

গণিত অলিম্পিয়াড প্রস্তুতি

সংখ্যাতত্ত্ব ও গণনা

পাভেল মোহাম্মদ

❀ তায়লিপি

সংখ্যাতত্ত্ব ও গণনা

পাভেল মোহাম্মদ

গ্রন্থস্বত্ব : লেখক

প্রথম প্রকাশ : ফেব্রুয়ারি ২০২৪

তাম্রলিপি : ৮০৭

প্রকাশক

এ কে এম তারিকুল ইসলাম রনি

তাম্রলিপি

৩৮/৪ বাংলাবাজার, ঢাকা-১১০০

প্রচ্ছদ

শাহরিয়ার রাবি

বর্ণবিন্যাস

তাম্রলিপি কম্পিউটার

মুদ্রণ

একতা প্রিন্টিং প্রেস

সূত্রাপুর, ঢাকা

মূল্য : ৫২০.০০

Songkhatottow O Gonona

By : Pavel Mohammad

First Published : February 2024 by A K M Tariqul Islam Roni
Tamralipi, 38/4 Banglabazar, Dhaka-1100

Price : 520.0

\$20

ISBN : 978-984-98891-4-4

উৎসর্গ

সেইসব মানুষদের যারা জীবনের এই পথ পরিক্রমায় আসে হঠাৎ
হাওয়ার মতো। অল্প সময়ের জন্যে এলেও দীর্ঘসময় তাদের রেশ
থেকে যায়। জীবনকে ভরিয়ে তোলে প্রাচুর্যে। যাদের সাথে থাকা
সাধারণ মুহূর্তগুলো পরিণত হয় অসাধারণ স্মৃতিতে। যাদের
উপস্থিতিই হয়ে উঠে আমাদের জীবনের অনুপ্রেরণা।

ভূমিকা

প্রকৃতিকে বুঝতে হলে তার যে সাহিত্য সেটা হচ্ছে পদার্থবিজ্ঞান। আর সাহিত্য সঠিক বুঝতে যেমন ব্যাকরণ দরকার, ঠিক একইভাবে পদার্থবিজ্ঞান বুঝতে দরকার হয় গণিত। প্রান্তিক পর্যায়ে গণিতভীতি দূর করার জন্য বাংলাদেশ গণিত অলিম্পিয়াড কমিটি সারা দেশজুড়ে প্রতি বছর গণিত অলিম্পিয়াড আয়োজন করে থাকে। আন্তর্জাতিক গণিত অলিম্পিয়াডে দল প্রেরণ করাও এ আয়োজনের অন্যতম উদ্দেশ্য।

গণিত অলিম্পিয়াডের অন্যতম ও মজার একটি বিষয় হচ্ছে সংখ্যাতত্ত্ব বা নাম্বার থিওরি।

‘সংখ্যাতত্ত্ব ও গণনা’ বইটিতে লেখক এই বিষয়টি দিয়ে তাঁর বইটি শুরু করেন। সাধারণ বিভাজ্যতার বৈশিষ্ট্য সংক্রান্ত বেশ কিছু সমস্যা এবং এগুলোর সহজভাবে সমাধান নিয়ে আলোচনা করা হয়েছে ধাপেধাপে। সবচেয়ে মজার ব্যাপার হচ্ছে সমাধানগুলো বাংলা এবং ইংরেজি দুই ভাষাতেই দেওয়া। ১ থেকে শুরু করে ৩৭ পর্যন্ত সংখ্যাগুলোর বিভাজ্যতা, মৌলিক সংখ্যা ও এ ধরনের সংখ্যার বিধি, এবং উৎপাদক নিয়ে বিস্তারিত আলোচনা করা হয়েছে।

এই বইয়ের আরেকটি বিশেষ দিক হচ্ছে ‘গণনা’-এর ধারণাকে সহজ এবং নতুনভাবে উপস্থাপন করার চেষ্টা করা হয়েছে। পাশাপাশি বেশকিছু মৌলিক সমস্যার সমাধান দেওয়া হয়েছে যেগুলো গণিত অলিম্পিয়াডে অংশগ্রহণকারীদের জন্য খুবই গুরুত্বপূর্ণ। এগুলো সাধারণত শিক্ষার্থীদের গণনা সম্পর্কিত যুক্তি ও ধারণা বৃদ্ধিতে সহায়ক।

আমি মনে করি এই বই থেকে সংখ্যাতত্ত্ব ও গণনার প্রাথমিক ধারণাসহ লসাগু, গসাগু এর মৌলিক ধারণা ও প্রয়োগ সম্পর্কিত জ্ঞান একজন শিক্ষার্থী পেয়ে থাকবে। সবশেষে ইনক্লুশন (অন্তর্ভুক্তি) ও এক্সক্লুশন (বর্জন) সম্পর্কিত বেশ কিছু সমস্যার সমাধান দেওয়া হয়েছে যা প্রায়ই গণিত অলিম্পিয়াডে আসতে দেখা যায়। সাধারণত এগুলোর টেকনিক যদি জানা না থাকে অংকগুলো সমাধান করা কঠিন হয়ে পড়ে। এই বইতে সহজ কিছু উপায় দেওয়া হয়েছে যা সংখ্যাতত্ত্বের বিধি মেনে চলে। এই বইটি পড়ে সংখ্যাতত্ত্ব ও গণনা সম্পর্কিত প্রাথমিক ধারণা লাভ করে শিক্ষার্থীরা উপকৃত হবে বলে আমি দৃঢ়ভাবে বিশ্বাস করি।

অধ্যাপক ড. উজ্জ্বল কুমার দেব

সাবেক বিভাগীয় প্রধান, গণিত বিভাগ

চট্টগ্রাম প্রকৌশল বিশ্ববিদ্যালয়

এবং সদস্য, বাংলাদেশ গণিত অলিম্পিয়াড কমিটি

মুখবন্ধ

গণিত অলিম্পিয়াডের মজার ভুবনে যারা ভ্রমণ শুরু করতে যাচ্ছে তাদের জন্যে একদম বিগিনার লেভেলের একটি বই হতে যাচ্ছে এটি।

আমি বইটি লিখার সময় ধরে নিয়েছি বেশিরভাগ শিক্ষার্থী যারা এই বইটি পড়বে তাদের সংখ্যাতত্ত্ব সম্বন্ধে একদমই ধারণা নেই বা খুব হালকা ধারণা আছে। প্রাইমারি ক্যাটাগরি থেকে শুরু করে সেকেন্ডারি ক্যাটাগরির শিক্ষার্থীদের জন্যে উপযুক্ত হবে এই বইটির সংখ্যাতত্ত্ব অংশ। বিশেষ করে প্রথম অধ্যায়ে সংখ্যাভূত্বের একদম বেসিক ধারণা অর্থাৎ বিভাজ্যতা থেকে শুরু করেছে। বিভিন্ন সংখ্যা দ্বারা বিভাজ্যতা হয়তো আমাদের পাঠ্যপুস্তকে শিক্ষার্থীরা শিখে থাকে। কিন্তু এর বাইরেও বিভাজ্যতার যে একটা মজার জগৎ আছে সেটি সম্পর্কে ধারণা দেয়ার চেষ্টা করেছি এই অধ্যায়ে।

এরপর দ্বিতীয় অধ্যায়ে আলোচনা করেছে কোনো সংখ্যাকে কীভাবে অন্য কোনো সংখ্যার সাপেক্ষে প্রকাশ করা যায় এবং কিছু বেসিক বীজগণিতের সূত্র যেগুলো পরবর্তী অধ্যায়গুলো বুঝতে একদম পরিহার্য।

তৃতীয় অধ্যায়ে আলোচনা করেছে মৌলিক সংখ্যা নিয়ে। এই অধ্যায়ে দেখানোর চেষ্টা করেছে কীভাবে খুব বেসিক কিছু ধারণা দিয়ে গণিত অলিম্পিয়াডের অনেক জটিল সমস্যার সমাধান করা যায়।

চতুর্থ অধ্যায়টি মূলত জুনিয়র ক্যাটাগরি থেকে শুরু করে হায়ার সেকেন্ডারি ক্যাটাগরির জন্যে প্রযোজ্য। কম্বিনেটরিক্স এর একদম শুরুর ধারণা হচ্ছে গণনা। যদিও এই অধ্যায়ে বিন্যাস সমাবেশ দিয়ে

সরাসরি সমাধান করে ফেলা যাবে এমন সমস্যা খুব বেশি না, তবে কারও যদি বিন্যাস সমাবেশ সম্পর্কে বেসিক ধারণা থাকে যেমন একদম প্রাথমিক সূত্রগুলো কীভাবে এসেছে এবং এগুলো কীভাবে ব্যবহার করতে হয় তাহলে খুব সহজেই এই অধ্যায়ের বেশীরভাগ সমস্যা সমাধান করতে পারবে। এছাড়া যাদের এই সম্পর্কে ধারণা নেই তাদের জন্যে গণনার যোগ বিধি এবং গুণ বিধি নিয়ে শুরুতেই আলোচনা করেছি।

পঞ্চম অধ্যায়ে আছে ল.সা.গু. এবং গ.সা.গু. নিয়ে আলোচনা। তবে এই অধ্যায়ে ল.সা.গু. এবং গ.সা.গু. এর সাথে অন্য বিষয়গুলো কীভাবে জড়িত সেগুলো দেখানোর চেষ্টা করেছি বিভিন্ন সমস্যা সমাধানের মাধ্যমে।

একদম শেষের অধ্যায়ে রয়েছে আরেকটি মজার টপিক ইনক্লুশন (অন্তর্ভুক্তি) এবং এক্সক্লুশন (বর্জন) নীতি। বিভিন্ন সংখ্যার বিভাজ্যতা পারলেই এই অধ্যায়ের সকল সমস্যা শিক্ষার্থীরা অনায়াসেই বুঝতে পারবে।

বইটি লিখতে গিয়ে যাদের অনুপ্রেরণা পেয়েছি তাদের সকলের কাছে আমি কৃতজ্ঞ। এছাড়া বইটি প্রকাশে সহযোগিতা করার জন্যে শুভ, প্রিয়, সারাফাত ভাইয়াসহ সংশ্লিষ্ট সকলকে ধন্যবাদ জানাতে চাই। বিশেষ ধন্যবাদ জানাতে চাই রনি ভাইয়াকে আমার ওপর ভরসা করার জন্যে।

পাভেল মোহাম্মদ

ফেব্রুয়ারি, ২০২৪

www.facebook.com/ccc261343

www.youtube.com/learnwithpavel

সূচিপত্র

১। বিভাজ্যতা	(১১-৫৯)
১.১ বিভাজ্যতার সাধারণ আলোচনা	১১
১.২ বিভাজ্যতার বৈশিষ্ট্য	১২
১.৩ বিভাজ্যতার বৈশিষ্ট্য সংক্রান্ত সমস্যা	১৭
১.৪ বিভিন্ন সংখ্যার বিভাজ্যতার সূত্র	২৭
১.৫ বিভাজ্যতার সূত্র সংক্রান্ত সমস্যা	৪০
২। সংখ্যার উপস্থাপনা এবং বেসিক বীজগণিত	(৬০-৬৭)
২.১ যেকোনো সংখ্যার সাধারণ উপস্থাপনা	৬০
২.২ Basic Algebra Formula	৬৩
৩। মৌলিক সংখ্যা	(৬৮-৮২)
৩.১ মৌলিক সংখ্যার বৈশিষ্ট্য	৬৮
৩.২ জোড় বিজোড়ের ধারণা সংক্রান্ত সমস্যা	৬৯
৩.৩ বর্গ সংখ্যার ধারণা সংক্রান্ত সমস্যা	৭২
৩.৪ বিভাজ্যতা এবং $6k \pm 1$ সংক্রান্ত সমস্যা	৭৫
৩.৫ উৎপাদক সংক্রান্ত সমস্যা	৭৯
৪। গণনা	(৮৩-১৪৬)
৪.১ গণনার যোগ বিধি	৮৩
৪.২ গণনার যোগ বিধি সংক্রান্ত সমস্যা	৮৪
৪.৩ গণনার গুণ বিধি	৯৬
৪.৪ গণনার যোগ বিধি সংক্রান্ত সমস্যা	৯৭

৪.৫ পুনরাবৃত্তি ছাড়া বিন্যাস	১১২
৪.৬ পুনরাবৃত্তি সহ বিন্যাস	১১৯
৪.৭ পুনরাবৃত্তি ছাড়া সমাবেশ	১২৬
৫। ল.সা.গু. এবং গ.সা.গু.	(১৪৭-১৬২)
৫.১ মৌলিক ধারণা	১৪৭
৫.২ ল.সা.গু. গ.সা.গু. সংক্রান্ত সমস্যা	১৪৮
৫.৩ সর্বোচ্চ এবং সর্বনিম্ন মান সংক্রান্ত সমস্যা	১৫১
৫.৪ যোগফল, অনুপাত এবং অন্যান্য সমস্যা	১৫৬
৬। গ্রহণ বর্জন নীতি Inclusion Exclusion principle	১৬৩

বিভাজ্যতা Divisibility

১.১ বিভাজ্যতার সাধারণ আলোচনা

গণিত অলিম্পিয়াডের অন্যতম একটি বিষয় হচ্ছে সংখ্যাতত্ত্ব এবং সংখ্যাতত্ত্ব বিষয়ে দক্ষ হওয়ার জন্য সবচেয়ে গুরুত্বপূর্ণ এবং মৌলিক যে বিষয়ে সবার ধারণা থাকা আবশ্যিক সেটি হচ্ছে বিভাজ্যতা।

আমি চেষ্টা করবো এই অধ্যায়ে বিভাজ্যতা টপিকটি তোমাদের কাছে একদম সহজভাবে উপস্থাপন করতে। তা হলে চলো শুরু করা যাক।

আমরা শুরুতেই নিচের ভাগ অঙ্কটি লক্ষ্য করি:

$$\begin{array}{r} 5 \) \ 19(3 \\ \underline{15} \\ 4 \end{array}$$

এখানে, ভাজক 5, ভাজ্য 19, ভাগফল 3, ভাগশেষ 4

আমরা চাইলে নিচের মতো করেও লিখতে পারি:

$$19 = 5 \times 3 + 4$$

ভাজ্য = ভাজক \times ভাগফল + ভাগশেষ

যদি ভাগশেষ শূন্য হয় তা হলে, ভাজ্য = ভাজক \times ভাগফল

সেক্ষেত্রে আমরা বলি, ভাজক ভাজ্যকে নিঃশেষে ভাগ করছে কিংবা ভাজ্য ভাজক দ্বারা নিঃশেষে বিভাজ্য।

যেমন: আমরা 16 কে 2 দিয়ে ভাগ করলে ভাগশেষ 0 পাই, অর্থাৎ 16, 2 দ্বারা নিঃশেষে বিভাজ্য। আমরা এখন থেকে বিভাজ্য বলতে বুঝাবো নিঃশেষে বিভাজ্য।

1.1 Divisibility Basics

$$\begin{array}{r} 5 \overline{) 19} \quad 3 \\ \underline{15} \\ 4 \end{array}$$

5 is the divisor, 19 is dividend, 3 is quotient, 4 is the remainder

$$19 = 5 \times 3 + 4$$

dividend = divisor \times quotient + remainder

If, remainder = 0, then-

dividend = divisor \times quotient

\therefore If the remainder is 0, we say that the dividend is divisible by the divisor.

For example, if we divide 16 with 2, the quotient is 8 and remainder is 0.

So, we can say that 16 is divisible by 2.

Or we can also say 2 divides 16 and it is written as $2|16$ [Here, | symbol means divides]

১.২ বিভাজ্যতার বৈশিষ্ট্য Properties of divisibility

১. প্রতিটি সংখ্যাই নিজেকে ভাগ করে (০ ব্যতীত)

$x | x$ [এটিকে পড়তে হয়, x, x-কে ভাগ করে এবং | এর অর্থ হচ্ছে ভাগ করে]

১. $x | x$ [it is read as x divides x, | symbol means divides]

Explanation:

Every number divides itself (except 0)

Example:

If we want to write that 8 divides 8 we write it as: $8|8$

2. যদি $x \mid y$ তা হলে $x \leq y$

ব্যাখ্যা: একটি সংখ্যা x যদি অপর একটি সংখ্যা y কে ভাগ করে, তবে x অবশ্যই y এর সমান অথবা ছোট হবে।

যেমন: $5 \mid 15$ $15 \mid 15$

2. If $x \mid y$ then $x \leq y$ [\leq means less than or equal to]

Explanation:

If any number x divides another number y , then x must be less than or equal to y . In other words, x cannot be greater than y .

$x \mid y$ means there is an integer k such that, $y = kx$. Here k is any integer. So y is always greater than or equal to x .

For example:

$5 \mid 5$ and $5 \mid 15$

As we can see in the first example 5 divides itself, here the 1st number is equal to the 2nd number. In the second example, 5 divides 15, here the 1st number is less than the 2nd number.

3. যদি $x \mid y$ তা হলে যেকোনো পূর্ণসংখ্যা z -এর জন্য, $x \mid yz$

ব্যাখ্যা: একটি সংখ্যা x যদি অপর একটি সংখ্যা y -কে ভাগ করে, তবে সংখ্যাটি y -এর সকল গুণিতককে ভাগ করবে।

যেমন: $3 \mid 6$ এবং $3 \mid 6 \times 4$ অর্থাৎ, $3 \mid 24$

আবার, $4 \mid 8$ এবং $4 \mid 8 \times 5$ অর্থাৎ, $4 \mid 40$

3. If $x \mid y$ then for any integer z , $x \mid yz$

Explanation:

If any number x divides another number y , then x will divide all multiples of y . Here yz means multiples of y where z is an integer.

Example:

$3|6$ so $3|6 \times 4$ that is, $3|24$
again, $4|8$ so $4|8 \times 10$ that is, $4|80$

4. যদি $x | y$ এবং $y | z$ তা হলে $x | z$

ব্যাখ্যা: একটি সংখ্যা x যদি অপর একটি সংখ্যা y -কে ভাগ করে এবং y যদি অপর একটি সংখ্যা z -কে ভাগ করে তবে x সংখ্যাটি z -কে ভাগ করবে।

যেমন: $4|8$ এবং $8|16$ তা হলে, $4|16$
আবার, $5|10$ এবং $10|50$ তা হলে, $5|50$

4. If $x | y$ and $y | z$ then $x | z$

Explanation:

If any number x divides y , and y divides another number z , then x will divide z .

Example:

$4|8$ and $8|16$ so, $4|16$
again, $5|10$ and $10|50$ so, $5|50$

5. যদি $x | y$ এবং $y | x$ তা হলে $x = y$

ব্যাখ্যা:

$x|y$, অর্থাৎ $x \leq y$ অর্থাৎ x বড় হতে পারে না।

$y|x$, অর্থাৎ $y \leq x$ অর্থাৎ y বড় হতে পারে না।

অর্থাৎ কেউ-ই বড় না, মানে উভয়ে সমান।

5. If $x | y$ and $y | x$ then $x = y$

Explanation:

$x | y$ means $x \leq y$, that is x is less than or equal to y .

In other words, x cannot be greater than y .

$y | x$ means $y \leq x$, that is y is less than or equal to x .

In other words, y cannot be greater than x .

\therefore Both of them are equal.

6. যদি $x \mid y$ এবং $x \mid z$ তাহলে $x \mid (y + z)$ এবং $x \mid (y - z)$

ব্যাখ্যা: একটি সংখ্যা x যদি অপর দুটি সংখ্যা y এবং z কে ভাগ করে, তবে x ওই দুটি সংখ্যার যোগফল এবং বিয়োগফলকে ভাগ করবে।

যেমন: $4 \mid 24$ এবং $4 \mid 8$ সুতরাং, $4 \mid (24 + 8)$ এবং $4 \mid (24 - 8)$

আবার, $5 \mid 30$ এবং $5 \mid 10$ সুতরাং, $5 \mid (30 + 10)$ এবং $5 \mid (30 - 10)$

6. If $x \mid y$ and $x \mid z$ then $x \mid (y + z)$ and $x \mid (y - z)$.

Explanation:

If any number x divides two other numbers y and z , then x will divide the sum and the difference of those numbers.

Proof:

$x \mid y$ that is, y is a multiple of x .

So, y can be written as mx

Again, $x \mid z$ that is, z is a multiple of x .

So, z can be written as nx

Now, $y + z = mx + nx = x(m + n)$

So, we can see the sum of these two numbers is also a multiple of x .

Again, $y - z = mx - nx = x(m - n)$

\therefore The difference of these two numbers is also a multiple of x .

Example:

we know, $4 \mid 16$ and $4 \mid 12$ so $4 \mid (16 + 12)$ and $4 \mid (16 - 12)$

again, $7 \mid 35$ and $7 \mid 21$ so $7 \mid (35 + 21)$ and $7 \mid (35 - 21)$

7. যদি $x|(y + z)$ এবং $x|y$ তা হলে $x|z$

ব্যাখ্যা: x যদি অপর দুটি সংখ্যা y এবং z এর যোগফলকে ভাগ করে এবং এদের মধ্যে যেকোনো একটি সংখ্যাকে ভাগ করে, তবে x অপর সংখ্যাটিকেও ভাগ করবে।

যেমন: $4|(24 + 8)$ এবং $4|24$ সুতরাং, $4|8$

7. If $x|(y + z)$ and $x|z$ then $x|y$.

Explanation:

If any number x divides the sum of two numbers y, z and x divides one of those numbers, then x will divide the other number as well.

8. যদি $x|y$ এবং $x|z$ তারপর $x|(ay+bz)$ এবং $x|(ay-bz)$ ।

ব্যাখ্যা: যেকোন সংখ্যা x যদি অন্য দুটি সংখ্যা y এবং z -কে ভাগ করে, তা হলে y এবং z -এর যেকোনো রৈখিক সমন্বয়কে x ভাগ করবে।

প্রমাণ:

$x|y$ অর্থাৎ y হলো x -এর গুণিতক।

সুতরাং, y -কে mx হিসেবে লেখা যেতে পারে

আবার, $x|z$ অর্থাৎ z হল x -এর গুণিতক।

সুতরাং, z -কে nx হিসেবে লেখা যেতে পারে

এখন, $ay + bz = amx + bnx = x(am + bn)$

সুতরাং, আমরা দেখতে পাচ্ছি এই দুটি সংখ্যার যোগফলও x -এর গুণিতক।

আবার, $ay - bz = amx - bnx = x(am - bn)$

∴ এই দুটি সংখ্যার পার্থক্যও x -এর গুণিতক।