Σύντομες Σημειώσεις και Ασκήσεις

Για την Β' Γυμνασίου.

Φράγκος Αναστάσιος

10/10/2023

Περιεχόμενα

Οδηγίες Χρήσης

Για **αποτελεσματικό** διάβασμα:

- Διαβάζουμε τη **θεωρία**,
- Διαβάζουμε τα **παραδείγματα** και προσπαθούμε να τα **καταλάβουμε**,
- Λύνουμε αρκετές **ασκήσεις**. Αν σε κάποιο σημείο κολλήσουμε, γυρνάμε πίσω στη θεωρία και τα παραδείγματα. Αυτό μπορεί να παίρνει χρόνο, είναι όμως αποδοτικό.

Επίσης:

- Όταν διαβάζουμε, κάνουμε **ερωτήσεις** στο μυαλό μας. Γιατί ισχύει αυτό; Γιατί είναι έτσι κι όχι αλλιώς;
- Βοηθάει να σκέφτεστε, καθώς διαβάζετε, ότι αυτά που διαβάζετε τα **λέτε** ή πρέπει να τα **διδάξετε** σε κάποιον άλλον.
- Όταν διαβάζουμε ή λύνουμε ασκήσεις, είμαστε συγκεντρωμένοι. **Δεν** είμαστε στο κινητό, **ούτε** περιμένουμε την αλληλογραφία από την Αμερική.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Εξισώσεις και Σχέσεις

1.1 Θεωρία

1.1.1 Σχέσεις μέσω μοτίβων

Στις εξισώσεις ως τώρα μας ενδιέφεραν **αλγεβρικές παραστάσεις** με **έναν άγνωστο**, τις οποίες μπορούσαμε να **λύσουμε** και βρίσκαμε **όλες** τις λύσεις.

Δηλαδή, ως τώρα, στις εξισώσεις μας είχαμε:

- Μία αλγεβρική παράσταση (με ισότητα),
- Έναν άγνωστο,
- Και μπορούσαμε να βρούμε όλες τις λύσεις της εξίσωσης.

Υπενθυμίζουμε ότι:

Αλγεβρική παράσταση είναι μία **αλληλουχία πράξεων** με **αγνώστους και αριθμούς**. Για παράδειγμα, η:

$$x^3 + 5x - y - 2$$

είναι μία αλγεβρική παράσταση.

Στις **εξισώσεις**, οι αλγεβρικές παραστάσεις εμφανίζονται με $=$, για παράδειγμα:

$$x^2 + x + 1 = 0$$

Από εδώ και στο εξής, θα προσπαθήσουμε να γενικεύσουμε την έννοια της εξίσωσης μέσω των **σχέσεων**.

Αν προσπαθήσουμε να φτιάξουμε εξισώσεις με δύο αγνώστους, για παράδειγμα:

$$x + y = 0$$

θα παρατηρήσουμε σε αυτές δεν μπορούμε να βρούμε όλες τις λύσεις. Όλα τα παρακάτω (και πολλά ακόμα) είναι λύσεις της εξίσωσης.

$$\begin{array}{ll} x = 0 & y = 0 \\ x = 1 & y = -1 \\ x = 2 & y = -2 \end{array}$$

$$x = 3 \qquad y = -3$$

και ούτω καθεξής. Παρόλο που δεν μπορούμε να βρούμε όμως όλες τις λύσεις, σίγουρα μπορούμε να τις περιγράψουμε. Το y σχετίζεται με το x, και μάλιστα:

$$y = -x$$

Αυτή η σχέση θα προέκυπτε κιόλας αν λύναμε την $x + y = 0$ ως εξίσωση ως προς x (δηλαδή απομονώναμε το x).

> Μερικές φορές, επειδή στις σχέσεις οι άγνωστοι μπορούν να αλλάζουν, να **μεταβάλλονται** (και γενικά να παίρνουν πολλές τιμές), τους ονομάζουμε και **μεταβλητές**.

Φυσικά το ίδιο θα μπορούσαμε να κάνουμε και με εξισώσεις με παραπάνω αγνώστους, μόνο εκεί η κατάσταση θα ήταν περισσότερο περίπλοκη.

$$x + y + z = 0$$

Είναι πολύ ενδιαφέρον ότι οι σχέσεις εμφανίζονται κατά κόρον στη **φυσική**.

Παράδειγμα: Μία μύγα ταξιδεύει με ταχύτητα $10km/h$ (10 χιλιόμετρα την ώρα). Δηλαδή:

Μετά από 1 ώρα, έχει διανύσει $10km$,

Μετά από 2 ώρες, έχει διανύσει $20km$,

Μετά από 3 ώρες, έχει διανύσει $30km$ και ούτω καθεξής.

Αν κάποιος μας ρωτούσε μετά από 4 ώρες πόσα km έχει διανύσει η μύγα, θα μπορούσαμε να απαντήσουμε, γιατί εκεί εντοπίζουμε ένα μοτίβο.

$$\text{Απόσταση} = 10 \cdot \text{Ώρες}$$

Οπότε, σε 4 ώρες θα έχει διανύσει $40km$.

Πάντως, αν συμβολίσουμε $\boldsymbol{A}$ = Απόσταση και $\boldsymbol{\omega}$ = Ώρες, θα μπορούμε να γράψουμε:

$$A = 10 \cdot \omega$$

Αυτή είναι μία **σχέση**, που προέκυψε φυσιολογικά από ένα φυσικό πρόβλημα.

Παράδειγμα: Στην χημεία υπάρχουν αντιδράσεις (φυσικές διαδικασίες που γίνονται μεταξύ ουσιών) που γίνονται αργά. Για να επιταγχυνθούν, συνήθως προστίθεται ακόμη μία ουσία, που λέγεται καταλύτης. Για μία αντίδραση κάποιοι χημικοί παρατήρησαν:

> Με $1gr$ (1 γραμμάριο) καταλύτη, η αντίδραση τελειώνει σε $10sec$ (10 δευτερόλεπτα),
>
> Με $2gr$ καταλύτη, η αντίδραση τελειώνει σε $10/2sec$,
>
> Με $3gr$ καταλύτη, η αντίδραση τελειώνει σε $10/3sec$,
>
> Με $4gr$ καταλύτη, η αντίδραση τελειώνει σε $10/4sec$,
>
> Με $5gr$ καταλύτη, η αντίδραση τελειώνει σε $10/5sec$, και ούτω καθεξής.

Και πάλι, εδώ μπορούμε να εντοπίσουμε το εξής μοτίβο:

$$\text{Χρόνος αντίδρασης} = \frac{10}{\text{Γραμμάρια καταλύτη}}$$

οπότε, αν κανείς ρωτήσει σε πόσο χρόνο ολοκληρώνεται η αντίδραση αν βάλουμε $10gr$ καταλύτη, η απάντηση θα είναι:

$$\frac{10}{10} = 1$$

δευτερόλεπτο. Γενικά πάντως, αν συμβολίσουμε X = Χρόνος αντίδρασης και γ = Γραμμάρια καταλύτη, θα έχουμε:

$$X = \frac{10}{\gamma}$$

το οποίο, και πάλι, είναι μία **σχέση** που προέκυψε από φυσικό πρόβλημα.

◆◆◆

1.1.2 Σχέσεις μέσω εξισώσεων με πολλές μεταβλητές

Πάντως, πολλές φορές οι σχέσεις εμφανίζονται μέσω εξισώσεων και **δεν** προκύπτουν απλώς παρατηρώντας μοτίβα. Εξάλλου, η παρατήρηση ενός μοτίβου **δεν** είναι απόδειξη ότι το μοτίβο πράγματι είναι αυτό. Για να γίνουμε σαφείς, δίνουμε το παράδειγμα:

Παράδειγμα: Υποθέτουμε ότι έχουμε το ακόλουθο μοτίβο (την αρχή του μοτίβου) για τα X και ω:

Όταν το ω γίνεται 1, το X γίνεται 2,

Όταν το ω γίνεται 2, το X γίνεται 3,

Όταν το ω γίνεται 3, το X γίνεται 4.

Φαίνεται ότι το μοτίβο είναι το εξής:

$$X = \omega + 1$$

αφού το X είναι κατά 1 μεγαλύτερο από το ω. Παρόλα αυτά, δεν είμαστε σίγουροι για το μοτίβο, θα μπορούσε να συνέχιζε με τον εξής τρόπο:

Όταν το ω γίνεται 4, το X γίνεται 11.

Το καινούριο μοτίβο, με την επιπλέον πληροφορία που γράψαμε παραπάνω, δεν είναι πλέον τόσο απλό. Μάλιστα, η σχέση του μοτίβου τώρα είναι η:

$$X = (\omega - 1) \cdot (\omega - 2) \cdot (\omega - 3) + \omega + 1$$

Ελέγξτε ότι πράγματι αυτή είναι σχέση για το μοτίβο:

Όταν το ω γίνεται 1, το X γίνεται 2,

Όταν το ω γίνεται 2, το X γίνεται 3,

Όταν το ω γίνεται 3, το X γίνεται 4.

Όταν το ω γίνεται 4, το X γίνεται 11.

Εμείς λοιπόν, πώς είναι δυνατόν να λύνουμε ασκήσεις αφού δεν μπορούμε να είμαστε σίγουροι για το μοτίβο;

Σύμβαση: Όταν (σε μία άσκηση) εμφανίζεται ένα μοτίβο, εμείς θα υποθέτουμε ότι το μοτίβο αυτό συνεχίζεται με τον απλούστερο δυνατό τρόπο.

Ο μόνος τρόπος να ξέρουμε ακριβώς το μοτίβο, είναι να το **αποδείξουμε** με μαθηματικά. Κι όταν το κάνουμε αυτό, θα εμφανιστούν εξισώσεις με πολλούς αγνώστους, τις οποίες εμείς θα θέλουμε να φέρουμε σε **απλή μορφή**.

Γι' αυτό, προς το παρόν, θα αναφερθούμε στην **απλοποίηση αλγεβρικών παραστάσεων**.

Μία παράσταση αποκτά απλούστερη μορφή όταν όλες οι πράξεις που μπορούν να γίνουν, έχουν εκτελεστεί. Για παράδειγμα, η:

$$x + x + 1$$

δεν είναι απλοποιημένη, αφού μπορούμε να μαζέψουμε τα x.

$$2x + 1$$

Μαζεύοντας τα x, προκύπτει μία απλοποιημένη παράσταση, που δεν απλοποιείται άλλο. Η πρόσθεση δεν μπορεί να γίνει, αφού κάτι τέτοιο θα προϋπέθετε να ξέρουμε την τιμή του x.

Θα λέμε ότι μία αλγεβρική παράσταση **απλοποιείται**, εάν είναι δυνατόν να γίνει κάποια πράξη (είτε με μεταβλητές, είτε με αριθμούς) σε αυτήν, ή απαλοιφή κάποιας παρένθεσης.

Η απαλοιφή παρενθέσεων είναι κι αυτός ένας τρόπος να απλοποιηθεί μία παράσταση. Για παράδειγμα, από την **επιμεριστική ιδιότητα**, η αλγεβρική παράσταση:

$$x \cdot (x + 1)$$

μπορεί να γραφεί:

$$x^2 + x$$

Σημειώστε εδώ τις ακόλουθες **ιδιότητες στις πράξεις με μεταβλητές**:

- Εφόσον μπορούμε να σκεφτόμαστε το x ως **ένα αντικείμενο**, η πρόσθεση / αφαίρεση γίνεται **«σαν να μην υπήρχε το x»**:
  $x - 2x + 1$ γίνεται $-x + 1$

- Το ίδιο γίνεται και με τις δυνάμεις του x (δηλαδή τις $x^2, x^3, x^4, x^5 \ldots$). Μπορούμε να κάνουμε πρόσθεση / αφαίρεση **«σαν να μην υπήρχε το x με τη δύναμή του»**.

  $$x^2 - 2x^2 + x + 1 \text{ γίνεται } -x^2 + x + 1$$

  Και πάλι δηλαδή θεωρούμε το x^2 (δηλαδή το x με τη δύναμή του) ως **ένα αντικείμενο** κι **όχι** ως πράξη με το x.

- Στον πολλαπλασιασμό δυνάμεων υπάρχει το εξής ενδιαφέρον: Εάν έχουμε την πράξη

  $$x^2 \cdot x^3$$

  Μπορούμε να «αναπτύξουμε» τις δυνάμεις και να πάρουμε:

  $$x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x$$

  δηλαδή πέντε μεταβλητές στη σειρά, ή αλλιώς x^5. Στον πολλαπλασιασμό λοιπόν **ίδιων** μεταβλητών, οι εκθέτες (οι δυνάμεις δηλαδή) **προστίθενται**.

- Πράξεις με δύο διαφορετικές δυνάμεις **δεν** γίνονται. Για παράδειγμα, **δεν είναι δυνατόν** να απλοποιήσουμε την:

  $$x^2 + x$$

  για δύο λόγους.

  - **Πρώτον**, γιατί το x μπορούμε να σκεφτόμαστε ότι μετράει **μήκος** (μήκος ενός ευθυγράμμου τμήματος), ενώ το x^2 **εμβαδόν** (το εμβαδόν ενός τετραγώνου με πλευρά x). Τι νόημα έχει να προσθέτουμε εμβαδά με μήκη;
  - **Δεύτερον**, ο μόνος (ουσιώδης) τρόπος να αλλάξουμε την αλγεβρική παράσταση αυτή είναι να λειτουργήσουμε με την επιμεριστική ιδιότητα «ανάποδα»:

    $$x^2 + x \text{ γίνεται } x \cdot (x + 1)$$

    Τότε όμως δεν υφίσταται απλοποίηση, αφού εμφανίστηκε μία παρένθεση. Τις παρενθέσεις γενικά θέλουμε να τις απλοποιούμε.

Φυσικά, μία αλγεβρική παράσταση μπορεί να έχει και περισσότερες μεταβλητές:

$$2x - x^2 - 5y + x + y^8 + y$$

Σε αυτήν την περίπτωση, και πάλι για να την απλοποιήσουμε, κάνουμε όσες πράξεις είναι δυνατόν να γίνουν. Στο παραπάνω παράδειγμα, μπορούμε για αρχή να κάνουμε $2x + x = 3x$.

$$3x - x^2 - 5y + y^8 + y$$

Έπειτα, την πράξη $-5y + y = -4y$.

$$3x - x^2 - 4y + y^8$$

Σε αυτό το σημείο σταματάμε. Πράξεις μεταξύ των x και y δεν είναι δυνατόν να γίνουν, αφού αυτό θα προϋπέθετε ότι ξέρουμε τις τιμές τους.

> Αυτό που χρειάζεται να προσέξουμε είναι ότι, όπως και στις πράξεις με αριθμούς, οι μεταβλητές μπορούν να συνοδεύονται με $-$ μπροστά τους. Δεν το ξεχνάμε, όταν κάνουμε πράξεις.

Προσέχουμε λοιπόν και **δεν** γράφουμε $1 - 4x + x = 1 - 5x$. Το **σωστό** είναι $1 - 4x + x = 1 - 3x$, αφού $-4x + x = -3x$.

Επίσης, μερικές φορές είναι δύσκολο να αναφερόμαστε σε μεγάλες αλγεβρικές παραστάσεις. Γι' αυτό, πολλές φορές τους δίνουμε ένα όνομα, για παράδειγμα:

$$P = 3x - x^2 - 5y + y^8 + y$$

Παράδειγμα: Να απλοποιηθεί η αλγεβρική παράσταση:

$$x^2 - 2x^2 + x + x + x - 1$$

Βήμα I: Κάνουμε την πράξη $x^2 - 2x^2$. Εφόσον τα $x^2, -2x^2$ είναι **ομοειδή** (ίδιας μεταβλητής και δύναμης). έχουμε $x^2 - 2x^2 = -x^2$ (αφού $1 - 2 = -1$). Η αλγεβρική παράσταση απλοποιείται και γίνεται:

$$-x^2 + x + x + x - 1$$

Βήμα II: Κάνουμε την πράξη $x + x + x$, δηλαδή την $x + x + x = 3x$. Η αλγεβρική παράσταση απλοποιείται και γίνεται:

$$-x^2 + 3x - 1$$

Βήμα III: Η παραπάνω αλγεβρική παράσταση δεν απλοποιείται άλλο, οπότε σταματάμε.

Παράδειγμα: Να απλοποιηθεί η αλγεβρική παράσταση:

$$x^2 \cdot x^{16} + x^5 \cdot x^{13} - x^3 - 1$$

Βήμα I: Κάνουμε την πράξη $x^2 \cdot x^{16}$, που δίνει x^{18} (αφού $2+16=18$). Η αλγεβρική παράσταση γίνεται:

$$x^{18} + x^5 \cdot x^{13} - x^3 - 1$$

Βήμα II: Κάνουμε την πράξη $x^5 \cdot x^{13}$, που δίνει και πάλι x^{18} (αφού $5+13=18$). Η αλγεβρική παράσταση γίνεται:

$$x^{18} + x^{18} - x^3 - 1$$

Βήμα III: Κάνουμε την πράξη $x^{18} + x^{18} = 2x^{18}$. Η αλγεβρική παράσταση γίνεται:

$$2x^{18} - x^3 - 1$$

Βήμα IV: Εδώ δεν μπορούμε να κάνουμε άλλη απλοποίηση, οπότε σταματάμε.

Παράδειγμα: Να απλοποιηθεί η αλγεβρική παράσταση:

$$y^2 + x^2 \cdot (x+1) - x^3 + y^2$$

Βήμα I: Κάνουμε την πράξη $y^2 + y^2 = 2y^2$.

$$2y^2 + x^2 \cdot (x+1) - x^3$$

Βήμα II: Κάνουμε την επιμεριστική ιδιότητα $x^2 \cdot (x+1) = x^3 + x^2$.

$$2y^2 + x^3 + x^2 - x^3$$

Βήμα III: Κάνουμε την πράξη $x^3 - x^3 = 0$.

$$2y^2 + x^2$$

Βήμα IV: Εδώ σταματάμε, αφού δεν υπάρχει άλλη απλοποίηση. Πράξεις με τα y και x δεν είναι δυνατόν να γίνουν (είναι διαφορετικές μεταβλητές).

Παράδειγμα (προσοχή στα μείον): Να απλοποιήσετε την αλγεβρική παράσταση:

$$-x \cdot (x+1)$$

Μπορούμε να δώσουμε δύο λύσεις.

1) Εάν θεωρήσουμε ότι το − πάει μαζί με το x, τότε μπορούμε να κάνουμε την επιμεριστική ιδιότητα ως εξής:

$$-x \cdot (x+1) = -x^2 - x$$

2) Εάν κάνουμε την επιμεριστική ιδιότητα χωρίς το μείον, θα έχουμε:

$$x \cdot (x+1) = x^2 + x$$

Έπειτα, θυμόμαστε ότι το μείον πολλαπλασίαζε το $x \cdot (x+1)$, οπότε πρέπει ολόκληρη η ποσότητα $x^2 + x$ να πολλαπλασιαστεί με μείον (δηλαδή να πολλαπλασιαστεί με -1).

$$-1 \cdot (x^2 + x)$$

Από την επιμεριστική ιδιότητα, το αποτέλεσμα είναι:

$$-x^2 - x$$

Παράδειγμα ($x \cdot y$): Να απλοποιηθεί η παράσταση:

$$x \cdot (x+y) - x^2 + y$$

Βήμα I: Κάνουμε την επιμεριστική ιδιότητα $x \cdot (x+y)$, που δίνει $x^2 + x \cdot y$. Η αλγεβρική παράσταση γίνεται:

$$x^2 + x \cdot y - x^2 + y$$

Βήμα II: Κάνουμε την πράξη $x^2 - x^2 = 0$.

$$x \cdot y + y$$

Βήμα IV: Είναι άραγε δυνατόν να κάνουμε κι άλλες απλοποιήσεις; Επειδή το y **δεν** βρίσκεται μόνο του ή πολλαπλασιασμένο με σταθερά (αλλά είναι πολλαπλασιασμένο με το x), **δεν** μπορούμε να κάποια πράξη. Το μόνο που μπορεί να γίνει είναι μία επιμεριστική ιδιότητα αντίστροφα, και να πάρουμε:

$$y \cdot (x+1)$$

Αυτό όμως θα δημιουργήσει παρένθεση, πράγμα που δεν θέλουμε στην απλοποίηση.

◆◆◆

1.1.3 Εξισώσεις και επίλυση ως προς μεταβλητή

Όταν έχουμε μία εξίσωση με **πολλές** μεταβλητές (ας πούμε x και y), συχνά θέλουμε να εκφράσουμε τη σχέση αυτή λέγοντας **«το x είναι ίσο με μία ποσότητα που είναι πράξεις του y»**. Για παράδειγμα, αν έχουμε:

$$x + y = 0$$

μπορούμε να εκφράσουμε αυτή τη σχέση λέγοντας ότι $x = -y$. Στην ουσία, απομονώνουμε το x σκεπτόμενοι **«αν ξέραμε το y, με πράξεις θα μπορούσαμε να βρούμε και το x»**.

Εν τω μεταξύ, εάν εδώ δεν είχαμε $x + y = 0$ αλλά $x + 1 = 0$, θα γράφαμε αμέσως (δεδομένου ότι ξέραμε πώς λύνονται εξισώσεις) ότι:

$$x = -1$$

Αντίστοιχα, θα είχαμε ότι η $x + 2 = 0$ δίνει:

$$x = -2$$

κι ακόμη γενικότερα, αν στη θέση των αριθμών υπήρχε y, η $x + y = 0$ θα έδινε:

$$x = -y$$

Στην ουσία, για να απομονώσουμε το x όταν υπάρχουν πολλές μεταβλητές, ακολουθούμε τα ίδια βήματα όπως στις εξισώσεις, υποθέτοντας ότι οι υπόλοιπες μεταβλητές λειτουργούν **ως αριθμοί**. Γι' αυτό το λόγο, είναι σημαντικό να θυμηθούμε πώς λύνονται απλές εξισώσεις.

Εξίσωση είναι στην ουσία δύο **αλγεβρικές παραστάσεις** που μεταξύ τους έχουν **ίσον** (ή μία παράσταση ίσον μία σταθερά). Όταν η μεταβλητή είναι μονάχα **μία**, τότε η εξίσωση πιθανότατα μπορεί να λυθεί (αλλά δεν είναι και σίγουρο). Διαφορετικά, η εξίσωση (όπως εξάλλου είδαμε) αντιμετωπίζεται ως σχέση.

Όταν μία εξίσωση έχει **μόνο έναν** άγνωστο, έχει νόημα να προσπαθήσουμε να τη λύσουμε, αφήνοντας από τη μία μεριά μόνο τον άγνωστο, κι από την άλλη νούμερα. Το νόημα μίας τέτοιας εξίσωσης είναι να βρεθεί ο άγνωστος.

Παράδειγμα: Ένα φορτηγό ζυγίζει μαζί με το εμπόρευμά του 2000kg. Εάν το εμπόρευμα ζυγίζει 1000kg, πόσο ζυγίζει το φορτηγό;

Γενικά παρατηρούμε ότι:

$$\text{Συνολικό βάρος} = \text{Βάρος φορτηγού} + \text{Βάρος εμπορεύματος}$$

Εάν συμβολίσουμε με x το βάρος του φορτηγού, θα έχουμε:

$$2000 = x + 1000$$

Αυτή τώρα είναι μία εξίσωση. Αν λυθεί, θα βρεθεί το x, δηλαδή το βάρος του φορτηγού. Στη συγκεκριμένη περίπτωση δεν είναι δύσκολο να δούμε ότι $x = 1000$, αφού $2000 = 1000 + 1000$.

Στο προηγούμενο παράδειγμα εμφανίζεται μία εξίσωση πρώτου βαθμού, δηλαδή το x δεν έχει δύναμη (δεν είναι για παράδειγμα x^2). Οι εξισώσεις πρώτου βαθμού έχουν πολύ συχνά λύσεις, σχεδόν πάντα μάλιστα.

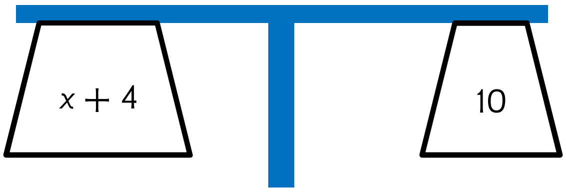
Μία εξίσωση με έναν άγνωστο μοιάζει με μία ζυγαριά. Ένας μανάβης, για να ζυγίσει τα φρούτα, βάζει από τη μία μεριά της ζυγαριάς τα φρούτα (που δεν ξέρει πόσο ζυγίζουν) κι από την άλλη βαρίδια (που ξέρει πόσο ζυγίζουν). Το βάρος των φρούτων, που ο μανάβης προς το παρόν δεν ξέρει, έχει τον ρόλο του x. Το βάρος των βαριδιών, που ο μανάβης ξέρει, έχει τον ρόλο των γνωστών αριθμών. Η ζυγαριά έχει το ρόλο του ίσον.

Η παραπάνω ζυγαριά δείχνει την εξίσωση $x = 6$

Φυσικά ένας μανάβης θα ήθελε πάντοτε να ζυγίζει τα φρούτα του φτιάχνοντας εύκολες εξισώσεις, όπως η προηγούμενη $x = 6$. Αυτό όμως προϋποθέτει να έχει έξι βαράκια του 1 κιλού, ή ένα των 5 και ένα των 1 ή ένα των 4 και δύο των 1 και ούτω καθεξής.

Πρόβλημα: Εάν ο μανάβης έχει ένα βαράκι των 10 κιλών κι ένα των 4, μπορεί να ζυγίσει τα 6 κιλά;

Η απάντηση είναι ότι μπορεί, απλώς με έναν δυσκολότερο τρόπο. Εάν από τη μία μεριά βάλει τα φρούτα των 6 κιλών και το βαρίδι των 4, η ζυγαριά θα ισορροπήσει με 10 κιλά από την άλλη μεριά.



Εάν λοιπόν ο μανάβης, καθώς δοκιμάζει διάφορα βαρίδια, διαπιστώσει ότι η ζυγαριά ισορροπεί με $x + 4$ από τη μία και 10 από την άλλη, θα έχει φτιάξει μία εξίσωση:

$$x + 4 = 10$$

Έπειτα θα σκεφτεί: «ποιος είναι αυτός ο αριθμός που αν προσθέσω 4 βγαίνει 10;». Θα καταλήξει ότι $x = 6$, άρα θα καταλάβει ότι τα φρούτα ζυγίζουν 6 κιλά.

Οπότε έχει νόημα να αναφερθούμε και σε πιο περίπλοκες εξισώσεις, της μορφής:

$$x + 54 = 123$$

Πρόβλημα: Εάν ο μανάβης έχει ένα βαρίδι των 6 κιλών, μπορεί να ζυγίσει 3 κιλά;

Αυτό φαίνεται ακόμα δυσκολότερο πρόβλημα. Παρόλα αυτά, υπό ιδανικές συνθήκες έχει κι αυτό λύση.

Ας πούμε ότι ο μανάβης έχει ένα καρπούζι των 3 κιλών (που δεν ξέρει το βάρος του) και θέλει να το ζυγίσει. Αν βάλει το καρπούζι από τη μία μεριά και τα 6 κιλά από την άλλη, είναι φανερό ότι η ζυγαριά δεν θα ισορροπήσει. Εάν όμως βρει δύο **πανομοιότυπα** (δηλαδή ακριβώς ίδια) καρπούζια, θα μπορεί να κάνει το εξής:

Από τη μία μεριά μπορεί να βάλει δύο καρπούζια κι από την άλλη 6 κιλά. Δηλαδή, θα έχει φτιάξει μία εξίσωση $x + x = 6$, ή αλλιώς:

$$2x = 6$$

Έπειτα θα σκεφτεί: «ποιος αριθμός δύο φορές κάνει 6;», Θα καταλήξει ότι $x = 3$, κι άρα το βάρος του καρπουζιού είναι 3 κιλά.

Έτσι λοιπόν, έχει νόημα να μελετήσουμε και εξισώσεις της μορφής:

$$5x = 34$$

Γενικά, για να λύσουμε εξισώσεις πρώτου βαθμού μπορούμε να κάνουμε τα εξής (γενικά προσπαθούμε να αφήσουμε το x μόνο του):

- **Εάν έχουμε άγνωστο ίσον αριθμό**, δεν έχουμε να λύσουμε τίποτα.
$$x = 6$$
- **Εάν έχουμε άγνωστο και αριθμό ίσον αριθμό:**
$$x + 1 = 6$$
μπορούμε να αφαιρέσουμε τον αριθμό ώστε ο άγνωστος να μείνει μόνος του. Φυσικά, αν είχαμε ζυγαριά, θα έπρεπε να βγάλουμε τον αριθμό και από τις δύο μεριές, αφού αλλιώς η ζυγαριά **δεν** θα ισορροπούσε. Θα είχαμε:
$$x + 1 - 1 = 6 - 1$$
δηλαδή (αφού $1 - 1 = 0$ και $6 - 1 = 5$):
$$x + 0 = 5$$
ή αλλιώς $x = 5$.
- **Εάν έχουμε άγνωστο μείον αριθμό ίσον αριθμό:**
$$x - 1 = 6$$
τότε μπορούμε να προσθέσουμε 1 ώστε το -1 να φύγει. Αυτό θα συμβεί διότι $-1 + 1 = 0$. Δεν θα πρέπει να ξεχάσουμε ότι το 1 πρέπει να προστεθεί κι από την άλλη μεριά, για να μην χαλάσει η ισορροπία της ζυγαριάς. Θα έχουμε τότε:

$$x - 1 + 1 = 6 + 1$$

δηλαδή:

$$x + 0 = 7$$

ή αλλιώς $x = 7$.

- **Εάν έχουμε άγνωστο επί αριθμό ίσον αριθμό:**

$$5x = 10$$

μπορούμε να διαιρέσουμε με τον αριθμό που πολλαπλασιάζει τον x, ώστε στο τέλος να έχουμε:

$$\frac{5x}{5}$$

δηλαδή το x μόνο του (αφού $5/5 = 1$). Δεν ξεχνάμε μόνο ότι, αν διαιρέσουμε από τη μία μεριά, πρέπει να διαιρέσουμε κι από την άλλη, για να μην χαλάσει η ισορροπία. Τελικά:

$$\frac{5x}{5} = \frac{10}{5}$$

ή αλλιώς (αφού $5/5 = 1$ και $10/5 = 2$):

$$1x = 2$$

δηλαδή $x = 2$.

- **Εάν έχουμε άγνωστο δια αριθμό ίσον αριθμό:**

$$\frac{x}{2} = 8$$

τότε μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε με το 2, ώστε το x να μείνει μόνο του. Αυτό θα συμβεί διότι $2/2 = 1$. Δεν ξεχνάμε να πολλαπλασιάσουμε κι από τις δύο μεριές, για να μην χαλάσει η ισορροπία.

$$2 \cdot \frac{x}{2} = 2 \cdot 8$$

Επειδή τα δύο μισά κάνουν ένα ολόκληρο, τελικά έχουμε:

$$1x = 16$$

δηλαδή $x = 16$.

- Θα μπορούσαμε ενδεχομένως να είχαμε αρκετά περίπλοκες περιπτώσεις, που **συνδυάζουν τα προηγούμενα**. Για παράδειγμα:

$$5x + 6 = 16$$

Εδώ ο άγνωστος είναι πολλαπλασιασμένος και ταυτόχρονα έχει προστεθεί αριθμός. Πώς ξεκινάμε να λύσουμε αυτήν την εξίσωση; Θα πρέπει πρώτα να διαιρέσουμε ή να αφαιρέσουμε; Για να απαντήσουμε πρώτα θα κάνουμε μία **αναλογία**: Πείτε ότι θέλετε να κρύψετε από τον φίλο σας ένα σπάνιο κέρμα, οπότε το βάζετε σε μία σακούλα κι έπειτα σε ένα κουτί. Για να βρει ο φίλος σας το κέρμα, πρέπει πρώτα να το βγάλει από το κουτί κι έπειτα να το βγάλει από τη σακούλα. Δηλαδή, εσείς:

- Το βάλατε στη σακούλα,
- Το βάλατε στο κουτί,

κι ο φίλος σας:

- Το έβγαλε από το κουτί,
- Το έβγαλε από τη σακούλα.

Η αναζήτηση λοιπόν έγινε κάνοντας τα πάντα ανάποδα. Άλλαξε τόσο η σειρά σακούλας-κουτιού, όσο και το βάζω-βγάζω.
Όσον αφορά τα μαθηματικά, στην εξίσωση:

$$5x + 6 = 16$$

αν εγώ ήξερα το x, θα έκανα τα εξής:

- Θα το πολλαπλασίαζα με 5,
- Θα προσέθετα 6,
- Στο τέλος θα έβρισκα 16

(δηλαδή θα ακολουθούσα τη σειρά των πράξεων). Εσείς, για να βρείτε το x που δεν το ξέρετε, πρέπει να κάνετε τα πάντα ανάποδα.

- Να πάρετε το 16 που βρήκα εγώ,
- Να αφαιρέσετε 6,
- Να διαιρέσετε με 5.

Μαθηματικά μιλώντας, στην εξίσωση:

$$5x + 6 = 16$$

πρώτα θα διώξετε το 6, αφαιρώντας 6. Θα πάρετε:

$$5x = 10$$

Έπειτα, θα διαιρέσετε με 5. Θα πάρετε:

$$x = 2$$

Είναι λίγο πιο αστείο το παράδειγμα με τις κάλτσες και τα παπούτσια, παρά αυτό με τις σακούλες και τα κουτιά. Όταν ντυνόμαστε, πρώτα βάζουμε τις κάλτσες κι έπειτα τα παπούτσια, αλλά όταν γδυνόμαστε, πρώτα βγάζουμε τα παπούτσια κι έπειτα τις κάλτσες.

Με βάσει τα προηγούμενα κανείς μπορεί να φτιάξει αρκετά περίπλοκες εξισώσεις πρώτου βαθμού. Θα δούμε μερικά παραδείγματα παρακάτω.

Παράδειγμα: Να λυθεί η εξίσωση:

$$x - 100 = 4$$

Προσθέτουμε 100 και στις δύο μεριές, οπότε παίρνουμε:

$$x - 100 + 100 = 4 + 100$$

δηλαδή, κάνοντας τις πράξεις, $x = 104$.

Παράδειγμα: Να λυθεί η εξίσωση:

$$20x = 140$$

Διαιρούμε και τις δύο μεριές με 20, οπότε παίρνουμε:

$$\frac{20x}{20} = \frac{140}{20}$$

Επειδή $20/20 = 1$ και $140/20 = 14/2 = 7$, τελικά:

$$x = 7$$

Παράδειγμα: Να λυθεί η εξίσωση:

$$3x - 45 = 42$$

Αφού η σειρά των πράξεων είναι (κατά προτεραιότητα, αν ξέραμε το x) πολλαπλασιασμός και αφαίρεση, εμείς θα κάνουμε πρόσθεση και διαίρεση.

Βήμα I: Κάνουμε πρόσθεση με το 45 και έχουμε:

$$3x - 45 + 45 = 42 + 45$$

οπότε:

$$3x = 87$$

Βήμα II: Κάνουμε διαίρεση με το 3 κι έχουμε:

$$\frac{3x}{3} = \frac{87}{3}$$

κι άρα, επειδή $87/3 = 29$:

$$x = 29$$

Παράδειγμα (προσοχή στα μείον): Να λυθεί η εξίσωση:

$$-2x = 16$$

Εδώ πρέπει να προσέξουμε ότι το x δεν πολλαπλασιάζεται απλά με 2, αλλά με -2. Οπότε θα διαιρέσουμε με -2.

$$\frac{-2x}{-2} = \frac{16}{-2}$$

Επειδή τώρα:

$$\frac{16}{-2} = -\frac{16}{2} = -8$$

θα έχουμε:

$$x = -8$$

1.2 Ασκήσεις

Άσκηση 1: Ένα αυτοκίνητο κινείται με $90km/h$ (90 χιλιόμετρα την ώρα) σε έναν δρόμο. Δηλαδή,

Μετά από 1 ώρα, έχει διανύσει $90km$,

Μετά από 2 ώρες, έχει διανύσει $180km$,

Μετά από 3 ώρες, έχει διανύσει $270km$ και ούτω καθεξής.

1) Μετά από 10 ώρες, πόσα km θα έχει διανύσει;
2) Αν με ω συμβολίσουμε τις ώρες και με X την απόσταση σε km, να βρείτε μία **σχέση** από την οποία, αν ξέρουμε το ω, θα μπορούμε να βρούμε το X.

Λύση:

1) Παρατηρούμε ότι τα χιλιόμετρα που διανύει είναι, σε κάθε περίπτωση, 90 φορές την ώρα που πέρασε. Δηλαδή, σε 10 ώρες θα έχει διανύσει:
$$90 \cdot 10 = 900$$
χιλιόμετρα.
2) Περιγραφικά, η σχέση που υπάρχει (και που βλέπουμε από τα *δεδομένα*) είναι:
$$\text{Χιλιόμετρα} = 90 \cdot \text{Ώρα που πέρασε}$$
δηλαδή, αν χρησιμοποιήσουμε τα σύμβολα:
$$X = 90 \cdot \omega$$

Άσκηση 2: Οι εργάτες σε μία οικοδομή έχουν παρατηρήσει ότι η δουλειά τελειώνει γρηγορότερα όταν περισσότεροι δουλεύουν. Συγκεκριμένα έχουν παρατηρήσει ότι:

Αν δουλεύει 1 εργάτης, η οικοδομή κτίζεται σε 127 ημέρες,

Αν δουλεύουν 2 εργάτες, η οικοδομή κτίζεται σε 127/2 ημέρες,

Αν δουλεύουν 3 εργάτες, η οικοδομή κτίζεται σε 127/3 ημέρες,

Αν δουλεύουν 4 εργάτες, η οικοδομή κτίζεται σε 127/4 ημέρες, και ούτω καθεξής.

1) Αν δουλεύουν 127 εργάτες, σε πόσες μέρες θα τελειώσει η οικοδομή;
2) Αν με ε συμβολίσουμε το πλήθος των εργατών και με H τις ημέρες, να βρείτε μία **σχέση** από την οποία, αν γνωρίζουμε το ε, θα μπορούμε να βρούμε το H.

Λύση:

1) Παρατηρούμε ότι η οικοδομή ολοκληρώνεται, σε κάθε περίπτωση, σε χρόνο 127 ημερών διά το πλήθος των εργατών. Επομένως, αν έχουμε, 127 εργάτες, η διάρκεια της κατασκευής θα είναι:
$$127/127 = 1$$
ημέρα.
2) Περιγραφικά, η σχέση που υπάρχει (και που βλέπουμε από τα *δεδομένα*) είναι:
$$\text{Ημέρες} = \frac{127}{\text{Πλήθος των εργατών}}$$
δηλαδή, αν χρησιμοποιήσουμε τα σύμβολα:
$$H = \frac{127}{\varepsilon}$$

Άσκηση 3: Ένας βιολόγος έβαλε σε καλλιέργεια (καλλιέργεια είναι το φαγητό για τα μικρόβια) 1 μικρόβιο. Παρατήρησε τα εξής:

Σε 1 ώρα, τα μικρόβια είχαν γίνει 2,

Σε 2 ώρες, τα μικρόβια είχαν γίνει 4,

Σε 3 ώρες, τα μικρόβια είχαν γίνει 8,

Σε 4 ώρες, τα μικρόβια είχαν γίνει 16,

Σε 5 ώρες, τα μικρόβια είχαν γίνει 32 και ούτω καθεξής.

1) Σε 9 ώρες, πόσα θα έχουν γίνει τα μικρόβια;
2) Αν με $\boldsymbol{\omega}$ συμβολίσουμε τις ώρες και με $\boldsymbol{N}$ το πλήθος των μικροβίων, να βρείτε μία **σχέση** από την οποία, αν γνωρίζουμε το $\boldsymbol{\omega}$, θα μπορούμε να βρούμε το $\boldsymbol{N}$.

Λύση:

1) Αν αναδιατυπώσουμε λίγο τα δεδομένα, μπορούμε να γράψουμε:

Σε 1 ώρα, τα μικρόβια είχαν γίνει 2,

Σε 2 ώρες, τα μικρόβια είχαν γίνει $2 \cdot 2$,

Σε 3 ώρες, τα μικρόβια είχαν γίνει $2 \cdot 2 \cdot 2$,

Σε 4 ώρες, τα μικρόβια είχαν γίνει $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$,

Σε 5 ώρες, τα μικρόβια είχαν γίνει $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ και ούτω καθεξής.

Οπότε, μετά από 9 ώρες θα έχουμε:

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^9 = 512$$

μικρόβια.

2) Περιγραφικά, η σχέση που υπάρχει (και που βλέπουμε από τα *δεδομένα*) είναι:

$$\text{Μικρόβια} = 2^{\text{Ώρα που πέρασε}}$$

δηλαδή, αν χρησιμοποιήσουμε τα σύμβολα:

$$\boldsymbol{N} = 2^{\boldsymbol{\omega}}$$

Άσκηση 4: Να απλοποιηθεί η παράσταση:

$$x + x^2 - 89x + y$$

Λύση: *Βήμα I:* Η μόνη πράξη που μπορεί να γίνει είναι η $x - 89x$, που δίνει $-88x$. Κάνοντας αυτήν την πράξη, έχουμε:

$$x^2 - 88x + y$$

Βήμα II: Άλλη απλοποίηση δεν γίνεται, οπότε εδώ σταματάμε.

Άσκηση 5: Να απλοποιηθεί η παράσταση:

$$x^{1024} \cdot x^{256} - x^{1269}$$

Λύση: *Βήμα I:* Κάνουμε τον πολλαπλασιασμό $x^{1024} \cdot x^{256}$. Επειδή $1024 + 256 = 1280$, το αποτέλεσμα του πολλαπλασιασμού είναι x^{1280}. Η αρχική αλγεβρική παράσταση γίνεται:

$$x^{1280} - x^{1269}$$

Βήμα II: Οι δύο όροι της προηγούμενης παράστασης δεν είναι ομοειδείς (δεν έχουν την ίδια δύναμη). Επομένως δεν είναι δυνατόν να κάνουμε την πρόσθεση και σταματάμε.

Άσκηση 6: Να απλοποιηθεί η παράσταση:

$$5 \cdot \left(x^2 + x\right) - 5x^2 + 1$$

Λύση: *Βήμα I:* Πρώτα κάνουμε την επιμεριστική ιδιότητα $5 \cdot \left(x^2 + x\right) = 5x^2 + 5x$, κι έχουμε:

$$5x^2 + 5x - 5x^2 + 1$$

Βήμα II: Έπειτα, κάνουμε την πράξη $5x^2 - 5x^2 = 0$, κι έχουμε:

$$5x + 1$$

Βήμα III: Σε αυτό το σημείο άλλες πράξεις δεν γίνονται, οπότε σταματάμε.

Άσκηση 7: Να απλοποιηθεί η παράσταση:

$$5x^3 + x^4 \cdot x - 9x^8 - 2 + x^8$$

Λύση: *Βήμα I:* Κάνουμε τον πολλαπλασιασμό $x^4 \cdot x = x^5$.

$$5x^3 + x^5 - 9x^8 - 2 + x^8$$

Βήμα II: Κάνουμε την πράξη $-9x^8 + x^8 = -8x^8$.

$$5x^3 + x^5 - 8x^8 - 2$$

Βήμα III: Δεν υπάρχουν άλλες πράξεις που απλοποιούν την παραπάνω παράσταση, οπότε εδώ σταματάμε. Συνηθίζεται να γράφουμε τις δυνάμεις του x με φθίνουσα σειρά, οπότε –αν θέλουμε- τελειώνουμε με το:

$$-8x^8 + x^5 + 5x^3 - 2$$

Άσκηση 8: Να απλοποιηθεί η παράσταση:

$$5x - 5y + y^2 + 78x - 8y + 5 - 107$$

Λύση: *Βήμα I:* Κάνουμε την πράξη $5x + 78x = 83x$.

$$83x - 5y + y^2 - 8y + 5 - 107$$

Βήμα II: Κάνουμε την πράξη $-5y - 8y = -13y$.

$$83x - 13y + y^2 + 5 - 107$$

Βήμα III: Κάνουμε την πράξη $5 - 107 = -102$.

$$83x - 13y + y^2 - 102$$

Βήμα IV: Δεν υπάρχουν άλλες πράξεις που να απλοποιούν την παραπάνω παράσταση, οπότε σταματάμε. Συνηθίζεται να γράφουμε με φθίνουσα σειρά τις δυνάμεις του ενός αγνώστου, μετά του άλλου, και τέλος τις σταθερές. Αν θέλουμε λοιπόν, τελειώνουμε με το:

$$y^2 - 13y + 83x - 102$$

Άσκηση 9: Να απλοποιηθεί η παράσταση:

$$5x \cdot \left(x^2 + x\right) - x^3 + 1$$

Λύση: *Βήμα I*: Κάνουμε την επιμεριστική ιδιότητα $5x \cdot \left(x^2 + x\right) = 5x^3 + 5x^2$.

$$5x^3 + 5x^2 - x^3 + 1$$

Βήμα II: Κάνουμε την πράξη $5x^3 - x^3 = 4x^3$.

$$4x^3 + 5x^2 + 1$$

Βήμα III: Εδώ σταματάμε, αφού δεν υπάρχουν άλλες πράξεις που να απλοποιούν την παραπάνω παράσταση.

Άσκηση 10: Να απλοποιηθεί η παράσταση:

$$x \cdot (x + 1) - x^2 + \left(y^3 + y + y \cdot 5\right) \cdot y$$

Λύση: *Βήμα I:* Κάνουμε την επιμεριστική ιδιότητα $x \cdot (x + 1) = x^2 + x$.

$$x^2+x-x^2+\left(y^3+y+y\cdot 5\right)\cdot y$$

Βήμα ΙΙ: Κάνουμε την πράξη $y+y\cdot 5=6y$, στην παρένθεση. Εν τω μεταξύ, εδώ είναι χρήσιμο κανείς να παρατηρήσει ότι $y\cdot 5=5\cdot y=5y$, οπότε η πράξη $y+y\cdot 5=6y$ όπως την κάναμε πριν, είναι λογική.

$$x^2+x-x^2+\left(y^3+6y\right)\cdot y$$

Βήμα ΙΙΙ: Κάνουμε την επιμεριστική ιδιότητα $\left(y^3+6y\right)\cdot y=y^4+6y^2$. Αυτή είναι όντως επιμεριστική ιδιότητα (δεν πειράζει που το εξωτερικό y είναι στ' αριστερά κι όχι στα δεξιά), αφού **στον πολλαπλασιασμό δεν έχει σημασία η σειρά**. Δηλαδή, το εξωτερικό y μπορεί να πάει στ' αριστερά της παρένθεσης, αντί στα δεξιά.

$$x^2+x-x^2+y^4+6y^2$$

Βήμα IV: Κάνουμε την πράξη $x^2-x^2=0$.

$$x+y^4+6y^2$$

Βήμα V: Παρατηρούμε ότι δεν γίνονται άλλες πράξεις που να απλοποιούν την παραπάνω παράσταση, οπότε σταματάμε.

Άσκηση 11: Να απλοποιηθεί η παράσταση:

$$x\cdot\left(y+y^2-8y\right)-x\cdot y^2+7x\cdot y$$

Λύση: *Βήμα Ι:* Θα μπορούσαμε να κάνουμε κατευθείαν την (τριπλή) επιμεριστική ιδιότητα $x\cdot(y+y^2-8y)$, όμως καλύτερα πρώτα να κάνουμε μερικές πράξεις στην παρένθεση, για να κάνουμε τη ζωή μας ευκολότερη. Πρώτα λοιπόν κάνουμε την πράξη $y-8y=-7y$.

$$x\cdot\left(y^2-7y\right)-x\cdot y^2+7x\cdot y$$

Βήμα ΙΙ: Τώρα κάνουμε την επιμεριστική ιδιότητα $x\cdot\left(y^2-7y\right)=x\cdot y^2-7x\cdot y$.

$$x\cdot y^2-7x\cdot y-x\cdot y^2+7x\cdot y$$

Βήμα ΙΙΙ: Κάνουμε την πράξη $x\cdot y^2-x\cdot y^2=0$.

$$-7x\cdot y+7x\cdot y$$

Βήμα III: Τελειώνουμε κάνοντας την πράξη $-7x \cdot y + 7x \cdot y = 0$. Το μόνο που απομένει τελικά είναι το:

$$0$$

Άσκηση 12:

1) Να απλοποιηθεί η παράσταση:
$$P = x \cdot (x - y) + (y - 1) \cdot x + y - 1$$
2) Αν κάποιος σας πει ότι $x = -8$ και $y = 1$, μπορείτε να βρείτε την τιμή του P;
[Προσοχή! Αν τα x, y σας δοθούν, τότε το P παύει να είναι αλγεβρική παράσταση. Γίνεται πράξη μεταξύ αριθμών, αρά (στο τέλος), θα βρείτε έναν αριθμό.]

Λύση:

1) *Βήμα I:* Κάνουμε την επιμεριστική ιδιότητα $x \cdot (x - y) = x^2 - x \cdot y$.
$$x^2 - x \cdot y + (y - 1) \cdot x + y - 1$$
Βήμα II: Κάνουμε την επιμεριστική ιδιότητα $(y - 1) \cdot x = y \cdot x - x$. Εδώ δεν πειράζει που το εξωτερικό x είναι στα δεξιά της παρένθεσης και όχι στ' αριστερά. **Στον πολλαπλασιασμό δεν έχει σημασία η σειρά**.
$$x^2 - x \cdot y + y \cdot x - x + y - 1$$
Βήμα III: Επειδή **στον πολλαπλασιασμό δεν έχει σημασία η σειρά**, έχουμε $-x \cdot y + y \cdot x = 0$ (αφού $x \cdot y = y \cdot x$), κι άρα:
$$x^2 - x + y - 1$$
Βήμα IV: Άλλες απλοποιήσεις δεν γίνονται, οπότε:
$$P = x^2 - x + y - 1$$
2) Εάν $x = -8$ και $y = 1$, τότε:
$$P = (-8)^2 - (-8) + 1 - 1$$
Προσέξτε ότι ολόκληρο το -8 υψώθηκε στο τετράγωνο. Αν υψώναμε μόνο το 8 θα είχαμε λάθος, αφού ένα κομμάτι του $x = -8$ (το μείον) θα είχε ξεχαστεί. Επίσης προσέχουμε ότι το $-(-8)$ έχει δύο μείον, ένα από το -8 κι άλλο ένα που ήδη υπήρχε μπροστά από το x. Με πράξεις έχουμε $(-8)^2 = (-8) \cdot (-8) = 64$ (αφού $- \cdot -= +$), κι άρα:
$$P = 64 + 8 + 0 = 72$$

Άσκηση 13:

1) Να απλοποιηθεί η παράσταση:

$$P = x \cdot (x - 1) + \left(y^3 - 1\right) \cdot y + y - x^2 - 3$$

2) Αν κάποιος σας πει ότι $x = 1$ και $y = -4$, μπορείτε να βρείτε την τιμή του P;

[Προσοχή! Αν τα x, y σας δοθούν, τότε το P παύει να είναι αλγεβρική παράσταση. Γίνεται πράξη μεταξύ αριθμών, αρά (στο τέλος), θα βρείτε έναν αριθμό.]

Λύση:

1) *Βήμα I:* Κάνουμε την επιμεριστική ιδιότητα $x \cdot (x - 1) = x^2 - x$.

$$x^2 - x + \left(y^3 - 1\right) \cdot y + y - x^2 - 3$$

Βήμα II: Κάνουμε την επιμεριστική ιδιότητα $\left(y^3 - 1\right) \cdot y = y^4 - y$. Εδώ, όπως και πριν, δεν πειράζει που το εξωτερικό y είναι στα δεξιά της παρένθεσης και όχι στ' αριστερά. **Στον πολλαπλασιασμό δεν έχει σημασία η σειρά**.

$$x^2 - x + y^4 - y + y - x^2 - 3$$

Βήμα III: Κάνουμε την πράξη $x^2 - x^2 = 0$.

$$-x + y^4 - y + y - 3$$

Βήμα IV: Κάνουμε την πράξη $-y + y = 0$.

$$-x + y^4 - 3$$

Βήμα V: Επειδή δεν μπορούν να γίνουν άλλες απλοποιήσεις, τελικά έχουμε:

$$P = -x + y^4 - 3$$

2) Αν στη θέση του x βάλουμε το 1 και στη θέση του y το -4, τότε θα έχουμε την εξής πράξη:

$$P = -1 + (-4)^4 - 3$$

Προσέξτε εδώ ότι η ύψωση σε δύναμη πάει στο -4 (δηλαδή μαζί με το $-$). Αν γράφαμε 4^4 δεν θα ήταν σωστό, γιατί αυτό θα σήμαινε ότι μόνο ένα τμήμα του $y = -4$ υψώνεται στην τετάρτη (το $-$ ξεχνιέται). Για να κάνουμε αυτήν την πράξη, υπολογίζουμε πρώτα τη δύναμη:

$$(-4) \cdot (-4) \cdot (-4) \cdot (-4) = 16 \cdot 16 = 256$$

(αφού $- \cdot - \cdot - \cdot - = + \cdot + = +$). Επομένως:

$$P = -1 + 256 - 3 = 252$$

Άσκηση 14: Αν ξέρετε ότι $x = 2$, $y = 10$, να υπολογίσετε την παράσταση:

$$P = x \cdot \left(x - y^{59234}\right) + y^{59234} \cdot (x + y) - y^{59235}$$

[Υπόδειξη: Πρώτα κάνετε απλοποιήσεις.]

Λύση: Αν προσπαθήσουμε να κάνουμε απ' ευθείας αντικαταστάσεις, θα συναντήσουμε ένα πρόβλημα: η ποσότητα 10^{59234} είναι εξαιρετικά δύσκολο να υπολογιστεί. Γι' αυτό, πρώτα κάνουμε απλοποιήσεις.

Βήμα I: Κάνουμε την επιμεριστική ιδιότητα $x \cdot \left(x - y^{59234}\right) = x^2 - x \cdot y^{59234}$.

$$x^2 - x \cdot y^{59234} + y^{59234} \cdot (x + y) - y^{59235}$$

Βήμα II: Κάνουμε την επιμεριστική ιδιότητα $y^{59234} \cdot (x + y) = y^{59234} \cdot x + y^{59235}$.

$$x^2 - x \cdot y^{59234} + y^{59234} \cdot x + y^{59235} - y^{59235}$$

Βήμα III: Επειδή **στον πολλαπλασιασμό η σειρά δεν έχει σημασία** έχουμε $-x \cdot y^{59234} + y^{59234} \cdot x = 0$. Οπότε παίρνουμε:

$$x^2 + y^{59235} - y^{59235}$$

Βήμα IV: Κάνουμε την πράξη $y^{59235} - y^{59235} = 0$. Εν τέλει:

$$P = x^2$$

κι επειδή άλλες απλοποιήσεις δεν γίνονται, σταματάμε.

Έτσι λοιπόν, εάν $x = 2$, τότε $P = 4$.

Άσκηση 15: Να απλοποιηθεί η αλγεβρική παράσταση:

$$x \cdot (x + y) - y \cdot (x + y) - x \cdot y$$

[Υπόδειξη: Εδώ θα εμφανιστούν όροι $x \cdot y$. Οι όροι αυτοί δεν μπορούν να απλοποιηθούν με τα x ή τα y, ή με δυνάμεις τους.]

Λύση: *Βήμα I:* Κάνουμε την επιμεριστική ιδιότητα $x \cdot (x + y) = x^2 + x \cdot y$.

$$x^2 + x \cdot y - y \cdot (x + y) - x \cdot y$$

Βήμα II: Κάνουμε την επιμεριστική ιδιότητα $-y \cdot (x + y) = -y \cdot x - y^2$ (Δεν ξεχνάμε ότι οι αριθμοί έχουν πλέον και **πρόσημο**).

$$x^2 + x \cdot y - y \cdot x - y^2 - x \cdot y$$

Βήμα III: Υπάρχει κάποια σχέση μεταξύ των $x \cdot y$ και $y \cdot x$; Η απάντηση είναι **ναι**, αφού **στον πολλαπλασιασμό δεν έχει σημασία η σειρά**. Επομένως, $x \cdot y = y \cdot x$. Δηλαδή, μπορούμε να γράψουμε:

$$x^2 + x \cdot y - x \cdot y - y^2 - x \cdot y$$

Βήμα IV: Κάνουμε την πράξη $x \cdot y - x \cdot y = 0$.

$$x^2 - y^2 - x \cdot y$$

Βήμα V: Στην παραπάνω παράσταση δεν μπορούν να γίνουν άλλες απλοποιήσεις, οπότε σταματάμε.