TALLER DE PROBLEMAS (Clase #2)

Sección 2.1.8, ejercicios 3 y 10

Nombre: Carlos Laguado - 2047095

Nombre: Andres Felipe Rubio Toloza - 2218426

Nombre: Andres Felipe Vargas Molano - 2218420

Ejercicio 2

Considerando estas definiciones de producto interno en $\mathcal{P}_n$:

$$a)\quad \langle q_n | p_n\rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)\mathrm{d}x\,, \qquad b)\quad \langle q_n | p_n\rangle = \int_{0}^{1} p(x)q(x)\mathrm{d}x\,.$$

a) Encuentre los ángulos en el "triángulo" formado por los vectores: $|x_1\rangle = 1, |x_2\rangle = t, |x_3\rangle = 1 - t$.

b) Encuentre la distancia y el ángulo entre los siguientes pares de vectores en $\mathcal{P}_3$:

1) $|x_1\rangle = 1;\quad |x_2\rangle = x$.

2) $|x_1\rangle = 2x;\quad |x_2\rangle = x^2$.

Anexo 1: solución del ejercicio con el producto interno "a" (Ejercicio2a_Clase2.wxmx)

Anexo 2: solución del ejercicio con el producto interno "b" (Ejercicio2b_Clase2.wxmx)

Ejercicio 3

3. Sea $\boldsymbol{E}'$ un subespacio euclidiano de dimensión k, $\boldsymbol{E}' \subset \boldsymbol{E}$, y sea $|v\rangle$ un vector que no necesariamente es un elemento $\boldsymbol{E}'$. Podemos plantearnos el problema de representar $|v\rangle$ de la forma: $|v\rangle = |g\rangle + |h\rangle$; donde $|g\rangle \in \boldsymbol{E}'$ y $|h\rangle$ es ortogonal a $\boldsymbol{E}'$. La existencia de la expansión anterior nos muestra que el espacio total $\boldsymbol{E}$, de dimensión n, es la suma directa de los subespacios $\boldsymbol{E}'$ y su complemento ortogonal $\boldsymbol{E}^{\perp}$ de dimensión $n-k$.

Encuentre el vector $|v\rangle$, como la suma del vector $|g\rangle$, expandido por los vectores $|g_i\rangle$, y el vector perpendicular $|h\rangle$ cuando:

a) $|h\rangle = (5, 2, -2, 2)\,, |g_1\rangle = (2, 1, 1, -\alpha)\,, |g_2\rangle = (1, \beta, 3, 0)$.

b) $|h\rangle = (-3, 5, 9, 3)\,, |g_1\rangle = (1, 1, 1, \gamma)\,, |g_2\rangle = (2\eta, -1, 1, 1)\,, |g_3\rangle = (2, -7\delta, -1, -1)$.

Solución:

a) $|h\rangle = (5, 2, -2, 2)$, $|g_1\rangle = (2, 1, 1, -\alpha)$, $|g_2\rangle = (1, \beta, 3, 0)$

Como $|h\rangle \perp |g_1\rangle, |g_2\rangle \rightarrow \langle h|g_1\rangle = 0 \wedge \langle h|g_2\rangle = 0$

Como $|h\rangle$ y $|g_1\rangle, |g_2\rangle$ son ortogonales el ángulo formado entre ellos es 90°, por lo tanto:

$$\cos(\theta_G) = \frac{|\langle h|g_1\rangle|}{\||h\rangle\| \, \||g_1\rangle\|} \qquad \text{Como } \theta_G = 90^\circ$$

$$\cos(90^\circ) = 0$$

$$0 = |\langle h|g_1\rangle|$$

$$\langle h|g_1\rangle = 0.$$

$$\langle h|g_1\rangle = 10 + \cancel{2} - \cancel{2} - 2\alpha = 0 \qquad \langle h|g_2\rangle = 5 + 2\beta - 6 + 0 = 0$$

$$2\alpha = 10 \qquad 2\beta = 1$$

$$\alpha = 5 \qquad \beta = 1/2$$

$$|v\rangle = |h\rangle + |g_1\rangle + |g_2\rangle$$

$$|v\rangle = (5, 2, -2, 2) + (2, 1, 1, -5) + (1, 1/2, 3, 0)$$

$$\boxed{|v\rangle = (8, 7/2, 2, -3)}$$

b) Aplica el mismo concepto que el punto a.

$|h\rangle = (-3, 5, 9, 3)$, $|g_1\rangle = (1, 1, 1, \gamma)$, $|g_2\rangle = (2\eta, -1, 1, 1)$, $|g_3\rangle = (2, -7\delta, -1, -1)$

$$\langle h|g_1\rangle = -3 + 5 + 9 + 3\gamma = 0 \qquad \langle h|g_2\rangle = -6\eta - 5 + 9 + 3 = 0$$

$$3\gamma = -11 \qquad 6\eta = 7$$

$$\gamma = -11/3 \qquad \eta = 7/6$$

$$\langle h|g_3\rangle = -6 - 35\delta - 9 - 3 = 0$$

$$35\delta = -18$$

$$\delta = -18/35$$

$$|v\rangle = |h\rangle + |g_1\rangle + |g_2\rangle + |g_3\rangle$$

$$|v\rangle = (-3, 5, 9, 3) + (1, 1, 1, -11/3) + (7/3, -1, 1, 1) + (2, 18/5, -1, -1)$$

$$\boxed{|v\rangle = (7/3, 43/5, 10, -2/3)}$$

ANEXOS

```
x1:1; x2: x; x3:1−x;
```

$$1$$
$$x$$
$$1-x$$

```
abs('integrate((x1·x2),x,−1,1))/(sqrt('integrate((x1·x1),x,−1,1))·
sqrt('integrate((x2·x2),x,−1,1)))
;
```

$$\frac{\left|\int_{-1}^{1} x\,dx\right|}{\sqrt{2}\sqrt{\int_{-1}^{1} x^2\,dx}}$$

```
ev(%,integrate);
```

$$0$$

```
acos(%);
```

$$\frac{\pi}{2}$$

Ángulo formado entre x1 y x2

```
abs('integrate((x1·x3),x,−1,1))/(sqrt('integrate((x1·x1),x,−1,1))·
sqrt('integrate((x3·x3),x,−1,1)));
```

$$\frac{\left|\int_{-1}^{1} 1-x\,dx\right|}{\sqrt{2}\sqrt{\int_{-1}^{1} (1-x)^2\,dx}}$$

```
ev(%,integrate);
```

$$\frac{\sqrt{3}}{2}$$

```
acos(%);
```

$$\frac{\pi}{6}$$

Ángulo formado entre x1 y x3

```
abs('integrate((x2·x3),x,−1,1))/(sqrt('integrate((x2·x2),x,−1,1))·
sqrt('integrate((x3·x3),x,−1,1)));
```

$$\frac{\left|\int_{-1}^{1} (1-x)\,x\,dx\right|}{\sqrt{\int_{-1}^{1} (1-x)^2\,dx}\sqrt{\int_{-1}^{1} x^2\,dx}}$$

```
ev(%,integrate);
```

$$\frac{1}{2}$$

```
acos(%);
```

$$\frac{\pi}{3}$$

Ángulo formado entre x2 y x3

****

PARTE B

Par de vectores: x1 = 1 y x2 = x.

```
y1:1;y2:x;
```

$$1$$

$$x$$

```
sqrt('integrate((y1−y2)·(y1−y2),x,−1,1));
```

$$\sqrt{\int_{-1}^{1}(1-x)^2\,dx}$$

```
ev(%,integrate);
```

$$\frac{2^{3/2}}{\sqrt{3}}$$

```
ev(%,numer);
```

$$1.632993161855453$$

Distancia entre los vectores x1=1 y x2=x.

```
'abs('integrate(y1·y2,x,−1,1))/(sqrt('integrate(y1·y1,x,−1,1))·sqrt('integrate(y2·y2,x,−1,1)));
```

$$\frac{\left|\int_{-1}^{1}x\,dx\right|}{\sqrt{2}\sqrt{\int_{-1}^{1}x^2\,dx}}$$

```
ev(%,integrate);
```

$$0$$

```
acos(%);
```

$$\frac{\pi}{2}$$

Ángulo formado entre los vectores x1=1 y x2=x.

****

Para el par de vectores x1=2x y x2=x^2

```
z1:2·x;z2:x··2;
```

$$2\,x$$

$$x^{2}$$

```
sqrt('integrate((z1−z2)·(z1−z2),x,−1,1));
```

$$\sqrt{\int_{-1}^{1}{\left(2\,x-x^{2}\right)^{2}\,dx}}$$

```
ev(%,integrate);
```

$$\frac{\sqrt{46}}{\sqrt{15}}$$

```
ev(%,numer);
```

$$1.751190071541826$$

Distancia entre el vector x1=2x y x2=x^2.

```
abs('integrate(z1·z2,x,−1,1))/(sqrt('integrate(z1·z1,x,−1,1))·sqrt('integrate(z2·z2,x,−1,1)));
```

$$\frac{\left|\int_{-1}^{1}{x^{3}\,dx}\right|}{\sqrt{\int_{-1}^{1}{x^{2}\,dx}}\,\sqrt{\int_{-1}^{1}{x^{4}\,dx}}}$$

```
ev(%o14,integrate);
```

$$0$$

```
acos(%);
```

$$\frac{\pi}{2}$$

Ángulo formado entre los vectores x1=2x y x2=x^2.

```
x1:1; x2: x; x3:1−x;
```

$$1$$
$$x$$
$$1-x$$

```
cos(θ1) = abs('integrate((x1·x2),x,0,1))/(sqrt('integrate((x1·x1),x,0,1))·
sqrt('integrate((x2·x2),x,0,1)));
```

$$\cos(\theta 1)=\frac{\left|\int_{0}^{1} x\,dx\right|}{\sqrt{\int_{0}^{1} x^{2}\,dx}}$$

```
ev(%,integrate);
```

$$\cos(\theta 1)=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

```
sqrt(3)/2;
```

$$\frac{\sqrt{3}}{2}$$

```
acos(%);
```

$$\frac{\pi}{6}$$

```
ev(%,numer);
```

$$0.5235987755982988$$

Ángulo formado entre x1 y x2

```
cos(θ2) = abs('integrate((x1·x3),x,0,1))/(sqrt('integrate((x1·x1),x,0,1))·
sqrt('integrate((x3·x3),x,0,1)));
```

$$\cos(\theta 2)=\frac{\left|\int_{0}^{1} 1-x\,dx\right|}{\sqrt{\int_{0}^{1} (1-x)^{2}\,dx}}$$

```
ev(%,integrate);
```

$$\cos(\theta 2)=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

```
sqrt(3)/2;
```

$$\frac{\sqrt{3}}{2}$$

```
acos(%);
```

$$\frac{\pi}{6}$$

```
ev(%,numer);
```

$$0.5235987755982988$$

Ángulo formado entre x1 y x3

```
cos(θ3) = abs('integrate((x2·x3),x,0,1))/(sqrt('integrate((x2·x2),x,0,1))·
sqrt('integrate((x3·x3),x,0,1)));
```

$$\cos(\theta 3) = \frac{\left|\int_0^1 (1-x)\, x\, dx\right|}{\sqrt{\int_0^1 (1-x)^2 dx}\,\sqrt{\int_0^1 x^2 dx}}$$

```
ev(%,integrate);
```

$$\cos(\theta 3) = \frac{1}{2}$$

```
1/2;
```

$$\frac{1}{2}$$

```
acos(%);
```

$$\frac{\pi}{3}$$

```
ev(%,numer);
```

$$1.047197551196598$$

Ángulo formado entre x2 y x3

b. Encuentre la distancia y el ángulo entre los siguientes pares de vectores.

```
y1:1; y2:x;
```

$$1$$

$$x$$

```
sqrt('integrate(((y1−y2)^2),x,0,1))=sqrt(integrate(((y1−y2)^2),x,0,1));
```

$$\sqrt{\int_0^1 (1-x)^2 dx} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

```
ev(%,numer);
```

$$\left(\int_0^1 (1-x)^2 dx\right)^{0.5} = 0.5773502691896258$$

distancia entre y1 e y2

```
cos(θ) = abs('integrate((y1·y2),x,0,1))/(sqrt('integrate((y1·y1),x,0,1))·
sqrt('integrate((y2·y2),x,0,1)));
```

$$\cos(\theta)=\frac{\left|\int_0^1 x\,dx\right|}{\sqrt{\int_0^1 x^2\,dx}}$$

```
ev(%,integrate);
```

$$\cos(\theta)=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

```
sqrt(3)/2;
```

$$\frac{\sqrt{3}}{2}$$

```
acos(%);
```

$$\frac{\pi}{6}$$

```
ev(%,numer);
```

$$0.5235987755982988$$

Ángulo entre y1 e y2

```
z1:2·x; z2:x^2;
```

$$2\,x$$

$$x^2$$

```
sqrt('integrate(((z1−z2)^2),x,0,1))=sqrt(integrate(((z1−z2)^2),x,0,1));
```

$$\sqrt{\int_0^1 (2\,x-x^2)^2\,dx}=\frac{2^{3/2}}{\sqrt{15}}$$

```
ev(%,numer);
```

$$\left(\int_0^1 (2\,x-x^2)^2\,dx\right)^{0.5}=0.7302967433402215$$

distancia entre z1 y z2

```
cos(θ) = abs('integrate((z1·z2),x,0,1))/(sqrt('integrate((z1·z1),x,0,1))·
sqrt('integrate((z2·z2),x,0,1)));
```

$$\cos(\theta)=\frac{\left|\int_{0}^{1}x^{3}\,dx\right|}{\sqrt{\int_{0}^{1}x^{2}\,dx}\,\sqrt{\int_{0}^{1}x^{4}\,dx}}$$

```
ev(%,integrate);
```

$$\cos(\theta)=\frac{\sqrt{3}\,\sqrt{5}}{4}$$

```
sqrt(3)·sqrt(5)/4;
```

$$\frac{\sqrt{3}\,\sqrt{5}}{4}$$

```
acos(%),numer;
```

$$0.2526802551420785$$