Αναπαραστάσεις στη φυσική των σωματιδίων

Λέσχη Μαθηματικών ΕΚΠΑ

´ΑΦραγκος

Πέμπτη 29 Μαΐου 2025

Προαπαιτούμενα

Οι σημειώσεις είναι πρόχειρες. Περισσότερες λεπτομέρειες στην παρουσίαση. Μερικά χρήσιμα βιβλία ακολουθούν:

- Βασική διαφορική γεωμετρία πολλαπλοτήτων.
  - Βιβλιογραφία: J. M. Lee, *Smooth Manifolds* (Springer).
- Ομάδες Lie G κι άλγεβρες Lie $\mathfrak{g} = T_e G$, και συγκεκριμένα ομάδες κι άλγεβρες πινάκων.
  - Βιβλιογραφία: D. H. Sattinger, O. L. Weaver, *Lie groups and algebras with applications to physics, geometry and mechanics* (Springer).
  - Y. Kosmann-Schwarzbach, *Groups and Symmetries* (Springer).
- Βασική κβαντομηχανική.
  - Βιβλιογραφία: B. C. Hall, *Quantum theory for mathematicians* (Springer).

Λίγες ιστορίες και η πρώτη προσέγγιση του Heisenberg

- Υπήρχε το πρόβλημα των απωθητικών δυνάμεων στα πρωτόνια των πυρήνων, το οποίο για να λυθεί χρειάστηκε μία νέα έννοια, αυτή των *νουκλεονίων*.
- Ο Heisenberg, το 1932, θεώρησε ότι υπάρχουν νουκλεόνια, μεταξύ των οποίων αναπτύσσονται ισχυρές πυρηνικές δυνάμεις, κι από τα οποία τα πρωτόνια και νετρόνια προκύπτουν ως διαφορετικές καταστάσεις μίας ποσότητας που ονομάστηκε *ισοσπίν*.

Ένα σύνηθες ερώτημα στη φυσική είναι το εξής: Ποια είναι η ομάδα συμμετρίας της δύναμης, εν προκειμένω της ισχυρής πυρηνικής;

Γιατί μας απασχολεί αυτό το ερώτημα; Είναι ένα σχήμα από το οποίο προκύπτουν μοτίβα στη φυσική και μας βοηθούν να κάνουμε προβλέψεις. Η συγκεκριμένη ομάδα που θεώρησε ο Heisenberg είναι η $SU(2)$.

Εάν $p = (1, 0)^\top$, $n = (0, 1)^\top$, πρέπει να υπάρχει μία συμμετρία μεταξύ των p και n. Η απλούστερη συνεχής από αυτές είναι οι στροφές, αλλά έχει διάφορα προβλήματα που είναι κυρίως μαθηματικής φύσεως. Για παράδειγμα, δεν είναι απλά συνεκτική. Αυτά θα τα δούμε αργότερα, στο νεότερο μοντέλο.

Σαν υποκατάστατο θεωρούμε την $SU(2)$.

Προοίμιο: Υπενθυμίζουμε ότι:

$$\mathrm{SU}(2) = \{A \in \mathbb{C}^{2,2} \mid \det A = 1,\ \bar{A}^{\top} = A^{-1}\}$$

Η αντίστοιχη άλγεβρα είναι η:

$$\mathfrak{su}(2) = \{A \in \mathbb{C}^{2,2} \mid \mathrm{Tr}\ A = 0,\ \bar{A}^{\top} = -A\}$$

Μία παρεμφερής ομάδα είναι η γνωστή ειδική γραμμική ομάδα:

$$\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) = \{A \in \mathbb{C}^{2,2} \mid \det A = 1\} \supseteq \mathrm{SU}(2)$$

με άλγεβρα:

$$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) = \{A \in \mathbb{C}^{2,2} \mid \mathrm{Tr}\ A = 0\} \supseteq \mathfrak{su}(2)$$

Μία πρώτη εκτίμηση είναι ότι είναι ευκολότερο να μελετάμε την άλγεβρα αντί της ομάδας, όπως κάνουμε στη γενική θεωρία των πολλαπλοτήτων (με τη μελέτη των εφαπτόμενων χώρων). Συγκεκριμένα, μελετάμε την $\mathfrak{su}(2)$ αντί της $\mathrm{SU}(2)$. Έπειτα, φαίνεται ότι είναι προτιμότερο να μελετηθεί η $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ αντί της $\mathfrak{su}(2)$.

Αυτοί οι ισχυρισμοί είναι όλοι λίγο στον "αέρα", καθώς δεν τους έχουμε δικαιολογήσει αυστηρά. Ιδίως δεν έχουμε δικαιολογήσει πώς γίνεται η μετάβαση από την ομάδα στην άλγεβρα (και αντιστρόφως) και δεν έχουμε διερευνήσει τη στενότερη σύνδεση των $\mathfrak{su}(2)$, $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$. Αυτό θα το κάνουμε με τη μελέτη του νεότερου μοντέλου, που βασίζεται στην $SU(3)$ και όχι στην $SU(2)$.

Μας ενδιαφέρει να καταλάβουμε ποια είναι η ανάγκη που οδηγεί στην επέκταση της ομάδας, από $SU(2)$ σε $SU(3)$.

Έχουμε ήδη ορίσει τις δύο καταστάσεις ισοσπίν, που αντιστοιχούν στο πρωτόνιο και το νετρόνιο.

$$\mathtt{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathtt{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Το ισοσπίν σαν ποσότητα ορίζεται (σε πρώτο στάδιο) ως οι ιδιοτιμές του τελεστή:

$$I_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ενώ το φορτίο ως οι ιδιοτιμές του:

$$Q = I_3 + \frac{1}{2} \mathrm{Id}$$

(ώστε οι ιδιοτιμές για τα p, n να είναι $\lambda_{p}(Q) = 1$, $\lambda_{n}(Q) = 0$).

Λόγω της ύπαρξης ενός ολόκληρου "ζωολογικού κήπου" από σωματίδια, υπάρχει η ανάγκη να τροποποιήσουμε τον τελεστή του φορτίου, ώστε να λαμβάνει υπόψη κι αυτά. Ένας λόγος είναι η ύπαρξη των αντισωματιδίων, οπότε αν $B = \mathrm{Id}$ για τα σωματίδια και $B = -\mathrm{Id}$ για τα αντισωματίδια:

$$Q = I_3 + \frac{1}{2}B$$

Ο B ονομάζεται πίνακας του βαρυωνικού αριθμού (οι ιδιοτιμές είναι ο βαρυωνικός αριθμός).

Οι τελεστές Q και I_3 μετατίθενται με τις συνήθεις Hamilton-ιανές H (των ισχυρών αλληλεπιδράσεων) $[H, I_3] = [H, Q] = 0$. Τι σημαίνει αυτό;

Ένα γενικό σχήμα στη φυσική, βασισμένο στην εξίσωση κίνησης του Heisenberg, μας δείχνει ότι όλες αυτές είναι διατηρούμενες ποσότητες.

Δικαιολογία για να δούμε την εξίσωση κίνησης του Heisenberg.[1]
Υπάρχουν δύο οπτικές στη κβαντομηχανική, του Schödinger και του Heisenberg. Σύμφωνα με την πρώτη, οι μετρήσεις είναι σταθερές κι αλλάζουν οι κυματοσυναρτήσεις. Η δεύτερη προκύπτει από μία παρατήρηση σχετικά με τη μορφή των κυματοσυναρτήσεων:

$$\Psi(x;t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} A(p)e^{i(px-Et)/\hbar} + B(p)e^{-i(px+Et)/\hbar}\, dp$$

από την οποία $\Psi(x;t) = e^{-itE/\hbar}\Psi(x;0)$. Φαίνεται ότι η αρχική συνθήκη είναι η ουσιαστική πληροφορία. Εάν ο όρος της ενέργειας ενσωματωθεί στις μετρήσεις, μπορούμε να έχουμε σταθερές κυματοσυναρτήσεις και να μεταβάλλονται μόνο οι μετρήσεις.

[1] Δες κι εδώ, §1.1.2

Ορισμός: (Οπτικές).

Με A_S και A_H συμβολίζουμε τις μετρήσεις με την οπτική των Schrödinger και Heisenberg αντίστοιχα. Έχουμε:

$$A_H = U(t)^* A_S U(t), \text{ όπου } U(t) = e^{-itH/\hbar}$$

Οι ορισμοί είναι τέτοιοι ώστε να διατηρούνται οι μέσες τιμές και διακυμάνσεις:[2]

$$\mathbb{E}(A_S) = \mathbb{E}(A_H) \text{ και } \mathbb{V}(A_S) = \mathbb{V}(A_H)$$

Θεώρημα: (Εξίσωση κίνησης).

$$\frac{dA_H}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[A_H, H] + \left(\frac{\partial A_S}{\partial t}\right)_H$$

[2] $\mathbb{E}(A) = \langle \Psi, A\Psi \rangle = \int \bar{\Psi} A \Psi \, dx$, $\mathbb{V}(A) = \sqrt{\mathbb{E}(A - \mathbb{E}(A)^2)}$

Δηλαδή καταφέρνουμε να μελετήσουμε πώς αλλάζουν οι μετρήσεις στο σύστημα των σωματιδίων μελετώντας απλώς έναν τελεστή (με την οπτική του Heisenberg) και όχι τον τελεστή (Schrödinger) και τη μεταβολή του συστήματος. Εν προκειμένω, $[H, I_3] = [H, Q] = 0$ και δεν υπάρχει εξάρτηση από το t στους τελεστές, επομένως:

$$\frac{d(I_3)_H}{dt} = \frac{dQ_H}{dt} = 0$$

(Τα μεγέθη διατηρούνται).

Με βάση λοιπόν αυτούς τους νόμους διατήρησης (κι επίσης κάποιους άλλους, όπως ενέργειας, ορμής κτλ.), ο κόσμος κατάφερε να προβλέψει διάφορες αντιδράσεις. Υπήρχαν όμως κάποιες που, παρόλο που ικανοποιούσαν τις αρχές διατήρησης, δεν εμφανίζονταν στη φύση. Αυτό ήταν κάπως παράξενο.

Μέχρι τότε, για παράδειγμα, ήξεραν την ύπαρξη των σωματιδίων που φέρουν τα ονόματα "πιόνια" (π^+, π^-, π^0) και "καόνια" ($K^+, K^-, K^0, \overline{K}^0$). Οι παρακάτω αντιδράσεις, ενώ θα έπρεπε να πραγματοποιούνται, δεν εμφανίζονται στη φύση:

$$K^- + p \to p + \pi^-$$

$$K^- + p \to \Lambda^0 + K^0$$

Αυτή η παράξενη συμπεριφορά εξηγήθηκε από τους Gell-Mann και Nishijima, θεωρώντας ότι εκτός από το ισοσπίν υπάρχει άλλη μία ποσότητα που διατηρείται. Την ονόμασαν παραξενιά.

Με την ύπαρξη της παραξενιάς ο τελεστής του φορτίου τροποποιείται και μας δίνει τη σχέση των Gell-Mann−Nishijima:

$$Q = I_3 + \frac{1}{2}Y$$

όπου $Y = B + S$ (S: η παραξενιά). Το Y Ονομάζεται επίσης υπερφορτίο και θα το ορίσουμε καλύτερα αργότερα.

Εφόσον υπάρχει ακόμα μία ποσότητα πέραν των δύο ισοσπίν, η ομάδα συμμετριών SU(2) πρέπει να επεκταθεί. Η επιλογή για την επέκταση είναι η SU(3).

Υπενθυμίζουμε ότι:

$$\mathrm{SU}(3) = \{A \in \mathbb{C}^{3,3} \mid \det A = 1,\ \overline{A}^{\top} = A^{-1}\}$$

και:

$$\mathfrak{su}(3) = \{A \in \mathbb{C}^{3,3} \mid \mathrm{Tr}\ A = 0,\ \overline{A}^{\top} = -A\}$$

Στη συνέχεια μας ενδιαφέρει να μελετήσουμε τις αναπαραστάσεις της SU(3) και -όπως αναφέραμε στην αρχή- είναι ευκολότερο να μελετήσουμε τις αναπαραστάσεις της $\mathfrak{su}(3)$. Πρέπει όμως να δικαιολογήσουμε γιατί κάτι τέτοιο είναι εφικτό.

Υπάρχει ένα περίφημο θεώρημα, κατά το οποίο υπάρχει μία αντιστοιχία μεταξύ των αναπαραστάσεων ομάδων και αλγεβρών Lie, για ορισμένες ομάδες Lie.[3]

Θεώρημα:

Οι αναπαραστάσεις μίας ομάδας Lie G κωδικοποιούνται από τις αναπαραστάσεις της άλγεβρας Lie $\mathfrak{g}$, στην περίπτωση που η ομάδα είναι συνεκτική και απλά συνεκτική.

$$\mathrm{Hom}(G, GL(n, \mathbb{C})) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{Lie}}(\mathfrak{g}, \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}))$$

Άρα αυτό το θεώρημα είναι ο λόγος που επιλέξαμε την απλά συνεκτική SU(3) κι όχι κάποια άλλη ομάδα.

[3] Hall, Lie groups, Lie algebras and representations §5.7

΄Επειτα, όπως και στη διδιάστατη περίπτωση, είναι ευκολότερο να "πετάξουμε" το λοξά συμμετρικό της $\mathfrak{su}(3)$, μελετώντας την $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$.

Υπενθυμίζουμε ότι:

$$SL(3,\mathbb{C}) = \{A \in \mathbb{C}^{3,3} \mid \det A = 1\}$$

και:

$$\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C}) = \{A \in \mathbb{C}^{3,3} \mid \mathrm{Tr}\ A = 0\}$$

Πρέπει όμως να δικαιολογήσουμε, για ακόμη μια φορά, την αντιστοιχία των αναπαραστάσεων μεταξύ των $\mathfrak{su}(3)$ και $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$.

Αυτό μας ενδιαφέρει είναι ότι η $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$ είναι η μιγαδοποίηση της $\mathfrak{su}(3)$.

Ορισμός: (Μιγαδοποίηση).

΄Εστω $\mathfrak{g}$ ένας πραγματικός διανυσματικός χώρος. Ορίζουμε τη μιγαδοποίησή του:

$$\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{g} \oplus i\mathfrak{g} = \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}$$

Στην περίπτωσή μας, θεωρούμε την $\mathfrak{su}(3)$ ως μία πραγματική άλγεβρα Lie και παίρνουμε ως μιγαδοποίηση την $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$. Παρατηρήστε ότι αν $A \in \mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$:

$$A = \frac{A - A^*}{2} + \frac{A + A^*}{2}$$

κι αν $(A - A^*)/2 = B$, $(A + A^*)/2 = C$, $C = iD$:

$$[...] = B + iD$$

με $B^* = -B$ και $D^* = -D$. Δηλαδή $A \in \mathfrak{su}(3) \oplus i\mathfrak{su}(3)$.

Το βασικό θεώρημα είναι το ακόλουθο:

Θεώρημα:

Έστω $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ η μιγαδοποίηση μίας άλγεβρας Lie $\mathfrak{g}$. Κάθε αναπαράσταση της $\mathfrak{g}$ επεκτείνεται σε αναπαράσταση της $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ και, αντιστρόφως, κάθε αναπαράσταση της $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ περιορίζεται σε αναπαράσταση της $\mathfrak{g}$. Επίσης, υπάρχει $1-1$ αντιστοιχία μεταξύ των ανάγωγων αναπαραστάσεων.

(Ορίστε $\rho(X + iY) = \rho(X) + i\rho(Y)$ και παρατηρήστε ότι $\rho([Z, W]) = \rho(Z)\rho(W) - \rho(W)\rho(Z)$).

Συμπέρασμα:

Αντί της SU(3) μπορούμε να μελετάμε την $\mathfrak{su}(3)$, και αντί της τελευταίας την $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$.

Η $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$ είναι απλή άλγεβρα (η $\mathfrak{su}(3)$ ημιαπλή), επομένως υπάρχει ένα χρήσιμο εργαλείο για τη μελέτη των αναπαραστάσεων, που είναι η υποάλγεβρα Cartan.[4]

Ορισμός: (Υποάλγεβρες Cartan).

Έστω $\mathfrak{g}$ μία ημιαπλή άλγεβρα Lie. Υπάρχουν οι εξής ορισμοί για την άλγεβρα Cartan $\mathfrak{h}$:

- Είναι η μεγιστική αβελιανή υποάλγεβρα της $\mathfrak{g}$ που διαγωνοποιεί την adjoint αναπαράσταση $ad_X : Y \mapsto [X, Y]$ ($X \in \mathfrak{h}$) (δηλαδή υπάρχει διάσπαση του τελεστή σε άθροισμα των προβολικών του τελεστών $[X, \cdot] = \sum \lambda_k P_k$).
- Για την $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$, η υποάλγεβρα Cartan $\mathfrak{h}$ είναι οι διαγώνιοι πίνακες με ίχνος μηδέν.

[4] Περισσότερα στους Sattinger-Weaver, Κεφ. 10

Παρατήρηση:

Επομένως, αφού η ταυτόχρονη διαγωνοποίηση επιτυγχάνεται σε αβελιανές άλγεβρες, η άλγεβρα Cartan είναι η μεγαλύτερη άλγεβρα τελεστών (μετρήσιμων μεγεθών) που μπορούν να διαγωνοποιηθούν (παρατηρηθούν) ταυτοχρόνως.

Στην περίπτωση της $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$, μία βάση είναι η:

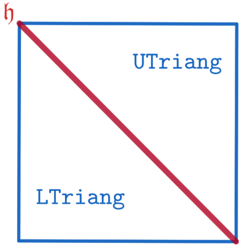
$$I_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

δηλαδή οι δύο τελεστές που θα ονομάζουμε από εδώ και στο εξής τελεστές ισοσπίν και υπερφορτίου. Αυτές είναι οι δύο παρατηρήσιμες ποσότητες. Η φυσική ερμηνεία είναι όπως στην εισαγωγή. Εδώ υπάρχει κι αυτό το $1/3$, που είναι σχήμα πρωθύστερο. Οφείλεται στο γεγονός ότι τα πρωτόνια και νετρόνια αποτελούνται από 3 quarks.

Το SU(3)−μοντέλο

Η $\mathfrak{h}$ διασπά την $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ σε ένα ευθύ άθροισμα:

$$\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C}) = \texttt{LTriang} \oplus \mathfrak{h} \oplus \texttt{UTriang}$$



Οι βάσεις των επιμέρους όρων είναι (για τις LTriang και UTriang) οι:

$$\{\mathtt{I}_+, \mathtt{U}_+, \mathtt{V}_+\} \text{ και } \{\mathtt{I}_-, \mathtt{U}_-, \mathtt{V}_-\}$$

όπου, εάν $\mathtt{E}_{\kappa,\lambda} = (\delta_{\mathtt{i},\kappa}\delta_{\lambda,\mathtt{j}})_{\mathtt{i},\mathtt{j}}$ (στην (κ, λ)−θέση μονάδα, αλλού μηδέν), τότε:

$$\mathtt{I}_+ = \mathtt{E}_{1,2}, \ \mathtt{U}_+ = \mathtt{E}_{2,3}, \ \mathtt{V}_+ = \mathtt{E}_{1,3}, \ \mathtt{I}_- = \mathtt{I}_+^\top, \ \mathtt{U}_- = \mathtt{U}_+^\top, \ \mathtt{V}_- = \mathtt{V}_+^\top$$

Οι τελεστές αυτοί έχουν κάποια φυσική σημασία, αλλά δεν μας ενδιαφέρει ιδιαιτέρως.

Μέσω της άλγεβρας Cartan υπολογίζονται τα λεγόμενα βάρη των αναπαραστάσεων, από τα οποία αυτές καθορίζονται. Επομένως, στην πραγματικότητα μπορεί να γίνει ακόμα μία αναγωγή, από την άλγεβρα Lie στην άλγεβρα Cartan. Σχηματικά, τελικά οι αναγωγές έχουν ως εξής:

$$\mathrm{SU}(3) \to \mathfrak{su}(3) \to \mathfrak{sl}(3, \mathbb{C}) \to \mathfrak{h}$$

Εμάς βέβαια κυρίως μας ενδιαφέρει η adjoint αναπαράσταση, η οποία ούτως ή άλλως μπορεί εύκολα να καθοριστεί από την άλγεβρα Cartan.

Ορισμός: (Βάρη).

Εάν $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ είναι μία αναπαράσταση, τα βάρη της είναι τα συναρτησοειδή $\lambda(H)$ για τα οποία:

$$\rho(H)X = \lambda(H)X$$

όπου τα H ανήκουν στην άλγεβρα Cartan $\mathfrak{h}$. Προφανώς τα $\lambda(H)$ αρκεί να υπολογιστούν ως προς τη βάση της $\mathfrak{h}$.

Τώρα ήρθε η ώρα να ορίσουμε τις αναπαραστάσεις που μας ενδιαφέρουν. Αρχικά, κάθε διάνυσμα $q = (q_1, q_2, q_3)^\top$ θα λέγεται διάνυσμα των quark, ενώ τα στοιχεία της βάσης:

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad s = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

θα λέγονται quarks (u: πάνω, d: κάτω, s: παράξενο). Ο δυϊκός χώρος είναι ο χώρος των antiquarks, και μπορεί να ταυτιστεί με τον χώρο των γραμμών $\overline{q} = (q_1, q_2, q_3)$. Τα antiquarks είναι τα στοιχεία της βάση του δυϊκού:

$$\overline{u} = (1, 0, 0), \;\; \overline{d} = (0, 1, 0), \;\; \overline{s} = (0, 0, 1)$$

Ορίζουμε την αναπαράσταση των quarks, ή αλλιώς 3, ως την κανονική αναπαράσταση:

$$3 : \mathfrak{sl}(3, \mathbb{C}) \to \mathfrak{gl}(3, \mathbb{C})$$

$$\mathtt{A} \mapsto (\mathtt{q} \mapsto \mathtt{Aq})$$

Επίσης, ορίζουμε την αναπαράσταση των antiquarks, ή αλλιώς $\overline{3}$:

$$\overline{3} : \mathfrak{sl}(3, \mathbb{C}) \to \mathfrak{gl}(3, \mathbb{C})$$

$$\mathtt{A} \mapsto (\overline{\mathtt{q}} \mapsto \overline{\mathtt{q}}\mathtt{A}^{\top})$$

Οι ορισμοί είναι έτσι ώστε, κατά μία έννοια, η μία να είναι "δυϊκή" της άλλης, αφού αν γράψουμε $\mathtt{q} = \overline{\mathtt{q}}^{\top}$:

$$-\mathtt{A}^{\top}\mathtt{q} = \overline{\mathtt{q}}[-\mathtt{A}^{\top}]^{\top} = \overline{\mathtt{q}}(-\mathtt{A}) = \overline{\mathtt{q}}\mathtt{A}^{\top}$$

(η δυϊκή αναπαράσταση ορίζεται σε ομάδες μέσω του αντιστροφοανάστροφου πίνακα, $\rho^*(g) = \rho(g^{-1})^{\top}$, ή σε άλγεβρες $\rho^*(g) = \rho(-g)^{\top}$).

Η μελέτη του Gell-Mann το 1961 ήταν πάνω στα μεσόνια (ζεύγη quark-antiquark) και στα βαρυώνια (τριπλέτες quark-quark-quark).

Εμείς θα ασχοληθούμε μονάχα με τα μεσόνια, δηλαδή με ζεύγη quark-antiquark, που οι φυσικοί αναπαριστούν μέσω του τανυστικού γινομένου $q \otimes \overline{q}$.

Η αντίστοιχη αναπαράσταση στο τανυστικό γινόμενο, που προέρχεται από τις φυσιολογικές αναπαραστάσεις quark-antiquark, είναι το τανυστικό γινόμενο:

$$(3 \otimes \overline{3})(q \otimes \overline{q})$$

Υπενθυμίζουμε ότι αν Γ^1, Γ^2 είναι δύο αναπαραστάσεις μίας ομάδας G, τότε ορίζεται το τανυστικό γινόμενο:

$$(\Gamma^1 \otimes \Gamma^2)(q \otimes \bar{q}) = \Gamma^1(q) \otimes \Gamma^2(\bar{q})$$

Σε επίπεδο άλγεβρας $\mathfrak{g}$, ας θεωρήσουμε L_1, L_2 του αντίστοιχους απειροστικούς γεννήτορες ($\Gamma^i = \exp L_i$). Τότε αυτοί δρουν ως παραγωγίσεις, και κατά συνέπεια:

$$(L_1 \otimes L_2)(q \otimes \bar{q}) = L_1(q) \otimes \bar{q} + q \otimes L_2(\bar{q})$$

Εν προκειμένω:

$$(3 \otimes \bar{3})(q \otimes \bar{q}) = 3(q) \otimes \bar{q} + q \otimes \bar{3}(\bar{q})$$

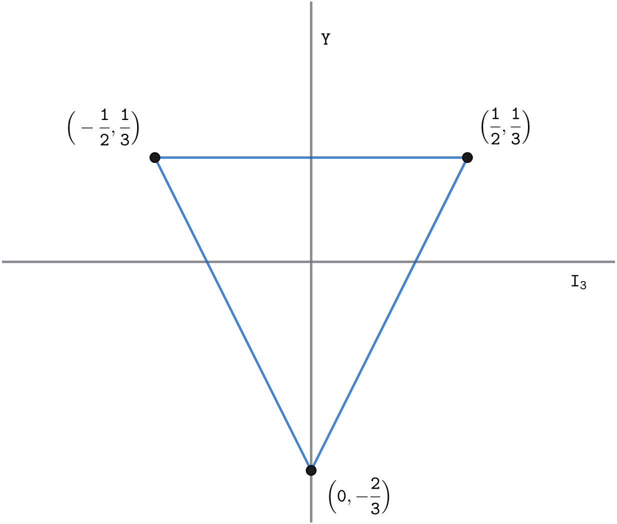
Υπολογίζοντας τα διαγράμματα βαρών των αναπαραστάσεων 3, $\overline{3}$ και $3 \otimes \overline{3}$, θα εντοπίσουμε μία ωραία διάσπαση. Σημειώνουμε ότι τα βάρη μπορούν να υπολογιστούν ως προς τη βάση I_3, Y της άλγεβρας Cartan. Οπότε εδώ θα υπάρχουν δύο ιδιοτιμές λ_1, λ_2, μία για τον I_3 κι άλλη μία για τον Y, και το βάρος μπορεί να αντιστοιχηθεί στο (λ_1, λ_2) "ως προς τη βάση I_3, Y". Το βάρος επίσης αντιστοιχεί σε κοινό ιδιοδιάνυσμα, το οποίο είναι (αναλόγως τα συμφραζόμενα) quark, antiquark ή μεσόνιο.

$$I_3 v = \lambda v, \;\; Y v = \mu v \leftrightarrow (\lambda, \mu) \leftrightarrow v$$

Πρώτα βρίσκουμε:

$I_3 u = \frac{1}{2} u$	$Y u = \frac{1}{3} u$	$\lambda = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$	$\leftrightarrow u$
$I_3 d = -\frac{1}{2} u$	$Y d = \frac{1}{3} u$	$\lambda = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$	$\leftrightarrow d$
$I_3 s = 0 s$	$Y s = -\frac{2}{3} s$	$\lambda = \left(0, -\frac{2}{3}\right)$	$\leftrightarrow s$

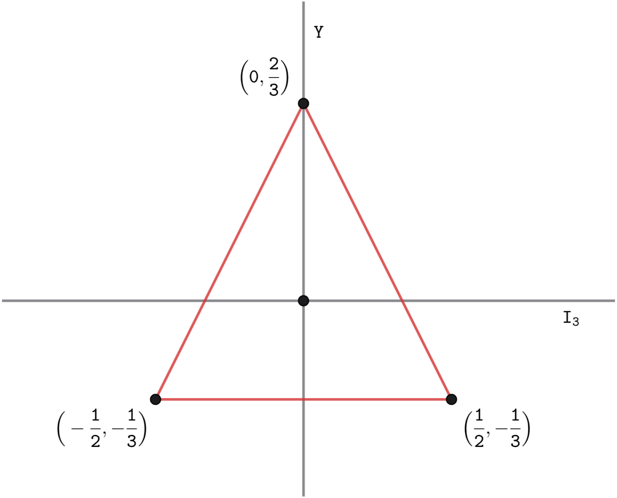
Το SU(3)–μοντέλο



΄Επειτα βρίσκουμε:

$\bar{u}I_3 = -\frac{1}{2}u$	$\bar{u}Y = -\frac{1}{3}u$	$\lambda = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\right)$	$\leftrightarrow \bar{u}$
$\bar{d}I_3 = \frac{1}{2}u$	$\bar{d}Y = -\frac{1}{3}d$	$\lambda = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\right)$	$\leftrightarrow \bar{d}$
$\bar{s}I_3 = 0s$	$\bar{s}Y = \frac{2}{3}s$	$\lambda = \left(0, \frac{2}{3}\right)$	$\leftrightarrow \bar{s}$

Το SU(3)−μοντέλο



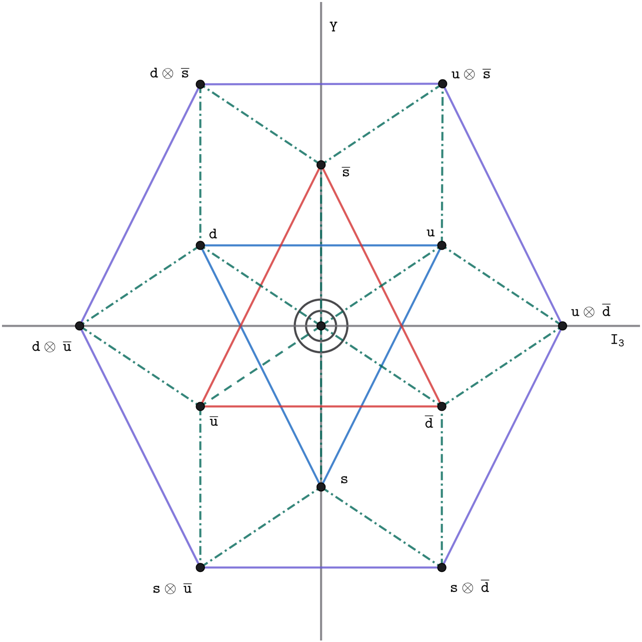
Για το τανυστικό γινόμενο $3 \otimes \overline{3}$, η ακόλουθη παρατήρηση είναι κομβική.

Παρατήρηση:

Έστω ότι έχουμε μία αναπαράσταση-τανυστικό γινόμενο:

$$(L_1 \otimes L_2)(q \otimes \overline{q}) = L_1(q) \otimes \overline{q} + q \otimes L_2(\overline{q})$$

Εάν λ_1, λ_2 είναι ιδιοτιμές των L_1, L_2, τότε για το τανυστικό γινόμενο οι ιδιοτιμή γίνεται $\lambda_1 + \lambda_2$. Αυτό σημαίνει ότι το διάγραμμα βαρών της $L_1 \otimes L_2$ προκύπτει από αυτά των L_1, L_2, προσθέτοντας τα διανύσματα βάρους.


Y
$d \otimes \overline{s}$
$u \otimes \overline{s}$
$\overline{s}$
d
u
$u \otimes \overline{d}$
I_3
$d \otimes \overline{u}$
$\overline{u}$
$\overline{d}$
s
$s \otimes \overline{u}$
$s \otimes \overline{d}$

Προσέξτε ότι στο 0 έχουμε τρία βάρη $\mathtt{u}\otimes\bar{\mathtt{u}}$, $\mathtt{d}\otimes\bar{\mathtt{d}}$, $\mathtt{s}\otimes\bar{\mathtt{s}}$. Στη φυσική αντί των δύο τελευταίων θεωρούν τα:

$$\eta = \frac{\mathtt{u}\otimes\bar{\mathtt{u}}+\mathtt{d}\otimes\bar{\mathtt{d}}+\mathtt{s}\otimes\bar{\mathtt{s}}}{\sqrt{3}}, \quad \eta' = \frac{\mathtt{u}\otimes\bar{\mathtt{u}}+\mathtt{d}\otimes\bar{\mathtt{d}}-2\mathtt{s}\otimes\bar{\mathtt{s}}}{\sqrt{6}}$$

Η οκτάδα που αποτελείται από τα εξωτερικά 6 μεσόνια συν τα 2 (πλην του η') εσωτερικά θυμίζουν ένα άλλο γνώριμο διάγραμμα, αυτό της adjoint αναπαράστασης.

Θεωρώντας τη βάση του $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$ που προκύπτει από τη διάσπαση $\mathtt{LTriang}\otimes\mathfrak{h}\otimes\mathtt{UTriang}$:

$$\mathtt{I}_{\pm}, \mathtt{U}_{\pm}, \mathtt{V}_{\pm}, \mathtt{I}_3, \mathtt{Y}$$

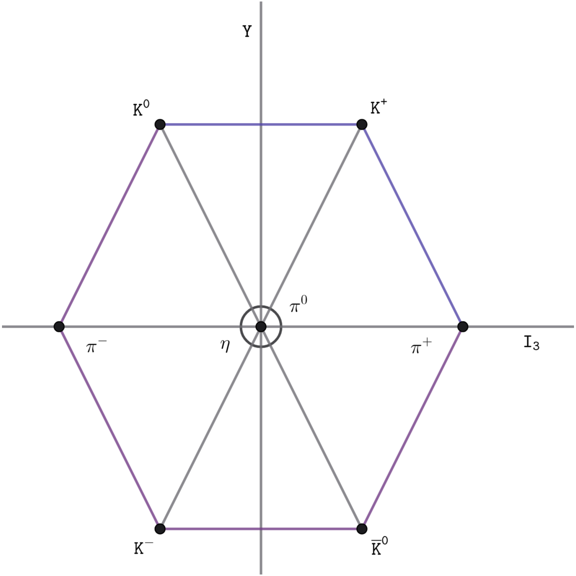
θα βρούμε το διάγραμμα βαρών για την adjoint αναπαράσταση.

῞Εχουμε:

$[I_3, I_+] = I_+$	$[Y, I_+] = 0$	$\lambda = (1, 0)$	$\leftrightarrow \pi^+$
$[I_3, U_+] = -\frac{1}{2}U_+$	$[Y, U_+] = U_+$	$\lambda = \left(-\frac{1}{2}, 1\right)$	$\leftrightarrow K^0$
$[I_3, V_+] = \frac{1}{2}V_+$	$[Y, V_+] = V_+$	$\lambda = \left(\frac{1}{2}, 1\right)$	$\leftrightarrow K^+$
$[I_3, I_-] = -I_-$	$[Y, I_-] = 0$	$\lambda = (-1, 0)$	$\leftrightarrow \pi^-$
$[I_3, U_-] = \frac{1}{2}U_-$	$[Y, U_-] = -U_-$	$\lambda = \left(\frac{1}{2}, -1\right)$	$\leftrightarrow \overline{K}^0$
$[I_3, V_-] = -\frac{1}{2}V_-$	$[Y, V_-] = -V_-$	$\lambda = \left(-\frac{1}{2}, -1\right)$	$\leftrightarrow K^-$

Υπάρχουν επίσης δύο μηδενικά, λόγω της διδιάστατης άλγεβρας Cartan $\mathfrak{h}$.

Το SU(3)−μοντέλο

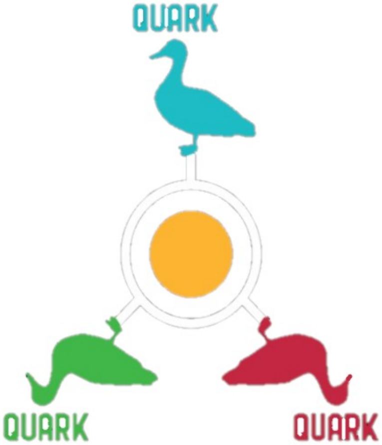


Εάν συμβολίσουμε με 8 την adjoint αναπαράσταση (όπως συνηθίζεται), τότε από τα διαγράμματα βαρών:

$$3 \otimes \overline{3} = 8 \oplus 1$$

Δηλαδή τα εννέα μεσόνια χωρίζονται σε δύο κατηγορίες, σε μία με τα οκτώ πρώτα που μετασχηματίζονται όπως η 8, και σε άλλο ένα που μένει αναλλοίωτο.

Στην οκτάδα του προηγούμενου σχήματος κινούμαστε με τους τελεστές $I_\pm, U_\pm, V_\pm$. Αυτή είναι στην πραγματικότητα η φυσική τους σημασία.


QUARK
QUARK
QUARK