Лабораторная работа №4
по курсу
Методы вычислений
«Минимизация функций двух переменных при наличии ограничений.»

Фроловский Алексей Вадимович

группа ИУ7-17
Вариант № 14
5 декабря 2012 года

Цель работы

Написать программы нахождения минимума функции при наличии онраничений, реализующие:

1. Метод штрафных функций;
2. Метод барьерных функций.

Найти точку минимума квадратичной функции

$$z = 4x_1x_2 + 7x_1^2 + 4x_2^2 + 6\sqrt{5}x_1 - 12\sqrt{5}x_2 + 51 \tag{1}$$

при наличии следующих ограничений:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 4x_1 + 5x_2 & \leq & 0 \\ x_1 + x_2^2 & \leq & 0 \\ -6x_1 - x_2 - 26 & \leq & 0 \end{array} \right. \tag{2}$$

с использованием указанных выше методов.

Ход работы

Поскольку конечное перечение выпуклых множеств является выпуклым множеством, то образованное ограничениями множество является выпуклым.

Покажем. что функция (1) является выпуклой с использованием критерия Сильвестра.

$$f''_{xx} = \left(\begin{array}{cc} 14 & 4 \\ 4 & 8 \end{array} \right) \tag{3}$$

Как можно увидеть данная матрица является положительно определенной и, следовательно, функция (1) является выпуклой.

Результаты вычисления минимума функции разными методами представлены таблице.

Метод	x^*	$f(x^*)$	количество вычислений функции
Penalty functions	(-1.9572, 1.3991)	10.8907	3439
Barier functions	(-1.9566, 1.3988)	10.8930	2441

Проверим выполнение условий Куно-Такера для полученных решений.

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} + \sum\limits_{i=1}^{3} \lambda_i \dfrac{\partial g_i}{\partial x_1} & = & 4x_2 + 14x_1 + 6\sqrt{5} + \lambda_1(1) + \lambda_2(1) + \lambda_3(-6) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_1} + \sum\limits_{i=1}^{3} \lambda_i \dfrac{\partial g_i}{\partial x_2} & = & 4x_1 + 8x_2 - 12\sqrt{5} + \lambda_1(5) + \lambda_2(2x_2) + \lambda_3(-1) = 0 \\ \lambda_1 g_1(x) & = & \lambda_1(4x_1 + 5x_2) = 0 \\ \lambda_2 g_2(x) & = & \lambda_2(x_1 + x_2^2) = 0 \\ \lambda_3 g_3(x) & = & \lambda_3(-6x_1 - x_2 - 26) = 0 \\ g_1(x) & = & 4x_1 + 5x_2 \leq 0 \\ g_2(x) & = & x_1 + x_2^2 \leq 0 \\ g_3(x) & = & -6x_1 - x_2 - 26 \leq 0 \end{array} \right. \tag{4}$$

Заметим, что ограничения $g_1(x)$ и $g_3(x)$ являются неактивными, поэтому $\lambda_1 = 0$ и $\lambda_3 = 0$. В итоге получаем 2 уравнения:

$$4x_2 + 14x_1 + 6\sqrt{5} + \lambda_2(1) = 0$$
$$4x_1 + 8x_2 - 12\sqrt{5} + \lambda_2(2x_2) = 0 \tag{5}$$

получаемые значения λ_2 из которых должны быть примерно равны.
Для решения полученного методом штрафных функций имеем:

$$\lambda_2 = 8.3884$$
$$\lambda_2 = 8.3870 \tag{6}$$

Для решения полученного методом барьерных функций имеем:

$$\lambda_2 = 8.3812$$
$$\lambda_2 = 8.3890 \tag{7}$$

Исходя из полученных значений λ_2 можно сделать вывод, что условия Куно-Такера выполнены с точность до сотых и полученные точки являются решениями поставленной выше задачи.