

691. Διδακτική των Μαθηματικών Ι

Παρουσίαση 1^η

Α. Φράγκος

Δευτέρα 10 Οκτωβρίου 2022

Τι θα διαπραγματευτούμε

Υποθέτουμε ότι προετοιμάζουμε τη διδασκαλία της γωνίας στην Α' γυμνασίου.

- Ποιά θα είναι η διδακτική προσέγγιση και τι προβλήματα θα επιλύει, συγκριτικά με μια «κλασική» μέθοδο.
- Ενδεικτικές ασκήσεις που θα εισάγουν εκ νέου την έννοια της σύγκρισης της γωνίας και της μέτρησής της.
- Τι αναμένουμε να προσκομίσουν οι μαθητές μέσω συτής της διαδικασίας.

Μια εισαγωγή στην έννοια της γωνίας

Για να ορίσουμε την έννοια της γωνίας στα παιδιά της Α' γυμνασίου, αρχικά ας διερευνήσουμε τον «αυστηρό» ορισμό της.

Ορισμός - να φυλάσσεται μακριά από παιδιά (Γωνίες):

Θεωρούμε τρία μη συνευθειακά σημεία O, X, X' καθώς και τις ευθείες l, m των O, X και O, X' αντίστοιχα. Συμβολίζουμε με H και E τα εξής ημιεπίπεδα:

- H : Είναι το ημιεπίπεδο που ορίζει η l από την πλευρά του X' .
- E : Είναι το ημιεπίπεδο που ορίζει η m από την πλευρά του X .


και ορίζουμε ως γωνία των O, X, X' με κορυφή O την τομή:

$$\widehat{XOX'} = H \cap E$$

Ο ορισμός δεν μπορεί να παρουσιαστεί αυτούσιος στους μαθητές, διότι η κατανόησή του προϋποθέτει την κατανόηση ενός ευρύτερου εννοιολογικού πεδίου απ' αυτό μαθαίνει ή ήδη γνωρίζει (συνήθως) ένας μαθητής.

Η λύση:

- Είτε να γίνει προσπάθεια διεύρυνσης του εννοιολογικού πεδίου των μαθητών,
- Είτε να γίνει προσπάθεια εύρεσης ενός (ισοδύναμου)¹ ορισμού που μπορεί να διατυπωθεί ευκολότερα στα πλαίσια ενός διδακτικού προγράμματος.

¹Το σχολικό βιβλίο δεν παραθέτει ισοδύναμο ορισμό 

Η πρώτη λύση δεν είναι λύση

Το διευρυμένο πλαίσιο, θα περιλαμβάνει μεταξύ άλλων και τα ακόλουθα:

- Την έννοια των ημιεπιπέδων, η οποία για να οριστεί προϋποθέτει
- Την έννοια του χωρίου. Επιπλέον,
- «συνολοθεωρητικές» έννοιες όπως αυτή της «τομής» (αν και η προσέγγιση εδώ μπορεί να γίνει γεωμετρικά)

Πέρα όμως από αυτά η επικάλυψη δύο ημιεπιπέδων μπορεί να δυσκολέψει τα παιδιά, γιατί όχι απλώς διαχειρίζονται δύο άπειρα αντικείμενα, αλλά καλούνται να κάνουν πράξεις μ' αυτά.

Η δεύτερη λύση

Η δεύτερη προσέγγιση δεν προϋποθέτει κάτι άλλο πέρα από την έννοια του «χωρίου» στο επίπεδο.

Ορισμός (Γωνίες):

Ας θεωρήσουμε ότι έχουμε δύο ημιευθείες Ox, Ox' (που δεν είναι στην ίδια ευθεία) με κοινή αρχή O . Οι ημιευθείες αυτές φτιάχνουν μια γραμμή γ που χωρίζει το επίπεδο σε δύο κομμάτια. Το μικρότερο απ' αυτά το λέμε γωνία των Ox, Ox' και το συμβολίζουμε με $\widehat{x'Ox}$.

Προσοχή: Με αυτόν τον τρόπο ορίζουμε τις κυρτές, μη ευθείες γωνίες.

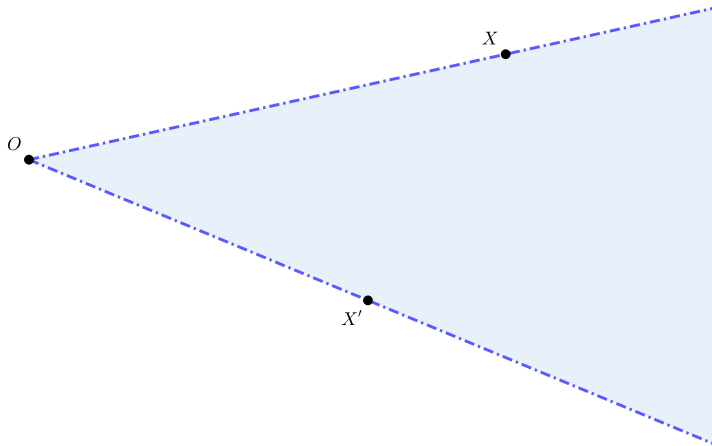
Πρέπει με «φυσικό ή τεχνικό» τρόπο να δημιουργηθεί στους μαθητές η απορία στην ασυμμετρία του ορισμού. Γιατί το άλλο τμήμα να μην είναι κι αυτό γωνία;

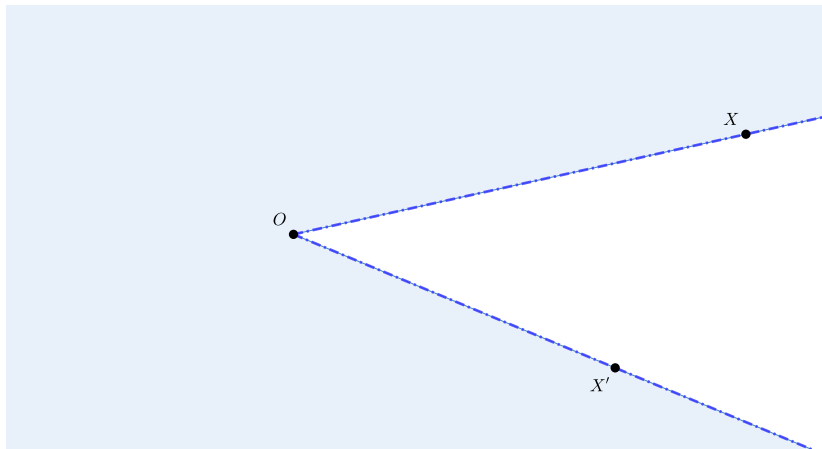
Εδώ θα πρέπει να γίνει η εισαγωγή της «νέας» γωνίας, της μη κυρτής γωνίας.

Ορισμός (Μη κυρτές γωνίες):

[...] Το άλλο τμήμα που ορίζει η γ ονομάζεται μη κυρτή γωνία των Ox, Ox' .

Είναι σημαντικό ορισμός να μην προηγηθεί της διερεύνησης / απορίας. Αλλιώς, οι μαθητές δεν θα έχουν πλήρη κατανόηση για τον διαχωρισμό των εννοιών.





Γωνίες και σχήματα

Μέχρι τώρα οι γωνίες είναι ένα «άπειρο» αντικείμενο. Είναι δυνατόν να περιορίζεται σε φραγμένα σχήματα; Έχουν τα τρίγωνα γωνίες; Πώς γίνεται να μην έχουν, αφού λέγονται τρίγωνα - από την άλλη είναι πολύ μικρά για να χωρέσουν έστω και μια γωνία.

Πρέπει να γίνει κατανοητό ότι όταν λέμε «ένα τρίγωνο έχει γωνίες» δεν εννοούμε τη σχέση του «περιέχεσθαι», αλλά ότι αν τα ευθύγραμμα τμήματα του τριγώνου επεκταθούν, μπορούν να «δώσουν» γωνίες (χωρίζοντας το επίπεδο). Επίσης, εδώ μπορεί να εισαχθεί η έννοια της στροφής.

Γωνίες και μετρήσεις

Έχουμε καθιερώσει ως τώρα ότι οι γωνίες είναι ένα «άπειρο» αντικείμενο, κατά μια έννοια όπως και οι ευθείες. Είναι δυνατόν κανείς να μετρήσει ευθείες, έστω και με στοιχειώδη τρόπο; Είναι δυνατόν να μετρήσει γωνίες;

- Πρέπει να γίνει κατανοητό ότι οι μετρήσεις είναι σχετικές. Οπότε κανείς μπορεί να γράψει ότι μια ευθεία είναι δύο ημιευθείες (την μετρήσαμε).
- Ίσως για την μέτρηση της γωνίας να μπορεί να χρησιμοποιηθεί άλλο ένα «άπειρο» αντικείμενο. Δεδομένης μιας «μικρής» γωνίας θ , μπορούμε να πούμε ότι μια άλλη γωνία είναι $\theta, 2\theta, 3\theta, 3\theta/2$ κ.τ.λ., εάν χωράει μέσα της $1, 2, 3, 3/2$ κ.τ.λ. γωνίες θ .
- Φυσικά για να γίνει αυτό, προϋποτίθεται να οριστεί η έννοια της ισότητας μέσω σύμπτωσης.

Θέλω μεγαλύτερη γωνία, θα χρησιμοποιήσω μεγαλύτερο μοιρογνωμόνιο

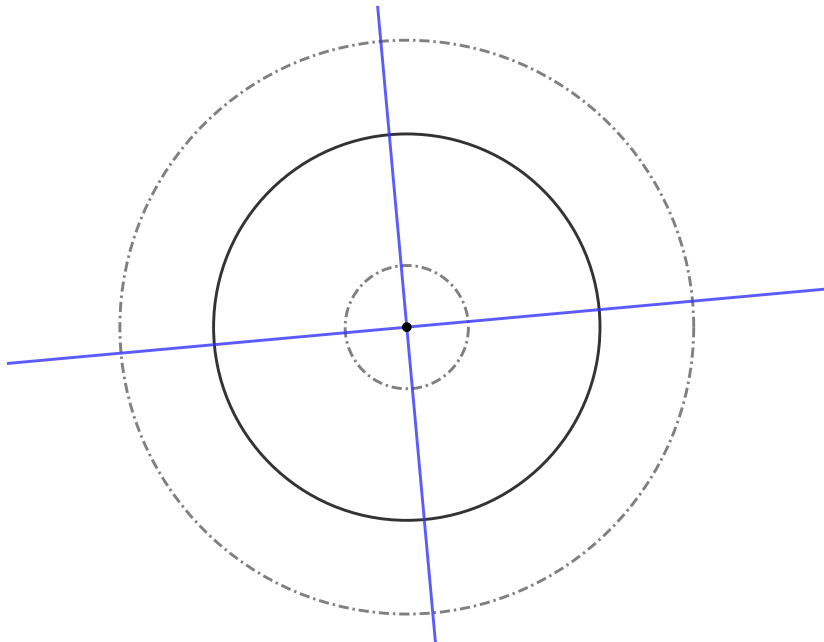
Ίσως τα παιδιά προβληματιστούν γιατί δεν χρησιμοποιούμε ένα άπειρο σε μέγεθος όργανο για να μετρήσουμε τις γωνίες, αφού η μονάδα μέτρησης είναι άπειρη. Απαντάμε με τα ακόλουθα:

Άσκηση

Υποθέστε ότι έχουμε έναν κύκλο κέντρου O , τον οποίο χωρίζουμε σε 360 (ίσως λιγότερα για αρχή) κομμάτια. Από το O προς τις τομές φέρουμε ημιευθείες (τα μαχαίρια που τον έκοψαν). Σε πόσα κομμάτια θα κοπεί ένας μεγαλύτερος ομόκεντρος κύκλος; Ένας μικρότερος;

Άσκηση

Εάν πούμε θ μια από τις (μικρές) σχηματιζόμενες γωνίες, μπορούμε να προσδιορίσουμε τη γωνία χρησιμοποιώντας μόνο δύο σημεία του πρώτου κύκλου; Ενός μεγαλύτερου; Ενός μικρότερου;



Προβλήματα που ενδεχομένως επιλύει ο τρόπος διδασκαλίας

- Προσεγγίζει την έννοια της γωνίας σύμφωνα με τον αυστηρό ορισμό της.
- Αιτιολογεί τους ορισμούς απαντώντας σε ερωτήματα που γεννήθηκαν στους μαθητές - δεν είναι απλή εναπόθεση πληροφορίας.
- Διαφοροποιεί τον ορισμό της γωνίας από τη μέτρισή της, κι επίσης προσπαθεί να διαπραγματευτεί με προσιτό τρόπο την έννοια του απείρου.
- Κάνει αναφορά στην ισότητα με γεωμετρική αναφορά (σύμπτωση).

Διάφορες άλλες ασκήσεις

Άσκηση (σύγκριση γωνιών χωρίς μέτρο)

Εάν έχουμε δύο γωνίες σχεδιασμένες σε διάφανα χαρτιά, μπορούμε μετακινώντας τες να βρούμε ποιά είναι μεγαλύτερη; (χωρίς μέτρηση)

Άσκηση (οι μετρήσεις γίνονται με κάποια αναφορά)

Θεωρούμε ένα τμήμα μήκους 1 σε μια ευθεία και μια γωνία μέτρου 1. Πώς μετράμε ευθύγραμμα τμήματα με τη μονάδα στην ευθεία; Πώς μετράμε γωνίες με τη γωνία μέτρου 1; Παρατηρείτε ομοιότητες; Διαφορές;

Τι αναμένουμε

- Να γίνει αντιληπτή η τομή του επιπέδου σε υποχωρία.
- Να μπορούν να υπάρχει μια στοιχειώδης μεταχείριση άπειρων αντικειμένων.
- Να γίνουν αντιληπτές οι διαφορές τις γωνίας και του μέτρου της.
- Να μπορούν να συγκριθούν γωνίες χωρίς μέτρηση (σύμπτωση).
- Να γίνει αντιληπτό (σε πρώτο στάδιο) ότι το μέτρο μιας γωνίας δεν παίρνει οσοδήποτε μεγάλη τιμή θέλουμε.