4.6.1 Let H_X be an X module. $T\in B(H_X)$. $\mathrm{supp}(T)=$ the complement of $\{(x,y)\in X\times X:$ $\exists f,g\in C_0(X)$ s.t. $f(x)\neq 0$, $g(y)\neq 0$ and $fTg=0\}$. Show that this definition is equivalent to Definition 4.1.7.

Solution. In Definition 4.1.7, $\mathrm{supp}(T)=\{(x,y)\in X\times X$: for all open neighbourhoods U of x and V of y, $\chi_U T\chi_V\neq 0\}$.

将4.6.1 的定义记为 S_1， 4.1.7的定义记为S_2. 若$(x,y)\in S_2$ 且 $(x,y)\notin S_1$, 则 $\exists f,g\in C_0(X)$ 使$f(x)\neq 0$, $g(y)\neq 0$, $fTg=0$. 由f,g连续, 分别存在 x,y 的开邻域 U, V使 $\inf\limits_U |f|>0$, $\inf\limits_V |g|>0$, 这可以通过取 $x\in \underset{开}{U}\subseteq \underset{紧}{K}\subseteq \underset{开}{U'}$ 得到, $|f|\,|_{U'}>0$, $|f|$在 K上有正最小值. 于是存在有界 Borel 函数 $f^\dagger$, $g^\dagger$ 使 $ff^\dagger=\chi_U$, $gg^\dagger=\chi_V$. 故 $\chi_U T\chi_V=f^\dagger fTgg^\dagger=0$, 矛盾. 故 $S_2\subseteq S_1$.

反之, 若$(x,y)\in S_1$ 且$(x,y)\notin S_2$, 则 $\exists$ x 的开邻域U, y的开邻域 V使 $\chi_U T\chi_V=0$. 由 Urysohn引理, 存在 $f,g\in C_0(X)$ 使 $f(x)=1$, $g(y)=1$. $\mathrm{supp}(f)\subseteq U$, $\mathrm{supp}(g)\subseteq V$. 则 $f\chi_U=f$, $g\chi_V=g$. 故 $fTg=f\chi_U T\chi_V g=0$, 矛盾. 故 $S_1\subseteq S_2$. $\square$

4.6.2 Show that any separable X module identifies with a direct sum $\bigoplus_{n=1}^{\infty} L^2(X,\mu_n)$ for some collection (μ_n) of Radon measures on X, equipped with the direct sum of the multiplication representations. Find explicit measures that have the above property for Example 4.1.6.

Solution. 设 (ρ, X, H_X)是可分X module. $\rho: C_0(X)\longrightarrow B(H_X)$非退化.
由表示理论, ρ酉等价于一族循环表示的直和, 而每个$C_0(X)$的循环表示酉等价于 $L^2(X,\mu)$上的乘法表示, 其中μ为X上的某个 Radon 测度.

对于 Example 4.1.6, H 可分无穷维 Hilbert space, $Z\subseteq X$ 可数稠密集, $H_X=l^2(Z,H)$
用 $C_0(X)$限制在Z上乘法作用得到 ample X module. $\rho(f)(\xi_z)_z=(f(z)\xi_z)_z$.
$\xi\in H_X$ 可写为 $(\xi_z)_{z\in Z}$, $\xi_z\in H$, $\sum\limits_{z\in Z}\|\xi_z\|^2<\infty$. H有ONB $(e_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$,
$l^2(Z,H)\cong\bigoplus\limits_{\Lambda} l^2(Z)$, 其中$\Lambda$为 H的一组标准正交基的指标集. 此同构可写为 $(\xi_z)_{z\in Z}\longmapsto \bigoplus\limits_{\lambda}(p_\lambda(\xi_z))_{z\in Z}$
$p_\lambda(\xi)$为向量ξ关于(e_λ)作Fourier展开后e_λ的系数.
其中 $z\mapsto p_\lambda(\xi_z)$是 $l^2(Z)$中函数.
$l^2(Z)=L^2(X,\mu)$, μ为对Z的计数测度, 即$\mu(A)=\#(A\cap Z)$.
(但是这个测度并不是 Radon 测度.) $\square$

4.6.3 Let H_X be an X module.
(i) Show that if f is a bounded Borel function on X, then the support of the corresponding multiplication operator is contained in $\overline{\{(x,x)\in X\times X: f(x)\neq 0\}}$, and that the support is exactly equal to this set if f is continuous and H_X is ample.
(ii) If T is a bounded operator associated to a continuous kernel k as in Example 4.1.10 show that the support of T is contained in $\overline{\{(x,y)\in X\times X: k(x,y)\neq 0\}}$. and that the support equals this set if H_X is ample.

Solution. (i) 将H_X分解为 $\bigoplus L^2(X,\mu)$. 考虑 $H_X=L^2(X,\mu)$, μ为X上的 Radon 测度.
设$(x,y)\in\mathrm{supp}(M_f)$, 则对任意$x$的开邻域$U$, y的开邻域V有 $\chi_U M_f\chi_V\neq 0$.
而M_f与$\rho(B(X))$交换, 故 $M_f\chi_{U\cap V}\neq 0$. 若$x\neq y$, 由X Hausdorff可作U, V使 $U\cap V=\varnothing$, 因此只能有$x=y$, 进而 $M_f\chi_U\neq 0$, $\forall$ open nbhd U of x.

$M_f \chi_U = \rho(f\chi_U) \neq 0$，故 $f\chi_U \neq 0$，因此 $x \in \overline{\{f\neq 0\}}$。由于 X Hausdorff，故 $X\times X$ 的对角线是闭集，有 $\{(x,x)\in X\times X : x\in\overline{\{f\neq 0\}}\} = \overline{\{(x,x)\in X\times X : f(x)\neq 0\}} \supseteq \mathrm{supp}(M_f)$.

当 f 连续且 H_X ample 时，若 $x\in\overline{\{f\neq 0\}}$，则对 x 的开邻域 U，有 $\chi_U M_f \chi_U = \rho(f\chi_U)$，$U\cap\{f\neq 0\}$ 为非空开集，因此存在 $\emptyset \neq \underset{\text{开}}{V} \subseteq \underset{\text{紧}}{K} \subseteq U\cap\{f\neq 0\}$，同 4.6.1 那样做，若 $\rho(f\chi_U)=0$，则 $\rho(\chi_V)=0$，但这对 ample X module 是不可能的。事实上，$\rho(\chi_V)$ 是无穷维投影，否则 $\rho(\chi_V)$ 是紧投影，可作非零连续函数 g 使 $0\leq g\leq \chi_V$，于是 $0\leq\rho(g)\leq\rho(\chi_V)$，则 $g=g\chi_V$，$\rho(g)$ 紧，与 $g\neq 0$，ρ ample 矛盾。

因此 $\rho(f\chi_U)\neq 0$，$x\in\mathrm{supp}(M_f)$.

(ii) μ: Radon measure on X，$H_X = L^2(X,\mu)$，$Tu(x) = \int_X k(x,y)u(y)\,d\mu(y)$. T 有界.

设 $(x,y)\in\mathrm{supp}(T)$，对任意 U, V 开邻域，有 $\chi_U T\chi_V \neq 0$。若 $(x,y)\notin\overline{\{(x,y)\in X\times X : k(x,y)\neq 0\}}$，则存在 x 的开邻域 U，y 的开邻域 V 使 $k|_{U\times V}=0$。此时对 $u\in C_c(X)$，

$$(\chi_U T\chi_V u)(x) = \chi_U(x)\int_X k(x,y)\chi_V(y)u(y)\,d\mu(y) = \int_X \chi_U(x)k(x,y)\chi_V(y)u(y)\,d\mu(y).$$

而 $\chi_U(x)k(x,y)\chi_V(y)=0$。故 $\chi_U T\chi_V = 0$，矛盾。故 $(x,y)\in\overline{\{k\neq 0\}}$.

当 H_X ample 时，若 $(x,y)\in\overline{\{k\neq 0\}}$ 且存在开邻域 $U\ni x$，$V\ni y$ 使 $\chi_U T\chi_V = 0$，则对任意 $u\in C_c(X)$，有 $\int_X \chi_U(x)k(x,y)\chi_V(y)u(y)\,d\mu(y) = 0$ for μ-a.e. $x\in X$.

进而，对 μ-a.e. $x\in U$，$\int_V k(x,y)u(y)\,d\mu(y) = 0$ for $u\in C_c(V)$.

因此 $k(x,y)=0$，for μ-a.e. $x\in U, y\in V$.

由于 H_X ample，任意非空开集都有正测度，故 $\chi_U(x)k(x,y)\chi_V(y)=0$. □

4.6.4 Let μ be a Radon measure on X, and $H_X = L^2(X,\mu)$. Let $k: X\times X\to\mathbb{C}$ be a continuous function, and assume that there is $c>0$ such that

$$\int_X |k(x,y)|\,d\mu(x)\leq c \quad\text{and}\quad \int_X |k(y,x)|\,d\mu(x)\leq c \quad\text{for all } y\in X.$$

For $u\in C_c(X)$ define $Tu: X\to\mathbb{C}$ by the formula

$$(Tu)(x) := \int_X k(x,y)u(y)\,d\mu(y).$$

Show that T extends uniquely to a bounded operator on H_X.

Solution.

$$\begin{aligned}
\|Tu\|^2_{L^2(\mu)} &= \int_X \left|\int_X k(x,y)u(y)\,d\mu(y)\right|^2 d\mu(x) \\
&\leq \int_X \left(\int_X |k(x,y)|^{\frac12}\,|k(x,y)|^{\frac12}|u(y)|\,d\mu(y)\right)^2 d\mu(x) \\
&\leq \int_X \left(\int_X |k(x,y)|\,d\mu(y)\cdot\int_X |k(x,y)|\,|u(y)|^2\,d\mu(y)\right) d\mu(x) \\
&\leq C\cdot\int_X \int_X |k(x,y)|\,|u(y)|^2\,d\mu(y)\,d\mu(x) \\
&= C\cdot\int_X\int_X |k(x,y)|\,d\mu(x)\,|u(y)|^2\,d\mu(y) \\
&\leq C^2\cdot\|u\|^2_{L^2(\mu)}, \quad \forall u\in C_c(X).
\end{aligned}$$

而 $C_c(X)$ 稠于 $L^2(X,\mu)$，因此 T 有唯一的有界延拓. □

4.6.5 Let H_X be an X module, and let T be a bounded operator on H_X. Show that $\mathrm{supp}(T)$ is contained in the diagonal of $X\times X$ if and only if T commutes with $C_0(X)$.

Solution. 若 T 与 $C_0(X)$ 交换，对 $x\neq y$，存在不相交的开集 U, V 使 $x\in U$, $y\in V$，进一步作函数 $f, g\in C_0(X)$ 使 $f(x)=1$, $g(y)=1$，$\mathrm{supp}(f)\subseteq U$，$\mathrm{supp}(g)\subseteq V$，则 $fTg = fgT = 0$，

因此 $\mathrm{supp}(T)\subseteq\Delta_X = \{(x,x)\in X\times X\}$.

反之，设 $\mathrm{supp}(T)\subseteq\Delta_X$，$f\in C_0(X;\mathbb{R})$，$\forall\varepsilon>0$，记 $g=\sum_{k\in\mathbb{Z}}k\varepsilon\chi_{f^{-1}[k\varepsilon,(k+1)\varepsilon)}$，

则 g 是简单函数，且 $\|g-f\|_\infty\leqslant\varepsilon$，$g$ 中被求和项只有有限多个非零。

$X_k:=f^{-1}[k\varepsilon,(k+1)\varepsilon)$，$\chi_k:=\chi_{X_k}$，则 $Tg-gT=\sum_{k\in\mathbb{Z}}k\varepsilon(T\chi_k-\chi_kT)$

注意到 $id_{H_X}=\mathrm{SOT}\text{-}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\chi_k$，故 $T\chi_k=\mathrm{SOT}\text{-}\sum_{l\in\mathbb{Z}}\chi_l T\chi_k$．$\chi_kT=\mathrm{SOT}\text{-}\sum_{l\in\mathbb{Z}}\chi_kT\chi_l$.

当 $k\neq0,-1$ 时，$\overline{X_k}$ 紧，故 $T\chi_k=\chi_{\mathrm{supp}(T)\circ\overline{X_k}}T\chi_k$，

而 $\overline{X_k}\subseteq f^{-1}[k\varepsilon,(k+1)\varepsilon]$，故 $l\neq k,k+1$ 时 $X_l\cap(\mathrm{supp}(T)\circ\overline{X_k})=\varnothing$.

故 $\chi_lT\chi_k=0$.

进一步，$l=k+1$ 且 $k\neq-1,-2$ 时，$\chi_{k+1}T\chi_k=\chi_{k+1}T\chi_{\overline{X_{k+1}}\circ\mathrm{supp}(T)}\chi_k=0$，

于是 $Tg-gT=-\varepsilon(T\chi_{-1}-\chi_{-1}T)-2\varepsilon(T\chi_{-2}-\chi_{-2}T)$.

$\|Tg-gT\|\leqslant6\varepsilon\|T\|$，$\|Tf-fT\|\leqslant8\varepsilon\|T\|$，

由于 $\varepsilon>0$ 任意性，知 $Tf=fT$，$\forall f\in C_0(X)$. $\square$

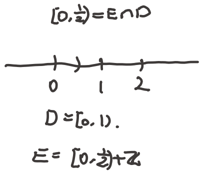
4.6.8 Show that if G acts freely on X, and H_X is an X-G module that is ample as an X module, then it is also ample as an X-G module.

Solution. (P183) 只要证 H_X locally free. 取 G 的有限子群 F 与 X 的 F-不变 Borel 集 E,

由Lemma A.2.9 知存在 Borel 子集 D 使 $X=\bigsqcup_{g\in F} gD$. (在 A.2.9 中取 $D=\bigcup_{i\in I}E_i$)

记 $H_E=\chi_{E\cap D}H_X$, F 的酉表示取平凡表示, $V:\chi_E H_X\longrightarrow l^2(F)\otimes H_E$ 定义为

$$V\xi=\sum_{g\in F}\delta_g\otimes U_g^*\chi_{gD}\xi,\quad \xi\in\chi_E H_X.$$



V良定义源于 $U_g^*\chi_{gD}=\alpha_{g^{-1}}(\chi_{gD})U_g^*=\chi_D U_g^*$, 于是 $U_g^*\chi_{gD}\xi\in U_g^*\chi_{gD}\chi_E H_X$

$=\chi_D U_g^*\chi_E H_X \underset{(E\text{ 为 }F\text{-inv.})}{=\!=\!=} \chi_{E\cap D}U_g^* H_X=H_E$.

$\|V\xi\|^2=\sum_{g\in F}\|U_g^*\chi_{gD}\xi\|^2=\sum_{g\in F}\|\chi_{gD}\xi\|^2$. 由于 $X=\bigsqcup_{g\in F}gD$, 故

$\|V\xi\|^2=\|\xi\|^2$. 即V是等距.

V有逆映射 $\sum_{g\in F}\delta_g\otimes\xi_g \xmapsto{W} \sum_{g\in F}U_g\xi_g$ $(\xi_g\in H_E)$ 且易见 VW, WV为各自 identity:

显然 $WV=id$. $VW\left(\sum_{g\in F}\delta_g\otimes\xi_g\right)=\sum_{g\in F}\delta_g\otimes U_g^*\chi_{gD}\left(\sum_{h\in F}U_h\xi_h\right)$, 而 $U_g^*\chi_{gD}U_h\xi_h=\chi_D U_g^*U_h\xi_h$

$=\chi_D U_{g^{-1}h}\xi_h \underset{(\xi_h\in H_E)}{=} \chi_D U_{g^{-1}h}\chi_{E\cap D}\eta=\chi_D\,\alpha_{g^{-1}h}(\chi_{E\cap D})U_{g^{-1}h}\eta$

$=\chi_{D\cap g^{-1}h(E\cap D)}U_{g^{-1}h}\eta$, 而 $D\cap g^{-1}h(E\cap D)=\begin{cases}E\cap D, & g=h.\\ \emptyset, & g\neq h.\end{cases}$ (此时$g,h\in F$)

故 $U_g^*\chi_{gD}U_h\xi_h=\begin{cases}\chi_D\xi_g=\xi_g, & g=h.\\ 0, & g\neq h.\end{cases}$ (☆) 因此 $VW=id$. 可见V是 Hilbert

空间 $\chi_E H_X$ 与 $l^2(F)\otimes H_E$ 的酉同构.

作为F-表示, 对 $\sum_{g\in F}\delta_g\otimes\xi_g\in l^2(F)\otimes H_E$, $h\in F$, $VU_hV^*\left(\sum_{g\in F}\delta_g\otimes\xi_g\right)$

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, phantom, "\overset{U}{\curvearrowright}"] \arrow[dr, phantom, "\underset{\lambda_h\otimes id}{\curvearrowright}"'] & \chi_E H_X \arrow[d, "V"] \\ & l^2(F)\otimes H_E \end{tikzcd}$$

$=V\sum_{g\in F}U_{hg}\xi_g=\sum_{g\in F}\delta_g\otimes U_g^*\chi_{gD}\left(\sum_{k\in F}U_{hk}\xi_k\right)$

$\overset{(☆)}{=}\sum_{g\in F}\delta_g\otimes\xi_{h^{-1}g}=\sum_{g\in F}\delta_{hg}\otimes\xi_g=(\lambda_h\otimes id)\left(\sum_{g\in F}\delta_g\otimes\xi_g\right)$.

$$\begin{tikzcd} C_0(X) \arrow[r, phantom, "\curvearrowright"] \arrow[dr, phantom, "\curvearrowright"'] & \chi_E H_X \arrow[d, "V"] \\ & l^2(F)\otimes H_E \end{tikzcd}$$

对 $\sum_{g\in F}\delta_g\otimes\xi_g\in L^2(F)\otimes H_E$, $f\in C_0(X)$, $VfV^*\left(\sum_{g\in F}\delta_g\otimes\xi_g\right)$

$=Vf\left(\sum_{g\in F}U_g\xi_g\right)=\sum_{h\in F}\delta_h\otimes U_h^*\chi_{hD}f\left(\sum_{g\in F}U_g\xi_g\right)$

$=\sum_{h\in F}\delta_h\otimes\chi_D\,\alpha_{h^{-1}}(f)\,U_h^*\left(\sum_{g\in F}U_g\xi_g\right)$

$=\sum_{h\in F}\delta_h\otimes\alpha_{h^{-1}}(f)\;\chi_D U_h^*\left(\sum_{g\in F}U_g\xi_g\right)$

$=\sum_{h\in F}\delta_h\otimes\alpha_{h^{-1}}(f)\,\xi_h$. $\square$

4.6.9 Say G acts by isometries on a Riemannian manifold X of positive dimension with associated measure μ, and that the measure of the set

$$\{x\in X:\ \text{there exists } g\in G\setminus\{e\} \text{ such that } gx=x\}$$

is zero. Show that $L^2(X,\mu)$ is ample as an X–G module. Find "reasonable" generalizations of this statement to other metric measure spaces.

Solution. 记 $A = \{x \in X :$ there exists $g \in G \setminus \{e\}$ such that $gx = x\}$.

则 A, $X \setminus A$ 是 G-不变集，且（大概，至少 G 可数时）A 是 Borel 可测集.

由于 A 零测，有 $L^2(X,\mu) \cong L^2(X \setminus A, \mu)$.

由于 G 作用在 $X \setminus A$ 上 free，$L^2(X,\mu)$ 是 ample X module，

故 $L^2(X,\mu)$ 是 ample X–G module.

对于 metric measure space X，对应的 A 仍零测，再对 μ 有适当要求使 $L^2(X,\mu)$ 是 ample X module 即可. $\square$

A.4.1 Show that if X is a proper, geodesic metric space, then any uniformly continuous, proper map $f: X \longrightarrow Y$ is coarse. Show that this fails if f is only assumed continuous and proper.

Solution. 只需要验证 f 是 uniformly expansive，即对 $r \geq 0$，有

$$\infty > \omega_f(r) = \sup_{x \in X} \omega_{f,x}(r), \quad \text{其中 } \omega_{f,x}(r) = \sup\{d_Y(f(x_1), f(x)) : d_X(x_1, x) \leq r\}.$$

因 f 一致连续，故存在 $\delta > 0$ 使 $x, x_1 \in X$，$d_X(x_1, x) \leq \delta \Longrightarrow d_Y(f(x_1), f(x)) \leq 1$.
因 X geodesic，故当 $x_1 \in X$ 满足 $d_X(x_1, x) \leq r$ 时，可以用 $N = [\frac{r}{\delta}] + 1$ 个点 $y_1, y_2, \cdots, y_N = x_1$ 满足 $d(x, y_1) = \delta$，$d(y_1, y_2) = \delta, \cdots d(y_{N-1}, x_1) \leq \delta$，于是 $d_Y(f(x), f(x_1)) \leq N$. 此数只与 f 的一致连续性有关，故 $\omega_f(r) < \infty$.

当 f 不一致连续时，$f: [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$，$x \longmapsto x^2$，直接计算知

$$\omega_{f,x}(r) = 2rx + r^2, \quad \text{故} \quad \omega_f(r) = \begin{cases} 0, & r = 0. \\ \infty, & r > 0. \end{cases}$$

$\square$

A.4.2 Show that a proper action of a torsion free group on a locally compact Hausdorff space is free.

Solution. 若存在 $g \neq e_G$，$x \in X$ 使 $gx = x$. 则对 $n \in \mathbb{N}^*$，均有 $g^n x = x$.
于是对紧集 $K = \{x\}$，$\{h \in G : hK \cap K \neq \emptyset\} \supseteq \{g^n : n \geq 1\}$，
而左侧有限，故 g 为 torsion element，矛盾. $\square$

A.4.5 Let $\mathbb{Z}$ act on S^1 by $n: z \longmapsto e^{2\pi i n\theta} z$ for θ an irrational number in $(0,1)$. Show that the quotient space $S^1/\mathbb{Z}$ is uncountable, but has the indiscrete topology.

Solution. 这是 free action，因此从集合的势上，有 $\#S^1 = \#\mathbb{Z} \times \#(S^1/\mathbb{Z})$，$S^1$ 不可数，$\mathbb{Z}$ 可数，故 $S^1/\mathbb{Z}$ 不可数.

设 F 是 $S^1/\mathbb{Z}$ 中非空闭集，$\mathbb{Z}x \in U$，$x \in S^1$，则 $\pi^{-1}(F)$ 是 S^1 中闭集，
但 $\{e^{2\pi i n\theta}x : n \in \mathbb{Z}\} \subseteq \pi^{-1}(F)$，前者在 S^1 中稠密，故 $\pi^{-1}(F) = S^1$，$F = S^1/\mathbb{Z}$.
于是 $S^1/\mathbb{Z}$ 上拓扑平凡. $\square$