বীজগণিতে সূত্রপাত

২য় খণ্ড

বীজগণিতে সূত্রপাত

গণিত অলিম্পিয়াডে বীজগণিতের সাথে পরিচয়

২য় খণ্ড

এম আহসান আল মাহীর
তাহমিদ হামীম চৌধুরী জারিফ
আফসানা আকতার

তাম্রলিপি

বীজগণিতে সূত্রপাত : ২য় খণ্ড
এম আহসান আল মাহীর, তাহমিদ হামীম চৌধুরী জারিফ, আফসানা আকতার

প্রথম প্রকাশ : ফেব্রুয়ারি ২০২৩

তাম্রলিপি : ৭১২

প্রকাশক
এ কে এম তারিকুল ইসলাম রনি
তাম্রলিপি
৩৮/৪ বাংলাবাজার, ঢাকা-১১০০

প্রচ্ছদ
মোছাঃ সেলিনা আকতার

বর্ণবিন্যাস
তাম্রলিপি কম্পিউটার

মুদ্রণ
ইন্টারনেট প্রিন্টিং প্রেস

মূল্য : ৩০০.০০

Bijgonite Sutropat : 2nd part
By : M Ahsan Al Mahir, Tahmid Hameem Chowdhury Zarif & Afsana Akter
First Published : February 2023 by A K M Tariqul Islam Roni
Tamralipi, 38/4 Banglabazar, Dhaka-1100

Price : 300.00 $10

ISBN : 978-984-97497-5-2

উৎসর্গ

গণিত উৎসবে সকল অংশগ্রহণকারীদেরকে

মুহম্মদ জাফর ইকবাল স্যারের কিছু কথা

‘বীজগণিতে সূত্রপাত’ বইটির পাণ্ডুলিপি হাতে পেয়ে অনেকগুলো কারণে আমি আনন্দ পেয়েছি। প্রথম কারণ এই বইটি কয়েকজন বুড়ো প্রফেসর মিলে লিখেননি এটি লিখেছে কয়েকজন কম বয়সী তরুণ-তরুণী। (সে কারণে বইটি কটমটে এবং নীরস নয় বইটি ঝরঝরে এবং সুখপাঠ্য)

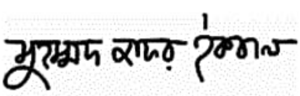
দ্বিতীয় কারণ, গণিতের বই লেখার জন্য এই তরুণ-তরুণীরা প্রথমে বীজগণিতকে বেছে নিয়েছে—যে বিষয়টি নিয়ে ছেলে-মেয়েদের বিভ্রান্তি একটুখানি বেশি। যারা স্কুল কলেজের বীজগণিত পড়ে অভ্যস্ত বলা যেতে পারে তারা প্রথমবার সত্যিকার বীজগণিতের প্রকৃত ব্যাপ্তিটি বুঝতে পারবে।

আমার আনন্দ পাওয়ার তৃতীয় কারণ হচ্ছে, এই বইটি লেখা হয়েছে বাংলায়। আমি সবসময়য়েই দেখেছি গণিত বা বিজ্ঞানের একটা বিষয়কে ইংরেজিতে যত সহজে ব্যাখ্যা করা যায় বাংলায় সেটি সম্ভব হয় না। তার কারণটাও আমরা মোটামুটিভাবে জানি, বাংলা ভাষায় গণিত এবং বিজ্ঞান চর্চা তুলনামুলকভাবে কম করা হয়েছে। তাই সেই সংক্রান্ত ক্রিয়াপদ কম বলে কিছু লিখতে হলে ভাষাটি জটিল হয়ে যায়। আমাদের এই তরুণ-তরুণী গণিত লেখকরা বাংলায় বইটি লিখতে গিয়ে নিশ্চিত ভাবেই সেই সমস্যার মুখোমুখি হয়েছে, তারপরেও তারা বাংলা ভাষায় সবাইকে এই বইটি উপহার দিয়েছে সেটি চমৎকার একটি ব্যাপার।

আনন্দ পাওয়ার চতুর্থ কারণটি হচ্ছে অন্যান্য অনেক গত বাঁধা বীজগণিতের বইয়ের মত এটি ‘আরো একটি’ বীজগণিতের বই হিসাবে লেখা হয়নি, এটি লেখা হয়েছে গণিত অলিম্পিয়াডকে মাথায় রেখে। আমার কাছে অনেক ছেলে মেয়ে জানতে চায়, তারা যদি গণিত অলিম্পিয়াডে অংশ নিতে চায় তাহলে কোন ধরনের বই পড়বে? এখন থেকে আমি চোখ বন্ধ করে এই বইটিকে পড়ার উপযোগী একটা বই হিসাবে বলে দিতে পারব।

আহসান আল মাহীর, তাহমিদ হামীম চৌধুরী জারিফ এবং আফসানা আকতারের লেখা বীজগণিতে সূত্রপাত বইটি শুধু যে বীজগণিতের উপর লেখা একটা সুলিখিত বই তা নয়, এর মাঝে প্রয়োজনীয় উদাহরণ এবং অনুশীলনী দিয়ে বইটিকে একটি পুর্ণাঙ্গ রূপ দেওয়া হয়েছে। শুধু তাই নয় বইটি পড়তে পড়তে কোথায় কোথায় থমকে দাঁড়িয়ে একটুখানি চিন্তা করতে হবে সেটাও মনে করিয়ে দেওয়া হয়েছে! আমি নিজে যেহেতু লেখালেখি করি তাই আমি খুব ভালো করে জানি এধরনের একটি বইকে পুর্ণাঙ্গ রূপ দেওয়া কতো কঠিন। তিনজন তরুণ-তরুণী মিলে সেই কঠিন কাজটি শেষ করেছে সেজন্য তাদের অভিনন্দন!

দুই দশকেরও আগে যখন আমরা কয়েকজন মিলে এই গণিত অলিম্পিয়াড আন্দোলন শুরু করেছিলাম তখন আমরা জানতাম না আমাদের সাথে আরো কতোজন যোগ দেবেন, এই দেশের ছেলে-মেয়েরা কতো আগ্রহে সেটি গ্রহণ করবে, এবং গণিতের জন্য গভীর ভালবাসায় তারা আন্তর্জাতিক অঙ্গন থেকে কতো পদক নিয়ে আসবে। তখন যারা শিশু ছিল এখন তারা বড় হয়েছে, গণিতের জন্য তাদের ভালবাসা এতোটুকু ম্লান হয়নি! তারা এখন পরের প্রজন্মের জন্য কাজ করছে, তাদের গণিত শেখাচ্ছে, গণিতের বই লিখছে এর চাইতে আনন্দের বিষয় আর কী হতে পারে?



৪ জানুয়ারি, ২০২৩

ভূমিকা

> *Not everyone can become a great artist, but a great artist can come from anywhere.*
>
> – Anton Ego in Ratatouille

কেন এই বই?

যখন আমরা ঠিক করি গণিত অলিম্পিয়াড ভিত্তিক বই লিখব তখন শুরুতেই যে প্রশ্ন করেছিলাম নিজেদের সেটা হলো কোন বিষয়টা বাছাই করা উচিত যেটা অলিম্পিয়াডে অংশগ্রহণকারীদের সবচেয়ে বেশি সাহায্য করবে?

আমরা পাঠ্যবই থেকেই বীজগণিতের বেশ কিছু বেসিক বিষয় আর সূত্র শিখি। কিন্তু অলিম্পিয়াডে যে বীজগাণিতিক সমস্যাগুলো দেখা যায়, সেগুলোর একটা বড়ো অংশের সমাধানে শুধু সূত্রের সরাসরি প্রয়োগ নয়, বরং চিন্তন দক্ষতার দরকার পড়ে। এছাড়াও বাংলাদেশের শিক্ষার্থীরা ইউক্লিডিয়ান জ্যামিতিভিত্তিক পাঠ্যরীতির কারণে জ্যামিতিতে যথেষ্ট ভালো, আর বাংলায় কম্বিনেটরিক্সের জন্য এখন রিসোর্সও মোটামুটি ভালো পরিমাণে আছে। তাই যে দুটি অপশন আমাদের হাতে ছিল সেগুলো হলো নাম্বার থিওরি আর বীজগণিত। আমাদের কাছে মনে হয়েছে অলিম্পিয়াডে অ্যাডভান্সড লেভেল পর্যন্ত ভালো করার জন্য বীজগণিতে যথেষ্ট পারদর্শিতা থাকা বেশ জরুরি। তাই এই বইয়ের প্রধান বিষয় হিসেবে আমরা বীজগণিতকেই প্রাধান্য দিয়েছি।

দ্বিতীয় যে প্রশ্নের সম্মুখীন হয়েছি সেটা হলো বইটা কি বাংলায় হবে নাকি ইংরেজিতে? গাণিতিক এমন অনেক শব্দ আছে যার ভালো বাংলা প্রতিশব্দ পাওয়া কঠিন। আর অলিম্পিয়াডের জন্য বাংলার তুলনায় ইংরেজিতে রিসোর্স

আর পাঠক উভয়ই বেশি বলে এই প্রশ্নটা অস্বাভাবিক না। কিন্তু ঠিক এই কারণেই আবার সিদ্ধান্ত নিয়েছি বাংলায় লেখার। কারণ আমরা চেয়েছি গণিতে আগ্রহী ছেলেমেয়েদের জন্য বাংলায় রিসোর্সের শূন্যস্থানটাকে একটু হলেও পূরণ করতে।

বইটির বিষয়বস্তু নিয়ে ছোটোখাটো পরিচিতি

সাধারণত অলিম্পিয়াডে বীজগণিতের বেসিক লেভেলে যেসব বিষয় জানা দরকার সেগুলো আটটি অধ্যায়ে বইটিতে অন্তর্ভুক্ত করা হয়েছে। যার মধ্যে প্রথম খণ্ডে ফাংশন ও জটিল সংখ্যা বিষয়ক অধ্যায় আর দ্বিতীয় খণ্ডে অন্যান্য বিষয়গুলো রাখা হয়েছে। যদিও শতভাগ নিশ্চিতভাবে বলা যায় না যে এই আট অধ্যায় পড়ে কেউ চ্যাম্পিয়ন হয়ে যাবে, তবে আশা করা যায় যে সে বীজগাণিতিক সমস্যাগুলো সম্পর্কে ভালো একটা ধারণা পাবে আর ভবিষ্যতে চর্চা করার জন্যও আরও রিসোর্স জানতে পারবে।

প্রতিটা অধ্যায়ে থিওরির পাশাপাশি উদাহরণ ও সমস্যা দেয়া আছে। আমরা বলব, প্রতিটি উদাহরণ ভালো করে পড়তে ও সম্ভব হলে সমাধান আগে না দেখে বেশ কিছুক্ষণ নিজে চেষ্টা করতে। যারা প্রথম প্রথম গণিত চর্চা শুরু করে তাদের প্রধান একটি সমস্যা হলো একটা প্রবলেমের পেছনে যথেষ্ট সময় না দিয়ে সাথে সাথে সমাধান দেখে ফেলা। এটা দূর করার একটা উপায় হলো সবসময় মাথায় রাখা যে তুমি কত পৃষ্ঠা পড়ছ বা কতগুলো সমস্যা সমাধান করছ তার ওপর উন্নতি নির্ভর করে না। প্রাথমিক পর্যায়ে গণিত চর্চার প্রধান উদ্দেশ্যই হলো তোমার ব্রেইনকে চিন্তা করতে শেখানো।

যারা পড়ছ তাদের উদ্দেশ্যে

যদি তোমরা নিয়মিত অলিম্পিয়াডে অংশগ্রহণ করে থাক তাহলে এই কথাগুলো সম্ভবত আগেও শুনেছ। একই কথা আমরাও বলছি কারণ এগুলো আসলেই অনেক গুরুত্বপূর্ণ। আর যদি প্রথমবার শুনে থাক তাহলে একে ব্ল্যাক ফ্রাইডে সেল ভেবে মনে রেখ, কারণ অলিম্পিয়াডের যাত্রায় এগুলো তোমাকে সাহায্য করতে পারে।

প্রথমত, এই বইটা (অথবা অন্য যেকোনো গণিত বই বা নোট) পড়ার সময় সবসময় কাগজ আর কলম সাথে রাখবে। প্রতিটা সূত্র, প্রতিটা সমীকরণ নিজে লিখে বোঝার চেষ্টা করবে। কারণ শুধু পড়তে থাকলে একসময় না একসময় খেই হারিয়ে ফেলার সম্ভাবনা অনেক বেশি। আর সেটা হলে আদৌ কিছু বুঝতে পারার সম্ভাবনাও ক্ষীণ! এমনটা যদি হয়, তাহলে অনেক দ্রুত হতাশ হয়ে পড়তে পারো।

দ্বিতীয়ত, এমন হতেই পারে যে অনেক কিছু তুমি বুঝছ না। তখন কী করবে? কয়েকবার পড়ার পরও যদি না বুঝে থাক, তাহলে অন্য কারও থেকে সাহায্য নিতে পারো। তাও যদি না বোঝ, তাহলে ঐ অংশটুকু বাদ দিয়ে অন্য কিছুতে চলে যাবে। কিন্তু বুঝতে পারছ না বলে হাল ছেড়ে দিয়ে গণিত করাই কিন্তু ছেড়ে দিও না! কারণ যে জিনিসটা তুমি এখন বুঝছ না, ঐ একই জিনিস কিছুদিন পর দেখবে সহজ লাগবে। সেটার জন্য গণিত চর্চা চালিয়ে যেতে হবে।

তৃতীয়ত, এই বইয়ে বেশ কিছু সমস্যা ও উদাহরণ আছে যেগুলো বেশ কঠিন এবং BDMOএর চেয়ে অ্যাডভান্সড লেভেলের। আমরা আশাও করছি না তোমরা সেগুলো একবারেই বুঝে ফেলবে। এগুলো দেয়ার কারণ হলো তোমরা যেন আন্তর্জাতিক অলিম্পিয়াড ধারার সমস্যার সাথে পরিচিত হতে পার। তাই এ ধরনের প্রবলেম সলভিংয়ে যদি বেশ নতুন কেউ এগুলো পড়ে তাহলে শুরুতেই এদের সমাধান (এমনকি প্রশ্ন) না বোঝা অস্বাভাবিক কিছু না।

এবং সবশেষে, একটা সমাধান যদি তোমরা বুঝেও থাক, তবুও প্রথম দেখায় মনে হতে পারে ‘কোনো মানুষের পক্ষে এই আইডিয়া আসা সম্ভব কীভাবে?!’, কিন্তু আমরা বলব ‘এটা আমার মাথায় জীবনেও আসবে না’ ভাবার বদলে সেই আইডিয়াগুলো নিয়ে চিন্তা করতে কেন এই নির্দিষ্ট আইডিয়া সমাধানে সাহায্য করল, কেন সেটা আমাদের মাথায় এলো ইত্যাদি ইত্যাদি। এভাবে প্রতিটা সমাধান পড়ার পর ঐ কৌশল তোমার নিজের হয়ে যাবে আর ধীরে ধীরে তোমারও ইনটুইশন বাড়তে থাকবে।

কৃতজ্ঞতা

এই বইটা সব চড়াই-উতরাই পার করে তোমাদের হাতে এই মুহূর্তে পৌঁছানোর পেছনে কিছু মানুষের নিরলস প্রচেষ্টা আর অবদান রয়েছে। সবার আগে ধন্যবাদ দিতে চাই বাংলাদেশ গণিত অলিম্পিয়াড ও এর সাথে জড়িত প্রত্যেককে, বিশেষ করে মুহম্মদ জাফর ইকবাল, প্রয়াত জামিলুর রেজা চৌধুরী, মুনির হাসান, মোহাম্মদ কায়কোবাদ, মাহবুব মজুমদার, বায়েজিদ ভুঁইয়া জুয়েল, আইয়ুবুর রহমান, সকল বর্তমান ও সাবেক মেন্টর এবং মুভার্সদের। তাদের এত দিনের অক্লান্ত পরিশ্রম ছাড়া আমাদের ভালোবাসার গণিত অলিম্পিয়াড আজ এ পর্যায়ে কখনই আসতে পারত না। এজন্য তাদের কাছে আমরা সকলেই ঋণী।

আরও একবার বিশেষ ধন্যবাদ জানাতে চাই মুহম্মদ জাফর ইকবাল স্যারকে, যিনি আমাদের মতো বাচ্চাকাচ্চাদের পাঠানো একটা ড্রাফট পড়ে দেখেছেন এবং রিভিউও লিখেছেন।

অনেক ব্যস্ততা থাকা সত্ত্বেও সার্বক্ষণিক দিকনির্দেশনা আর রিভিউ দেওয়ার জন্য ঈপ্সিতা বহ্নি উপমা ও নিশাত আঞ্জুম বৃষ্টি আপুকে অনেক অনেক ধন্যবাদ। বইয়ের কভারটির জন্য আমাদের মাথায় প্রথম আইডিয়া আসে 3Blue1Brown এর একটি ইউটিউব ভিডিও থেকে। এরপর সেখান থেকে ছবিটাকে পুনরায় তৈরি করে কভার ডিজাইন করতে সাহায্য করেছেন তাহনিক নূর সামিন ভাইয়া। বইয়ের প্রুফরিডিংয়ে অংশ নিয়েছে রাইয়ান বিনতে মোস্তফা, নুজহাত আহমেদ দিশা এবং আরিফা আলম। তাদের সকলকে অনেক অনেক ধন্যবাদ জানাই।

বইটি যেহেতু বীজগণিতের তাই এর সমীকরণগুলো নিখুঁত হওয়া খুবই জরুরি। তাই সম্পূরণ বইটিকেই লেখা হয়েছে LATEX টাইপসেটে। আর বাংলায় LATEX করার জন্য ব্যবহৃত হয়েছে আদীব হাসান ভাইয়ের LATEX Bangla প্যাকেজটি। এ ছাড়া বইয়ের কড়া কড়া সমাধান দেখে তোমাদের যদি কোথাও বুঝতে সমস্যা হয় সেখানে বোঝার সুবিধার জন্য ছবি যুক্ত করেছি। এই ছবি যুক্ত করা হয়েছে Tikz প্যাকেজ ব্যবহার করে।

এবং তোমরা যারা বইটি পড়ছ তাদের জন্য বড়ওওওও একটা ধন্যবাদ। তোমাদের ছাড়া এই বইটি কখনই তার সার্থকতা পেত না।

সূত্রপাত

এই বই লিখতে লিখতে শেষ কয়েকটা মাস যে চোখের পলকে কখন পার হয়ে গেল সেটা টেরও পাইনি। এর মধ্যে আমাদের কারো হয়তো এসএসসি পরীক্ষা কারো বা এইচএসসি পরীক্ষা ছিল। এইচএসসি পরীক্ষার মাঝে বই লেখার সময় কতবার যে ভুলেই গেছিলাম যে পরীক্ষার পড়া বাকি পড়ে আছে তার ঠিক নেই। তারপর যখন জাফর ইকবাল স্যারসহ বাকিরা বইটা পড়ে (তোমাদের আগেই কিন্তু তারা বইটা পড়ে ফেলেছেন) প্রশংসা করেছেন তখন মনে হতো যে এই পরিশ্রম বিফলে যায়নি। আরও আগ্রহ নিয়ে বই লেখতে বসে পড়তাম। এভাবেই লিখতে লিখতে অনেক কিছু শিখেছি। এখন শেষ মুহূর্তে এসে ভয় হচ্ছে এটা ভেবে যে তোমরা এই বইটি পড়ে আনন্দ পাবে কি না, সবকিছু ঠিকমতো বুঝতে পারবে কি না। আমরা চেষ্টা করেছি নিজেরা যতটুকু পারি তার সর্বোচ্চটা দিয়ে বুঝিয়ে লেখার (আমরা তিনজনই INTP! বিশ্বাস করো পাবলিক স্পিকিং আমাদের দক্ষতার মধ্যে খুব একটা পড়ে না)। তাই বইটা পড়ে তোমাদের কেমন লাগল সেটা জানার আমাদের অনেক ইচ্ছা। বইয়ের কোন অংশটা পড়ে তোমাদের ভালো লাগল, কোনো অংশ পড়ে বুঝতে অসুবিধা হচ্ছে কি না কিংবা মুদ্রণজনিত কোনো ভুল আছে কি না তার সব লিখে পাঠাতে পারো bijgonitesutropat@gmail.com ঠিকানায়। আশা করি তোমরা এটা পড়ে বীজগণিতে আগ্রহী হয়ে উঠবে, যেটা আসলে এই বই লেখার মূল উদ্দেশ্য। তোমাদের বীজগণিতের সূত্রপাত শুভ হোক।

তাহমিদ হামীম চৌধুরী জারিফ

১৩ জানুয়ারি, ২০২৩

সকালে আমাদের বইটার পাণ্ডুলিপি জমা দেওয়ার ডেডলাইন। তাই রাত দেড়টায় প্রায় মরণাপন্ন চোখ নিয়ে এটা লিখতে বসেছি (আমি হলাম সেই ব্যক্তি যে হাতে গুণে কয়েকবার রাত বারোটার পর ঘুমিয়েছে)। সাধারণত অন্য কিছু হলে এত বেশি ধৈর্য ধরতে পারতাম না। কিন্তু এই বইটার কথা আলাদা। এটা লেখা গত কয়েক মাসে আমার জীবনের প্রধান অগ্রাধিকারের তালিকায় সবার উপরে ছিল।

যখনই কোনো সমস্যা সমাধান করতে বসেছি সবার আগে খেয়ালে এসেছে - এই প্রশ্নটা কি বইয়ে দেওয়া যাবে? এটা থেকে কি নতুন কিছু শেখা যায়? এত ভাবনা আর সময় এই পাতাগুলোর পেছনে দেওয়া - কালই শেষ। আমি যেমন এই প্রক্রিয়ায় অনেক কিছু শিখেছি, আশা করছি তোমরাও কিছু না কিছু শিখতে পারবে। তারপর তোমরাও একইভাবে অন্যদের মাঝে সেটা ছড়িয়ে দিবে।

আর কথা না বাড়াই (~~কারণ আমি চোখ খুলে রাখতে পারছি না~~) কারণ তোমরা নিশ্চয়ই বইটা পড়ে দেখতে চাও। শুভ কামনা রইল তোমাদের জন্য। তোমাদের জীবনের সেকেন্ড ডিফারেনশিয়াল নেগেটিভ হোক!

আফসানা আকতার

১৩ জানুয়ারি, ২০২৩

গুরুত্বপূর্ণ চিহ্নসমূহ

Congruence : মডুলার অ্যারিথমেটিকে ব্যবহৃত প্রধান চিহ্ন $(\equiv)$ এবং $a \equiv b \pmod m$ লেখাটির মানে হলো a এবং b উভয়কেই m দিয়ে ভাগ করলে যে ভাগশেষ পাওয়া যায় তারা সমান। যেমন: 5 ও 13 উভয়কেই 8 দিয়ে ভাগ দিলে ভাগশেষ হয় 5। তাই এটাকে লেখা যায় $5 \equiv 13 \pmod 8$। Modular Arithmatic আরও বৈশিষ্ট্যগুলো জানতে চাইলে উইকিপিডিয়াতে উঁকি দিয়ে আসতে পার।

Summation : এর নাম শুনেই হয়তো বুঝতে পারছ - এর কাজ হলো যোগফল সম্পর্কিত। Summation এর চিহ্ন হলো $\sum$ আর এটি কয়েকটি রাশির যোগফলকে সংক্ষেপে প্রকাশ করে। যেমন, মনে কর আমাদের কাছে $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7$ এমন 7 টি চলক আছে। এগুলোর যোগফল বের করতে হলে প্রত্যেকটিকে লিখে লিখে যোগ করা বেশ সময়সাপেক্ষ ব্যাপার। তাই আমরা একে সংক্ষেপে লিখব $\sum_{i=1}^{7} a_i$। এখানে নিচে i দ্বারা একটি চলক নির্ধারণ করা হয়েছে। আর আমরা চিহ্নটির নিচের মানটি থেকে শুরু করে উপরে মানটি পর্যন্ত iএ বসাব। যেমন: $i = 3, 4, 5, 6$ বসালে আমরা পাই a_3, a_4, a_5, a_6 অর্থাৎ, $\sum_{i=3}^{6} a_i = a_3 + a_4 + a_5 + a_6$। আবার,

$$\sum_{i=0}^{4} 2^4 = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = 32$$
$$\sum_{i=1}^{4} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^3 + 4^2 = 30$$

Cyclic ও Symmetric Sum : অসমতায় 'Cyclic sum' ও 'Symmetric sum' বেশ গুরুত্বপূর্ণ। Cyclic sum কে $\sum_{cyc}$ ও symmetric sum কে $\sum_{sym}$ চিহ্নগুলো দিয়ে লেখা হয়। আমরা একটি রাশির প্রত্যেকটি চলককে তার পরের চলক দিয়ে চক্রাকারে পালটে দিই তবে যেই রাশি পাব তাকে ঐ রাশির Cycle রাশি বলব। আর এভাবে পরিবর্তন করে করে আমরা যতগুলো cyclic রাশি পাব তাদের সবার যোগফলকে Cyclic Sum বলে। যেমন যদি আমাদের কাছে তিনটি চলক a, b, c থাকে, এবং $\sum_{cyc} ab$ বের করতে হলে আমরা প্রথমে, ab রাশিতে $a \to b, b \to c, c \to a$ পরিবর্তন করে পাই bc রাশি। এবং এর পর bc

থেকে পাই ca এবং ca থেকে আবার ab। অর্থাৎ,

$$\sum_{cyc} ab = ab + bc + ca$$

একইভাবে,

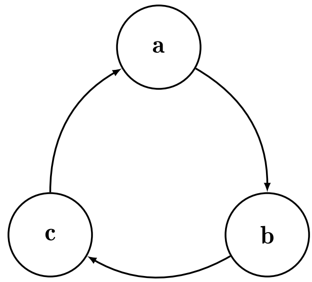
$$\sum_{cyc} a = a + b + c$$
$$\sum_{cyc} a^2bc = a^2bc + b^2ca + c^2ab$$

যদি a, b, c, d চারটি চলক থাকে,

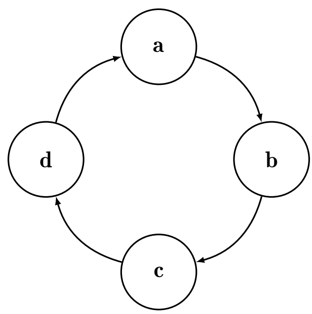
$$\sum_{cyc} a = a + b + c + d$$
$$\sum_{cyc} ab = ab + bc + cd + da$$
$$\sum_{cyc} ab^2c^3 = ab^2c^3 + bc^2d^3 + cd^2a^3 + da^2b^3$$

Symmetric Sum হচ্ছে আসলে Symmetric বীজগাণিতিক রাশিরই আরেক নাম। কোনো একটি রাশিতে যদি n টি চলক থাকে, তাহলে চলকগুলোর সম্ভাব্য $n!$ টি বিন্যাসের সবগুলো রাশির যোগফল। একটা উদাহরণ দিয়ে বিষয়টা আরও ভালো করে বোঝা যাবে। মনে কর, a, b, c তিনটি চলক এবং $3! = 6$। সুতরাং তিন চলকবিশিষ্ট যেকোনো symmetric sum এ 6 টি রাশি থাকবে। যেমন: $\sum_{sym} a^2b$ এর a^2b রাশিকে আমরা $a^2b^1c^0$ আকারে লিখতে পারি। এখন এই রাশিতে যদি ঘাতগুলোকে একই রেখে চলকগুলোকে বিন্যাস করতে থাকি তবে আমরা, $a^2b^1c^0, a^2c^1b^0, b^2c^1a^0, b^2a^1c^0, c^2a^1b^0, c^2b^1a^0$ এই 6 টি রাশি পাই। সুতরাং,

$$\sum_{sym} a^2b = a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b$$



(a) 3 চলকের cycle



(b) 4 চলকের cycle

একইভাবে,

$$\sum_{sym} a = a + b + c + a + b + c$$

$$\sum_{sym} ab = ab + bc + ca + ba + cb + ac$$

তাহলে তো বুঝতেই পারছ চারটি চলকের সিমেট্রিক সামে 24 টি পদ !!

চিহ্নসমূহ	**চিহ্ন দ্বারা প্রকাশিত অর্থ/নাম**
$\mathbb{C}$	জটিল সংখ্যার সেট $\{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}, i = \sqrt{-1}\}$
$\mathbb{R}$	বাস্তব সংখ্যার সেট
$\mathbb{R}^+$	ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যার সেট

$\mathbb{Q}$	মূলদ সংখ্যার সেট $\{\frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0\}$
$\mathbb{Z}$	পূর্ণসংখ্যার সেট
$\mathbb{Z}^+$	ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যার সেট
$\mathbb{N}$	স্বাভাবিক সংখ্যার সেট
$\in$	সেটের সদস্য বোঝায়
$\blacksquare$	হ্যালমোস, সমাধানের শেষে ব্যবহৃত হয়
$\mid$	বিভাজ্যতা,$a\|b$ এর মানে হলো a, b কে নিঃশেষে ভাগ করে।, যেন
$\forall$	For all
$\exists$	Exists
$\implies$	Implies
$\iff$	If and only if (Iff)
WLOG	Without Loss of Generality, সমাধানের সুবিধার্থে এমন শর্ত ধরে নেওয়া যেন প্রশ্নের কোনো শর্তের ব্যাঘাত ঘটে না।
$n!$	1 থেকে n পর্যন্ত সব স্বাভাবিক সংখ্যার গুণফল, $0! = 1$
$\equiv$	Congruence বোঝায়
A, α	আলফা
B, β	বিটা
Γ, γ	গামা
Δ, δ	ডেলটা
E, ε	এপসিলন
Θ, θ	থিটা
Z, ζ	জিটা
Ω, ω	ওমেগা
Π, π	পাই, বড় হাতের পাই দ্বারা গুণফলও বোঝায়
Σ, σ	সিগমা, বড় হাতের সিগমা দ্বারা Summationও বোঝায়
Φ, φ	ফাই

সূচিপত্র

অধ্যায় ১

অসমতা

Funny. I guess destiny isn't the path chosen for us, but the path we chose for ourselves.

– Megamind

অসমতা শব্দটা শুনেই তোমরা হয়তো কিছুটা ধারণা করতে পারছ সেটা কী। সমতার বিপরীতই অসমতা। সাধারণত সমীকরণে আমরা যে সমান $(=)$ চিহ্নটি ব্যবহার করি সেটিই সমতা প্রকাশ করে। আর অসমতায় ব্যবহার করা হয় $<, >, \geq, \leq$ চিহ্নগুলো । এদের যথাক্রমে Less than, greater than, greater than or equal to, less than or equal to বলা হয়। ধরা যাক চিহ্নগুলো ব্যবহার করে নিচের অসমতাগুলো লেখা হলো, যেখানে a, b Real বা বাস্তব সংখ্যা :

১. $a < b \implies a, b$ এর চেয়ে ছোটো

২. $a > b \implies a, b$ এর চেয়ে বড়ো

৩. $a \geq b \implies a, b$ এর চেয়ে বড়ো বা সমান

৪. $a \leq b \implies a, b$ এর চেয়ে ছোটো বা সমান

এবার সত্যিকারে অসমতা সমাধানের জন্য এর কিছু বিশেষ Properties জেনে নেওয়া দরকার। যেমন :

১. $x \geq y \implies x + a \geq y + a \quad \forall a \in \mathbb{R}$

২. $x \geq y \implies x - a \geq y - a \quad \forall a \in \mathbb{R}$

৩. যদি $x \geq y$ হয় এবং $a > 0$ হয় তবে $xa \geq ya$ এবং যদি $a < 0$ হয় তবে $xa \leq ya$

৪. যদি $x \geq y$ হয় এবং $a > 0$ হয় তবে $\frac{x}{a} \geq \frac{y}{a}$ এবং যদি $a < 0$ হয় তবে $\frac{x}{a} \leq \frac{y}{a}$

৫. যদি $x \geq y$ হয় তবে $\frac{1}{x} \leq \frac{1}{y}$ যেখানে হয় x, y উভয়ই ধনাত্মক অথবা উভয়ই ঋণাত্মক।

অর্থাৎ x যদি y এর চেয়ে বড়ো অথবা সমান হয় আর a যেকোনো বাস্তব সংখ্যা হয়, তাহলে অসমতার উভয় পাশে a যোগ, বিয়োগ, গুণ বা ভাগ করে দেওয়া যায়। গুণ আর ভাগের ক্ষেত্রে a ধনাত্মক না ঋণাত্মক তা খেয়াল রাখতে হবে, বিশেষ করে ভাগের ক্ষেত্রে a কখনই শূন্য হতে পারবে না। (কেন?) আবার একটি অসমতার দুই পক্ষেরই Multiplicative inverse বা গুণাত্মক বিপরীতকেও তুলনা করা যায়, তবে সেক্ষেত্রে অসমতার দিক পালটে যায়। তোমরা এ Property গুলোর উদাহরণ নিজেরাই হাতে কলমে যাচাই করে দেখতে পার। শুরু করার জন্য ধরে নাও $x = 5, y = 3$ আর $a = 1$। তাহলে প্রথম অসমতাটির ক্ষেত্রে $5 + 1 > 3 + 1$ হওয়া উচিত, যা আসলেই সত্য। এভাবে প্রতিটি পয়েন্ট নিজে যাচাই করলে সহজেই বুঝে ফেলবে।

যেহেতু আমরা বেশ কিছু থিওরি দেখে ফেলেছি, এবার পালা প্রবলেম সলভিংয়ের। কিছু কিছু উদাহরণে তোমাদের বোঝার সুবিধার জন্য অসমতাগুলোকে সত্য ধরে কাজ করা হয়েছে। কিন্তু খেয়াল রেখো, এভাবে তুমি রাফে সমাধান করলেও কনটেস্টে উলটো দিক থেকে সমাধান লিখতে হয়। ধরে নাও এই বইয়ে আমরা দেখিয়েছি প্রথম অসমতা $\iff$ দ্বিতীয় অসমতা $\iff$ সত্য। কিন্তু খাতায় যখন লিখবে তখন আসলে লিখতে হবে সত্য $\iff$ দ্বিতীয় অসমতা $\iff$ প্রথম অসমতা।

উদাহরণ ১.১

সমাধান করো

$$2x - 5 > 15$$

সমাধান: শুরুতেই আমরা দেখে এসেছি যে, একটি অসমতার দুই পাশে যেকোনো বাস্তব সংখ্যা যোগ করে দেওয়া যায়। এক্ষেত্রে সমীকরণ সমাধানের মতোই আমাদের লক্ষ্য হচ্ছে যতটুকু সম্ভব অসমতাকে সহজ করা। এখানে দুই পাশেই 5 যোগ করে দিলে অসমতাটি হয়,

$$2x > 20$$

এবার আমরা জানি অসমতার দুই পাশে 0 ছাড়া যেকোনো বাস্তব সংখ্যা দিয়ে ভাগ করা যায়। কাজেই আমরা এই অসমতাটিকে দুই দিয়ে ভাগ করে দিতে পারি।

$$x > 10$$

অর্থাৎ, এই অসমতাটিতে সমাধান সেট হলো এমন সকল x যারা 10 এর চেয়ে বড়ো । ■

এবার তোমরা নিজেরা কিছু সমস্যা সমাধান করে ফেল।

নিজে চেষ্টা করো

- $7(3 - x) \geq 10(2 - 2x)$
- $\dfrac{x}{3} + 8 \geq 3x$

§ ১.১ Sum of Squares (SoS)

তোমরা কি খেয়াল করে দেখেছ, ধনাত্মক বা ঋণাত্মক যে সংখ্যাকেই বর্গ করা হোক না কেন তা একটি অঋণাত্মক সংখ্যাই হয়। এই সহজ বৈশিষ্ট্যটাই অসমতায়

অনেক কাজে দেয়। তাহলে, x যেকোনো বাস্তব সংখ্যা হলে, $x^2 \geq 0$ । এটা থেকেই বলা যায় যে কয়েকটি বর্গের সমষ্টিও অঋণাত্মক । এবার এটা ব্যবহার করে একটা উদাহরণ দেখা যাক ।

উদাহরণ ১.২

(BDMO National 2019, Secondary) a, b, c ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যা হলে প্রমাণ কর যে,

$$\frac{a}{bc} + \frac{b}{ca} + \frac{c}{ab} \geq \frac{2}{a} + \frac{2}{b} - \frac{2}{c}$$

সমাধান: এই সমস্যাটির দিকে তাকালে শুরুতে যে কথাটি মাথায় আসে সেটা হলো এটা দেখতে কিছুটা জটিল। সমস্যা সমাধানের প্রথম লক্ষ্যই হলো এমন অসুন্দর জিনিসকে সুন্দর বানানো। তাহলে এই অসমতাটিকে সুন্দর করার জন্য কী করা যেতে পারে? দুইপাশেই abc দিয়ে গুণ করে দিলে পাই,

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 2bc + 2ca - 2ab$$

এবার ডানপাশের সবকিছুকে বামপাশে নিলে অসমতাটি হয়,

$$a^2 + b^2 + c^2 - 2bc - 2ca + 2ab \geq 0$$

লক্ষ করে দেখ, বামপাশের রাশিটি $a + b - c$ এর বর্গের বিস্তৃত রূপ।

$$(a + b - c)^2 \geq 0$$

আর এ অসমতাটি সত্য। ■

§ ১.২ AM-GM

AM-GM inequality সবচেয়ে প্রয়োজনীয় অসমতাগুলোর একটি। কখনো কখনো অনেক কঠিন সমস্যাও AM-GM এর কৌশলপূর্ণ ব্যবহারে সহজেই

সমাধান হয়ে যায়। দুইটি অঋণাত্মক বাস্তব সংখ্যার ক্ষেত্রে AM-GM inequality হলো

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

এখানে বাম পাশের রাশিটি হলো AM (Arithmetic Mean) বা গাণিতিক গড়। আর ডানেরটি GM (Geometric Mean) বা জ্যামিতিক গড়। $a_1, a_2, ...a_n$ যদি nটি বাস্তব সংখ্যা হয় তাহলে তাদের জ্যামিতিক গড় হলো $\sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n}$ ।

থিওরেম ১.১

nটি অঋণাত্মক বাস্তব সংখ্যার ক্ষেত্রে AM-GM অসমতাটি হবে

$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n}$$

কেবলমাত্র $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ হলেই এরা সমান হতে পারবে।

আমরা এই AM-GM অসমতাটির প্রমাণ করব Cauchy Induction[১] এর মাধ্যমে। এখানে আমরা দেখাতে চাই

১. দুই সংখ্যার AM-GM inequality টি সত্য ।

২. যেকোনো nটি সংখ্যার জন্য AM-GM inequality সত্য হলে তা $2n$টি সংখ্যার জন্য সত্যি।

৩. nটি সংখ্যার জন্য AM-GM সত্য হলে তা $n-1$ টি সংখ্যার জন্যও সত্য।

তাহলে শুরুতে আমরা প্রমাণ করতে চাই যে,

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

[১]Cauchy Induction সম্পর্কে বিস্তারিত জানতে এখানে দেখতে পারো https://brilliant.org/wiki/forward-backwards-induction/।

বা,

$$\begin{aligned} & a+b \geq 2\sqrt{ab} \\ \implies & (a+b)^2 \geq 4ab \\ \implies & (a+b)^2 - 4ab \geq 0 \\ \implies & (a-b)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

শেষের অসমতাটি যেহেতু সত্য, আমরা প্রথম ধাপটি প্রমাণ করে ফেলেছি।

এবার দ্বিতীয় ধাপে আমরা প্রমাণ করব,

$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_{2n}}{2n} \geq \sqrt[2n]{a_1 a_2 ... a_{2n}}$$

এক্ষেত্রে আমরা ধরে নিয়েছি যে AM-GM inequality টি nটি সংখ্যার জন্য সত্য।

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + ... + a_{2n} =& (a_1 + a_2) + (a_3 + a_4) + ...(a_{2n-1} + a_{2n}) \\ \geq& 2(\sqrt{a_1 a_2} + \sqrt{a_3 a_4} + ... + \sqrt{a_{2n-1} a_{2n}}) \\ \geq& 2n \sqrt[n]{(\sqrt{a_1 a_2})(\sqrt{a_3 a_4})....(\sqrt{a_{2n-1} a_{2n}})} \\ =& 2n \sqrt[2n]{a_1 a_2 ... a_{2n}} \end{aligned}$$

এখানে $2n$ টি সংখ্যাকে 2 টি করে n টি ভাগে ভাগ করা হয়েছে। যেহেতু আমরা প্রমাণ করেছি যে, AM-GM inequality 2 টি সংখ্যার জন্য সত্য, প্রতিটি ভাগে তাই AM-GM ব্যবহার করে দ্বিতীয় লাইনটি পাওয়া যায়। একইভাবে n টি সংখ্যার জন্য AM-GM ব্যবহার করে পরবর্তী লাইনটি পাওয়া যায়।

এবার সর্বশেষ ধাপের জন্য $\sqrt[n-1]{a_1 a_2 ... a_{n-1}} = m$ ধরে নিই। এখানেও আমরা ধরে নেব AM-GM nটি সংখ্যার জন্য সত্য। তাহলে,

$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_{n-1} + m}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_{n-1} m}$$

$$= \sqrt[n]{m^{n-1} \cdot m}$$
$$= m$$

সুতরাং, $a_1 + a_2 + ... + a_{n-1} + m \geq nm \implies \frac{a_1+a_2+...+a_{n-1}}{n-1} \geq m$

এখানে মূলত আমরা দেখিয়েছি যে, বেস কেস $(n = 2)$ হলে AM-GM অসমতা সত্য। আবার $2n$ এর জন্য সত্য প্রমাণ করার পরে দেখিয়েছি এটা $n - 1$ এর জন্যও সত্য। এই ধাপ থেকে আমরা বলতে পারব যে, $2n$ থেকে $n + 1$ সংখ্যক পর্যন্ত পদের জন্য AM-GM সত্য। ■

নিজে চেষ্টা করো

- প্রমাণ করো যে,

$$\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \geq \frac{a + b}{2}$$

এবং

$$\sqrt{ab} \geq \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$$

- প্রমাণ করো যে, $a, b, c, d \in \mathbb{R}^+$ এর জন্য

$$a^4 + b^4 + c^4 + d^4 \geq 4abcd$$

উদাহরণ ১.৩

a, b, c অঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা হলে প্রমাণ করো যে,

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$$

সমাধান: *AM-GM* অনুযায়ী আমরা বলতে পারি,

$$\frac{a^2 + b^2}{2} \geq ab \implies a^2 + b^2 \geq 2ab$$

অনুরূপভাবে বলা যায়,

$$\frac{b^2+c^2}{2} \geq bc \implies b^2+c^2 \geq 2bc$$

এবং

$$\frac{c^2+a^2}{2} \geq ca \implies c^2+a^2 \geq 2ca$$

এবার অসমতা তিনটি যোগ করলে আমরা পাই,

$$2(a^2+b^2+c^2) \geq 2(ab+bc+ca)$$
$$\implies a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$$

■

উদাহরণ ১.৪

a, b, c অঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা হলে প্রমাণ করো যে,

$$a^4+b^4+c^4 \geq a^2bc+b^2ca+c^2ab$$

সমাধান: এখানে আমরা বাম পাশের পদগুলো কিছুক্ষণ পরীক্ষা করলেই দেখবো যে,

$$\frac{a^4+a^4+b^4+c^4}{4} \geq a^2bc$$
$$\implies 2a^4+b^4+c^4 \geq 4a^2bc$$

অনুরূপভাবে অন্যান্য অসমতাগুলো হলো , $2b^4+c^4+a^4 \geq 4b^2ca$ ও $2c^4+a^4+b^4 \geq 4c^2ab$ এবার এই তিনটি অসমতা যোগ করলে আমরা পাই,

$$4(a^4+b^4+c^4) \geq 4(a^2bc+b^2ca+c^2ab)$$
$$\implies a^4+b^4+c^4 \geq a^2bc+b^2ca+c^2ab$$

■

উদাহরণ ১.৫

a, b, c ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যা যাতে, $abc = 1$। প্রমাণ কর যে,

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq a + b + c$$

সমাধান: এবার আমরা 6 টি পদের উপর *AM-GM* প্রয়োগ করবো। AM-GM inequality অনুযায়ী আমরা বলতে পারি,

$$\begin{aligned} a^2 + a^2 + a^2 + a^2 + b^2 + c^2 &\geq 6\sqrt[6]{a^8b^2c^2} \\ \implies 4a^2 + b^2 + c^2 &\geq 6\sqrt[6]{a^6 \times a^2b^2c^2} \\ \implies 4a^2 + b^2 + c^2 &\geq 6\sqrt[6]{a^6} \\ \implies 4a^2 + b^2 + c^2 &\geq 6a \end{aligned}$$

অনুরূপভাবে আমরা বলতে পারি, $4b^2+c^2+a^2 \geq 6b$ এবং $4c^2+a^2+b^2 \geq 6c$। এই অসমতা তিনটি যোগ করলে আমরা পাই,

$$\begin{aligned} 6(a^2 + b^2 + c^2) &\geq 6(a + b + c) \\ \implies a^2 + b^2 + c^2 &\geq a + b + c \end{aligned}$$

■

§ ১.৩ The Rearrangement Inequality

মনে কর, আমাদের কাছে বাস্তব সংখ্যার দুইটা sequence আছে যেন তারা increasing হয় অর্থাৎ নিচের শর্ত মেনে চলে,

$$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$$

এবং

$$b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n$$

থিওরেম ১.২

এখন $(a'_1, a'_2, \cdots, a'_n)$ যদি $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ এর যেকোনো permutation হয় তাহলে Rearrangement inequality অনুযায়ী

$$
\begin{aligned}
a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n &\geq a'_1b_1 + a'_2b_2 + \cdots + a'_nb_n \\
&\geq a_1b_n + a_2b_{n-1} + \cdots + a_nb_1
\end{aligned}
$$

এই অসমতায় ইকুয়ালিটি কেস দুটি। হয় $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ না হলে কেবল $(a'_1, a'_2, \cdots, a'_n) = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$ হলে দুইপক্ষ সমান হবে। অন্য কোনো ক্ষেত্রে এরা সমান হয় না।

এই অসমতাটি প্রমাণ করার জন্য আমরা শুরুতে ধরে নেব যে শুধুমাত্র $(b_1, b_2, \cdots, b_n)$ একটি increasing sequence আর $(a_1, a_2, \cdots a_r, \cdots, a_s, \cdots, a_n)$ যেকোনো sequence যার একটি permutation হলো $(a_1, a_2, \cdots, a_s, \cdots, a_r, \cdots, a_n)$। অর্থাৎ এখানে শুধু a_r আর a_s এর ক্রম পরিবর্তন করে দেওয়া হয়েছে, যেখানে $r < s$। এখন আমরা দেখাতে চাই যে Rearrangement inequality টি সত্য হলে $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ sequence টিকে increasing হতেই হবে। মনে করি,

$$M = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_rb_r + \cdots + a_sb_s + \cdots a_nb_n$$

$$M_1 = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_sb_r + \cdots + a_rb_s + \cdots a_nb_n$$

এখন, $M - M_1 = a_rb_r - a_rb_s + a_sb_s - a_sb_r = (b_s - b_r)(a_s - a_r)$। যেহেতু Rearrangement inequality অনুযায়ী $M \geq M_1$ সুতরাং a_s কে a_r এর চেয়ে বড়ো বা সমান হতে হবে। কেননা, a_s, a_r এর চেয়ে ছোটো হলে গুণফলটা ঋণাত্মক হয়ে যাবে, কিন্তু $M - M_1$ ধনাত্মক। এই পদ্ধতিতে প্রমাণ করা যায় যে, $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \cdots \leq a_n$ হলে M রাশিটির মান সর্বোচ্চ হবে। ■

প্রথমেই আমরা Rearrangement inequality ব্যবহার করে আগে সমাধান করা উদাহরণ ১.৩ এর একটি ভিন্ন সমাধান দেখে নেই।

উদাহরণ ১.৬

a, b, c বাস্তব সংখ্যা হলে প্রমাণ করো যে,

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$$

সমাধান: মনে করি, দুটি sequence $(a, b, c,), (a, b, c)$ এবং WLOG , $a \geq b \geq c$। এখন (a, b, c) এর একটি permutation (b, c, a) ব্যবহার করে আমরা Rearrangement inequality অনুযায়ী বলতে পারি,

$$\begin{aligned} &a \cdot a + b \cdot b + c \cdot c \geq a \cdot b + b \cdot c + c \cdot a \\ &a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca \end{aligned}$$

■

উদাহরণ ১.৭

a, b, c ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যা হলে প্রমাণ করো যে,

$$\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} \geq a + b + c$$

সমাধান: WLOG, মনে করি, $a \geq b \geq c$, তাহলে $ab \geq ca \geq bc$ এবং $\frac{1}{c} \geq \frac{1}{b} \geq \frac{1}{a}$। সুতরাং,

$$\begin{aligned} &\frac{ab}{c} + \frac{ca}{b} + \frac{bc}{a} \geq \frac{ab}{a} + \frac{bc}{b} + \frac{ca}{c} \\ \implies &\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} \geq a + b + c \end{aligned}$$

■

উদাহরণ ১.৮

a, b, c তিনটি বাস্তব সংখ্যা হলে প্রমাণ করো যে,

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2} \geq \frac{a+b+c}{abc}$$

সমাধান: শুরুতেই দেখ, ডানপাশের পদটিকে 3টি অংশে ভাগ করে ফেলা যায়। অর্থাৎ আমাদের প্রমাণ করতে হবে,

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2} \geq \frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}+\frac{1}{ab}$$

WLOG ধরে নিই, $a \geq b \geq c$ তাহলে আমরা বলতে পারি, $\frac{1}{a} \leq \frac{1}{b} \leq \frac{1}{c}$। এবার $(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c})$ ও $(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c})$ দুটি sequence থেকে পাই,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\cdot\frac{1}{c} \geq \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}+\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{c}+\frac{1}{c}\cdot\frac{1}{a}\\
\implies &\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2} \geq \frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}
\end{aligned}$$

■

উদাহরণ ১.৯

a, b, c বাস্তব সংখ্যা হলে প্রমাণ করো যে,

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$

সমাধান: যদি $a \geq b \geq c$ হয় তাহলে আমরা বলতে পারি, $a+b \geq c+a \geq b+c \implies \frac{1}{b+c} \geq \frac{1}{c+a} \geq \frac{1}{a+b}$। এবার a, b, c ও $\frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{a+b}$ sequence 2টি ব্যবহার করে পাই,

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \geq \frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}+\frac{a}{a+b}$$

এবং

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \geq \frac{c}{b+c}+\frac{a}{c+a}+\frac{b}{a+b}$$

শেষ দুইটি inequality যোগ করলে,

$$2\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right) \geq \frac{b+c}{b+c}+\frac{c+a}{c+a}+\frac{a+b}{a+b}$$
$$= 3$$

অতএব, $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$ ■

Rearrangement inequality ব্যবহার করে Chebyshev's inequality ও প্রমাণ করা যায়।

থিওরেম ১.৩

মনে করি, $(a_n), (b_n)$ দুটি increasing sequence। তাহলে,

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i b_i}{n} \geq \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n}\right)\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} b_i}{n}\right)$$

সমাধান: আমরা প্রথমেই এই inequality এর দুইপাশে n^2 দ্বারা গুণ করব। তাহলে দেখাতে হবে যে,

$$n\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right) \geq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)$$

এবার ডানপাশকে ভাঙলে আমরা দেখবো যে, (a_n) এর প্রত্যেকটি পদের সাথে (b_n) এর প্রত্যেকটি পদের গুণ হয়েছে। কিন্তু Rearrangement inequality তে প্রত্যেক sequence এর একটি পদের সাথে আরেকটি sequence এর কেবল একটি পদের গুণ হয়। তাই এখানে আমাদের n বার Rearrangement inequality প্রয়োগ করতে হবে যার প্রত্যেকটিতে (a_n) এর একটি পদের সাথে ভিন্ন ভিন্ন (b_n) এর পদ গুণ হবে। এখন $(a_n), (b_n)$ দুটি increasing sequence হওয়ায় বলতে পারি,

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n$$
$$a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n \geq a_1b_2 + a_2b_3 + \cdots + a_nb_1$$
$$a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n \geq a_1b_3 + a_2b_4 + \cdots + a_nb_2$$

$$\vdots$$

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n \geq a_1b_n + a_2b_1 + \cdots + a_nb_{n-1}$$

এবার এই n টি inequality যোগ করে পাই,

$$n\left(\sum_{i=1}^{n} a_ib_i\right) \geq a_1\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right) + a_2\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right) + \cdots a_n\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)$$

$$\implies n\left(\sum_{i=1}^{n} a_ib_i\right) \geq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)$$

$$\implies \frac{\sum_{i=1}^{n} a_ib_i}{n} \geq \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n}\right)\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} b_i}{n}\right)$$

■

§ ১.৪ Muirhead Inequality

এই inequality সম্পর্কে শেখার আগে কিছু প্রয়োজনীয় জিনিসের সাথে পরিচিত হয়ে নেয়া যাক।

মনে কর, আমাদের কাছে দুটি decreasing sequence,

$$a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n \quad \text{ও} \quad b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n$$

আছে। যদি,

- $\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} b_i$
- $\sum_{i=1}^{r} a_i \geq \sum_{i=1}^{r} b_i$ যেখানে, $1 \leq r < n$

হয়, তাহলে আমরা বলব $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ sequenceটি $(b_1, b_2, \cdots, b_n)$ sequence কে *majorize* করে বা $(a_n) \succ (b_n)$

((a_n) *majorizes* (b_n))। যেমন: $(3,1,0)$ ও $(2,2,0)$ sequence দুটিতে, $3 > 2, 3+1 = 2+2, 3+1+0 = 2+2+0$। তাই আমরা বলতে পারি প্রথম sequence *majorizes* দ্বিতীয় sequence ।

থিওরেম ১.৪

$a_1, a_2, \cdots a_n$ ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যা এবং $(x_n) \succ (y_n)$ হলে Muirhead Inequality অনুযায়ী,

$$\sum_{sym} a_1^{x_1} a_2^{x_2} \cdots a_n^{x_n} \geq \sum_{sym} a_1^{y_1} a_2^{y_2} \cdots a_n^{y_n}$$

এরা সমান হবে যদি $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ হয় অথবা $x_i = y_i$ হয় যেখানে, $i = 1, 2, \cdots, n$।

যেমন $(5,0,0) \succ (3,1,1)$ তাই আমরা Muirhead inequality অনুযায়ী বলতে পারি,

$$a^5+a^5+b^5+b^5+c^5+c^5 \geq a^3bc+a^3cb+b^3ca+b^3ac+c^3ab+c^3ba$$

$$\implies a^5 + b^5 + c^5 \geq a^3bc + b^3ca + c^3ab$$

উদাহরণ ১.১০

(IMO Longlist 1967) a, b, c ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যা হলে প্রমাণ করো যে,

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq \frac{a^8 + b^8 + c^8}{a^3b^3c^3}$$

সমাধান: উভয় পক্ষকে $a^3b^3c^3$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$$a^8 + b^8 + c^8 \geq a^3b^3c^2 + b^3c^3a^2 + c^3a^3b^2$$

$(8,0,0) \succ (3,3,2)$ থেকে আমরা পাই, $a^8 + b^8 + c^8 \geq a^3b^3c^2 + b^3c^3a^2 + c^3a^3b^2$

■

উদাহরণ ১.১১

(British MO 1996) যদি a, b, c ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যা হয়, তবে প্রমাণ করো যে,

$$4(a^3+b^3) \geq (a+b)^3$$

সমাধান: আমাদের প্রমাণ করতে হবে যে,

$$\begin{aligned} & 4(a^3+b^3) \geq (a+b)^3 \\ \Longrightarrow\ & 4(a^3+b^3) \geq a^3+b^3+3a^2b+3ab^2 \\ \Longrightarrow\ & 3(a^3+b^3) \geq 3(a^2b+ab^2) \\ \Longrightarrow\ & a^3+b^3 \geq a^2b+ab^2 \end{aligned}$$

এখন $(3,0) \succ (2,1)$ হওয়ায় Muirhead's Inequality অনুযায়ী আমরা বলতে পারি, $a^3+b^3 \geq a^2b+ab^2$ ■

Homogeneous করা

কোনো সমীকরণের উভয়পক্ষের প্রত্যেকটি পদের degree যদি একই হয় তবে সেই সমীকরণকে **Homogeneous** সমীকরণ বলে। একটি সমীকরণে যদি অনেকগুলো চলক থাকে তাহলে প্রতি পদের মোট ঘাতকে আমরা তাদের degree বলব। যেমন : $a^3+b^3+c^3+6abc = 2a^2b+2b^2c++2c^2a$ এর উভয়পক্ষের প্রত্যেক পদের degree 3। Muirhead Inequality এর জন্য homogeneous হওয়া প্রয়োজন কেননা, দুটি sequence $(x_n) \succ (y_n)$ হওয়ার জন্য তাদের সবগুলো সংখ্যার যোগফল সমান হতে হবে। যদি কোনো inequality এর দুইপক্ষের সব পদের degree একই না হয় তবে দুই পক্ষে প্রয়োজনীয় রাশি দ্বারা গুণ করে তাদের homogeneous বানাতে হয়।

উদাহরণ ১.১২

যদি $abc = 1$ হয় যেখানে a, b, c ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যা তবে প্রমাণ করো যে,

$$a^2+b^2+c^2 \geq a+b+c$$

সমাধান: এখানে বামপক্ষের প্রত্যেক পদের degree 2 কিন্তু ডান পক্ষের প্রত্যেক পদের degree 1। তাই আমরা সরাসরি Muirhead Inequality প্রয়োগ করতে পারবো না। ডানপক্ষের ঘাত 1 বাড়ানোর জন্য আমাদের $abc = 1$ ব্যবহার করতে হবে। সেটা কীভাবে করা যায়? দেখ ডানপক্ষের একটি পদের degree 2 বানানোর জন্য আমাদের ঐ পদের সাথে একঘাতের কিছু একটা গুণ করতে হবে। কিন্তু abc এর degree হলো 3 অর্থাৎ এটা সরাসরি গুণ করে দিলে প্রতি পদের degree হয়ে যাবে 4। তাহলে abc এর degree কি 1 বানানো যায় কোনোভাবে? যেহেতু $abc = 1$, আমরা লিখতেই পারি $abc = (abc)^{\frac{1}{3}} = 1$! তার মানে আমরা প্রত্যেক পদের সাথে $(abc)^{\frac{1}{3}}$ গুণ করে দিলেই degree 2 হয়ে যাবে! অর্থাৎ আমাদের প্রমাণ করতে হবে যে,

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq a^{\frac{1}{3}} b^{\frac{1}{3}} c^{\frac{1}{3}} (a + b + c)$$

এখন $(2, 0, 0) \succ \left(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ হওয়ায় আমরা Muirhead's Inequality থেকে বলতে পারি $a^2 + b^2 + c^2 \geq a^{\frac{1}{3}} b^{\frac{1}{3}} c^{\frac{1}{3}} (a + b + c)$ ■

উদাহরণ ১.১৩

(British MO 2002) x, y, z ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যা যাতে $x^2 + y^2 + z^2 = 1$। প্রমাণ করো যে,

$$x^2yz + xy^2z + xyz^2 \leq \frac{1}{3}$$

সমাধান: ডানপক্ষে 1 এর বদলে $(x^2 + y^2 + z^2)^2$ বসালে উভয়পক্ষের degree 4 হয়। এখন আমাদের প্রমাণ করতে হবে যে,

$$3(x^2yz + xy^2z + xyz^2) \leq (x^2 + y^2 + z^2)^2$$

এখন $(4, 0, 0) \succ (2, 1, 1)$ থেকে পাই,

$$x^4 + y^4 + z^4 \geq x^2yz + xy^2z + xyz^2$$

এবং $(2, 2, 0) \succ (2, 1, 1)$ থেকে পাই,

$$x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 \geq x^2yz + xy^2z + xyz^2$$

এবার প্রথম সমীকরণের সাথে দ্বিতীয় সমীকরণের দ্বিগুণ যোগ করে পাই,

$$x^4+y^4+z^4+2(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2) \geq 3(x^2yz+xy^2z+xyz^2)$$
$$\implies (x^2+y^2+z^2)^2 \geq 3(x^2yz+xy^2z+xyz^2)$$

■

উদাহরণ ১.১৪

(IMO 1995) a, b, c ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যার জন্য যদি $abc = 1$ হয় তবে প্রমাণ করো যে,

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}$$

সমাধান: এখানে বামের রাশিগুলোকে যোগ করে পাওয়া যাবে,

$$\sum_{sym} a^4b^4 + 2\sum_{sym} a^4b^3c + \sum_{sym} a^3b^3c^2 \geq 3\sum_{sym} a^5b^4c^3 + \sum_{sym} a^4b^4c^4$$

বামপক্ষের পদগুলোর ঘাত 8 কিন্তু ডানপক্ষের পদগুলোর ঘাত 12। তাই Homogenize করার জন্য বামপক্ষে $(abc)^{\frac{4}{3}}$ দ্বারা গুণ করলে পাওয়া যায়,

$$\sum_{sym} a^{\frac{16}{3}}b^{\frac{16}{3}}c^{\frac{4}{3}} + 2\sum_{sym} a^{\frac{16}{3}}b^{\frac{13}{3}}c^{\frac{7}{3}} + \sum_{sym} a^{\frac{13}{3}}b^{\frac{13}{3}}c^{\frac{10}{3}}$$

এখন, $(\frac{16}{3}, \frac{16}{3}, \frac{4}{3}) \succ (5,4,3)$, $(\frac{16}{3}, \frac{13}{3}, \frac{7}{3}) \succ (5,4,3)$ এবং $(\frac{13}{3}, \frac{13}{3}, \frac{10}{3}) \succ (4,4,4)$ থেকে আমরা পাই,

$$\sum_{sym} a^{\frac{16}{3}}b^{\frac{16}{3}}c^{\frac{4}{3}} \geq \sum_{sym} a^5b^4c^3$$
$$2\sum_{sym} a^{\frac{16}{3}}b^{\frac{13}{3}}c^{\frac{7}{3}} \geq 2\sum_{sym} a^5b^4c^3$$
$$\sum_{sym} a^{\frac{13}{3}}b^{\frac{13}{3}}c^{\frac{10}{3}} \geq \sum_{sym} a^4b^4c^4$$

এবার এই তিনটি inequality যোগ করলেই আমাদের প্রমাণ শেষ। ■

§ ১.৫ আরও কিছু সুন্দর অসমতা

এখন আমরা এতক্ষণ যা যা শিখলাম তা ব্যবহার করে আরও কিছু সুন্দর অসমতার সমাধান দেখবো।

উদাহরণ ১.১৫

x, y বাস্তব সংখ্যা হলে প্রমাণ করো যে,

$$x^4 + y^4 + 4xy + 2 \geq 0$$

সমাধান: এখানে যেহেতু একটি বীজগাণিতিক রাশিকে শূন্য থেকে বড়ো প্রমাণ করতে হবে তাই আমরা যদি কোনোভাবে বামপক্ষকে কতগুলো বর্গের যোগফল আকারে লেখতে পারি তাহলেই প্রমাণ হয়ে যাবে। এখন,

$$\begin{aligned} x^4 + y^4 + 4xy + 2 &= x^4 - 2x^2y^2 + y^4 + 2x^2y^2 + 4xy + 2 \\ &= (x^2 - y^2)^2 + 2(x^2y^2 + 2xy + 1) \\ &= (x^2 - y^2)^2 + 2(xy + 1)^2 \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

■

উদাহরণ ১.১৬

যদি $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ হয় তবে নিচের রাশিটির সর্বনিম্ন মান বের করো,

$$\frac{\sin^3 x}{\cos x} + \frac{\cos^3 x}{\sin x}$$

সমাধান: x এর পরিচিত কিছু মান যেমন $(30^\circ, 45^\circ)$ যদি বসিয়ে দেখো তাহলে দেখবে কখনই এর মান 1 এর থেকে ছোটো হচ্ছে না। এর থেকে আমরা আন্দাজ করতে পারি যে এই রাশিটির সর্বনিম্ন মান হয়তো 1 হতে পারে। অর্থাৎ আমাদের প্রমাণ করতে হবে যে,

$$\frac{\sin^3 x}{\cos x} + \frac{\cos^3 x}{\sin x} \geq 1$$

ক্যালকুলাস ব্যবহার করে এটা প্রমাণ করা যেতে পারে তবে আমরা এখানে অসমতা দিয়ে এর প্রমাণ দেখবো। $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ এর মধ্যে $\sin x, \cos x$ উভয়ই ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যা। যদি $x \le \frac{\pi}{4}$ হয় তবে, $\cos x \ge \sin x$। যার থেকে আমরা বলতে পারি, $\cos^3 x \ge \sin^3 x$ এবং $\frac{1}{\sin x} \ge \frac{1}{\cos x}$ তাই Rearrangement inequality অনুযায়ী,

$$\begin{aligned}\frac{\sin^3 x}{\cos x} + \frac{\cos^3 x}{\sin x} &\ge \frac{\sin^3 x}{\sin x} + \frac{\cos^3 x}{\cos x} \\ &= \sin^2 x + \cos^2 x = 1\end{aligned}$$

এবং $x \ge \frac{\pi}{4}$ হলে $\cos x \le \sin x$ অর্থাৎ, $\sin^3 x \ge \cos^3 x$ ও $\frac{1}{\cos x} \ge \frac{1}{\sin x}$।

$$\therefore \frac{\sin^3 x}{\cos x} + \frac{\cos^3 x}{\sin x} \ge \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

এখানে $x = \frac{\pi}{4}$ হলে রাশিটির মান 1 হয়। ■

উদাহরণ ১.১৭

a, b, c, d বাস্তব সংখ্যা যাতে, $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4$, প্রমাণ করো যে,

$$a^3 + b^3 + c^3 + d^3 \le 8$$

সমাধান: যেহেতু কোনো সংখ্যার বর্গ কখনো ঋণাত্মক হতে পারে না তাই $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4$ থেকে আমরা বলতে পারি, $a^2, b^2, c^2, d^2 \le 4$। এখন $a^2 \le 4 \implies a \le 2$।

এখন $a \le 2 \implies a^3 \le 2a^2$, অনুরূপভাবে $b^3 \le 2b^2, c^3 \le 2c^2, d^3 \le 2d^2$। এবার এই অসমতাগুলো যোগ করে পাই,

$$a^3 + b^3 + c^3 + d^3 \le 2(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) = 8$$

■

অসমতা সমাধানের আরেকটি কৌশল হলো যদি আমাদেরকে দুটি রাশি A, C এর জন্য $A \ge C$ প্রমাণ করতে বলে তাহলে সরাসরি সেটি প্রমাণ না করে

আমরা আরেকটি রাশি B বের করে $A \geq B$ ও $B \geq C$ প্রমাণ করতে পারি, যার থেকে প্রমাণ হয়ে যায় যে $A \geq C$। এবার তেমনি একটি উদাহরণ দেখা যাক।

উদাহরণ ১.১৮

x, y, z ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যা যাতে, $xy + yz + zx = 27$। প্রমাণ করো যে,

$$x + y + z \geq \sqrt{3xyz}$$

কখন তারা পরস্পর সমান হবে ?

সমাধান: এখানে উভয়পক্ষকে বর্গ করে পাই, $(x+y+z)^2 \geq 3xyz$। এবার আমাদের প্রদত্ত শর্ত নিয়ে সেই রাশির উপর AM-GM inequality প্রয়োগ করলে আমরা পাই,

$$\begin{aligned} xy + yz + zx &\geq 3\sqrt[3]{x^2y^2z^2} \\ 27 &\geq 3(xyz)^{\frac{2}{3}} \\ 9^{\frac{3}{2}} &\geq xyz \\ 27 &\geq xyz \\ xy + yz + zx &\geq xyz \end{aligned}$$

এর থেকে আমরা পাই $3(xy + yz + zx) \geq 3xyz$।

এখন আমরা যদি কোনোভাবে প্রমাণ করতে পারি যে, $(x + y + z)^2 \geq 3(xy + yz + zx)$ তাহলেই আমাদের প্রমাণ শেষ হয়ে যাবে। এখন সরল করে আমরা পাই,

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$$

এই অসমতাটা আমরা আগেও প্রমাণ করেছি। অর্থাৎ, $(x + y + z)^2 \geq 3(xy + yz + zx) \geq 3xyz$ আর আমাদের প্রমাণ শেষ। ☺ ■

§ ১.৬ অনুশীলনী

সমস্যা ১.১: নিচের অসমতাগুলোর সমাধান সেট বের কর -

- $4x + 35 \geq 3 - 7x$
- $3x^2 - 7x + 4 \geq 0$

সমস্যা ১.২: ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যা a, b, c এর জন্য প্রমাণ করো যে,

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$$

সমস্যা ১.৩: যদি $abcd = 1$ হয় তবে প্রমাণ করো যে,

$$a^4b + b^4c + c^4d + d^4a \geq a + b + c + d$$

সমস্যা ১.৪: যদি a, b, c ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যা হয় যাতে, $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$ তাহলে প্রমাণ করো যে,

$$(a+1)(b+1)(c+1) \geq 64$$

সমস্যা ১.৫: (IMO 1983/3) যদি a, b, c একটি ত্রিভুজের তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্য হয় তবে প্রমাণ করো যে,

$$a^2b(a-b) + b^2c(b-c) + c^2a(c-a) \geq 0$$

সমস্যা ১.৬: যদি $a + b + c = 1$ হয় তবে প্রমাণ করো যে,

$$3 + 2 \cdot \frac{a^3 + b^3 + c^3}{abc} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

সমস্যা ১.৭: (ARO 2002) a, b, c ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যা যাতে, $a+b+c = 3$। প্রমাণ করো যে,

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \geq ab + bc + ca$$

সমস্যা ১.৮: যদি a, b, c ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যা হয় তবে প্রমাণ করো যে,

$$\frac{a^2 + b^2}{a+b} + \frac{b^2 + c^2}{b+c} + \frac{c^2 + a^2}{c+a} \geq a + b + c$$

সমস্যা ১.৯: a, b, c, d অঋণাত্মক বাস্তব সংখ্যা হলে প্রমাণ করো যে,

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+d}+\frac{c}{d+a}+\frac{d}{a+b} \geq 2$$

সমস্যা ১.১০: $x, y, z \in \mathbb{R}^+$ হলে প্রমাণ করো যে,

$$\sqrt{x(y+1)}+\sqrt{y(z+1)}+\sqrt{z(x+1)} \leq \frac{3}{2}\sqrt{(x+1)(y+1)(z+1)}$$

সমস্যা ১.১১: যদি a, b, c ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যা হয় যাতে, $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$ তাহলে প্রমাণ করো যে,

$$3(ab+bc+ca)+\frac{9}{a+b+c} \leq \frac{9abc}{a+b+c}+2(a^2+b^2+c^2)+1$$

সমস্যা ১.১২: (Canada 2012) x, y, z ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যা হলে প্রমাণ করো যে,

$$x^2+xy^2+xyz^2 \geq 4xyz-4$$

সমস্যা ১.১৩: (China 2003) x, y, z ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যা যাতে, $x+y+z=xyz$ তবে নিচের বীজগাণিতিক রাশিটির সর্বনিম্ন মান বের করো,

$$x^7(yz-1)+y^7(zx-1)+z^7(xy-1)$$

সমস্যা ১.১৪: (USAMO 1997) সকল ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যা a, b, c এর জন্য প্রমাণ করো যে,

$$\frac{1}{a^3+b^3+abc}+\frac{1}{b^3+c^3+abc}+\frac{1}{c^3+a^3+abc} \leq \frac{1}{abc}$$

সমস্যা ১.১৫: (IMOSL 1996) মনে করো $a, b, c \geq 0$ এবং $abc=1$। প্রমাণ করো যে,

$$\frac{ab}{ab+a^5+b^5}+\frac{bc}{bc+b^5+c^5}+\frac{ca}{ca+c^5+a^5} \leq 1$$

সমস্যা ১.১৬: (Iran 2014) x, y, z তিনটি অঋণাত্মক বাস্তব সংখ্যা যাতে, $x^2+y^2+z^2=2(xy+yz+zx)$। প্রমাণ করো যে,

$$\frac{x+y+z}{3} \geq \sqrt[3]{2xyz}.$$

সমস্যা ১.১৭: (IMO 2000/2) a, b, c ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যা ও $abc = 1$ হলে প্রমাণ করো যে,

$$\left(a - 1 + \frac{1}{b}\right)\left(b - 1 + \frac{1}{c}\right)\left(c - 1 + \frac{1}{a}\right) \leq 1.$$

সমস্যা ১.১৮: (Iran 2016) a, b, c ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যা যাতে, $abc = 1$। প্রমাণ করো যে,

$$\frac{a+b}{(a+b+1)^2} + \frac{b+c}{(b+c+1)^2} + \frac{c+a}{(c+a+1)^2} \geq \frac{2}{a+b+c}$$

সমস্যা ১.১৯: (USAMO 2011/1) যদি $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ হয় যাতে, $a^2 + b^2 + c^2 + (a+b+c)^2 \leq 4$ হয় তবে প্রমাণ করো যে,

$$\frac{ab+1}{(a+b)^2} + \frac{bc+1}{(b+c)^2} + \frac{ca+1}{(c+a)^2} \geq 3.$$

সমস্যা ১.২০: (USAJMO 2012/3) যদি a, b, c ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যা হয় তবে প্রমাণ করো যে,

$$\frac{a^3+3b^3}{5a+b} + \frac{b^3+3c^3}{5b+c} + \frac{c^3+3a^3}{5c+a} \geq \frac{2}{3}(a^2+b^2+c^2)$$

সমস্যা ১.২১: (IMO 2012/2) মনে করি $n \geq 2$ একটি পূর্ণসংখ্যা এবং $a_2, a_3, \cdots, a_n$ ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যা যাতে, $a_2 a_3 \cdots a_n = 1$। প্রমাণ করো যে,

$$(1+a_2)^2(1+a_3)^3 \cdots (1+a_n)^n > n^n.$$

অধ্যায় ২

System of Equations

I am Moana of Motunui. You will board my boat, sail across the sea, and restore the heart of Te Fiti.

– Moana

§ ২.১ সিস্টেম অফ ইকুয়েশন কী?

বইয়ের একদম প্রথম ভাগে আমরা সমীকরণ সমাধান করা দেখেছি। এখানেও আমাদের কাজ সমীকরণের সমাধান বের করাই। তবে আগের বারের সাথে এবারের পার্থক্য হলো যে, এবার সমাধান বের করার জন্য আমাদের কাছে একাধিক সমীকরণ থাকবে। এই একাধিক সমীকরণকেই একত্রে সিস্টেম অফ ইকুয়েশন বলা হয়। একটা সিস্টেম অফ ইকুয়েশনের উদাহরণ হলো

$$x^2 + y^2 + xy = 133$$
$$x + y + \sqrt{xy} = 19$$

আর এগুলো ব্যবহার করেই বের করতে হবে x, y এর মান।

§ ২.২ একটা সমীকরণ

এই অধ্যায়টা হওয়ার কথা সিস্টেম অফ ইকুয়েশনের সমাধান নিয়ে। কিন্তু তার আগে একটা সমীকরণ নিয়ে কথা বলা বিশেষ জরুরি বলে সেটা এই অধ্যায়ে যোগ করে দেওয়া হলো। আর সেই সমীকরণটা হলো ‘পিথাগোরাসের

সমীকরণ'। হ্যাঁ, তোমরা গণিত বইয়ে সমকোণী ত্রিভুজের যে সূত্রটা দেখেছ এটা সেই সমীকরণই। এর ব্যবহার কিন্তু শুধু জ্যামিতিতেই সীমাবদ্ধ নয়! এর বেশ সুন্দর কিছু বৈশিষ্ট্য আছে, যেটা একটু পরেই দেখতে পাবে। পিথাগোরাসের সূত্রটি হলো: a, b সমকোণী ত্রিভুজের দুটি বাহু ও c অতিভুজ হলে,

$$a^2 + b^2 = c^2$$

যে তিনটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা a, b, c এই শর্তটি মেনে চলে তাদের একসাথে পিথাগোরীয় ত্রয়ী বা Pythagorean Triple বলে। আর $a, b,$ ও c প্রত্যেকে একে অপরের সাথে সহমৌলিক হলে সেই ত্রয়ীকে primitve পিথাগোরিয়ান ত্রয়ী বলে। যেমন $3, 4, 5$ একটি প্রিমিটিভ ত্রয়ী। কিন্তু $12, 16, 20$ প্রিমিটিভ নয়, কারণ এরা প্রত্যেকেই 2 দিয়ে বিভাজ্য।

পিথাগোরীয়ান ত্রয়ী তৈরি

প্রিমিটিভ পিথাগোরীয়ান ত্রয়ী তৈরির বেশ কয়েকটি উপায় আছে। এর মধ্যে এখন আমরা মধ্যে ইউক্লিডীয় ও ফিবোনাচ্চির পদ্ধতি দেখব।

- **ইউক্লিডীয় পদ্ধতি :** m, n দুটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা যেন $m > n$ হয়। তাহলে এদের দিয়ে একটি প্রিমিটিভ পিথাগোরীয় ত্রয়ী (a, b, c) বানানো সম্ভব। আর সেটা করা হয় এভাবে -

  $$a = m^2 - n^2, \quad b = 2mn, \quad c = m^2 + n^2$$

  একটি প্রিমিটিভ ত্রয়ী থেকে আরও পিথাগোরীয়ান ত্রয়ী বানানো সম্ভব a, b, c এর প্রতিটির সাথে একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা k গুণ করে। সুতরাং, (a, b, c) একটি পিথাগোরীয় ত্রয়ী হলে (ka, kb, kc) ও পিথাগোরীয় ত্রয়ী হবে।

- **ফিবোনাচ্চির পদ্ধতি :** গণিতবিদ ফিবোনাচ্চি প্রিমিটিভ পিথগোরীয়ান ত্রয়ী তৈরিতে এই পদ্ধতিটি বের করেছিলেন। এই পদ্ধতিতে তিনি বিজোড় সংখ্যার অনুক্রম $1, 3, 5, 7, 9, 11, \cdots$ ব্যবহার করেছেন। যে ধারণাটি

এখানে কাজে লাগানো হয়েছে সেটি হলো প্রথম k টি বিজোড় সংখ্যার যোগফল k^2। বিজোড় সংখ্যার অনুক্রমটির n তম পদ $(2n-1)$।

এই অনুক্রম থেকে পিথাগোরীয়ান ত্রয়ী বানানোর জন্য a^2 একটি বিজোড় বর্গ সংখ্যা নিতে হবে (যেমন: $9, 25, 49$)। এই বর্গ সংখ্যাটি অনুক্রমের n তম পদ হলে, b^2 সমান প্রথম $n-1$ টি পদের যোগফল নিতে হবে। আর c^2 যদি প্রথম n টি পদের যোগফল হয় তাহলে আমরা একটি ত্রয়ী পেয়ে যাব। উদাহরণ হিসেবে $a^2 = 9$ নিলে এর আগের চারটি পদের যোগফল $b^2 = 16$ এবং 9 পর্যন্ত পদের যোগফল $c^2 = 25$। সুতরাং $a^2 + b^2 = c^2$।

প্রিমিটিভ পিথাগোরীয় ত্রয়ীর কিছু বৈশিষ্ট্য

- (a, b, c) একটি প্রিমিটিভ পিথাগোরীয়ান ত্রয়ী হলে $\frac{(c-a)(c-b)}{2}$ সবসময় একটি পূর্ণবর্গ সংখ্যা হবে। এই বৈশিষ্ট্যটি ব্যবহার করে তিনটি সংখ্যা পিথাগোরীয়ান ত্রয়ী তৈরি করে কি না পরীক্ষা করা যায়। যদি তারা এই বৈশিষ্ট্য মেনে না চলে তাহলে তারা পিথাগোরীয়ান ত্রয়ী নয়। কিন্তু এরা বৈশিষ্ট্য মেনে চললেও তারা ত্রয়ী তৈরি করে - এটা সবসময় বলা যায় না। যেমন, $(1, 8, 9)$ সংখ্যাগুলোর জন্য এটা সত্য হলেও এরা পিথাগোরীয়ান ত্রয়ী না।

- কোনো সমকোণী ত্রিভুজের বাহুগুলোর দৈর্ঘ্য পিথাগোরীয় ত্রয়ী তৈরি করলে সেই ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল কখনো পূর্ণবর্গ বা পূর্ণবর্গের দ্বিগুণ হবে না।

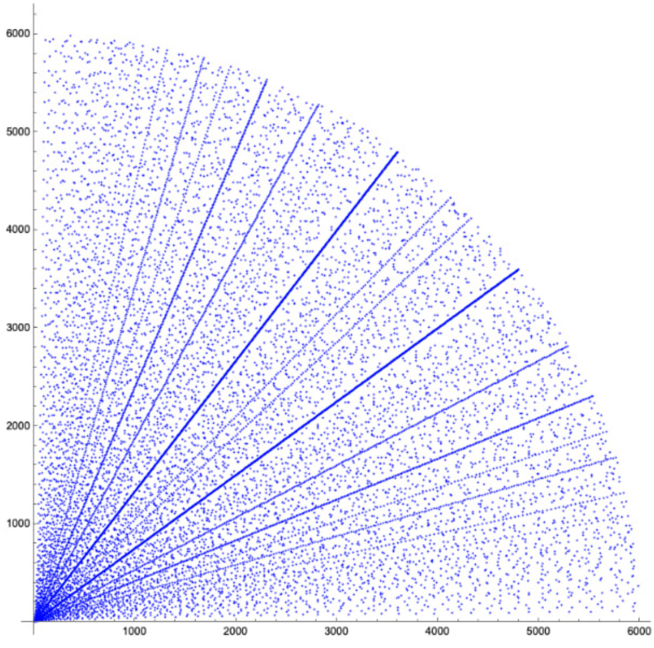
- **বিভাজ্যতা :** a, b এর মধ্যে শুধুমাত্র একটি 4 দিয়ে বিভাজ্য হবে। এদের মধ্যে শুধু একটি 3 দিয়ে বিভাজ্য হবে। c কখনো জোড় সংখ্যা হতে পারে না। a, b, c এর মধ্যে একটিমাত্র সংখ্যা 5 দিয়ে বিভাজ্য হয়।

- একটি সমকোণী ত্রিভুজের বাহুগুলো a, b, c হলে, যেখানে (a, b, c) একটি প্রিমিটিভ ত্রয়ী, সমকোণ থেকে অতিভুজের উপর আঁকা লম্ব কখনো পূর্ণসংখ্যা হয় না।

- এ ধরনের ত্রিভুজের অন্তঃবৃত্তের ও বহিঃবৃত্তের ব্যাসার্ধ সবসময় পূর্ণসংখ্যা হয়।

- যেকোনো ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা n এর জন্য একই ক্ষেত্রফল কিন্তু আলাদা আলাদা অতিভুজ বিশিষ্ট n টি পিথাগোরীয়ান ত্রয়ী খুঁজে পাওয়া সম্ভব। তবে ত্রয়ীগুলো প্রিমিটিভ নাও হতে পারে।

নিচের গ্রাফটায় যেসব (a, b) পিথাগোরীয়ান ত্রয়ী তৈরি করে তাদের স্থানাঙ্কে বসানো হয়েছে। গ্রাফটিতে যে গাঢ় রেখাগুলো দেখা যাচ্ছে সেগুলো হওয়ার কারণ কি বুঝতে পারছ? আগেই কিন্তু আমরা বলেছিলাম (a, b, c) যদি পিথাগোরীয় ত্রয়ী হয়, তাহলে (ka, kb, kc) ও একটি ত্রয়ী হবে। এই রেখাগুলো পাওয়া গিয়েছে (a, b) এর সাথে (ka, kb) বিন্দুগুলো যোগ করে।



চিত্র ২.১: যেসব a, b পিথাগোরীয়ান ত্রয়ী তৈরি করে

§ ২.৩ সিস্টেম অফ ইকুয়েশনের সমাধান

উদাহরণ ২.১

$3x_4 + 2x_5$ এর মান বের কর। যেখানে-

$$\begin{aligned}
2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 6\\
x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 12\\
x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 &= 24\\
x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 &= 48\\
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 &= 96
\end{aligned}$$

সমাধান: সিস্টেমটির পাঁচটি সমীকরণ যোগ করলে পাওয়া যাবে $6(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5) = 186$। এবার 6 দিয়ে ভাগ দিলে $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5 = 31$।

এখন দেখ সিস্টেমটির প্রতিটি সমীকরণে একটি করে চলকের দ্বিগুণ আছে। তাহলে একটা সমীকরণ থেকে যদি আমরা $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$ বিয়োগ করি তাহলে যে চলকটির দ্বিগুণ আছে সেটির মান বের হয়ে যাবে। অর্থাৎ চতুর্থ ও পঞ্চম সমীকরণ থেকে বিয়োগ করলে পাব $x_4 = 17$, $x_5 = 65$ এবং $3x_4 + 2x_5 = 181$।

■

উদাহরণ ২.২

(Cyprus TST 2022) নিচের সিস্টেমটির সমাধান বের কর -

$$\begin{aligned}
x^2 + y^2 + xy &= 133\\
x + y + \sqrt{xy} &= 19
\end{aligned}$$

সমাধান: প্রথম সমীকরণটা দেখে শুরুতেই আমাদের $(x+y)^2$ এর কথা মনে পড়ে। $(x+y)^2 - xy = x^2 + y^2 + xy$। এখন দেখ দ্বিতীয় সমীকরণে একটা $\sqrt{xy}$ আছে। তাই $(x+y)^2 - xy$ কে $(x+y+\sqrt{xy})(x+y-$

$\sqrt{xy})$ আকারে লিখব। এভাবে লিখে আমরা কী পেলাম? এখান থেকে আমরা $x+y-\sqrt{xy}$ এর মান বের করতে পারব, যেটা হলো $\frac{133}{19} = 7$। এবার এটা থেকে পাওয়া যায় $(x+y+\sqrt{xy})+(x+y-\sqrt{xy}) = 19+7 \implies x+y = 13 \implies \sqrt{xy} = 6 \implies xy = 36$।

এবার এটায় কী লাভ হলো আমাদের? তোমরা যদি ভিয়েটার ফর্মুলা দেখে থাক, তাহলে এই দুটি মান দেখে বুঝতে পারার কথা যে x, y হলো $a^2-13a+36 = 0$ পলিনমিয়ালটির দুটি মূল। এখন $a^2-13a+36 = (a-4)(a-9) = 0$। সুতরাং $(x, y) = (4, 9)$ বা, $(9, 4)$। ■

উদাহরণ ২.৩

নিচের সিস্টেমে x এর মান বের কর -

$$x+y+z = a$$
$$x^2+y^2+z^2 = b^2$$
$$x^3+y^3+z^3 = a^3$$

সমাধান: শুরুতেই দেখ,

$$(x+y+z)^3 = x^3+y^3+z^3+3(x+y)(x+z)(z+y)$$

আর দেওয়া আছে যে $x+y+z = a$। সুতরাং, $(x+y)(y+z)(z+x) = 0$। এই তিনটি রাশির গুণফল যেহেতু 0, এদের মধ্যে যেকোনো দুটি পরস্পরের যোগাত্মক বিপরীত হবে। যেমন হতে পারে $x = -y = k$ অথবা $y = -z = k$, যেখানে k যেকোনো পূর্ণসংখ্যা। ধরি $x = -y = k$ দ্বিতীয় সমীকরণটায় বসালাম। তাহলে পাওয়া যাবে $2k^2+z^2 = b^2 \implies k = \pm\sqrt{\frac{b^2-a^2}{2}}$। আবার একইভাবে $y = -z = k$ হলে সমীকরণগুলোতে এই মান বসালে দেখবে $x = a$ পাওয়া যায়। সুতরাং x এর সম্ভাব্য মানগুলো হলো $a, \pm\sqrt{\frac{b^2-a^2}{2}}$ ■

উদাহরণ ২.৪

(Polish MO 2022) নিচের সিস্টেমটির সমাধান বের কর,যেখানে $a, b, c \in \mathbb{R}$।

$$a^3 + b^2c = ac$$
$$b^3 + c^2a = ba$$
$$c^3 + a^2b = cb$$

সমাধান: যদি a, b, c এর একটিও 0 হয়, ধরা যাক a, তাহলে দ্বিতীয় সমীকরণ থেকে পাব $b^3 = 0 \implies b = 0$ এবং তৃতীয় সমীকরণ থেকে $c^3 = cb = c \cdot 0 \implies c = 0$। অর্থাৎ একটি চলক 0 হলে বাকিগুলোও 0 হয়ে যাবে। সুতরাং $(a, b, c) = (0, 0, 0)$ একটি সমাধান।

এবার মনে করি এদের একটাও 0 না। প্রথম সমীকরণ থেকে লেখা যায় $a^3 = c(a - b^2)$। এখন দেখ দ্বিতীয় সমীকরণ থেকেও $a - b^2$ রাশিটি পাওয়া সম্ভব, $c^3 = b(a - b^2)$। এবার এই দুই সমীকরণ থেকে পাই $\frac{a^3}{c} = \frac{c^a}{b} \implies \frac{a^2}{c^2} = \frac{c}{b}$।

একইভাবে দ্বিতীয় ও তৃতীয় সমীকরণ থেকে পাওয়া যায়, $\frac{b^2}{a^2} = \frac{a}{c}$। আবার তৃতীয় ও প্রথম সমীকরণ থেকে পাওয়া যাবে $\frac{c^2}{b^2} = \frac{b}{a}$। সুতরাং $\frac{c}{b} = \frac{a^2}{c^2} = \frac{b^4}{a^4} = \frac{c^8}{b^8}$। এখান থেকে আমরা $b = c$ পাই। সবশেষে $\frac{c^2}{b^2} = \frac{b}{a}$ তে $b = c$ বসালে পাওয়া যায় $a = b$। অর্থাৎ $a = b = c$ হবে।

এখন এটা সিস্টেমটির প্রথম সমীকরণে বসিয়ে দিলে পাওয়া যায় $2a^3 = a^2 \implies (a, b, c) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$।

তাহলে সমাধানগুলো হলো $(a, b, c) = (0, 0, 0), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$। ■

উদাহরণ ২.৫

(AIME 2019) নিচের সিস্টেমটির কয়টি সমাধান (a, b, c, d, e, f, g)

আছে?

$$abc = 70,$$
$$cde = 71,$$
$$efg = 72.$$

সমাধান: এটা একটা মজার সমস্যা। এখানে আমাদের বীজগাণিতিক সমস্যা সমাধান করতে হলেও আসলে দরকার নাম্বার থিওরির যুক্তি।

সমীকরণগুলোতে যে তিনটি সংখ্যা দেওয়া আছে সেগুলো ক্রমিক সংখ্যা। সুতরাং $gcd(70, 71) = gcd(71, 72) = 1$। এখন abc ও cde এর মধ্যে সাধারণ চলক হলো c। এবার দেখ, যেহেতু 70 আর 71 এর গসাগু 1, c কেও 1 হতেই হবে। নাহলে $70, 71$ এর মধ্যে 1 বাদে অন্য কোনো সাধারণ উৎপাদক থাকলে গসাগু আর 1 থাকবে না।

একইভাবে e কেও 1 হতে হবে। এবার এই দুই মান ও দ্বিতীয় সমীকরণ থেকে পাওয়া যায় $d = 71$ । সুতরাং এখন আমাদের এমন a, b, f, g বের করতে হবে যেন $ab = 70 = 2 \cdot 5 \cdot 7$ এবং $fg = 72 = 2^3 \cdot 3^2$ হয়।

70 এর উৎপাদকের সংখ্যা 8 টি, আর 72 এর উৎপাদক আছে 12 টি। যেহেতু c, d, e এর মান ফিক্সড, তাই আমাদের উত্তর হবে আমরা যতভাবে a, b এবং যতভাবে f, g বাছাই করতে পারব তার সংখ্যার গুণফল, যেটা হলো $8 \cdot 12 = 96$। এখানে আমরা গুণ করেছি কারণ প্রতি (a, b) এর জন্য (f, g) এর অপশন 12 টি। ■

উদাহরণ ২.৬

একটা ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা n এর জন্য নিচের সিস্টেমটি লেখা যায়

$$x + y + z + t = n$$
$$xyz + xyt + xzt + yzt \equiv 0 \pmod{n}$$

প্রমাণ কর যে, এর ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যায় সমাধান (x, y, z, t) পাওয়া যাবে iff $n \notin \mathcal{P}$ হয় যেখানে, $\mathcal{P}$ সকল মৌলিক সংখ্যার সেট।

সমাধান: এবার আবারও একটা উদাহরণ দেখব যেটায় নাম্বার থিওরি ব্যবহার করা হয়েছে। এটাকে কন্সট্রাকশন প্রবলেমও বলা যায়, কারণ এখানে আমাদের সুবিধামতো মান বানাতে হয়েছে বা কন্সট্রাক্ট করতে হয়েছে।

সাধারণত অন্যান্য যেসব সমস্যার সমাধান করেছি সেখানে আমরা হয় সমাধান বের করেছি নাহলে কোনো একটা শর্ত ঐ সমস্যাকে সিদ্ধ করে এটা প্রমাণ করেছি। কিন্তু এই সমস্যাটাতে 'যদি এবং কেবল যদি' বলা আছে। এর মানে হলো আমাদের প্রমাণ করতে হবে

- n যদি মৌলিক সংখ্যা না হয়, অর্থাৎ যৌগিক হয় তাহলে (x, y, z, t) পাওয়া যাবে ।

- যদি কোনো ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যায় সমাধান (x, y, z, t) খুঁজে পাওয়া যায় তাহলে n যৌগিক হবে।

এবার তাহলে এই দুই শর্ত প্রমাণ করা যাক। প্রথমটির জন্য যেহেতু ধরে নেওয়া হচ্ছে n একটি যৌগিক সংখ্যা, তাই আমরা লিখতে পারি $n = ab$, যেখানে $a, b > 1$। সুতরাং আমরা এমন x, y, z, t বের করতে চাই যেন $x + y + z + t = ab$ হয়। এরা সকলেই একে অপরের সাথে যোগ আকারে আছে। তাই এখানে ab নিয়ে আসতে ধরে নিলাম $t = ab$। তাহলে এখন এমন x, y, z বাছাই করতে হবে, যেন তারা নিজেদের মধ্যে কাটাকাটি করে 0 হয়ে যায়।

আবার দেখ, দ্বিতীয় সমীকরণটায় দেখাতে হবে যে $xyz + xyt + xzt + yzt$, n দিয়ে বিভাজ্য। শুধু t যদি ab হয়, আর x, y, z সম্পূর্ণ আলাদা কিছু হয়, তাহলে এই সমীকরণকে সিদ্ধ করে এমন x, y, z খুঁজে পাওয়া আমাদের জন্য কঠিন হয়ে পড়বে। তাই আমরা চাই x, y, z কে যতটা সম্ভব a, b এর সাথে সম্পর্কযুক্ত রাখতে।

WLOG, ধরে নিলাম $a \geq b$। এখন এই তিনটির মধ্যে একটি যদি a এর সাথে সম্পর্কযুক্ত কিছু হয়, যেমন $a+b$ তাহলে একে কেটে ফেলার জন্য এদের অন্য একটির মধ্যে $-a$ থাকতে হবে। কিন্তু $a, b > 1$, সুতরাং অন্য কোনো

উপায়ে এই পুরো সমীকরণটার মধ্যে $-a, -b$ আনতে হবে। আর সেটা করা যায় $t = ab$ এর বদলে $t = (a-1)(b-1)$ বসিয়ে।

এখানে থেকে আমরা বলতে পারি যে $x = 1, y = a-1, z = b-1$ বসালে প্রথম সমীকরণটি সত্য হবে। এই মানগুলো দ্বিতীয় সমীকরণটিতেও বসালে দেখবে সেটা সত্য হয়। তাহলে আমাদের প্রথম শর্তটা প্রমাণ করে ফেললাম।

এবার দ্বিতীয় শর্তটা নিয়ে কাজ শুরু করে ফেলি। দ্বিতীয় সমীকরণ থেকে লেখা যায়

$$\begin{aligned} xyz + xyt + xzt + yzt =& (x+y+z+t)(xy+xz+yz) \\ & - (y+z)(x+y)(x+z) \end{aligned}$$

সুতরাং, $(y+z)(x+y)(x+z) \equiv 0 \pmod{x+y+z+t}$। কনট্রাডিকশনের জন্য ধরে নিলাম $x+y+z+t$ মৌলিক সংখ্যা। তাহলে $x+y+z+t$, $(y+z), (x+y), (x+z)$ এদের যেকোনো একটিকে ভাগ করবেই। কিন্তু সেটা সম্ভব না কারণ এরা প্রত্যেকে $x+y+z+t$ এর চেয়ে ছোটো। তার মানে $n = x+y+z+t$ মৌলিক সংখ্যা হতে পারে না। ■

§ ২.৪ সমীকরণ সমাধানে অসমতা

আমরা আগেই বলেছিলাম অসমতা অনেক কাজের টুল। কারণ অসমতা ব্যবহার করে সমীকরণ সম্পর্কে গুরুত্বপূর্ণ তথ্য পাওয়া যায়, আবার কখনো কখনো সুবিধামতো বাউন্ড পাওয়া যায় যেটা সমীকরণ সমাধানে বেশ দরকারি।

উদাহরণ ২.৭

(IMO Longlist 1967) নিচের সিস্টেমের সমাধান বের কর -

$$x^2 + x - 1 = y$$
$$y^2 + y - 1 = z$$

$$z^2 + z - 1 = x.$$

সমাধান: প্রথমেই সমীকরণগুলোকে যোগ করে ফেললে পাব, $x^2+y^2+z^2 = 3$। এখান থেকে আমাদের কিছুটা ধারণা আসে যে, সমাধান হয়ত ± 1 হতে পারে।

এবার যে সিস্টেমটি দেয়া আছে সেটাকে আমরা একটু ভিন্নভাবে লিখতে পারি,

$$\begin{aligned} x(x+1) &= y+1 \\ y(y+1) &= z+1 \\ z(z+1) &= x+1 \end{aligned}$$

এই তিনটি সমীকরণকে গুণ করে ফেললে পাওয়া যায় $xyz = 1$

এবার $x^2+y^2+z^2 = 3$ কে যদি তিন দিয়ে ভাগ করি তাহলে দেখব যে, $\frac{x^2+y^2+z^2}{3} = 1$। এর বামপক্ষ দেখতে কিছুটা AM-GM এর মতো। আবার এর আগে আমরা পেলাম $xyz = 1$। সুতরাং এখন আমরা লিখতে পারব যে,

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{3} \geq \sqrt[3]{x^2y^2z^2} = \sqrt[3]{1} = 1$$

এটা দিয়ে আমরা কী পেলাম? আমাদের কাছে আছে $\frac{x^2+y^2+z^2}{3} = 1$, আর আমরা জানি, AM-GM এর equality case তখনই হতে পারে যখন $x = y = z$ হয়। সুতরাং আমরা সমীকরণগুলোর সমাধান পেয়ে গেছি! সেটা হলো $x = y = z = 1$ নাহলে $x = y = z = -1$।

■

উদাহরণ ২.৮

(IMOC 2019) এমন সকল (a, b, c) বের কর যেন -

$$\begin{aligned} a\sqrt[2019]{b} - c &= a \\ b\sqrt[2019]{c} - a &= b \end{aligned}$$

$$c\sqrt[2019]{a} - b = c$$

সমাধান: এখানে প্রতিটি সমীকরণে একটা চলকের 2019 তম মূল নিয়ে কাজ করাটা বেশ আজব একটা ব্যাপার। কিন্তু a, b, c যদি কিছু একটার 2019 তম ঘাত হয়, তাহলে কিন্তু আমাদের জন্য অনেক সুবিধা হবে। তাই আপাতত ধরে নিলাম, কোনো এক ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যা m এর জন্য $a = b = c = m^{2019}$।

এবার সমীকরণগুলোতে a, b, c এর জায়গায় m^{2019} বসিয়ে দিলে প্রথম সমীকরণ থেকে পাব $m^{2019} \cdot m - m^{2019} = m^{2019} \implies m = 2$ কিন্তু যদি a, b, c কিছুর 2019 তম ঘাত না হয়? সেক্ষত্রেও $a = b = c$ বসালে দেখবে এদের মান 2^{2019} আসবে।

এখন a, b, c তিনটিই সমান না হলে কী হবে? এদের মধ্যে একটা চলক নিশ্চয় সবচেয়ে বড়ো হবে। তাহলে আমরা ধরে নেব, a-ই সেই চলক এবং $a \geq b, a \geq c$।

দ্বিতীয় সমীকরণ থেকে পাওয়া যায়, $\sqrt[2019]{c} = \frac{a+b}{b}$ আর একইভাবে তৃতীয় সমীকরণটি থেকে পাওয়া যায়, $\sqrt[2019]{a} = \frac{b+c}{c}$। আমরা যেহেতু আগেই ধরে নিয়েছি $a \geq c \implies \sqrt[2019]{a} \geq \sqrt[2019]{c}$, আমরা লিখতে পারি,

$$\begin{aligned}
&\frac{b+c}{c} \geq \frac{a+b}{b} \\
\implies &\frac{b}{c} \geq \frac{a}{b} \\
\implies &b^2 \geq ac \geq c^2 \\
\implies &b \geq c
\end{aligned}$$

এবার আবারো প্রথম ও দ্বিতীয় সমীকরণ থেকে লেখা যায়,

$$\begin{aligned}
&\frac{a+c}{a} \geq \frac{a+b}{b} \\
\implies &\frac{c}{a} \geq \frac{a}{b}
\end{aligned}$$

$$\implies b^2 \geq bc \geq a^2 \geq b^2 \implies a = b = c$$

সুতরাং এই সিস্টেমটির সমাধান $a = b = c = 2^{2019}$।

■

উদাহরণ ২.৯

(Turkey EGMO TST 2020) (x, y, z) ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যা যেন

$$xyz + x + y + z = 6$$

এবং

$$xyz + 2xy + yz + zx + z = 10$$

$(xy + 1)(yz + 1)(zx + 1)$ এর মান সর্বোচ্চ কত হতে পারে?

সমাধান: প্রথমেই খেয়াল কর দুটি ইকুয়েশন কিছুটা কাছাকাছি ধরনের দেখতে। তাই আমরা চাই কোনোভাবে এদের একটাকে অন্যটার সাথে তুলনা করতে। সেটা করার একটা উপায় হলো এদের $2(xyz + x + y + z) = xyz + 2xy + yz + zx + z + 2$ - এভাবে লেখা। এখান থেকে পাওয়া যায়,

$$\begin{aligned} & 2xyz + 2x + 2y + 2z - xyz - 2xy - yz - zx - z - 2 = 0 \\ \implies & (x - 1)(y - 1)(z - 2) = 0 \end{aligned}$$

$x = 1$ হলে প্রথম সমীকরণ থেকে পাব $yz + y + z + 1 = 6$ আর এখন আমরা চাই $(y + 1)(z + 1)(yz + 1)$ এর সর্বোচ্চ মান বের করতে।

$$(y + 1)(z + 1)(yz + 1) = 6(yz + 1) \qquad (1)$$

এখন AM-GM থেকে আমরা জানি $2\sqrt{yz} \leq y + z \implies 2\sqrt{yz} + yz + 1 \leq yz + y + z + 1 = 6$। এর বামপক্ষ হলো $(\sqrt{yz} + 1)^2$। সুতরাং $(\sqrt{yz} + 1)^2 \leq 6 \implies yz \leq (\sqrt{6} - 1)^2 = 7 - 2\sqrt{6}$

এর মান (1) এ বসিয়ে দিলে পাব , $6(yz + 1) \leq 6(8 - 2\sqrt{6}) = 12(4 - \sqrt{6})$।

$y = 1$ হলেও একইভাবে আমরা এই মানটি পাব। এবার তাহলে আমাদের $z = 2$ হলে সর্বোচ্চ মান কত হবে তা বের করতে হবে। $z = 2$ হলে প্রথম সমীকরণ থেকে $2xy+x+y+2 = 6$। এখন $(xy+1)(2y+1)(2x+1) = (xy+1)(2(2xy+x+y)+1) = 9(xy+1)$ আগের বারের মতোই আমরা লিখতে পারি,

$$
\begin{aligned}
& 2\sqrt{xy} + 2xy \le 2xy + x + y = 4 \\
\implies & 2\sqrt{xy} + 2xy + 2 \le 6 \\
\implies & 2xy - 4\sqrt{xy} + 2 + 6\sqrt{xy} - 6 \le 0 \\
\implies & (\sqrt{xy} - 1)(\sqrt{xy} + 4) \le 0
\end{aligned}
$$

এখন দেখ, আমাদের আগে থেকেই বলে দেওয়া হয়েছে x, y ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যা। তার মানে $\sqrt{xy}+4$ ঋণাত্মক হতে পারবে না। সুতরাং $\sqrt{xy}-1$ কে ঋণাত্মক হতে হবে, $\sqrt{xy} \le 1 \implies xy \le 1$। এই মানকে $9(xy+1)$ এ বসালে এর সর্বোচ্চ মান পাই 18। যেহেতু $12(4-\sqrt{6} \ge 18$, সর্বোচ্চ মান হবে $12(4-\sqrt{6})$।

■

সবশেষে আমরা এমন একটা উদাহরণ দেখব যেটার সমাধান অসমতার ওপর অনেক বেশি নির্ভরশীল।

উদাহরণ ২.১০

(IMO Longlist 1990) $t \in \mathbb{R}$ এর মান বের কর যার জন্য নিচের সিস্টেমটির একটি ইউনিক বাস্তব সমাধান (x, y, z, v) থাকবে।

$$
\begin{gathered}
x + y + z + v = 0 \\
(xy + yz + zv) + t(xz + xv + yv) = 0
\end{gathered}
$$

সমাধান: এখানে ইউনিক সমাধানের মানে হলো x, y, z, v এর যেকোনোটির একাধিক মানের জন্য বাকি তিনটি একই হতে পারবে না। উদাহরণ হিসেবে ধরে নাও যদি $(x, , y, z, v) = (1, 2, 3, 4)$ একটি সমাধান হয় এবং $(5, 2, 3, 4)$

আরেকটি সমাধান হয়, তাহলে এরা ইউনিক নয়, কারণ $x = 1, 5$ উভয়ের জন্যই y, z, v একই এসেছে।

দ্বিতীয় সমীকরণে $v = -x - y - z$ বসালে পাব $z^2 + z(x + ty) + \{t(x^2 + 2xy + y^2) - xy\} = 0$। এটা z চলকটির একটি দ্বিঘাত সমীকরণ, যেখানে $t(x^2 + 2xy + y^2) - xy$ হলো ধ্রুবক। এই সমীকরণটির সমাধানগুলোকে যদি বাস্তব হতে হয়, তাহলে এর নির্ণায়ক বা discriminant কে অঋণাত্মক হতে হবে। [১] সুতরাং,

$$x^2(1 - 4t) + 2xy(2 - 3t) + t^2y^2 - 4ty^2 \geq 0 \tag{1}$$

এখন দেখ, যদি $t < \frac{1}{4}$ হয়, তাহলে এমন অসীম সংখ্যক x, y পাওয়া যাবে যারা উপরের অসমতাটিকে সিদ্ধ করে। সেটা কীভাবে? একটা উদাহরণ দিয়ে দেখা যাক। ধর t যদি $\frac{1}{8}$ হয়, তাহলে t এর মান বসিয়ে উপরের এই অসমতাটা হয়ে যায়

$$56x^2 + 144xy - 31y^2 \geq 0$$

এখানে $x = 3, y = 1$ বসালে দেখবে অসমতাটি সত্য হয়। এভাবে x কে y এর চেয়ে বড়ো রেখে মান বসাতে থাকলে অসীম সংখ্যক x, y এর জন্য এই অসমতা সত্য হবে। কিন্তু আমরা চাই সিস্টেমটির একটি ইউনিক সমাধান থাকবে। একইভাবে $\frac{1}{4}$ এর চেয়ে ছোট সকল বাস্তব t এর জন্য অসীম সংখ্যক x, y পাওয়া যাবে। তাই $t < \frac{1}{4}$ হতে পারবে না।

এবার $t = \frac{1}{4}$ হলে, অসমতাটি হয় $8x - y \geq 0$। এবার এটায় কী সমস্যা সেটা কি বুঝতে পারছ? আসলে এক্ষেত্রেও অসীম সংখ্যক x, y পাওয়া যাবে যাদের জন্য এ অসমতাটি সত্য।

সুতরাং t কে $\frac{1}{4}$ এর চেয়ে বড়ো হতেই হবে। আবার অসমতা (1) এর বামপক্ষ x এর একটি দ্বিঘাত সমীকরণ হলে এর নির্ণায়ককেও অঋণাত্মক হতে হবে। তাই আমরা আবারও লিখতে পারি,

$$4y^2(2 - 3t)^2 - 4y^2(1 - 4t)(t^2 - 4t) \geq 0$$
$$\implies 16y^2(t + 1)(t^2 - 3t + 1) \geq 0 \tag{2}$$

---

[১]এই অংশটি বুঝতে সমস্যা হলে 'বহুপদী' অধ্যায়টির নির্ণায়ক অংশ থেকে দেখে আসতে পার।

এখান এখানে যদি $(t+1)(t^2-3t+1) \geq 0$ হয়, তাহলে y এর অসীম সংখ্যক মান পাওয়া যাবে। তাই $(t+1)(t^2-3t+1) < 0$ হতে হবে। কিন্তু এটা হলে (2) এ বামপক্ষ ঋণাত্মক হয়ে যাবে, কেননা $y=0$ না হলে $16y^2$ সবসময়ই ধনাত্মক। সুতরাং এখান থেকে বলা যায় $y=0$। এই মান বসিয়ে দিলে অসমতা (1) থেকে পাওয়া যাবে $x^2(1-4t) \geq 0$। কিন্তু যেহেতু $t > \frac{1}{4}$, তাই $1-4t < 0$। সুতরাং একইভাবে x কেও 0 হতে হবে।

এবার একদম শুরুতে z এর সমীকরণটিতে $x=y=0$ বসিয়ে দিলে $z=0$ হয়ে যাবে। আর সিস্টেমের প্রথম সমীকরণ থেকে v ও 0 হয়ে যায়। অর্থাৎ আমরা একটা ইউনিক সমাধান পেয়ে গেলাম! সেটা হলো $(x,y,z,v) = (0,0,0,0)$।

সুতরাং আমাদের এমন t খুঁজতে হবে যেন $t > \frac{1}{4}$ এবং $(t+1)(t^2-3t+1) < 0$। যেহেতু $t < -1$ হতে পারবে না তাই $(t^2-3t+1) < 0$ হতে হবে। এটার বামপক্ষকে 0 এর সমান ধরে সমীকরণ গঠন করে quadratic ফর্মুলা দিয়ে সমাধান করলে t এর মান পেয়ে যাব, যেটা হলো $t = \frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$। অর্থাৎ যেসকল t এই অসমতাকে সিদ্ধ করে তাদের মান হলো $t \in (\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2})$। ■

§ ২.৫ জ্যামিতি দিয়ে বীজগণিত?

উদাহরণ ২.১১

(AIME 1994) একটি সিস্টেম

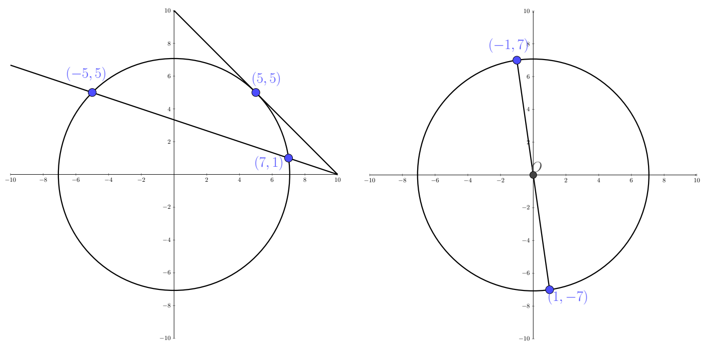
$$ax + by = 1$$
$$x^2 + y^2 = 50$$

এর কমপক্ষে একটি সমাধান আছে এবং সমাধানগুলো (x,y) আকারের জোড়া যেখানে $x, y \in \mathbb{Z}$। এমন কয়টি ordered জোড়া আছে?

সমাধান: তোমরা যদি স্থানাঙ্ক জ্যামিতি করে থাক, তাহলে এই সিস্টেমটি দেখে তোমাদের বুঝতে পারার কথা যে, এর প্রথম সমীকরণটি হলো একটি

সরলরেখার সমীকরণ আর পরেরটি একটি বৃত্তের। সুতরাং এদের সমাধান হবে যে বিন্দুগুলোতে এই রেখা আর বৃত্তটি ছেদ করবে সেই জোড়াগুলো।

বৃত্তের সমীকরণ থেকে আমরা 12 জোড়া (x, y) পাব, যারা সমীকরণটিকে সিদ্ধ করবে। সেগুলো হলো $(\pm 5, \pm 5), (\pm 1, \pm 7), (\pm 7, \pm 1)$।



(a) ছেদক ও স্পর্শক (b) একটি ব্যাস

চিত্র ২.২: AIME 1994

এখন এই রেখাটি বৃত্তের সাথে স্পর্শক হতে পারে, অথবা ছেদক হতে পারে অর্থাৎ রেখাটি বৃত্তকে দুইটি বিন্দুতে ছেদ করতে পারে। যদি রেখাটি স্পর্শক হয় তাহলে এই 12 টি বিন্দুর যেকোনোটিতেই হতে পারে। আবার যদি বৃত্তটিকে দুটি বিন্দুতে ছেদ করে তাহলে এই 12 টি বিন্দুর যেকোনো 2 টি বিন্দু বাছাই করে রেখাটি তৈরি করা যাবে। কিন্তু খেয়াল করে দেখ যদি রেখাটি মূলবিন্দু $(0, 0)$ দিয়ে যায় তাহলে $a \cdot 0 + b \cdot 0 = 1$ হয়ে যাবে, যার কোনো বাস্তব সমাধান নেই। তাই রেখাটি এমন দুটি বিন্দু দিয়ে যাবে না যেন সেটা বৃত্তের ব্যাস হয়।এমন বিন্দুগুলো হলো $(5, 5)$ ও $(-5, -5)$, $(-1, 7)$ ও $(1, -7)$ ইত্যাদি। সুতরাং 12 টি বিন্দুর জন্য এর ঠিক বিপরীত বিন্দু ছাড়া 10 টি বিন্দু বাছাই করা যাবে। কিন্তু এভাবে একটি রেখা দুইবার করে গণনা করা হচ্ছে। যেমন $(5, 5)$ ও $(1, 7)$ এবং $(1, 7)$ ও $(5, 5)$ একই রেখা। তাই ছেদক হলে মোট $\frac{12 \cdot 10}{2} = 60$ টি রেখা পাওয়া যাবে। এর সাথে 12 টি স্পর্শক রেখা যোগ করলে পাওয়া যাবে মোট $12 + 60 = 72$ টি রেখা।

■

উদাহরণ ২.১২

(Azerbaijan Senior National Olympiad 2017) নিচের সিস্টেমটির সমাধান বের কর যেখানে $(x, y) \in \mathbb{R}$

$$\sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{(x-4)^2 + (y-3)^2} = 5$$
$$3x^2 + 4xy = 24$$

সমাধান: প্রথম সমীকরণটি হলো (x, y) থেকে $(0, 0)$ এবং (x, y) থেকে $(4, 3)$ বিন্দুর দূরত্বের যোগফল। এখন $(0, 0)$ থেকে $(4, 3)$ এর দূরত্ব হলো 5। (x, y) যদি $(0, 0)$, $(4, 3)$ রেখাংশের বাইরে থাকত তাহলে প্রথম সমীকরণে যোগফল 5 এর চেয়ে বেশি হয়ে যেত। সুতরাং (x, y) বিন্দুটি রেখাংশের ওপর অবস্থিত। তাহলে আমরা লিখতে পারি $\frac{x}{y} = \frac{4-0}{3-0}$ বা, $y = \frac{3x}{4}$।

এবার এই মানটাকে আমরা দ্বিতীয় সমীকরণে বসিয়ে দিতে পারি। তাহলে পাওয়া যাবে $6x^2 = 24 \implies x = 2$ এবং $y = \frac{3 \cdot 2}{4} = \frac{3}{2}$। অর্থাৎ $(x, y) = (2, \frac{3}{2})$। ■

উদাহরণ ২.১৩

(AIME 2006) x, y, z বাস্তব সংখ্যা এবং

$$x = \sqrt{y^2 - \frac{1}{16}} + \sqrt{z^2 - \frac{1}{16}}$$
$$y = \sqrt{z^2 - \frac{1}{25}} + \sqrt{x^2 - \frac{1}{25}}$$
$$z = \sqrt{x^2 - \frac{1}{36}} + \sqrt{y^2 - \frac{1}{36}}$$

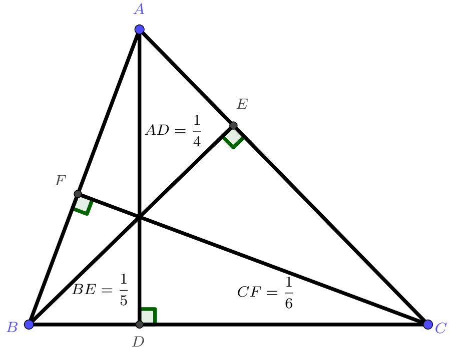
এখানে $x + y + z$ কে $\frac{m}{\sqrt{n}}$ আকারে লেখা যায়, যেখানে m, n ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা এবং n কোনো মৌলিক সংখ্যার বর্গ দিয়ে বিভাজ্য নয়। $m+n$ এর মান বের কর।

সমাধান: এখানে প্রত্যেকটি সমীকরণ দুটি রাশির যোগফল, আর এই রাশিগুলো

$a^2 - b^2$ আকারের। এখান থেকে আমাদের বীজগাণিতিক সূত্রের কথা মনে পড়ে। কিন্তু এর বর্গমূল খুব একটা কাজের না। এই রাশি আর বর্গমূল আরেকটা জায়গায়ও দেখা যায়- পীথাগোরাসের সূত্র। তাহলে চেষ্টা করে দেখা যাক সেটা কাজের কিনা।

আমরা একটা ত্রিভুজ ABC ভেবে নিতে পারি যার তিনটা বাহুর দৈর্ঘ্য $AB = x, BC = y, CA = z$ এবং $CF = \frac{1}{4}, AD = \frac{1}{5}, BE = \frac{1}{6}$, যেখানে AD, BE, CF ত্রিভুজটির লম্ব।

কিন্তু এই ত্রিভুজটার যে আসলেই অস্তিত্ব আছে তার নিশ্চয়তা কী? প্রথম সমীকরণটি থেকে আমরা লিখতে পারি $x = \sqrt{y^2 - \frac{1}{16}} + \sqrt{z^2 - \frac{1}{16}} < \sqrt{y^2} + \sqrt{z^2} = y + z$। যেহেতু এর একটি বাহু অপর দুই বাহুর যোগফলের চেয়ে ছোট, তাই এমন ত্রিভুজ থাকবে। আবার $AF = \sqrt{z^2 - \frac{1}{16}}, BF = \sqrt{y^2 - \frac{1}{16}}$। তাই এই ত্রিভুজটার ক্ষেত্রে সমীকরণগুলো সত্য হয়।



চিত্র ২.৩: AIME 2006

এখন ত্রিভুজের ক্ষেত্রেফলের সূত্র থেকে বলতে পারি, $\frac{1}{2} \cdot x \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot y \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{2} \cdot z \cdot \frac{1}{6}$ বা $y = \frac{5x}{4}, z = \frac{6x}{4}$। তাহলে এর অর্ধ পরিসীমা,$s = \frac{x+y+z}{2} = \frac{15x}{8}$।

এবার আমরা Heron's formula ব্যবহার করে x এর মান বের করে ফেলতে

পারি। $\frac{1}{2} \cdot x \cdot \frac{1}{4} = \frac{x}{8}$। Heron's formula থেকে লেখা যায়,

$$\left(\frac{x}{8}\right)^2 = s(s-x)(s-y)(s-z) = \frac{15}{8}x\left(\frac{7}{8}x\right)\left(\frac{3}{8}x\right)\left(\frac{5}{8}x\right)$$

বা,

$$15 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 5x^2 = 64 \implies x = \frac{8}{15\sqrt{7}}$$

x এর মান ব্যবহার করে পাওয়া যাবে $x+y+z = \frac{2 \cdot 15x}{8} = \frac{15}{4}\left(\frac{8}{15\sqrt{7}}\right) = \frac{2}{\sqrt{7}}$। অর্থাৎ $m+n = 2+7 = 9$।

■

§ ২.৬ অনুশীলনী

সমস্যা ২.১: (AIME 1991) x^2+y^2 এর মান বের কর যেন (x, y) নিচের শর্তগুলো মেনে চলে।

$$xy + x + y = 71 \qquad \text{এবং} \qquad x^2y + xy^2 = 880.$$

সমস্যা ২.২: নিচের সিস্টেমটির সমাধান বের কর।

$$\begin{aligned} 2x^2 + 3y^2 - 4xy &= 3 \\ 2x^2 - y^2 &= 7 \end{aligned}$$

সমস্যা ২.৩: (Greece JBMO TST 2002) x, y, a তিনটি বাস্তব সংখ্যা যেন $x + y = x^2 + y^2 = x^3 + y^3 = a$ হয়। a এর সম্ভাব্য মানগুলো বের কর।

সমস্যা ২.৪: a, b এর মান 0 ব্যতীত যেকোনো বাস্তব সংখ্যা হলে নিচের সিস্টেমটিতে x, y এর মান বের কর।

$$\begin{aligned} x^2 + xy &= a^2 + ab \\ y^2 + xy &= a^2 - ab \end{aligned}$$

সমস্যা ২.৫: এমন সকল ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা বের কর যেন

$$\begin{aligned} x^4 + y^4 &= 1 \\ x^3 + y^3 &= 1 \end{aligned}$$

সমস্যা ২.৬: (CGMO 2005) এমন সকল বাস্তব সংখ্যা (x, y, z) বের কর যেন

$$5\left(x + \frac{1}{x}\right) = 12\left(y + \frac{1}{y}\right) = 13\left(z + \frac{1}{z}\right),$$

এবং

$$xy + yz + zy = 1.$$

সমস্যা ২.৭: (AIME 2021) a, b, c, d বাস্তব সংখ্যা যারা নিচের সিস্টেমটি মেনে চলে।

$$\begin{aligned} a + b &= -3 \\ ab + bc + ca &= -4 \\ abc + bcd + cda + dab &= 14 \\ abcd &= 30 \end{aligned}$$

$a^2+b^2+c^2+d^2 = \frac{m}{n}$ হলে, যেখানে m, n সহমৌলিক ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা, $m + n$ এর মান নির্ণয় কর।

সমস্যা ২.৮: (Bulgarian Spring Math Competition 2022) x, y, z যদি নিচের সিস্টেমটির সমাধান হয়,

$$\begin{cases} x - y + z - 1 = 0 \\ xy + 2z^2 - 6z + 1 = 0 \end{cases}$$

তাহলে $(x-1)^2 + (y+1)^2$ এর সর্বোচ্চ মান বের কর।

সমস্যা ২.৯: (ILL 1972) a এর সকল বাস্তব মান বের কর যার জন্য নিচের সিস্টেমটির সর্বোচ্চ একটি বাস্তব সমাধান (x, y, z) থাকবে।

$$\begin{aligned} x^4 &= yz - x^2 + a \\ y^4 &= zx - y^2 + a \\ z^4 &= xy - z^2 + a, \end{aligned}$$

সমস্যা ২.১০: x, y, z নিচের সিস্টেমটির বাস্তব সমাধান যেন $x^2+y^2+z^2 < 10$ হয়।

$$\begin{aligned} x + y + z &= 3 \\ x^3 + y^3 + z^3 &= 15 \\ x^4 + y^4 + z^4 &= 35 \end{aligned}$$

$x^5 + y^5 + z^5$ এর মান নির্ণয় কর।

সমস্যা ২.১১: (Poland Second Round 2022) নিচের সিস্টেমটিকে সিদ্ধ করে এমন সকল বাস্তব সংখ্যা (a, b, c, d) নির্ণয় কর।

$$\begin{cases} ab + cd = 6 \\ ac + bd = 3 \\ ad + bc = 2 \\ a + b + c + d = 6. \end{cases}$$

সমস্যা ২.১২: এমন ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যা x, y, z কি খুঁজে পাওয়া সম্ভব যেন নিচের সিস্টেমটি সত্য হয়?

$$\begin{aligned} &x^4 + y^4 + z^4 = 13 \\ &x^3y^3z + y^3z^3x + z^3x^3y = 6\sqrt{3} \\ &x^3yz + y^3zx + z^3xy = 5\sqrt{3} \end{aligned}$$

সমস্যা ২.১৩: নিচের সিস্টেমটির ধনাত্মক বাস্তব সমাধানগুলো বের কর।

$$\begin{aligned} x^4 + y^4 &= 17(x + y)^2 \\ xy &= 2(x + y). \end{aligned}$$

সমস্যা ২.১৪: (JBMO 2020) এমন সকল বাস্তব সংখ্যার ত্রয়ী (a, b, c) বের কর যেন তারা নিচের সিস্টেমটির সমাধান হয়।

$$\begin{aligned} a + b + c &= \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \\ a^2 + b^2 + c^2 &= \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \end{aligned}$$

সমস্যা ২.১৫: নিচের সিস্টেমটির সকল বাস্তব সমাধান a, b, c বের কর।

$$(2a + 1)^2 - 4b = (2b + 1)^2 - 4c = (2c + 1)^2 - 4a = 5$$

সমস্যা ২.১৬: (Israel National MO 2023) প্রত্যেকটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা n এর জন্য সকল বাস্তব সংখ্যা a, b, c বের কর যেন তারা নিচের সিস্টেমটির সমাধান হয়।

$$\begin{aligned} a &= b^n + c^n \\ b &= c^n + a^n \\ c &= a^n + b^n \end{aligned}$$

অধ্যায় ৩

অনুক্রম ও ধারা (Sequence and Series)

I am just a dumb bunny, but we are good at multiplying.

– Judy in Zootopia

যখন কয়েকটি সংখ্যা বা রাশিকে একটি নির্দিষ্ট নিয়মে ক্রম অনুসারে সাজানো হয় তখন তাকে Sequence বা বাংলায় অনুক্রম বলে। আর কোনো Sequence এর পদগুলো যোগ করা হলে সেটা হলো Series বা ধারা। ধারার পদসংখ্যা সসীম অথবা অসীম হতে পারে। যে দুটি ধারা আমরা সবচেয়ে বেশি দেখে থাকি সেগুলো হলো - সমান্তর বা Arithmetic Series এবং গুণোত্তর বা Geometric Series। সমান্তর ধারায় পূর্ববর্তী পদের সাথে একটি নির্দিষ্ট মান যোগ করে পরবর্তী পদটি নির্ধারণ করা হয়। যে নির্দিষ্ট মানটি যোগ করা হয় তাকে বলা হয় সাধারণ অন্তর। আর গুণোত্তর ধারায় একটি পদ নির্ধারিত হয় পূর্ববর্তী পদের সাথে একটি নির্দিষ্ট মান গুণ করে। এখানে যে মানটি আগের পদের সাথে গুণ হয় তা হলো সাধারণ অনুপাত। উদাহরণ হিসেবে $3, 6, 9, \cdots, 18$ একটি অনুক্রম, আর এর পদগুলো যোগ করলে $3 + 6 + 9 + \cdots + 18$ একটি ধারা। যেহেতু এই ধারায় প্রতি পদ আগের পদের সাথে 3 যোগ করে পাওয়া যায়, এটা একটা সমান্তর ধারা আর এর সাধারণ অন্তর 3। আবার $3, 9, 27, \cdots$ এটিও একটি অনুক্রম এবং এর পদগুলো দিয়ে তৈরি ধারাটি হলো $3 + 9 + 27 + \cdots$। এর প্রতি পদের সাথে 3 গুণ করে পরের পদ পাওয়া যায়। তাহলে এটা একটা গুণোত্তর ধারা যার সাধারণ অনুপাত 3।

একটি সমান্তর ধারার প্রথম পদ a আর সাধারণ অন্তর d হলে, n তম পদটি হবে $a + (n-1)d$ । গুণোত্তর ধারার ক্ষেত্রে সাধারণ অনুপাত r হলে n

তম পদ ar^{n-1} ।

কয়েকটি ধারা প্রায়ই আমাদের বেশ কাজে লাগে। এমন কিছু ধারা আর তাদের যোগফল হলো

- $1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$
- $a_1+a_2+\cdots+a_n = \frac{n}{2}\{2a_1+(n-1)d\}$, যেখানে ধারাটি একটি সমান্তর ধারা।
- $1^2+2^2+\cdots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- $1^3+2^3+\cdots+n^3 = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$
- গুণোত্তর ধারার ক্ষেত্রে $a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1} = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$ ।
- অসীম গুণোত্তর ধারার ক্ষেত্রে যদি $|r| < 1$ হয় (গুণোত্তর ধারার যোগফল ব্যবহার করে এই শর্ত কেন প্রয়োজন তা বের করতে পারবে) তাহলে ধারাটির একটি Partial sum পাওয়া সম্ভব যার মান হয় $\frac{a}{1-r}$ ।

এখন এই সাধারণ ধারণাগুলোকে ব্যবহার করে একটা উদাহরণ দেখা যাক ।

উদাহরণ ৩.১

(BDMO 2020 Secondary) $a_1+a_2+a_3+\cdots$ একটি অসীম গুণোত্তর ধারা, যার যোগফল 3। আবার, $a_1^2+a_2^2+a_3^2+\cdots=3$ । $a_1^3+a_2^3+a_3^3+\cdots$ এর মান কত?

সমাধান: সাধারণ অনুপাত r হলে প্রথম ধারাটির ক্ষেত্রে সূত্র অনুযায়ী,

$$a_1+a_2+a_3+\cdots = \frac{a_1}{1-r} = 3 \qquad (1)$$

দ্বিতীয় ধারাটির ক্ষেত্রে,

$$a_1^2+a_2^2+a_3^2+\cdots = a_1^2+(a_1r)^2+(a_1r^2)^2+\cdots$$

সুতরাং এখানে সাধারণ অনুপাত r^2। তাহলে,

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \cdots = \frac{(a_1)^2}{1 - r^2} = 3 \qquad (2)$$

সমীকরণ (1) ও (2) থেকে পাওয়া যায়,

$$\begin{aligned} a_1 &= 3 - 3r \\ a_1^2 &= 3 - 3r^2 \qquad (3) \end{aligned}$$

(3) এ a_1 এর মান বসিয়ে,

$$\begin{aligned} & (3 - 3r)^2 = 3 - 3r^2 \\ \implies & 9 - 18r + 9r^2 = 3 - 3r^2 \\ \implies & 12r^2 - 18r + 6 = 0 \\ \implies & 2r^2 - 3r + 1 = 0 \\ \implies & (2r - 1)(r - 1) = 0 \\ \implies & r = 1, \frac{1}{2} \end{aligned}$$

যেহেতু সমস্যার শুরুতেই দেয়া আছে ধারাটি অসীম, তাহলে $r = 1$ গ্রহণযোগ্য না। সুতরাং r ও a_1 এর মান হবে যথাক্রমে $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}$ । এখন আমরা বের করতে চাই $a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 + \cdots$ এর মান । (2) এর অনুরূপভাবে সেটা হবে $\frac{a_1^3}{1-r^3}$ বা $\frac{27}{2}$ ।

■

নিজে চেষ্টা করো

$1, a_2, a_3, \cdots$ একটি অসীম গুণোত্তর ধারা যার সাধারণ অনুপাত, r এবং $|r| < 1$ । মনে কর ,

$$\frac{1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \cdots}{1^3 + a_2^3 + a_3^3 + \cdots} = \frac{3}{2}$$

এবং,

$$\frac{1^4 + a_2^4 + a_3^4 + \cdots}{1^5 + a_2^5 + a_3^5 + \cdots} = \frac{m}{n}$$

যেখানে m,n পরস্পর সহমৌলিক (Realatively coprime) ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা। $m+n$ এর মান বের কর।

§ ৩.১ Telescoping Sum and Product

কয়েকটি রাশির গুণফল বা ধারার যোগফল নির্ণয় সম্পর্কিত সমস্যাগুলো সমাধানের একটি মজাদার ও খুবই গুরুত্বপূর্ণ পদ্ধতি হলো Telescoping। এখানে মূল লক্ষ্যই থাকে যে ধারা বা রাশিগুলো দেয়া আছে তার প্রতি পদকে এমন আকারে লেখা যেন একটির এক ভাগ আর অন্য একটি পদের আরেক ভাগ পরস্পরকে কাটাকাটি করে দেয়। ধারার ক্ষেত্রে প্রতি পদকে দুটি সংখ্যার বিয়োগফল হিসেবে লেখা হয় এবং এই পদটি যদি ভগ্নাংশ হয় সেক্ষেত্রে আংশিক ভগ্নাংশে ভেঙে লেখার চেষ্টা করা হয়[১]। আর গুণফলের ক্ষেত্রে একটি পদের হরকে অন্য আরেকটি পদের লবের সমান বানানো হয়। এভাবে বেশিরভাগ পদের অংশগুলোই বাদ দিয়ে একটা ছোট রাশি পাওয়া যায় যেটার সহজেই হিসাব করে মান বের করা সম্ভব। একটা উদাহরণ দিয়ে বিষয়টা আরও ভালো করে বুঝে নেয়া যাক ।

উদাহরণ ৩.২

$\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n}\right)$ এর মান বের কর।

সমাধান:

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n}\right)$$
$$=\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{3}{4}\right)\cdots\left(\frac{(n-2)}{(n-1)}\right)\left(\frac{(n-1)}{n}\right)$$

[১]আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ তোমরা নবম-দশম শ্রেণির বই থেকে শিখে নিতে পারো।

এখন দেখ, এখানে প্রতিটা পদের হর পরের পদের লবের সাথে কাটাকাটি হয়ে যায়। অবশেষে বাকি থাক শুধু প্রথম পদের লব ও শেষ পদের হর। তাহলে এই গুণফলটির মান $\frac{1}{n}$। ■

উদাহরণ ৩.৩

নিচের রাশিটির মান বের কর -

$$\sum_{k=1}^{100} \frac{1}{k(k+2)}$$

সমাধান: তোমাদের কি মনে আছে? শুরুতে আমরা বলেছিলাম ভগ্নাংশের ক্ষেত্রে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ করে নিয়ে টেলিস্কোপিং করা যায়। এই রাশিটাকেও তাহলে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ করে দেখা যাক কী হয়। এটাকে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ করলে পাওয়া যায় $\frac{1}{k(k+2)} = \frac{1}{2k} - \frac{1}{2(k+2)}$। এখান থেকে পুরো যোগফলটাকে লেখা যায়

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{100} \frac{1}{k(k+2)} &= \sum_{k=1}^{100} \frac{1}{2k} - \sum_{k=1}^{100} \frac{1}{2(k+2)} \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{100} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{100} \frac{1}{k+2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(1 + \cdots + \frac{1}{100} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \cdots - \frac{1}{102}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{101} - \frac{1}{102}\right) \quad [Telescope \text{ করে}] \\
&= \frac{7625}{10302}
\end{aligned}$$

এখানে $\frac{1}{3}$ থেকে শুরু করে $\frac{1}{100}$ পর্যন্ত পদগুলো বাদ পড়ে যায় আর বাকি থাকে শেষের আগের লাইনটির চারটি পদ। ■

উদাহরণ ৩.৪

$\frac{3}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{7}{3^2 \cdot 4^2} + \cdots + \frac{21}{10^2 \cdot 11^2}$ এর মান বের কর।

সমাধান: আমারা এখন চেষ্টা করব এটার পদগুলোকে দুটি সংখ্যার বিয়োগফল হিসেবে লেখার। এবার পদগুলোর দিকে ভালো করে তাকাও। প্রতিটা লব আর হরের মধ্যে একটা সম্পর্ক আছে। সেটা হলো এদের লব হরের দুটি বর্গের বিয়োগফলের সমান। মানে তারা $\frac{(n+1)^2-n^2}{n^2(n+1)^2}$ আকারের। এই রাশিটিকে ভেঙে লেখা যায়

$$\frac{(n+1)^2-n^2}{n^2(n+1)^2} = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}$$

তাহলে,

$$\begin{aligned}&\frac{3}{1^2\cdot 2^2}+\frac{5}{2^2\cdot 3^2}+\frac{7}{3^2\cdot 4^2}+\cdots+\frac{21}{10^2\cdot 11^2}\\ =&\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{10^2}-\frac{1}{11^2}\end{aligned}$$

উপরের এই রাশিতে 1 আর $-\frac{1}{11^2}$ বাদে সবই একে অপরের দ্বারা কাটাকাটি হয়ে যায়। সুতরাং যোগফল হবে $1-\frac{1}{11^2}$ বা $\frac{120}{121}$ ।

■

কোনো ধারায় এমন সরাসরি দুই ভাগে ভাগ না করা গেলে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ করে দেখা যেতে পারে।

উদাহরণ ৩.৫

$\sum_{k=1}^{2016}\frac{2k}{k^4+k^2+1}$ কে $\frac{m}{n}$ আকারে প্রকাশ করা যায়, যেখানে m,n পরস্পর সহমৌলিক। $m+n$ কে 1000 দিয়ে ভাগ করলে ভাগশেষ কত হবে?

সমাধান: এই সমস্যাটির বেলায় আগের উদাহরণের মতো লবের সাথে হরের কোনো সুন্দর সহজ সম্পর্ক খুঁজে পাওয়া যাচ্ছে না। তাহলে একে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ করে দেখা যাক।

$$\begin{aligned}\frac{2k}{k^4+k^2+1} &= \frac{2k}{(k^2+1)^2-k^2}\\ &= \frac{2k}{(k^2+k+1)(k^2-k+1)}\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{(k^2-k+1)} - \frac{1}{(k^2+k+1)}$$

সুতরাং,

$$\sum_{k=1}^{2016} \frac{2k}{k^4+k^2+1} = \sum_{k=1}^{2016} \left(\frac{1}{k^2-k+1} - \frac{1}{k^2+k+1} \right)$$

লক্ষ্য করে দেখ $k^2+k+1 = (k+1)^2-(k+1)+1$। তাহলে বুঝতেই পারছো, উপরের এই ধারায় শুধু প্রথম আর শেষ পদই রয়ে যাবে! আর এর মানটা হবে $1 - \frac{1}{2016^2+2016+1} = \frac{2016^2+2016}{2016^2+2016+1}$ । ■

§ ৩.২ Recursive Sequences

তোমরা সবাই হয়ত ফিবোনাচ্চি সিকুয়েন্স এর নাম শুনেছ। এই সিকুয়েন্সের বৈশিষ্ট্য হলো প্রত্যেকটা পদ আগের দুই পদের যোগফল। F_n ফিবোনাচ্চি সিকুয়েন্সর n তম পদ হলে, এই সম্পর্কটাকে আমরা ইকুয়েশন হিসেবে লিখতে পারি $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$। এটা থেকেই Recursion এর ধারণা কিছুটা পাওয়া যায়। একটি সিকুয়েন্স $\{a_n\}$ এ যদি a_n আগের এক বা একাধিক পদের উপর নির্ভরশীল হয় তাহলে সেই সিকুয়েন্স হলো Recursive sequence। উদাহরণ হিসেবে

$$a_n = 3a_{n-1} - a_{n-2}$$

বা,

$$a_n = {a_{n-1}}^2 + 2a_{n-2} + 5a_{n-3}$$

এই সমীকরণ, যেটা সিকুয়েন্সে পদগুলোর মধ্যে সম্পর্ক প্রকাশ করে তাকে Recurrence relation বলে। এই বইয়ে আমরা linear homogenous recurrence relation নিয়ে কাজ করব। Linear মানে হলো সমীকরণটায় কোনো পদের power বা ঘাত এক এর বেশি হবে না আর homogenous হলো সমীকরণে কোনো সংখ্যা বা constant আলাদাভাবে যোগ আকারে থাকবে

না। এই ধরনের সমীকরণের সাধারণ রূপ হলো

$$a_n = \sum_{i=1}^{k} c_i a_{n-i} = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} \cdots c_k a_{n-k}$$

যেখানে, k হলো order। এই order জিনিসটা আবার কী? দেখ আমাদের উদাহরণের প্রথম সমীকরণটায় a_n বের করতে আগের দুইটা পদ জানা প্রয়োজন। আবার দ্বিতীয় উদাহরণে আগের তিনটা পদ দরকার। এদের order হলো যথাক্রমে 2 আর 3। তাহলে একটা recursive sequence এ একটা পদ নির্ণয় করতে আগের যত তম পদ পর্যন্ত জানা প্রয়োজন সেটাই order। $a_n = a_{n-1} - 2a_{n-2} + 5$ এ order 2। আবার $a_n = 4a_{n-1} + a_{n-3}$ এ order 3, কারণ এখানে দুইটা পদের ওপর a_n নির্ভরশীল হলেও আসলে আমাদের আগের তৃতীয় পদ a_{n-3} পর্যন্ত জানা দরকার।

একটা recursive sequence এর order k হলে, শুরুতে $a_0, a_1, \cdots a_k$ পর্যন্ত পদগুলোর মান দেয়া থাকে। একে initial condition বলে। Recursive সিকুয়েন্সের সমস্যাগুলোতে সাধারণত যে relation দেয়া থাকে সেটাকে আরেকটা সমীকরণে প্রকাশ করা হয় যেন পদগুলো আগের পদের ওপর নির্ভরশীল না থাকে। এটাকে closed form বলা হয়।

§ ৩.৩ Charatersitic Polynomial

একটি এক order এর লিনিয়ার রিকারেন্স রিলেশন দেখতে হবে এমন -

$$x_n = a x_{n-1}$$

এখন এর পদগুলো কেমন হতে পারে সেটা বের করার চেষ্টা করা যাক।

$$x_1 = a x_0, \quad x_2 = a x_1 = a^2 x_0, \quad x_3 = a x_2 = a^3 x_0$$

দেখা যাচ্ছে যে প্রত্যেক পদ $x_n = a^n x_0$ আকারের। তাহলে এর একটি সমাধান হবে $x_n = a^n$। এটা দেখে আমরা এখন মনে করতে পারি দুই

order এর লিনিয়ার রিকারেন্স রিলেশন $x_n = a_1x_{n-1} + a_2x_{n-2}$ এর সমাধানও কি r^n আকারের কিছু হতে পারে? চল $x_n = r^n$ সমীকরণটায় বসিয়ে দেখা যাক।

$$r^n = a_1r^{n-1} + a_2r^{n-2}$$
$$\implies r^2 - a_1r - a_2 = 0$$

এখন দেখ এই সমীকরণটার দুইটা বাস্তব সমাধান পাওয়া যাবে, তার মানে আসলেই এমন r^n পাওয়া সম্ভব। এই সমীকরণকেই রিকারেন্স রিলেশনটির Characteristic polynomial বলা হয়। k order এর একটি সিকুয়েন্স $x_n = a_1x_{n-1} + a_2x_{n-2} + \cdots a_kx_{n-k}$ এর characteristic polynomial হবে -

$$r^k - a_1r^{k-1} - a_2r^{k-2} \cdots - a_k = 0$$

কিন্তু দুই order এর রিকারেন্সেও কি প্রতি পদ এক order এর রিকারেন্স রিলেশনের মতো $x_n = a^nx_0$ আকারের হবে, যেখানে $x_n = a^n$ সমাধান? একটা উদাহরণ দিয়ে দেখা যাক। মনে কর একটা সিকুয়েন্স $\{x_n\}$ দেয়া আছে যেখানে $x_0 = 3, x_1 = 4$ আর,

$$x_n = 4x_{n-1} - 3x_{n-2} \qquad (1)$$

x_n কে closed form এ প্রকাশ করতে হবে।

এই সিকুয়েন্সের characteristic পলিনমিয়াল হবে $r^2 - 4r + 3$ বা $(r-1)(r-3)$। তাহলে এর মূলগুলো হলো $r_1 = 1, r_2 = 3$। এখন (1) এ $x_n = c_11^n$ অথবা $x_n = c_23^n$ বসালে সমীকরণটি সিদ্ধ হয়, কিন্তু যে initial condition দুটি দেয়া আছে তা এই দুটির কোনোটি দিয়েই একসাথে পাওয়া যায় না। ($x_n = c_11^n$ হলে $a_0 = c_1 = 3, a_1 = c_1 = 3$। আবার $a_n = c_23^n$ হলে $a_0 = c_2 = 3, a_1 = 3c_2 = 9$)। কিন্তু এই দুটিকে একসাথে করে যদি $a_n = c_11^n + c_23^n$ বসাই তাহলে সমীকরণটি সিদ্ধ হয় আর initial condition দুটি থেকে c_1, c_2 এর মান বের করা যায় যেটা ব্যবহার করে পরের পদগুলোও বের করা সম্ভব। এই উদাহরণটিতে $a_0 = c_1 + c_2 = 3$ ও $a_1 = c_1 + 3c_2 = 4$ থেকে পাওয়া যায়

$c_1 = \frac{5}{2}, c_2 = \frac{1}{2}$। এই মানগুলো ব্যবহার করে পাই $a_2 = 7$ যা (1) থেকেও পাওয়া যায়।

থিওরেম ৩.১

r_1, r_2 যদি একটি দুই order এর লিনিয়ার রিকারসিভ সিকুয়েন্স $x_n = a_1x_{n-1} + a_2x_{n-2}$ এর characteristic polynomial এর দুটি মূল হয়, $(r_1 \neq r_2)$, তাহলে ঐ সিকুয়েন্সের প্রতি পদের closed form হবে -

$$x_n = c_1r_1^n + c_2r_2^n$$

Order দুই এর চেয়ে বেশি হলেও একই ভাবে closed form বের করা যায়।

থিওরেম ৩.২

একটি k order এর লিনিয়ার রিকারেন্স $x_n = a_1x_{n-1} + a_2x_{n-2} + \cdots a_kx_{n-k}$ এর characteristic পলিনমিয়াল এর মূলগুলো যদি $r_1, r_2, \cdots, r_k$ হয়, তাহলে সিকুয়ান্সটির পদগুলোর closed form -

$$x_n = c_1{r_1}^n + c_2{r_2}^n + \cdots c_k{r_k}^n$$

যেখানে $c_1, c_2, \cdots, c_k$ এর মান $x_0, x_1, \cdots, x_{k-1}$ থেকে নির্ণয় করা হয়।

খেয়াল কর, প্রথম থিওরেমটায় আমরা বলে দিয়েছি যে দুটি মূল একই হতে পারবে না। কিন্তু কোনো কোনো সময় তো characterstic polynomial টা একটা বর্গও হতে পারে। সেক্ষেত্রে মূল দুটিও একই আসবে। এরকম অবস্থায় closed form টা একটু আলাদা হবে ।

থিওরেম ৩.৩

একটি দুই order এর লিনিয়ার রিকারসিভ সিকুয়েন্সের একটি মূল, r থাকলে closed form হবে -

$$x_n = c_1 r^n + c_2 n r^n$$

এটা দেখার পর আবারো আরেকটা কথা মাথায় আসে। যদি k order এর characteristic polynomial এ একটা মূল একাধিকবার থাকে! মনে কর r_i মূলটি m বার আছে। এক্ষেত্রে ক্লোজড ফর্মটি হবে এমন

$$x_n = c_1 {r_1}^n + c_2 {r_2}^n + \cdots + c_i {r_i}^n + c_{i+1} n {r_i}^n + c_{i+2} n^2 {r_i}^n + \cdots + c_{i+m-1} n^{m-1} {r_i}^n + \cdots + c_n {r_j}^n$$

কিন্তু এটা দেখতে এত জটিল কেন! আসলে ধৈর্য ধরে দেখলে আগের থিওরেমেরই বিস্তারিত রূপ এটা। যে মূলটি যতবার থাকবে প্রতিবার তার সাথে n এর পাওয়ার গুণ হবে আর এই পাওয়ার আগের পদের চেয়ে এক বেশি হবে। বুঝতেই পারছ যদি একাধিক মূল একাধিকবার থাকে তাহলে প্রতিটির বেলায়ই এমনভাবেই n এর পাওয়ার গুণ হবে।

এবার লিনিয়ার রিকারেন্স সমাধানের কিছু উদাহরণ দেখা যাক। আমরা শুরু করব সবচেয়ে পরিচিত উদাহরণ - ফিবোনাচ্চি সিকুয়েন্স দিয়ে।

উদাহরণ ৩.৬

ফিবোনাচ্চি সিকুয়েন্স এর পদগুলো $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ আকারের এবং $F_0 = 0, F_1 = 1$। এর প্রতি পদের closed form বের কর।

সমাধান:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \implies F_n - F_{n-1} - F_{n-2} = 0$$

সুতরাং এর characteristic polynomial হবে -

$$r^2 - r - 1 = 0$$

Quadratic ইকুয়েশন ব্যবহার করে এর দুটি মূল পাওয়া যায়, $r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$। এখন প্রথম থিওরেমটি থেকে আমরা বলতে পারি closed formটি হবে এমন

$$F_n = c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \qquad (1)$$

এখন আমরা initial condition দুটি ব্যবহার করে c_1, c_2 এর মান বের করব।

$$F_0 = 0 \implies c_1 + c_2 = 0$$

এবং,

$$F_1 = 1 \implies c_1 r_1 + c_2 r_2 = 1$$

এই দুটি সমীকরণ সমাধান করে পাওয়া যাবে $c_2 = \frac{-1}{\sqrt{5}}$ এবং $c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$ এদের মান (1) এ বসিয়ে পাবো

$$\begin{aligned} F_n &= \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \\ &= F_n = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)(r_1^n - r_2^n) \\ &= \frac{r_1^n - r_2^n}{r_1 - r_2} \end{aligned}$$

■

উদাহরণ ৩.৭

$\{x_n\}$ সিকুয়েন্সটির closed form বের কর।

$$x_n = 5x_{n-1} - 8x_{n-2} + 4x_{n-3}$$

এবং, $x_0 = 1, x_1 = 3, x_2 = 11$

সমাধান: এই রিকারেন্স রিলেশনের characteristic polynomial হবে -

$$r^3 - 5r^2 + 8r - 4 = 0 \implies (r-1)(r-2)^2 = 0$$

অর্থাৎ এর মূলগুলো হলো (1,2,2)। আমরা আগে দেখেছি একটি মূল একাধিকবার থাকলে তারসাথে n এর ঘাত গুণ হয়। তাহলে ক্লোজড ফর্মটি হবে এমন

$$x_n = c_1 2^n + c_2 n 2^n + c_3 1^n \qquad (1)$$

এখন initial condition গুলো ব্যবহার করে পাই

$$c_1 + c_3 = 1$$
$$2c_1 + 2c_2 + c_3 = 3$$
$$4c_1 + 8c_2 + c_3 = 11$$

এই তিনটি সমীকরণ সমাধান করে পাওয়া যাবে $c_1 = -2, c_2 = 2, c_3 = 3$। এখন এই মানগুলো (1) এ বসালে আমরা closed form টি পেয়ে যাবো। আর সেটা হলো -

$$c_n = (n-1)2^{n+1} + 3$$

■

প্রায় Homogenous

কিছু কিছু রিকারেন্স রিলেশন দেখতে প্রায় homogenous হয়। যেমন $x_n = 2x_{n-1} - x_{n-2} + 8$। এখানে শেষে 8 একটি constant হওয়ায় এটা homogenous না। এসব ক্ষেত্রে রিলেশনটিকে homogenous করে নিয়ে তারপর সমাধান করা হয়। একটা উদাহরণ দিয়ে বিষয়টা দেখা যাক।

উদাহরণ ৩.৮

$x_n = 4x_{n-1} - 3x_{n-2} + 2$ এবং $x_0 = 1, x_1 = 5$ হলে এর closed form বের কর।

সমাধান: দেয়া আছে $x_n = 4x_{n-1} - 3x_{n-2} + 2$। তাহলে আমরা লিখতে পারি $x_{n-1} = 4x_{n-2} - 3x_{n-3} + 2$। এখন প্রথম সমীকরণটি থেকে পরেরটা বিয়োগ করলে পাওয়া যায়

$$x_n = 5x_{n-1} - 7x_{n-2} + 3x_{n-3}$$

এখন দেখ, এই রিলেশনটা homogenous। এর characteristic polynomial বের করে আগের মতই এর সমাধান করা সম্ভব। এর characteristic polynomial হবে -

$$r^3 - 5r^2 + 7r - 3 = (x-1)^2(x-3) = 0$$

তাহলে এর closed form হবে -

$$x_n = c_1 1^n + c_2 n 1^n + c_3 3^n$$

এটা আর initial condition গুলো থেকে পাওয়া যায় -

$$\begin{aligned} c_1 + c_3 &= 1 \\ c_1 + c_2 + 3c_3 &= 5 \\ c_1 + 2c_2 + 9c_3 &= 19 \end{aligned}$$

এগুলো সমাধান করে পাওয়া যায় $c_1 = -\frac{3}{2}, c_2 = -1, c_3 = \frac{5}{2}$। সুতরাং,

$$x_n = \frac{5 \cdot 3^n - 2n - 3}{2}$$

■

§ ৩.৪ সিকুয়েন্সের কিছু সমস্যা ও সমাধান

এতক্ষণ আমরা রিকারেন্স সমাধান করা শিখলাম। এখন দেখব কীভাবে রিকারেন্স ব্যবহার করে অন্যান্য সমস্যার সমাধান করা যায়।

উদাহরণ ৩.৯

(USAJMO 2018) প্রত্যেকটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা n এর জন্য কয়টি n অংকবিশিষ্ট ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা আছে যেন-

1. পরপর দুটি অংক কখনই একই হবে না,
2. এককের ঘরের অংকটি মৌলিক হবে।

সমাধান: আগে n এর কয়েকটা ছোট মান নিয়ে চেষ্টা করে দেখা যাক দরকারি কিছু পাওয়া যায় কিনা। প্রথমত 0 টি অংকবিশিষ্ট এমন সংখ্যা নিশ্চয়ই 0 টা। আর এক অংকবিশিষ্ট এমন সংখ্যা হবে 4টি - $(2,3,5,7)$। এবার দুই অংকের এমন সংখ্যা বের করতে হলে এই চারটি অংকের পরে আরেকটি অংক বসালেই হয় যেন সেটা এই চারটির সমান বা 0 না হয়। এমন অংক তাহলে 5 টি। সুতরাং দুই অংকের সংখ্যা পাওয়া যাবে $5 \cdot 4 = 20$ টি।

এখানে আমরা দেখতে পাচ্ছি $n-1$ অংকবিশিষ্ট সংখ্যার উপর n টি অংকের কয়টি সংখ্যা পাওয়া যাবে তা নির্ভর করে। সুতরাং এটা ব্যবহার করে একটি রিকারসিভ রিলেশন বানানোর চেষ্টা করা যেতে পারে।

ধরে নেই a_n হচ্ছে যতটি n অংকবিশিষ্ট সংখ্যা পাওয়া যাবে তার মান। এখন দেখ $n-1$ অংকবিশিষ্ট প্রত্যেকটি সংখ্যা যা শর্তগুলো মেনে চলে তার বামে 0 ও ঐ সংখ্যটির শেষের অংক বাদে বাকি 8 টি অংক বসানো যাবে। তাহলে $a_n = 8a_{n-1}$। যদি মনে কর এখানেই শেষ তাহলে কিন্তু ভুল!

একটা কেস এখনো গুনিনি আমরা। সেটা হলো n অংকবিশিষ্ট একটি সংখ্যার শেষের আগের অংকটি যদি 0 হয়। এই কেসটা আমরা আগের বার বাদ দিয়ে ফেলেছি কারণ সেখানে আমরা $n-1$ অংকবিশিষ্ট সংখ্যাগুলোর শেষ অংক 0 বাদে গণনা করেছি। এক্ষেত্রে শেষের অংকটি 0 বাদে বাকি 9 টির যেকোনো কিছু হতে পারে। এই দুই কেসকে একত্র করে তাহলে আমরা পাই $a_n = 8a_{n-1} + 9a_{n-2}$। আর এই রিলেশনটাই আমরা খুঁজছিলাম! এটা সমাধান করলেই আমাদের সমস্যাটা সমাধান হয়ে যাবে।

এতক্ষণ যেহেতু তোমরা বেশ কয়েকটা রিকারেন্স সমাধান করা দেখেছ, এখন তোমাদের পালা একটু হাত লাগানোর। এই সমাধান শেষ করার দায়িত্ব তাই তোমাদের ওপর ছেড়ে দেওয়া হলো। ব্যাপারটা খানিকটা সহজ করার জন্য বলে দেই, এর closed form টা হবে $\frac{2}{5}(9^n - (-1)^n)$। ■

এবার আরেকটা উদাহরণ দেখা যাক। এই সমস্যাটি সমাধানের মেইন আইডিয়া হলো দুটি সিকুয়েন্সের closed বা general form কে যদি সমান প্রমাণ করতে হয় তাহলে আমরা এদের রিকারসিভ রিলেশন দুটি ও initial condition গুলো সমান দেখানোর চেষ্টা করতে পারি।

উদাহরণ ৩.১০

প্রমাণ কর যে, $5|F_n - 2n3^n$ ।

সমাধান: আমাদের দেখাতে হবে যে $F_n \equiv 2n3^n \pmod 5$। আমরা জানি $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$। তাই এখন আমরা দেখাতে চাই যে $2n3^n$ কে একটি সিকুয়েন্সের পদ ধরলে তার রিকারসিভ রিলেশনটি ফিবোনাচ্চি এর রিলেশনের মতই হবে।

ধরে নেই $a_n = 2n3^n$। এখন এটাকে একটি 2 order এর সিকুয়েন্সের closed form এর সাথে তুলনা করে দেখি। এখানে n গুণ আকারে আছে আর n ছাড়া কোনো পদ নেই। আমরা ধরে নিতে পারি এখানে $c_1 = 0$ আর $c_2 = 2$ এবং এর characteristic পলিনমিয়ালের মূল দুটি একই অর্থাৎ (3,3)। সুতরাং পলিনমিয়ালটি হবে $(r-3)^3 = r^2 - 6r + 9$। তাহলে আমরা বলতে পারি

$$a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2} \implies a_n \equiv a_{n-1} + a_{n-2} \pmod 5$$

আমরা দেখাতে পেরেছি যে দুটি সিকুয়েন্সেরই রিকারসিভ রিলেশন একই। বাকি আছে এদের initial condition গুলো সমান দেখানো। এটা কিন্তু অনেক দরকারি কারণ initial condition এক না হলে আমরা কখনই বলতে পারব না যে mod 5 এ সিকুয়েন্স দুটি একই। এই অংশটা অনেক সহজ। $F_0 = a_0 = 0$ এবং $F_1 = a_1 = 1$। আমাদের প্রমাণ তাহলে এখানেই শেষ। ☺ ■

উদাহরণ ৩.১১

(Romania TST 2003) $(a_n)_{n\geq 1}$ একটি সিকুয়েন্স যেখানে $a_1 = \frac{1}{2}$ এবং

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2}{a_n^2 - a_n + 1}$$

প্রমাণ কর যে, প্রতিটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা n এর জন্য $a_1 + a_2 + \cdots + a_n < 1$।

সমাধান: এখানে যে রিকারসিভ রিলেশনটি দেয়া আছে, সেটা বেশ জটিল। এখানে a_n^2 লব হিসেবে না থেকে যদি হর হিসেবে থাকত, তাহলে আমাদের জন্য কাজ করা বেশি সহজ হয়ে যেত, কারণ তখন রিলেশনটাকে $1-\frac{1}{a_n}+\frac{1}{a_n^2}$ এই আকারে লেখা যেত।

তাই আমরা এবার আরেকটা সিকুয়েন্স বানিয়ে নেব যার প্রতি পদ হবে $b_n = \frac{1}{a_n}$। সুতরাং আমরা এবার মূল রিলেশনটা থেকে পাব,

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &= \frac{a_n^2}{a_n^2 - a_n + 1} \\
\implies \frac{1}{b_{n+1}} &= \frac{\frac{1}{b_n^2}}{\frac{1}{b_n^2} - \frac{1}{b_n} + 1} \\
\implies b_{n+1} &= b_n^2 - b_n + 1 \\
\implies b_n &= \frac{b_{n+1} - 1}{b_n - 1} \qquad (1)
\end{aligned}$$

এটা দেখে আমাদের মাথায় টেলিস্কোপিং আসার কথা। তাহলে প্রতিটি পদকে গুণ করে ফেললে সেগুলো কাটাকাটি হয়ে যায়। অর্থাৎ,

$$\begin{aligned}
b_1 \cdot b_2 \cdots b_{n-1} \cdot b_n &= \frac{b_2 - 1}{b_1 - 1} \cdot \frac{b_3 - 1}{b_2 - 1} \cdots \frac{b_{n+1} - 1}{b_n - 1} \\
\implies b_{n+1} &= (b \ - 1)(b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdots b_{n-1} \cdot b_n) + 1 \\
\implies b_{n+1} &= b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdots b_{n-1} \cdot b_n + 1 \qquad [b_1 - 1 = 1] \\
\implies \frac{1}{b_n} &= \frac{b_n - 1}{b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdots b_{n-1} \cdot b_n} \\
\implies \frac{1}{b_n} &= \frac{1}{b_1 b_2 \cdots b_{n-1}} - \frac{1}{b_1 b_2 \cdots b_n}
\end{aligned}$$

এবার আমরা আবারো টেলিস্কোপিং ব্যবহার করতে পারি। সেটা করলে আমরা পাব,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \cdots + \frac{1}{b_n} = &\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_1} - \frac{1}{b_1 b_2} + \frac{1}{b_1 b_2} - \frac{1}{b_1 b_2 b_3} + \\
&\cdots + \frac{1}{b_1 b_2 \cdots b_{n-1}} - \frac{1}{b_1 b_2 \cdots b_n}
\end{aligned}$$

$$\implies \frac{1}{b_1}+\frac{1}{b_2}+\cdots+\frac{1}{b_n} = 1-\frac{1}{b_1b_2\cdots b_n}$$
$$\implies a_1+a_2+\cdots+a_n = 1-a_1a_2\cdots a_n$$

শেষের সমীকরণটা থেকেই আমরা বুঝতে পারছি যেহেতু 1 থেকে পদগুলোর গুণফল বিয়োগ করা হয়েছে, তাই $a_1+a_2+\cdots+a_n<1$। ■

উদাহরণ ৩.১২

(BMO 2023) মনে কর $n\geq 1$ একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা। $f(n)$ হলো এমন লিস্টের সংখ্যা যার শুরুতে 1 আর শেষে n থাকবে এবং লিস্টের প্রত্যেকটি সংখ্যা তার আগের সংখ্যা দ্বারা নিঃশেষে বিভাজ্য হবে। যেমন : $n=6$ হলে এমন লিস্ট গুলো হলো $(1,6),(1,2,6),(1,3,6)$ অর্থাৎ, $f(6)=3$। প্রমাণ করো যে সকল পূর্ণসংখ্যা $N\geq 1$ এর জন্য একটি সংখ্যা $n\geq 1$ পাওয়া যাবে যাতে N, $f(n)$ কে নিঃশেষে ভাগ করে।

সমাধান: আমরা আমাদের গোল্ডেন রুল দিয়ে শুরু করব। আর সেটা হচ্ছে বিভিন্ন মান নিয়ে পরীক্ষা করে দেখা। একটা সুবিধাজনক সংখ্যা যার বেশ কয়েকটা উৎপাদক আছে তাকে n ধরে দেখা যাক[২]। $n=36$ এর জন্য একটা লিস্ট হলো $(1,3,6,18,36)$। এখন দেখ $3\mid 6$ আবার $6\mid 18$। তাহলে এটা থেকে আমরা বুঝতে পারছি যে কোনো লিস্টের 1 এর পর যে সংখ্যাটি থাকে সেটি যদি k হয় তবে k থেকে n পর্যন্ত লিস্টের প্রত্যেকটি সংখ্যা k দ্বারা বিভাজ্য।

এবার দেখ, k থেকে n পর্যন্ত প্রতিটি সংখ্যা যদি k দিয়ে বিভাজ্য হয়, তাহলে আমরা তাদেরকে k দিয়ে ভাগ করে দিয়ে দেখতে পারি। আমাদের উদাহরণটায় লিস্টের সংখ্যাগুলোকে 3 দিয়ে ভাগ করে দিলে পাই $(1,1,2,6,12)$। খেয়াল করে দেখ এটায় কিন্তু $(1,2,6,12), n=12$ এর জন্য একটা লিস্ট। সুতরাং আমরা যদি k থেকে n পর্যন্ত লিস্টটিকে L_1 বলি এবং L_1 এর প্রত্যেকটি সংখ্যাকে k দ্বারা ভাগ করে দেই তবে L_1 এমন একটি লিস্টে পরিণত হয় যার প্রথম সংখ্যা 1 শেষ সংখ্যা $\frac{n}{k}$ এবং প্রত্যেকটি সংখ্যা তার আগের সংখ্যা দ্বারা বিভাজ্য। অর্থাৎ তা $\frac{n}{k}$ এর একটি লিস্টে পরিণত হয়। এবং এই প্রক্রিয়াটি বিপরীত দিকেও কাজ করে। আমরা যদি $\frac{n}{k}$ এর একটি লিস্ট নিয়ে তার

[২]এমন সংখ্যাকে Highly composite number বলে।

প্রত্যেকটি পদকে k দ্বারা গুণ করে শুরুতে 1 বসিয়ে দেই তবে তা একটি n এর লিস্টে পরিণত হবে যার ২য় সংখ্যা k। এর থেকে আমরা এটা বলতে পারি যে এমন n এর লিস্ট যাতে k ২য় সংখ্যা তাদের সংখ্যা $f(\frac{n}{k})$। এখন k যেহেতু n এর যেকোনো উৎপাদক তাই আমরা বলতে পারি,

$$f(n) = \sum_{d|n} f(d) \qquad (1)$$

অর্থাৎ $f(n)$ হলো এমন সব $f(d)$ এর যোগফল যেখানে d হলো n এর একটি উৎপাদক। এবার কোন ধরনের সংখ্যা আর লিস্ট নিয়ে কাজ করা সবচেয়ে সুবিধাজনক হবে? অবশ্যই কোনো একটা মৌলিক সংখ্যার ঘাত। যেমন আমরা যদি $n = 2^k$ বসাই তবে এর উৎপাদকগুলো হবে $1, 2, \cdots 2^{k-1}$। অর্থাৎ,

$$f(2^k) = f(1) + f(2) + \cdots + f(2^{k-1})$$

যেখানে $k \geq 1$ এবং $f(1) = 1$। এবার আমরা ইনডাকশন ব্যবহার করে বলতে পারি যে, $f(2^k) = 2^{k-1}$ যেখানে $k \geq 1$। একইভাবে আমরা অন্য মৌলিক সংখ্যা এর যেকোনো ঘাতের জন্য ও $f(n)$ এর মান বের করতে ফেলতে পারব। এবার যদি আমরা দুটি ভিন্ন মৌলিক সংখ্যা থাকলে কী হবে তা দেখা যাক। আমরা জানি $f(2 \cdot 3) = 3, f(2^2 \cdot 3) = 8$। এখন,

$$f(3 \cdot 2^k) = \sum_{i=0}^{k} f(2^i) + \sum_{i=0}^{k-1} f(3 \cdot 2^i) \qquad (2)$$

এবং,

$$f(3 \cdot 2^{k-1}) = \sum_{i=0}^{k-1} f(2^i) + \sum_{i=0}^{k-2} f(3 \cdot 2^i) \qquad (3)$$

(2) হতে আমরা পাই,

$$f(3 \cdot 2^k) = \sum_{i=0}^{k} f(2^i) + \sum_{i=0}^{k-1} f(3 \cdot 2^i)$$

$$= \sum_{i=0}^{k-1} f(2^i) + \sum_{i=0}^{k-2} f(3 \cdot 2^i) + f(2^k) + f(3 \cdot 2^{k-1})$$

এখানে শেষ লাইনে (3) থেকে মান বসালে আমরা পাই,

$$f(3 \cdot 2^k) = 2f(3 \cdot 2^{k-1}) + f(2^k) = 2f(3 \cdot 2^{k-1}) + 2^{k-1}$$

এবার $f(3 \cdot 2^n) = a_n$ ধরলে আমরা পাই,

$$a_n = 2a_{n-1} + 2^{n-1}$$

আবার,

$$2a_{n-1} = 2(2a_{n-2} + 2^{n-2}) = 4a_{n-2} + 2^{n-1}$$

আগের ইকুয়েশন থেকে এটিকে বিয়োগ করলে পাই, $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}$। এর characteristic পলিনমিয়াল হবে, $r^2 - 4r + 4 = (r-2)^2$। যার মূল দুটি হলো, $(2,2)$। অর্থাৎ এর closed form হবে,

$$a_n = c_1 2^n + c_2 n 2^n$$

এখন, $f(3) = a_0 = 1, f(6) = a_1 = 3$, মানগুলো বসিয়ে আমরা পাই, $c_1 = 1, c_2 = \frac{1}{2}$। এর থেকে আমরা পাই, $a_n = f(3 \cdot 2^n) = 2^n + n2^{n-1}$। এখন তোমাদের মনে হতে পারে এভাবে সব মৌলিকের জন্য বের করতে করতে তো সারাজীবন পার হয়ে যাবে। কিন্তু আমাদের প্রশ্নে তো $f(n)$ এর মান বের করতে বলেনি। সকল N এর জন্য এমন $n \geq 1$ খুঁজে বের করতে বলেছে যাতে $N \mid f(n)$ হয়। এখন,

$$\begin{aligned} f(3 \cdot 2^{N-2}) &= 2^{N-2} + (N-2)2^{N-3} \\ &= 2^{N-3}(N-2+2) \\ &= N2^{N-3} \end{aligned}$$

অর্থাৎ, N এর জন্য $n = 3 \cdot 2^{N-2}$ ই সেই সংখ্যা যাতে $N \mid f(n)$ হয়। ■

উদাহরণ ৩.১৩

টম আর জেরি একটা গেইম খেলছে। একটি রাউন্ড শেষে টম জিতলে সে জেরির কাছ থেকে একটি চিজের টুকরা নিয়ে নিবে যার সম্ভাবনা হলো p আর হেরে গেলে সে জেরিকে একটি চিজের টুকরা দিবে, যার সম্ভাবনা $q = 1 - p$। একইভাবে জেরির জিতে চিজ পাওয়ার সম্ভাবনা $q = 1 - p$ আর হেরে গিয়ে চিজের টুকরা হারানোর সম্ভাবনা p। মনে কর শুরুতে টমের কাছে চিজের টুকরা ছিল i টি আর জেরির কাছে ছিল $N - i$ টি। তাদের কারো কাছে থাকা চিজ শেষ হয়ে গেলে গেমটি শেষ হয়ে যাবে। সেক্ষেত্রে যে গেমটি জিতেছে তার কাছে মোট N টি চিজের টুকরা থাকবে। টমের কাছে i টি চিজ থাকলে তার গেমটি জেতার সম্ভাবনা p_i বের কর।

সমাধান: প্রথমে দেখেই বোঝা যায় না যে এটা কীভাবে সমাধান করা যেতে পারে। তাহলে চল আমরা পুরো গেইমের কথা না ভেবে শুধু একটি রাউন্ডের কথা ভাবি। ধর টম প্রথম রাউন্ড জিতল। তাহলে তার কাছে এখন $i + 1$ টি চিজ আছে। এখান থেকে তার বাকি গেইমটি জেতার সম্ভাবনা তাহলে p_{i+1}। একইভাবে সে প্রথম রাউণ্ডটি যদি হেরে যায়, তার বাকি গেইম জেতার সম্ভাবনা হবে p_{i-1}। তার মানে p_i আসলে p_{i+1} বা p_{i-1} এর উপর নির্ভর করবে। প্রথম রাউণ্ড জিতলে তার পুরো গেইম জেতার সম্ভাবনা হবে $p_{i+1} \cdot p$ আর হেরে গেলে পুরো গেইম জেতার সম্ভাবনা হবে $p_{i-1} \cdot p$। এই দুটোকে এক করে পাই,

$$p_i = p_{i+1} \cdot p + p_{i-1} \cdot p \implies pp_{i+1} = p_i - (1 - p)p_{i-1}$$

সুতরাং আমরা একটা রিকারসিভ রিলেশন পেয়ে গেলাম! এখন দেখ এটার order 2। সুতরাং এই রিলেশনটি সমাধান করতে হলে আমাদের কমপক্ষে দুটি সম্ভাবনার মান জানা প্রয়োজন। টমের কাছে যদি কোনো চিজই না থাকে তার মানে সে আসলে শুরুতেই হেরে গিয়েছে, তাহলে তার জেতার সম্ভাবনা $p_0 = 0$। আবার যদি তার কাছে N টি চিজ থাকে তার মানে সে শুরুতেই জিতে গিয়েছে। সুতরান $p_N = 1$।

রিকারসিভ রিলেশনটির characteristic polynomial হবে

$$pr^2 - r - (1 - p) = 0 \implies (r - 1)(pr + r - 1) = 0$$

এর দুটি মূল হবে $r_1 = 1, r_2 = \frac{1-p}{p} = \frac{q}{p}$। p আর q যদি সমান না হয় তাহলে আমরা লিখতে পারি,

$$p_i = c_1 1^n + c_2 \left(\frac{q}{p}\right)$$

p_0, p_N এর মান থেকে আমরা বের করতে পারব

$$p_i = \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^i}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^N}$$

$p = q = \frac{1}{2}$ হলে পলিনমিয়ালটির একটাই মূল হবে $r_1 = 1$। সেক্ষেত্রে

$$p_i = c_1 + c_2 \cdot i \implies p_i = \frac{i}{N}$$

অর্থাৎ,

$$p_i = \begin{cases} \frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^i}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^N}, \ p \neq \frac{1}{2} \\ \frac{i}{N}, \ p = \frac{1}{2} \end{cases}$$

■

এ তো গেলো টম আর জেরির চিজের টুকরার খেলা। তোমরা নিশ্চয়ই কখনো না কখনো শুনেছ কেউ জুয়া খেলে প্রচুর টাকা হারিয়েছে। এর পেছনেও আছে এই সম্ভাবনাটিরই হাত। ধরে নিলাম জনৈক ব্যক্তি একটি ক্যাসিনোতে গিয়েছে জুয়া খেলতে। ফেয়ারপ্লে এর খাতিরে আমরা ধরেও নিলাম যে তার জেতার সম্ভাবনা $p = \frac{1}{2}$। তাহলে আমাদের দ্বিতীয় কেইস অনুসারে তার টাকা যেতার সম্ভাবনা $\frac{i}{N}$। যেখানে i হচ্ছে ঐ ব্যক্তির কাছে থাকা টাকা আর N হলো ক্যাসিনোর টাকা। সাধারণত একটা ক্যাসিনোতে একজন ব্যক্তির তুলনায় অনেক বেশি টাকা থাকে। তাহলে তো বুঝতেই পারছ, এক্ষেত্রে N, i এর চেয়ে অনেক বড় আর জুয়া খেলে টাকা জেতার সম্ভাবনা বেশ কম।

কিন্তু যদি ঐ ব্যক্তি বড়লোক হয়? ধরে নিলাম তার আর ক্যাসিনোর টাকা প্রায় সমান অর্থাৎ $\frac{N}{2}$। সেক্ষেত্রেও আসলে তার পক্ষে টাকা পাওয়া কঠিন, কারণ

ক্যাসিনোর গেইমগুলো বানানোই হয় এমনভাবে যেন যে খেলছে তার জেতার সম্ভাবনা কম হয়। সুতরাং $p < \frac{1}{2}$। এখন প্রথম কেইসটা থেকে আমরা বলতে পারি,

$$\begin{aligned} p_i &= \frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^i}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^N} \\ &= \frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{N}{2}}}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{N}{2}}} \\ &\approx \frac{1}{\left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{N}{2}}} \to 0 \quad \text{যখন } N \text{ অনেক বড় হয়ে যাবে!} \end{aligned}$$

তাহলে ঐ ব্যক্তি আসলে যতই খেলবে ততই তার টাকা পাওয়ার সম্ভাবনা কমে উল্টো টাকা হারানোর সম্ভাবনা বাড়বে। সুতরাং জুয়া যেমনই অনৈতিক, তেমনই গাণিতিক ভাবেও দেখা গেল এতে টাকা আয় প্রায় অসম্ভব।

এবার আমরা এমন উদাহরণ দেখব যেগুলোতে রিকারশন ছাড়াও অন্যান্য পদ্ধতি কাজে লাগে।

উদাহরণ ৩.১৪

(EGMO 2020) $a_1, a_2, \cdots, a_{3030}$ ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা যারা নিচের রিলেশনটাকে মেনে চলে

$$2a_{n+2} = a_{n+1} + 4a_n \text{ যেখানে, } n = 0, 1, 2, \ldots, 3028$$

প্রমাণ করো যে, $a_1, a_2, \cdots, a_{3030}$ এর মধ্যে কমপক্ষে একটি 2^{2020} দিয়ে বিভাজ্য হবে।

সমাধান: এখানে একটা রিকারসিভ রিলেশন দেখে আমরা সুন্দরমতো এর সমাধান করা শুরু করতে পারি। কিন্তু শেষে গিয়ে দেখবে আর এগোতে পারছ না। কারণ আমরা initial condition-ই জানি না! তাহলে একটু অন্যভাবে চিন্তা করে দেখি কিছু পাওয়া যায় কিনা।

সবার আগে, এই রিলেশনটা থেকে বলা যায় যেকোনো $0 \leq i \leq 3028$ এর জন্য,

$$a_{i+1} = \frac{a_i}{2} + 2a_{i-1}$$

যেহেতু a_{i+1}, a_{i-1} ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা, $\frac{a_i}{2}$- কেও পূর্ণসংখ্যা হতে হবে। অর্থাৎ, a_i জোড় সংখ্যা। এখন যদি আমরা এর পরের পদটা নিয়ে চিন্তা করি তাহলে,

$$a_{i+2} = \frac{a_{i+1}}{2} + a_i$$

থেকে বলা যায়, a_{i+1} ও জোড় সংখ্যা হবে। এবার একটু ভেবে দেখ, যদি $\frac{a_i}{2}$ বিজোড় হয়, তাহলে কিন্তু a_{i+1} ও বিজোড় হয়ে যাবে বলে $\frac{a_i}{2}$ কেও জোড় হতে হবে। সুতরাং $4|a_i$। এই ধারণাটাকে কাজে লাগিয়ে i এর কয়েকটা ছোট মানের জন্য সিকুয়েন্সটা কেমন হবে দেখা যাক। শুরুতে ধরে নিলাম $i = 1$। তাহলে, উপরে আমরা যেটা বের করেছি, সেখান থেকে বলতে পারব যে $4|a_1$। আবার এটায় আরেকটা পদ a_4 যদি যোগ করি তাহলে আবারও পাব $4|a_2$। তাহলে এভাবে আমরা বলতে পারি যে যেকোনো 3030 এর জন্য শেষের দুই পদ বাদে$a_1, a_2, \cdots, a_{3028}$ সবগুলোই 4 দিয়ে বিভাজ্য হবে।

যেহেতু এরা প্রত্যেকে 4 দিয়ে বিভাজ্য, আমরা নতুন এদের 4 দিয়ে ভাগ করে আরেকটা সিকুয়েন্স বানিয়ে ফেলতে পারি। (এই টেকনিকটা কিন্তু বেশ কাজের!) এই নতুন সিকুয়েন্সের পদগুলোকে $b_i = \frac{a_i}{4}$ আকারে লিখলে সিকুয়েন্সটা হবে $(b_1, b_2, \cdots b_{3028})$।

এখন আমরা দেখাতে চাই, $(a_1, a_2, \cdots a_{3028})$ এর মধ্যে 4^{1010} দিয়ে বিভাজ্য পদ আছে। সেটা করা সম্ভব ইনডাকশন দিয়ে। ধরে নিই $3k + 1$ টি পদযুক্ত সিকুয়েন্স যেটা রিলেশনটি মেনে চলে, তার মধ্যে এমন পদ থাকবেই যেটা 4^k দিয়ে বিভাজ্য। খেয়াল করলে দেখবে যে নতুন সিকুয়েন্সটিও রিলেশনটি মেনে চলে। সুতরাং আমাদের হাইপোথিসিস অনুযায়ী $(b_1, b_2, \cdots b_{3028})$ এর মধ্যে 4^{1009} দিয়ে বিভাজ্য পদ আছে। আর যেহেতু মূল সিকুয়েন্সের পদগুলোকে 4 দিয়ে ভাগ করে এই সিকুয়েন্সটা পাওয়া গিয়েছে, তাই পাওয়া যায় $(a_1, a_2, \cdots, a_{3028})$ এর মধ্যে $4^{1009} \cdot 4 = 2^{2020}$ দিয়ে বিভাজ্য পদ থাকবেই।

■

উদাহরণ ৩.১৫

(EGMO 2022) অসীম সংখ্যক পদবিশিষ্ট একটা সিকুয়েন্স $a_1, a_2, \ldots$ কে "**ভালো**" বলা হবে যদি -

১. a_1 একটি পূর্ণবর্গসংখ্যা হয়, এবং

২. একটি পুর্ণসংখ্যা $n \geq 2$ এর জন্য a_n এমন সবচেয়ে ছোট সংখ্যা যেন -

$$na_1 + (n-1)a_2 + \cdots + 2a_{n-1} + a_n$$

একটি পূর্ণবর্গসংখ্যা হয়

প্রমাণ কর যে, $a_1, a_2, \ldots$ একটি ভালো সিকুয়েন্স হলে এমন একটা ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা পাওয়া যাবে যেন সকল $n \geq k$ এর জন্য $a_n = a_k$ হয়।

সমাধান: প্রথমবার এই প্রশ্নটা পড়ে হয়তো তোমাদের বুঝতে সমস্যা হতে পারে যে আসলে কী প্রমাণ করতে হবে। এখানে যে বিষয়টা দেখাতে হবে সেটা হলো একসময় এই সিকুয়েন্সটা ধ্রুবক হয়ে যাবে। অর্থাৎ কোনো এক k এর জন্য একপর্যায়ে $a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \cdots$ সবগুলোর মান সমান।

প্রথমে $a_1 = 1, 4, 9$ নিয়ে চেষ্টা করে দেখা যাক, সিকুয়েন্সটি কেমন হবে সেটা নিয়ে কোনো ধারণা পাওয়া যায় কিনা। $a_1 = 1, 4$ বসালে দেখবে সিকুয়েন্স দুটি যথাক্রমে a_2 এবং a_3 থেকে ধ্রুবক হয়ে যায়। আবার $a_1 = 9$ বসালেও a_3 থেকে ধ্রুবক হয়ে যায়। এবার তাহলে আরও তথ্য পাওয়ার জন্য যে সমীকরণটা দেওয়া আছে সেটা নিয়ে কিছু করার চেষ্টা করে দেখা যাক।

ধরে নিই, $na_1 + (n-1)a_2 + \cdots + 2a_{n-1} + a_n = x_n^2$। তাহলে,

$$x_{n+1}^2 - x_n^2 = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

হুমমমম $\cdots$ এটা কি কোনো কাজের? আমাদের প্রমাণ করতে হবে সিকুয়েন্সটা একসময় ধ্রুবক হয়ে যাবে। তার মানে কী?

খেয়াল করে দেখ, a_n কে সবচেয়ে ছোট সংখ্যা হতে হবে যেন x_n^2 বর্গ

সংখ্যা হয়। যখন এই সিকুয়েন্সটি ধ্রুবক হয়ে যাবে তখন প্রতি বার এই নির্দিষ্ট ছোট মানটি বসালে যে সংখ্যাটির বর্গ পাওয়া যাবে সেটিও আগের সংখ্যাটির কাছাকাছি হবে। এই কথাটা বুঝতে না পারলে তোমরা $a_1 = 100 = 10^2$ ধরে দেখতে পারো। $a_2 = 25$ বসানোর পর পাওয়া যাবে $x_2 = 15$। অর্থাৎ $x_2 - x_1 = 15 - 10 = 5$ আবার $a_3 = 11$ বসানোর পর পাওয়া যাবে $x_3 = 19$ এবং $x_3 - x_2 = 19 - 15 = 4$। একইভাবে $a_4 = 32, a_5 = 32, x_4 = 23, x_5 = 27$ ইত্যাদি। এখান থেকে কি কিছু খেয়াল করেছ? এখানে প্রতিবার x গুলোর মধ্যে, অর্থাৎ যে সংখ্যার বর্গ পাওয়া যায় তাদের মধ্যে পার্থক্য কমছে। আর যখন সিকুয়েন্সটা ধ্রুবক হয়ে যাচ্ছে, তখন এদের মধ্যে পার্থক্যও আর পরিবর্তন হচ্ছে না। কেন এমনটা হচ্ছে? কারণ আমরা প্রতিবার যথাসম্ভব ছোট একটা সংখ্যা যোগ করছি আর এই ছোট একটা সংখ্যা যোগ করে হুট করে কিন্তু বড় কোনো সংখ্যা পাওয়া সম্ভব না। $a_1 = 4, 9, 16, 25$ ইত্যাদি বসালেও এই একই জিনিস দেখতে পারবে। সুতরাং বলা যায় সিকুয়েন্সটা ধ্রুবক হয়ে গেলে x_n গুলোর মধ্যে পার্থক্যও কমতে কমতে সমান হয়ে যাবে। এটাকে আরও পরিপাটিভাবে লিখলে, সিকুয়েন্সটি ধ্রুবক হবে যদি n এর জন্য নিচের অসমতাটি সত্য হয় -

$$x_{n+1} - x_n \leq x_n - x_{n-1}$$

এই অসমতা থেকে কীভাবে বলতে পারব যে x_n গুলোর মধ্যে পার্থক্য একসময় সমান হয়ে যাবে? এর কারণ হলো x_{n+1} যেহেতু সবসময়ই x_n থেকে বড় হবে, তাই এদের পার্থক্য একটা ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা হবে। সুতরাং এই পার্থক্য কমতেই থাকতে পারবে না (যেহেতু $\mathbb{N}$ সেটটির সর্বনিম্ন একটা পদ আছে) এবং একসময় $x_{n+1} - x_n = x_n - x_{n-1}$ হয়ে যাব এবং একইসাথে সিকুয়েন্সটাও ধ্রুবক হয়ে যাবে।

এবার অসমতাটা প্রমাণ করার পালা। আর সেটা করার জন্য যে সমীকরণটা পেয়েছিলাম সেটি ব্যবহার করব। ধরা যাক $x_{n-1} = x_n - p$ এবং কনট্রাডিকশনের জন্য ধরে নিলাম x_{n+1} এর মান কমপক্ষে $x_n + p$ (এর চেয়ে বেশি ও হতে পারে, তবে আমরা আপাতত সবচেয়ে কম মানটি নিয়েই কাজ করছি)। সুতরাং বলা যায়,

$$\begin{aligned}
&(x_n + p)^2 - x_n^2 > x_n^2 - x_{n-1}^2 = a_1 + \cdots + a_n \\
\implies\ &(x_n + p)^2 > x_n^2 + a_1 + \cdots + a_n
\end{aligned}$$

কিন্তু এখন $x_n^2 + a_1 + \cdots + a_n$ এর সাথে যদি a_{n+1} বসিয়ে x_{n+1}^2 বানাতে চাই তাহলে সর্বোচ্চ যে বর্গ সংখ্যাটি বানাতে পারব সেটা হলো $(x_n + p)^2$ কারণ, a_{n+1} এমন সবচেয়ে ছোট সংখ্যা যেন রাশিটি বর্গ হয়। সুতরাং x_{n+1}^2 এর সর্বোচ্চ মান $(x_n + p)^2)$ হতে পারবে। অর্থাৎ $x_{n+1} \leq x_n + p$ এবং

$$x_{n+1} - x_n \leq x_n - x_{n-1}$$

এখান থেকে হয়ত বুঝতে পারছ কেন $x_{n+1} = x_n + p$ ধরেছিলাম। কারণ এটা থেকে $x_n^2 + a_1 + \cdots + a_n$ এর চেয়ে বড় ক্ষুদ্রতম বর্গ সংখ্যাটি পাওয়া যায়, যেটি হলো $(x_n + p)^2$। আর এটার সাথে x_{n+1}^2 কে তুলনা করেই অসমতাটি প্রমাণ হয়ে গিয়েছে। অসমতাটি প্রমাণের সাথে আমাদের সমাধানও তাহলে শেষ।

■

§ ৩.৫ অনুশীলনী

সমস্যা ৩.১: তিনটি সংখ্যা a, b, c সমান্তর সিকুয়েন্স তৈরি করে। প্রমাণ কর যে যেকোনো সংখ্যা k এর জন্য ak, bk, ck ও সমান্তর সিকুয়েন্স তৈরি করে।

সমস্যা ৩.২: $a_1, a_2, \cdots, a_{98}$ একটি সমান্তর ধারার পদ যাদের সাধারণ অন্তর 1 এবং $a_1 + a_2 + \cdots + a_{98} = 137$। $a_2 + a_3 + \cdots + a_{98}$ এর মান নির্ণয় কর।

সমস্যা ৩.৩: পটারহেড ক্লাবের সদস্যরা একে অপরকে চিঠি লিখতে খুবই পছন্দ করে। একটা নির্দিষ্ট সপ্তাহের প্রথম দিন তাদের প্রত্যেক সদস্য তিনজন করে সদস্যদের চিঠি লেখে। যারা প্রথম দিন চিঠি পেয়েছে তারা একইভাবে দ্বিতীয় দিন প্রত্যেকে তিনজন্ করে সদস্যদের কাছে চিঠি পাঠায়। এভাবে কয়েকদিন চলার পর দেখা গেল চতুর্থ দিনের তুলনায় পঞ্চম দিনে 972 টি চিঠি বেশি পাঠানো হয়েছে এবং ঐ সপ্তাহে একইদিনে কেউ দুটি চিঠি পায়নি। তাহলে পটারহেড ক্লাবের সদস্যসংখ্যা কত?

সমস্যা ৩.৪: $\{a_k\}$ একটা পূর্ণসংখ্যার সিকুয়েন্স যেন $a_1 = 1$ এবং $a_{m+n} = a_m + a_n + mn$ হয়। a_{12} এর মান বের কর।

সমস্যা ৩.৫: নিচের সিকুয়েন্সটির পদগুলোর ক্লোজড ফর্ম বের কর। $a_1 = 1,\ a_2 = 2$।

$$a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n + 2021^n$$

সমস্যা ৩.৬: (AIME 2016) $1, a_2, a_3, \ldots$ এবং $1, b_2, b_3, \ldots$ যথাক্রমে দুটি ক্রমবর্ধমান সমান্তর এবং গুণোত্তর সিকুয়েন্স। ধরে নাও $c_n = a_n + b_n$। একটা পূর্ণসংখ্যা k এর জন্য $c_{k-1} = 100$ এবং $c_{k+1} = 1000$। c_k এর মান নির্ণয় কর।

সমস্যা ৩.৭: (AIME 2018) একটা সিকুয়েন্স $\{a_n\}$ এর প্রত্যেক পদ a_n হলো $4(a_{n-1}+a_{n-2}+a_{n-3})$ কে 11 দিয়ে ভাগ করলে যে ভাগশেষ থাকে তার মান। $a_0 = 2, a_1 = 5, a_2 = 8$। $a_{2018} \cdot a_{2020} \cdot a_{2022}$ এর মান বের কর।

সমস্যা ৩.৮: u_n একটি সিকুয়েন্স যেন $u_1 = \frac{1}{2}; u_{n+1} = \dfrac{n+1}{2n} u_n$ হয়। u_n এর সাধারণ আকার বের কর।

সমস্যা ৩.৯: n একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা হলে নিচের যোগফলটি নির্ণয় কর

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{k-1}{k!}$$

সমস্যা ৩.১০: $a_1, a_2, \cdots, a_n$ একটি সমান্তর ধারা এবং প্রতেকটি পদের পার্থক্য d। নিচের রাশিটির মান বের

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{a_i a_{i+1}}$$

সমস্যা ৩.১১: a একটি ধনাত্মক সংখ্যা। একটি সিকুয়েন্স $\{u_n\}$ এ $u_1 = a$ এবং $u_{n+1} = -\frac{1}{(u_n+1)}$। এমন সবচেয়ে ছোট সংখ্যা d বের কর যেন $\{u_n\}$ d period এর periodic সিকুয়েন্স হয়[৩]।

[৩]Periodic কী তা নিয়ে ফাংশন অধ্যায়টি থেকে ধারণা পাবে

সমস্যা ৩.১২: $\{a_n\}$ একটি সিকুয়েন্স যেন $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$ হয়। এর প্রথম 1492 টি পদের যোগফল 1985 এবং 1985 টি পদের যোগফল 1492। সিকুয়েন্সটির প্রথম 2001 টি পদের যোগফল নির্ণয় কর।

সমস্যা ৩.১৩: (ARO 2008) $\{a_n\}$ এবং $\{b_n\}$ দুটি সিকুয়েন্স যেন $a_1 = 1, b_1 = 2$ হয়। এখন,

$$a_{n+1} = \frac{1 + a_n + a_n b_n}{b_n}, \quad b_{n+1} = \frac{1 + b_n + a_n b_n}{a_n}$$

প্রমাণ কর যে, $a_{2008} < 5$।

সমস্যা ৩.১৪: (EGMO 2020) $a_1, a_2, a_3, \dots$ একটা সিকুয়েন্স যেখানে $a_1 = a_2 = 1$, $a_3 = 4$ এবং $n \geq 4$। এমন সকল পূর্ণসংখ্যা m বের কর যেন সিকুয়েন্সটির প্রত্যেকটি পদ একটি পূর্ণবর্গ সংখ্যা হয়। এখানে $m > 1$ এবং

$$a_n = m(a_{n-1} + a_{n-2}) - a_{n-3}$$

সমস্যা ৩.১৫: (China TST 2010) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যার সিকুয়েন্স যেখানে প্রথম পদ a_1 হলো 2 এর সমান বা বড় কোনো পূর্ণসংখ্যা। a_n হলো এমন সবচেয়ে ছোট পূর্ণসংখ্যা যেটা a_{n-1} এর সাথে সহমৌলিক না এবং $a_n \neq a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}$। প্রমাণ কর যে, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ সিকুয়েন্সটিতে 1 ব্যতীত সকল ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা রয়েছে।

অধ্যায় ৪

Functional Equations

I laugh in the face of danger!

– Simba in The Lion King

ফাংশনাল ইকুয়েশন কী?

আমরা এই বইয়ের শুরুতেই সমীকরণ সমাধান করা শিখেছি। সেখানে আমরা কী করি? একটা সমীকরণ দেয়া থাকে আর সেটা থেকে অজানা চলকের মান বের করার চেষ্টা করি। গণিত অলিম্পিয়াডগুলোয় ফাংশন সম্পর্কিত যে সমস্যাগুলো সবচেয়ে বেশি দেখা যায় সেগুলো হলো 'ফাংশনাল ইকুয়েশন'। সাধারণ ইকুয়েশন থেকে এর পার্থক্য শুধু এখানে যে আগে আমরা অজানা চলক বের করতাম আর ফাংশনাল ইকুয়েশনে ফাংশনটি বের করতে হবে। যেমন: $2x - 4 = 0$ একটা সমীকরণ। এটা সমাধান করলে পাওয়া যাবে x এর মান 2। এবং $f(x+y) = f(x) + f(y)$ একটি দুই চলকের ফাংশনাল ইকুয়েশনের উদাহরণ। এখানে যদি আমরা $f(x) = x$ বসাই তাহলে সমীকরণটি সত্য হয়। তবে আরেকটু চিন্তা করলে দেখবে যে $f(x) = -x$ বসালেও সমীকরণটি সত্য হয়। সুতরাং $f(x) = x$ ও $f(x) = -x$ উভয়ই এই ফাংশনাল ইকুয়েশনটির সমাধান। একটি ফাংশনাল ইকুয়েশনের এমন আরও সমাধান থাকতে পারে। আমাদের কাজ হলো প্রত্যেকটি সমাধান বের করা।

ফাংশনাল ইকুয়েশন সমাধানের জন্য যদিও একদম নির্দিষ্ট কোনো নিয়ম নেই,

তবুও সমাধানের শুরুতেই এমন কিছু ধাপ আছে যা সবসময়ই চেষ্টা করা উচিৎ।

§ ৪.১ FE সমাধানের প্রথম ধাপসমূহ

- **(সমাধান অনুমান করা)** একটা ফাংশনাল ইকুয়েশন দেখার পরই চেষ্টা করা উচিৎ পরীক্ষা করে এর সমাধানগুলো অনুমান করা। যেমন: $f(x) = c$ বা constant, $f(x) = ax + b$ বা, $ax^2 + bx + c$ এধরনের সমাধান বসিয়ে দেখা যেতে পারে। এমনটা করার সুবিধা হলো আমরা আগে থেকেই কিছুটা ধারণা পেয়ে যেতে পারি পরবর্তীতে কী প্রমাণ করতে হবে। সবসময় হয়ত অনুমান করা নাও যেতে পারে, তখন পরের ধাপগুলো চেষ্টা করে দেখতে পারো।

- **(বিভিন্ন মান বসিয়ে দেখা)** বেশিরভাগ ক্ষেত্রেই কিছু ছোটোখাটো মান বসিয়ে গুরুত্বপূর্ণ তথ্য পাওয়া যায়। আবার মনে করো কোনো এক জটিল ইকুয়েশনের দুই পক্ষে f আছে। তখন আমরা চেষ্টা করতে পারি এমন মান বসানোর যেন ঐ দুই পদ কাটাকাটি হয়ে যায়। উদাহরণ হিসেবে আমরা এই ইকুয়েশনটিকে নিয়ে চিন্তা করতে পারি। $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

  $$f(f(x) + y) = f(x^2 - y) + 4f(x)y$$

  দুই পক্ষের f যুক্ত পদকে বাদ দিয়ে দেয়ার জন্য আমরা $f(x) + y = x^2 - y$ ধরে পাই $y = \frac{x^2 - f(x)}{2}$। এখন এটা সমীকরণে বসিয়ে দিলে দুইটি পদ কাটাকাটি করে পাব $4f(x) \cdot \frac{x^2 - f(x)}{2} = 0$, যেটা থেকে আমরা সহজেই $f(x)$ এর মান বের করতে পারি।

- **($f(k)$ এর মান বের করা)** কিছু সমীকরণ থেকে বিভিন্ন মান বসিয়ে $f(0), f(1)$ এগুলোর মান বের করা যেতে পারে।

- **(Injectivity ও Surjectivity প্রমাণ করা)** Injectivity প্রমাণ করার মূল লক্ষ্যই সাধারণত $f(x) = f(y)$ আকারের কিছু থাকলে তাকে $x = y$ হিসেবে লিখতে পারা। একটি ফাংশন injective প্রমাণ করার জন্য শুরুতে ধরে নেয়া হয় $f(x) = f(y)$ এবং সেখান থেকে দেখানো হয় যে $x = y$।

Surjectivity বেশ কাজের বৈশিষ্ট্য। এটা থেকে আমরা বলতে পারি যে যেকোনো z এর জন্য আমরা একটা x খুঁজে পাব যেন $f(x) = z$ হয়। তোমরা এর আগের একটা ধাপে দেখেছ কোনো কিছুর মান 0 হলে সেটাকে ব্যবহার করে কোনো কোনো পদকে বাদ দিয়ে দেওয়া যায়। একটা ফাংশন surjective হলে আমরা ধরে নিতে পারব একটা এমন y আছে যেন $f(y) = 0$ হয়। একটা FE তে যদি কখনো এমন কিছু আসে যেটার একটা পক্ষ ফাংশনের ওপর নির্ভরশীল না তাহলে আমরা বলতে পারি ফাংশনটি surjective। যেমন মনে কর $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ একটি ফাংশন যেখানে $f(x^2 f(x+3)) = x^3$ পাওয়া গেল। এখন দেখ x^3 ফাংশনের ওপর নির্ভর করে না, এটা দিয়ে সকল বাস্তব সংখ্যা পাওয়া সম্ভব। সুতরাং ফাংশনটি surjective।

- **(Symmetry বের করা)** এই কথাটির মানে হলো চলকগুলোর মান পাল্টিয়ে ($P(y,x)$ বসিয়ে) বা অন্য কোনো মান বসিয়ে আরেকটা সমীকরণ বের করা যেটা আগের সমীকরণটির প্রায় কাছাকাছি। সেটা ব্যবহার করে এরপর কিছু পদ বাদ দিয়ে দেয়া যেতে পারে।

- **(Pointwise Trap থেকে সাবধান!)** আমরা দ্বিতীয় ধাপে একটা উদাহরণ দেখেছি যেখানে $4f(x) \cdot \frac{x^2 - f(x)}{2} = 0$ থেকে $f(x)$ এর মান বের করতে হয়। এটার সমাধান করলে পাওয়া যায় $f(x) = 0$ বা x^2। তোমাদের মনে হতে পারে, যেহেতু আমরা দুইটা সমাধান বের করে ফেলেছি,তাহলে কাজ শেষ। কনটেস্টে কিন্তু এই ভুলের কারণে অনেকে বেশ কয়েক মার্ক হারায়! তাহলে ভুলটা কোথায়?

  মনে কর x এর কোনো কোনো মানের জন্য $f(x) = 0$ আবার কিছু কিছু মানের জন্য $f(x) = x^2$। এমনটা হলে আমরা নির্দিষ্ট করে বলতে পারছি না কোন কোন x এর জন্য $f(x)$ 0 বা x^2 হচ্ছে। আবার এই একই বৈশিষ্ট্যের আরও ফাংশন পাওয়া সম্ভব। যেমন: $f(x) = \{min(0,x)\}^2$। সুতরাং তারা আসলে ইকুয়েশনটির ইউনিক সমাধান না। এটাকেই pointwise trap বলে। সেটা যেন না হয় তার জন্য প্রমাণ করতে হবে যে হয় সকল x এর জন্য $f(x) = x^2$ নাহলে সকল x এর জন্য $f(x) = 0$।

- **(সমাধান সমীকরণে বসিয়ে দেখা)** এই ধাপটি না দেখানোর কারণে কনটেস্টে মার্ক কাটা হয়। তাই সল্যুশন লেখার শেষে অবশ্যই সমাধানগুলো বসিয়ে দেখবে আসলেই সেগুলো সমীকরণটিকে সিদ্ধ করে কিনা।

- এগুলো ছাড়াও ফাংশনটি odd কিংবা even কিনা অথবা continuous কিনা এ ধরনের বৈশিষ্ট্যগুলো বের করার চেষ্টা করতে পারো।

ফাংশনাল ইকুয়েশনে ভালো করার প্রধান উপায়ই হলো প্রবলেম সলভিং। এখন চল তাহলে সমস্যা সমাধানে নেমে পড়ি।

উদাহরণ ৪.১

এমন সকল ফাংশন $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ বের কর

$$f(f(x+y)) = x + f(y)$$

সমাধান: আমরা এতক্ষণ যে ধাপগুলো দেখলাম, সেই অনুযায়ীই শুরু করা যাক। ইকুয়েশনটি থেকে শুধু f গুলো বাদ দিয়ে চিন্তা করলে দেখা যায় যে $x + y = x + y$ (এখানে কিন্তু সমাধান কী হতে পারে সেটা বোঝার জন্য চিন্তা করছি শুধু, তোমরা আবার সরাসরি যেন f তুলে দিও না! তার মানে $f(x) = x$ একটা সমাধান হতে পারে। যখনই আমরা কোনো সমীকরণের এই সমাধানটি পাব, একইসাথে $f(x) = -x$ ও বসিয়ে দেখব সেটাও একটা সমাধান কিনা। এক্ষেত্রে $-x$ বসালে সমীকরণটি সত্য হয় না, তাই এটা সমাধান নয়। $f(x) = c$, $ax+b$ বা, ax^2+bx+c ইত্যাদি আর কোনো মানের জন্যই সমীকরণটি সত্য হয় না বলে আমরা ধরে নিচ্ছি একমাত্র সমাধান $f(x) = x$।

এবার আমরা মান বসিয়ে দেখা শুরু করি। শুরুতেই $x, y = 0$ বসিয়ে পাই,

$$P(0,0) \implies f(f(0)) = f(0)$$

আবার শুধু $x = 0$ বসিয়ে পাই,

$$P(0,y) \implies f(f(y)) = f(y)$$

এখন দেখ, শুরুতে আমরা অনুমান করেছিলাম যে $f(x) = x$ এই ইকুয়েশনের সমাধান আর এখন সেটা প্রমাণ করতে চাই। শুধু $x = 0$ বসিয়ে যে সমীকরণটা পাওয়া গেল সেটাতে যদি দুই পক্ষ থেকে f বাদ দিয়ে দিতে পারতাম তাহলে $f(y) = y$ পেয়ে যেতাম, আর প্রমাণও হয়ে যেত যে $f(x) = x$।

f বাদ দিয়ে দেওয়ার জন্য ফাংশনের কী বৈশিষ্ট্য দরকার? Injectivity! তাই এখন আমরা চেষ্টা করব ফাংশনটির injectivity প্রমাণ করার। শুরুতে ধরে নেব $f(a+r) = f(b+r)$। এরপর,

$$\begin{aligned} & f(a+r) = f(b+r) \\ \implies & f(f(a+r)) = f(f(b+r)) \\ \implies & a + f(r) = b + f(r) \\ \implies & a = b \\ \implies & a + r = b + r \end{aligned}$$

সুতরাং ফাংশনটি injective। তোমাদের মনে হতে পারে আমরা তো সাধারণত $f(a) = f(b)$ ধরে নিই, তাহলে এখানে কেন আবার r যোগ করলাম? আসলে প্রমাণটাকে সহজ করার জন্যই এটা করা হয়েছে। দেখ সমীকরণটির বামপক্ষে $x + y$ আছে আর ডানপক্ষ থেকে পাই $x + f(y)$। তাহলে যদি $a = b$ প্রমাণ করতে চাই, আসলে দেখাতে হবে $a + f(r) = b + f(r)$। আর এটা করতেই r যোগ করা হয়েছে।

আমাদের প্রমাণ প্রায় শেষ। $f(f(y)) = f(y)$ থেকে injectivity ব্যবহার করে লিখতে পারি $f(y) = y$ বা $f(x) = x$। আগেই দেখানো হয়েছে এই সমাধানটি সমীকরণকে সিদ্ধ করে।

■

উদাহরণ ৪.২

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ একটি ফাংশন এবং

$$xf(2-x) - 2f(x) = x^2 + 1$$

এমন সকল f বের কর।

সমাধান: প্রথমত, $f(x) = x, \ -x, \ c$ এসব কোনো মানের জন্যই সমীকরণটি সত্য হয় না। তাই আপাতত আমরা এর সমাধান অনুমান করতে পারছি না। এবার দেখ, এই সমীকরণটা এক চলকবিশিষ্ট আর বামপক্ষের প্রতিটা পদেই ফাংশন আছে। এখানে x এর একটা নির্দিষ্ট মান যদি বসিয়েও দিই তবুও সেটা খুব বেশি কাজে আসবে না কারণ আমরা $f(x)$ এর একটা সাধারণ রূপ না পেয়ে আউটপুট হিসেবে একটা নির্দিষ্ট মান পাব। উদাহরণ হিসেবে $x = 0$ বসালে, $2f(2) - 2f(0) = 1$। এটা থেকে$f(x)$ যুক্ত গুরুত্বপূর্ণ কোনো তথ্য পেলাম না।

যেহেতু সমাধানও অনুমান করতে পারিনি, তাই ফাংশনটা injective বা surjective হওয়া উচিৎ কিনা তাও সরাসরি বলতে পারছি না। এখন কী করা যায়? দেখ ইকুয়েশনটিতে x আর $2 - x$ আছে। তাহলে x এর বদলে $2 - x$ বসিয়ে দিলে পাই $xf(x) - 2f(2-x) = (2-x)^2 + 1$ আর এটা কিন্তু একটা সুন্দর জিনিস! কারণ এখান থেকে একটা symmetry পেয়ে গেলাম আমরা। এখন এই নতুন সমীকরণ আর মূল সমীকরণটা ব্যবহার করে একটা system of equation বানাতে পারি।

$$xf(2-x) - 2f(x) = x^2 + 1$$
$$xf(x) - 2f(2-x) = (2-x)^2 + 1$$

এর সমাধান করলে পাব $f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + 5x + 2}{x^2 - 4}$। এই অদ্ভুত দেখতে ফাংশনটাই সমীকরণটার সমাধান। সমাধান তোমরাই বসিয়ে দেখার চেষ্টা করতে পারো। ■

উদাহরণ ৪.৩

এমন সকল Bijective ফাংশন বের কর- $f : \mathbb{R}^+ \setminus \{1\} \to \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ এবং

$$f(x) + f(y) = f\left(\frac{xy+1}{x+y}\right)$$

সমাধান: এই সমস্যাটিতে আগে থেকেই বলে দেয়া আছে যে ফাংশনটি bijective অর্থাৎ একইসাথে injective ও surjective। এখন যেহেতু ফাংশনটিতে ভগ্নাংশ আছে, x, y এর জায়গায় $\frac{1}{x}$ ও $\frac{1}{y}$ বসিয়ে দেখা যেতে

পারে।

$$P\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right) \implies f\left(\frac{1}{x}\right) + f\left(\frac{1}{y}\right) = f\left(\frac{xy+1}{x+y}\right)$$

অর্থাৎ, $f(x) + f(y) = f\left(\frac{1}{x}\right) + f\left(\frac{1}{y}\right)$। এবার এই সমীকরণটায় যদি $x = y$ বসানো হয় তাহলে পাওয়া যায় যে $f(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$। এখন দেখ, ফাংশনটা যেহেতু injective, দুইপক্ষ থেকে আমরা শুধু f বাদ দিয়ে লিখতে পারি $x = \frac{1}{x}$। এটা হওয়া সম্ভব শুধুমাত্র যদি $x = \pm 1$ হয়। কিন্তু ফাংশনটির ডোমেন 1 বাদে সকল ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যা। তার মানে এই সমীকরণটির আসলে কোনো সমাধান নেই! এটা অস্বাভাবিক কিছু না। সব ধাপ অনুযায়ী কাজ করার পরও যদি কোনো সমাধান বের না হয়, তাহলে সমীকরণটার যে কোনো সমাধান নেই তা প্রমাণ করার চেষ্টা করে দেখতে পারো।

■

উদাহরণ ৪.৪

Pointwise trap ধাপের উদাহরণটির সমাধান সম্পূর্ণ কর।

সমাধান: কনট্রাডিকশন দেখানোর জন্য শুরুতে আমরা ধরে নেব এমন দুটি $a, b \neq 0$ আছে যেন একইসাথে $f(a) = 0$ এবং $f(b) = b^2$ হয়। এবার মূল সমীকরণটিতে a, b বসিয়ে দিলে,

$$\begin{aligned} P(a,b) &\implies f(f(a)+b) = f(a^2-b) + 4f(a)b \\ &\implies f(b) = f(a^2-b) \\ &\implies b^2 = f(a^2-b) \end{aligned}$$

$f(a^2-b)$ এর মান হয় 0 নাহলে $(a^2-b)^2$ হতে পারে। 0 হলে $b = 0$, কিন্তু আমরা শুরুতেই ধরে নিয়েছিলাম $b \neq 0$। তাহলে $b^2 = f(a^2-b) = (a^2-b)^2 \implies a^2 - b = b \implies a^2 = 2b$। কিন্তু ফাংশনটির ডোমেন যেহেতু সকল বাস্তব সংখ্যা তাই এটা হওয়া সম্ভব না। তাহলে প্রমাণ হয়ে গেল যে একইসাথে ফাংশনের মান 0 ও x^2 হতে পারবে না। ■

§ ৪.২ Cauchy's Functional Equation

Cauchy এর ফাংশনাল ইকুয়েশন অনেক গুরুত্বপূর্ণ একটা ইকুয়েশন। একটা ফাংশনাল ইকুয়েশনকে এই আকারে লিখলে আমরা সরাসরি সমাধান বের করে ফেলতে পারি। এই ইকুয়েশনটা হলো

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

যেখানে ফাংশনের ডোমেন ও কোডোমেন হলো $\mathbb{Q}$ বা মূলদ সংখ্যা অর্থাৎ $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$। আর এই সমীকরণটির সমাধান হলো $f(x) = kx$ আকারের যেখানে k যেকোনো মূলদ সংখ্যা।

এখন cauchy এর functional equation এর সমাধান যে এটাই হবে তা প্রমাণ করব।

সমাধান: আমরা শুরু করব মান বসানো দিয়ে। $x = y = 0$ বসিয়ে পাই,

$$f(0) = 2f(0) \implies f(0) = 0$$

আবার $x = y = 1$ বসালে পাব,

$$f(2) = 2f(1)$$

$f(1) = k$ ধরলে এটাকে লেখা যায় $f(2) = 2k$। এখন $f(3)$ এর মান বের করার জন্য $x = 2, y = 1$ বসাতে পারি যেটা থেকে পাওয়া যাবে $f(3) = 3k$। এখন সকল ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যার জন্য ইনডাকশন ব্যবহার করে প্রমাণ করা যায়। প্রথমে মনে করি, একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা n এর জন্য $f(n-1) = k(n-1)$। এখন $x = n-1, y = 1$ বসালে $f(n) = kn$ পেয়ে যাব।

এটা শুধু ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যার জন্য প্রমাণ ছিল। এবার ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যার জন্য $y = -x$ ধরলে, $f(x) + f(-x) = 0$। যেহেতু $f(x) = kx$, আমরা লিখতে পারি, $f(-x) = -kx$। সুতরাং আমরা ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যার জন্যও cauchy ইকুয়েশন প্রমাণ করে ফেললাম। তবে আমাদের প্রমাণ কিন্তু এখনও শেষ হয়নি। আমরা এতক্ষণ শুধু পূর্ণসংখ্যার জন্য প্রমাণ করলাম। এখন সকল মূলদ সংখ্যার জন্যও করতে হবে।

সবচেয়ে সহজ কেসটা নিয়ে চিন্তা করি। $x = y = \frac{1}{2}$ বসালে $2f(\frac{1}{2}) = f(1) = k \implies f(\frac{1}{2}) = \frac{k}{2}$। এটা থেকে আমরা ধারণা পাচ্ছি যে পূর্ণসংখ্যা গুলোকে ভেঙে মূলদ আকারে লেখা যেতে পারে। $f(m) = f(\frac{(n-1)m}{n} + \frac{m}{n}) = f\left(\frac{(n-2)m}{n}\right) + f\left(\frac{m}{n}\right) + f\left(\frac{m}{n}\right) = \cdots = f\left(\frac{m}{n}\right) + f\left(\frac{m}{n}\right) + \cdots + f\left(\frac{m}{n}\right) = km$। সুতরাং $f(\frac{m}{n}) = \frac{km}{n}$। ■

Cauchy's ফাংশনাল ইকুয়েশন ব্যবহার করে আরেকটি গুরুত্বপূর্ণ ইকুয়শন পাওয়া যায় যার নাম Jensen's Functional Equation।

উদাহরণ ৪.৫

(Jensen's Functional Equation) এমন সকল ফাংশন $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ বের কর

$$f(x) + f(y) = 2f\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

সমাধান: এই ইকুয়েশনটির সকল সমাধান হলো $f(x) = kx + c$। আমরা cauchy এর ইকুয়েশনে দেখে এসেছি সেটার সমাধান হলো $f(x) = kx$। সুতরাং আমরা যদি একটা ফাংশন $g(x) = f(x) - c$ নিই, এবং প্রমাণ করি যে সেটা থেকে cauchy এর ইকুয়েশন পাওয়া যাবে, তাহলেই কিন্তু jensen's ইকুয়েশনটির প্রমাণ পেয়ে যাব।

$c = f(0)$ ধরলে $g(x) = f(x) - f(0)$। এখানে $c = f(0)$ ধরার কারণটা কী? দেখ মূল সমীকরণটায় যদি আমরা $x = y = 0$ বসাই তাহলে $0 = 0$ পাই। এটা থেকে কিন্তু কোনো তথ্যই পাওয়া যায় না। কিন্তু $g(x)$ এ যদি 0 বসাই তাহলে পাওয়া যায় $g(0) = f(0) - c$। অর্থাৎ $g(0) = 0$ এবং আমরা g এর 0 এর জন্য আউটপুটটা পেয়ে যাই। এই সুবিধার জন্য $c = f(0)$ ধরে নিয়েছি। এবার আমরা মূল সমীকরনণটাকে এভাবে লিখতে পারি

$$(f(x) - f(0)) + (f(y) - f(0)) = 2\left(f\left(\frac{x+y}{2}\right) - f(0)\right)$$

$$\implies g(x) + g(y) = 2g\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

সুতরাং আমরা আরেকটা সমীকরণ পেলাম যেটা হুবহু মূল সমীকরণের মতো,

কিন্তু এবার আমরা জানি $g(0) = 0$। এখন এটাতে $y = 0$ বসালে পাব,

$$P(x, 0) \implies g(x) = 2g\left(\frac{x}{2}\right)$$

তাহলে,

$$g(x) + g(y) = 2g\left(\frac{x+y}{2}\right) = g(x+y)$$

আর এটা cauchy's ফাংশনাল ইকুয়েশন। সুতরাং প্রমাণ করে ফেললাম $g(x) = kx$ এবং $f(x) = kx + c$।

■

উদাহরণ ৪.৬

$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ একটি ফাংশন এবং

১. $f(1) = 1$

২. f একটি non-decreasing ফাংশন

৩. $f(2a) = a + 1$

$f(2016) + f(2017) + f(2018)$ এর সম্ভাব্য মানগুলো বের কর।

সমাধান: তৃতীয় শর্তটিতে $a = 1$ বসিয়ে দিলে পাব $f(2) = 2$। আর $a = 2$ বসালে পাই $f(4) = 3$। $a = 4 \implies f(8) = 4$। এখান থেকে আমরা দেখতে পাচ্ছি যে $f(2^x) = f(x) + 1$। এটাকে সহজেই ইনডাকশন দিয়ে প্রমাণ কর ফেলা যায়। তাই সেটা তোমাদের জন্যই ছেড়ে দেয়া হলো।

এবার আমরা দ্বিতীয় শর্তটা ব্যবহার করব। বলা আছে ফাংশনটি non-decreasing। অর্থাৎ x এর মান বাড়লে $f(x)$ এর মান $f(x-1)$ এর চেয়ে বড় বা সমান হতে পারে, কিন্তু কখনই ছোট হবে না। এখন $f(2)$ আর $f(4)$ এর মান থেকে বলতে পারি $f(3)$ এর মান হয় 2 নাহলে 3 হবে। আবার $f(5), f(6), f(7)$ এর মানগলো 3 বা 4 হতে পারে। সুতরাং আমরা বলতে পারি $f(2^{x-1})$ থেকে $f(2^x)$ এর মধ্যে ফাংশনগুলোর মান x বা

$x+1$ হবে। যেহেতু $2^{11} \geq 2016, 2017, 2018 \geq 2^{10}$ এবং $f(2^{10}) = 11, f(2^{11}) = 12$, এই তিনটি ফাংশনের মান 11 বা 12 হবে। সেখান থেকে আমরা চারটি সম্ভাব্য যোগফল পাই: $33, 34, 35, 36$। ■

উদাহরণ ৪.৭

(Balkan MO 2000) এমন সকল ফাংশন $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ নির্ণয় কর যেন,

$$f(xf(x)+f(y)) = f(x)^2 + y$$

যেখানে, $x, y \in \mathbb{R}$

সমাধান: শুরুতেই সমীকরণটিতে $f(x) = \pm x$ বসালে দেখবে এ দুটির জন্যই সমীকরণটি সত্য হবে। এরপর $f(x) = ax + b$ বসালে আর কোনো সমাধান পাওয়া যায় না বলে আপাতত এ দুটিকেই সমাধান বলে ধরে নেয়া যাক। এখন $x = y = 0$ বসিয়ে পাই, $f(f(0)) = f(0)^2$। এখান থেকে আমরা তেমন কিছু বলতে পারি না, এমনকি $f(0)$ এর মান ও বের করতে পারি না। এবার $x = 0$ বসালে পাওয়া যাবে,

$$P(0,y) \implies f(f(y)) = y + f(0)^2$$

এই সমীকরণ থেকে কি গুরুত্বপূর্ণ কিছু পাওয়া যায়? প্রথমত, যেহেতু এটা মূল সমীকরণ থেকে অনেক সরল একটা সমীকরণ, তাই এটা ব্যবহার করে f ফাংশনটির injectivity প্রমাণ করা যেতে পারে। যদি $f(a) = f(b)$ হয় তাহলে,

$$\begin{aligned} f(f(a)) &= f(f(b)) \\ \implies a + f(0)^2 &= b + f(0)^2 \\ \implies a &= b \end{aligned}$$

আবার আমরা f কে surjective ও প্রমাণ করতে পারি। ডানপক্ষে $y + f(0)^2$ এ $f(0)^2$ একটি ধ্রুবক। তাই আমরা চাইলে y এর মান বসিয়ে বসিয়ে সকল বাস্তব সংখ্যা বানিয়ে ফেলতে পারি।

এখন f surjective হওয়ায় আমরা এমন u খুঁজে পাব যেন, $f(u) = 0$ হয়। এবার আমরা চাইব এটা ব্যবহার করে বেশ কয়েকটা পদকে বাদ দিয়ে

দেয়ার। তাহলে $x = u$ বসালে পাই,

$$P(u, y) \implies f(f(y)) = y$$

খেয়াল করে দেখ, প্রায় একই রকমের সমীকরণ আমরা আগেও পেয়েছিলাম। সেটাকে এই সমীকরণের সাথে তুলনা করলে পাওয়া যাবে, $f(0) = 0$। কিন্তু এছাড়া আর কীভাবে আমরা $f(f(y)) = y$ কে কাজে লাগাতে পারি? আমরা যদি $xf(x)$ এর মধ্যে x এর বদলে $f(x)$ বসাই তবে x এবং $f(x)$ একে অপরের সাথে জায়গা বদল করে অর্থাৎ, $x \to f(x)$ বসালে $f(x)f(f(x)) = f(x)x$ হয় যার থেকে আমরা একটি সুন্দর সিমেট্রি পাই। এখন আমরা যদি প্রথম সমীকরণে, $P(f(x), y)$ বসাই তবে,

$$\begin{aligned} P(f(x), y) &\implies f(f(x)f(f(x)) + f(y)) = f(f(x))^2 + y \\ &\implies f(xf(x) + f(y)) = x^2 + y \end{aligned}$$

এটিকে মূল সমীকরণটির সাথে তুলনা করে আমরা পাই, $f(x)^2 = x^2 \implies f(x) = \pm x$।

এখানে আমরা আবার pointwise trap এর মুখে পড়েছি কারণ আমরা জানি না x এর কোন মানের জন্য $f(x) = x$ আর কোন মানের জন্য $f(x) = -x$।

মনে করি, এমন $a, b \neq 0$ আছে যাতে $f(a) = a, f(b) = -b$ হয়। এখন, $P(a, b)$ থেকে আমরা পাই, $f(a^2 - b) = a^2 + b$। আবার $f(x) = \pm x$ তাই যদি $f(a^2 - b) = a^2 - b$ হয় তবে $a^2 + b = a^2 - b \implies b = 0$ অন্যদিকে যদি $f(a^2 - b) = -a^2 + b$ হয় তবে, $a^2 = 0 \implies a = 0$ যার কোনোটিই হতে পারবে না কারণ $a, b \neq 0$। তাই বলা যায় দুটি অশূন্য মানের জন্য $f(x)$ এর মান একই সাথে x ও $-x$ হতে পারে না। সুতরাং, $f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$ এবং $f(x) = -x, \forall x \in \mathbb{R}$ ফাংশনাল ইকুয়েশনটির দুটি সমাধান। ■

উদাহরণ ৪.৮

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ একটি ফাংশন যেন,

$$f(x^2 + y) = f(x^{27} + 2y) + f(x^4)$$

এমন সকল f নির্ণয় কর।

সমাধান: প্রথমে, আমাদের পরিচিত সমাধানগুলো বসালে দেখা যায় আসলে কোনোটিই এই সমীকরণের জন্য সত্য না। এমন ক্ষেত্রে বেশিরভাগ সময়ই $f(x) = 0$ হওয়ার সম্ভাবনা বেশি হয়। এখন $x = y = 0$ বসিয়ে পাই $f(0) = 0$। এবার সমীকরণটা দেখলে আমাদের মাথায় যেটা আসে সেটা হলো- এর ডানপক্ষে x^{27} একটা আজব ঘাত। এত বড় একটা পাওয়ার নিয়ে কাজ করা রীতিমতো অস্বস্তিকর ব্যাপার! তাই আমরা চাই পুরো প্রক্রিয়াটাকে একটু সহজ করার জন্য কিছু পদ বাদ দিতে। তাহলে দুইপক্ষ থেকে দুটি পদ বাদ দেয়ার জন্য আমরা ধরে নিলাম

$$x^2 + y = x^{27} + 2y \implies y = x^2 - x^{27}$$

এবার এই মানটাকে মূল সমীকরণে বসিয়ে দিলে পাব $f(x^4) = 0$। তোমরা কি বুঝতে পারছ যে আমরা সকল অঋণাত্মক বাস্তব সংখ্যার জন্য সমাধান 0 প্রমাণ করে ফেলেছি? কীভাবে?
দেখ এখানে x^4 দিয়ে সকল অঋণাত্মক বাস্তব সংখ্যা বানানো সম্ভব। তাহলে এবার আমাদের প্রমাণ করতে হবে- সকল ঋণাত্মক বাস্তবের জন্যও ফাংশনটি 0 হবে। এখানে কাজে লাগে সেই বিদঘুটে পাওয়ার 27। $x = -z, y = 0$ বসালে পাওয়া যায়,

$$f(z^2) = f((-z)^{27}) + f(z^4) \implies f(z^2) = f((-z)^{27})$$

$(-z^{27})$ দিয়ে সব ঋণাত্মক বাস্তব সংখ্যা পাওয়া সম্ভব। আর যেহেতু আমরা আগেই বের করেছি সব অঋণাত্মক বাস্তব সংখ্যার জন্য ফাংশনটি 0, শেষের সমীকরণটি থেকে তাই বলা যায় সব ঋণাত্মক বাস্তবের জন্যও তা 0। ■

উদাহরণ ৪.৯

এমন সকল ফাংশন $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ বের করো যেন,

$$f(xy^2) + f(x^2y) = y^2f(x) + x^2f(y)$$

যেখানে $x, y \in \mathbb{R}$ এবং $f(2008) = f(-2008)$

সমাধান: এখানে যে শর্ত দেয়া আছে $f(2008) = f(-2008)$ সেটা থেকে আমরা কিছুটা অনুমান করতে পারি সমাধান হয়তো $f(x) = |x|$ হতে পারে। এখন $y = 1$ বসিয়ে পাই,

$$P(x, 1) \implies f(x^2) = x^2f(1) = x^2c \implies f(z) = cz \qquad (1)$$

এটা থেকে কি বোঝা যাচ্ছে? এখান থেকে আমরা বলতে পারি যে সকল অঋণাত্মক বাস্তব সংখ্যার জন্য ইকুয়েশনটির সমাধান zc, যেখানে $c = f(1), x^2 = z$। এবার ঋণাত্মক বাস্তব সংখ্যার জন্য প্রমাণ করার পালা। $y = -1$ বসিয়ে পাই,

$$f(-x^2) = x^2f(-1) \implies f(-z) = kz \qquad (2)$$

এবার আমরা যদি প্রমাণ করতে চাই যে সকল ঋণাত্মক বাস্তবের জন্যও সমাধান zc, তাহলে প্রমাণ করতে হবে $f(1) = c = k = f(-1)$। এখন দেখ, প্রশ্নে প্রায় এরই মতো একটা শর্ত দেওয়া আছে। সেটাকে কি কোনোভাবে ব্যবহার করা যায়? $z = 2008$ বসালে (1) থেকে পাই,

$$f(2008) = 2008 \cdot f(1)$$

আবার, (2) থেকে বলতে পারি,

$$f(-2008) = 2008f(-1)$$

যেহেতু $f(2008) = f(-2008)$, এই দুই সমীকরণ থেকে আমরা পেয়ে যাই $f(1) = f(-1)$। সুতরাং সকল বাস্তব সংখ্যার জন্য ইকুয়েশনটির সমাধান হলো $f(x) = c|x|$। ■

উদাহরণ ৪.১০

(IMOSL 2002 A1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ একটি ফাংশন যেন,

$$f\left(f(x) + y\right) = 2x + f\left(f(y) - x\right)$$

যেখানে $x, y \in \mathbb{R}$। এমন সকল ফাংশন f নির্ণয় করো।

সমাধান: এখানে যদি আমরা $f(x) = ax + b$ বসাই তবে দেখবো $a = 1$ আসলেও b এর কোনো নির্দিষ্ট মান পাওয়া যায় না। অর্থাৎ, $f(x) = x + b$ হলো ফাংশনটির সমাধান, যেখানে b একটি ধ্রুবক।

একটু চেষ্টা করলেই দেখবে এখানে , $P(0, 0), P(x, 0), P(0, y)$ কোনো মান বসিয়েই গুরুত্বপূর্ণ কিছু পাওয়া যায় না। তাহলে এখন কী করা যায়? যেহেতু কেবল x বা y এ 0 বসিয়ে কাজ হচ্ছে না আমরা $f(f(x) + y)$ অথবা $f(f(y) - x)$ কে $f(0)$ বানানোর চেষ্টা করে দেখতে পারি। $P(x, -f(x))$ থেকে পাই,

$$f(0) = 2x + f(f(-f(x)) - x) \implies f(f(-f(x)) - x) = -2x + f(0)$$

এখানে $-2x + f(0)$ যেকোনো বাস্তব সংখ্যা হতে পারে তাই f একটি surjective ফাংশন। অর্থাৎ আমরা এমন u খুঁজে পাব যাতে, $f(u) = 0$ হয়। এখন, $P(u, y) \implies f(y) = 2u + f(f(y) - u)$ । এবার আমরা আবারো surjectivity ব্যবহার করব। f surjective হওয়ায় $f(y)$ দিয়ে যেকোনো বাস্তব সংখ্যা পেতে পারি বলে, চাইলে $f(y)$ কে সুবিধামতো একটি বাস্তব সংখ্যা দ্বারা পরিবর্তন করে দিতে পারি। আমরা যদি $f(y) = z + u$ লিখি, যেখানে z যেকোনো বাস্তব সংখ্যা তাহলে পাব,

$$z + u = 2u + f(z) \implies f(z) = z - u$$

অর্থাৎ, $f(z) = z + b, \forall z \in \mathbb{R}$ যেখানে $b = -u$ একটি ধ্রুবক। ■

উদাহরণ ৪.১১

(Cono Sur) এমন সকল ফাংশন $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ বের করো যেন,

$$f(x^2) - f(y^2) + 2x + 1 = f(x + y)f(x - y)$$

সমাধান: খানিকটা পরীক্ষা করলেই দেখবে $f(x) = x + 1$ এবং $f(x) = -x - 1$ এই ইকুয়েশনটির দুটি সমাধান। প্রথমেই $x = y = 0$ বসিয়ে পাই, $f(0)^2 = 1 \implies f(0) = \pm 1$। যেহেতু $f(0)$ এর দুটি মান আছে তাই আমরা বাকি সমাধানটাকে দুটি কেসে ভাগ করে ফেলব।

কেস ১ : $f(0) = 1$

এখন যদি $P(x, 0)$ বসাই তাহলে পাই, $f(x^2) - 1 + 2x + 1 = f(x)^2 \implies f(x^2) = f(x)^2 - 2x$। এটা থেকে আমরা এখনই কিছু বলতে পারছি না। এবার যদি আমরা $P(0, y)$ বসাই তবে, $-f(y^2) + 1 = f(y)f(-y)$। এখানে আগের সমীকরণ থেকে $f(y^2)$ এর মান বসালে পাই, $1 - f(y)^2 + 2y = f(y)f(-y)$ । এটিও খুব একটা কাজের মনে হচ্ছে না।

এবার যদি ডানপক্ষের কোনো একটি ফাংশনের ভিতরে শূন্য বানাতে চাই সেক্ষেত্রে $x = y$ বসিয়ে দেখতে পারি। আর সেটা করলে আমরা পাব, $f(x^2) - f(x^2) + 2x + 1 = f(2x)f(0) \implies f(2x) = 2x + 1$। এখন খেয়াল করে দেখো শেষ সমীকরণে $2x$ বদলে যদি x থাকতো তাহলেই কিন্তু আমাদের সমীকরণটি সমাধান হয়ে যেত। তার জন্য আমরা যদি আমাদের ইনপুটের মানগুলোকে অর্ধেক করে দেই তাহলেই কাজ হয়ে যাবে। অর্থাৎ $P(\frac{x}{2}, \frac{x}{2}) \implies f(x) = x + 1$ যা ইকুয়েশনটির একটি সমাধান।

কেস ২: $f(0) = -1$

আগের কেসে $P(\frac{x}{2}, \frac{x}{2})$ মানগুলো বসানোর কারণে আমাদের অনেক সুবিধা হয়েছিল। তাই এই কেসেও প্রথমেই এই মানগুলো বসিয়ে দেখা যাক এখানেও কোনো সুবিধা পাওয়া যায় কিনা।

$$f\left(\frac{x^2}{4}\right) - f\left(\frac{x^2}{4}\right) + x + 1 = f(x)f(0) \implies f(x) = -x - 1$$

সুতরাং, $f(x) = x + 1, \forall x \in \mathbb{R}$ এবং $f(x) = -x - 1, \forall x \in \mathbb{R}$ আমাদের ফাংশনটির দুটি সমাধান।

তোমাদের এখন প্রশ্ন হতে পারে, এখানেও তো দুটি সমাধান পাওয়া গেল, তাহলে এখানে কেন পয়েন্ট ওয়াইজ ট্র্যাপ নেই? কারণ এখানে শুরুতেই আমরা $f(0)$

এর মানের ওপর ভিত্তি করে দুটি কেসে ভাগ করে নিয়েছি। $f(0) = 1$ হলে সব x এর জন্যই $f(x) = x + 1$। আর $f(0) = -1$ হলে $f(x) = -x - 1$। সুতরাং এখানে একইসাথে কোনো কোনো x এর জন্য $f(x) = x + 1$ আবার অন্যান্য x এর জন্য $f(x) = -x - 1$ হতে পারবে না। ■

উদাহরণ ৪.১২

(Iran 3rd Round 2020) এমন সকল ফাংশন $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ বের করো যেন,

$$f(y - f(x)) = f(x) - 2x + f(f(y))$$

সমাধান: এখানে f গুলো সরিয়ে দিলে আমরা পাই, $y - x = x - 2x + y$ যা সত্য। অর্থাৎ, $f(x) = x$ ফাংশনটি এই ইকুয়েশনটির একটি সমাধান। আমরা এবার প্রমাণ করব এটিই একমাত্র সমাধান।

এখানে x বা y কোনটির মান 0 বসিয়েই আমরা খুব ভালো কোনো তথ্য পাই না। তাই $f(y - f(x))$ কে $f(0)$ বানাতে আমরা $y = f(x)$ বসালে পাই, $f(0) - 2x = f(x) + f(f(f(x)))$। এখন যদি $f(a) = f(b)$ হয় তবে,

$$\begin{aligned} f(0) - 2a &= f(a) + f(f(f(a))) \\ &= f(b) + f(f(f(b))) \\ &= f(0) - 2b \end{aligned}$$

এখান থেকে আমরা বলতে পারি, $a = b$ বা f একটি injective ফাংশন। এখন আমরা এমন কিছু মান বসাতে চাই যাতে দুইপক্ষ থেকে কিছু জিনিস কাটাকাটি হয়ে যায়। $P(x, f(x) + x) \implies f(x) = f(x) - 2x + f(f(f(x) + 2x))$ অর্থাৎ $f(f(f(x) + 2x)) = 2x$ যার থেকে আমরা প্রমাণ করতে পারি, f surjective ফাংশন। অতএব এমন u আছে যেন, $f(u) = 0$। তাহলে, $P(u, u) \implies f(0) = 2u$ আর $P(u, 0)$ বসালে আমরা পাই, $f(f(0)) = f(0) + 2u = 2f(0)$।

তোমাদের হয়তো মনে হচ্ছে surjective বৈশিষ্ট্যটি এত ব্যবহার করা হলেও injective এর কি হবে? injective ব্যবহার করতে হলে আমাদের এমন

কিছু করতে হবে যেন, সমীকরণের দুইপক্ষে শুধুমাত্র দুটি f যুক্ত পদ থাকে। খেয়াল করলে দেখবে প্রদত্ত সমীকরণে যদি আমরা এমন x খুঁজে পাই যাতে $f(x) = 2x$ তবে কেবল দুটি f যুক্ত পদ বেঁচে থাকে। আমরা তো একটু আগে $f(f(0)) = 2f(0)$ পেয়েছি ☺ । এখন $P(f(0), y)$ বসালে আমরা পাই,

$$\begin{aligned} & f(y - f(f(0))) = f(f(0)) - 2f(0) + f(f(y)) \\ \implies & f(y - f(f(0))) = f(f(y)) \\ \implies & f(y) = y - f(f(0)) \end{aligned}$$

অর্থাৎ, $f(x) = x - c$ ফাংশনটির একটি সমাধান। এবার এটি আমাদের মূল সমীকরণে বসিয়ে পাই, $c = 0$। তাই ইকুয়েশনটির একমাত্র সমাধান হচ্ছে , $f(x) = x$ ■

উদাহরণ ৪.১৩

(IZHO 2014) এমন সকল surjective ফাংশন $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ বের করো যেন,

$$f(f(x)) = (x - 1)f(x) + 2$$

যেখানে $x \in \mathbb{R}$

সমাধান: $f(x) = ax + b, ax^2 + b$ ইত্যাদি বসালে দেখবে কোনটির জন্যই ফাংশনটির কোনো সমাধান পাওয়া যাচ্ছে না। এতে ঘাবড়ে যাওয়ার কিছু নেই। এমন হতেই পারে যে এই ইকুয়েশনটির কোনো সমাধান নেই। আপাতত যেহেতু কোনো সমাধান পাওয়া গেল না, তাই দেখা যাক ইকুয়েশনটা থেকে আমরা কী তথ্য উদ্ধার করতে পারি।

$x = 0, 1, 2 \cdots$ ইত্যাদি বসালে দেখবে $x = 1$ এর জন্য আমরা পাই, $f(f(1)) = 2$ এবং অন্য মানগুলোর জন্য তেমন ভালো কিছু পাওয়া যাচ্ছে না। এখানে একটা জিনিস আমাদের আগে থেকেই বলে দেওয়া হয়েছে- সেটা হলো ফাংশনটি surjective। অর্থাৎ এমন u আছে যেন, $f(u) = 0$ হয়। এবার আমাদের ইকুয়েশনে $x = u$ বসিয়ে পাই, $f(0) = (u - 1) \cdot 0 + 2 = 2$। এখন যেহেতু $f(0)$ এর মান পেয়েছি তাহলে আবার $x = 0$ বসিয়ে দেখা যাক, $f(2) = -f(0) + 2 = 0$। এবার হয়তো ভাবছো আমরা $x = 2$ বসাব,

কিন্তু সেটা করলে দেখবে আবার $f(0) = 2$ পাচ্ছি তাই সেটা খুব কাজের না। তাহলে এখন কী করা যায়? আমরা আবারো surjectivity ব্যবহার করার চেষ্টা করে দেখি। তাহলে বলা যায় যে এমন a খুঁজে পাব যেন, $f(a) = 1$। এখন $x = a$ বসালে পাই, $f(1) = a + 1$ । এখন $f(2) = 0$ এ 2 এর বদলে $f(f(1))$ বসিয়ে পাই,

$$\begin{aligned} 0 &= f(2) \\ &= f(f(f(1))) \\ &= (f(1) - 1)\, f(f(1)) + 2 \\ &= 2a + 2 \\ \therefore a &= -1 \end{aligned}$$

অতএব, $f(-1) = 1, f(1) = 0$। আবার এমন c আছে যেন, $f(c) = -1$ হয় তাহলে x এর বদলে c বসিয়ে দেখলে দেখবে, $1 = f(-1) = f(f(c)) = (c-1)f(c) + 2 = 3 - c$ যার থেকে আমরা পাই, $c = 2 \implies f(2) = -1$ কিন্তু $f(2)$ এর মান তো একসাথে 0 ও -1 হতে পারবে না। তাই এমন কোনো ফাংশন নেই। ■

উদাহরণ ৪.১৪

(Balkan MO SL 2019) এমন সকল ফাংশন $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ নির্ণয় করো যেন,

$$f(xy) = yf(x) + x + f(f(y) - f(x))$$

যেখানে $x, y \in \mathbb{R}$

সমাধান: $f(x) = ax + b$ বসালে দেখা যাবে, $f(x) = x - 1, f(x) = -x - 1$ ফাংশনটির দুটি সমাধান। সমাধানগুলো থেকে আমরা এটি বুঝতে পারি যে $f(0) = -1$ হতে হবে এবং $f(1) = 0$ (যখন $f(x) = x - 1$) অথবা $f(-1) = 0$ (যখন $f(x) = -x - 1$)। তাহলে শুরুতে এই মানগুলোই বের করার চেষ্টা করা যাক ।

$P(0,0)$ বসিয়ে তেমন কিছু না পেলেও $P(x,0)$ থেকে আমরা পাই, $f(f(0) - f(x)) = -x + f(0)$ এটি থেকে আমরা খুব সহজেই f

একটি bijective ফাংশন তা প্রমাণ করতে পারি (নিজে চেষ্টা করে দেখ)। তবে $P(0,x)$ থেকে আমরা তেমন কোনো নতুন তথ্য পাই না। আবার $P(1,1) \implies f(1) = f(1)+1+f(0) \implies f(0) = -1$

এখন যেহেতু আমরা $f(0)$ এর মান পেয়ে গিয়েছি তাই চল আবার $P(0,x)$ বসিয়ে দেখি কিছু পাওয়া যায় কিনা। $P(0,x) \implies x-1 = f(f(x)+1)$। এখন খেয়াল করলে দেখবে $P(x,0)$ তে যদি আমরা x না বসিয়ে $-x$ বসাই তাহলে তা এই শেষ সমীকরণটির সাথে অনেকটা মিলে যায়। $P(-x,0) \implies x-1 = f(-1-f(-x))$ এবার f injective ফাংশন দেখে আমরা বলতে পারি, $f(x)+1 = -1-f(-x) \implies f(x)+f(-x) = -2$।

এবার x ও y এর মান 0 না বসিয়ে 1 বসিয়ে দেখি কী পাওয়া যায়। $P(x,1)$ বসালে আমরা পাই, $f(f(1)-f(x)) = -x$ এবং $P(1,x) \implies f(x) = xf(1)+1+f(f(x)-f(1))$। এখানে আমরা প্রথম সমীকরণ ব্যবহার করে দ্বিতীয় সমীকরণের $f(f(x)-f(1))$ এর মান বের করে ফেলতে পারি :0 কারণ আমরা জানি, $f(f(1)-f(x))+f(f(x)-f(1)) = -2 \implies f(f(x)-f(1)) = x-2$ এই মান বসিয়ে পাই, $f(x) = xf(1)+1+x-2 \implies f(x) = kx-1$ যেখানে $k = f(1)+1$। এবার এই ফাংশনটির মান মূল সমীকরণে বসালে আমরা পাই k এর মান কেবল ± 1 হতে পারে। সুতরাং, $f(x) = x-1, \forall x \in \mathbb{R}$ ও $f(x) = -x-1, \forall x \in \mathbb{R}$ ফাংশনটির দুটি সমাধান। ■

উদাহরণ ৪.১৫

(EGMO 2012/3) এমন সকল ফাংশন $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ বের করো যেন,

$$f\left(yf(x+y)+f(x)\right) = 4x+2yf(x+y)$$

সমাধান: $f(x) = ax+b$ বসিয়ে দেখলে দেখবে যে $a = 2$ আর $b = 0$ পাওয়া যায়। তাহলে এর একটা সমাধান $f(x) = 2x$ হতে পারে।
শুরুতেই $x = y = 0$ বসিয়ে দেখা যাক।

$$P(0,0) \implies f(f(0)) = f(0)$$

এখান থেকে যদি আমরা $f(0) = 0$ বলতে চাই, তাহলে আগে আমাদের ফাংশনটির injectivity প্রমাণ করতে হবে। তাহলে আরও কিছু মান বসিয়ে দেখা যাক। $y = 0$ বসালে,

$$P(x,0) \implies f(f(x)) = 4x$$

যেহেতু ডানপক্ষ ফাংশনের ওপর নির্ভরশীল না, তাই আমরা বলতে পারি ফাংশনটি surjective। আবার $f(x) = f(y)$ ধরলে সহজেই বের করে ফেলা যাবে $x = y$। সুতরাং ফাংশনটি injective। এবার আমরা বলতে পারব $f(0) = 0$।

$f(f(x)) = 4x$ থেকে আমরা বলতে পারি,

$$f(f(f(x))) = f(4x) = 4f(x)$$

এখন আমরা $f(0) = 0$ ব্যবহার করে কিছু মান বের করার চেষ্টা করব। $x = 0, y = 1$ বসিয়ে পাই,

$$\begin{aligned} & f(f(1)) = 2f(1) = 4 \\ \implies & f(1) = 2 \\ \implies & f(f(1)) = f(2) = 4 \\ \implies & f(f(2)) = f(4) = 8 \end{aligned}$$

এখন আমরা মূল সমীকরণে এমন মান বসাতে চাই যেন একপক্ষে শুধু একটি চলক থাকে। সেজন্য $x = 1 - y$ বসালে পাব,

$$\begin{aligned} & f(y(1-y+y) + f(1-y) = 4 - 4y + 2y(f(1)) \\ \implies & f(2y + f(1-y)) = 4 \\ \implies & f(f(2y + f(1-y)) = f(4) \\ \implies & 8y + 4f(1-y) = 8 \\ \implies & f(1-y) = 2 - 2y \end{aligned}$$

এখানে $x = 1 - y$ বসানোয় যে সুবিধাটি হয়েছে সেটা হলো একপাশে আমরা এক চলকের একটি রাশি পেয়েছি আর অন্য পক্ষে একটি সংখ্যা। যেটা সমাধান করে আমরা বলতে পারি সকল বাস্তব সংখ্যার জন্য $f(x) = 2x$। ■

§ ৪.৩ একটা বড়ওওও সমস্যা!

এই সমস্যাটির সমাধান নেয়া হয়েছে Adrian Tang এর 2010 IMO Summer Training: Functional Equations [11] নোটটি থেকে। উদাহরণটি বেশ বড়োসড়ো আকারের হলেও এই বইয়ে যোগ করা হয়েছে কারণ এখান থেকে অনেক ইনটুইশন ও কৌশল পাওয়া যাবে। তাই তোমরা কাগজ-কলম নিয়ে উৎসাহের সাথে এটা করতে বসবে বলে আশা করি। বেস্ট অফ লাক!

উদাহরণ ৪.১৬

(ISL 2009) এমন সকল ফাংশন $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ বের কর -

$$f(xf(x+y)) = f(yf(x)) + x^2$$

সমাধান: এখানে $f(x) = \pm x$ দুটি সমাধান। এটার সমাধান কি একটা নির্দিষ্ট constant হতে পারে? ইকুয়েশনে $f(x) = c$ বসালে আমরা দেখব যে $x^2 = 0$, যা অবশ্যই সত্য না। তাহলে সমাধান কোনো constant হবে না। এখানে আরো সমাধান থাকতে পারে, কিন্তু আপাতত আর কিছু আমরা খুঁজে বের করতে পারছি না বলে ধরে নেব শুধু এ দুটোই সমাধান।

এখন x, y এর বিভিন্ন মান বসিয়ে দেখা যাতে পারে। $P(0,0)$ থেকে পাই $f(0) = f(0)$। এটা কোনো কাজেরই না! এবার তাহলে আমরা এক এক করে 0 বসিয়ে দেখি। $P(0,y) \implies f(0) = f(yf(0))$। আমরা কিছু একটা পেলাম, তবে এটা কি কোনো কাজের? প্রশ্ন থেকে আমরা জানি y যেকোনো বাস্তব সংখ্যা হতে পারে। আর ফাংশনের সংজ্ঞা অনুযায়ী $f(0)$ এর একটাই মান থাকা সম্ভব। তার মানে আমরা $yf(0)$ ব্যবহার করে সকল বাস্তব সংখ্যা পেতে পারি! $yf(0) = a$ ধরলে আমরা লিখতে পারি $f(a) = f(0)$ যেটা একটা constant। কিন্তু আমরা আগেই দেখেছি যে ইকুয়েশনটির সমাধান কোনো constant হতে পারবে না। তাহলে এখান থেকে আমরা বলতে পারব $f(0)$ এর মান 0 ছাড়া অন্য কিছু হওয়া সম্ভব না।

এখন আমরা $f(0)$ এর মানকে কাজে লাগাতে চাই। সমীকরণটিতে $y = 0$

বসিয়ে পাই,

$$P(x,0) \implies f(xf(x)) = x^2 \qquad (1)$$

আবার $y = -x$ বসালে,

$$P(x,-y) \implies f(-xf(x)) = -x^2 \qquad (2)$$

আমরা যে দুটো সমীকরণ পেলাম সেগুলো দিয়ে surjectivity প্রমাণ হয়ে গিয়েছে। এখানে (1) দিয়ে প্রমাণ হয় সব ধনাত্মক বাস্তবের জন্য আর (2) দিয়ে প্রমাণ হয় যে তা সকল ঋণাত্মক বাস্তবের জন্য ফাংশনটি surjective।

যেহেতু আমরা প্রমাণ করতে চাই $f(x) \equiv x$ বা $-x$, আর কেবলই আমরা surjectivity প্রমাণ করে ফেললাম, এবার চেষ্টা করব injectivity প্রমাণ করার।

তাহলে ধরে নেই $f(x) = f(x+r)$। এবার,

$$\begin{aligned} P(x,r) &\implies f(xf(x+r)) = f(rf(x)) + x^2 \\ &\implies f(xf(x)) = f(rf(x)) + x^2 \\ &\implies x^2 = f(rf(x)) + x^2 \qquad [(1)] \\ &\implies f(rf(x)) = 0 \end{aligned}$$

আমরা প্রমাণ করতে চাই $x = x + r \implies r = 0$। এখন দেখ শেষের ইকুয়েশনটিতে যদি আমরা দেখাই যে $rf(x) = 0$ তাহলে আমরা বলতে পারব যে $r = 0$। এর আগে আমরা দেখিয়েছি $f(0) = 0$। কত ভালো হবে যদি আমরা দেখাই যে যদি কোনো এক z এর জন্য $f(z) = 0$ হলে $z = 0$ হয়ে যাবে, অর্থাৎ 0 ছাড়া কোনো সংখ্যার জন্যই $f(x) = 0$ হবে না।

আমরা ধরে নিলাম $f(z) = 0$। এবার আমরা দেখাব $z = 0$। মূল সমীকরণে $x = z, y = -z$ বসালে পাই,

$$\begin{aligned} & f(zf(0)) = f(-zf(z)) + z^2 \\ \implies & f(z \cdot 0) = f(0) + z^2 \end{aligned}$$

$$\implies 0 = z^2$$
$$\implies z = 0$$

এখন এটাকে ব্যবহার করে লেখ যায় $f(rf(x)) = 0 \implies rf(x) = 0$। এখানে হয় $r = 0$ নাহলে $f(x) = 0$। $r = 0$ হলে আমাদের injectivity এর প্রমাণ শেষ আর $f(x) = 0$ হলে $x = 0 \implies f(r) = 0$ যেটা থেকে আবারো বলা যায় $r = 0$। সুতরাং ফাংশনটি injective।

এখন ফাংশনের surjectivity আর injectivity ব্যবহার করার চেষ্টা করা যাক। কোনোভাবে কি সমীকরণটার একটা পক্ষকে 0 বানিয়ে ফেলা যায়? যেহেতু আমরা জানি ফাংশনটা surjective, ডানপক্ষে আমরা এমন একটা y খুঁজে পাবই যেন $f(yf(x)) = -x^2$ হয়! $x = -z \neq 0$ বসিয়ে তাহলে আমরা লিখতে পারি

$$f(-z(-z+y)) = -z^2 + z^2 = 0$$

সুতরাং $-z(-z+y) = 0$। যেহেতু $z \neq 0$ তাহলে $y = z$। $f(yf(x)) = -x^2$ এ $y = z, x = -z$ বসালে পাই $f(zf(-z)) = -z^2$। একটা জিনিস কি খেয়াল করেছ? এটা দেখতে প্রায় সমীকরণ (2) এর মতো। সুতরাং

$$f(-zf(z)) = -z^2 = f(zf(-z))$$

Injectivity ব্যবহার করে f বাদ দিয়ে লেখা যায় $-zf(z) = zf(-z) \implies -f(z) = f(-z)$ বা,

$$-f(x) = f(-x) \qquad (3)$$

এটা কিন্তু আসলে অনেক কাজের সমীকরণ। এর আগে EGMO 2012 এর উদাহরণে দেখেছিলাম $x = 1 - y$ বসানোর কারণে আমরা এক চলকের একটা সমীকরণ পেয়েছিলাম। এখানেও আমরা এক চলকের সমীকরণ পাওয়ার চেষ্টা করব। মূল সমীকরণে $x = \pm 1$ বসালে পাই,

$$f(f(1+y)) = f(yf(1))+1 \text{ ও } f(-f(y-1)) = f(y(f(-1))+1$$

এখানে যদি আমরা দেখাতে পারতাম $f(1) = \pm 1, f(-1) = \pm 1$, তাহলে একটা পুরোপুরি এক চলকের সমীকরণ পেয়ে যেতাম। আমরা যেহেতু জানি ফাংশনটি surjective, তাই ধরে নিতে পারব এমন একটা w আছে যেন, $f(w) = 1$ হয়। এবার সমীকরণ (1) থেকে আমরা বলতে পারি $f(w) = w^2$। $w = 1$ বসালে $f(1) = 1$ এবং (3) থেকে $f(-1) = -f(1) = -1$। আবার $w = -1$ বসালে $f(-1) = 1, f(1) = -f(-1) = -1$। সুতরাং $(f(1), f(-1)) = (1, -1)$ নাহলে $(f(-1), f(1) = 1, -1)$।

এবার এই দুটো জোড়াকে কেস হিসেবে চিন্তা করতে পারি। প্রথম কেসে $(f(1), f(-1)) = (1, -1)$ হলে,

$$f(f(1+y)) = f(y) + 1 \qquad (4)$$

এবং,

$$\begin{aligned} & f(-f(y-1)) = f(-y) + 1 \\ \implies & -f(f(y-1)) = -f(y) + 1 \qquad [(3)] \\ \implies & -f(f(y-1+2)) = -f(y+2) + 1 \end{aligned}$$

শেষের সমীকরণটিকে (4) এর সাথে যোগ করলে পাই, $f(y+2) - f(y) = 2$। একইভাবে পাওয়া যায়,

$$f(y+4) = f(y) + 4 \qquad (5)$$

এখন দেখ, আমাদের কাছে যদি থাকত $f(y+1) - f(y) = 1$ তাহলে আমরা লিখতে পারতাম $f(y+1)f(y) + 1 = f(f(y+1)) \implies f(y+1) = y+1 \implies f(x) = x$। কিন্তু আমাদের কাছে আছে $f(y+2) - f(y) = 2$। মূল সমীকরণে $x = 2$ বসালে পাওয়া যায়,

$$f(2f(2+y)) = f(yf(2)) + 4$$

এখানে ডানপক্ষে 4 আছে। আর একে $f(yf(2)) + 4 = f(yf(2)) + 4$ হিসেবে লেখার জন্য আমরা (5) বের করেছি। এখন injectivity ব্যবহার করে আমরা লিখতে পারব,

$$f(yf(2)) + 4 = f(2f(2+y)) \implies yf(2) + 4 = 2f(2+y)$$

তাহলে $f(y) = \frac{(y-2)f(2)}{2} + 2$। $y = 2$ বসালে পাওয়া যাবে $f(2) = 2$ এবং $f(y) = y$ বা $f(x) = x$ আআআআআর আমাদের একটি সমাধানের প্রমাণ শেষ!

এখন দ্বিতীয় কেসটি থেকে একইভাবে পাওয়া যাবে $f(x) = -x$। সেটা নাহয় তোমরাই চেষ্টা করে বের করলে ☻ । ■

§ ৪.৪ অনুশীলনী

সমস্যা ৪.১: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ একটি ফাংশন যেন,

$$xf(x) + f(1-x) = x^3 - x$$

এবং $x \in \mathbb{R}$। এমন সকল f বের কর।

সমস্যা ৪.২: এমন সকল ফাংশন $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ নির্ণয় কর যেন,

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) + 2f(y)$$

সমস্যা ৪.৩: (India MO 2015) এমন সকল ফাংশন $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ বের করো যেন,

$$f(x^2 + yf(x)) = xf(x+y)$$

সমস্যা ৪.৪: এমন সকল ফাংশন বের কর - $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ এবং

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)$$

সমস্যা ৪.৫: (Kyrgyzstan 2012) এমন সকল ফাংশন $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ নির্ণয় কর যেন,

$$f(f(x)^2 + y) = xf(x) + y$$

সমস্যা ৪.৬: (Pan African 2013) এমন সকল ফাংশন $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ বের কর যেন,

$$f(x)f(y) + f(x+y) = xy$$

সমস্যা ৪.৭: এমন সকল বাস্তব থেকে বাস্তব ফাংশন f নির্ণয় কর যেন,

$$f(xf(y)+f(x)) = 2f(x)+xy$$

সমস্যা ৪.৮: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ এমন একটি ফাংশন যেন,

$$x+f(x) = f(f(x))$$

সকল $x\in\mathbb{R}$ এর জন্য। এমন সকল x এর মান বের কর যেন $f(f(x))=0$ হয়।

সমস্যা ৪.৯: এমন সকল $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$ ফাংশন বের করো যা,

$$f(x+y) = f(x)+f(y)+xy$$

সমীকরণটিকে সিদ্ধ করে।

সমস্যা ৪.১০: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ এমন একটি ফাংশন যেন,

$$f(x+y+xf(y)) = f(x)+f(y)+xf(y)$$

সমস্যা ৪.১১: (USAMO 2016/4) এমন সকল ফাংশন $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ নির্ণয় কর যেন,

$$(f(x)+xy)\cdot f(x-3y)+(f(y)+xy)\cdot f(3x-y) = (f(x+y))^2.$$

সমস্যা ৪.১২: এমন সকল ফাংশন $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ নির্ণয় কর যেন,

$$x^3+f(x)f(y) = f(f(x^3)+f(xy))$$

সমস্যা ৪.১৩: (Romania TST 2021) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ এমন একটি ফাংশন যেন,

$$f(xf(y)-f(x)) = 2f(x)+xy$$

সমস্যা ৪.১৪: (Italy TST 2006/3) এমন সকল ফাংশন $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ নির্ণয় কর যেন,

$$f(m-n+f(n)) = f(m)+f(n)$$

সমস্যা ৪.১৫: (Kosovo MO 2022) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ এমন একটি ফাংশন যেন,

$$f(f(x-y)-yf(x)) = xf(y)$$

রিসোর্স

[1] Titu Andreescu and Dorin Andrica. *Complex Numbers from A to... Z.* Springer, 2006.

[2] Titu Andreescu, Navid Safaei, and Alessandro Ventullo. *117 polynomial problems from the AwesomeMath Summer Program.* XYZ Press, 2019.

[3] Edward J Barbeau. *Polynomials.* Springer Science & Business Media, 2003.

[4] Evan Chen. *A Brief Introduction to Olympiad Inequalities.* 2014.

[5] Evan Chen. *Introduction to Functional Equations.* 2016.

[6] Israel N Herstein. *Abstract algebra.* John Wiley & Sons, 1996.

[7] Radmila Bulajich Manfrino, José Antonio Gómez Ortega, and Rogelio Valdez Delgado. *Inequalities: a mathematical olympiad approach.* Springer Science & Business Media, 2009.

[8] Mathew Crawford Richard Rusczyk. *Intermediate Algebra Art Craft Problem Solving.* AoPS Incorporated, 2008.

[9] Richard Rusczyk. *Precalculus Art Craft Problem Solving*. AoPS Incorporated, 2009.

[10] Justin Stevens. *ARML Telescoping Series*. 2015.

[11] Adrian Tang. *2010 IMO Summer Training: Functional Equations*. 2010.