

গণিতের সমস্যা সমাধানের কৌশল
(দ্বিতীয় খণ্ড)

গণিতের সমস্যা সমাধানের কৌশল (দ্বিতীয় খণ্ড)

মোহাম্মদ মাজেদুর রহমান
দিপু সরকার



গণিতের সমস্যা সমাধানের কৌশল (দ্বিতীয় খণ্ড)

মোহাম্মদ মাজেদুর রহমান, দিপু সরকার

গ্রন্থস্বত্ব: লেখক

প্রথম প্রকাশ: ফেব্রুয়ারি ২০২৪

তাম্রলিপি: ৭৮৮

প্রকাশক

এ কে এম তারিকুল ইসলাম রনি

তাম্রলিপি

৩৮/৪ বাংলাবাজার, ঢাকা-১১০০

প্রচ্ছদ

রাসেল আহমেদ

বর্ণবিন্যাস

তাম্রলিপি কম্পিউটার

মুদ্রণ

মা প্রিন্টিং প্রেস

২৮/২৩ গোপাল শাহ লেন, ঢাকা

মূল্য: ৪৬০

Goniter Somossa Somadhaner Koushol (2nd Part)

By: Muhammad Majadur Rahman, Dipu Sarkar

First Published: February 2024 by A K M Tariqul Islam Roni

Tamralipi, 38/4 Banglabazar, Dhaka-1100

Price: 460.00

\$16

ISBN: 978-984-98741-7-1

উৎসর্গ

অংক মুখস্থ না করেও যে চিন্তা করা যায়, একটা বিষয়কে বিভিন্ন
আঙ্গিকে দেখা যায়, যেকোনো গাণিতিক সমস্যাকে একাধিক উপায়ে
সমাধান সম্ভব ও যেকোনো যুক্তিযুক্ত উপায়ই যে সঠিক হতে পারে এমন
দৃষ্টিভঙ্গি যিনি খুব অল্প বয়সে আমার মাথায় ঢুকিয়ে দিয়েছিলেন,
বড়মামা মো: শাহজাহান মিয়া কে। (মোহাম্মদ মাজেদুর রহমান)
যাদের অক্লান্ত পরিশ্রমের কারণে প্রতিবছর গণিত অলিম্পিয়াডের
সৌন্দর্য উপভোগ করা যায় সেই সকল একাডেমিক টিম মেম্বর ও
মুভার্সদের।
(দিপু সরকার)

লেখকের কথা

বইটি লেখার মূল উদ্দেশ্য যে সকল বেসিক বিষয় আমাদের স্কুলে শেখানো
হয় সেসকল বিষয়কে বিস্তারিত ভাবে তুলে ধরা। বিষয়ভিত্তিক আলোচনার
পাশাপাশি সমস্যা সমাধানের কৌশল নিয়ে আলোচনাই বইটির মূল
বিষয়বস্তু। আমরা এই বইটিকে জাতীয় পাঠ্যক্রমের সহায়ক পাঠ্যবই এর
মত করে তৈরী করবার সর্বাত্মক চেষ্টা করেছি। বইটিতে মূলত সংখ্যাতত্ত্ব,
বিন্যাস-সমাবেশ ও সম্ভাবনা, বীজগণিত এবং জ্যামিতির ব্যাসিক বিষয় নিয়ে
ধারণা দেওয়া হয়েছে এবং এই সকল বিষয় ভিত্তিক সমস্যা সমাধানের
কৌশল দেখানো আছে। বইটি গণিত অলিম্পিয়াডে অংশগ্রহণকারীদের
প্রস্তুতির জন্যেও একটি চমৎকার বই হবে বলে আশা করছি।
বইটিতে ষষ্ঠ থেকে দশম শ্রেণিতে পড়ুয়া শিক্ষার্থীদের যে সকল সাধারণ
গাণিতিক জ্ঞান অর্জন করার প্রয়োজন হয় ভবিষ্যত গাণিতিক শিক্ষার
জন্মে তাঁর সকলই আলোচনা করা হয়েছে। এই বইটিতে সকল বিষয়ের
খুব বেশি গভীরে আলোচনা করবার সুযোগ হয় নি। তবে এর ধারাবাহিক
পরবর্তী বইগুলোতে বিষয়ভিত্তিক গভীরে আলোচনা করার সফল চেষ্টা
অব্যাহত থাকবে।
আমরা যখন স্কুলে পড়েছি তখন আমাদের সমস্যা সমাধানের দক্ষতার
জন্মে তেমন উদ্যোগ গ্রহণ করতে দেখি নি সেভাবে। এই বইটি আমাদের
শিক্ষার্থীদের সমস্যা সমাধানে দক্ষ করে তুলতে সহায়ক হবে বলে
আমাদের দৃঢ় বিশ্বাস। আমরা গণিতের ভয় জয় করে সমস্যা সমাধানে
দক্ষ করে তুলতে চাই আমাদের প্রজন্মকে। এর ধারাবাহিকতার একটি
সফল প্রইয়াস এই বই খানা।

অনেক দীর্ঘ সময় নিয়ে বইটি লিখবার চেষ্টা করেছি। তবুও অনেক বিষয়কেই তুলে ধরতে আমরা ব্যর্থ হয়েছি বলে বিশ্বাস করি। এই সকল ব্যর্থতাকে সফল করে তুলবার চেষ্টা করব পরের খন্ডগুলোতে।

বইটি তে তাত্ত্বিক আলোচনার পাশাপাশি যথেষ্ট উদাহরণের মাধ্যমে সমস্যা সমাধানের কৌশল দেখানো হয়েছে। সেইসাথে থাকছে পর্যাপ্ত পরিমাণ অনুশীলনি যার যার মাধ্যমে যা শিখছি তা যাচাই করবার সুযোগ পাবে আমাদের শিক্ষার্থীরা।

বইটির কাজে সহযোগিতা করার জন্যে মোঃ মাহমুদুল হাসান এর প্রতি বিশেষ কৃতজ্ঞতা জ্ঞাপন করছি।

বই এর সাথে শিক্ষার্থীদের যাত্রা সুন্দর হোক। আশা রাখি বইটি সকলের কাজে আসবে।

সকলের জীবন পাই এর মত সুন্দর হোক। শুভকামনা রইল সকলের জন্যে।

মোহাম্মদ মাজেদুর রহমান

শিক্ষার্থী, ফলিত গণিত বিভাগ, ঢাকা বিশ্ববিদ্যালয়।

একাডেমিক সদস্য, বাংলাদেশ গণিত অলিম্পিয়াড।

সভাপতি, বোসন বিজ্ঞান সংঘ।

অনেকদিন পর পাঠকের হাতে একটা নতুন বই হাতে তুলে দিতে পারছি। এবারের বইটি লেখার সময় চেষ্টা করেছি যাতে অল্প কথায় গণিতের অনেক টপিক কাভার হয়ে যায়। বইটিতে মূলত সংখ্যাতত্ত্ব, বিন্যাস-সমাবেশ ও সম্ভাবনা, বীজগণিত এবং জ্যামিতির ব্যাসিক বিষয় নিয়ে ধারণা দেওয়া হয়েছে এবং এই সকল বিষয় ভিত্তিক সমস্যা সমাধানের কৌশল দেখানো আছে। তবে বইটির অধ্যায় অনেক ছোট হবার কারণে পাঠক শুধুমাত্র টপিক সম্পর্কে ধারণা পাবেন। আরো বিস্তারিত জানানোর জন্য আরো অনেক বই লেখা দরকার। এক্ষেত্রে জ্যামিতি অংশের বিস্তারিত জানানোর জন্য “জ্যামিতির যত কৌশল” এবং “জ্যামিতির আরো যত কৌশল” নামে দুইটি বই আগেই লেখা আছে। (আশা রাখি এই সিরিজের আরো বই আসবে।) যদিও এখানে খুব অল্প কথার মাধ্যমে অধ্যায় শেষ করা হয়েছে। তবুও অনুশীলনী কিন্তু একদম কম দেয়া নেই। আশা করবো সবাই সেই অনুশীলনীগুলো সমাধান করে ফেলবে। এর পাশাপাশি পাঠকদের আগ্রহ থাকলে এই প্রশ্নের সমাধান আলোচনার জন্য একটি ফেসবুক গ্রুপ তৈরি করে ফেলতে পারি। (করা হলে এই সিরিজের পরের বইতে অবশ্যই নাম দেয়া থাকবে।) আলোচনা থেকে বুঝতে পারছ আমরা এই বইয়ের দ্বিতীয় খন্ড লিখতেও আগ্রহী। এই বইটি পড়ার পর যদি পাঠকের মনে গণিত নিয়ে কিছুটা আগ্রহ তৈরি হয় তাহলে বই লেখার উদ্দেশ্য সার্থক বলে ধরে নেবো। আর এই বই লেখার ক্ষেত্রে সবচেয়ে বেশী সহায়তা নিয়েছি the Art of Problem Solving, Volume 1: the Basics বইটির।

সবার গণিতের প্রতি আগ্রহ বৃদ্ধি পাক এই প্রত্যাশায়।

দিপু সরকার

ভূমিকা

সমস্যা কী? আর সমাধানই বা কীভাবে করবো?- এই দুটো প্রশ্নের উত্তর জানতে তো সবারই ইচ্ছে করে।

মুশকিল হলো এক লাইনে এই প্রশ্নের কোনো উত্তর নেই। সমস্যা সমাধান কৌশল জানতে হলে শুনতে হবে পুরো গল্পটা। “গণিতের সমস্যা সমাধানের কৌশল” বইতে সংখ্যার নানা মজার বৈশিষ্ট্য দিয়ে শুরু হয়েছে। মাঝখানে জ্যামিতির রাজ্যে হানা দিয়ে শেষমেষ কীভাবে প্রমাণ করতে হয় সেই গল্পে গিয়ে শেষ হয়েছে বইটা। এরমাঝে পরিসংখ্যান আর সম্ভাব্যতার নানা হিসাব নিকাশও চলে এসেছে প্রয়োজনের তাগিদে। আর এই বইটা শুধু পড়লেই হবে না, বইয়ে দেওয়া সমস্যাগুলিও সমাধানও করতে হবে। গণিতের আরো নানা চমকপ্রদ বিষয় খুঁজে পাওয়া যাবে এই বইতে। পাঠকের মনে কৌতুহল জাগিয়ে তুলুক বইটি সেই প্রত্যাশা রইলো।

প্রথম খণ্ডের পুনঃলিখন।

শুভকামনায়-

সকাল রায়

একাডেমিক কাউন্সিলর, বাংলাদেশ গণিত অলিম্পিয়াড কমিটি
প্রাক্তন সিনিয়র ম্যাথ অলিম্পিয়াড কনসালটেন্ট,
প্রাথমিক ও গণশিক্ষা মন্ত্রণালয়
লেখক, মাধ্যমিক গণিত পাঠ্যপুস্তক, এনসিটিবি
আডজাংস্ট (কন্ট্রাকচুয়াল) ফ্যাকাল্টি,
ডিপার্টমেন্ট অব এম এন এস, ব্র্যাক বিশ্ববিদ্যালয়

সূচিপত্র

অধ্যায় ১০	জ্যামিতি: চতুর্ভুজ	১৫-২৭
১০.১	মৌলিক বিষয়বস্তু	১৫
১০.২	বিশেষ ধরনের চতুর্ভুজ	১৫
১০.২.১	ট্রাপিজিয়াম	১৫
১০.২.২	সামান্তরিক ক্ষেত্র	১৮
১০.২.৩	রম্বস	২০
১০.২.৪	আয়তক্ষেত্র ও বর্গক্ষেত্র	২২
১০.৩	চতুর্ভুজ নিয়ে কিছু প্রশ্ন	২৪
অধ্যায় ১১	স্থানাঙ্ক ব্যবস্থার যাদু	২৮-৪০
১১.১	সমতলে চিহ্নিত করা	২৮
১১.২	স্থানাঙ্কের সৌন্দর্য ও লেখচিত্র	২৯
১১.৩	স্থানাঙ্ক ব্যবস্থার খোঁজ খবর	৩০
১১.৪	সরলরেখা স্থাপন	৩৫
১১.৫	দূরত্বের সূত্র এবং বৃত্ত	৩৫
১১.৬	বিশ্লেষণ মূলক জ্যামিতি	৩৮
অধ্যায় ১২	দা পাওয়ার অফ পয়েন্ট	৪১-৪৫
১২.১	সূচনা	৪১
১২.২	পাওয়ার অফ পয়েন্টের একটি প্রমাণ	৪৩
১২.২.১	বৃত্তের অভ্যন্তরের বিন্দু হতে	৪৪
অধ্যায় ১৩	ত্রিমাত্রিক জ্যামিতি	৪৬-৬২
১৩.১	তল, ক্ষেত্রফল এবং আয়তন	৪৬
১৩.২	গোলক	৪৬
১৩.৩	ঘনক্ষেত্র এবং বাক্স।	৪৭
১৩.৪	প্রিজম এবং সিলিন্ডার	৫২

১৩.৫	পিরামিড এবং কোণ	৫৩
১৩.৬	বহুতলক	৫৫
অধ্যায় ১৪	রূপান্তর (স্থানান্তর, ঘূর্ণন, প্রতিফলন, প্রসারণ, সংকোচন)	৬৩-৭১
১৪.১	স্থানান্তর	৬৩
১৪.২	ঘূর্ণন	৬৪
১৪.৩	প্রতিফলন	৬৬
১৪.৪	বিকৃতি	৬৮
১৪.৫	প্রসারণ ও সংকোচন	৬৮
অধ্যায় ১৫	ফাংশন	৭২-৮৭
১৫.১	যন্ত্রে স্বাগতম	৭২
১৫.২	ফাংশনকে লেখচিত্রে চিত্রায়ন	৭৪
১৫.৩	ইনপুট ও আউটপুট	৭৫
১৫.৪	জোড় এবং বিজোড় ফাংশন	৭৭
১৫.৫	কিছু বিশেষ ফাংশন	৭৯
১৫.৫.১	পরমমান	৭৯
১৫.৫.২	ফ্লোর ফাংশন	৮০
১৫.৫.৩	খন্ডিত ফাংশন	৮২
১৫.৬	একটি ফাংশনকে রূপান্তর	৮৩
অধ্যায় ১৬	ক্রম ও সিরিজ	৮৮-৯৭
১৬.১	গাণিতিক সিরিজ	৮৮
১৬.২	জ্যামিতিক সিরিজ	৯০
১৬.৩	অসীম ধারা	৯১
১৬.৪	Σi এবং Πi	৯৩
১৬.৫	ক্রম	৯৪
১৬.৬	ক্রম এবং গড়	৯৫
অধ্যায় ১৭	গণনা শিক্ষা	৯৮-১১৪
১৭.১	কী শিখতে হবে?	৯৮
১৭.২	কতভাবে সম্ভব?	৯৯
১৭.৩	উৎপাদক সংখ্যা	১০০

১৭.৪	গুণনের ক্ষেত্রে বিধি নিষেধ	১০১
১৭.৫	বিন্যাস	১০২
১৭.৬	মিশ্রিত সমস্যা	১০৫
১৭.৭	ভুল জিনিস গণনা: প্রথম অংশ	১০৬
১৭.৮	ভুল জিনিস গণনা: দ্বিতীয় অংশ	১০৭
১৭.৯	অন্যভাবে করা	১১০
১৭.১০	বহুপদী উপপাদ্য	১১১
অধ্যায় ১৮	পরিসংখ্যান ও সম্ভাবনা	১১৫-১২৫
১৮.১	পরিসংখ্যান	১১৫
১৮.২	সম্ভাবনা ও সাধারণ চিন্তাধারা	১১৭
১৮.৩	সম্ভাবতার গুণন	১২০
১৮.৪	শর্ত সাপেক্ষে কাজ	১২১
১৮.৫	প্রত্যাশিত মান	১২৩
অধ্যায় ১৯	সেট	১২৬-১৩১
১৯.১	কিছু সংজ্ঞা	১২৬
১৯.২	সেটের অপারেশন	১২৭
১৯.৩	ভেন চিত্র	১২৮
১৯.৪	উপসেট	১৩০
অধ্যায় ২০	প্রমাণ করো	১৩২-১৩৭
২০.১	কথার যাদু	১৩২
২০.২	অসঙ্গতি	১৩৪
২০.৩	বিপরীত মান অবশ্যজ্ঞাবীভাবে সত্য নয়!	১৩৪
২০.৪	গাণিতিক আরোহ	১৩৫
অধ্যায় ২১	অসমতা	১৩৮-১৪৮
২১.১	কী করতে হবে?	১৩৮
২১.২	সরলরৈখিক অসমতা	১৪০
২১.৩	দ্বিঘাত অসমতা	১৪২
২১.৪	অসমতার পরম মান	১৪৫
২১.৫	অসমতার বিশেষ বৈশিষ্ট্য	১৪৬
অধ্যায় ২২	অপারেশন এবং রিলেশন	১৪৯-২৩০

২২.১	অপারেশন কী?	১৪৯
২২.২	অপারেশনের বৈশিষ্ট্য	১৫০
২২.২.১	বিনিময় বিধি	১৫০
২২.২.২	সংযোগ বিধি	১৫০
২২.২.৩	বণ্টন বিধি	১৫০
২২.২.৪	অভেদক বিধি	১৫০
২২.৩	রিলেশন	১৫১
২২.৩.১	প্রতিফলন	১৫২
২২.৩.২	প্রতিসাম্যতা	১৫২
২২.৩.৩	সাম্যতা বা ট্রান্সজিটিভিটি	১৫২

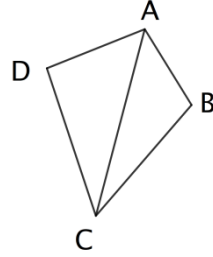
অধ্যায়: ১০

জ্যামিতি: চতুর্ভুজ

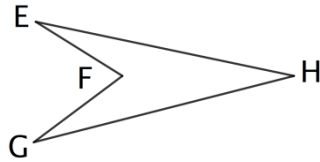
১০.১ মৌলিক বিষয়বস্তু

চতুর্ভুজ হলো চার বাহু দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্র। উত্তল চতুর্ভুজ হলো সেই চতুর্ভুজ যার সকল কোণের পরিমাণ 180° -এর কম। আর অবতল চতুর্ভুজের একটি কোণের মান 180° এর চেয়ে বেশি। অবতল চতুর্ভুজ সমস্যা সমাধান করার সময় খুব বেশি দেখা যায় না। তাই এই অধ্যায়ে আমরা উত্তল চতুর্ভুজ নিয়ে আলোচনা করব।

চতুর্ভুজের কর্ণ হলো চতুর্ভুজের বিপরীত শীর্ষ দুটির মধ্যকার রেখাংশ। উদাহরণস্বরূপ চিত্রের ABCD চতুর্ভুজের কর্ণ AC কিন্তু AB বা AD কর্ণ নয়। সকল চতুর্ভুজের কর্ণ দুইটি। চতুর্ভুজটি কর্ণ দুটি পরস্পর লম্ব হলে চতুর্ভুজটি লম্বকর্ণ বলা হয়।



চতুর্ভুজ ABCD এর অভ্যন্তরীণ কোণের সমষ্টি 360° ; কারণ ABCD আসলে ACD ও ABC দুইটির ত্রিভুজের কোণগুলোর সমষ্টি। চতুর্ভুজের পরিসীমা হলো চার বাহুর সমষ্টি।



(চতুর্ভুজ, বহুভুজ ও বৃত্ত সম্পর্কে আরো জানার জন্য জ্যামিতির আরো যত কৌশল বইটা পড়ার পরামর্শ রইলো।)

পরের অংশে আমরা বিশেষ ধরনের চতুর্ভুজ নিয়ে আলোচনা করব।

১০.২ বিশেষ ধরনের চতুর্ভুজ

১০.২.১ ট্রাপিজিয়াম

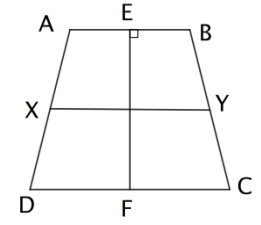
যে চতুর্ভুজের দুটি বাহু সমান্তরাল তাকে ট্রাপিজিয়াম বলে। সমান্তরাল বাহুদুটি

হলো চতুর্ভুজের ভিত্তি বা ভূমি।

পাশের চিত্রে $AB \parallel CD$ অতএব,

$$\angle ABC + \angle BCD = \angle BAD + \angle ADC = 180^\circ$$

EF রেখাংশ হলো সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব। EF হলো ট্রাপিজিয়ামের উচ্চতা।



XY হলো তীর্যক বাহু দুইটির মধ্যবিন্দুর সংযোজক রেখাংশ, একে ট্রাপিজিয়ামের মধ্যমা বলে। মধ্যমাটি ট্রাপিজিয়ামের ক্ষেত্রফল নির্ণয়ের জন্য ব্যবহার করা যায়। প্রথমে বুঝতে হবে যে, XY হলো ট্রাপিজিয়ামের ভিত্তিদ্বয়ের সমান্তরাল। এটা প্রমাণ করতে দেখাতো হবে যে X ও Y বিন্দু সমদূরবর্তী। ক্ষেত্রফল নির্ণয়ের আগে মধ্যমার দৈর্ঘ্য নির্ণয় করি।

আমরা প্রথমে AE ও BF উচ্চতা অঙ্কন করি। যা EFZW ও WZBA দুটি আয়তক্ষেত্র তৈরি করে।

সুতরাং, $AB = WZ = EF$ । যেহেতু $XY \parallel DC$, আমরা AA পদ্ধতি থেকে পাই $\triangle AXW \sim \triangle ADE$ এবং $\triangle BZY \sim \triangle BFC$ ।

যেহেতু XY ভিত্তিদ্বয়ের থেকে সমদূরবর্তী আমরা পাই,

$$BZ = ZF = AW = WE$$

$$\text{সুতরাং, } \frac{AW}{AE} = \frac{XW}{DE} = \frac{ZY}{FC} = \frac{BY}{BC} = \frac{1}{2}$$

মধ্যমার দৈর্ঘ্য নির্ণয় করি,

$$\begin{aligned} AB + CD &= AB + EF + DE + FC \\ &= AB + AB + 2XW + 2ZY \\ &= 2WZ + 2XW + 2ZY \\ &= 2(XW + WZ + ZY) \\ &= 2XY \end{aligned}$$

$$\text{বা, } XY = \frac{AB + CD}{2}$$

