

গণিত বোঝার হাতেখড়ি
(প্রাইমারি ক্যাটাগরি)

গণিত বোঝার হাতেখড়ি

(প্রাইমারি ক্যাটাগরি)

সম্পাদনা

মুনির হাসান
আহমেদ শাহরিয়ার শুভ
মাহ্তাব হোসাইন
আশরাফুল আল শাকুর

❀ ডায়ালিপি

গণিত বোঝার হাতেখড়ি (প্রাইমারি ক্যাটাগরি)

সম্পাদক: মুনির হাসান, আহমেদ শাহরিয়ার, মাহ্তাব হোসাইন,
আশরাফুল আল শাকুর

গ্রন্থস্বত্ব: বইটি সৃজনী সাধারণ লাইসেন্সের আওতায় প্রকাশিত। অবাণিজ্যিক
উদ্দেশ্যে যেকোনো মাধ্যমে বইটি আংশিক বা সম্পূর্ণ প্রকাশ করা যাবে।
লেখকদের পূর্বানুমতি প্রয়োজন পড়বে না, কেবল উল্লেখ থাকতে হবে।

প্রথম প্রকাশ : ফেব্রুয়ারি ২০২৩

তাম্রলিপি : ৭১৫

প্রকাশক

এ কে এম তারিকুল ইসলাম রনি

তাম্রলিপি

৩৮/৪ বাংলাবাজার, ঢাকা-১১০০

প্রচ্ছদ

সেলিম হোসেন সাজু

বর্ণবিন্যাস

তাম্রলিপি কম্পিউটার

মুদ্রণ

মেসার্স সোমা প্রিন্টিং প্রেস

মূল্য : ৩৩৪.০০

Ganit Bujar Hate Khori

By : Munir Hasan, Ahmed Shahriar, Mahtab Hossain, Ashraful Al
Shakur

First Published : February 2023 by A K M Tariquul Islam Roni
Tamralipi, 38/4 Banglabazar, Dhaka-1100

Price : 334.00 \$ 12

ISBN : 978-984-97497-4-5

উৎসর্গ

গণিত অলিম্পিয়াড প্রকল্প বাস্তবায়নের মূল কারিগর প্রাথমিক
শিক্ষা পরিবারের সকল শিক্ষককে

বিশেষ কৃতজ্ঞতায়

এই বইটি লিখতে যারা আমাদের সাহায্য করেছে

মোহাম্মদ মাজেদুর রহমান, একাডেমিক সদস্য, বাংলাদেশ গণিত অলিম্পিয়াড কমিটি
আবরার জামিল সাবরি, একাডেমিক সদস্য, বাংলাদেশ গণিত অলিম্পিয়াড কমিটি
মোহাইমিনুল ইসলাম, একাডেমিক সদস্য, বাংলাদেশ গণিত অলিম্পিয়াড কমিটি
হাসান নাহিয়ান নোবেল, একাডেমিক মেন্টর, বাংলাদেশ গণিত অলিম্পিয়াড কমিটি
কায়েস আল মাহমুদ, একাডেমিক মেন্টর, বাংলাদেশ গণিত অলিম্পিয়াড কমিটি
তুরাব হক পায়েল, একাডেমিক কো-অর্ডিনেটর, বাংলাদেশ গণিত অলিম্পিয়াড কমিটি
সামিন ইয়াসার নিলয়, একাডেমিক সদস্য, বাংলাদেশ গণিত অলিম্পিয়াড কমিটি

সূচি

ভূমিকা	৯
অধ্যায় ১: সংখ্যার শুরু.....	১৩
অধ্যায় ২: সংখ্যার চার প্রক্রিয়া	২৮
অধ্যায় ৩: বিভাজ্যতা	৪৮
অধ্যায় ৪: উৎপাদক	৫৭
অধ্যায় ৫: লসাগু এবং গসাগু	৬৮
অধ্যায় ৬: প্যাটার্ন	৮১
অধ্যায় ৭: ভগ্নাংশ.....	৮৮
অধ্যায় ৮: তথ্য সংগ্রহ ও উপাত্ত	১০৮
অধ্যায় ৯: জ্যামিতির সূচনা.....	১১৯
অধ্যায় ১০: গণনা	১৩০
অধ্যায় ১১: সংখ্যার ভিত্তি.....	১৩৬

ভূমিকা

আমাদের দেশে ছেলেমেয়েদের গণিতভীতি তৈরি হয় প্রাইমারি স্কুল থেকেই। শিক্ষাজীবনের শুরু থেকেই না বুঝে মুখস্থ করার অভ্যাস তাকে আর প্রবলেম সলভার হয়ে উঠতে দেয় না। গণিত অলিম্পিয়াডের শুরু থেকে আমরা এ অভ্যাসের পেছনের কারণগুলো খোঁজার চেষ্টা করেছি। সব যে খুঁজে পেয়েছি তা নয়, কিন্তু যখন যা পেয়েছি সেটিকে নিয়ে কিছু কাজ করার চেষ্টা করেছি। তবে সেটা খুব ছোট একটা গ্রুপের জন্য। প্রতিবছর আমরা মাত্র ২ লক্ষ ছেলেমেয়ের কাছে নানাভাবে পৌঁছাতে পারি। ওদের একটা অংশ হয়তো আমাদের কাছ থেকে পাওয়া অভিজ্ঞতাকে কাজে লাগায়। কিন্তু একটা বড় অংশের কাছেই আমরা আসলে যেতে পারি না।

তো, কয়েক বছর আগে প্রাথমিক শিক্ষা মন্ত্রণালয় যখন আমাদের সাথে গণিত নিয়ে কাজ করার আগ্রহ প্রকাশ করে, তখন আমরা সঙ্গে সঙ্গে রাজি হয়ে যাই। মন্ত্রণালয় থেকে প্রথমে একটা সম্ভাব্যতা প্রকল্প তৈরি করা হয়। আমরা আমাদের সৈন্য-সামন্ত নিয়ে কাজ শুরু করি। আমাদের লক্ষ্য ছিল ১৭টি জেলার ৮০টি স্কুলে শিক্ষকদের “গণিত অলিম্পিয়াড কৌশল”-এর ওপর প্রশিক্ষণ দেয়া। ৮০টি স্কুলে আমাদের কাজের ফলাফল এত অসাধারণ ছিল যে, সরকার এই কার্যক্রমের স্কেল-আপ এক বছর এগিয়ে আনে। যে কাজ ২০২১ সালে সারাদেশে ছড়িয়ে পড়ার কথা, সে কাজ ২০২০ সালেই শুরু হয়ে যায়!

কিন্তু আমরা পড়ে যাই করোনার খপ্পরে, পুরো বিশ্ব স্থবির হয়ে যায়। তারপরও, আমাদের কাজ বন্ধ হয়নি। কখনো অনলাইন, কখনো

মাঠে-ঘাটে দৌড়াদৌড়ি, কখনো হাইব্রিড, এসব করে আমরা ১২০ জন কোর ট্রেনার এবং ২৩০০ মাস্টার ট্রেনার তৈরি করতে পেরেছি। কোর ট্রেনার এবং মাস্টার ট্রেনারদের মূল দায়িত্ব ছিল সারা দেশের ১,৩২,০০০ হাজার প্রাথমিক বিদ্যালয়ের শিক্ষকদের শ্রেণিকক্ষে “গণিত অলিম্পিয়াড কৌশলে” পাঠদানের উপযোগী করে তোলা। সাথে, শিক্ষকদের জন্য যে ৪ মডিউলের অনলাইন কোর্স তৈরির কথা, তারও ১টি মডিউল (গণিত অলিম্পিয়াড কৌশলে গণিত শিখন: প্রথম পাঠ) তৈরি করে আমরা মুক্তপাঠে প্রকাশ করে ফেলি। যে কেউ চাইলে এখনো এই কোর্সটি বিনামূল্যে যেকোনো জায়গায় বসে করে ফেলতে পারবে।

অনেকেই আমার কাছে জানতে চান, গণিত অলিম্পিয়াড কৌশল বলতে কী বোঝানো হয়? প্রচলিত গণিত শেখার পদ্ধতির সাথে এটার আদৌ কোনো পার্থক্য আছে কি না? সোজাসুজি উত্তর হচ্ছে, গতানুগতিক পদ্ধতির সাথে এটার কিছু পার্থক্য আছে। কোনো একটা জিনিস শিক্ষার্থীরা কীভাবে শিখবে তা শিখিয়ে দেয়াই হলো এই পদ্ধতির মূল উদ্দেশ্য। আজ থেকে ১৫-২০ বছর পর আমাদের ছেলেমেয়েদের জীবনে কী কী সমস্যা সমাধান করতে হবে সেটা আমরা জানি না। কিন্তু আমরা যদি তাদেরকে শিখিয়ে দিতে পারি, একটা সমস্যা নিয়ে কীভাবে চিন্তা করতে হয়, দিনের পর দিন কীভাবে একই সমস্যার পেছনে লেগে থাকা যায়, কীভাবে ভিন্ন ভিন্ন উপায়ে একটা সমস্যার সমাধান করা যায়, তাহলে তারা ধীরে ধীরে আগামী বিশ্বের জন্য প্রস্তুত হয়ে উঠবে। এছাড়াও, ছেলেমেয়েদের গণিত শেখার প্রক্রিয়া যেন আনন্দময় হয়, ভয়ভীতি দূর করে তারা যেন প্রশ্ন করতে পারে, সৃজনশীল চিন্তা করতে তারা যেন পিছপা না হয়, এসব নিশ্চিত করাই হচ্ছে গণিত অলিম্পিয়াড কৌশলের মূল লক্ষ্য।

“গণিত বোঝার হাতেখড়ি” বইটির উদ্দেশ্য হচ্ছে আমাদের ছেলেমেয়েদের গুরু থেকেই সমস্যা সমাধানের রাস্তা দেখিয়ে দেয়া।

২০১৮ সালে আন্তর্জাতিক গণিত অলিম্পিয়াডে স্বর্ণপদক অর্জন থেকে শুরু করে যারাই গণিত কিংবা বিজ্ঞানের অন্যান্য জায়গায় ভালো করেছে, তাদের সবার মধ্যে একটা মিল হলো তাদের প্রস্তুতি শুরু হয়েছিল প্রাইমারি পর্যায় থেকেই। তাই, ছোট বয়স থেকেই গণিতের প্রতি ভালোবাসা তৈরি এবং সমস্যা সমাধানের সাথে অভ্যস্ত হওয়া পরবর্তীতে কাজে দিবে।

এখন আমরা প্রস্তুতি নিচ্ছি ৬৫ হাজার বেসরকারি প্রাইমারি স্কুলের শিক্ষকদের কীভাবে আমরা এই কাজের সাথে যুক্ত করতে পারি। একইসাথে, গণিত অলিম্পিয়াড কৌশলগুলো কীভাবে আমাদের ছেলেমেয়েদের মাঝে ছড়িয়ে দিতে পারি। “বাংলার ম্যাথ”-এর “গণিত বোঝার হাতেখড়ি” বইটি তারই একটি প্রয়াস।

এই বই তুমি কীভাবে পড়বে

প্রথমত বইটি টানা পড়ে গেলে চলবে না। বইটি পড়ার ক্ষেত্রে তোমাকে খাতা-কলম সাথে নিয়ে বসতে হবে। সমস্যাগুলো সমাধানের আগে বইয়ে দেয়া আলোচনা ভালো করে পড়তে হবে। কিছু কিছু সমস্যার সমাধান আমরা বইতে করে দিয়েছি। তোমার জন্য দেয়া হয়েছে আরও কিছু সমস্যা। এগুলো সমাধানের চেষ্টা তোমাকেই করতে হবে। একটা সমস্যা সমাধানের হাজারো তরিকা আছে। ঠিক সমাধানে তুমি পৌঁছেছ কিনা সেটাই লক্ষ্য। সমস্যা সমাধানের পর সমস্যার নম্বরের গায়ে একটা কালো টিক চিহ্ন দিয়ে দিবে।

আর যদি সমাধান করতে না পারো? তাহলে প্রথমে কয়েকটা জানা বিষয় দিয়ে সমস্যাটিকে আক্রমণ করে দেখবে। যদি তারপরেও কূলকিনারা না পাও, তাহলে সমস্যা নম্বরটিকে একটি লাল বৃত্ত দিয়ে সামনে আগাতে হবে। এভাবে তোমার গাণিতিক সমস্যা সমাধানের ধার অনেক বেড়ে যাবে। তুমিও তৈরি হবে গণিত অলিম্পিয়াডের জন্য।

ওয় থেকে ৫ম শ্রেণির শিক্ষার্থীদের জন্য লেখা হলেও, ৬ষ্ঠ এবং ৭ম শ্রেণির শিক্ষার্থীরাও, আশা করি, বইটি পড়ে এবং সমস্যাগুলো নিয়ে চিন্তা করে আনন্দ পাবে।

তোমার সবার সেকেন্ড ডিফারেন্সিয়াল নেগেটিভ হোক।

মুনির হাসান

সাধারণ সম্পাদক, বাংলাদেশ গণিত অলিম্পিয়াড কমিটি

এলিফ্যান্ট রোড, ঢাকা

ফেব্রুয়ারি, ২০২২

অধ্যায় ১: সংখ্যার শুরু

ছোটবেলায় আমি প্রায়ই আকাশের তারা গোনার চেষ্টা করতাম। নভেম্বর বা ডিসেম্বরের দিকে যখন আকাশ বেশ পরিষ্কার থাকত, প্রায় রাতেই আমি জানালার পাশে বসে আকাশের এক পাশ থেকে তারা গোনা শুরু করতাম; এক, দুই, তিন, দশ, পঞ্চাশ, একশো.....

একটা সময় পর আর হিসেব থাকত না, কারণ কোন দিক থেকে শুরু করে কোন দিকে গিয়ে থেমেছি তা আর খুঁজে পেতাম না। আচ্ছা, তুমি কি কখনো গুনে দেখেছ আকাশে কত তারা আছে? তোমার হিসেবে তারার সংখ্যা কত? এক হাজার? দশ হাজার? পঞ্চাশ হাজার? এক লক্ষ? নাকি অনেক বেশি যা আসলে গুনে শেষ করা যাবে না! আকাশের তারা তুমি কীভাবে গোনো? আমার মতো এক দিক থেকে শুরু করে গুনতে গুনতে আরেক দিকে চলে যাও নাকি কোনাকুনি করে গুনে দ্রুত হিসেব করে ফেলো? নাকি সোজা উত্তর-দক্ষিণ বরাবর গুনলে নির্ভুল হিসেব পাওয়া যায়? আচ্ছা, অনেক বেশি জিনিস একসাথে থাকলে আসলে কীভাবে গুনতে হয়? তোমার কি কোনো সহজ পদ্ধতি জানা আছে? চলো, আমরা নিচের ছবিতে কয়টি তারা আছে তা গোনার চেষ্টা করি। আমরা দেখি দ্রুত হিসেব করার কোনো বুদ্ধি বের করতে পারি কি না—



এখানে তারার সংখ্যা অনেকভাবে আমরা হিসেব করতে পারি, যেমন—

- আমরা ১, ২, ৩, ৪, ৫, এভাবে গুনে তারার সংখ্যা বের করতে পারি। এটা কি খুব ভালো উপায়? একটা একটা করে গুনলে তো অনেক সময় লাগবে, ভুলও হতে পারে, একই তারা দুই-তিনবারও গুনে ফেলতে পারি। তাহলে, আমাদের আরও দ্রুত এবং নির্ভুল গণনার বুদ্ধি বের করতে হবে।
- আমরা লম্বালম্বি কিংবা আড়াআড়িভাবে গুনতে পারি যে মোট কয়টি তারা আছে। এটা অবশ্য আগের চেয়ে একটু ভালো উপায় হবে, কারণ এখানে আমাদের দিক নির্দিষ্ট, কোথা থেকে শুরু করছি সেটা আমাদের জানা থাকবে, হারানোর ভয় নেই। কিন্তু এটাতেও আগের মতো সময় লাগবে এবং নির্ভুল হিসেব নাও আসতে পারে।
- আমরা দল বা গ্রুপ করে গুনতে পারি। যেমন: ৩টি কিংবা ৫টি কিংবা ৮টি তারার গ্রুপ করে, গণনার সুবিধার জন্য বৃত্ত দিয়ে আলাদা করে দিতে হবে। সবচেয়ে ভালো হয় যদি ১০ এর দল বা গ্রুপ করে গণনা যায়, তাহলে খুব দ্রুত ও নির্ভুল হিসেব পাওয়া যাবে।



আচ্ছা, এর চেয়ে ভালো কোনো উপায়ে কি গণনা যাবে? যদি যায়, তাহলে কীভাবে?

গণনা করার পর আমরা সেটা কীভাবে প্রকাশ করব কিংবা আরেকজনকে কীভাবে বলতে পারব? এর জন্য আমাদের সংখ্যা এবং অঙ্কের ব্যাপারে জানতে হবে।

সংখ্যা কাকে বলে?

সংখ্যা হচ্ছে এমন একটি উপাদান যা কোনো কিছু গণনা, পরিমাণ এবং পরিমাপ করার জন্য ব্যবহৃত হয়। যেমন— আদর্শ প্রাথমিক বিদ্যালয়ের চতুর্থ শ্রেণিতে ২৪৩ জন শিক্ষার্থী আছে; এখানে ২৪৩ একটি সংখ্যা।

অংক কাকে বলে?

সংখ্যা তৈরির ক্ষুদ্রতম প্রতীকই হচ্ছে অংক। আগের উদাহরণে ব্যবহৃত ২৪৩ হলো তিন অংকবিশিষ্ট একটি সংখ্যা যা ২, ৪ এবং ৩, এই পৃথক তিনটি অংক নিয়ে গঠিত। এরা প্রত্যেকেই আবার একেকটি সংখ্যা। তাই আমরা এভাবেও বলতে পারি, সকল অংকই সংখ্যা কিন্তু সকল সংখ্যা অংক নয়।

সংখ্যার ইতিহাস

সংখ্যার ইতিহাস খুবই চমৎকার। প্রাগৈতিহাসিক কালে যখন মানুষ কৃষিকাজ ও পশুপালন করতে শিখে, তখনই আস্তে আস্তে সংখ্যার প্রয়োজন হতে থাকে। মানুষ পশুপালন করতে গিয়ে যখন সন্ধ্যায় গৃহপালিত পশুর ফিরে আসা হিসেব করতে যায়, তখনই গণনার ব্যাপারটি শুরু হয়। বিভিন্ন প্রত্নতাত্ত্বিক বস্তু থেকে প্রমাণ পাওয়া যায়, প্রথম দিকে মানুষ গাছের গায়ে দাগ দিয়ে, রশিতে গিঁট দিয়ে, মাটিতে দাগ কেটে, অনেকগুলো কাঠি দিয়ে হিসাব রাখত। একটা পশুর জন্য একটা দাগ, দুইটা পশুর জন্য দুইটা ইত্যাদি।

এভাবেই চলেছে লম্বা সময় ধরে। কিন্তু তাতে তৈরি হয় কিছু ব্যবহারিক সমস্যা। একটু বড় সংখ্যা হলে দাগের সংখ্যা অনেক

বেড়ে যায়। যেমন— এক বছরেই দিনের হিসাব রাখতে ৩৬৫টা দাগ প্রয়োজন হয়। এই সমস্যা থেকে মুক্তি পেতে অনেক সভ্যতাতেই দেখা গেছে মানুষ গ্রুপ বা দল করে দাগ দিত। আবার, চাঁদ প্রতি ২৯-৩০ দিন পর নতুন করে ওঠে। এই হিসাব রাখার জন্য তারা দেখা যায় ২৯/৩০টি দাগের গ্রুপ করে তাদের মতো করে মাসের হিসাব রাখত। এভাবেই শুরু হয় গ্রুপ করে গোনার। এভাবে বহু বছর কেটে যায় নানান পদ্ধতি বা কৌশল বের করতে।

এরপর পঞ্চম শতকে আর্যভট্টের সময় ভারতীয় উপমহাদেশে শূন্যের প্রচলন হয়। যা আরবরা অষ্টম শতকে ব্যবহার শুরু করলে আস্তে আস্তে বর্তমান যে সংখ্যা পদ্ধতি, স্থানীয় মান ভিত্তিক (যার ভিত্তি ১০), তা বিপুল প্রচলন পায়। এই পদ্ধতির কারণেই আল খোয়ারিজমি বীজগণিত ব্যবহার করে সহজে হিসেব করার পদ্ধতি বের করতে পারেন। স্থানীয় মান ও শূন্যের ধারণা ব্যবহার করেই তিনি গুণ ও ভাগ করার যে অ্যালগরিদম বা প্রক্রিয়া, তা উদ্ভাবন করতে সক্ষম হন। এইসব প্রক্রিয়া আবিষ্কার হওয়াতে মানুষের দৈনন্দিন হিসাব-নিকাশ সহজ হয়ে যায়।

স্থানীয় মানের কথা যেহেতু এসেই গেল, অবস্থানের ওপর ভিত্তি করে সংখ্যাকে কত ভাগে ভাগ করা যায়, তা সম্পর্কেও একটু জেনে রাখি। অবস্থানের ওপর ভিত্তি করে এখন পর্যন্ত সৃষ্ট সংখ্যা পদ্ধতিকে প্রধানত দুইভাগে ভাগ করা হয়—

১. নন-পজিশনাল (স্থানীয় মানবিহীন) সংখ্যা পদ্ধতি

২. পজিশনাল (স্থানীয় মাননির্ভর) সংখ্যা পদ্ধতি

নন-পজিশনাল (স্থানীয় মানবিহীন) সংখ্যা পদ্ধতি কী?

যে সংখ্যা পদ্ধতিতে সংখ্যার মান সংখ্যায় ব্যবহৃত অংকসমূহের অবস্থানের ওপর নির্ভর করে না তাকে নন-পজিশনাল সংখ্যা পদ্ধতি বলে। এই পদ্ধতিতে বিভিন্ন চিহ্ন বা প্রতীক ব্যবহার করে হিসাব-