ИУ7, 10-й сем., Численные методы
Лабораторная работа № 1
Распространение тепла в стержне

Формулировка задачи

Найти температуру $u(x,t)$ тонкого стержня длиной l с теплоизолированной боковой поверхностью, на концах которого задан температурный режим: один конец поддерживается при заданной фиксированной температуре или теплоизолирован, на другой конец извне подается заданный тепловой поток. Коэффициент теплопроводности K меняется в зависимости от температуры по заданному закону $K = K(u)$. В начальный момент времени $t = 0$ стержень находится при фиксированной температуре u_0 по всей длине. Найти момент времени T, в который температура в середине стержня будет наибольшей.

Указания по решению задачи

Для приближенного решения поставленной краевой задачи можно использовать явную, неявную или смешанную разностную схему, определяемую шагом h по x и шагом τ по t. Для выбранной разностной схемы следует провести анализ на устойчивость и сходимость и обосновать выбор шага по координате и по времени, оценив точность полученного решения.

Решение представляется в табличном виде и графически. Качество составленной программы можно проверить на следующих тестовых примерах.

1. Исходные данные задачи: $l = 1$, $K = c = \rho = 1$, $\varphi(x) = \cos\frac{\pi x}{2}$, $\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0$, $u(l,t) = 0$. Решение задачи: $u(x,t) = e^{-\frac{\pi^2 t}{4}} \cos\frac{\pi x}{2}$.

2. Исходные данные задачи: $l = 1$, $K = c = \rho = 1$, $\varphi(x) = 1 - x^2$, $\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0$, $u(l,t) = 0$. Решение задачи можно найти методом Фурье. Для оценки суммы остатка ряда Фурье можно использовать мажоранту $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3}$, скорость сходимости которой оценивается в соответствии с интегральным признаком Коши:

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3} \leqslant \int_N^{\infty} \frac{dx}{(2x+1)^3}.$$

Литература

1. *Самарский А.А.*, *Тихонов А.Н.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977.
2. *Калиткин Н.Н.* Численные методы. М.: Наука, 1978.
3. *Самарский А.А.*, *Гулин А.В.* Численные методы. М.: Наука, 1989.
4. *Самарский А.А.*, *Николаев Е.С.* Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978.
5. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. М.: Наука, 1989.

Варианты задания

В каждом из указанных ниже вариантов $l = 1$, $\rho = 1$. Коэффициент теплопроводности $K(u)$ определяется формулой $K(u) = a + bu^{\sigma}$. Подаваемый тепловой поток на одном из концов задается одной из функций

$$W_1(t) = \begin{cases} Q, & 0 \leqslant t < t_0; \\ 0, & t \geqslant t_0; \end{cases} \qquad W_2(t) = \begin{cases} 2Qt, & 0 \leqslant t < t_0; \\ 0, & t \geqslant t_0; \end{cases}$$

$$W_3(t) = \begin{cases} 2Q(t_0 - t), & 0 \leqslant t < t_0; \\ 0, & t \geqslant t_0; \end{cases} \qquad W_4(t) = \begin{cases} 2Qt, & 0 \leqslant t < 0{,}5t_0; \\ 2Q(t_0 - t), & 0{,}5t_0 \leqslant t < t_0; \\ 0, & t \geqslant t_0, \end{cases}$$

где $t_0 = 0{,}5$, $Q = 10$ во всех вариантах. Удельная теплоемкость c стержня, плотность массы ρ, начальная температура u_0 стержня и постоянные a, b, σ, а также вид температурного режима (W для заданного теплового потока, u для заданной температуры) на концах стержня заданы в зависимости от варианта задания в следующей таблице.

№	c	a	b	σ	u_0	Тепловой режим		№	c	a	b	σ	u_0	Тепловой режим	
						слева	справа							слева	справа
1	1	1	1	0,5	0,1	$W=W_1$	$W=0$	17	0,5	1	2	0,25	0,1	$W=W_1$	$W=0$
2	1	1	1	0,5	0,1	$W=W_2$	$W=0$	18	0,5	1	2	0,25	0,1	$W=W_2$	$W=0$
3	1	1	1	0,5	0,1	$W=W_3$	$W=0$	19	0,5	1	2	0,25	0,1	$W=W_3$	$W=0$
4	1	1	1	0,5	0,1	$W=W_4$	$W=0$	20	0,5	1	2	0,25	0,1	$W=W_4$	$W=0$
5	2	0,5	2	1,25	0,2	$W=0$	$W=W_1$	21	2	0,5	2	1,25	0,2	$W=0$	$W=W_1$
6	2	0,5	2	1,25	0,2	$W=0$	$W=W_2$	22	2	0,5	2	1,25	0,2	$W=0$	$W=W_2$
7	2	0,5	2	1,25	0,2	$W=0$	$W=W_3$	23	2	0,5	2	1,25	0,2	$W=0$	$W=W_3$
8	2	0,5	2	1,25	0,2	$W=0$	$W=W_4$	24	2	0,5	2	1,25	0,2	$W=0$	$W=W_4$
9	0,5	0,1	1	2	0,1	$W=W_1$	$u=u_0$	25	0,5	1	1	0,5	0,1	$W=W_1$	$u=u_0$
10	0,5	0,1	1	2	0,1	$W=W_2$	$u=u_0$	26	0,5	1	1	0,5	0,1	$W=W_2$	$u=u_0$
11	0,5	0,1	1	2	0,1	$W=W_3$	$u=u_0$	27	0,5	1	1	0,5	0,1	$W=W_3$	$u=u_0$
12	0,5	0,1	1	2	0,1	$W=W_4$	$u=u_0$	28	0,5	1	1	0,5	0,1	$W=W_4$	$u=u_0$
13	2	5	0,1	2,5	0,05	$u=u_0$	$W=W_1$	29	2	3	0,7	1,5	0,05	$u=u_0$	$W=W_1$
14	2	5	0,1	2,5	0,05	$u=u_0$	$W=W_2$	30	2	3	0,7	1,5	0,05	$u=u_0$	$W=W_2$
15	2	5	0,1	2,5	0,05	$u=u_0$	$W=W_3$	31	2	3	0,7	1,5	0,05	$u=u_0$	$W=W_3$
16	2	5	0,1	2,5	0,05	$u=u_0$	$W=W_4$	32	2	3	0,7	1,5	0,05	$u=u_0$	$W=W_4$

ИУ7, 10-й сем., Численные методы
Лабораторная работа № 2
Колебания струны

Формулировка задачи

Найти функцию $u(x,t)$, описывающую поперечные малые колебания однородной струны длины $l=1$, концы которой движутся по заданным законам. Значение $u(x,t)$ задает величину отклонения точки струны с координатой x в момент времени t от положения равновесия. Движение левого конца струны $(x=0)$ определяется законом $u(0,t)=\mu(t)$, правого $(x=l)$ — законом $u(l,t)=\nu(t)$. Начальное положение струны $u(x,0)=\varphi(x)$, начальная скорость $u_t(x,0)=\psi(x)$. Закон колебаний струны определяется дифференциальным уравнением $u_{tt}=a^2u_{xx}$.

Указания по решению задачи

Для приближенного решения поставленной краевой задачи рекомендуется использовать разностную схему "крест", определяемую шагом h по x и τ по t.

Провести анализ указанной разностной схемы на устойчивость и сходимость.

Решение представить в табличном виде и графически. Обосновать выбор шага по координате и по времени. Оценить точность полученного решения.

Качество составленной программы можно проверить на следующих тестовых примерах.

1. Исходные данные задачи: $l=1$, $a=1$, $\varphi(x)=\sin\pi x$. $\psi(x)=0$, $\mu(t)=\nu(t)=0$.
   Решение задачи: $u(x,t)=\sin\pi x\,\cos\pi t$.
2. Исходные данные задачи: $l=1$, $a=1$, $\varphi(x)=x(x-1)$, $\psi(x)=0$, $\mu(t)=\nu(t)=0$.
   Решение задачи найти методом Фурье. Для оценки суммы остатка ряда Фурье, записанного только по нечетным степеням, использовать мажоранту $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^3}$, скорость сходимости которой оценивается в соответствии с интегральным признаком Коши:

$$\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^3}\leqslant\int\limits_N^{\infty}\frac{dx}{(2x+1)^3}.$$

Литература

1. *Самарский А.А., Тихонов А.Н.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977.
2. *Калиткин Н.Н.* Численные методы. М.: Наука, 1978.
3. *Самарский А.А., Гулин А.В.* Численные методы. М.: Наука, 1989.
4. *Самарский А.А., Николаев Е.С.* Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978.
5. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. М.: Наука, 1989.

Варианты задания

№	$\varphi(x)$	$\psi(x)$	$\mu(t)$	$\nu(t)$
1.	$x(2-x)$	$\cos x$	0	$1+0{,}5t^2$
2.	$x\cos\frac{\pi x}{2}$	$x(2-x)$	$t+0{,}2t^2$	0
3.	$\cos\frac{\pi x}{2}$	x^2	$1-0{,}5t$	$0{,}5t$
4.	$(x+0{,}5)(1-x)$	$\sin(x+0{,}2)$	$0{,}5(1+t)$	$2t$
5.	$x(x+1)$	$2\sin x$	0	$2-t$
6.	$(x+0{,}2)\sin\frac{\pi x}{2}$	$1+x^2$	0	$0{,}6(2-t^2)$
7.	$x\sin\pi x$	$(x+1)^2$	t	0
8.	$3x(1-x)$	$\cos(x+0{,}5)$	$2t$	0
9.	$x(2x-0{,}5)$	$\cos 2x$	t^2	$1{,}5$
10.	$(x+1)\sin\pi x$	$x(x+1)$	0	$0{,}5t$
11.	$(1-x)\cos\frac{\pi x}{2}$	$2x+1$	$1+t-t^2$	0
12.	$0{,}5x(x+1)$	$x\cos x$	$2t^2$	1
13.	$0{,}5(x^2+1)$	$\cos 2x$	$0{,}5+2t-t^2$	1
14.	$(x+1)\sin\frac{\pi x}{2}$	x^2	$0{,}5t$	$2-t^2$
15.	$x^2\cos\pi x$	x^2-x-1	$0{,}5t$	$t-1$
16.	$(1-x^2)\cos\pi x$	$2x+0{,}6$	$1+0{,}4t$	0
17.	$(x+0{,}5)^2-x$	$(x+1)\sin x$	$0{,}5(0{,}5+t)$	$1{,}25$
18.	$1{,}2x-x^2$	$(x+0{,}6)\sin x$	0	$0{,}2+0{,}5t$
19.	$(x+0{,}5)(x+1)$	$\cos(x+0{,}5)$	$0{,}5$	$3-2t$
20.	$0{,}5(x+1)^2$	$(x+1)\cos\pi x$	$0{,}5$	$2-2t$
21.	$(x+0{,}4)\sin\pi x$	$(x+1)^2$	$0{,}5t$	0
22.	$(2-x)\sin\pi x$	$(x+0{,}6)^2$	t^2	$3(t-t^2)$
23.	$x\cos\frac{\pi x}{2}$	$2x^2$	0	t^2
24.	$(x+0{,}5)\cos\frac{\pi x}{2}$	$1+x-x^2$	$0{,}5(1+t)-t^2$	$t-0{,}5t^2$
25.	$1{,}5(x-x^2)$	$2\sin(x+0{,}4)$	0	$2t-1{,}5t^2$
26.	$0{,}4(x+0{,}5)^2$	$x\sin(x+0{,}6)$	$0{,}1+0{,}5t$	$0{,}9$
27.	$(x^2+0{,}5)\cos\pi x$	$(x+0{,}7)^2$	$0{,}5$	$2t-1{,}5$
28.	$(x+2)(1-0{,}5x)$	$2\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$	2	$1{,}5-t^2$
29.	$(x^2+1)(1-x)$	$1+\sin x$	1	$0{,}5t$
30.	$(x+0{,}2)\sin\frac{\pi x}{2}$	$1+x^2$	$0{,}6t$	$1{,}2$

ИУ7, 10-й сем., Численные методы
Лабораторная работа № 3
Уравнение Пуассона

Формулировка задачи

Найти решение краевой задачи для уравнения Пуассона в прямоугольнике $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant b$ в следующей формулировке:

$$\Delta u + f = 0,$$
$$u\big|_{x=0} = \varphi_0(y), \quad u\big|_{y=0} = \psi_0(x),$$
$$u\big|_{x=a} = \varphi_a(y), \quad u\big|_{y=b} = \psi_b(x),$$

Указания по решению задачи

Для приближенного решения краевой задачи рекомендуется использовать метод конечных разностей с разностной схемой "крест", выбирая по каждой из осей одинаковое число $N+1$ равноотстоящих узлов. Решение разностной задачи провести итерационным методом (верхней релаксации).

Провести анализ указанной разностной схемы на устойчивость и сходимость. Оценить точность полученного решения. Для этого повторить вычисления, уменьшив вдвое шаг по каждой оси и сравнив результаты двух расчетов по совпадающим узлам.

Решение представить в табличном виде и графически.

Качество составленной программы можно проверить на следующих тестовых примерах.

1. Исходные данные задачи: $a = 1$, $b = 1$, $\varphi_0(y) = \varphi_a(y) = 0$, $\psi_0(x) = 0$, $\psi_b(x) = \sin \pi x$, $f(x, y) = 0$.

Решение задачи: $u(x, t) = \sin \pi x \dfrac{\operatorname{sh} \pi y}{\operatorname{sh} \pi}$.

2. Исходные данные задачи: $a = 1$, $b = 1$, $\varphi_0(y) = \varphi_a(y) = 0$, $\psi_0(x) = 0$, $\psi_b(x) = x(x-1)$, $f(x, y) = 0$.

Решение задачи найти методом Фурье. Для оценки суммы остатка ряда Фурье, записанного только по нечетным степеням, использовать мажоранту $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{(2n+1)^3}$, скорость сходимости которой оценивается в соответствии с интегральным признаком Коши:

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3} \leqslant \int_N^{\infty} \frac{dx}{(2x+1)^3}.$$

Литература

1. *Канатников А.Н., Яковенко М.Г.* Численные методы решения эллиптических уравнений математической физики. М.: Изд-во МГТУ, 1992.
2. *Самарский А.А., Тихонов А.Н.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977.
3. *Калиткин Н.Н.* Численные методы. М.: Наука, 1978.
4. *Самарский А.А., Гулин А.В.* Численные методы. М.: Наука, 1989.
5. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. М.: Наука, 1989.

Варианты задания

№	a	b	$\boldsymbol{\varphi_0(y)}$	$\boldsymbol{\varphi_a(y)}$	$\boldsymbol{\psi_0(x)}$	$\boldsymbol{\psi_b(x)}$	$\boldsymbol{f(x,y)}$
1.	1	1	$\sin \pi y$	$\sin \pi y$	$x - x^2$	$x - x^2$	$\sin^2 \pi xy$
2.	2	1	$2y(1-y)$	$2y(1-y)$	$\sin^2 \pi x$	$\sin^2 \pi x$	$\lvert x - y\rvert$
3.	1	1	$y - y^2$	$y - y^2$	$\sin 2\pi x$	$\sin 2\pi x$	$\sin^3 \pi xy$
4.	1	1	$3y$	0	0	$3(1-x^2)$	$20(x^2+y^2)$
5.	1	1	$y - y^2$	$(y-y^2)e^y$	$x - x^2$	$x - x^2$	$x^2 - y^2 - x + y$
6.	2	3	$y^2 - 3y$	$y^3 - 9y$	$x^2 - 2x$	$x^3 - 4x$	$-e^{-xy^2}$
7.	1	2	$\sin^2 \pi y$	$e^{\sin \pi y} - 1$	$x(1-x)$	$x(1-x)e^x$	$(x-y)^2$
8.	1	1	$10y$	$10\cos \frac{\pi y}{2}$	$10\sin \frac{\pi x}{2}$	$10(1-x)$	0
9.	1	1	$y(1-y^2)$	0	$\sin \pi x$	0	$10x + y$
10.	2	1	$\sin^2 \pi y$	$\sin^2 2\pi y$	$\sin^2 \pi x$	$\sin^2 2\pi x$	$x^2 - 2y$
11.	1	1	y	y^2	$2x(1-x)$	1	0
12.	1	1	0	$y(1-y^2)$	$x(1-x)$	$x(1-x)$	0
13.	1	1	$3\sin \pi y$	$2y$	$3x(1-x)$	$2x$	$4x^2(y-y^2)$
14.	3	1	$\sin^2 \pi y$	0	$\operatorname{ch}(x^2-3x)-1$	0	$\operatorname{ch}(x-y)$
15.	1	1	0	0	$\sin^2 \pi x$	$\sin 2\pi x$	$\operatorname{arctg} \frac{x+1}{y+1}$
16.	1	1	$3\sin \pi y$	$2y$	$2x(1-x)$	$5x - 3x^2$	$5 + x^2$
17.	1	1	$y - y^2$	$\sin^2 \pi y$	$x(1-x)$	$\sin 2\pi x$	$x - y$
18.	1	1	$5\sin \pi y$	$3y^2$	$5\sin \pi x$	$3x$	0
19.	1	1	$2y^2$	$2\sin \pi y$	$x - x^2$	$2 - 2x$	$5 + x + y$
20.	2	2	$2y - y^2$	$2y - y^2$	$\sin \pi x$	$-\sin \pi x$	$\sin^2 \pi(x+y)$
21.	1	1	$y - y^2$	$(y-y^2)e^y$	$x - x^2$	$(x-x^2)e^x$	$(x-y)^2$
22.	1	2	y	$\frac{y^2}{2}$	$2x(1-x)$	$\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\pi x$	$3 + 2y - y^2$
23.	1	2	$\sin^2 \pi y$	$\sin^2 2\pi y$	$\sin^2 2\pi x$	$\sin^2 \pi x$	$(x-y)^2$
24.	1	1	$\operatorname{sh}(1-y)(1-\operatorname{ch} y)$	0	$e^{x-x^2} - 1$	0	$\sin^2 \pi xy$
25.	1	1	$3\cos \frac{\pi y}{2}$	$3y$	$3(1-x)$	$3\sin \frac{\pi x}{2}$	0
26.	2	3	$y^3 - 9y$	$y^2 - 3y$	$x^3 - 4x$	$x^2 - 2x$	$(x-y)^2$
27.	1	3	$\sin \pi y$	0	$\operatorname{ch}(x-x^2) - 1$	0	$\operatorname{sh}(x+y)$
28.	1	1	y^2	y^3	$\sin \pi x$	1	$\sin^2 \pi xy$
29.	2	1	$y(1-y)\operatorname{ch} y$	$y(1-y)\operatorname{sh} y$	$\sin^2 \pi x$	$e^{x^2-2x} - 1$	$x^2 + xy + y^2$
30.	1	1	0	0	$5\operatorname{sh}^2(x-x^2)$	$\sin^2 \pi x$	$x^4 + y^4$