{T})$ έχουμε $\partial\partial\mathscr{M}=\partial^2\mathscr{M}=\emptyset$*

Απόδειξη: Κατ' αρχάς, ο τοπολογικός χώρος $(\partial\mathscr{M},\mathfrak{T}_{\partial\mathscr{M}})$ είναι Hausdorff και δεύτερος αριθμήσιμος, ως χώρος με τη σχετική τοπολογία Hausdorff και δεύτερου αριθμήσιμου τοπολογικού χώρου.

Χρειάζεται μονάχα να δείξουμε ότι για κάθε $x\in\partial\mathscr{M}$ υπάρχει $V_x\in\mathfrak{T}_{\partial\mathscr{M}}$ και τοπικός ομοιομορφισμός:
$$\psi_{V_x}:V_x\to\mathbb{R}^{n-1}$$
Εφόσον $x\in\partial\mathscr{M}$, υπάρχει ομοιομορφισμός:
$$\varphi_{U_x}:U_x\to\overline{\mathbb{R}^n_+}$$
Αυτό που θα δείξουμε είναι ότι:
$$z\in\partial\mathscr{M}\cap U_x\Leftrightarrow\varphi_{U_x}(z)\in\mathrm{bd}\,\overline{\mathbb{R}^n_+},\ \text{δηλαδή}\ \varphi_{U_x}(\partial\mathscr{M}\cap U_x)=\mathrm{bd}\,\overline{\mathbb{R}^n_+}$$
Δεδομένου του προηγούμενου αποτελέσματος, η:
$$\varphi_{U_x}|_{\partial\mathscr{M}}:\partial\mathscr{M}\cap U_x\to\varphi_{U_x}(\partial\mathscr{M}\cap U_x)=\mathrm{bd}\,\overline{\mathbb{R}^n_+}$$
θα είναι ομοιομορφισμός. Επειδή τώρα $\mathrm{bd}\,\overline{\mathbb{R}^n_+}=\mathbb{R}^n\times\{0\}$, η προηγούμενη απεικόνιση μπορεί να τροποποιηθεί ώστε να είναι της μορφής $\partial\mathscr{M}\cap U_x\to\mathbb{R}^{n-1}$. Έτσι θα έχουμε δείξει ότι το σύνορο $\partial\mathscr{M}$ είναι πολλαπλότητα χωρίς σύνορο, διάστασης $n-1$.

Βήμα I: Θα δείξουμε ότι αν $z\in\partial\mathscr{M}\cap U_x$, τότε $\varphi_{U_x}(z)\in\mathrm{bd}\,\overline{\mathbb{R}^n_+}$. Εάν προς άτοπο $\varphi_{U_x}(z)\notin\mathrm{bd}\,\overline{\mathbb{R}^n_+}$, τότε θα μπορεί να βρεθεί ανοικτή περιοχή A_z του $\varphi_{U_x}(z)$ που δεν τέμνει το $\mathrm{bd}\,\overline{\mathbb{R}^n_+}$. Μάλιστα, αφού δεν τέμνει το σύνορο, θα πρέπει να είναι ομοιομορφική με το $\mathbb{R}^n$.

Θεωρώντας τη συνάρτηση:
$$\varphi_{U_x}|_{\varphi^{-1}_{U_x}(A_z)}:\varphi^{-1}_{U_x}(A_z)\to A_z$$
παρατηρούμε ότι αυτή είναι τοπικός ομοιομορφισμός γύρω από το z.

Μάλιστα, αφού το A_z είναι ομοιομορφικό με το $\mathbb{R}^n$, ο προηγούμενος τοπικός ομοιομορφισμός μπορεί να τροποποιηθεί με τον αναμενόμενο τρόπο και να λάβει τη μορφή $\varphi^{-1}_{U_x}(A_z)\to\mathbb{R}^n$. Αυτό είναι άτοπο, αφού $z\in\partial\mathscr{M}$.

Βήμα II: Θα δείξουμε ότι αν $\varphi_{U_x}(z)\in\mathrm{bd}\,\overline{\mathbb{R}^n_+}$ τότε $z\in\partial\mathscr{M}\cap U_x$. Εάν προς άτοπο υποθέσουμε ότι $z\notin\partial\mathscr{M}\cap U_x$, τότε θα μπορεί να βρεθεί ανοικτή περιοχή $U_z\subseteq U_x$ του z και τοπικός ομοιομορφισμός:
$$\varphi_{U_z}:U_z\to\mathbb{R}^n$$

Θεωρώντας τη συνάρτηση:

$$\varphi_{U_x}|_{U_z} \circ \varphi_{U_z}^{-1} : \mathbb{R}^n \to U_z \to \varphi_{U_x}(U_z)$$

παρατηρούμε ότι αυτή είναι ένας ομοιομορφισμός.

Επιπλέον, το $\varphi_{U_x}(U_z)$ είνα ανοικτό (λόγω ομοιομορφισμού) και τέμνει το $\mathrm{bd}\ \overline{\mathbb{R}^n_+}$ (αφού $\varphi_{U_x}(z) \in \mathrm{bd}\ \overline{\mathbb{R}^n_+}$). Κατά συνέπεια, είναι ομοιομορφικό με το $\overline{\mathbb{R}^n_+}$. Τροποποιώντας τον προηγούμενο ομοιομορφισμό με τον αναμενόμενο τρόπο, προκύπτει ομοιομορφισμός των $\mathbb{R}^n$ και $\overline{\mathbb{R}^n_+}$, το οποίο είναι άτοπο, αφού τα εν λόγω σύνολα δεν είναι ομοιομορφικά.

Τα παραπάνω αποδεικνύουν το πρώτο σκέλος της πρότασης. Όσον αφορά το δεύτερο, εάν μία πολλαπλότητα $(\mathscr{M}, \mathfrak{T})$ δεν έχει σύνορο, τότε $\partial\mathscr{M} = \emptyset$ κι άρα $\partial\partial\mathscr{M} = \emptyset$. Επίσης, εάν μία πολλαπλότητα $(\mathscr{M}, \mathfrak{T})$ έχει σύνορο, τότε η $\partial\mathscr{M}$ είναι πολλαπλότητα χωρίς σύνορο, και τότε $\partial\partial\mathscr{M} = \emptyset$.

□

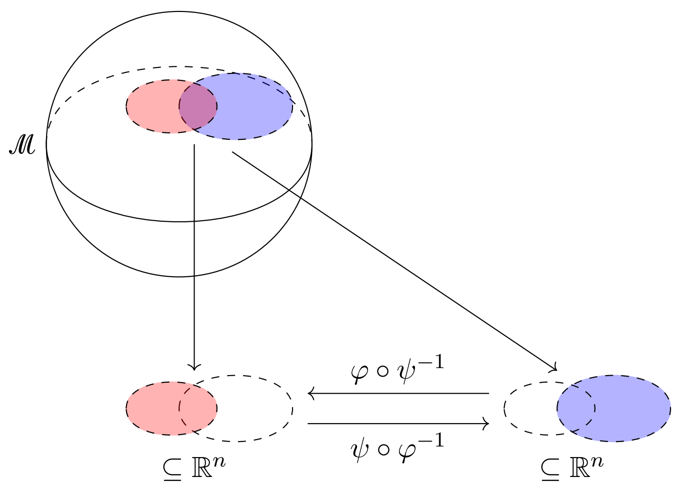
1.2 Διαφορική δομή και ομαλότητα

Στις τοπολογικές πολλαπλότητες περιγράφαμε την τοπική ομοιότητα με τους $\mathbb{R}^n$ μέσω τοπικών ομοιομορφισμών $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$. Η ύπαρξη αυτών των τοπικών ομοιομορφισμών δεν εξασφαλίζει ασφαλώς τις ίδιες συντεταγμένες, παρά μόνο έναν τρόπο ομαλής μετάβασης μεταξύ των συνόλων τοπικού ομοιομορφισμού. Δηλαδή, εάν $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ και $\psi : V \to \mathbb{R}^n$ είναι τοπικοί ομοιομορφισμοί με $U \cap V \neq \emptyset$, οι:

$$\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V) \text{ και } \varphi \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap V) \to \varphi(U \cap V)$$

είναι συνεχείς (δηλαδή τα $\varphi(U \cap V)$ και $\psi(U \cap V)$ είναι ομοιομορφικά).

Αν τώρα ήμασταν ναύτες και διαθέταμε τοπικούς χάρτες -δηλαδή τοπικούς ομοιομορφισμούς- θα θέλαμε η μετάβαση μεταξύ των χαρτών να γίνεται με «όσο μεγαλύτερη φυσιολογικότητα» μπορεί να μας επιτραπεί. Ένας τρόπος να γίνει καλύτερη η δομή των πολλαπλοτήτων είναι να απαιτηθεί η μετάβαση μεταξύ των συνόλων τοπικού ομοιομορφισμού να είναι όχι απλώς συνεχής, αλλά C^k, $1 \leqslant k \leqslant \infty$.



Ορισμός 1.6 (Χάρτες και διαφορικοί/C^k-συμβιβαστοί χάρτες). *Έστω $(\mathscr{M}, \mathfrak{T})$ μία $n-$διάστατη τοπολογική πολλαπλότητα.*

i. Κάθε ζεύγος (U, φ), με $U \in \mathfrak{T}$ και $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ τοπικός ομοιομορφισμός, καλείται χάρτης.

... *ii. Έστω $1 \leqslant k \leqslant \infty$. Δύο χάρτες (U, φ), (V, ψ) λέγονται διαφορικά (ή αντίστοιχα C^k-)συμβιβαστοί εάν οι μεταβάσεις μεταξύ των χαρτών:*

$$\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V) \text{ και } \varphi \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap V) \to \varphi(U \cap V)$$

είναι διαφορίσιμες (ή αντίστοιχα C^k), δηλαδή, οι «τοπικές αλλαγές συντεταγμένων» είναι διαφορίσιμες (ή C^k). Στην ουσία απαιτείται οι $\psi \circ \varphi^{-1}$, $\varphi \circ \psi^{-1}$ να είναι διαφορίσιμες (ή C^k-αμφιδιαφορίσεις).

Ορισμός 1.7 (Διαφορικοί/C^k-άτλαντες)**.** *Έστω $(\mathscr{M}, \mathfrak{T})$ μία $n-$διάστατη τοπολογική πολλαπλότητα. Ένας C^k-άτλαντας $\mathscr{A}$ είναι ένα σύνολο διαφορικά (ή αντίστοιχα C^k-) συμβιβαστών χαρτών:*

$$\mathscr{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$$

που αποτελεί κάλυμμα του $\mathscr{M}$.

Εφοδιάζοντας μία τοπολογική πολλαπλότητα με έναν C^k-άτλαντα προσδίδουμε μία επιπλέον διαφορική δομή στην πολλαπλότητα. Πολλές φορές αναφερόμαστε σ' αυτές τις «νέες» δομές ως C^k-πολλαπλότητες, ή -στην περίπτωση του C^∞- ομαλές πολλαπλότητες.

Ορισμός 1.8 (Διαφορικές/C^k-πολλαπλότητες)**.** *Μία πολλαπλότητα $(\mathscr{M}, \mathfrak{T}, \mathscr{A})$ εφοδιασμένη με έναν διαφορικό (ή C^k-)άτλαντα $\mathscr{A}$ καλείται διαφορική (ή C^k-)πολλαπλότητα. Ιδιαιτέρως στην περίπτωση του C^∞, λέμε ότι η πολλαπλότητα είναι ομαλή.*

Κάθε πολλαπλότητα μπορεί ενδεχομένως να εφοδιαστεί με πολλούς διαφορικούς ή C^k-άτλαντες. Συχνά, για να μην υπάρχει αμφιβολία όσον αφορά τη διαφορική δομή που προσδίδουμε στην πολλαπλότητα, χρησιμοποιούμε τον μεγιστικό διαφορικό ή C^k-άτλαντα της πολλαπλότητας. Παρακάτω αποδεικνύουμε μόνο την ύπαρξη των C^k-μεγιστικών ατλάντων, καθώς η περίπτωση των μεγιστικών διαφορικών ατλάντων είναι παρόμοια.

Παρατήρηση 1.3 (Μεγιστικός C^k-άτλαντας)**.** *Κάθε πολλαπλότητα $(\mathscr{M}, \mathfrak{T})$ μπορεί να εφοδιαστεί με έναν μεγιστικό C^k-άτλαντα $\mathscr{A}^k_{\max}$. Δηλαδή με έναν άτλαντα με την ιδιότητα:*

$$\mathscr{A}^k \subseteq \mathscr{A}^k_{\max}$$

για κάθε C^k-άτλαντα $\mathscr{A}^k$. Ο $\mathscr{A}^k_{\max}$ είναι μοναδικός.

Απόδειξη: Θεωρούμε το σύνολο:

$$\mathscr{A}^k_{\max} = \{(U, \varphi) \mid (U, \varphi) \text{ ανά δύο } C^k - \text{συμβιβαστοί χάρτες του } \mathscr{M}\}$$

Το $\mathscr{A}^k_{\max}$, από τον ορισμό του, είναι C^k-άτλαντας που περιέχει όλους τους C^k-άτλαντες ως υποσύνολα. Επίσης από τον ορισμό έπεται ότι ο $\mathscr{A}^k_{\max}$ είναι μοναδικός (αντίστοιχο αποτέλεσμα υπάρχει και για διαφορικούς άτλαντες).

□

Έχοντας εισάγει τη διαφορική δομή στις πολλαπλότητες μέσω των διαφορικών ή C^k-ατλάντων, είναι φυσιολογικό να μελετήσουμε την έννοια της διαφορισιμότητας συναρτήσεων μεταξύ διαφορικών ή C^k-πολλαπλοτήτων $f : (\mathscr{M}, \mathfrak{T}_{\mathscr{M}}, \mathscr{A}) \to (\mathscr{N}, \mathfrak{T}_{\mathscr{N}}, \mathscr{B})$.

Ορισμός 1.9 (Διαφορίσιμες/C^k-συναρτήσεις μεταξύ πολλαπλοτήτων)**.** *Έστω* $(\mathscr{M}, \mathfrak{T}_{\mathscr{M}}, \mathscr{A})$, $(\mathscr{N}, \mathfrak{T}_{\mathscr{N}}, \mathscr{B})$ *δύο διαφορίσιμες (ή αντίστοιχα* C^k-*)πολλαπλότητες διαστάσεων* m *και* n*. Θα λέμε ότι μία συνάρτηση:*

$$f : (\mathscr{M}, \mathfrak{T}_{\mathscr{M}}, \mathscr{A}) \to (\mathscr{N}, \mathfrak{T}_{\mathscr{N}}, \mathscr{B})$$

είναι τοπικά διαφορίσιμη στο $x \in \mathscr{M}$ *εάν υπάρχουν χάρτες* (U, φ) *του* x *και* (V, ψ) *του* $f(x)$ *ώστε* $f(U) \subseteq V$ *και η:*

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi^{-1}(U) \to \psi(V)$$

να είναι διαφορίσιμη (ή αντίστοιχα C^k*). Τη συνάρτηση* $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ *την αποκαλούμε τοπική παράσταση της* f*, και προφανώς εξαρτάται από την επιλογή των χαρτών.*

Ο παραπάνω ορισμός διαφορισιμότητας εμπλέκει τοπικούς χάρτες, οπότε δημιουργείται το ερώτημα εάν μία συνάρτηση μεταξύ πολλαπλοτήτων είναι διαφορίσιμη με μία επιλογή χαρτών, αλλά με μία άλλη όχι. Παρακάτω, κατά μία έννοια, συμπληρώνουμε τον ορισμό, δείχνοντας ότι είναι ανεξάρτητος των τοπικών χαρτών.

Παρατήρηση 1.4 (Περί του ορισμού της διαφορισιμότητας)**.** *Έστω* $f : (\mathscr{M}, \mathfrak{T}_{\mathscr{M}}, \mathscr{A}) \to (\mathscr{N}, \mathfrak{T}_{\mathscr{N}}, \mathscr{B})$ *μία τοπικά διαφορίσιμη (ή* C^k-*)συνάρτηση στο* $x \in \mathscr{M}$*. Για οποιουσδήποτε τοπικούς χάρτες* $(\widetilde{U}, \widetilde{\varphi})$ *του* x *και* $(\widetilde{V}, \widetilde{\psi})$ *του* $f(x)$ *με* $f(\widetilde{U}) \subseteq \widetilde{V}$ *η:*

$$\widetilde{\psi} \circ f \circ \widetilde{\varphi}^{-1} : \widetilde{\varphi}^{-1}(\widetilde{U}) \to \widetilde{\psi}(\widetilde{V})$$

είναι διαφορίσιμη (ή C^k*) τοπικά στο* x*.*

Απόδειξη: Χωρίς μεγάλη βλάβη της γενικότητας, θα ασχοληθούμε μόνο με την C^k-περίπτωση. Θα χρειαστεί να βρούμε ανοικτή περιοχή A του $\widetilde{\varphi}^{-1}(x)$ ώστε η τοπική παράσταση:

$$\widetilde{\psi} \circ f \circ \widetilde{\varphi}^{-1}$$

να είναι C^k στο A.

Λόγω της C^k-συμβιβαστότητας των χαρτών (U, φ), $(\widetilde{U}, \widetilde{\varphi})$ και (V, ψ), $(\widetilde{V}, \widetilde{\psi})$, έπεται ότι οι:

$$\varphi \circ \widetilde{\varphi}^{-1} : \widetilde{\varphi}(U \cap \widetilde{U}) \to \varphi(U \cap \widetilde{U}) \text{ και } \widetilde{\psi} \circ \psi^{-1} : \psi(V \cap \widetilde{V}) \to \widetilde{\psi}(V \cap \widetilde{V})$$

είναι C^k. Τώρα, λόγω της διαφορισιμότητας της f, η τοπική παράσταση:

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi^{-1}(U) \to \psi(V)$$

είναι C^k, και κατά συνέπεια και η:

$$(\widetilde{\psi} \circ \psi^{-1}) \circ (\psi \circ f \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ \widetilde{\varphi}^{-1}) : \widetilde{\varphi}(U \cap \widetilde{U}) \to \widetilde{\psi}(V \cap \widetilde{V})$$

είναι C^k. Όμως η παραπάνω συνάρτηση είναι ακριβώς η τοπική παράσταση $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ στο $A = \widetilde{\varphi}(U \cap \widetilde{U})$, κι έτσι έχουμε το ζητούμενο.

□

Έχοντας ορίσει με φυσιολογικό τρόπο τη διαφορισιμότητα, μπορούμε να αποδείξουμε διάφορα αναμενόμενα αποτελέσματα.

Πρόταση 1.8 (Συνέχεια των διαφορίσιμων συναρτήσεων)**.** *Κάθε τοπικά διαφορίσιμη συνάρτηση* $f : \mathscr{M} \to \mathscr{N}$ *σε* $x \in \mathscr{M}$ *είναι συνεχής στο ίδιο σημείο.*

Απόδειξη: Θεωρούμε τοπικούς χάρτες (U,φ), (V,ψ) στα x και $f(x)$ αντίστοιχα, με $f(U)\subseteq V$. Ξέρουμε ότι η τοπική παράσταση:

$$\psi\circ f\circ\varphi^{-1}:\varphi(U)\to\psi(V)$$

είναι διαφορίσιμη μεταξύ ανοικτών υποσυνόλων του $\mathbb{R}^n$, οπότε είναι και συνεχής. Επίσης, οι φ, ψ^{-1} είναι συνεχής, οπότε με σύνθεση, η $\psi^{-1}\circ(\psi\circ f\circ\varphi^{-1})\circ\varphi=f$ είναι συνεχής στο x.

□

Πρόταση 1.9 (Διαφόριση της σύνθεσης)**.** *Έστω $f:\mathcal{M}\to\mathcal{N}$ και $g:\mathcal{N}\to\mathcal{K}$ δύο διαφορίσιμες (ή αντίστοιχα C^k-)συναρτήσεις στα $x\in\mathcal{M}$ και $f(x)\in\mathcal{N}$ αντίστοιχα. Τότε η σύνθεση $g\circ f$ είναι διαφορίσιμη (ή αντίστοιχα C^k) στο $x\in\mathcal{M}$.*

Απόδειξη: Θα ασχοληθούμε, χωρίς μεγάλη βλάβη της γενικότητας, με την C^k-περίπτωση. Αφού η f είναι C^k, υπάρχουν χάρτες (U,φ), (V,ψ) των x και $f(x)$ με $f(U)\subseteq V$ ώστε η:

$$\psi\circ f\circ\varphi^{-1}:\varphi(U)\to\psi(V)$$

να είναι C^k. Από την Παρατήρηση 1.4 για την C^k-συνάρτηση g, μπορούμε να επιλέξουμε ως περιοχή του $f(x)$ τον χάρτη (V,ψ) κι όχι έναν τυχαίο. Θεωρώντας έναν χάρτη (W,θ) του $g\circ f(x)$, μπορούμε επίσης να θεωρήσουμε ότι $g(V)\subseteq W$ (αφού γενικά, αν αυτό δεν συνέβαινε, θα μπορούσαμε να αντικαταστήσουμε το V από το $\widetilde{V}=V\cap\theta^{-1}(W)$ και το U από το $\widetilde{U}=U\cap\psi^{-1}(\widetilde{V})$). Καταλήγουμε έτσι ότι η:

$$\theta\circ g\circ\psi^{-1}:\psi(V)\to\theta(W)$$

είναι C^k. Με σύνθεση τώρα, έπεται ότι η:

$$(\theta\circ g\circ\psi^{-1})\circ(\psi\circ f\circ\varphi^{-1}):\varphi(U)\to\theta(W)$$

είναι C^k, δηλαδή η $\theta\circ(g\circ f)\circ\varphi^{-1}$ είναι C^k, για κατάλληλους τοπικούς χάρτες.

□

Παρατήρηση 1.5. *Έστω $(\mathcal{M},\mathfrak{T},\mathcal{A})$ μία διαφορική (ή αντίστοιχα C^k-)πολλαπλότητα. Για κάθε τοπικό χάρτη (U,φ), η φ είναι διαφορίσιμη (ή αντίστοιχα C^k).*

Απόδειξη: Και πάλι θα ασχοληθούμε μόνο με την C^k-περίπτωση. Έστω $x\in\mathcal{M}$. Μπορούμε να θεωρήσουμε τους τοπικούς χάρτες (U,φ), $\big(\varphi(U),\mathrm{id}\big)$ στο x και να παρατηρήσουμε ότι:

$$\mathrm{id}\circ\varphi\circ\varphi^{-1}=\mathrm{id}:\varphi(U)\to\varphi(U)$$

Οπότε η φ είναι μία C^k-συνάρτηση.

□

Στη συνέχεια θα αναφέρουμε ένα σημαντικό αποτέλεσμα σχετικά με την τοπική διαφορισιμότητα των συναρτήσεων μεταξύ πολλαπλοτήτων. Θα δείξουμε ότι, για να είναι μία συνάρτηση $f:\mathcal{M}\to\mathcal{N}$ διαφορίσιμη (ή αντίστοιχα C^k) σε $x\in\mathcal{M}$, αρκεί οι διάφοροι περιορισμοί:

$$(\pi_i\psi)\circ f:\mathcal{M}\to\mathcal{N}\to\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}\ (i-\text{συντεταγμένη})$$

είναι διαφορίσιμες για κάθε $i\in\{1,\cdots,n\}$ (ή αντίστοιχα C^k). Ο (V,ψ) είναι τοπικός χάρτης στο $f(x)$ και με π_i συμβολίζουμε τον περιορισμό στον $i-$παράγοντα.

Πρόταση 1.10 (Χαρακτηρισμός της διαφορισιμότητας/του C^k)**.** *Έστω $f : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ μία συνάρτηση και $x \in \mathcal{M}$. Τα ακόλουθα ισοδυναμούν:*

i. Η f είναι τοπικά διαφορίσιμη στο x (αντίστοιχα C^k).

ii. Για κάθε $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ τοπικά διαφορίσιμη στο $f(x)$ (αντίστοιχα C^k), η $g \circ f$ είναι τοπικά διαφορίσιμη στο x (αντίστοιχα C^k).

iii. Για κάθε προβολή π_i, η $(\pi_i\psi) \circ f$ είναι τοπικά διαφορίσιμη στο x (αντίστοιχα C^k). Ο (V, ψ) είναι τοπικός χάρτης στο $f(x)$.

Απόδειξη: Θα ασχοληθούμε μόνο με την περίπτωση του C^k.

(i $\Rightarrow$ ii.) Αυτό είναι συνέπεια της Πρότασης 1.9.

(ii. $\Rightarrow$ iii.) Άμεσο αν τεθεί $g = \pi_i$.

(iii. $\Rightarrow$ i.) Αυτό είναι ουσιαστικά το μόνο που χρειάζεται να αποδειχθεί. Αφού η $(\pi_i\psi) \circ f$ είναι C^k στο x, για κάποιον τοπικό χάρτη (U, φ) του x με $f(U) \subseteq V$ η:

$$\mathrm{id} \circ \big((\pi_i\psi) \circ f\big) \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to (\pi_i\psi)(V)$$

είναι C^k. Δηλαδή η $(\pi_i\psi) \circ f \circ \varphi^{-1}$ είναι C^k. Μαζεύοντας τους προηγούμενους περιορισμούς σε διανυσματική μορφή, η:

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to (\pi_i\psi)(V)$$

είναι C^k. Κατά συνέπεια, η f είναι C^k τοπικά στο x.

□

Κλείνοντας με το κομμάτι της διαφορισιμότητας των συναρτήσεων μεταξύ πολλαπλοτήτων, σημειώνουμε την ακόλουθη πρόταση:

Πρόταση 1.11 (Λήμμα της συγκόλλησης)**.** *Έστω $(\mathcal{M}, \mathfrak{T}_{\mathcal{M}}, \mathcal{A})$, $(\mathcal{N}, \mathfrak{T}_{\mathcal{N}}, \mathcal{B})$ δύο διαφορικές (ή αντίστοιχα C^k-)πολλαπλότητες και $\{U_i\}_{i\in I}$ ένα ανοικτό κάλυμμα του $\mathcal{M}$. Εάν $\{f_i : U_i \to \mathcal{N}\}_{i\in I}$ είναι μία οικογένεια διαφορίσιμων συναρτήσεων (ή αντίστοιχα C^k) ώστε:*

$$f_i|_{U_i\cap U_j} = f_j|_{U_i\cap U_j}$$

τότε υπάρχει διαφορίσιμη (ή αντίστοιχα C^k-)συνάρτηση $f : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ που επεκτείνει τις f_i.

Απόδειξη: Για κάθε $x \in \mathcal{M}$, βρίσκουμε $i_x \in I$ ώστε $x \in U_i$ και ορίζουμε $f(x) = f_{i_x}(x)$. Από την υπόθεση, αυτή η συνάρτηση είναι καλά ορισμένη (αφού στις τομές οι διάφορες f_i συμπίπτουν).

Χωρίς μεγάλη βλάβη της γενικότητας, στη συνέχεια θα μελετήσουμε μόνο την περίπτωση των C^k-συναρτήσεων. Εφόσον κάθε f_i είναι C^k, θα υπάρχουν χάρτες (U, φ) και (V, φ) με $f_{i_x}(U) \subseteq V$ των $x \in U_i$ και $f_{i_x}(x) \in \varphi(U_i)$ ώστε η:

$$\psi \circ f_{i_x}(x) \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \psi(V)$$

να είναι C^k. Δηλαδή, από τον ορισμό:

$$\psi \circ f(x) \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \psi(V)$$

Αυτό αποδεικνύει το ζητούμενο. □

Ορισμός 1.10 (Υποπολλαπλότητες). *Έστω* $(\mathscr{M}, \mathfrak{T}, \mathscr{A})$ *μία διαφορική (αντίστοιχα* C^k-*) πολλαπλότητα διάστασης* m*.*

i. *Γενικά μία πολλαπλότητα με* $\mathscr{N} \subseteq \mathscr{M}$ *θα καλείται υποπολλαπλότητα της* $\mathscr{M}$*.*

ii. *Εάν* $\mathscr{N} \subseteq \mathscr{M}$ *είναι ένα ανοικτό σύνολο, το* $\mathscr{N}$ *εφοδιασμένο μέ τη σχετική τοπολογία και τον «σχετικό» άτλαντα* $\mathscr{B} = \left\{(U \cap \mathscr{N}, \varphi|_{\mathscr{N}}) \;\middle|\; (U, \varphi) \in \mathscr{A}\right\}$ *καθίσταται διαφορική (αντίστοιχα* C^k-*)πολλαπλότητα διάστασης* m*.*

iii. *Επίσης, εάν για κάθε* $p \in \mathscr{N}$ *υπάρχει χάρτης* $(U, \varphi) \in \mathscr{M}$ *ώστε:*

$$\pi_i \varphi|_{\mathscr{N}} = 0, \ \text{για } i \geqslant n+1$$

(όπου $n < m$ *και* π_i *είναι ο περιορισμός στην* $i-$*συντεταγμένη), θα καλούμε την* $\mathscr{N}$ *εμφυτευμένη υποπολλαπλότητα διάστασης* n*. Οι λεπτομέρειες όσον αφορά τη τοπολογική και διαφορική δομή θα διευκρυνιστούν αργότερα.*

Παρατήρηση 1.6. *Έστω* $(\mathscr{M}, \mathfrak{T}, \mathscr{A})$ *μία διαφορική (αντίστοιχα* C^k-*)πολλαπλότητα διάστασης* m*. Μία εμφυτευμένη υποπολλαπλότητα* $\mathscr{N}$ *διάστασης* n *γίνεται πράγματι διαφορική (αντίστοιχα* C^k-*)πολλαπλότητα διάστασης* n*, εάν εφοδιαστεί με κατάλληλους χάρτες και δομή.*

Απόδειξη: Η ιδιότητα του Hausdorff και δεύτερου αριθμήσιμου τοπολογικού χώρου κληρονομείται από τη $\mathscr{M}$, αφού $\mathscr{N} \subseteq \mathscr{M}$.

Όσον αφορά τη τοπολογία, θεωρούμε για κάθε $p \in \mathscr{N}$ χάρτη (U, φ) της $\mathscr{M}$ όπως στον Ορισμό 1.10. Στο σύνολο $U \cap \mathscr{N}$ ορίζουμε για κάθε q:

$$\psi(q) = \pi^n \circ \varphi, \ \text{όπου } \pi^n \text{ είναι ο περιορισμός στις } n-\text{πρώτες συντεταγμένες}$$

και έτσι κατασκευάζουμε χάρτες $(U \cap \mathscr{N}, \psi)$ (αφού έχουμε συνέχεια και αντίστροφη συνέχεια. Το αμφιμονοσήμαντο είναι φανερό).

Όσον αφορά τη διαφορική δομή, θεωρούμε (U, φ), $(\widetilde{U}, \widetilde{\varphi})$ χάρτες της $\mathscr{N}$ και (V, ψ), $(\widetilde{V}, \widetilde{\psi})$ οι αντίστοιχοι χάρτες στο $\mathscr{N}$. Εάν γράψουμε:

$$\widetilde{\psi} \circ \psi = \pi^n \circ \widetilde{\varphi} \circ \varphi^{-1} \circ (\pi^n|_V)^{-1} : \psi(V) \to \psi(\widetilde{V})$$

θα παρατηρήσουμε ότι η μετάβαση των χαρτών είναι διαφορίσιμη (αντίστοιχα C^k).

□

1.3 Ομαλές διαμερίσεις της μονάδας

Αυτό που μας ενδιαφέρει εν συνεχεία είναι οι διαμερίσεις της μονάδας. Δηλαδή, εάν $\{U_i\}_{i \in I}$ είναι ένα κάλυμμα της πολλαπλότητας $\mathscr{M}$, αναζητούνται οικογένειες συναρτήσεων $\{\delta_i\}_{i \in I}$ με $\delta_i : \mathscr{M} \to [0, 1]$, ώστε $\operatorname{supp} \delta_i \subseteq U_i$ και η οικογένεια $\{\operatorname{supp} \delta_i\}_{i \in I}$ να είναι τοπικά πεπερασμένη. Επιπλέον:

$$\sum_{i \in I} \delta_i \equiv 1$$

(σε αυτήν την παρουσίαση δεν θεωρούμε τους φορείς κατ' ανάγκη κλειστά σύνολα). Γενικά θα αναζητήσουμε ομαλές διαμερίσεις της μονάδας $\delta_i \in C^\infty$, γιατί εν τέλει μόνο τέτοιες θα χρησιμοποιήσουμε (και πέραν αυτού, είναι κοινότοπο πλέον στη βιβλιογραφία να μελετόνται μόνο ομαλές διαμερίσεις της μονάδας).

Υπάρχουν διάφορες κατασκευές για τις διαμερίσεις της μονάδας, εκ των οποίων οι περισσότερες χρησιμοποιούν φορείς που προέρχονται από μπάλες. Εμείς εδώ θα φτιάξουμε φορείς που προέρχονται από κύβους. Αυτό δεν θα επηρεάσει την ανάπτυξη των αποτελεσμάτων, αφού κάθε μπάλα περιέχει κύβο με το κέντρο της, και περιέχεται σε κύβο.

Ορισμός 1.11 (Ομαλές διαμερίσεις της μονάδας)**.** *Έστω* $(\mathscr{M}, \mathfrak{T}, \mathscr{A})$ *μία* $C^\infty-$*πολλαπλότητα και* $\{U_i\}_{i\in I}$ *ένα ανοικτό κάλυμμα αυτής. Κάθε οικογένεια συναρτήσεων* $\{\delta_i : \mathscr{M} \to \mathbb{R}\}_{i\in I}$ *με τις ιδιότητες:*

i. $0 \leqslant \delta_i \leqslant 1$

ii $\delta_i \in C^\infty(\mathscr{M}; \mathbb{R})$

iii. $\operatorname{supp} \delta_i \subseteq U_i$ *και η* $\{\operatorname{supp} \delta_i\}_{i\in I}$ *είναι τοπικά πεπερασμένη.*

iv. $\sum_{i\in I} \delta_i \equiv 1$

καλείται ομαλή διαμέριση της μονάδας που κυριαρχείται από το κάλυμμα $\{U_i\}_{i\in I}$.

Λήμμα 1.2. *Έστω* $\{(a_i, b_i)\}_{i\leqslant n}$ *μία οικογένεια μη-κενών διαστημάτων του* $\mathbb{R}$.

i. Υπάρχει $C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ *συνάρτηση* $\delta_{(0,1)}$ *ώστε* $\operatorname{supp} \delta_{(0,1)} = (0, 1)$.

ii. Για κάθε (a_i, b_i), *υπάρχει* $C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ *συνάρτηση* $\delta_{(a_i,b_i)}$ *ώστε* $\operatorname{supp} \delta_{(a_i,b_i)} = (a_i, b_i)$.

iii. Υπάρχει $C^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ *συνάρτηση* δ_γ *ώστε* $\operatorname{supp} \delta_\gamma = \prod_{i=1}^n (a_i, b_i)$.

Απόδειξη: Για το i: Ορίζουμε τη συνάρτηση:

$$h(x) = e^{-1/x}\chi_{(0,1)}(x), \text{ όπου } \chi_{(0,1)} \text{ είναι η δείκτρια συνάρτηση του } (0,1)$$

και επίσης:

$$\delta_{(0,1)}(x) = h(x) \cdot h(1-x)$$

Η $\delta_{(0,1)}$ είναι $C^\infty-$συνάρτηση, $\operatorname{supp} \delta_{(0,1)} = (0, 1)$ και $0 \leqslant \delta_{(0,1)} \leqslant 1$.

Για το ii.: Η εν λόγω συνάρτηση θα προκύψει με κατάλληλη «συστολοδιαστολή». Συγκεκριμένα ορίζουμε:

$$\delta_{(a_i,b_i)}(x) = \delta_{(0,1)}\left(\frac{x - a_i}{b_i - a_i}\right)$$

και τότε η $\delta_{(a_i,b_i)}$ είναι $C^\infty-$συνάρτηση με $\operatorname{supp} \delta_{(a_i,b_i)} = (a_i, b_i)$ και $0 \leqslant \delta_{(a_i,b_i)} \leqslant 1$.

Για το iii: Δεδομένου του ii., ορίζουμε:

$$\delta_\gamma(x) = \prod_{i=1}^n \delta_{(a_i,b_i)}(x)$$

Η δ_γ είναι $C^\infty-$συνάρτηση με $\operatorname{supp} \delta_\gamma = \prod_{i=1}^n (a_i, b_i)$ και $0 \leqslant \delta_\gamma \leqslant 1$.

□

Στην ουσία, όπως θα δούμε παρακάτω, το προηγούμενο Λήμμα 1.2 αποδεικνύει την ύπαρξη συναρτήσεων επάρματος (bump functions).

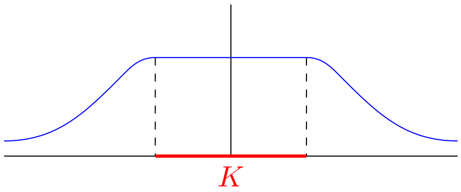
Ορισμός 1.12 (Συναρτήσεις επάρματος)**.** *Έστω* $(\mathscr{M}, \mathfrak{T}, \mathscr{A})$ *μία* $C^\infty-$*πολλαπλότητα,* $U \in \mathfrak{T}$ *και* $K \subseteq U$ *κλειστό. Κάθε συνάρτηση* $\delta : \mathscr{M} \to \mathbb{R}$ *με τις ιδιότητες:*

i. $0 \leqslant \delta \leqslant 1$

ii. $\operatorname{supp} \delta \subseteq U$

iii. $\delta|_K \equiv 1$

καλείται συνάρτηση επάρματος (bump function) του K*, με φορέα στο* U*.*



Η ύπαρξη συναρτήσεων επάρματος ουσιαστικά αποτελεί μία ομαλή εκδοχή του λήμματος του Urisohn (Θεώρημα 1.1).

Θεώρημα 1.2 (Ομαλό λήμμα του Urisohn)**.** *Έστω* $(\mathscr{M}, \mathfrak{T}, \mathscr{A})$ *μία* $C^\infty-$*πολλαπλότητα,* $U \in \mathfrak{T}$ *και* $K \subseteq U$ *κλειστό. Υπάρχει συνάρτηση επάρματος* δ *στο* K*, με φορέα στο* U*. Μάλιστα, για κάθε* $K \subseteq V \subseteq U$ *μπορούμε να έχουμε* $\operatorname{supp} \delta = V$*.*

Απόδειξη: Η απόδειξη είναι εκτενής και θα γίνει σε βήματα.

Βήμα I: Από την απόδειξη της Παρατήρησης 1.1 (δηλαδή από την απόδειξη της Πρότασης 1.3), γνωρίζουμε ότι κάθε πολλαπλότητα έχει βάση από αντίστροφες εικόνες ανοικτών μπαλών. Μάλιστα, αφού κάθε μπάλα περιέχει κύβο και κάθε κύβος περιέχεται σε μπάλα, υπάρχει επίσης βάση από αντίστροφες εικόνες ανοικτών κύβων.

Θεωρούμε λοιπόν μία οικογένεια $\{C_i = \varphi_i^{-1}(K_i)\}_{i \in I}$ από αντίστροφες εικόνες ανοικτών κύβων, ώστε $\mathscr{M} = \bigcup_{i \in I} C_i$. Λόγω της Πρότασης 1.5, η προηγούμενη οικογένεια μπορεί να θεωρηθεί τοπικά πεπερασμένη. Επίσης, η προηγούμενη οικογένεια θα χρειαστεί «μεγαλώσει» λίγο και γίνει $\{C_i^{\#} = \varphi_i^{-1}(K_i^{\#})\}_{i \in I}$, για $K_i \subset K_i^{\#} \subseteq U$. Το ότι μεγαλώνουμε τους κύβους είναι τεχνικό κομμάτι και θα χρειαστεί στη συνέχεια.

Τώρα, από το Λήμμα 1.2, μπορούμε να βρούμε συνάρτηση:

$$\widetilde{\delta}_{K_i} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

με $\widetilde{\delta}_{K_i} \in C^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$, $\operatorname{supp} \widetilde{\delta}_{K_i} = K_i$ και $0 \leqslant \widetilde{\delta}_{K_i} \leqslant 1$. Κατά συνέπεια, οι:

$$\delta_{K_i} : \mathscr{M} \to \mathbb{R} \text{ με } \delta_{K_i} = \begin{cases} \widetilde{\delta}_{K_i} \circ \varphi^{-1} \text{ στο } C_i^{\#} \\ 0 \text{ στο } \mathscr{M} \backslash C_i \end{cases}$$

είναι $C^\infty(\mathscr{M}; \mathbb{R})$ συναρτήσεις με $\operatorname{supp} \delta_{K_i} = C_i$ και $0 \leqslant \delta_{K_i} \leqslant 1$. Το ότι είναι C^∞ δικαιολογείται από το λήμμα της συγκόλλισης, που είδαμε στην Πρόταση 1.11. Εδώ στην ουσία χρειαστήκαμε τους μεγαλύτερους κύβους $K_i^{\#}$.

Βήμα II: Προσθέτοντας τις διάφορες δ_{K_i}, παίρνουμε συνάρτηση:

$$\beta = \sum_{i \in I} \delta_{K_i} : \mathscr{M} \to \mathbb{R}$$

Επειδή η οικογένεια $\{\text{supp}\ \delta_{K_i} = C_i\}_{i\in I}$ είναι τοπικά πεπερασμένη, το παραπάνω άθροισμα είναι ουσιαστικά πεπερασμένο για κάθε $x \in \mathscr{M}$, κι άρα συγκλίνει κατά σημείο. Επιπλέον, είναι $C^\infty-$συνάρτηση και $\beta > 0$. Διαιρώντας με β οι:

$$\delta_i = \frac{\delta_{K_i}}{\beta} : \mathscr{M} \to \mathbb{R}$$

είναι C^∞ με $\text{supp}\ \delta_i = C_i$ και $0 \leqslant \delta_i \leqslant 1$. Επιπλέον:

$$\sum_{i\in I} \delta_i = \sum_{i\in I} \frac{\delta_{K_i}}{\beta} \equiv 1$$

Βήμα III: Για τεχνικούς πάλι λόγους, η οικογένεια $\{C_i\}_{i\in I}$ που επιλέξαμε προηγουμένως θα μπορούσε να είχε κατασκευαστεί με διαφορετικό τρόπο. Θεωρούμε ανοικτό σύνολο $K \subseteq V \subseteq U$ και κατασκευάζουμε καλύμματα:

$$\mathscr{M}\backslash K = \bigcup_{i_K \in I_K} C_{i_K} \text{ και } V = \bigcup_{i_V \in I_V} C_{i_V}$$

από αντίστροφες εικόνες κύβων. Η οικογένεια $\{C_i\}_{i\in I}$ με $I = I_K \cup I_V$ είναι οικογένεια αντιστρόφων εικόνων κύβων και κάλυμμα του $\mathscr{M}$.

Εάν οι δ_i είναι συναρτήσεις όπως αυτές του Βήματος II, ορίζουμε:

$$\delta_K = \sum_{i\in I_K} \delta_i \text{ και } \delta_V = \sum_{i \in I_V} \delta_i$$

Ισχύει ότι $0 \leqslant \delta_K \leqslant 1$, $0 \leqslant \delta_V \leqslant 1$, $\delta_K + \delta_V = 1$ και $\text{supp}\ \delta_K = \mathscr{M}\backslash K$, $\text{supp}\ \delta_V = V$. Επειδή λοιπόν $\text{supp}\ \delta_K = \mathscr{M}\backslash K$, $\text{supp}\ \delta_V = V$ και $\delta_K + \delta_V = 1$ με $\delta_K, \delta_V \geqslant 0$, αναγκαστικά έχουμε:

$$\delta_K \equiv 1 \text{ στο } K \text{ και } \text{supp}\ \delta_K = V \subseteq U$$

Αν ορίσουμε $\delta = \delta_K$, έχουμε τη ζητούμενη συνάρτηση επάρματος του K, με φορέα στο U.

$\square$

Θεώρημα 1.3 (Ύπαρξη διαμερίσεων της μονάδας)**.** *Έστω $(\mathscr{M}, \mathfrak{T}, \mathscr{A})$ μία $C^\infty-$πολλαπλότητα και $\{U_i\}_{i\in I}$ ένα ανοικτό κάλυμμα του $\mathscr{M}$. Υπάρχει μία ομαλή διαμέριση της μονάδας $\{\delta_i\}_{i\in I}$ που κυριασχείται από το $\{U_i\}_{i\in I}$.*

Απόδειξη: Εφόσον η πολλαπλότητες είναι παρασυμπαγείς τοπολογικοί χώροι, από την Πρόταση 1.5 μπορούμε να βρούμε τοπικά πεπερασμένη εκλέπτυνση $\{V_j\}_{j\in J}$ του $\{U_i\}_{i\in I}$ με $V_j \subseteq U_{i_j}$ (για κάποια επιλογή i_j).

Θεωρώντας $x_j \in V_j$, τα σύνολα $\{x_j\}$ είναι κλειστά, αφού η $\mathscr{M}$ είναι Hausdorff (κι άρα T_1). Επομένως, από το Θεώρημα 1.2, μπορούμε να βρούμε επάρματα $\widetilde{\delta}_j$ στο $\{x_j\}$ με φορέα στο $\text{supp}\ \widetilde{\delta}_j = V_j \subseteq U_{i_j}$. Επειδή τώρα η $\{V_j\}_{j\in J}$ είναι τοπικά πεπερασμένη, το άθροισμα:

$$\beta = \sum_{j\in J} \widetilde{\delta}_j : \mathscr{M} \to \mathbb{R}$$

έχει νόημα. Επιπλέον, είναι $C^\infty-$συνάρτηση με $\beta > 0$.

Απαριθμώντας διαφορετικά, ορίζουμε:

$$\delta_i = \begin{cases} \widetilde{\delta}_j/\beta, & \text{εάν } i = i_j \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

και έχουμε:

$$\sum_{i\in I}\delta_i = \sum_{j\in J}\frac{\widetilde{\delta}_j}{\beta} \equiv 1$$

Οι δ_i είναι $C^\infty-$συναρτήσεις με $\operatorname{supp}\,\delta_i \subseteq U_i$ και $0 \leqslant \delta_i \leqslant 1$, άρα συνηστούν μία διαμέριση της μονάδας $\{\delta_i\}_{i\in I}$.

□

Τα αποτελέσματα που αφορούν τις διαμερίσεις τις μονάδας είναι πολλά και κάπως κύρια για τη διαφορική γεωμετρία. Παρακάτω αναφέρουμε ένα εξ αυτών, που σχετίζεται με την ομαλή επέκταση μίας συνάρτησης.

Θεώρημα 1.4 (Βασικό θεώρημα επέκτασης)**.** *Έστω $(\mathscr{M},\mathfrak{T},\mathscr{A})$ μία $C^\infty-$πολλαπλότητα, K ένα κλειστό σύνολο και U ένα ανοικτό υπερσύνολό του. Εάν η $f : K \to \mathbb{R}^n$ είναι C^∞, τότε υπάρχει ομαλή επέκταση $\widetilde{f} : \mathscr{M} \to \mathbb{R}^n$ της f με $\operatorname{supp}\,\widetilde{f} \subseteq U$.*

Απόδειξη: Εφόσον η f είναι C^∞ στο κλειστό σύνολο K, για κάθε $p \in K$ (εξ ορισμού) υπάρχει περιοχή V_p του p και ομαλή επέκταση $\widetilde{f}_p$ της $f|_{V_p\cap A}$ στο V_p. Μάλιστα, μπορούμε να θεωρήσουμε χωρίς πρόβλημα ότι $V_p \subseteq U$, από τη φυσιολογικότητα του χώρου. Θεωρούμε επίσης το ανοικτό κάλυμμα:

$$\{V_p \mid p \in K\} \cup \{\mathscr{M}\backslash K\}$$

και τη διαμέριση της μονάδας $\{\delta_p\}_{p\in K} \cup \{\delta\}$ που αντιστοιχεί σε αυτό.

Ορίζουμε τώρα, εφόσον η οικογένεια $\{\operatorname{supp}\,\delta_p\}_{p\in K}$ είναι τοπικά πεπερασμένη:

$$\widetilde{f}(x) = \sum_{p\in K}\widetilde{f}_p(x)\delta_p(x)$$

και παρατηρούμε ότι η $\widetilde{f}$ είναι $C^\infty-$συνάρτηση. Πράγματι, αυτό είναι συνέπεια του τοπικά πεπερασμένου του αθροίσματος και της Πρότασης 1.11. Επιπλέον, επειδή $\operatorname{supp}\,\delta \subseteq \mathscr{M}\backslash A$, για κάθε $x \in K$ έχουμε:

$$\sum_{p\in K}\delta_p(x) = 1, \text{ δηλαδή } \widetilde{f}(x) = f(x)$$

Όσον αφορά τον φορέα, έχουμε:

$$\operatorname{supp}\,\widetilde{f} = \bigcup_{p\in K}\operatorname{supp}\,\delta_k \subseteq \bigcup_{p\in K} V_p \subseteq U$$

□

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Εφαπτόμενοι χώροι, εφαπτόμενες δέσμες και διανυσματικά πεδία

2.1 Εφαπτόμενοι χώροι

Δεδομένης μίας διαφορίσιμης πολλαπλότητας, μπορεί να οριστεί ο ≪εφαπτόμενος χώρος≫ σε κάθε σημείο της. Μέσω κάποιων απλών παραδειγμάτων πολλαπλοτήτων, όπως είναι οι επιφάνειες, αυτό είναι φανερό: Ο εφαπτόμενος χώρος είναι το εφαπτόμενο επίπεδο της επιφάνειας. Δηλαδή, είναι το σύνολο των διανυσμάτων του $\mathbb{R}^3$, τα οποία έχουν σημείο επαφής το σημείο επαφής του εφαπτόμενου επιπέδου, και εφάπτονται στην επιφάνεια.

Εάν $\mathscr{E} \subseteq \mathbb{R}^3$ είναι μία επιφάνεια, ο εφαπτόμενος χώρος στο $p \in \mathscr{E}$ είναι το σύνολο:

$$T_p\mathscr{E} = \big\{(p,u) \in \{p\} \times \mathbb{R}^3 \mid \text{Υπάρχει διαφορ. καμπύλη } \gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathscr{E} \text{ με } \gamma(0) = p, \gamma'(0) = u\big\}$$

Αυτόν τον ορισμό θα θέλαμε να επεκτείνουμε με κάποιον τρόπο και στις διαφορίσιμες πολλαπλότητες.

Ο ορισμός που δώσαμε για τον εφαπτόμενο χώρο μίας επιφάνειας:

$$T_p\mathscr{E} = \big\{(p,u) \in \{p\} \times \mathbb{R}^3 \mid \text{Υπάρχει διαφορ. καμπύλη } \gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathscr{E} \text{ με } \gamma(0) = p, \gamma'(0) = u\big\}$$

και που χρησιμοποιείται στη διαφορική γεωμετρία, ίσως είναι λίγο παραπλανητικός, καθώς προϋποθέτει την ύπαρξη της επιφάνειας σε έναν μεγαλύτερο χώρο, τον $\mathbb{R}^3$. Οι πολλαπλότητες όμως, ως οντότητες, δεν χρειάζεται να περιέχονται σε έναν μεγαλύτερο χώρο. Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι δίνουμε τον ακόλουθο ορισμό για τον εφαπτόμενο χώρο στις πολλαπλότητες:

$$\begin{aligned} T_p\mathscr{M} = \big\{(p,u) \in \{p\} \times \mathbb{R}^n \mid \text{Υπάρχει διαφορ. καμπύλη } \gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathscr{M} \text{ με } \gamma(0) = p \text{ και} \\ D(\varphi \circ \gamma)_0(1) = u, \text{ για κάποιον τοπικό χάρτη } (U, \varphi) \text{ του } p\big\} \end{aligned}$$

Αν δώσουμε απερίσκεπτα με αυτόν τον τρόπο τη γενίκευση του ορισμού του εφαπτόμενου χώρου, στις επιφάνειες θα έχουμε ένα πρόβλημα: Από τη μία ο εφαπτόμενος χώρος για τις επιφάνειες θα ορίζεται μέσω στοιχείων $(p, u) \in \{p\} \times \mathbb{R}^3$, κι από την άλλη για πολλαπλότητες θα ορίζεται μέσω στοιχείων $(p, u) \in \{p\} \times \mathbb{R}^n$, όπου n είναι η διάσταση της πολλαπλότητας. Δηλαδή, αν δούμε τις επιφάνειες ως πολλαπλότητες κι όχι εμφυτευμένες στο $\mathbb{R}^3$, ο εφαπτόμενος χώρος απαρτίζεται από στοιχεία της μορφής $(p, u) \in \{p\} \times \mathbb{R}^2$ κι όχι $(p, u) \in \{p\} \times \mathbb{R}^3$.

Το ίδιο πρόβλημα ενδεχομένως θα μπορούσε να προκύψει γενικά, εάν δεν προσέχαμε και θεωρούσουμε μία οποιαδήποτε πολλαπλότητα εμφυτευμένη σε μεγαλύτερο χώρο-μοντέλο. Από εδώ και στο εξής λοιπόν θα ξεχνάμε τις διάφορες εμφυτεύσεις και θα γράφουμε το ακόλουθο:

Ορισμός 2.1 (Ο εφαπτόμενος χώρος γεωμετρικά)**.** *Έστω $(\mathscr{M}, \mathfrak{T}, \mathscr{A})$ μία διαφορίσιμη πολλαπλότητα και $p \in \mathscr{M}$. Ορίζουμε τον εφαπτόμενο χώρο της $\mathscr{M}$ στο $p \in \mathscr{M}$ ως εξής:*

$$T_p\mathscr{M} = \Big\{(p,u) \in \{p\} \times \mathbb{R}^n \mid \textit{Υπάρχει διαφορ. καμπύλη } \gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathscr{M} \textit{ με } \gamma(0) = p \textit{ και } D(\varphi \circ \gamma)_0(1) = u, \textit{ για κάποιον τοπικό χάρτη } (U, \varphi) \textit{ του } p\Big\}$$

Κάθε εφαπτόμενος χώρος μπορεί να γίνει διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο, ορίζοντας:[1]

$$(p,u) + (p,v) = (p, u+v),\ \lambda \cdot (p,u) = (p, \lambda u) \text{ και } \langle (p,u), (p,v) \rangle_{T_p\mathscr{M}} = \langle u, v \rangle_{\mathbb{R}^n}$$

Παρατήρηση 2.1. *Έστω διαφορική πολλαπλότητα $(\mathscr{M}, \mathfrak{T}, \mathscr{A})$ και $p \in \mathscr{M}$. Εάν υπάρχουν καμπύλες $\gamma, \beta : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathscr{M}$ ώστε για κάποιον χάρτη (U, φ) του p:*

$$\gamma(0) = p \textit{ και } D(\varphi \circ \gamma)_0(1) = u$$

τότε για κάθε χάρτη (V, ψ) του p έχουμε $D(\psi \circ \gamma)_0(1) = D(\psi \circ \beta)_0(1)$. Δηλαδή η σχέση επαφής δύο καμπυλών δεν εξαρτάται από τον χάρτη.

Απόδειξη: Πράγματι:

$$D(\psi \circ \gamma)_0 = D(\psi \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ \gamma)_0$$

και από τον κανόνα της αλυσίδας:

$$D(\psi \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ \gamma)_0 = D(\psi \circ \varphi^{-1})_{\varphi \circ \gamma(0)} \circ D(\varphi \circ \gamma)_0$$

Οπότε:

$$D(\psi \circ \varphi^{-1})_{\varphi \circ \gamma(0)} \circ D(\varphi \circ \gamma)_0 = D(\psi \circ \varphi^{-1})_{\varphi \circ \beta(0)} \circ D(\varphi \circ \beta)_0$$

και ακολουθώντας τους ισχυρισμούς αντίστροφα παίρνουμε:

$$D(\psi \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ \beta)_0 = D(\psi \circ \beta)_0$$

□

Με τους ορισμούς που δώσαμε, μπορούμε να δείξουμε ότι $T_p\mathscr{M} \simeq T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^n$ ως προς κάποιον ισομορφισμό συνόλων, όπου n είναι η διάσταση της (μη εμφυτευμένης) πολλαπλότητας και (U, φ) χάρτης στο p. Υπάρχουν κι άλλοι ορισμοί για τους εφαπτόμενους χώρους, εκ των οποίων ένας παρεμφερής χρησιμοποιεί κλάσεις ισοδυναμίας καμπυλών. Με τον άλλο ορισμό, ο ισομορφισμός $T_p\mathscr{M} \simeq T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^n$ εξακολουθεί να αληθεύει.

Παρατήρηση 2.2. *Για κάθε $n-$διάστατη διαφορική πολλαπλότητα $(\mathscr{M}, \mathfrak{T}, \mathscr{A})$ αληθεύει:*

$$T_p\mathscr{M} \simeq T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^n \textit{ ως προς κάποιον ισομορφισμό συνόλων}$$

(όπου $T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^n = \{\varphi(p)\} \times \mathbb{R}^n$).

Απόδειξη: Θα χρειαστεί να δείξουμε ότι για κάθε $\big(\varphi(p), u\big) \in T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^n$ υπάρχει καμπύλη $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathscr{M}$ και χάρτης (U, φ) ώστε:

$$\gamma(0) = p \text{ και } D(\varphi \circ \gamma)_0(1) = u$$

[1] Εάν κανείς είναι εξοικειωμένος με τις πολλαπλότητες Riemann, μπορεί να απορίσει σχετικά με την απόδοση εσωτερικού γινομένου στον εφαπτόμενο χώρο. Σημειώνουμε μόνο ότι το πρόβλημα γενικά στις πολλαπλότητες Riemann είναι να δωθεί ένα χρήσιμο για την «περίσταση» εσωτερικό γινόμενο. Επίσης, κανείς δεν εξασφαλίζει τη μοναδικότητα του εσωτερικού γινομένου. Με αυτά θα ασχοληθούμε σε επόμενο κεφάλαιο.

Γι' αυτό θα θεωρήσουμε τυχόν χάρτη (U, φ) στο p και θα ορίσουμε:

$$\gamma(t) = \varphi^{-1}\big(\varphi(p) + tu\big)$$

Παρατηρούμε ότι $\gamma(0) = p$ και $D(\varphi \circ \gamma)_0(1) = u$.

$\square$

Όσον αφορά τη γεωμετρική πτυχή του εφαπτόμενου χώρου, σε αυτήν την παρουσίαση θα αρκεστούμε στον προηγούμενο ορισμό. Για να είμαστε πλήρεις, θα αναφέρουμε και τον ορισμό με τις σχέσεις ισοδυναμίας των καμπυλών, καθώς είναι συνήθης.

Παρατήρηση 2.3. *Έστω $n-$διάστατη διαφορική πολλαπλότητα $(\mathscr{M}, \mathfrak{T}, \mathscr{A})$ και $p \in \mathscr{M}$. Ο εφαπτόμενος χώρος θα μπορούσε να οριστεί εναλλακτικά ως εξής:*

$$T_p\mathscr{M} = \left\{ {}^{\gamma}/{\sim_p} \;\middle|\; \gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathscr{M} \text{ διαφορίσιμη καμπύλη με } \gamma(0) = p \right\}$$

Με αυτήν την οπτική αληθεύει η σχέση $T_p\mathscr{M} \simeq T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^n$, ως προς κάποιον ισομορφισμό συνόλων.

Οι προηγούμενοι ορισμοί για τον εφαπτόμενο χώρο είναι ισχυρά γεωμετρικοί. Εμείς θα χρησιμοποιήσουμε κυρίως έναν άλλον ορισμό, ο οποίος εμπλέκει παραγωγίσεις, και είναι κατάλληλος για τη μετάβαση στα διανυσματικά πεδία. Σημειώνουμε ότι αυτός ο ορισμός -όπως εξάλλου συνηθίζεται στη βιβλιογραφία- θα περιοριστεί στις $C^\infty-$πολλαπλότητες.

Δεδομένης μίας επιφάνειας $\mathscr{E}$, ας θεωρήσουμε (με τον γεωμετρικό ορισμό) ένα εφαπτόμενο διάνυσμα (p, u) στο $p \in \mathscr{E}$. Αυτό το εφαπτόμενο διάνυσμα μπορεί να αποτελέσει κατεύθυνση μίας παραγώγου, δηλαδή μπορούμε να ορίσουμε την κατά κατεύθυνση παράγωγο:

$$\frac{\partial\big((\cdot) \circ \varphi^{-1}\big)}{\partial u}\bigg|_{\varphi(p)} : C^\infty(\mathscr{E}; \mathbb{R}) \to \mathbb{R} \text{ με } \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial u}\bigg|_{\varphi(p)} = \frac{d}{dt}\bigg|_0 f \circ \varphi^{-1}\big(\varphi(p) + tu\big)$$

όπου (U, φ) είναι τοπικός χάρτης.

Κάθε εφαπτόμενο διάνυσμα αντιστοιχεί, μέσω της κατά κατεύθυνσης παραγώγου, σε μία ≪παραγώγιση≫. Αυτή η ιδέα θα μας οδηγήσει σε έναν αφειρημένο ορισμό του εφαπτόμενου χώρου, μέσω ≪παραγωγίσεων≫.

Ορισμός 2.2 (Παραγωγίσεις)**.** *Έστω $(\mathscr{M}, \mathfrak{T}, \mathscr{A})$ μία $C^\infty-$πολλαπλότητα και $p \in \mathscr{M}$. Κάθε συνάρτηση $u_p : C^\infty(\mathscr{M}; \mathbb{R})$ με τις ακόλουθες ιδιότητες:*

i. Είναι γραμμική.

ii. Ικανοποιεί τον κανόνα του Leibnitz:

$$u_p(f \cdot g) = u_p(f) \cdot g(p) + f(p) \cdot u_p(g)$$

θα καλείται παραγώγιση στο p.

Όπως και στις επιφάνειες, στις πολλαπλότητες κάθε γεωμετρικό εφαπτόμενο διάνυσμα αντιστοιχεί σε μία παραγώγιση. Ενδιαφέρον έχει το γεγονός ότι υπάρχει και μία αντίστροφη αντιστοιχία, δηλαδή από κάθε παραγώγιση προκύπτει ένα γεωμετρικό εφαπτόμενο διάνυσμα. Λόγω αυτού του δυϊσμού, θα μπορούμε να φανταζόμαστε τον εφαπτόμενο χώρο μίας πολλαπλότητας ως χώρο παραγωγίσεων.

Πρόταση 2.1. *Έστω $(\mathscr{M}, \mathfrak{T}, \mathscr{A})$ μία $C^\infty-$πολλαπλότητα, $p \in \mathscr{M}$ και μία παραγώγιση u_p στο p. Εάν (U, φ) είναι τοπικός χάρτης στο p, η u_p μπορεί να γραφεί στη μορφή:*

$$u_p(f) = \sum_{i=1}^n u_i \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i}\Big|_{\varphi(p)} \text{ για κάποια } u_i \in \mathbb{R}$$

και κατά συνέπεια:

$$u_p(f) = \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial u}\Big|_{\varphi(p)}, \text{ όπου } u = (u_i)_{i \leqslant n}$$

Απόδειξη: Η απόδειξη θα γίνει σε βήματα.

Βήμα I: Για αρχή θα δείξουμε το εξής: Εάν $h : U \to \mathbb{R}$ είναι μία $C^\infty-$συνάρτηση σε ανοικτό A, $a = (a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ και $B(a, r) \subseteq A$, τότε υπάρχουν συναρτήσεις $g_i : B(a, r) \to \mathbb{R}$ ώστε:

$$g_i(a) = \frac{\partial h}{\partial x_i}\Big|_a \text{ και } h(x) = h(a) + \sum_{i=1}^n (x_i - a_i) g_i(x) \text{ στο } B(a, r)$$

Πράγματι, γράφουμε:

$$h(x) - h(a) = \int_0^1 \frac{d}{dt} h\big(a + t(x - a)\big)\, dt = \int_0^1 \sum_{i=1}^n \frac{\partial h}{\partial x_i}\Big|_{a+t(x-a)} \cdot \frac{d\big(a + t(x_i - a_i)\big)}{dt}\, dt$$

και έχουμε:

$$h(x) = h(a) + \sum_{i=1}^n (x_i - a_i) \int_0^1 \frac{\partial h}{\partial x_i}\Big|_{a+t(x-a)}\, dt$$

Θέτοντας $g_i(x) = \int_0^1 \partial h/\partial x_i|_{a+t(x-a)}\, dt$, έχουμε το ζητούμενο.

Βήμα II: Θα ορίσουμε:

$$u_i = u_p(\varphi_i)$$

και θα δείξουμε ότι:

$$u_p(f) = \sum_{i=1}^n u_i \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i}\Big|_{\varphi(p)}$$

Από το Βήμα I, σε κάποια περιοχή $\varphi^{-1}\big(B\big(\varphi(p), r\big)\big)$, έχουμε:

$$f \circ \varphi^{-1} \circ \varphi(x) = f \circ \varphi^{-1} \circ \varphi(p) + \sum_{i=1}^n \big(\varphi_i(x) - \varphi_i(p)\big) \cdot g_i(x)$$

δηλαδή:

$$f(x) = f(p) + \sum_{i=1}^n \big(\varphi_i(x) - \varphi_i(p)\big) \cdot g_i(x)$$

Τώρα, στις σταθερές η u_p δίνει 0, κι αυτό είναι συνέπεια του κανόνα του Leibnitz ($u_p(c) = u_p(1) \cdot c + 1 \cdot u_p(c) = 2u_p(c)$). Εφαρμόζοντας λοιπόν την u_p:

$$u_p(f) = \sum_{i=1}^n \big(u_p(\varphi_i) \cdot g_i \circ \varphi(p) + 0 \cdot u_p(g_i)\big)$$

κι επειδή $g_i \circ \varphi(p) = \partial(f \circ \varphi^{-1})/\partial x_i|_{\varphi(p)}$:

$$u_p(f) = \sum_{i=1}^n u_p(\varphi_i) \cdot \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i}\Big|_{\varphi(p)} = \sum_{i=1}^n u_i \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i}\Big|_{\varphi(p)}$$

Αυτή είναι όμως η ζητούμενη μορφή.

□

Η προηγούμενη Πρόταση 2.1 μας επιτρέπει να δώσουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 2.3 (Ο εφαπτόμενος χώρος με παραγωγίσεις)**.** *Έστω $(\mathscr{M}, \mathfrak{T}, \mathscr{A})$ μία $C^\infty-$ πολλαπλότητα και $p \in \mathscr{M}$. Μπορούμε να ορίσουμε εναλλακτικά τον εφαπτόμενο χώρο της $\mathscr{M}$ στο $p \in \mathscr{M}$ ως εξής:*

$$T_p\mathscr{M} = \{u_p : C^\infty(\mathscr{M};\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \mid u_p \text{ παραγώγιση στο } p \in \mathscr{M}\}$$

Παρατήρηση 2.4. *Η Πρόταση 2.1 εξασφαλίζει ότι οι Ορισμοί 2.1 και 2.3 είναι ισοδύναμοι στις $C^\infty-$πολλαπλότητες.*

Παρατήρηση 2.5 (Τοπικότητα των παραγωγίσεων)**.** *Έστω $(\mathscr{M}, \mathfrak{T}, \mathscr{A})$ μία $C^\infty-$πολλαπλότητα και συναρτήσεις $f, g \in C^\infty(\mathscr{M};\mathbb{R})$ που συμφωνούν σε περιοχή U του p. Για κάθε $u_p \in T_p\mathscr{M}$ έχουμε:*

$$u_p(f) = u_p(g) \text{ δηλαδή } u_p(f-g) = 0$$

Επόμενο βήμα στη μελέτη των εφαπτόμενων χώρων είναι οι απεικονίσεις μεταξύ εφαπτόμενων χώρων διαφορετικών πολλαπλοτήτων. Δεδομένης μίας απεικόνισης $F : \mathscr{M} \to \mathscr{N}$, μπορούμε να ορίσουμε την προώθηση (pushforward) F_*, που είναι ένας τελεστής:

$$F_* : T_p\mathscr{M} \to T_{F(p)}\mathscr{N} \text{ με } F_*(u_p)(\cdot) = u_p\big((\cdot) \circ F\big)$$

Δηλαδή, για κάθε $f \in C^\infty(\mathscr{N};\mathbb{R})$, $F_*(u_p)(f) = u_p(f \circ F)$. Η F_* «φτιάχνει» παραγωγίσεις στην $\mathscr{N}$ από παραγωγίσεις στην $\mathscr{M}$.

Στην ειδική περίπτωση που η πολλαπλότητα $\mathscr{N}$ είναι η $\mathbb{R}^n$ (όπου n είναι η διάσταση της $\mathscr{M}$) και η F είναι ένας τοπικός ομοιομορφισμός φ του χάρτη (U, φ) του p, έχουμε την προώθηση:

$$\varphi_* : T_pU \to T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^n$$

Μέσω της φ_*, μπορούμε να μελετάμε παραγωγίσεις σε πολλαπλότητες μέσω παραγωγίσεων στον $\mathbb{R}^n$. Μάλιστα αυτό που θα δείξουμε αργότερα είναι ότι αν η φ είναι αμφιδιαφόριση (που στις $C^\infty-$πολλαπλότητες είναι), τότε η φ_* είναι ισομορφισμός.

Επίσης, πριν προχωρίσουμε στους ορισμούς, ας παρατηρήσουμε τη μορφή του F_* στην περίπτωση των χώρων $\mathscr{M} = \mathbb{R}^m$, $\mathscr{N} = \mathbb{R}^n$. Για κάθε $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$ γράφουμε:

$$F_*(u_p)(f) = \sum_{j=1}^m u_j \frac{\partial(f\circ F)}{\partial x_j}\Big|_p = \sum_{j=1}^m u_j \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial y_i}\Big|_{F(p)} \cdot \frac{\partial F_i}{\partial x_j}\Big|_p = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m u_j \frac{\partial F_i}{\partial x_i}\Big|_p \right) \cdot \frac{\partial f}{\partial y_i}\Big|_{F(p)}$$

(από τον κανόνα της αλυσίδας) και παρατηρούμε ότι, ουσιαστικά, η παραγώγιση $F_*(u_p)$ προέρχεται από το διάνυσμα:

$$\left(\sum_{j=1}^m u_j \frac{\partial F_i}{\partial x_j}\Big|_p \right)_{i \leqslant n}$$

και αντίστοιχα η F_* από τον πίνακα:

$$(\partial F_i/\partial x_j)_{i,j=1}^{n,m}$$

Κατά μία έννοια, η προώθηση F_* έχει το ρόλο του διαφορικού, και κάποια συγγράμματα τη συμβολίζουν με DF (πράγμα που εμείς θα αποφύγουμε).

Ορισμός 2.4 (Προώθηση). *Έστω $(\mathscr{M}, \mathfrak{T}_{\mathscr{M}}, \mathscr{A})$ και $(\mathscr{N}, \mathfrak{T}_{\mathscr{N}}, \mathscr{B})$ δύο $C^\infty-$πολλαπλότητες και $F : \mathscr{M} \to \mathscr{N}$ μία $C^\infty-$απεικόνιση. Η προώθηση (pushforward) της F από το $p \in \mathscr{M}$ στο $F(p) \in \mathscr{N}$ είναι ο τελεστής:*

$$F_* : T_p\mathscr{M} \to T_{F(p)}\mathscr{N} \text{ με } F_*(u_p)(\cdot) = u_p\big((\cdot) \circ F\big)$$

Πρόταση 2.2 (Ιδιότητες της προώθησης). *Έστω $(\mathscr{M}, \mathfrak{T}_{\mathscr{M}}, \mathscr{A})$, $(\mathscr{N}, \mathfrak{T}_{\mathscr{N}}, \mathscr{B})$, $(\mathscr{K}, \mathfrak{T}_{\mathscr{K}}, \mathscr{C})$ τρεις $C^\infty-$πολλαπλότητες και $F : \mathscr{M} \to \mathscr{N}$, $G : \mathscr{N} \to \mathscr{K}$ δύο $C^\infty-$απεικονίσεις.*

i. Η F_* είναι γραμμικός τελεστής.

ii. $(\mathrm{id}_{\mathscr{M}})_* = \mathrm{id}_{T_p\mathscr{M}}$

iii. $(G \circ F)_* = G_* \circ F_* : T_p\mathscr{M} \to T_{G\circ F(p)}\mathscr{K}$

Απόδειξη: Για το i.: Έχουμε:

$$F_*(u_p + v_p)(f) = u_p(f \circ F) + v_p(f \circ F) = F_*(u_p)(f) + F_*(v_p)(f)$$

Για το ii.: Έχουμε:

$$(\mathrm{id}_{\mathscr{M}})_*(u_p)(f) = u_p(f) = \mathrm{id}_{T_p\mathscr{M}}(u_p)(f)$$

Για το iii.: Γράφουμε:

$$(G \circ F)_*(u_p)(f) = u_p(f \circ G \circ F) = F_*(u_p)(f \circ G) = (G_* \circ F_*)(u_p)(f)$$

□

Λήμμα 2.1. *Έστω $(\mathscr{M}, \mathfrak{T}, \mathscr{A})$ μία $C^\infty-$πολλαπλότητα και $U \subseteq \mathscr{M}$ ένα ανοικτό σύνολο. Εάν $\mathrm{i} : U \hookrightarrow \mathscr{M}$ είναι η εμφύτευση, τότε η προώθηση $\mathrm{i}_* : T_pU \to T_p\mathscr{M}$ είναι ισομορφισμός.*

Απόδειξη: Θα δείξουμε ότι $\ker \mathrm{i}_* = \{0\}$, οπότε η i_* είναι $1-1$. Έστω λοιπόν $u_p \in T_pU$ με:

$$\mathrm{i}_*(u_p) = 0, \text{ δηλαδή για κάθε } f \in C^\infty(\mathscr{M}; \mathbb{R}),\ u_p(f \circ \mathrm{i}) = 0$$

Επιχειρούμε να δείξουμε ότι $u_p = 0$, δηλαδή $u_p(g) = 0$ για κάθε $g \in C^\infty(U; \mathbb{R})$. Με βάση τα προηγούμενα λοιπόν, αρκεί να δείξουμε ότι κάθε τέτοια g είναι περιορισμός κάποιας $f \in C^\infty(\mathscr{M}; \mathbb{R})$, ή τέλος πάντων (λόγω της τοπικότητας των παραγωγίσεων) οι $f \circ \mathrm{i}, g$ να συμφωνούν σε σε περιοχή του p. Δηλαδή αρκεί να δείξουμε ότι κάθε g έχει επέκταση στο $\mathscr{M}$ ή κάποιος περιορισμός της g έχει επέκταση στο $\mathscr{M}$. Αυτό όμως είναι γνωστό αποτέλεσμα, και το έχουμε στην ουσία δει στο Θεώρημα 1.4.

Για την ακρίβεια, μπορούμε (όπως έχουμε δει αρκετές φορές) να θεωρήσουμε ανοικτό σύνολο V με $p \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$, και να θεωρήσουμε τη συνάρτηση $g|_{\overline{V}}$. Η $g|_{\overline{V}}$, από το Θεώρημα 1.4, επεκτείνεται σε $\widetilde{g} \in C^\infty(\mathscr{M}; \mathbb{R})$, και η $\widetilde{g}$ συμφωνεί με τη g σε ανοικτή περιοχή $V \subseteq U$. Από την τοπικότητα των παραγωγίσεων έχουμε:

$$u_p(g) = u_p(\widetilde{g} \circ \mathrm{i}) = 0, \text{ για κάθε } g \in C^\infty(U; \mathbb{R})$$

Για το επί, θεωρούμε $v_p \in T_p\mathscr{M}$ και αναζητούμε $u_p \in T_pU$ ώστε $\mathrm{i}_*(u_p) = v_p$. Όπως και πριν, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι για κάθε $g \in C^\infty(U; \mathbb{R})$ μία επέκταση $\widetilde{g} \in C^\infty(\mathscr{M}; \mathbb{R})$ της $g|_{\overline{V}}$. Τότε μπορούμε να ορίσουμε:

$$u_p(g) = v_p(\widetilde{g})$$

και λόγω της τοπικότητας των παραγωγίσεων θα έχουμε:

$$\mathrm{i}_*(u_p)(f) = u_p(f \circ \mathrm{i}) = v_p(\widetilde{f \circ \mathrm{i}}) = v_p(f)$$

□

Πρόταση 2.3 (Ισομορφισμοί μεταξύ των εφαπτόμενων χώρων)**.** *Έστω $(\mathcal{M}, \mathfrak{T}_{\mathcal{M}}, \mathcal{A})$, $(\mathcal{N}, \mathfrak{T}_{\mathcal{N}}, \mathcal{B})$ δύο $C^\infty-$πολλαπλότητες και $F : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ μία $C^\infty-$συνάρτηση. Εάν η F είναι $C^\infty-$ αμφιδιαφόριση, τότε η F_* είναι ισομορφισμός των $T_p\mathcal{M}$ και $T_{F(p)}\mathcal{N}$. Κατά συνέπεια, εάν (U, φ) είναι ένας τοπικός χάρτης στο p, οι χώροι $T_p\mathcal{M}$ και $T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^n$ είναι ισόμορφοι.*

Απόδειξη: Από την Πρόταση 2.2 η F_* είναι γραμμική. Επίσης:

$$\mathrm{id}_{T_p\mathcal{M}} = (F^{-1} \circ F)_* = (F^{-1})_* \circ F_* \text{ και } \mathrm{id}_{T_{F(p)}}\mathcal{N} = (F \circ F^{-1})_* = F_* \circ (F^{-1})_*$$

οπότε $(F_*)^{-1} = (F^{-1})_*$.

Εάν (U, φ) είναι τοπικός χάρτης στο p, τότε -σύμφωνα με τα προηγούμενα- $T_pU \simeq T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^n$. Από το Λήμμα 2.1 έπεται ότι $T_p\mathcal{M} \simeq T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^n$.

□

Παρατήρηση 2.6. *Το Λήμμα 2.1 σε συνδυασμό με την Πρόταση 2.3 δίνουν ότι $\dim T_pU = \dim T_p\mathcal{M} = \dim T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^n = n$. Κατά συνέπεια, η:*

$$\big(\partial\big((\cdot) \circ \varphi^{-1}\big)/\partial x_i|_{\varphi(p)}\big)_{i \leqslant n}$$

είναι μία βάση των T_pU, $T_p\mathcal{M}$.

Πρόταση 2.4 (Τοπική έκφραση της προώθησης)**.** *Έστω $(\mathcal{M}, \mathfrak{T}_{\mathcal{M}}, \mathcal{A})$, $(\mathcal{N}, \mathfrak{T}_{\mathcal{N}}, \mathcal{B})$ δύο $C^\infty-$πολλαπλότητες και $F : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ μία $C^\infty-$συνάρτηση. Εάν (U, φ), (V, ψ) είναι περιοχές των $p \in \mathcal{M}$ και $F(p) \in \mathcal{N}$ αντίστοιχα, τότε η F_* εκφράζεται σε τοπικές συντεταγμένες μέσω του πίνακα:*

$$\big(\partial(\psi \circ F \circ \varphi^{-1})_i/\partial x_j\big)_{i,j=1}^{n,m}$$

Απόδειξη: Η απόδειξη θα γίνει σε βήματα.

Βήμα Ι: Ας ασχοληθούμε με την περίπτωση όπου $\mathcal{M} = \mathbb{R}^m$ και $\mathcal{N} = \mathbb{R}^n$. Για κάθε $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ γράφουμε:

$$F_*(u_p)(f) = \sum_{j=1}^m u_j \frac{\partial(f \circ F)}{\partial x_j}\Big|_p = \sum_{j=1}^m u_j \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial y_i}\Big|_{F(p)} \cdot \frac{\partial F_i}{\partial x_j}\Big|_p = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m u_j \frac{\partial F_i}{\partial x_i}\Big|_p\right) \cdot \frac{\partial f}{\partial y_i}\Big|_{F(p)}$$

(από τον κανόνα της αλυσίδας) και παρατηρούμε ότι η παραγώγιση $F_*(u_p)$ προέρχεται από το διάνυσμα:

$$\left(\sum_{j=1}^m u_j \frac{\partial F_i}{\partial x_j}\Big|_p\right)_{i \leqslant n}$$

και αντίστοιχα η F_* από τον πίνακα:

$$(\partial F_i/\partial x_j)_{i,j=1}^{n,m}$$

Βήμα ΙΙ: Ας θεωρήσουμε τώρα τη γενική περίπτωση. Από το Βήμα Ι για τη συνάρτηση $\psi \circ F \circ \varphi^{-1}$, έπεται ότι η F_* παρίσταται τοπικά μέσω του πίνακα:

$$\big(\partial(\psi \circ F \circ \varphi^{-1})_i/\partial x_j\big)_{i,j=1}^{n,m}$$

□

2.2 Εφαπτόμενες δέσμες

Για να ορίσουμε τα διανυσματικά πεδία, γεωμετρικά χρειάζεται να θεωρήσουμε εφαπτόμενα διανύσματα στην πολλαπλότητα $\mathscr{M}$, τα οποία «μεταβάλλονται ομαλά» καθώς το σημείο εφαρμογής τους αλλάζει. Χρειάζεται δηλαδή, από τη σκοπιά των παραγωγίσεων, να υπάρχει μία έννοια ομαλής μετάβασης καθώς το σημείο εφαμογής p αλλάζει, μεταξύ των παραγωγίσεων $u_p \in T_p\mathscr{M}$.

Η έννοια αυτή της ομαλότητας δεν μπορεί να οριστεί αυθαίρετα, γιατί κατ' αρχάς οι διάφορες παραγωγίσεις $u_p \in T_p\mathscr{M}$ δεν ανήκουν στον ίδιο χώρο, ο οποίος θα πρέπει επιπροσθέτως να έχει μία κατάλληλη $C^\infty-$δομή (δηλαδή να είναι $C^\infty-$πολλαπλότητα).

Ορισμός 2.5 (Εφαπτόμενη δέσμη)**.** *Έστω $(\mathscr{M}, \mathfrak{T}, \mathscr{A})$ μία $C^\infty-$πολλαπλότητα. Ορίζουμε την εφαπτόμενη δέσμη τής ως εξής:*

$$T\mathscr{M} = \coprod_{p\in\mathscr{M}} T_p\mathscr{M} = \bigcup_{p\in\mathscr{M}} \big(\{p\} \times T_p\mathscr{M}\big)$$

Επίσης, ορίζουμε τον περιορισμό $\pi : T\mathscr{M} \to \mathscr{M}$ με $\pi\big((p, u_p)\big) = p$.

Αυτό που ουσιαστικά μας ενδιαφέρει, προκειμένου να συνεχίσουμε στα διανυσματικά πεδία, είναι να προσδώσουμε στο (προς το παρόν απλώς) σύνολο $T\mathscr{M}$ μία δομή $C^\infty-$πολλαπλότητας.

Ας σημειώσουμε επίσης ότι, για λόγους συντομίας, θα αναφερόμαστε στα στοιχεία της εφαπτόμενης δέσμης απλώς ως παραγωγίσεις. Δηλαδή θα γράφουμε u_p αντί (p, u_p) και $\pi(u_p) = p$ αντί $\pi\big((p, u_p)\big) = p$.

Λήμμα 2.2. *Έστω $\mathscr{N}$ ένα σύνολο. Υποθέτουμε ότι έχουμε μία οικογένεια συνόλων $\{V_i\}_{i\in I}$ και μία οικογένεια συναρτήσεων $\psi_i : V_i \to \mathbb{R}^n$ με τις ακόλουθες ιδιότητες:*

i. Οι διάφορες ψ_i είναι αμφιμονοσήμαντες με εικόνα $\psi_i(V_i)$ ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$.

ii. Για οποιαδήποτε $i, j \in I$ τα σύνολα $\psi_i(V_i \cap V_j)$, $\psi_j(V_i \cap V_j)$ είναι ανοικτά.

iii. Για κάθε $i, j \in I$ οι $\psi_j \circ \psi_i^{-1} : \psi_i(V_i \cap V_j) \to \psi_j(V_i \cap V_j)$ είναι $C^\infty-$συναρτήσεις.

iv. Αριθμήσιμο πλήθος των V_i καλύπτουν το $\mathscr{N}$.

v. Για κάθε $p, q \in \mathscr{N}$ διαφορετικά σημεία, είτε τα p, q ανήκουν στο ίδιο V_i, είτε υπάρχουν V_i, V_j ξένα σύνολα με $p \in V_i$, $q \in V_j$.

Τότε το $\mathscr{N}$ μπορεί να εφοδιαστεί με δομή $C^\infty-$πολλαπλότητας, ώστε οι (V_i, ψ_i) να καθίστανται $C^\infty-$χάρτες.

Απόδειξη: Θα εργαστούμε σε βήματα.

Βήμα I: Θεωρούμε το σύνολο:

$$\mathcal{B} = \{\psi_i^{-1}(A) \mid A \subseteq \mathbb{R}^n \text{ ανοικτό και } i \in I\}$$

και ισχυριζόμαστε ότι είναι βάση κάποιας τοπολογίας. Πράγματι, είναι προφανώς κάλυμμα του $\mathscr{N}$, και επιπλέον αν θεωρήσουμε την τομή:

$$\psi_i^{-1}(A_i) \cap \psi_j^{-1}(A_j) = \psi_i^{-1}\big(A_i \cap (\psi_i \circ \psi_j^{-1})(A_j)\big)$$

θα παρατηρήσουμε ότι κι αυτό είναι σύνολο στη $\mathcal{B}$. Αυτό συμβαίνει διότι οι $\psi_j \circ \psi_i^{-1}$ είναι συνεχείς (ως ομαλές) και $\psi_i \circ \psi_j^{-1} = (\psi_j \circ \psi_i^{-1})^{-1}$. Η τοπολογία που κατασκευάζουμε, έστω $\mathfrak{T}$, είναι η αρχική τοπολογία που προκύπτει από την οικογένεια $\{\psi_i\}_{i\in I}$.

Εξ ορισμού λοιπόν της τοπολογίας, οι $\psi_i : V_i \to \psi_i(V_i)$ είναι συνεχείς και αμφιμονοσήμαντες. Επιπλέον, εάν $\psi_j^{-1}(A_j)$ είναι ένα βασικό σύνολο, τότε:

$$\psi_i\big(V_i \cap \psi_j^{-1}(A_j)\big) = \psi_i(V_i) \cap (\psi_i \circ \psi_j^{-1})(A_j)$$

κι επειδή το $\psi_i(V_i)$ είναι ανοικτό, $\psi_i \circ \psi_j^{-1} = (\psi_j \circ \psi_i^{-1})^{-1}$ και οι $\psi_j \circ \psi_i^{-1}$ είναι συνεχείς, το $\psi_i\big(V_i \cap \psi_j^{-1}(A_j)\big)$ είναι ανοικτό. Η ψ_i λοιπόν είναι ανοικτή, και κατά συνέπεια ομοιομορφισμός.

Βήμα ΙΙ: Η ιδιότητα v. εξασφαλίζει ότι ο χώρος $(\mathcal{N}, \mathfrak{T})$ είναι Hausdorff. Επιπλέον, με την ιδιότητα iv. θα δείξουμε ότι είναι και δεύτερος αριθμήσιμος.

Παρατηρούμε ότι, λόγω τοπικού ομοιομορφισμού με ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$, τα $V_i = \psi_i^{-1}\big(\psi_i(V_i)\big)$ είναι δεύτεροι αριθμήσιμοι χώροι (εννοείται με τη σχετική τοπολογία). Ας συμβολίσουμε με $\mathcal{B}_i$ μία αριθμήσιμη βάση του V_i (η οποία παρατηρήστε περιέχει σύνολα της μορφής $\psi_i^{-1}(A)$, $A \subseteq \psi_i(V_i) \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό).

Θεωρούμε (από την ιδιότητα iv.) $\{V_j\}_{j\in J} \subseteq \{V_i\}_{i\in I}$ ένα αριθμήσιμο κάλυμμα του $\mathcal{N}$. Ορίζουμε:

$$\mathcal{B}_U = \big\{\psi_j^{-1}(A) \in \mathcal{B}_j \;\big|\; j \in J\big\}$$

και παρατηρούμε ότι είναι σύνολο αριθμήσιμο, αφού οι δείκτες $j \in J$ είναι αριθμήσιμοι και τα $\mathcal{B}_j$ είναι αριθμήσιμα σύνολα. Επιπλέον η $\mathcal{B}_U$ είναι βάση της $\mathfrak{T}$, οπότε ο $(\mathcal{N}, \mathfrak{T})$ είναι δεύτερος αριθμήσιμος.

Βήμα ΙΙΙ: Από την ιδιότητα iii. έχουμε την ομαλότητα της μετάβασης μεταξύ των χαρτών. Οπότε, ο άτλαντας $\mathscr{B}$ από τους χάρτες (V_i, ψ_i) προσδίδει μία $C^\infty-$δομή στην πολλαπλότητα $\mathcal{N}$, κι έτσι η $(\mathcal{N}, \mathfrak{T}, \mathscr{B})$ γίνεται $C^\infty-$πολλαπλότητα.

□

Λήμμα 2.3 (Αλλαγή χαρτών στις παραγωγίσεις)**.** *Έστω $(\mathscr{M}, \mathfrak{T}, \mathscr{A})$ μία $C^\infty-$πολλαπλότητα, (U, φ), $(\widetilde{U}, \widetilde{\varphi})$ δύο χάρτες στο $p \in \mathscr{M}$ και $u_p \in T_p\mathscr{M}$. Εάν η u_p γράφεται ως προς τον πρώτο χάρτη:*

$$u_p(\cdot) = \sum_{i=1}^{n} u_i \frac{\partial\big((\cdot) \circ \varphi^{-1}\big)}{\partial x_i}\Big|_{\varphi(p)}$$

τότε ως προς τον δεύτερο:

$$u_p(\cdot) = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} u_i \frac{\partial(\widetilde{\varphi} \circ \varphi^{-1})_j}{\partial x_i}\Big|_{\varphi(p)} \right) \cdot \frac{\partial\big((\cdot) \circ \widetilde{\varphi}^{-1}\big)}{\partial \widetilde{x}_j}\Big|_{\widetilde{\varphi}(p)}$$

Απόδειξη: Αυτό είναι συνέπεια του κανόνα της αλυσίδας, αν γράψουμε:

$$\frac{\partial\big((\cdot) \circ \widetilde{\varphi}^{-1} \circ \widetilde{\varphi} \circ \varphi^{-1}\big)}{\partial x_i}\Big|_{\varphi(p)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial\big((\cdot) \circ \widetilde{\varphi}^{-1}\big)}{\partial \widetilde{x}_j}\Big|_{\widetilde{\varphi}(p)} \cdot \frac{\partial(\widetilde{\varphi} \circ \varphi^{-1})_j}{\partial x_i}\Big|_{\varphi(p)}$$

□

Θεώρημα 2.1 (Η $C^\infty-$δομή της εφαπτόμενης δέσμης)**.** *Έστω $(\mathscr{M}, \mathfrak{T}, \mathscr{A})$ μία $C^\infty-$ πολλαπλότητα διάστασης n και $T\mathscr{M}$ η εφαπτόμενη δέσμη της. Υπάρχει $C^\infty-$δομή στην $T\mathscr{M}$ που την καθιστά $C^\infty-$πολλαπλότητα διάστασης $2n$, και τον περιορισμό $\pi : T\mathscr{M} \to \mathscr{M}$, $C^\infty-$συνάρτηση.*

Απόδειξη: Η απόδειξη θα γίνει σε βήματα.

Βήμα Ι: Αρχικά θα κατασκευάσουμε τους χάρτες της εφαπτόμενης δέσμης. Για κάθε $p = (p_1, \cdots, p_n) \in \mathscr{M}$ θεωρούμε τοπικό χάρτη (U_p, φ_{U_p}) και ορίζουμε $V_p = \pi^{-1}(U_p)$, δηλαδή το σύνολο όλων των παραγωγίσεων με σημεία εφαρμογής στο U_p.

Έπειτα γράφουμε, από την Πρόταση 2.1, κάθε $u_q \in T_q\mathscr{M}$:

$$u_q(\cdot) = \sum_{i=1}^{n} u_i^q \frac{\partial\big((\cdot) \circ \varphi_{U_q}^{-1}\big)}{\partial x_i}\Big|_{\varphi_{U_q}(q)}$$

και ορίζουμε τη συνάρτηση:

$$\Phi_{V_p} : V_p \to \mathbb{R}^{2n} \text{ με } \Phi_{V_p}(u_q) = \big((\varphi_{U_p})_1(q), \cdots, (\varphi_{U_p})_n(q), u_1^q, \cdots, u_n^q\big)$$

Η Φ_{V_p} είναι αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση, αφού (δεδομένου του q) κάθε παραγώγιση u_q αντιστοιχεί σε ένα διάνυσμα $(u_i^q)_{i\leqslant n}$ και κάθε διάνυσμα $(u_i^q)_{i\leqslant n}$ αντιστοιχεί σε μία παραγώγιση u_q.

Βήμα ΙΙ: Εάν τώρα Φ_V, $\Phi_{\widetilde{V}}$ είναι δύο τέτοιες συναρτήσεις, τα σύνολα:

$$\Phi_V\big(\pi^{-1}(U) \cap \pi^{-1}(\widetilde{U})\big) = \varphi_U(U \cap \widetilde{U}) \times \mathbb{R}^n$$

και

$$\Phi_{\widetilde{V}}\big(\pi^{-1}(U) \cap \pi^{-1}(\widetilde{U})\big) = \varphi_{\widetilde{U}}(U \cap \widetilde{U}) \times \mathbb{R}^n$$

είναι ανοικτά στον $\mathbb{R}^{2n}$. Επιπλέον, για τις μεταβάσεις έχουμε:

$$\Phi_{\widetilde{V}} \circ \Phi_V^{-1}\big((\varphi_U)_1(q), \cdots, (\varphi_U)_n(q), u_1^q, \cdots, u_n^q\big) = \Phi_{\widetilde{V}}\left(\sum_{i=1}^n u_i^q \frac{\partial\big((\cdot)\circ\varphi_U^{-1}\big)}{\partial x_i}\Big|_{\varphi_U(q)}\right) =$$

$$= \left((\varphi_{\widetilde{U}})_1(q), \cdots, (\varphi_{\widetilde{U}})_n(q), \sum_{i=1}^n u_i^q \frac{\partial(\varphi_{\widetilde{U}}\circ\varphi_U^{-1})_1}{\partial x_i}\Big|_{\varphi_U(q)}, \cdots, \sum_{i=1}^n u_i^q \frac{\partial(\varphi_{\widetilde{U}}\circ\varphi_U^{-1})_n}{\partial x_i}\Big|_{\varphi_U(q)}\right)$$

από το Λήμμα 2.3. Λόγω της $C^\infty-$συμβιβαστότητας των χαρτών φ_U, $\varphi_{\widetilde{U}}$, αποδεικνύεται η $C^\infty-$συμβιβαστότητα των Φ_V, $\Phi_{\widetilde{V}}$.

Βήμα ΙΙΙ: Αν διαλέξουμε μία αριθμήσιμη βάση $\{U_i\}_{i\in I}$ της τοπολογίας του $\mathscr{M}$, η $\{V_i = \pi^{-1}(U_i)\}_{i\in I}$ ικανοποιεί τις ιδιότητες του Λήμματος 2.2, μέχρι την iv. Για τον διαχωρισμό των σημείων του χώρου, αρκεί να παρατηρήσουμε ότι αν $(p, u_p), (q, v_q) \in T\mathscr{M}$, τότε έχουμε τα ακόλουθα: Αν $p = q$, τα στοιχεία $(p, u_p), (q, v_q)$ ανήκουν στο ίδιο V_i, κι αν $p \neq q$, από την ιδιότητα Hausdorff της $\mathscr{M}$ μπορούν να βρεθούν U_i, U_j με:

$$p \in U_i,\ q \in U_j \text{ και } U_i \cap U_j = \emptyset$$

Δηλαδή $(p, u_p) \in \pi^{-1}(U_i) = V_i$, $(q, v_q) \in \pi^{-1}(U_j) = V_j$, $V_i \cap V_j = \emptyset$. Από το Λήμμα 2.2, η οικογένεια $\{(V_i, \Phi_{V_i})\}_{i\in I}$ προσδίδει $C^\infty-$δομή στη δέσμη $T\mathscr{M}$.

Βήμα IV: Τέλος, θα δείξουμε ότι η π είναι C^∞. Χρησιμοποιώντας τους χάρτες $\big(V_i, \Phi_{V_i}\big)$ και (U_i, φ_{U_i}), η τοπική παράσταση της π γίνεται:

$$\varphi_{U_i} \circ \pi \circ \Phi_{V_i}^{-1}(x_1, \cdots, x_{2n}) = (x_1, \cdots, x_n)$$

οπότε είναι C^∞.

□

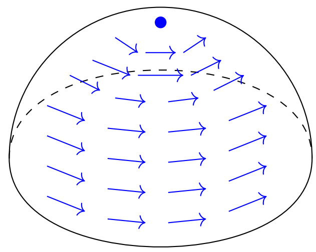
2.3 Διανυσματικά πεδία

Δεδομένων των εφαπτόμενων δεσμών, είναι δυνατόν να ορίσουμε τα διανυσματικά πεδία.

Ορισμός 2.6 (Διανυσματικά πεδία). *Έστω $(\mathscr{M}, \mathfrak{T}, \mathscr{A})$ μία $C^\infty-$πολλαπλότητα και $T\mathscr{M}$ η εφαπτόμενη δέσμη της. Κάθε συνάρτηση $\xi : \mathscr{M} \to T\mathscr{M}$, $\xi \in C^\infty(\mathscr{M}; T\mathscr{M})$ ώστε $\pi \circ \xi = \mathrm{id}$ καλείται $C^\infty-$διανυσματικό πεδίο (ή απλά διανυσματικό πεδίο) του $\mathscr{M}$.*

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{M} \arrow[r, "\xi"] \arrow[dr, "\mathrm{id}"'] & T\mathscr{M} \arrow[d, "\pi"] \\
 & \mathscr{M}
\end{tikzcd}$$

... *Το σύνολο των $C^\infty-$διανυσματικών πεδίων του $\mathscr{M}$ το συμβολίζουμε με $\mathfrak{X}(\mathscr{M})$.*



Στην ουσία, κάθε διανυσματικό πεδίο $\xi : \mathscr{M} \to T\mathscr{M}$ μπορούμε να το φανταζόμαστε ως μία συλλογή παραγωγίσεων (ή εφαπτόμενων διανυσμάτων), που μεταβάλλονται ομαλά καθώς το σημείο εφαρμογής αλλάζει.

Δεδομένης της Παρατήρησης 2.6, κάθε παραγώγιση $u_p \in T_p\mathscr{M}$ εκφράζεται τοπικά μέσω των $\partial\big((\cdot)\circ\varphi^{-1}\big)/\partial x_i|_{\varphi(p)}$. Αυτήν την ιδέα θα επεκτείνουμε και στον χώρο των διανυσματικών πεδίων $\mathfrak{X}(\mathscr{M})$, και θα τη χρησιμοποιήσουμε για την ανάπτυξη διάφορων αποτελεσμάτων.

Θέλοντας να παραλείψουμε από τον συμβολισμό τους διάφορους χάρτες (και να άρουμε, κατά κάποιον τρόπο, την εξάρτηση από «πολλούς» χάρτες), θεωρούμε για κάθε $p \in \mathscr{M}$ έναν τοπικό χάρτη (U, φ), και συμβολίζουμε:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p = \frac{\partial\big((\cdot)\circ\varphi^{-1}\big)}{\partial x_i}\Big|_{\varphi(p)}$$

Όπως έχουμε ήδη δει, κάθε $u_p \in T_p\mathscr{M}$ γράφεται (πλέον με τον νέο συμβολισμό):

$$u_p = \sum_{i=1}^{n} u_i \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p$$

Εάν πράγματι τα διανυσματικά πεδία είναι μία «ομαλή μεταβολή» των διάφορων στοιχείων των εφαπτόμενων χώρων, θα θέλαμε η παραπάνω γραφή να τροποποιηθεί ώστε κάθε διανυσματικό πεδίο ξ να γράφεται:

$$\xi(x) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_x$$

όπου $\xi_i \in C^\infty(\mathscr{M}; \mathbb{R})$.

Πρόταση 2.5. *Έστω $(\mathscr{M}, \mathfrak{T}, \mathscr{A})$ μία $C^\infty-$πολλαπλότητα και $\xi \in \mathfrak{X}(\mathscr{M})$. Το ξ παίρνει τη μορφή:*

$$\xi(x) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_x, \text{ με } \xi_i \in C^\infty(\mathscr{M}; \mathbb{R})$$

Απόδειξη: Εάν (U, φ), $(V = \pi^{-1}(U), \Phi)$ είναι τοπικοί χάρτες, από το γεγονός $\xi \in C^\infty(\mathscr{M}; T\mathscr{M})$ έπεται ότι η τοπική παράσταση:

$$\Phi\circ\xi\circ\varphi^{-1}\big(\varphi_1(x), \cdots, \varphi_n(x)\big) = \big(\varphi_1(x), \cdots, \varphi_n(x), \xi_1(x), \cdots, \xi_n(x)\big)$$

είναι C^∞. Δηλαδή οι ξ_i, $i \in \{1, \cdots, n\}$ είναι παντού τοπικά C^∞.

□

Φυσικά ισχύει και το -κατά κάποιο τρόπο- αντίστροφο της προηγούμενης πρότασης. Δηλαδή, κάθε γραφή $\sum_{i=1}^{n} \xi_i \partial/\partial x_i$, $\xi_i \in C^\infty(\mathscr{M};\mathbb{R})$ είναι διανυσματικό πεδίο.

Ορισμός 2.7 (Δράσεις σε συναρτήσεις). *Έστω $(\mathscr{M}, \mathfrak{T}, \mathscr{A})$ μία $C^\infty-$πολλαπλότητα και $\xi \in \mathfrak{X}(\mathscr{M})$. Εάν $f \in C^\infty(\mathscr{M};\mathbb{R})$, ορίζουμε:*

$$\xi f(x) = \xi(x)(f)$$

Δηλαδή:

$$\xi f(x) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i(x) \frac{\partial f}{\partial x_i}\Big|_x$$

Παρατήρηση 2.7. *Έστω $(\mathscr{M}, \mathfrak{T}, \mathscr{A})$ μία $C^\infty-$πολλαπλότητα και $\xi \in \mathfrak{X}(\mathscr{M})$. Χρησιμοποιώντας τη γραφή της Πρότασης 2.5, έχουμε:*

$$\xi_i = \xi\pi_i, \text{ όπου } \pi_i \text{ είναι ο περιορισμός στην } i-\text{συντεταγμένη}$$

(δηλαδή η συνάρτηση $\pi_i = \varphi_i : \mathscr{M} \to \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$).

Απόδειξη: Πράγματι, επειδή $\partial\pi_i/\partial x_j = 1$ όταν $i = j$ και 0 διαφορετικά:

$$\xi\pi_i = \xi_i \frac{\partial \pi_i}{\partial x_i} = \xi_i$$

□

Πρόταση 2.6. *Έστω $(\mathscr{M}, \mathfrak{T}, \mathscr{A})$ μία $C^\infty-$πολλαπλότητα.*

i. *Το σύνολο $\mathfrak{X}(\mathscr{M})$ είναι ένας διανυσματικός χώρος. Μάλιστα, είναι ένα $C^\infty(\mathscr{M};\mathbb{R})-$πρότυπο.*

ii. *Μία απεικόνιση $\xi : \mathscr{M} \to T\mathscr{M}$ είναι (εννοείται ομαλό) διανυσματικό πεδίο εάν και μόνο αν $\pi \circ \xi = \mathrm{id}$ και για κάθε $f \in C^\infty(\mathscr{M};\mathbb{R})$ έχουμε $\xi f = \xi(\cdot)(f) \in C^\infty(\mathscr{M};\mathbb{R})$*

iii. *Ισχύει ο κανόνας του Leibnitz: Για κάθε $\xi \in \mathfrak{X}(\mathscr{M})$, $p \in \mathscr{M}$ και $f, g \in C^\infty(\mathscr{M};\mathbb{R})$*

$$\xi(p)(fg) = f(p)\xi(p)(g) + g(p)\xi(p)(f)$$

Απόδειξη: Για το i.: Η ιδιότητα του διανυσματικού χώρου είναι υπόθεση ρουτίνας να ελεγχθεί. Όσον αφορά την ιδιότητα του προτύπου, για κάθε $f \in C^\infty(\mathscr{M};\mathbb{R})$ και $\xi \in \mathfrak{X}(\mathscr{M})$ έχουμε ότι οι συντεταγμένες του $f\xi$ είναι $f\xi_i$, που είναι $C^\infty-$συναρτήσεις.

Για το ii.: ($\Rightarrow$) Εάν το ξ είναι διανυσματικό πεδίο, τότε γράφεται στη μορφή:

$$\xi(x) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}, \text{ με } \xi_i \in C^\infty(\mathscr{M};\mathbb{R})$$

Για κάθε $f \in C^\infty(\mathscr{M};\mathbb{R})$ έχουμε:

$$\xi f(x) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i(x) \frac{\partial f}{\partial x_i}\Big|_x$$

οπότε $\xi f \in C^\infty(\mathscr{M};\mathbb{R})$.

($\Leftarrow$) Εάν $f = \pi_i$ (δηλαδή $f = \varphi_i$), τότε οι $\xi(x)(\pi_i) = \xi_i$ είναι $C^\infty-$συναρτήσεις, άρα το ξ είναι διανυσματικό πεδίο.

Το iii. είναι συνέπεια των ιδιοτήτων των παραγωγίσεων.

□

Πρόταση 2.7. *Έστω $(\mathscr{M}, \mathfrak{T}, \mathscr{A})$ μία $C^\infty-$πολλαπλότητα, $p \in \mathscr{M}$ και $u_p \in T_p\mathscr{M}$. Υπάρχει $\xi \in \mathfrak{X}(\mathscr{M})$ ώστε:*

$$\xi(p) = u_p$$

Απόδειξη: Αν γράψουμε:

$$u_p(\cdot) = \sum_{i=1}^{n} u_i \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p$$

θεωρώντας τα u_i σταθερά, μπορούμε να ορίσουμε:

$$\xi(x) = \sum_{i=1}^{n} u_i \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_x$$

Μάλιστα, θα μπορούσαμε να «περιορίσουμε» το διανυσματικό πεδίο σε μικρότερο σύνολο, πολλαπλασιάζοντας με έπαρμα δ στο $\{p\}$.

□

Στις παραγωγίσεις είχαμε μελετήσει την προώθηση $F_* : T_p\mathscr{M} \to T_{F(p)}\mathscr{N}$ μίας συνάρτησης $F : \mathscr{M} \to \mathscr{N}$, που στην ουσία μετέφερε μία σχέση από τις πολλαπλότητες στους εφαπτόμενους χώρους. Αντίστοιχη διαδικασία θέλουμε να υπάρχει και μεταξύ χώρων διανυσματικών πεδίων $\mathfrak{X}(\mathscr{M})$, $\mathfrak{X}(\mathscr{N})$.

Εδώ βέβαια θα πρέπει να προσέξουμε μερικές λεπτομέρειες. Εμείς ενδεχομένως, χρησιμοποιώντας τον ορισμό:

$$F_*(u_p) = u_p\big(\blacklozenge \circ F\big) : C^\infty(\mathscr{N};\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$

μπορεί να θέλαμε να γενικεύσουμε γράφοντας:

$$F_*(\xi) = \xi(\lozenge)(\blacklozenge \circ F) : \mathscr{M} \to T\mathscr{N}, \text{ όπου } \xi \in \mathfrak{X}(\mathscr{M})$$

Αυτό όμως, όπως γράψαμε παραπάνω, δεν έχει πεδίο ορισμού το $\mathscr{N}$, και συνεπώς δεν είναι διανυσματικό πεδίο στο $\mathfrak{X}(\mathscr{N})$.

Για να «διορθωθεί» αυτό το πρόβλημα, θεωρούμε τα $F-$συσχετισμένα πεδία.

Ορισμός 2.8 (Συσχετισμένα διανυσματικά πεδία)**.** *Έστω $(\mathscr{M}, \mathfrak{T}_\mathscr{M}, \mathscr{A})$, $(\mathscr{N}, \mathfrak{T}_\mathscr{N}, \mathscr{B})$ δύο $C^\infty-$πολλαπλότητες, $F \in C^\infty(\mathscr{M};\mathscr{N})$ και $\xi \in \mathfrak{X}(\mathscr{M})$, $\eta \in \mathfrak{X}(\mathscr{N})$. Θα λέμε ότι τα ξ, η είναι $F-$συσχετισμένα εάν για κάθε $p \in \mathscr{M}$:*

$$F_*\big(\xi(p)\big) = \eta\big(F(p)\big)$$

Παρατήρηση 2.8. *Έστω $(\mathscr{M}, \mathfrak{T}_\mathscr{M}, \mathscr{A})$, $(\mathscr{N}, \mathfrak{T}_\mathscr{N}, \mathscr{B})$ δύο $C^\infty-$ πολλαπλότητες, $F \in C^\infty(\mathscr{M};\mathscr{N})$ και $\xi \in \mathfrak{X}(\mathscr{M})$, $\eta \in \mathfrak{X}(\mathscr{N})$. Τα ξ, η είναι $F-$συσχετισμένα εάν και μόνο αν για κάθε $f \in C^\infty(\mathscr{N};\mathbb{R})$ έχουμε:*

$$F_*\big(\xi(\cdot)\big)(f) = \xi(\cdot)(f \circ F) = \eta\big(F(\cdot)\big)(f)$$

Θεώρημα 2.2. *Έστω $(\mathscr{M}, \mathfrak{T}_{\mathscr{M}}, \mathscr{A})$, $(\mathscr{N}, \mathfrak{T}_{\mathscr{N}}, \mathscr{B})$ δύο $C^{\infty}-$ πολλαπλότητες. Εάν η $F : \mathscr{M} \to \mathscr{N}$ είναι $C^{\infty}-$αμφιδιαφόριση, τότε κάθε $\xi \in \mathfrak{X}(\mathscr{M})$ είναι $F-$συσχετισμένο με μοναδικό $\eta \in \mathfrak{X}(\mathscr{N})$.*

Απόδειξη: Εφόσον η F είναι $C^{\infty}-$αμφιδιαφόριση, από την Πρόταση 2.3 η $F_* : T_p\mathscr{M} \to T_{F(p)}\mathscr{N}$ είναι ισομορφισμός για κάθε $p \in \mathscr{M}$. Για κάθε $q \in \mathscr{N}$ ορίζουμε:

$$\eta(q) = F_*\Big(\xi\big(F^{-1}(q)\big)\Big)$$

Η η είναι C^{∞}, αφού αν π_i είναι ο περιορισμός στον $i-$παράγοντα (δηλαδή $\pi_i = \psi_i$) η:

$$\eta(q)(\pi_i) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i\big(F^{-1}(q)\big)\frac{\partial(\pi_i F)}{\partial x_i}\Big|_{F^{-1}(q)}$$

είναι $C^{\infty}(\mathscr{N};\mathbb{R})-$συνάρτηση. Κατά συνέπεια, $\eta \in \mathfrak{X}(\mathscr{N})$.

Λόγω ισομορφισμού, το $\eta \in \mathfrak{X}(\mathscr{N})$ είναι το μοναδικό $F-$συσχετισμένο διανυσματικό πεδίο με το $\xi \in \mathfrak{X}(\mathscr{M})$.

□

Πέρα των ≪γενικών≫ διανυσματικών πεδίων, έχει νόημα να μελετήσουμε και διανυσματικά πεδία κατά μήκος απεικονίσεων.

Ορισμός 2.9 (Διανυσματικά πεδία κατά μήκος απεικονίσεων)**.** *Έστω $(\mathscr{M}, \mathfrak{T}_{\mathscr{M}}, \mathscr{A})$, $(\mathscr{N}, \mathfrak{T}_{\mathscr{N}}, \mathscr{B})$ δύο $C^{\infty}-$ πολλαπλότητες και $F : \mathscr{M} \to \mathscr{N}$ μία $C^{\infty}-$συνάρτηση. Μία $C^{\infty}-$συνάρτηση $\xi : \mathscr{M} \to T\mathscr{N}$ λέγεται διανυσματικό πεδίο κατά μήκος της F εάν $\pi \circ \xi = F$.*

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{M} \arrow[r, "\xi"] \arrow[dr, "F"'] & T\mathscr{N} \arrow[d, "\pi"] \\
 & \mathscr{N}
\end{tikzcd}$$

Συμβολίζουμε το σύνολο των (ομαλών) διανυσματικών πεδίων κατά μήκος της F με $\mathfrak{X}(F)$.

Όπως και στην περίπτωση των διανυσματικών πεδίων, μπορεί να αποδειχθεί ότι το $\mathfrak{X}(F)$ είναι γραμμικός χώρος και $C^{\infty}(\mathscr{M};\mathbb{R})-$πρότυπο.

Επιπλέον, αναλόγως με την περίπτωση των διανυσματικών πεδίων, τα πεδία κατά μήκος απεικονίσεων έχουν μία γραφή χρησιμοποιώντας τα βασικά διανυσματικά πεδία $\partial/\partial y_i$.

Πρόταση 2.8. *Έστω $(\mathscr{M}, \mathfrak{T}_{\mathscr{M}}, \mathscr{A})$, $(\mathscr{N}, \mathfrak{T}_{\mathscr{N}}, \mathscr{B})$ δύο $C^{\infty}-$ πολλαπλότητες, $F \in C^{\infty}(\mathscr{M};\mathscr{N})$ και $\xi \in \mathfrak{X}(F)$. Τότε:*

$$\xi(x) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i(x)\frac{\partial}{\partial y_i}\Big|_{F(x)}, \text{ με } \xi_i \in C^{\infty}(\mathscr{M};\mathbb{R})$$

Απόδειξη: Εφόσον $\xi(x) \in T_{F(x)}\mathscr{N}$, μπορούμε να γράψουμε:

$$\xi(x) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i(x)\frac{\partial}{\partial y_i}\Big|_{F(x)}$$

όπου οι $\xi_i(x)$ είναι -προς το παρόν- αριθμοί. Χρειάζεται τώρα να δείξουμε ότι οι ξ_i είναι $C^\infty-$ συναρτήσεις. Γι' αυτό θεωρούμε, δεδομένων των χαρτών (U,φ), (V,ψ), (W,Ψ) των x, $F(x)$ και $\xi(x)$, την τοπική παράσταση:

$$\Psi\circ\xi\circ\varphi^{-1}\big(\varphi_1(x),\cdots,\varphi_m(x)\big)=\Big(\psi_1\big(F(x)\big),\cdots,\psi_n\big(F(x)\big),\xi_1(x),\cdots,\xi_n(x)\Big)$$

Η παράσταση αυτή είναι C^∞, πράγμα που αποδεικνύει ότι $\xi_i\in C^\infty(\mathscr{M};\mathbb{R})$.

□

Παρατήρηση 2.9. *Έστω $(\mathscr{M},\mathfrak{T}_{\mathscr{M}},\mathscr{A})$, $(\mathscr{N},\mathfrak{T}_{\mathscr{N}},\mathscr{B})$ δύο $C^\infty-$ πολλαπλότητες, $F\in C^\infty(\mathscr{M};\mathscr{N})$ και $\xi\in\mathfrak{X}(F)$. Τότε:*

$$\xi_i=\xi\pi_i,\ \textit{όπου } \pi_i \textit{ είναι ο περιορισμός στην } i-\textit{συντεταγμένη}$$

(δηλαδή η συνάρτηση $\pi_i=\psi_i:\mathscr{N}\to\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$).

Απόδειξη: Πράγματι:

$$(\xi\pi_i)(x)=\xi(x)(\pi_i)=\sum_{j=1}^n\xi_j(x)\frac{\partial\pi_i}{\partial y_j}\Big|_{F(p)}=\xi_i(x)$$

□

2.4 Αγκύλη Lie στα διανυσματικά πεδία

Δεδομένων δύο διανυσματικών πεδίων $\xi,\eta\in\mathfrak{X}(\mathscr{M})$, ξέρουμε ότι το βαθμωτό άθροισμά του (δηλαδή το $\lambda f+\mu g$) είναι διανυσματικό πεδίο, αφού ο $\mathfrak{X}(\mathscr{M})$ είναι διανυσματικός χώρος. Για τη σύνθεση όμως $\xi\circ\eta$, δεν μπορούμε να αποδείξουμε ότι είναι διανυσματικό πεδίο, και μάλιστα εν γένει δεν είναι διανυσματικό πεδίο. Η σύνθεση έχει νόημα με τον εξής τρόπο: Η η είναι ένα διανυσματικό πεδίο, οπότε η $\eta(\lozenge)(f)$ είναι η συνάρτηση:

$$\eta(\lozenge)(f)=\sum_{i=1}^n\eta_i(\lozenge)\frac{\partial f}{\partial x_i}\Big|_{\lozenge}\in C^\infty(\mathscr{M};\mathbb{R})$$

όπου $f\in C^\infty(\mathscr{M};\mathbb{R})$. Το ότι είναι πράγματι C^∞ δικαιολογείται από την τοπική της παράσταση:

$$\eta\big(\varphi^{-1}(\cdot)\big)(f)=\sum_{i=1}^n\eta_i\big(\varphi^{-1}(\cdot)\big)\frac{\partial f}{\partial x_i}\Big|_{\varphi^{-1}(\cdot)}$$

όπου (U,φ) είναι τοπικός χάρτης. Αν λοιπόν δράσουμε με το διανυσματικό πεδίο ξ, παίρνουμε:

$$\xi(\lozenge)\big(\eta(\blacklozenge)(f)\big)=\sum_{i=1}^n\xi_i(\lozenge)\frac{\partial\big(\eta(\blacklozenge)(f)\big)}{\partial x_i}\Big|_{\lozenge}$$

Η συνάρτηση τώρα $(\xi\circ\eta)(\lozenge)(\cdot)=\xi(\lozenge)\big(\eta(\blacklozenge)(\cdot)\big)$ δεν είναι κατ' ανάγκη παραγώγιση. Για παράδειγμα δεν ικανοποιεί πάντα τον κανόνα του Leibnitz. Εάν $f,g\in C^\infty(\mathscr{M};\mathbb{R})$ και το $(\xi\circ\eta)$ ήταν διανυσματικό πεδίο, τότε:

$$(\xi\circ\eta)(\lozenge)(fg)=(\xi\circ\eta)(\lozenge)(f)\cdot g(\lozenge)+f(\lozenge)\cdot(\xi\circ\eta)(\lozenge)(g)$$

κι από την άλλη:

$$(\xi\circ\eta)(\lozenge)(fg)=\xi(\lozenge)\big(\eta(\blacklozenge)(fg)\big)=\xi(\lozenge)\big(\eta(\blacklozenge)(f)\cdot g+f\cdot\eta(\blacklozenge)(g)\big)=$$

$$=\xi(\lozenge)\big(\eta(\blacklozenge)(f)\big)\cdot g(\lozenge)+\eta(\lozenge)(f)\cdot\xi(\lozenge)(g)+\xi(\lozenge)(f)\cdot\eta(\lozenge)(g)+f(\lozenge)\cdot\xi(\lozenge)\big(\eta(\blacklozenge)(g)\big)=$$

$$= \underbrace{(\xi\circ\eta)(\lozenge)(f)\cdot g(\lozenge)+f(\lozenge)\cdot(\xi\circ\eta)(\lozenge)(g)}_{\text{Leibnitz μέρος}} + \eta(\lozenge)(f)\cdot\xi(\lozenge)(g)+\xi(\lozenge)(f)\cdot\eta(\lozenge)(g)$$

Παρόλα αυτά, μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι η διαφορά $\xi\circ\eta-\eta\circ\xi$ ικανοποιεί τον κανόνα του Leibnitz και είναι γραμμική. Μπορείτε να δείτε ότι η διαφορά διώχνει τα «μη Leibnitz» μέρη που εφανίζονται κατά την εκτέλεση του κανόνα του Leibnitz.

Όλα αυτά οδηγούν στον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 2.10 (Αγκύλη Lie). *Έστω $(\mathscr{M},\mathfrak{T},\mathscr{A})$ μία $C^\infty-$πολλαπλότητα και $\xi,\eta\in\mathfrak{X}(\mathscr{M})$. Ορίζουμε ως αγκύλη Lie την ποσότητα:*

$$[\xi,\eta]=\xi\circ\eta-\eta\circ\xi$$

όπου:

$$(\xi\circ\eta)(\lozenge)(\cdot)=\xi(\lozenge)\big(\eta(\blacklozenge)(\cdot)\big)$$

Αυτό που θα δείξουμε στη συνέχεια είναι αυτό που μέσ' τις άκρες ήδη αναφέραμε, ότι δηλαδή για κάθε δύο διανυσματικά πεδία $\xi,\eta\in\mathfrak{X}(\mathscr{M})$ η αγκύλη Lie $[\xi,\eta]$ είναι επίσης διανυσματικό πεδίο του $\mathfrak{X}(\mathscr{M})$. Αυτό θα δώσει στον χώρο $\big(\mathfrak{X}(\mathscr{M}),[\cdot,\cdot]\big)$ δομή άλγεβρας Lie.

Πρόταση 2.9 (Η αγκύλη Lie ως διανυσματικό πεδίο). *Έστω $(\mathscr{M},\mathfrak{T},\mathscr{A})$ μία $C^\infty-$ πολλαπλότητα και $\xi,\eta\in\mathfrak{X}(\mathscr{M})$. Η αγκύλη Lie $[\xi,\eta]$ είναι διανυσματικό πεδίο, δηλαδή $[\xi,\eta]\in\mathfrak{X}(\mathscr{M})$.*

Απόδειξη: Θεωρούμε $f\in C^\infty(\mathscr{M};\mathbb{R})$ και γράφουμε:

$$\xi(\lozenge)(f)=\sum_{i=1}^n\xi_i(\lozenge)\frac{\partial f}{\partial x_i}\Big|_\lozenge$$

και:

$$\eta(\lozenge)(f)=\sum_{i=1}^n\eta_i(\lozenge)\frac{\partial f}{\partial x_i}\Big|_\lozenge$$

Οπότε, για το $\xi(\lozenge)\big(\eta(\blacklozenge)(f)\big)$ έχουμε:

$$\begin{aligned}\xi(\lozenge)\big(\eta(\blacklozenge)(f)\big)&=\sum_{i=1}^n\xi_i(\lozenge)\frac{\partial\big(\eta(\blacklozenge)(f)\big)}{\partial x_i}\Big|_\lozenge=\sum_{i=1}^n\xi_i(\lozenge)\sum_{j=1}^n\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_\lozenge\left(\eta_j(\blacklozenge)\frac{\partial f}{\partial x_j}\Big|_\blacklozenge\right)\\&=\sum_{i=1}^n\xi_i(\lozenge)\sum_{j=1}^n\left(\frac{\partial\eta_j}{\partial x_i}\Big|_\lozenge\cdot\frac{\partial f}{\partial x_j}\Big|_\lozenge+\eta_j(\lozenge)\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}\Big|_\lozenge\right)\\&=\sum_{j=1}^n\left(\sum_{i=1}^n\xi_i(\lozenge)\frac{\partial\eta_j}{\partial x_i}\Big|_\lozenge\right)\cdot\frac{\partial f}{\partial x_j}\Big|_\lozenge+\sum_{j=1}^n\sum_{i=1}^n\xi_i(\lozenge)\eta_j(\lozenge)\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}\Big|_\lozenge\end{aligned}$$

και εντελώς συμμετρικά:

$$\eta(\lozenge)\big(\xi(\blacklozenge)(f)\big)=\sum_{j=1}^n\left(\sum_{i=1}^n\eta_i(\lozenge)\frac{\partial\xi_j}{\partial x_i}\Big|_\lozenge\right)\cdot\frac{\partial f}{\partial x_j}\Big|_\lozenge+\sum_{j=1}^n\sum_{i=1}^n\xi_i(\lozenge)\eta_j(\lozenge)\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}\Big|_\lozenge$$

Αφαιρώντας παίρνουμε:

$$[\xi,\eta](\lozenge)(f)=\sum_{j=1}^n\left(\sum_{i=1}^n\xi_i(\lozenge)\frac{\partial\eta_j}{\partial x_i}\Big|_\lozenge-\eta_i(\lozenge)\frac{\partial\xi_j}{\partial x_i}\Big|_\lozenge\right)\cdot\frac{\partial f}{\partial x_j}\Big|_\lozenge$$

με:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\xi_i(\lozenge)\frac{\partial\eta_j}{\partial x_i}\Big|_{\lozenge}-\eta_i(\lozenge)\frac{\partial\xi_j}{\partial x_i}\Big|_{\lozenge}\right)\in C^\infty(\mathscr{M};\mathbb{R})$$

Κατά συνέπεια η αγκύλη $[\xi,\eta]$ είναι διανυσματικό πεδίο με:

$$[\xi,\eta](x)=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\xi_i(x)\frac{\partial\eta_j}{\partial x_i}\Big|_x-\eta_i(x)\frac{\partial\xi_j}{\partial x_i}\Big|_x\right)\cdot\frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_x$$

□

Πρόταση 2.10 (Ιδιότητες της αγκύλης Lie)**.** *Έστω $(\mathscr{M},\mathfrak{T},\mathscr{A})$ μία $C^\infty-$ πολλαπλότητα και $\xi,\eta,\theta\in\mathfrak{X}(\mathscr{M})$.*

i. $[\xi,\eta]=-[\eta,\xi]$

ii. *Για $\lambda\in\mathbb{R}$, $[\lambda\xi+\eta,\theta]=\lambda[\xi,\theta]+[\eta,\theta]$.*

iii. *Ισχύει η ταυτότητα του Jacobi:*

$$\big[\xi,[\eta,\theta]\big]+\big[\eta,[\theta,\xi]\big]+\big[\theta,[\xi,\eta]\big]=0$$

Απόδειξη: Τα i. και ii. είναι συνέπεια του ορισμού. Αυτό που χρειάζεται να αποδειχθεί είναι το iii.

Με πράξεις (και χωρίς τα διαμάντια, για ευκολία στις πράξεις) βρίσκουμε ότι:

$$\big[\xi,[\eta,\theta]\big]=\xi\big([\eta,\theta]\big)-[\eta,\theta](\xi)=\xi(\eta(\theta))-\xi(\theta(\eta))-\eta(\theta(\xi))+\theta(\eta(\xi))$$

$$\big[\eta,[\theta,\xi]\big]=\eta\big([\theta,\xi]\big)-[\theta,\xi](\eta)=\eta(\theta(\xi))-\eta(\xi(\theta))-\theta(\xi(\eta))+\xi(\theta(\eta))$$

$$\big[\theta,[\xi,\eta]\big]=\theta\big([\xi,\eta]\big)-[\xi,\eta](\theta)=\theta(\xi(\eta))-\theta(\eta(\xi))-\xi(\eta(\theta))+\eta(\xi(\theta))$$

Προσθέτοντας, παίρνουμε το ζητούμενο.

□

Ορισμός 2.11 (Διανυσματικά πεδία που μετατίθενται)**.** *Έστω $(\mathscr{M},\mathfrak{T},\mathscr{A})$ μία $C^\infty-$ πολλαπλότητα και $\xi,\eta\in\mathfrak{X}(\mathscr{M})$. Εάν $[\xi,\eta]=0$, θα λέμε ότι τα ξ,η μετατίθενται. Και πράγματι, από τον ορισμό της αγκύλης Lie παίρνουμε:*

$$\xi(\lozenge)\big(\eta(\blacklozenge)(\cdot)\big)=\eta(\lozenge)\big(\xi(\blacklozenge)(\cdot)\big)$$

το οποίο δικαιολογεί τον ορισμό.

Παρατήρηση 2.10. *Έστω $(\mathscr{M},\mathfrak{T},\mathscr{A})$ μία $C^\infty-$ πολλαπλότητα. Τα πεδία $\partial/\partial x_i,\partial/\partial x_j\in\mathfrak{X}(\mathscr{M})$ μετατίθενται, δηλαδή:*

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_i},\frac{\partial}{\partial x_j}\right]=0$$

Απόδειξη: Πράγματι, εφόσον οι συναρτήσεις που λειτουργούν ως ορίσματα είναι C^∞, επιτρέπεται η εναλλαγή των παραγώγων. Δηλαδή:

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}=\frac{\partial^2}{\partial x_j\partial x_i}$$

ή αλλιώς:

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right] = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i} = 0$$

□

Πρόταση 2.11. *Έστω $(\mathcal{M}, \mathfrak{T}_{\mathcal{M}}, \mathcal{A})$, $(\mathcal{N}, \mathfrak{T}_{\mathcal{N}}, \mathcal{B})$ δύο $C^\infty-$ πολλαπλότητες, $F \in C^\infty(\mathcal{M}; \mathcal{N})$ και $\xi, \eta \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$, $\theta, \zeta \in \mathfrak{X}(\mathcal{N})$. Εάν τα ξ, θ και η, ζ είναι $F-$συσχετισμένα, τότε για κάθε $f \in C^\infty(\mathcal{M}; \mathbb{R})$:*

$$F_*\big([\xi, \eta](\cdot)\big)(f) = [\theta, \zeta]\big(F(\cdot)\big)(f)$$

δηλαδή (από την Παρατήρηση 2.8) τα $[\xi, \eta]$, $[\theta, \zeta]$ είναι $F-$συσχετισμένα.

Απόδειξη: Θεωρούμε $f \in C^\infty(\mathcal{M}; \mathbb{R})$ και γράφουμε:

$$F_*\big([\xi, \eta](\lozenge)\big)(f) = [\xi, \eta](\lozenge)(f \circ F) = \xi(\lozenge)\big(\eta(\blacklozenge)(f \circ F)\big) - \eta(\lozenge)\big(\xi(\blacklozenge)(f \circ F)\big)$$

κι επειδή τα ξ, θ και η, ζ είναι $F-$συσχετισμένα:

$$\begin{aligned} F_*\big([\xi, \eta](\lozenge)\big)(f) &= \xi(\lozenge)\big(\zeta(F(\blacklozenge))(f)\big) - \eta(\lozenge)\big(\theta(F(\blacklozenge))(f)\big) \\ &= \theta\big(F(\lozenge)\big)\big(\zeta(\blacklozenge)(f)\big) - \zeta\big(F(\lozenge)\big)\big(\theta(\blacklozenge)(f)\big) \\ &= [\theta, \zeta]\big(F(\lozenge)\big)(f) \end{aligned}$$

Έχουμε τελικά ότι:

$$F_*\big([\xi, \eta](\cdot)\big)(f) = [\theta, \zeta]\big(F(\cdot)\big)(f)$$

□

2.5 Διαφορικές ροές

Έχοντας ορίσει τα διανυσματικά πεδία, μπορούμε να αναφερθούμε στις διαφορικές ροές στις πολλαπλότητες.

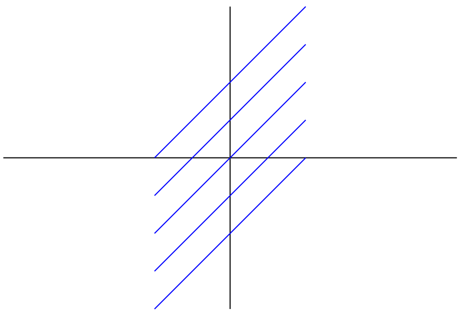
Ας θεωρήσουμε μία $C^\infty-$συνάρτηση $\Theta : \mathbb{R} \times \mathcal{M} \to \mathcal{M}$, που έχει ως ορίσματα τον «χρόνο» ($t \in \mathbb{R}$) και τη «θέση» ($p \in \mathcal{M}$), και που κατά κάποιον τρόπο εκφράζει τη «μεταφορά υλικού». Σε χρόνο 0 μπορούμε να φανταστούμε ότι δεν έχει υπάρξει κάποια «μεταφορά υλικού», αφού τη στιγμή εκκίνησης αυτή υλοποιούνται οι αρχικές μας συνθήκες. Οπότε μπορούμε να θεωρήσουμε $\Theta(0, p) = p$. Από την άλλη, σε χρόνο $t + s$ έχουμε τη ροή $\Theta(t + s, p)$, η οποία -αν αυτή ορίζεται με λογικό τρόπο- θα πρέπει να μπορεί να βρεθεί μελετώντας την μεταφορά πρώτα σε χρόνο t, κι έπειτα σε χρόνο s μονάδες μετά το t, από το σημείο $\Theta(t, p)$. Δηλαδή $\Theta(t + s, p) = \Theta\big(s, \Theta(t, p)\big)$.

Η έννοια της ροής μελετάται και στα δυναμικά συστήματα, με διαφορετική ορολογία (οι συναρτήσεις Θ λέγονται συναρτήσεις μετάβασης, και συνήθως έχουν και κάποιον αρχικό χρόνο t_0, ενδεχομένως διαφορετικό του μηδενός).

Παράδειγμα ροής (λόγου χάρη προς μία κατεύθυνση $v = (v_1, v_2)$) στον $\mathbb{R}^2$ είναι η:

$$\Theta\big(t, (x_1, x_2)\big) = (x_1 + tv_1, x_2 + tv_2)$$

Εδώ η μεταφορά του υλικού γίνεται σε παράλληλες προς το v ευθείες.



Ορισμός 2.12 (Διαφορικές ροές). *Έστω $(\mathscr{M}, \mathfrak{T}, \mathscr{A})$ μία $C^\infty-$ πολλαπλότητα και $\Theta : \mathbb{R} \times \mathscr{M} \to \mathscr{M}$ μία $C^\infty-$συνάρτηση. Η Θ θα καλείται διαφορική ροή εάν:*

i. *Για κάθε $p \in \mathscr{M}$, $\Theta(0, p) = p$.*

ii. *Για κάθε $t, s \in \mathbb{R}$ και $p \in \mathscr{M}$, $\Theta(t + s, p) = \Theta\big(s, \Theta(t, p)\big)$.*

Μερικές φορές βλέπουμε τις διαφορικές ροές ως μονοπαραμετρικές οικογένειες απεικονίσεων, δηλαδή γράφουμε $\Theta(t, p) = \Theta_t(p)$. Αυτό δεν είναι απλά αλλαγή στον συμβολισμό, καθώς έχει το ακόλουθο νόημα: Καθεμία από τις συναρτήσεις Θ_t είναι μία $C^\infty-$αμφιδιαφόριση.

Παρατήρηση 2.11. *Έστω $(\mathscr{M}, \mathfrak{T}, \mathscr{A})$ μία $C^\infty-$ πολλαπλότητα και $\Theta : \mathbb{R} \times \mathscr{M} \to \mathscr{M}$ μία διαφορική ροή. Εάν $\Theta_t(\cdot) = \Theta(t, \cdot)$, τότε οι Θ_t είναι $C^\infty-$αμφιδιαφορίσεις, με αντίστροφο Θ_{-t}.*

Απόδειξη: Αρκεί να παρατηρήσουμε ότι $\Theta_t \circ \Theta_{-t}(p) = \Theta(t - t, p) = p$ (δηλαδή είναι η ταυτοτική απεικόνιση).

□

Ορισμός 2.13 (Ολοκληρωτικές καμπύλες). *Έστω $(\mathscr{M}, \mathfrak{T}, \mathscr{A})$ μία $C^\infty-$ πολλαπλότητα και $\xi \in \mathfrak{X}(\mathscr{M})$. Θα λέμε ότι μία $C^\infty-$καμπύλη $\gamma : I \to \mathscr{M}$ (όπου $I \subseteq \mathbb{R}$ είναι ανοικτό διάστημα) είναι ολοκληρωτική εάν:*

$$\gamma_*\left(\frac{d}{dt}\bigg|_t\right) = \xi\big(\gamma(t)\big)$$

Βάσει του ορισμού, οι ολοκληρωτικές καμπύλες είναι καμπύλες στην πολλαπλότητα $\mathscr{M}$ οι οποίες ακολουθούν τα ≪βέλη≫ του διανυσματικού πεδίου ξ. Θυμηθείτε ότι, από την Πρόταση 2.4, η προώθηση γ_* παίζει το ρόλο του διαφορικού.

Μπορούμε να συσχετίσουμε τις ολοκληρωτικές καμπύλες με τις διαφορικές ροές με τον εξής τρόπο: Θα δείξουμε ότι κάθε τροχιά $\gamma(t) = \Theta(t, p)$ είναι ολοκληρωτική καμπύλη. Για την ομαλή μετάβαση στο αποτέλεσμα, θα εισάγουμε την έννοια του απειροστικού γεννήτορα.

Εάν θεωρήσουμε Θ μία διαφορική ροή στη $\mathscr{M}$, μπορούμε να ορίσουμε τον απειροστικό γεννήτορα της μονοπαραμετρικής οικογένειας αμφιδιαφορίσεων $\{\Theta_t\}_{t\in\mathbb{R}}$. Ο απειροστικός γεννήτορας είναι ένα διανυσματικό πεδίο Θ^α το οποίο, στην ουσία, περιγράφει τη στιγμιαία μεταβολή κατά μήκος της ροής. Συγκεκριμένα ορίζουμε:

$$\Theta^\alpha(p)(f) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}\Big(f\big(\Theta_{\Delta t}(p)\big) - f(p)\Big)$$

Το Θ^α είναι πράγματι ένα διανυσματικό πεδίο $\Theta^\alpha \in \mathfrak{X}(\mathscr{M})$, όπως θα δούμε στην παρακάτω παρατήρηση.

Παρατήρηση 2.12. *Έστω $(\mathscr{M}, \mathfrak{T}, \mathscr{A})$ μία $C^\infty-$ πολλαπλότητα, $\Theta : \mathbb{R} \times \mathscr{M} \to \mathscr{M}$ μία διαφορική ροή και:*

$$\Theta^\alpha(p)(f) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}\Big(f\big(\Theta_{\Delta t}(p)\big) - f(p)\Big)$$

Το $\Theta^\alpha(\Diamond)(\cdot)$ είναι διανυσματικό πεδίο του $\mathfrak{X}(\mathscr{M})$.

Απόδειξη Έστω $p \in \mathscr{M}$ και τοπικός χάρτης (U, φ). Διαλέγοντας αρκετά μικρά $\varepsilon > 0$, $p \in V \in \mathfrak{T}$ (λόγω του C^∞ του Θ) μπορούμε να έχουμε $\Theta\big((-\varepsilon, \varepsilon) \times V\big) \subseteq U$. Σε τοπικές λοιπόν συντεταγμένες η Θ γίνεται:

$$\widetilde{\Theta} = \varphi \circ \Theta \circ (\mathrm{id}, \varphi^{-1}) : (-\varepsilon, \varepsilon) \times \varphi(V) \to U \to \varphi(U)$$

Εάν επίσης θεωρήσουμε $f \in C^{\infty}(\mathscr{M};\mathbb{R})$, η f θα έχει τοπική παράσταση $\widetilde{f} = f \circ \varphi^{-1}$. Δηλαδή, σε τοπικές συντεταγμένες:

$$\frac{1}{\Delta t}\Big(\widetilde{f}\big(\widetilde{\Theta}(\Delta t, \varphi(p))\big) - \widetilde{f}\big(\varphi(p)\big)\Big) = \frac{1}{\Delta t}\Big(\widetilde{f}\big(\widetilde{\Theta}(\Delta t, \varphi(p))\big) - \widetilde{f}\big(\Theta(0, \varphi(p))\big)\Big)$$

Παίρνοντας όριο, καταλήγουμε ότι:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}\Big(\widetilde{f}\big(\widetilde{\Theta}(\Delta t, \varphi(p))\big) - \widetilde{f}\big(\widetilde{\Theta}(0, \varphi(p))\big)\Big) = \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} \widetilde{f}\big(\widetilde{\Theta}(t, \varphi(p))\big)$$

και με εφαρμογή του κανόνα της αλυσίδας:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}\Big(\widetilde{f}\big(\widetilde{\Theta}(\Delta t, \varphi(p))\big) - \widetilde{f}\big(\widetilde{\Theta}(0, \varphi(p))\big)\Big) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \widetilde{\Theta}_i(\cdot, \varphi(p))}{\partial t}\Big|_{t=0} \cdot \frac{\partial f \circ \varphi^{-1}}{\partial x_i}\Big|_{\varphi(p)}$$

Εάν λοιπόν συμβολίσουμε:

$$\Theta_i^{\alpha}(\lozenge) = \frac{\partial \widetilde{\Theta}_i(\cdot, \varphi(\lozenge))}{\partial t}\Big|_{t=0} \in C^{\infty}(\mathscr{M};\mathbb{R})$$

έχουμε:

$$\Theta^{\alpha}(\lozenge)(\cdot) = \sum_{i=1}^{n} \Theta_i^{\alpha}(\lozenge) \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_{\lozenge}$$

□

Ορισμός 2.14 (Απειροστικός γεννήτορας)**.** *Έστω $(\mathscr{M}, \mathfrak{T}, \mathscr{A})$ μία $C^{\infty}-$ πολλαπλότητα και $\Theta : \mathbb{R} \times \mathscr{M} \to \mathscr{M}$ μία διαφορική ροή. Ο απειροστικός γεννήτορας του Θ είναι το διανυσματικό πεδίο του $\mathfrak{X}(\mathscr{M})$ που ορίζεται μέσω του τύπου:*

$$\Theta^{\alpha}(p)(f) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}\Big(f\big(\Theta_{\Delta t}(p)\big) - f(p)\Big)$$

Θεώρημα 2.3. *Έστω $(\mathscr{M}, \mathfrak{T}, \mathscr{A})$ μία $C^{\infty}-$ πολλαπλότητα, $\Theta : \mathbb{R} \times \mathscr{M} \to \mathscr{M}$ μία διαφορική ροή και $\Theta^{\alpha} \in \mathfrak{X}(\mathscr{M})$ ο απειροστικός γεννήτοράς της. Για κάθε $p \in \mathscr{M}$ οι τροχιές:*

$$\gamma(\cdot) = \Theta(\cdot, p)$$

είναι ολοκληρωτικές καμπύλες του Θ^{α}.

Απόδειξη: Για κάθε $f \in C^{\infty}\big(\mathscr{M};\mathbb{R}\big)$ έχουμε:

$$\begin{aligned}
\gamma_*\left(\frac{d}{dt}\Big|_t\right)(f) = \frac{d}{dt}\Big|_t (f \circ \gamma) &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}\Big(f\big(\gamma(t + \Delta t)\big) - f\big(\gamma(t)\big)\Big) \\
&= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}\Big(f\big(\Theta_{t+\Delta t}(p)\big) - f\big(\Theta_t(p)\big)\Big) \\
&= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}\Big(f\big(\Theta_t \circ \Theta_{\Delta t}(p)\big) - f\big(\Theta_t(p)\big)\Big) \\
&= \Theta^{\alpha}\big(\Theta_t(p)\big)(f) = \Theta^{\alpha}\big(\gamma(t)\big)(f)
\end{aligned}$$

□

Πρόταση 2.12. *Έστω $(\mathcal{M}, \mathfrak{T}, \mathcal{A})$ μία $C^\infty-$ πολλαπλότητα, $\xi \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ και $\gamma : I \to \mathcal{M}$, $\widetilde{\gamma} : \widetilde{I} \to \mathcal{M}$ δύο ολοκληρωτικές καμπύλες του ξ. Εάν $\gamma(0) = \widetilde{\gamma}(0) = p$, τότε $\gamma|_{I\cap\widetilde{I}} = \widetilde{\gamma}|_{I\cap\widetilde{I}}$. Σημειώστε εδώ ότι μπορούμε να υποθέσουμε ότι $0 \in I \cap \widetilde{I}$, με κατάλληλη αναπαρεμέτρηση.*

Απόδειξη: Ορίζουμε το σύνολο:

$$J = \{t \in I \cap \widetilde{I} \mid \gamma(t) = \widetilde{\gamma}(t)\} \subseteq I \cap \widetilde{I}$$

και θα δείξουμε ότι είναι κλειστάνοικτο (clopen) στο $I \cap \widetilde{I}$. Εφόσον δεν είναι κενό ($0 \in J$), θα πρέπει να είναι όλο το $I \cap \widetilde{I}$.

Για το ότι είναι κλειστό, αρκεί να παρατηρήσουμε ότι για κάθε ακολουθία $(t_n)_{n=1}^\infty$ του J με $t_n \to t$ έχουμε $\gamma(t_n) = \widetilde{\gamma}(t_n)$ και $\gamma(t_n) \to \gamma(t)$, $\widetilde{\gamma}(t_n) = \widetilde{\gamma}(t)$. Επομένως, $\gamma(t) = \widetilde{\gamma}(t)$ και κατά συνέπεια $t \in J$.

Για το ανοικτό: Έστω $t_0 \in J$ και τοπικός χάρτης (U, φ) του $\gamma(t_0) = \widetilde{\gamma}(t_0)$. Από τη συνέχεια των ολοκληρωτικών καμπυλών, μπορούμε να βρούμε σύνολα $I_0, \widetilde{I}_0$ με $\gamma(I_0), \widetilde{\gamma}(\widetilde{I}_0) \subseteq U$. Επειδή τώρα οι εν λόγω καμπύλες είναι ολοκληρωτικές, στο $I_0 \cap \widetilde{I}_0$ έχουμε τα γραμμικά συστήματα διαφορικών εξισώσεων:

$$\begin{aligned}
&\gamma_*\left(\frac{d}{dt}\Big|_t\right)(\varphi_i) = \frac{d(\varphi_i \circ \gamma)}{dt}\Big|_t = \xi\big(\gamma(t)\big)(\varphi_i) = \sum_{j=1}^n \xi_j\big(\gamma(t)\big)\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}\Big|_{\gamma(t)} \\
&\gamma(0) = p
\end{aligned}$$

και:

$$\begin{aligned}
&\gamma_*\left(\frac{d}{dt}\Big|_t\right)(\varphi_i) = \frac{d(\varphi_i \circ \widetilde{\gamma})}{dt}\Big|_t = \xi\big(\widetilde{\gamma}(t)\big)(\varphi_i) = \sum_{j=1}^n \xi_j\big(\widetilde{\gamma}(t)\big)\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}\Big|_{\widetilde{\gamma}(t)} \\
&\widetilde{\gamma}(0) = p
\end{aligned}$$

εννοείται καθώς $i \in \{1, \cdots, n\}$. Τα συστήματα αυτά, πέραν των διαφορετικών συμβολισμών, είναι ίδια. Από τη μοναδικότητα λοιπόν της λύσης των γραμμικών συστημάτων με αρχική συνθήκη, έχουμε ότι $\gamma = \widetilde{\gamma}$ στο $I_0 \cap \widetilde{I}_0 \subseteq I \cap \widetilde{I}$. Δηλαδή $t_0 \in I_0 \cap \widetilde{I}_0 \subseteq J$, κι άρα το J είναι ανοικτό.

□

Συνέπεια της παραπάνω Πρότασης 2.12 και του Θεωρήματος 2.3 είναι η ακόλουθη παρατήρηση:

Παρατήρηση 2.13. *Έστω $(\mathcal{M}, \mathfrak{T}, \mathcal{A})$ μία $C^\infty-$ πολλαπλότητα, $\Theta : \mathbb{R} \times \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ μία διαφορική ροή και $\Theta^\alpha \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ ο απειροστικός γεννήτοράς της. Κάθε ολοκληρωτική καμπύλη του Θ^α είναι πλήρης, δηλαδή μπορεί να επεκταθεί ώστε να έχει πεδίο ορισμού όλο το $\mathbb{R}$.*

Απόδειξη: Έστω $\gamma : I \to \mathcal{M}$ μία ολοκληρωτική καμπύλη του Θ^α με $\gamma(0) = p$. Επειδή η $\widetilde{\gamma}(t) = \Theta(t, p)$ είναι ολοκληρωτική καμπύλη με $\widetilde{\gamma}(0) = p$, έπεται τελικά ότι:

$$\gamma = \Theta(\cdot, p)|_I$$

□

Εκτός πάντως από «ολικές ροές», δηλαδή διαφορικές ροές $\Theta : \mathbb{R} \times \mathcal{M} \to \mathcal{M}$, υπάρχουν και οι «τοπικές ροές» $\Theta : I \times U \to U$, που -όπως φανερώνει η ονομασία τους- περιορίζονται τοπικά στην πολλαπλότητα.

Ορισμός 2.15 (Τοπικές διαφορικές ροές). *Έστω $(\mathscr{M}, \mathfrak{T}, \mathscr{A})$ μία $C^\infty-$ πολλαπλότητα, $p \in \mathscr{M}$ και τοπικός χάρτης (U, φ). Μία $\Theta : (-\varepsilon, \varepsilon) \times U \to \mathscr{M}$, $C^\infty-$συνάρτηση, θα καλείται τοπική διαφορική ροή εάν:*

i. Για κάθε $x \in U$, $\Theta(0, x) = x$.

ii. Για κάθε $t, s \in \mathbb{R}$ με $|t+s| < \varepsilon$ και $x \in U$, $\Theta(t+s, x) = \Theta\big(s, \Theta(t, x)\big)$.

Για τις τοπικές διαφορικές ροές ισχύουν αποτελέσματα ανάλογα με τις ολικές ροές. Εξάλλου, στις ολικές ροές -στην τελική- οι αποδείξεις γίνονται τοπικά. Δεν θα ασχοληθούμε λοιπόν με την απόδειξη ανάλογων αποτελεσμάτων.

Θεώρημα 2.4 (Γραμμικοποίηση των τοπικών ροών). *Έστω $(\mathscr{M}, \mathfrak{T}, \mathscr{A})$ μία $C^\infty-$ πολλαπλότητα και $\Theta : (-\varepsilon, \varepsilon) \times U \to \mathscr{M}$ μία τοπική διαφορική ροή στο $p \in U$. Εάν υπάρχει $q \in U$ ώστε $\Theta^\alpha(q) \neq 0$, τότε υπάχει $\delta > 0$ και τοπικός χάρτης (V, ψ), ώστε η Θ σε τοπικές συντεταγμένες στο $(-\delta, \delta) \times V \subseteq (-\varepsilon, \varepsilon) \times U$ να παίρνει τη μορφή:*

$$\psi \circ \Theta \circ (\mathrm{id}, \psi^{-1})\big(t, y_1, \cdots, y_n\big) = (y_1 + t, y_2, y_3, \cdots, y_n)$$

Απόδειξη: Η απόδειξη θα γίνει σε βήματα.

Βήμα I: Θεωρούμε την τοπική παράσταση της Θ:

$$\widetilde{\Theta} = \varphi \circ \Theta \circ (\mathrm{id}, \varphi^{-1}) : (-\varepsilon, \varepsilon) \times \varphi(U) \to U \to \varphi(U)$$

και, χάρην απλούστευσης, θεωρούμε με κατάλληλη μεταφορά $\varphi(q) = (0, \cdots, 0)$. Επίσης, θα θεωρήσουμε (τροποποιώντας ενδεχομένως την -ούτως ή άλλως αυθαίρετη- επιλογή του ορισμού):

$$\Theta^\alpha(q) = \frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_q = \frac{\partial\big((\cdot) \circ \varphi\big)}{\partial x_1}\Big|_{\varphi(q)}$$

Δηλαδή, θα θεωρήσουμε τον τοπικό χάρτη φ έτσι ώστε το $\Theta^\alpha(q)$ ως «διάνυσμα», να εφάπτεται στο $\partial/\partial x_1|_q$.

Εν τω μεταξύ αυτό μπορεί να γίνει, με τον εξής τρόπο: Από τη μορφή του Θ^α σε τοπικές συντεταγμένες, που είδαμε στην Παρατήρηση 2.12, έχουμε:

$$\Theta^\alpha(q)(f) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \widetilde{\Theta}_i(\cdot, 0)}{\partial t}\Big|_{t=0} \cdot \frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i}\Big|_0 = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \widetilde{\Theta}_i(\cdot, 0)}{\partial t}\Big|_{t=0} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}\Big|_q$$

δηλαδή η παραγώγιση $\Theta^\alpha(q)$ αντιστοιχεί σε ένα διάνυσμα:

$$\left(\frac{\partial \widetilde{\Theta}_i(\cdot, 0)}{\partial t}\Big|_{t=0}\right)_{i \leqslant n} \text{ του } \mathbb{R}^n$$

Το διάνυσμα αυτό μπορεί, μέσω ορθογώνιου μετασχηματισμού τ, να μεταφερθεί ώστε να είναι παράλληλο του x_1. Επομένως, η φ μπορεί να τροποποιηθεί μέσω ορθογώνιου μετασχηματισμού τ ώστε:

$$\Theta^\alpha(q) = \frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_q = \frac{\partial\big((\cdot) \circ \varphi\big)}{\partial x_1}\Big|_{\varphi(q)}$$

(δηλαδή η $(\tau \circ \varphi) \circ \Theta \circ (\varphi^{-1} \circ \tau^{-1})$ δίνει απειροστικό γεννήτορα Θ^α παράλληλο στο $\partial/\partial x_1$). Μάλιστα, με αυτόν τον τρόπο θα έχουμε επίσης ότι:

$$\frac{\partial \widetilde{\Theta}_i(\cdot, 0)}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0 \text{ για τον νέο χάρτη και } i \neq 1$$

Εάν, πέραν του ορθογώνιου μετασχηματισμού, κάνουμε και «κανονικοποίηση» ώστε να έχουμε μέτρο 1:

$$\frac{\partial \widetilde{\Theta}_1(\cdot,0)}{\partial t}\Big|_{t=0} = 1$$

Βήμα II: Ορίζουμε:

$$F : (-\varepsilon,\varepsilon)\times\varphi(U)\to\varphi(U) \text{ με } F(y_1,\cdots,y_n) = \Big(\widetilde{\Theta}_i(y_1,0,y_2,\cdots,y_n)\Big)_{i\leqslant n}$$

Παρατηρούμε ότι:

$$\widetilde{\Theta}_i\big(y_1,0,y_2,\cdots,y_n\big) = \widetilde{\Theta}_i\big(y_1,\widetilde{\Theta}(0,0,y_2,\cdots,y_n)\big)$$

οπότε, με παραγώγιση ως προς y_1:

$$\frac{\partial \widetilde{\Theta}_i(\cdot,0)}{\partial y_1}\Big|_{y_1=0} = \frac{\partial \widetilde{\Theta}_i(\cdot,0)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \begin{cases}1, \text{ εάν } i=1\\ 0, \text{ εάν } i\neq 0\end{cases}$$

Επιπλέον, με παραγώγιση ως προς y_j, $j\neq 1$:

$$\frac{\partial \widetilde{\Theta}_i(0,0,\cdots,0,y_j,0,\cdots,0)}{\partial y_j}\Big|_{y_j=0} = \frac{\partial \pi_i(0,0,\cdots,0,y_j,0,\cdots,0)}{\partial y_j}\Big|_{y_j=0} = \begin{cases}1, \text{ εάν } i=j\\ 0, \text{ εάν } i\neq j\end{cases}$$

Δηλαδή, ο πίνακας του διαφορικού της F γίνεται:

$$\big(\partial F_i/\partial y_j\big)_{i,j=1}^{n,n} = \mathrm{Id}_n$$

Εφόσον λοιπόν $\det\big(\partial F_i/\partial y_j\big)_{i,j=1}^{n,n} = 1\neq 0$, υπάρχει περιοχή $(-\delta,\delta)^n\subseteq\varphi(U)$, $0<\delta<\varepsilon$, στην οποία η F αντιστρέφεται.

Βήμα III: Ορίζουμε $\psi = F^{-1}\circ\varphi$ και $V = \psi^{-1}\big((-\delta,\delta)^n\big)\subseteq U$. Θεωρώντας την τοπική παράσταση:

$$\psi\circ\Theta\circ(\mathrm{id},\psi^{-1}) = (F^{-1}\circ\varphi)\circ\Theta\circ(\mathrm{id},\varphi^{-1}\circ F) : (-\delta,\delta)\times\psi(V)\to\mathbb{R}^n$$

παρατηρούμε ότι:

$$\begin{aligned}(t,y_1,\cdots,y_n) &\mapsto \big(t,\varphi^{-1}\circ\widetilde{\Theta}(y_1,0,y_2,\cdots,y_n)\big)\mapsto\Big(\widetilde{\Theta}_i\big(t,\widetilde{\Theta}(y_1,0,y_2,\cdots,y_n)\big)\Big)\\ &= \big(\widetilde{\Theta}_i(t+y_1,0,y_2,\cdots,y_n)\big)\mapsto(t+y_1,y_2,\cdots,y_n)\end{aligned}$$

το οποίο είναι εν τέλει το ζητούμενο.

□

Ως τώρα είδαμε ότι, δεδομένης μίας ροής Θ, υπάρχουν ολοκληρωτικές καμπύλες του Θ^α, και μάλιστα αυτές είναι οι $\Theta(\cdot,p)$ ή τμήματα αυτών. Λειτουργώντας κάπως αντίστροφα, κανείς θα μπορούσε να αναρρωτηθεί εάν το «αντίστροφο» είναι δυνατόν. Δηλαδή, δεδομένου ενός διανυσματικού πεδίου ξ, υπάρχει ροή Θ_ξ ώστε $\Theta_\xi^\alpha = \xi$; Η απάντηση που θα δώσουμε είναι καταφατική.

Πρώτα υπενθυμίζουμε το ακόλουθο θεώρημα από τις διαφορικές εξισώσεις:

Θεώρημα 2.5 (Υπαρξη λύσης σε σύστημα συνήθων διαφορικών εξισώσεων). *Έστω $U\subseteq\mathbb{R}^n$ ένα ανοικτό σύνολο και $\varepsilon>0$. Εάν $f_i(t,x) : (-\varepsilon,\varepsilon)\times U$, $i\in\{1,\cdots,n\}$, είναι μία οικογένεια C^k-συναρτήσεων, τότε υπάρχει $V\subseteq U$ ώστε σε σύνολο $(-\delta,\delta)\subseteq(-\varepsilon,\varepsilon)$ να υπάρχει $C^{k+1}-$λύση:*

$$x(t) = \big(x_1(t),\cdots,x_n(t)\big) : (-\delta,\delta)\to U$$

του συστήματος:

$$\frac{\partial x_i}{\partial t}\Big|_t = f_i\big(t,x(t)\big), i\in\{1,\cdots,n\}$$

με αρχική συνθήκη $x(0)=p$, για τυχόν $p\in V$. Επιπλέον, για κάθε $p\in V$ η εν λόγω λύση είναι μοναδική και η απεικόνιση $x(t,p)$ (η λύση εξαρτάται κι από το p) είναι $C^k\big((-\delta,\delta)\times V;U\big)$.

Ας θεωρήσουμε τώρα ένα διανυσματικό πεδίο $\xi \in \mathfrak{X}(U)$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$, κι ας το γράψουμε στη μορφή:

$$\xi(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_x$$

Εάν γ είναι μία ολοκληρωτική καμπύλη του ξ, τότε:

$$\gamma_* \left(\frac{d}{dt}\Big|_t \right) = \xi\big(\gamma(t)\big)$$

δηλαδή, αναπτύσσοντας τα διανυσματικά πεδία:

$$\frac{d(f \circ \gamma)}{dt}\Big|_t = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\Big|_{\gamma(t)} \cdot \frac{d\gamma_i}{dt}\Big|_t = \sum_{i=1}^{n} f_i\big(\gamma(t)\big) \frac{\partial f}{\partial x_i}\Big|_{\gamma(t)} = \xi\big(\gamma(t)\big)(f)$$

Αυτό σημαίνει ότι τα διανυσματικά πεδία είναι ίσα εάν και μόνο αν η γ είναι λύση του:

$$\frac{\partial \gamma_i}{\partial t}\Big|_t = f_i\big(\gamma(t)\big), i \in \{1, \cdots, n\}$$

που, δεδομένης μίας αρχικής συνθήκης, από το Θεώρημα 2.5 έχει (τοπικά μοναδική) λύση. Φαίνεται, δεδομένου του Θεωρήματος 2.3 και της Παρατήρησης 2.13, ότι από τις ολοκληρωτικές καμπύλες θα μπορεί ενδεχομένως να οριστεί τοπική διαφορική ροή.

Θεώρημα 2.6 (Υπαρξη τοπικής διαφορικής ροής)**.** *Έστω $(\mathcal{M}, \mathfrak{T}, \mathcal{A})$ μία $C^\infty-$ πολλαπλότητα και $\xi \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$. Για κάθε $p \in \mathcal{M}$ υπάρχει τοπική διαφορική ροή $\Theta_{\xi,V} : (-\delta, \delta) \times V \to U$ με $\Theta^\alpha_{\xi,V} = \xi|_V$ και $\Theta_{\xi,V}(0,p) = p$.*

Απόδειξη: Για $p \in \mathcal{M}$ θεωρούμε το διανυσματικό πεδίο $\varphi_*(\xi)$ στο $\varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$. Από το Θεώρημα 2.5 βρίσκουμε ολοκληρωτική καμπύλη $\gamma_p(t)$ του $\varphi_*(\xi)$ από το $\varphi(p)$, σε σύνολο $(-\delta, \delta) \times \widetilde{V} \subseteq (-\varepsilon, \varepsilon) \times \widetilde{U}$. Εάν τώρα $V = \varphi^{-1}(\widetilde{V})$, ορίζοντας:

$$\Theta_{\xi,V}(\cdot, p) = \varphi^{-1} \circ \gamma_p(\cdot, p) \text{ στο } (-\delta, \delta) \times V$$

(χωρίς πολλές λεπτομέριες) έχουμε το ζητούμενο.

□

2.6 Το θεώρημα του Frobenius με διανυσματικά πεδία

Ας θεωρήσουμε μία επιφάνεια $\mathcal{E} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = f(x,y)\}$ εμφυτευμένη στον $\mathbb{R}^3$. Σε κάθε σημείο της επιφάνειας μπορούμε να βρούμε τον εφαπτόμενο χώρο $T_p\mathcal{E}$, και γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα που τον παράγουν. Στο p η επιφάνεια έχει κάθετο διάνυσμα:

$$\nabla\big(f(x,y) - z)\big)\big|_p = \big(\partial f/\partial x|_p, \partial f/\partial y|_p, -1\big)$$

και κάθετα σε αυτό (άρα στον εφαπτόμενο χώρο) βρίσκονται τα γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα:

$$\big(1, 0, \partial f/\partial x|_p\big) \text{ και } \big(0, 1, \partial f/\partial y|_p\big)$$

Με όρους παραγωγίσεων, οι παρακάτω παραγωγίσεις, για τα διάφορα p, είναι γραμμικώς ανεξάρτητες και παράγουν τα $T_p\mathcal{E}$:

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big|_p + \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_p \cdot \frac{\partial}{\partial z}\Big|_p \text{ και } \frac{\partial}{\partial y}\Big|_p + \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_p \cdot \frac{\partial}{\partial z}\Big|_p$$

Δηλαδή, κατά μία έννοια, τα διανυσματικά πεδία:

$$\xi = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \text{ και } \eta = \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial}{\partial z}$$

παράγουν όλους τους $T_p\mathscr{E}$.

Αν όμως επιλεγεί μονάχα το ξ, μπορούμε να πούμε ότι υπάρχει υποπολλαπλότητα $\mathscr{N} \subseteq \mathscr{E}$ της οποίας οι εφαπτόμενοι χώροι παράγονται από το ξ; Γενικότερα, με το θεώρημα του Frobenius θα δείξουμε -υπό κάποιες συνθήκες- ότι αν $\{\xi^k\}_{k\leqslant n}$ είναι οικογένεια γραμμικών ανεξάρτητων (σε κάθε σημείο) διανυσματικών πεδίων σε πολλαπλότητα $\mathscr{M}$ διάστασης m, τότε υπάρχει υποπολλαπλότητα $\mathscr{N}$ διάστασης n της οποίας οι εφαπτόμενοι χώροι παράγονται από τα διάφορα ξ^k, $k \in \{1, \cdots, n\}$.

Ως προκαταρκτική έννοια, θα χρειαστούμε την έννοια της κατανομής.

Ορισμός 2.16 (Κατανομές χώρων)**.** *Έστω $(\mathscr{M}, \mathfrak{T}, \mathscr{A})$ μία $C^\infty-$πολλαπλότητα διάστασης m και $0 < n \leqslant m$. Μία $n-$διάστατη κατανομή χώρων, έστω $\mathscr{D}$, είναι μία επιλογή $n-$διάστατων υποχώρων των $T_p\mathscr{M}$, καθώς $p \in \mathscr{M}$. Θα θεωρούμε μάλιστα τις κατανομές ομαλές, δηλαδή για κάθε $p \in \mathscr{M}$ θα υπάρχει περιοχή U και ομαλά διανυσματικά πεδία $\xi^k \in \mathfrak{X}(\mathscr{M})$, $k \in \{1, \cdots, n\}$ ώστε:*

$$\mathscr{D}(x) = \operatorname{span}\{\xi^k(x)\}_{k\leqslant n} \text{ για κάθε } x \in U$$

Ορισμός 2.17 (Ολοκληρωτικές υποπολλαπλότητες)**.** *Έστω $(\mathscr{M}, \mathfrak{T}, \mathscr{A})$ μία $C^\infty-$ πολλαπλότητα διάστασης m και $\mathscr{D}$ μία $n-$διάστατη κατανομή, $0 < n \leqslant m$. Μία υποπολλαπλότητα $\mathscr{N} \subseteq \mathscr{M}$ διάστασης n καλείται ολοκληρωτική υποπολλαπλότητα της κατανομής $\mathscr{D}$ εάν:*

$$\mathrm{i}_*(T_y\mathscr{N}) = \mathscr{D}\big(\mathrm{i}(y)\big), \text{ για κάθε } y \in \mathscr{N}$$

όπου $\mathrm{i} : \mathscr{N} \to \mathscr{M}$ είναι η εμφύτευση.

Ο παρακάτω ορισμός θα χρησιμοποιηθεί ως μία προϋπόθεση για το θεώρημα του Frobenius, δηλαδή θα εξασφαλίζουμε την ύπαρξη ολοκληρωτικών υποπολλαπλοτήτων δεδομένων ≪ενειλιγμένων≫ (involutive) κατανομών.

Ορισμός 2.18 (Ενειλιγμένες κατανομές)**.** *Έστω $(\mathscr{M}, \mathfrak{T}, \mathscr{A})$ μία $C^\infty-$ πολλαπλότητα διάστασης m και $\mathscr{D}$ μία $n-$διάστατη κατανομή, $0 < n \leqslant m$. Η κατανομή $\mathscr{D}$ θα καλείται ενειλιγμένη (involutive) εάν για κάθε οικογένεια $\{\xi^k\}_{k\leqslant n} \subseteq \mathfrak{X}(\mathscr{M})$ που παράγει την $\mathscr{D}$ στο U:*

$$[\xi^k, \xi^\lambda] = \sum_{j=1}^{n} C^j_{k,\lambda}\xi^j$$

για κάποιες $C^\infty-$συναρτήσεις $C^j_{k,\lambda}$.

Για την απόδειξη του θεωρήματος του Frobenius θα χρειαστούμε ένα λήμμα, το οποίο αναφέρουμε παρακάτω.

Λήμμα 2.4 (Κανονικοποίηση των πεδίων)**.** *Έστω $(\mathscr{M}, \mathfrak{T}, \mathscr{A})$ μία $C^\infty-$ πολλαπλότητα διάστασης m και $\{\xi^k\}_{k\leqslant n}$ μία οικογένεια γραμμικώς ανεξάρτητων διανυσματικών πεδίων του $\mathfrak{X}(U)$, σε κάθε $p \in U$. Τα ακόλουθα ισοδυναμούν:*

i. Για κάθε $p \in U$ υπάρχει τοπικός χάρτης (V, ψ) ώστε:

$$\xi^k = \frac{\partial\big((\cdot) \circ \psi^{-1}\big)}{\partial x_k}, \; k \in \{1, \cdots, n\}$$

ii. $[\xi^k, \xi^\lambda] = 0$ για κάθε $k, \lambda \in \{1, \cdots, n\}$.

Απόδειξη: (i. $\Rightarrow$ ii.) Αυτό είναι άμεσο, από τη μεταθετικότητα των βασικών διανυσματικών πεδίων.

(ii. $\Rightarrow$ i.) Κατ' αρχάς, από το Θεώρημα 2.6, υπάρχουν τοπικές ροές $\Theta_{\xi^k, V_k} : (-\delta_k, \delta_k) \times V_k \to U$ που αντιστοιχούν στα διανυσματικά πεδία ξ^k. Από το Θεώρημα 2.4, μπορούμε να βρούμε χάρτες (εν γένει διαφορετικούς σε κάθε περίπτωση) ώστε:

$$\widetilde{\Theta}_{\xi^k, V_k}(t, x_1, \cdots, x_n) = (x_1, \cdots, x_{k-1}, x_k + t, x_{k+1}, \cdots, x_n)$$

Επιπλέον, για λόγους ευκολίας, θα διαλέξουμε αρκετά μικρό δ ώστε $(-\delta, \delta) \subseteq (-\delta_k, \delta_k)$, $\varphi_{V_k}(V_k)$ και $\varphi_{V_k}(p) \in (-\delta, \delta)$. Ορίζουμε στο $(-\delta, \delta)^m$:

$$\begin{aligned} h(t_1, \cdots, t_n, x_{n+1}, \cdots, x_m) &= \big(\widetilde{\Theta}_{\xi^1, V_1}\big)_{t_1} \circ \cdots \circ \big(\widetilde{\Theta}_{\xi^n, V_n}\big)_{t_n}(0, \cdots, 0, x_{n+1}, \cdots, x_m) \\ &= (t_1, \cdots, t_n, x_{n+1}, \cdots, x_m) \end{aligned}$$

και, παραγωγίζοντας ως προς t_i, $i \leqslant n$:

$$(\varphi_{V_1}^{-1} \circ h)_* \left(\frac{\partial}{\partial t_i}\Big|_{t_i}\right)(f) = \frac{\partial}{\partial t_i}\Big|_{t_i} \left(f \circ \varphi_{V_1}^{-1} \circ \widetilde{\Theta}_{\xi^1, V_1} \circ \cdots \circ \widetilde{\Theta}_{\xi^n, V_n}(0, \cdots, 0, x_{n+1}, \cdots, x_m)\right)$$

(όπου $f \in C^\infty(\mathscr{M}; \mathbb{R})$). Λόγω της μεταθετικότητας των πεδίων, οι ροές μετατίθεται, και κατά συνέπεια:

$$\begin{aligned} &(\varphi_{V_1}^{-1} \circ h)_* \left(\frac{\partial}{\partial t_i}\Big|_{t_i}\right)(f) = \\ &= \frac{\partial}{\partial t_i}\Big|_{t_i} \left(f \circ \varphi_{V_1}^{-1} \circ \widetilde{\Theta}_{\xi^i, V_i} \circ \widetilde{\Theta}_{\xi^1, V_1} \circ \cdots \circ \widehat{\widetilde{\Theta}_{\xi^i, V_i}} \circ \cdots \circ \widetilde{\Theta}_{\xi^n, V_n}(0, \cdots, 0, x_{n+1}, \cdots, x_m)\right) \end{aligned}$$

Το σύμβολο $\widehat{(\cdot)}$ σημαίνει ότι η εν λόγω ποσότητα παραλείπεται. Επειδή $\Theta^\alpha_{\xi^k, V_k} = \xi^k|_{V_k}$, $k \leqslant n$:

$$(\varphi_{V_1}^{-1} \circ h)_* \left(\frac{\partial}{\partial t_i}\Big|_{t_i}\right)(f) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \pi_k \widetilde{\Theta}_{\xi^i, V_i}}{\partial t_i} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_k} = \Theta^\alpha_{\xi^i, V_i}(p)(f) = \xi^i(p)(f)$$

όπου p είναι ένα σημείο που δεν μας απασχολεί ιδιαιτέρως. Από την άλλη, από τον απλό τύπο για την h:

$$(\varphi_{V_1}^{-1} \circ h)_* \left(\frac{\partial}{\partial t_i}\Big|_{t_i}\right)(f) = \frac{\partial f}{\partial t_i}\Big|_{t_i}$$

κι έτσι έχουμε δείξει ότι:

$$\xi^i = \frac{\partial}{\partial t_i}\Big|_{t_i}, \text{ για } i \leqslant n$$

Επιπλέον, είναι απλούστερο να διαπιστώσουμε ότι:

$$(\varphi_{V_1}^{-1} \circ h)_* \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_{x_i}\right) = \frac{\partial}{\partial x_i}, \text{ για } i \geqslant n+1$$

Τα παραπάνω ουσιαστικά υλοποιούνται μέσω του χάρτη $\psi = (\varphi_{V_1}^{-1} \circ h)^{-1} = h^{-1} \circ \varphi_{V_1}$, οπότε -τυπικά μιλώντας- για να δικαιολογηθεί η προηγούμενη διαδικασία χρειάζεται να αποδείξουμε την αντιστροφή του $\varphi_{V_1}^{-1} \circ h$. Επειδή τα $\xi^1, \cdots, \xi^n, \partial/\partial x_{n+1}, \cdots, \partial/\partial x_m$ είναι βάση του $T_p\mathscr{M}$, η:

$$\det(\varphi_{V_1}^{-1} \circ h)_* \neq 0 \text{ (σε τοπικές συντεταγμένες)}$$

Από το θεώρημα της αντίστροφης απεικόνισης (και τη μορφή του πίνακα της προώθησης, στην Πρόταση 2.4), εξασφαλίζεται τοπικά η αντιστροφή που επιθυμούσαμε.

□

Θεώρημα 2.7 (Του Frobenius). *Έστω $(\mathcal{M}, \mathfrak{T}, \mathcal{A})$ μία $C^\infty-$ πολλαπλότητα διάστασης m και $\mathcal{D}$ μία $n-$διάστατη κατανομή. Η $\mathcal{D}$ είναι ενειλιγμένη εάν και μόνο αν υπάρχει ολοκληρωτική υποπολλαπλότητα $\mathcal{N}$ της κατανομής $\mathcal{D}$, που μάλιστα έχει χάρτες των οποίων οι $m-n$ τελευταίες συντεταγμένες είναι σταθερές.*

Απόδειξη: (⇒) Αυτή η κατεύθυνση θα αποδειχθεί σε βήματα.

Βήμα I: Ας υποθέσουμε για αρχή ότι η $\mathcal{D}$ παράγεται από ξ^k τα οποία μετατίθενται. Από το Λήμμα 2.4, μπορούμε να γράψουμε γύρω από κάθε $p \in \mathcal{M}$:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \xi^i|_V, \text{ για } i \leqslant n$$

για χάρτη (V, ψ). Μάλιστα, με μεταφορά μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $\psi_i(p) = 0$, $i \leqslant n$.

Ορίζουμε:

$$\mathcal{N} = \{q \in \mathcal{M} \mid \psi_i(q) = 0,\ i \geqslant n+1\}$$

και παρατηρούμε ότι αυτό είναι ολοκληρωτική υποπολλαπλότητα της $\mathcal{D}$ που περιέχει το p.

Βήμα II: Ας θεωρήσουμε (U, φ) έναν χάρτη στο p και ξ^k, $k \in \{1, \cdots, n\}$ διανυσματικά πεδία, γραμμικώς ανεξάρτητα στο p. Με κατάλληλη αναδιάταξη, μπορούμε να υποθέσουμε ότι τα:

$$\xi^1(p), \cdots, \xi^n(p), \left.\frac{\partial}{\partial x_{n+1}}\right|_p, \cdots, \left.\frac{\partial}{\partial x_m}\right|_p$$

αποτελούν βάση του T_pU. Επιπλέον, από το ενειλιγμένο της κατανομής:

$$[\xi^k, \xi^\lambda](p) \in \mathcal{D}(p)$$

Εάν π^n είναι ο περιορισμός στις $n-$πρώτες συντεταγμένες, μπορούμε να θεωρήσουμε την «προώθηση»:

$$(\pi^n \circ \varphi)_* : TU \to T\mathbb{R}^n$$

που ορίζεται μέσω των προωθήσεων $(\pi^n \circ \varphi)_* : T_qU \to T_q\mathbb{R}^n$:

$$(\pi^n \circ \varphi)_* \left(\sum_{i=1}^m u_i \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_q \right) = \sum_{i=1}^n u_i \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_{(\pi^n\circ\varphi)(q)}$$

Επειδή λοιπόν $\ker(\pi^n \circ \varphi)_*|_{T_qU} = \operatorname{span}\{\partial/\partial x_i|_q\}_{i \geqslant n+1}$, η απεικόνιση:

$$(\pi^n \circ \varphi)_*|_{\mathcal{D}(q)} : \mathcal{D}(q) \to T_{(\pi^n\circ\varphi)(q)}\mathbb{R}^n$$

είναι ισομορφισμός. Μάλιστα, από συνέχεια μπορεί να επιλεγεί $V \subseteq U$ περιοχή του p ώστε τα $\xi^k(q)$ να παραμένουν γραμμικά ανεξάρτητα στο $T_qU \setminus \ker(\pi^n \circ \varphi)_*|_{T_qU}$ και οι αντίστοιχες απεικονίσεις $(\pi^n \circ \varphi)_*|_{\mathcal{D}(q)} : \mathcal{D}(q) \to T_{(\pi^n\circ\varphi)(q)}\mathbb{R}^n$, $q \in V$ γραμμικοί ισομορφισμοί.

Ορίζουμε στο V:

$$\eta^i(q) = (\pi^n \circ \varphi)_*|^{-1}_{\mathcal{D}(q)} \left(\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_{(\pi^n\circ\varphi)(q)} \right), \text{ για } i \leqslant n$$

και παρατηρούμε ότι έτσι τα η^i, $\partial/\partial x_i$ είναι $(\pi^n \circ \varphi)-$συσχετισμένα. Κατά συνέπεια, από την Πρόταση 2.11:

$$(\pi^n\circ\varphi)_*\big([\eta^i, \eta^j](q)\big) = \big[(\pi^n\circ\varphi)_*(\eta^i), (\pi^n\circ\varphi)_*(\eta^j)\big]\big((\pi^n\circ\varphi)(q)\big) = \left[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right]\big((\pi^n\circ\varphi)(q)\big) = 0$$

κι άρα $[\eta^i, \eta^j](q) \in \ker(\pi^n \circ \varphi)_*|_{T_qU}$. Επειδή τώρα η $\mathscr{D}$ είναι ενειλιγμένη, $[\eta^i, \eta^j](q) \in \mathscr{D}(q)$, και από την ιδιότητα του ισομορφισμού της $(\pi^n \circ \varphi)_*|_{\mathscr{D}(q)}$:

$$(\pi^n \circ \varphi)_*|_{\mathscr{D}(q)}\big([\eta^i, \eta^j](q)\big) = 0 \Rightarrow [\eta^i, \eta^j](q) = 0$$

Αναγόμαστε έτσι στο Βήμα I και αποδεικνύουμε αυτήν την κατεύθυνση.

($\Leftarrow$) Εάν θεωρήσουμε $\{\xi^k\}_{k\leqslant n}$ μία οικογένεια γραμμικώς ανεξάρτητων διανυσματικών πεδίων της $\mathscr{N}$ που παράγουν την κατανομή $\mathscr{D}$, ο πίνακας:

$$\Xi = (\xi^i_j)_{i,j} \text{ είναι αντιστρέψιμος με } \Xi^{-1} = (\eta^i_j)_{i,j}$$

Από την απόδειξη της Πρότασης 2.9, μπορούμε να γράψουμε:

$$[\xi^i, \xi^j] = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i \frac{\partial \eta_j}{\partial x_i} - \eta_i \frac{\partial \xi_j}{\partial x_i} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial x_j}$$

κι έπειτα, από την αντιστρεψιμότητα του πίνακα Ξ, να αντικαταστήσουμε τα βασικά διανυσματικά πεδία από τα:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \eta^j_k \xi^k_i \frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^{n} \eta^j_k \left(\sum_{i=1}^{n} \xi^k_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right) = \sum_{k=1}^{n} \eta^j_k \xi^k$$

Δηλαδή θα έχουμε:

$$[\xi^i, \xi^j] = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i \frac{\partial \eta_j}{\partial x_i} - \eta_i \frac{\partial \xi_j}{\partial x_i} \right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} \eta^j_k \xi^k \right)$$

κι άρα το ζητούμενο.

□

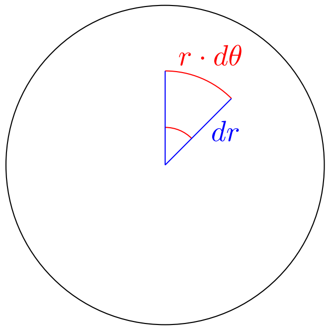
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Πλειογραμμικές συναρτήσεις και διαφορικές μορφές

3.1 Πλειογραμμικές συναρτήσεις και τανυστικά γινόμενα

Οι διαφορικές μορφές είναι κατασκευασμένες ώστε να ολοκληρώνονται. Μέσω των διαφορικών μορφών μπορούμε -μεταξύ άλλων- να υπολογίσουμε στοιχειώδεις όγκους σε ορισμένες πολλαπλότητες, και (ολοκληρώνοντας) να υπολογίσουμε διάφορους όγκους γεωμετρικών αντικειμένων.

Ένα γνωστό παράδειγμα υπολογισμού στοιχειώδους όγκου -κι εν προκειμένω εμβαδού- είναι το στοιχειώδες εμβαδόν σε πολικές συντεταγμένες.



Θεωρώντας τα dr, $r \cdot d\theta$ ως διανύσματα, το στοιχειώδες εμβαδόν γίνεται $r \cdot |dr \times d\theta|$, κι οπότε μπορούμε να υπολογίσουμε:

$$\operatorname{vol} B = \int_B r \cdot |dr \times d\theta|$$

όπου $B = B(0,1)$.

Αν τώρα εισάγουμε και τις συντεταγμένες, για παράδειγμα μίας επιφάνειας με τοπικό χάρτη (V, ψ), μπορούμε να γράψουμε:

$$\int_{\psi(V)} f \circ \psi^{-1}(x,y) \cdot |d\psi^{-1}(x) \times d\psi^{-1}(y)| = \int_{\psi(V)} f \circ \psi^{-1}(x,y) \cdot \operatorname{vol}\left(\frac{\partial \psi^{-1}}{\partial x}, \frac{\partial \psi^{-1}}{\partial y}\right)$$

για τον υπολογισμό ενός ολοκληρώματος σε επιφάνεια, όπου $f : V \to \mathbb{R}$.

Βέβαια, για να είμαστε περισσότερο ακριβείς, η έννοια της διαφορικής μορφής είναι κάπως πιο χαρακτηριστική στις ροές κι όχι τόσο στους όγκους, που ούτως ή άλλως (όπως θα δούμε αργότερα) είναι μία έννοια προβληματική στις πολλαπλότητες. Εάν θεωρήσουμε μία διανυσματική συνάρτηση $f : B \to \mathbb{R}^3$ που εκφράζει κάποιου είδους ροή (λόγου χάρη ηλεκτρική ροή / μαγνητική ροή), μπορούμε να γράψουμε:

$$\int_B f(r,\theta) \cdot (r \cdot dr \times d\theta)$$

υπολογίζοντας έτσι τη συνολική ροή διαμέσου του B.

Γενικά οι διαφορικές μορφές, ας πούμε ω, φαίνεται να δέχονται διανύσματα και να επιστρέψουν αριθμούς, όπως για παράδειγμα είναι το στοιχειώδες εμβαδόν:

$$\omega\left(\frac{\partial\psi^{-1}}{\partial x}, \frac{\partial\psi^{-1}}{\partial y}\right) = \mathrm{vol}\left(\frac{\partial\psi^{-1}}{\partial x}, \frac{\partial\psi^{-1}}{\partial y}\right)$$

Όσον αφορά τις ≪ροές≫, εκεί η διαφορική μορφή ω έχει τον ρόλο της προβολής στο εξωτερικό κάθετο διάνυσμα (ενδεχομένως πολλαπλασιασμένο με σταθερά).

$$\omega\big(dr, d\theta\big) = f(r,\theta)\cdot(r\cdot dr \times d\theta)$$

Φαίνεται ότι, μελετώντας:

- Συναρτήσεις από εφαπτόμενα διανύσματα του χώρου στο $\mathbb{R}$,
- Μία γενίκευση του εξωτερικού καθέτου διανύσματος, και κατά συνέπεια,
- Την ορίζουσα,

θα μπορούμε να μελετήσουμε στοιχειώδεις ≪όγκους≫ (τουλάχιστον σε κάποιες περιπτώσεις), ≪εξωτερικά κάθετα διανύσματα≫ και ≪ροές≫ σε πολλαπλότητες.

Ορισμός 3.1 (Πλειογραμμικές συναρτήσεις)**.** *Έστω $V^m = \prod_{i=1}^m V$ ένας διανυσματικός χώρος γινόμενο. Μία συνάρτηση $f : V^m \to \mathbb{R}$ θα καλείται πλειογραμμική εάν για κάθε $i \in \{1, \cdots, m\}$ η:*

$$f(v_1, \cdots, v_{i-1}, (\cdot), v_{i+1}, \cdots, v_m)$$

είναι γραμμική. Δηλαδή, μία πλειογραμμική συνάρτηση είναι γραμμική σε κάθε της συντεταγμένη. Η συνάρτηση f καλείται επίσης $m-$τανυστής, και το αντίστοιχο σύνολο των $m-$τανυστών συμβολίζεται με $\mathcal{T}^m(V)$.

Διάφορες γνωστές συναρτήσεις είναι τανυστές. Για παράδειγμα, το πραγματικό εσωτερικό γινόμενο $\langle\cdot,\cdot\rangle$ είναι ένας τανυστής, αφού είναι γραμμικό ως προς κάθε μεταβλητή. Αυτή η παρατήρηση επίσης μας δείχνει ότι δεν είναι κατ' ανάγκη γραμμική κάθε πλειογραμμική συνάρτηση. Για την ακρίβεια, οι δύο έννοιες συμπίπτουν μόνο όταν $m = 1$.

Πράγματι, από το $m = 2$ αρχίζουν να υπάρχουν προβλήματα της ακόλουθης φύσεως:

$$f(\lambda v_1, \lambda v_2) = \lambda^2 f(v_1, v_2)$$

ενώ στις γραμμικές συναρτήσεις $f(\lambda v_1, \lambda v_2) = f\big(\lambda(v_1, v_2)\big) = \lambda f(v_1, v_2)$. Όταν βέβαια $m = 1$, έχουμε την ταύτιση $\mathcal{T}^1(V) = V^*$, όπου V^* είναι ο δυϊκός του V.

Άλλο παράδειγμα πλειογραμμικής συνάρτησης είναι η ίδια η ορίζουσα. Εάν θεωρήσουμε την ορίζουσα ως συνάρτηση των στηλών του πίνακα:

$$\det\left(\begin{pmatrix} v_{1,1} \\ \vdots \\ v_{m,1}\end{pmatrix}, \cdots, \lambda\begin{pmatrix} v_{1,i} \\ \vdots \\ v_{m,i}\end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} v_{1,m} \\ \vdots \\ v_{m,m}\end{pmatrix}\right) = \lambda\det\begin{pmatrix} v_{1,1} & \cdots & v_{m,1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{m,1} & \cdots & v_{m,m}\end{pmatrix}$$

κι επιπλέον αξιωματικά (από τον ορισμό της ορίζουσας), προκύπτει η αθροιστικότητα ως προς τις στήλες.

Παρατήρηση 3.1. *Έστω V ένας διανυσματικός χώρος. Το $\mathcal{T}^m(V)$ με τις πράξεις τις κατά σημείο πρόσθεσης και του εξωτερικού πολλαπλασιασμού γίνεται διανυσματικός χώρος.*

Εφόσον οι διανυσματικοί χώροι $\mathcal{T}^m(V)$ -κατά μία έννοια- προέρχονται από το V, αναμένεται ότι μέσω της βάσης του V θα μπορούν να εξαχθούν κάποια συμπεράσματα για τους $m-$τανυστές.

Παρατήρηση 3.2. *Έστω V ένας διανυσματικός χώρος και $f, g \in \mathcal{T}^m(V)$. Εάν $\{b_1, \cdots, b_n\}$ είναι μία βάση του V και για κάθε $I = (i_1, \cdots, i_m) \in \{1, \cdots, n\}^m$:*

$$f(b_{i_1}, \cdots, b_{i_m}) = g(b_{i_1}, \cdots, b_{i_m})$$

τότε $f = g$.

Απόδειξη: Αυτό το αποτέλεσμα είναι ανάλογο του ότι κάθε γραμμική συνάρτηση καθορίζεται από τα στοιχεία της βάσης του χώρου.

Για την απόδειξη, γράφουμε:

$$v_i = \sum_{j=1}^{n} c_{i,j} b_j$$

και λόγω πλειογραμμικότητας υπολογίζουμε:

$$f(v_1, \cdots, v_m) = \sum_{j_1=1}^{n} c_{1,j_1} f(b_{j_1}, v_2, \cdots, v_m) = \cdots = \sum_{1 \leqslant j_1, \cdots, j_m \leqslant n} \left(\prod_{i=1}^{m} c_{i,j_i} \right) f(b_{j_1}, \cdots, b_{j_m})$$

Ανάλογο ανάπτυγμα παίρνουμε και για τη g, πράγμα που αποδεικνύει το ζητούμενο.

□

Με την παραπάνω παρατήρηση μπορούμε να μελετήσουμε τη βάση του διανυσματικού χώρου $\mathcal{T}^m(V)$ των $m-$τανυστών.

Πρόταση 3.1 (Βάση του $\mathcal{T}^m(V)$)**.** *Έστω V ένας διανυσματικός χώρος με βάση $\{b_1, \cdots, b_n\}$. Εάν με I συμβολίσουμε το τυχόν διάνυσμα $I = (i_1, \cdots, i_m)$, υπάρχει μοναδικός $m-$τανυστής $\varphi_I \in \mathcal{T}^m(V)$ ώστε:*

$$\varphi_I(b_{j_1}, \cdots, b_{j_m}) = \begin{cases} 0, \ I \neq (j_1, \cdots, j_m) \\ 1, \ I = (j_1, \cdots, j_m) \end{cases}$$

Οι τανυστές φ_I, καθώς $I \in \{1, \cdots, n\}^m$, συνιστούν βάση του $\mathcal{T}^m(V)$.

Απόδειξη: Από την Παρατήρηση 3.2, αρκεί να δίνουμε τους ορισμούς μας στα στοιχεία της βάσης του V. Ορίζουμε για κάθε i τις γραμμικές απεικονίσεις:

$$\varphi_i(b_j) = \begin{cases} 0, \ i \neq j \\ 1, \ i = j \end{cases}$$

Επιπλέον, αν $I = (i_1, \cdots, i_m)$, ορίζουμε:

$$\varphi_I(v_1, \cdots, v_m) = \prod_{k=1}^{m} \varphi_{i_k}(v_k)$$

και παρατηρούμε ότι αυτή η απεικόνιση είναι ακριβώς η φ_I της διατύπωσης της πρότασης.

Χρειάζεται τώρα να δείξουμε ότι οι τανυστές $\varphi_I \in \mathcal{T}^m(V)$ αποτελούν βάση του $\mathcal{T}^m(V)$. Θεωρούμε λοιπόν για κάθε $I = (i_1, \cdots, i_m) \in \{1, \cdots, n\}^m$ τους συντελεστές:

$$c_I = f(b_{i_1}, \cdots, b_{i_m})$$

και επίσης τον $m-$τανυστή:

$$g = \sum_{I \in \{1, \cdots, n\}^m} c_I \varphi_I$$

Από τον ορισμό του g και των φ_I, έχουμε ότι:

$$f(b_{i_1}, \cdots, b_{i_m}) = g(b_{i_1}, \cdots, b_{i_m})$$

για κάθε $I = (i_1, \cdots, i_m)$, και κατά συνέπεια, από την Παρατήρηση 3.2, την ισότητα $f = g$.

Από την απόδειξη επίσης προκύπτει ότι κάθε γραφή της f μέσω των φ_I είναι μοναδική, αφού κάθε c_I προσδιορίζεται από την τιμή $f(b_{i_1}, \cdots, b_{i_m})$.

□

Η παραπάνω απόδειξη μας οδηγεί -μέσω της ≪διάσπασης≫ των φ_I- στον ορισμό των τανυστικών γινομένων.

Ορισμός 3.2 (Τανυστικά γινόμενα). *Έστω V ένας διανυσματικός χώρος και $f \in \mathcal{T}^\ell(V)$, $g \in \mathcal{T}^m(V)$. Ορίζουμε ως τανυστικό γινόμενο των f, g τον $(\ell + m)-$τανυστή:*

$$(f \otimes g)(v_1, \cdots, v_{\ell+m}) = f(v_1, \cdots, v_\ell) \cdot g(v_{\ell+1}, \cdots, v_{\ell+m})$$

Επίσης, από την Πρόταση 3.1 έχει νόημα να δώσουμε τον ακόλουθο ορισμό:

Ορισμός 3.3 (Βασικοί τανυστές). *Έστω V ένας διανυσματικός χώρος με βάση $\{b_1, \cdots, b_n\}$. Οι $m-$τανυστές φ_I, $I = \{1, \cdots, n\}^m$, όπως αυτοί ορίστηκαν στην Πρόταση 3.1, καλούνται βασικοί τανυστές.*

Πρόταση 3.2 (Ιδιότητες των τανυστικών γινομένων). *Έστω V ένας διανυσματικός χώρος και f, g, h τρεις τανυστές. Αληθεύουν τα ακόλουθα:*

i. $f \otimes (g \otimes h) = (f \otimes g) \otimes h$

ii. $(\lambda f) \otimes g = \lambda(f \otimes g) = f \otimes (\lambda g)$

iii. Εάν οι f, g έχουν την ίδια τάξη (είναι και οι δύο $m-$τανυστές), τότε:

$$(f + g) \otimes h = f \otimes h + g \otimes h \text{ και } h \otimes (f + g) = h \otimes f + h \otimes g$$

iv. Εάν $\{b_1, \cdots, b_n\}$ είναι μία βάση του V και φ_I είναι οι βασικοί $m-$τανυστές, τότε:

$$\varphi_I = \varphi_{i_1} \otimes \cdots \otimes \varphi_{i_m}, \ I = (i_1, \cdots, i_m) \in \{1, \cdots, n\}^m$$

Απόδειξη: Οι ιδιότητες i., ii. και iii. είναι άμεσες. Η iv. αποδεικνύεται από την Πρόταση 3.1.

□

Μπορούμε λοιπόν να γράφουμε, για κάθε $f \in \mathcal{T}^m(V)$:

$$f(v_1, \cdots, v_m) = \sum_{I \in \{1, \cdots, n\}^m} f(b_{i_1}, \cdots, b_{i_m})(\varphi_{i_1} \otimes \cdots \otimes \varphi_{i_m})(v_1, \cdots, v_m)$$

Σημειώνουμε εδώ -πέραν του γεγονότος $\mathcal{T}^1(V) = V^*$- ότι οι χώροι των τανυστών εμφανίζουν σημαντικές ομοιότητες με τον δυϊκό χώρο. Γνωρίζουμε, για παράδειγμα, ότι οι δυϊκοί χώροι έχουν δυϊκή βάση $\{E_i\}_{i \leqslant m}$, όπου:

$$E_i(b_j) = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$$

(και η $\{b_1, \cdots, b_m\}$ είναι βάση του V). Επίσης, εάν $F : V \to W$ είναι μία γραμμική απεικόνιση μεταξύ διανυσματικών χώρων V, W, ορίζεται η δυϊκή της $F^* : W^* \to V^*$ με $F^*(f) = f \circ F$, την οποία εμείς εδώ θα προσπαθήσουμε να γενικεύσουμε.

Ορισμός 3.4 (Ανάσυρση)**.** *Έστω V, W δύο διανυσματικοί χώροι και $F : V \to W$ μία γραμμική απεικόνιση. Ορίζουμε την ανάσυρση (pullback) F^* της F ως εξής:*

$$F^* : \mathcal{T}^m(W) \to \mathcal{T}^m(V) \text{ με } (F^*f)(v_1, \cdots, v_m) = f\big(F(v_1), \cdots, F(v_m)\big)$$

Η ανάσυρση σε αυτό το πλαίσιο ορίζεται για να μελετηθεί η συμπεριφορά των τανυστών στις γραμμικές απεικονίσεις. Αργότερα θα δούμε και ανασύρσεις στις διαφορικές μορφές, που δεν είναι ακριβώς το ίδιο.

Η ορολογία «ανάσυρση» είναι λογική, αφού αντιστρέφει τα βέλη (από το $V \to W$ στο $\mathcal{T}^m(W) \to \mathcal{T}^m(V)$). Μερικές ιδιότητες της ανάσυρσης συνοψίζονται παρακάτω.

Πρόταση 3.3 (Ιδιότητες της ανάσυρσης)**.** *Έστω V, W, Y τρεις διανυσματικοί χώροι και $F : V \to W$, $G : W \to Y$ γραμμικές απεικονίσεις, με ανασύρσεις $F^* : \mathcal{T}^m(W) \to \mathcal{T}^m(V)$, $G^* : \mathcal{T}^m(Y) \to \mathcal{T}^m(W)$. Έχουμε τα εξής:*

i. Η F^* είναι γραμμική απεικόνιση.

ii. $F^*(f \otimes g) = F^*(f) \otimes F^*(g)$

iii. $(G \circ F)^* = F^* \circ G^*$

Απόδειξη: Το i., προκύπτει από τον ορισμό της ανάσυρσης.
Για το ii., γράφουμε:

$$\begin{aligned} F^*(f \otimes g)(v_1, \cdots, v_{\ell+m}) &= (f \otimes g)\big(F(v_1), \cdots, F(v_{\ell+m})\big) \\ &= f\big(F(v_1), \cdots, F(v_\ell)\big) \cdot g\big(F(v_{\ell+1}), \cdots, F(v_{\ell+m})\big) \\ &= F^*(f)(v_1, \cdots, v_\ell) \cdot F^*(g)(v_{\ell+1}, \cdots, v_{\ell+m}) \\ &= \big(F^*(f) \otimes F^*(g)\big)(v_1, \cdots, v_{\ell+m}) \end{aligned}$$

Για το iii., γράφουμε:

$$\begin{aligned} (G \circ F)^*(f)(v_1, \cdots, v_m) &= f\big(G \circ F(v_1), \cdots, G \circ F(v_m)\big) \\ &= G^*(f)\big(F(v_1), \cdots, F(v_m)\big) \\ &= (F^* \circ G^*)(f)(v_1, \cdots, v_m) \end{aligned}$$

□

3.2 Εναλλάσσοντες τανυστές

Σημειώνουμε για τα επόμενα τον καθιερωμένο συμβολισμό του συνόλου $\mathfrak{S}_m$, των μεταθέσεων του $\{1, \cdots, m\}$.

Είναι λογικό, δεδομένου του ότι αναζητούμε κάποια επέκταση του εξωτερικού γινομένου, να μελετήσουμε τις ιδιότητές του. Μία βασική εξ αυτών είναι η αντι-αντιμεταθετικότητα (ή καλύτερα αντισυμμετρία), δηλαδή η ιδιότητα $a \times b = -b \times a$. Αντίστοιχα, μεταβαίνοντας στη γενικότερη περίπτωση, θα μελετήσουμε τους λεγόμενους εναλλάσσοντες τανυστές.

Πριν απ' αυτό, δεδομένης μίας μετάθεσης $\sigma \in \mathfrak{S}_m$, θα συμβολίζουμε με f^σ τη συνάρτηση:

$$f^\sigma(v_1, \cdots, v_m) = f(v_{\sigma(1)}, \cdots, v_{\sigma(m)})$$

Ορισμός 3.5 (Εναλλάσσοντες τανυστές). *Έστω V ένας διανυσματικός χώρος και $f \in \mathcal{T}^m(V)$. Εάν για κάθε αντιμετάθεση $\mu \in \mathfrak{S}_m$ (δηλαδή εναλλαγή δύο στοιχείων) έχουμε $f^\mu = -f$, ο f θα καλείται εναλλάσσων τανυστής. Το σύνολο των εναλλασσόντων $m-$τανυστών θα το συμβολίζουμε με $\mathcal{A}^m(V)$ (όπου κάνουμε τη σύμβαση $\mathcal{A}^1(V) = \mathcal{T}^1(V)$).*

Παρατήρηση 3.3. *Έστω V ένας διανυσματικός χώρος, $f \in \mathcal{T}^m(V)$ και $\sigma, \tau \in \mathfrak{S}_m$. Τα ακόλουθα αληθεύουν:*

i. Η συνάρτηση $\Diamond^\sigma : f \mapsto f^\sigma$ είναι γραμμική και $(f^\sigma)^\tau = f^{\tau\circ\sigma}$.

ii. Ο f είναι εναλλάσσον εάν και μόνο αν $f^\sigma = \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot f$.

Απόδειξη: Για το i. έχουμε άμεσα τη γραμμικότητα, κι επιπλέον αν:

$$(f^\sigma)^\tau = f^\sigma(v_{\tau(1)}, \cdots, v_{\tau(m)})$$

θέτοντας $w_i = v_{\tau(i)}$, έχουμε:

$$f^\sigma(w_1, \cdots, w_m) = f(w_{\sigma(1)}, \cdots, w_{\sigma(m)}) = f(v_{\tau\circ\sigma(1)}, \cdots, v_{\tau\circ\sigma(m)}) = f^{\tau\circ\sigma}(v_1, \cdots, v_m)$$

Για το ii.: Έστω ότι $f \in \mathcal{A}^m(V)$Γράφουμε τη μετάθεση σ ως γινόμενο αντιμεταθέσεων $\mu_1 \circ \cdots \circ \mu_\ell$ κι έχουμε:

$$f^\sigma = f^{\mu_1\circ\cdots\circ\mu_\ell} = (\cdots(f)^{\mu_\ell}\cdots)^{\mu_1} = (-1)^\ell \cdot f = \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot f$$

(όπου η προτελευταία ισότητα δικαιολογείται από το γεγονός ότι ο f είναι εναλλάσσον). η αντίστροφη κατεύθυνση είναι άμεση.

□

Όπως και στην περίπτωση των τανυστών, έτσι κι εδώ μπορούμε να βρούμε μία βάση του χώρου των εναλλασσόντων τανυστών. Μάλιστα, βάσει της Παρατήρησης 3.3 μπορούμε να επιλέξουμε μία συγκεκριμένη μορφή για τη βάση, που θα δούμε παρακάτω.

Παρατήρηση 3.4. *Έστω V ένας διανυσματικός χώρος με βάση $\{b_1, \cdots, b_n\}$. Εάν $f, g \in \mathcal{A}^m(V)$ και για κάθε $m-$άδα αύξοντων αριθμών $I = (i_1, \cdots, i_m)$ έχουμε:*

$$f(b_{i_1}, \cdots, b_{i_m}) = g(b_{i_1}, \cdots, b_{i_m})$$

τότε $f = g$.

Απόδειξη: Αυτό είναι συνέπεια των Παρατηρήσεων 3.2, 3.3.

□

Πρόταση 3.4 (Βάση του $\mathcal{A}^m(V)$). *Έστω V ένας διανυσματικός χώρος με βάση $\{b_1, \cdots, b_n\}$. Εάν $I = (i_1, \cdots, i_m)$ είναι διανύσματα γνησίως αύξοντων αριθμών, υπάρχουν μοναδικοί εναλλάσσοντες $m-$τανυστές:*

$$\psi_I(b_{j_1}, \cdots, b_{j_m}) = \begin{cases} 0, & I \neq (j_1, \cdots, j_m) \\ 1, & I = (j_1, \cdots, j_m) \end{cases}$$

όπου οι j_k είναι αύξοντες. Οι τανυστές ψ_I, καθώς το $I \in \{1, \cdots, n\}^m$ διατρέχει τα διανύσματα γνησίως αυξόντων αριθμών, συνιστούν βάση του $\mathcal{A}^m(V)$. Μάλιστα:

$$\psi_I = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_m} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot (\varphi_I)^\sigma$$

Απόδειξη: Βάσει της Παρατήρησης 3.4, έχουμε την μοναδικότητα.

Ορίζουμε τους ψ_I με τη βοήθεια των φ_I, μέσω του τύπου:

$$\psi_I = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_m} \operatorname{sgn}(\sigma)\cdot(\varphi_I)^\sigma$$

και θα δείξουμε ότι αυτές είναι οι ζητούμενες ψ_I της εκφώνισης. Πράγματι, για κάθε μετάθεση $\tau\in\mathfrak{S}_m$ έχουμε:

$$(\psi_I)^\tau = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_m} \operatorname{sgn}(\sigma)\cdot((\varphi_I)^\sigma)^\tau = \operatorname{sgn}(\tau)\cdot\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_m}\operatorname{sgn}(\tau\circ\sigma)\cdot(\varphi_I)^{\tau\circ\sigma}$$

δηλαδή:

$$(\psi_I)^\tau = \operatorname{sgn}(\tau)\cdot\psi_I$$

το οποίο δείχνει ότι η ψ_I έναι εναλλάσσουσα. Επίσης, μέσω του τύπου της ψ_i θα δείξουμε ότι ικανοποιεί τη συνθήκη της εκφώνισης. Πράγματι, εάν $I=(j_1,\cdots,j_m)$, τότε:

$$\psi_I(b_{j_1},\cdots,b_{j_m}) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_m}\operatorname{sgn}(\sigma)\cdot(\varphi_I)^\sigma(b_{j_1},\cdots,b_{j_m}) = 1$$

(όπου ≪επιβιώνει≫ μόνο ο όρος της ταυτοτικής μετάθεσης, αφού οι αριθμοί του I και οι j_k είναι γνησίως αύξοντες). Επιπλέον, εάν $I\neq(j_1,\cdots,j_m)$, τότε:

$$\psi_I(b_{j_1},\cdots,b_{j_m}) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_m}\operatorname{sgn}(\sigma)\cdot(\varphi_I)^\sigma(b_{j_1},\cdots,b_{j_m}) = 0$$

αφού οι αριθμοί του I και οι j_k είναι γνησίως αύξοντες.

Εάν λοιπόν $I=(i_1,\cdots,i_m)$ είναι διάνυσμα αύξοντων αριθμών, ορίζουμε:

$$c_I = f(b_{i_1},\cdots,b_{i_m})$$

και θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$g = \sum_{I\in\{1,\cdots,n\}^m \text{ αυξ.}} c_I\psi_I$$

Εάν οι j_k, $k\in\{1,\cdots,m\}$ είναι αύξοντες, τότε:

$$g(b_{j_1},\cdots,b_{j_m}) = f(b_{j_1},\cdots,b_{j_m})$$

και από την Παρατήρηση 3.4 έχουμε $f=g$.

□

Από τα προηγούμενα έχουμε ότι ο χώρος των $m-$τανυστών $\mathcal{T}^m(V)$ έχει διάσταση n^m, και ο χώρος των εναλλασσόντων $m-$τανυστών $\mathcal{A}^m(V)$ έχει διάσταση:

$$\dim\mathcal{A}^m(V) = \binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Ορισμός 3.6 (Βασικοί εναλλάσσοντες τανυστές). *Έστω V ένας διανυσματικός χώρος με βάση $\{b_1,\cdots,b_n\}$. Οι $m-$εναλλάσσοντες τανυστές ψ_I, $I\in\{1,\cdots,n\}^m$ με αύξοντες αριθμούς, όπως αυτοί ορίστηκαν στην Πρόταση 3.4 καλούνται βασικοί εναλλάσσοντες τανυστές.*

Πρόταση 3.5. *Έστω V,W διανυσματικοί χώροι και $F:V\to W$ γραμμική απεικόνιση. Εάν $f\in\mathcal{A}^m(W)$, τότε $F^*(f)\in\mathcal{A}^m(V)$.*

Απόδειξη: Πράγματι, για κάθε μετάθεση μ (που χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι γίνεται στα δύο πρώτα στοιχεία) έχουμε:

$$\begin{aligned}\big(F^*(f)\big)^{\mu}(v_1,\cdots,v_m) &= f\big(F(v_2),F(v_1),\cdots,F(v_m)\big)\\ &= -f\big(F(v_1),F(v_2),\cdots,F(v_m)\big)\\ &= -F^*(f)(v_1,\cdots,v_m)\end{aligned}$$

□

Η θεωρία που μέχρι στιγμής έχουμε κατασκευάσει είναι αρκετά ισχυρή και μπορεί να αποδείξει αποτελέσματα ήδη γνωστά από τη γραμμική άλγεβρα, όπως ο εναλλακτικός τύπος της ορίζουσας μέσω μεταθέσεων.

Πρόταση 3.6 (Ο τύπος της ορίζουσας με μεταθέσεις)**.** *Για την $n \times n$ ορίζουσα ισχύει ο τύπος:*

$$\det\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n}\end{pmatrix} = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\operatorname{sgn}(\sigma)\prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}$$

Απόδειξη: Έχουμε ήδη αναφέρει ότι η ορίζουσα (οποιασδήποτε τάξης) είναι πλειογραμμική συνάρτηση. Επιπλέον παρατηρούμε ότι εάν:

$$e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \cdots, e_n = \begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}$$

τότε:

$$\psi_{(1,\cdots,n)}(e_1,\cdots,e_n) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\operatorname{sgn}(\sigma)\cdot(\varphi_{(1,\cdots,n)})^{\sigma}(e_1,\cdots,e_n) = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \psi_{(1,\cdots,n)}(e_1,\cdots,e_n) = 1 = \det(e_1,\cdots,e_n)$$

Επίσης, εάν $I = (i_1,\cdots,i_n) \neq (1,\cdots,n)$ είναι διάνυσμα αυξόντων αριθμών, τότε θα υπάρχουν δύο ίδιοι διαδοχικοί όροι. Κατά συνέπεια:

$$\psi_{(1,\cdots,n)}(e_{i_1},\cdots,e_{i_n}) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\operatorname{sgn}(\sigma)\cdot(\varphi_{(1,\cdots,n)})^{\sigma}(e_{i_1},\cdots,e_{i_n}) = 0$$

Δηλαδή:

$$\psi_{(1,\cdots,n)}(e_{i_1},\cdots,e_{i_n}) = 0 = \det(e_{i_1},\cdots,e_{i_n})$$

Εφόσον οι δύο πλειογραμμικές συναρτήσεις $\psi_{(1,\cdots,n)}, \det$ συμπίπτουν στα στοιχεία $e_1,\cdots,e_n$, όταν αυτά διατάσσονται σε $n-$άδες με αύξοντες δείκτες, από την Πρόταση 3.4 έχουμε την ισότητα $\psi_{(1,\cdots,n)} = \det$. Κατά συνέπεια, από την γραφή των ψ_I:

$$\det = \psi_{(1,\cdots,n)} = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\operatorname{sgn}(\sigma)\cdot(\varphi_{(1,\cdots,n)})^{\sigma} = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\operatorname{sgn}(\sigma)\cdot\big(\varphi_1\otimes\cdots\otimes\varphi_n\big)^{\sigma}$$

το οποίο σημαίνει:

$$\begin{aligned}\det\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n}\end{pmatrix} &= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\operatorname{sgn}(\sigma)\cdot\big(\varphi_1\otimes\cdots\otimes\varphi_n\big)\left(\begin{pmatrix}a_{1,\sigma(1)}\\ \vdots\\ a_{n,\sigma(1)}\end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix}a_{1,\sigma(n)}\\ \vdots\\ a_{n,\sigma(n)}\end{pmatrix}\right)\\ &= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\operatorname{sgn}(\sigma)\cdot\prod_{i=1}^{n}a_{i,\sigma(i)}\end{aligned}$$

□

3.3 Σφηνοειδή γινόμενα

Έχοντας κάνει αυτήν την προετοιμασία, είμαστε σε θέση να ορίσουμε το σφηνοειδές γινόμενο, το οποίο είναι στην ουσία μία γενίκευση του εξωτερικού γινομένου.

Εφορμώντας από την περίπτωση του $\mathbb{R}^3$, το εξωτερικό γινόμενο έχει ιδιότητες που το χαρακτηρίζουν, με τρόπο που το καθιστούν μοναδικό στον $\mathbb{R}^3$. Κατ' αρχάς υπάρχει μία έννοια καθετότητας, η οποία μάλιστα είναι προσανατολισμένη (δίδεται δηλαδή πρόσημο που υποδεικνύει τον προσανατολισμό), κι επίσης αλγεβρικές ιδιότητες, όπως είναι αυτή της επιμεριστικότητας.

Η έννοια του προσανατολισμού μπορεί να εκφραστεί και στη γενικότερη περίπτωση μέσω της αντισυμμετρίας. Η καθετότητα τώρα δεν μεταφράζεται αυτούσια, καθώς δεν εφοδιάζονται όλοι οι προς μελέτη χώροι με εσωτερικό γινόμενο (κι αυτό είναι ένα πρόβλημα που θα ξανασυναντήσουμε μετέπειτα, σε κάπως διαφορετικό πλαίσιο). Παρόλα αυτά, εάν $\varphi_i \in V^*$, $i \in \{1, \cdots, n\}$ είναι η βάση του V^*, μπορούμε να αναμένουμε ότι για κάθε διάνυσμα $I = (i_1, \cdots, i_m) \in \{1, \cdots, n\}^m$ αυξόντων δεικτών:

$$\psi_I = \varphi_{i_1} \wedge \cdots \wedge \varphi_{i_m}$$

όπου εδώ η σφήνα $\wedge$ έχει τον ρόλο του γενικευμένου εξωτερικού γινομένου. Αυτό κανείς μπορεί να το σκέφτεται κατ' αναλογία με τη σχέση $z = x \times y$ (κι αντίστοιχα $-z = y \times x$).

Θεώρημα 3.1 (Υπαρξη και μοναδικότητα της σφήνας)**.** *Έστω V ένας διανυσματικός χώρος με βάση $\{b_1, \cdots, b_n\}$. Υπάρχει ένας τελεστής $\wedge$ (σφήνα) ώστε για κάθε $f \in \mathscr{A}^m(V)$, $g \in \mathscr{A}^\ell(V)$, $h \in \mathscr{A}^k(V)$:*

i. $(f + g) \wedge h = f \wedge h + g \wedge h$ *και* $(\lambda f) \wedge g = \lambda(f \wedge g)$

ii. $g \wedge f = (-1)^{m\ell}(f \wedge g)$ *(και κατά συνέπεια $f \wedge f = 0$ όταν ο f είναι «περιττής τάξης»).*

iii. $f \wedge (g \wedge h) = (f \wedge g) \wedge h$

iv. Για κάθε διάνυσμα $I = (i_1, \cdots, i_m) \in \{1, \cdots, n\}^m$ αύξοντων δεικτών έχουμε:

$$\psi_I = \varphi_{i_1} \wedge \cdots \wedge \varphi_{i_m}$$

(Οι φ_{i_j}, $j \in \{1, \cdots, m\}$ είναι οι βασικοί $1-$ταυνστές και οι ψ_I οι βασικοί εναλλάσσοντες $m-$ταυνστές).

Οι ιδιότητες i.-iv. εξασφαλίζουν επίσης τη μοναδικότητα του τελεστή $\wedge$.

Απόδειξη: Σκεπτόμενοι τη γραφή των ψ_I στην Πρόταση 3.4, ορίζουμε τον τελεστή A μέσω του τύπου:

$$A(f) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_m} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot f^\sigma, \text{ όπου } f \in \mathscr{T}^m(V)$$

και έχουμε $\psi_I = A(\varphi_I)$. Μέσω αυτού του τελεστή θα ορίσουμε το σφηνοειδές γινόμενο, επομένως είναι σκόπιμο να παρατηρήσουμε μερικές βασικές ιδιότητες: Η A είναι γραμμική, η $A(f)$ είναι εναλλάσσουσα, ακόμη κι όταν η f δεν είναι εναλλάσσουσα, κι επίσης $A(f) = m! \cdot f$ όταν η f είναι εναλλάσσων $m-$τανυστής.

Η γραμμικότητα είναι άμεση από τον ορισμό. Η ιδιότητα της εναλλάσσουσας αποδεικνύεται με άμεσο υπολογισμό. Εάν $\tau \in \mathfrak{S}_m$, τότε:

$$A(f)^\tau = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_m} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot f^{\tau \circ \sigma} = \operatorname{sgn}(\tau) \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_m} \operatorname{sgn}(\tau \circ \sigma) \cdot f^{\tau \circ \sigma} = \operatorname{sgn}(\tau) \cdot A(f)$$

Τέλος, η ιδιότητα $A(f) = m! \cdot f$, $f \in \mathscr{A}^m(V)$ είναι άμεση, αφού $f^\sigma = \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot f$ κι άρα:

$$A(f) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_m} \operatorname{sgn}^2(\sigma) \cdot f = m! \cdot f$$

Έχοντας πει αυτά, θα ορίσουμε:

$$f \wedge g = \frac{1}{m!\ell!} A(f \otimes g), \text{ με } f \in \mathscr{A}^m(V), \ g \in \mathscr{A}^\ell(V)$$

Ίσως ο ρόλος του σεντελεστή εδώ να μην είναι εμφανής εκ πρώτης όψεως. Αργότερα θα δούμε όμως ότι είναι απαραίτητος για την εξαγωγή των ιδιοτήτων της σφήνας, και ιδιαίτερα της προσεταιριστικότητας. Ως πρώτη ιδέα, κανείς μπορεί να σκεφτεί ότι, αν γράψουμε:

$$(f \wedge g)(v_1, \cdots, v_{m+\ell}) = \frac{1}{m!\ell!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{m+\ell}} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot f(v_{\sigma(1)}, \cdots, v_{\sigma(m)}) \cdot g(v_{\sigma(m+1)}, \cdots, v_{\sigma(m+\ell)})$$

τότε κανείς λαμβάνει από το άθροισμα $m!\ell!$ ίδιους όρους (ξεχνώντας το πρόσημο), μεταθέτοντας τα ορίσματα της f και τα ορίσματα της g (αλλά όχι τα ορίσματα της f με της g -δεν κάνουμε μείξη). Εν τω μεταξύ προσέξτε ότι, λόγω του ότι οι f, g είναι εναλλάσσουσες και εμπρός υπάρχει το πρόσημο της μετάθεσης, στην πραγματικότητα όλοι οι όροι που προκύπτουν με μεταθέσεις όπως πριν είναι στην πραγματικότητα ίδιοι.

Για το i.: Αυτό είναι συνέπεια της Πρότασης 3.2, σε συνδυασμό με την ακόλουθη παρατήρηση:

$$(\lambda f) \wedge g = \frac{1}{m!\ell!} A\big((\lambda f) \otimes g\big) = \frac{1}{m!\ell!} A\big(\lambda(f \otimes g)\big) = \frac{\lambda}{m!\ell!} A(f \otimes g) = \lambda(f \wedge g)$$

Για το ii.: Εάν $f \in \mathscr{T}^m(V)$, $g \in \mathscr{T}^\ell(V)$, τότε θα δείξουμε ότι:

$$A(f \otimes g) = (-1)^{m\ell} A(g \otimes f)$$

Εάν ρ είναι η μετάθεση που φέρνει τους m πρώτους όρους στο τέλος (δηλαδή η $(1, 2, \cdots, m, m+1, \cdots, m+\ell) \mapsto (m+1, \cdots, m+\ell, 1, \cdots, m)$), τότε $\operatorname{sgn}(\rho) = (-1)^{m+\ell}$, και από τον ορισμό της μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι:

$$(g \otimes f)^\rho = (-1)^{m\ell}(f \otimes g)$$

Με άμεσο λοιπόν υπολογισμό μπορούμε να βρούμε το εξής:

$$\begin{aligned} A(f \otimes g) &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{m+\ell}} \operatorname{sgn}(\sigma)(f \otimes g)^\sigma = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{m+\ell}} \operatorname{sgn}(\sigma)\big((g \otimes f)^\rho\big)^\sigma = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{m+\ell}} \operatorname{sgn}(\sigma)(g \otimes f)^{\sigma \circ \rho} \\ &= (-1)^{m\ell} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{m+\ell}} \operatorname{sgn}(\sigma \circ \rho)(g \otimes f)^{\sigma \circ \rho} = (-1)^{m\ell} A(g \otimes f) \end{aligned}$$

Ειδικότερα, για να αναφερθούμε ακριβώς στο ii., εάν $f \in \mathscr{A}^m(V)$ και $g \in \mathscr{A}^\ell(V)$, τότε:

$$g \wedge f = \frac{1}{m!\ell!} A(g \otimes f) = \frac{(-1)^{m\ell}}{m!\ell!} A(f \otimes g) = (-1)^{m\ell}(f \wedge g)$$

Για το iii.: Εδώ η κατάσταση είναι κάπως περίπλοκη και θα εργαστούμε σε βήματα.

Βήμα iii. I: Εάν $f \in \mathscr{T}^m(V)$ και $g \in \mathscr{T}^\ell(V)$ με $A(f) = 0$, τότε θα δείξουμε ότι $A(f \otimes g) = 0$. Πράγματι, εάν γράψουμε με διαφορετικό τρόπο το άθροισμα με το οποίο ο A ορίζεται:

$$A(f \otimes g)(v_1, \cdots, v_{m+\ell}) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{m+\ell}} \left(\sum_{\tau \in \mathfrak{S}_m} \operatorname{sgn}(\sigma \circ \tau) f^{\sigma \circ \tau}(v_1, \cdots, v_m) \right) \cdot g^\sigma(v_{m+1}, \cdots, v_{m+\ell})$$

κι επειδή:

$$A(f) = \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_m} \operatorname{sgn}(\sigma \circ \tau) f^{\sigma \circ \tau}(v_1, \cdots, v_m) = 0$$

έπεται $A(f \otimes g) = 0$.

Βήμα iii. II: Εάν $f \in \mathscr{A}^m(V)$ και $h \in \mathscr{A}^k$, τότε:

$$A(f) \wedge h = \frac{1}{k!} A(f \otimes h)$$

Πράγματι, την παραπάνω σχέση μπορούμε να τη γράψουμε ισοδύναμα στη μορφή:

$$\frac{1}{m!k!}A\big(A(f)\otimes h\big)=\frac{1}{k!}A(f\otimes h)$$

ή αλλιώς:

$$A\big(A(f)\otimes h-m!\cdot(f\otimes h)\big)=0\Leftrightarrow A\big((A(f)-m!\cdot f)\otimes h\big)=0$$

Η τελευταία σχέση όμως ισχύει, αφού ο $A(f)$ είναι εναλλάσσον τανυστής και συνεπώς:

$$A\big(A(f)\big)=m!\cdot A(f)$$

Επιπλέον, χρειαζόμαστε το Βήμα iii. I, το οποίο έχουμε ήδη αποδείξει.

Βήμα iii. III: Τώρα θα δείξουμε την προσεταιριστικότητα. Θεωρούμε λοιπόν $f\in\mathscr{A}^m(V)$, $g\in\mathscr{A}^\ell(V)$ και $h\in\mathscr{A}^k(V)$, κι έχουμε:

$$\begin{aligned}(f\wedge g)\wedge h&=\frac{1}{m!\ell!}A(f\otimes g)\wedge h\\&=\frac{1}{m!\ell!k!}A\big((f\otimes g)\otimes h\big)\end{aligned}$$

(όπου στη δεύτερη ισότητα χρησιμοποιούμε το Βήμα iii. II). Από την αντιμεταθετικότητα του τανυστικού γινομένου έχουμε:

$$\frac{1}{m!\ell!k!}A\big((f\otimes g)\otimes h\big)=\frac{1}{m!\ell!k!}A\big(f\otimes(g\otimes h)\big)$$

κι από το ii., κατ' επανάληψη, σε συνδυασμό με το Βήμα iii. II:

$$\frac{1}{m!\ell!k!}A\big(f\otimes(g\otimes h)\big)=\frac{(-1)^{m(\ell+k)}}{m!\ell!k!}A\big((g\otimes h)\otimes f\big)=(-1)^{m(\ell+k)}\big((g\wedge h)\wedge f\big)=f\wedge(g\wedge h)$$

Για το iv.: θα δείξουμε ότι για κάθε οικογένεια $\{f_i\}_{i\leqslant j}$ $1-$τανυστών έχουμε:

$$A(f_1\otimes\cdots\otimes f_j)=f_1\wedge\cdots\wedge f_j$$

Από αυτό θα έχουμε τελικά το ζητούμενο, αφού ήδη έχουμε παρατηρήσει τη σχέση $A(\varphi_I)=\psi_I$.

Η σχέση προς απόδειξη είναι άμεση στην περίπτωση όπου $j=1$. Εάν επαγωγικά υποθέσουμε ότι ισχύει για το $j>1$, τότε:

$$A\big((f_1\otimes\cdots\otimes f_j)\otimes f_{j+1}\big)=1!\cdot A(f_1\otimes\cdots\otimes f_j)\wedge f_{j+1}=f_1\wedge\cdots\wedge f_j\wedge f_{j+1}$$

το οποίο αποδεικνύει την ισότητα και για το $j+1$.

Όσον αφορά τη μοναδικότητα, θα δείξουμε ότι με τις ιδιότητες i.-iv. κανείς μπορεί να υπολογίσει τη σφήνα μεταξύ οποιονδήποτε $f\in\mathscr{A}^m(V)$ και $g\in\mathscr{A}^\ell(V)$, και μάλιστα «συναρτήσει» των $\psi_I\wedge\psi_J$.

Θεωρούμε λοιπόν $f\in\mathscr{A}^m(V)$, $g\in\mathscr{A}^\ell(V)$ και γράφουμε:

$$f=\sum_{I\in\{1,\cdots,n\}^m\text{ αύξ.}}c_I(f)\psi_I\text{ και }g=\sum_{J\in\{1,\cdots,n\}^m\text{ αύξ.}}c_J(g)\psi_J$$

επομένως:

$$f\wedge g=\sum_{I,J\text{ αύξ.}}c_I(f)c_J(g)\psi_I\wedge\psi_J$$

Τώρα έχουμε $\psi_I=\varphi_{i_1}\wedge\cdots\wedge\varphi_{i_m}$ και $\psi_J=\varphi_{j_1}\wedge\cdots\wedge\varphi_{j_\ell}$, οπότε το παραπάνω άθροισμα γίνεται:

$$f\wedge g=\sum_{\substack{I,J\text{ αύξ.}\\I\cap J=\emptyset}}c_I(f)c_J(g)(\varphi_{i_1}\wedge\cdots\wedge\varphi_{i_m}\wedge\varphi_{j_1}\wedge\cdots\wedge\varphi_{j_\ell})$$

χρησιμοποιώντας επίσης την ιδιότητα $\varphi_i \wedge \varphi_i = 0$. Ενδέχεται οι δείκτες $i_1, \cdots, i_m, j_1, \cdots, j_\ell$ να μην είναι σε αύξουσα σειρά, αλλά αυτό δεν είναι πρόβλημα καθώς μπορούμε να μεταθέσουμε τη σειρά τους, χρησιμοποιώντας την ιδιότητα $\varphi_i \wedge \varphi_j = -\varphi_j \wedge \varphi_i$. Υποθέτουμε τώρα ότι έχουμε θέσει τους δείκτες σε αύξουσα σειρά και ορίζουμε $\psi_{I,J} = \varphi_{i_1} \wedge \cdots \wedge \varphi_{i_m} \wedge \varphi_{j_1} \wedge \cdots \wedge \varphi_{j_\ell}$. Με αυτά έχουμε τελικά:

$$f \wedge g = \sum_{\substack{I,J \text{ αύξ.} \\ I \cap J = \emptyset}} \delta_{I,J} c_I(f) c_J(g) \psi_{I,J}$$

όπου $\delta_{I,J} \in \{\pm 1\}$. Αυτό αποδεικνύει την πλήρη εξάρτηση της σφήνας από τους βασικούς εναλλάσσοντες τανυστές, και κατά συνέπεια τη μοναδικότητα.

□

Ορισμός 3.7 (Σφηνοειδές γινόμενο)**.** *Έστω V ένας διανυσματικός χώρος και $f \in \mathscr{A}^m(V)$, $g \in \mathscr{A}^\ell(V)$. Ορίζουμε το σφηνοειδές γινόμενο των f, g ως:*

$$f \wedge g = \frac{1}{m!\ell!} A(f \otimes g)$$

όπου:

$$A(\Diamond) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}} \operatorname{sgn}(\sigma) \Diamond^\sigma$$

Πρόταση 3.7. *Έστω V, W δύο διανυσματικοί χώροι, $F : V \to W$ γραμμική και $f \in \mathscr{A}^m(V)$, $g \in \mathscr{A}^\ell(V)$. Τότε:*

$$F^*(f \wedge g) = F^*(f) \wedge F^*(g)$$

Δηλαδή η ανάσυρση F^* λειτουργεί με γραμμικό τρόπο στις σφήνες.

Απόδειξη: Γράφουμε:

$$F^*(f \wedge g) = \frac{1}{m!\ell!} F^*\big(A(f \otimes g)\big) = \frac{1}{m!\ell!} A\big(F^*(f \otimes g)\big)$$

και από την Πρόταση 3.3 έχουμε:

$$\frac{1}{m!\ell!} A\big(F^*(f \otimes g)\big) = \frac{1}{m!\ell!} A\big(F^*(f) \otimes F^*(g)\big)$$

Κατά συνέπεια:

$$F^*(f \wedge g) = \frac{1}{m!\ell!} A\big(F^*(f) \otimes F^*(g)\big) = F^*(f) \wedge F^*(g)$$

□

Πρόταση 3.8. *Έστω V ένας διανυσματικός χώρος με βάση $\{b_1, \cdots, b_n\}$ και $f \in \mathscr{A}^m(V)$. Έχουμε ήδη δει ότι:*

$$f = \sum_{I \in \{1, \cdots, n\}^m \text{ αύξ.}} c_I \psi_I$$

και τώρα, από το Θεώρημα 3.1, έχουμε επίσης:

...

$$f = \sum_{i_1 < \cdots < i_m} c_{(i_1, \cdots, i_m)} \varphi_{i_1} \wedge \cdots \wedge \varphi_{i_m}, \text{ όπου } i_k \in \{1, \cdots, n\}$$

3.4 Συνεφαπτόμενες δέσμες και εξωτερικές άλγεβρες

Κατ' αναλογία με τα διανυσματικά πεδία, θέλουμε να ορίσουμε ως διαφορική μορφή μία συνάρτηση ω που σε κάθε σημείο x δέχεται διανύσματα του εφαπτόμενου χώρου και δίνει αριθμό (με «σωστό τρόπο»). Δηλαδή $\omega(x) \in \mathscr{A}^m(T_x\mathscr{M})$, με μία έννοια ομαλότητας. Η ομαλότητα δεν είναι άμεση υπόθεση, και χρειάζεται προσοχή, καθώς (όπως και στα διανυσματικά πεδία) οι $\omega(x)$ δεν ανήκουν καν στον ίδιο χώρο.

Αποσκοπούμε να δείξουμε ότι το σύνολο των διαφόρων $\omega(x) \in \mathscr{A}^m(T_x\mathscr{M})$, όπου $x \in \mathscr{M}$ εφοδιάζεται με δομή $C^\infty-$πολλαπλότητας, κι άρα έχει νόημα να μελετηθούν έννοιες διαφορισιμότητας.

Ως προκαταρκτική έννοια, ορίζουμε τη συνεφαπτόμενη δέσμη.

Ορισμός 3.8 (Συνεφαπτόμενη δέσμη)**.** *Έστω $(\mathscr{M}, \mathfrak{T}, \mathscr{A})$ μία $C^\infty-$ πολλαπλότητα. Ορίζουμε τη συνεφαπτόμενη δέσμη:*

$$T^*\mathscr{M} = \coprod_{p \in \mathscr{M}} T_p^*\mathscr{M} = \bigcup_{p \in \mathscr{M}} \{p\} \times T_p^*\mathscr{M}$$

όπου $T_p^*\mathscr{M}$ είναι ο δυϊκός του $T_p\mathscr{M}$.

Εν τω μεταξύ, ακόμη κι ως ενδιάμεση έννοια, η συνεφαπτόμενη δέσμη είναι απολύτως σημαντική για την κατασκευή των διαφόρων διαφορικών μορφών. Στην απλούστερη περίπτωση μίας $1-$μορφής (όπως θα δούμε παρακάτω), η ω έχει τιμή $\omega(x) \in \mathscr{A}^1(T_x\mathscr{M}) = T_x^*\mathscr{M}$. Δηλαδή, εάν καταχρώντας τον συμβολισμό γράφουμε f αντί (x, f), έχουμε $\omega(x) \in T^*\mathscr{M}$. Αυτής της φύσης η κατάχρηση του συμβολισμού στην ξένη ένωση είναι ιδιαίτερα συνήθης στη γεωμετρία και την τοπολογία, και την έχουμε κάνει και στα διανυσματικά πεδία.

Για το παρακάτω θεώρημα, καθιερώνουμε τον συμβολισμό $\{(dx_i)_x\}_{i \leqslant n}$ της δυϊκής βάσης της $\{\partial/\partial x_i|_p\}_{i \leqslant n}$.

Θεώρημα 3.2 (Η $C^\infty-$δομή της συνεφαπτόμενης δέσμης)**.** *Έστω $(\mathscr{M}, \mathfrak{T}, \mathscr{A})$ μία $C^\infty-$ πολλαπλότητα διάστασης n και $T^*\mathscr{M}$ η συνεφαπτόμενη δέσμη της. Υπάρχει $C^\infty-$δομή στην $T^*\mathscr{M}$ που την καθιστά $C^\infty-$πολλαπλότητα διάστασης $2n$, και τον περιορισμό $\pi : T^*\mathscr{M} \to \mathscr{M}$, $C^\infty-$ συνάρτηση.*

Απόδειξη: Η απόδειξη, όπως και στην περίπτωση των εφαπτόμενων δεσμών, θα στηριχθεί στο Λήμμα 2.2. Δεν θα προβούμε σε λεπτομέρειες, γιατί η απόδειξη παρουσιάζει σημαντικές ομοιότητες με την απόδειξη του Θεωρήματος 2.1. Σημειώνουμε μόνο τη μορφή των χαρτών: Εάν $f_q \in T_q^*\mathscr{M}$, τότε:

$$f_q = \sum_{i=1}^{n} f_i^q (dx_i)_q, \text{ όπου } f_i^q \in \mathbb{R}$$

και ορίζουμε:

$$\Phi_p(f_q) = \big((\varphi_p)_1(q), \cdots, (\varphi_p)_n(q), f_1^q, \cdots, f_n^q\big)$$

όπου φ_p είναι χάρτης στο p.

$\square$

Στην ουσία, εάν κανείς διαθέτει την συνεφαπτόμενη δέσμη, μπορεί τουλάχιστον να ορίσει $1-$μορφές (μιας και ήδη έχουμε παρατηρήσει ότι $\omega(x) \in A^1(T_x\mathscr{M}) = T_x^*\mathscr{M}$).

$$\begin{tikzcd} \mathscr{M} \arrow[r, "\omega"] \arrow[dr, "\mathrm{id}"'] & T^*\mathscr{M} \arrow[d, "\pi"] \\ & \mathscr{M} \end{tikzcd}$$

Ορμώμενοι από τον ορισμό των διανυσματικών πεδίων, θα λέγαμε (σωστά) ότι μία $1-$διαφορική μορφή είναι μία $C^\infty-$τομή της συνεφαπτόμενης δέσμης, δηλαδή μία συνάρτηση $\omega : \mathscr{M} \to T^*\mathscr{M}$ ώστε $\omega \in C^\infty(\mathscr{M}; T\mathscr{M})$ και $\pi \circ \omega = \mathrm{id}$.

Για τον γενικό όμως ορισμό, χρειάζεται να κάνουμε λίγη ακόμη προετοιμασία. Δίνουμε λοιπόν τον ορισμό της εξωτερικής άλγεβρας.

Ορισμός 3.9 (Εξωτερική άλγεβρα)**.** *Έστω $(\mathscr{M}, \mathfrak{T}, \mathscr{A})$ μία $C^\infty-$ πολλαπλότητα. Ορίζουμε την $m-$εξωτερική άλγεβρα ως εξής:*

$$\bigwedge\nolimits^m \mathscr{M} = \coprod_{p\in\mathscr{M}} \mathscr{A}^m(T_p\mathscr{M}) = \bigcup_{p\in\mathscr{M}} \{p\} \times \mathscr{A}^m(T_p\mathscr{M})$$

Παρατηρήστε επίσης ότι $\bigwedge^1 \mathscr{M} = T^*\mathscr{M}$.

Η εξωτερική άλγεβρα $\bigwedge^m \mathscr{M}$ αποτελεί γενίκευση της συνεφαπτόμενης δέσμης. Και πάλι, όπως και στην περίπτωση της συνεφαπτόμενης δέσμης, θα χρειαστεί να εφοδιάσουμε την εξωτερική άλγεβρα με κατάλληλη διαφορική δομή.

Θεώρημα 3.3 (Η $C^\infty-$δομή της εξωτερικής άλγεβρας)**.** *Έστω $(\mathscr{M}, \mathfrak{T}, \mathscr{A})$ μία $C^\infty-$ πολλαπλότητα διάστασης n και $\bigwedge^m \mathscr{M}$ η $m-$εξωτερική άλγεβρά της. Υπάρχει $C^\infty-$δομή στην $\bigwedge^m \mathscr{M}$ που την καθιστά $C^\infty-$πολλαπλότητα διάστασης $n + \binom{n}{m}$, και τον περιορισμό $\pi : \bigwedge^m \mathscr{M} \to \mathscr{M}$, $C^\infty-$ συνάρτηση.*

Απόδειξη: Η απόδειξη θα γίνει σε βήματα.

Βήμα I: Δεδομένης της Πρότασης 3.8, το σύνολο:

$$\big\{(dx_{i_1})_p \wedge \cdots \wedge (dx_{i_m})_p\big\}_{1\leqslant i_1<\cdots<i_m\leqslant n}$$

αποτελεί βάση του $\mathscr{A}^m(T_p\mathscr{M})$ και μπορούμε να γράψουμε μοναδικά κάθε $f \in \mathscr{A}^m(T_q\mathscr{M})$ στη μορφή:

$$f_q = \sum_{i_1<\cdots<i_m} f^q_{i_1,\cdots,i_m} \cdot (dx_{i_1})_q \wedge \cdots \wedge (dx_{i_m})_q$$

(Μπορείτε να ελέγξετε ότι τα $(dx_i)_p$ έχουν τον ρόλο των $(\varphi_i)_p$, όπου $(\varphi_i)_p$ είναι ο βασικός $1-$ τανυστής στο $\mathscr{T}^1(T_p\mathscr{M})$).

Για κάθε $p \in \mathscr{M}$ θεωρούμε τοπικό χάρτη (U_p, φ_{U_p}) και ορίζουμε $V_p = \pi^{-1}(U_p)$, καθώς επίσης και τη συνάρτηση:

$$\Phi_{V_p} : V_p \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{\binom{n}{m}} \text{ με } \Phi_{V_p}(f_q) = \big((\varphi_{U_p})_1(q), \cdots, (\varphi_{U_p})_n(q), (f^q_{i_1,\cdots,i_m})_{1\leqslant i_1<\cdots<i_m\leqslant n}\big)$$

Η Φ_{V_p}, από τον ορισμό της, είναι αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση.

Βήμα ΙΙ: Όσον αφορά τις μεταβάσεις των χαρτών, θεωρούμε Φ_V, $\Phi_{\widetilde{V}}$ δύο χάρτες. Παρατηρούμε ότι τα σύνολα:

$$\Phi_V\big(\pi^{-1}(U) \cap \pi^{-1}(\widetilde{U})\big) = \varphi_U(U \cap \widetilde{U}) \times \mathbb{R}^{\binom{n}{m}}$$

και:

$$\Phi_{\widetilde{V}}\big(\pi^{-1}(U) \cap \pi^{-1}(\widetilde{U})\big) = \varphi_{\widetilde{U}}(U \cap \widetilde{U}) \times \mathbb{R}^{\binom{n}{m}}$$

είναι ανοικτά στον $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{\binom{n}{m}}$.

Οπότε:

$$\begin{aligned}
&\Phi_{\widetilde{V}} \circ \Phi_V^{-1}\big((\varphi_U)_1(q), \cdots, (\varphi_U)_n(q), (f^q_{i_1,\cdots,i_m})_{1\leqslant i_1<\cdots<i_m\leqslant n}\big) \\
&= \Phi_{\widetilde{V}}\left(\sum_{i_1<\cdots<i_m} f^q_{i_1,\cdots,i_m} \cdot (dx_{i_1})_q \wedge \cdots \wedge (dx_{i_m})_q\right)
\end{aligned}$$

Επειδή, από τον κανόνα της αλυσίδας:

$$\frac{\partial\big((\cdot)\circ\varphi_U^{-1}\big)}{\partial x_{i_k}}\Big|_{\varphi_U(q)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial\big((\cdot)\circ\varphi_{\widetilde{U}}^{-1}\big)}{\partial y_j}\Big|_{\varphi_{\widetilde{U}}(q)} \cdot \frac{\partial(\varphi_{\widetilde{U}}\circ\varphi_U^{-1})_j}{\partial x_{i_k}}\Big|_{\varphi_U(q)}$$

έχουμε:

$$(dx_{i_k})_q = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial(\varphi_{\widetilde{U}}\circ\varphi_U^{-1})_j}{\partial x_{i_k}}\Big|_{\varphi_U(q)} \cdot (dy_j)_q$$

και κατά συνέπεια, κάνοντας τις πράξεις με το εξωτερικό γινόμενο, βρίσκουμε ότι η $\Phi_{\widetilde{V}} \circ \Phi_V^{-1}$ είναι C^∞, αφού εξαρτάται από τη C^∞ μετάβαση $\varphi_{\widetilde{U}} \circ \varphi_U^{-1}$.

Βήμα ΙΙΙ: Αν διαλέξουμε μία αριθμήσιμη βάση $\{U_i\}_{i\in I}$ της τοπολογίας του $\mathscr{M}$, η $\{V_i = \pi^{-1}(U_i)\}_{i\in I}$ ικανοποιεί τις ιδιότητες του Λήμματος 2.2, μέχρι την iv. Για τον διαχωρισμό των σημείων του χώρου, αρκεί να παρατηρήσουμε ότι αν $(p, f_p), (q, g_q) \in \bigwedge^m \mathscr{M}$, τότε έχουμε τα ακόλουθα: Αν $p = q$, τα στοιχεία $(p, f_p), (q, g_q)$ ανήκουν στο ίδιο V_i, κι αν $p \neq q$, από την ιδιότητα Hausdorff της $\mathscr{M}$ μπορούν να βρεθούν U_i, U_j με:

$$p \in U_i,\ q \in U_j \text{ και } U_i \cap U_j = \emptyset$$

Δηλαδή $(p, f_p) \in \pi^{-1}(U_i) = V_i$, $(q, g_q) \in \pi^{-1}(U_j) = V_j$, $V_i \cap V_j = \emptyset$. Από το Λήμμα 2.2, η οικογένεια $\{(V_i, \Phi_{V_i})\}_{i\in I}$ προσδίδει $C^\infty-$δομή στην εξωτερική άλγεβρα $\bigwedge^m \mathscr{M}$.

Βήμα IV: Τέλος, θα δείξουμε ότι η π είναι C^∞. Χρησιμοποιώντας τους χάρτες $\big(V_i, \Phi_{V_i}\big)$ και (U_i, φ_{U_i}), η τοπική παράσταση της π γίνεται:

$$\varphi_{U_i} \circ \pi \circ \Phi_{V_i}^{-1}\big(x_1, \cdots, x_{n+\binom{n}{m}}\big) = (x_1, \cdots, x_n)$$

οπότε είναι C^∞.

□

3.5 Διαφορικές μορφές

Ορισμός 3.10 (Διαφορικές μορφές). *Έστω $(\mathscr{M}, \mathfrak{T}, \mathscr{A})$ μία $C^\infty-$ πολλαπλότητα. Μία συνάρτηση $\omega : \mathscr{M} \to \bigwedge^m \mathscr{M}$ θα λέγεται $m-$διαφορική μορφή εάν είναι $C^\infty(\mathscr{M}; \bigwedge^m \mathscr{M})$ κι επιπλέον $\pi \circ \omega = \mathrm{id}$.*

$$\begin{tikzcd} \mathscr{M} \arrow[r, "\omega"] \arrow[dr, "\mathrm{id}"'] & \bigwedge^m \mathscr{M} \arrow[d, "\pi"] \\ & \mathscr{M} \end{tikzcd}$$

Συμβολίζουμε το σύνολο των $m-$διαφορικών μορφών στην $\mathscr{M}$ με $\Omega^m(\mathscr{M})$.

Από τον ορισμό των διαφορικών μορφών, το σύνολο $\Omega^m(\mathscr{M})$ καθίσταται διανυσματικός χώρος, αφού για κάθε $\omega, \eta \in \Omega^m(\mathscr{M})$ έχουμε $\lambda\omega(x) + \eta(x) \in \mathscr{A}^m(T_x\mathscr{M})$, και η $\lambda\omega + \eta$ είναι επίσης C^∞.

Όλη η προηγούμενη προετοιμασία έχει δομηθεί για την περιγραφή των διαφορικών μορφών. Κατ' αρχάς, από τον ορισμό των $(dx_i)_p$ και την Πρόταση 3.8, κάθε διαφορική μορφή $\omega \in \Omega^m(\mathscr{M})$ γράφεται:

$$\omega(x) = \sum_{i_1 < \cdots < i_m} \omega_{i_1, \cdots, i_m} \cdot (dx_{i_1})_x \wedge \cdots \wedge (dx_{i_m})_x$$

Αυτή η γραφή δεν υπονοεί με κανέναν τρόπο ότι τα $(dx_i)_x$ μεταβάλλονται ομαλά καθώς $x \in \mathscr{M}$, όμως η απόδειξη του Θεωρήματος 3.3 αλλάζει την κατάσταση αυτή. Τα dx_i γίνονται διαφορικές μορφές και, κατά συνέπεια, τα $(dx_i)_x$ μεταβάλλονται ομαλά καθώς $x \in \mathscr{M}$, σύμφωνα με τη διαφορική δομή της εξωτερικής άλγεβρας. Αυτό δίνει έναυσμα για τον επόμενο ορισμό.

Ορισμός 3.11 (Βασικές $1-$μορφές). *Έστω $(\mathscr{M}, \mathfrak{T}, \mathscr{A})$ μία $C^\infty-$ πολλαπλότητα. Οι διαφορικές μορφές:*

$$dx_i : \mathscr{M} \to \bigwedge^1 \mathscr{M} \text{ με } (dx_i)(x) = (dx_i)_x$$

καλούνται βασικές $1-$μορφές της $\mathscr{M}$.

Φυσικά το ίδιο συμβαίνει και για τις $m-$μορφές. Οι ποσότητες $(dx_{i_1})_x \wedge \cdots \wedge (dx_{i_m})_x$ δίνουν διαφορική μορφή $dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_m}$, κι άρα οι πρώτες μεταβάλλονται ομαλά καθώς $x \in \mathscr{M}$.

Πρόταση 3.9 (Βάση του $\Omega^m(\mathscr{M})$). *Έστω $(\mathscr{M}, \mathfrak{T}, \mathscr{A})$ μία $C^\infty-$ πολλαπλότητα. Κάθε διαφορική μορφή $\omega \in \Omega^m(\mathscr{M})$ γράφεται στη μορφή:*

$$\omega(x) = \sum_{i_1 < \cdots < i_m} \omega_{i_1, \cdots, i_m}(x) \cdot (dx_{i_1})_x \wedge \cdots \wedge (dx_{i_m})_x$$

όπου $\omega_{i_1, \cdots, i_m}$ είναι $C^\infty-$συναρτήσεις. Αντίστροφα, κάθε τέτοια γραφή με $C^\infty-$συντελεστές είναι διαφορική μορφή.

Απόδειξη: ($\Rightarrow$) Προηγουμένως είδαμε τη γραφή:

$$\omega(x) = \sum_{i_1 < \cdots < i_m} \omega_{i_1, \cdots, i_m}(x) \cdot (dx_{i_1})_x \wedge \cdots \wedge (dx_{i_m})_x$$

οπότε χρειάζεται να δείξουμε ότι οι $\omega_{i_1,\cdots,i_m}(x)$ είναι $C^\infty-$συναρτήσεις.

Εάν (U,φ), $\big(V = \pi^{-1}(U), \Phi\big)$ είναι τοπικοί χάρτες, από το γεγονός ότι $\omega \in C^\infty\big(\mathcal{M}; \bigwedge^m \mathcal{M}\big)$, έπεται ότι η τοπική παράσταση:

$$\Phi \circ \omega \circ \varphi^{-1}\big(\varphi_1(x), \cdots, \varphi_n(x), \big(\omega_{i_1,\cdots,i_n}(x)\big)_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_m \leqslant n}\big)$$

είναι C^∞. Δηλαδή οι $\omega_{i_1,\cdots,i_m}$ είναι C^∞.

($\Leftarrow$) Από την άλλη, εάν οι $\omega_{i_1,\cdots,i_m}$ είναι $C^\infty-$συναρτήσεις, επειδή οι $dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_m}$ είναι C^∞, η:

$$\omega(x) = \sum_{i_1 < \cdots < i_m} \omega_{i_1, \cdots, i_m}(x) \cdot (dx_{i_1})_x \wedge \cdots \wedge (dx_{i_m})_x$$

είναι C^∞.

□

Η προηγούμενη ανάλυση και οι ορισμοί δόθηκαν για διαφορικές μορφές τάξεως τουλάχιστον 1. Για να είμαστε βέβαια αντικειμενικοί, έτσι όπως παρουσιάσαμε τις διαφορικές μορφές, αυτό ήταν και το λογικό. Παρόλα αυτά, έχει νόημα να ορίσουμε και μορφές μηδενικής τάξεως. Θα δούμε αργότερα ότι με τις $0-$μορφές μπορούμε να έχουμε μία διαίσθηση για το πώς γενικεύονται κάποιες γνωστές έννοιες στις διαφορικές μορφές, όπως είναι για παράδειγμα ο διαφορικός τελεστής.

Ορισμός 3.12 ($0-$μορφές)**.** *Έστω $(\mathcal{M}, \mathfrak{T}, \mathcal{A})$ μία $C^\infty-$ πολλαπλότητα. Ορίζουμε ως $0-$μορφή κάθε $C^\infty(\mathcal{M};\mathbb{R})-$συνάρτηση, και συμβολίζουμε $\Omega^0(\mathcal{M}) = C^\infty(\mathcal{M};\mathbb{R})$. Οι $0-$μορφές καλούνται και βαθμωτά πεδία.*

Με αυτόν τον ορισμό μπορούμε να επεκτείνουμε την έννοια των μορφών. Βέβαια ειδικές συναρτήσεις σε μορφές μεγαλύτερης τάξης, όπως το σφηνοειδές γινόμενο, δεν έχουν μεταφερθεί στην ειδική περίπτωση των $0-$μορφών. Γι' αυτό ορίζουμε μεταξύ της μηδενικής μορφής f και της $m-$μορφής ω:

$$f \wedge \omega = f \cdot \omega$$

Αυτός ο ορισμός είναι λογικός, εάν κανείς σκεφτεί πώς δρουν τα βαθμωτά πεδία στα διανυσματικά, στη φυσική.

Ορισμός 3.13 (Ανάσυρση στις διαφορικές μορφές)**.** *Έστω $(\mathcal{M}, \mathfrak{T}_{\mathcal{M}}, \mathcal{A})$, $(\mathcal{N}, \mathfrak{T}_{\mathcal{N}}, \mathcal{B})$ δύο $C^\infty-$ πολλαπλότητες, και $F : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ μία $C^\infty-$συνάρτηση. Ορίζουμε την ανάσυρση (pullback) F^* μίας $\omega \in \Omega^m(\mathcal{N})$ με τον εξής τρόπο:*

$$F^*(\omega)(p)(\Diamond^1, \cdots, \Diamond^m) = \omega\big(F(p)\big)\big(F_*(\Diamond^1), \cdots, F_*(\Diamond^m)\big)$$

Δηλαδή, $F^* : \Omega^m(\mathcal{N}) \to \Omega^m(\mathcal{M})$. Για να γίνουμε περισσότερο ακριβείς, εάν $u_p^1, \cdots, u_p^m \in T_p\mathcal{M}$:

$$F^*(\omega)(p)(u_p^1, \cdots, u_p^m) = \omega\big(F(p)\big)\big(F_*(u_p^1), \cdots, F_*(u_p^m)\big)$$

κι αν αντικαταστήσουμε από τον ορισμό τους τις προωθήσεις F_*:

$$F^*(\omega)(p)(u_p^1(\blacklozenge_1), \cdots, u_p^m(\blacklozenge_m)) = \omega\big(F(p)\big)\big(u_p^1(\blacklozenge_1 \circ F), \cdots, u_p^m(\blacklozenge_m \circ F)\big)$$

Και πάλι σημειώνουμε ότι η ορολογία «ανάσυρση» είναι λογική, αφού αντιστρέφει τα βέλη (από το $\mathscr{M} \to \mathscr{N}$ στο $\Omega^m(\mathscr{N}) \to \Omega^m(\mathscr{M})$).

Πρόταση 3.10 (Ιδιότητες της ανάσυρσης στις διαφορικές μορφές). *Έστω $(\mathscr{M}, \mathfrak{T}_{\mathscr{M}}, \mathscr{A})$, $(\mathscr{N}, \mathfrak{T}_{\mathscr{N}}, \mathscr{B})$, $(\mathscr{K}, \mathfrak{T}_{\mathscr{K}}, \mathscr{C})$ τρεις $C^\infty-$ πολλαπλότητες, και $F : \mathscr{M} \to \mathscr{N}$, $G : \mathscr{N} \to \mathscr{K}$ δύο $C^\infty-$συναρτήσεις.*

i. Η F^* είναι γραμμική απεικόνιση.

ii. $F^*(\omega \wedge \eta) = F^*(\omega) \wedge F^*(\eta)$

iii. $(G \circ F)^* = F^* \circ G^*$

Απόδειξη: Για το i. έχουμε:

$$F^*(\lambda\omega + \eta)(p)(\lozenge^1, \cdots, \lozenge^m) = (\lambda\omega + \eta)\big(F(p)\big)\big(F_*(\lozenge^1), \cdots, F_*(\lozenge^m)\big)$$

το οποίο αποδεικνύει τη γραμμικότητα.

Για το ii.: Γράφοντας αναλυτικά την $\omega \wedge \eta$, έπεται:

$$\begin{aligned} F^*(\omega \wedge \eta)(p)(\lozenge^i)_{i \leqslant m+\ell} &= (\omega \wedge \eta)\big(F(p)\big)\big(F_*(\lozenge^i)\big)_{i \leqslant m+\ell} \\ &= \frac{1}{m!\ell!} A\big(\omega\big(F(p)\big) \otimes \eta\big(F(p)\big)\big)\big(F^*(\lozenge^i)\big)_{i \leqslant m+\ell} \end{aligned}$$

Όμως για την τελευταία ποσότητα παρατηρούμε ότι:

$$\big(\omega\big(F(p)\big) \wedge \eta\big(F(p)\big)\big)\big(F_*(\lozenge^i)\big)_{i \leqslant m+\ell} = \frac{1}{m!\ell!} A\big(\omega\big(F(p)\big) \otimes \eta\big(F(p)\big)\big)\big(F_*(\lozenge^i)\big)_{i \leqslant m+\ell}$$

κι άρα έχουμε λάβει τον τύπο $F^*(\omega \wedge \eta) = F^*(\omega) \wedge F^*(\eta)$.

Για το iii.: Γράφουμε:

$$\begin{aligned} (G \circ F)^*(p)(\lozenge^i)_{i \leqslant m} &= \omega\big(G \circ F(p)\big)\big((G \circ F)_*(\lozenge^i)\big)_{i \leqslant m} \\ &\overset{\star}{=} \omega\big(G \circ F(p)\big)\big(G_* \circ F_*(\lozenge^i)\big)_{i \leqslant m} \\ &= G^*(\omega)\big(F(p)\big)\big(F_*(\lozenge^i)\big)_{i \leqslant m} \\ &= (F^* \circ G^*)(\omega)\big(p\big)(\lozenge^i)_{i \leqslant m} \end{aligned}$$

όπου η ισότητα άστρο ($\star$) δικαιολογείται από την Πρόταση 2.2.

□

3.6 Το διαφορικό στις μορφές

Η κατασκευή του διαφορικού στις διαφορικές μορφές είναι αρκετά ενδιαφέρουσα, και στηρίζεται ουσιωδώς στις ιδιότητες του διαφορικού των συναρτήσεων. Με την παρουσίαση που θα διαλέξουμε θα αποδείξουμε ότι το διαφορικό χαρακτηρίζεται μέσω κάποιων ιδιοτήτων και είναι μοναδικό.

Ορισμός 3.14 (Διαφορικό στις $0-$μορφές). *Έστω $(\mathscr{M}, \mathfrak{T}, \mathscr{A})$ μία $C^\infty-$ πολλαπλότητα και $f \in \Omega^0(\mathscr{M})$. Ορίζουμε το διαφορικό df της f μέσω του τύπου:*

$$(df)_x(u_x) = u_x(f)$$

δηλαδή το διαφορικό παραγωγίζει κάθε φορά τη συνάρτηση στο x, από την κατεύθυνση που θα ορίσουμε.

Παρατήρηση 3.5 (Το διαφορικό στις $0-$μορφές σε τοπικές συντεταγμένες). *Έστω $(\mathcal{M}, \mathfrak{T}, \mathcal{A})$ μία $C^{\infty}-$ πολλαπλότητα και $f \in \Omega^0(\mathcal{M})$. Το διαφορικό df παίρνει τη μορφή:*

$$(df)_x(u_x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\Big|_x \cdot (dx_i)(u_x)$$

ή απλούστερα:

$$(df)_x = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\Big|_x \cdot dx_i$$

Απόδειξη: Εάν γράψουμε:

$$u_x = \sum_{i=1}^{n} u_i^x \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_x$$

θα έχουμε:

$$(df)_x(u_x) = (df)_x\left(\sum_{i=1}^{n} u_i^x \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_x\right) = \sum_{i=1}^{n} u_i^x (df)_x\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_x\right)$$

Επειδή τώρα $(df)_x(\partial/\partial x_i|_x) = \partial f/\partial x_i|_x$ και $u_i^x = (dx_i)_x(u_x)$ (αυτά ισχύουν εξ ορισμού), έπεται:

$$(df)_x(u_x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\Big|_x \cdot (dx_i)_x(u_x)$$

□

Παρατήρηση 3.6. *Εάν $(\mathcal{M}, \mathfrak{T}, \mathcal{A})$ είναι μία συνεκτική, $C^{\infty}-$ πολλαπλότητα και $f \in \Omega^0(\mathcal{M})$ με $df = 0$, τότε η f είναι σταθερή.*

Απόδειξη: Ας υποθέσουμε ότι $df = 0$. Τότε:

$$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot dx_i = 0$$

δηλαδή $\partial f/\partial x_i|_x = 0$. Τοπικά λοιπόν η f είναι σταθερή και ίση με c, το οποίο σημαίνει ότι το σύνολο:

$$\{x \in \mathcal{M} \mid f(x) = c\}$$

είναι ανοικτό. Επειδή η f είναι συνεχής, είναι και κλειστό, κι επειδή η $\mathcal{M}$ είναι συνεκτική, $\{x \in \mathcal{M} \mid f(x) = c\} = \mathcal{M}$.

□

Όσον αφορά το διαφορικό στις $m-$μορφές, εδώ θα σημειώσουμε μερικές ιδιότητες που αναμένουμε να έχει το διαφορικό μίας $m-$μορφής.

Κατ' αρχάς, εάν $m = 0$, θέλουμε $(df)_x(u_x) = u_x(f)$, ώστε να αποτελεί πράγματι επέκταση του διαφορικού.

Επίσης, δεδομένου ότι το σφηνοειδές γινόμενο έχει μορφή γινομένου μεταξύ των διαφορικών μορφών, θέλουμε να ισχύει ενός είδους κανόνας του Leibnitz:

$$\text{Εάν } \omega \in \Omega^m(\mathcal{M}), \eta \in \Omega^{\ell}(\mathcal{M}), \text{ τότε } d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^m \omega \wedge d\eta$$

Το μείον εμφανίζεται στον τύπο λόγω του $\omega \wedge \eta = (-1)^{m\ell}(\eta \wedge \omega)$. Εάν έχουμε:

$$d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^m \omega \wedge d\eta$$

τότε θα θέλαμε να ισχύει και ο τύπος:

$$d(\eta \wedge \omega) = d\eta \wedge \omega + (-1)^{\ell} \eta \wedge d\omega$$

δηλαδή θα θέλαμε:

$$(-1)^{m\ell}d(\omega\wedge\eta)=d(\eta\wedge\omega)=d\eta\wedge\omega+(-1)^{\ell}\eta\wedge d\omega$$

Τον ελέγχουμε γράφοντας:

$$\begin{aligned}(-1)^{m\ell}d(\omega\wedge\eta)&=(-1)^{m\ell}d\omega\wedge\eta+(-1)^{m}(-1)^{m\ell}\omega\wedge d\eta\\&=(-1)^{m\ell+(m+1)\ell}\eta\wedge d\omega+(-1)^{m+m\ell+m(\ell+1)}d\eta\wedge\omega\\&=(-1)^{\ell}\eta\wedge d\omega+d\eta\wedge\omega\\&=d(\eta\wedge\omega)\end{aligned}$$

Ίσως λιγότερο φανερή αλλά εξίσου σημαντική είναι η ιδιότητα $d(d\omega)=d^2\omega=0$. Αν περιοριστούμε στις $0-$μορφές $f\in\Omega^0(\mathscr{M})$, η μορφή df είναι γραμμική, και κατά συνέπεια αναμένουμε το διαφορικό της να είναι μηδέν, δηλαδή $d(df)=d^2f=0$.

Με το παρακάτω θεώρημα θα δείξουμε ότι οι τρεις προηγούμενες ιδιότητες χαρακτηρίζουν τον τελεστή του διαφορικού. Αυτό, κατά μία έννοια, περιορίζει πολύ την «επιλογή» μίας συνάρτησης διαφορικού. Μάλιστα θα δούμε ότι υπάρχει μονάχα μία συνάρτηση διαφορικού, πράγμα αρκετά ενδιαφέρον.

Θεώρημα 3.4 (Ύπαρξη και μοναδικότητα του διαφορικού)**.** *Έστω $(\mathscr{M},\mathfrak{T},\mathscr{A})$ μία $C^\infty-$ πολλαπλότητα. Υπάρχει μοναδικός γραμμικός τελεστής $d:\Omega^m(\mathscr{M})\to\Omega^{m+1}(\mathscr{M})$, για κάθε $m\in\{0,1,2,3,\cdots\}$, που ικανοποιεί τα ακόλουθα:*

i. Εάν $f\in\Omega^0(\mathscr{M})$, τότε:

$$(df)_x(u_x)=u_x(f)$$

ii. Εάν $\omega\in\Omega^m(\mathscr{M})$ και $\eta\in\Omega^\ell(\mathscr{M})$:

$$d(\omega\wedge\eta)=d\omega\wedge\eta+(-1)^m\omega\wedge d\eta$$

iii. Για κάθε διαφορική μορφή ω έχουμε $d(d\omega)=d^2\omega=0$.

Απόδειξη: Η απόδειξη θα γίνει σε βήματα. Για ευκολία στους συμβολισμούς -όπως και στους βασικούς εναλλάσσοντες $m-$τανυστές- θα συμβολίζουμε:

$$dx_I=dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_m},\ \text{όπου } I\in\{1,\cdots,n\}^m \text{ και } i_1<\cdots<i_m$$

Βήμα I: Πρώτα θα δείξουμε τη μοναδικότητα. Εάν έχουμε $\{\omega^i\}_{i\leqslant k}\subseteq\Omega^m(\mathscr{M})$, τότε θα δείξουμε επαγωγικά ότι:

$$d(d\omega^1\wedge\cdots\wedge d\omega^k)=0$$

Για $k=1$ αυτό είναι συνέπεια του iii. Για $k>1$, θα υποθέσουμε ότι η σχέση ισχύει και θα δείξουμε ανάλογη σχέση για $k+1$. Ορίζουμε λοιπόν $\eta=d\omega^1\wedge\cdots\wedge d\omega^k$ και γράφουμε από το ii.:

$$d(\eta\wedge d\omega^{k+1})=d\eta\wedge\omega^{k+1}\pm\eta\wedge d^2\omega^{k+1}$$

Από το iii. έχουμε $\eta\wedge d^2\omega^{k+1}=0$, κι από την επαγωγική υπόθεση $d\eta\wedge\omega^{k+1}=0$.

Το παραπάνω το χρειαζόμαστε για να δείξουμε ότι για κάθε μορφή $\omega\in\Omega^m(\mathscr{M})$ το $d\omega$ εξαρτάται από το διαφορικό στις $0-$μορφές. Γράφουμε λοιπόν:

$$\omega=\sum_{I\in\{1,\cdots,n\}^m\text{ αύξ.}}\omega_I dx_I$$

και με το διαφορικό παίρνουμε, χρησιμοποιώντας το ii.:

$$d\omega=d\left(\sum_{I\in\{1,\cdots,n\}^m\text{ αύξ.}}\omega_I dx_I\right)\overset{\star}{=}\sum_{I\in\{1,\cdots,n\}^m\text{ αύξ.}}d\omega_I\wedge dx_I\pm\sum_{I\in\{1,\cdots,n\}^m\text{ αύξ.}}\omega_I d^2x_I$$

όπου στη σχέση άστρο ($\star$) χρησιμοποιούμε τον ορισμό $f \wedge \omega = f \cdot \omega$, όταν η f είναι $0-$μορφή και ω μία άλλη μορφή.

Έχουμε δηλαδή, από το **i.** και την Παρατήρηση 3.5, ότι:

$$\begin{aligned} d\omega &= \sum_{I\in\{1,\cdots,n\}^m \text{ αύξ.}} d\omega_I \wedge dx_I \\ &= \sum_{I\in\{1,\cdots,n\}^m \text{ αύξ.}} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \omega_I}{\partial x_i} \cdot dx_i\right) \wedge dx_I \end{aligned}$$

πράγμα που αποδεικνύει την εξάρτηση μόνο από τις βασικές διαφορικές μορφές.

Βήμα II: Τώρα χρειάζεται να ορίσουμε τον τελεστή d. Βάσει των υπολογισμών στο Βήμα I, εάν:

$$\omega = \sum_{I\in\{1,\cdots,n\}^m \text{ αύξ.}} \omega_I dx_I$$

θα ορίσουμε:

$$d\omega = \sum_{I\in\{1,\cdots,n\}^m \text{ αύξ.}} d\omega_I \wedge dx_I$$

και θα δείξουμε ότι η $d\omega$ είναι C^∞. Γράφοντας:

$$d\omega = \sum_{I\in\{1,\cdots,n\}^m \text{ αύξ.}} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \omega_I}{\partial x_i} \cdot dx_i\right) \wedge dx_I$$

και κάνοντας πράξεις, κανείς καταλήγει στο C^∞.

Όσον αφορά τη γραμμικότητα, θεωρούμε $\omega, \eta \in \Omega^m(\mathscr{M})$:

$$\omega = \sum_{I\in\{1,\cdots,n\}^m \text{ αύξ.}} \omega_I dx_I \text{ και } \eta = \sum_{I\in\{1,\cdots,n\}^m \text{ αύξ.}} \eta_I dx_I$$

και υπολογίζουμε:

$$\begin{aligned} d(\lambda\omega + \eta) &= d\left(\sum_{I\in\{1,\cdots,n\}^m \text{ αύξ.}} (\lambda\omega_I + \eta_I) dx_I\right) \\ &\overset{\star}{=} \sum_{I\in\{1,\cdots,n\}^m \text{ αύξ.}} d(\lambda\omega_I + \eta_I) \wedge dx_I \\ &\overset{\star\star}{=} \sum_{I\in\{1,\cdots,n\}^m \text{ αύξ.}} (\lambda d\omega_I + d\eta_I) \wedge dx_I \\ &= \lambda d\omega + d\eta \end{aligned}$$

όπου η ισότητα άστρο ($\star$) δικαιολογείται από τον ορισμό και η διπλό άστρο ($\star\star$) από την **i.** (συγκεκριμένα από τη γραμμικότητα του d στις 0-μορφές).

Βήμα III: Έχοντας υπόψη το **ii.**, θα δείξουμε τον βοηθητικό τύπο:

$$d(f \wedge dx_J) = df \wedge dx_J, \text{ όπου } f \in \Omega^0(\mathscr{M}) \text{ και } J \in \{1, \cdots, n\}^m \text{ αυθαίρετο}$$

Θέτουμε τους όρους του J σε άυξουσα σειρά, και θεωρούμε τ την αντίστοιχη μετάθεση και I το προκύπτον διάνυσμα. Από τις ιδιότητες του σφηνοειδούς γινομένου έχουμε $dx_I = \operatorname{sgn}(\tau) dx_J$, κι άρα:

$$d(f \wedge dx_J) = d(f \wedge \operatorname{sgn}(\tau) \cdot dx_I) \overset{\star}{=} \operatorname{sgn}(\tau) \cdot df \wedge dx_I = df \wedge dx_J$$

Η ισότητα άστρο ($\star$) αληθεύει λόγω της γραμμικότητας του d καθώς επίσης και του ορισμού του, σε συνδυασμό με τον ορισμό της σφήνας στις $0-$μορφές. Αποδεικνύεται λοπόν η ζητούμενη σχέση $d(f \wedge dx_J) = df \wedge dx_J$.

Βήμα IV: Τώρα θα δείξουμε την ιδιότητα **ii.** Έστω λοιπόν $\omega \in \Omega^m(\mathscr{M})$ και $\eta \in \Omega^\ell(\mathscr{M})$.

Εάν $m = \ell = 0$, τότε η σχέση είναι συνέπεια του κανόνα της αλυσίδας. Πράγματι:

$$\begin{aligned} d(\omega \wedge \eta) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial(\omega \circ \eta)}{\partial x_i} \cdot dx_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \omega}{\partial x_i} \eta \cdot dx_i + \sum_{i=1}^{n} \omega \frac{\partial \eta}{\partial x_i} \cdot dx_i \\ &= d\omega \wedge \eta + \omega \wedge d\eta \end{aligned}$$

Σημειώνουμε εδώ ότι χρησιμοποιείται και πάλι ο ορισμός της σφήνας στις $0-$μορφές.

Όσον αφορά τη γενική περίπτωση, θεωρούμε $m, \ell > 0$ (η περίπτωση που κάποιο από αυτά είναι μηδέν, αλλά όχι και τα δύο, είναι απλούστερη). Γράφουμε:

$$\omega = \sum_I \omega_I dx_I \text{ και } \eta = \sum_J \eta_J dx_J$$

κι έχουμε:

$$d(\omega \wedge \eta) = d\left(\left(\sum_I \omega_I dx_I\right) \wedge \left(\sum_J \eta_J dx_J\right)\right) = d\left(\sum_I \sum_J \omega_I \eta_J dx_I \wedge dx_J\right)$$

Από τη γραμμικότητα του d κι από το Βήμα III έπεται:

$$\begin{aligned} d\left(\sum_{I,J} \omega_I \eta_J dx_I \wedge dx_J\right) &= \sum_{I,J} d(\omega_I \eta_J) \wedge dx_I \wedge dx_J \\ &= \sum_{I,J} (d\omega_I \wedge \eta_J + \omega_I \wedge d\eta_J) \wedge dx_I \wedge dx_J \\ &= \sum_{I,J} (d\omega_I \wedge dx_I) \wedge (\eta_J \wedge dx_J) + (-1)^m (\omega_I \wedge dx_I) \wedge (d\eta_J \wedge dx_J) \\ &= d\omega \wedge \eta + (-1)^m \omega \wedge d\eta \end{aligned}$$

Ο συντελεστής $(-1)^m$ εμφανίζεται με εναλλαγές στα σφηνοειδή γινόμενα. Συγκεκριμένα, με την εναλλαγή της $1-$μορφής $d\eta_J$ και της $m-$μορφής dx_I. Με ανάλογο σκεπτικό κανείς συνάγει ότι εμπορός του πρώτου όρου υπάρχει μονάχα $(-1)^0 = 1$.

Βήμα V: Τέλος θα δείξουμε την ιδιότητα iii. Έστω λοιπόν $\omega \in \Omega^m(\mathscr{M})$.

Εάν $m = 0$, τότε:

$$\begin{aligned} d(d\omega) &= d\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \cdot dx_J\right) \\ &\stackrel{\star}{=} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} d\left(\frac{\partial \omega}{\partial x_j}\right) \wedge dx_j \\ &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_i x_j} \cdot dx_i \wedge dx_j \\ &= \sum_{i<j} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_j \partial x_i}\right) \cdot dx_i \wedge dx_j \\ &= 0 \end{aligned}$$

(Η ισότητα άστρο ($\star$) ισχύει εξ ορισμού).

Εάν $m > 0$, γράφουμε:

$$\omega = \sum_I \omega_I dx_I$$

κι έχουμε:

$$d(d\omega) = d\left(\sum_I d\omega_I \wedge dx_I\right) = \sum_I d(d\omega_I) \wedge dx_I - d\omega_I \wedge d(dx_I)$$

Επειδή $d(d\omega_I) = 0$ και $d(dx_I) = d(1) \wedge dx_i = 0$, έχουμε $d(d\omega) = 0$.

□

Έχοντας το διαφορικό στις $m-$διαφορικές μορφές, είναι αρκετά εδιαφέρον κανείς να παρατηρήσει ότι η Παρατήρηση 3.6 δεν γενικεύεται σε μεγαλύτερες διαστάσεις. Αυτό που ουσιωδώς αλλάζει στις περισσότερες διαστάσεις είναι η γεωμετρία των συνόλων στα οποία μελετούνται οι διαφορικές μορφές.

Παρατήρηση 3.7 (Ο δείκτης στροφής). *Στην πολλαπλότητα $(\mathbb{R}^2)^* = \mathbb{R}\backslash\{(0,0)\}$ (με η σχετική τοπολογία και τον ταυτοτικό χάρτη), θεωρούμε τη μορφή:*

$$\omega = \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy$$

Για την ω έχουμε $d\omega = 0$ (με πράξεις), όμως $\omega \neq 0$.

3.7 Ο τελεστής διαφόρισης με όρους διανυσματικού λογισμού

Ως εφαρμογή στον διανυσματικό λογισμό (στους Ευκλειδίους χώρους), θα αναφέρουμε ένα ενδιαφέρον αποτέλεσμα που σχετίζει τους τελεστές κλίσης ($\nabla\lozenge$), απόκλισης ($\nabla\cdot\lozenge$) και στροβιλισμού ($\nabla\times\lozenge$) με το διαφορικό των μορφών. Σημειώνουμε επίσης ότι κανείς μπορεί -με τον γεωμετρικό ορισμό του εφαπτόμενου χώρου- να φαντάζεται τις $F \in C^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$ ως διανυσματικά πεδία.

Ξεκινάμε με μερικές υπενθυμίσεις. Κατ' αρχάς, εάν $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$, ορίζουμε την κλίση:

$$\nabla f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} e_i$$

όπου $\{e_i\}_{i\leqslant n}$ είναι η συνήθης βάση του $\mathbb{R}^n$. Ο τελεστής της κλίσης εκφράζει την κλίση του εφαπτόμενου υπερεπιπέδου στο γράφημα της f. Επίσης, εάν $F \in C^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$, ορίζουμε την απόκλιση:

$$\nabla\cdot F = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial x_i}$$

που εκφράζει την πυκνότητα της ≪ροής≫ διαμέσου του συνόρου ενός συνόλου κοντά στο x. Αυτό το βλέπουμε στον απειροστικό λογισμό, μέσω του τύπου:

$$(\nabla\cdot F)_x = \lim_{A\downarrow\{x\}} \frac{1}{\mathrm{vol}(A)} \int_{\mathrm{bd}A} F\cdot\widehat{n}\, dS$$

όπου $\widehat{n}$ είναι το εξωτερικό κάθετο διάνυσμα στο $\mathrm{bd}A$. Το $\int_{\mathrm{bd}A} F\cdot\widehat{n}\, dS$ εκφράζει την ποσότητα του υλικού που φεύγει/εισέρχεται μέσω του συνόρου $\mathrm{bd}A$. Τέλος έχουμε και τον στροβιλισμό. Εάν $F \in C^\infty(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^3)$, ορίζουμε:

$$\nabla\times F = \det\begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \partial/\partial x_1 & \partial/\partial x_2 & \partial/\partial x_3 \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{pmatrix}$$

Ο στροβιλισμός είναι ένα μέτρο του πώς στρέφεται τοπικά, γύρω από ένα x, ένα διανυσματικό πεδίο. Στον απειροστικό λογισμό αυτό το βλέπουμε μέσω του τύπου:

$$(\nabla\times F)_x\cdot\widehat{u} = \lim_{D\downarrow\{x\}} \frac{1}{\mathrm{vol}(D)} \int_{\partial D} F\cdot z\, dS$$

Εδώ θεωρούμε ότι το $\widehat{u}$ είναι μοναδιαίο διάνυσμα και τα σύνολα D δίσκοι (διδιάστατοι) κάθετοι στο $\widehat{u}$, με κέντρο το x. Το D παραμετροποιείται έτσι ώστε ο προσανατολισμός του με το $\widehat{u}$ να συμφωνούν με τον κανόνα του δεξιού χεριού. Επίσης, το $\mathrm{vol}(D)$ έχει την έννοια του εμβαδού.

Θεώρημα 3.5. *Υπάρχουν γραμμικοί ισομορφισμοί α_i, β_j που κάνουν μεταθετικά τα ακόλουθα διαγράμματα:*

$$\begin{tikzcd} C^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}) \arrow[r, "\alpha_0"] \arrow[d, "\nabla\Diamond"'] & \Omega^0(\mathbb{R}^n) \arrow[d, "d"] \\ \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n) \arrow[r, "\alpha_1"] & \Omega^1(\mathbb{R}^n) \end{tikzcd}$$

και:

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n) \arrow[r, "\beta_{n-1}"] \arrow[d, "\nabla\cdot\Diamond"'] & \Omega^{n-1}(\mathbb{R}^n) \arrow[d, "d"] \\ C^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}) \arrow[r, "\beta_n"] & \Omega^n(\mathbb{R}^n) \end{tikzcd}$$

Δηλαδή $d\circ\alpha_0(\Diamond) = \alpha_1\circ\nabla\Diamond$ και $d\circ\beta_{n-1}(\Diamond) = \beta_n\circ(\nabla\cdot\Diamond)$. Ιδίως στην περίπτωση του $n=3$, τα διαγράμματα ≪κλείνουν≫ με το μεταθετικό διάγραμμα που εμπλέκει τον στροβιλισμό.

$$\begin{tikzcd} C^\infty(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}) \arrow[r, "\alpha_0"] \arrow[d, "\nabla\Diamond"'] & \Omega^0(\mathbb{R}^3) \arrow[d, "d"] \\ \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3) \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "\nabla\times\Diamond"'] & \Omega^1(\mathbb{R}^3) \arrow[d, "d"] \\ \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3) \arrow[r, "\beta_2"] \arrow[d, "\nabla\cdot\Diamond"'] & \Omega^2(\mathbb{R}^3) \arrow[d, "d"] \\ C^\infty(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}) \arrow[r, "\beta_3"] & \Omega^3(\mathbb{R}^3) \end{tikzcd}$$

Δηλαδή έχουμε την επιπλέον σχέση $d\circ\beta_2(\Diamond) = \beta_3\circ(\nabla\times\Diamond)$.

Απόδειξη: Θεωρούμε $f,g\in C^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$ και $F,G\in C^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$ με:

$$F=\sum_{i=1}^n F_ie_i \text{ και } G=\sum_{i=1}^n G_ie_i$$

Θα ορίσουμε τις απεικονίσεις:

i. $\alpha_0(f)=f$

ii. $\alpha_1(F)=\sum_{i=1}^n F_idx_i$

iii. $\beta_{n-1}(G)=\sum_{i=1}^n(-1)^{i+1}G_i\cdot dx_1\wedge\cdots\wedge\widehat{dx_i}\wedge\cdots\wedge dx_n$

iv. $\beta_n(g) = g \cdot dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$

και είναι υπόθεση υπολογισμών κανείς να ελέγξει ότι αυτές είναι γραμμικοί ισομορφισμοί και καθιστούν τα διαγράμματα μεταθετικά. Με $\widehat{(\cdot)}$ σημειώνουμε την παράλειψη ενός όρου.

□

Παρατήρηση 3.8. *Εφόσον $d^2 \equiv 0$, από το Θεώρημα 3.5 μπορούμε να συνάγουμε τους γνωστούς τύπους:*

$$\nabla \times (\nabla \Diamond) \equiv 0 \text{ και } \nabla \cdot (\nabla \times \Diamond) \equiv 0$$

3.8 Το θεώρημα του Frobenius με διαφορικές μορφές

dddd

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Προσανατολίσιμες πολλαπλότητες και το θεώρημα του Stokes

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Πολλαπλότητες Riemann

5.1 Προοίμιο: Ο όγκος στους ευκλειδίους χώρους

5.2 Πολλαπλότητες και μετρικές Riemann

5.3 Συνοχές Riemann

5.4 Τανυστές καμπυλότητας

Βιβλιογραφία

Αγγλική βιβλιογραφία

[Ba] Bachman D.: ***A Geometric Approach to Differential Forms*** (California Polytechnic State University, 2003)

[Bo] Boothby W. M.: ***An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry*** (Academic Press, 1986)

[GH] Guillemin V., Haine P. J.: ***Differential Forms*** (MIT, 2018)

[Kü] Kühnel W.: ***Differential Geometry, Curves - Surfaces - Manifolds*** (AMS, 2015)

[Le] Lee J. M.: ***Smooth Manifolds*** (Springer, 2013)

[Mu] Munkres J. R.: ***Analysis on Manifolds*** (Addison-Welsey Publishing Company, 1991)

[Αθ] Αθανασόπουλος Κ.: ***An Introduction to Smooth Manifolds*** (Παν. Κρήτης, 2020)

Ελληνική βιβλιογραφία

[Ba] O' Neil B.: ***Στοιχειώδης Διαφορική Γεωμετρία*** (ΠΕΚ, 2005)

[Ca] do Carmo M. P.: ***Διαφορικές Μορφές*** (Leader Books, 2010)

[Sp] Spivak M.: ***Λογισμός σε Πολλαπλότητες*** (ΠΕΚ, 1994)

[ΒΠ] Βασιλείου Ε., Παπαντριανταφύλλου Μ.: ***Σημειώσεις Διαφορικής Γεωμετρίας Ι*** (Σημειώσεις ΕΚΠΑ, 1990)

[ΓΜ] Γιαλελής Ν., Μπιτσούνη Β.: ***Γεωμετρική Ανάλυση*** (Σημειώσεις ΕΚΠΑ, 2021)

[Γι] Γιαννιώτης Π.: ***Διαφορική Γεωμετρία 1*** (Σημειώσεις ΕΚΠΑ, 2023)

[ΝΖΚΦ] Νεγρεπόντης Σ., Ζαχαριάδης Θ., Καλαμίδας Ν., Φαρμάκη Β.: ***Γενική Τοπολογία και Συναρτησιακή Ανάλυση*** (Συμμετρία, 1997)

[ΦρΙ] Φράγκος Α.: ***Τοπολογία - Σημειώσεις Παραδόσεων*** (Σημειώσεις ΕΚΠΑ, 2023)

[ΦρΙΙ] Φραγκουλοπούλου Μ.: ***Εισαγωγή στη Διαφορική Γεωμετρία των Πολλαπλοτήτων*** (Σημειώσεις ΕΚΠΑ, 2013)

Λεξικά μαθηματικών όρων

[ΚΓΚΛ] Καλογεροπούλου Α., Γκίκας Μ., Καραγιαννάκης Δ., Λάμπρου Μ.: ***Αγγλο-ελληνικό Λεξικό Μαθηματικών Όρων*** (Τροχαλία, 1992)