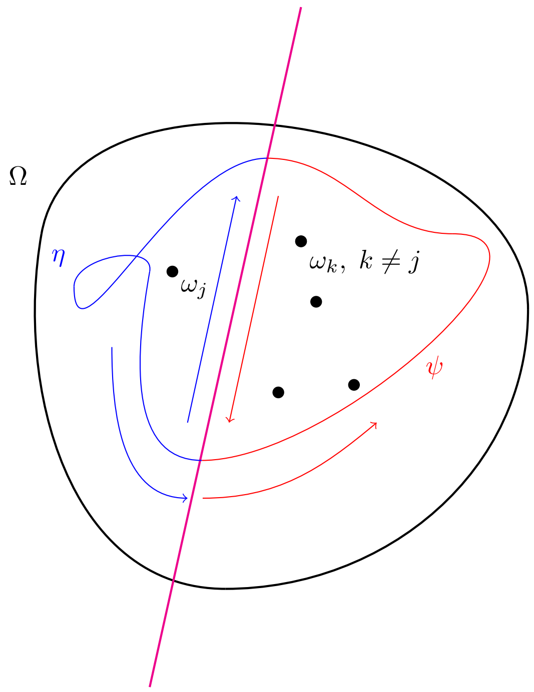
Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών
Τμήμα Μαθηματικών

Φεβρουάριος 2022

Μιγαδική Ανάλυση Ι
Πρόχειρες Σημειώσεις

Επηρεασμένες από το μάθημα 701. Μιγαδική Ανάλυση Ι, όπως το δίδαξε ο κ. Χατζηαφράτης Τ.

Επιμέλεια: Φράγκος Αναστάσιος



$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \cdot \sum_{k\in[n+1]} \mathrm{Res}(f,\omega_k)\delta_\gamma(\omega_k)$$

Τελευταία ενημέρωση: 16 Αυγούστου 2023.

Πρόλογος

Οι σημειώσεις αυτές είναι επηρεασμένες από το μάθημα *701. Μιγαδική Ανάλυση Ι*, όπως αυτό διδάχθηκε το χειμερινό εξάμηνο του 2021-22 από τον κ. Χατζηαφράτη Τηλέμαχο. Μια πρώτη μορφή του παρόντος κειμένου είχε ανέβει στην η-τάξη των δακτυλογραφημένων σημειώσεων τον Φεβρουάριο του 2022, ήταν όμως αρκετά συνοπτική και με πολλά λάθη.

Η παρούσα «έκδοση» ευελπιστώ είναι αρκετά περισσότερο επεξηγηματική και με λιγότερα λάθη. Επίσης έχουν υπάρξει μερικές προσθήκες που (νομίζω) αναδεικνύουν μια άλλη πτυχή της Μιγαδικής Ανάλυσης, μέσω της Αναλυτικής Θεωρίας Αριθμών. Ευελπιστώ κάποια στιγμή να καταφέρω να προσθέσω θέματα πολυμεταβλητής μιγαδικής ανάλυσης.

Κανείς βέβαια δεν θα πρέπει να αρκεστεί σ' αυτές τις σημειώσεις - το πεδίο της Μιγαδικής Ανάλυσης είναι ευρύ και οι έννοιες κάπως θεμελιώδης για αρκετούς κλάδους των μαθηματικών και της φυσικής. Για μια ενδελεχότερη ανάλυση, παραπέμπεστε στη βιβλιογραφία.

Φυσικά, θα είμαι ευγνώμων σε όποιον με ενημερώσει για τυχόντα λάθη παντός φύσεως, στη διεύθυνση:

afragos@email.com

Συμβολισμοί

- $\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, 3, \cdots\}$
- $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, 4, \cdots\}$
- $\mathbb{Q}$ είναι το σύνολο των ρητών.
- $\mathbb{R}$ είναι το σύνολο των πραγματικών.
- $\mathbb{C}$ είναι το σύνολο των μιγαδικών.
- $\mathbb{C}^* := \mathbb{C}\backslash\{0\}$
- $\mathbb{C}^+ := \{z \in \mathbb{C} \mid \Im z \geqslant 0\}$
- $[n] := \{1, 2, 3, \cdots, n\}$
- $\subseteq$ είναι η σχέση του υποσυνόλου.
- $\subset$ είναι η σχέση του γνήσιου υποσυνόλου.
- $\#A$ είναι ο πληθάριθμος του συνόλου A.
- ∂A είναι το (τοπολογικό) σύνορο του A
- $\underleftrightarrow{zw}$ είναι η ευθεία που διέρχεται από τα z, w.
- $\underrightarrow{zw}$ είναι η (κλειστή) ημιευθεία με αρχή το z, που διέρχεται από το w.
- $\angle(z, w)$ είναι η (ανοικτή) γωνία με πλευρές $\underrightarrow{Oz}$ και $\underrightarrow{Ow}$.
- $S(z, r) := \left\{\zeta \in \mathbb{C} \;\middle|\; |\zeta - z| < r\right\}$
- $B(z, r) := \left\{\zeta \in \mathbb{C} \;\middle|\; |\zeta - z| \leqslant r\right\}$

Η γραμματοσειρά είναι δημιούργημα του κ. Τσολομύτη Αντώνιου: Kerkis © Department of Mathematics, University of the Aegean. Η στοιχειοθέτηση έγινε σε LaTeX.

Περιεχόμενα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Εισαγωγή στους Μιγαδικούς Αριθμούς

1.1 Ιστορικά στοιχεία

Οι μιγαδικοί αριθμοί, όπως ενδεχομένως είναι γνωστό, προέκυψαν μέσω μιας ανάγκης για εφαρμογή τύπων επίλυσης τριτοβάθμιων πολυωνυμικών εξισώσεων. Η μελέτη των τριτοβάθμιων εξισώσεων είχε απασχολήσει τους μαθηματικούς ήδη από το 780-850 μ.Χ. (Al-Khwarzimi), χωρίς να υπήρχε αντίστοιχη γνωστή διαδικασία (τύπος) για την επίλυση τυχούσας τριτοβάθμιας εξίσωσης. Για δευτεροβάθμιες εξισώσεις ήταν γνωστές μέθοδοι επίλυσης (και αποδεικνύονταν μάλλον με γεωμετρικό τρόπο).

Τον $14^{\text{ο}}$ αιώνα σε δύο ανώνυμα γραπτά (Φλορεντία) εμφανίστηκε για πρώτη φορά ο λεγόμενος *μετασχηματισμός του Tschirnhaus*, οποίος μπορούσε να απλοποιήσει κάθε δεδομένη τριτοβάθμια πολυωνυμική εξίσωση $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$. Παρατηρήθηκε ότι αν θέσουμε $y = x - a/3$, η πολυωνυμική εξίσωση παίρνει την απλούστερη μορφή:

$$y^3 + py + q = 0, \text{ για κάποια } p, q$$

Αυτή η μορφή, η οποία ονομάζεται και *συνεπτυγμένη κυβική μορφή*, χρησιμοποιήθηκε μετέπειτα για την επίλυση τυχούσας τριτοβάθμιας πολυωνυμικής εξίσωσης. Εξάλλου αν βρεθεί τρόπος να επιλύονται εξισώσεις σε συνεπτυγμένη κυβική μορφή, μπορούν να προσδιοριστούν τα y για τα οποία $y^3+py+q = 0$ - οπότε εφαρμόζοντας τον μετασχηματισμό του Tschirnhaus αντίστροφα, τα x για τα οποία $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ μπορούν επίσης να βρεθούν.

Λέγεται ότι το 1526 ο Scipione del Ferro, λίγο πριν πεθάνει, έδωσε έναν τύπο επίλυσης εξισώσεων σε συνεπτυγμένη κυβική μορφή στον μαθητή του Antonio Maria Fiore. Ο τελευταίος κάλεσε τον Tartaglia σε ≪μαθηματική μονομαχία≫, στην οποία ζήτησε από τον Tartaglia να επιλύσει τριτοβάθμιες εξισώσεις. Προς κακή τύχη του Fiore, ο Tartaglia ανακάλυψε εκ νέου τον τύπο και κέρδισε την μονομαχία.

Ο Tartaglia εκμυστηρεύτηκε στον Cardano τον τύπο που ανακάλυψε, εφόσον ο δεύτερος έδωσε όρκο να μην τον διαρρεύσει. Εδώ να σημειωθεί ότι οι μαθηματικοί της εποχής δεν ήταν πολύ ανοικτοί με τις μαθηματικές τους ανακαλύψεις, διότι οι ≪μαθηματικές μονομαχίες≫ ήταν ένας τρόπος να δείξουν την αξία τους και (ενδεχομένως) να προσληφθούν απ' όποιον τους χρειαζόταν.

Ο Cardano βέβαια δεν ήταν μαθηματικός, ήταν έμπορος, και δεν κράτησε τον όρκο του. Δημοσίευσε την μέθοδο γράφοντας τους del Ferro και Tartaglia ως συγγραφείς, το 1545. Μια λύση εξίσωσης σε συνεπτυγμένη κυβική μορφή δίνεται από τη σχέση:

$$y = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{D}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{D}}, \text{ όπου } D = \left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^2$$

Αργότερα ο Rafael Bombelli παρατήρησε ότι η εξίσωση σε συνεπτυγμένη κυβική μορφή:

$$y^3 - 15y - 4 = 0$$

δίνει $D = -121 < 0$. Παρόλα αυτά, εάν θεωρήσουμε ότι ο $\sqrt{-1}$ είναι ένας περίεργος, φανταστικός αριθμός, οι τύποι του Cardano εφαρμόζουν και δίνουν σωστό αποτέλεσμα. Ο Bombelli έδωσε έναν συμβολισμό στον αριθμό $\sqrt{-1}$, όχι όμως το γνωστό i. Οι μαθηματικοί της εποχής δεν έμεναν και πολύ ικανοποιημένοι με αυτήν την ≪αυθαίρετη≫ ύπαρξη του αριθμού $\sqrt{-1}$. Εξάλλου, τι ερμηνεία θα είχε ένας τέτοιος αριθμός;

Ο John Wallis σημείωσε ότι, όπως οι αρνητικοί αριθμοί έχουν μια φυσική ερμηνεία (ανάκλαση των θετικών ως προς το 0 στην πραγματική ευθεία), έτσι και ο $\sqrt{-1}$ έχει γεωμετρική ερμηνεία (την οποία ανέπτυξε σε έναν βαθμό).

Η γεωμετρία του $\sqrt{-1}$ εξερευνήθηκε περισσότερο από τον Abraham de Moivre. Εάν οι διάφοροι αριθμοί $a + b\sqrt{-1}$ ταυτιστούν με τα σημεία (a, b) του επιπέδου, μπορεί να ληφθεί ο τύπος:

$$\big(\rho \cos\theta + \rho(\sqrt{-1}) \sin\theta\big)^n = \rho^n \big(\cos(n\theta) + (\sqrt{-1}) \sin(n\theta)\big),\ n \in \mathbb{N}$$

όπου (ρ, θ) είναι οι πολικές συντεταγμένες του (a, b). Αυτό δείχνει ότι κανείς μπορεί να φαντάζεται τις $n-$οστές μιγαδικές ρίζες ως κορυφές $n-$γώνων, πράγμα που είχε παρατηρήσει και ο Euler.

Ο Euler ήταν ο πρώτος που εισήγαγε τον γνωστό συμβολισμό $i = \sqrt{-1}$. Επίσης, ορίζοντας κατάλληλα τη συνάρτηση $e^{i\theta}$ απέδειξε ότι $e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta$.[Or] Θα δούμε ότι ο ορισμός του $e^{i\theta}$ δεν είναι εντελώς αυθαίρετος και έχει γεωμετρική / φυσική σημασία.

Αυτά καλύπτουν κάπως και πολύ περιληπτικά τις απαρχές της Μιγαδικής Ανάλυσης. Στη συνέχεια θα αναφερθούμε περισσότερο αυστηρά σ' αυτή τη θεωρία, με τον ≪σύγχρονο≫ μαθηματικό τρόπο.

1.2 Βασικοί ορισμοί

Πριν ορίσουμε τους μιγαδικούς αριθμούς, ας παρατηρήσουμε κάποιες σημαντικές ιδιότητές τους που θα οδηγήσουν στον ορισμό μας.

- Γενικά, εάν υποθέσουμε ότι ένας αριθμός i (με τις ιδιότητες του $\sqrt{-1}$) υπάρχει, μπορούμε να ορίσουμε τα πολλαπλάσια αυτού bi, $b \in \mathbb{R}$. Φυσικά, προσθέτοντας $a \in \mathbb{R}$, μας επιτρέπεται να γράψουμε αριθμούς της μορφής $a + bi$. Οι αριθμοί $a + bi$ ονομάζονται *μιγαδικοί* γιατί ≪μπλέκουν / αναμειγνύουν≫ το φανταστικό μέρος bi με το πραγματικό a. Το γιατί δεν ταυτίζουμε το i με το $\sqrt{-1}$ (όπως έκανε ο Euler) θα το δούμε αργότερα.

- Είναι δυναντόν να προσθέσουμε δύο μιγαδικούς αριθμούς $a + bi$, $c + di$ ως εξής:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

- Εφόσον το i έχει ιδιότητες ανάλογες του $\sqrt{-1}$, αναμένουμε $i^2 = -1$. Οπότε, αν πολλαπλασιάσουμε δύο μιγαδικούς αριθμούς $a + bi$, $c + di$ θα έχουμε:

$$(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

- Ένας τρόπος να αναπαρασταθούν οι μη αρνητικοί πραγματικοί αριθμοί μπορεί να επιτευχθεί μετρώντας αποστάσεις σε μια ημιευθεία.[Fr), σελ. 32-33] Για να επεκταθεί το σύνολο των αριθμών (ώστε να περιέχει και τους αρνητικούς) εισάγεται και η αντικείμενη ημιευθεία. Αναμένουμε ότι για να γεωμετρικοποιήσουμε τους μιγαδικούς αριθμούς ενδεχομένως θα χρειάζεται να χρησιμοποιηθεί ακόμη μια διάσταση, οπότε ένα υποσύνολο του επιπέδου (αφού εισάγεται ακόμη μία ≪πληροφορία≫, το μιγαδικό μέρος). Μάλιστα, επειδή ένας μιγαδικός αριθμός περιέχει δύο ειδών ≪πληροφορίες≫ (το πραγματικό και το φανταστικό μέρος), εκ των οποίων καθένα μπορεί να λάβει οποιαδήποτε πραγματική τιμή, αναμένουμε ότι το υποσύνολο που θα χρησιμοποιηθεί θα είναι όλο το επίπεδο.

Ορισμός 1.1: (Το σύνολο των μιγαδικών). Θεωρούμε το αλγεβρικό σώμα $(\mathbb{C}, \oplus, \odot)$, το οποίο έχει τις εξής ιδιότητες:

- $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$
- Υπάρχουν δύο πράξεις $(\oplus, \odot)$, πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού, οι οποίες καθιστούν τη δομή $(\mathbb{C}, \oplus, \odot)$ ένα αλγεβρικό σώμα, και ορίζονται με τον εξής τρόπο:
  - ◇ $(a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d)$
  - ◇ $(a, b) \odot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$
  - ◇ $\mathbf{1}_{\mathbb{C}} = (1, 0)$

Είναι επίσης δυνατός ο $\mathbb{R}-$βαθμωτός πολλαπλασιασμός.

Είναι υπόθεση ρουτίνας κανείς να δείξει ότι η αλγεβρική δομή του **Ορισμού 1.1** είναι πράγματι αλγεβρικό σώμα. Υπενθυμίζουμε μόνο (για χάρη πληρότητας) τον ορισμό του αλγεβρικού σώματος.

Ορισμός 1.2: (Αλγεβρικό σώμα). Ένα αλγεβρικό σώμα είναι μια δομή $(F, \oplus, \odot)$, με πράξεις $\oplus, \odot$ πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού, τέτοια ώστε:

- Η δομή $(F, \oplus, \odot)$ να μεταθετικός δακτύλιος, δηλαδή:
    - $F \neq \emptyset$
    - Η πράξη $\oplus$ είναι καλά ορισμένη, αντιμεταθετική, προσαιτεριστική.
    - Υπάρχει ουδέτερο στοιχείο ($\mathbf{0}_F$) της $\oplus$.
    - Υπάρχει για κάθε $f \in F$ το αντίθετό του ($-f$), ως προς την $\oplus$.
    - Η $\odot$ είναι καλά ορισμένη, αντιμεταθετική, προσαιτεριστική.
    - Η πράξη $\odot$ είναι επιμεριστική ως προς $\oplus$.
- Υπάρχει ουδέτερο στοιχείο ($\mathbf{1}_F$) της $\odot$.
- Υπάρχει για κάθε $f \in F\backslash\{\mathbf{0}_F\}$ το αντίθετό του (f^{-1}), ως προς την $\odot$.
- Το σύνολο F δεν ταυτίζεται με το $\{\mathbf{0}_F\}$.

Το σώμα των μιγαδικών που ορίσαμε έχει πράγματι τις επιθυμητές ιδιότητες που διερευνήσαμε. Μάλιστα, το στοιχείο που παίζει τον ρόλο του $\sqrt{-1}$ είναι το $(0, 1)$. Πράγματι, από τον τρόπο με τον οποίο ο πολλαπλασιασμός ορίστηκε:

$$(0, 1) \odot (0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0) = -1 \cdot (1, 0) = -1 \cdot \mathbf{1}_{\mathbb{C}}$$

Ορισμός 1.3: (Μιγαδική μονάδα). Ο αριθμός $(0, 1)$ θα καλείται μιγαδική μονάδα και θα συμβολίζεται με i.

Υπάρχει λόγος που δεν ταυτίσαμε εξαρχής $i = \sqrt{-1}$. Η ύπαρξη της ρίζας στο $\sqrt{-1}$ μπορεί να οδηγήσει σε κάποιου είδους αντιφάσεις, τις οποίες δεν επιθημούμε κατά την ανάπτυξη της θεωρίας. Η σημαντικότερη είναι η ακόλουθη: Από τις ιδιότητες της ρίζας:

$$\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{(-1) \cdot (-1)} = \sqrt{1} = 1 \neq -1$$

το οποίο δεν είναι επιθυμητό, αφού θέλουμε $i^2 = -1$.

Παρατήρηση 1.1: Κάθε αριθμός του $\mathbb{C}$ μπορεί να γραφεί ως $(a, 0) \oplus [(b, 0) \odot (0, 1)]$, οπότε $(a, b) = (a, 0) \oplus [(b, 0) \odot i]$.

Απόδειξη: Πράγματι, αρκεί να παρατηρήσουμε ότι:

$$(a, b) = (a, 0) \oplus (0, b) = (a, 0) \oplus [(b, 0) \odot (0, 1)]$$

□

Μερικές φορές παραποιούμε την παραπάνω μορφή και γράφουμε $a + bi$ αντί $(a, 0) \oplus [(b, 0) \odot i]$. Παρατηρήστε ότι κανονικά οι πραγματικοί αριθμοί *δεν* είναι υποσύνολο των μιγαδικών αριθμών - οι αντίστοιχοι πραγματικοί αριθμοί στο επίπεδο είναι οι $(x, 0) \in \mathbb{R} \times \{0\}$. Κάνοντας όμως την ταύτηση $x \equiv (x, 0)$ είναι δυνατόν να γράψουμε $a \oplus [b \odot i]$ για τον μιγαδικό αριθμό (a, b), κι απλοποιώντας ακόμη περισσότερο, να γράψουμε $a+bi$. Επιπλέον καταφέρνουμε τον «εγκλεισμό» $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ (αφού $a+0i = a \in \mathbb{R}$) το οποίο δικαιολογεί το ότι συχνά θεωρούμε τους μιγαδικούς ως επέκταση των πραγματικών.

Φυσικά αυτή η ταύτιση δικαιολογείται αυστηρότερα λόγω του ότι η απεικόνιση $(a, 0) \mapsto a$ είναι ένας ισομορφισμός σωμάτων.

Παρατήρηση 1.2: Η απεικόνιση $\varphi : \mathbb{R} \times \{0\} \to \mathbb{R}$ με $(a, 0) \mapsto a$ είναι ισομορφισμός σωμάτων. Παρατηρήστε ότι το $\mathbb{R} \times \{0\}$ είναι υπόσωμα του $\mathbb{C}$, κληρονομώντας τις πράξεις του $\mathbb{C}$.

Απόδειξη: Πράγματι, εξ ορισμού των πράξεων, οι σχέσεις:

$$\varphi((a, 0) + (b, 0)) = \varphi\big((a + b, 0)\big) = a + b = \varphi\big((a, 0)\big) + \varphi\big((b, 0)\big)$$

και
$$\varphi((a,0)\cdot(b,0)) = \varphi\big((ab,0)\big) = ab = \varphi\big((a,0)\big)\cdot\varphi\big((b,0)\big)$$
αληθεύουν. Η φ είναι προφανώς αμφιμονοσήμαντη.

□

Σε κάθε μιγαδικό $z = (a,b)$ αυτά τα a και b καλούνται πραγματικά και (αντίστοιχα) φανταστικά μέρη. Αυστηρότερα:

Ορισμός 1.4: (Πραγματικά και φανταστικά μέρη). Έστω $z \in \mathbb{C}$. Το z πάντοτε γράφεται στη μορφή $z = (a,0) \oplus [(b,0) \odot i]$, όπου $a, b \in \mathbb{R}$. Ορίζουμε *πραγματικό μέρος του* z τον αριθμό $\Re(z) := ||(a,0)|| = a$, και ως *φανταστικό μέρος του* z τον αριθμό $\Im(z) := ||(0,b)|| = b$.

Φυσικά ο παραπάνω ορισμός είναι εφικτός επειδή ορίσαμε $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, οπότε είναι δυνατόν να οριστούν αποστάσεις μέσω της νόρμας $||\cdot||$:
$$||(a,b)|| = \sqrt{a^2+b^2}$$
Είναι επιπλέον δυνατόν να δώσουμε τον ακόλουθο ορισμό:

Ορισμός 1.5: (Μέτρο μιγαδικού αριθμού). Έστω $z \in \mathbb{C}$. Το z έχοντας μορφή διανύσματος, έχει ένα μέτρο $||z||$. Ορίζουμε λοιπόν ως μέτρο του μιγαδικού z τον θετικό πραγματικό αριθμό:
$$|z| := ||z|| = \sqrt{\Re(z)^2 + \Im(z)^2}$$

Πρόταση 1.1: Κάθε αριθμός $z = (a,b)$ του $\mathbb{C}\backslash\{0\} = \mathbb{C}^*$ έχει ως πολλαπλασιαστικό αντίστροφο τον αριθμό:
$$\frac{1}{z} := \frac{a}{a^2+b^2} + \frac{-b}{a^2+b^2}i$$

Απόδειξη: Πράγματι, εξ' ορισμού του πολλαπλασιασμού:
$$\left(\frac{a}{a^2+b^2} + \frac{-b}{a^2+b^2}i\right)\cdot(a+bi) = \left(\frac{a^2}{a^2+b^2} + \frac{b^2}{a^2+b^2}\right) + \left(\frac{-ab}{a^2+b^2} + \frac{ba}{a^2+b^2}\right)i = 1$$
Από τη μεταθετικότητα της «·» έπεται το ζητούμενο, αφού ισχύει και το ότι:
$$(a+bi)\cdot\left(\frac{a}{a^2+b^2} + \frac{-b}{a^2+b^2}i\right) = 1$$

□

Η ύπαρξη του πολλαπλασιαστικού αντιστρόφου στην επέκταση είναι πολύ ενδιαφέρουσα ιδιότητα. Όπως θα δούμε σε επόμενο κεφάλαιο, η ύπαρξη του πολλαπλασιαστικού αντιστρόφου επιτρέπει έναν πιο «άμεσο» ορισμό παραγώγου στο $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$. Σε μαθήματα πολυμεταβλητού απειροστικού λογισμού / γεωμετρικής ανάλυσης ορίζαμε την παράγωγο (γενικά) μέσω υπερεπιπέδων (του διαφορικού σ' ένα σημείο), μιας και δεν μπορούσαμε να διαιρέσουμε με διάνυσμα. Στους μιγαδικούς όμως η ποσότητα:
$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h},\ z \in \mathbb{C},\ h \in \mathbb{C}^*$$
έχει νόημα.

Μια έννοια που θα εμφανίζεται συχνά στη μετέπειτα ανάλυσή μας είναι η έννοια των συζυγών μιγαδικών αριθμών, δηλαδή των μιγαδικών αριθμών που είναι ανάκλαση ενός μιγαδικού αριθμού ως προς την πραγματική ευθεία.

Ορισμός 1.6: (Συζυγής μιγαδικός αριθμός). Ορίζουμε ως συζυγή μιγαδικό αριθμό του z τον $\overline{z}$, ο οποίος είναι συμμετρικός του z ως προς την ευθεία $\underleftrightarrow{xx'}$. Ειδικότερα:
$$\overline{z} := \Re(z) - \Im(z)i$$

Μερικές χρήσιμες ιδιότητες που προκύπτουν με πράξεις και που θα χρησιμοποιούμε είναι οι ακόλουθες:

Παρατήρηση 1.3: (Ιδιότητες της συζυγίας). Για κάθε (ενδεχομένως μη μηδενικούς) μιγαδικούς αριθμούς z και w ισχύουν οι σχέσεις:

- $\overline{(\overline{z})} = z$
- $z \cdot \overline{z} = |z|^2$
- $\dfrac{1}{\overline{z}} = \overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)}$
- $\overline{z}^n = \overline{z^n},\ n \in \mathbb{N}$
- $\overline{z} \cdot \overline{w} = \overline{z \cdot w}$
- $\overline{z} + \overline{w} = \overline{z + w}$
- $\dfrac{\overline{z}}{\overline{w}} = \overline{\left(\dfrac{z}{w}\right)}$

1.3 Η γεωμετρία των μιγαδικών αριθμών

Σε αυτό το σημείο θα αναφέρουμε βασικές γεωμετρικές ιδιότητες των μιγαδικών αριθμών, που θα χρησιμεύσουν στο υπόλοιπο αυτών των σημειώσεων. Εξάλλου η γεωμετρικοποίηση των μιγαδικών αριθμών, όπως και των πραγματικών, θα διευκολύνει την κατανόησή μας και θα επιτρέψει την ανάπτυξη κάποιων αποτελεσμάτων κι εννοιών.

Οι μιγαδικοί αριθμοί $(a, b) = a + ib$ έχουν οριστεί ως σημεία του καρτεσιανού επιπέδου (με μια επιπλέον αλγεβρική δομή, που τους καθιστούν σώμα). Ο ορισμός λοιπόν επιτρέπει την έκφραση των μιγαδικών αριθμών μέσω πολικών συντεταγμένων, την οποία ονομάζουμε *τριγωνομετρική αναπαράσταση*. Έτσι, ένας μιγαδικός αριθμός z μπορεί να γραφεί:

$$z = \rho_z(\cos\theta_z + i\sin\theta_z)$$

για κάποια ακτίνα $\rho_z \geqslant 0$ και γωνία $\theta_z \in \mathbb{R}$. Είναι ίσως ήδη γνωστό ότι αυτή δεν είναι μια μονοσήμαντη γραφή, αφού οποιαδήποτε γωνία:

$$\theta_z \in \left\{2\kappa\pi + \arccos\left(\frac{\Re(z)}{|z|}\right) \,\Big|\, \kappa \in \mathbb{Z}\right\}$$

(δοθέντως του ρ_z) εκφράζει τον ίδιο μιγαδικό αριθμό z. Αν αποσκοπούμε σε αυτό το μονοσήμαντο, είναι σκόπιμο να δώσουμε τον ακόλουθο ορισμό:

Ορισμός 1.7: (Όρισμα μιγαδικού αριθμού). Η γωνία θ_z του μιγαδικού αριθμού z δεν είναι μονοσήμαντα ορισμένη. Ειδικότερα, κάθε πραγματικός αριθμός στο σύνολο:

$$\left\{2\kappa\pi + \arccos\left(\frac{\Re(z)}{|z|}\right) \,\Big|\, \kappa \in \mathbb{Z}\right\}$$

μπορεί να χρησιμοποιηθεί στην τριγωνομετρική αναπαράσταση του αριθμού.

Για να εξασφαλιστεί λοιπόν το μονοσήμαντο της γωνίας, ορίζουμε τη συνάρτηση:

$$\arg : \mathbb{C}^* \to (-\pi, \pi] \text{ με } z \mapsto \begin{cases} \arccos\left(\dfrac{\Re(z)}{|z|}\right), & \text{εάν } z \in \mathbb{C}^*_+ \\ -\arg(\overline{z}), & \text{εάν } z \in \mathbb{C}^* \backslash \mathbb{C}^+ \end{cases}$$

(Ουσιαστικά χρησιμοποιούμε μόνο γωνίες με πλευρά $\overrightarrow{Ox}$ και μέτρο στο $(-\pi, \pi]$). Η τριγωνομετρική μορφή του z για $\theta_z = \arg(z)$ είναι μονοσήμαντη. Αυτή η ιδιότητα θα δειχθεί με την παρατήρηση που ακολουθεί.

Παρατήρηση 1.4: Η συνάρτηση $\arg : \mathbb{C}^* \to (-\pi, \pi]$ έχει αμφιμοσήμαντο περιορισμό $\arg|_{\partial S(0,1)}$, όπου $\partial S(0, 1) = \{z \in \mathbb{R}^2 \mid ||z|| = 1\} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. Ως πόρισμα, κάθε αριθμός $z \in \mathbb{C}$ έχει μοναδική τριγωνομετρική αναπαράσταση με $\theta_z = \arg(z)$.

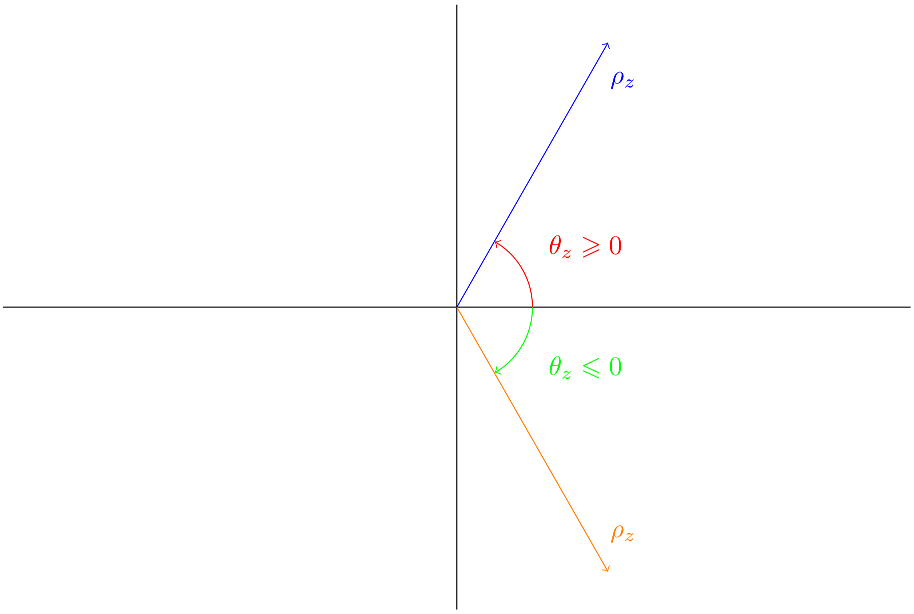
Απόδειξη: Για κάθε $\theta \in [0, \pi]$ επιλέγουμε σημείο $z \in \partial S(0, 1) \cap \mathbb{C}^+$ τέτοιο ώστε $\angle\big((1, 0), z\big) = \theta$. Αντίστοιχα, για κάθε $\theta \in (-\pi, 0)$ επιλέγουμε σημείο $z \in \partial S(0, 1) \cap (\mathbb{C} \backslash \mathbb{C}^+)$ τέτοιο ώστε $\angle\big((1, 0), z\big) = \theta$. Ορίζουμε τη συνάρτηση $\psi(\theta) = z$ και παρατηρούμε ότι αυτή αποτελεί αντίστροφη της arg. Αυτό δείχνει το αμφιμονοσήμαντο της $\arg|_{\partial S(0,1)}$.

Το πόρισμα είναι άμεση συνέπεια του γεγονότος ότι:

$$\forall z \in \mathbb{C}^*,\ z = |z| \cdot \frac{z}{|z|} \textbf{ και } \frac{z}{|z|} \in \partial S(0, 1)$$

□

Πολλές φορές θα γράφουμε θ_z αντί $\arg(z)$, μιας και είναι ευκολότερο στη γραφή.



Αν θυμηθούμε την πρόσθεση διανυσμάτων από το σχολείο, είναι μάλλον σχετικά εύκολο να προδώσουμε μια γεωμετρική εποπτεία στην πρόσθεση μιγαδικών αριθμών (ως πρόσθεση διανυσμάτων). Τι γίνεται όμως με τον πολλαπλασιασμό;

Είδαμε ότι, με αυτήν την επιπρόσθετη δομή στο επίπεδο, κανείς είναι δυνατόν να πολλαπλασιάσει και να διαιρέσει «σημεία» του επιπέδου. Με καρτεσιανές συντεταγμένες, ο πολλαπλασιασμός δύο μιγαδικών αριθμών z και w είδαμε ότι ορίζεται ως εξής:

$$z \cdot w = \big(\Re(z) + i\Im(z)\big) \cdot \big(\Re(w) + i\Im(w)\big) = \Re(z) \cdot \Re(w) - \Im(z) \cdot \Im(w) + i\big(\Re(z) \cdot \Im(w) + \Re(w) \cdot \Im(z)\big)$$

το οποίο, εκ πρώτης όψεως, δεν εμφανίζει κάποια γεωμετρική εποπτεία. «Μετασχηματίζοντας» τα z, w στην τριγωνομετρική τους μορφή, είναι δυνατόν να παρθεί ένας τύπος ο οποίος μπορεί να εκφραστεί γεωμετρικά.

Πρόταση 1.2: Έστω $z, w \in \mathbb{C}$ με τριγωνομετρικές αναπαραστάσεις:

$$z = \rho_z(\cos\theta_z + i\sin\theta_z) \ \textbf{και} \ w = \rho_w(\cos\theta_w + i\sin\theta_w)$$

Τότε το γινόμενο $z \cdot w$ είναι:

$$z \cdot w = \rho_z\rho_w\big(\cos(\theta_z + \theta_w) + i\sin(\theta_z + \theta_w)\big)$$

Δηλαδή, γεωμετρικά μιλώντας, ο πολλαπλασιασμός στρέφει τους μιγαδικούς αριθμούς και κάνει συστολοδιαστολή (rescaling).

Απόδειξη: Πράγματι, έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} z \cdot w &= \rho_z\rho_w\big(\cos\theta_z + i\sin\theta_z\big) \cdot \big(\cos\theta_w + i\sin\theta_w\big) \\ &= \rho_z\rho_w\big(\cos\theta_z\cos\theta_w - \sin\theta_z\sin\theta_w + i(\cos\theta_z\sin\theta_w + \sin\theta_z\cos\theta_w)\big) \end{aligned}$$

και χρησιμοποιώντας τις γνωστές σχέσεις:

$$\cos(\theta_z + \theta_w) = \cos\theta_z\cos\theta_w - \sin\theta_z\sin\theta_w \ \textbf{και} \ \sin(\theta_z + \theta_w) = \cos\theta_z\sin\theta_w + \sin\theta_z\cos\theta_w$$

παίρνουμε το ζητούμενο αποτέλεσμα:

$$z \cdot w = \rho_z\rho_w\big(\cos(\theta_z + \theta_w) + i\sin(\theta_z + \theta_w)\big)$$

□

Ένα άμεσο αλλά πολύ σημαντικό πόρισμα του παραπάνω είναι το ακόλουθο θεώρημα, το οποίο συσχετίζει τις δυνάμεις των μιγαδικών αριθμών με τη μορφή των κανονικών πολυγώνων.

Θεώρημα 1.1: (Τύπος του de Moivre). Έστω $z \in \mathbb{C}$ ένας μιγαδικός αριθμός με τριγωνομετρική αναπαράσταση:

$$z = \rho_z(\cos\theta_z + i\sin\theta_z)$$

Τότε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$:

$$z^n = \rho_z^n\big(\cos(n\cdot\theta_z) + i\sin(n\cdot\theta_z)\big)$$

Απόδειξη: Από την **Πρόταση 1.2**, με επαγωγή.

□

Παρατήρηση 1.5: Ειδικά για τους αριθμούς $z = \cos(2\pi/n) + i\sin(2\pi/n) \in \partial S(0,1)$, για τα διάφορα $n \in \mathbb{N}$ οι αριθμοί z^n είναι κορυφές $n-$γώνου στον κύκλο $\partial S(0,1)$ (εκτός όταν $n=1$ ή $n=2$, όπου είναι σημείο και αντιδιαμετρικά σημεία αντίστοιχα).

Απόδειξη: Αυτό συμβαίνει διότι ο z έχει μέτρο 1 (άρα και όλες του οι δυνάμεις), κι επίσης τα ορίσματα των z^n είναι (διαδοχικά):

$$\frac{2\pi}{n},\ 2\cdot\frac{2\pi}{n},\ 3\cdot\frac{2\pi}{n},\ \cdots, n\cdot\frac{2\pi}{n} = 2\pi$$

□

Αυτό το αποτέλεσμα θα το χρησιμοποιήσουμε για να μελετήσουμε εξισώσεις της μορφής $z^n = w$ - θα δούμε ότι οι λύσεις τέτοιων εξισώσεων είναι κορυφές $n-$γώνου.

1.4 Πολυωνυμικές εξισώσεις

Θεώρημα 1.2: ($n-$οστές μιγαδικές ρίζες). Στο μιγαδικό επίπεδο $\mathbb{C}$ κάθε εξίσωση (ως προς z):

$$z^n = w \text{ (με } n \geqslant 2 \text{ και } w \in \mathbb{C}^*)$$

έχει ακριβώς n το πλήθος λύσεις, οι οποίες σχηματίζουν διάμετρο -όταν $n=2$- και $n-$γωνο -όταν $n>2$- στον κύκλο $\partial S(0, \sqrt[n]{|w|})$.

Απόδειξη: Θεωρούμε την ισοδύναμη εξίσωση:

$$\left(\frac{z}{\sqrt[n]{|w|}}\right)^n = \frac{w}{|w|}$$

και χρησιμοποιούμε την **Παρατήρηση 1.5**. Τότε οι λύσεις της εν λόγω ισοδύναμης εξίσωσης βρίσκονται σε διάμετρο ή είναι κορυφές $n-$γώνου στον κύκλο $\partial S(0,1)$. Αν τώρα $z_0/\sqrt[n]{|w|} \in \partial S(0,1)$ είναι οποιαδήποτε λύση της ισοδύναμης εξίσωσης, η $z_0 \in \partial(0, \sqrt[n]{|w|})$ είναι λύση της αρχικής εξίσωσης, το οποίο αποδεικνύει ότι οι λύσεις z_0 βρίσκονται σε διάμετρο ή πολύγωνο στον κύκλο $\partial S(0, \sqrt[n]{|w|})$.

□

Προς το παρόν λοιπόν είμαστε σε θέση να λύσουμε εξισώσεις της μορφής $z^n = w$. Ειδικά για την περίπτωση $n=2$, είναι σκόπιμο (για ιστορικούς και όχι λόγους) να δούμε και την ≪καρτεσιανή≫ προσέγγιση της λύσης $z^2 = w$, και στην συνέχεια τη λύση της $z^2 + c_1 z + c_2 = 0$ (που είναι μιγαδικό τριώνυμο). Θα συμπεράνουμε ότι στα μιγαδικά τριώνυμα (όπως και στα πραγματικά) υπάρχουν τύποι εύρεσης λύσεων, που συντίθενται με ≪απλές≫ συναρτήσεις (δυνάμεις, ρίζες, προσθέσεις).

Παρατήρηση 1.6: Οι δευτεροβάθμιες πολυωνυμικές εξισώσεις (ως προς z), $z^2 = a + ib$ ($a, b \in \mathbb{R}$), έχουν λύσεις:

$$z = \begin{cases} \pm\left[\sqrt{\dfrac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} + i\cdot\sqrt{\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\right], \text{ εάν } b \geqslant 0 \\ \pm\left[\sqrt{\dfrac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} - i\cdot\sqrt{\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\right], \text{ εάν } b < 0 \end{cases}$$

Απόδειξη: Θεωρούμε $z = x + iy$, ($x, y \in \mathbb{R}$) και αναπτύσσουμε την πολυωνυμική εξίσωση σε:

$$x^2 - y^2 + 2xyi = a + bi \Rightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases}$$

Εάν $b = 0$, η περίπτωση ανάγεται στους πραγματικούς αριθμούς. Εάν $b \neq 0$ τότε $x, y \neq 0$, οπότε η ποσότητα $y = b/2x$ έχει νόημα. Με αντικατάσταση στο προκύπτον σύστημα παίρνουμε την ακόλουθη δευτεροβάθμια εξίσωση (ως προς x^2):

$$x^4 - \frac{b^2}{4} = ax^2 \Rightarrow x^4 - ax^2 - b^2 = 0$$

η οποία έχει λύσεις:

$$x^2 = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + b^2}}{2} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}$$

Για το y παρατηρούμε (κι αυτό για να αποφύγουμε τις πολλές πράξεις) ότι $x = b/2y$ κι επιπλέον ότι $y^2 - x^2 = -a$ (αυτό εμφανίζει κάποιου είδους συμμετρία με την προηγούμενη περίπτωση). Οπότε εφαρμόζουμε συμμετρικά τον τύπο του x για a το $-a$, και λαμβάνουμε τελικά ότι:

$$y = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}}$$

Έπεται πλέον η γενική λύση της πολυωνιμικής εξίσωσης:

$$z = \begin{cases} \pm\left[\sqrt{\dfrac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} + i \cdot \sqrt{\dfrac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}}\right], & \text{εάν } b \geqslant 0 \\ \pm\left[\sqrt{\dfrac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} - i \cdot \sqrt{\dfrac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}}\right], & \text{εάν } b < 0 \end{cases}$$

η οποία -σημειωτέον- επαληθεύεται και στην περίπτωση $b = 0$ (ακόμη κι αν τη βρήκαμε υποθέτοντας $b \neq 0$).

□

Παρατήρηση 1.7: Οι δευτεροβάθμιες πολυωνυμικές εξισώσεις (ως προς z), $z^2 + c_1 z + c_2 = 0$ ($c_1, c_2 \in \mathbb{C}$), έχουν λύσεις:

$$z = -\frac{c_1}{2} + z_0$$

όπου z_0 είναι λύσεις της $z^2 = c_1^2/4 - c_2$.

Απόδειξη: Όπως και στην πραγματική περίπτωση, μπορούμε να γράψουμε:

$$z^2 + \frac{2c_1}{2}z + \frac{c_1^2}{4} - \frac{c_1^2}{4} + c_2 = 0 \Rightarrow \left(z + \frac{c_1}{2}\right)^2 = \frac{c_1^2}{4} - c_2$$

κι έπειτα να χρησιμοποιήσουμε την **Παρατήρηση 1.6**.

□

Έτσι λοιπόν αποδεικνύεται η ύπαρξη κλειστού τύπου για την επίλυση δευτεροβάθμιων εξισώσεων. Είναι δυνατόν κανείς να βρει κλειστό τύπο και για τις τριτοβάθμιες εξισώσεις, πρώτα όμως χρειάζεται ένα λήμμα.

Λήμμα 1.1: Έστω $P(z) = z^3 + c_1 z^2 + c_2 z + c_3$ ($c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{C}$) ένα τριτοβάθμιο πολυώνυμο. Με τον αμφιμονοσήμαντο μετασχηματισμό:

$$z \mapsto z - \frac{b}{3a}$$

το P αποκτά τη μορφή $P^*(z) = z^3 + c_2^* z + c_3^*$, ($c_2^*, c_3^* \in \mathbb{C}$). Το P^* ονομάζεται συνεπτυγμένη κυβική μορφή του P.

Επειδή ο μετασχηματισμός είναι αμφιμονοσήμαντος, οι λύσεις της $P^*(z) = 0$ δίνουν -μέσω του αντίστροφου μετασχηματισμού- τις λύσεις της $P(z) = 0$. ■

Θεώρημα 1.3: (Λύσεις τριτοβάθμιων εξισώσεων). Υπάρχει κλειστός τύπος που βρίσκει τις λύσεις κάθε τριτοβάθμιας πολυωνυμικής εξίσωσης:

$$P(z) = z^2 + c_1 z^2 + c_2 z + c_3 = 0$$

Μάλιστα, στους μιγαδικούς, κάθε τέτοια εξίσωση έχει τρεις πραγματικές λύσεις, ή μία πραγματική λύση και δύο μιγαδικές.

Απόδειξη: Δεδομένου του **Λήμματος 1.1**, μπορούμε να μετασχηματίσουμε την $P(z) = 0$ στην $P^*(z) = 0$ και να μελετήσουμε την τελευταία αντί της πρώτης. Τότε, λύσεις της $P(z) = 0$ θα είναι οι:

$$z = z_0 + \frac{b}{2a}, \text{ όπου } z_0 \text{ είναι λύση της } P^*(z) = 0$$

Έστω λοιπόν η πολυωνυμική εξίσωση $P^*(z) = z^3 + az + b = 0$. Θεωρούμε τον μετασχηματισμό $z = u + v$ με $uv = -a/3$ και η συνεπτυγμένη μορφή $P^*(z) = 0$ γίνεται:

$$\begin{aligned}
0 &= P^*(u+v) \\
&= (u+v)^3 + a(u+v) + b \\
&= u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 + a(u+v) + b \\
&= u^3 - a(u+v) + a(u+v) + v^3 + b \\
&= u^3 - \frac{a^3}{27} \cdot \frac{1}{u^3} + b
\end{aligned}$$

Κατά συνέπεια:

$$u^6 + bu^3 - \frac{a^3}{27} = 0$$

το οποίο είναι τριώνυμο ως προς u^3. Το τριώνυμο αυτό έχει λύσεις που προσδιορίζονται σε κλειστή μορφή, βάση της **Παρατήρηση 1.7**. Καθεμία από τις προηγούμενες λύσεις, εφόσον τα u, v είναι υψωμένα εις την τρίτη, είναι εξισώσεις, που έχουν (τουλάχιστον) μια λύση στους πραγματικούς. Μάλιστα οι:

$$\operatorname{sign}(u^3) \cdot \sqrt[3]{|u^3|}, \ \operatorname{sign}(v^3) \cdot \sqrt[3]{|v^3|}$$

είναι λύσεις. Ας υποθέσουμε λοιπόν s την πραγματική ρίζα της u^3 και t την πραγματική ρίζα της v^3. Σύμφωνα με το **Θεώρημα 1.2**, οι άλλες δύο μιγαδικές λύσεις των εξισώσεων των u, v βρίσκονται στις δύο μιγαδικές κορυφές των ισοσκελών τριγώνων με κορυφές s και t αντίστοιχα, τα οποίο είναι εγγεγραμμένα στους κύκλους $\partial S(O, |s|)$ και $\partial S(O, |t|)$. Συγκεκριμένα:

$$u = \begin{cases} 1 \cdot s \textbf{ ή} \\ \left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) \cdot s \textbf{ ή} \\ \left(-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) \cdot s \end{cases}$$

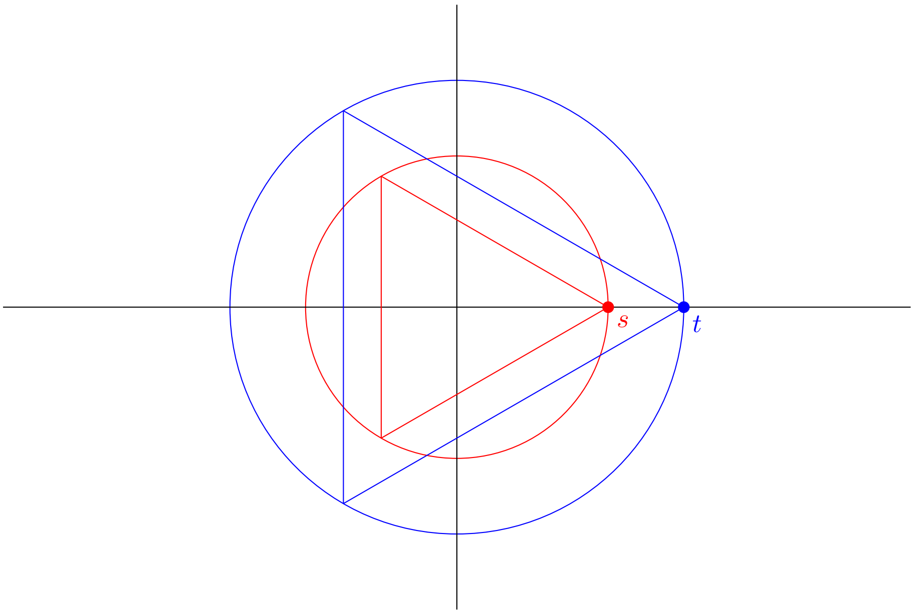
$$v = \begin{cases} 1 \cdot t \textbf{ ή} \\ \left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) \cdot t \textbf{ ή} \\ \left(-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) \cdot t \end{cases}$$

(όπου ο πολλαπλασιασμός των s, t γίνεται ώστε να ≪στραφούν≫ οι λύσεις s και t στις άλλες κορυφές των ισοσκελών τριγώνων, σύμφωνα με την **Πρόταση 1.2**).

Σε αυτό το σημείο πρέπει να παρατηρηθεί ότι δεν δίνουν όλοι οι 9 συνδυασμοί των u, v λύσεις της εξίσωσης $z^3 + az + b = 0$ (δηλ. $u + v = z, \ uv = -a/3$). Συγκεκριμένα, μόνο οι ακόλουθες αποτελούν λύσεις της εν λόγω εξίσωσης:

$$\begin{aligned}
z_0 &= s + t \\
z_1 &= \left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) \cdot s + \left(-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) \cdot t \\
z_2 &= \left(-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) \cdot s + \left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) \cdot t
\end{aligned}$$

Μάλιστα, $z_0 \in \mathbb{R}$ και $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.



□

Είναι ενδιαφέρον -αν και κουραστικό- κανείς να μελετήσει πώς προσδιορίζονται οι λύσεις μίας τεταρτοβάθμιας εξίσωσης, σαν λογικό βήμα από τις τριτοβάθμιες. Ακόμη πιο ενδιαφέρον είναι ότι δεν υπάρχει κλειστός τύπος για την επίλυση πεμπτοβάθμιων ή μεγαλύτερου βαθμού εξισώσεων. Εμείς δεν θα αναφερθούμε στο πώς αποδεικνύεται αυτή η μη ύπαρξη, καθώς μια τέτοια παρουσίαση θα απαιτούσε τεχνικές της Θεωρίας Galois. Παρόλα αυτά, παραπέμπουμε στο (Ma), σελ. 388-389.

Πάντως τουλάχιστον είναι δυνατόν να αποδειχθεί ότι κάθε $n-$οστού ($n \geqslant 1$) βαθμού πολυωνυμική εξίσωση έχει ακριβώς n (όχι κατ' ανάγκη διακεκριμένες) λύσεις.

Θεώρημα 1.4: (Θεμελιώδες θεώρημα της άλγεβρας). Κάθε πολυωνυμική εξίσωση $P(z) = 0$ βαθμού $n \geqslant 1$ (με μιγαδικούς συντελεστές) έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $\mathbb{C}$.

Κατ' επέκταση, λειτουργώντας επαγωγικά, η $P(z) = 0$ έχει ακριβώς n (όχι κατ' ανάγκη διακεκριμένες) λύσεις.

Απόδειξη: Έστω P ένα μιγαδικό πολυώνυμο, το οποίο γράφεται ως:

$$z^n + \sum_{k+1\in[n]} c_k z^k, \text{ με } c_k \in \mathbb{C}$$

Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι η μελέτη αρκεί να περιοριστεί στα μονικά πολυώνυμα, αφού ο μη μηδενικός μεγιστοβάθμιος συντελεστής μπορεί να διαιρέσει τα δύο μέλη της πολυωνυμικής εξίσωσης και να προσδώσει εξίσωση με μονικό πολυώνυμο μόνο.

Εφόσον κάθε όρος του πολυωνύμου είναι ουσιαστικά ένα διάνυσμα στο $\mathbb{R}^2$, μπορούμε εφαρμόζοντας την τριγωνική ανισότητα, να πάρουμε ότι:

$$|P(z)| \geqslant |z|^n - \sum_{k+1\in[n]} c_k|z|^k = |z|^n \left[1 - \sum_{k+1\in[n]} \frac{c^k}{|z|^{n-k}}\right]$$

Παρατηρούμε ότι καθώς $|z| \to \infty$, ισχύει $|P(z)| \to \infty$. Επομένως, θα υπάρχει ένας αριθμός $r_0 \in \mathbb{R}_+^*$ τέτοιος ώστε:

$$\forall z \in \mathbb{C},\ |z| > r_0 :\ |P(z)| > |P(w)| > 0, \text{ όπου } w \in \mathbb{C} :\ P(w) \neq 0$$

Θεωρούμε τον πραγματικό αριθμό $\mu = \min |P|\big(B(O, r_0)\big)$. Ο αριθμός μ υπάρχει, αφού το σύνολο $B(O, r_0)$ είναι συμπαγές στο $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ και η διανυσματική συνάρτηση $|P| : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής.

Ένα γνωστό λοιπόν θεώρημα δίνει, αξιοποιώντας τις δύο παρατηρήσεις, ότι υπάρχει ελάχιστο στοιχείο μ το συνόλου $|P|\big(B(O, r_0)\big)$. Το γεγονός ότι $\forall z \in B(O, r_0)^c$ ισχύει $|P(z)| > |P(w)| \geqslant \mu$ εξασφαλίζει ότι κάθε άλλη τιμή της συνάρτησης εκτός του $B(O, r_0)$ δεν μπορεί να γίνεται μικρότερη του μ. Επομένως, το

μ είναι επίσης το ελάχιστο στοιχείο του συνόλου $|P|(\mathbb{C})$.

Εφόσον λοιπόν $\mu = \min|P|(\mathbb{C})$, υπάρχει αριθμός $z_0 \in \mathbb{C}$ τέτοιος ώστε $|P|(z_0) = \mu$. Ισχυριζόμαστε ότι $P(z_0) = 0$.

Προς άτοπο υποθέτουμε ότι $P(z_0) \neq 0$ και θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$Q(z) = \frac{|P(z+z_0)|}{|P(z_0)|} = 1 + \sum_{k \in [n]} a_k z^k$$

Ο σταθερός όρος 1 προκύπτει από το γεγονός ότι $Q(0) = 1$. Για τη συνάρτηση Q ισχύει $Q(z) \geqslant 1$, αφού το $|P(z_0)|$ είναι ελάχιστο.

Θεωρούμε κ τον ελάχιστο φυσικό αριθμό για τον οποίο $a_\kappa \neq 0$. Εάν $\zeta \in \mathbb{C}$ είναι ένας αριθμός τέτοιος ώστε $\zeta^\kappa = -\dfrac{|a_\kappa|}{a_\kappa}$, τότε η τιμή του Q υπολογιζόμενη στον αριθμό $r\zeta$, όπου $r > 0$, δίνει:

$$\begin{aligned}|Q(r\zeta)| &= \Big|1 + \overbrace{a_\kappa r^\kappa \zeta^\kappa}^{-|a_\kappa| r^\kappa} + \sum_{\kappa < k \leqslant n} a_k r^k \zeta^k\Big| \\ &\leqslant \big|1 - |a_\kappa| r^\kappa\big| + \sum_{\kappa < k \leqslant n} |a_k r^k \zeta^k|\end{aligned}$$

Διαλέγουμε ακτίνα $0 < r < r_1 \in \mathbb{R}_+^*$ αρκετά μικρή, τέτοια ώστε $1 - |a_\kappa| r^\kappa > 0$, και κατ' επέκταση $\big|1 - |a_\kappa| r^\kappa\big| = 1 - |a_\kappa| r^\kappa$.

$$\begin{aligned}|Q(r\zeta)| &\leqslant 1 - |a_\kappa| r^\kappa + \sum_{\kappa < k \leqslant n} |a_k r^k \zeta^k| \\ &= 1 - |a_\kappa| r^\kappa + \sum_{\kappa < k \leqslant n} |a_k r^k| \\ &= 1 - r^\kappa \left(|a_\kappa| - \sum_{\kappa < k \leqslant n} |a_k r^{k-\kappa}| \right)\end{aligned}$$

Και πάλι, μπορούμε να διαλέξουμε ακτίνα $0 < r < r_2 \leqslant r_1 \in \mathbb{R}_+^*$ τέτοια ώστε $|a_\kappa| - \sum_{\kappa < k \leqslant n} |a_k r^{k-\kappa}| = \theta > 0$. Κατ' επέκταση:

$$Q(r\zeta) \leqslant 1 - r^\kappa \theta < 1 \Rightarrow Q(r\zeta) < 1$$

Αυτό είναι προφανώς άτοπο, το οποίο σημαίνει ότι $P(z_0) = 0$. Το θεώρημα λοιπόν αποδεικνύεται.

□

Παρά το ότι ονομάζεται ≪θεμελιώδες θεώρημα της άλγεβρας≫ δεν χρησιμοποιείται και πολύ άλγεβρα στην απόδειξή του. Ακόμη μία αναλυτική απόδειξη θα δόσουμε αργότερα, όταν θα έχουμε περισσότερα εργαλεία στη διάθεσή μας. Μια αλγεβρική απόδειξη (με Θεωρία Galois) μπορεί να βρεθεί στο (Ma), σελ. 404-405.

1.5 Βασικές συναρτήσεις στο μιγαδικό επίπεδο

1.5.1 Η $n-$οστή ρίζα

Στο **Θεώρημα 1.2** είδαμε ότι η εξίσωση (ως προς z), $z^n = w$ ($w \in \mathbb{C}^*$), έχει ακριβώς n διακεκριμένες λύσεις. Όπως και στους πραγματικούς αριθμούς (που η $x^n = y$ μπορεί να έχει θετική κι αρνητική λύση) δεν μπορούμε να ορίσουμε συνάρτηση ρίζας $\sqrt[n]{w} =$ ρίζα της ≪$z^n = w$≫. Γι' αυτό θα ορίζουμε ως $n-$οστή ρίζα του w την πρώτη (με αριστερόστροφο προσανατολισμό) ρίζα της $z^n = w$, ώστε να εξασφαλίζεται το ≪καλώς ορισμένο≫ της συνάρτησης.

Ορισμός 1.8: ($n-$οστή ρίζα). Έστω $n \geqslant 1$ και $w \in \mathbb{C}$. Ορίζουμε ως $n-$οστή ρίζα του w τον αριθμό:

$$\sqrt[n]{w} = \begin{cases} 0, \text{ εάν } w = 0 \\ \sqrt[n]{|w|}\big(\cos(\theta_w/n) + i\sin(\theta_w/n)\big), \text{ εάν } w \neq 0 \end{cases}$$

ο οποίος (όταν $w \neq 0$) είναι η πρώτη, με αριστερόστροφο προσανατολισμό, λύση της $z^n = w$.

Δοθέντος του προηγούμενου ορισμού, μπορούμε να δούμε την ακόλουθη γεωμετρική ιδιότητα της ρίζας.

Πρόταση 1.3: Η $n-$οστή ρίζα ως συνάρτηση είναι ένας $1-1$ και επί μετασχηματισμός του μιγαδικού επιπέδου $\mathbb{C}$, προς τη γωνία:

$$\angle(\lambda, \overline{\lambda}) \cup \underrightarrow{O\lambda}$$

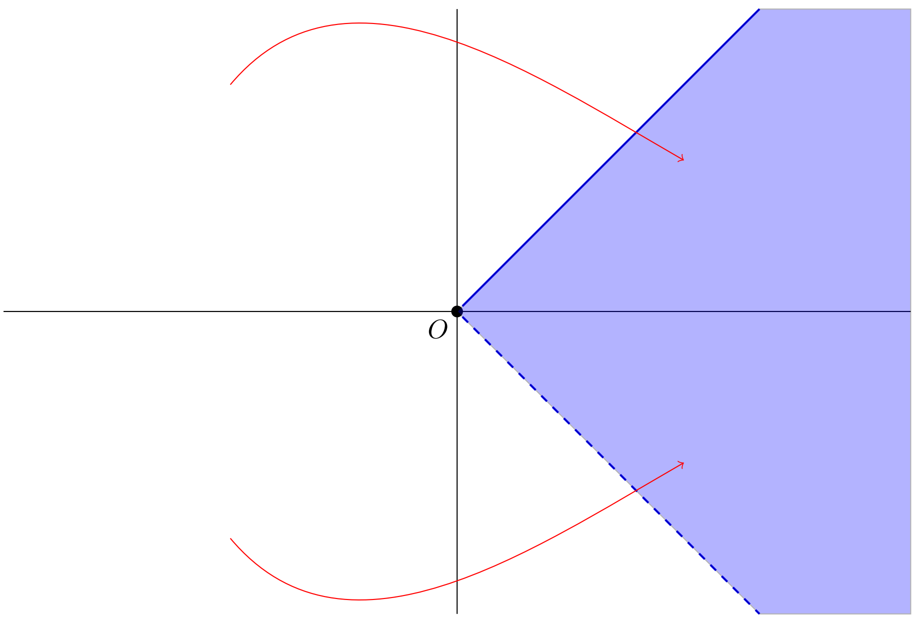
όπου $\lambda = \cos(\pi/n) + i\sin(\pi/n)$.

Απόδειξη: Πράγματι, ο τύπος του de Moivre μας εξασφαλίζει το επί της συνάρτησης:

$$\sqrt[n]{\cdot} : \mathbb{C} \to \angle(\lambda, \overline{\lambda}) \cup \underrightarrow{O\lambda}$$

μιας και αν $z = \rho_z(\cos\theta_z + i\sin\theta_z) \in \angle(\lambda, \overline{\lambda}) \cup \underrightarrow{O\lambda}$, τότε η τιμή $\sqrt[n]{z^n} = \sqrt[n]{\rho_z^n\big(\cos(n\theta_z) + i\sin(n\theta_z)\big)}$ είναι z.

Όσον αφορά το $1-1$, εάν u, v είναι δύο μιγαδικοί που ικανοποιούν την εξίσωση (ως προς z), $z^n = w$, τότε αυτοί βρίσκονται στο ίδιο πολύγωνο ($n-$γωνο) λύσεων. Εξ' ορισμού της ρίζας, $u = v$.



□

Γενικά οι μιγαδικές συναρτήσεις ως μετασχηματισμοί του επιπέδου είναι κάτι που χρησιμοποιείται αρκετά. Μάλιστα μερικές απ' αυτές έχουν καλές ιδιότητες, όπως η διατήρηση των γωνιών.

1.5.2 Η εκθετική συνάρτηση

Εδώ θα κάνουμε περισσότερη ανάλυση με σκοπό να παρουσιάσουμε φυσιολογικά την επέκταση της εκθετικής συνάρτησης στο επίπεδο. Μάλιστα θα ξεκινήσουμε με έναν όχι μαθηματικό, αλλά φυσικό τρόπο προσέγγισης της εν λόγω έννοιας, που θα δικαιολογίσει (ευελπιστούμε) τον ορισμό που θα ακολουθήσει.

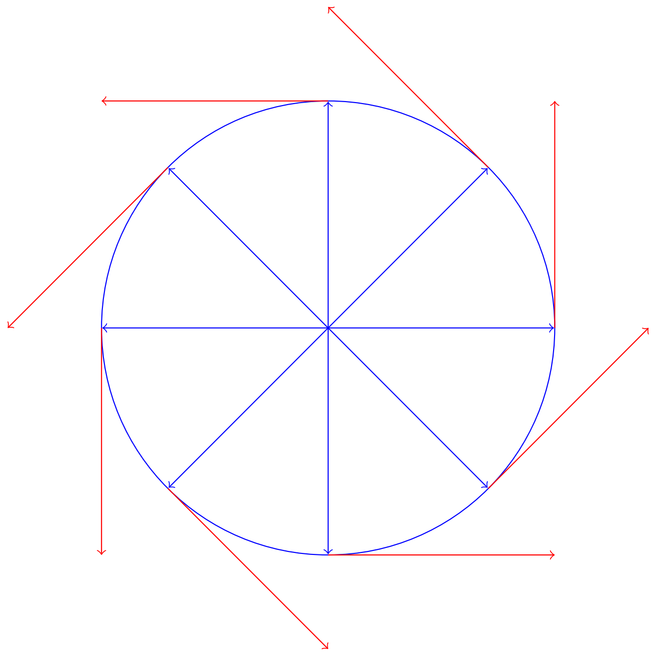
Εν τω μεταξύ εδώ αφήστε τη φαντασία σας κάπως ελεύθερη, και μην περιορίζεστε από το ότι δεν έχουμε ακόμη ορίσει παραγώγους ή ό,τι άλλο χρειαστεί. Εξάλλου, αυτό που θα ακολουθήσει είναι διαισθητικό και όχι μαθηματικό.

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε καταφέρει να ορίσουμε με κάποιον τρόπο την e^{s+it} ($s, t \in \mathbb{R}$), ως μιγαδική επέκταση της αντίστοιχης πραγματικής. Τότε κατ' αρχάς $e^{s+it} = e^s \cdot e^{it}$, με το e^s να είναι ορισμένο (στους πραγματικούς), οπότε χρειάζεται η ποσότητα e^{it} να μελετηθεί. Αν παραγωγίσουμε την e^{it} ως προς

t, τότε θα έχουμε:

$$\frac{de^{it}}{dt} = i \cdot e^{it}$$

το οποίο δείχνει, βάσει της **Πρότασης 1.2**, ότι η «ταχύτητα» ενός κινητού με «θέση» e^{it} είναι κάθε χρονική στιγμή t κάθετη στη «θέση». Παρατηρήστε ότι $i = \cos(\pi/2) + i\sin(\pi/2) = (0,1)$, οπότε ο πολλαπλασιασμός με i στρέφει κατά $\pi/2$.



Επιπλέον, το μέτρο της ταχύτητας και της θέσης είναι σταθερά και ισούνται. Οπότε η τροχιά του κινούμενο σώματος θα είναι κύκλος, ο οποίος θα έχει ακτίνα 1 (αφού $e^{i0} = e^0 = 1$) και θα εκφράζεται μέσω μίας εξίσωσης:

$$e^{it} = \cos(at) + i\sin(at)$$

για κάποιο $a \in \mathbb{R}$. Επειδή θέλουμε τη χρονική στιγμή 0 η ταχύτητα να είναι 1 κατά μέτρο, έπεται ότι $a = 1$ και κατ' επέκταση:

$$e^{it} = \cos t + i \sin t$$

Έχοντας αυτή τη διαισθητική παρατήρηση υπόψη, μπορούμε να προχωρίσουμε σε έναν ορισμό.

Ορισμός 1.9: (Εκθετική συνάρτηση). Ορίζουμε ως εκθετική συνάρτηση $e^{(\cdot)} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ τη συνάρτηση με τύπο:

$$e^z = e^{\Re(z)}\big(\cos\Im(z) + i\sin\Im(z)\big)$$

Μερικές φορές συμβολίζουμε $\exp = e^{(\cdot)}$.

Παρατήρηση 1.8: Η εκθετική συνάρτηση του **Ορισμού 1.9** έχει ιδιότητες ανάλογες της πραγματικής εκθετικής συνάρτησης. Συγκεκριμένα:

i. Η συνάρτηση $e^{(\cdot)}|_{\mathbb{R}}$ είναι η πραγματική εκθετική.

ii. Για κάθε $z, w \in \mathbb{C}$ έχουμε $e^{z+w} = e^z \cdot e^w$

iii. Η $e^{(\cdot)}$ είναι επί του $\mathbb{C}^*$.

Απόδειξη: Με πράξεις.

□

Εν τω μεταξύ, με τον τρόπο που ορίσαμε την εκθετική συνάρτηση, η πολική αναπαράσταση ενός αριθμού μπορεί να πάρει μια νέα μορφή.

Παρατήρηση 1.9: Κάθε μιγαδικός αριθμός $z \in \mathbb{C}^*$ γράφεται στη μορφή:

$$z = \rho_z e^{i\theta_z} = |z| \cdot e^{i\theta_z}$$

Απόδειξη: Πράγματι, αυτό έπεται από τον ορισμό της εκθετικής συνάρτησης και του τύπου:

$$z = \rho_z(\cos\theta_z + i\sin\theta_z) = |z|(\cos\theta_z + i\sin\theta_z)$$

□

Πάντως, σε αντίθεση με την πραγματική εκθετική συνάρτηση, η μιγαδική συνάρτηση $e^{(\cdot)}$ δεν είναι επί. Αυτό έχει σχέση με αυτή τη γεωμετρική εποπτεία (κύκλος) που είδαμε.

Παρατήρηση 1.10: Η μιγαδική συνάρτηση $e^{(\cdot)}$ δεν είναι $1-1$, καθώς για κάθε $k \in \mathbb{N}$:

$$e^z = e^{2ik\pi + z}$$

Η **Παρατήρηση 1.10** φαίνεται να αποτελεί ≪πρόβλημα≫, αφού ο λογάριθμος δεν θα μπορεί να οριστεί φυσιολογικά ως αντίστροφη της εκθετικής.

1.5.3 Ο λογάριθμος

Ο συνήθης λογάριθμος ως πραγματική συνάρτηση, ορίζεται ως αντίστροφη συνάρτηση της πραγματικής εκθετικής. Παρόμοια διαδικασία δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί στο μιγαδικό επίπεδο για τον ορισμό του λογαρίθμου, απλούστατα διότι η συνάρτηση $e^{(\cdot)}$ δεν είναι $1-1$. Η εξίσωση λοιπόν ως προς z, για $w \in \mathbb{C}^*$:

$$e^z = w = |w|(\cos\theta_w + i\sin\theta_w)$$

αναμένεται να έχει παραπάνω από μία λύσεις. Ειδικότερα:

$$z \in \exp^{-1}(w) = \left\{ \log(|w|) + (2k\pi + \theta_w)\cdot i \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Θεωρούμε γι' αυτόν τον λόγο ως συνάρτηση - λογάριθμο $\log : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ στους μιγαδικούς, μόνο τον κλάδο:

$$\log w = \log(|w|) + i\theta_w$$

Οπότε, από εδώ και στο εξής, οι εξισώσεις της μορφής $e^z = w$ θα επιλύονται ως εξής:

$$e^z = w \Rightarrow z = \log w \mod (2\pi i)$$

Ορισμός 1.10: (Λογάριθμος). Ορίζουμε τη συνάρτηση λογάριθμο $\log : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ στους μιγαδικούς, μέσω του τύπου:

$$\log z = \log(|z|) + i\theta_z$$

Ο υπολογισμός της ποσότητας $\log(|z|)$ ουσιαστικά επαφίεται στην πραγματική περίπτωση, κι γι' αυτό δεν έχουμε πρόβλημα στον ορισμό.

Παρά το ότι ο λογάριθμος, στην περίπτωσή μας, δεν αποτελεί αντίστροφη συνάρτηση της εκθετικής, μπορούμε περιορίζοντας την εκθετική να πάρουμε αυτήν την έννοια αντιστρεψιμότητας.

Παρατήρηση 1.11: Έστω Λ να είναι το σύνολο $\Lambda = \{z \in \mathbb{C} \mid \Im(z) \in (-\pi, \pi]\}$. Η συνάρτηση $e^{(\cdot)}|_\Lambda : \Lambda \to \mathbb{C}^*$ είναι αμφιμονοσήμαντη, αφού υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση $\log : \mathbb{C}^* \to \Lambda$. Η ίδια παρατήρηση μας δίνει ότι η συνάρτηση του μιγαδικού λογαρίθμου είναι αμφιμονοσήμαντη.

Απόδειξη: Πράγματι, στο Λ δεν έχει νόημα να γράψουμε:

$$e^z = w \Rightarrow z = \log w \mod (2\pi i) = \log(|w|) + i\theta_w \mod (2\pi i)$$

αφού το z δεν μπορεί να είναι ≪πολύ μακρυά≫, κατακόρυφα από το 0. Σ' αυτήν την περίπτωση:

$$e^z = w \Rightarrow z = \log w = \log(|w|) + i\theta_w$$

□

Παρατήρηση 1.12: Γενικά, υπάρχουν εν γένει περισσότεροι από έναν $z \in \mathbb{C}$ τέτοιοι ώστε η εξίσωση ως προς z:

$$\log(e^z) = w$$

να επιλύεται. Αυτό διότι η $e^{(\cdot)}$ δεν είναι $1-1$, και ειδικότερα κάθε αριθμός z της μορφής $z = w \mod (2\pi i)$ ικανοποιεί την παραπάνω εξίσωση. Εν γένει λοιπόν, η σχέση:

$$\log(e^z) = w$$

δεν αληθεύει, παρά μόνο αν η $e^{(\cdot)}$ βρίσκεται σε χωρίο τέτοιο ώστε να αποτελεί αντίστροφο συνάρτηση της $\log$. Δηλαδή η σχέση αληθεύει μόνο στο χωρίο Λ, σύμφωνα με την **Παρατήρηση 1.11**.

Αντίθετα, η εξίσωση ως προς z:

$$e^{\log z} = w$$

έχει μοναδική λύση την $z = w$. Αυτό έπεται από το $1-1$ της συνάρτησης του μιγαδικού λογαρίθμου.

Μπορεί κανείς να πει πολλά πράγματα για την εκθετική συνάρτηση και τον λογάριθμο. Εμείς αργότερα θα δούμε τη παραγωγισιμότητα αυτών των συναρτήσεων και την ανάλυσή τους σε δυναμοσειρές.

1.5.4 Η εκθετική με γενική βάση

Ορισμός 1.11: (Εκθετική με γενική βάση). Έστω $a \in \mathbb{C}$. Ορίζουμε τη συνάρτηση $a^{(\cdot)} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ μέσω του τύπου:

$$a^z = e^{z \log a}$$

Αυτός ο ορισμός είναι φυσιολογικός, κατ' αναλογία με την πραγματική περίπτωση, και πράγματι πολλές ιδιότητες της εκθετικής μεταβιβάζονται στην μιγαδική περίπτωση. Παρόλα αυτά, με την παρακάτω πρόταση θα δείξουμε ότι μια βασική ιδιότητα δεν ισχύει.

Πρόταση 1.4: Η σχέση:

$$(\alpha^\beta)^\gamma = \alpha^{\beta\gamma}$$

δεν ισχύει για κάθε $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$.

Απόδειξη: Μπορούμε να βρούμε ένα αντιπαράδειγμα, και συγκεκιμένα $(e^{2\pi i})^{1/2} = 1^{1/2} = 1$ αλλά $e^{2\pi i/2} = e^{\pi i} = -1$.

Πέρα όμως από το αντιπαράδειγμα, γενικά υπάρχει μια «μεγάλη» οικογένεια αριθμών που δεν ικανοποιεί τη σχέση $(\alpha^\beta)^\gamma = \alpha^{\beta\gamma}$.

Βήμα I: Υποθέτουμε προς άτοπο ότι η σχέση $(\alpha^\beta)^\gamma$ ισχύει για κάθε $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$, και θεωρούμε (για λόγους που θα γίνουν σαφείς αργότερα) σταθεροποιημένα α, β ώστε $\alpha^\beta \neq 1 \Rightarrow \log(\alpha^\beta) \neq 0$.

Βήμα II: Έστω $\gamma \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε:

$$\gamma_1 = -\pi - \min\{0, \arg\log(\alpha^\beta)\} < \arg\gamma < \pi - \max\{0, \arg\log(\alpha^\beta)\} = \gamma_2 \tag{1.1}$$

δηλαδή $\gamma \in \angle(e^{i\gamma_1}, e^{i\gamma_2})$.

Βήμα III: Αν αληθεύει ότι $(\alpha^\beta)^\gamma = \alpha^{\beta\gamma}$, τότε:

$$\exp\big(\gamma \log(\alpha^\beta)\big) = \exp\big(\log(\alpha^{\beta\gamma})\big) \Rightarrow \gamma\log(\alpha^\beta) = \log(\alpha^{\beta\gamma}) + 2k\pi i, \text{ για κάποιο } k \in \mathbb{Z}$$

Επειδή $\Im \log(\alpha^{\beta\gamma}) \in (-\pi, \pi]$, έπεται ότι $\Im\big(\gamma\log(\alpha^\beta)\big) = \Im\big(\log(\alpha^\beta) + 2k\pi i\big) \in \big((2k-1)\pi, (2k+1)\pi\big]$.

Βήμα IV: Εφόσον ισχύει η (1.1), η γωνία $\theta = \arg\big(\gamma\log(\alpha^\beta)\big)$ είναι μεταξύ των $-\pi$ και π. Επιπλέον, θα επιλέξουμε γ τέτοιο ώστε $\arg\gamma \neq -\arg\log(\alpha^\beta)$ (ώστε $\theta \neq 0$). Επίσης, ορίζουμε $\varepsilon = \exp\big(-i\arg\log(\alpha^\beta)\big)$ και την ημιευθεία $\underrightarrow{O\xi}$ (που είναι η ημιευθεία των σημείων που δεν σχηματίζουν γωνία $-\arg\log(\alpha^\beta)$).

Βήμα V: Αν γράψουμε:

$$\Im\big(\gamma\log(\alpha^\beta)\big) = \big|\gamma\log(\alpha^\beta)\big|\sin\theta = |\gamma| \cdot \big|\log(\alpha^\beta)\big| \cdot \sin\theta \in \big((2k-1)\pi, (2k+1)\pi\big]$$

τότε:

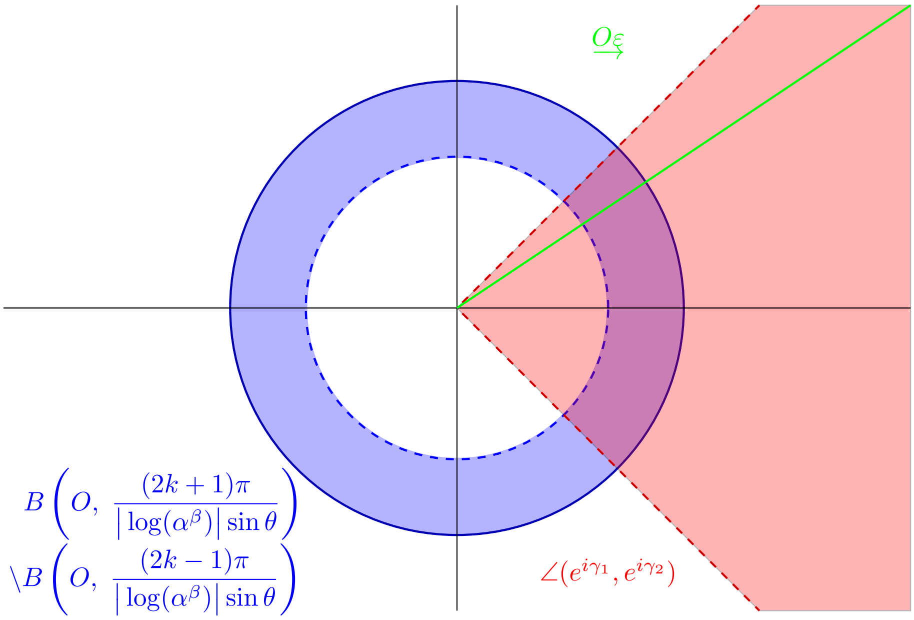
$$\frac{(2k-1)\pi}{\big|\log(\alpha^\beta)\big|\sin\theta} < |\gamma| \leqslant \frac{(2k+1)\pi}{\big|\log(\alpha^\beta)\big|\sin\theta}$$

και από τα προηγούμενα:

$$\gamma \in \angle(e^{i\gamma_1}, e^{i\gamma_2}) \cap B\left(O,\ \frac{(2k+1)\pi}{\big|\log(\alpha^\beta)\big|\sin\theta}\right) \backslash B\left(O,\ \frac{(2k-1)\pi}{\big|\log(\alpha^\beta)\big|\sin\theta}\right) \backslash \underrightarrow{O\xi} \backslash \mathbb{R}$$

Αυτό είναι άτοπο, διότι αν η σχέση $(\alpha^\beta)^\gamma = \alpha^{\beta\gamma}$ ίσχυε για όλα τα α, β, γ, τότε δεν θα έπρεπε να εμφανιστούν περισσότεροι περιορισμοί για το γ απ' όσους επιβάλλαμε. Θυμηθείτε ότι:

$$\gamma \in \angle(e^{i\gamma_1}, e^{i\gamma_2}) \backslash \underrightarrow{O\xi} \backslash \mathbb{R}$$



Στο σχήμα λοιπόν (για σταθεροποιημένα α, β) η σχέση $(\alpha^\beta)^\gamma = \alpha^{\beta\gamma}$ δεν αληθεύει όταν το γ βρίσκεται στην κόκκινη γωνία αλλά όχι στον μπλε δακτύλιο, την πράσινη ευθεία ή την οριζόντια **μαύρη**. □

1.6 Παράρτημα: Τα σύνολα Julia και το σύνολο του Mandelbrot

Ένα παράδειγμα στο οποίο η γεωμετρία των μιγαδικών αριθμών αποκτά μία ιδιαίτερη μορφή, μπορεί να δοθεί μέσω των συνόλων Julia και του συνόλου του Mandelbrot.

Ορισμός 1.12: (Σύνολα αποδρόντων $\mathrm{Es}(f)$, σύνολα εγκλωβισμένων $\mathrm{Pr}(f)$ και σύνολα Julia $\mathcal{J}_c$). Έστω $f : A \to \mathbb{C}$, $A \subseteq \mathbb{C}$ μία συνάρτηση.

- Ένα αποδρόν σημείο της f είναι ένα σημείο $a \in A$ για το οποίο:

$$|f \overbrace{\circ \cdots \circ}^{n} f(a)| \to \infty$$

  Το σύνολο αυτών των αποδρόντων σημείων το συμβολίζουμε με $\mathrm{Es}(f)$.

- Ένα εγκλωβισμένο σημείο της f είναι ένα σημείο $a \in A$ για το οποίο:

$$|f \overbrace{\circ \cdots \circ}^{n} f(a)| < M < \infty, \text{ για κάποιο } M > 0 \text{ ανεξάρτητο των } n$$

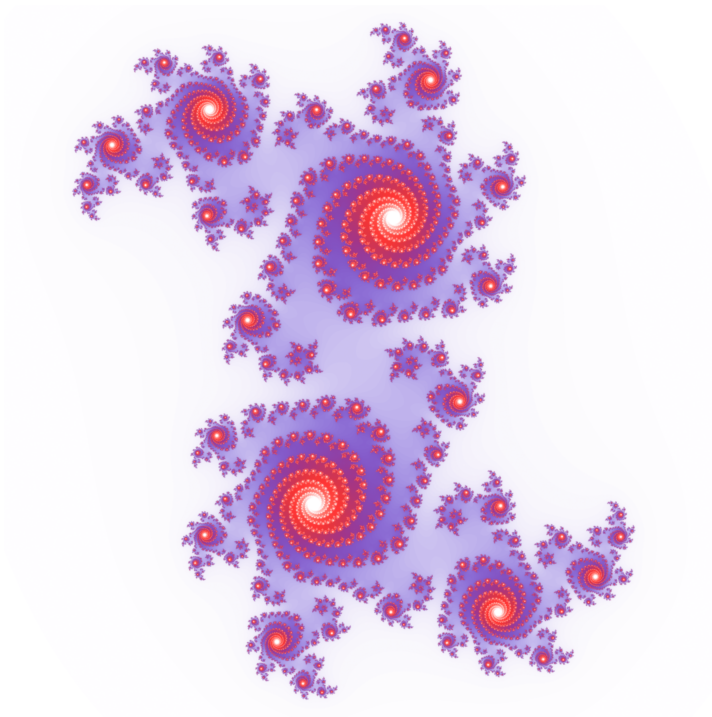
  Το σύνολο αυτών των εγκλωβισμένων σημείων το συμβολίζουμε με $\mathrm{Pr}(f)$.

- Θεωρούμε τη συνάρτηση $f_c(z) = z^2 + c$. Το σύνολο:

$$\mathcal{J}_c = \partial \mathrm{Es}(f_c) = \partial \mathrm{Pr}(f_c)$$

  ονομάζεται (σύνηθες) $c-$Julia σύνολο. Υπάρχει και γενικότερος ορισμός των συνόλων Julia, αλλά εμάς δεν θα μας απασχολήσει εδώ.

Γενικά η συνάρτηση $z^2 + c$, όπως εξάλλου έχουμε δει, αποτελεί μία στροφή και μία μεταφορά. Το z περιστρέφεται κατά $\arg z$ (λόγω του z^2) και μετατοπίζεται κατά c (λόγω του $+c$). Επαναλαμβάνοντας αυτήν τη διαδικασία, στην ουσία κάνουμε διαδοχικές στροφές και μετατοπίσεις στο μιγαδικό επίπεδο. Έτσι λοιπόν, δεν είναι και τόσο εύκολο να φανταστούμε όλους τους αριθμούς στο εγκλωβισμένο σύνολο $\mathrm{Pr}(f_c)$, $f_c(z) = z^2 + c$, κατά συνέπεια ούτε το $\mathcal{J}_c$.



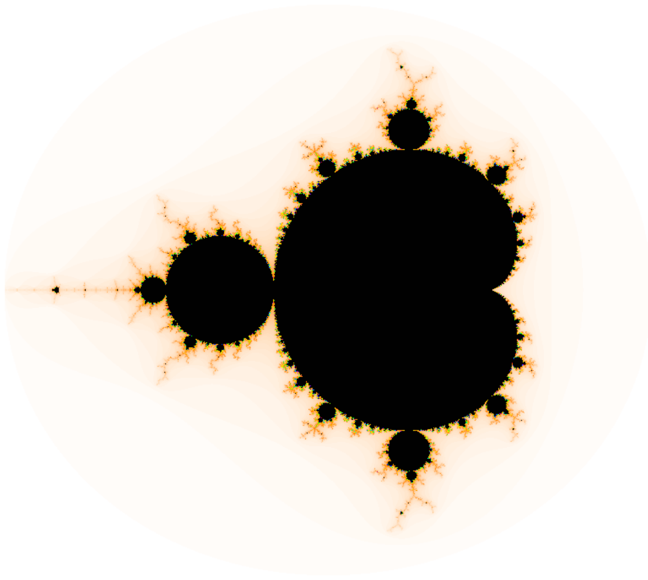
Ένα σύνολο Julia

Στο παραπάνω σχήμα εικονίζεται ένα σύνολο Julia, το οποίο (τουλάχιστον εκ πρώτης όψεως) δεν φαίνεται καθόλου απλό. Μάλιστα η πλειοψηφία των συνόλων Julia αποτελούν μορφοκλάσματα (fractals), τα οποία είναι εξ' ορισμού σύνολα με μεγάλη πολυπλοκότητα. Αυτή η έννοια «πολυπλοκότητας» ορίζεται αυστηρά με διάφορους τρόπους (που ο καθένας έχει τη δική του αξία), εμείς όμως δεν θα αναφερθούμε σ' αυτό.

Γενικά τα σύνολα Julia μπορεί να είναι συνεκτικά ή μη κατά τόξα συνεκτικά, ακόμη και μη συνεκτικά. Το ενδιαφέρον βρίσκεται -το οποίο αποδείχθηκε ανεξάρτητα από τους Fatou και Julia- στην επόμενη πρόταση:

Πρόταση 1.5: Κάθε σύνολο Julia $\mathcal{J}_c$ είναι είτε συνεκτικό είτε τελείως μη συνεκτικό. Δηλαδή είτε είναι συνεκτικό, είτε οποιαδήποτε δύο του σημεία δεν συνδέονται με καμπύλη.

Ένα ακόμη ενδιαφέρον σύνολο είναι αυτό του Mandelbrot, το οποίο συνδέεται πολύ στενά με τα σύνολα Julia.



Το σύνολο του Mandelbrot

Το σύνολο του Mandelbrot ορίζεται ως εξής:

Ορισμός 1.13: (Το σύνολο του Mandelbrot). Το σύνολο του Mandelbrot είναι το σύνολο:

$$\mathcal{M} = \{c \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Pr}(f_c) \text{ είναι συνεκτικό}\}$$

Γενικά το να κατανοήσει κανείς εάν ένα τυχόν σύνολο $\mathrm{Pr}(f_c)$ είναι περίπλοκο, οπότε -για παράδειγμα- ο σχεδιασμός του συνόλου του Mandelbrot φαντάζει δύσκολο εγχείρημα. Ο Mandelbrot έκανε μία παρατήρηση που, τουλάχιστον υπολογιστικά, βοηθάει την περιγραφή του εν λόγω συνόλου.

Πρόταση 1.6: Το σύνολο του Mandelbrot παίρνει την ισοδύναμη μορφή:

$$\mathcal{M} = \big\{c \in \mathbb{C} \; \big| \; \exists M > 0, \; \forall n \in \mathbb{N}, \; |f_c \overbrace{\circ \cdots \circ}^{n} f_c(0)| < M < \infty \big\}$$

δηλαδή είναι τα σημεία c για τα οποία οι ≪τροχιές≫ του 0, μέσω των f_c, παραμένουν φραγμένες.

Είναι λογικό κανείς να σκεφτεί τα σύνολα Julia και του Mandelbrot από τη σκοπιά της δυναμικής. Ένα σύνολο $\mathcal{J}_c$ εξαρτάται ουσιωδώς από την ≪αρχική συνθήκη≫ c. Για παράδειγμα, ας δούμε το σύνολο του Mandelbrot. Επειδή ακριβώς, για να ελέγξουμε εάν $c \in \mathcal{M}$, χρειάζεται να μελετηθεί η ακολουθία:

$$c, \; c^2 + c, \; (c^2 + c)^2 + c, \; \big((c^2 + c)^2 + c\big)^2 + c, \; \Big(\big((c^2 + c)^2 + c\big)^2 + c\Big)^2 + c, \; \cdots$$

οποιαδήποτε -ακόμη και μικρή- μεταβολή στο c ενδέχεται να επηρεάσει τη σύγκλιση της εν λόγω ακολουθίας, και κατά συνέπεια αν το μεταβεβλημένο c ανήκει ή όχι στο σύνολο του Mandelbrot. Αυτού του είδους σύνολα μελετώνται ως χαοτικά συστήματα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Ολόμορφες συναρτήσεις

2.1 Διαφορισιμότητα

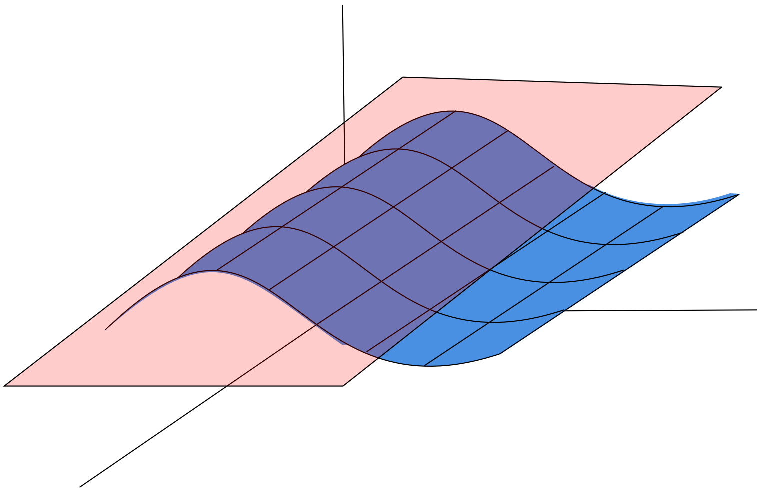
Σε μαθήματα απειροστικού λογισμού / γεωμετρικής ανάλυσης δεν υπάρχει η έννοια της διαίρεσης σε πολυδιάστατους χώρους. Γι' αυτόν τον λόγο γίνεται λόγος στη προσέγγιση μιας συνάρτησης (επιφάνειας λ.χ.) από υπερεπίπεδα, ή γενικότερα αφινικούς γραμμικούς χώρους.

Ορισμός 2.1: (Διαφορισιμότητα). Έστω $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ μία συνάρτηση, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό και $z_0 \in \Omega$. Λέμε ότι η f είναι διαφορίσιμη στο x_0 εάν υπάρχει γραμμική συνάρτηση M_{f,z_0} τέτοια ώστε:

$$\lim_{h \to 0_{\mathbb{R}^n}} \frac{|f(z_0+h) - f(z_0) - M_{f,z_0}(h)|}{|h|} = 0$$

Εάν μαζέψουμε όλα τα z_0 στα οποία η f είναι διαφορίσιμη, μπορούμε να φτιάξουμε μια συνάρτηση $(Df)(\cdot) = M_{f,(\cdot)}$, την οποία ονομάζουμε διαφορικό της f. Η τιμή $(Df)(z_0) = M_{f,z_0}$ λέγεται διαφορικό της f στο z_0.

Ο παραπάνω ορισμός ουσιαστικά δείχνει ότι οι διαφορίσιμες συναρτήσεις προσεγγίζονται από πολυδιάστατα επίπεδα, όπως οι παραγωγίσιμες προσεγγίζονται από εφαπτόμενες ευθείες. Εν τω μεταξύ αυτή η προσέγγιση είναι μοναδική (αν υπάρχει), αλλά δεν θα το αποδείξουμε (μπορείτε να το ελέγξετε).



Η περίπτωση μιας συνάρτησης $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Ας θεωρήσουμε μία συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ η οποία είναι διαφορίσιμη σε ένα z_0. Εάν θέλουμε ένα επίπεδο να εφάπτεται στην επιφάνεια (του γραφήματος) της f, αναμένουμε οι εφαπτόμενες των καμπυλών $f(\cdot, y)$, $f(x, \cdot)$ (όπου $z = (x, y)$) να περιέχονται στο εφαπτόμενο επίπεδο. Οπότε ίσως το διαφορικό μιας συνάρτησης να μπορεί να προσδιοριστεί από απλούστερες συναρτήσεις, δηλαδή από τις μερικές παραγώγους:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(z) = \frac{df(\cdot, y)}{dx}(x) \textbf{ και } \frac{\partial f}{\partial y}(z) = \frac{df(x, \cdot)}{dy}(y)$$

Πρόταση 2.1: Έστω $f : \Omega \to \mathbb{R}$ με το $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ να είναι ανοικτό. Εάν η f είναι διαφορίσιμη στο $z_0 = (x_{1,0}, x_{2,0}, \cdots, x_{n,0})$, τότε:

$$(Df)(z_0) = (\nabla f)_{z_0}$$

όπου:

$$(\nabla f)_{z_0}(\cdot) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(z_0), \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(z_0) \right) (\cdot)^T$$

(Είναι δηλαδή η γραμμική απεικόνιση με πίνακα το διάνυσμα των μερικών παραγώγων. Οι αναστροφές γίνονται απλά για να «φτιάξουμε» τα διανύσματα ώστε να είναι γραμμές ή στήλες όπου χρειάζεται).

Απόδειξη: Πράγματι, εάν η f είναι διαφορίσιμη, θα υπάρχουν $\mu_1, \cdots, \mu_n \in \mathbb{R}$ ούτως ώστε, αν $h = (h_1, \cdots, h_n)$:

$$\lim_{h \to 0_{\mathbb{R}^n}} \frac{|f(z_0 + h) - f(z_0) - \sum_{k=1}^n \mu_k h_k|}{|h|} = 0$$

Έτσι λοιπόν, θεωρώντας τα υπο-όρια όταν $h_\ell \to 0$, $h_k = 0$ ($k \neq \ell$):

$$\lim_{h_\ell \to 0} \frac{|f(z_0 + h_\ell e_\ell) - f(z_0) - \mu_\ell h_\ell|}{|h_\ell|} = 0$$

(όπου $e_\ell = (0, \cdots, 0, \overset{\ell-\text{θέση}}{1}, 0, \cdots, 0)$). Αυτό δείχνει ότι $\mu_\ell = \partial f / \partial x_\ell(z_0)$ και κατ' επέκταση το ζητούμενο.

□

Έχοντας την **Πρόταση 2.1** υπόψη, μπορεί να δειχθεί κάτι γενικότερο.

Πρόταση 2.2: Έστω $f = (f_1, \cdots, f_m) : \Omega \to \mathbb{R}^m$ με το $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ να είναι ανοικτό. Εάν η f είναι διαφορίσιμη στο $z_0 = (x_{1,0}, x_{2,0}, \cdots, x_{n,0})$, τότε:

$$(Df)(z_0)(\cdot) = \left[\begin{pmatrix} (\nabla f_1)_{z_0}(\cdot)^T \\ \vdots \\ (\nabla f_m)_{z_0}(\cdot)^T \end{pmatrix} \right]^T = \left[\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(z_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(z_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(z_0) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(z_0) \end{pmatrix} (\cdot)^T \right]^T$$

(Είναι δηλαδή η γραμμική απεικόνιση με πίνακα τον πίνακα των μερικών παραγώγων. Οι αναστροφές γίνονται απλά για να «φτιάξουμε» τα διανύσματα ώστε να είναι γραμμές ή στήλες όπου χρειάζεται).

Απόδειξη: Γράφουμε την f στη διανυσματική της μορφή $f = (f_1, \cdots, f_m)$, κι έπειτα χρησιμοποιούμε την **Πρόταση 2.1**.

□

2.2 Ολομορφία

Στους μιγαδικούς υπάρχει η δυνατότητα εκτέλεσης διαίρεσης, οπότε ο ορισμός της μιγαδικής παραγώνου θα είναι ευκολότερος.

Ορισμός 2.2: (Ολομορφία). Έστω $f : \Omega \to \mathbb{C}$ και $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ένα ανοικτό σύνολο, $z_0 \in \Omega$. Λέμε ότι η f έχει μιγαδική παράγωγο στο z_0 αν το όριο:

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

υπάρχει (στο $\mathbb{R}$). Συμβολίζουμε με $f'(z_0)$ το όριο αυτό. Αν για κάθε $z_0 \in \Omega$ υπάρχει η μιγαδική παράγωγος, λέμε ότι η f είναι ολόμορφη στο Ω.

Οπότε μια μιγαδική συνάρτηση μπορεί να έχει δύο «ειδών» παραγώγους, το διαφορικό και τη μιγαδική παράγωγο. Έτσι όπως έχουμε παραθέσει τους ορισμούς δεν είναι σαφές αν οι δύο έννοιες ταυτίζονται, αργότερα θα δείξουμε ότι μια μιγαδική συνάρτηση που έχει μιγαδική παράγωγο σε ένα σημείο είναι διαφορίσιμη στο ίδιο σημείο. Κατά κάποιον τρόπο, ζητάμε παραπάνω πράγματα ώστε μία συνάρτηση να έχει μιγαδική παράγωγο.

Ορισμός 2.3: (Ολόμορφες συναρτήσεις). Έστω Ω ένα ανοικτό σύνολο. Συμβολίζουμε το σύνολο όλων των ολομόρφων συναρτήσεων $f : \Omega \to \mathbb{C}$ με $\mathcal{O}(\Omega)$.

■ **Παράδειγμα 2.1:**

- Η συνάρτηση $z \mapsto \overline{z}$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0, αφού:

$$\lim_{z\to 0} \frac{\overline{z}}{z} = \lim_{z\to 0} \frac{\overline{z}^2}{|z|^2}$$

προσεγγίζοντας το 0 από δύο διαφορετικές ευθείες που διέρχονται από το 0 (και άρα που έχουν διαφορετικές κλίσεις), το όριο παίρνει διαφορετικές τιμές. Επομένως δεν ορίζεται.

- Η συνάρτηση $z \mapsto \overline{z}$ δεν είναι παραγωγίσιμη σε κανένα $z_0 \in \mathbb{C}$, αφού:

$$\lim_{z\to z_0} \frac{\overline{z} - \overline{z_0}}{z - z_0} = \lim_{z-z_0\to 0} \frac{\overline{z - z_0}^2}{|z - z_0|^2}$$

- Η ταυτοτική συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $z_0 \in \mathbb{C}$, αφού:

$$\lim_{z\to z_0} \frac{z - z_0}{z - z_0} = 1$$

- Κατ' επέκταση, για κάθε $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό, το σύνολο $\mathcal{O}(\Omega)$ δεν είναι κενό και δεν ταυτίζεται με το σύνολο όλων των μιγαδικών συναρτήσεων.

■

Συνεχίζουμε αποδεικνύοντας μερικές σημαντικές ιδιότητες των μιγαδικών παραγώγων.

Πρόταση 2.3: Εάν μια συνάρτηση $f : \Omega \to \mathbb{C}$ (με το Ω να είναι ανοικτό) έχει μιγαδική παράγωγο στο $z_0 \in \Omega$, τότε είναι συνεχής στο z_0.

Απόδειξη: Πράγματι:

$$\lim_{z\to z_0} [f(z) - f(z_0)] = \lim_{z\to z_0} \left[\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \cdot (z - z_0)\right] = f'(z_0) \lim_{z\to z_0} (z - z_0) = 0$$

□

Πρόταση 2.4: (Παρατήρηση του Καραθεοδωρή). Έστω $f : \Omega \to \mathbb{C}$, $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό και $z_0 \in \Omega$. Η f έχει μιγαδική παράγωγο στο z_0 εάν και μόνο αν υπάρχει συνεχής συνάρτηση $\varepsilon_f : \Omega \to \mathbb{C}$ με $f(z) = f(z_0) + \varepsilon_f(z)(z - z_0)$. Επιπλέον, $\varepsilon_f(z_0) = f'(z_0)$.

Απόδειξη: ($\Rightarrow$) Ορίζουμε:

$$\varepsilon_f(z) = \begin{cases} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}, \text{ εάν } z \neq z_0 \\ f'(z_0), \text{ εάν } z = z_0 \end{cases}$$

και παρατηρούμε ότι η ε_f έχει τις ζητούμενες ιδιότητες.

($\Leftarrow$) Εάν $f(z) = f(z_0) + \varepsilon_f(z)(z - z_0)$, τότε:

$$\varepsilon_f(z) = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}, \text{ για } z \neq z_0$$

Λόγω της συνέχειας της ε_f έπεται κι αυτή η κατεύθυνση.

□

Πρόταση 2.5: Έστω $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ ($\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό) οι οποίες είναι παραγωγίσιμες στο $z_0 \in \Omega$. Τότε:

i. $(f + g)'(z_0) = f'(z_0) + g'(z_0)$

ii. $(f \cdot g)'(z_0) = f'(z_0) \cdot g(z_0) + f(z_0) \cdot g'(z_0)$

iii. Αν $\lambda \in \mathbb{C}$, $(\lambda f)'(z_0) = \lambda f'(z_0)$

Απόδειξη: Για το i., το αποτέλεσμα έπεται από τις ιδιότητες του ορίου.

$$\lim_{z \to z_0} \frac{(f+g)(z) - (f+g)(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} + \lim_{z \to z_0} \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0}$$

Για το ii., χρησιμοποιούμε την **Πρόταση 2.4** και γράφουμε $f(z) = f(z_0) + \varepsilon_f(z)(z - z_0)$, $g(z) = g(z_0) + \varepsilon_g(z)(z - z_0)$. Παρατηρούμε (με πράξεις) ότι:

$$(f \cdot g)(z) = (f \cdot g)(z_0) + \big(\varepsilon_f(z)g(z_0) + \varepsilon_f(z)\varepsilon_g(z)(z - z_0) + \varepsilon_f(z_0)\varepsilon_g(z)\big)(z - z_0)$$

οπότε αν ορίσουμε $\varepsilon_{f \cdot g} = \varepsilon_f(z)g(z_0) + \varepsilon_f(z)\varepsilon_g(z)(z - z_0) + \varepsilon_f(z_0)\varepsilon_g(z)$, θα παρατηρήσουμε ότι η $\varepsilon_{f \cdot g}$ είναι συνεχής και:

$$(f \cdot g)(z) = (f \cdot g)(z_0) + \varepsilon_{f \cdot g}(z)(z - z_0)$$

Δηλαδή, βάσει της **Πρότασης 2.4**, η $f \cdot g$ έχει μιγαδική παράγωγο στο z_0. Μάλιστα:

$$(f \cdot g)'(z_0) = \varepsilon_{f \cdot g}(z_0) = f'(z_0) \cdot g(z_0) + f(z_0) \cdot g'(z_0)$$

Το iii. είναι συνέπεια του ii..

□

Πρόταση 2.6: Έστω $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ ($\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό) δύο συναρτήσεις, $z_0 \in \Omega$ και $g(z_0) \neq 0$. Εάν οι f, g είναι παραγωγίσιμες στο z_0, τότε:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \frac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{g^2(z_0)}$$

Απόδειξη: Και πάλι θα γίνει χρήση της **Πρόταση 2.4**. Γράφουμε $f(z) = f(z_0) + \varepsilon_f(z)(z - z_0)$, $g(z) = g(z_0) + \varepsilon_g(z)(z - z_0)$ κι επίσης:

$$\frac{f(z)}{g(z)} - \frac{f(z_0)}{g(z_0)} = \frac{f(z_0) + \varepsilon_f(z)(z - z_0)}{g(z_0) + \varepsilon_g(z)(z - z_0)} - \frac{f(z_0)}{g(z_0)}$$

Με πράξεις στην παραπάνω σχέση καταλήγουμε στο ότι:

$$\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f(z_0)}{g(z_0)} + \frac{\varepsilon_f(z)g(z_0) - f(z_0)\varepsilon_g(z)}{g^2(z_0) + g(z_0)\varepsilon_g(z)(z - z_0)}(z - z_0)$$

το οποίο δίνει το ζητούμενο, χρησιμοποιώντας την **Πρόταση 2.4**.

□

Αυτά δείχνουν (δηλαδή οι προηγούμενες προτάσεις) ότι η μιγαδική παράγωγος, όπως και η πραγματική, συμπεριφέρεται αρκετά καλά στις πράξεις. Μία άμεση εφαρμογή (που μπορεί όμως να αποδειχθεί και κάπως «αυτόνομα») είναι το ακόλουθο παράδειγμα:

■ **Παράδειγμα 2.2:**

- Εφόσον η ταυτοτική συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη (με τη μιγαδική έννοια), η $x \mapsto x^2$ θα είναι παραγωγίσιμη (**Πρόταση 2.5, ii.**). Επαγωγικά μάλιστα, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, η $x \mapsto x^n$ είναι παραγωγίσιμη.

- Ως πόρισμα του προηγούμενου, κάθε πολυώνυμο έχει μιγαδική παράγωγο (**Πρόταση 2.5**).

- Είναι φανερό ότι $(x^2)' = 2x$. Επαγωγικά και χρησιμοποιώντας την **Πρόταση 2.5, ii.** κανείς μπορεί να δείξει ότι $(x^n)' = nx^{n-1}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

- Κάθε ρητή συνάρτηση P/Q είναι παραγωγίσιμη (στα σημεία που ορίζεται), βάσει της **Πρότασης 2.6**.

■

Τέλος θα δείξουμε άλλο ένα αποτέλεσμα που «μεταβιβάζεται» στις μιγαδικές παραγώγους, τον κανόνα της αλυσίδας.

Πρόταση 2.7: (Κανόνας της αλυσίδας). Έστω $f : A \to B$, $g : B \to \mathbb{C}$ δύο συναρτήσεις και $A, B \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτά. Ισχύει ότι:

$$(g \circ f)' = f' \cdot (g' \circ f)$$

Απόδειξη: Ίσως πλέον είναι φανερό πώς θα λειτουργήσουμε για την απόδειξη της πρότασης: θα χρησιμοποιήσουμε γι' ακόμη μια φορά την **Πρόταση 2.4**.

Έστω $z_0 \in A$. Θεωρούμε (όπως στην **Πρόταση 2.4**) τις συνεχείς συναρτήσεις ε_f, ε_g, για τις οποίες:

$$f(z) = f(z_0) + \varepsilon_f(z)(z - z_0) \textbf{ και } g(w) = g\big(f(z_0)\big) + \varepsilon_g(w)\big(w - f(z_0)\big)$$

Υπολογίζοντας λοιπόν τη δεύτερη στις εικόνες $w = f(z)$, έπεται με πράξεις (και συνδυάζοντας την πρώτη σχέση) ότι:

$$g \circ f(z) = g \circ f(z_0) = \varepsilon_f(z)\varepsilon_g\big(f(z)\big)(z - z_0)$$

και κατά συνέπεια το ζητούμενο.

□

2.2.1 Εξισώσεις Cauchy - Riemann

Προτύτερα είδαμε δύο ≪είδη≫ παραγώγων -όταν αναφερόμαστε σε μιγαδικές συναρτήσεις- αυτήν του διαφορικού και τις μιγαδικής παραγώγου. Αναφέραμε ότι κανείς ουσιαστικά ζητά περισσότερα αν αποσκοπεί μία συνάρτηση να έχει μιγαδική παράγωγο: αυτό θα προσπαθήσουμε να το αιτιολογίσουμε με το ακόλουθο σημαντικό θεώρημα.

Θεώρημα 2.1: (Εξισώσεις Cauchy - Riemann). Έστω $f : \Omega \to \mathbb{C}$ μία μιγαδική συνάρτηση, ορισμένη στο ανοικτό σύνολο $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, και $z_0 = (x_0, y_0) \in \Omega$. Γράφουμε $f(z) = \Re f(z) + i \cdot \Im f(z)$ (δηλαδή την f ≪κατά συντεταγμένες≫) και έχουμε την ακόλουθη ισοδυναμία:

Η f έχει μιγαδική παράγωγο στο z_0

$$\Longleftrightarrow$$

Οι $\Re f, \Im f$ είναι διαφορίσιμες στο z_0 και $\begin{cases} \dfrac{\partial \Re f}{\partial x}(z_0) = \dfrac{\partial \Im f}{\partial y}(z_0) \\[2ex] \dfrac{\partial \Re f}{\partial y}(z_0) = -\dfrac{\partial \Im f}{\partial x}(z_0) \end{cases}$

Απόδειξη: Στα παρακάτω θα γράφουμε $z = (x, y)$.

($\Rightarrow$) Εάν η μιγαδική παράγωγος υπάρχει σε ένα σημείο $z_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{C}$, τότε το ακόλουθο όριο υπάρχει:

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \Leftrightarrow \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)}{z - z_0} = 0$$

Ορίζουμε $\mathcal{E}(z) = f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)$ και παρατηρούμε ότι:

$$\frac{\mathcal{E}(z)}{z - z_0} \overset{z \to z_0}{\longrightarrow} 0 \Leftrightarrow \left| \frac{\mathcal{E}(z)}{z - z_0} \right| \overset{z \to z_0}{\longrightarrow} 0 \Leftrightarrow \left| \frac{\mathcal{E}(z)}{|z - z_0|} \right| \overset{z \to c}{\longrightarrow} 0 \Leftrightarrow \frac{\mathcal{E}(z)}{|z - z_0|} \overset{z \to c}{\longrightarrow} 0$$

Επιπλέον, για $f'(z_0) = (A, B) \in \mathbb{C}$, παρατηρούμε ότι:

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \mathcal{E}(z) \Rightarrow \begin{cases} \Re f(x, y) = \Re(f(x_0, y_0)) + A(x - x_0) - B(y - y_0) + \Re(\mathcal{E}(x, y)) \\ \Im f(x, y) = \Im(f(x_0, y_0)) + B(x - x_0) + A(y - y_0) + \Im(\mathcal{E}(x, y)) \end{cases}$$

Επειδή $\mathcal{E}(z)/|z - z_0| \overset{z \to z_0}{\longrightarrow} 0$, έπεται ότι:

$$\frac{\Re(\mathcal{E}(z))}{|z - z_0|} \overset{z \to z_0}{\longrightarrow} 0 \text{ και } \frac{\Im(\mathcal{E}(z))}{|z - z_0|} \overset{z \to z_0}{\longrightarrow} 0$$

Δηλαδή οι συναρτήσεις $\Re f$, $\Im f$ είναι διαφορίσιμες στο z_0. Μάλιστα:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Re f}{\partial x}(z_0) &= \lim_{x\to x_0}\frac{\Re f(x,y)-\Re(f(x_0,y_0))}{|x-x_0|} = \lim_{x\to x_0}\frac{A(x-x_0)-B(y_0-y_0)+\Re(\mathcal{E}(x,y_0))}{|x-x_0|} = A\\
\frac{\partial \Re f}{\partial y}(z_0) &= \lim_{y\to y_0}\frac{\Re f(x,y)-\Re(f(x_0,y_0))}{|y-y_0|} = \lim_{y\to y_0}\frac{A(x_0-x_0)-B(y-y_0)+\Re(\mathcal{E}(x_0,y))}{|y-y_0|} = -B\\
\frac{\partial \Im f}{\partial x}(z_0) &= \lim_{x\to x_0}\frac{\Im_f(x,y)-\Im(f(x_0,y_0))}{|x-x_0|} = \lim_{x\to x_0}\frac{B(x-x_0)+A(y_0-y_0)+\Im(\mathcal{E}(x,y_0))}{|x-x_0|} = B\\
\frac{\partial \Im f}{\partial y}(z_0) &= \lim_{y\to y_0}\frac{\Im f(x,y)-\Im(f(x_0,y_0))}{|y-y_0|} = \lim_{y\to y_0}\frac{B(x_0-x_0)+A(y-y_0)+\Im(\mathcal{E}(x_0,y))}{|y-y_0|} = A
\end{aligned}$$

($\Leftarrow$) Εάν οι $\Re f$, $\Im f$ είναι διαφορίσιμες στο z_0, τότε υπάρχουν συναρτήσεις δ και η αντίστοιχα, τέτοιες ώστε:

$$\begin{aligned}
\Re f(x,y) &= \Re f(x_0,y_0) + A(x-x_0) - B(y-y_0) + \delta(x,y)\\
\Im f(x,y) &= \Im f(x_0,y_0) + B(x-x_0) + A(y-y_0) + \eta(x,y)
\end{aligned}$$

και επιπλέον:

$$\frac{\delta(z)}{|z-z_0|} \overset{z\to z_0}{\longrightarrow} 0 \text{ και } \frac{\eta(z)}{|z-z_0|} \overset{z\to z_0}{\longrightarrow} 0$$

Τα A και B αντίστοιχα είναι οι τιμές $\partial\Re f/\partial x(z_0)$ και $\partial\Im f/\partial x(z_0)$. Εφόσον $f(z) = \Re_f(z) + i\Im_f(z)$, ο τύπος της f ισοδύναμα γίνεται:

$$f(z) = f(z_0) + (A+Bi)(z-z_0) + \delta(z) + i\eta(z)$$

Θέτοντας $\mathcal{E}(z) = \delta(z) + i\eta(z)$, έχουμε ότι $\mathcal{E}(z)/|z-z_0| \overset{z\to z_0}{\longrightarrow} 0 \Leftrightarrow \mathcal{E}(z)/(z-z_0) \overset{z\to z_0}{\longrightarrow} 0$ κι επιπλέον:

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)-(A+Bi)(z-z_0)+\mathcal{E}(z)}{z-z_0} = 0 \Leftrightarrow \lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = A+Bi$$

Επομένως η μιγαδική παράγωγος στο z_0 υπάρχει και μάλιστα είναι η τιμή $f'(z_0) = A+Bi$.

□

Παρατήρηση 2.1: Από το **Θεώρημα 2.1** έπεται ότι αν η f έχει μιγαδική παράγωγο, τότε είναι διαφορίσιμη (για παράδειγμα, χρησιμοποιώντας επίσης την απόδειξη της **Πρότασης 2.2**).

Οπότε εάν κανείς έχει μιγαδική παραγωγίσιμη συνάρτηση, μπορεί να εξασφαλίσει τη διαφορισιμότητα.

Ένα ακόμη πόρισμα του παραπάνω θεωρήματος σχετίζεται με τη μορφή της μιγαδικής παραγώγου, σε σχέση με τις μερικές παραγώγους των συντεταγμένων.

Παρατήρηση 2.2: Από την απόδειξη του **Θεωρήματος 2.1** έπεται ότι, αν μία συνάρτηση $f : \Omega \to \mathbb{C}$ είναι παραγωγίσιμη στο z_0, τότε:

$$f'(z_0) = \frac{\partial \Re f}{\partial x}(z_0) + i\cdot\frac{\partial \Im f}{\partial x}(z_0)$$

ή αλλιώς:

$$f'(z_0) = \frac{\partial \Im f}{\partial y}(z_0) - i\cdot\frac{\partial \Re f}{\partial y}(z_0)$$

Με τις εξισώσεις Cauchy - Riemann είναι δυνατόν να μελετήσουμε την παραγωγισιμότητα περισσότερο «περίπλοκων» συναρτήσεων. Για παράδειγμα, η μιγαδική εκθετική και λογαριθμική (σε κατάλληλα πάντα σύνολα).

Πρόταση 2.8: Οι ακόλουθες συναρτήσεις είναι ολόμορφες, στα σύνολα που ορίζονται.

i. $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

ii. $\log|_{\mathbb{C}\setminus\underset{\longrightarrow}{Ox'}} : \mathbb{C}\setminus\underset{\longrightarrow}{Ox'} \to \mathbb{C}$

Απόδειξη: Για το i.: Συμβολίζουμε $z = (x,y)$. Όσον αφορά την $\exp$, παρατηρούμε ότι ισχύει το **Θεώρημα 2.1**, αφού οι συντεταγμένες της είναι διαφορίσιμες και:

$$\begin{cases}
\dfrac{\partial e^x\cos(y)}{\partial x}(z_0) = e^{x_0}\cos(y_0) = \dfrac{\partial e^x\sin(y)}{\partial y}(z_0)\\[2ex]
\dfrac{\partial e^x\cos(y)}{\partial y}(z_0) = -e^{x_0}\sin(y_0) = -\dfrac{\partial e^x\sin(y)}{\partial x}(z_0)
\end{cases}$$

για κάθε $z_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{C}$. Οπότε η $\exp$ είναι παντού ολόμορφη. Μάλιστα, από την **Παρατήρηση 2.2**:

$$\exp' = \frac{\partial e^x \cos(y)}{\partial x} + i\frac{\partial e^x \sin(y)}{\partial x} = \exp$$

Για το ii.: Όσον αφορά τη συνάρτηση του λογαρίθμου, για κάθε $z_0 \in \mathbb{C}\backslash\underrightarrow{Ox'}$ ισχύει:

$$\lim_{z\to z_0} \frac{\log z - \log z_0}{z - z_0} = \lim_{z\to z_0}\left[1 \Bigg/ \frac{\exp(\log(z)) - \exp(\log(z_0))}{\log(z) - \log(z_0)}\right] = \frac{1}{\exp(\log(z_0))} = \frac{1}{z_0}$$

Οπότε η συνάρτηση $\log$ είναι ολόμορφη στο $\mathbb{C}\backslash\underrightarrow{Ox'}$, με παράγωγο $1/(\cdot)$. Μάλιστα αυτό είναι το μεγαλύτερο σύνολο ως προς τη σχέση του υποσυνόλου, για το οποίο ο λογάριθμος $\log$ έχει μιγαδική παράγωγο, μιας και στο $\underrightarrow{Ox'}$ δεν είναι συνεχής συνάρτηση.

2.3 Δυναμοσειρές

Η μελέτη των δυναμοσειρών σ' αυτό το σημείο είναι κρισιμής σημασίας για τη μελέτη της ολομορφίας. Ένα από τα σημαντικότερα αποτελέσματα που θα δούμε είναι ότι κάθε δυναμοσειρά είναι ολόμορφη στον δίσκο σύγκλισής της. Έπειτα, σε επόμενο κεφάλαιο, θα δούμε επίσης ότι κάθε ολόμορφη συνάρτηση έχει ανάλυση σε δυναμοσειρά.

Ορισμός 2.4: (Δυναμοσειρές). Ως μιγαδική δυναμοσειρά ορίζουμε κάθε εν γένει ≪απειρόβαθμο≫ πολυώνυμο με μιγαδικούς συντελεστές. Δηλαδή κάθε συνάρτηση της μορφής:

$$P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$$

όπου $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ είναι μία ακολουθία μιγαδικών αριθμών. Συμβολίζουμε το σύνολο των μιγαδικών δυναμοσειρών με:

$$\mathbb{C}[[z]] = \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \;\middle|\; a_k \in \mathbb{C},\ k \in \mathbb{N}_0 \right\}$$

Ο παραπάνω συμβολισμός του συνόλου των μιγαδικών δυναμοσειρών, $\mathbb{C}[[z]]$, γίνεται σε αναλογία με τον συμβολισμό του συνόλου $\mathbb{C}[z]$ των πολυωνύμων υπεράνω του $\mathbb{C}$.

Εν τω μεταξύ στα πολυώνυμα είναι γνωστό ότι $\mathbb{C}[z - c] = \mathbb{C}[z]$, δηλαδή τα πολυώνυμα ≪με κέντρο c≫ είναι (ή τουλάχιστον τα βλέπουμε ως) πολυώνυμα με μεταβλητή z.

$$P(z) = a_n(z - c)^n + \cdots + a_0$$

Το ίδιο δεν συμβαίνει με τις δυναμοσειρές. Δηλαδή, δεν αληθεύει η ισότητα $\mathbb{C}[[z - c]] = \mathbb{C}[z]$ - οι δυναμοσειρές κέντρου c ενδέχεται να μην είναι κέντρου 0. Ένα απλό παράδειγμα είναι το ακόλουθο:

$$P(z) = \sum_{k=0}^{\infty}(z + 1)^k$$

Οπότε γενικά θα πρέπει να υπάρχει προσοχή στο τι είδους δυναμοσειρά είναι μία δυναμοσειρά, αν έχουμε δηλαδή κέντρο ή όχι. Είναι επίσης σκόπιμο να ορίσουμε τη σύγκλιση των δυναμοσειρών, πράγμα που κάνουμε στην επόμενη παράγραφο. Γενικά θα μελετήσουμε σύγκλιση σε δυναμοσειρές της μορφής:

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$$

δηλαδή με κέντρο 0, τα αποτελέσματα όμως μεταφέρονται σε δυναμοσειρές με οποιοδήποτε κέντρο (με της απαραίτητες τροποποιήσεις φυσικά).

2.3.1 Σύγκλιση δυναμοσειρών

Κατ' αρχάς ο όρος ≪σύγκλιση δυναμοσειρών≫ είναι λογικός, αν και ίσως λίγο παραπλανητικός. Στην ουσία μια δυναμοσειρά (έστω κέντρου 0) με συντελεστές a_k ορίζεται στα z στα οποία το όριο $\lim_{n\in\mathbb{N}_0} \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$

υπάρχει, οπότε ο όρος «σύγκλιση» έχει νόημα.

Επιπλέον, είναι σημαντικό κανείς να παρατηρήσει ότι οι σειρές (μερικών αθροισμάτων) στην ουσία δεν διαφέρουν πολύ από τις ακολουθίες. Κατ' αρχάς μία ακολουθία μερικών αθροισμάτων $\sum_{k=0}^{n} a_k$ είναι (προφανώς) μία ακολουθία του n, κι αντίστροφα μία ακολουθία $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ μπορεί να γραφεί:

$$a_{n+1} = a_0 + \sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k-1})$$

Με αυτό υπόψη, αρκετά αποτελέσματα που θα δώσουμε είναι στην πραγματικότητα αποτελέσματα ακολουθιών, οπότε ίσως γνωστά για κάποιους. Θα δούμε παρόλα αυτά αποδείξεις που εμπλέκουν σειρές, για να ενασχοληθούμε μ' αυτές.

Ορισμός 2.5: (Κατά σημείο σύγκλιση). Θα λέμε ότι μία ακολουθία συναρτήσεων $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με $f_n : A \to \mathbb{C}$, $A \subseteq \mathbb{C}$, συγκλίνει κατά σημείο σε μία $f : A \to \mathbb{C}$ εάν:

$$\text{Για κάθε } z \in A,\ f_n(z) \to f(z)$$

Στην περίπτωση των δυναμοσειρών, θα λέμε ότι μία δυναμοσειρά $P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ συγκλίνει σ' ένα σύνολο $A \subseteq \mathbb{C}$ εάν, για $S_{n,P}(z) = \sum_{k=0}^{n} c_k z^k$:

$$S_{n,P}(z) \to P(z),\ \text{για κάθε } z \in A$$

Πρόταση 2.9: Έστω $\big((a_k, b_k)\big)_{k\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία μιγαδικών αριθμών (a_k, b_k). Τότε η ακόλουθη ισοδυναμία αληθεύει:

$$\sum_{k=0}^{\infty}(a_k + ib_k) \text{ συγκλίνει } \Leftrightarrow \text{ οι } \sum_{k=0}^{\infty} a_k,\ \sum_{k=0}^{\infty} b_k \text{ συγκλίνουν.}$$

Απόδειξη:

($\Rightarrow$) Υποθέτουμε ότι η σειρά $\sum_{k=0}^{\infty}(a_k + ib_k)$ συγκλίνει. Εάν s_n είναι η σειρά των μερικών αθροισμάτων της, τότε υπάρχει $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}$ τέτοιο ώστε:

$$s_n \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \alpha + i\beta$$

Γράφοντας ισοδύναμα την ακολουθία των μερικών αθροισμάτων στη μορφή $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k + i\sum_{k=0}^{n} b_k$, παρατηρούμε ότι:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k + i\sum_{k=0}^{n} b_k \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \alpha + i\beta \Rightarrow \sum_{k=0}^{n} a_k \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \alpha,\ \sum_{k=0}^{n} b_k \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \beta$$

Έτσι λοιπόν, οι σειρές $\sum_{k=0}^{\infty} a_k,\ \sum_{k=0}^{\infty} b_k$ συγκλίνουν στα α και β αντίστοιχα.

($\Leftarrow$) Έστω s_n, t_n να είναι οι σειρές των μερικών αθροισμάτων των $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ και $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ αντίστοιχα, οι οποίες συγκλίνουν στα α και β. Παρατηρούμε ότι:

$$\sum_{k=0}^{n}(a_k + ib_k) = \sum_{k=0}^{n} a_k + i\sum_{k=0}^{n} b_k = s_n + t_n$$

Επομένως, η $\sum_{k=0}^{\infty}(a_k + ib_k)$ συγκλίνει, και μάλιστα τον μιγαδικό αριθμό $\alpha + i\beta$.

□

Λήμμα 2.1: Μια γεωμετρική σειρά $\sum_{k=0}^{\infty} a^k,\ a \geqslant 0$ συγκλίνει αν και μόνο αν ο λόγος της a είναι αυστηρά μικρότερος του 1. ■

Απόδειξη: Πράγματι, η σειρά των μερικών αθροισμάτων:

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1},\ a \geqslant 0$$

συγκλίνει αν και μόνο αν $a < 1$. Μάλιστα, το όριό της είναι το $1/(1-a)$.

□

Θεώρημα 2.2: (Ύπαρξη ακτίνας σύγκλισης δυναμοσειράς). Έστω $P \in \mathbb{C}[[z]]$ μια μιγαδική δυναμοσειρά της μορφής:

$$P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$$

Υπάρχει ένας αριθμός $R \in [0, \infty]$, τέτοιος ώστε στον (ανοικτό) δίσκο $S(0, R)$ η P να συγκλίνει απολύτως και στην (κλειστή) περιοχή $\mathbb{C} \backslash B(0, R)$ να αποκλίνει.

Μάλιστα, αυτό το R είναι το:

$$R = \sup \left\{ r \geqslant 0 \mid (|c_k| r^k)_{k \in \mathbb{N}_0} \text{ φραγμένη} \right\}$$

Απόδειξη: Έστω:

$$R = \sup \left\{ r \geqslant 0 \mid (|c_k| r^k)_{k \in \mathbb{N}_0} \text{ φραγμένη} \right\}$$

Κατ'αρχάς παρατηρούμε ότι το supremum υπάρχει, αφού για $r = 0$ η $(|c_k| r^k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ είναι πάντοτε φραγμένη (δεν πέφτουμε σε τετριμμένες περιπτώσεις με κενά σύνολα).

Η περίπτωση όπου $R = 0$ είναι τετριμμένη. Εάν $R > 0$, κάθε πραγματικός αριθμός $0 \leqslant r_0 \leqslant R$ δίνει ακολουθία $(|c_k r_0^k|)_{k \in \mathbb{N}_0}$ η οποία είναι φραγμένη, έστω από έναν θετικό αριθμό M. Παρατηρούμε ότι για $|z| < r_0$:

$$|c_k z^k| = |c_k| r_0^k \cdot \left(\frac{|z|}{r_0} \right)^k \leqslant M \cdot \left(\frac{|z|}{r_0} \right)^k$$

Κατά συνέπεια:

$$0 \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} |c_k z^k| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} M \left(\frac{|z|}{r_0} \right)^k \stackrel{\star}{=} M \Big/ 1 - \left(\frac{|z|}{r_0} \right)^k$$

όπου στην ισότητα άστρο ($\star$) γίνεται χρήση του **Λήμματος 2.1**. Επειδή η τελευταία συγκλίνει και η πρώτη είναι σειρά αύξοντων μερικών αθροισμάτων (περιέχει μόνο θετικούς όρους), η $\sum_{k=0}^{\infty} |c_k z^k|$ συγκλίνει για κάθε $|z| < r_0$. Επειδή το εν λόγω αποτέλεσμα ισχύει για κάθε $R \geqslant r_0 \geqslant 0$, για κάθε $|z| < R$ η σειρά συγκλίνει.

Για να ολοκληρωθεί η απόδειξη, θα δείξουμε ότι αν $|z| > R$, η σειρά αποκλίνει. Πράγματι, το R είναι το supremum των θετικών αριθμών r, για τους οποίους η ακολουθία $(|c_k| r^k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ είναι φραγμένη. Επομένως, για $|z| > R$, υπάρχουν άπειροι όροι της $(|c_k z^k|)_{k \in \mathbb{N}_0}$ οι οποίοι είναι μεγαλύτεροι του 1 (αφού αν το αντίθετο συνέβαινε, η ακολουθία προφανώς θα φράσσοταν από το $1 + \max\{|c_k z^k| > 1\}$) και συνεπώς:

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} |c_\ell z^\ell| \geqslant \sum_{\ell \in \left\{ k \,\middle|\, |c_k z^k| > 1 \right\}} |c_\ell z^\ell| \geqslant \sum_{\ell \in \left\{ k \,\middle|\, |c_k z^k| > 1 \right\}} = \#\left\{ k \,\middle|\, |c_k z^k| > 1 \right\} = \infty$$

Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη.

□

Ένα ακόμη αποτέλεσμα που ίσως κανείς να θυμάται από τον απειροστικό λογισμό ή την πραγματική ανάλυση είναι το παρακάτω.

Πρόταση 2.10: (Κριτήριο λόγου για δυναμοσειρές). Έστω $P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ μια μιγαδική δυναμοσειρά. Εάν:

$$\left| \frac{c_k}{c_{k+1}} \right| \stackrel{k \to \infty}{\longrightarrow} R$$

τότε το R αποτελεί την ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς P.

Ως γενίκευση, σε οποιαδήποτε άλλη δυναμοσειρά (με διαφορετικό κέντρο) $Q \in \mathbb{C}[[z-c]]$, $a \in \mathbb{C}$, εφαρμόζει το εν λόγω κριτήριο.

Απόδειξη: Αρχικά υποθέτουμε ότι το R δεν είναι άπειρο. Για $|z| < R$ παρατηρούμε ότι εφαρμόζει το κριτήριο του λόγου για πραγματικές σειρές, αφού:

$$\left|\frac{c_{k+1}z^{k+1}}{c_k z^k}\right| = \frac{|c_{k+1}| \cdot |z|}{|c_k|} \xrightarrow{k\to\infty} \frac{|z|}{R} < 1$$

Επομένως, η σειρά $\sum_{k=0}^{\infty} |c_k z^k|$ συγκλίνει. Εάν τώρα $|z| > R$, ο προαναφερθής λόγος είναι μεγαλύτερος της μονάδας, οπότε $|c_k z^k| \xrightarrow{k\to\infty} \infty$. Αυτό δίνει ότι η σειρά αποκλίνει, αφού εάν συνέκλινε, $|c_k z^k| \to 0$.

Εάν το R είναι άπειρο, για κάθε (σταθερό) $z \in \mathbb{C}$, η ποσότητα:

$$\frac{|c_{k+1}| \cdot |z|}{|c_k|}$$

τείνει στο $0 < 1$, οπότε και πάλι εφαρμόζει το κριτήριο του λόγου για πραγματικές σειρές. Η σειρά λοιπόν $\sum_{k=0}^{\infty} |c_k z^k|$, σε αυτήν την περίπτωση συγκλίνει για κάθε μιγαδικό z.

Τα προαναφερθέντα επιχειρήματα παραμένουν αναλλοίωτα στην περίπτωση όπου το z έχει αντικατασταθεί από το $z - c,\ c \in \mathbb{C}$ - οπότε το αποτέλεσμα γενικεύεται: σε οποιαδήποτε άλλη δυναμοσειρά $Q \in \mathbb{C}[[z - c]],\ c \in \mathbb{R}$, εφαρμόζει το εν λόγω κριτήριο.

□

Επίσης, μία χρήσιμη μορφή της ακτίνας σύγκλισης δίνεται παρακάτω.

Πρόταση 2.11: Έστω $P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ μία μιγαδική δυναμοσειρά. Ο αριθμός:

$$R = {}^{1}\Big/_{\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|}}$$

αποτελεί την ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς.

Απόδειξη: Εάν $R = 0$, τότε -δεδομένου οποιουδήποτε $r > 0$- η ακολουθία $(|c_k| r^k)_{k=1}^{\infty}$ δεν είναι φραγμένη. Κατά συνέπεια, η σειρά $P(z)$ δεν συγκλίνει απολύτως για κανένα $z = re^{i\theta}$ (εκτός από το 0, που ούτως ή άλλως δεν «πιάνεται», αφού $r > 0$).

Εάν $R = \infty$, τότε είναι φανερό ότι η $P(z)$ συγκλίνει απολύτως για κάθε $z \in \mathbb{C}$.

Εάν $R \notin \{0, \infty\}$, για αριθμό $z \in \mathbb{C}$ με:

$$|z| < {}^{1}\Big/_{\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|}} \Rightarrow \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k z^k|} < 1$$

θεωρούμε $\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k z^k|} < \mu < 1$. Αυτό επιτυγχάνεται εφόσον η ανισότητα είναι γνήσια. Λόγω της προηγούμενης ανισότητας, η ακολουθία $\left(\sqrt[k]{|c_k z^k|}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ έχει άπειρους όρους άνω φραγμένους από μ, και μάλιστα τελικά φράσσεται από το μ (αφού αν δεν φρασσόταν, θα μπορούσε να επιλεγεί υπακολουθία που θα καθιστούσε το $\limsup$ μεγαλύτερο του μ). Δηλαδή, έπειτα ενός n:

$$\sum_{k=n}^{\infty} |c_k z^k| \leqslant \sum_{k=n}^{\infty} \mu^k \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k = \frac{1}{1-\mu}$$

(εφόσον $\mu < 1$ και η $\sum_{k=1}^{\infty} \mu^k$ είναι γεωμετρική). Άρα η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} c_k z^k$ συγκλίνει απολύτως για $|z| < R$.

Τέλος, εάν $|z| > R$, θα δείξουμε ότι η εν λόγω σειρά δεν συγκλίνει. Πράγματι, τότε θα μπορούσε (όπως και πριν) να επιλεγεί αριθμός:

$$\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k z^k|} > \mu > 1$$

το οποίο με τη σειρά του σημαίνει την ύπαρξη υπακολουθίας $\left(c_{k(s)} z^{k(s)}\right)_{s\in\mathbb{N}}$ με $|c_{k(s)} z^{k(s)}| > \mu^{k(s)} > 1$. Αυτό μας δείχνει ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} c_k z^k$ δεν συγκλίνει, αφού αν συνέκλινε $c_k z^k \to 0$.

□

Όλα όσα αναφέραμε περί σύγκλισης δυναμοσειρών μπορούν να εφαρμοστούν σε δυναμοσειρές γενικά, αλλά και σε μία χρήσιμη παρατήρηση που θα αναφέρουμε παρακάτω. Βάσει αυτής κανείς μπορεί να υπολογίζει την ακτίνα σύγκλισης μίας δυναμοσειράς (σε ορισμένες περιπτώσεις), «πετώντας» περιττές πληροφορίες.

Παρατήρηση 2.3: Θεωρούμε δύο δυναμοσειρές:

$$P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-c)^k \textbf{ και } Q(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k f(k)(z-c)^k$$

με κέντρο c και ακτίνες σύγκλισης R_P και R_Q αντίστοιχα.

i. Εάν το f είναι πολυώνυμο του $\mathbb{C}[k]$, τότε $R_P = R_Q$.

ii. Εάν $f(k) = m^k$ (δηλαδή εκθετική συνάρτηση του k), τότε $R_Q = R_P/m$.

iii. Γενικότερα, εάν $f(k)/f(k+1) \to m$, τότε $R_Q = m \cdot R_P$.

Απόδειξη: Για το i.: Επειδή:

$$\left| \frac{c_k}{c_{k+1}} \right| \to R_P \textbf{ και } \frac{f(k)}{f(k+1)} \to 1$$

έχουμε:

$$\left| \frac{c_k f(k)}{c_{k+1} f(k+1)} \right| \to R_P$$

Επομένως, βάσει της **Πρότασης 2.10**, $R_P = R_Q$.

Για τα ii. και iii. εφαρμόζουμε και πάλι την **Πρόταση 2.10**, με ανάλογο τρόπο.

□

Αναφέραμε ότι οι δυναμοσειρές στην ουσία είναι όριο, εφόσον:

$$P(z) = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} c_k z^k$$

Δηλαδή, αν $S_{n,P}(z) = \sum_{k=0}^{n} c_k z^k$, τότε (σε κάποιο σύνολο):

$$S_{n,P} \to P$$

οπότε έχει νόημα να λέμε ότι μία δυναμορειρά συγκλίνει. Εκτός από την κατά σημείο σύγκλιση όμως, έχει νόημα να μιλήσουμε και για ομοιόμορφη σύγκλιση.

Ορισμός 2.6: (Ομοιόμορφη σύγκλιση). Θα λέμε ότι μία ακολουθία συναρτήσεων $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με $f_n : A \to \mathbb{C}$, $A \subseteq \mathbb{C}$, συγκλίνει ομοιόμορφα σε μία $f : A \to \mathbb{C}$ εάν:

$$\sup_{z\in A} |f_n(z) - f(z)| \to 0$$

Θα συμβολίζουμε $f_n \to_o f$. Στην περίπτωση των δυναμοσειρών, θα λέμε ότι μία $P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ συγκλίνει ομοιόμορφα σ' ένα σύνολο $A \subseteq \mathbb{C}$ εάν, για $S_{n,P}(z) = \sum_{k=0}^{n} c_k z^k$:

$$\sup_{z\in A} |S_{n,P}(z) - P(z)| \to 0$$

Είναι φανερό, από τον προηγούμενο ορισμό, ότι μία σειρά που συγκλίνει απολύτως ομοιόμορφα, συγκλίνει και ομοιόμορφα. Δηλαδή, εάν η:

$$\sum_{k=0}^{\infty} |c_k z^k|$$

συγκλίνει ομοιόμορφα, τότε επειδή:

$$\left| \sum_{k=0}^{n} |c_k z^k| - \sum_{k=0}^{\infty} |c_k z^k| \right| = \sum_{k=n+1}^{\infty} |c_k z^k| \geqslant \left| \sum_{k=0}^{n} c_k z^k - \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \right|$$

η $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ θα συγκλίνει ομοιόμορφα επίσης.

Ένα χρήσιμο αποτέλεσμα σχετικά με την ομοιόμορφη σύγκλιση είναι το παρακάτω.

Πρόταση 2.12: (Κριτήριο ομοιόμορφης σύγκλισης του Weierstrass). Έστω $(f_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$, $f_k : A \to \mathbb{C}$, $A \subseteq \mathbb{C}$, μία ακολουθία συναρτήσεων. Εάν υπάρχουν σταθερές $M_k > 0$ ώστε $|f_k(z)| \leqslant M_k$ και $\sum_{k=0}^{\infty} M_k < \infty$, τότε η σειρά:

$$\sum_{k=0}^{\infty} |f_k(z)|$$

συγκλίνει ομοιόμορφα.

Απόδειξη: Παρατηρούμε η σειρά $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(z)$ συγκλίνει απολύτως, αφού η σειρά $\sum_{k=0}^{\infty} |f_k(z)|$ περιέχει θετικούς όρους και φράσσεται ως εξής:

$$\sum_{k=0}^{\infty} |f_k(z)| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} M_k$$

Η τελευταία σειρά συγκλίνει, οπότε και η πρώτη συγκλίνει (κατά σημείο).

Για κάθε λοιπόν $z \in A$ θα δείξουμε ότι η σύγκλιση δεν είναι απλώς κατά σημείο, αλλά και ομοιόμορφη. Έχουμε λοιπόν ότι:

$$\sup_{z\in A}\left|\sum_{k=0}^{n} |f_k(z)| - \sum_{k=0}^{\infty} |f_k(z)|\right| = \sup_{z\in A}\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(z)|\right| \leqslant \sup_{z\in A}\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} M_k\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} M_k\right|$$

Επειδή η σειρά $\sum_{k=0}^{\infty} M_k$ συγκλίνει, η σειρά των μερικών αθροισμάτων της $\sum_{k=0}^{n} M_k$ συγκλίνει. Κατ' επέκταση, η 'ουρά' της σειράς είναι συγκλίνουσα προς το 0 και συνεπώς:

$$\sup_{z\in A}\left|\sum_{k=0}^{n} |f_k(z)| - \sum_{k=0}^{\infty} |f_k(z)|\right| \leqslant \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} M_k\right| \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Αυτό δείχνει ότι η σειρά $\sum_{k=0}^{\infty} |f_k(z)|$ συγκλίνει ομοιόμορφα.

□

Γενικά η ομοιόμορφη σύγκλιση έχει καλύτερες ιδιότητες απ' ότι η κατά σημείο. Ένα παράδειγμα μίας παρατήρησης που το δείχνει αυτό, είναι η ακόλουθη.

Παρατήρηση 2.4: Έστω $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μία ακολουθία συνεχών συναρτήσεων $f_k : A \to \mathbb{C}$, $A \subseteq \mathbb{C}$, κι επίσης μία συνάρτηση $f : A \to \mathbb{C}$. Εάν $f_n \to_o f$, τότε και η f είναι συνεχής συνάρτηση.

Απόδειξη: Έστω $\varepsilon > 0$. Λόγω της ομοιόμορφης σύγκλισης $f_n \to_o f$, υπάρχει ένα $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για κάθε $n \geqslant n_0$ να αληθεύει ότι:

$$\sup_{z\in A} |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon/3 \Rightarrow |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon/3, \text{ για κάθε } z \in A$$

Έστω τυχαίο σημείο $a \in A$. Επειδή κάθε συνάρτηση f_n είναι συνεχής σε αυτό το a, για κάποιο $\delta > 0$ και για κάθε $z \in A$ για το οποίο $|z - a| < \delta$:

$$|f_n(z) - f_n(a)| < \varepsilon/3$$

Εάν λοιπόν θεωρήσουμε $n \geqslant n_0$ και $z \in A$ τέτοιο ώστε $|z - a| < \delta$, τότε:

$$|f(z) - f(a)| \leqslant |f(z) - f_n(z)| + |f_n(z) - f_n(a)| + |f_n(a) - f(a)| < 3 \cdot \varepsilon/3 = \varepsilon$$

Αυτό δείχνει ότι η f είναι συνεχής στο a. Επειδή το a ήταν τυχόν σημείο στο A, αποδεικνύεται η συνέχεια της f στο A.

□

2.3.2 Παραγώγιση δυναμοσειρών

Γενικά θα μας απασχολήσουν πολύ μιγαδικές συναρτήσεις που έχουν ανάπτυγμα σε δυναμοσειρά, οπότε είναι σκόπιμο να ελέγξουμε εάν αυτές έχουν καλές ιδιότητες, που μεταβιβάζονται ίσως από τα πολυώνυμα. Για παράδειγμα, είναι μία δυναμοσειρά ολόμορφη συνάρτηση στον δίσκο σύγκλισής της; Η απάντηση που θα δώσουμε είναι καταφατική, και μάλιστα θα δείξουμε κάτι καλύτερο (σε μεταγενέστερο κεφάλαιο). Οι συναρτήσεις που αναλύονται σε δυναμοσειρά -δηλαδή οι αναλυτικές συναρτήσεις- είναι ακριβώς οι ολόμορφες.

Ορισμός 2.7: (Αναλυτικές συναρτήσεις). Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ένα ανοικτό σύνολο. Μία συνάρτηση $f : \Omega \to \mathbb{C}$ που για κάθε $a \in \Omega$ υπάρχει r ώστε να έχει ανάπτυγμα σε δυναμοσειρά στο $S(a,r) \subseteq \Omega$:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-a)^k$$

λέγεται αναλυτική συνάρτηση στο Ω. Το σύνολο των αναλυτικών συναρτήσεων στο Ω το συμβολίζουμε με:

$$\mathcal{A}(\Omega) = \{f : \Omega \to A \mid f \text{ αναλυτική}\}$$

Ας δείξουμε αρχικά ότι κάθε συνάρτηση που αναλύεται σε δυναμοσειρά έχει μιγαδική παράγωγο.

Θεώρημα 2.3: (Θεώρημα παραγώγισης δυναμοσειρών). Έστω $P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ μία δυναμοσειρά με ακτίνα σύγκλισης R. Η P είναι ολόμορφη στον $S(0,R)$. Γενικεύοντας, οποιαδήποτε δυναμοσειρά $Q(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-a)^k$ με ακτίνα σύγκλισης R, είναι ολόμορφη στον $S(a,R)$.

Απόδειξη: Η απόδειξη είναι αρκετά εκτενής και θα γίνει σε βήματα.

Βήμα I: Κατ' αρχάς, οι σειρές:

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \ \textbf{και} \ \sum_{k=0}^{\infty} k c_k z^k$$

έχουν την ίδια ακτίνα σύγκλισης, από την **Παρατήρηση 2.3, i.**.

Βήμα II: Θεωρούμε τυχόν $\zeta \in S(0,R)$ και αριθμό r με $|\zeta| < r < R$. Για κάθε $z \in S(0,r)\backslash\{\zeta\}$ έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{P(z)-P(\zeta)}{z-\zeta} &= \frac{1}{z-\zeta}\left(\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k - \sum_{k=0}^{\infty} c_k \zeta^k\right) = \frac{1}{z-\zeta}\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z^k - \zeta^k) = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} c_k (z^{k-1} + \zeta z^{k-2} + \cdots + \zeta^{k-1}) \end{aligned}$$

Βήμα III: Θα δείξουμε ότι η σύγκλιση της:

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k (z^{k-1} + \zeta z^{k-2} + \cdots + \zeta^{k-1})$$

είναι ομοιόμορφη, οπότε βάσει της **Παρατήρησης 2.4**, θα είναι και συνεχής συνάρτηση. Πράγματι, παρατηρούμε ότι:

$$\left|c_k (z^{k-1} + \zeta z^{k-2} + \cdots + \zeta^{k-1})\right| \leqslant |c_k| \cdot (|z|^{k-1} + |\zeta| \cdots |z|^{k-2} + \cdots |\zeta|^{k-1}) \leqslant k|c_k| r^{k-1}$$

κι επειδή $r < R$, η $\sum_{k=0}^{\infty} k|c_k| r^k$ συγκλίνει. Δηλαδή, από την **Πρόταση 2.12**, η σύγκλιση της $\sum_{k=1}^{\infty} c_k (z^{k-1} + \zeta z^{k-2} + \cdots + \zeta^{k-1})$ είναι ομοιόμορφη.

Βήμα IV: Λόγω της συνέχειας της $\sum_{k=1}^{\infty} c_k (z^{k-1} + \zeta z^{k-2} + \cdots + \zeta^{k-1})$, είναι δυνατόν να γράψουμε:

$$\lim_{z\to\zeta} \frac{P(z)-P(\zeta)}{z-\zeta} = \lim_{z\to\zeta} \sum_{k=1}^{\infty} c_k (z^{k-1} + \zeta z^{k-2} + \cdots + \zeta^{k-1}) = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k z^{k-1}$$

δηλαδή η P παραγωγίζεται σε κάθε σημείο $\zeta \in S(0,r)$, $r < R$. Επειδή οι δίσκοι $S(0,r)$, για τα διάφορα r, καλύπτουν τον $S(0,R)$, σε κάθε σημείο του $S(0,R)$ η P παραγωγίζεται.

□

Είναι φανερό, από το προηγούμενο θεώρημα, ότι μία δυναμοσειρά όχι απλώς παραγωγίζεται, αλλά παραγωγίζεται απείρως.

Δεδομένης της παραγώγισης των δυναμοσειρών, μπορούμε πλέον να βρούμε ένα ανάπτυγμα για την εκθετική συνάρτηση.

Παρατήρηση 2.5: Η εκθετική συνάρτηση $e^{(\cdot)} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ έχει ανάλυση σε δυναμοσειρά:

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

Απόδειξη: Θεωρούμε τη δυναμοσειρά:

$$E(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

και θα δείξουμε ότι αυτή είναι η εκθετική συνάρτηση. Παρατηρούμε ότι:

$$\big(E(z)\cdot e^{-z}\big)' = E'(z)\cdot e^{-z} - E(z)\cdot e^{-z} \overset{\star}{=} e^{-z}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{k-1}}{(k-1)!} - e^{-z}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!} = 0$$

(όπου στη σχέση άστρο ($\star$) χρησιμοποιείται το **Θεώρημα 2.3**). Δηλαδή:

$$E(z)\cdot e^{-z} = c \Rightarrow E(z) = ce^z, \text{ για κάποιο } c \in \mathbb{C}$$

Επειδή $E(0)\cdot e^0 = 1$, έπεται τελικά ότι $c = 1$ και $E(z) = e^z$.

□

Εν τω μεταξύ θυμηθείτε ότι είχαμε ορίσει:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta,\ \theta \in \mathbb{R}$$

και, βάσει των προηγουμένων:

$$\cos\theta + i\sin\theta = \sum_{k=0}^{\infty} i^k \cdot \frac{\theta^k}{k!} = \sum_{\lambda=0}^{\infty}(-1)^\lambda\frac{\theta^{2\lambda}}{(2\lambda)!} + i\sum_{\lambda=0}^{\infty}(-1)^\lambda\frac{\theta^{2\lambda+1}}{(2\lambda+1)!}$$

Έτσι λοιπόν, έπεται μία (ήδη γνωστή) παρατήρηση:

Παρατήρηση 2.6: Τα πραγματικά συνημίτονα και ημίτονα έχουν ανάλυση σε δυναμοσειρά:

$$\cos\theta = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\theta^{2k}}{(2k)!} \textbf{ και } \sin\theta = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\theta^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

για $\theta \in \mathbb{R}$.

Με γνώμονα την προηγούμενη παρατήρηση, είναι δυνατόν να ορίσουμε πλέον μία γενίκευση των $\cos$, $\sin$ στο μιγαδικό επίπεδο.

Ορισμός 2.8: (Μιγαδικά συνημίτονα και ημίτονα). Επεκτείνουμε τις συναρτήσεις $\cos$, $\sin$, για κάθε $z \in \mathbb{C}$:

$$\cos z = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{z^{2k}}{(2k)!} \textbf{ και } \sin z = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Ο ορισμός αυτός είναι καλός, αφού πράγματι επεκτείνει τις πραγματικές $\cos$, $\sin$, κι επιπλέον οι εν λόγω δυναμοσειρές συγκλίνουν για κάθε $z \in \mathbb{C}$. Πράγματι, αυτό μπορούμε να το δούμε γράφοντας (για παράδειγμα για το συνημίτονο):

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|z|^{2k}}{(2k)!} \leqslant \sum_{k=0}^{\infty}\frac{|z|^k}{k!} = e^{|z|} < \infty$$

Παρατήρηση 2.7: Για κάθε μιγαδικό αριθμό $z \in \mathbb{C}$, αληθεύουν οι σχέσεις:

$$e^{iz} = \cos z + i\cos z$$

(το οποίο είναι η γενικευμένη μορφή του ορισμού) και:

$$\cos z = \frac{1}{2}\big(e^{iz} + e^{-iz}\big) \textbf{ και } \sin z = \frac{1}{2i}\big(e^{iz} - e^{-iz}\big)$$

Επιπλέον, έτσι όπως ορίστηκαν οι $\cos$, $\sin$, είναι επί συναρτήσεις. Πράγματι, θεωρώντας:

$$\begin{aligned}\cos(z) = w &\Rightarrow \exp(iz) + \exp(-iz) = 2w\\ &\Rightarrow \exp(iz)^2 - 2w\exp(iz) + 1 = 0\\ &\Rightarrow \exp(iz) = w \pm \sqrt{w^2-1}\\ &\Rightarrow iz = \log(w \pm \sqrt{w^2-1}) \mod (2\pi i)\\ &\Rightarrow z = -i\cdot\log(w \pm \sqrt{w^2-1}) \mod (2\pi)\end{aligned}$$

παρατηρούμε ότι η εξίσωση $\cos z = w$ έχει τουλάχιστον μία λύση, οπότε η $\cos$ είναι επί (αναλόγως και η $\sin$).

Τέλος, θα αναλύσουμε (πέρα από τις προηγούμενες συναρτήσεις) και τις $1/(\cdot)$, $\log$ σε δυναμοσειρές.

Παρατήρηση 2.8:

i. Η συνάρτηση $1/z$ αναλύεται σε δυναμοσειρά σε κάθε σύνολο $S(a,|a|),\ a \in \mathbb{C}$, και μάλιστα:

$$\frac{1}{z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{a^{k+1}}(z-a)^k,\ z \in S(a,|a|)$$

ii. Ο λογάριθμος είναι αναλυτική συνάρτηση σε κάθε σύνολο της μορφής $S(a,|a|)$ που δεν τέμνει την ημιευθεία $\underrightarrow{Ox'}$. Μάλιστα:

$$\log(z) = \log(a) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)a^{k+1}}(z-a)^k$$

Απόδειξη: Για το i.: Έστω $z \in S(a,|a|) \Rightarrow |z-a| < |a|$. Παρατηρούμε ότι $|z-a|/|-a| < 1$, οπότε η σειρά:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z-a}{-a}\right)^k$$

συγκλίνει (ως γεωμετρική). Μάλιστα:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z-a}{-a}\right)^k = 1 \Bigg/ 1 - \frac{z-a}{-a} = \frac{-a}{-a-z+a} = \frac{a}{z} \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{a^{k+1}}(z-a)^k = \frac{1}{z}$$

Για το ii.: Από το **Θεώρημα 2.3**, η δυναμοσειρά:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)a^{k+1}}(z-a)^k + c,\ c \in \mathbb{C}$$

έχει παράγωγο:

$$\frac{d}{dz}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)a^{k+1}}(z-a)^k + c\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{a^{k+1}}(z-a)^k = \frac{1}{z} = \frac{d\log}{dz}(z)$$

Επομένως:

$$\log(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)a^{k+1}}(z-a)^k + c,\ \text{για κάποιο } c \in \mathbb{C}$$

Για $z = a$ η προηγούμενη σχέση δίνει ότι $\log(a) = c$, κι επομένως το ζητούμενο έπεται:

$$\log(z) = \log(a) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)a^{k+1}}(z-a)^k$$

□

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Ολοκληρωτικός λογισμός

3.1 Γενικοί ορισμοί

Προσπαθώντας να «μαντέψουμε» τι μορφή είναι φυσιολογικό να δώσουμε σε ένα μιγαδικό ολοκλήρωμα, επηρεαζόμενοι από την πραγματική περίπτωση είναι λογικό να θελήσουμε να ορίσουμε το μιγαδικό ολοκλήρωμα ως επικαμπύλιο ολοκλήρωμα.

Δηλαδή, αν a, b είναι δύο πραγματικοί αριθμοί, το ολοκλήρωμα:

$$\int_a^b (\cdot)\ dx$$

ολοκληρώνει σε ένα ευθύγραμμο τμήμα, το $[a, b]$. Αν τώρα τα a, b είναι μιγαδικά, είναι φυσιολογικό να θέλουμε και πάλι να ολοκληρώσουμε μεταξύ των a, b, δηλαδή αυτήν την φορά στο ευθύγραμμο τμήμα $[a, b] = \{ta + (1-t)b \mid t \in [0, 1]\}$ του επιπέδου (δηλαδή του $\mathbb{C}$).

$$\int_{[a,b]} (\cdot)\ dz$$

Δίνουμε λοιπόν τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 3.1: (Μιγαδικά ολοκληρώματα). Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ μια συνάρτηση ορισμένη στο ευθύγραμμο τμήμα $[a, b] := \{ta + (1-t)b \mid t \in [0, 1]\}$ ώστε οι συναρτήσεις $\Re f, \Im f$ είναι κατά Riemann ολοκληρώσιμες. Ορίζουμε:

$$\int_{[a,b]} f(z)\ dz = \int_{[a,b]} \Re f(z) dz + i \cdot \int_{[a,b]} \Im f(z) dz$$

Υπάρχουν κι άλλοι ορισμοί για το μιγαδικό ολοκλήρωμα, που ακολουθούν μία λογική υπολογισμού όγκου. Θα μπορούσαμε -για παράδειγμα- να είχαμε ορίσει:

$$\int_{\mathbb{C}} f(z)\ d^2z = \iint_{\mathbb{R}^2} \Re f(x+iy)\ dxdy + i \cdot \iint_{\mathbb{R}^2} \Im f(x+iy)\ dxdy$$

όμως δεν θα μελετήσουμε τέτοιου τύπου ολοκληρώματα.

Παρατήρηση 3.1: Εάν μία συνάρτηση $f : [a, b] \to \mathbb{C},\ a, b \in \mathbb{C}$ είναι ολοκληρώσιμη με τη μιγαδική έννοια, τότε:

$$\left| \int_{[a,b]} f(z)\ dz \right| \leqslant \int_{[a,b]} |f(z)|\ dz$$

Απόδειξη: Η πρόταση, παρά το ότι φαίνεται τετριμμένη και είναι αναμενόμενη, με τους υπάρχοντες ορισμούς χρειάζεται ένα τέχνασμα για να αποδειχθεί. Συγκεκριμένα, η ποσότητα $\int_{[a,b]} f(z)\ dz$ μπορεί να θεωρηθεί μιγαδικός αριθμός, επομένως υπάρχει γωνία θ τέτοια ώστε:

$$\int_{[a,b]} f(z)\ dz = \left| \int_{[a,b]} f(z)\ dz \right| \cdot e^{i\theta} \Rightarrow \left| \int_{[a,b]} f(z)\ dz \right| = \int_{[a,b]} f(z)\ dz \cdot e^{-i\theta}$$

Επειδή το αριστερό μέλος είναι πραγματικός αριθμός:

$$\left|\int_{[a,b]} f(z)\ dz\right| = \Re\int_{[a,b]} f(z)e^{-i\theta}\ dz = \int_{[a,b]} \Re(f(z)e^{-i\theta})\ dz \leqslant \int_{[a,b]} |\Re f(z)|\ dz \leqslant \int_{[a,b]} |f(z)|\ dz$$

□

Η συμπεριφορά της ομοιόμορφης σύγκλισης ολοκληρώσιμων συναρτήσεων, όπως και στην πραγματική περίπτωση, είναι ≪καλή≫ και στα μιγαδικά ολοκληρώματα. Αυτό φαίνεται με την επόμενη πρόταση.

Πρόταση 3.1: Έστω $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μία οικογένεια ολοκληρώσιμων μιγαδικών συναρτήσεων $f_n : [a,b] \to \mathbb{C}$, $a, b \in \mathbb{C}$, τέτοια ώστε $f_n \to_o f$, για κάποια $f : [a,b] \to \mathbb{C}$. Ισχύει:

$$\int_{[a,b]} f_n(z)\ dz \to \int_{[a,b]} f(z)\ dz$$

Απόδειξη: Θεωρούμε τη συνάρτηση $u(t) = ta+(1-t)b$. Οι συναρτήσεις $\Re(f_n \circ u)$ και $\Im(f_n \circ u)$ συγκλίνουν ομοιόμορφα στις $\Re(f \circ u)$ και $\Im(f \circ u)$ αντίστοιχα. Επομένως, για τις πραγματικές συναρτήσεις $\Re(f_n \circ u)$ και $\Im(f_n \circ u)$ ισχύουν:

$$\int_{[a,b]} \Re f_n(z)\ dz = \int_{[0,1]} \Re(f_n \circ u(t))\ dt \to \int_{[0,1]} \Re(f \circ u(t))\ dt = \int_{[a,b]} \Re f(z)\ dz$$
$$\int_{[a,b]} \Im f_n(z)\ dz = \int_{[0,1]} \Im(f_n \circ u(t))\ dt \to \int_{[0,1]} \Im(f \circ u(t))\ dt = \int_{[a,b]} \Im f(z)\ dz$$

Από τον ορισμό του μιγαδικού ολοκληρώματος, προκύπτει το ζητούμενο.

□

Στην ουσία η παραπάνω πρόταση δείχνει κάτι αρκετά βασικό, που παρακάτω θα χρησιμοποιήσουμε: Στην ομοιόμορφη σύγκλιση, τα αθροίσματα και τα ολοκληρώματα μπορούν να εναλλάσσονται. Δηλαδή, εάν:

$$\sum_{k=1}^{n} f_k(z)\ dz \overset{n}{\to}_o \sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)\ dz$$

τότε:

$$\sum_{k=1}^{n} \int_{[a,b]} f_k(z)\ dz = \int_{[a,b]} \sum_{k=1}^{n} f_k(z)\ dz \overset{n}{\to} \int_{[a,b]} \sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)\ dz$$

δηλαδή:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{[a,b]} f_k(z)\ dz = \int_{[a,b]} \sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)\ dz$$

3.2 Επικαμπύλια ολοκληρώματα

Είναι κατά κάποιον τρόπο αναμενόμενο, εφόσον ορίσαμε το μιγαδικό ολοκλήρωμα σε ευθύγραμμα τμήματα, να θελήσουμε να τα επεκτείνουμε σε καμπύλες γενικά. Ξεκινούμε λοιπόν με τον ορισμό της καμπύλης.

Ορισμός 3.2: (Καμπύλες). Έστω $I = [a,b] \subseteq \mathbb{R}$ ένα διάστημα. Κάθε συνεχής συνάρτηση $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ θα ονομάζεται καμπύλη.

Είναι λογικό να ορίσουμε το ολοκλήρωμα σε καπύλη χρησιμοποιώντας ≪αλλαγή μεταβλητής≫. Αν δούμε κάθε σημείο της καμπύλης όχι απλώς ως σημείο του επιπέδου αλλά σαν τιμή $\gamma(t)$, μπορούμε να ορίσουμε:

$$\int_{\gamma} (\cdot)\ dz = \int_{I} (\cdot) \circ \gamma(t) \cdot \frac{d\gamma}{dt}(t)\ dt$$

Αυτό φυσικά απαιτεί όχι μόνο την ύπαρξη της παραγώγου $d\gamma/dt$, αλλά και την ολοκληρωσιμότητά της.

Από εδώ και στο εξής, όποτε αναφερόμαστε σε καμπύλες, θα θεωρούμε ότι είναι παραγωγίσιμες με ολοκληρώσιμη παράγωγο.

Ορισμός 3.3: (Επικαμπύλια μιγαδικά ολοκληρώματα). Έστω $\gamma : I \to \mathbb{C}$ μία καμπύλη και $f : \gamma(I) \to \mathbb{C}$ μία συνάρτηση. Εάν η $f \circ \gamma$ είναι ολοκληρώσιμη, ορίζουμε:

$$\int_\gamma f(z)\ dz = \int_I f \circ \gamma(t) \cdot \frac{d\gamma}{dt}(t)\ dt$$

Ορισμός 3.4: (Μερικές ιδιότητες των καμπυλών). Έστω $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ μια καμπύλη.

i. Εάν η γ είναι $1-1$ (αγνοώντας την περίπτωση όπου μόνο η αρχή και το τέλος ταυτίζονται), θα λέμε την καμπύλη γ απλή. Με γεωμετρική σκοπιά, η γ δεν είναι αυτοτεμνόμενη.

ii. Αντιθέτως, εάν η γ δεν είναι $1-1$ (πέραν του αν η αρχή και το τέλος ταυτίζονται), θα την ονομάζουμε μη απλή. Η καμπύλη γ λοιπόν είναι αυτοτεμνόμενη σε αυτήν την περίπτωση.

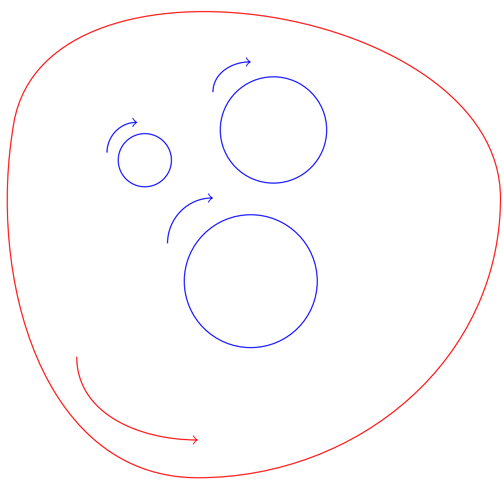
iii. Εάν η γ είναι απείρως παραγωγίσιμη (δηλαδή $\gamma \in C^\infty(I)$) τότε η καμπύλη γ θα καλείται λεία.

iv. Εάν το σύνορο ∂A ενός συνεκτικού συνόλου $A \subseteq \mathbb{C}$ αποτελείται από πεπερασμένες στο πλήθος απλές, μη τεμνόμενες, κλειστές καμπύλες, θα λέμε ότι το ∂A είναι ομαλό.

Στο επίπεδο οι καμπύλες μπορούν να έχουν προσανατολισμό, δεξιόστροφο ή αριστερόστροφο. Υπάρχει μία σύμβαση -η οποία εκρέει από προβλήματα φυσικής- ένα ομαλό σύνορο ∂A να προσανατολίζεται έτσι ώστε :

- Εάν η γ_κ βρίσκεται εντός της γ_λ, οι καμπύλες έχουν διαφορετικό προσανατολισμό.
- Διαφορετικά οι γ_κ, γ_λ προσανατολίζονται με τον ίδιο προσανατολισμό.
- Η εξωτερική καμπύλη, έστω γ_j, προσανατολίζεται αριστερόστροφα (αν κι αυτό είναι μία τυπικότητα που ανάλογα με το πρόβλημα μπορεί να αλλάξει).

(Εννοείται ότι $\kappa \neq \lambda$ και το ∂A γράφεται ως ένωση καμπυλών $\partial A = \bigcup_{k\in[n]} \gamma_k$). Η ιδέα βρίσκεται (για παράδειγμα) στη ρευστομηχανική. Ένα ρευστό, καθώς στροβιλίζεται στο εσωτερικό ενός συνόλου, τείνει να κινήσει τις επιμέρους καμπύλες του συνόρου όπως περιγράψαμε παραπάνω.



Μ' αυτό υπόψη, κάθε επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_{\gamma_k}(\cdot)\ dz$ εξαρτάται από τον προσανατολισμό της γ_k. Συγκεκριμένα, προσανατολίζοντας την καμπύλη με τους δύο διαφορετικούς προσανατολισμούς, (από τον ορισμό του ολοκληρώματος έπεται ότι) το ολοκλήρωμα διαφέρει ένα πολλαπλάσιο -1.

Ορισμός 3.5: (Ολοκλήρωμα σε σύνορο). Έστω ένα σύνολο A με ομαλό σύνορο $\partial A = \bigcup_{k\in[n]} \gamma_k$. Έστω επίσης $f : \partial A \to \mathbb{C}$ μία συνάρτηση, που είναι ολοκληρώσιμη σε καθεμία γ_k, $k \in [n]$. Ορίζουμε:

$$\int_{\partial A} f(z)\ dz = \sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_k} f(z)\ dz$$

3.3 Θεωρήματα για τα επικαμπύλια ολοκληρώματα

Βασικοί υπολογισμοί στις καμπύλες αποτελούν οι μετρήσεις μήκους, ή τουλάχιστον προϋποθέτουν τη γνώση του μήκους μίας καμπύλης. Γι' αυτό θα ξεκινήσουμε αναζητώντας έναν τρόπο υπολογισμού του μήκους μίας καμπύλης.

Ορισμός 3.6: (Τεθλασμένες προσεγγίσεις). Έστω $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ μία καμπύλη και $P = \{p_0, \cdots, p_n\}$, $n \in \mathbb{N}$ μία διαμέριση του διαστήματος I. Ορίζουμε ως τεθλασμένη προσέγγιση (του μήκους) της γ, το μήκος της τεθλασμένης γραμμής $\gamma(p_0) \cdots \gamma(p_n)$. Δηλαδή το μήκος:

$$\ell(\gamma, P) = \sum_{k+1 \in [n+1]} ||\gamma(p_{k+1}) - \gamma(p_k)||$$

Είναι λογικό να αναζητήσουμε το μήκος μίας καμπύλης θεωρώντας κάποιο όριο τεθλασμένων προσεγγίσεων. Φανταζόμαστε ότι, καθώς το πλάτος της διαμέρισης μικραίνει, το μήκος προσεγγίζεται καλύτερα.

Παρατήρηση 3.2: Έστω $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ μία καμπύλη και P, Q δύο διαμερίσεις του I, με την P να είναι λεπτότερη της Q (συμβολικά $||P|| > ||Q||$). Τότε αληθεύει:

$$\ell(\gamma, P) \geqslant \ell(\gamma, Q)$$

Επομένως, εάν το supremum:

$$\sup_{P \in \mathfrak{P}} \ell(\gamma, P), \text{ όπου } \mathfrak{P} \text{ είναι το σύνολο των διαμερίσεων του } I$$

δεν είναι άπειρο, φανταζόμαστε ότι θα μπορεί να οριστεί κάποια έννοια μήκους.

Ορισμός 3.7: (Ευθυγραμμίσιμες καμπύλες και μήκος καμπυλών).

- Μία καμπύλη $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ θα λέγεται ευθυγραμμίσιμη εάν υπάρχει $L > 0$ ώστε:

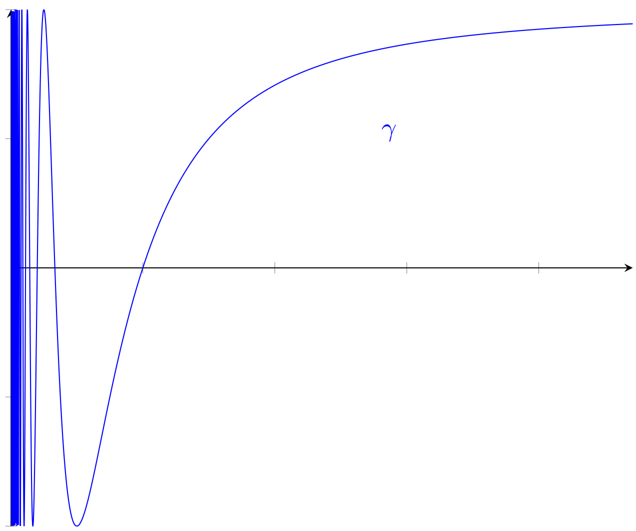
$$\sup_{P \in \mathfrak{P}} \ell(\gamma, P) < L$$

- Έστω $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ μία ευθυγραμμίσιμη καμπύλη. Ορίζουμε ως μήκος της γ τον αριθμό:

$$\ell(\gamma) = \sup_{P \in \mathfrak{P}} \ell(\gamma, P), \text{ όπου } \mathfrak{P} \text{ είναι το σύνολο των διαμερίσεων του } I$$

Παρατήρηση 3.3: Γενικά υπάρχουν καμπύλες που δεν είναι ευθυγραμμίσιμες. Για παράδειγμα, η:

$$\gamma(t) = \begin{cases} \left(t, t\cos\dfrac{\pi}{2t}\right), & t \in (0,1] \\ (0,0), & t = 0 \end{cases}$$



Απόδειξη: Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε τις διαμερίσεις του $[0,1]$:

$$P_n = \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{1}{n-1}, \cdots, \frac{1}{2}, 1\right\}$$

Επειδή:

$$\ell(\gamma,P_n)=\sum_{k+1\in[n+1]}\left|\left|\gamma\left(\frac{1}{k+1}\right)-\gamma\left(\frac{1}{k}\right)\right|\right|=\sum_{\substack{k+1\in[n+1]\\2|k+1}}\left|\left|\pm\frac{1}{k+1}-0\right|\right|+\sum_{\substack{k+1\in[n+1]\setminus\{1\}\\2\nmid k+1}}\left|\left|0\mp\frac{1}{k}\right|\right|$$

έχουμε:

$$\ell(\gamma,P_n)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\to\infty$$

Έτσι λοιπόν, καθώς $n\to\infty$, $\ell(\gamma,P_n)\to\infty$ και $\sup_{P\in\mathfrak{P}}\ell(\gamma,P)=\infty$.

□

Φυσικά ο υπολογισμός του μήκους με διαμερίσεις είναι κατ' ελάχιστο χρονοβόρος και μη αποδοτικός. Με το παρακάτω θεώρημα θα δώσουμε έναν εναλλακτικό τύπο μήκους.

Θεώρημα 3.1: Έστω $\gamma: I=[a,b]\to\mathbb{R}^n$ μία C^1 καμπύλη. Η γ είναι ευθυγραμμίσιμη κι έχει μήκος:

$$\ell(\gamma)=\int_I ||\gamma'(t)||\,dt$$

Απόδειξη: Για την απόδειξη του θεωρήματος θα δείξουμε τις δύο ανισότητες.

Για την $\leqslant$: Θεωρούμε $P=\{a=p_0,\cdots,p_n=b\}$ μία τυχούσα διαμέριση του I, και παρατηρούμε ότι:

$$||\gamma(p_{k+1})-\gamma(p_k)||=\left|\left|\int_{p_k}^{p_{k+1}}\gamma'(t)\right|\right|\leqslant\int_{p_k}^{p_{k+1}}||\gamma'(t)||\,dt$$

Οπότε αθροίζοντας:

$$\ell(\gamma,P)\leqslant\sum_{k+1\in[n+1]}\int_{p_k}^{p_{k+1}}||\gamma'(t)||\,dt=\int_a^b||\gamma'(t)||\,dt=\int_I||\gamma'(t)||\,dt$$

έπεται η μία ανισότητα (και ότι η καμπύλη είναι ευθυγραμμίσιμη).

Για την $\geqslant$: Θεωρούμε τυχόν $\varepsilon>0$. Επειδή η γ είναι λεία, η γ' είναι συνεχής, κι οπότε υπάρχει $\delta>0$ τέτοιο ώστε για $|t-s|<\delta$, $||\gamma'(t)-\gamma'(s)||<\varepsilon$. Επιλέγουμε διαμέριση P_δ ώστε για κάθε $p_k,p_{k+1}\in P_\delta$, $|p_{k+1}-p_k|<\delta$ (δηλαδή $||P_\delta||<\delta$) και παρατηρούμε ότι $||\gamma'(p_{k+1})-\gamma'(p_k)||<\varepsilon$. Ειδικότερα, εάν $t\in[p_k,p_{k+1}]$, τότε $||\gamma'(p_{k+1})-\gamma'(t)||<\varepsilon\Rightarrow||\gamma'(t)||<||\gamma'(p_{k+1})||+\varepsilon$. Επομένως:

$$\int_{p_k}^{p_{k+1}}||\gamma'(t)||\,dt\leqslant\int_{p_k}^{p_{k+1}}||\gamma'(p_{k+1})||+\varepsilon\,dt=(||\gamma'(p_{k+1})||+\varepsilon)\cdot(p_{k+1}-p_k)$$

Επειδή όμως:

$$||\gamma'(p_{k+1})||\cdot(p_{k+1}-p+k)=||\gamma'(t)+\gamma'(p_{\kappa+1})-\gamma'(t)\,dt||\leqslant$$

$$\leqslant\left|\left|\int_{p_k}^{p_{k+1}}\gamma'(t)\,dt\right|\right|+\int_{p_k}^{p_{k+1}}||\gamma'(p_{k+1})-\gamma'(t)||\,dt\leqslant||\gamma(p_{k+1})-\gamma(p_k)||+\varepsilon(p_{k+1}-p_k)$$

προσθέτοντας για τα διάφορα k τις παραπάνω σχέσεις, έχουμε:

$$\int_a^b||\gamma'(t)||\,dt\leqslant\sum_{k+1\in[n+1]}||\gamma(p_{k+1})-\gamma(p_k)||+\varepsilon\sum_{k+1\in[n+1]}(p_{k+1}-p_k)=\ell(\gamma,P_\delta)+\varepsilon(b-a)$$

και με supremum:

$$\int_a^b||\gamma'(t)||\,dt\leqslant\sup_{P\in\mathfrak{P}}\ell(\gamma,P)+\varepsilon(b-a)$$

Αφήνοντας $\varepsilon\to0^+$, έπεται η ζητούμενη ανισότητα.

□

Η παραπάνω ανάλυση, σχετικά με το μήκος των καμπυλών, είναι γενική και δεν περιορίζεται στις μιγαδικές καμπύλες. Όσον αφορά για τα μιγαδικά ολοκληρώματα, επειδή ακριβώς τα ορίσαμε με πολύ φυσιολογικό τρόπο, τα περισσότερα θεωρήματα του απειροστικού λογισμού «μεταβιβάζονται» κι αυτά. Στη συνέχεια θα αναφέρουμε μερικά εξ αυτών, τα οποία θα χρησιμοποιήσουμε κατά κόρον.

Θεώρημα 3.2: (Το θεμελιώδες θεώρημα του απειροστικού λογισμού). Έστω $\gamma : I = [a, b] \to \mathbb{C}$ μία καμπύλη και $f : \gamma(I) \to \mathbb{C}$ μία παραγωγίσιμη συνάρτηση με ολοκληρώσιμη παράγωγο. Αληθεύει ότι:

$$\int_\gamma f'(z)\, dz = f \circ \gamma(b) - f \circ \gamma(a)$$

Απόδειξη: Γράφοντας το μιγαδικό ολοκλήρωμα στη μορφή:

$$\int_\gamma f'(z)\, dz = \int_a^b f' \circ \gamma(t) \cdot \frac{d\gamma}{dt}(t)\, dt = \int_a^b \frac{df \circ \gamma}{dt}(t)\, dt$$

και εφαρμόζοντας το γνωστό θεμελιώδες θεώρημα του απειροστικού λογισμού, της πραγματικής περίπτωσης, παίρνουμε το ζητούμενο.

□

Ένα ακόμη χρήσιμο θεώρημα είναι αυτό του Green. Πριν όμως το διατυπώσουμε, θα αναφερθούμε σε έναν συμβολισμό που χρησιμοποιείται στον πολυμεταβλητό λογισμό (κι έτσι ίσως γίνει καλύτερα η σύνδεση των δύο όψεων του θεωρήματος).

Ο συμβλισμός που δίνουμε στην ουσία εμπλέκει τις λεγόμενες διαφορικές μορφές, και κανονικά είναι αυστηρός και με νόημα. Εδώ εμείς δεν θα ασχοληθούμε με διαφορικές μορφές, οπότε στην ουσία τα παρακάτω είναι μονάχα συμβολισμοί σ' αυτήν την παρουσίαση.

Έτσι λοιπόν, αν γράψουμε $dz = (dx, dy)$ και $f = (\Re f, \Im f)$, έχουμε συμβολικά ότι:

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \int_\gamma (\Re f, \Im f) \cdot (dx, dy) = \int_\gamma \Re f\, dx + \Im f\, dy$$

Επιπλέον, ένας συμβολισμός που θα εμφανίζεται συχνά είναι ο ακόλουθος

Γενικά τα σύνολα των ολομόρφων κι αναλυτικών συναρτήσεων, $\mathcal{O}(\Omega)$, $\mathcal{A}(\Omega)$ ορίζονται σε ανοικτά σύνολα $\Omega \subseteq \mathbb{C}$. Παρόλα αυτά θα εμφανιστούν οι συμβολισμοί $\mathcal{O}(\overline{\Omega})$, $\mathcal{A}(\overline{\Omega})$, που θα σημαίνουν:

$$\mathcal{O}(\overline{\Omega}) = \mathcal{O}(A), \text{ για κάποιο ανοικτό } A \supset \Omega$$

και:

$$\mathcal{A}(\overline{\Omega}) = \mathcal{A}(A), \text{ για κάποιο ανοικτό } A \supset \Omega$$

Αυτός δεν είναι και πολύ καλός συμβολισμός από άποψη μαθηματικής ακρίβειας, είναι όμως συνήθης και στην περίπτωσή μας βολικός. Αντίστοιχοι συμβολισμοί θα δίνονται και για τα διάφορα σύνολα $C^n(\overline{\Omega})$, $n \in \mathbb{N}_0$.

Θεώρημα 3.3: (Το θεώρημα του Green). Έστω ένα ανοικτό, συνεκτικό και φραγμένο σύνολο $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ με ομαλό σύνορο $\partial\Omega$. Εάν $f : A \to \mathbb{C}$ είναι μία συνάρτηση τέτοια ώστε $\Re f, \Im f \in C^1(\overline{\Omega})$, τότε:

$$\int_{\partial\Omega} f(z)\, dz = \iint_\Omega \frac{\partial \Im f}{\partial x} - \frac{\partial \Re f}{\partial y}\, dxdy$$

Απόδειξη: Αν γράψουμε, με τους συμβολισμούς που δώσαμε:

$$\int_{\partial\Omega} f(z)\, dz = \int_{\partial\Omega} \Re f\, dx + \Im f\, dy = \iint_\Omega \frac{\Im f}{\partial x} - \frac{\Re f}{\partial y}\, dxdy$$

η σύνδεση του θεωρήματος με το γνωστό θεώρημα του Green γίνεται εμφανής.

□

3.4 Ο ολοκληρωτικός τύπος του Cauchy

3.4.1 Το λήμμα του Goursat

Το θεώρημα του Green είναι ίσως ένα από τα σημαντικότερα θεωρήματα της μιγαδικής ανάλυσης και του απειροστικού λογισμού. Μία από τις σημαντικότερες εφαρμογές του -που δεδομένων των τύπων Cauchy-Riemann είναι φυσιολογική- είναι η ακόλουθη: Θεωρούμε μία απλή καμπύλη και θεωρούμε Ω το χωρίο που περικλύει. Εάν f είναι μία συνάρτηση $f \in \mathcal{O}(\overline{\Omega}) \cap C^1(\overline{\Omega})$ (οπότε έχει -λόγω του C^1- μερικές παραγώγους που είναι C^1), τότε:

$$\int_{\partial\Omega} f(z)\,dz = \iint_{\Omega} \frac{\partial \Im f}{\partial x} - \frac{\partial \Re f}{\partial y}\,dxdy \overset{\star}{=} 0$$

(η ισότητα άστρο ($\star$) είναι συνέπεια των εξισώσεων Cauchy-Riemann).

Εν τω μεταξύ θα βοηθήσει να εισάγουμε έναν συμβολισμό. Εάν γ είναι μία απλή καμπύλη, με $\mathcal{X}(\gamma)$ θα συμβολίζουμε το (κλειστό) χωρίο που περικλύει η καμπύλη αυτή (εννοείται αυτό που αντιλαμβανόμαστε ως ≪εσωτερικό≫ κάθε φορά).

Θα μπορούσε (όπως είχε γίνει στην πρώτη μορφή αυτών των σημειώσεων) να ακολουθηθεί μία ανάπτυξη βασιζόμενη στο προηγούμενο αυτό αποτέλεσμα. Οπότε, οι συναρτήσεις που ολοκληρώνονται θα έπρεπε να υποθέτονται ολόμορφες και C^1 σε όλα τα θεωρήματα που πηγάζουν από την προηγούμενη παρατήρηση. Στην πραγματικότητα όμως μπορούμε να κάνουμε κάτι καλύτερο -για συναρτήσεις ορισμένες σε απλά συνεκτικά σύνολα- το οποίο θα δούμε στη συνέχεια.

Λήμμα 3.1: (Λήμμα του Goursat). Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ένα ανοικτό σύνολο και $f : \Omega \to \mathbb{C}$ μία ολόμορφη συνάρτηση $f \in \mathcal{O}(\Omega \backslash \{\omega\}) \cap C(\Omega)$, $\omega \in \mathbb{C}$. Για τετράγωνο T με $\mathcal{X}(T) \subseteq \Omega$ έχουμε:

$$\int_T f(z)\,dz = \int_{\partial\mathcal{X}(T)} f(z)\,dz = 0$$

∎

Απόδειξη: Η απόδειξη θα γίνει σε βήματα.

Βήμα I: Ας υποθέσουμε ότι η γ είναι ένα τετράγωνο πλευράς $a/4$ και ότι $\omega \in \big(\mathcal{X}(T)\big)^{\circ}$ -η περίπτωση όπου το ω δεν είναι στο εσωτερικό χωρίο της T μπορεί να αντιμετωπιστεί με παρόμοιο τρόπο και, για χάρη συντομίας, δεν θα αναφερθεί. Χωρίζουμε το τετράγωνο στα 4, στα 8, στα 16 κ.ο.κ., υποδιαιρώντας κάθε φορά το τετράγωνο ή τα υποτετράγωνα στα 4. Οι προσανατολισμοί γίνονται έτσι ώστε:

$$\int_T (\cdot)\,dz = \sum_{k=1}^{4^n} \int_{T_k^n} (\cdot)\,dz$$

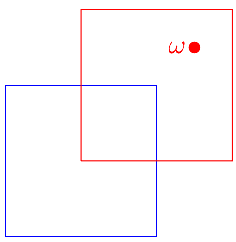
όπου:

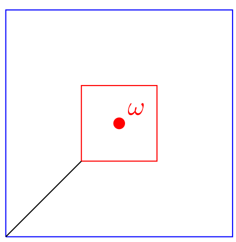
$$\{T_k^n\}_{k=1}^{4^n}$$

είναι η οικογένεια των τετραγώνων που προκύπτουν μετά την $n-$οστή επανάληψη της υποδιαίρεσης. Επίσης κατασκευάζουμε τετράγωνο $E_\eta = E_{\eta(n)}$ γύρω από το ω, με πλευρά $\eta > 0$, που μικραίνει σε κάθε υποδιαίρεση και γίνεται $0 < \eta < \min\{a/4^n, \operatorname{dist}(\omega, T)\}$.

Βήμα II: Αφού ορίσαμε τις υποδαιρέσεις του τετραγώνου, θα τροποποιήσουμε λίγο τα υποτετράγωνα. Αυτό το κάνουμε γιατί θα χρειαστεί αργότερα, όταν θα ολοκληρώσουμε πάνω σ' όλα αυτά τα τετράγωνα. Επειδή δεν ξέρουμε πώς ακριβώς η f συμπεριφέρεται στο ω, θα ολοκληρώσουμε μακρυά απ' αυτό.

- Εάν κάποιο T_k^n τέμνει το E_η, τροποποιούμε το πρώτο έτσι ώστε να μην περιέχει το τμήμα του που βρίσκεται στο $\mathcal{X}(E_\eta)$. Στη θέση του μπαίνει το αντίστοιχο τμήμα του E_η.
- Εάν το E_η βρίσκεται εντός κάποιου $\mathcal{X}(T_k^n)$, τότε ενώνουμε με ευθύγραμμο τμήμα τα E_η, T_k^n. Προσανατολίζουμε το σχήμα με τον εξής τρόπο: Διατρέχουμε το E_η, το ευθύγραμμο τμήμα, το T_k^n και αντίστροφα το ίδιο ευθύγραμμο τμήμα.





Βήμα ΙΙΙ: Έστω $\varepsilon > 0$. Εφόσον $f \in \mathcal{O}(\Omega \backslash \{\omega\})$, σε κάθε $\zeta \in \Omega \backslash \{\omega\}$ έχουμε:

$$\left| \frac{f(z) - f(\zeta)}{z - \zeta} - f'(\zeta) \right| < \varepsilon, \text{ για αρκετά μικρό } \delta \text{ και } z \in S(\zeta, \delta)$$

δηλαδή:

$$|f(z) - f(\zeta) - f(\zeta)(z - \zeta)| < \varepsilon \cdot |z - \zeta|$$

Εάν το n γίνει αρκετά μικρό ώστε $z \in \mathcal{X}(T_k^n) \subseteq S(\zeta, \delta)$, τότε η παραπάνω ανισότητα γίνεται:

$$|f(z) - f(\zeta) - f(\zeta)(z - \zeta)| < \varepsilon \cdot \operatorname{diam} T_k^n = \varepsilon a \sqrt{2}/4^n$$

Έτσι τελικά:

$$\left| \int_{T_k^n} f(z) - f(\zeta) - f(\zeta)(z - \zeta)\, dz \right| \leqslant \int_{T_k^n} |f(z) - f(\zeta) - f(\zeta)(\zeta - z)|\, dz < \int_{T_k^n} \varepsilon a \sqrt{2}/4^n = \varepsilon a^2 \sqrt{2}/4^{2n-1}$$

Βήμα IV: Επειδή:

$$\int_{T_k^n} f(\zeta)\, dz = \int_{T_k^n} [f(\zeta) z]' dz = 0$$

(από το **Θεώρημα 3.2**) και:

$$\int_{T_k^n} f'(\zeta)(z - \zeta)\, dz = \int_{T_k^n} [f'(\zeta)(z - \zeta)^2/2]'\, dz = 0$$

(πάλι από το **Θεώρημα 3.2**), η σχέση του **Βήματος ΙΙΙ** γίνεται:

$$\left| \int_{T_k^n} f(z)\, dz \right| < \varepsilon a^2 \sqrt{2}/4^{2n-1}$$

Αθροίζοντας λοιπόν στα $k \in [4^n]$, έπεται:

$$\left| \int_{T+E_\eta} f(z)\, dz \right| = \left| \sum_{k=1}^{4^n} \int_{T_k^n} f(z)\, dz \right| < \varepsilon a^2 \sqrt{2} \sum_{k=1}^{4^n} \frac{1}{4^{2n-1}} \leqslant \varepsilon a^2 \sqrt{2} \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{1}{4^\lambda} = \varepsilon a^2 \sqrt{2}/2$$

Επειδή το παραπάνω ισχύει για τυχόν $\varepsilon > 0$:

$$\int_{T+E_\eta} f(z)\, dz = 0$$

Βήμα V: Γράφουμε:

$$\left| \int_T f(z)\, dz \right| - \left| \int_{E_\eta} f(z)\, dz \right| \leqslant \left| \int_{T+E_\eta} f(z)\, dz \right| \Rightarrow \left| \int_T f(z)\, dz \right| \leqslant \left| \int_{T+E_\eta} f(z)\, dz \right| + \left| \int_{E_\eta} f(z)\, dz \right|$$

και παρατηρούμε ότι:

$$\left| \int_{E_\eta} f(z)\, dz \right| \leqslant \max |f|(E_\eta) \cdot \ell(E_\eta) \leqslant \max |f| \big(\mathcal{X}(T)\big) \cdot \ell(E_\eta) \leqslant \max |f| \big(\mathcal{X}(T)\big) \cdot a/4^{n-1} \xrightarrow{n} 0$$

Επομένως, η πρώτη σχέση του βήματος δίνει (σε συνδυασμό με το **Βήμα IV**) ότι:

$$\int_T f(z)\, dz = 0$$

□

Από το προηγούμενο λήμμα προκύπτουν διάφορά ανάλογά του. Κατ' αρχάς, αντί για τετράγωνο, ισχύει για κάθε ισοσκελές ορθογώνιο τρίγωνο (κι αυτό προκύπτει από το προηγούμενο λήμμα, χωρίζοντας το τετράγωνο στη μέση). Χωρίζοντας κάθε ισοσκελές τρίγωνο στη μέση, μπορούμε να δείξουμε ότι το λήμμα ισχύει για κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, κι έπειτα για κάθε τρίγωνο (αφού φέρνοντας το κατάλληλο ύψος, κάθε τρίγωνο χωρίζεται σε δύο ορθογώνια τρίγωνα).

Η απόδειξη επίσης δείχνει ότι, αν η καμπύλη T (που δεν είναι κατ' ανάγκη τετράγωνο στην περίπτωση αυτή) είναι ευθυγραμμίσιμη, κλειστή και απλή, το ίδιο λήμμα ισχύει.

Γενικά φαίνεται ότι -παρά την πολύ δουλειά που κάναμε- η διατύπωση του λήμματος χρίζει βελτίωσης. Από εδώ και στο εξής λοιπόν, σταδιακά θα το βελτιώνουμε.

Για τη διατύπωση της παρακάτω πρότασης -που θα λειτουργήσει βοηθητικά για την απόδειξη άλλων αποτελεσμάτων- χρειάζεται ο ορισμός του αστρόμορφου συνόλου.

Ορισμός 3.8: (Αστρόμορφα σύνολα). Ένα σύνολο $A \subseteq \mathbb{C}$ θα λέγεται αστρόμορφο υπάρχει κάποιο $a \in A$ ώστε για κάθε $b \in A$, το ευθύγραμμο τμήμα $[a, b]$ περιέχεται στο A.

Πρόταση 3.2: Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ένα ανοικτό και αστρόμορφο σύνολο. Για κάθε $f \in \mathcal{O}(\Omega \backslash \{\omega\}) \cap C(\Omega)$, $\omega \in \mathbb{C}$, υπάρχει παράγουσα συνάρτηση F.

Απόδειξη: Υποθέτουμε ότι το Ω είναι αστρόμορφο σύνολο ως προς το w (w, όχι ω). Ορίζουμε:

$$F(z) = \int_{[w,z]} f(\zeta)\, d\zeta$$

και θα δείξουμε ότι η F αποτελεί παράγουσα της F. Πράγματι, επειδή το Ω είναι ανοικτό σύνολο, για κάθε $z_0 \in \Omega$ υπάρχει αρκετά μικρή περιοχή $S(z_0, \delta) \subseteq \Omega$. Θεωρούμε λοιπόν $z \in S(z_0, \delta) \backslash \{z_0\}$ και από το **Λήμμα 3.1** έχουμε:

$$\frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} = -\frac{1}{z - z_0} \int_{[z,z_0]} f(\zeta)\, d\zeta$$

μιας και:

$$\int_{[w,z]+[z,z_0]-[w,z_0]} f(\zeta)\, d\zeta = 0 \Rightarrow F(z) - F(z_0) = -\int_{[z,z_0]} f(\zeta)\, d\zeta$$

Επιπλεόν, είναι τετριμμένο ότι:

$$f(z_0) = -\frac{f(z_0)}{z - z_0} \int_{[z,z_0]} d\zeta = -\frac{1}{z - z_0} \int_{[z,z_0]} f(z_0)\, d\zeta$$

οπότε, σε συνδυασμό με τα προηγούμενα:

$$\left| \frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} - f(z_0) \right| = \left| \frac{1}{z - z_0} \int_{[z-z_0]} f(z_0) - f(\zeta)\, d\zeta \right| \leqslant \frac{1}{|z - z_0|} \int_{[z,z_0]} |f(z_0) - f(\zeta)|\, d\zeta$$

δηλαδή:

$$\left| \frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} - f(z_0) \right| \leqslant \sup_{\zeta \in S(z_0,\delta)} |f(z_0) - f(\zeta)|$$

Έστω τώρα $\varepsilon > 0$. Μικραίνοντας αρκετά το δ, λόγω της συνέχειας της f, είναι δυνατόν να κάνουμε τη δεξιά ποσότητα όσο μικρή θέλουμε, δηλαδή:

$$\left| \frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} - f(z_0) \right| < \varepsilon \Rightarrow F'(z_0) = f(z_0)$$

□

Λήμμα 3.2: (Λήμμα του Goursat για αστρόμορφα σύνολα). Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ένα ανοικτό και αστρόμορφο σύνολο, και $f : \Omega \to \mathbb{C}$ μία ολόμορφη συνάρτηση $f \in \mathcal{O}(\Omega \backslash \{\omega\}) \cap C(\Omega)$, $\omega \in \mathbb{C}$. Για κάθε κλειστή καμπύλη γ με $\gamma(I) \subseteq \Omega$ αληθεύει:

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 0$$

■

Απόδειξη: Από την **Πρόταση 3.2** και το θεμελιώδες θεώρημα του απειροστικού λογισμού, σε συνδυασμό με το ότι η καμπύλη είναι κλειστή, έχουμε το ζητούμενο.

□

Πλέον είμαστε σχεδόν έτοιμοι να διατυπώσουμε τη γενικότερη μορφή του λήμματος. Χρειαζόμαστε μόνο λίγους ορισμούς και μία πρόταση.

Ορισμός 3.9: (Ομοτοπία μεταξύ καμπυλών και ομοτοπικές καμπύλες).

- Έστω γ, η δύο καμπύλες ορισμένες στο ίδιο σύνολο $I = [a, b]$, με κοινή αρχή και ίδιο πέρας. Η απαίτηση να ορίζονται στο ίδιο σύνολο δεν είναι καθόλου περιοριστική, αφού μπορούμε να αναπαραμετρήσουμε κάθε καμπύλη. Για παράδειγμα, κάθε καμπύλη γ μετασχηματίζεται σε καμπύλη γ^* με πεδίο ορισμού το $[0, 1]$:

$$\gamma^*(s) = \gamma\big(sa + (1 - s)b\big),\ s \in [0, 1]$$

Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$. Ορίζουμε ομοτοπία μεταξύ των γ, η κάθε συνάρτηση $H : I \times [0,1] \to \Omega$ (αν υπάρχει) τέτοια ώστε:

- $H(s,0) = \gamma(s)$
- $H(s,1) = \eta(s)$
- $H(0,t) = \gamma(0) = \eta(0)$
- $H(1,t) = \gamma(1) = \eta(1)$
- Η H είναι συνεχής.

Στην ουσία η ύπαρξη μίας ομοτοπίας μεταξύ δύο καμπυλών με ίδια αρχή και ίδιο πέρας σημαίνει ότι η πρώτη καμπύλη μπορεί -με συνεχή τρόπο- να μετασχηματιστεί και να γίνει η δεύτερη. Έτσι λοιπόν, στην ομοτοπία $H(s,t)$ το t μπορούμε να το φανταζόμαστε ως χρόνο. Όταν το $t = 0$, η ομοτοπία είναι ακριβώς η καμπύλη γ, ενώ καθώς το t μεγαλώνει, η $H(s,t)$ πλησιάζει (με συνεχή τρόπο) την $H(s,1)$, που είναι η η.

- Εάν γ και η είναι δύο καμπύλες όπως πριν για τις οποίες υπάρχει ομοτοπία H, θα λέμε ότι οι γ και η είναι ομοτοπικές.

Δεν είναι όλες οι καμπύλες (με ίδια αρχή και ίδιο τέλος) ομοτοπικές, κι αυτό γιατί η ομοτοπία εξαρτάται από το σύνολο Ω. Για παράδειγμα, εάν θεωρήσουμε τις δύο καμπύλες γ, η εντός ενός συνόλου Ω με τρύπα, που μάλιστα βρίσκεται ανάμεσα στις καμπύλες, δεν είναι δυνατόν η μία καμπύλη να μεταφερθεί στη δεύτερη -κινούμενοι εντός του Ω- με συνεχή τρόπο.

Όταν κάθε καμπύλη μπορεί να συμπέσει σε κάθε άλλη καμπύλη (με ίδια αρχή και ίδιο τέλος), θα λέμε ότι το σύνολο Ω είναι απλά συνεκτικό.

Ορισμός 3.10: (Απλά συνεκτικά σύνολα). Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ένα κατά τόξα συνεκτικό σύνολο. Το Ω θα λέγεται απλά συνεκτικό εάν οποιεσδήποτε καμπύλες $\gamma, \eta : I \to \mathbb{C}$, με την ίδια αρχή και το ίδιο τέλος, είναι ομοτοπικές. Γενικά τέτοια σύνολα Ω δεν έχουν τρύπες.

Πρόταση 3.3: Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό σύνολο και $f : \Omega \to \mathbb{C}$ μία ολόμορφη συνάρτηση $f \in \mathcal{O}(\Omega \backslash \{\omega\}) \cap C(\Omega)$, $\omega \in \mathbb{C}$. Εάν $\gamma, \eta : I = [a,b] \to \mathbb{C}$ είναι δύο ομοτοπικές καμπύλες με $\gamma(I), \eta(I) \subseteq \Omega$, τότε:

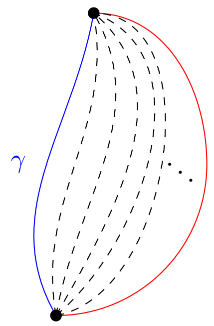
$$\int_\gamma f(z)\, dz = \int_\eta f(z)\, dz$$

Απόδειξη: Εφόσον οι δύο καμπύλες γ, η είναι ομοτοπικές, υπάρχει ομοτοπία $H(s,t)$ από την πρώτη στη δεύτερη. Τώρα, για κάθε σταθεροποιημένη χρονική στιγμή t, η συνάρτηση $H(\cdot, t)$ είναι μία καμπύλη, που είναι ακριβώς ο «μετασχηματισμός» της γ μετά από χρόνο t. Μάλιστα (από τον ορισμό της ομοτοπίας) $H(\cdot, 0) = \gamma(\cdot)$ και $H(\cdot, 1) = \eta(\cdot)$.

Αυτό που αποσκοπούμε να δείξουμε είναι ότι, για κάποιες κοντινές χρονικές στιγμές $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$, αληθεύει:

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \int_{H(\cdot, t_0)} f(z)\, dz = \int_{H(\cdot, t_1)} f(z)\, dz = \cdots = \int_{H(\cdot, t_n)} f(z)\, dz = \int_\eta f(z)\, dz$$

δηλαδή με μικρή μεταβολή στις καμπύλες, το ολοκλήρωμα δεν αλλάζει.



Έστω $\varepsilon > 0$. Για σταθεροποιημένο $\tilde{t} \in [0,1]$, η (υπεραριθμήσιμη) οικογένεια δίσκων:

$$\Big(S\big(H(s,\tilde{t}), \varepsilon\big)\Big)_{s \in I}$$

αποτελεί κάλυμμα της καμπύλης $H(I,\tilde{t})$ (που είναι συμπαγές σύνολο), οπότε υπάρχει πεπερασμένη υποκάλυψη:

$$\Big(S\big(H(s_k,\tilde{t}),\varepsilon\big)\Big)_{k+1\in[m]}$$

στην οποία διατάσσουμε με αύξοντα τρόπο τα s_k. Επιπλέον, απαιτούμε $s_0 = a$ και $s_m = b$.

Έστω $\delta > 0$. Θεωρώντας τις κάλυψεις (για τα διάφορα k):

$$\Big(S\big(H(s_k,t),\delta\big)\Big)_{t\in[0,1]}$$

των $H(s_k,\cdot)$, μπορούμε να βρούμε πεπερασμένες υποκαλύψεις:

$$\Big(S\big(H(s_k,t_\lambda),\delta\big)\Big)_{\lambda+1\in[n_k]}$$

Μάλιστα, αν $n = \max\{n_k\}_{k+1\in[m]}$, τότε οι οικογένειες:

$$\Big(S\big(H(s_k,t_\lambda),\delta\big)\Big)_{\lambda+1\in[n]}$$

είναι καλύψεις των $H(s_k,\cdot)$ (προσθέτωντας στοιχεία, όπου χρειάζεται). Και πάλι θα διατάξουμε τα t_λ και θα απαιτήσουμε $t_0 = 0$ και $t_n = 1$.

Τώρα, επειδή η H είναι συνεχής, για $\theta > 0$ και για αρκετά μικρά ε, δ και $|s_k - s_{k+1}| < \varepsilon$, $|t_\lambda - t_{\lambda+1}| < \delta$:

$$|H(s_k,t_\lambda) - H(s_{k+1},t_{\lambda+1})| < \theta,\ |H(s_k,t_\lambda) - H(s_k,t_{\lambda+1})| < \theta$$

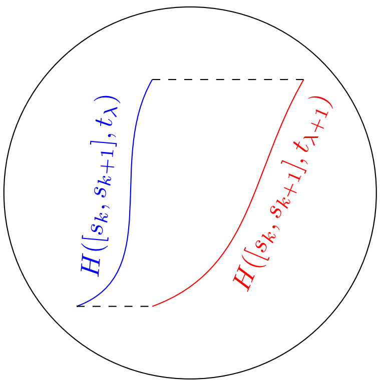
$$|H(s_k,t_\lambda) - H(s_{k+1},t_\lambda)| < \theta,\ |H(s_k,t_{\lambda+1}) - H(s_{k+1},t_{\lambda+1})| < \theta$$

Δηλαδή τα τμήματα καμπυλών $H([s_k,s_{k+1}],t_\lambda)$ και $H([s_k,s_{k+1}],t_{\lambda+1})$ περιέχονται σε δίσκο (ακτίνας το πολύ 2θ), έστω $S_{k,\lambda}$. Από το **Λήμμα 3.2**, εφόσον οι δίσκοι $S_{k,\lambda}$ είναι αστρόμορφα σύνολα:

$$\int_{H([s_k,s_{k+1}],t_\lambda)+T_{k+1,\lambda}-H([s_k,s_{k+1}],t_{\lambda+1})-T_{k,\lambda}} f(z)\ dz = 0$$

όπου $T_{k,\lambda}$ είναι το ευθύγραμμο τμήμα $[H(s_k,t_\lambda),H(s_k,t_{\lambda+1})] \subseteq S_{k,\lambda}$. Δηλαδή:

$$\int_{H([s_k,s_{k+1}],t_\lambda)} f(z)\ dz - \int_{H([s_k,s_{k+1}],t_{\lambda+1})} f(z)\ dz = \int_{T_{k+1,\lambda}} f(z)\ dz - \int_{T_{k,\lambda}} f(z)\ dz$$



Αθροίζοντας τώρα στα $k+1 \in [m]$, έχουμε:

$$\sum_{k+1\in[m]}\left(\int_{T_{k+1,\lambda}} f(z)\ dz - \int_{T_{k,\lambda}} f(z)\ dz\right) \overset{\star}{=} \int_{T_{0,\lambda}} f(z)\ dz - \int_{T_{m,\lambda}} f(z)\ dz$$

(η άστρο ($\star$) γίνεται τηλεσκοπικά). Επειδή $T_{0,\lambda} = \{\gamma(a) = \eta(a)\}$, $T_{m,\lambda} = \{\gamma(b) = \eta(b)\}$, έχουμε:

$$\sum_{k+1\in[m]}\left(\int_{T_{k+1,\lambda}} f(z)\ dz - \int_{T_{k,\lambda}} f(z)\ dz\right) = 0$$

δηλαδή:

$$\sum_{k+1\in[m]}\left(\int_{H([s_k,s_{k+1}],t_\lambda)} f(z)\,dz-\int_{H([s_k,s_{k+1}],t_{\lambda+1})} f(z)\,dz\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\int_{H(\cdot,t_\lambda)} f(z)\,dz-\int_{H(\cdot,t_{\lambda+1})} dz=0$$

Έτσι, αποδείξαμε το ζητούμενο:

$$\int_\gamma f(z)\,dz=\int_{H(\cdot,t_0)} f(z)\,dz=\int_{H(\cdot,t_1)} f(z)\,dz=\cdots=\int_{H(\cdot,t_n)} f(z)\,dz=\int_\eta f(z)\,dz$$

□

Λήμμα 3.3: (Λήμμα του Goursat για απλά συνεκτικά σύνολα). Έστω $\Omega\subseteq\mathbb{C}$ ένα απλά συνεκτικό σύνολο και $f:\Omega\to\mathbb{C}$ μία ολόμορφη συνάρτηση $f\in\mathcal{O}(\Omega\backslash\{\omega\})\cap C(\Omega)$. Για κάθε κλειστή καμπύλη $\gamma:I\to\mathbb{C}$ με $\gamma(I)\subseteq\Omega$ έχουμε:

$$\int_\gamma f(z)\,dz=0$$

■

Απόδειξη: Χωρίζουμε την γ σε δύο καμπύλες, ψ και η, με κοινή αρχή και ίδιο τέλος (δηλαδή $\gamma=\psi-\eta$). Έπειτα, εφόσον το Ω είναι απλά συνεκτικό, οι ψ και η είναι ομοτοπικές, οπότε βάσει της **Πρότασης 3.3**:

$$\int_\psi f(z)\,dz=\int_\eta f(z)\,dz\Rightarrow\int_\gamma f(z)\,dz=\int_{\psi-\eta} f(z)\,dz=0$$

□

3.4.2 Ο δείκτης στροφής

Δεδομένου του λήμματος του Goursat -και μάλιστα της εκδοχής που αποδεικνύεται μέσω του θεωρήματος του Green- μπορεί να δειχθεί ένα χρήσιμο αποτέλεσμα σχετικά με το πώς στρέφεται μία καμπύλη γύρω από ένα σημείο. Θα δείξουμε ότι, μέσω ενός ολοκληρώματος, είναι δυνατόν να υπολογιστεί πόσες φορές μία καμπύλη έχει στραφεί γύρω από ένα σημείο. Για την ακρίβεια, μπορούμε να υπολογίζουμε το πλήθος:

αριστερόστροφες περιστροφές − δεξιόστροφες περιστροφές

Μία ιδέα από την οποία θα εφορμήσουμε, θα δούμε στην ακόλουθη παρατήρηση. Πρώτα όμως, ας κάνουμε μία σημείωση.

Για να μπορούμε να ορίσουμε σωστά τον δείκτη στροφής, θα χρειαστεί οι καμπύλες γ με τις οποίες ασχολούμαστε να μην είναι «περίεργες». Συγκεκριμμένα, για να χωρίσουμε μία καμπύλη γ σε απλές συνιστώσες, θα χρειαστεί το C^1 των καμπυλών. Επομένως, όποτε εμφανίζεται ο δείκτης στροφής, αυτό θα είναι κάτι που σιωπηρά θα υποθέτουμε.

Παρατήρηση 3.4: Για κάθε απλή καμπύλη $\gamma:I=[a,b]$ με $0\in\big(\mathcal{X}(\gamma)\big)^\circ$ (που κατά σύμβαση στρέφεται αριστερόστροφα) έχουμε:

$$\int_\gamma \frac{1}{z}\,dz=2\pi i$$

Γενικότερα, αν $\zeta\in\mathbb{C}$ και $\zeta\in\big(\mathcal{X}(\gamma)\big)^\circ$, τότε:

$$\int_\gamma \frac{1}{z-\zeta}\,dz=2\pi i$$

Απόδειξη: Κατ' αρχάς δεν χρειάζεται να δείξουμε το θεώρημα για τυχαίες καμπύλες, αρκεί να το δείξουμε για κύκλους. Εάν θεωρήσουμε $S(0,r)\subseteq\big(\mathcal{X}(\gamma)\big)^\circ$, τότε $1/z\in\mathcal{O}(\overline{\mathcal{X}(\gamma)\backslash S(0,r)})\cap C^1(\overline{\mathcal{X}(\gamma)\backslash S(0,r)})$. Από το λήμμα του Goursat -όπως αυτό αποδεικνύεται μέσω του θεωρήματος του Green- έπεται:

$$\int_{\gamma-\partial S(0,r)} \frac{1}{z}\,dz=\int_{\partial\left(\mathcal{X}(\gamma)\backslash S(0,r)\right)} \frac{1}{z}\,dz=0$$

δηλαδή:

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_{\partial S(0,r)} f(z)\,dz$$

Τώρα, όσον αφορά τον κύκλο, τον παραμετροποιούμε έτσι ώστε να είναι καμπύλη του $[0,1]$ (για παράδειγμα $e^{2\pi i\theta}$, $\theta\in[0,1]$) και $\partial S(0,r)(0)=\partial S(0,r)(1)=-1+0i\in \underrightarrow{Ox'}$. Παρατηρούμε ότι στην καμπύλη:

$$\partial S(0,r)|_{[1/n,1-1/n]} : [1/n, 1-1/n]\to\mathbb{C}$$

η $1/z$ δεν εμφανίζει κάποια «ανωμαλία». Μάλιστα εκεί αποτελεί παράγωγο συνάρτηση της $\log$ (όπως είδαμε στην **Πρόταση 2.8, ii.**). Από το θεμελιώδες θεώρημα του απειροστικού λογισμού έπεται:

$$\int_{\partial S(0,r)([1/n,1-1/n])} \frac{1}{z}\,dz = \log\big(\partial S(0,r)(1-1/n)\big) - \log\big(\partial S(0,r)(1/n)\big)$$

Αφήνοντας $n\to\infty$, έχουμε τελικά ότι:

$$\log\big(\partial S(0,r)(1-1/n)\big) - \log\big(\partial S(0,r)(1/n)\big)\to 2\pi i$$

και:

$$\int_{\partial S(0,r)} \frac{1}{z}\,dz = 2\pi i$$

□

Στην ουσία λοιπόν, η ποσότητα:

$$\delta_\gamma(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{z}$$

είναι πάντοτε 1 όταν η γ είναι απλή (κατά σύμβαση αριστερόστροφη) και $\zeta\in\big(\mathcal{X}(\gamma)\big)^\circ$. Όσο δηλαδή το πλήθος των στροφών γύρω από το ζ. Φυσικά, εάν η γ είναι δεξιόστροφη, τότε το πλήθος πολλαπλασιάζεται με -1.

Διαφορετικά, εάν η γ δεν είναι απλή, τότε έχουμε το ακόλουθο:

Θεώρημα 3.4: Έστω $\gamma : I=[a,b]\to\mathbb{C}$ μία καμπύλη και $\zeta\in\big(\mathcal{X}(\gamma)\big)^\circ$. Το πλήθος:

$$\delta_\gamma(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{z-\zeta}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_I \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-\zeta}\,dt$$

είναι ακέραιος που εκφράζει το πλήθος:

αριστερόστροφες περιστροφές γύρω από το $\zeta -$ δεξιόστροφες περιστροφές γύρω από το ζ

Απόδειξη: Εάν η καμπύλη γ δεν περιστρέφεται άπειρες φορές γύρω από το ζ, είναι δυνατόν να γράψουμε:

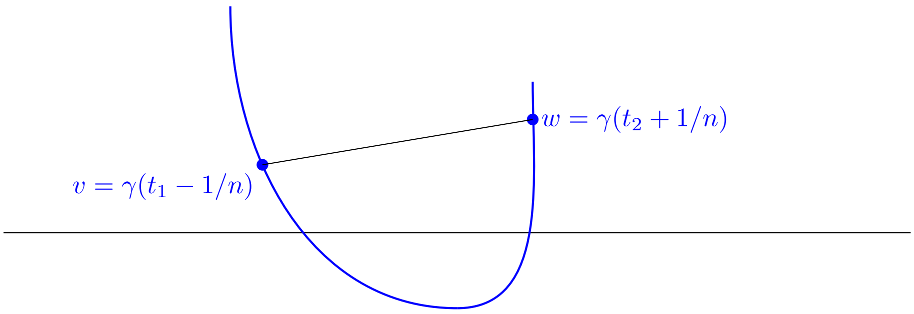
$$\frac{1}{2\pi i}\int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-\zeta}\,dt = \lim_{n\to\infty}\sum_{k\in[m]}\Big(\log\big(\gamma(t_{k+1}+1/n)-\zeta\big) - \log\big(\gamma(t_{k+1}-1/n)-\zeta\big)\Big)$$

όπου $\gamma(t_k)$, $k\in[m]$ είναι τα σημεία τομής της γ με τον άξονα $\zeta+\underrightarrow{Ox'}$. Επειδή ο λογάριθμος διαφέρει κατά $2\pi i$ μετά από κάθε αριστερόστροφη περιστροφή και $-2\pi i$ μετά από κάθε δεξιόστροφη (χωρίς πολλές λεπτομέρειες) έχουμε το ζητούμενο.

Το μόνο που μένει αναπόδεικτο είναι ότι πράγματι η γ (ουσιωδώς) τέμνει πεπερασμένο το πλήθος φορές τον άξονα $\zeta+\underrightarrow{Ox'}$, δηλαδή δεν περιστρέφεται άπειρες φορές γύρω από το ζ. Λέμε «ουσιωδώς», γιατί εάν η γ «ταλαντώνεται» πάνω στον άξονα $\zeta+\underrightarrow{Ox'}$, τότε για κάθε δύο διαδοχικά «περάσματα» της γ χωρίς στροφή -έστω $\gamma(t_1)$ και $\gamma(t_2)$- έχουμε:

$$\int_{\gamma([t_1-1/n,t_2+1/n])+[w,v]} \frac{1}{z}\,dz = 0 \Rightarrow \int_{\gamma([t_1-1/n,t_2+1/n])} \frac{1}{z}\,dz = \int_{[v,w]} \frac{1}{z}\,dz$$

(από το **Λήμμα 3.2**) όπου $v=\gamma(t_1-1/n)$, $w=\gamma(t_2+1/n)$. Δηλαδή η καμπύλη γ μπορεί να αντικατασταθεί από μία άλλη καμπύλη, η οποία δεν ταλαντώνεται στον άξονα $\zeta+\underrightarrow{Ox'}$, χωρίς το ολοκλήρωμα να αλλάξει (υπάρχει και η περίπτωση που αυτή η ταλάντωση «εφάπτεται» στον μετατοπισμένο άξονα, αλλά δεν θα μας απασχολήσει γιατί αντιμετωπίζεται εντελώς ανάλογα -και στην τελική, περισσότερο θα δυσκολέψει απ' ότι θα βοηθήσει). Αυτή η καμπύλη είναι (για παράδειγμα) αυτή που έχει αντικαταστήσει τα τμήματα της καμπύλης $\gamma([t_1-1/n,t_2+1/n])$ με τα ευθύγραμμα τμήματα $[v,w]$.



Έτσι λοιπόν, γράφουμε την γ σε πολική μορφή:

$$\gamma(t) = \rho(t)\big(\cos\theta(t) + i\sin\theta(t)\big) + \zeta$$

με τις ρ, θ να είναι συνεχείς συναρτήσεις. Επειδή η θ είναι συνεχής σε κλειστό και φραγμένο διάστημα, είναι φραγμένη. Δηλαδή η ποσότητα:

$$\theta(b) - \theta(a)$$

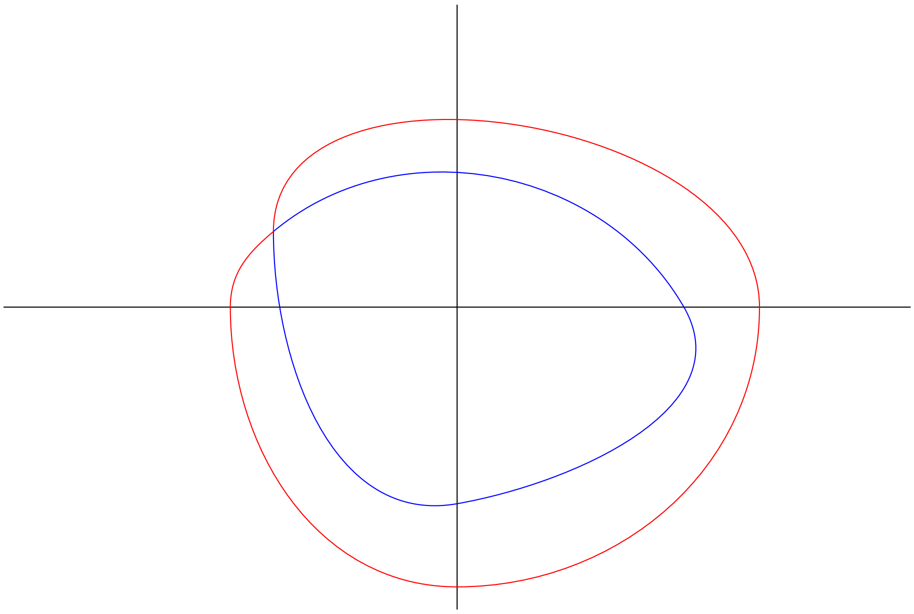
που εκφράζει το πλήθος των περιστροφών γύρω από το ζ, είναι πεπερασμένη.

$\square$

Έχοντας πει όλα αυτά, ο επόμενος ορισμός είναι λογικός.

Ορισμός 3.11: (Δείκτης στροφής). Έστω $\gamma : I \to \mathbb{C}$ μία καμπύλη και $\zeta \in \big(\mathcal{X}(\gamma)\big)^{\circ}$. Ορίζουμε ως δείκτη στροφής της γ γύρω από το ζ τον ακέραιο αριθμό:

$$\delta_\gamma(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{z-\zeta}\,dz$$



3.4.3 Ο ολοκληρωτικός τύπος του Cauchy

Έχοντας κάνει όλη αυτήν την προετοιμασία, είναι δυνατόν να αποδείξουμε ένα σημαντικό θεώρημα της μιγαδικής ανάλυσης, τον ολοκληρωτικό τύπο του Cauchy. Μ' αυτό αργότερα θα δείξουμε -μεταξύ άλλων- ότι οι ολόμορφες συναρτήσεις και οι αναλυτικές ταυτίζονται.

Θεώρημα 3.5: (Ολοκληρωτικός τύπος του Cauchy). Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ένα απλά συνεκτικό σύνολο και $f : \Omega \to \mathbb{C}$ μία ολόμορφη συνάρτηση $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Τότε, εάν $\gamma : I \to \mathbb{C}$ είναι μία καμπύλη με $\gamma(I) \subseteq \Omega$:

$$2\pi i\delta_\gamma(z)\cdot f(z) = \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta, \;\; z \in \Omega\backslash\gamma(I)$$

Απόδειξη: Κατ' αρχάς θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$\varphi(\zeta) = \begin{cases} \dfrac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}, \ \zeta \neq z \\ f'(z), \ \zeta = z \end{cases}$$

η οποία είναι συνεχής (λόγω της ολομορφίας της f) και $\varphi \in \mathcal{O}(\Omega \backslash \{z\})$ (δηλαδή $\varphi \in \mathcal{O}(\Omega \backslash \{z\}) \cap C(\Omega)$). Από το **Λήμμα 3.3** έχουμε:

$$0 = \int_\gamma \varphi(\zeta)\, d\zeta = \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - \int_\gamma \frac{f(z)}{\zeta - z}\, d\zeta = \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - 2\pi i \delta_\gamma(z) \cdot f(z)$$

δηλαδή:

$$2\pi i \delta_\gamma(z) \cdot f(z) = \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta, \ z \in \Omega \backslash \gamma(I)$$

□

3.5 Συσχέτιση αναλυτικών και ολομόρφων συναρτήσεων

Είδαμε στο **Θεώρημα 2.3** (στο θεώρημα παραγώγισης δυναμοσειρών) ότι κάθε αναλυτική συνάρτηση είναι ολόμορφη. Είναι πολύ χρήσιμο αποτέλεσμα και το αντίστροφο, ότι δηλαδή κάθε ολόμορφη συνάρτηση είναι αναλυτική. Με το θεώρημα που θ' ακολουθήσει θα δείξουμε ότι, για κάθε ανοικτό σύνολο $\Omega \subseteq \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(\Omega) &= \{f : \Omega \to \mathbb{C} \mid f \text{ ολόμορφη}\} \\ &= \{f : \Omega \to \mathbb{C} \mid \forall a \in \Omega \text{ η } f \text{ αναλύεται σε δυναμοσειρά σε περιοχή } S(a, r_a) \subseteq \Omega\} = \mathcal{A}(\Omega) \end{aligned}$$

Θεώρημα 3.6: (Συσχέτιση αναλυτικών και ολομόρφων συναρτήσεων). Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ένα ανοικτό σύνολο. Για κάθε $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ έχουμε $f \in \mathcal{A}(\Omega)$. Δηλαδή ο εγκλεισμός $\mathcal{O}(\Omega) \subseteq \mathcal{A}(\Omega)$ αληθεύει. Ο αντίστροφος εγκλεισμός έπεται από το **Θεώρημα 2.3**, οπότε:

$$\mathcal{O}(\Omega) = \mathcal{A}(\Omega)$$

Απόδειξη: Θα δείξουμε ότι, για κάθε δίσκο $S(a, r) \subset \Omega$ στον οποίο η f είναι ολόμορφη, είναι κι αναλυτική. Θεωρούμε λοιπόν $z \in S(a, r)$, $\zeta \in \partial S(a, r)$ και παρατηρούμε ότι:

$$\left| \frac{z - a}{\zeta - a} \right| < 1$$

Δηλαδή (ως γεωμετρική) η σειρά:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z - a}{\zeta - a} \right)^k = 1 \Big/ 1 - \frac{z - a}{\zeta - a} = \frac{\zeta - a}{\zeta - z}$$

συγκλίνει και ισούται με όσο γράψαμε. Έτσι λοιπόν:

$$\frac{1}{\zeta - z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z - a)^k}{(\zeta - a)^{k+1}}$$

και, πολλαπλασιάζοντας με $f(\zeta)$:

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{k+1}} \cdot (z - a)^k$$

Από το **Θεώρημα 3.4**, εφόσον $\delta_\gamma\big(\partial S(a, r)\big) = 1$:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S(a,r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S(a,r)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{k+1}} \cdot (z - a)^k\, d\zeta$$

Εάν είναι δυνατόν να γίνει η εναλλαγή του αθροίσματος με το ολοκλήρωμα, το ζητούμενο θα έχει αποδειχθεί:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \overbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S(a,r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{k+1}}\, d\zeta}^{c_k} \cdot (z-a)^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-a)^k$$

Αυτή η εναλλαγή είναι εφικτή, εφόσον όπως θα δείξουμε, η σύγκλιση:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{k+1}} \cdot (z-a)^k \to \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{k+1}} \cdot (z-a)^k$$

είναι ομοιόμορφη (θυμηθείτε την **Πρόταση 3.1**). Για να δείξουμε την ομοιόμορφη σύγκλιση, θα επικαλεστούμε το κριτήριο ομοιόμορφης σύγκλισης του Weierstrass. Παρατηρούμε ότι:

$$\left| \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^k} \cdot (z-a)^k \right| \leqslant \frac{\sup_{\zeta \in \partial S(a,r)} |f(\zeta)|}{r^{k+1}} \cdot |z-a|^k = \frac{\sup_{\zeta \in \partial S(a,r)} |f(\zeta)|}{r} \cdot \left(\frac{|z-a|}{r} \right)^k$$

με την δεξιά ποσότητα να είναι αθροίσιμη (το άθροισμά της συγκλίνει), αφού $|z-a|/r < 1$. Το κριτήριο ομοιόμορφης σύγκλισης αποδεικνύει την ομοιόμορφη σύγκλιση και κατ' επέκταση το θεώρημα.

□

Παρατήρηση 3.5: Σε συνδυασμό με τον κανόνα παραγώγισης δυναμοσειρών (**Θεώρημα 2.3**), το προηγούμενο θεώρημα δείχνει ότι κάθε ολόμορφη συνάρτηση είναι απείρως παραγωγίσιμη.

Παρατήρηση 3.6: Από την απόδειξη του **Θεωρήματος 3.6** έπεται ότι η αναλυτικότητα μίας συνάρτησης, δηλαδή η συνθήκη:

Για κάθε $a \in \Omega$ υπάχει $S(a, r_a) \subseteq \Omega$ με την f να αναλύεται σε δυναμοσειρά στο $S(a, r_a)$ με κέντρο a

μπορεί να αντικατασταθεί (από την ισοδύναμή της):

Για κάθε $S(a,r) \subseteq \Omega$ η f να αναλύεται σε δυναμοσειρά στο $S(a,r)$ με κέντρο a

Παρατήρηση 3.7: Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ένα ανοικτό σύνολο και $f : \Omega \to \mathbb{C}$ μία ολόμορφη συνάρτηση $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Βάσει του **Θεωρήματος 3.6**, γύρω από κάθε $a \in \Omega$ η f έχει αναγραφή σε δυναμοσειρά:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-a)^k$$

Από την αναγραφή αυτή -σε συνδυασμό με τον κανόνα παραγώγισης δυναμοσειρών στο **Θεώρημα 2.3**- έχουμε:

$$c_k = \frac{f^{[k]}(a)}{k!}$$

Επιπλέον, από την απόδειξη του **Θεωρήματος 3.6**:

$$c_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S(a,r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{k+1}}\, d\zeta$$

Συνέπεια της προηγούμενης παρατήρησης είναι το ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα 3.7: (Γενικευμένος τύπος του Cauchy). Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ένα ανοικτό σύνολο. Για κάθε ολόμορφη συνάρτηση $f : \Omega \to \mathbb{C}$ με $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, και για απλή καμπύλη $\gamma : I \to \mathbb{C}$ με $\mathcal{X}(\gamma) \subseteq \Omega$, έχουμε:

$$f^{[k]}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}}\, d\zeta, \ z \in \Omega \backslash \gamma(I)$$

Απόδειξη: Θεωρώντας αρκετά μικρό δίσκο $S(z,r) \subseteq \mathcal{X}(\gamma)$, λόγω της αναλυτικότητας (δηλαδή της ολομορφίας) της f έχουμε:

$$f^{[k]}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\partial S(z,r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}}\, d\zeta$$

Από το θεώρημα του Green (εφόσον το σύνορο $\partial \overline{\mathcal{X}(\gamma) \backslash S(z,r)} = \gamma - \partial S(z,r)$ είναι ομαλό και οι ολόμορφες συναρτήσεις λείες), έχουμε το ζητούμενο.

□

3.6 Παράγουσες μιγαδικών συναρτήσεων

Όπως είδαμε στην απόδειξη του **Λήμματος 3.2**, καθοριστικής σημασίας ήταν η ύπαρξη παράγουσας σε αστρόμορφα σύνολα. Είδαμε συγκεκριμένα μία πρόταση, την οποία ξαναγράφουμε για χάρη πληρότητας.

Πρόταση 3.4: Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ένα ανοικτό και αστρόμορφο σύνολο. Για κάθε $f \in \mathcal{O}(\Omega \backslash \{\omega\}) \cap C(\Omega)$, $\omega \in \mathbb{C}$, υπάρχει παράγουσα συνάρτηση F.

Γενικά η ύπαρξη παραγουσών έχει αρκετό ενδιαφέρον κι αυτόνομα. Εμείς εδώ θα προσπαθήσουμε να εξασφαλήσουμε την ύπαρξη παραγουσών και σε άλλες περιπτώσεις, πρώτα όμως να κάνουμε μία παρατήρηση: σε αντίθεση με τις πραγματικές συναρτήσεις, η συνέχεια (και μόνο αυτή) μίας μιγαδικής συνάρτησης δεν εξασφαλίζει την ύπαρξη παγάγουσας (σε ένα σύνολο). Για παράδειγμα, η $1/(\cdot)$ δεν έχει παράγουσα F στον κύκλο $\partial S(0,1)$ (τον οποίο βλέπουμε ως καμπύλη του $[0,1]$), παρά το ότι είναι συνεχής σ' αυτόν. Αν είχε παράγουσα, τότε:

$$1 = \delta_{\partial S(0,1)} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial S(0,1)} \frac{1}{z}\, dz = F\big(\partial S(0,1)(1)\big) - F\big(\partial S(0,1)(0)\big) = 0$$

το οποίο είναι άτοπο. Γενικά, αυτό που εξασφάλιζε την ύπαρξη παραγουσών στις πραγματικές συναρτήσεις είναι η ≪καλή γεωμετρία≫ του $\mathbb{R}$, κάτι που δεν μεταβιβάζεται στις πολλές διαστάσεις.

Πάντως, η **Πρόταση 3.4** δείχνει το εξής:

Παρατήρηση 3.8: Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ένα ανοικτό σύνολο. Κάθε $f \in \mathcal{O}(\Omega \backslash \{\omega\}) \cap C(\Omega)$, $\omega \in \mathbb{C}$ έχει τοπικά παράγουσα συνάρτηση (εάν θεωρήσουμε αρκετά μικρούς δίσκους $S(a, r_a)$, γύρω από κάθε $a \in \Omega$).

Η **Πρόταση 3.4** μπορεί να γενικευτεί με αρκετούς τρόπους -μερικούς εξ' αυτών θα παραθέσουμε.

Πρόταση 3.5: Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ένα ανοικτό και αστρόμορφο σύνολο, και $\{\omega_k\}_{k\in[n]} \subseteq \mathbb{C}$ μία πεπερασμένη οικογένεια σημείων. Για κάθε $f \in \mathcal{O}(\Omega \backslash \{\omega_k\}_{k\in[n]}) \cap C(\Omega)$, υπάρχει παράγουσα συνάρτηση F.

Απόδειξη: Λόγω του ότι τα σημεία είναι πεπερασμένα στο πλήθος, μπορούμε (με ανάλογη απόδειξη) να αποδείξουμε μία γενικότερη μορφή του **Λήμματος 3.1**, άρα και της **Πρότασης 3.4**.

□

Πρόταση 3.6: (Θεώρημα του Morerra). Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ένα ανοικτό σύνολο και $\{\omega_k\}_{k\in[n]} \subseteq \mathbb{C}$ μία πεπερασμένη οικογένεια σημείων. Για κάθε $f \in \mathcal{O}(\Omega \backslash \{\omega_k\}_{k\in[n]})$, τέτοια ώστε για κάθε τρίγωνο T με $\mathcal{X}(T) \subseteq \Omega$:

$$\int_T f(z)\, dz = 0$$

υπάρχει παράγουσα συνάρτηση F.

Απόδειξη: Από την απόδειξη της **Πρότασης 3.4** (ή καλύτερα της **Πρότασης 3.5**).

□

Η ≪μεγαλύτερη≫ γενίκευση που θα αποδείξουμε είναι η παρακάτω πρόταση, αμέσως μετά το λήμμα.

Λήμμα 3.4: Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ένα κατά τόξα συνεκτικό, ανοικτό σύνολο, $\{\omega_k\}_{k\in[n]} \subseteq \mathbb{C}$ μία πεπερασμένη οικογένεια σημείων και μία ολόμορφη συνάρτηση $f \in \mathcal{O}(\Omega \backslash \{\omega_k\}_{k\in[n]})$. Εάν για κάθε δύο καμπύλες γ, η μεταξύ δύο σημείων:

$$\int_\gamma f(\zeta)\, d\zeta = \int_\eta f(\zeta)\, d\zeta$$

(δηλαδή το ολοκλήρωμα είναι ανεξάρτητο της διαδρομής), τότε υπάρχει παράγουσα συνάρτηση F της f. ■

Απόδειξη: Για κάθε $z \in \Omega$, βρίσκουμε μία καμπύλη $\gamma_z : I \to \mathbb{C}$, $\gamma_z(\Omega) \subseteq \Omega$, από σταθεροποιημένο $a \in \Omega$ προς το z. Ορίζουμε τη συνάρτηση:

$$F(z) = \int_{\gamma_z} f(\zeta)\, d\zeta$$

(η οποία πράγματι ορίζεται και είναι ανεξάρτητη της επιλογής των γ_z). Ακολουθώντας τα βήματα της **Πρότασης 3.4** (ή καλύτερα της **Πρότασης 3.5**), η συνάρτηση F αποδεικνύεται ότι είναι πράγματι παράγουσα της f.

$\square$

Πρόταση 3.7: Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ένα απλά συνεκτικό σύνολο και $\{\omega_k\}_{k\in[n]} \subseteq \mathbb{C}$ μία πεπερασμένη οικογένεια σημείων. Για κάθε $f \in \mathcal{O}(\Omega \backslash \{\omega_k\}_{k\in[n]})$ υπάρχει παράγουσα συνάρτηση.

Απόδειξη: Από τον ορισμό των απλά συνεκτικών συνόλων, την **Πρόταση 3.3** και το **Λήμμα 3.4** (ή τέλος πάντων από μία προφανή γενίκευσή του), το ζητούμενο έπεται.

$\square$

3.7 Ακεραίες συναρτήσεις και το θεμελιώδες θεώρημα της άλγεβρας

Στην παράγραφο αυτή θα μελετήσουμε τις ακεραίες συναρτήσεις, δηλαδή τις ολόμορφες συναρτήσεις σε όλο το μιγαδικό επίπεδο. Από τις ιδιότητές τους θα δούμε έναν διαφορετικό (και κατά μία έννοια απλούστερο, αλλά όχι στοιχειώδη) τρόπο με τον οποίο το θεμελιώδες θεώρημα της άλγεβρας αποδεικνύεται.

Ορισμός 3.12: (Ακεραίες συναρτήσεις). Έστω $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ μία μιγαδική συνάρτηση. Η f θα καλείται ακεραία συνάρτηση εάν $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$.

Στην ουσία αυτό που θα αποδείξει το θεμελιώδες θεώρημα της άλγεβρας είναι η ακόλουθη ιδιότητα των ακεραίων συναρτήσεων.

Θεώρημα 3.8: (Το θεώρημα του Liouville). Έστω f μία ακεραία συνάρτηση η οποία είναι φραγμένη (από κάποιο $M > 0$, δηλαδή $|f| \leqslant M$). Τότε η f είναι σταθερή συνάρτηση.

Απόδειξη: Βάσει του **Θεωρήματος 3.6**, επειδή κάθε ολόμορφη συνάρτηση είναι αναλυτική, μπορούμε να γράψουμε:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$$

σε κάθε $S(0,r) \subseteq \mathbb{C}$ (θυμηθείτε επίσης την **Παρατήρηση 3.6**). Μάλιστα, είδαμε ότι:

$$c_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S(a,r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{k+1}}\, d\zeta$$

οπότε:

$$|c_k| \leqslant \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\sup_{\zeta\in\partial S(0,r)} |f(\zeta)|}{r^{k+1}} \cdot \ell\big(\partial S(0,r)\big) \leqslant \frac{M}{r^k}$$

Αφήνοντας $r \to \infty$, οι δίκοι $S(0,r)$ προσεγγίζουν όλο το επίπεδο και οι συντελεστές c_k, $k \geqslant 1$ το 0. Δηλαδή, $f \equiv c_0$.

$\square$

Παρατήρηση 3.9: (Το θεμελιώδες θεώρημα της άλγεβρας). Κάθε πολυωνυμική εξίσωση $P(z) = 0$ βαθμού $n \geqslant 1$ (με μιγαδικούς συντελεστές) έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $\mathbb{C}$.

Κατ' επέκταση, λειτουργώντας επαγωγικά, η $P(z) = 0$ έχει ακριβώς n (όχι κατ' ανάγκη διακεκριμένες) λύσεις.

Απόδειξη: Έστω:

$$P(z) = z^n + \sum_{k=0}^{n-1} c_k z^k,\ n \geqslant 1$$

ένα πολυώνυμο του $\mathbb{C}[z]$. Το P είναι ακεραία συνάρτηση, που αν προς άτοπο δεν είχε καμμία ρίζα, και η $1/P$ θα ήταν ακεραία. Μάλιστα, η $1/P$ είναι φραγμένη συνάρτηση, αφού:

$$\lim_{z\to\infty} \left|\frac{1}{P(z)}\right| = 0$$

κι οπότε υπάρχει $r > 0$ ώστε στο $B(0,r)^c = \mathbb{C}\backslash B(0,r)$ να έχουμε $|1/P| \leqslant 1$. Επειδή η $1/P$ είναι συνεχής στον κλειστό δίσκο $B(0,r)$, παίρνει μέγιστη τιμή $|1/P(z_0)|$ και, κατά συνέπεια:

$$\left|\frac{1}{P}\right| \leqslant \max\left\{1, \left|\frac{1}{P(z_0)}\right|\right\}$$

Δηλαδή, από το **Θεώρημα 3.8**, η $1/P$ είναι σταθερή. Αυτό είναι άτοπο για $n \geqslant 1$.

□

Το θεώρημα του Liouville έχει κι άλλες εκδοχές, κάπως γενικευμένες. Για παράδειγμα, μία απ' αυτές είναι η ακόλουθη πρόταση:

Πρόταση 3.8: Έστω f μία ακεραία συνάρτηση.

i. Εάν για κάθε $z \in \mathbb{C}$:

$$|f(z)| \leqslant A + B|z|^m, \text{ για κάποια } A, B > 0,\ m \in \mathbb{N}_0$$

τότε η f είναι πολυώνυμο βαθμού το πολύ m.

ii. Εάν για κάθε $z \in \mathbb{C}$:

$$|f(z)| \leqslant B|z|^m, \text{ για κάποια } B > 0,\ m \in \mathbb{N}_0$$

τότε η f είναι μηδενική ή μονώνυμο βαθμού m.

Μάλιστα, οι εκθέτες m μπορεί να είναι οποιοιδήποτε θετικοί ή μηδενικοί αριθμοί. Οι αποδείξεις εφαρμόζουν και αποδεικνύουν τα παραπάνω, δίνοντας πολυώνυμα (ή μονώνυμα) βαθμού $\lfloor m \rfloor$, όπου $\lfloor\cdot\rfloor$ είναι το ακέραιο μέρος.

Απόδειξη: Για το i., η απόδειξη θυμίζει αυτήν του **Θεωρήματος 3.8**: Εφόσον η f είναι ολόμορφη, υπάρχει ανάλυσή της σε δυναμοσειρά:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$$

σε κάθε δίσκο $S(0,r) \subseteq \mathbb{C}$. Επειδή:

$$c_k = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial S(0,r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{k+1}}\, d\zeta \Rightarrow |c_k| \leqslant \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\sup_{\zeta \in \partial S(0,r)} |f(\zeta)|}{r^{k+1}} \cdot \ell\big(\partial S(0,r)\big) \leqslant \frac{A + Br^m}{r^k}$$

αφήνοντας $r \to \infty$, οι δίσκοι $S(0,r)$ προσεγγίζουν όλο το επίπεδο και οι c_k, $k \geqslant m+1$, το 0. Η f είναι λοιπόν πολυώνυμο βαθμού το πολύ m.

Για το ii.: Κάνοντας την ανισότητα της υπόθεσης λίγο χειρότερη, μπορούμε να γράφουμε:

$$|f(z)| \leqslant 1 + B|z|^m$$

Από το i. λοιπόν, η f είναι πολυώνυμο βαθμού το πολύ m.

$$f(z) = \sum_{k=0}^{m} c_k z^k$$

Τώρα, από την ανισότητα της υπόθεσης:

$$|f(z)| = \left|\sum_{k=0}^{m} c_k z^k\right| \leqslant B|z|^m$$

Εάν αφεθεί $z \to 0$, έπεται $|c_0| \leqslant 0$, δηλαδή $c_0 = 0$. Διαιρώντας με το $|z|$, συνεχίζουμε επαγωγικά τη διαδικασία στη σχέση:

$$\left|\sum_{k=1}^{m} c_k z^{k-1}\right| \leqslant B|z|^{m-1}$$

κι αποδεικνύουμε ότι $c_k = 0$ για κάθε $k \leqslant m-1$. Μέσω της επαγωγικής διαδικασίας, η αντίστοιχη σχέση για το c_m είναι $|c_m| \leqslant B$, κι έτσι αποδεικνύεται το ζητούμενο.

□

Υπάρχουν κι άλλες πολλές προτάσεις για τις ακεραίες συναρτήσεις, που «περιορίζουν» κάπως τις ιδιότητές τους. Εμείς θα δούμε ακόμη δύο.

Παρατήρηση 3.10: Έστω f μία ακεραία συνάρτηση.

i. Εάν $\Re f \geqslant 0$, η f είναι σταθερή.

ii. Εάν $f(\mathbb{C}) \subseteq \mathbb{C} \backslash \underrightarrow{Ox'}$, η f είναι σταθερή.

Απόδειξη: Για το i.: Θεωρούμε τη συνάρτηση $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ με τύπο:

$$g(z) = e^{-f(z)} = e^{-\Re f(z)} \Big(\cos\big(-\Im f(z)\big) + i \cdot \sin\big(-\Im f(z)\big) \Big)$$

Η g είναι ακεραία συνάρτηση κι επιπλεόν:

$$|g(z)| = |e^{-f(z)}| = \Big| e^{-\Re f(z)} \Big(\cos\big(-\Im f(z)\big) + i \cdot \sin\big(-\Im f(z)\big) \Big) \Big| \leqslant 1$$

οπότε από το **Θεώρημα 3.8**, η g είναι σταθερή συνάρτηση. Κατά συνέπεια, η f είναι σταθερή συνάρτηση.

Για το ii.: Για κάθε $w = \rho e^{i\theta} \in \mathbb{C}$, η ρίζα:

$$\sqrt{w} = \sqrt{\rho} e^{i\theta/2}$$

ανήκει στο δεξί ημιεπίπεδο $\{w \in \mathbb{C} \mid \Re(w) \geqslant 0\}$, αφού:

$$-\pi < \theta \leqslant \pi \Rightarrow -\pi/2 < \theta \leqslant \pi/2$$

Επίσης, η $\sqrt{f(z)}$, $f(z) \in \mathbb{C} \backslash \underrightarrow{Ox'}$, είναι μία ολόμορφη συνάρτηση, αφού τα $f(z)$ βρίσκονται μακρυά από τις ≪ανωμαλίες≫ της ρίζας (δηλαδή από τον ημιάξονα $\underrightarrow{Ox'}$). Επομένως η $\sqrt{f}$ είναι ακεραία συνάρτηση με $\Re\sqrt{f} \geqslant 0$. Από το i. έπεται ότι η $\sqrt{f}$ είναι σταθερή συνάρτηση, άρα και η f.

□

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Ανωμαλίες και ρίζες

4.1 Η αρχή της ταυτότητας

Η αρχή της ταυτότητας (ή, όπως θα το δούμε εμείς, αναλυτικής συνέχισης) είναι μία χρήσιμη ιδιότητα των ολομόρφων συναρτήσεων, που αργότερα θα χρησιμοποιήσουμε στο κομμάτι της αναλυτικής θεωρίας αριθμών. Σύμφωνα μ' αυτήν, εάν το σύνολο:

$$f^{-1}(\{0\}) = \{z \in \Omega \mid f(z) = 0\}$$

(όπου $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό) έχει σημείο συσσώρευσης, τότε $f \equiv 0$.

Για να αποδείξουμε το παραπάνω, θα χρειαστούμε πρώτα μερικά λήμματα.

Λήμμα 4.1: Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ένα ανοικτό σύνολο και $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Εάν $f(a) = 0$ για κάποιο $a \in \Omega$ και $f \not\equiv 0$, τότε υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ ούτως ώστε:

$$f(z) = (z-a)^m g(z),\ g \in \mathcal{O}(\Omega),\ g(a) \neq 0$$

σε κάποια περιοχή του a. ■

Απόδειξη: Αυτό είναι συνέπεια της αναγραφής της ολόμορφης συνάρτησης σε δυναμοσειρά.

□

Λήμμα 4.2: Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ένα ανοικτό σύνολο και $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Το σύνολο:

$$\left(f^{-1}(\Omega)\right)' \cap \Omega$$

των σημείων συσσώρευσης του $f^{-1}(\{0\})$ στο Ω είναι κλειστάνοικτο (δηλαδή κλειστό και ανοικτό) στο Ω. ■

Απόδειξη: Από τον ορισμό του, το σύνολο συσσώρευσης $\left(f^{-1}(\{0\})\right)'$ είναι κλειστό στο $\mathbb{C}$, άρα και το $f^{-1}(\{0\}) \cap \Omega$ είναι κλειστό στο Ω.

Τώρα θα δείξουμε ότι το $\left(f^{-1}(\{0\})\right)' \cap \Omega$ είναι ανοικτό στο Ω, οπότε θα έχουμε το ζητούμενο. Έστω λοιπόν $a \in \left(f^{-1}(\{0\})\right)' \cap \Omega$ (την περίπτωση του κενού συνόλου δεν την λαμβάνουμε υπόψη, μιας και είναι τετριμμένη).

Βήμα I: Εάν υπάρχει $r > 0$ ώστε $f\big(S(a,r)\big) = \{0\}$, τότε:

$$S(a,r) \subseteq S(a,r)' = B(a,r) \subseteq \left(f^{-1}(\{0\})\right)' \cap \Omega$$

κι άρα γύρω από το a μπορεί να βρεθεί ανοικτός δίσκος.

Βήμα II: Εάν υπάρχει δίσκος $S(a,r)$ ώστε $f\big(S(a,r)\big) = \{a\}$, τότε γράφουμε:

$$f(z) = (z-a)^m g(z)$$

όπως στο **Λήμμα 4.1**. Παίρνοντας $0 < \rho < r$, στους δακτύλιους $S(a,r)\backslash S(a,\rho)$ η f δεν μηδενίζεται, πράγμα που δεν θα έπρεπε να συμβαίνει, αφού το a είναι σημείο συσσώρευσης του $f^{-1}(\{0\})$.

Από τα δύο προηγούμενα βήματα έπεται το ζητούμενο.

□

Θεώρημα 4.1: (Αρχή της ταυτότητας). Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ένα ανοικτό και συνεκτικό σύνολο, και $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Εάν το σύνολο των σημείων συσσώρευσης:

$$\big(f^{-1}(\{0\})\big)' \cap \Omega$$

δεν είναι κενό, τότε $f \equiv 0$.

Απόδειξη: Πράγματι, το εν λόγω σύνολο (αποδείξαμε ότι) είναι κλειστάνοικτο στο ανοικτό και συνεκτικό σύνολο $\Omega \subseteq \mathbb{C}$. Οπότε, εφόσον δεν είναι κενό, θα πρέπει να είναι το ίδιο το Ω (αφού αν δεν ήταν, η διαμέριση από κλειστάνοικτά $\Omega = \big[\big(f^{-1}(\{0\})\big)' \cap \Omega\big] \cup \big[\Omega \backslash \big(f^{-1}(\{0\})\big)' \cap \Omega\big]$ θα έδειχνε ότι το Ω δεν είναι συνεκτικό).

□

Θεώρημα 4.2: (Αναλυτική συνέχιση). Έστω $\Omega, W \subseteq \mathbb{C}$ δύο ανοικτά και συνεκτικά σύνολα με $\Omega \subseteq W$. Έστω επίσης δύο συναρτήσεις $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, $\widetilde{f} \in \mathcal{O}(W)$, για τις οποίες:

$$\big((f - \widetilde{f})^{-1}(\{0\})\big)' \cap \Omega \neq \emptyset$$

(δηλαδή το σύνολο των σημείων του Ω στα οποία ταυτίζονται έχει σημείο συσσώρευσης). Τότε η $\widetilde{f}$ αποτελεί τη μοναδική ολόμορφη επέκταση της f στο W.

Απόδειξη: Αυτό είναι συνέπεια του **Θεωρήματος 4.1**.

□

4.2 Επουσιώδεις, ουσιώδεις ανωμαλίες και πόλοι

Μέχρι τώρα έχουμε καταφέρει, μέσω του **Θεωρήματος 3.6**, να αναλύσουμε σε δυναμοσειρές τις ολόμορφες συναρτήσεις. Η ανάλυση αυτή όμως -πρέπει να σημειωθεί- δεν γίνεται ενιαία σε όλο το ανοικτό σύνολο στο οποίο ορίζεται η ολόμορφη συνάρτηση, αλλά σε ≪καλά≫ σύνολα (δηλαδή δίσκους). Τώρα, εάν αφαιρεθεί ένα σημείο a από έναν δίσκο $S(a,r)$, δεν εξασφαλίζεται η ανάλυση μίας συνάρτησης $f \in \mathcal{O}\big(S(a,r)\backslash\{a\}\big)$ σε δυναμοσειρά, παρά το ότι τα δύο σύνολα $S(a,r)$, $S(a,r)\backslash\{a\}$ δεν διαφέρουν πολύ. Σε τέτοιου είδους σύνολα, όπως και σε δακτυλίους $S(a,r)\backslash B(a,\rho)$, υπάρχει ένα άλλου είδους ανάπτυγμα, που μοιάζει με δυναμοσειρά, και είναι το λεγόμενο ανάπτυγμα Laurent.

Για να μελετήσουμε τέτοια αναπτύγματα, θα χρειαστεί να μελετήσουμε πώς συμπεριφέρονται συναρτήσεις $f \in \mathcal{O}\big(\Omega\backslash\{a\}\big)$, δηλαδή συναρτήσεις που δεν είναι ολόμορφες παντού στο Ω, και που μπορεί να εμφανίζουν ≪ανωμαλίες≫ στο a, αφού εκεί δεν έχει υποτεθεί κάποιου είδους συνέχεια.

Ορισμός 4.1: (Μεμονωμένες ανωμαλίες). Έστω $f : \Omega \to \mathbb{C}$ ($\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό) μία συνάρτηση με $f \in \mathcal{O}\big(S(a,r)\backslash\{a\}\big)$, $S(a,r) \subseteq \Omega$, για κάποιο $a \in \Omega$. Το σημείο a θα καλείται σημείο μεμονωμένης ανωμαλίας της συνάρτησης f.

Λέμε κάθε τέτοιο a του προηγούμενου ορισμού σημείο ανωμαλίας, στην πραγματικότητα όμως ενδέχεται να μην υπάρχει καμμία ανωμαλία σε εκείνο το σημείο. Δηλαδή, ενδέχεται να υπάρχει αριθμός $\zeta_a \in \mathbb{C}$ τέτοιος ώστε η:

$$\widetilde{f}(z) = \begin{cases} f(z), \; z \in S(a,r)\backslash\{a\} \\ \zeta_a, \; z = a \end{cases}$$

να αποτελεί ολόμορφη επέκταση της f στο $S(a,r)$ (δηλαδή $\widetilde{f} \in \mathcal{O}\big(S(a,r)\big)$).

Υπάρχουν επίσης οι περιπτώσεις όπου $\lim_{z\to a} f(x) = \infty$ ή το εν λόγω όριο δεν υπάρχει, κι αυτές είναι κάπως πιο χαρακτηριστικές της έννοιας της ανωμαλίας.

Ορισμός 4.2: (Είδη μεμονωμένων ανωμαλιών). Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ένα ανοικτό σύνολο, μία συνάρτηση $f : \Omega \to \mathbb{C}$ με $f \in \mathcal{O}\big(S(a,r)\backslash\{a\}\big)$, $S(a,r) \subseteq \Omega$, και $a \in \Omega$ μεμονωμένη ανωμαλία.

i. Εάν υπάρχει $\zeta_a \in \mathbb{C}$ ώστε η:

$$\widetilde{f}(z) = \begin{cases} f(z), \ z \in S(a,r)\backslash\{a\} \\ \zeta_a, \ z = a \end{cases}$$

να αποτελεί ολόμορφη επέκταση της f στο $S(a,r)$, τότε το a θα καλείται σημείο επουσιώδους ανωμαλίας της f. Επίσης, θα λέμε ότι η f στο a έχει επουσιώδη ανωμαλία.

ii. Εάν αληθεύει:

$$\lim_{z \to a} f(z) = \infty$$

(δηλαδή $\lim_{z\to a} |f(z)| = \infty$), τότε το a θα καλείται πόλος της f. Επίσης θα λέμε ότι η f στο a έχει πόλο.

iii. Εάν το a δεν είναι σημείο επουσιώδους ανωμαλίας αλλά ούτε και πόλος, θα λέμε ότι είναι σημείο ουσιώδους ανωμαλίας. Επίσης θα λέμε ότι η f στο a έχει ουσιώδη ανωμαλία.

Πρόταση 4.1: Μία συνάρτηση $f \in \mathcal{O}\big(S(a,r)\backslash\{a\}\big)$ έχει πόλο στο a εάν και μόνο αν υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ και $g \in \mathcal{O}\big(S(a,r)\big)$, $g(a) \neq 0$, ώστε:

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^m}$$

Απόδειξη: ($\Rightarrow$) Επιλέγουμε (γιατί τέτοιο υπάρχει) $0 < \delta < r$ ώστε η συνάρτηση f να μην μηδενίζεται στο $S(a,\delta)\backslash\{a\}$. Ορίζουμε:

$$h(z) = \begin{cases} 1/f(z), \ z \in S(a,\delta)\backslash\{a\} \\ 0, \ z = a \end{cases}$$

και παρατηρούμε ότι η h είναι συνεχής συνάρτηση. Επιπλέον είναι ολόμορφη στο $S(a,\delta)\backslash\{a\}$, αφού η f είναι ολόμορφη στο $S(a,r)$ και $S(a,\delta) \subseteq S(a,r)$. Βάσει της **Πρότασης 3.4**, η h έχει παράγουσα H στο $S(a,\delta)$, η οποία ως ολόμορφη είναι αναλυτική. Αφού $H' = h$, και η h είναι αναλυτική στο $S(a,\delta)$, οπότε στον δίσκο αυτό υπάρχει ανάπτυγμα:

$$h(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-a)^k$$

Όμως τώρα $h(a) = 0$, επομένως υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ ώστε:

$$h(z) = (z-a)^m \sum_{k=m}^{\infty} c_k (z-a)^{k-m}$$

Η συνάρτηση $l(z) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} c_{\lambda+m}(z-a)^{\lambda}$ είναι ολόμορφη στο $S(a,\delta)$ (αφού είναι αναλυτική). Επίσης (για αρκετά μικρό δ) δεν μηδενίζεται στο a, μιας και το σύνολο $l^{-1}(\{0\})$ περιέχει μόνο μεμονωμένα σημεία (παράφραση του **Θεωρήματος 4.1**). Έτσι λοιπόν, η $1/l$ είναι ολόμορφη στο $S(a,\delta)$.

Εάν ορίσουμε:

$$g(z) = \begin{cases} 1/l(z), \ z \in S(a,\delta) \\ f(z)(z-a)^m, \ z \in S(a,r)\backslash S(a,\delta) \end{cases}$$

θα παρατηρήσουμε ότι:

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^m}$$

κι επιπλέον $g(a) \neq 0$.

($\Leftarrow$) Η άλλη κατεύθυνση είναι άμεση.

$\square$

Η παραπάνω πρόταση είναι ενδεικτική των πόλων και οδηγεί φυσιολογικά στον ακόλουθο ορισμό:

Ορισμός 4.3: (Τάξη του πόλου). Έστω μία συνάρτηση $f \in \mathcal{O}\big(S(a,r)\backslash\{a\}\big)$ με πόλο στο a, και:

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^m},\ g \in \mathcal{O}\big(S(a,r)\big),\ g(a) \neq 0,\ m \in \mathbb{N}$$

η (μοναδική) αναγραφή της σύμφωνα με την **Πρόταση 4.1**. Ο αριθμός $m \in \mathbb{N}$ ονομάζεται τάξη του πόλου.

Όπως η **Πρόταση 4.1** ήταν χαρακτηριστική για τους πόλους, η ακόλουθη πρόταση -που φέρει το όνομα του Riemann- είναι χαρακτηριστική για τις επουσιώδεις ανωμαλίες.

Πρόταση 4.2: (Θεώρημα του Riemann για τις επουσιώδεις ανωμαλίες). Έστω μία συνάρτηση $f \in \mathcal{O}\big(S(a,r)\backslash\{a\}\big)$. Το a αποτελεί σημείο επουσιώδους ανωμαλίας της f εάν και μόνο εάν η f φράσσεται σε περιοχή του a.

Απόδειξη: ($\Rightarrow$) Αυτό είναι άμεσο, αφού η επέκταση της f είναι συνεχής.

($\Leftarrow$) Υποθέτουμε ότι σε περιοχή κοντινή του a η f φράσσεται:

$$|f(z)| \leqslant M$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$h(z) = \begin{cases} (z-a)f(z),\ z \in S(a,r)\backslash\{a\} \\ 0,\ z = a \end{cases}$$

και παρατηρούμε ότι είναι συνεχής στο a, αφού:

$$|h(z)| = |z-a| \cdot |f(z)| \leqslant M \cdot |z-a|$$

Επιπλέον η h είναι ολόμορφη στο $S(a,r)\backslash\{a\}$, κι οπότε από την **Πρόταση 3.4** έχει παράγουσα H. Εφόσον $H' = h$, αυτό δείχνει ότι η h είναι ολόμορφη στο $S(a,r)$. Γράφουμε λοιπόν το ανάπτυγμα σε δυναμοσειρά:

$$h(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-a)^k$$

και, βάσει του **Λήμματος 4.1**:

$$h(z) = (z-a) \sum_{\lambda=0}^{\infty} c_{\lambda+1} (z-a)^\lambda$$

Δηλαδή:

$$f(z) = \frac{1}{z-a} \cdot (z-a) \sum_{\lambda=0}^{\infty} c_{\lambda+1}(z-a)^\lambda = \sum_{\lambda=0}^{\infty} c_{\lambda+1}(z-a)^\lambda$$

το οποίο δείχνει ότι η f στο a έχει επουσιώδη ανωμαλία.

□

Με αυτούς τους χαρακτηρισμούς υπόψη, μπορούμε να αποδείξουμε κάποιες αναμενόμενες ιδιότητες.

Παρατήρηση 4.1: Έστω $f, g \in \mathcal{O}\big(S(a,r)\big)$ δύο συναρτήσεις με $f(a) = g(a) = 0$ και πολλαπλότητες τάξεως m και n στις ρίζες.

i. Εάν $m \geqslant n$, η f/g εμφανίζει στο a επουσιώδη ανωμαλία.

ii. Εάν $m < n$, η f/g έχει πόλο στο a, τάξεως $n - m$.

Τέλος, θα αναφερθούμε σε έναν χαρακτηρισμό για τις ουσιώδεις ανωμαλίες.

Πρόταση 4.3: (Θεώρημα του Cassorati). Έστω $f \in \mathcal{O}\big(S(a,r)\backslash\{a\}\big)$ μία συνάρτηση. Η f εμφανίζει ουσιώδη ανωμαλία στο a εάν και μόνο αν για κάθε $0 < \varepsilon < r$ το $f\big(S(a,\varepsilon)\backslash\{a\}\big)$ είναι πυκνό στο $\mathbb{C}$.

Απόδειξη: ($\Rightarrow$) Έστω $0 < \varepsilon < r$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει δίσκος $S(w,\delta)$ ώστε:

$$S(w,\delta) \cap f\big(S(a,\varepsilon)\backslash\{a\}\big) = \emptyset$$

και θα καταλήξουμε σε άτοπο, οπότε το $f\big(S(a,\varepsilon)\backslash\{a\}\big)$ θα είναι πυκνό.

Εφόσον $S(w,\delta)\cap f\big(S(a,\varepsilon)\backslash\{a\}\big)=\emptyset$, για κάθε $z\in S(a,\varepsilon)\backslash\{a\}$ έχουμε:

$$|f(z)-w|\geqslant\delta\Rightarrow\frac{1}{|f(z)-w|}\leqslant\delta$$

και, από την **Πρόταση 4.2**, η $1/\big(f(\cdot)-w\big)$ εμφανίζει στο a επουσιώδη ανωμαλία. Υπάρχει λοιπόν ολόμορφη επέκταση του πηλίκου, και κατ' επέκταση υπάρχει το όριο:

$$\lambda=\lim_{z\to a}\frac{1}{f(z)-w}$$

Εάν $\lambda=0$, τότε:

$$\lim_{z\to a}\big(f(z)-w\big)=\infty\Rightarrow\lim_{z\to a}f(z)=\infty$$

το οποίο είναι άτοπο, αφού η ανωμαλία στο a είναι ουσιώδης κι όχι πόλος.

Διαφορετικά, εάν $\lambda\neq 0$, τότε:

$$\lim_{z\to a}\big(f(z)-w\big)=1/\lambda\Rightarrow\lim_{z\to a}f(z)=w+1/\lambda$$

Αυτό είναι άτοπο, αφού η ανωμαλία στο a είναι ουσιώδης κι όχι επουσιώδης.

□

4.3 Αναπτύγματα Laurent

Τώρα είμαστε σε θέση να μελετήσουμε τα αναπτύγματα Laurent, τα οποία είναι -κατά μία έννοια- γενίκευση της έννοιας της δυναμοσειράς.

Ορισμός 4.4: (Αναπτύγματα Laurent). Ονομάζουμε ανάπτυγμα Laurent με κέντρο $a\in\mathbb{C}$ κάθε, εν γένει απειρόβαθμο, ρητό πολυώνυμο:

$$L(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k(z-a)^k=\sum_{k=-\infty}^{-1}c_k(z-a)^k+\sum_{k=0}^{\infty}c_k(z-a)^k$$

Το τμήμα ενός αναπτύγματος Laurent που δεν είναι δυναμοσειρά, ονομάζεται κύριο μέρος.

Στην ουσία λοιπόν τα αναπτύγματα Laurent είναι δυναμοσειρές στις οποίες «επιτρέπονται» κι αρνητικοί εκθέτες. Επίσης, το κύριο μέρος ενός αναπτύγματος Laurent είναι αυτό που το διαφοροποιεί από μία δυναμοσειρά.

Το πρώτο αποτέλεσμα που θα δείξουμε είναι αρκετά χαρακτηριστικό για τα αναπτύγματα Laurent.

Πρόταση 4.4: Έστω μία συνάρτηση $f\in\mathcal{O}\big(S(a,r)\backslash\{a\}\big)$ η οποία στο a εμφανίζει πόλο. Η f στον «τρύπιο δίσκο» $S(a,r)\backslash\{a\}$ έχει ανάπτυγμα Laurent. Δηλαδή, στο $S(a,r)\backslash\{a\}$ μπορούμε να γράψουμε:

$$f(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k(z-a)^k,\ \text{για κάποια } c_k,\ k\in\mathbb{Z}$$

Απόδειξη: Από την **Πρόταση 4.1**, υπάρχει συνάρτηση $g\in\mathcal{O}\big(S(a,r)\big)$, $g(a)\neq 0$, και $m\in\mathbb{N}$ ώστε:

$$f(z)=\frac{g(z)}{(z-a)^m}$$

Τώρα, επειδή η g είναι ολόμορφη συνάρτηση, είναι κι αναλυτική. Από αυτό έπεται το ζητούμενο, εάν γράψουμε:

$$f(z)=\frac{1}{(z-a)^m}\sum_{\lambda=0}^{\infty}\mu_\lambda(z-a)^\lambda=\sum_{\lambda=0}^{\infty}\mu_\lambda(z-a)^{\lambda-m}=\sum_{k=-m}^{\infty}c_k(z-a)^k$$

όπου $k=\lambda-m$ και $c_k=\mu_{\lambda-m}$.

□

4.3.1 Το θεώρημα των ολοκληρωτικών υπολοίπων

Η προηγούμενη πρόταση στην ουσία δείχνει ότι κάθε ολόμορφη συνάρτηση με πόλο στο a γράφεται ως άθροισμα συναρτήσεων με παράγουσα, καθώς και της $c_{-1}/(z-a)$. Αυτή η παρατήρηση μπορεί να δώσει μία πρόταση που θυμίζει -εκ πρώτης όψεως- τον ολοκληρωτικό τύπο του Cauchy.

Για την ακρίβεια, το θεώρημα των ολοκληρωτικών υπολοίπων που θα δούμε παρακάτω, είναι κατά κάποιον τρόπο μία γενίκευση του ολοκληρωτικού τύπου του Cauchy.

Πρόταση 4.5: Έστω $f : \Omega \to \mathbb{C}$ μία συνάρτηση η οποία έχει ανάπτυγμα Laurent:

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z-a)^k$$

σε έναν τρύπιο δίσκο $S(a,r) \backslash \{a\} \subseteq \Omega$. Τότε:

$$\int_{\partial S(a,r)} f(z)\, dz = 2\pi i c_{-1}$$

Απόδειξη: Κατ' αρχάς παρατηρούμε ότι η:

$$\sum_{k \neq -1} c_k (z-a)^k$$

ορίζεται στον κύκλο $\partial S(a,r)$, αφού ολόκληρη η f ορίζεται εκεί. Μάλιστα, από τον κανόνα παραγώγισης δυναμοσειρών, δεν είναι δύσκολο να βρούμε μία παράγουσά της (η οποία και πάλι ορίζεται στον κύκλο). Έχουμε λοιπόν ότι:

$$\int_{\partial S(a,r)} f(z)\, dz = \int_{\partial S(a,r)} \sum_{k \neq -1} c_k (z-a)^k + \int_{\partial S(a,r)} \frac{c_{-1}}{z-a}\, dz = c_{-1} \int_{\partial S(a,r)} \frac{1}{z-a}\, dz$$

Δηλαδή, αφού $\delta_{\partial S(a,r)}(a) = 1$:

$$\int_{\partial S(a,r)} f(z)\, dz = 2\pi i c_{-1}$$

□

Ίσως θα ήταν βοηθητικό να κάναμε αυτήν την σύνδεση μεταξύ της προηγούμενης πρότασης με τον ολοκληρωτικό τύπο του Cauchy. Ας θεωρήσουμε λοιπόν μία συνάρτηση f με ανάπτυγμα Laurent:

$$f(\zeta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (\zeta - z)^k$$

σε τρύπιο δίσκο $S(z,r) \backslash \{z\}$. Τότε, βάσει της προηγούμενης πρότασης έχουμε:

$$\int_{\partial S(z,r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \int_{\partial S(z,r)} \frac{1}{\zeta - z} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (\zeta - z)^k\, d\zeta = 2\pi i c_0$$

κι επειδή $c_0 = f(z)$ (**Παρατήρηση 3.7**):

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S(z,r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$$

Ορισμός 4.5: (Ολοκληρωτικό υπόλοιπο). Έστω $f : \Omega \to \mathbb{C}$ μία συνάρτηση με ανάπτυγμα Laurent:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z-a)^k$$

Η ποσότητα:

$$\text{Res}(f,a) = c_{-1}$$

ονομάζεται ολοκληρωτικό υπόλοιπο της f στο a.

Η ονομασία ≪ολοκληρωτικό υπόλοιπο≫ είναι λογική, αφού από την **Πρόταση 4.5** είναι ≪αυτό που υπολοίπεται≫ από την ολοκλήρωση σε κύκλο (και γενικότερα -θα δούμε- σε κλειστές καμπύλες).

Πριν προχωρίσουμε στο θεώρημα των ολοκληρωτικών υπολοίπων, θα χρειαστούμε ένα χρήσιμο γεωμετρικό λήμμα κι ένα ακόμη λήμμα.

Λήμμα 4.3: Έστω $\{\omega_k\}_{k\in[n]}$ μία πεπερασμένη οικογένεια (διαφορετικών) σημείων του $\mathbb{C}$. Υπάρχει $j \in [n]$ και ευθεία η ώστε το ω_j να ανήκει στο ένα ημιεπίπεδο του η και τα υπόλοιπα ω_k, $k \neq j$, στο άλλο. ■

Απόδειξη: Θα υποθέσουμε ότι $n \geqslant 2$, καθώς αν $n = 1$ δεν έχουμε να δείξουμε κάτι. Ορίζουμε τη συνάρτηση:

$$\delta_k(\omega_\lambda) = |\omega_k - \omega_\lambda|$$

η οποία μετρά την απόσταση του ω_k από τα υπόλοιπα σημεία, και θεωρούμε $j \in [n]$ ώστε η ποσότητα:

$$\max\{\delta_{(\cdot)}(\omega_\lambda) \mid \lambda \in [n]\}$$

να μεγιστοποιείται (δηλαδή $\max\{\delta_j(\omega_\lambda) \mid \lambda \in [n]\} \geqslant \max\{\delta_k(\omega_\lambda) \mid \lambda \in [n]\}$ για κάθε $k \in [n]$). Στην ουσία, βρίσκουμε το j αυτό για το οποίο το ω_j βρίσκεται στην ≪περιφέρεια≫. Επιπλέον, θεωρούμε το $t \in [n]$ το οποίο υλοποιεί το μέγιστο:

$$\delta = \delta_j(\omega_t) = |\omega_j - \omega_t| = \max\{\delta_j(\omega_\lambda) \mid \lambda \in [n]\}$$

και -εξ ορισμού των j, t- όλα τα ω_k, $k \in [n]$ βρίσκονται στην τομή:

$$\Lambda = B(\omega_j, \delta) \cap B(\omega_t, \delta)$$

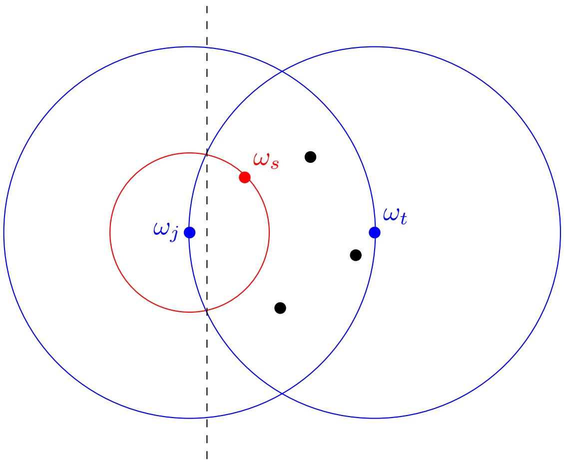
Τώρα, διαλέγουμε $s \in [n]$ ώστε:

$$\mu = \delta_j(\omega_s) = |\omega_j - \omega_s| = \min\left\{\delta_j(\omega_\lambda) \mid \lambda \in [n]\backslash\{j\}\right\}$$

και θεωρούμε η^* την ευθεία που διέρχεται από την τομή:

$$\partial B(\omega_j, \mu) \cap \partial\Lambda$$

Η ευθεία η που ζητούμε θα είναι είτε η η^*, είτε κάποια παράλληλη μετατόπισή της, κοντύτερα στο ω_j (σκεφθείτε γιατί).



□

Λήμμα 4.4: Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ένα ανοικτό σύνολο και $f : \Omega \to \mathbb{C}$ μία συνάρτηση με $f \in \mathcal{O}(\Omega\backslash\{a\})$. Εάν σε τρύπιο δίσκο $S(a, r)\backslash\{a\}$ η f έχει ανάπτυγμα Laurent:

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z-a)^k$$

τότε για κάθε απλή και κλειστή καμπύλη γ που περικλείει το $S(a,r)\backslash\{a\}$ και περιέχεται στο Ω:

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \cdot \operatorname{Res}(f,a)$$

■

Απόδειξη: Πράγματι, από το θεώρημα του Green:

$$\int_{\partial S(a,r)} f(z)\,dz = \int_\gamma f(z)\,dz$$

κι από την **Πρόταση 4.5**:

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i c_{-1} = 2\pi i \cdot \operatorname{Res}(f,a)$$

□

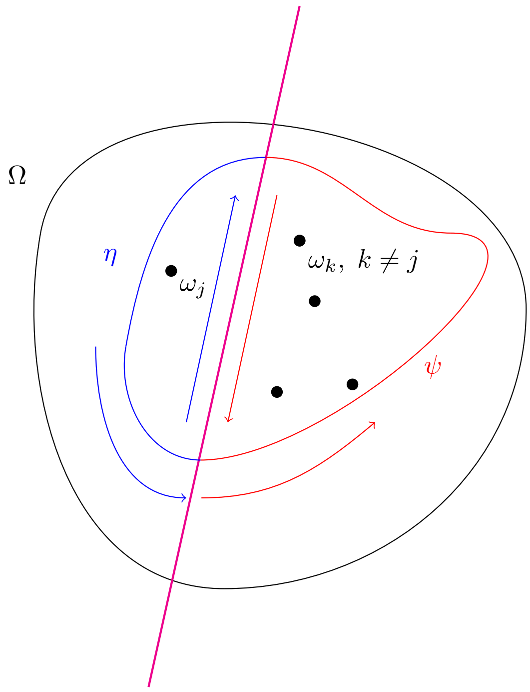
Θεώρημα 4.3: (Το θεώρημα των ολοκληρωτικών υπολοίπων). Έστω Ω ένα απλά συνεκτικό, ανοικτό σύνολο και $\{\omega_k\}_{k\in[n]}$ μία πεπερασμένη οικογένεια (διαφορετικών) σημείων του. Εάν $f \in \mathcal{O}\big(\Omega\backslash\{\omega_k\}_{k\in[n]}\big)$ και $\gamma : I \to \mathbb{R}$ είναι μία απλή καμπύλη με $\gamma(I) \subseteq \Omega\backslash\{\omega_k\}_{k\in[n]}$, τότε:

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}(f,\omega_k)$$

Απόδειξη: Για την απόδειξη θα εργαστούμε σε βήματα.

Βήμα I: Εάν $n = 1$ (δηλαδή το πλήθος των ω_k είναι 1), μπορούμε εντός του χωρίου $\mathcal{X}(\gamma)$ και γύρω από το ω_1 να θεωρήσουμε αρκετά μικρό δίσκο $S(\omega_1, r)$. Τώρα, από το **Λήμμα 4.4**:

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \cdot \operatorname{Res}(f,\omega_1)$$



Βήμα II: Εάν $n > 1$, θα υποθέσουμε ότι ισχύει το συμπέρασμα του θεωρήματος (για την απλή καμπύλη) για το $n-1$. Τότε, από το **Λήμμα 4.3**, μπορούμε να φέρουμε ευθεία ε που «διαχωρίζει» τα σημεία ω_k, και χωρίζει την γ σε δύο τμήματα η, ψ. Υποθέτουμε -χωρίς βλάβη της γενικότητας- ότι το ω_n διαχωρίζεται από τα υπόλοιπα.

Στην καμπύλη $\eta+\varepsilon$ (που περικλείει το ω_n) μπορούμε να εφαρμόσουμε τη διαδικασία του **Βήματος I**, κι αντίστοιχα στην καμπύλη $\psi-\varepsilon$ την επαγωγική υπόθεση. Παίρνουμε λοιπόν:

$$\int_{\eta+\varepsilon} f(z)\,dz = 2\pi i \cdot \mathrm{Res}(f,\omega_n) \textbf{ και } \int_{\psi-\eta} f(z)\,dz = 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^{n-1} \mathrm{Res}(f,\omega_k)$$

δηλαδή (εφόσον $\gamma=\eta+\psi=\eta+\varepsilon+\psi-\varepsilon$):

$$\int_{\eta+\varepsilon+\psi-\varepsilon} f(z)\,dz = \int_{\gamma} f(z)\,dz = 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}(f,\omega_k)$$

□

Επιπλέον, όπως αποδεικνύεται στο (Me), στο προηγούμενο θεώρημα μπορεί να υπεισέλθει ο δείκτης στροφής, με τον ακόλουθο τρόπο:

Θεώρημα 4.4: (Το θεώρημα των ολοκληρωτικών υπολοίπων με δείκτες στροφής). Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ένα απλά συνεκτικό, ανοικτό σύνολο. Εάν $f \in \mathcal{O}\big(\Omega\backslash\{\omega_k\}_{k\in[n]}\big)$ και $\gamma : I \to \mathbb{R}$ είναι μία καμπύλη με $\gamma(I) \subseteq \Omega\backslash\{\omega_k\}_{k\in[n]}$, τότε:

$$\int_{\gamma} f(z)\,dz = 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}(f,\omega_k)\delta_\gamma(\omega_k)$$

Απόδειξη: Θα εργαστούμε πάλι σε βήματα.

Βήμα I: Υποθέτουμε ότι $n=1$ και γράφουμε:

$$l(z) = \sum_{\lambda=-\infty}^{-1} c_\lambda (z-\omega_1)^\lambda$$

για το κύριο μέρος της f, όταν αυτή αναγράφεται σε ανάπτυγμα Laurent σε αρκετά μικρό τρύπιο δίσκο $S(\omega_1,r)\backslash\{\omega_1\}$. Τέτοιο ανάπτυγμα υπάρχει, βάσει της **Πρότασης 4.4**. Έπειτα παρατηρούμε ότι, από την **Πρόταση 4.2**, η συνάρτηση $f-l$ στο ω_1 εμφανίζει επουσιώδη ανωμαλία, και κατά συνέπεια:

$$\int_{\gamma} (f-l)(z)\,dz = \int_{\gamma} \widetilde{f-l}(z)\,dz = 0$$

(από το **Λήμμα 3.3**), όπου $\widetilde{f-l}$ είναι μία ολόμορφη επέκταση της $f-l$. Επομένως:

$$\int_{\gamma} f(z)\,dz = \int_{\gamma} l(z)\,dz$$

Έτσι λοιπόν, εφόσον η γ βρίσκεται μακρυά από το ω_1:

$$\int_{\gamma} f(z)\,dz = \int_{\gamma} \sum_{k=-\infty}^{-1} c_k (z-\omega_1)^k\,dz = 2\pi i c_{-1}\delta_\gamma(\omega_1) = 2\pi i \cdot \mathrm{Res}(f,\omega_1)\delta_\gamma(\omega_1)$$

Βήμα II: Για την γενική περίπτωση, θεωρούμε τη συνάρτηση $f-\sum_{k=1}^{n} l_k$, όπου l_k είναι τα κύρια μέρη γύρω από τα ω_k, και επαναλαμβάνουμε την προηγούμενη διαδικασία. Δηλαδή έτσι παίρνουμε:

$$\int_{\gamma} f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\gamma} l_k(z)\,dz = 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}(f,\omega_k)\delta_\gamma(\omega_k)$$

□

Πριν αναφέραμε ότι, ουσιαστικά, ο ολοκληρωτικός τύπος του Cauchy είναι συνέπεια του θεωρήματος των ολοκληρωτικών υπολοίπων. Μάλιστα, θα δούμε ευθύς αμέσως, ότι αυτό συμβαίνει και για τον γενικευμένο τύπο του Cauchy. Γενικά το θεώρημα των ολοκληρωτικών υπολοίπων είναι ίσως ένα από τα σημαντικότερα θεωρήματα της μιγαδικής ανάλυσης, κι αυτό θα φανεί καλύτερα μέσω των εφαρμογών του.

Θεώρημα 4.5: (Γενικευμένος τύπος του Cauchy με δείκτες στροφής). Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ένα απλά συνεκτικό, ανοικτό σύνολο και συνάρτηση $f : \Omega \to \mathbb{C}$ με $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Για κάθε καμπύλη γ έχουμε:

$$f^{[k]}(z)\delta_\gamma(z) = \frac{k!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}}\, d\zeta$$

Απόδειξη: Εάν γράψουμε γύρω από το z:

$$f(\zeta) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(\zeta - z)^k$$

το θεώρημα είναι συνέπεια της παρατήρησης:

$$\operatorname{Res}\left(\frac{f(\cdot)}{(\cdot - z)^{k+1}}, z\right) = c_k$$

και του γεγονότος $c_k = f^{[k]}(z)/k!$. Πράγματι, από το θεώρημα των ολοκληρωτικών υπολοίπων:

$$\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}}\, d\zeta = 2\pi i \cdot \operatorname{Res}\left(\frac{f(\cdot)}{(\cdot - z)^{k+1}}, z\right) = 2\pi i \cdot \frac{f^{[k]}(z)}{k!}$$

□

4.3.2 Το θεώρημα του Rouché

Συνέπεια του θεωρήματος των ολοκληρωτικών υπολοίπων είναι η καταμέτριση ριζών συναρτήσεων, και κατ' επέκταση το θεώρημα του Rouché.

Πρόταση 4.6: (Καταμέτρηση ριζών). Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ένα ανοικτό σύνολο, $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ και $A \subseteq \Omega$ ένα σύνολο με σύνορο απλή και κλειστή καμπύλη. Εάν η f έχει όλες της τις ρίζες εντός του A°, τότε το πλήθος ϖ των ριζών θα είναι:

$$\varpi = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial A} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz$$

Το παραπάνω πλήθος δεν μετρά διακεκριμμένες ρίζες, αλλά κάθε ρίζα τόσες φορές όσες η πολλαπλότητά της.

Απόδειξη: Έστω ότι στα σημεία $\omega_k \in A^\circ$, $k \in [n]$ η f έχει ρίζες πολλαπλότητας m_k. Η ποσότητα f'/f αποτελεί ολόμορφη συνάρτηση στο $\Omega \backslash \{\omega_k\}_{k\in[n]}$, και μάλιστα στα ω_k εμφανίζει πόλους. Επιπλέον, με πράξεις μπορεί κανείς να δει ότι:

$$\operatorname{Res}(f'/f, \omega_k) = m_k$$

και κατά συνέπεια, από το θεώρημα των ολοκληρωτικών υπολοίπων:

$$\int_{\partial A} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = 2\pi i \cdot \operatorname{Res}(f'/f, \omega_k) = 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^{n} m_k = 2\pi i \varpi$$

□

Θεώρημα 4.6: (Θεώρημα του Rouché). Έστω δύο συναρτήσεις $f, g \in \mathcal{O}\big(\overline{S(a,r)}\big)$ με:

$$|g(\zeta)| < |f(\zeta)|, \text{ για κάθε } \zeta \in \partial S(a, r)$$

Τότε οι συναρτήσεις f, $f + g$ έχουν τον ίδιο αριθμό ριζών στον δίσκο $S(a, r)$, μετρώντας φυσικά κάθε ρίζα τόσες φορές όσες η πολλαπλότητά της.

Απόδειξη: Για να αποδείξουμε το θεώρημα, θα εργαστούμε με βήματα.

Βήμα I: Για κάθε $t \in [0, 1]$, θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$\varpi(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial S(a,r)} \frac{f'(\zeta) + tg'(\zeta)}{f(\zeta) + tg(\zeta)}\, d\zeta$$

η οποία -σύμφωνα με την **Πρόταση 4.6**- μετρά το πλήθος των ριζών της $f(\cdot)+tg(\cdot)$ στον δίσκο $S(a,r)$. Η $\varpi(\cdot)$ είναι καλά ορισμένη, αφού:

$$|f(\zeta)+tg(\zeta)| \geqslant |f(\zeta)| - t|g(\zeta)| \geqslant |f(\zeta)| - |g(\zeta)| > 0$$

(όπου η τελευταία ανισότητα δικαιολογείται από την υπόθεση).

Βήμα ΙΙ: Εάν $s,t \in [0,1]$, με πράξεις καταλήγουμε στον τύπο:

$$|\varpi(t)-\varpi(s)| = \frac{|t-s|}{2\pi}\left|\int_{\partial S(a,r)} \frac{f(\zeta)g'(\zeta)-f'(\zeta)g(\zeta)}{\big(f(\zeta)+tg(\zeta)\big)\big(f(\zeta)+sg(\zeta)\big)}\right|$$

Βήμα ΙΙΙ: Τώρα, επειδή $|g|<|f|$ στο $\partial S(a,r)$, αληθεύουν οι ανισότητες:

$$|f(\zeta)+tg(\zeta)| \geqslant |f(\zeta)| - t|g(\zeta)| > (1-t)|g(\zeta)| \ \textbf{και}\ |f(\zeta)+sg(\zeta)| \geqslant |f(\zeta)| - s|g(\zeta)| > (1-t)|g(\zeta)|$$

στο $\partial S(a,r)$. Δηλαδή, συνδυάζοντάς τες:

$$|f(\zeta)+tg(\zeta)|\cdot|f(\zeta)+sg(\zeta)| > (1-t)(1-s)|g(\zeta)|^2 \geqslant 0$$

Ισχυριζόμαστε ότι η ανισότητα $|f(\zeta)+tg(\zeta)|\cdot|f(\zeta)+sg(\zeta)|>0$ όχι απλώς είναι γνήσια, αλλά υπάρχει $M>0$ ανεξάρτητο των t,s ώστε:

$$|f(\zeta)+tg(\zeta)|\cdot|f(\zeta)+sg(\zeta)| > M > 0$$

Πράγματι, θεωρούμε τα σύνολα:

$$\mathcal{M}_\varepsilon = \big\{(t,s,\zeta)\ \big|\ |f(\zeta)+tg(\zeta)|\cdot|f(\zeta)+sg(\zeta)|<\varepsilon\big\} \subseteq [0,1]^2\times\partial S(a,r)$$

και παρατηρούμε ότι είναι κλειστά. Αν $\eta>0$ είναι τυχόν και $\big((t_k,s_k,\zeta_k)\big)_{k\in\mathbb{N}}$ είναι μία ακολουθία του $\mathcal{M}_\varepsilon$ που συγκλίνει σε (t,s,ζ), τότε:

$$|f(\zeta)-f(\zeta_k)+tg(\zeta)-t_kg(\zeta_k)| = |f(\zeta)-f(\zeta_k)+tg(\zeta)-tg(\zeta_k)+tg(\zeta_k)+t_kg(\zeta_k)| \leqslant$$

$$\leqslant |f(\zeta)-f(\zeta_k)|+t|g(\zeta)-g(\zeta_k)|+|t-t_k|\cdot|g(\zeta_k)| < 3\cdot\eta/3=\eta$$

για αρκετά μεγάλο $k\in\mathbb{N}$ (εφόσον οι f, g είναι συνεχείς). Δηλαδή:

$$|f(\zeta)-tg(\zeta)| \leqslant |f(\zeta_k)+t_kg(\zeta_k)|+\eta$$

από την αντίστροφη τριγωνική ανισότητα. Φυσικά, παρόμοια ανισότητα μπορεί να αποδειχθεί για τα s στη θέση των t:

$$|f(\zeta)-sg(\zeta)| \leqslant |f(\zeta_k)+s_kg(\zeta_k)|+\eta$$

Πολλαπλασιάζοντας τις δύο, έπεται ότι:

$$|f(\zeta)-tg(\zeta)|\cdot|f(\zeta)-sg(\zeta)| \leqslant |f(\zeta_k)+t_kg(\zeta_k)|\cdot|f(\zeta_k)+s_kg(\zeta_k)|+\eta\cdot\big(|f(\zeta_k)+t_kg(\zeta_k)|+|f(\zeta_k)+s_kg(\zeta_k)|\big)+\eta^2$$

Δηλαδή, αν λάβουμε υπόψη ότι η ποσότητα $|f(\zeta_k)+t_kg(\zeta_k)|+|f(\zeta_k)+s_kg(\zeta_k)|$ είναι φραγμένη (λόγω τριγωνικής ανισότητας), έστω από Λ:

$$|f(\zeta)-tg(\zeta)|\cdot|f(\zeta)-sg(\zeta)| \leqslant \varepsilon+\eta\Lambda+\eta^2$$

Αφήνοντας $\eta\to 0$ έχουμε τελικά ότι:

$$|f(\zeta)-tg(\zeta)|\cdot|f(\zeta)-sg(\zeta)| \leqslant \varepsilon$$

δηλαδή $(t,s,\zeta)\in\mathcal{M}_\varepsilon$ και το $\mathcal{M}_\varepsilon$ είναι κλειστό σύνολο. Επειδή οι χώροι $[0,1]$, $\partial S(a,r)$ είναι πλήρεις, το πεπερασμένο γινόμενο $[0,1]^2\times\partial S(a,r)$ θα είναι κι αυτό πλήρης χώρος, και κατά συνέπεια η τομή:

$$\bigcap_{\varepsilon>0}\mathcal{M}_\varepsilon$$

δεν είναι κενή. Δηλαδή, για κάποιο στοιχείο $(\tilde{t},\tilde{s},\tilde{\zeta})$ έχουμε:

$$|f(\tilde{\zeta})+\tilde{t}g(\tilde{\zeta})|\cdot|f(\tilde{\zeta})+\tilde{s}g(\tilde{\zeta})|=0$$

το οποίο είναι άτοπο της ανισότητας (που δείξαμε προηγουμένως):

$$|f(\zeta)+tg(\zeta)|\cdot|f(\zeta)+sg(\zeta)|>0$$

Βήμα IV: Χρησιμοποιώντας τη σχέση του **Βήματος II** και την ανισότητα του **Βήματος III**, καταλήγουμε στο ότι:

$$|\varpi(t)-\varpi(s)|\leqslant\frac{|t-s|}{2\pi M}\,|f(\zeta)g'(\zeta)-f'(\zeta)g(\zeta)\;d\zeta|=\frac{2\pi r|t-s|}{2\pi M}\cdot\sup_{\zeta\in\partial S(a,r)}|f(\zeta)g'(\zeta)-f'(\zeta)g(\zeta)|$$

δηλαδή:

$$|\varpi(t)-\varpi(s)|\leqslant\left(\frac{r}{M}\sup_{\zeta\in\partial S(a,r)}|f(\zeta)g'(\zeta)-f'(\zeta)g(\zeta)|\right)\cdot|t-s|$$

Έτσι αποδεικνύεται ότι η $\varpi(\cdot)$ είναι συνεχής (μάλιστα Lipschitz συνεχής), και κατά συνέπεια -αφού παίρνει ακέραιες τιμές- $\varpi(0)=\varpi(1)$. Οπότε το πλήθος των ριζών της f ισούται με το πλήθος των ριζών της $f+g$. □

Το παραπάνω θεώρημα στην ουσία, μέσω της απόδειξής του, δείχνει κάτι αρκετά καλύτερο. Για κάθε $t\in[0,1]$ οι f και $f+tg$ έχουν το ίδιο πλήθος ριζών.

4.3.3 Αναπτύγματα Laurent σε δακτυλίους

Ήδη έχουμε κάνει μία σύνδεση μεταξύ των δυναμοσειρών και των αναπτυγμάτων Laurent, λέγοντας ότι τα αναπτύγματα Laurent είναι μία γενίκευση των δυναμοσειρών. Μάλιστα, εάν:

$$L(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k(z-a)^k=\sum_{k=-\infty}^{-1}c_k(z-a)^k+\sum_{k=0}^{\infty}c_k(z-a)^k$$

είναι ένα ανάπτυγμα Laurent με κύριο μέρος:

$$l(z)=\sum_{k=-\infty}^{-1}c_k(z-a)^k$$

τότε με τον μετασχηματισμό $w=1/(z-a)$ μπορούμε να γράψουμε:

$$\tilde{p}(w)=l(z)=\sum_{\lambda=1}^{\infty}c_{-\lambda}w^{\lambda}$$

Η $\tilde{p}$ είναι μία δυναμορειρά, η οποία έχει κάποια ακτίνα σύκλισης, έστω $1/\rho$ (οπότε η l συγκλίνει στο $B(a,\rho)^c$). Από την άλλη, το εναπομείνον τμήμα του αναπτύγματος Laurent:

$$p(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k(z-a)^k$$

είναι μία δυναμοσειρά με ακτίνα σύγκλισης r. Φαίνεται ότι, όπως στις δυναμοσειρές υπάρχει η έννοια του δίσκου σύκλισης, στα αναπτύγματα Laurent υπάρχει ο δακτύλιος σύγκλισης $S(a,r)\backslash B(a,\rho)$.

Παρατήρηση 4.2: Έστω ένα ανάπτυγμα Laurent:

$$L(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k(z-a)^k=\sum_{k=-\infty}^{-1}c_k(z-a)^k+\sum_{k=0}^{\infty}c_k(z-a)^k$$

Βάσει της ανάλυσης που κάναμε προηγουμένως, καθώς και της γενικής θεωρίας των δυναμοσειρών, υπάρχουν $\rho,r>0$ ώστε στον δακτύλιο:

$$S(a,r)\backslash B(a,\rho)$$

η L να συγκλίνει απολύτως και στην περιοχή $\mathbb{C}\backslash\big(S(a,r)\backslash B(a,\rho)\big)$ να αποκλίνει. Μάλιστα:

$$1/\rho=\sup\{R>0\mid(|c_{-\lambda}|R^{\lambda})_{\lambda\in\mathbb{N}}\text{ φραγμένη}\}=1\Big/\limsup_{\lambda\to\infty}\sqrt[\lambda]{|c_{-\lambda}|}$$

και:

$$r=\sup\{R>0\mid(|c_k|R^{k})_{k\in\mathbb{N}_0}\text{ φραγμένη}\}=1\Big/\limsup_{k\to\infty}\sqrt[k]{|c_k|}$$

Εκφράζοντας την αναλυτικότητα των ολομόρφων συναρτήσεων σε ανοικτά σύνολα, δείξαμε ότι οι ολόμορφες συναρτήσεις αναλύωνται σε δυναμοσειρές στους δίσκους των ανοικτών συνόλων που ορίζονται. Ανάλογο αποτέλεσμα ισχύει και για τα αναπτύγματα Laurent, που ουσιαστικά διατυπώνεται στην επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα 4.7: (Αναπτύγματα Laurent ολομόρφων συναρτήσεων σε δακτυλίους). Έστω $S(a,r)\backslash B(a,\rho)$ ένας δακτύλιος και $f \in \mathcal{O}\big(S(a,r)\backslash B(a,\rho)\big)$. Η συνάρτηση f στον δίσκο $S(a,r)\backslash B(a,\rho)$ έχει ενιαίο ανάπτυγμα Laurent.

Απόδειξη: Η απόδειξη είναι εκτενής και θα γίνει σε βήματα.

Βήμα I: Εάν $\rho = 0$ (ή $r = 0$, αλλά αυτό είναι τετριμμένο), ο δακτύλιος $S(a,r)\backslash B(a,\rho)$ εκφυλίζεται στον τρύπιο δίσκο $S(a,r)\backslash\{a\}$, οπότε το αποτέλεσμα είναι συνέπεια της **Πρότασης 4.4**.

Βήμα II: Εάν $\rho, r > 0$ (και, για να μην άσχολούμαστε με τετριμμένες περιπτώσεις, $\rho < r$), θεωρούμε:

$$0 < \rho < P < R < r$$

καθώς επίσης και τον δακτύλιο $S(a,R)\backslash B(a,P)$. Έστω $z \in S(a,R)\backslash B(a,P)$. Θεωρούμε ευθύγραμμο τμήμα («μακρυά» από το z), έστω $AB \subseteq S(a,R)\backslash B(a,P)$, που να συνδέει το σύνορο του δακτυλίου (τους δύο κύκλους μεταξύ τους). Επίσης, θεωρούμε αρκετά μικρό δίσκο $S(z,\varepsilon)$ στο z, που περιέχεται στον δακτύλιο και δεν τέμνει το AB.

Βήμα III: Παρατηρούμε ότι οι καμπύλες:

$$\partial S(a,R) + AB - \partial B(a,P) - AB \textbf{ και } \partial S(z,\varepsilon)$$

είναι ομοτοπικές (αφού η δεύτερη μπορεί να «φουσκώσει», εντός του δακτυλίου με το ενωμένο σύνορο, και να ταυτιστεί με την πρώτη). Επομένως, εφόσον η $f(\cdot)/(\cdot - z)$ είναι ολόμορφη μακρυά από το z, από την **Πρόταση 3.3** έχουμε:

$$\int_{\partial S(a,R)-\partial B(a,P)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, dz = \int_{\partial S(a,R)+AB-\partial B(a,P)-AB} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, dz = \int_{\partial S(z,\varepsilon)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, dz$$

δηλαδή, από τον ολοκληρωτικό τύπο του Cauchy:

$$\int_{\partial S(a,R)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, dz - \int_{\partial B(a,P)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, dz = \int_{\partial S(a,R)-\partial B(a,P)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, dz = 2\pi i \cdot f(z)$$

Έτσι λοιπόν:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial S(a,R)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, dz - \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial S(a,P)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, dz$$

Βήμα IV: Έχουμε ήδη δει, από την απόδειξη του **Θεωρήματος 3.6**, ότι:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial S(a,R)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, dz = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial S(a,R)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{k+1}} d\zeta \cdot (z-a)^k$$

δηλαδή αναπτύσσεται σε δυναμοσειρά. Αυτό που αποσκοπούμε να δείξουμε, για να τελειώσει η απόδειξη, είναι ότι το άλλο ολοκλήρωμα αποτελεί το κύριο μέρος του αναπτύγματος Laurent που ψάχνουμε να βρούμε (εδώ θα βοηθήσει να κάνετε την αντιδιαστολή με την απόδειξη του **Θεωρήματος 3.6**). Θεωρούμε λοιπόν $\zeta \in \partial S(a,P)$ και παρατηρούμε ότι για το z του δακτυλίου:

$$\left|\frac{\zeta - a}{z - a}\right| < 1$$

κι επομένως:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\zeta - a}{z - a}\right)^k = \frac{\frac{\zeta - a}{\zeta - z}}{1 - \frac{\zeta - a}{\zeta - z}} = \frac{\zeta - a}{z - \zeta}$$

Έπεται έτσι ότι:

$$\frac{1}{\zeta - z} = -\frac{1}{\zeta - a}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\zeta - a}{\zeta - z}\right)^k \Rightarrow \int_{\partial S(a,P)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = -\int_{\partial S(a,P)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)(\zeta - a)^k}{\zeta - a} \cdot (\zeta - a)\, d\zeta$$

δηλαδή:

$$\int_{\partial S(a,P)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial S(a,P)} f(\zeta)(\zeta - a)^{k-1}\, d\zeta\right) \cdot (z-a)^{-k}$$

όπου η εναλλαγή του αθροίσματος με το ολοκλήρωμα μπορεί να γίνει όπως στην απόδειξη του **Θεωρήματος 3.6**. Αυτά τελικά δείχνουν ότι στους δακτυλίους $S(a,R)\backslash B(a,P)$ υπάρχει ανάπτυγμα Laurent:

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(z-a)^k$$

Βήμα V: Επειδή οι συντελεστές c_k, $k \in \mathbb{Z}$, δεν εξαρτώνται από τα P, R (γιατί;), αφήνοντας $P \to \rho$ και $R \to r$, αποδεικνύουμε το θεώρημα.

□

4.4 Το θεώρημα σύγκλισης του Weierstrass για τις ολόμορφες συναρτήσεις

Το τελευταίο θεώρημα της «κλασικής» μιγαδικής ανάλυσης με το οποίο θα ασχοληθούμε, είναι αυτό του Weierstrass για τις ολόμορφες συναρτήσεις. Αποτελεί κι αυτό χαρακτηριστικό της μιγαδικής ανάλυσης και έχει αρκετές εφαρμογές, για παράδειγμα στην αναλυτική θεωρία αριθμών.

Θεώρημα 4.8: Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ένα ανοικτό σύνολο, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μία ακολουθία ολόμορφων συναρτήσεων $f_n \in \mathcal{O}(\Omega)$ και μία συνάρτηση $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Εάν η σύγκλιση $f_n \to_o f$ αληθεύει στα συμπαγή υποσύνολα του Ω, τότε η σύγκλιση $f_n' \to_o f'$ επίσης αληθεύει, στα συμπαγή υποσύνολα του Ω.

Αλλιώς, χρησιμοποιώντας σειρές, εάν:

$$\sum_{k=1}^{n} f_k \to_o \sum_{k=1}^{\infty} f_k$$

στα συμπαγή υποσύνολα του Ω, τότε:

$$\sum_{k=1}^{n} f_k' \to_o \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k\right)'$$

στα συμπαγή υποσύνολα του Ω. Δηλαδή, στα συμπαγή υποσύνολα του Ω:

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k' = \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k\right)'$$

Απόδειξη: Και πάλι η απόδειξη είναι κάπως εκτενής και θα γίνει σε βήματα.

Βήμα I: Έστω $B(a,r) \subseteq \Omega$ και $z \in B(a,r)$. Στον δίσκο αυτό μπορούμε, μέσω του ολοκληρωτικού τύπου του Cauchy, να γράψουμε:

$$f_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B(a,r)} \frac{f_n(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$$

Τώρα, επειδή το σύνολο $\partial B(a,r)$ είναι συμπαγές, οι f_n θα συγκλίνουν ομοιόμορφα στην f στο σύνορο αυτό (από την υπόθεση). Αυτό δείχνει ότι, επιπλέον:

$$\frac{f_n(\cdot)}{(\cdot - z)} \to_o \frac{f(\cdot)}{(\cdot - z)}$$

Βήμα II: Εφόσον η προηγούμενη σύγκλιση είναι ομοιόμορφη, από την **Πρόταση 3.1** έχουμε:

$$f_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B(a,r)} \frac{f_n(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \to \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B(a,r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta, \text{ για } z \in B(a,r)$$

Επειδή και το $B(a,r)$ είναι συμπαγές, θα αληθεύει η σύγκλιση $f_n(z) \to f(z)$, κι οπότε συνδυάζοντας το προηγούμενο:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B(a,r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$$

δηλαδή η f είναι αναλυτική, άρα κι ολόμορφη (αυτό μπορεί να βρεθεί στην απόδειξη του **Θεωρήματος 3.6**). Ας σημειωθεί εδώ ότι δεν μπορούσαμε εξ' αρχής να γράψουμε την προηγούμενη ισότητα, μιας και δεν ξέραμε την ολομορφία της f.

Βήμα III: Μένει να δείξουμε ότι $f_n' \to_o f'$. Θεωρούμε λοιπόν $r < R$, $S(a, R) \subseteq \Omega$, και, σύμφωνα με τον γενικευμένο τύπο του Cauchy:

$$f_n'(z) - f'(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{\partial S(a,\rho)} \frac{f_n(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\, d\zeta, \text{ για } z \in S(a, R)$$

Οπότε, για τα $z \in B(a, r)$:

$$\begin{aligned} |f_n'(z) - f'(z)| &= \frac{1}{\pi} \left| \int_{\partial B(a,r)} \frac{f_n(\zeta) - f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\, d\zeta \right| \\ &\leqslant \frac{1}{\pi} \int_{\partial B(a,r)} \left| \frac{f_n(\zeta) - f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} \right| d\zeta \\ &\leqslant \frac{2\pi R}{\pi} \cdot \sup_{\zeta \in \partial S(a,R)} \left| \frac{f_n(\zeta) - f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} \right| \\ &= 2R \cdot \sup_{\zeta \in \partial S(a,R)} \left| \frac{f_n(\zeta) - f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} \right| \end{aligned}$$

Τώρα, επειδή $\zeta \in \partial S(a, R)$, θα έχουμε (με αντίστροφη τριγωνική ανισότητα) ότι $|\zeta - z| \geqslant R - r$. Επομένως, για $z \in B(a, r)$:

$$|f_n'(z) - f'(z)| \leqslant \frac{2R}{(R - r)^2} \cdot \sup_{\zeta \in \partial S(a,R)} |f_n(\zeta) - f(\zeta)|$$

Επειδή το σύνολο $\partial S(a, R)$ είναι συμπαγές, η σύγκλιση $f_n \to_o f$ είναι ομοιόμορφη και, κατά συνέπεια:

$$f_n' \to_o f', \text{ στο } B(a, r)$$

Βήμα IV: Επειδή κάθε συμπαγές σύνολο (υποσύνολο του Ω) καλύπτεται από πεπερασμένους στο πλήθος δίσκους $B(a, r) \subseteq \Omega$, η σύγκλιση $f_n' \to_o f'$ αποδεικνύεται σε όλα τα συμπαγή υποσύνολα του Ω.

□

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Υπό προετοιμασία...

5.1 Υπό προετοιμασία...

Υπό προετοιμασία...

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

Βιβλιογραφία

Ξενόγλωσση βιβλιογραφία:

(ZS) Zill Denis, Shanahan Patrick: ***A First Course in Complex Analysis*** (Jones and Bartlett Publishers, 2003)

(Or) Orlando Merino: ***A Short History of Complex Numbers*** (Univ. of Rhode Island, 2006)

(ER) Eberhard Freitag, Rolf Busam: ***Complex Analysis*** (Springer, δεύτερη έκδοση, 2008)

(Ro) Romik Dan: ***Complex Analysis*** (UC Davis, 2020)

(Ge) Gerarld Edgar: ***Measure, Topology and Fractal Geometry*** (Springer, δεύτερη έκδοση, 2008)

Ελληνική βιβλιογραφία:

(Gi) Γιαννόπουλος Απόστολος: ***Αναλυτική Θεωρία Αρθμών*** (ΕΚΠΑ, σημειώσεις ΠΠΣ, 2022)

(Ha) Χατζηαφράτης Τηλέμαχος: ***Απειροστικός Λογισμός σε Πολλές Μεταβλητές*** (Συμμετρία, 2009)

(Ru) Walter Rudin: ***Αρχές Μαθηματικής Αναλύσεως*** (Leader Books, πρώτη έκδοση, 2000)

(At) Αθανασόπουλος Κωνσταντίνος: ***Διαφορική Γεωμετρία*** (Παν. Κρήτης, σημειώσεις ΠΠΣ, 2020)

(Fr) Φράγκος Αναστάσιος: ***Εισαγωγή στην Επίπεδη Υπερβολική Γεωμετρία*** (ΕΚΠΑ, σημειώσεις ΠΠΣ, επηρεασμένες από τον κ. Λάππα Διονύσιο, 2021)

(Ko) Κουρουνιώτης Χρήστος: ***Θεμέλια των Μαθηματικών*** (Παν. Κρήτης, σημειώσεις ΠΠΣ, 2016)

(Ma) Μαλιάκας Μιχαήλ: ***Μαθήματα Βασικής Άλγεβρας και Θεωρίας Galois*** (Τσότρας, 2022)

(Ts) Τσαρπαλιάς Αθανάσιος: ***Μιγαδική Ανάλυση*** (ΕΚΠΑ, σημειώσεις ΠΠΣ, 2013)

(Su) Σουρλάς Δημήτριος: ***Μιγαδική Ανάλυση*** (Παν. Πατρών, σημειώσεις ΠΠΣ, 2012)

(CB) Churchill R.V., Brown J.W.: ***Μιγαδικές συναρτήσεις και εφαρμογές*** (Παν. εκδόσεις Κρήτης, δεύτερη έκδοση, 2020)

(Me) Μερκουράκης Σοφοκλής: ***Σημειώσεις Μιγαδικής Ανάλυσης*** (ΕΚΠΑ, σημειώσεις ΠΠΣ, 2022)

Ευρετήριο