TALLER DE PROBLEMAS (Clase #2)

Sección 2.1.8, ejercicios 3 y 10

Nombre: Carlos Laguado - 2047095

Nombre: Andres Felipe Rubio Toloza - 2218426

Nombre: Andres Felipe Vargas Molano - 2218420

Ejercicio 2

Considerando estas definiciones de producto interno en
$$\mathcal{P}_n$$
:
$$a) \quad \langle q_n \; | p_n \rangle = \int_{-1}^1 p(x) q(x) \mathrm{d}x \,, \qquad b) \quad \langle q_n \; | p_n \rangle = \int_0^1 p(x) q(x) \mathrm{d}x \,.$$

- a) Encuentre los ángulos en el "triángulo" formado por los vectores: $|x_1\rangle=1, |x_2\rangle=t, |x_3\rangle=1-t.$
- b) Encuentre la distancia y el ángulo entre los siguientes pares de vectores en P₃:
 - 1) $|x_1\rangle = 1$; $|x_2\rangle = x$.
 - 2) $|x_1\rangle = 2x$; $|x_2\rangle = x^2$.

Anexo 1: solución del ejercicio con el producto interno "a" (Ejercicio2a_Clase2.wxmx)

Anexo 2: solución del ejercicio con el producto interno "b" (Ejercicio2b Clase2.wxmx)

Ejercicio 3

3. Sea E' un subespacio euclidiano de dimensión $k, E' \subset E$, y sea $|v\rangle$ un vector que no necesariamente es un elemento E'. Podemos plantearnos el problema de representar $|v\rangle$ de la forma: $|v\rangle = |g\rangle + |h\rangle$; donde $|g\rangle \in E'$ y $|h\rangle$ es ortogonal a E'. La existencia de la expansión anterior nos muestra que el espacio total E, de dimensión n, es la suma directa de los subespacios E' y su complemento ortogonal E^{\perp} de dimensión n - k.

Encuentre el vector $|v\rangle$, como la suma del vector $|g\rangle$, expandido por los vectores $|g_i\rangle$, y el vector perpendicular $|h\rangle$ cuando:

a)
$$|h\rangle = (5, 2, -2, 2), |g_1\rangle = (2, 1, 1, -\alpha), |g_2\rangle = (1, \beta, 3, 0).$$

$$\begin{array}{ll} a) & |h\rangle = (5,2,-2,2) \,, \, |g_1\rangle = (2,1,1,-\alpha) \,, \, |g_2\rangle = (1,\beta,3,0). \\ b) & |h\rangle = (-3,5,9,3) \,, \, |g_1\rangle = (1,1,1,\gamma) \,, \, |g_2\rangle = (2\eta,-1,1,1) \,, \, |g_3\rangle = (2,-7\delta,-1,-1). \end{array}$$

```
a) |h\rangle = (5, 2, -2, 2), |g_1\rangle = (2, 1, 1, -\alpha), |g_2\rangle = (1, \beta, 3, 0)
 Como lh> 1 1g, 1g2> -> (hlg1) = 0 1 (hlg2) = 0
 Como 1h> y 1g1>, 1g2> son ortogonales el ángulo formado
 entre ellos es 90°, por lo tanto:
        cos(\Theta_G) = \frac{|\langle h|g_1\rangle|}{||h\rangle|||||g_1\rangle||} Como \Theta_G = 90^\circ
                                                 cos (90°) = 0
           0 = 1(hlq1)1
           (4/9,) = 0
\langle h|g_1 \rangle = 10 + 2 - 2 - 2 \propto = 0

2 \propto = 10

\alpha = 5
                                                      \langle h|g_2 \rangle = 5 + 2\beta - 6 + 0 = 0
2\beta = 1
|V\rangle = |h\rangle + |g_1\rangle + |g_2\rangle

|V\rangle = (5, 2, -2, 2) + (2, 1, 1, -5) + (1, 1/2, 3, 0)
          |1\rangle = (8, 7/2, 2, -3)
b) Aplica el mismo concepto que el punto a.
|1h\rangle = (-3, 5, 9, 3), |91\rangle = (1, 1, 1, \gamma), |92\rangle = (2\eta, -1, 1, 1), |93\rangle = (2, -75, -1, -1)
                                         (h|g_2) = -6\eta - 5 + 9 + 3 = 0

6\eta = 7

\eta = 7/6
\langle h|g_1\rangle = -3+5+9+3\gamma = 0

3\gamma = +11

\gamma = -11/3
\langle h|g_3 \rangle = -6 - 35S - 9 - 3 = 0

35S = -18

S = -18/35
(v) = 1h>+191>+192>+193>
  |V\rangle = (-3, 5, 9, 3) + (1, 1, 1, -11/3) + (7/3, -1, 1, 1) + (2, 18/5, -1, -1)
          (1/3, 43/5, 10, -2/3)
```

ANEXOS

$$x1:1; x2: x; x3:1-x;$$

$$1$$

$$x$$

$$1-x$$

$$abs('integrate((x1\cdot x2),x,-1,1))/(sqrt('integrate((x1\cdot x1),x,-1,1))\cdot sqrt('integrate((x2\cdot x2),x,-1,1)));$$

$$\frac{1}{x} \frac{1}{x} \frac{1}$$

ev(%,integrate);

$$\frac{1}{2}$$

acos(%);

$$\frac{\pi}{3}$$

Ángulo formado entre x2 y x3

PARTE B

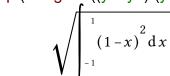
Par de vectores: x1 = 1 y x2 = x.

y1:1;y2:x;

1

 \boldsymbol{x}

 $\mathsf{sqrt}(\mathsf{'integrate}((\mathsf{y1}\mathsf{-}\mathsf{y2})\!\cdot\!(\mathsf{y1}\mathsf{-}\mathsf{y2}),\mathsf{x},\mathsf{-}\mathsf{1},\mathsf{1})); \\$



ev(%,integrate);

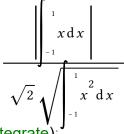
$$\frac{2^{3/2}}{\sqrt{3}}$$

ev(%,numer);

1.632993161855453

Distancia entre los vectores x1=1 y x2=x.

'abs('integrate($y1 \cdot y2, x, -1, 1$))/(sqrt('integrate($y1 \cdot y1, x, -1, 1$))·sqrt('integrate($y2 \cdot y2, x, -1, 1$)));



ev(%,integrate);

0

acos(%);

$$\frac{\pi}{2}$$

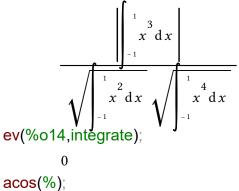
Ángulo formado entre los vectores x1=1 y x2=x.

Para el par de vectores x1=2x y x2=x^2

z1:2·x;z2:x··2;

$$2 x$$

 x^2
sqrt('integrate((z1-z2)·(z1-z2),x,-1,1));
 $\sqrt{\frac{1}{(2 x - x^2)^2} dx}$
ev(%,integrate);
 $\frac{\sqrt{46}}{\sqrt{15}}$
ev(%,numer);
1.751190071541826
Distancia entre el vector x1=2x y x2=x^2.
abs('integrate(z1·z2,x,-1,1))/(sqrt('integrate(z1·z1,x,-1,1))·sqrt('integrate(z2·z2,x,-1,1)));



π

Ángulo formado entre los vectores x1=2x y x2=x^2.

Documento wxMaxima 1 / 4

Χ

$$1-x$$

 $cos(\theta 1) = abs('integrate((x1\cdot x2),x,0,1))/(sqrt('integrate((x1\cdot x1),x,0,1))$ sqrt('integrate((x2·x2),x,0,1)));

$$\cos(\theta 1) = \frac{\int_{0}^{1} x \, dx}{\sqrt{\int_{0}^{1} x^{2} \, dx}}$$

ev(%,integrate);

$$\cos(\theta 1) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

sqrt(3)/2;

$$\frac{\sqrt{3}}{2}$$

acos(%);

ev(%,numer);

0.5235987755982988

Angulo formado entre x1 y x2

 $cos(\theta 2) = abs(integrate((x1 \cdot x3),x,0,1))/(sqrt(integrate((x1 \cdot x1),x,0,1))$ $sqrt(integrate((x3\cdot x3),x,0,1)));$

$$\cos(\theta 2) = \frac{\int_{0}^{1} 1 - x dx}{\sqrt{\int_{0}^{1} (1 - x)^{2} dx}}$$
ntegrate);

ev(%,integrate);

$$\cos(\theta 2) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

sqrt(3)/2;

$$\frac{\sqrt{3}}{2}$$

acos(%);

Documento wxMaxima 2 / 4

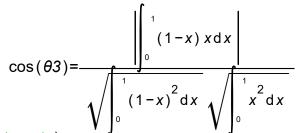
$$\frac{\pi}{6}$$

ev(%,numer);

0.5235987755982988

Ángulo formado entre x1 y x3

 $cos(\theta 3) = abs('integrate((x2 \cdot x3),x,0,1))/(sqrt('integrate((x2 \cdot x2),x,0,1))$ $sqrt(integrate((x3\cdot x3),x,0,1)));$



ev(%,integrate);

$$\cos(\theta 3) = \frac{1}{2}$$

1/2:

acos(%);

ev(%,numer);

1.047197551196598

Ángulo formado entre x2 y x3

b. Encuentre la distancia y el ángulo entre los siguientes pares de vectores.

 $sqrt(integrate(((y1-y2)^2),x,0,1)) = sqrt(integrate(((y1-y2)^2),x,0,1));$

$$\int_{0}^{1} (1-x)^{2} dx = 0.5773502691896258$$

Documento wxMaxima 3 / 4

distancia entre y1 e y2

 $cos(\theta) = abs('integrate((y1\cdot y2),x,0,1))/(sqrt('integrate((y1\cdot y1),x,0,1))$ sqrt('integrate((y2·y2),x,0,1)));

$$\cos(\theta) = \frac{\int_{0}^{1} x \, dx}{\sqrt{\int_{0}^{1} x^{2} \, dx}}$$

ev(%,integrate);

$$\cos(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

sqrt(3)/2;

$$\frac{\sqrt{3}}{2}$$

acos(%);

ev(%,numer);

0.5235987755982988

Ángulo entre y1 e y2

z1:2·x; z2:x^2;

 $sqrt(integrate(((z1-z2)^2),x,0,1)) = sqrt(integrate(((z1-z2)^2),x,0,1));$

$$\sqrt{\int_{0}^{1} (2 x - x^{2})^{2} dx} = \frac{2}{\sqrt{15}}$$
ev(% numer):

ev(%,numer);

fumer);

$$\int_{0}^{1} (2x-x^{2})^{2} dx = 0.7302967433402215$$

distancia entre z1 y z2

 $cos(\theta) = abs('integrate((z1\cdot z2),x,0,1))/(sqrt('integrate((z1\cdot z1),x,0,1))$ sqrt('integrate((z2·z2),x,0,1)));

Documento wxMaxima 4 / 4

$$\cos(\theta) = \frac{\int_{0}^{1} x^{3} dx}{\sqrt{\int_{0}^{1} x^{2} dx} \sqrt{\int_{0}^{1} x^{4} dx}}$$

ev(%,integrate);

$$\cos(\theta) = \frac{\sqrt{3}\sqrt{5}}{4}$$

 $sqrt(3) \cdot sqrt(5)/4$;

$$\frac{\sqrt{3}\sqrt{5}}{4}$$

acos(%),numer;

0.2526802551420785