Σύντομες Σημειώσεις και Ασκήσεις

Για την Β′ Γυμνασίου.

Φράγκος Αναστάσιος

Περιεχόμενα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Εξισώσεις και Σχέσεις

1.1 Θεωρία

Στις εξισώσεις ως τώρα μας ενδιέφεραν **αλγεβρικές παραστάσεις** με **έναν άγνωστο**, τις οποίες μπορούσαμε να **λύσουμε** και βρίσκαμε **όλες** τις λύσεις.
Δηλαδή, ως τώρα, στις εξισώσεις μας είχαμε:

- Μία αλγεβρική παράσταση (με ισότητα),
- Έναν άγνωστο,
- Και μπορούσαμε να βρούμε όλες τις λύσεις της εξίσωσης.

Υπενθυμίζουμε ότι:

> «Αλγεβρική παράσταση είναι μία αλληλουχία πράξεων με αγνώστους και αριθμούς. Για παράδειγμα, η:
> $$x^3 + 5x - y - 2$$
> είναι μία αλγεβρική παράσταση».

Στις εξισώσεις, οι αλγεβρικές παραστάσεις εμφανίζονται με $=$, για παράδειγμα:

$$x^2 + x + 1 = 0$$

Από εδώ και στο εξής, θα προσπαθήσουμε να γενικεύσουμε την έννοια της εξίσωσης μέσω των **σχέσεων**.

Αν προσπαθήσουμε να φτιάξουμε εξισώσεις με δύο αγνώστους, για παράδειγμα:

$$x + y = 0$$

θα παρατηρήσουμε σε αυτές δεν μπορούμε να βρούμε όλες τις λύσεις. Όλα τα παρακάτω (και πολλά ακόμα) είναι λύσεις της εξίσωσης.

$$x = 0, \qquad y = 0$$

$$x = 1, \qquad y = -1$$

$$x = 2, \qquad y = -2$$

και ούτω καθεξής. Παρόλο που δεν μπορούμε να βρούμε όμως όλες τις λύσεις, σίγουρα μπορούμε να τις περιγράψουμε. Το y σχετίζεται με το x, και μάλιστα:

$$y = -x$$

Αυτή η σχέση θα προέκυπτε κιόλας αν λύναμε την $x + y = 0$ ως εξίσωση ως προς x (δηλαδή απομονώναμε το x).

Μερικές φορές, επειδή στις σχέσεις οι άγνωστοι μπορούν να αλλάζουν, να **μεταβάλλονται** (και γενικά να παίρνουν πολλές τιμές), τους ονομάζουμε και **μεταβλητές.**

Φυσικά το ίδιο θα μπορούσαμε να κάνουμε και με εξισώσεις με παραπάνω αγνώστους, μόνο εκεί η κατάσταση θα ήταν περισσότερο περίπλοκη.

$$x + y + z = 0$$

Είναι πολύ ενδιαφέρον ότι οι σχέσεις εμφανίζονται κατά κόρον στη **φυσική**.

Παράδειγμα: Μία μύγα ταξιδεύει με ταχύτητα $10km/h$ (10 χιλιόμετρα την ώρα). Δηλαδή:

Μετά από 1 ώρα, έχει διανύσει $10km$,

Μετά από 2 ώρες, έχει διανύσει $20km$,

Μετά από 3 ώρες, έχει διανύσει $30km$ και ούτω καθεξής.

Αν κάποιος μας ρωτούσε μετά από 4 ώρες πόσα km έχει διανύσει η μύγα, θα μπορούσαμε να απαντήσουμε, γιατί εκεί εντοπίζουμε ένα μοτίβο.

$$\text{Απόσταση} = 10 \cdot \text{Ώρες}$$

Οπότε, σε 4 ώρες θα έχει διανύσει $40km$.

Πάντως, αν συμβολίσουμε $\boldsymbol{A} = $ Απόσταση και $\boldsymbol{\omega} = $ Ώρες, θα μπορούμε να γράψουμε:

$$\boldsymbol{A} = 10 \cdot \boldsymbol{\omega}$$

Αυτή είναι μία **σχέση**, που προέκυψε φυσιολογικά από ένα φυσικό πρόβλημα.

Παράδειγμα: Στην χημεία υπάρχουν αντιδράσεις (φυσικές διαδικασίες που γίνονται μεταξύ ουσιών) που γίνονται αργά. Για να επιταγχυνθούν, συνήθως προστίθεται ακόμη μία ουσία, που λέγεται καταλύτης. Για μία αντίδραση κάποιοι χημικοί παρατήρησαν:

> Με 1*gr* (1 γραμμάριο) καταλύτη, η αντίδραση τελειώνει σε 10*sec* (10 δευτερόλεπτα),
>
> Με 2*gr* καταλύτη, η αντίδραση τελειώνει σε 10/2*sec*,
>
> Με 3*gr* καταλύτη, η αντίδραση τελειώνει σε 10/3*sec*,
>
> Με 4*gr* καταλύτη, η αντίδραση τελειώνει σε 10/4*sec*,
>
> Με 5*gr* καταλύτη, η αντίδραση τελειώνει σε 10/5*sec*, και ούτω καθεξής.

Και πάλι, εδώ μπορούμε να εντοπίσουμε το εξής μοτίβο:

$$\text{Χρόνος αντίδρασης} = \frac{10}{\text{Γραμμάρια καταλύτη}}$$

οπότε, αν κανείς ρωτήσει σε πόσο χρόνο ολοκληρώνεται η αντίδραση αν βάλουμε 10*gr* καταλύτη, η απάντηση θα είναι:

$$\frac{10}{10} = 1$$

δευτερόλεπτο. Γενικά πάντως, αν συμβολίσουμε $\boldsymbol{X}$ = Χρόνος αντίδρασης και $\boldsymbol{Y}$ = Γραμμάρια καταλύτη, θα έχουμε:

$$\boldsymbol{X} = \frac{10}{\boldsymbol{Y}}$$

το οποίο, και πάλι, είναι μία **σχέση** που προέκυψε από φυσικό πρόβλημα.

1.2 Ασκήσεις

Άσκηση 1: Ένα αυτοκίνητο κινείται με $90km/h$ (90 χιλιόμετρα την ώρα) σε έναν δρόμο. Δηλαδή, Μετά από 1 ώρα, έχει διανύσει 90*km*,

Μετά από 2 ώρες, έχει διανύσει 180*km*,

Μετά από 3 ώρες, έχει διανύσει 270*km* και ούτω καθεξής.

1) Μετά από 10 ώρες, πόσα *km* θα έχει διανύσει;
2) Αν με $\boldsymbol{\omega}$ συμβολίσουμε τις ώρες και με $\boldsymbol{X}$ την απόσταση σε *km*, να βρείτε μία **σχέση** από την οποία, αν ξέρουμε το $\boldsymbol{\omega}$, θα μπορούμε να βρούμε το $\boldsymbol{X}$.

Λύση:

1) Παρατηρούμε ότι τα χιλιόμετρα που διανύει είναι, σε κάθε περίπτωση, 90 φορές την ώρα που πέρασε. Δηλαδή, σε 10 ώρες θα έχει διανύσει:
$$90 \cdot 10 = 900$$
χιλιόμετρα.
2) Περιγραφικά, η σχέση που υπάρχει (και που βλέπουμε από τα *δεδομένα*) είναι:
$$\text{Χιλιόμετρα} = 90 \cdot \text{Ώρα που πέρασε}$$
δηλαδή, αν χρησιμοποιήσουμε τα σύμβολα:
$$\boldsymbol{X} = 90 \cdot \boldsymbol{\omega}$$

Άσκηση 2: Οι εργάτες σε μία οικοδομή έχουν παρατηρήσει ότι η δουλειά τελειώνει γρηγορότερα όταν περισσότεροι δουλεύουν. Συγκεκριμένα έχουν παρατηρήσει ότι:

Αν δουλεύει 1 εργάτης, η οικοδομή κτίζεται σε 127 ημέρες,

Αν δουλεύουν 2 εργάτες, η οικοδομή κτίζεται σε 127/2 ημέρες,

Αν δουλεύουν 3 εργάτες, η οικοδομή κτίζεται σε 127/3 ημέρες,

Αν δουλεύουν 4 εργάτες, η οικοδομή κτίζεται σε 127/4 ημέρες, και ούτω καθεξής.

1) Αν δουλεύουν 127 εργάτες, σε πόσες μέρες θα τελειώσει η οικοδομή;
2) Αν με $\boldsymbol{\varepsilon}$ συμβολίσουμε το πλήθος των εργατών και με $\boldsymbol{H}$ τις ημέρες, να βρείτε μία **σχέση** από την οποία, αν γνωρίζουμε το $\boldsymbol{\varepsilon}$, θα μπορούμε να βρούμε το $\boldsymbol{H}$.

Λύση:

1) Παρατηρούμε ότι η οικοδομή ολοκληρώνεται, σε κάθε περίπτωση, σε χρόνο 127 ημερών διά το πλήθος των εργατών. Επομένως, αν έχουμε, 127 εργάτες, η διάρκεια της κατασκευής θα είναι:
$$127/127 = 1$$
ημέρα.
2) Περιγραφικά, η σχέση που υπάρχει (και που βλέπουμε από τα *δεδομένα*) είναι:
$$\text{Ημέρες} = \frac{127}{\text{Πλήθος των εργατών}}$$
δηλαδή, αν χρησιμοποιήσουμε τα σύμβολα:
$$\boldsymbol{H} = \frac{127}{\boldsymbol{\varepsilon}}$$

Άσκηση 3 (δύσκολη): Ένας βιολόγος έβαλε σε καλλιέργεια (καλλιέργεια είναι το φαγητό για τα μικρόβια) 1 μικρόβιο. Παρατήρησε τα εξής:

Σε 1 ώρα, τα μικρόβια είχαν γίνει 2,

Σε 2 ώρες, τα μικρόβια είχαν γίνει 4,

Σε 3 ώρες, τα μικρόβια είχαν γίνει 8,

Σε 4 ώρες, τα μικρόβια είχαν γίνει 16,

Σε 5 ώρες, τα μικρόβια είχαν γίνει 32 και ούτω καθεξής.

1) Σε 9 ώρες, πόσα θα έχουν γίνει τα μικρόβια;
2) Αν με $\boldsymbol{\omega}$ συμβολίσουμε τις ώρες και με $\boldsymbol{N}$ το πλήθος των μικροβίων, να βρείτε μία **σχέση** από την οποία, αν γνωρίζουμε το $\boldsymbol{\omega}$, θα μπορούμε να βρούμε το $\boldsymbol{N}$.

Λύση:

1) Αν αναδιατυπώσουμε λίγο τα δεδομένα, μπορούμε να γράψουμε:

Σε 1 ώρα, τα μικρόβια είχαν γίνει 2,

Σε 2 ώρες, τα μικρόβια είχαν γίνει $2 \cdot 2$,

Σε 3 ώρες, τα μικρόβια είχαν γίνει $2 \cdot 2 \cdot 2$,

Σε 4 ώρες, τα μικρόβια είχαν γίνει $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$, Σε 5 ώρες, τα μικρόβια είχαν *γίνει* $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ και ούτω καθεξής.

Οπότε, μετά από 9 ώρες θα έχουμε:

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^9 = 512$$

μικρόβια.

2) Περιγραφικά, η σχέση που υπάρχει (και που βλέπουμε από τα *δεδομένα*) είναι:

$$\text{Μικρόβια} = 2^{\text{Ώρα που πέρασε}}$$

δηλαδή, *αν* χρησιμοποιήσουμε τα σύμβολα:

$$\boldsymbol{N} = 2^{\boldsymbol{\omega}}$$