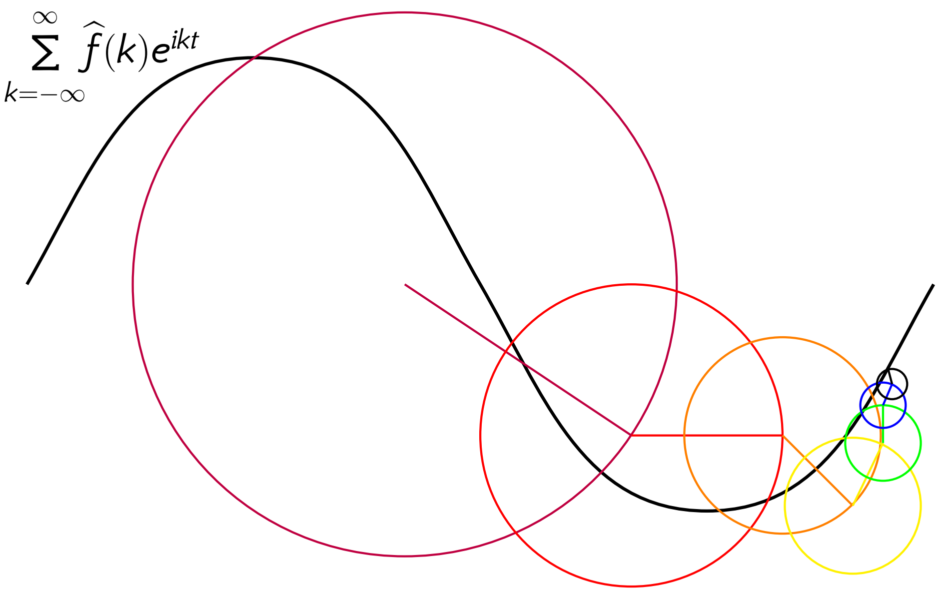
Βάσεις Schauder

Μια μικρή ανάλυση

Αναστάσιος Φράγκος

Τμήμα Μαθηματικών
Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Απρίλιος 2023



Προπτυχιακή Εργασία στο μάθημα «602. Συναρτησιακή Ανάλυση»

Η γραμματοσειρά «GFS Neohellenic» επιμελείται από τους κ. Γ. Δ. Ματθιόπουλο, κ. Α. Τσολομύτη και την Ελληνική Εταιρία Τυπογραφικών Στοιχείων (ΕΕΤΣ). Χρησιμοποιήθηκε επίσης η μαθηματική (καλλιγραφική) γραμματοσειρά «*Boondox*», Michael Sharpe, University of Washington. Η στοιχειοθέτηση έγινε σε LaTeX.

ΑΒΓΔΕΖΗΘΙΚΛΜΝΞΟΠΡΣΤΥΦΧΨΩ

αβγδεζηθικλμνξοπρστυφχψω

ΑΒΓΔΕΖΗΘΙΚΛΜΝΞΟΠΡΣΤΥΦΧΨΩ

αβγδεζηθικλμνξοπρστυφχψω

ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ

abcdedghijklmnopqrstuvwxyz

ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ

abcdedghijklmnopqrstuvwxyz

$\mathscr{ABCDEFGHIJKLMNOPQRS}$
$\mathscr{TUVWXYZ}$

$\mathscr{abcdedghijklmnopqrstuv}$
$\mathscr{wxyz}$

$\mathcal{ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUV}$
$\mathcal{WXYZ}$

$\mathfrak{ABCDEFGHIJKLMNOPQRST}$
$\mathfrak{UVWXYZ}$

$\mathfrak{abcdedghijklmnopqrstuvwxyz}$

$\mathbb{ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWX}$
$\mathbb{YZ}$1k

$\Sigma\ \Pi\ \coprod\ \cap\ \cup\ \int\ \lim$

Το template αυτών των σημειώσεων μπορείτε να βρείτε στον σύνδεσμο: https://afragos-math.github.io/files/latex/template-I.html (με διαφορετική γραμματοσειρά).

Πίνακας Περιεχομένων

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Βασικές έννοιες και ορισμοί

1.1 Μετρικοί χώροι

Σαφώς μία από από τις σημαντικότερες δομές που μπορεί να προσδοθεί σε έναν χώρο είναι αυτή της μετρικής. Η μετρική δίνει τη δυνατότητα μέτρισης αποστάσεων και της -τουλάχιστον σε ένα βαθμό- γεωμετρικής περιγραφής του χώρου.

Ένα από τα κύρια γεωμετρικά χαρακτηριστικά ενός χώρου που μπορούν να μελετηθούν μέσω μιας μετρικής είναι η έννοια του εσωτερικού ενός σχήματος. Επιπλέον, μέσω μετρικών είναι δυνατόν κανείς να περιγράψει με εύληπτο τρόπο έννοιες σύγκλισης και (κατά συνέπεια) προσέγγισης.

Ορισμός 1.1.1 (Μετρικοί χώροι)**.** *Έστω (X,ρ) ένα ζεύγος ενός συνόλου $X \neq \varnothing$ και μίας συνάρτησης $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$. Η ρ θα καλείται μετρική (και θα μετρά «απόσταση») εάν ικανοποιούνται οι ακόλουθες συνθήκες:*

i. Για κάθε $x,y \in X$ αληθεύει $\rho(x,y) \geqslant 0$. Μάλιστα $\rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.

ii. Για κάθε $x,y \in X$ έχουμε τη συμμετρία $\rho(x,y) = \rho(y,x)$.

iii. Για κάθε $x,y,z \in X$ ισχύει η τριγωνική ανισότητα $\rho(x,z) \leqslant \rho(x,y) + \rho(y,z)$.

Όλες αυτές οι ιδιότητες της μετρικής εκφράζουν κάποια γεωμετρική ιδέα:

- Η i. ουσιαστικά δείχνει ότι η απόσταση γίνεται φυσιολογικά, ώστε δεν υπάρχουν σημεία που μεν να συμπίπτουν αλλά να είναι διαφορετικά. Επιπλέον, ένα σημείο δεν απέχει απόσταση από τον εαυτό του.

- Η ii. δείχνει ότι δεν έχει σημασία ο τρόπος μέτρισης, όσον αφορά την κατεύθυνση με την οποία γίνεται.

- Η iii. εκφράζει το ανάλογο της ιδέας ότι η μικρότερη απόσταση δύο σημείων είναι «ευθύγραμμο τμήμα». Βέβαια εδώ αυτό που διατυπώνεται -σε γενικές γραμμές- είναι ότι δεν υπάρχει «τεθλασμένη γραμμή» που να μετρά απόσταση μικρότερη αυτής του «ευθυγράμμου τμήματος».

Με την μετρική μπορούμε να ορίσουμε τα ανοικτά σύνολα, και κατ' επέκταση το εσωτερικό των συνόλων. Εδώ να σημειώσουμε ότι αυτός ο ορισμός θα μπορούσε (στην περίπτωση ενός χώρου χωρίς μετρική δομή) να δοθεί αξιωματικά, όπως γίνεται στους τοπολογικούς χώρους. Παρόλα αυτά, η μετρική εξασφαλίζει έναν φυσιολογικό τρόπο ορισμού.

Πριν δούμε όμως τον ορισμό των ανοικτών συνόλων, ας δούμε πρώτα την έννοια της μπάλας.

Ορισμός 1.1.2 (Ανοικτές και κλειστές μπάλες). *Έστω (X,ρ) ένας μετρικός χώρος και $x_0 \in X$, $r>0$. Ορίζουμε:*

i. Ανοικτή μπάλα στο x_0 με ακτίνα r το σύνολο $S(x_0,r) = \{x \in X \mid \rho(x,x_0) < r\}$.

ii. Κλειστή μπάλα στο x_0 με ακτίνα r το σύνολο $B(x_0,r) = \{x \in X \mid \rho(x,x_0) \leqslant r\}$.

Με τις ανοικτές μπάλες μπορούμε να περιγράψουμε τα εσωτερικά των σχημάτων. Θα λέμε ότι ένα σημείο a ανήκει στο εσωτερικό ενός συνόλου $A \subseteq X$ εάν υπάρχει μία «περιοχή», δηλαδή μία μπάλα $S(a,r_a)$, ούτως ώστε $a \in S(a,r_a) \subseteq A$.

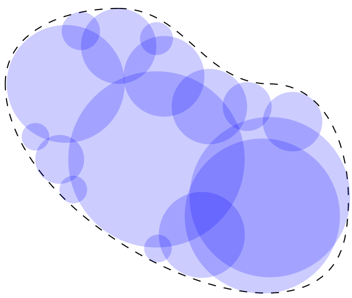
Ορισμός 1.1.3 (Εσωτερικά και ανοικτά σύνολα). *Έστω (X,ρ) ένας μετρικός χώρος, $A \subseteq X$ και $a \in A$.*

i. Λέμε ότι το a είναι εσωτερικό σημείο του A εάν υπάρχει μπάλα $S(a,r_a)$ ούτως ώστε $a \in S(a,r_a) \subseteq X$. Επιπλέον, ορίζουμε το εσωτερικό του A ως εξής:

$$A^\circ = \{x \in A \mid x \text{ εσωτερικό σημείο του } A\}$$

ii. Ένα σύνολο $G \subseteq X$ λέγεται ανοικτό εάν ταυτίζεται με το εσωτερικό του, δηλαδή αν $G = G^\circ$.

Η αντίστοιχη γεωμετρική εικόνα των ανοικτών συνόλων είναι η ακόλουθη:



Μερικές τετριμμένες περιπτώσεις ανοικτών συνόλων είναι οι διάφορες μπάλες $S(x,r)$ καθώς και το κενό σύνολο $\varnothing$.

Η ορολογία «ανοικτό» σύνολο ίσως αρχικά να μην βγάζει νόημα. Κανείς μπορεί να αναρωτηθεί τι χρειάζεται για να «κλείσει» ένα σύνολο. Την απάντηση θα δώσουμε παρακάτω. Πρώτα δίνουμε τον ορισμό του συνόρου.

Ορισμός 1.1.4 (Σύνορο ενός συνόλου). *Έστω (X,ρ) ένας μετρικός χώρος, $A \subseteq X$ και $x \in X$.*

i. Λέμε ότι το x είναι συνοριακό σημείο του A εάν κάθε μπάλα $S(x,r)$ τέμνει τόσο το A όσο και το συμπλήρωμά του $X \setminus A$.

ii. Ορίζουμε το σύνορο του A:

$$\partial A = \{x \in X \mid \text{ το } x \text{ είναι συνοριακό σημείο του } A\}$$

Το σύνορο όπως το ορίσαμε λειτουργεί ως «περίβλημα» για το σύνολο A, αφού «από την μία μεριά» περιέχει στοιχεία του A κι από την άλλη του $X \setminus A$.

Τώρα ένα ανοικτό σύνολο A δεν περιέχει κανένα σημείο του συνόρου του, εξ ορισμού του. Κατά συνέπεια, δεν έχει «περίγραμμα». Αυτή είναι η ιδέα και η λογική που χρησιμοποιούμε τον όρο «ανοικτό σύνολο». Για να κλείσουμε λοιπόν ένα σύνολο (που μπορεί να μην έχει σύνορο ή ένα τμήμα του συνόρου του), χρησιμοποιούμε την κλειστή θήκη.

Ορισμός 1.1.5 (Κλειστή θήκη και κλειστά σύνολα). *Έστω (X,ρ) ένας μετρικός χώρος και $K \subseteq X$.*

i. Ορίζουμε τη κλειστή θήκη του K:

$$\overline{K} = K \cup \partial K$$

ii. Λέμε ότι το K είναι κλειστό εάν $K = \overline{K}$.

Ίσως αυτός είναι ένας «ανορθόδοξος» τρόπος κανείς να ορίσει αυτές τις τοπολογικές έννοιες, θεωρούμε όμως ότι είναι λογικός. Αυτός είναι και ο λόγος που κάνουμε αυτήν την παρουσίαση, διότι κατά τ' άλλα αυτές οι έννοιες θα πρέπει να θεωρούνται γνωστές.

Πάντως για να μην ξεφύγουμε πολύ από τη συνηθισμένη παρουσίαση, ας παρατηρήσουμε το ακόλουθο:

Παρατήρηση 1.1.1. *Ένα σύνολο K είναι κλειστό εάν και μόνο αν το συμπλήρωμά του είναι ανοικτό. Αντίστοιχα, είναι ανοικτό εάν και μόνο αν το συμπλήρωμά του είναι κλειστό.*

Απόδειξη: Θα δείξουμε ότι ένα σύνολο K είναι κλειστό εάν και μόνο αν το συμπλήρωμά του είναι ανοικτό.

($\Rightarrow$) Για αυτήν την κατεύθυνση θα δείξουμε ότι αν $x \in X\backslash K$ τότε υπάρχει μπάλα $S(x,r_x) \subseteq X\backslash K$. Πράγματι, εφόσον το K είναι κλειστό, $K = K \cup \partial K$. Από τον ορισμό του συνόρου, στο $x \notin K$ υπάρχει μπάλα $S(x,r_x)$ ούτως ώστε $S(x,r_x) \cap K = \varnothing \Rightarrow S(x,r_x) \subseteq X\backslash K$.

($\Leftarrow$) Εάν το $X\backslash K$ είναι ανοικτό, τότε από τον ορισμό του συνόρου, $(X\backslash K) \cap \partial(X\backslash K) = \varnothing$. Εδώ κανείς αξίζει να παρατηρήσει ότι $\partial K = \partial(X\backslash K)$, και χρησιμοποιώντας τη σχέση αυτή να δει ότι $(X\backslash K) \cap \partial K = \varnothing \Rightarrow \partial K \subseteq K$. Δηλαδή $K = K \cup \partial K$, και κατά συνέπεια είναι κλειστό. $\square$

Παρατήρηση 1.1.2. *Έστω (X,ρ) ένας μετρικός χώρος και $x_0 \in X$, $r > 0$. Η κλειστή μπάλα $B(x_0,r)$ είναι κλειστό σύνολο.*

Απόδειξη: Χρησιμοποιώντας την Παρατήρηση 1.1.1, αρκεί να δείξουμε ότι το $X\backslash B(x_0,r)$ είναι ανοικτό.

Πράγματι, έστω $y \in X\backslash B(x_0,r)$, δηλαδή $\rho(x_0,y) > r$. Ορίζουμε $r' = \rho(x_0,y) - r > 0$ και παρατηρούμε ότι $S(y,r') \subseteq X\backslash B(x_0,r)$. Αυτό συμβαίνει διότι κάθε $x \in B(x_0,r) \cap S(y,r')$ ορίζει απόσταση (μέσω της τριγωνικής ανισότητας):

$$\rho(y,x) + \rho(x,x_0) \geqslant \rho(y,x_0)$$

αλλά από την άλλη $\rho(y,x) + \rho(x,x_0) < r' + r = \rho(x_0,y)$. Αυτό αποδεικνύει ότι $B(x_0,r) \cap S(y,r') = \varnothing \Rightarrow S(y,r') \subseteq X\backslash B(x_0,r)$. $\square$

Παρατήρηση 1.1.3. *Έστω (X,ρ) ένας μετρικός χώρος και $A \subseteq X$. Αληθεύει η σχέση:*

$$X\backslash A^\circ = \overline{X\backslash A}$$

Απόδειξη: ($\subseteq$) Το σύνολο $X\backslash(\overline{X\backslash A})$ είναι (εξ ορισμού του) ανοικτό και περιέχει σημεία του A. Κατά συνέπεια, από τον ορισμό του A°:

$$X\backslash(\overline{X\backslash A}) \subseteq A^\circ \Rightarrow \overline{X\backslash A} \supseteq X\backslash A^\circ$$

Παρατηρήστε ότι ένα ανοικτό υποσύνολο του A είναι στην ουσία τμήμα του εσωτερικού του A. Δηλαδή περιέχεται στο εσωτερικό A°.

($\supseteq$) Επειδή το A° είναι ανοικτό, $A^\circ \cap \partial A = \varnothing$, δηλαδή $\partial A \subseteq X\backslash A^\circ$. Παρατηρούμε επίσης ότι $X\backslash A \subseteq X\backslash A^\circ$, αφού εν γένει το A° είναι μικρότερο σύνολο από το A. Κατά συνέπεια:

$$\overline{X\backslash A} = (X\backslash A) \cup \partial(X\backslash A) = (X\backslash A) \cup \partial A \subseteq X\backslash A^\circ$$

$\square$

Όλες αυτές οι έννοιες είναι φυσιολογικές. Κάτι που δεν είναι όμως φυσιολογικό είναι το ακόλουθο:

Παρατήρηση 1.1.4. *Υπάρχει μετρικός χώρος (X,ρ) στον οποίον δεν αληθεύει η ισότητα:*

$$B(x_0,r) = \overline{S(x_0,r)}$$

για κάποια $x_0 \in X$, $r > 0$.

Απόδειξη: Έστω X ένα οποιοδήποτε μη κενό σύνολο με $\#X \geqslant 2$. Ορίζουμε τη μετρική:

$$\delta(x,y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases}$$

και για κάποιο $x_0 \in X$ θεωρούμε τη μπάλα $S(x_0,1)$. Η $S(x_0,1)$ είναι το μονοσύνολο $\{x_0\}$. Επίσης έχει σύνορο $\partial S(x_0,1) = \varnothing$, διότι η μπάλα $S(x_0,1)$ δεν τέμνει το $X \setminus S(x_0,r)$ - δηλαδή $\overline{S(x_0,1)} = \{x_0\} = S(x_0,1)$.

Από την άλλη, $B(x_0,1) = X$, αφού όλα τα σημεία του X απέχουν απόσταση το πολύ 1 από κάθε σημείο του X. Εφόσον $\#X \geqslant 2$, καταλήγουμε στο ότι $B(x_0,r) \neq \overline{S(x_0,r)}$.

$\square$

Επίσης, δεν είναι φυσιολογικό (διαισθητικά) το ακόλουθο:

Παρατήρηση 1.1.5. *Υπάρχει μετρικός χώρος (X,ρ) και σύνολο $A \subseteq X$ που είναι ταυτοχρόνως ανοικτό και κλειστό.*

Απόδειξη: Έστω ένα μη κενό σύνολο X και η μετρική:

$$\delta(x,y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases}$$

Είναι φανερό ότι τα μονοσύνολα $\{x\}$ είναι ανοικτά σύνολα, αφού $\{x\} = S(x,1/2)$. Επιπλέον, κάθε άλλο σύνολο A γράφεται ως ένωση μονοσυνόλων (άρα και μπαλών), και κατά συνέπεια είναι κι αυτό ανοικτό. Δηλαδή όλα τα σύνολα είναι ανοικτά. Η Πρόταση 1.1.1 μας δείχνει ότι, εκτός από ανοικτά, όλα τα σύνολα είναι και κλειστά.

$\square$

Η παραπάνω πρόταση εξασφαλίζει την ύπαρξη μίας νέας κατηγορίας συνόλων, των κλειστάνοικτων συνόλων. Δηλαδή συνόλων που είναι ταυτοχρόνως ανοικτά και κλειστά.

Εν τω μεταξύ ακόμη και σε πολύ φυσιολογικούς χώρους κανείς μπορεί να βρει κλειστάνοικτα σύνολα. Για παράδειγμα, στον $(\mathbb{R},\rho)$ με $\rho(x,y) = |x-y|$ το $\varnothing$ είναι κλειστάνοικτο σύνολο. Είδαμε ότι είναι ανοικτό προηγουμένως, κι επίσης είναι κλειστό διότι $\partial\varnothing = \varnothing$ και $\varnothing = \varnothing \cup \partial\varnothing$. Κατά συνέπεια (Πρόταση 1.1.1) και το $\mathbb{R}$ είναι κλειστάνοικτο σύνολο.

Αξίζει να παρατηρήσει κανείς ότι η παραπάνω επιχειρηματολογία εφαρμόζει σε οποιονδήποτε μετρικό χώρο (X,ρ). Κατά συνέπεια, τα $\varnothing, X$ θα είναι πάντοτε κλειστάνοικτα.

Μερικά παραδείγματα μετρικών χώρων ακολουθούν:

- Έστω X ένα μη κενό σύνολο και δ η μετρική:

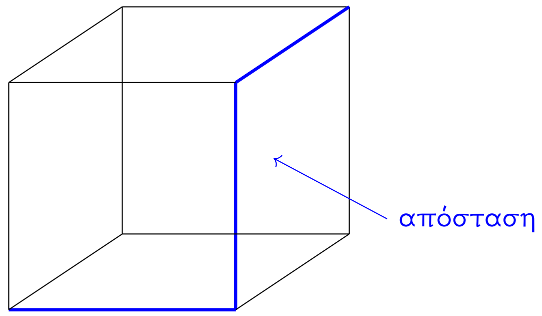
$$\delta(x,y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases}$$

  Ο χώρος (X,δ) είναι μετρικός χώρος. Η δ καλείται διακριτή μετρική.

- Έστω $\mathscr{H}^n = (\mathbb{R}^n, \rho_{\mathscr{H}^n})$ ο $n-$διάστατος κύβος του Hamming, όπου:

$$\rho_{\mathscr{H}^n}\big((x_1,\cdots,x_n),(y_1,\cdots,y_n)\big) = \#\{k \leqslant n \mid x_k \neq y_k\}$$

  Ο εν λόγω χώρος είναι μετρικός χώρος. Χρησιμοποιείται ιδιαιτέρως στην Αλγεβρική Θεωρία Κωδικών.



- Στον $\mathbb{R}^n$ ορίζουμε:

$$\rho\big((x_1,\cdots,x_n),(y_1,\cdots,y_n)\big)=\max\{|x_k-y_k|\mid k\leqslant n\}$$

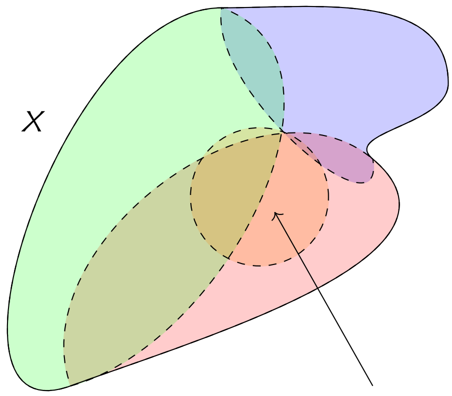
Ο χώρος $(\mathbb{R}^n,\rho)$ γίνεται μετρικός χώρος.

Μία ακόμη σημαντική έννοια στην οποία θα αναφερθούμε είναι αυτή των συμπαγών χώρων. Ένας μετρικός χώρος (X,ρ) θα λέγεται συμπαγής εάν υπάρχει πεπερασμένη ανοικτή κάλυψή του.

Ορισμός 1.1.6 (Συμπαγείς χώροι)**.** *Ένας μετρικός χώρος (X,ρ) θα λέγεται συμπαγής εάν για κάθε οικογένεια $\{U_i\}_{\imath\in I}$ ανοικτών συνόλων στον (X,ρ), υπάρχει πεπερασμένη υπο-οικογένεια $\{U_{i_k}\}_{k=1}^n$ ούτως ώστε*

$$X=\bigcup_{k=1}^n U_k$$

Κανείς έχοντας αυτήν την έννοια υπόψη μπορεί να ορίσει τα συμπαγή υποσύνολα, ως συμπαγείς χώροους / υποσύνολα του X. Αυτή η οπτική συνήθως δεν είναι πολύ βοηθητική για να καταλάβει κανείς την εικόνα ενός συμπαγούς συνόλου, γι' αυτό θα διατυπώσουμε την επόμενη παρατήρηση.



Παρατήρηση 1.1.6. *Έστω (X,ρ) ένας μετρικός χώρος και $K\subseteq X$. Το K είναι συμπαγές (δηλαδή ο χώρος $(K,\rho|_K)$ είναι συμπαγής) εάν και μόνο αν για κάθε οικογένεια $\{V_i\}_{\imath\in I}$ ανοικτών συνόλων στον (X,ρ), υπάρχει πεπερασμένη υπο-οικογένεια $\{V_{i_k}\}_{k=1}^n$ ούτως ώστε:*

$$K\subseteq\bigcup_{k=1}^n V_k$$

Απόδειξη: $(\Rightarrow)$ Έστω $\{V_i\}_{i\in I}$ ανοικτά στον X με:

$$K\subseteq\bigcup_{i\in I}V_i$$

Θεωρούμε $U_i = V_i \cap K$ και, λόγω της συμπάγειας του K, μία υπο-οικογένεια $\{U_{i_k}\}_{k=1}^n$ ανοικτών στο K που να αποτελεί κάλυψη του K. Αρκεί εδώ να θεωρήσουμε τα ανοικτά σύνολα V_{i_k} του X για τα οποία $U_{i_k} = V_{i_k} \cap K$.

($\Leftarrow$) Ας παρατηρήσουμε αρχικά ότι αν $B \subseteq K$ είναι ένα ανοικτό σύνολο στο K, τότε υπάρχει $A \subseteq X$ ανοικτό σύνολο στο X με $B = A \cap K$. Αυτό μπορεί να δικαιολογηθεί παίρνοντας τις μπάλες $S_K(x,r_x) \subseteq K$ που κατασκευάζουν το $B \subseteq K$ και θεωρώντας τις αντίστοιχες μπάλες $S_X(x,r_x) \subseteq X$ στο X. Τότε:

$$S_K(x,r_x) = S_X(x,r_x) \cap K \Rightarrow \bigcup_{x\in B} S_K(x,r_x) = K \cap \bigcup_{x\in B} S_X(x,r_x) \Rightarrow B = K \cap A$$

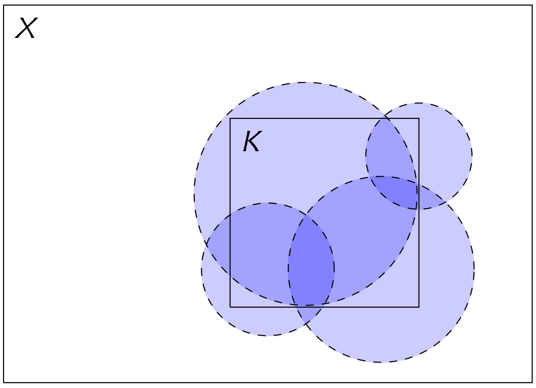
όπου $A = \bigcup_{x\in B} S_X(x,r_x)$.

Έτσι λοιπόν, αν $\{U_i\}_{i\in I}$ είναι μία ανοικτή κάλυψη του K από ανοικτά του K, υπάρχουν ανοικτά σύνολα V_i ώστε $U_i = V_i \cap X$ και (κατά συνέπεια):

$$K \subseteq \bigcup_{i\in I} V_i$$

Από την υπόθεση υπάρχει πεπερασμένη κάλυψη $\{V_{i_k}\}_{k=1}^n$, κι από την επιλογή των V_i η $\{U_{i_k}\}_{\kappa=1}^n$ είναι υποκάλυψη του K

□



Στη συνέχεια λοιπόν θα αναφερθούμε σε θέματα σύγκλισης. Η ύπαρξη μίας μετρικής σε έναν χώρο μας επιτρέπει γενικά να κάνουμε χρήσιμες προσεγγίσεις.

Ορισμός 1.1.7 (Σύγκλιση). *Έστω (X,ρ) ένας μετρικός χώρος και $(x_n)_{n=1}^\infty$ μία ακολουθία του X. Εάν υπάρχει $x \in X$ τέτοιο ώστε:*

$$\rho(x_n, x) \to 0$$

θα λέμε ότι η $(x_n)_{n=1}^\infty$ συγκλίνει στο x, και θα συμβολίζουμε $x_n \to x$.

Ο ορισμός της σύγκλισης στους μετρικούς χώρους μπορεί να μας δώσει αποτελέσματα που σχετίζονται με τη γεωμετρία (τοπολογία) του χώρου, κάτι που ίσως στην αρχή μπορεί να μην είναι φανερό.

Παρατήρηση 1.1.7. *Έστω (X,ρ) ένας μετρικός χώρος. Ένα σύνολο $K \subseteq X$ είναι κλειστό εάν και μόνο αν κάθε συγκλίνουσα ακολουθία $(y_n)_{n=1}^\infty$ του K συγκλίνει σε $y \in K$.*

Απόδειξη: ($\Rightarrow$) Εάν το σύνολο K είναι κλειστό και $y_n \to y \notin K$, γύρω από το y μπορούμε να θεωρήσουμε κατάλληλα μικρή μπάλα $S(y,r_y) \subseteq X \backslash K$. Εφόσον $\rho(y_n,y) \to 0$, τελικά όλοι οι όροι y_n βρίσκονται εντός της $S(y,r_y)$. Αυτό είναι άτοπο αφού $y_n \in K$, και κατά συνέπεια $y \in K$.

($\Leftarrow$) Υποθέτουμε προς άτοπο ότι το K δεν είναι κλειστό. Σ' αυτήν την περίπτωση υπάρχει $y \notin K$ τέτοιο ώστε για κάθε $r>0$, $S(y,r) \nsubseteq X\backslash K$, δηλαδή $S(y,r) \cap K \neq \varnothing$. Επιλέγουμε ακολουθία $(r_n)_{n=1}^\infty = (1/2^n)_{n=1}^\infty$ και σε κάθε $S(y,r_n) \cap K$ ένα στοιχείο y_n, οπότε κατασκευάζουμε ακολουθία $(y_n)_{n=1}^\infty$, που εξ ορισμού της συγκλίνει στο y. Από την υπόθεση αυτό είναι άτοπο, αφού τότε το όριο y θα έπρεπε να ανήκει στο K.

□

Εν τω μεταξύ η απόδειξη της παραπάνω παρατήρησης δείχνει κάτι αρκετά ουσιώδες, σχετικά με τη μορφή μίας κλειστής θήκης $\overline{K}$: αποτελείται από τα όρια όλων των συγκλινουσών ακολουθιών του K.

Παρατήρηση 1.1.8. *Έστω (X,ρ) ένας μετρικός χώρος και $K \subseteq X$. Το σύνολο $\overline{K}$ μπορεί να γραφεί ως:*

$$\overline{K} = \{\lim y_n \mid (y_n)_{n=1}^{\infty} \text{ συγκλίνουσα ακολουθία του } K\}$$

Απόδειξη: Πράγματι, γράφουμε $\overline{K} = K \cup \partial K$ και διακρύνουμε περιπτώσεις. Εάν $y \in K$, τότε η σταθερή ακολουθία $(y)_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνει στο y. Αν $y \in \partial K$, γύρω από αυτό μπορούν να βρεθούν μπάλες $S(y, 1/2^n)$ που έχουν μη κενή τομή με το K. Όπως και στην απόδειξη της Παρατήρησης 1.1.7, μπορεί να βρεθεί ακολουθία του K που να συγκλίνει στο y. Αυτά δείχνουν ότι:

$$\overline{K} \subseteq \{\lim y_n \mid (y_n)_{n=1}^{\infty} \text{ συγκλίνουσα ακολουθία του } K\}$$

Από την άλλη η Παρατήρηση 1.1.7 δείχνει και τον αντίστροφο εγκλεισμό:

$$\overline{K} \supseteq \{\lim y_n \mid (y_n)_{n=1}^{\infty} \text{ συγκλίνουσα ακολουθία του } K\}$$

□

Αυτή ουσιαστικά είναι η ιδέα του ορισμού του πυκνού συνόλου, που θα δούμε αργότερα. Εάν $\overline{K} = X$, τα στοιχεία του X θα προσεγγίζονται από στοιχεία του K, σύμφωνα με την παραπάνω παρατήρηση.

Αντίστοιχη της Παρατήρησης 1.1.7 για ανοικτά σύνολα είναι η ακόλουθη:

Παρατήρηση 1.1.9. *Έστω (X,ρ) ένας μετρικός χώρος. Ένα σύνολο $A \subseteq X$ είναι ανοικτό εάν και μόνο αν κάθε συγκλίνουσα ακολουθία $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ του X που συγκλίνει σε στοιχείο $a \in A$, είναι τελικά εντός του A.*

Απόδειξη: $(\Rightarrow)$ Αυτή η κατεύθυνση είναι κάπως άμεση, αφού μπορεί να βρεθεί μπάλα $S(a, r_a) \subseteq A$. Επειδή $x_n \to a$, οι x_n τελικά βρίσκονται στην $S(a, r_a)$, άρα στο A.

$(\Leftarrow)$ Ο απλούστερος τρόπος να γίνει αυτή η κατεύθυνση είναι μάλλον με άτοπο. Εάν το A δεν είναι ανοικτό, τότε υπάρχει $a \in A$ ούτως ώστε για κάθε $r > 0$, $S(a,r) \cap (X \backslash A) \neq \varnothing$. Δηλαδή, όπως έχουμε δει αρκετές φορές, επιλέγοντας ακτίνες $r_n = 1/2^n$ μπορούν να επιλεγούν $x_n \in S(a, r_n) \cap (X \backslash A)$ και να κατασκευαστεί ακολουθία $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ που συγκλίνει στο a, αλλά βρίσκεται συνεχώς εκτός του A. Αυτό είναι άτοπο.

□

Μέσω της σύγκλισης ακολουθιών είναι δυνατόν κανείς να εκφράσει ακόμη μία τοπολογική έννοια, τη συμπάγεια.

Παρατήρηση 1.1.10. *Ένας μετρικός χώρος (X,ρ) είναι συμπαγής εάν και μόνο αν κάθε ακολουθία $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ έχει συγκλίνουσα υπακολουθία.*

Απόδειξη: $(\Rightarrow)$ Ορίζουμε γι' αρχή τα σύνολα $A_n = \{x_m \mid m \geqslant n\}$ και παρατηρούμε ότι καμία πεπερασμένη τομή $\bigcap_{k=1}^{m} \overline{A_{n_k}}$ δεν είναι κενή, αφού $\bigcap_{k=1}^{m} \overline{A_{n_k}} \supseteq A_{n_m+1}$.

Ισχυριζόμαστε ότι $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{A_n} \neq \varnothing$: πράγματι, αν ήταν το κενό σύνολο, το:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} (X \backslash \overline{A_n})$$

θα κάλυπτε το X, από de Morgan. Από τη συμπάγεια του χώρου θα υπήρχε πεπερασμένη υποκάλυψη κι άρα πεπερασμένη τομή (ξανά με de Morgan). Αυτό είναι άτοπο.

Επιλέγουμε λοιπόν $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{A_n}$. Θα ισχυριστούμε επίσης ότι υπάρχει μια ακολουθία $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ η οποία συγκλίνει στο x. Πράγματι, εφόσον $x \in \overline{A_k}$ για όλα τα k, για κάθε μπάλα $S(x,r)$ έχουμε $S(x,r) \cap A_k \neq \varnothing$. Οπότε αν επιλεγούν ακτίνες $r_k = 1/2^k$ μπορούν να βρεθούν $x_{n_k} \in S(x,r) \cap A_k$ και κατά συνέπεια $x_{n_k} \to x$. Αποδείχθηκε λοιπόν ότι υπάρχει μία υπακολουθία, η $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$, η οποία συγκλίνει.

$(\Leftarrow)$ Αυτή η κατεύθυνση είναι περιέργως αρκετά περίπλοκη. Παραπέμπεστε στο [Βα] (Θεώρημα 6.2.4). Θα χρειαστούν έννοιες πληρότητας, τις οποίες εμείς αναφέρουμε παρακάτω.

□

Επιστρέφουμε τώρα στα πυκνά σύνολα. Θα λέμε ότι ένα σύνολο είναι πυκνό σε έναν χώρο εάν κάθε στοιχείο του χώρου μπορεί να προεγγιστεί με στοιχεία του συνόλου. Με βάση λοιπόν την Παρατήρηση 1.1.8, ο ακόλουθος ορισμός είναι λογικός.

Ορισμός 1.1.8 (Πυκνά σύνολα και διαχωρίσιμοι χώροι). *Έστω (X,ρ) ένας μετρικός χώρος και $D \subseteq X$ ένα σύνολο. Θα λέμε ότι το D είναι πυκνό εάν:*

$$\overline{D} = X$$

Επίσης, ο (X,ρ) θα λέγεται διαχωρίσιμος εάν υπάρχει αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολό του.

Ένα παράδειγμα ενός πυκνού συνόλου στον $(\mathbb{R},\rho)$, $\rho(x,y) = |x-y|$, είναι το $\mathbb{Q}$. Γνωρίζουμε -για παράδειγμα από τη δεκαδική αναπαράσταση ενός αριθμού- ότι κάθε πραγματικός αριθμός προσεγγίζεται από ρητούς.

Γενικά πάντως δεν είναι όλα τα πυκνά σύνολα τόσο «περίεργα» τοπολογικά. Υπάρχουν, για παράδειγμα, ανοικτά και πυκνά σύνολα στον $\mathbb{R}$: ένα τέτοιο σύνολο είναι το:

$$D = \bigcup_{n=1}^{\infty} S(q_n, 1/2^n)$$

όπου $(q_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι μία αρίθμηση των ρητών. Τα ανοικτά και πυκνά σύνολα είναι ενδιαφέροντα και έχουν αρκετές εφαρμογές, ιδίως μέσω του θεωρήματος του Baire που θα δούμε παρακάτω.

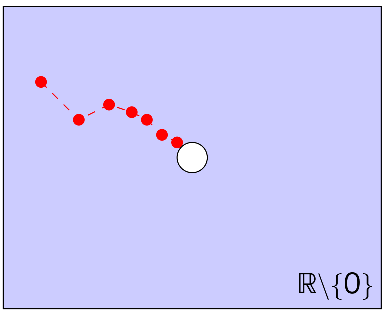
Πρώτα όμως θα εξετάσουμε έννοιες πληρότητας στους μετρικούς χώρους.

Ορισμός 1.1.9 (Βασικές ακολουθίες). *Έστω (X,ρ) ένας μετρικός χώρος και $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ μία ακολουθία του X. Θα λέμε ότι η $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι βασική εάν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n,m \geqslant n_0$ να έχουμε:*

$$\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$$

Δηλαδή, τελικά οι όροι της ακολουθίας έρχονται πολύ κοντά.

Το ότι οι όροι «πλησιάζουν» ο ένας τον άλλον δεν σημαίνει ότι η ακολουθία συγκλίνει. Στο $\mathbb{R}$ γνωρίζουμε ότι αυτό ισχύει, υπάρχει δηλαδή σημείο σύγκλισης, γενικά όμως δεν υπάρχει. Ο χώρος μπορεί να «έχει τρύπες». Εάν ο χώρος δεν έχει τρύπες, λέγεται πλήρης.



Ακόμη πάντως κι αν μία βασική ακολουθία δεν συγκλίνει, είναι πολύ κοντά στο να συγκλίνει, όπως δείχνει η ακόλουθη παρατήρηση.

Παρατήρηση 1.1.11. *Έστω (X,ρ) ένας μετρικός χώρος και $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ μία βασική ακολουθία. Εάν υπάρχει έστω και μία υπακολουθία $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ ούτως ώστε $x_{n_k} \to x \in X$, τότε $x_n \to x$.*

Απόδειξη: Πράγματι, αν δεν αληθεύει ότι $x_n \to x$, τότε υπάρχει ένα $r > 0$ ούτως ώστε τελικά $x_n \notin S(x,r)$. Αυτό είναι άτοπο, αφού στην $S(x,r)$ θα πρέπει (λόγω σύγκλισης) να βρίσκονται όροι x_{n_k}.

□

Ορισμός 1.1.10 (Πλήρεις χώροι). *Έστω (X,ρ) ένας μετρικός χώρος. Θα λέμε ότι ο (X,ρ) είνα πλήρης εάν κάθε βασική ακολουθία έχει όριο.*

Ακόμη πάντως κι αν ένας χώρος δεν είναι πλήρης, μπορεί να αποτελέσει πυκνό σύνολο για έναν πλήρη χώρο. Αυτό είναι ένα πολύ χρήσιμο θεώρημα.

Θεώρημα 1.1.1 (Πλήρωση μετρικού χώρου). *Έστω (X,ρ) ένας μετρικός χώρος. Υπάρχει χώρος πλήρης μετρικός χώρος $(\widetilde{X},\widetilde{\rho})$ ώστε ο X να εμφυτεύεται ισομετρικά σ' αυτόν (δηλαδή υπάρχει $i_X : X \hookrightarrow \widetilde{X}$ που να διατηρεί τις αποστάσεις - μια ισομετρία). Επιπλέον στον νέο χώρο το X είναι πυκνό, δηλαδή $\overline{i_X(X)} = \widetilde{X}$.*

Απόδειξη: Θεωρούμε στον χώρο:

$$X_0 = \left\{(x_n)_{n=1}^{\infty} \in X^{\mathbb{N}} \mid (x_n)_{n=1}^{\infty} \text{ βασική ακολουθία}\right\}$$

μία σχέση ισοδυναμίας «$\sim$», η οποία ορίζεται ως εξής: για κάθε δύο ακολουθίες $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ έχουμε:

$$(x_n)_{n=1}^{\infty} \sim (z_n)_{n=1}^{\infty} :\Leftrightarrow \rho(x_n, z_n) \to 0$$

Έχοντας αυτή τη σχέση ισοδυναμίας, ορίζουμε:

$$\widetilde{X} = {X_0}\big/{\sim}$$

Τις κλάσεις ισοδυναμίας θα τις συμβολίζουμε με $(x_n)_{n=1}^{\infty}/\sim$. Ο X μ' αυτόν τον τρόπο εμφυτεύεται στον $\widetilde{X}$, και μάλιστα κάθε $x \in X$ αντιστοιχεί στην κλάση $i_X(x) = (x, x, \cdots)/\sim$ της σταθερής ακολουθίας $(x, x, \cdots)$.

Χρειάζεται να κάνουμε τον $\widetilde{X}$ μετρικό χώρο, και μάλιστα με μία μετρική $\widetilde{\rho}$ που θα επεκτείνει την ρ (θα δούμε στη συνέχεια τι σημαίνει αυτό). Ορίζουμε $\widetilde{\rho}$:

$$\widetilde{\rho}\big((x_n)_{n=1}^{\infty}/\sim, (z_n)_{n=1}^{\infty}/\sim\big) := \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n)$$

και παρατηρούμε ότι η $\widetilde{\rho}$ ορίζεται καλά. Αυτό συμβαίνει διότι οι $(x_n)_{n=1}^{\infty}, (z_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι βασικές, και κατά συνέπεια:

$$\big|\rho(x_n, z_n) - \rho(x_m, z_m)\big| \leqslant \big|\rho(x_n, x_m) + \rho(x_m, z_n) - \rho(x_m, z_n) - \rho(z_n, z_m)\big| \leqslant \rho(x_n, x_m) + \rho(z_n, z_m) \to 0$$

(οπότε είναι βασική ακλουθία πραγματικών αριθμών). Ακόμη χρειάζεται να δειχθεί ότι οι αντιπρόσωποι δεν παίζουν ρόλο στον ορισμό της $\widetilde{\rho}$, αλλά αυτό δεν είναι δύσκολο κανείς να το ελέγξει.

Επιπλέον, η $\widetilde{\rho}$ επεκτείνει την ρ με την εξής έννοια: αν $\rho(x, z) = \lambda$, τότε:

$$\widetilde{\rho}\big(i_X(x), i_X(z)\big) = \lambda$$

Ακόμη ο $i_X(X)$ είναι πυκνός στον $\widetilde{X}$. Για να το δείξουμε αυτό, θα δείξουμε ότι για κάθε $(x_n)_{n=1}^{\infty}/\sim$ και $\varepsilon > 0$:

$$S_{\widetilde{X}}\big((x_n)_{n=1}^{\infty}/\sim, \varepsilon\big) \cap i_X(X) \neq \varnothing$$

Πράγματι, έστω $\varepsilon > 0$ και -λόγω του ότι η ακολουθία είναι βασική- ένας $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\rho(x_n, x_{n_0}) < \varepsilon/2$. Θεωρώντας την ακολουθία $(x_{n_0}, x_{n_0}, \cdots)$, παρατηρούμε ότι:

$$\widetilde{\rho}\big((x_n)_{n=1}^{\infty}/\sim, (x_{n_0}, \cdots)/\sim\big) = \lim_{n\to\infty} \rho\big(x_n, x_{n_0}\big) \leqslant \varepsilon/2 < \varepsilon$$

οπότε $(x_{n_0}, x_{n_0}, \cdots)/\sim \in S_{\widetilde{X}}\big((x_n)_{n=1}^{\infty}, \varepsilon\big) \cap i_X(X)$. Έτσι δείξαμε ότι $\overline{i_X(X)} = \widetilde{X}$.

Για να τελειώσουμε την απόδειξη, θα δείξουμε ότι ο $(\widetilde{X}, \widetilde{\rho})$ είναι πλήρης, χρησιμοποιώντας με ουσιώδη τρόπο την πληρότητα του $i_X(X)$.

Έστω λοιπόν $\left((x_n^m)_{n=1}^{\infty}/\sim\right)_{m=1}^{\infty}$ μία βασική ακολουθία του $\widetilde{X}$. Εφόσον είναι βασική, μπορεί να βρεθεί $m_1 \in \mathbb{N}$ ούτως ώστε για κάθε $m \geqslant m_1$:

$$\widetilde{\rho}\left((x_n^m)_{n=1}^{\infty}/\sim, (x_n^{m_1})_{n=1}^{\infty}/\sim\right) < 1/2^2$$

Επιπλέον, από την πυκνότητα του $i_X(X)$, μπορεί να βρεθεί $(z_1, z_1, \cdots)/\sim$ ούτως ώστε:

$$\widetilde{\rho}\left((x_n^{m_1})_{n=1}^{\infty}/\sim, (z_1, z_1, \cdots)/\sim\right) < 1/2^2$$

Τώρα από την τριγωνική ανισότητα και τις δύο προηγούμενες σχέσεις έπεται ότι:

$$\widetilde{\rho}\left((x_n^m)_{n=1}^{\infty}/\sim, (z_1, z_1, \cdots)/\sim\right) < 1/2^2 + 1/2^2 = 1/2$$

Μπορούμε λοιπόν να συνεχίσουμε με παρόμοιο τρόπο, βρίσκοντας $m_2 \in \mathbb{N}$ ούτως ώστε για κάθε $m \geqslant m_2$:

$$\widetilde{\rho}\left((x_n^m)_{n=1}^{\infty}/\sim, (x_n^{m_2})_{n=1}^{\infty}/\sim\right) < 1/2^3$$

κι από την πυκνότητα του $i_X(X)$, ένα $(z_2, z_2, \cdots)/\sim$ ούτως ώστε:

$$\widetilde{\rho}\left((x_n^m)_{n=1}^{\infty}/\sim, (z_2, z_2, \cdots)/\sim\right) < 1/2^3$$

Είναι φανερό τώρα -από τον ορισμό της ισοδυναμίας- ότι $(z_1, z_2, z_2 \cdots) \sim (z_2, z_2, z_2, \cdots)$, οπότε από τις δύο προηγούμενες σχέσεις με τριγωνική ανισότητα έπεται:

$$\widetilde{\rho}\left((x_n^m)_{n=1}^{\infty}/\sim, (z_1, z_2, \cdots)/\sim\right) < 1/2^3 + 1/2^3 = 1/2^2$$

Μετά απ' αυτό το βήμα κανείς μπορεί να συνεχίσει επαγωγικά. Ισχυριζόμαστε ότι το $(z_1, z_2, z_3, \cdots)/\sim = (z_n)_{n=1}^{\infty}/\sim$ είναι όριο της βασικής ακολουθίας $\left((x_n^m)_{n=1}^{\infty}/\sim\right)_{m=1}^{\infty}$. Πράγματι, εξ ορισμού της αυτή η ακολουθία έχει την ιδιότητα:

$$\widetilde{\rho}\left((x_n^m)_{n=1}^{\infty}/\sim, (z_n)_{n=1}^{\infty}/\sim\right) < 1/2^n$$

για κάθε n, καθώς το m μεγαλώνει. Κατά συνέπεια:

$$\lim_{m\to\infty} \widetilde{\rho}\left((x_n^m)_{n=1}^{\infty}/\sim, (z_n)_{n=1}^{\infty}/\sim\right) = 0 \Rightarrow (x_n^m)_{n=1}^{\infty}/\sim \to (z_n)_{n=1}^{\infty}/\sim$$

$\square$

Ένα σημαντικό αποτέλεσμα που θα δούμε -πριν το θεώρημα του Baire- είναι η αρχή του εγκυβωτισμού. Γι' αυτήν θα χρειαστούμε την έννοια της διαμέτρου.

Ορισμός 1.1.11 (Διάμετρος). *Έστω (X,ρ) ένας μετρικός χώρος και $A \subseteq X$. Ορίζουμε τη διάμετρο του A:*

$$\text{diam } A := \sup\{\rho(x,y) \mid x,y \in A\}$$

και λέμε ότι το A είναι φραγμένο εάν diam $A < \infty$.

Μπορούμε τώρα να διατυπώσουμε την αρχή του εγκυβωτισμού.

Πρόταση 1.1.1 (Αρχή του εγκυβωτισμού). *Έστω (X,ρ) ένας μετρικός χώρος. Ο (X,ρ) είναι πλήρης εάν και μόνο αν για κάθε φθίνουσα ακολουθία κλειστών συνόλων $(K_n)_{n=1}^{\infty}$ με* diam $K_n \to 0$ *υπάρχει $x \in X$ ώστε:*

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n = \{x\}$$

Απόδειξη: ($\Rightarrow$) Σε κάθε σύνολο K_n επιλέγουμε ένα στοιχείο x_n, και κατασκευάζουμε ακολουθία $(x_n)_{n=1}^{\infty}$.

Η ακολουθία αυτή είναι βασική ακολουθία για τον εξής λόγο: θεωρούμε $\varepsilon > 0$ και (εφόσον diam $K_n \to 0$) έναν δείκτη n_0 ούτως ώστε diam $K_{n_0} < \varepsilon$. Εξ ορισμού της διαμέτρου, για κάθε $n, m \geqslant n_0$, επειδή $x_n \in K_n \subseteq K_{n_0}$, $x_m \in K_m \subseteq K_{n_0}$, έχουμε $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$. Δηλαδή η $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι βασική ακολουθία.

Από την πληρότητα λοιπόν του χώρου έπεται ότι υπάρχει κάποιο $x \in X$ τέτοιο ώστε $x_n \to 0$. Ισχυριζόμαστε ότι $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$. Πράγματι, επειδή τα $X \backslash K_n$ είναι ανοικτά, το:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} (X \backslash K_n)$$

είναι ανοικτό. Από τους κανόνες de Morgan τώρα, το σύνολο:

$$X \backslash \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (X \backslash K_n) \right) = \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$$

είναι κλειστό. Οπότε, από την Παρατήρηση 1.1.7, $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$.

($\Leftarrow$) Έστω προς άτοπο ότι υπάρχει βασική ακολουθία $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ η οποία δεν συγκλίνει. Ορίζουμε:

$$K_n = \{x_m \mid m \geqslant n\}$$

και παρατηρούμε ότι αυτά είναι κλειστά σύνολα. Πράγματι, εάν $(x_{\sigma(k)})_{k=1}^{\infty}$ είναι μία ακολουθία του K_n (όπου $\sigma : \mathbb{N} \to \{n, n+1, \cdots\}$) η οποία συγκλίνει σε $x \in X$, υπάρχει περίπτωση είτε αυτή να είναι τελικά σταθερή, είτε να μην είναι.

Αν είναι τελικά σταθερή, τότε το όριό της (προφανώς) ανήκει στο K_n. Εάν δεν είναι, από την σ μπορούν να επιλεγούν όροι $\sigma(k)$ σε γνησίως αύξουσα σειρά και να κατασκευαστεί υπακολουθία $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ (σκεφτείτε ότι σε κάθε βήμα ψάχνουμε στους δακτυλίους $S(x, 1/2^{n-1}) \backslash S(x, 1/2^n)$ -δεν γίνεται συνεχώς οι δείκτες $\sigma(k)$ να μειώνονται στους δακτυλίους, ούτε να έχουν «περιοδικότητα»).

Η εν λόγω υπακολουθία θα συγκλίνει στο $x \in X$. Από την Παρατήρηση 1.1.11 η $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ δεν μπορεί να περιέχει καμία συγκλίνουσα υπακολουθία, οπότε αυτό το x δεν υφίσταται. Κατά συνέπεια, μόνο τελικά σταθερές συγκλίνουσες ακολουθίες υπάρχουν στα K_n.

Εφόσον τώρα η $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι βασική, για τα K_n έχουμε $\operatorname{diam} K_n \to 0$. Από την Πρόταση 1.1.1, υπάρχει $x \in X$ τέτοιο ώστε:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n = \{x\}$$

το οποίο είναι άτοπο: εφόσον $\operatorname{diam} K_n \to 0$, έχουμε $\rho(x_n, x) \to 0$, δηλαδή $x_n \to x$. Αυτό δεν αληθεύει εξ υποθέσεως.

□

Με αυτήν την πρόταση είμαστε έτοιμοι να αποδείξουμε το θεώρημα του Baire.

Θεώρημα 1.1.2 (Θεώρημα του Baire). *Έστω (X, ρ) ένας πλήρης μετρικός χώρος.*

i. Εάν $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι μία ακολουθία ανοικτών και πυκνών συνόλων του X, τότε το σύνολο:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

είναι πυκνό.

ii. Εάν $(K_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι μία ακολουθία κλειστών συνόλων ώστε $\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n = X$, τότε κάποιο από τα K_n έχει μη κενό εσωτερικό.

Απόδειξη: Για το i.: Εφόσον θέλουμε να δείξουμε ότι το $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ είναι πυκνό, στην πραγματικότητα θέλουμε να δείξουμε ότι κάθε στοιχείο $x \in X$ προσεγγίζεται από στοιχεία του $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$. Δηλαδή, θέλουμε να δείξουμε ότι για κάθε $x \in X$, $r > 0$:

$$S(x, r) \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \right) \neq \varnothing$$

Έστω λοιπόν $x_0 > 0$, $r_0 > 0$ και η αντίστοιχη μπάλα $S(x_0, r_0)$.

Η απόδειξη θα γίνει σε βήματα. Γι' αρχή, επειδή το A_1 είναι πυκνό, υπάρχει $x_1 \in S(x_0, r_0) \cap A_1$. Επειδή τα $S(x_0, r_0)$, A_1 είναι ανοικτά, υπάρχει μπάλα $S(x_1, r_1') \subseteq S(x_0, r_0) \cap A_1$, την οποία εμείς μπορούμε να μικρύνουμε, κατασκευάζοντας $B(x_1, r_1) \subseteq S(x_0, r_0) \cap A_1$. Μάλιστα μπορούμε να επιλέξουμε $r_1 \leqslant 1$.

Αντίστοιχα για την $S(x_1, r_1)$, μπορεί να βρεθεί $x_2 \in S(x_1, r_1) \cap A_2$ και $r_2 \leqslant 1/2$ με $B(x_2, r_2) \subseteq S(x_1, r_1) \cap A_2$.

Επαγωγικά τώρα, για την $S(x_n, r_n)$, μπορεί να βρεθεί $x_{n+1} \in S(x_n, r_n) \cap A_{n+1}$ και $r_n \leqslant 1/2^n$ με $B(x_{n+1}, r_{n+1}) \subseteq S(x_n, r_n) \cap A_{n+1}$. Μ' αυτόν τον τρόπο παίρνουμε μία φθίνουσα ακολουθία κλειστών μπαλών (άρα κλειστών συνόλων):

$$B(x_1, r_1) \supseteq B(x_2, r_2) \supseteq \cdots$$

των οποίων οι διάμετροι φθίνουν ($\operatorname{diam} B(x_n, r_n) = 2 \cdot 1/2^n \to 0$). Έτσι λοιπόν, σύμφωνα με την Πρόταση 1.1.1, υπάρχει $x \in X$ ούτως ώστε:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} B(x_n, r_n) = \{x\}$$

Δηλαδή το σύνολο:

$$S(x_0, r_0) \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \right) \supseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} B(x_n, r_n)$$

δεν είναι κενό. Αυτό αποδεικνύει τη ζητούμενη πυκνότητα.

Για το ii.: Το ii. είναι ουσιαστικά αποτέλεσμα του i. Γράφοντας $A_n = X \setminus K_n$, παρατηρούμε ότι, αν τα K_n έχουν κενό εσωτερικό:

$$\overline{A_n} = \overline{X \setminus K_n} = X \setminus K_n^{\circ} = X$$

Δηλαδή τα A_n είναι ανοικτά και πυκνά. Οπότε από το i., η τομή $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ είναι ανοικτό και πυκνό σύνολο, από το οποίο έπεται:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \neq \varnothing \Rightarrow X \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n \neq \varnothing$$

Αυτό είναι άτοπο.

□

Τέλος, για να κλείσουμε το κομμάτι των μετρικών χώρων, θα αναφερθούμε σε έννοιες συνέχειας. Στις πραγματικές συναρτήσεις λέγαμε ότι μία συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}, A \subseteq \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $a \in A$ εάν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ούτως ώστε για κάθε $x \in (a - \delta, a + \delta)$ να έχουμε $f\big((a - \delta, a + \delta)\big) \subseteq \big(f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon\big)$. Τώρα που διαθέτουμε απόσταση και σε γενικότερες περιπτώσεις, μπορούμε να δώσουμε τον αντίστοιχο γενικό ορισμό.

Ορισμός 1.1.12 (Συνέχεια)**.** *Έστω $(X, \rho), (Y, d)$ δύο μετρικοί χώροι και $f : X \to Y$. Θα λέμε ότι η f είναι συνεχής στο $x_0 \in X$ εάν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ούτως ώστε:*

$$f\big(S_X(x_0, \delta)\big) \subseteq S_Y\big(f(x_0), \varepsilon\big)$$

Τους δείκτες στις μπάλες τους βάζουμε για να ξεχωρίζουμε κάθε φορά σε ποιόν χώρο βρισκόμαστε.

Η συνέχεια, όπως αυτή εκφράζεται γενικά, μπορεί να περιγραφεί μέσω ακολουθιακής συνέχειας. Είναι ενδιαφέρον αποτέλεσμα, πόσο μάλλον επειδή ισχύει σε μετρικούς χώρους αλλά όχι σε τοπολογικούς χώρους γενικά - παραπέμπεστε στο [Φρ2] (Κεφάλαιο 8).

Πρόταση 1.1.2 (Αρχή της μεταφοράς)**.** *Έστω* (X,ρ), (Y,d) *δύο τοπολογικοί χώροι και* $f : X \to Y$ *μία συνάρτηση. Η* f *είναι συνεχής στο* $x \in X$ *εάν και μόνο αν για κάθε συγκλίνουσα ακολουθία* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *προς το* x, *η ακολουθία* $\big(f(x_n)\big)_{n=1}^{\infty}$ *είναι συγκλίνουσα προς το* $f(x)$.

$$x_n \to x \Rightarrow f(x_n) \to f(x)$$

Απόδειξη: ($\Rightarrow$) Έστω $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ μία ακολουθία του X με $x_n \to x$. Έστω $\varepsilon > 0$ και $\delta > 0$ τέτοιο ώστε (λόγω της συνέχειας της f):

$$f\big(S_X(x,\delta)\big) \subseteq S_Y\big(f(x),\varepsilon\big)$$

Εάν τώρα $x_n \to x$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για κάθε $n \geqslant n_0$ να έχουμε:

$$x_n \in S_X(x,\delta)$$

και κατά συνέπεια $f(x_n) \in S_Y\big(f(x),\varepsilon\big)$. Δηλαδή $\rho\big(f(x_n), f(x)\big) < \varepsilon$ κι άρα $f(x_n) \to f(x)$.

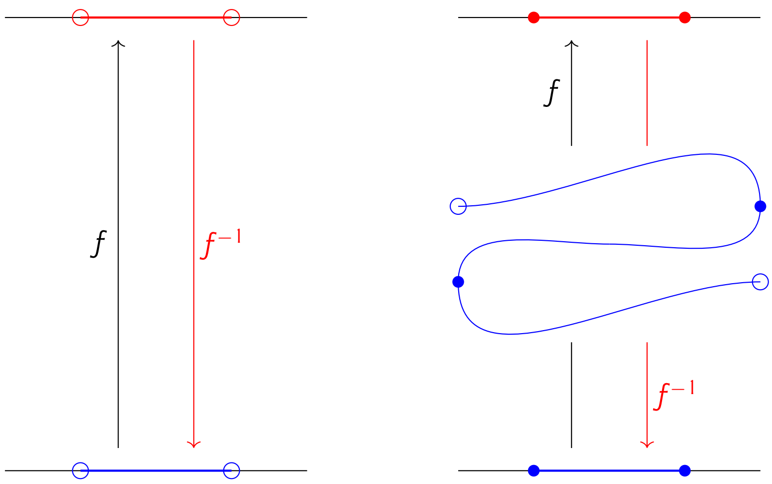
($\Leftarrow$) Προς άτοπο υποθέτουμε ότι η f δεν είναι συνεχής στο x. Σ' αυτήν την περίπτωση, υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε για κάθε $\delta > 0$:

$$f\big(S_X(x,\delta)\big) \not\subseteq S_Y\big(f(x),\varepsilon\big) \Rightarrow f\big(S_X(x,\delta)\big) \setminus S_Y\big(f(x),\varepsilon\big) \neq \varnothing$$

Θεωρώντας ακτίνες $(\delta_n)_{n=1}^{\infty} = (1/2^n)_{n=1}^{\infty}$, μπορούν να επιλεγούν στοιχεία $x_n \in S_X(x,\delta_n)$ με:

$$f(x_n) \in f\big(S_X(x,\delta_n)\big) \setminus S_Y\big(f(x),\varepsilon\big)$$

οπότε $x_n \to x$ και $f(x_n) \not\to f(x)$ (αφού $\rho\big(f(x_n), f(x)\big) \geqslant \varepsilon$). Αυτό είναι άτοπο εξ υποθέσεως. $\square$



Είναι χρήσιμο κανείς να δει την συνέχεια και κάπως τοπολογικά, χρησιμοποιώντας δηλαδή χαρακτηρισμούς με ανοικτά / κλειστά σύνολα. Θα δούμε ότι οι αντίστροφες εικόνες ανοικτών συνόλων είναι ανοικτά σύνολα, κι αντίστοιχα οι αντίστροφες εικόνες κλειστών συνόλων είναι κλειστά σύνολα, εάν και μόνο αν η απεικόνιση είναι συνεχής.

Αυτό βέβαια δεν σημαίνει ότι (λόγου χάρη) ένα ανοικτό δεν μπορεί να απεικονιστεί σε ένα κλειστό σύνολο. Στο δεύτερο σχήμα, το ανοικτό (τοπολογικά) μπλε ευθύγραμμο τμήμα μπορεί να «διπλώσει» με συνεχή τρόπο και να καταλήξει στο κλειστό κόκκινο ευθύγραμμο τμήμα. Αν όμως «διπλώσουμε» με ανάλογο τρόπο όλον τον κάτω χώρο προς τον πάνω χώρο, μπορούμε έπειτα να αναρρωτηθούμε ποιά σημεία του πρώτου χώρου έπεσαν πάνω στο κόκκινο. Οπότε γυρνώντας αντίστροφα, παίρνουμε το κλειστό (τοπολογικά) μπλε ευθύγραμμο τμήμα, κι όχι το αντίστοιχο ανοικτό.

Για να πειστείτε, μπορείτε να ζωγραφίσετε μερικές γραφικές παραστάσεις.

Πρόταση 1.1.3. *Έστω (X,ρ), (Y,d) δύο τοπολογικοί χώροι και $f: X \to Y$ μία συνάρτηση. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

i. Η f είναι συνεχής.

ii. Εάν το $A \subseteq Y$ είναι ανοικτό, τότε το $f^{-1}(A) \subseteq X$ είναι ανοικτό.

iii. Εάν το $K \subseteq Y$ είναι κλειστό, τότε το $f^{-1}(K) \subseteq X$ είναι κλειστό.

Απόδειξη: (i. $\Rightarrow$ ii.) Έστω $a \in f^{-1}(A)$ (αν δεν υπάρχει, η περίπτωση είναι τετριμμένη -ενδέχεται να μην εξετάζουμε τετριμμένες περιπτώσεις αρκετές φορές). Εφόσον η f είναι συνεχής, για κάθε $\varepsilon > 0$ μπορεί να βρεθεί $\delta > 0$ με:

$$f(S_X(a,\delta)) \subseteq S_Y(f(a),\varepsilon)$$

κι επειδή το A είναι ανοικτό, αν μικρύνουμε αρκετά το ε:

$$f(S_X(a,\delta)) \subseteq S_Y(f(a),\varepsilon) \subseteq A$$

Αυτό δείχνει ότι $S_X(a,\delta) \subseteq f^{-1}(A)$ (θυμηθείτε από τη συνολοθεωρία ότι $\Sigma \subseteq f^{-1} \circ f(\Sigma)$), επομένως το $f^{-1}(A)$ είναι ανοικτό.

(ii. $\Rightarrow$ iii.) Έστω $K \subseteq Y$ ένα κλειστό σύνολο. Το $Y \backslash K$ είναι ανοικτό σύνολο, οπότε από το ii. (και την «καλή συμπεριφορά» των αντιστρόφων εικόνων στις διαφορές) έπεται το συμπέρασμα.

(iii. $\Rightarrow$ i.) Έστω $x \in X$ και $\varepsilon > 0$. Θεωρούμε το κλειστό σύνολο $Y \backslash S_Y(f(x),\varepsilon)$ κι από το iii. το:

$$f^{-1}(Y \backslash S_Y(f(x),\varepsilon)) = X \backslash f^{-1}(S_Y(f(x),\varepsilon))$$

είναι κλειστό, δηλαδή το $f^{-1}(S_Y(f(x),\varepsilon))$ είναι ανοικτό. Μάλιστα $x \in f^{-1}(S_Y(f(x),\varepsilon))$ (διότι $f(x) \in S_Y(f(x),\varepsilon)$).

Επιλέγουμε λοιπόν ανοικτή μπάλα $S_X(x,\delta) \subseteq f^{-1}(S_Y(f(x),\varepsilon))$ και παρατηρούμε τότε ότι:

$$f(S_X(x,\delta)) \subseteq S_Y(f(x),\varepsilon)$$

οπότε η f είναι συνεχής (θυμηθείτε από τη συνολοθεωρία ότι $f \circ f^{-1}(\Sigma) \subseteq \Sigma$).

□

Η παραπάνω πρόταση μας επιτρέπει να μεταφέρουμε (κατά κάποιον τρόπο) την τοπολογική δομή ενός χώρου Y σε έναν άλλον χώρο X: αρκεί να βρεθεί συνεχής συνάρτηση $f: X \to Y$, η οποία να είναι αμφιμονοσήμαντη. Σ' αυτήν την ιδέα θα επεκταθούμε παρακάτω, προς το παρόν θα επανέλθουμε σε έννοιες συνέχειας για να μην χάσουμε τη ροή μας.

Μία ισχυρότερη έννοια συνέχειας είναι η λεγόμενη ομοιόμορφη συνέχεια. Στην ομοιόμορφη συνέχεια απαιτούμε οι τιμές μίας συνάρτησης να είναι περιορισμένες σε ένα μικρό 2ε διάστημα οποτεδήποτε την μελετάμε σε διάστημα μήκους 2δ. Δηλαδή, ομοιόμορφα στο πεδίο ορισμού, ένα διάστημα μήκους 2δ δίνει τιμές (μέσω της συνάρτησης) που είναι περιορισμένες σε 2ε διάστημα. Γενικότερα στους μετρικούς χώρους τα διαστήματα αντικαθίστανται με μπάλες.

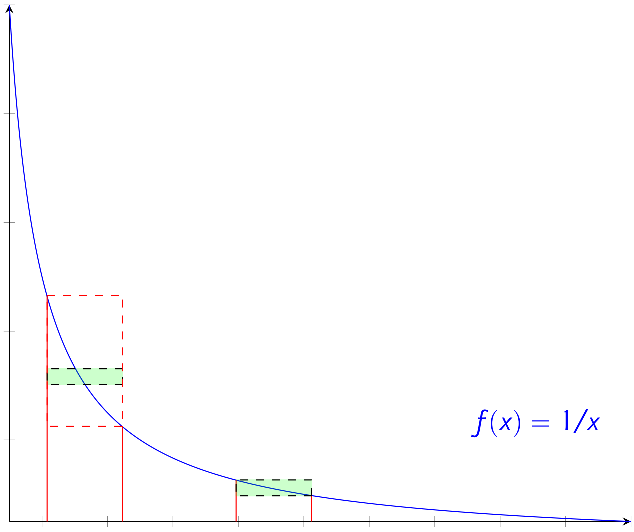
Ορισμός 1.1.13 (Ομοιόμορφη συνέχεια)**.** *Έστω (X,ρ), (Y,d) δύο μετρικοί χώροι και $f: X \to Y$ μία συνάρτηση. Θα λέμε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής εάν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ούτως ώστε για κάθε μπάλα $S_X(x,\delta)$ να έχουμε:*

$$f(S_X(x,\delta)) \subseteq S_Y(f(x),\varepsilon)$$

Διαφορετικά κανείς μπορεί να ορίσει την ομοιόμορφη συνέχεια ως εξής: για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε για κάθε $x,z \in X$ με $\rho(x,z) < \delta$:

$$d(f(x),f(z)) < \varepsilon$$

Κάθε ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση, εξ ορισμού της, είναι συνεχής. Το αντίθετο δεν συμβαίνει γενικά: μία πραγματική συνάρτηση που δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής αλλά είναι συνεχής, είναι η $1/(\cdot)$.



Για την ομοιόμορφη συνέχεια υπάρχει χαρακτηρισμός αντίστοιχος της Πρότασης 1.1.2, δηλαδή μέσω ακολουθιών.

Πρόταση 1.1.4. *Έστω (X,ρ), (Y,d) ένας μετρικός χώρος και $f : X \to Y$ μία συνάρτηση. Η f είναι ομοιόμορφα συνεχής εάν και μόνο αν για κάθε δύο ακολουθίες $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ του X με $\rho(x_n, z_n) \to 0$, έχουμε $d(f(x_n), f(z_n)) \to 0$.*

Απόδειξη: $(\Rightarrow)$ Θεωρούμε δύο ακολουθίες $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ του X με $\rho(x_n, z_n) \to 0$ κι ένα $\varepsilon > 0$. Μέσω της ομοιόμορφης συνέχειας της f είναι δυνατόν να βρεθεί $\delta > 0$ ούτως ώστε:

$$d\big(f(x), f(z)\big) < \varepsilon$$

για κάθε $x, z \in X$ με $\rho(x,z) < \delta$. Επομένως, επιλέγοντας $n_0 \in \mathbb{N}$ αρκετά μεγάλο ώστε $\rho(x_n, z_n) < \delta$ για κάθε $n \geqslant n_0$, έπεται ότι:

$$d\big(f(x_n), f(z_n)\big) < \varepsilon$$

$(\Leftarrow)$ Όπως συνηθίζουμε με τέτοιου είδους προτάσεις, θα δουλέψουμε με άτοπο. Εάν η f δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής, θα υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε για κάθε $\delta > 0$ υπάρχουν $x, z \in X$, $\rho(x,z) < \delta$ με $d\big(f(x), f(z)\big) \geqslant \varepsilon$.

Επιλέγοντας ακολουθία $(\delta_n)_{n=1}^{\infty} = (1/2^n)_{n=1}^{\infty}$, μπορούμε κάθε φορά να βρίσκουμε στοιχεία $x_n, z_n \in X$ με την ιδιότητα των x, z που αναφέραμε προηγουμένως. Κατά συνέπεια, κατασκευάζουμε δύο ακολουθίες $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ του X με $\rho(x_n, z_n) \to 0$ και:

$$d\big(f(x_n), f(z_n)\big) \geqslant \varepsilon$$

Αυτό είναι άτοπο, εξ υποθέσεως.

□

Η παραπάνω πρόταση εκφράζει (μεταξύ άλλων) μία πολύ σημαντική ιδιότητα των ομοιόμορφα συνεχών συναρτήσεων: οι ομοιόμορφα συνεχείς απεικονίσεις στέλνουν βασικές ακολουθίες σε βασικές ακολουθίες.

Επιστρέφοντας στην Πρόταση 1.1.3, είναι δυνατόν κανείς να έχει κάποια «ταύτιση» στην τοπολογική δομή δύο χώρων (X,ρ), (Y,d) εάν υπάρχει $f : X \to Y$ αμφιμονοσήμαντη και αμφισυνεχής. Η συνέχεια εξασφαλίζει ότι ανοικτά σύνολα του Y μεταφέρονται σε ανοικτά του X, η αντίστροφη συνέχεια ότι ανοικτά σύνολα του X μεταφέρονται σε ανοικτά του Y, και το αμφιμονοσήμαντο ότι κανένα από αυτά δεν «ξεχνιέται» στη μετάβαση.

Είναι επίσης σημαντικό η μεταφορά των ανοικτών συνόλων να γίνει από τις f, f^{-1} κι όχι από την f και κάποια άλλη g -μ' αυτόν τον τρόπο είναι δυνατόν να γίνει κάποια «ταύτιση», διαφορετικά ένα ανοικτό σύνολο μπορεί να μεταφερόταν σε ένα ανοικτό και να μην επέστρεφε στο ίδιο ανοικτό. Δίνουμε λοιπόν τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 1.1.14 (Ομοιομορφισμοί). *Έστω (X,ρ), (Y,d) δύο μετρικοί χώροι. Θα λέμε ότι οι χώροι είναι ομοιομορφικοί εάν υπάρχει ομοιομορφισμός μεταξύ τους. Δηλαδή αν υπάρχει $f : X \to Y$ η οποία είναι αμφιμονοσήμαντη και αμφισυνεχής. Συμβολίζουμε σ' αυτήν την περίπτωση $(X,\rho) \simeq (Y,d)$.*

Κάτι πολύ χαρακτηριστικό στους ομοιομορφισμούς είναι το ακόλουθο, που προκύπτει άμεσα από την Πρόταση 1.1.2.

Παρατήρηση 1.1.12. *Έστω (X,ρ), (Y,d) δύο μετρικοί χώροι και $f : X \to Y$ μία συνάρτηση. Τα ακόλουθα ισοδυναμούν:*

i. Η f είναι ομοιομορφισμός.

ii. Για κάθε $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ ακολουθία του X έχουμε $x_n \to x \Leftrightarrow f(x_n) \to f(x)$.

Απόδειξη: Και τα δύο είναι άμεση συνέπεια της Πρότασης 1.1.2.

□

Στην ειδική περίπτωση δύο ομοιομορφικών χώρων $(X,\rho) \simeq (X,d)$ με ταυτοτικό ομοιομορφισμό, λέμε ότι οι μετρικές ρ, d είναι ισοδύναμες.

Ορισμός 1.1.15 (Ισοδύναμες μετρικές). *Δύο μετρικές ρ, d σε έναν χώρο X είναι ισοδύναμες εάν:*

$$\lim_{n\to\infty}^{(X,\rho)} x_n = x \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}^{(X,d)} x_n = x$$

για κάθε ακολουθία $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ του X.

1.2 Χώροι με νόρμα

Εάν κανείς δεν διαπραγματεύεται απλώς σύνολα αλλά γραμμικούς (διανυσματικούς) χώρους, ενδέχεται μία επιπλέον «μετρική δομή» να μπορεί να προσδοθεί, υπό τη μορφή μέτρισης μέτρων διανυσμάτων.

Ορισμός 1.2.1 (Χώροι με νόρμα). *Έστω $(X,+,\cdot)$ ένας $\mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}-$διανυσματικός χώρος και $||\cdot|| : X \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση. Το ζεύγος $(X, ||\cdot||)$ θα λέγεται χώρος με νόρμα εάν η $||\cdot||$ είναι νόρμα, δηλαδή αν ικανοποιούνται οι ακόλουθες συνθήκες:*

i. Για κάθε $x \in X$, $||x|| \geqslant 0$. Μάλιστα $||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

ii. Για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$, $||\lambda x|| = |\lambda| \cdot ||x||$.

iii. Για κάθε $x,y \in X$ αληθεύει η τριγωνική ανισότητα $||x+y|| \leqslant ||x|| + ||y||$.

Έχοντας κανείς μία τέτοια δομή -εάν δηλαδή μπορεί να μετρά μέτρα διανυσμάτων- τότε έχει και μετρική δομή. Ειδικότερα:

Παρατήρηση 1.2.1. *Έστω $(X, ||\cdot||)$ ένας χώρος με νόρμα. Η συνάρτηση $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$ με τύπο:*

$$\rho(x,y) = ||x-y||$$

είναι μετρική, και κατά συνέπεια στον X μπορεί να προσδοθεί μετρική δομή.

Έχοντας τώρα μετρική δομή, μπορούμε να διατυπώσουμε το ακόλουθο:

Παρατήρηση 1.2.2. *Σε κάθε $(X, ||\cdot||)$ χώρο με νόρμα η $||\cdot||$ είναι συνεχής. Δηλαδή αν $x \in X$, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε για κάθε $y \in X$ με $||x - y|| < \delta$ να έχουμε $|||x|| - ||y||| < \varepsilon$. Ισοδύναμα, από την Πρόταση 1.1.2, για κάθε ακολουθία $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ αληθεύει η συνεπαγωγή:*

$$x_n \to x \Rightarrow ||x_n|| \to ||x||$$

Απόδειξη: Εάν $x_n \to x$, τότε εξ ορισμού της επαγόμενης μετρικής, $||x_n - x|| \to 0$. Τώρα παρατηρούμε ότι $x_n = x_n - x + x$, οπότε από την τριγωνική ανισότητα:

$$||x_n|| \leqslant ||x_n - x|| + ||x|| \Rightarrow ||x_n|| - ||x|| \leqslant ||x_n - x|| \to 0$$

Δηλαδή $||x_n|| \to ||x||$.

□

Με παρόμοιο τρόπο κανείς μπορεί να δείξει ότι οι πράξεις $+, \cdot$ του γραμμικού χώρου είναι συνεχείς, εμείς όμως δεν θα το δείξουμε.

Αυτό πάντως που είναι ενδιαφέρον είναι ότι η επαγόμενη αυτή μετρική δομή είναι περισσότερο «φυσιολογική» από μία τυχούσα μετρική. Για να το δούμε αυτό, πρώτα αντιδιαστέλλουμε το επόμενο αποτέλεσμα με την Παρατήρηση 1.1.4.

Παρατήρηση 1.2.3. *Έστω $(X, ||\cdot||)$ ένας χώρος με νόρμα. Αληθεύει ότι:*

$$B(x_0, r) = \overline{S(x_0, r)}$$

για κάθε $x_0 \in X$, $r > 0$.

Απόδειξη: ($\supseteq$) Κατ' αρχάς ο εγκλεισμός $B(x_0, r) \supseteq \overline{S(x_0, r)}$ αληθεύει, αφού (για παράδειγμα) για τα συμπληρώματα ισχύει ο αντίστροφος εγκλεισμός (επίσης, θυμηθείτε την Παρατήρηση 1.1.3).

($\subseteq$) Για τον άλλον εγκλεισμό θα δείξουμε (κι αυτό αρκεί) ότι για κάθε $x \in B(x_0, r)$ με $||x - x_0|| = r$ υπάρχει ακολουθία του $S(x_0, r)$ που το πρεσεγγίζει. Οπότε το ζητούμενο θα προκύψει από την Παρατήρηση 1.1.8.

Σε γενικές γραμμές αυτό που θα κάνουμε είναι το εξής: στο ευθύγραμμο τμήμα μεταξύ των x, x_0 θα επιλέξουμε ακολουθία σημείων του ευθυγράμμου τμήματος που θα πλησιάζει το x. Δείχνοντας ότι αυτή η ακολουθία είναι ακολουθία του $S(x_0, r)$, θα έχουμε δείξει το ζητούμενο.

Έστω λοιπόν $\mathfrak{s} = \text{span}_{[0,1]}\{x_0, x\} = \{tx_0 + (1-t)x \mid t \in [0,1]\}$ και μία ακολουθία $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ του $\mathfrak{s}$ με:

$$x_n = (1 - 1/n) \cdot x + 1/n \cdot x_0$$

ισχυριζόμαστε ότι $x_n \to x$. Πράγματι, παρατηρούμε ότι $x_n - x = 1/n \cdot (x_0 - x)$ κι επιπλέον:

$$||1/n \cdot (x_0 - x)|| = 1/n \cdot ||x_0 - x|| = 1/n \cdot r \to 0$$

Επομένως $x_n - x \to 0 \Rightarrow x_n \to x$.

Η ακολουθία $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι ακολουθία του $S(x_0, r)$. Πράγματι, παρατηρούμε ότι $x_n - x_0 = (1 - 1/n) \cdot (x - x_0)$ κι άρα:

$$||x_n - x_0|| = ||(1 - 1/n) \cdot (x_n - x_0)|| = (1 - 1/n) \cdot ||x - x_0|| = (1 - 1/n) \cdot r < r$$

Δηλαδή $x_n \in S(x_0, r)$.

□

Έπειτα θα αντιδιαστείλουμε το επόμενο αποτέλεσμα με την Παρατήρηση 1.1.5.

Παρατήρηση 1.2.4. *Έστω $(X, ||\cdot||)$ ένας χώρος με νόρμα. Ο χώρος X είναι συνεκτικός, δηλαδή δεν υπάρχουν δύο ανοικτά, μη κενά, ξένα σύνολα A, B τέτοια ώστε $X = A \cup B$. Επομένως τα μόνα κλειστάνοικτα σύνολα στον X είναι τα $\varnothing$, X.*

Απόδειξη: Ας υποθέσουμε προς άτοπο ότι τέτοια A, B υπάρχουν, καθώς και $a \in A$, $b \in B$. Ορίζουμε $\mathfrak{s}_{a,b} = \text{span}_{[0,1]}\{a, b\} = \{ta + (1-t)b \mid t \in [0,1]\}$ και θεωρούμε τη συνάρτηση $h : \mathfrak{s}_{a,b} \to [0,1]$ με τύπο:

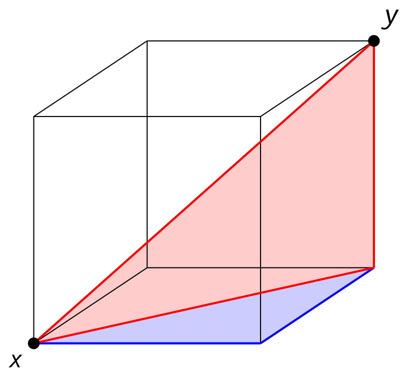
$$\mathfrak{s}_{a,b} \ni s = t_s a + (1 - t_s) b \mapsto t_s \in [0,1]$$

Η h είναι ομοιομορφισμός μεταξύ των $(\mathfrak{s}_{a,b}, ||\cdot - \cdot|||_{\mathfrak{s}_{a,b}})$ και $([0,1], |\cdot - \cdot|)$ (η $||\cdot - \cdot|||_{\mathfrak{s}_{a,b}}$ είναι η μετρική που επάγεται από τη νόρμα, αν περιοριστεί στο ευθύγραμμο τμήμα).

Επομένως, αν $\Gamma = h(A \cap \mathscr{S}_{a,b})$, $\Delta = h(B \cap \mathscr{S}_{a,b})$, τα Γ, Δ θα είναι ανοικτά, μη κενά, ξένα υποσύνολα του $[0,1]$ που το διαμερίζουν. Αυτό είναι αδύνατον, αφού κάθε υποδιάστημα του $\mathbb{R}$ είναι συνεκτικό. Τον τελευταίο ισχυρισμό μπορείτε να επιχειρήσετε να τον αποδείξετε, ή να ανατρέξετε στο [Φρ2] (Λήμμα 17.1).

□

Οι χώροι με νόρμα προέκυψαν φυσιολογικά από τη μελέτη των ευκλειδείων χώρων. Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι κάθε χώρος $\mathbb{R}^n$ εφοδιάζεται με (διάφορες) νόρμες, εκ των οποίων η μία καθορίζει τη συνήθη απόσταση.



Ας ξεκινήσουμε με τη συνήθη απόσταση. Στους $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ οι συνήθεις αποστάσεις είναι $\rho(x,y) = |x-y|$ και $\rho\big((x_1,x_2),(y_1,y_2)\big) = \sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}$, εκ των οποίων η δεύτερη δικαιολογείται από το Πυθαγόρειο θεώρημα. Στον $\mathbb{R}^3$ απόσταση μπορεί να οριστεί με ανάλογο τρόπο, χρησιμοποιώντας δύο φορές το Πυθαγόρειο θεώρημα. Για παράδειγμα, εάν θέλουμε να μετρήσουμε την απόσταση των x και y στο παραπάνω σχήμα, θα εφαρμόσουμε δύο φορές το Πυθαγόρειο θεώρημα, στα μπλε και κόκκινα τρίγωνα.

$$\rho\big((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)\big) = \sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+(x_3-y_3)^2}$$

Γενικά λοιπόν στον $\mathbb{R}^n$ είναι φυσιολογικό να θέλουμε να ορίσουμε μετρική:

$$\rho\big((x_1,\cdots,x_n),(y_1,\cdots,y_n)\big) = \left(\sum_{k=1}^{n}(x_k-y_k)^2\right)^{1/2}$$

και κατά συνέπεια, τη νόρμα που συμφωνεί με αυτήν την μετρική:

$$||(x_1,\cdots,x_n)|| = \rho\big((x_1,\cdots,x_n),(0,\cdots,0)\big) = \left(\sum_{k=1}^{n}x_k^2\right)^{1/2}$$

Το να επαληθεύσουμε πάντως ότι η εν λόγω νόρμα πράγματι είναι νόρμα χρειάζεται λίγη δουλεία, και κυρίως την ανισότητα Cauchy-Schwarz. Εμείς εδώ δεν θα αποδείξουμε την ανισότητα Cauchy-Schwarz, διότι θα δείξουμε ότι για τα διάφορα $p \in \mathbb{N}$ οι $||\cdot||_p$:

$$||(x_1,\cdots,x_n)||_p = \left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p\right)^{1/p}$$

αποτελούν νόρμες, μέσω μιας «γενικευμένης» ανισότητας Cauchy-Schwarz, της ανισότητας Hölder.

Πριν την ανισότητα Hölder χρειάζεται να κάνουμε μία προετοιμασία.

Πρόταση 1.2.1 (Ανισότητα Young). *Έστω $x,y \in \mathbb{R}_+$ και $p,q \in \mathbb{N}$ δύο συζυγείς αριθμοί, με την εξής έννοια: $1/p+1/q=1$. Αληθεύει ότι:*

$$xy \leqslant \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$$

Απόδειξη: Οι αριθμοί p,q έχουν την ιδιότητα $1/p+1/q=1$, οπότε από το γεγονός ότι η log είναι κοίλη:

$$\log\left(\frac{x^p}{p}+\frac{y^q}{q}\right) \geqslant \frac{1}{p}\log\, x^p + \frac{1}{q}\log\, y^q = \log(xy)$$

Επιπλέον, από τη μονοτονία της log (είναι γνησίως αύξουσα):

$$xy \leqslant \frac{x^p}{p}+\frac{y^q}{q}$$

για κάθε $x,y>0$. Αν συμπεριλάβουμε και την περίπτωση όπου $x=0$ ή $y=0$, παίρνουμε την προς απόδειξη σχέση.

□

Πρόταση 1.2.2 (Ανισότητα Hölder)**.** *Έστω $p,q\in\mathbb{N}$ δύο συζυγείς αριθμοί. Για κάθε $(x_1,\cdots,x_n),(y_1,\cdots,y_n)\in\mathbb{R}^n$ ισχύει:*

$$\sum_{k=1}^{n}|x_ky_k| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{k=1}^{n}|y_k|^q\right)^{1/q}$$

Απόδειξη: Εάν $(x_1,\cdots x_n)$ ή $(y_1,\cdots,y_n)=0$, τότε η ανισότητα ισχύει με τετριμμένο τρόπο. Θα ασχοληθούμε λοιπόν με την περίπτωση όπου $(x_1,\cdots x_n)$ και $(y_1,\cdots,y_n)\neq 0$.

Παρατηρούμε ότι, διαιρώντας κάθε x_k με το αντίστοιχο «μέτρο» $\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p\right)^{1/p}\neq 0$:

$$\sum_{k=1}^{n}\left(|x_k|\Big/\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p\right)^{1/p}\right)^p = \frac{1}{\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p}\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p = 1$$

και ομοίως για τα y_k:

$$\sum_{k=1}^{n}\left(|y_k|\Big/\left(\sum_{k=1}^{n}|y_k|^q\right)^{1/q}\right)^q = \frac{1}{\sum_{k=1}^{n}|y_k|^q}\sum_{k=1}^{n}|y_k|^q = 1$$

Με χρήση λοιπόν της ανισότητας Young στους όρους:

$$|x_k|\Big/\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p\right)^{1/p} \text{ και } |y_k|\Big/\left(\sum_{k=1}^{n}|y_k|^q\right)^{1/q}$$

παίρνουμε:

$$|x_k|\Big/\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p\right)^{1/p}\cdot\, |y_k|\Big/\left(\sum_{k=1}^{n}|y_k|^q\right)^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{p}\left(|x_k|\Big/\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p\right)^{1/p}\right)^p + \frac{1}{q}\left(|y_k|\Big/\left(\sum_{k=1}^{n}|y_k|^q\right)^{1/q}\right)^q$$

και αθροίζοντας:

$$\sum_{k=1}^{n}|x_k|\Big/\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p\right)^{1/p}\cdot\, |y_k|\Big/\left(\sum_{k=1}^{n}|y_k|^q\right)^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{n}\left(|x_k|\Big/\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p\right)^{1/p}\right)^p + \frac{1}{q}\sum_{k=1}^{n}\left(|y_k|\Big/\left(\sum_{k=1}^{n}|y_k|^q\right)^{1/q}\right)^q =$$

$$= \frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$$

Επομένως:

$$\sum_{k=1}^{n}|x_k|\Big/\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p\right)^{1/p}\cdot\, |y_k|\Big/\left(\sum_{k=1}^{n}|y_k|^q\right)^{1/p} \leqslant 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n}|x_k y_k| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{k=1}^{n}|y_k|^q\right)^{1/q}$$

το οποίο είναι το ζητούμενο.

□

Παρατήρηση 1.2.5. *Η ανισότητα Hölder στην Πρόταση 1.2.2 είναι ουσιαστικά γενίκευση της Cauchy-Schwarz. Ειδικότερα, για $p=2$ έχουμε:*

$$\sum_{k=1}^{n}|x_k y_k| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{k=1}^{n}|y_k|^2\right)^{1/2}$$

Με την ανισότητα Hölder μπορούμε να εξάγουμε την ανισότητα Minkowski, από την οποία θα συμπεράνουμε ότι $||\cdot||_p$ -όπως τις ορίσαμε νωρίτερα- είναι πράγματι νόρμες.

Πρόταση 1.2.3 (Ανισότητα Minkowski). *Έστω $(x_1,\cdots,x_n),(y_1,\cdots,y_n)\in\mathbb{R}^n$. Για κάθε $p\in\mathbb{N}$ αληθεύει ότι:*

$$\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k+y_k|^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n}|y_k|^p\right)^{1/p}$$

Απόδειξη: Η περίπτωση $p=1$ είναι ουσιαστικά η τριγωνική ανισότητα (η οποία «δουλεύει» με επαγωγή). Στα επόμενα θα θεωρούμε $p\geqslant 2$, ώστε να υπάρχει συζυγής αριθμός. Θα συμβολίζουμε με q τον συζυγή αριθμό του p.

Γράφουμε:

$$\sum_{k=1}^{n}|x_k+y_k|^p = \sum_{k=1}^{n}|x_k+y_k|^{p-1}|x_k+y_k|$$

και χρησιμοποιώντας την τριγωνική ανισότητα:

$$\sum_{k=1}^{n}|x_k+y_k|^p \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}|x_k+y_k|^{p-1}|x_k| + \sum_{k=1}^{n}|x_k+y_k|^{p-1}|y_k| \qquad (*)$$

Με χρήση της ανισότητας Hölder σε καθένα άθροισμα του δεξιού μέλους της $(*)$ έχουμε:

$$\sum_{k=1}^{n}|x_k+y_k|^{p-1}|x_k| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n}|x_k+y_k|^{q(p-1)}\right)^{1/q}\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p\right)^{1/p}$$

και αντίστοιχα:

$$\sum_{k=1}^{n}|x_k+y_k|^{p-1}|y_k| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n}|x_k+y_k|^{q(p-1)}\right)^{1/q}\left(\sum_{k=1}^{n}|y_k|^p\right)^{1/p}$$

Οπότε αντικαθιστώντας στην $(*)$ έχουμε:

$$\sum_{k=1}^{n}|x_k+y_k|^p \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n}|x_k+y_k|^p\right)^{1/q}\left(\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n}|y_k|^p\right)^{1/p}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\sum_{k=1}^{n}|x_k+y_k|^p\right)^{1-1/q} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n}|y_k|^p\right)^{1/p}$$

εφόσον $\sum_{k=1}^{n}|x_k+y_k|^p\neq 0$. Εάν είναι ίσο με το 0, τετριμμένα ισχύει και πάλι η ανισότητα Minkowski. Παρατηρώντας λοιπόν ότι $1/p+1/q=1\Rightarrow 1/p=1-1/q$, έχουμε το ζητούμενο.

□

Παρατήρηση 1.2.6. *Για κάθε $p \in \mathbb{N}$ οι χώροι $(\mathbb{R}^n, ||\cdot||_p)$ καθίστανται χώροι με νόρμα. Οι $||\cdot||_p$ ορίζονται:*

$$||(x_1, \cdots, x_n)||_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p}$$

Απόδειξη: Οι πρώτες δύο ιδιότητες τις νόρμας μπορούν να ελεγχθούν σχετικά άμεσα. Η τριγωνική ανισότητα είναι ακριβώς η ανισότητα Minkowski της Πρότασης 1.2.3.

□

Είναι ενδιαφέρον κανείς να αναρρωτηθεί, εκπορευόμενος από τους χώρους με νόρμα $(\mathbb{R}^n, ||\cdot||_p)$, εάν είναι δυνατόν η διάσταση των χώρων «να τείνει» στο άπειρο. Γενικά φανταζόμαστε ότι η μετάβαση στις άπειρες διαστάσεις δεν θα μπορεί να γίνει εντελώς αυθαίρετα, γιατί ενδέχεται να υπάρχουν ακολουθίες $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ για τις οποίες $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p = \infty$.

Γι' αυτόν τον λόγο θα ορίσουμε τη μετάβαση των $(\mathbb{R}^n, ||\cdot||_p)$ στις άπειρες διαστάσεις μόνο στις $p-$αθροίσιμες ακολουθίες, δηλαδή μόνο στις $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ για τις οποίες $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty$.

Ορίζουμε λοιπόν τους χώρους:

$$\ell^p = \ell^p(\mathbb{N}) = \left\{ (x_k)_{k=1}^{\infty} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \;\middle|\; \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty \right\}$$

τους οποίους εφοδιάζουμε με τις $||\cdot||_{\ell^p}$, όπου:

$$||(x_k)_{k=1}^{\infty}||_{\ell^p} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\right)^p$$

Οι χώροι $(\ell^p, ||\cdot||_{\ell^p})$ γίνονται χώροι με νόρμα, σύμφωνα με την επόμενη παρατήρηση.

Παρατήρηση 1.2.7. *Οι χώροι $(\ell^p, ||\cdot||_{\ell^p})$, $p \in \mathbb{N}$, είναι χώροι με νόρμα. Δηλαδή ο ℓ^p γίνεται γραμμικός χώρος και η $||\cdot||_{\ell^p}$ νόρμα.*

Απόδειξη: Κατ' αρχάς, εάν $(x_k)_{k=1}^{\infty}$, $(y_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell^p$, τότε:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty \text{ και } \sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^p < \infty$$

οπότε τα ακόλουθα όρια υπάρχουν:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p}, \quad \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^p\right)^{1/p}$$

Έτσι λοιπόν, εφαρμόζοντας την ανισότητα Minkowski στα μερικά αθροίσματα:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^p\right)^{1/p}$$

Παίρνοντας εν τέλει όριο έχουμε:

$$\left(\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p} + \left(\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} |y_k|^p\right)^{1/p} < \infty$$

δηλαδή $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k + y_k|^p < \infty$ κι άρα $(x_k)_{k=1}^{\infty} + (y_k)_{k=1}^{\infty} = (x_k + y_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell^p$. Το ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ έχουμε $\lambda(x_k)_{k=1}^{\infty} = (\lambda x_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell^p$ είναι άμεσο να δειχθεί με πράξεις.

Τέλος, η $||\cdot||_{\ell^p}$ είναι νόρμα. Αυτό που χρειάζεται και πάλι να δειχθεί είναι η τριγωνική ανισότητα, η οποία (όπως προηγουμένως) αποδεικνύεται από την ανισότητα Minkowski, παίρνοντας όριο.

□

Στους χώρους $\mathbb{R}^n$ είναι δυνατόν να προσαρτίσουμε ακόμη μία νόρμα, την supremum νόρμα. Ορίζουμε $||\cdot||_{\infty}$ ως εξής:

$$||(x_1, \cdots, x_n)||_{\infty} = \sup\{|x_k| \mid k \leqslant n\} = \max\{|x_k| \mid k \leqslant n\}$$

και παρατηρούμε ότι αυτή είναι πράγματι νόρμα.

Στην ουσία ο χώρος $(\mathbb{R}^n, ||\cdot||_{\infty})$ είναι «επέκταση» των $(\mathbb{R}^n, ||\cdot||_p)$, καθώς $p \to \infty$. Αυτό θα το δούμε με την επόμενη παρατήρηση:

Παρατήρηση 1.2.8. *Για κάθε* $(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ *το όριο:*

$$\lim_{p\to\infty} ||(x_1,\cdots,x_n)||_p = \lim_{p\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p\right)^p$$

υπάρχει και ισούται με $||(x_1,\cdots,x_n)||_\infty$.

Απόδειξη: Κατ' αρχάς παρατηρούμε ότι για κάθε $k \leqslant n$:

$$|x_k| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p\right)^{1/p}$$

οπότε $\sup\{|x_k| \mid k \leqslant n\} = ||(x_1,\cdots,x_n)||_\infty \leqslant ||(x_1,\cdots,x_n)||_p$, και με lim inf:

$$||(x_1,\cdots,x_n)||_\infty \leqslant \liminf_{p\to\infty} ||(x_1,\cdots,x_n)||_p$$

Από την άλλη, παρατηρούμε επίσης ότι:

$$\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n}\sup\{|x_k| \mid k\leqslant n\}^p\right)^{1/p} \leqslant n^{1/p}\cdot\sup\{|x_k| \mid k\leqslant n\}^p$$

επομένως $||(x_1,\cdots,x_n)||_p = n^{1/p}||(x_1,\cdots,x_n)||_\infty$, και με lim sup:

$$\limsup_{p\to\infty} ||(x_1,\cdots,x_n)||_p \leqslant ||(x_1,\cdots,x_n)||_\infty$$

Δηλαδή $||(x_1,\cdots,x_n)||_\infty \leqslant \liminf_{p\to\infty} ||(x_1,\cdots,x_n)||_p \leqslant \limsup_{p\to\infty} ||(x_1,\cdots,x_n)||_p \leqslant ||(x_1,\cdots,x_n)||_\infty$ και το ζητούμενο αποδεικνύεται.

□

Αντίστοιχα ορίζεται και ο χώρος $\ell^\infty = \ell^\infty(\mathbb{N})$ των φραγμένων ακολουθιών, με τη νόρμα $||\cdot||_{\ell^\infty}$:

$$||(x_k)_{k=1}^\infty||_{\ell^\infty} = \sup\{|x_k| \mid k\in\mathbb{N}\}$$

Μάλιστα ισχύει Παρατήρηση ανάλογη της 1.2.8, αλλά δεν θα την αποδείξουμε καθώς η απόδειξη είναι παρόμοια.

Συνοψίζοντας, μπορούμε να δώσουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 1.2.2 (Χώροι ℓ^p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$)**.** *Για κάθε* $1 \leqslant p < \infty$ *ορίζουμε τους χώρους με νόρμα* $(\ell^p, ||\cdot||_{\ell^p})$, *όπου:*

$$\ell^p = \ell^p(\mathbb{N}) = \left\{(x_k)_{k=1}^\infty \in \mathbb{R}^\mathbb{N} \;\middle|\; \sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p < \infty\right\}$$

και:

$$||(x_k)_{k=1}^\infty||_{\ell^p} = \left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p\right)^{1/p}$$

Επιπλέον, για $p=\infty$ *ορίζουμε:*

$$\ell^\infty = \ell^\infty(\mathbb{N}) = \left\{(x_k)_{k=1}^\infty \in \mathbb{R}^\mathbb{N} \;\middle|\; \sup\{|x_k| \mid k\in\mathbb{N}\} < \infty\right\}$$

και:

$$||(x_k)_{k=1}^\infty||_{\ell^\infty} = \sup\{|x_k| \mid k\in\mathbb{N}\}$$

Αντίστοιχοι χώροι των ℓ^p μπορούν να οριστούν και για συναρτήσεις, με ολοκλήρωμα. Συγκεκριμένα, για $p\in\mathbb{N}$ μπορούμε να ορίσουμε τους χώρους $(L^p = L^p([0,1]), ||\cdot||_{L^p})$, όπου:

$$L^p = L^p([0,1]) = \left\{f\in C([0,1]) \;\middle|\; \int_0^1 |f|^p < \infty\right\}$$

και η νόρμα ορίζεται με τον εξής τρόπο:

$$||f||_{L^p} = \left(\int_0^1 |f|^p \right)^{1/p}$$

Κανονικά τα σύνολα L^p έχουν διαφορετικό ορισμό, αν κανείς συμπεριλάβει μία μεγαλύτερη (της $C([0,1])$) κλάση ολοκληρώσιμων συναρτήσεων. Εξάλλου έτσι όπως ορίσαμε τα σύνολα L^p, δεν διαφοροποιούνται από το $C([0,1])$. Στην πραγματικότητα θα μπορούσαμε να είχαμε γράψει:

$$L^p = L^p([0,1]) = C([0,1])$$

οπότε οι συμβολισμοί L^p μας βοηθούν μονάχα να διακρύνουμε τη νόρμα. Ξεφεύγοντας από το $C([0,1])$ κι από τις Riemann ολοκληρώσιμες συναρτήσεις, κανονικά οι χώροι L^p ορίζονται στις Lebesgue ολοκληρώσιμες συναρτήσεις, και τότε η υπόθεση «$\int_0^1 |f|^p < \infty$» έχει νόημα. Στην παρούσα παρουσίαση θα προτιμίσουμε να μην αναφερθούμε σε Lebesgue ολοκληρωσιμότητα - παρόλα αυτά μπορείτε να ρίξετε μία ματιά στο [Γι1].

Επιπλέον δεν είναι αναγκαίο η ολοκλήρωση να γίνεται στο διάστημα $[0,1]$, μάλιστα αργότερα θα χρειαστεί να ολοκληρώσουμε σε άλλο διάστημα. Επειδή όμως κανείς εύκολα (με γραμμικό μετασχηματισμό) μπορεί να μεταβεί από τη μία περίπτωση στην άλλη, δεν θα μας απασχολεί ιδιαιτέρως το διάστημα ολοκλήρωσης.

Το ότι οι νόρμες $||\cdot||_{L^p}$ είναι πράγματι νόρμες έχει κι αυτό αρκετή δουλειά πίσω του. Παραποιώντας τις αποδείξεις των Προτάσεων 1.2.2 και 1.2.3 μπορούμε να πάρουμε τα ανάλογά τους με ολοκληρώματα.

Πρόταση 1.2.4 (Ανισότητα Hölder - ολοκληρωτική μορφή). *Έστω $f,g : [0,1] \to \mathbb{C}$ συνεχείς συναρτήσεις και $p,q \in \mathbb{N}$ συζυγείς αριθμοί. Αληθεύει ότι:*

$$\int_{0,1} |fg| \leqslant \left(\int_0^1 |f|^p \right)^{1/p} \left(\int_0^1 |g|^q \right)^{1/q}$$

Πρόταση 1.2.5 (Ανισότητα Minkowski - ολοκληρωτική μορφή). *Έστω $f,g : [0,1] \to \mathbb{C}$ συνεχείς συναρτήσεις και $p \in \mathbb{N}$. Αληθεύει ότι:*

$$\left(\int_{0,1} |f+g|^p \right)^{1/p} \leqslant \left(\int_0^1 |f|^p \right)^{1/p} + \left(\int_0^1 |g|^p \right)^{1/p}$$

Με την ανισότητα Minkowski μπορεί να αποδειχθούν δύο πράγματα, το ότι οι διάφοροι χώροι L^p είναι γραμμικοί κι ότι οι $||\cdot||_{L^p}$ είναι νόρμες.

Παρατήρηση 1.2.9. *Έστω $p \in \mathbb{N}$. Οι χώροι $(L^p, ||\cdot||_{L^p})$ είναι χώροι με νόρμα.*

Αντίστοιχα με την περίπτωση του ℓ^∞, μπορούμε να ορίσουμε τον χώρο L^∞, με τη νόρμα $||\cdot||_{L^\infty}$:

$$||f||_{L^\infty} = \sup f([0,1]) \overset{*}{=} \max f([0,1])$$

(όπου η ισότητα άστρο $(*)$ έπεται από το ότι οι f είναι συνεχείς).

Και πάλι ο δείκτης «∞» έχει νόημα, καθώς κατά μία έννοια η νόρμα $||\cdot||_{L^\infty}$ αποτελεί «όριο» των $||\cdot||_{L^p}$.

Παρατήρηση 1.2.10. *Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ συνεχής συνάρτηση με $\sup f([0,1]) < \infty$ (δηλαδή $f \in L^\infty$). Τότε το όριο:*

$$\lim_{p\to\infty} ||f||_{L^p} = \lim_{p\to\infty} \left(\int_0^1 |f|^p \right)^{1/p}$$

υπάρχει και ισούται με $||f||_{L^\infty}$.

Απόδειξη: Κατ' αρχάς παρατηρούμε ότι:

$$\left(\int_0^1 |f|^p\right)^{1/p} \leqslant ||f||_{L^\infty} \int_0^1 = ||f||_{L^\infty}$$

οπότε με lim sup:

$$\limsup_{p\to\infty} ||f||_{L^p} \leqslant ||f||_{L^\infty}$$

Έστω τώρα $\varepsilon > 0$. Αν Δ_ε είναι το σύνολο $\{x \in [0,1] \mid f(x) > ||f||_{L^\infty} - \varepsilon\}$, τότε:

$$\left(\int_0^1 |(f|_{\Delta_\varepsilon})|^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\int_0^1 |f|^p\right)^{1/p} \Rightarrow (||f||_{L^\infty} - \varepsilon)\left(\int_0^1 1_{\Delta_\varepsilon}\right)^{1/p} \leqslant ||f||_{L^p} \Rightarrow$$

$$(||f||_{L^\infty} - \varepsilon) \cdot \mathrm{len}(\Delta_\varepsilon)^{1/p} \leqslant ||f||_{L^p}$$

όπου $\mathrm{len}(\Delta_\varepsilon)$ είναι το «μήκος» του Δ_ε (μπορείτε να δείξετε ότι είναι πεπερασμένη ένωση διαστημάτων). Με lim inf έχουμε:

$$(||f||_{L^\infty} - \varepsilon) \cdot \liminf_{p\to\infty} \mathrm{len}(\Delta_\varepsilon)^{1/p} \leqslant \liminf_{p\to\infty} ||f||_{L^p} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ||f||_{L^\infty} - \varepsilon \leqslant \liminf_{p\to\infty} ||f||_{L^p}$$

Έτσι λοιπόν για κάθε $\varepsilon > 0$ έχουμε $||f||_{L^\infty} - \varepsilon \leqslant \liminf_{p\to\infty} ||f||_{L^p} \leqslant \limsup_{p\to\infty} ||f||_{L^p} \leqslant ||f||_{L^\infty}$ κι άρα το ζητούμενο.

□

Συνοψίζοντας, μπορούμε να δώσουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 1.2.3 (Χώροι L^p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$). *Για κάθε $1 \leqslant p < \infty$ ορίζουμε τους χώρους με νόρμα $(L^p, ||\cdot||_{L^p})$, όπου:*

$$L^p = L^p([0,1]) = \left\{f \in C([0,1]) \;\middle|\; \int_0^1 |f|^p < \infty\right\} = C([0,1])$$

και:

$$||f||_{L^p} = \left(\int_0^1 |f|^p\right)^{1/p}$$

Επιπλέον, για $p = \infty$ ορίζουμε:

$$L^\infty = L^\infty([0,1]) = \{f \in C([0,1]) \mid \sup f([0,1]) < \infty\} = C([0,1])$$

και:

$$||f||_{L^\infty} = \sup f([0,1])$$

Τέλος θα αναφερθούμε στον ορισμό των χώρων Banach.

Ορισμός 1.2.4 (Χώροι Banach). *Ένας χώρος με νόρμα $(X, ||\cdot||)$ θα λέγεται χώρος Banach εάν είναι πλήρης ως προς τη μετρική που επάγεται από τη νόρμα $||\cdot||$.*

1.3 Χώροι με εσωτερικό γινόμενο

Είναι δυνατόν γραμμικοί χώροι να έχουν κάποια «ισχυρότερη» γεωμετρική δομή, υπό τη μορφή μέτρησης γωνιών. Είναι ενδιαφέρον πώς δύο φαινομενικά ασυσχέτιστες έννοιες, η γωνία και η απόσταση, στην πραγματικότητα συνδέονται, κι από την πρώτη απορέει η δεύτερη.

Εμείς θα προσεγγίσουμε τη μέτριση των γωνιών με τον συνήθη τρόπο, δηλαδή μέσω των εσωτερικών γινομένων.

Ορισμός 1.3.1 (Χώροι με εσωτερικό γινόμενο)**.** *Λέμε ότι ένα ζεύγος* $(X,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ *είναι χώρος με εσωτερικό γινόμενο εάν ο* $(X,+,\cdot)$ *είναι* $\mathbb{R}$ *ή* $\mathbb{C}-$*γραμμικός χώρος, και η συνάρτηση* $\langle\cdot,\cdot\rangle$ *ένα εσωτερικό γινόμενο. Δηλαδή η* $\langle\cdot,\cdot\rangle$ *ικανοποιεί τις εξής ιδιότητες:*

i. *Για κάθε* $x\in X$ *έχουμε* $\langle x,x\rangle\geqslant 0$, *και μάλιστα* $\langle x,x\rangle=0\Leftrightarrow x=0$.

ii. *Για κάθε* $x,y\in X$ *έχουμε* $\langle x,y\rangle=\overline{\langle y,x\rangle}$.

iii. *Η* $\langle\cdot,\cdot\rangle$ *είναι γραμμική ως προς την πρώτη μεταβλητή. Δηλαδή, για κάθε* $x,y,z\in X$, $\lambda\in\mathbb{C}$*:*
$$\langle x+\lambda y,z\rangle=\langle x,z\rangle+\lambda\cdot\langle y,z\rangle$$

Παρατήρηση 1.3.1. *Με τον ορισμό που δώσαμε το εσωτερικό γινόμενο είναι αντιγραμμικό ως προς τη δεύτερη μεταβλητή, δηλαδή για κάθε* $x,y,z\in X$ *και* $\lambda\in\mathbb{C}$*:*

$$\langle x,y+\lambda z\rangle=\langle x,y\rangle+\overline{\lambda}\cdot\langle x,z\rangle$$

Αυτό προκύπτει από την ιδιότητα ii., σε συνδυασμό με την iii. Επιπλέον, στην περίπτωση $\mathbb{R}-$*διανυσματικού χώρου οι ιδιότητες ii. και iii. ουσιαστικά δίνουν ότι το εσωτερικό γινόμενο είναι συμμετρικό και γραμμικό ως προς καθεμία μεταβλητή.*

Μέσω των εσωτερικών γινομένων μπορούν να οριστούν γωνίες με φυσιολογικό τρόπο, ως απόροια της ανισότητας Cauchy-Schwarz για εσωτερικά γινόμενα.

Πρόταση 1.3.1 (Ανισότητα Cauchy-Schwarz για εσωτερικά γινόμενα)**.** *Έστω* $(X,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ *ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Για κάθε* $x,y\in X$ *αληθεύει η ανισότητα:*

$$|\langle x,y\rangle|^2\leqslant\langle x,x\rangle\cdot\langle y,y\rangle$$

Πριν τη απόδειξη θα κάνουμε έναν σχολιασμό ο οποίος ίσως να είναι ενδιαφέρων. Σε χώρους πεπερασμένης διάστασης κάθε εσωτερικό γινόμενο μπορεί να εκφραστεί (όπως και στον $\mathbb{R}^2$) μέσω ενός πίνακα M, και κατά συνέπεια έχει τη μορφή $\langle x,y\rangle=x\cdot M\cdot y^T=\sum_{i,j\leqslant n}x_iy_j\langle e_i,e_j\rangle$, όπου x_i,y_j είναι οι συντεταγμένες των x,y ως προς τη βάση $(e_k)_{k=1}^n$ και $n=\dim X$ (δείτε στο [Φρ1], Κεφάλαιο 6). Σ' αυτήν λοιπόν την περίπτωση (μπορεί κανείς να δείξει ότι) η παραπάνω ανισότητα είναι συνέπεια της ανισότητας Cauchy-Schwarz που ήδη έχουμε δείξει, στην Παρατήρηση 1.2.5. Στην περίπτωση των χώρων με άπειρη διάσταση όμως δεν έχει δειχθεί τίποτε, γι' αυτό η παραπάνω πρόταση πράγματι χρήζει απόδειξης.

Απόδειξη: Κατ' αρχάς θα αποδείξουμε την αντίστοιχη ανισότητα της πραγματικής περίπτωσης.

Έστω $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ένα πραγματικό εσωτερικό γινόμενο και $s,t\in X$. Λόγω της συμμετρίας και διγραμμικότητας του εσωτερικού γινομένου:

$$\langle s-t,s-t\rangle\geqslant 0\Rightarrow\langle s,s\rangle-2\langle s,t\rangle+\langle t,t\rangle\geqslant 0\Rightarrow 2\langle s,t\rangle\leqslant\langle s,s\rangle+\langle t,t\rangle$$

Αφού η εν λόγω σχέση ισχύει για κάθε $s,t\in X$, θα αληθεύει και για τα:

$$s=\frac{x}{\sqrt{\langle x,x\rangle}}\text{ και }t=\frac{y}{\sqrt{\langle y,y\rangle}}$$

όταν φυσικά $x,y\neq 0$. Κατ' επέκταση:

$$2\left\langle\frac{x}{\sqrt{\langle x,x\rangle}},\frac{y}{\sqrt{\langle y,y\rangle}}\right\rangle\leqslant\left\langle\frac{x}{\sqrt{\langle x,x\rangle}},\frac{x}{\sqrt{\langle x,x\rangle}}\right\rangle+\left\langle\frac{x}{\sqrt{\langle x,x\rangle}},\frac{x}{\sqrt{\langle x,x\rangle}}\right\rangle=2$$

όπου η τελευταία ισότητα δικαιολογείται από τη γραμμικότητα του εσωτερικού γινομένου. Χρησιμοποιώντας και πάλι τη γραμμικότητα του εσωτερικού γινομένου στο αριστερό μέλος της ανισότητας, έπεται το ζητούμενο στην περίπτωση $x,y \neq 0$.

$$\frac{\langle x,y\rangle}{\sqrt{\langle x,x\rangle}\cdot\sqrt{\langle y,y\rangle}} \leqslant 1 \Rightarrow |\langle x,y\rangle|^2 \leqslant \langle x,x\rangle\cdot\langle y,y\rangle$$

Εάν το x ή το y είναι μηδέν, τότε η ανισότητα και πάλι ισχύει, μάλιστα ως ισότητα. Αν χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέσουμε $x=0$, τότε:

$$\langle x,y\rangle = \langle 0,y\rangle = \langle y-y,y\rangle = 0 \leqslant 0 = \sqrt{\langle 0,0\rangle\cdot\langle y,y\rangle} = \sqrt{\langle x,x\rangle\cdot\langle y,y\rangle}$$

Η μιγαδική περίπτωση θα προκύψει από την πραγματική, με ένα τέχνασμα. Θεωρούμε θ,φ γωνίες τέτοιες ώστε τα $x\in\mathbb{C}$ και $y\in\mathbb{C}$ περιεστραμένα κατά θ και φ αντίστοιχα να γίνονται πραγματικά (δηλαδή τα $xe^{i\theta}$, $ye^{i\varphi}$ να είναι πραγματικά). Η ανισότητα Cauchy-Schwarz της πραγματικής περίπτωσης γι' αυτά τα στοιχεία θα δώσει το ζητούμενο:

$$|\langle x,y\rangle|^2 = |\langle xe^{i\theta},ye^{i\varphi}\rangle|^2 \leqslant \langle xe^{i\theta},xe^{i\theta}\rangle\cdot\langle ye^{i\varphi},ye^{i\varphi}\rangle = \langle x,x\rangle\cdot\langle y,y\rangle$$

□

Ορίζουμε λοιπόν γωνία δύο στοιχείων ενός χώρου με εσωτερικό γινόμενο, με τον ακόλουθο τρόπο:

Ορισμός 1.3.2 (Γωνία)**.** *Έστω $(X,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Από την Πρόταση 1.3.1 έπεται ότι:*

$$-1 \leqslant \frac{\langle x,y\rangle}{\langle x,x\rangle\cdot\langle y,y\rangle} \leqslant 1$$

για κάθε $x,y\in X$. Επομένως μπορούμε να ορίσουμε γωνία των x,y τον μοναδικό αριθμό $\angle(x,y)\in[0,\pi]$ για τον οποίο:

$$\cos\,\angle(x,y) = \frac{\langle x,y\rangle}{\langle x,x\rangle\cdot\langle y,y\rangle}$$

Είναι λοιπόν σαφές ότι μέσω του εσωτερικού γινομένου μπορεί να οριστεί γωνία. Είναι επίσης ενδιαφέρουσα η ακόλουθη παρατήρηση, η οποία μπορεί να αποδειχθεί από τα προηγούμενα:

Παρατήρηση 1.3.2. *Έστω $(X,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Η συνάρτηση:*

$$||x|| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$$

είναι μία νόρμα στον X, και κατά συνέπεια ο X γίνεται χώρος με νόρμα. Επιπλέον, με πράξεις μπορείτε να επιβεβαιώσετε ότι:

$$\langle x,y\rangle = \frac{1}{4}\left(||x+y||^2 - ||x-y||^2 + i\cdot||x+iy||^2 - i\cdot||x-iy||^2\right)$$

(στην πραγματική περίπτωση ισχύει το ίδιο χωρίς τους φανταστικούς όρους).

Οπότε η μέτριση γωνιών εξασφαλίζει -κατά κάποιον τρόπο- και μέτριση των αποστάσεων. Μ' αυτήν την έννοια, εφόσον μία νόρμα μπορεί να δώσει μετρική, μπορούμε να έχουμε έννοιες πληρότητας σε έναν χώρο με εσωτερικό γινόμενο.

Ορισμός 1.3.3 (Χώροι Hilbert)**.** *Ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο $(X,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ λέγεται χώρος Hilbert εάν ο χώρος X με την επαγόμενη μετρική γίνεται πλήρης χώρος.*

Κατά συνέπεια, με τον προηγούμενο ορισμό υπόψη, κάθε χώρος Hilbert είναι και χώρος Banach (με την επαγόμενη νόρμα).

Με τον ορισμό της γωνίας είναι δυνατόν να διατυπώσουμε και την έννοια της καθετότητας: θα λέμε ότι δύο $x,y\in X$ είναι κάθετα εάν $\angle(x,y)=\pi/2$, και θα συμβολίζουμε $x\perp y$. Με αυτήν την έννοια καθετότητας, το Πυθαγόρειο θεώρημα μπορεί να αποδειχθεί:

Παρατήρηση 1.3.3. *Έστω $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο και $x,y \in X$ κάθετα ($x \perp y$). Αληθεύει ότι $||x-y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2$, όπου $||\cdot||$ είναι η επαγόμενη νόρμα (αντίστοιχα, $||x+y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2$).*

Απόδειξη: Από τις ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου και τον ορισμό της επαγόμενης νόρμας έπεται η παρατήρηση.

□

Στα παρακάτω θα ασχοληθούμε με ορθοκανονικές βάσεις, δηλαδή «βάσεις» (με κάποια έννοια) ενός χώρου με εσωτερικό γινόμενο, τα στοιχεία της οποίας είναι ανά δύο κάθετα. Αρκετές ορθοκανονικές βάσεις ίσως είναι γνωστές, όμως σε χώρους πεπερασμένης διάστασης.

Ορισμός 1.3.4 (Ορθοκανονικές ακολουθίες και βάσεις)**.** *Έστω $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο και $(e_k)_{k=1}^{\infty}$ μία οικογένεια στοιχείων του X. Θα λέμε ότι η $(e_k)_{k=1}^{\infty}$ είναι ορθοκανονική οικογένεια εάν για κάθε $k \neq m$, $\langle e_k, e_m\rangle = 0$ και για κάθε k, $\langle e_k, e_k\rangle = 1$. Επιπλέον, θα λέμε ότι μία ορθοκανονική οικογένεια $(e_k)_{k=1}^{\infty}$ είναι ορθοκανονική βάση εάν:*

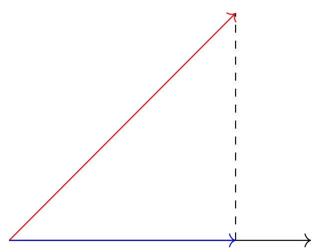
$$X = \overline{\text{span}}\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$$

Δηλαδή κάθε στοιχείο του X προσεγγίζεται από πεπερασμένους γραμμικούς συνδυασμούς στοιχείων της ορθοκανονικής βάσης. Σε χώρους πεπερασμένης διάστασης $\mathbb{R}^n$, η προσέγγιση γίνεται ισότητα, δηλαδή κάθε στοιχείο $x \in \mathbb{R}^n$ γράφεται «κατά συντεταγμένες»:

$$x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k, \ \ x_k \in \mathbb{R}$$

Παρακάτω θα αναφέρουμε μία πρόταση χρήσιμη για να διαπιστώσει κανείς πότε έχουμε μία ορθοκανονική βάση σε χώρους Hilbert, κι επιπλέον να δει κάποιες βασικές ιδιότητες χώρων με ορθοκανονική βάση. Πριν απ' αυτό όμως, είναι σκόπιμο να αναφέρουμε την έννοια της προβολής.

Ας θεωρήσουμε x,y δύο μη μηδενικά στοιχεία του X. «Προβάλλοντας» το y στο x, ουσιαστικά αναζητούμε διάνυσμα αx πάνω στην ευθεία του x ώστε $y - \alpha x \perp x$.



Θέλουμε λοιπόν να βρούμε κάποιο $\alpha \in \mathbb{R}$ (ή $\mathbb{C}$, αλλά γίνεται παρόμοια) ώστε $\langle y - \alpha x, x\rangle = 0$. Επομένως:

$$\langle y, x\rangle - \alpha\langle x, x\rangle = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{\langle y, x\rangle}{\langle x, x\rangle}$$

και η προβολή γίνεται $(\langle y, x\rangle / \langle x, x\rangle)x$.

Ειδικά στην περίπτωση προβολής του y σε στοιχεία μίας ορθοκανονικής βάσης, τα εσωτερικά γινόμενα $\langle e_k, e_k\rangle$ γίνονται 1. Κατά συνέπεια το $\langle y, e_k\rangle e_k$ είναι η προβολή του y στο e_k, για τα διάφορα k.

Πρόταση 1.3.2. *Έστω $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ένας χώρος Hilbert, $||\cdot||$ η επαγόμενη νόρμα και $(e_k)_{k=1}^{\infty}$ μία ορθοκανονική ακολουθία. Τα ακόλουθα ισοδυναμούν:*

i. Η $(e_k)_{k=1}^{\infty}$ είναι ορθοκανονική βάση του X.

ii. Αν $x \in X$ με $\langle x, e_k\rangle = 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$, τότε $x = 0$.

iii. Αν $x \in X$ και $p_n(x) = \sum_{k=1}^{n}\langle x, e_k\rangle e_k$, τότε $\lim_{n\to\infty}^{||\cdot||} p_n(x) = x$ (δηλαδή $||p_n(x) - x|| \to 0$). Θα γράφουμε (υπονοόντας τα προηγούμενα):

$$x = \sum_{k=1}^{\infty}\langle x, e_k\rangle e_k$$

iv. Για κάθε $x \in X$ ισχύει η ισότητα του Parseval:

$$||x||^2 = \sum_{k=1}^{\infty}|\langle x, e_k\rangle|^2$$

η οποία (κατά μία έννοια) είναι γενίκευση του Πυθαγορείου θεωρήματος.

Απόδειξη: (i. $\Rightarrow$ ii.) Από τον ορισμό της ορθοκανονικής βάσης, $\overline{\text{span}}\{e_k\}_{k=1}^{\infty} = X$, το οποίο δείχνει ότι ο εν λόγω γραμμικός χώρος (χωρίς τη θήκη) είναι πυκνός. Βρίσκουμε λοιπόν ακολουθία $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ που να προσεγγίζει το x, κι εφόσον $\langle x, e_k\rangle = 0$ για κάθε k έχουμε $\langle x, x_k\rangle = 0$. Δηλαδή $0 = \langle x, x_k\rangle \to \langle x, x\rangle$ κι άρα $\langle x, x\rangle = 0 \Rightarrow x = 0$.

Παρατηρήστε εδώ ότι η σύγκλιση $\langle x, x_k\rangle \to \langle x, x\rangle$ δεν είναι τόσο τετριμμένη. Αληθεύει γιατί το εσωτερικό γινόμενο γράφεται συναρτήσει νορμών (Παρατήρηση 1.3.2) και οι νόρμες είναι συνεχείς (Παρατήρηση 1.2.2).

(ii. $\Rightarrow$ iii.) Κατ' αρχάς ας παρατηρήσουμε ότι $x - p_n(x) \perp p_n(x)$, διότι:

$$\langle x - p_n(x), p_n(x)\rangle = \langle x, p_n(x)\rangle - \langle p_n(x), p_n(x)\rangle$$

και:

$$\langle x, p_n(x)\rangle = \sum_{k=1}^{n}|\langle x, e_k\rangle|^2 \stackrel{*}{=} ||p_n(x)||^2 = \langle p_n(x), p_n(x)\rangle$$

όπου η ισότητα άστρο $(*)$ προκύπτει από διαδοχικές εφαρμογές του Πυθαγορείου θεωρήματος.

Έτσι λοιπόν, από το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:

$$||x||^2 = ||x - p_n(x)||^2 + ||p_n(x)||^2 \geqslant ||p_n(x)||^2 = \sum_{k=1}^{n}|\langle x, e_k\rangle|^2$$

και αφήνοντας $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}|\langle x, e_k\rangle|^2 = \sum_{k=1}^{\infty}|\langle x, e_k\rangle|^2 < \infty$$

Δηλαδή συγκλίνει. Τώρα αν γράψουμε:

$$||p_n(x) - p_m(x)||^2 = \sum_{k=m+1}^{n}|\langle x, e_k\rangle|^2$$

θα παρατηρήσουμε ότι η $(p_n(x))_{n=1}^{\infty}$ είναι βασική ακολουθία (αφού το άθροισμα συγκλίνει). Λόγω της πληρότητας του X, το όριο:

$$\lim_{n\to\infty}^{||\cdot||} p_n(x) = \lim_{n\to\infty}^{||\cdot||}\sum_{k=1}^{n}\langle x, e_k\rangle e_k = \sum_{k=1}^{\infty}\langle x, e_k\rangle e_k$$

υπάρχει και μάλιστα:

$$\left\langle x - \sum_{k=1}^{\infty}\langle x, e_k\rangle e_k, e_k\right\rangle \stackrel{*}{=} \langle x, e_k\rangle - \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\langle x, e_k\rangle\langle e_k, e_k\rangle \stackrel{**}{=} 0$$

όπου η ισότητα άστρο $(*)$ προκύπτει από τη συνέχεια του εσωτερικού γινομένου, και η διπλό άστρο $(**)$ από την υπόθεση. Οπότε:

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k \rangle e_k$$

(iii. $\Rightarrow$ iv.) Από τη σχέση $||x - p_n(x)|| \to 0$ (δηλαδή από το iii.) σε συνδυασμό με την $||x||^2 = ||x - p_n(x)||^2 + ||p_n(x)||^2$ έπεται ότι:

$$||x||^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_k \rangle|^2$$

(iv. $\Rightarrow$ i.) Εάν $||x|| = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k \rangle|^2$, από τη σχέση $||x||^2 = ||x - p_n(x)||^2 + ||p_n(x)||^2$ θα έχουμε $||x - p_n(x)|| \to 0$. Δηλαδή:

$$x = \lim_{n\to\infty}^{||\cdot||} \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k$$

και κατά συνέπεια $X \subseteq \overline{\text{span}}\{e_k\}_{k=1}^{\infty} \Rightarrow X = \overline{\text{span}}\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$.

$\square$

1.4 Τελεστές

δσσδσ

1.5 Βάσεις Schauder

Ουσιαστικά στους χώρους με βάση Schauder έχουμε μία πολύ καλή ιδιότητα όσον αφορά την αναπαράσταση σχοιχείων του χώρου. Θα δούμε ότι με τις βάσεις Schauder κανείς είναι δυνατόν να αναπαραστήσει κάθε στοιχείο μέσω μίας σειράς, έναν άπειρο γραμμικό συνδυασμό στοιχείων της βάσης.

Ορισμός 1.5.1 (Schauder βασικές ακολουθίες και βάσεις Schauder)**.** *Έστω $(X, ||\cdot||)$ ένας χώρος Banach. Μία ακολουθία $(e_k)_{k=1}^{\infty}$, $e_k \neq 0$, του X λέγεται Schauder βασική εάν για κάθε $x \in \overline{\operatorname{span}}\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ υπάρχει μοναδική ακολουθία $(\lambda_k)_{k=1}^{\infty}$ πραγματικών αριθμών ώστε:*

$$x = \lim_{n\to\infty}^{||\cdot||} \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k e_k$$

Θα λέμε ότι μία Schauder βασική ακολουθία $(e_k)_{k=1}^{\infty}$ είναι βάση Schauder εάν επιπλέον $X = \overline{\operatorname{span}}\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ (δηλαδή κάθε στοιχείο γράφεται κατά τον παραπάνω τρόπο).

Ο παραπάνω ορισμός της βάσης Schauder ουσιαστικά μας δίνει ότι για κάθε $x \in X$ προσεγγίζεται κατά τον ακόλουθο τρόπο:

$$\left\|x - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k\right\| \to 0$$

Εάν βρισκόμαστε σε χώρο συναρτήσεων, για παράδειγμα στον L^2, αυτή η σύγκλιση (αν αληθεύει) θα σημαίνει ότι μία συνάρτηση $f \in L^2$ μπορεί να προσεγγιστεί:

$$\left\|f - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k\right\|_{L^2} = \left(\int_0^1 \left|f - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k\right|^2\right)^{1/2} \to 0$$

(όπου $e_k \in L^2$). Αυτό σημαίνει ότι η f συγκλίνει στο άπειρο άθροισμα, δεν σημαίνει όμως -για παράδειγμα- ότι η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη (καθώς αυτό θα χρειαζόταν τη νόρμα supremum).

Επιπλέον, εάν ασχολούμασταν γενικά με Riemann ολοκληρώσιμες συναρτήσεις και όχι με συνεχείς, η f θα συνέκλινε στο άπειρο άθροισμα «σχεδόν παντού», αλλά ενδέχεται όχι παντού. Ενδέχεται δύο Riemann ολοκληρώσιμες συναρτήσεις να έχουν το ίδιο ολοκλήρωμα αλλά να διαφέρουν σε ένα σημείο, γι' αυτόν τον λόγο συνήθως ορίζουμε τον L^2 πάνω σε κλάσεις, που ταυτίζουν δύο συναρτήσεις αν είναι ίσες «σχεδόν παντού» (αν δεν διαπραγματευόμαστε μόνο με συνεχείς συναρτήσεις).

Βέβαια εμάς δεν θα μας απασχολήσουν οι κλάσεις, καθώς στα παραδείγματα που θα δώσουμε στην ανάλυση Fourier θα διαπραγματευτούμε με συνεχείς συναρτήσεις.

Εν τω μεταξύ κρίνουμε ότι θα είναι καλύτερο -πριν αναφέρουμε αποτελέσματα για χώρους με βάσεις Schauder- να δούμε ένα κύριο παράδειγμα μέσω της ανάλυσης Fourier, από το οποίο θα φανεί η χρησιμότητα μίας ειδικής περίπτωσης βάσης Schauder. Συγκεκριμένα θα ασχοληθούμε με σειρές Fourier στον L^2.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Οι βάσεις Schauder στην ανάλυση Fourier

2.1 Το προσεγγιστικό θεώρημα του Weierstrass

Σε αυτό το κεφάλαιο αποσκοπούμε να δείξουμε ότι υπάρχει ακολουθία Schauder στην πλήρωση του L^2, μέσω των σειρών Fourier των L^2-συναρτήσεων. Γι' αρχή θα δούμε το προσεγγιστικό θεώρημα του Weierstrass για τα μιγαδικά τριγωνομετρικά πολυώνυμα, κυρίως για να γίνει εμφανές ότι η απλή ύπαρξη μίας προσέγγισης και η συγκεκριμένη προσέγγιση μπορούν να δώσουν διαφορετικά αποτελέσματα.

Σε αυτήν την παρουσίαση θα αποδείξουμε το εν λόγω θεώρημα μέσω του «απλού» προσεγγιστικού θεωρήματος του Weierstass. Υπάρχουν κι άλλες αποδείξεις πιο σύντομες, οι οποίες χρησιμοποιούν περισσότερο τεχνικές της ανάλυσης Fourier (τα πολυώνυμα του Fejér), αλλά εμείς δεν θα τις αναφέρουμε καθώς η ανάλυση Fourier δεν είναι το κύριο κομμάτι αυτής της εργασίας. Για μία άλλη παρουσίαση λοιπόν, μπορείτε να δείτε το [Κα] (Παράγραφος 1.9) ή το [Γι1] (Παράγραφος 6.3).

Με το προσεγγιστικό θεώρημα του Weierstass για μιγαδικά τριγωνομετρικά πολυώνυμα θα δούμε ότι κάθε συνεχής συνάρτηση προσεγγίζεται -με τη νόρμα supremum- από μιγαδικά τριγωνομετρικά πολυώνυμα. Για να αποδείξουμε όμως αυτό το θεώρημα, θα αποδείξουμε πρώτα το προσεγγιστικό θεώρημα του Weierstass, κατά το οποίο μία συνεχής συνάρτηση προσεγγίζεται -με τη νόρμα supremum- από πολυώνυμα.

Η απόδειξη που θα δώσουμε βασίζεται στα πολυώνυμα του Bernstein, και κατά συνέπεια στην πραγματικότητα είναι κατά βάση πιθανοθεωρητική (αν και δεν θα το δούμε μ' αυτόν τον τρόπο). Τα πολυώνυμα του Bernstein είναι τα ακόλουθα:

Ορισμός 2.1.1 (Πολυώνυμα του Bernstein). *Κάθε πολυώνυμο της μορφής:*

$$B_{n,f}(x) = \sum_{k=0}^{n} f(k/n)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}, \text{ με } x \in [0,1]$$

όπου $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ είναι μία συνεχής συνάρτηση, καλείται πολυώνυμο Bernstein.

Παρατηρήστε ότι στην πραγματικότητα το πολυώνυμο $B_{n,f}$ είναι μία μέση τιμή (με την πιθανοτική έννοια) $\mathbb{E}[f(K/n)]$, όπου $K \sim \mathrm{Binom}(n,x)$. Εμείς δεν θα προσεγγίσουμε όμως τα πολυώνυμα μ' αυτόν τον τρόπο, ούτε την απόδειξη του θεωρήματος. Παρόλα αυτά, παραπέμπεστε στο [Be].

Λήμμα 2.1.1. *Για κάθε $x \in [0,1]$ αληθεύουν τα ακόλουθα:*

i. $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = 1$ *(συνάρτηση πιθανότητας διωνυμικής).*

ii. $\sum_{k=0}^{n} k/n\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = x$ *(μέση τιμή διωνυμικής).*

iii. $\sum_{k=0}^{n}(k/n-x)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = x(1-x)/n$ *(διασπορά διωνυμικής).*

Απόδειξη: Από τη σχέση $(1+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} y^k$, παραγωγίζοντας διαδοχικά, πολλαπλασιάζοντας με y και θέτοντας $y = x(1-x)$.

□

Από το παραπάνω λήμμα έπεται το ακόλουθο λήμμα:

Λήμμα 2.1.2. *Έστω $\delta > 0$ και το σύνολο $\{|k/n - x| \geqslant \delta\} = \{k \leqslant n \mid |k/n - x| \geqslant \delta\}$. Αληθεύει ότι:*

$$\sum_{k\in\{|k/n-x|\geqslant\delta\}} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leqslant \frac{1}{4n\delta^2}$$

(το οποίο είναι αναμενόμενο, αφού από τον νόμο των μεγάλων αριθμών η πιθανότητα μακρυά από τη μέση τιμή πρέπει να είναι μικρή).

Απόδειξη: Χρησιμοποιώντας το Λήμμα 2.1.1, iii. έχουμε ότι:

$$\sum_{k\in\{|k/n-x|\geqslant\delta\}} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leqslant \frac{1}{\delta^2} \sum_{k\in\{|k/n-x|\geqslant\delta\}} (k/n - x)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\delta^2} \sum_{k=0}^{n} (k/n - x)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \frac{x(1-x)}{n\delta^2}$$

και επειδή $-(1-2x)^2 \leqslant 0 \Rightarrow x - x^2 \leqslant 1/4$:

$$\sum_{k\in\{|k/n-x|\geqslant\delta\}} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leqslant \frac{1}{4n\delta^2}$$

□

Έχοντας κάνει αυτήν την προετοιμασία, μπορούμε να αποδείξουμε το προσεγγιστικό θεώρημα του Weierstrass.

Θεώρημα 2.1.1 (Προσεγγιστικό θεώρημα του Weierstrass)**.** *Για κάθε $f \in C([0,1])$ υπάρχει ακολουθία πολυωνύμων $(p_n)_{n=1}^{\infty}$ ούτως ώστε:*

$$\lim_{n\to\infty}^{||\cdot||_{L^\infty}} p_n = f, \ \textit{δηλαδή} \ ||f - p_n||_{L^\infty} \to 0$$

Επομένως, με κατάλληλες «συστολοδιαστολές», κάθε $f \in C([a,b])$, $a, b \in \mathbb{R}$, προσεγγίζεται από πολυώνυμα.

Απόδειξη: Έστω $f \in C([0,1])$ και $\varepsilon > 0$. Επειδή η f είναι συνεχής σε κλειστό διάστημα, είναι ομοιόμορφα συνεχής, και άρα μπορεί να βρεθεί $\delta > 0$ ώστε για κάθε $x, y \in [0,1]$ να έχουμε $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Επειδή όμως:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^k = 1 \Rightarrow f(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f(x) x^k (1-x)^{n-k}, \ x \in [0,1]$$

έχουμε:

$$|f(x) - B_{n,f}(x)| = \left| \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (f(x) - f(k/n)) x^k (1-x)^{n-k} \right| \leqslant \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} |f(x) - f(k/n)| x^k (1-x)^{n-k}$$

Σ' αυτό το σημείο θα χρησιμοποιήσουμε το Λήμμα 2.1.2, σε συνδυασμό με τη γενική ανισότητα $|f(x) - f(k/n)| \leqslant 2||f||_{L^\infty}$. Έπεται λοιπόν ότι:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} |f(x) - f(k/n)| x^k (1-x)^{n-k} = \sum_{k\in\{|k/n-x|<\delta\}} \binom{n}{k} |f(x) - f(k/n)| x^k (1-x)^k +$$

$$+ \sum_{k\in\{|k/n-x|\geqslant\delta\}} \binom{n}{k} |f(x) - f(k/n)| x^k (1-x)^k \leqslant \sum_{k\in\{|k/n-x|<\delta\}} \binom{n}{k} |f(x) - f(k/n)| x^k (1-x)^{n-k} + \frac{||f||_{L^\infty}}{2n\delta^2}$$

κι επειδή $|f(x) - f(k/n)| < \varepsilon$ όταν τα $k/n, x$ βρίσκονται δ−κοντά:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} |f(x) - f(k/n)| x^k (1-x)^{n-k} < \varepsilon + \frac{\|f\|_{L^\infty}}{2n\delta^2}$$

Έτσι λοιπόν, για αρκετά μεγάλο n η παραπάνω ποσότητα γίνεται μικρότερη του 2ε, κι επομένως $|f(x) - B_{n,f}(x)| < 2\varepsilon$ (ανεξαρτήτως του $x \in [0,1]$). Αυτό δείχνει την ομοιόμορφη σύγκλιση:

$$\lim_{n\to\infty}^{\|\cdot\|_{L^\infty}} B_{n,f} = f$$

□

2.2 Το προσεγγιστικό θεώρημα του Weierstrass για μιγαδικά τριγωνομετρικά πολυώνυμα

Σε επόμενη παράγραφο θα ασχοληθούμε με συναρτήσεις του L^2, και συγκεκριμένα με συναρτήσεις του $L^2(\mathbb{T})$.

Είδαμε στο πρώτο κεφάλαιο τον L^2 ως χώρο συνεχών συναρτήσεων, $L^2([0,1]) = C([0,1])$, και σ' αυτόν ορίσαμε τη νόρμα:

$$\|f\|_{L^2} = \left(\int_0^1 |f|^2\right)^{1/2}$$

Είπαμε επίσης ότι οι ιδιότητες του L^2 δεν εξαρτώνται και τόσο από το διάστημα στο οποίο γίνεται η ολοκλήρωση, καθώς κανείς μπορεί -με γραμμικό μετασχηματισμό- να μεταβεί από τη μία περίπτωση στην άλλη.

Για παράδειγμα, αν $f \in L^2([a,b]) = C([a,b])$, η συνάρτηση:

$$\widetilde{f}(x) = f\left(\frac{x-a}{b-a}\right)$$

είναι συνάρτηση του $L^2([0,1])$, με νόρμα:

$$\left(\int_0^1 |\widetilde{f}(x)|^2\ dx\right)^{1/2} \stackrel{*}{=} \left(\frac{1}{b-a}\int_a^b |f(y)|^2\ dy\right)^{1/2}$$

(όπου στην άστρο $(*)$ γίνεται αλλαγή μεταβλητής $y = (x-a)/(b-a)$) και κατά συνέπεια ο χώρος $L^2([a,b])$ μπορεί να εφοδιαστεί με τη νόρμα:

$$\|f\|_{L^2([a,b])} = \left(\frac{1}{b-a}\int_a^b |f(y)|^2\ dy\right)^{1/2}$$

Αντίστοιχα, αν $\mathbb{T}$ είναι ο μοναδιαίος μιγαδικός κύκλος, μπορούμε για κάθε $f \in L^2(\mathbb{T})$ να γράψουμε:

$$\widetilde{f}(x) = f(e^{ix}),\ \ x \in [-\pi, \pi]$$

και να πάρουμε φυσιολογικά τη νόρμα:

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{T})} = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |f|^2\right)^{1/2} = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\widetilde{f}|^2\right)^{1/2}$$

Εν τω μεταξύ προσέξτε ότι για να οριστεί το $L^2(\mathbb{T}) = C(\mathbb{T})$, πρέπει να υπάρχει «συνέχεια» στον μιγαδικό κύκλο, δηλαδή οι $\widetilde{f}$ να έχουν συνεχή περιοδική επέκταση. Πρέπει όταν «ξεδιπλωθούν» οι f στις $\widetilde{f}$, οι τιμές $\widetilde{f}(-\pi)$, $\widetilde{f}(\pi)$ να ταυτίζονται.

Όταν λοιπόν, για παράδειγμα, προσεγγίζουμε μία $f \in L^2(\mathbb{T})$ με πολυώνυμα $\sum_{k=0}^{n} c_k z^k$, στην πραγματικότητα προσεγγίζουμε με συναρτήσεις $\sum_{k=0}^{n} c_k e^{ikx}$, $z = e^{ix}$, την αντίστοιχη $\widetilde{f}$ (και αντιστρόφως). Μάλιστα επειδή γενικά είναι ευκολότερο να ασχολούμαστε με συναρτήσεις του $L^2([-\pi,\pi])$ που έχουν συνεχή περιοδική επέκταση παρά με συναρτήσεις του $L^2(\mathbb{T})$, θα λέμε μεν ότι $f \in L^2(\mathbb{T})$, θα εννοούμε δε ότι $f \in L^2([-\pi,\pi])$ και έχει συνεχή περιοδική επέκταση. Αντίστοιχα θα αντιμετωπίζουμε και τα υπόλοιπα σύνολα $L^p(\mathbb{T})$ και $C(\mathbb{T})$.

Επιπλέον, όταν φυσικά δεν υπάρχει πιθανότητα σύγχυσης, θα γράφουμε L^2, L^p, C (αντί $L^2(\mathbb{T})$ λόγου χάρη) χωρίς δείκτες κι άλλες λεπτομέρειες (κυρίως στις νόρμες, για να ελαφρύνουμε τον συμβολισμό).

Μερικές χρήσιμες έννοιες που θα χρησιμοποιήσουμε παρακάτω, ακολουθούν:

Ορισμός 2.2.1 (Τριγωνομετρικά πολυώνυμα και μιγαδικά τριγωνομετρικά πολυώνυμα). *Τριγωνομετρικό πολυώνυμο είναι κάθε συνάρτηση της μορφής:*

$$q(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\right),\ \ a_k, b_k \in \mathbb{R},\ \ x \in [-\pi,\pi]$$

Επιπλέον, μιγαδικό τριγωνομετρικό πολυώνυμο είναι κάθε συνάρτηση της μορφής:

$$\mu(z) = \sum_{k=-n}^{n} c_k z^k = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx} = \mu(x),\ \ c_k \in \mathbb{C},\ \ z \in \mathbb{T},\ \ x \in [-\pi,\pi]$$

(καταχρηστικά συμβολίζουμε με μ και τις δύο συναρτήσεις). Θα λέμε ότι ο βαθμός είναι n, εάν αυτός είναι ο μικρότερος φυσικός για τον οποίον τέτοια αναπαράσταση υπάρχει.

Στον προηγούμενο ορισμό τα μιγαδικά τριγωνομετρικά πολυώνυμα έχουν κι αρνητικούς εκθέτες, πράγμα που κανείς ίσως να μην περίμενε. Θα δούμε ευθύς αμέσως ότι αυτός ο ορισμός είναι λογικός.

Παρατήρηση 2.2.1. *Έστω q_1, q_2 δύο τριγωνομετρικά πολυώνυμα. Η συνάρτηση:*

$$\mu(x) = q_1(x) + i \cdot q_2(x)$$

είναι ένα μιγαδικό τριγωνομετρικό πολυώνυμο.

Απόδειξη: Πράγματι, από τις σχέσεις $\sin(kx) = (e^{ikx} - e^{-ikx})/(2i)$ και $\cos(kx) = (e^{ikx} + e^{-ikx})/2$ βλέπουμε ότι υπάρχουν $c_k \in \mathbb{C}$ ώστε:

$$\mu(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}$$

□

Επίσης θα δούμε κάτι που θα θέλαμε να ισχύει: κάθε τριγωνομετρικό πολυώνυμο είναι πολυώνυμο των cos, sin. Ισχύει και το αντίστροφο, δηλαδή κάθε πολυώνυμο των cos, sin είναι τριγωνομετρικό πολυώνυμο. Για τα δείξουμε αυτά, ξεκινούμε με το ακόλουθο:

Παρατήρηση 2.2.2. *Κάθε τριγωνομετρικό πολυώνυμο q μπορεί να γραφεί στη μορφή $q(x) = p(\cos x, \sin x)$, για κάποιο πολυώνυμο p βαθμού* $\deg q$.

Απόδειξη: Αυτό είναι συνέπεια των ταυτοτήτων:

$$\cos(kx) = 2^{k-1}\cos^k x + \sum_{j=0}^{k-1} a_{j,k} \cos^j x$$

και:

$$\frac{\sin(kx)}{\sin x} = 2^k \cos^k x + \sum_{j=0}^{k-1} a_{j,k} \cos^j x \Rightarrow \sin(kx) = \left(2^k \cos^k x + \sum_{j=0}^{k-1} a_{j,k} \cos^j x\right) \cdot \sin x$$

οι οποίες αποδεικνύονται επαγωγικά.

□

Ουσιαστικά λοιπόν δείξαμε ότι ο χώρος των τριγωνομετρικών πολυωνύμων βαθμού n περιέχεται στον χώρο των πολυωνύμων των cos, sin. Ειδικότερα, αν:

$$A_n = \mathrm{span}\{1, \cos x, \cos(2x), \cdots, \cos(nx), \sin x, \sin(2x), \cdots, \sin(nx)\}$$

και:

$$B_n = \text{span}\{1, \cos x, \cos^2 x, \cdots, \cos^n x, \sin x, \sin x \cdot \cos x, \sin x \cdot \cos^2 x, \cdots, \sin x \cdot \cos^{n-1} x\}$$

τότε $A_n \subseteq B_n$. Για να δείξουμε την ισότητα θα κάνουμε ένα τέχνασμα: θα παρατηρήσουμε κατ' αρχάς ότι $\dim B_n \leqslant 2n+1$ (αφού το σύνολο από το οποίο παράγεται έχει τόσα στοιχεία), κι επιπλέον ότι $\dim A_n = 2n+1$ (οπότε αναγκαστικά θα πρέπει τα A_n, B_n να έχουν την ίδια διάσταση). Εφόσον τα A_n, B_n έχουν την ίδια διάσταση και το ένα περιέχεται στο άλλο, δεν μπορούν παρά να ταυτίζονται.

Γι' αυτό αρκεί να δείξουμε ότι το σύνολο $\{1, \cos x, \cos(2x), \cdots, \cos(nx), \sin x, \sin(2x), \cdots, \sin(nx)\}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητο.

Παρατήρηση 2.2.3. *Το σύνολο* $\{1, \cos x, \cos(2x), \cdots, \cos(nx), \sin x, \sin(2x), \cdots, \sin(nx)\}$ *είναι γραμμικώς ανεξάρτητο. Δηλαδή, αν:*

$$q(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\right) = 0, \;\; x \in [-\pi, \pi]$$

τότε $a_0, a_k, b_k = 0$.

Απόδειξη: Η απόδειξη είναι συνέπεια των «σχέσεων ορθογωνιότητας»:

i. Για κάθε $k \neq \lambda$, $k, \lambda \in \{0, \cdots, n\}$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) \cdot \cos(\lambda x) \; dx = 0$$

ii. Για κάθε $k \neq \lambda$, $k, \lambda \in \{1, \cdots, n\}$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx) \cdot \sin(\lambda x) \; dx = 0$$

iii. Για κάθε $k \neq \lambda$, $k \in \{0, \cdots, n\}$, $\lambda \in \{1, \cdots, n\}$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) \cdot \sin(\lambda x) \; dx = 0$$

iv. Για κάθε $k \in \{1, \cdots, n\}$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(kx) \; dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(\lambda x) \; dx = \pi \neq 0$$

οι οποίες με τη σειρά τους αποδεικνύονται από τους γνωστούς τύπους $2\cos\theta \cdot \cos\varphi = \cos(\theta - \varphi) + \cos(\theta + \varphi)$, $2\sin\theta \cdot \cos\varphi = \sin(\theta + \varphi) + \sin(\theta - \varphi)$, $2\sin\theta \cdot \sin\varphi = \cos(\theta - \varphi) - \cos(\theta + \varphi)$, $2\cos^2\theta = \cos(2\theta) + 1$, $2\sin^2\theta = 1 - \cos(2\theta)$.

□

Έτσι λοιπόν, από την προηγούμενη ανάλυσή μας, έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα:

Πρόταση 2.2.1. *Τα σύνολα των τριγωνομετρικών πολυωνύμων και των πολυωνύμων των* cos, sin, *ταυτίζονται.*

Απόδειξη: Κάθε πολυώνυμο των $\cos x, \sin x$, ανήκει στο B_n, διότι κάθε όρος $\sin^k x$ μπορεί με διαδοχική εφαρμογή της $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ να καταλήξει μονοβάθμιο πολυώνυμο του $\sin x$, και ενδεχομένως πολυβάθμιο του $\cos x$ (με βαθμό το πολύ $k-1$ αν υπάρχει κάποιος εναπομείνων όρος sin, και το πολύ k αν δεν υπάρχει). Οπότε από τη σχέση $A_n = B_n$ έχουμε το ζητούμενο αποτέλεσμα.

□

Με αυτήν την προετοιμασία μπορούμε να προχωρίσουμε στην απόδειξη του προσεγγιστικού θεωρήματος του Weierstrass για τα μιγαδικά τριγωνομετρικά πολυώνυμα. Θα δούμε ότι στην ουσία είναι απόρροια του «απλού» προσεγγιστικού θεωρήματος του Weierstrass.

Θεώρημα 2.2.1 (Προσεγγιστικό θεώρημα του Weierstrass για μιγαδικά τριγωνομετρικά πολυώνυμα). *Για κάθε $f \in C(\mathbb{T})$ υπάρχει ακολουθία μιγαδικών τριγωνομερικών πολυωνύμων $(\mu_n)_{n=1}^{\infty}$ ούτως ώστε:*

$$\lim_{n\to\infty}^{||\cdot||_{L^\infty}} \mu_n = f, \ \text{δηλαδή} \ ||f-\mu_n||_{L^\infty} \to 0$$

Απόδειξη: Η απόδειξη είναι εκτενής και θα γίνει σε βήματα.

Βήμα I: Γι' αρχή θα δείξουμε ότι αν η $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}$ είναι άρτια και παίρνει μόνο πραγματικές τιμές, τότε προσεγγίζεται από τριγωνομετρικά πολυώνυμα (όχι μιγαδικά). Ορίζουμε λοιπόν τη συνάρτηση $g:[-1,1]\to\mathbb{R}$, $g(y)=f(\arccos y)$, και παρατηρούμε ότι $g(\cos x)=f(x)$, για $x\in[0,\pi]$. Δηλαδή $g\circ\cos = f|_{[0,\pi]}$.

Η g είναι συνεχής συνάρτηση (ως σύνθεση) κι επομένως από το προσεγγιστικό θεώρημα του Weierstrass υπάρχει ακολουθία πολυωνύμων $p_n(y)$ που την προσεγγίζουν. Κατά συνέπεια:

$$||g(y)-p_n(y)||_{L^\infty}\to 0 \Rightarrow ||g(\cos x)-p_n(\cos x)||_{L^\infty}\to 0$$

κι άρα $||f|_{[0,\pi]}(x)-p_n(\cos x)||_{L^\infty}\to 0$. Εάν τώρα ορίσουμε $q_n(x)=p_n(\cos x)$, $x\in[-\pi,\pi]$, θα παρατηρήσουμε ότι τα q_n είναι τριγωνομετρικά πολυώνυμα (από την Πρόταση 2.2.1), κι επιπλέον από τα προηγούμενα:

$$||f|_{[0,\pi]}(x)-q_n|_{[0,\pi]}(x)||_{L^\infty}\to 0$$

Λόγω του ότι η f και τα q_n (από τον ορισμό τους) είναι άρτιες συναρτήσεις, παίρνουμε τελικά ότι:

$$||f-q_n||_{L^\infty} = ||f|_{[0,\pi]}(x)-q_n|_{[0,\pi]}(x)||_{L^\infty}\to 0$$

Βήμα II: Εάν η $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}$ παίρνει μόνο πραγματικές τιμές, θα δείξουμε ότι προσεγγίζεται από τριγωνομετρικά πολυώνυμα. Ας ορίσουμε λοιπόν τις συναρτήσεις f_1,f_2 με $f_1(x)=f(x)+f(-x)$ και $f_2(x)=\big(f(x)-f(-x)\big)\cdot\sin x$. Οι συναρτήσεις αυτές έχουν περιοδική επέκταση, και κατά συνέπεια είναι στον $C(\mathbb{T})$.

Επιπλέον είναι άρτιες, πράγμα που σημαίνει ότι από το Βήμα I μπορούν να βρεθούν ακολουθίες τριγωνομετρικών πολυωνύμων $(q_{1,n})_{n=1}^{\infty}$, $(q_{2,n})_{n=1}^{\infty}$ ώστε:

$$||f_1-q_{1,n}||_{L^\infty},\ ||f_2-q_{2,n}||_{L^\infty}\to 0$$

Ορίζουμε την ακολουθία $(q_{3,n})_{n=1}^{\infty}$ ως εξής $q_{3,n}(x)=\big(q_{1,n}(x)\cdot\sin^2 x+q_{2,n}(x)\cdot\sin x\big)/2$ και παρατηρούμε ότι αποτελείται από τριγωνομετρικά πολυώνυμα. Επιπλέον:

$$|f(x)\cdot\sin^2 x-q_{3,n}(x)| \overset{*}{=} \frac{1}{2}\cdot|f_1(x)\cdot\sin^2 x+f_2(x)\cdot\sin x-q_{1,n}(x)\cdot\sin^2 x-q_{2,n}(x)\cdot\sin x| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ||f\cdot\sin^2-q_{3,n}||_{L^\infty}\leqslant\frac{1}{2}\cdot\big(||f_1-q_{1,n}||_{L^\infty}+||f_2-q_{2,n}||_{L^\infty}\big)\to 0$$

όπου η άστρο $(*)$ προκύπτει από τον ορισμό των f_1,f_2. Το τελευταίο δείχνει ότι η $f_3(x)=f_2(x)\cdot\sin^2(x)$ προσεγγίζεται από τριγωνομετρικά πολυώνυμα $q_{3,n}$.

Στα παρακάτω θα χρησιμοποιήσουμε τον προηγούμενο συλλογισμό (της προσέγγισης της f_3). Θεωρούμε f^* την περιοδική επέκταση της f και ορίζουμε τη μεταφορά της, $g(x)=f^*|_{[-\pi,\pi]}(x-\pi/2)$. Όπως και στα προηγούμενα, μπορεί να βρεθεί ακολουθία τριγωνομετρικών πολυωνύμων $(q_{4,n})_{n=1}^{\infty}$ που να προσεγγίζει τη συνάρτηση $f_4(x)=g(x)\cdot\sin^2 x$. Τα $q_{4,n}$ τα επεκτείνουμε κι αυτά σε $q^*_{4,n}$, και ορίζουμε $q_{5,n}(x)=q^*_{4,n}|_{[-\pi,\pi]}(x+\pi/2)$ (αναιρούμε τη μεταφορά).

Έτσι όπως ορίσαμε τα $q_{5,n}$, αυτά προσεγγίζουν την $f_5(x)=f(x)\cdot\cos^2(x)$ (η οποία είναι «μεταφορά» της f_4). Έτσι λοιπόν, επειδή $f_3(x)+f_4(x)=f(x)\cdot\sin^2(x)+f(x)\cdot\cos^2 x=f(x)$, αν ορίσουμε τα τριγωνομετρικά πολυώνυμα $q_n=q_{3,n}+q_{5,n}$, θα έχουμε:

$$||f-q_n||_{L^\infty}\leqslant||f_3-q_{3,n}||_{L^\infty}+||f_3-q_{3,n}||_{L^\infty}\to 0$$

Οπότε η ακολουθία τριγωνομετρικών πολυωνύμων $(q_n)_{n=1}^{\infty}$ προσεγγίζει την f.

Βήμα III: Τώρα θεωρούμε τη γενική περίπτωση μίας $f \in C(\mathbb{T})$. Αν $\Re f$, $\Im f$ είναι τα πραγματικά και φανταστικά μέρη της συνάρτησης f, τότε από το Βήμα II μπορούν να βρεθούν ακολουθίες $(q_{1,n})_{n=1}^{\infty}$, $(q_{2,n})_{n=1}^{\infty}$ που να τα προσεγγίζουν. Επομένως, αν $q_n = q_{1,n} + i \cdot q_{2,n}$:

$$||f - q_n||_{L^\infty}^2 \leqslant ||\Re f - q_{1,n}||_{L^\infty}^2 + ||\Im f - q_{2,n}||_{L^\infty}^2 \to 0$$

Από την Παρατήρηση 2.2.1 προκύπτει τελικά ότι η f προσεγγίζεται από μιγαδικά τριγωνομετρικά πολυώνυμα, με τη νόρμα supremum.

□

2.3 Σειρές Fourier

Με το προσεγγιστικό θεώρημα του Weierstrass δείξαμε ότι κάθε $f \in C(\mathbb{T})$ -δηλαδή κάθε συνεχής συνάρτηση με περιοδική επέκταση- προσεγγίζεται με μιγαδικά τριγωνομετρικά πολυώνυμα, μάλιστα με τη νόρμα supremum. Τα τριγωνομετρικά πολυώνυμα που κάνουν την προσέγγιση όμως ενδέχεται να είναι «περίπλοκα», να μην έχουν δηλαδή κάποια «καλή» μορφή.

Παρακάτω θα ασχοληθούμε με μία ειδική κατηγορία πολυωνύμων που προσεγγίζουν τις $C(\mathbb{T})-$συναρτήσεις, η οποία είναι πιο εύχρηστη αλλά προσεγγίζει με την $||\cdot||_{L^2}-$έννοια (δηλαδή όχι με τόσο καλό τρόπο). Πρώτα θα ορίσουμε τους συντελεστές αυτών των πολυωνύμων.

Ορισμός 2.3.1 (Συντελεστές Fourier)**.** *Έστω $f \in C(\mathbb{T})$ και $k \in \mathbb{Z}$. Ορίζουμε τον $k-$οστό συντελεστή Fourier της f με τον ακόλουθο τρόπο:*

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}\, dx$$

Έχοντας τους συντελεστές, μπορούμε να ορίσουμε μία ολόκληρη σειρά, την:

$$S_f(x) \approx \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k)e^{ikx}$$

η οποία όμως δεν ξέρουμε αν συγκλίνει ούτε αν προσεγγίζει με κάποιον τρόπο την f (γι' αυτό βάζουμε το σύμβολο «≈» κι όχι «=»). Η σειρά αυτή λέγεται σειρά Fourier, και τα πολυώνυμα που θα μας απασχολήσουν είναι τα μερικά αθροίσματά της.

Ορισμός 2.3.2 (Σειρές Fourier και τα μερικά αθροίσματά τους)**.** *Έστω $f \in C(\mathbb{T})$. Η σειρά:*

$$S_f(x) \approx \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k)e^{ikx}$$

ονομάζεται σειρά Fourier της f, και τα μερικά αθροίσματά της:

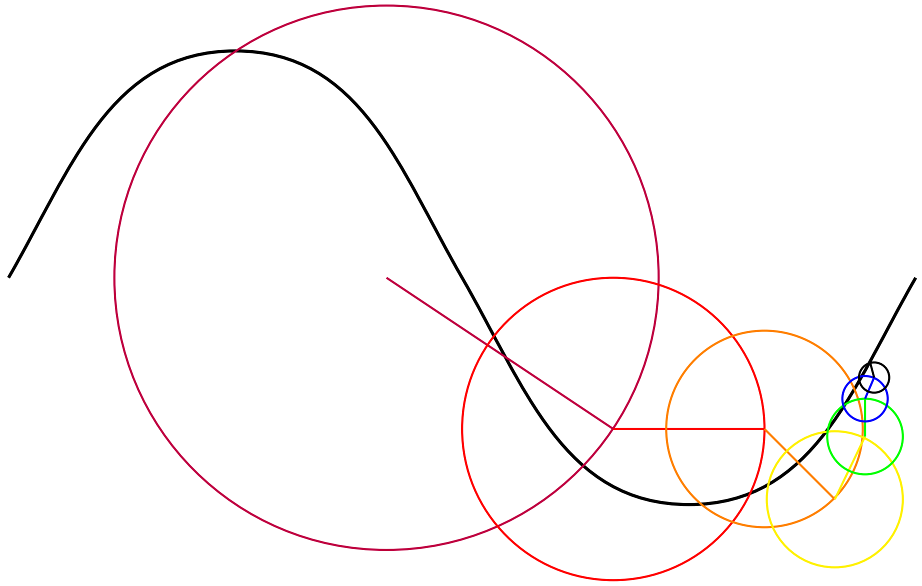
$$S_{n,f}(x) = \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k)e^{ikx}$$

είναι μιγαδικά τριγωνομετρικά πολυώνυμα.

Τα μερικά αθροίσματα της σειράς Fourier έχουν μία καλή γεωμετρική εικόνα, όπως έχουν τα πολυώνυμα Taylor στον απειροστικό λογισμό. Για να το δούμε αυτό, θα περιοριστούμε σε έναν όρο $\widehat{f}(k)e^{ikx}$. Καθώς $x \in [-\pi/k, \pi/k]$, το e^{ikx} διατρέχει έναν κύκλο, και η ποσότητα $\widetilde{f}(k)$ είναι εν γένει ένας μιγαδικός αριθμός. Οπότε πολλαπλασιάζοντας τις δύο αυτές ποσότητες μεταξύ τους ο κύκλος αποκτά ακτίνα $|\widehat{f}(k)|$ και στρέφεται κατά $\arg \widehat{f}(k)$ (οπότε έχει μία αρχική φάση).

Αν αθροίσουμε τα διάφορα $\widehat{f}(k)e^{ikx}$ παίρνουμε στην ουσία πολλά περιστεφόμενα διαδοχικά διανύσματα, τα οποία καθώς κινούνται, το τελευταίο διαγράφει μία «τροχιά». Υπό «καλές συνθήκες», η τροχιά αυτή θα είναι πολύ κοντά στην f.

Όπως έχουμε σχεδιάσει και στο εξώφυλλο, μία εικόνα είναι η ακόλουθη:



Στη συνέχεια θα δούμε τη ακόλουθη πρόταση «μοναδικότητας», που ισχύει για τον $C(\mathbb{T})$ αλλά γενικεύεται (όπως θα δούμε παρακάτω) και σε μεγαλύτερο χώρο.

Πρόταση 2.3.1. *Εάν $f \in C(\mathbb{T})$ με $\widehat{f}(k) = 0$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$, τότε $f \equiv 0$. Αντίστοιχα, αν $f, g \in C(\mathbb{T})$ και $\widehat{f}(k) = \widehat{g}(k)$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$, τότε $f \equiv g$.*

Απόδειξη: Ας θεωρήσουμε $f \in C(\mathbb{T})$ με $\widehat{f}(k) = 0$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$. Από τη σχέση αυτή μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mu(x)\ dx = 0$$

για κάθε τριγωνομετρικό πολυώνυμο $\mu(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}$, εφόσον από τη γραμμικότητα του ολοκληρώματος:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mu(x)\ dx = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-n}^{n}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{ikx}\ dx = \sum_{k=-n}^{n}\widehat{f}(-k) = 0$$

Οπότε αν θεωρήσουμε $(\mu_n)_{n=1}^{\infty}$ την ακολουθία μιγαδικών τριγωνομετρικών πολυωνύμων που εξασφαλίζεται από το Θεώρημα 2.2.1, θα έχουμε:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mu_n(x)\ dx = 0, \text{ για κάθε } n$$

και κατά συνέπεια:

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\ dx = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\ dx - \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)\mu(x)|\ dx = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - \mu(x)|\cdot|f(x)|\ dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\ dx \leqslant \frac{1}{2\pi}\cdot||f-\mu_n||_{L^\infty}\cdot||f||_{L^1} \to 0$$

Εφόσον λοιπόν $1/(2\pi)^2 \cdot \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\ dx = 0 \Rightarrow ||f||_{L^2} = 0$, έχουμε $f \equiv 0$.

Εάν στην γενικότερη περίπτωση θεωρήσουμε $f, g \in C(\mathbb{T})$ με $\widehat{f}(k) = \widehat{g}(k)$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$, τότε ισχυριζόμαστε ότι $\widehat{f-g}(k) = \widehat{f}(k) - \widehat{g}(k) = 0$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ (οπότε αναγόμαστε στην προηγούμενη περίπτωση και δείχνουμε ότι $f - g \equiv 0$). Πράγματι, ο ισχυρισμός είναι ζήτημα πράξεων, από τον ορισμό των συντελεστών Fourier.

□

2.4 Σειρές Fourier στον L^2

Στην ουσία έχουμε κάνει τη μεγαλύτερη προετοιμασία όσον αφορά την ύπαρξη βάσης Schauder στον $L^2(\mathbb{T})$. Το μόνο πρόβλημα -το οποίο είναι και αρκετά κύριο- είναι ότι ο χώρος $L^2(\mathbb{T}) = C(\mathbb{T})$ όπως τον ορίσαμε δεν είναι πλήρης. Θυμηθείτε ότι ο Ορισμός 1.5.1 των βάσεων Schauder απαιτεί χώρο Banach.

Κανονικά δεν θα είχαμε πρόβλημα, αν είχαμε ορίσει τον $L^2(\mathbb{T})$ στις Lebesgue ολοκληρώσιμες συναρτήσεις, διότι τότε μ' αυτόν τον ορισμό ο $L^2(\mathbb{T})$ είναι πράγματι πλήρης. Εδώ, για να αποφύγουμε αυτό το πρόβλημα, θα δουλέψουμε με την πλήρωση $\widetilde{L^2(\mathbb{T})}$ του $L^2(\mathbb{T})$, όπως αυτή εξασφαλίζεται από το Θεώρημα 1.1.1 (γιατί άραγε σε αυτήν την περίπτωση η πλήρωση της μετρικής δίνει και πλήρωση της νόρμας;).

Ας θεωρήσουμε λοιπόν την πλήρωση $(\widetilde{L^2(\mathbb{T})}, \widetilde{||\cdot||_{L^2}})$. Κατ' αρχάς θα συμβολίζουμε τη νόρμα $\widetilde{||\cdot||_{L^2}} = ||\cdot||_{\widetilde{L^2}}$, για ευκολία.

Κάτι που είναι σημαντικό είναι ότι, πέρα από τη νόρμα, και η συνάρτηση $\widehat{\cdot} : L^2(\mathbb{T}) \to \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ (δηλαδή ο συντελεστής Fourier) επεκτείνεται σε συνεχή συνάρτηση στον $\widetilde{L^2(\mathbb{T})}$. Αυτό θα το δείξουμε παρακάτω. Εν τω μεταξύ όμως παρατηρήστε ότι -ακόμη κι αν δεν τον ορίσαμε- ο χώρος $\ell^\infty(\mathbb{Z})$ (δηλαδή ο χώρος των φραγμένων ακολουθιών και με αρνητικούς δείκτες) εφοδιάζεται με νόρμα αντίστοιχη του $\ell^\infty(\mathbb{N})$. Αυτήν την νόρμα, την νόρμα supremum, θα τη χρησιμοποιήσουμε στα επόμενα.

Παρατήρηση 2.4.1. *Ο συντελεστής Fourier $\widehat{\cdot} : (L^2(\mathbb{T}), ||\cdot||_{L^2}) \to (\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}, ||\cdot||_{\ell^\infty})$ είναι συνεχής συνάρτηση, οπότε από το Θεώρημα (ΤΑΔΕ) επεκτείνεται σε συνεχή συνάρτηση $\widetilde{\widehat{\cdot}} : (\widetilde{L^2(\mathbb{T})}, ||\cdot||_{\widetilde{L^2}}) \to (\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}, ||\cdot||_{\ell^\infty})$.*

Απόδειξη: Θα δείξουμε ότι η $\widehat{\cdot}$ είναι φραγμένη συνάρτηση, οπότε θα είναι και συνεχής, αφού είναι γραμμική (το ότι είναι γραμμική έπεται από τον ορισμό της).

Παρατηρούμε λοιπόν ότι αν $f \in L^2(\mathbb{T})$, για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ έχουμε:

$$|\widehat{f}(k)| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx}\, dx \right| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|\, dx$$

κι από την ανισότητα Hölder:

$$|\widehat{f}(k)| \leqslant \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f|^2 \right)^{1/2} \cdot (2\pi)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot ||f||_{L^2}$$

Οπότε, αφού η παραπάνω σχέση ισχύει για κάθε k, έπεται:

$$||\widehat{f}||_{\ell^\infty} \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot ||f||_{L^2}$$

και η $\widehat{\cdot}$ είναι φραγμένη (μάλιστα με νόρμα $||\widehat{\cdot}|| \leqslant (2\pi)^{-1/2}$), κατά συνέπεια είναι συνεχής.

Από το Θεώρημα (ΤΑΔΕ) υπάρχει μοναδική συνεχής επέκταση $\widetilde{\widehat{\cdot}} : (\widetilde{L^2(\mathbb{T})}, ||\cdot||_{\widetilde{L^2}}) \to (\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}, ||\cdot||_{\ell^\infty})$.

□

Τέλος, θα εισάγουμε ένα εσωτερικό γινόμενο στον $L^2(\mathbb{T})$, από το οποίο η συνήθης νόρμα επάγεται. Στον $L^2(\mathbb{T})$ η συνάρτηση:

$$\langle f, g \rangle_{L^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f \cdot \overline{g}$$

είναι εσωτερικό γινόμενο, και μάλιστα επάγει τη νόρμα $||\cdot||_{L^2}$:

$$\sqrt{\langle f, f \rangle_{L^2}} = \left(\int_{-\pi}^{\pi} f \cdot \overline{f} \right)^{1/2} = \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f|^2 \right)^{1/2} = ||f||_{L^2}$$

Το εσωτερικό γινόμενο αυτό θα μας είναι πολύ χρήσιμο, κυρίως διότι μέσω αυτού μπορούμε να εκφράσουμε τους συντελεστές Fourier μίας συνάρτησης του $L^2(\mathbb{T})$. Παρατηρήστε ότι:

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx}\, dx = \langle f, e^{ik(\cdot)} \rangle_{L^2}$$

κι επίσης θυμηθείτε την Πρόταση 1.3.2, σε συνδυασμό με την ακόλουθη παρατήρηση:

Παρατήρηση 2.4.2. *Η οικογένεια $(e^{-ik(\cdot)})_{k=-\infty}^{\infty}$ είναι ορθοκανονική οικογένεια στον $(L^2(\mathbb{T}), \langle\cdot,\cdot\rangle_{L^2})$. Δηλαδή για κάθε $k \neq \lambda$:*

$$\langle e^{ik(\cdot)}, e^{i\lambda(\cdot)}\rangle_{L^2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-\lambda)x}\ dx = 0$$

και για κάθε k:

$$\langle e^{ik(\cdot)}, e^{ik(\cdot)}\rangle_{L^2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx = 1$$

Φαίνεται λοιπόν ότι -με κάποια επιχειρηματολογία- ίσως είναι δυνατόν να αποδειχθεί ότι η οικογένεια $(e^{ik(\cdot)})_{k=-\infty}^{\infty}$ είναι ορθοκανονική βάση του $\widetilde{L^2(\mathbb{T})}$.

Έχοντας πει όλα αυτά, είναι δυνατόν να αποδείξουμε ένα βοηθητικό αποτέλεσμα για τη μελέτη μας. Αντί να δείξουμε απ' ευθείας ότι κάθε $f \in \widetilde{L(\mathbb{T})}$ προσεγγίζεται από τα μερικά αθροίσματα της σειράς Fourier της, θα δείξουμε πρώτα ότι αν κάθε $g \in L^2(\mathbb{T})$ προσεγγίζεται από τα μερικά αθροίσματα της σειράς Fourier της, τότε κάθε $f \in \widetilde{L(\mathbb{T})}$ προσεγγίζεται από τα μερικά αθροίσματα της σειράς Fourier της. Στην ουσία ανάγουμε το γενικό πρόβλημα προσέγγισης, στις συνεχείς συναρτήσεις.

Λήμμα 2.4.1. *Εάν για κάθε $g \in L^2(\mathbb{T})$ αληθεύει ότι:*

$$g = \lim_{n\to\infty}^{||\cdot||_{\widetilde{L^2}}} \sum_{k=-n}^{n} \widehat{g}(k)e^{ik(\cdot)} \Leftrightarrow \left\|g - \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{g}(k)e^{ik(\cdot)}\right\|_{\widetilde{L^2}} = 0 \Leftrightarrow \left\|g - \sum_{k=-n}^{n} \widehat{g}(k)e^{ik(\cdot)}\right\|_{\widetilde{L^2}} \to 0$$

τότε για κάθε $f \in \widetilde{L^2(\mathbb{T})}$:

$$f = \lim_{n\to\infty}^{||\cdot||_{\widetilde{L^2}}} \sum_{k=-n}^{n} \widetilde{\widehat{f}}(k)e^{ik(\cdot)} \Leftrightarrow \left\|f - \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widetilde{\widehat{f}}(k)e^{ik(\cdot)}\right\|_{\widetilde{L^2}} = 0 \Leftrightarrow \left\|f - \sum_{k=-n}^{n} \widetilde{\widehat{f}}(k)e^{ik(\cdot)}\right\|_{\widetilde{L^2}} \to 0$$

Απόδειξη: Ας θεωρήσουμε $f \in \widetilde{L^2(\mathbb{T})}$ και μία οικογένεια $(g_m)_{m=1}^{\infty}$ συναρτήσεων του $L^2(\mathbb{T})$, που την προσεγγίζουν. Τέτοια οικογένεια υπάρχει, αφού από το Θεώρημα 1.1.1 γνωρίζουμε ότι ο $L^2(\mathbb{T})$ είναι πλήρης υπόχωρος του $\widetilde{L^2(\mathbb{T})}$. Για την ακρίβεια ξέρουμε ότι:

$$\overline{\mathrm{i}_{L^2}(L^2(\mathbb{T}))} = \widetilde{L^2(\mathbb{T})}$$

αλλά, όπως γίνεται συνήθως, ταυτίζουμε τα $\mathrm{i}_{L^2}(L^2(\mathbb{T}))$ και $L^2(\mathbb{T})$.

Παρατηρούμε ότι το όριο $\sum_{k=-\infty}^{\infty}\widetilde{\widehat{f}}(k)e^{ik(\cdot)}$ υπάρχει: την απόδειξη αυτού του ισχυρισμού μπορείτε να βρείτε στην απόδειξη της Πρότασης 1.3.2 (ii. $\Rightarrow$ iii.). Γράφουμε λοιπόν:

$$\begin{aligned}
\left\|f - \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widetilde{\widehat{f}}(k)e^{ik(\cdot)}\right\|_{\widetilde{L^2}} &\leqslant ||f-g_m||_{\widetilde{L^2}} + \left\|g_m - \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{g_m}(k)e^{ik(\cdot)}\right\|_{\widetilde{L^2}} + \\
&+ \left\|\sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{g_m}(k)e^{ik(\cdot)} - \sum_{k=-n}^{n} \widetilde{\widehat{f}}(k)e^{ik(\cdot)}\right\|_{\widetilde{L^2}} + \left\|\sum_{k=-n}^{n} \widetilde{\widehat{f}}(k)e^{ik(\cdot)} - \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widetilde{\widehat{f}}(k)e^{ik(\cdot)}\right\|_{\widetilde{L^2}} \Rightarrow \\
\Rightarrow \left\|f - \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widetilde{\widehat{f}}(k)e^{ik(\cdot)}\right\|_{\widetilde{L^2}} &\leqslant ||f-g_m||_{\widetilde{L^2}} + \left\|\sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{g_m}(k)e^{ik(\cdot)} - \sum_{k=-n}^{n} \widetilde{\widehat{f}}(k)e^{ik(\cdot)}\right\|_{\widetilde{L^2}} \\
&+ \left\|\sum_{k=-n}^{n} \widetilde{\widehat{f}}(k)e^{ik(\cdot)} - \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widetilde{\widehat{f}}(k)e^{ik(\cdot)}\right\|_{\widetilde{L^2}}
\end{aligned}$$

και αφήνουμε $m \to \infty$, οπότε παίρνουμε:

$$\left\|f - \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widetilde{\widehat{f}}(k)e^{ik(\cdot)}\right\|_{\widetilde{L^2}} \leqslant \left\|\sum_{|k|\geqslant n+1} \widetilde{\widehat{f}}(k)e^{ik(\cdot)}\right\|_{\widetilde{L^2}} + \left\|\sum_{k=-n}^{n} \widetilde{\widehat{f}}(k)e^{ik(\cdot)} - \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widetilde{\widehat{f}}(k)e^{ik(\cdot)}\right\|_{\widetilde{L^2}}$$

Τέλος, αν αφήσουμε και το $n \to \infty$, παίρνουμε το ζητούμενο.

□

Έτσι λοιπόν πρέπει να δείξουμε ότι υπάρχει καλή προσέγγιση των συνεχών συναρτήσεων. Αυτό στην ουσία θα γίνει χρησιμοποιώντας το ακόλουθο σημαντικό λήμμα:

Λήμμα 2.4.2 (Βέλτιστη προσέγγιση)**.** *Έστω $f \in L^2(\mathbb{T})$. Για κάθε μιγαδικό τριγωνομετρικό πολυώνυμο $\mu = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ik(\cdot)}$ αληθεύει ότι:*

$$\left\| f - \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k) e^{ik(\cdot)} \right\|_{L^2} \leqslant \left\| f - \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ik(\cdot)} \right\|_{L^2}$$

με την ισότητα να ισχύει εάν και μόνο αν $c_k = \widehat{f}(k)$. Ισχύει λοιπόν ότι τα μερικά αθροίσματα της σειράς Fourier «ελαχιστοποιούν» -κατά κάποιον τρόπο- τη νόρμα $\|\cdot\|_{L^2}$.

Απόδειξη: Αν θεωρήσουμε τη διαφορά:

$$f - \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ik(\cdot)} = \left(f - \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k) e^{ik(\cdot)} \right) + \sum_{k=-n}^{n} \left(\widehat{f}(k) - c_k\right) e^{ik(\cdot)}$$

μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι οι δύο δεξιοί όροι είναι κάθετοι μεταξύ τους. Αυτό -πολύ συνοπτικά- μπορεί κανείς να το δει με πράξεις, από τα εξής τρία:

- Αληθεύει (όπως εξάλλου είδαμε) η σχέση $\widehat{f}(k) = \langle f, e^{ik(\cdot)} \rangle_{L^2}$.
- Χρησιμοποιώντας το πρώτο σημείο, από την απόδειξη της Πρότασης 1.3.2 (ii. $\Rightarrow$ iii.) (ή με πράξεις):
$$f - \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k) e^{ik(\cdot)} \perp \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k) e^{ik(\cdot)}$$
- Γενικότερα, χρησιμοποιώντας το πρώτο σημείο, με πράξεις:
$$f - \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k) e^{ik(\cdot)} \perp \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ik(\cdot)}$$
για κάθε c_k.

Χρησιμοποιώντας τώρα το Πυθαγόρειο θεώρημα:

$$\left\| f - \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ik(\cdot)} \right\|_{L^2} = \left\| f - \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k) e^{ik(\cdot)} \right\|_{L^2} + \left\| \sum_{k=-n}^{n} \left(\widehat{f}(k) - c_k\right) e^{ik(\cdot)} \right\|_{L^2}$$

έπεται το ζητούμενο. Μάλιστα η ισότητα ισχύει εάν και μόνο αν ο δεύτερος όρος δεξιά είναι μηδέν, δηλαδή εάν και μόνο αν $c_k = \widehat{f}(k)$.

□

Αυτό το λήμμα είναι πολύ χαρακτηριστικό για την ανάλυση Fourier. Μάλιστα σε κάποιες παρουσιάσεις -για παράδειγμα στο [Ca]- μέσω αυτού ορίζονται φυσιολογικά οι συντελεστές Fourier.

Πρόταση 2.4.1. *Για κάθε συνεχή συνάρτηση $g \in L^2(\mathbb{T})$ τα μερικά αθροίσματα της σειράς Fourier:*

$$\sum_{k=-n}^{n} \widehat{g}(k) e^{ik(\cdot)} \in \widetilde{L^2(\mathbb{T})}$$

προσεγγίζουν την g, με τη νόρμα $\|\cdot\|_{\widetilde{L^2}}$.

Απόδειξη: Επιλέγουμε οικογένεια μιγαδικών τριγωνομετρικών πολυωνύμων $(\mu_m)_{m=1}^{\infty}$, σύμφωνα με το Θεώρημα 2.2.1, που προσεγγίζει την g. Από το Λήμμα 2.4.2 έπεται το ζητούμενο.

□

Επομένως, χρησιμοποιώντας επίσης το Λήμμα 2.4.1 παίρνουμε το ακόλουθο σημαντικό θεώρημα:

Θεώρημα 2.4.1 (Προσέγγιση στον $\widetilde{L^2(\mathbb{T})}$). *Κάθε $f \in \widetilde{L^2(\mathbb{T})}$ προσεγγίζεται από τα μερικά αθροίσματα της σειράς Fourier της:*

$$\sum_{k=-n}^{n} \widetilde{\widetilde{f}}(k) e^{ik(\cdot)} \in \widetilde{L^2(\mathbb{T})}$$

με τη νόρμα $\|\cdot\|_{\widetilde{L^2}}$.

Τέλος, με την ακόλουθη πρόταση θα δείξουμε τη μοναδικότητα της αναγραφής σε σειρά Fourier, και κατά συνέπεια (βάση του Ορισμού 1.5.1) ότι η οικογένεια $(e^{ik(\cdot)})_{k=-\infty}^{\infty}$ αποτελεί βάση Schauder του $\widetilde{L^2(\mathbb{T})}$.

Πρόταση 2.4.2. *Για κάθε $f \in \widetilde{L^2(\mathbb{T})}$ η αναγραφή σε σειρά:*

$$f = \lim_{n\to\infty}^{\|\cdot\|_{\widetilde{L^2}}} \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ik(\cdot)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik(\cdot)}$$

είναι μοναδική.

Απόδειξη: Από την ίδια την Πρόταση 1.3.2, επειδή ισχύει το iii., θα ισχύει και το ii. Από το ii. έπεται η μοναδικότητα, αφού δεν υπάρχει μη τετριμμένος τρόπος κανείς να γράψει τη μηδενική συνάρτηση.

□

Έτσι λοιπόν, από το Θεώρημα 2.4.1 και την Πρόταση 2.4.2, παίρνουμε (επιτέλους) αυτό που επιδιώκαμε:

Θεώρημα 2.4.2 (Βάση Shauder και σειρές Fourier). *Η ορθοκανονική οικογένεια $(e^{ik(\cdot)})_{k=-\infty}^{\infty}$ αποτελεί βάση Schauder στον $\widetilde{L^2(\mathbb{T})}$.*

Είναι ενδιαφέρον το ότι μ' αυτόν τον τρόπο δεν αποδείξαμε κάτι λιγότερο απ' αυτό που συνήθως αποδεικνύεται στη θεωρία μέτρου. Ο χώρος που εμείς συμβολίσαμε $\widetilde{L^2(\mathbb{T})}$ είναι ο αντίστοιχος $L^2(\mathbb{T})$ στις Lebesgue ολοκληρώσιμες συναρτήσεις (δηλαδή είναι ισομορφικοί). Εμείς όμως δεν θα το αποδείξουμε.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Αποτελέσματα σε χώρους με βάσεις Schauder

Βιβλιογραφία

[Ca] Carney Sean: ***Fourier Analysis*** (Σημειώσεις UCLA, 2021)

[Be] Bernstein Sergei: ***Proof of the theorem of Weierstrass based on the calculus of probabilities*** (Comm. Kharkov Math. Soc. 13 (1912), 1–2 - Μετάφραση στα αγγλικά από τον Michael S. Floater, 1912 (πρωτότυπο), 2017 (μετάφραση))

[Βα] Βαλέττας Πέτρος: ***Πραγματική Ανάλυση*** (Σημειώσεις ΕΚΠΑ, 2015)

[Γι1] Γιαννόπουλος Απόστολος: ***Αρμονική Ανάλυση*** (Σημειώσεις ΕΚΠΑ, 2022)

[Γι2] Γιαννόπουλος Απόστολος: ***Σημειώσεις Συναρτησιακής Ανάλυσης*** (Σημειώσεις Παν. Κρήτης, 2003)

[Δη] Δήμογλου Κωνσταντίνος: ***Μοναδικότητα Unconditional Βάσης Schauder σε χώρους Banach*** (Παν. Ιωανίνων, 2019)

[Κα] Κατάβολος Αριστείδης: ***Εισαγωγή στη Θεωρία Τελεστών*** (Συμμετρία, 2008 - Επικαιροποίηση 2022)

[ΝΖΚΦ] Νεγρεπόντης Σ., Ζαχαριάδης Θ., Καλαμίδας Ν. Φαρμάκη Β.: ***Γενική Τοπολογία και Συναρτησιακή Ανάλυση*** (Συμμετρία, 1997)

[Φρ1] Φράγκος Αναστάσιος: ***Εισαγωγή στην Επίπεδη Υπερβολική Γεωμετρία*** (Σημειώσεις ΕΚΠΑ, επηρεασμένες από το μάθημα «533. Εισαγωγή στη Θεμελίωση της Γεωμετρίας», 2021)

[Φρ2] Φράγκος Αναστάσιος: ***Τοπολογία - Σημειώσεις παραδόσεων*** (Σημειώσεις ΕΚΠΑ, από τα μαθήματα της κ. Παπατριανταφύλλου Μ., 2023)