

Лабораторная работа №3
по курсу
Методы вычислений
«Безусловная минимизация функций двух переменных.
Методы, использующие производные.»

Фроловский Алексей Вадимович

группа ИУ7-17
Вариант № 14
23 ноября 2012 года

Цель работы

Написать программы нахождения минимума, реализующие:

1. Метод сопряженных градиентов;
2. Метод Ньютона с конечно-разностной аппроксимацией производных;
3. Метод Девидона–Флетчера–Пауэла (ДФП).

Найти точку минимума квадратичной функции

$$z = 4x_1x_2 + 7x_1^2 + 4x_2^2 + 6\sqrt{5}x_1 - 12\sqrt{5}x_2 + 51 \quad (1)$$

с использованием указанных выше методов, а также используя возможности Optimization Toolbox Matlab. В качестве стартовой взять точку $(0; -\sqrt{5})$.

Для функции

$$z = x_2^3 + 2x_2x_1 + \frac{1}{\sqrt{x_1x_2}} + x_1 \quad (2)$$

с помощью созданных программ найти локальный минимум, ближайший к стартовой точке $(3, 3)$.

Критерий окончания выбрать так, чтобы координаты вычисленного приближения к точке минимума функции содержали три верные значащие цифры.

Ход работы

Найдем минимум функции (1) теоритическим способом. Составим и решим систему уравнений (3)

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0 \end{cases} \quad (3)$$

или

$$\begin{cases} 4x_2 + 14x_1 + 6\sqrt{5} = 0 \\ 4x_1 + 8x_2 - 12\sqrt{5} = 0 \end{cases} \quad (4)$$

Получим $x_1 = -\sqrt{5}$, $x_2 = 2\sqrt{5}$. Подставим полученные значения в (1):

$$f(-\sqrt{5}, 2\sqrt{5}) = -24 \quad (5)$$

Таким образом, минимальное значение функции -24 достигается в точке $(-2.2362, 4.4719)$.

Покажем, что функция (1) является выпуклой.

$$f''_{xx} = \begin{pmatrix} 14 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \quad (6)$$

Как можно увидеть данная матрица является положительно определенной и, следовательно, функция (1) является выпуклой.

Доопределим функцию (2) так, чтобы обеспечить нахождение требуемого локального минимума. Для этого наложим на область определения ограничения $x_1 > 0$, $x_2 > 0$

Результаты

Сравнение работы методов для квадратичной функции (1)

Метод	x^*	$f(x^*)$	количество вычислений функции
Standart	(-2.2362, 4.4719)	-24.0000	85
Conjugate gradient	(-2.2361, 4.4721)	-24.0000	85
Newton method	(-2.2361, 4.4719)	-24.0000	53
DFP gradient	(-2.2361, 4.4721)	-24.0000	21

Для функции (2)

Метод	x^*	$f(x^*)$	количество вычислений функции
Standart	(0.4742, 0.5406)	3.1200	90
Conjugate gradient	(0.4742, 0.5407)	3.1200	208
Newton method	(0.4743, 0.5407)	3.1200	166
DFP gradient	(0.4743, 0.5406)	3.1200	82

Лучшие результаты как по точности, так и по трудоемкости, показывает метод ДФП. Метод сопряженных градиентов показал значительно худшие результаты для обеих функций. С точки зрения точности поиска все три метода показали приблизительно одинаковые значения.