

গণিতের সমস্যা সমাধানের কৌশল
(প্রথম খণ্ড)

গণিতের সমস্যা সমাধানের কৌশল

(প্রথম খণ্ড)

মোহাম্মদ মাজেদুর রহমান
দিপু সরকার



গণিতের সমস্যা সমাধানের কৌশল (প্রথম খণ্ড)

মোহাম্মদ মাজেদুর রহমান, দিপু সরকার

গ্রন্থস্বত্ব: লেখক

প্রথম প্রকাশ: ফেব্রুয়ারি ২০২৪

তাম্রলিপি: ৭৮৭

প্রকাশক

এ কে এম তারিকুল ইসলাম রনি

তাম্রলিপি

৩৮/৪ বাংলাবাজার, ঢাকা-১১০০

প্রচ্ছদ

রাসেল আহমেদ

বর্ণবিন্যাস

তাম্রলিপি কম্পিউটার

মুদ্রণ

মা প্রিন্টিং প্রেস

২৮/২৩ গোপাল শাহ লেন, ঢাকা

মূল্য: ৪৮০.০০

Goniter Somossa Somadhaner Koushol (1st Part)

By: Muhammad Majadur Rahman, Dipu Sarkar

First Published: February 2024 by A K M Tariqul Islam Roni
Tamralipi, 38/4 Banglabazar, Dhaka-1100

Price: 480.00

\$16

ISBN: 978-984-98662-1-3

উৎসর্গ

অংক মুখস্থ না করেও যে চিন্তা করা যায়, একটা বিষয়কে বিভিন্ন
আঙ্গিকে দেখা যায়, যেকোনো গাণিতিক সমস্যাকে একাধিক উপায়ে
সমাধান সম্ভব ও যেকোনো যুক্তিযুক্ত উপায়ই যে সঠিক হতে পারে এমন
দৃষ্টিভঙ্গি যিনি খুব অল্প বয়সে আমার মাথায় ঢুকিয়ে দিয়েছিলেন,
বড়মামা মো: শাহজাহান মিয়া-কে। (মোহাম্মদ মাজেদুর রহমান)
যাদের অক্লান্ত পরিশ্রমের কারণে প্রতিবছর গণিত অলিম্পিয়াডের
সৌন্দর্য উপভোগ করা যায় সেই সকল একাডেমিক টিম মেম্বর ও
মুভার্সদের।

(দিপু সরকার)

লেখকের কথা

বইটি লেখার মূল উদ্দেশ্য যে সকল বেসিক বিষয় আমাদের স্কুলে শেখানো
হয় সেসকল বিষয়কে বিস্তারিত ভাবে তুলে ধরা। বিষয়ভিত্তিক আলোচনার
পাশাপাশি সমস্যা সমাধানের কৌশল নিয়ে আলোচনাই বইটির মূল
বিষয়বস্তু। আমরা এই বইটিকে জাতীয় পাঠ্যক্রমের সহায়ক পাঠ্যবই এর
মত করে তৈরী করবার সর্বাত্মক চেষ্টা করেছি। বইটিতে মূলত সংখ্যাতত্ত্ব,
বিন্যাস-সমাবেশ ও সম্ভাবনা, বীজগণিত এবং জ্যামিতির ব্যাসিক বিষয় নিয়ে
ধারণা দেওয়া হয়েছে এবং এই সকল বিষয় ভিত্তিক সমস্যা সমাধানের
কৌশল দেখানো আছে। বইটি গণিত অলিম্পিয়াডে অংশগ্রহণকারীদের
প্রস্তুতির জন্যেও একটি চমৎকার বই হবে বলে আশা করছি।

বইটিতে ষষ্ঠ থেকে দশম শ্রেণিতে পড়ুয়া শিক্ষার্থীদের যে সকল সাধারণ
গাণিতিক জ্ঞান অর্জন করার প্রয়োজন হয় ভবিষ্যত গাণিতিক শিক্ষার
জন্মে তাঁর সকলই আলোচনা করা হয়েছে। এই বইটিতে সকল বিষয়ের
খুব বেশি গভীরে আলোচনা করবার সুযোগ হয়নি। তবে এর ধারাবাহিক
পরবর্তী বই গুলোতে বিষয়ভিত্তিক গভীরে আলোচনা করার সফল চেষ্টা
অব্যাহত থাকবে।

আমরা যখন স্কুলে পড়েছি তখন আমাদের সমস্যা সমাধানের দক্ষতার
জন্মে তেমন উদ্যোগ গ্রহণ করতে দেখিনি সেভাবে। এই বইটি আমাদের
শিক্ষার্থীদের সমস্যা সমাধানে দক্ষ করে তুলতে সহায়ক হবে বলে
আমাদের দৃঢ় বিশ্বাস। আমরা গণিতের ভয় জয় করে সমস্যা সমাধানে
দক্ষ করে তুলতে চাই আমাদের প্রজন্মকে। এর ধারাবাহিকতার একটি
সফল প্রইয়াস এই বই খানা।

অনেক দীর্ঘ সময় নিয়ে বইটি লিখবার চেষ্টা করেছি। তবুও অনেক বিষয়কেই তুলে ধরতে আমরা ব্যর্থ হয়েছি বলে বিশ্বাস করি। এই সকল ব্যর্থতাকে সফল করে তুলবার চেষ্টা করব পরের খণ্ডগুলোতে।

বইটিতে তাত্ত্বিক আলোচনার পাশাপাশি যথেষ্ট উদাহরণের মাধ্যমে সমস্যা সমাধানের কৌশল দেখানো হয়েছে। সেইসাথে থাকছে পর্যাপ্ত পরিমাণ অনুশীলনি যার যার মাধ্যমে যা শিখছি তা যাচাই করবার সুযোগ পাবে আমাদের শিক্ষার্থীরা।

বইটির কাজে সহযোগিতা করার জন্যে মোঃ মাহমুদুল হাসান এর প্রতি বিশেষ কৃতজ্ঞতা জ্ঞাপন করছি।

বই এর সাথে শিক্ষার্থীদের যাত্রা সুন্দর হোক। আশা রাখি বইটি সকলের কাজে আসবে।

সকলের জীবন পাই-এর মত সুন্দর হোক। শুভকামনা রইল সকলের জন্যে।

মোহাম্মদ মাজেদুর রহমান

শিক্ষার্থী, ফলিত গণিত বিভাগ, ঢাকা বিশ্ববিদ্যালয়।

একাডেমিক সদস্য, বাংলাদেশ গণিত অলিম্পিয়াড।

সভাপতি, বোসন বিজ্ঞান সংঘ।

অনেকদিন পর পাঠকের হাতে একটা নতুন বই হাতে তুলে দিতে পারছি। এবারের বইটি লেখার সময় চেষ্টা করেছি যাতে অল্প কথায় গণিতের অনেক টপিক কাভার হয়ে যায়। বইটিতে মূলত সংখ্যাতত্ত্ব, বিন্যাস-সমাবেশ ও সম্ভাবনা, বীজগণিত এবং জ্যামিতির ব্যাসিক বিষয় নিয়ে ধারণা দেওয়া হয়েছে এবং এই সকল বিষয় ভিত্তিক সমস্যা সমাধানের কৌশল দেখানো আছে। তবে বইটির অধ্যায় অনেক ছোট হবার কারণে পাঠক শুধুমাত্র টপিক সম্পর্কে ধারণা পাবেন। আরো বিস্তারিত জানানোর জন্য আরো অনেক বই লেখা দরকার। এক্ষেত্রে জ্যামিতি অংশের বিস্তারিত জানানোর জন্য “জ্যামিতির যত কৌশল” এবং “জ্যামিতির আরো যত কৌশল” নামে দুইটি বই আগেই লেখা আছে। (আশা রাখি এই সিরিজের আরো বই আসবে।) যদিও এখানে খুব অল্প কথার মাধ্যমে অধ্যায় শেষ করা হয়েছে। তবুও অনুশীলনী কিন্তু একদম কম দেয়া নেই। আশা করবো সবাই সেই অনুশীলনীগুলো সমাধান করে ফেলবে। এর পাশাপাশি পাঠকদের আগ্রহ থাকলে এই প্রশ্নের সমাধান আলোচনার জন্য একটি ফেসবুক গ্রুপ তৈরি করে ফেলতে পারি। (করা হলে এই সিরিজের পরের বইতে অবশ্যই নাম দেয়া থাকবে।) আলোচনা থেকে বুঝতে পারছ আমরা এই বইয়ের দ্বিতীয় খন্ড লিখতেও আগ্রহী। এই বইটি পড়ার পর যদি পাঠকের মনে গণিত নিয়ে কিছুটা আগ্রহ তৈরি হয় তাহলে বই লেখার উদ্দেশ্য সার্থক বলে ধরে নেবো। আর এই বই লেখার ক্ষেত্রে সবচেয়ে বেশী সহায়তা নিয়েছি the Art of Problem Solving, Volume 1: the Basics বইটির।

সবার গণিতের প্রতি আগ্রহ বৃদ্ধি পাক এই প্রত্যাশায়।

দিপু সরকার

ভূমিকা

সমস্যা কী? আর সমাধানই বা কীভাবে করবো?- এই দুটো প্রশ্নের উত্তর জানতে তো সবারই ইচ্ছে করে।

মুশকিল হলো এক লাইনে এই প্রশ্নের কোনো উত্তর নেই। সমস্যা সমাধান কৌশল জানতে হলে শুনতে হবে পুরো গল্পটা। গণিতের সমস্যা সমাধানের কৌশল” বইতে সংখ্যার নানা মজার বৈশিষ্ট্য দিয়ে শুরু হয়েছে। মাঝখানে জ্যামিতির রাজ্যে হানা দিয়ে শেষমেষ কীভাবে প্রমাণ করতে হয় সেই গল্পে গিয়ে শেষ হয়েছে বইটা। এরমাঝে পরিসংখ্যান আর সম্ভাব্যতার নানা হিসাব নিকাশও চলে এসেছে প্রয়োজনের তাগিদে। আর এই বইটা শুধু পড়লেই হবে না, বইয়ে দেওয়া সমস্যাগুলিও সমাধানও করতে হবে। গণিতের আরো নানা চমকপ্রদ বিষয় খুঁজে পাওয়া যাবে এই বইতে। পাঠকের মনে কৌতুহল জাগিয়ে তুলুক বইটি সেই প্রত্যাশা রইলো।

শুভকামনায়—

সকাল রায়

একাডেমিক কাউন্সিলর, বাংলাদেশ গণিত অলিম্পিয়াড কমিটি
প্রাক্তন সিনিয়র ম্যাথ অলিম্পিয়াড কনসালটেন্ট, প্রাথমিক ও গণশিক্ষা
মন্ত্রণালয়
লেখক, মাধ্যমিক গণিত পাঠ্যপুস্তক, এনসিটিবি
আডজাংক্ট (কন্ট্রাকচুয়াল) ফ্যাকাল্টি,
ডিপার্টমেন্ট অব এম এন এস, ব্র্যাক বিশ্ববিদ্যালয়

সূচিপত্র

অধ্যায় ১	সূচক ও লগাদিরম	১৫-৩৪
১.১	পূর্ণসাংখ্যিক সূচক	১৫
১.২	সূচকীয় ভগ্নাংশ	২১
১.৩	ভিত্তি রাশির সরলীকরণ	২৫
১.৪	হরকে মূলদে রূপান্তর	২৭
১.৫	লগারিদম	৩১
অধ্যায় ২	জটিল সংখ্যা	৩৫-৪০
২.১	(-1) এর বর্গমূল	৩৫
২.২	জটিল সংখ্যার ক্রিয়াকলাপ	৩৬
অধ্যায় ৩	রৈখিক সমীকরণ	৪১-৫৫
৩.১	রৈখিক সমীকরণ কী?	৪১
৩.২	এক সমীকরণ, এক চলক	৪২
৩.৩	দুই সমীকরণ, দুই চলক	৪৪
৩.৩.১	প্রতিস্থাপন	৪৫
৩.৩.২	বর্জন	৪৬
৩.৪	শব্দ সমস্যা	৪৯
অধ্যায় ৪	অনুপাত	৫৬-৭০
৪.১	অনুপাত ও বিপরীত অনুপাত	৫৬
৪.২	অনুপাতের হেরফের	৬০
৪.৩	এককের রূপান্তর	৬২
৪.৪	শতকরা	৬৫
অধ্যায় ৫	পূর্ণসংখ্যার ব্যবহার	৭১-৮৯

৫.১	বিভাজ্যতা	৭১
৫.২	সংখ্যার ভিত্তি	৭২
৫.৩	শেষ অংক	৭৬
৫.৪	মডুলার পাটিগণিত	৭৭
৫.৫	কৌশল	৮১
৫.৬	মৌলিক সংখ্যা	৮৪
৫.৭	সাধারণ ও সকল উৎপাদক	৮৬
অধ্যায় ৬	দ্বিঘাত সমীকরণ	৯০-১০৮
৬.১	দ্বিঘাত কী?	৯০
৬.২	দ্বিঘাতকে গুণনীয়করণ	৯০
৬.৩	দ্বিঘাত সূত্র	৯৬
৬.৪	সমীকরণের রূপান্তর	১০০
৬.৪.১	পুনর্বিন্যাস সমস্যা	১০০
৬.৪.২	প্রতিস্থাপন	১০২
৬.৫	অমূলদ ও কাল্পনিক সংখ্যার বর্গমূল	১০৩
৬.৬	দ্বিঘাত এর পেছনে	১০৬
অধ্যায় ৭	উৎপাদকে বিশ্লেষণ	১০৯-১১৬
৭.১	উৎপাদক বিশ্লেষণ	১০৯
৭.২	কৌশল	১১২
অধ্যায় ৮	সংখ্যাগুলো আসলে কী?	১১৭-১২২
৮.১	পূর্ণসংখ্যা ও মূলদ সংখ্যা	১১৭
অধ্যায় ৯	জ্যামিতি: ত্রিভুজ	১২৩-১৬০
৯.১	ত্রিভুজের প্রকারভেদ	১২৩
৯.২	ত্রিভুজের অংশ	১২৪
৯.২.১	মধ্যমা	১২৪

৯.২.২	কোণের সমদ্বিখন্ডক	১২৫
৯.২.৩	লম্ব সমদ্বিখন্ডক	১২৬
৯.২.৪	ভূমি	১২৭
৯.৩	ত্রিভুজ অসমতা	১২৯
৯.৪	পীথাগোরাসের উপপাদ্য	১৩০
৯.৪.১	পীথাগোরীয় ত্রয়ী	১৩২
৯.৫	সর্বসম ত্রিভুজ	১৩৪
৯.৫.১	সর্বসমতা উপপাদ্য	১৩৪
৯.৬	সদৃশ ত্রিভুজ	১৩৯
৯.৬.১	সদৃশ উপপাদ্য	১৩৯
৯.৭	ত্রিকোণমিতির পরিচয়	১৪৪
৯.৮	ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল	১৫০
৯.৯	কিছু প্রয়োজনীয় তথ্য	১৫৬

অধ্যায় ১

সূচক ও লগাদিরম

১.১ পূর্ণসাংখ্যিক সূচক

সূচক ও লগারিদমের সম্পর্কে জানার আগে আমাদের যোগ ও গুণ সম্পর্কে স্পষ্টভাবে জানতে হবে। কিছু সংখ্যা বা একইরকম অনেকগুলো বস্তুকে একত্রিত করাই হলো যোগ। আর বিশেষ ধরনের যোগকে গুণকে বলা যায়। অনেকগুলো একই ধরনের সংখ্যা যোগ করার পরিবর্তে আমরা তাদেরকে গুণ আকারে লিখতে পারি।

যেমন— আমরা $2 + 2 + 2 + 2 + 2$ লেখার পরিবর্তে 5×2 লিখতে পারি। এর মানে হলো আসলে পাঁচটা দুই যোগ করা। একইভাবে, $x + x + x + x$ এর পরিবর্তে $4x$ লিখতে পারি। (এর মানে কী সেটা নিজেই বলো।) তাই বলা যায়, গুণের মাধ্যমে একই রকম যোগের কাজকে সহজ করা যায়।

বারবার একই সংখ্যা যোগ করার সংক্ষিপ্ত পদ্ধতি যেমন গুণ, ঠিক তেমনি বারবার একই সংখ্যা গুণ করার সংক্ষিপ্ত পদ্ধতিও রয়েছে। যেমন— আমরা $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$ লেখার পরিবর্তে লিখতে পারি 2^7 । 2^7 মানে হলো, 2 সংখ্যাটি 7 বার গুণ আকারে আছে। একইভাবে $x \times x \times x \times x \times x \times x \times x$ কে আমরা লিখতে পারি x^5 , যার মানে x পাঁচবার গুণ আকারে আছে।

2^7 এই সংখ্যাটির 2 কে বলা হয় ভিত্তি (base) আর 7 কে বলা হয় সূচক বা Power। কিছু বিশেষ ধরনের সূচক রয়েছে যাদেরকে বিশেষ ধরনের নামে ডাকা হয়। যেমন: সূচক যদি 2 হয় তা হলে তাকে বলা হয় বর্গ আর সূচক 3 হলে তাকে বলে ঘন। [যখন বর্গক্ষেত্র ও ঘনবস্তু সম্পর্কে জানবে তখন এদের নামের উৎস সম্পর্কে বিস্তারিত জানবে]

চলো এবার সূচকের বৈশিষ্ট্য সম্পর্কে জানা যাক।

উদাহরণ ১.১: $2^5 \times 2^6$ এর মান কত?

সমাধান: এই উদাহরণ লক্ষ করলে দেখা যাবে যে, এখানে 5 টি 2 আর 6 টি 2 গুণ আকারে আছে। এখানে এই দুটি সংখ্যার গুণফল নির্ণয় করতে হবে। একটু

লক্ষ করলেই দেখা যাবে 5 টি 2 আর 6 টি 2 অর্থাৎ 11 টি 2 গুণ আকারে আছে। অতএব আমরা পাই,

$$2^5 \times 2^6 = 2^{(5+6)} = 2^{11} = 2048$$

উদাহরণ ১.২: $\frac{3^{15}}{3^{12}} = ?$

সমাধান: এখানে লব হিসেবে 15টি 3 গুণ আকারে আছে আর হর হিসেবে 12টি 3 গুণ আকারে আছে। এখানে লবের 12 টি 3 ও হরের 12 টি 3 কাটাকাটি চলে যায়। অর্থাৎ Vanish হয়ে যায়। কারণ $\left(\frac{3}{3} = 1\right)$ । ফলে লবের তিনটি 3 গুণ আকারে থেকে যায়।

ভগ্নাংশকে সাধারণত $\frac{a}{b}$ আকারে প্রকাশ করা হয় যেখানে a ও b হচ্ছে স্বাভাবিক পূর্ণ সংখ্যা। এখানে a কে লব ও b কে হর বলা হয়।

বিষয়টা ভালোভাবে বুঝতে নিচের অঙ্ক খেয়াল কর:

$$\begin{aligned} &= \frac{3^{15}}{3^{12}} \\ &= \frac{3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3}{3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3} \\ &= \frac{3 \times 3 \times 3}{1} \\ &= 27 \end{aligned}$$

সহজভাবে বলা যায়,

$$\frac{3^{15}}{3^{12}} = 3^{15-12} = 3^3 = 27$$

উপরের উদাহরণ থেকে আমরা বলতে পারি, একই ভিত্তির দুই বা ততোধিক সংখ্যা গুণ এবং ভাগ করি তাদের সূচকগুলো যথাক্রমে যোগ এবং বিয়োগ হয়।

মনে রাখবে একই ভিত্তির দুই বা ততোধিক সংখ্যা গুণ এবং ভাগ করা হলে তাদের সূচকগুলো যথাক্রমে যোগ এবং বিয়োগ হয়।

এবার নিচের উদাহরণটি খেয়াল করা যাক,

$$\frac{3^6}{3^8} = \text{এর মান কত?}$$