Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Оренбургский государственный университет»

Кафедра алгебры и дискретной математики

Е.Н. Смирнова, Н.В. Максименко

ЭЛЕМЕНТЫ ИНТЕРВАЛЬНОГО АНАЛИЗА

Рекомендовано к изданию Редакционно – издательским советом федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования "Оренбургский государственный университет" в качестве методических указаний для студентов, обучающихся по программам высшего образования по направлению подготовки 02.03.01 Математика и компьютерные науки

Оренбург
2015

УДК 517.31(076.5)
ББК 22.161.1я7
С 17

Рецензент – доктор технических наук, доцент Ю.Г. Полкунов

Смирнова, Е.Н.
С 17 Элементы интервального анализа: методические указания / Е.Н. Смирнова, Н.В. Максименко; Оренбургский государственный университет. – Оренбург: ОГУ, 2015. – 62 с.

Методические указания посвящены основным понятиям по дисциплине “Элементы интервального анализа”. В них рассмотрены такие вопросы как интервальная арифметика и ее алгебраические свойства, характеристики интервалов и их свойства, полная интервальная арифметика, метрика и топология на интервальных пространствах, комплексные интервальные арифметики, интервальные векторы и матрицы, интервальное оценивание области значений функций, локализация нулей функции, интервальные системы линейных алгебраических уравнений, содержатся практические задания для самостоятельного решения, а также список использованных источников.

Методические указания предполагают самостоятельное изучение дисциплины “Элементы интервального анализа” бакалаврами очной формы обучения. Направление подготовки 02.03.01 Математика и компьютерные науки. Данный материал может быть рекомендован для использования в учебном процессе.

Содержание

Введение…………………………………………………………………………….. 4
1 Лекция 1. Интервальная арифметика. Алгебраические свойства классической интервальной арифметики. Разрешимость уравнения [a][x]=[b]………………… 6
2 Лекция 2. Характеристики интервалов и их свойства. Полная интервальная арифметика……………………………………………………………………………… 12
3 Лекция 3. Метрика и топология на интервальных пространствах. Комплексные интервальные арифметики. Арифметические операции над комплексными интервалами. Алгебраические свойства комплексных интервальных арифметик. Другие интервальные арифметики…………………... 18
4 Лекция 4. Интервальные векторы и матрицы…………………………………… 26
5 Лекция 5. Метрика и топология на интервальных пространствах. Нормы и спектральный радиус. Невырожденные и обратные интервальные матрицы…... 31
6 Лекция 6. Интервальное оценивание области значений функций. Интервальное и центрированное расширения функций. Оценивание с помощью естественного интервального расширения. Смешанные центрированные интервальные расширения. Тейлоровское интервальное расширение. Сравнение интервальных расширений…………………………………………….... 35
7 Лекция 7. Локализация нулей функции. Метод деления интервала. Интервальная версия метода Ньютона…………………………………………….. 41
8 Лекция 8. Интервальные системы линейных алгебраических уравнений. Внешнее оценивание объединенного множества решений ИСЛАУ. Интервальный метод Гаусса. Внутреннее оценивание множества решений ИСЛАУ…………………………………………………………………………………... 46
9 Лекция 9. Сжимающие операторы…………………………………………………... 51
10 Задачи для самостоятельного решения……………………….................... 56
11 Перечень вопросов, выносимых на зачет………………………................... 60
Список использованных источников……………………………...................... 61

Введение

В связи с развитием таких направлений науки и техники, как механика, теплотехника, математическая химия, самолетостроение, возникла потребность не только вычисления приближенных решений различных задач, но и гарантированных оценок их близости к точным решениям. Поэтому интерес к интервальному анализу и вопросам двусторонних оценок как к возможным средствам оценки погрешностей приближенных решений в последнее время нарастает. Интервальный анализ появился сравнительно недавно как метод автоматического контроля ошибок округления на ЭВМ. Впоследствии он превратился в один из разделов вычислительной математики, учитывающий также ошибки дискретизации численных методов, ошибки в начальных данных и т.п. Основная идея интервального анализа состоит в замене арифметических операций и вещественных функций над вещественными числами интервальными операциями и функциями, преобразующими интервалы, содержащие эти числа. Ценность интервальных решений заключается в том, что они содержат точные решения исходных задач.

Методы интервального анализа, развитые к настоящему времени, базируются на использовании арифметических операций с вещественными и комплексными числами. Эти методы находят применение в различных сферах. Так, они оказались полезными при решении многих практических задач, использующих в качестве переменных величины с интервальной неопределенностью.

Заметим, что источниками неопределенностей различных величин могут быть разнообразные факторы. В частности, таким источниками могут быть ограниченность разрядной сетки компьютера, ошибки различных преобразований, к примеру, преобразований чисел из одной системы счисления в другую, неточности измерений значений величин из-за естественного несовершенства измерительных приборов и т. п.

Необходимо отметить, что интервальный анализ - это не единственная теория, которая оперирует с величинами, содержащими неопределенности. Так, с подобного рода величинами имеют дело теории, использующие их размытые (нечеткие) или вероятностные описания. В связи с этим возникает естественный вопрос: имеет ли интервальный анализ какие-либо достоинства, которые отсутствуют, например, у теории вероятностей или теории нечетких множеств, нечетких графов и т. д.? Надо сказать, что такие достоинства у интервального анализа имеются. В частности, одно из них состоит в более высоком уровне развития математического аппарата для исследований. Так, ни в теории нечетких множеств, ни в теории вероятностей пока не достигнут тот качественный уровень методов решения систем уравнений с неопределенностями, который имеет место для интервальных систем уравнений.

Отметим также еще одно достоинство интервального анализа. Ранее все модели неопределенности, используемые при оценке параметров и идентификации, имели главным образом стохастический или вероятностный характер, базируясь на известных распределениях рассматриваемых величин и т. п. К сожалению, на практике часто бывает совершенно недостаточно информации, чтобы считать неопределенные факторы подчиняющимися какой-либо вероятностной модели, либо эти факторы не удовлетворяют тем или иным условиям, которые на них налагает вероятностная модель неопределенности. К примеру, таковыми могут быть условия независимости величин или специальный вид их распределения. С этой точки зрения интервальные неопределенности являются наименее ограничительными и более адекватны многим практическим задачам.

Укажем еще одну сферу применения интервального анализа - вычисления с приближенными числами, обеспечивающие достаточно точный учет ошибок округлений. Хорошо известно, что все современные компьютеры оперируют с числами, представленными в форме с плавающей запятой. Однако, к сожалению, они не вполне адекватны не только реальному физическому миру, но и его математическим моделям. Недостатками чисел с плавающей запятой является отсутствие информации о точности тех величин, которые они представляют. Недостатком их является невозможность представить многие используемые вещественные величины в виде чисел с конечной длиной мантиссы. Наконец, еще одним недостатком является отсутствие адекватности между свойствами арифметических операций над числами с плавающей запятой и свойствами идеальных арифметических операций над вещественными числами из-за ошибок округления.

Из сказанного следует, что вычисления с плавающей запятой не позволяют отслеживать вычислительных ошибок и потому не дают возможности произвести анализ точности результатов. Последнее чревато серьезными негативными последствиями при принятии критических решений на основе полученных приближенных результатов.

1 Лекция 1. Интервальная арифметика. Алгебраические свойства классической интервальной арифметики. Разрешимость уравнения [a][x]=[b]

В интервальном анализе основным объектом исследования является интервал, представляющий собой замкнутый числовой промежуток. Так, интервал *[a,b]* содержит все вещественные числа, заключенные между границами интервала, включая и сами границы a и b. Когда говорят об интервальной неопределенности, подразумевают неполное знание о некоторой величине, т. е. невозможность указать ее точное значение, но возможность обозначить только границы ее изменения. Понятно, что ширина интервала есть мера неопределенности интересующей нас величины. Математическая теория, изучающая задачи с интервальными неопределенностями, получила название интервального анализа.

Под ***интервальным числом*** *[a]* мы будем понимать вещественный отрезок $[\underline{a},\overline{a}]$, где $\underline{a} \le \overline{a}$. Множество интервальных чисел мы будем обозначать через *IR*. В дальнейшем мы будем называть интервальные числа просто интервалами.

Два интервала $[a]=[\underline{a},\overline{a}]$ и $[b]=[\underline{b},\overline{b}]$ называются ***равными*** *[a]=[b]*, если они равны в теоретико-множественном смысле, т.е. $[a]=[b] \Leftrightarrow \underline{a}=\underline{b}$ и $\overline{a}=\overline{b}$.

Если S — непустое ограниченное множество в R^n , то его ***интервальной оболочкой*** S определим наименьший по включению интервальный вектор, содержащий S.

Арифметические операции над интервальными числами введем следующим образом. Пусть $[a],[b]\in IR$, тогда положим

$$[a]*[b]=\{x*y \mid x\in [a], y\in[b]\},$$

где знак (*) - одна из операций +,-,·,/. При делении интервал $[b]=[\underline{b},\overline{b}]$ не должен содержать ноль.

При этом вещественные числа a отождествляются с интервалами нулевой величины: $a=[a,a]$; $-[a]=(-1)[a]$.

$-[a]=[-\overline{a},-\underline{a}]$.

Введенные выше операции эквивалентны следующим:

$[a]+[b]=[\underline{a},\overline{a}]+[\underline{b},\overline{b}]=[\underline{a}+\underline{b},\overline{a}+\overline{b}]$;

$[a]-[b]=[\underline{a},\overline{a}]-[\underline{b},\overline{b}]=[\underline{a}-\overline{b},\overline{a}-\underline{b}]$;

$[a]\cdot[b]=[\underline{a},\overline{a}]\cdot[\underline{b},\overline{b}]=[\min\{\underline{a}\underline{b},\overline{a}\overline{b},\underline{a}\overline{b},\overline{a}\underline{b}\}, \max\{\underline{a}\underline{b},\overline{a}\overline{b},\underline{a}\overline{b},\overline{a}\underline{b}\}]$;

$[a]/[b]=[a]\cdot[\frac{1}{\overline{b}},\frac{1}{\underline{b}}]$.

Если $[a]$ и $[b]$ вырождаются в вещественные числа, то эти равенства совпадают с обычными арифметическими операциями [4].

Выделим подмножества:

$P=\{[a]\in IR \setminus \underline{a}\geq 0,\overline{a}\geq 0\}$;

$Z=\{[a]\in IR \setminus \underline{a}\leq 0,\overline{a}\geq 0\}$;

$-P=\{[a]\in IR \setminus -[a]\in P\}$.

Тогда справедливо: $IR=P\cup Z\cup(-P)$.

Можно составить таблицу для умножения двух интервалов, в зависимости от их вида, которая называется ***таблицей Кэли***.

Пример 1.1.

Даны два интервала $[a]=[-1,2]$, $[b]=[2,3]$.

Найти *[a]+[b]*, *[a]-[b]* *[a]·[b]*, *[a]/[b]*.

Решение:

[a]+[b]=[-1,2]+[2,3]=[1,5],

[a]-[b]=[-1,2]-[2,3]=[-4,0],

[a]·[b =[-1,2]·[2,3]=[-3,6],

[a]/[b]=[-1,2]/[2,3]=[-1,2]·$[\frac{1}{3},\frac{1}{2}]=[-\frac{1}{2},1]$.

Таблица 1.1 – Таблица Кэли

интервал	$[b]\in P$	$[b]\in Z$	$[b]\in -P$
$[a]\in P$	$[\underline{a}\underline{b},\overline{a}\overline{b}]$	$[\overline{a}\underline{b},\overline{a}\overline{b}]$	$[\overline{a}\underline{b},\underline{a}\overline{b}]$
$[a]\in Z$	$[\underline{a}\overline{b},\overline{a}\overline{b}]$	$[\min\{\underline{a}\overline{b},\overline{a}\underline{b}\},\max\{\underline{a}\underline{b},\overline{a}\overline{b}\}];$	$[\overline{a}\underline{b},\underline{a}\underline{b}]$
$[a]\in -P$	$[\underline{a}\overline{b},\overline{a}\underline{b}]$	$[\underline{a}\overline{b},\underline{a}\underline{b}]$	$[\overline{a}\overline{b},\underline{a}\underline{b}]$

Набор операций *[a]+[b]*, *[a]-[b]*, *[a]·[b]*, *[a]/[b]* может быть дополнен другими традиционными в основном унарными операциями.

Если *r(x)* – непрерывная унарная операция на множестве *R*, то *r([x])=[min r(x), max r(x)]* определяет соответствующую операцию в множестве интервалов.

Основная теорема интервальной арифметики:

Пусть для рациональной функции $f(x_1, x_2,\dots, x_n)$ определен результат $[f]([x_1],[x_2],\dots , [x_n])$ – результат подстановки вместо ее аргументов их интервал изменения $[x_1],[x_2],\dots, [x_n]\in IR$ и выполнение всех действий по правилам интервальной арифметики, тогда множество

$\{f(x_1, x_2,\dots , x_n) \setminus x_1 \in[x_1], x_2\in[x_2],\dots, x_n\in[x_n]\}\subseteq[f]([x_1],[x_2],\dots , [x_n])$, т.е. *[f]* содержит множество значений функции $f(x_1, x_2,\dots, x_n)$ на области $[x_1],[x_2],\dots , [x_n]$. Если выражение для $f(x_1, x_2,\dots, x_n)$ содержит не более чем по одному вхождению переменной первой степени, то вместо включения имеет место точное равенство.

Рассмотрим *алгебраические свойства классической интервальной арифметики*.

Пусть $[a]$, $[b]$, $[c] \in IR$, тогда справедливы следующие свойства:

1) ассоциативность сложения: $([a]+[b])+[c]=[a]+([b]+[c])$.

Доказательство:

$([a]+[b])+[c]=\{z=y+c \setminus y\in([a]+[b]), c\in[c]\}=\{z=(a+b)+c \setminus a\in[a], b\in[b]),$
$c\in[c]\}=\{z=a+(b+c) \setminus a\in[a], b\in[b]), c\in[c]\}=\{z=a+x \setminus a\in[a], x\in[b]+[c])\}=$
$=[a]+([b]+[c])$.

2) коммутативность сложения: $[a]+[b]=[b]+[a]$.

Доказательство:

$[a]+[b]=\{z=a+b \setminus a\in[a], b\in[b]\}=\{z=b+a \setminus a\in[a], b\in[b])=[b]+[a]$.

3) ассоциативность умножения: $([a]\cdot[b])\cdot[c]=[a]\cdot([b]\cdot[c])$.

Доказать самостоятельно.

4) коммутативность умножения: $[a]\cdot[b]=[b]\cdot[a]$.

Доказать самостоятельно.

5) единственным нейтральным элементом по сложению является 0=[0,0], т.е. $[a]+0=0+[a]=[a]$.

Доказательство:

Методом от противного. Пусть $[e]$ и $[e']$ – нейтральные, тогда $[e]+[e']=[e]=[e']$. Получили противоречие.

6) единственным нейтральным элементом по умножению является 1=[1,1], т.е. $[a]\cdot 1=1\cdot[a]=[a]$.

Доказать самостоятельно.

7) IR не имеет делителей нуля (нет нулевого элемента, в произведении с которым получаем 0).

Доказательство:

Методом от противного. Пусть $[a][b]=0$. $[a]\cdot[b]=\{z=ab \setminus a\in[a], b\in[b]\}=[0,0]$, т.е. $[a]=0$ или $[b]=0$. Получили противоречие.

8) произвольный элемент $[a]=[a_1,a_2]\in IR$ у которого $a_1\neq a_2$ не имеет обратного по сложению, но $0\in[a]-[a]$.

Доказательство:

Методом от противного. Пусть $[a]-[b]=\{z=a-b \setminus a\in[a],\ b\in[b]\}=[0,0]$, тогда $z=a-b=0$ для всех $a\in[a]$, $b\in[b]$, фиксируя $b\in[b]$ получаем $a=b$ для любого $a\in[a]$, т.е. $[a]=[b,b]$. Соответственно, если a – фиксированное, то $[b]=[a,a]$, т.е. $a=b$, т.к. для $a\in[a]$ $0=a-a\in\{z=x-y \setminus x\in[a], y\in[b]\}$то очевидно $0\in[a]-[a]$. Получили противоречие.

9) произвольный элемент $[a]=[a_1,a_2]\in IR$ у которого $a_1\neq a_2$ не имеет обратного по умножению, но $1\in[a]/[a]$.

Доказать самостоятельно.

10) в общем случае результат $([a]+[b])\cdot[c]\neq[a][c]+[b][c]$, но имеет место свойство называемое суммой дистрибутивности: $([a]+[b])\cdot[c]\subseteq [a][c]+[b][c]$.

Доказательство:

Рассмотрим пример: $([-1,1]+[1,2])[-1,0]=[0,3][-1,0]=[-3,0]$.

$[-1,1][-1,0]+[1,2][-1,0]=[-1,1]+[-2,0]=[-3,1]$.

Как видим из примера свойство не выполняется.

Субдистрибутивность следует из того, что любое число $z\in[a]([b]+[c])$ представимо в виде:

$z=a(b+c)$, $a\in[a]$, $b\in[b])$, $c\in[c]$ согласно основной теореме интервальной арифметики $z=ab+ac\in[a][b]+[a][c]$.

11) если $a\in R$, то $a([b]+[c])=a[b]+a[c]$.

Доказательство:

$a([b]+[c])=\{z=a(b+c) \setminus b\in[b]), c\in[c]\}=\{z=ab+ac \setminus b\in[b], c\in[c]\}=$

$=\{x=ab \setminus b\in[b]\}+\{y=ac \setminus c\in[c]\}=a[b]+a[c]$.

12) если $[b][c]\geq 0$ или $bc\geq 0$ для любого $b\in[b]$, $c\in[c]$, то $[a]([b]+[c])=[a][b]+[a][c]$.

Доказательство:

Без потери общности можно считать $\underline{b},\underline{c} \geq 0$.

1 случай: $\underline{a} \geq 0$, тогда $[a]([b]+[c])=[\underline{a}(\underline{b}+\underline{c}),\overline{a}(\overline{b}+\overline{c})]$.

$[a][b]+[a][c]=[\underline{a}\underline{b},\overline{a}\overline{b}]+[\underline{a}\underline{c},\overline{a}\overline{c})]=[\underline{a}\underline{b}+\underline{a}\underline{c},\overline{a}\overline{b}+\overline{a}\overline{c})]=[\underline{a}(\underline{b}+\underline{c}),\overline{a}(\overline{b}+\overline{c})]$.

Т.о., $[a]([b]+[c])=[a][b]+[a][c]$.

2 случай: $\underline{a} \leq 0$, можно свести к 1 случаю путем замены $[a]$ на $-[a]$.

Если $\underline{a}\cdot\overline{a} < 0$, то получаем $[a]([b]+[c])=[\underline{a}(\overline{b}+\overline{c}),\overline{a}(\overline{b}+\overline{c})]$.

$[a][b]+[a][c]=[\underline{a}\overline{b},\overline{a}\overline{b}]+[\underline{a}\overline{c},\overline{a}\overline{c})]=[\underline{a}(\overline{b}+\overline{c}),\overline{a}(\overline{b}+\overline{c})]$.

Замечание:

Свойства 11 и 12 не охватывают всех случаев выполнения закона дистрибутивности для интервалов [2].

Рассмотрим интервалы $[a]\neq 0$, $[x]\in IR$.

Введем вспомогательную функцию:

$$\chi([a])=\begin{cases}\underline{a}/\overline{a}, & |\underline{a}|\leq|\overline{a}|\\ \overline{a}/\underline{a}, & |\underline{a}|\geq|\overline{a}|\end{cases}.$$

Уравнение $[a][x]=[b]$ разрешимо относительно $[x]\in IR$ тогда и только тогда, когда $\chi([a])\geq\chi([b])$. Решение не единственно лишь в случае когда $\chi([a])\equiv\chi([b])\leq 0$.

Пример 1.2.

Пусть дано уравнение $[1,2][x]=[-1,3]$.

$\chi([[1,2])=1/2>\chi([-1,3])=-1/3$, т.о. решение единственно $[x]=[-1/2,3/2]$.

Если рассмотреть множество всех уравнений вида $ax=b$, $a\in[1,2]$, $b\in[-1,3]$, то $\{x=\frac{b}{a}/\ a\in[1,2],\ b\in[-1,3]\}=[-1,3]/[1,2]=[-1,3][1/2,1]=[-1,3]\supset[x]$.

Пусть уравнению

$$[a][x]=[b],$$

где $0\notin[a]$ удовлетворяет некоторый интервал $[x]\in IR$, тогда $[x]\subseteq[b]/[a]$.

Доказательство:

Пусть $x \in [x]$, тогда существует $a \in [a]$ и $b \in [b]$, $ax=b$ следовательно $x=\dfrac{b}{a} \notin [b]/[a]$.

Замечание:

Равенство $[a][x]=[b]$ может быть выполнено, даже если $[b]/[a]$ неопределенно.

2 Лекция 2. Характеристики интервалов и их свойства. Полная интервальная арифметика

Рассмотрим основные характеристики.

Ширина $[a]$ – это величина $wid[a]=\overline{a}-\underline{a}$.

Середина $[a]$ – полусумма $mid[a]=(\underline{a}+\overline{a})/2$.

Радиус $[a]$ – это величина $rad[a]=(\overline{a}-\underline{a})/2$.

Интервал $[a]$ называется ***уравновешенным***, если $\underline{a}=-\overline{a}$ или $mid[a]=0$.

Абсолютной величиной интервала $[a]$ называется наибольшее из абсолютных значений точек интервала $[a]$, т.е. величина

$$|[a]| = \max\{|a| \,/\, a \in [a]\} = \max\{|\underline{a}|, |\overline{a}|\}.$$

Магнитудой интервала $[a]$ называется наименьшее из абсолютных значений точек интервала $[a]$, т.е. величина

$$\langle [a] \rangle = \min\{|a| \,/\, a \in [a]\} = \begin{cases} \min\{|\underline{a}|, |\overline{a}|\},\ \textit{если}\ 0 \notin [a], \\ 0,\ \textit{если}\ 0 \in [a]. \end{cases}$$

Отклонением правильного интервала $[a]$ называется величина

$$dev[a] = \begin{cases} \underline{a},\ \textit{если}\ |\underline{a}| \ge |\overline{a}|, \\ \overline{a},\ \textit{если}\ |\underline{a}| \le |\overline{a}|. \end{cases}$$

Т.е. наиболее удаленная от 0 точка интервала называется ***отклонением***.

Обозначим, $\sigma([a]) = sign(\overline{a} + \underline{a})$ знак середины интервала *[a]*. Если $\sigma([a])$ и $\sigma([b]) \geq 0$ для некоторых *[a],[b]* $\in$ *IR*, то будем говорить, что *[a],[b]* одинаково расположены относительно 0 [1].

Пример 2.1.

Дан интервал *[a]*=[-3,1].

Найти *wid[a], mid[a], rad[a]*, $\|[a]\|$, $\langle[a]\rangle$, $dev[a]$.

Решение:

wid[a]=1-(-3)=4,

mid[a]= $\frac{1}{2}$(-3+1)=-1,

rad[a]= $\frac{1}{2}$(1-(-3))=2,

$\|[a]\|$=3,

$\langle[a]\rangle$=0,

$dev[a]$=-3.

Для *[a],[b]* условимся считать, что *[a]* не превосходит *[b]* и писать *[a]≤[b]* тогда и только тогда, когда $\underline{a} \leq \underline{b}$ и $\overline{a} \leq \overline{b}$.

Интервал называется ***неотрицательным***, если неотрицательны оба его конца. Интервал называется ***неположительным***, если неположительны оба его конца.

Свойства абсолютной величины и магнитуды:

1) если *[a]⊆[b]*, то $\|[a]\| \leq \|[b]\|$ и $\langle[a]\rangle \geq \langle[b]\rangle$.

Доказательство:

Для доказательства достаточно заметить, что если *[a]⊆[b]*, то $\|[a]\| = \max\limits_{t\in[a]}|t| \leq \max\limits_{t\in[b]}|t| = \|[b]\|$ и $\langle[a]\rangle = \min\limits_{t\in[a]}|t| \geq \min\limits_{t\in[b]}|t| = \langle[b]\rangle$.

2) $\|[a]\| - \langle[b]\rangle \leq \|[a] \pm [b]\| \leq \|[a]\| + \|[b]\|$.

Доказательство:

Напомним, что $|a|-|b| \le |a \pm b| \le |a|+|b|$ для любых $a,b \in R$. Поэтому $\|[a]\pm[b]\| = \max\limits_{\substack{a\in[a]\\ b\in[b]}} |a \pm b| \le \max(|a|+|b|) \le \max\limits_{a\in[a]}|a| + \max\limits_{b\in[b]}|b| = \|[a]\|+\|[b]\|$.

$\|[a]\| - \langle[b]\rangle = \max|a| - \min|b| \le \max(|a|-|b|) \le \max|a \pm b| = \|[a]\pm[b]\|$.

3) $\langle[a]\rangle - \|[b]\| \le \langle[a]\pm[b]\rangle \le \langle[a]\rangle + \|[b]\|$;

4) $\|[a]\cdot[b]\| = \|[a]\|\cdot\|[b]\|$;

5) $\|[a]/[b]\| \le \|[a]\|\cdot\langle[b]\rangle$ и $\langle[a]/[b]\rangle = \langle[a]\rangle/\|[b]\|$, если $0 \notin [b]$;

6) $\left\|\dfrac{1}{[a]}\right\| = \dfrac{1}{\langle[a]\rangle}$, если $0 \notin [a]$.

Свойства 3-6 доказать самостоятельно.

Свойства середины:

1) $mid([a]\pm[b]) = mid[a] \pm mid[b]$;

2) $mid(a[b]) = a\ mid[b]$, если $a \in R$.

Доказать самостоятельно.

Свойства радиуса:

1) если $[a] \subseteq [b]$, то $rad[a] \le rad[b]$.

Доказательство:

Для доказательства достаточно заметить, что если $[a] \subseteq [b]$, то $\overline{a} \le \overline{b}$ и $\underline{a} \ge \underline{b}$ поэтому $rad[a] = (\overline{a} - \underline{a})/2 \le (\overline{b} - \underline{b})/2 = rad[b]$.

2) $rad([a]\pm[b]) = rad[a] + rad[b]$.

3) $\|[a]\| rad[b] \le rad([a][b]) \le \|[a]\|\ rad[b] + rad[a]\|mid[b]\|$;

4) $rad[a]\cdot\|[b]\| \le rad([a][b]) \le rad[a]\cdot\|[b]\| + rad[b]\|mid[a]\|$;

5) $rad(\dfrac{1}{[a]}) = \dfrac{rad[a]}{\langle[a]\rangle\cdot\|[a]\|}$, если $0 \notin [a]$.

Свойства 2-5 доказать самостоятельно.

Радиус (ширина) интервала при сложении и вычитании может только складываться, поэтому противоположного (обратного по сложению) элемента для интервалов ненулевой ширины в *IR* не существует. Аналогично, при умножении ненулевых интервалов радиус произведения, как следует из свойств радиуса 3-4, никогда не может быть 0. Поэтому интервалы ненулевой ширины в *IR* не могут иметь обратных по умножению. Вместо полноценной обратимости интервальных арифметических операций в *IR* имеют место более слабые свойства сокращений:

1) если $[a]+[c]=[b]+[c]$, то $[a]=[b]$;

2) если $[a][c]=[b][c]$, $0\notin[a]$, $0\notin[b]$, $0\notin[c]$, то $[a]=[b]$.

Возведение интервала в степень определяется следующим образом:

$$[a]^n=\underbrace{[a][a]...[a]}_{n\ раз}.$$

Также можно доказать следующие свойства:

1) $rad([a]^n)\le |[a]|^n rad[a]$, если $0\in[a]$;

2) $rad([a]^n)\le n|[a]|^{n-1} rad[a]$, если $0\notin[a]$.

Радиус и ширина интервала характеризуют абсолютный размер интервальной неопределенности. Другой мерой неопределенности является функция Рачека, определяемая следующим образом:

$$\chi([a])=\begin{cases}\underline{a}/\overline{a}, & |\underline{a}|\le|\overline{a}|;\\ \overline{a}/\underline{a}, & |\underline{a}|\ge|\overline{a}|.\end{cases}$$

Для нулевых интервалов эта функция неопределенна. Ясно, что
$-1\le\chi([a])\le 1$ и $\chi([a])=1$ тогда и только тогда, когда $0\ne a\in R$.

Если $[a]$ и $[b]$ ненулевые интервалы, то если $\chi([a])=\chi([b])$, то $[a]=t[b]$, $0\ne t\in R$. А также $\chi([a]+[b])\le max\{\chi([a]),\chi([b])\}$.

Если $[a]$ и $[b]$ одинаково расположены относительно 0, то $\chi([a]+[b])\ge min\{\chi([a]),\chi([b])\}$.

Если $[a]\supseteq[b]$ и $\chi([b])\ge 0$, то $\chi([a])\le\chi([b])$.

1) все интервалы с ненулевой шириной не имеют обратных по отношению к операциям +,-, *,/.

2) арифметические операции связаны друг с другом слабыми соотношениями:

$$[a]+[x]=[b]; \tag{2.1}$$

$$[a][x]=[b]; \qquad (2.2)$$

$$[a]\wedge[b]=\inf_{\subseteq}\{[a],[b]\}=[\max\{\underline{a},\underline{b}\},\min\{\overline{a},\overline{b}\}]; \qquad (2.3)$$

$$[a]\vee[b]=\sup_{\subseteq}\{[a],[b]\}=[\min\{\underline{a},\underline{b}\},\max\{\overline{a},\overline{b}\}]. \qquad (2.4)$$

Равенство (2.3) не всегда выполняется в классической интервальной арифметике.

U – система до которой нужно достроить систему *IR* чтобы она была полной: $U\supset IR$; $KR\supset IR$. В *KR* выполняются операции (2.3) и (2.4).

В *KR* элементами являются пары вещественных чисел: $[\eta,\theta]$, т.е. $[a]=[\eta,\theta]$.

Правильные и неправильные интервалы меняются местами в результате отображения дуализации: $dual: KR\rightarrow KR$, меняющего местами концы интервалов.

$$dual\,[a]=[\overline{a},\underline{a}].$$

Правильной проекцией интервалов называется величина:

$$pro[a]=\begin{cases}[a], & [a]-\textit{правильный};\\ dual[a], & [a]-\textit{неправильный}.\end{cases}$$

$[a]\subseteq[b]$ тогда и только тогда, когда $\underline{a}\geq\underline{b}$ и $\overline{a}\leq\overline{b}$.

Для интервалов $[a]$ и $[b]\in KR$ условимся считать, что $[a]$ не превосходит $[b]$ тогда и только тогда, когда $[a]\leq[b]$ т.е. $\underline{a}\leq\underline{b}$ и $\overline{a}\leq\overline{b}$.

Интервал называется ***неотрицательным***, если неотрицательны оба его конца и ***неположительным***, если неположительны оба его конца.

Знак интервала обозначим:

$$sgn[a]=\begin{cases}+, & [a]\geq 0;\\ -, & [a]\leq 0.\end{cases}$$

Рассмотрим основные операции полной интервальной арифметики.

Сложение и умножение на вещественные числа определяется в *KR* следующим образом:

$$[a]+[b]=[\underline{a}+\underline{b},\overline{a}+\overline{b}];$$

$$\mu[a]=\begin{cases}[\mu\underline{a};\mu\overline{a}], & \mu\geq 0;\\ [\mu\overline{a};\mu\underline{a}], & \mu\leq 0.\end{cases}$$

Таким образом, любой элемент *[a]*$\in$*KR* имеет единственный обратный по сложению *opp [a]*.

[a]+opp [a]=0 значит *opp [a]*$=[-\underline{a}, -\overline{a}]$.

Обозначим операцию обратную сложению, так называемое ***внутреннее*** или ***алгебраическое вычитание*** в *KR* через $\ominus$ [6].

$[a]\ominus[b]=[a]+opp\ [b]=[\underline{a}-\underline{b}, \overline{a}-\overline{b}]$.

Для любых *[a], [b], [c]* $\in$*KR* справедливы дистрибутивные свойства сложения по отношению к операциям взятия верхней и нижней граней:

$[a]+([b]\wedge[c])=([a]+([b]\wedge([a]+[c])$;

$[a]+([b]\vee[c])=([a]+([b]\vee([a]+[c])$.

Можно доказать, что для любого *[a]*$\in$*KR* справедливы следующие соотношения:

[a]+dual [a]=2 med [a];

[a]-dual [a]=0.

Выделим подмножества:

$P=\{[a]\in KR \setminus \underline{a}\geq 0, \overline{a}\geq 0\}$;

$Z=\{[a]\in KR \setminus \underline{a}\leq 0, \overline{a}\geq 0\}$;

$-P=\{[a]\in KR \setminus -[a]\in P\}$;

$dual\ z=\{[a]\in KR \setminus dual[a]\in Z\}$.

Тогда интервальная арифметика Каухера описывается таблицей 2.1:

Таблица 2.1 – Интервальная арифметика Каухера

интервал	$[b]\in P$	$[b]\in Z$	$[b]\in -P$	$[b]\in dual\ Z$
$[a]\in P$	$[\underline{a}\underline{b}, \overline{a}\overline{b}]$	$[\overline{a}\underline{b}, \overline{a}\overline{b}]$	$[\overline{a}\underline{b}, \underline{a}\overline{b}]$	$[\underline{a}\underline{b}, \underline{a}\overline{b}]$
$[a]\in Z$	$[\underline{a}\overline{b}, \overline{a}\overline{b}]$	$[\min\{\underline{a}\overline{b}, \overline{a}\underline{b}\}, \max\{\underline{a}\underline{b}, \overline{a}\overline{b}\}]$	$[\overline{a}\underline{b}, \underline{a}\underline{b}]$	0
$[a]\in -P$	$[\underline{a}\overline{b}, \overline{a}\underline{b}]$	$[\underline{a}\overline{b}, \underline{a}\underline{b}]$	$[\overline{a}\overline{b}, \underline{a}\underline{b}]$	$[\overline{a}\overline{b}, \overline{a}\underline{b}]$
$[a]\in dual\ Z$	$[\underline{a}\underline{b}, \overline{a}\underline{b}]$	0	$[\overline{a}\overline{b}, \underline{a}\overline{b}]$	$[\max\{\underline{a}\underline{b}, \overline{a}\overline{b}\}, \min\{\underline{a}\overline{b}, \overline{a}\underline{b}\}]$

Интервальное умножение в *KR* является ассоциативным и коммутативным.

Будем обозначать операцию обратную умножению, так называемое ***внутреннее*** или ***алгебраическое деление*** в *KR*, через $\oslash$ и определим, следующим образом

$[a]\oslash[b]=[a][b]^{-1}=[a][\frac{1}{\underline{b}},\frac{1}{\overline{b}}]$, где $0\notin pro\ [b]$;

$[a]-[b]=[\underline{a}-\overline{b},\overline{a}-\underline{b}]$;

$[a]/[b]=[a]\cdot[\frac{1}{\overline{b}},\frac{1}{\underline{b}}]$, где $0\notin pro\ [b]$.

Все операции являются монотонными по включению, т.е.

$[a]\subseteq[a']$, $[b]\subseteq[b']$, тогда $[a]\circ[b]\subseteq[a']\circ[b']$, где $\circ\in\{+,-,*,/\}$.

Взаимосвязь сложения и умножения определяются соотношениями в арифметике Каухера:

$[a]$ – правильный, то $[a]([b]+[c])\subseteq[a][b]+[a][c]$.

$[a]$ – неправильный, то $[a]([b]+[c])\supseteq[a][b]+[a][c]$.

Эти два выражения обращаются в верные равенства, когда $[a]$ стягиваются в точку, т.е. $a([b]+[c])\subseteq a[b]+a[c]$.

Если $[b][c]\geq 0$, то $[a]([b]+[c])=[a][b]+[a][c]$.

Для полного описания всей дистрибутивности вводится обобщенный дистрибутивный закон:

Если $sgn\ [b]=sgn\ [c]=sgn\ ([b]+[c])$, тогда

$$[a]([b]+[c])=[a][b]+(dual\ [a])[c].$$

3 Лекция 3. Метрика и топология на интервальных пространствах. Комплексные интервальные арифметики. Арифметические операции над комплексными интервалами. Алгебраические свойства комплексных интервальных арифметик. Другие интервальные арифметики

Отображения *dist*: $IR \times IR \to R$ и $KR \times KR \to R_+$, определяемые как

$$dist([a],[b])=max\ \{\,|\underline{a}-\underline{b}|,|\overline{a}-\overline{b}|\,\}=|[a]\ominus[b]|$$

и обладают следующими свойствами:

1) $dist([a],[b])\geq 0$ и равенство достигается только при $[a]=[b]$;

2) $dist([a],[b])= dist([b],[a]);$

3) $dist([a],[c])\leq dist([a],[b])+dist([b],[c]),\ [a],\ [b],\ [c]\in KR$ или IR.

Свойство 1) и 2) следует из вида выражения *dist*: $IR \times IR \to R$ и $KR \times KR \to R_+$. А свойство 3) вытекает из неравенства треугольников, для абсолютной величины вещественных чисел.

Т.к. величина $dist([a],[b])$ обладает всеми свойствами расстояния, то можно ввести следующее определение.

Величину $dist([a],[b])$, определяемую *dist*: $IR \times IR \to R$ и $KR \times KR \to R_+$, будем называть ***расстоянием (метрикой)*** на множестве IR или KR.

Докажем равенство:

$$dist([a],[b])=max\{min\{t\in R_+ \backslash [a]\subseteq[b]+t[-1,1]\},\ min\{t\in R_+ \backslash [b]\subseteq[a]+t[-1,1]\}\}. \quad (3.1)$$

Доказательство:

Для интервалов $[a]$ и $[b]$ обозначим

$D=max\ \{min\{t\geq 0 \ \backslash\ [a]\subseteq[b]+t[-1,1]\},\ min\{t\geq 0 \ \backslash\ [b]\subseteq[a]+t[-1,1]\}\}.$

Тогда

$$[b]\subseteq[a]+d[-1,1] \quad (3.2)$$

$$[a]\subseteq[b]+d[-1,1]. \quad (3.3)$$

d – минимальное вещественное число, удовлетворяющее (3.2) и (3.3).

Условие (3.2) выполняется тогда и только тогда, когда

$$\overline{a}-\overline{b}\geq -d\ ; \quad (3.4)$$

$$\underline{a}-\underline{b}\leq d\ . \quad (3.5)$$

А условие (3.3) выполняется тогда и только тогда, когда

$$\overline{a}-\overline{b}\leq d\ ; \quad (3.6)$$

$$\underline{a}-\underline{b}\geq -d\ . \quad (3.7)$$

Комбинируя (3.4) с (3.6), а (3.5) с (3.7) получим:

$$|\overline{a}-\overline{b}| \le d\ ; \tag{3.8}$$

$$|\underline{a}-\underline{b}| \le d\ . \tag{3.9}$$

Поэтому, если d – минимальное вещественное число, для которого выполнены неравенства (3.8) и (3.9), то

$$d = max\ \{ |\underline{a}-\underline{b}|, |\overline{a}-\overline{b}| \} = dist([a],[b]).$$

Множество, на котором введено расстояние (метрика), называется ***метрическим пространством.*** Метрическое пространство называется ***полным,*** если любая фундаментальная последовательность (последовательность Коши) имеет в нем предел. (***Фундаментальная последовательность*** – последовательность, у которой расстояние между точками стремится к 0).

Множества интервалов *IR* и *KR,* снабженные расстоянием *dist* , являются полными метрическими пространствами, а последовательность интервалов $\{[a_k]\}$ сходится тогда и только тогда, когда последовательность концов $\{\overline{a}_k\}$ и $\{\underline{a}_k\}$ сходится в *R*. При этом

$$\lim_{k\to\infty}[a_k] = [\lim_{k\to\infty}\underline{a}_k, \lim_{k\to\infty}\overline{a}_k].$$

Принцип вложенных интервалов:

В *IR* любая вложенная последовательность интервалов $\{[a_k]\}$, т.е. такая, что

$[a_{k+1}] \subseteq [a_k]$, имеет предел и $\lim\limits_{k\to\infty}[a_k] = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty}[a_k]$.

Свойства расстояния *dist*.

1) $dist([a]+[c],[b]+[c])=dist([a],[b])$.

Доказательство следует из определения расстояния.

2) $dist([a]+[c],[b]+[d]) \le dist([a],[b])+dist([c],[d])$.

Доказательство:

$dist([a]+[c],[b]+[d]) = |([a]+[c]) \ominus ([b]+[d])| = |([a]\ominus[b]) + ([c]\ominus[d])| \le$

$\le |[a]\ominus[b]| + |[c]\ominus[d]| = dist([a],[b])+dist([c],[d])$.

3) $dist([a][b],[a][c]) \le \|[a]\| \, dist([b],[c])$.

Доказательство:

Заметим, если $r = dist([b],[c])$, то $[b] \subseteq [c] + r[-1,1]$ и $[c] \subseteq [b] + r[-1,1]$ (в силу равенства (3.1)), умножая обе части этих включений на $[a]$ получим:

$$[a][b] \subseteq [a][c] + [a]r[-1,1] \text{ и } [a][c] \subseteq [a][b] + [a]r[-1,1],$$

что ввиду равенства $[a][-1,1] = \|[a]\| [-1,1]$ следует, что

$$[a][b] \subseteq [a][c] + \|[a]\| r[-1,1] \text{ и } [a][c] \subseteq [a][b] + \|[a]\| r[-1,1],$$

соответственно.

Повторное применение равенства (3.1) приводит к тому, что действительно

$$dist([a][b],[a][c]) \le \|[a]\| r = \|[a]\| \, dist([b],[c]).$$

4) если $[a] \subseteq [b]$, то $rad[b] - rad[a] \le dist([a],[b]) \le 2(rad[b] - rad[a])$;

5) если $[a] \subseteq [b] \subseteq [c]$, то $\max\{dist([a],[b]), dist([b],[c])\} \le dist([a],[c])$;

Свойства 4 и 5 доказать самостоятельно.

Множество комплексных чисел C является двумерным. Комплексные интервалы – прямоугольники и круги комплексной плоскости.

Для интервалов $[a]$, $[b]$ $\in IR$ ***прямоугольным комплексным интервалом*** $[a]+i[b]$ называется множество комплексной плоскости

$$\{z = a + ib \in C \setminus a \in [a],\, b \in [b]\}.$$

Круговым комплексным интервалом $\langle c, r \rangle$, где $c \in C$, $r \in R$ и $r \ge 0$ называется множество комплексной плоскости

$$\{z = C \setminus |z - c| \le r\}.$$

Обозначим IC_{rect} – множество прямоугольных комплексных интервалов; IC_{circ} – множество круговых комплексных интервалов [2].

Абсолютной величиной (модулем) комплексного интервала $[z] \in IC$ называется величина $\|[z]\| = \max\{|z| \setminus z \in [z]\}$.

Для прямоугольных комплексных интервалов $[z] = [a] + i[b]$.

И $\|[z]\| = \sqrt{\|[a]\|^2 + \|[b]\|^2}$.

Для кругового интервала: $[z]=\langle c, r\rangle$ и $\left|[z]\right| = |c| + r$.

Рассмотрим *арифметические операции над комплексными интервалами*.

Условимся для интервала $[a] \in IR$ над $[a]^2$ понимать интервальное расширение функции возведения в квадрат $x \to x^2$, т.е. $[a]^2=\{a^2 \setminus a \in [a]\}$. Конструктивное определение:

$$[a]^2 = \begin{cases} [\underline{a}^2, \overline{a}^2], & \text{если } [a] \geq 0; \\ [0, \max\{\underline{a}^2, \overline{a}^2\}], & \text{если } 0 \in [a]; \\ [\overline{a}^2, \underline{a}^2], & \text{если } [a] \leq 0. \end{cases}$$

Рассмотрим *арифметические операции над прямоугольными комплексными интервалами*:

1) $([a_1]+[b_1]i)+([a_2]+[b_2]i)=([a_1]+[a_2])+([b_1]+[b_2])i;$

2) $([a_1]+[b_1]i)-([a_2]+[b_2]i)=([a_1]-[a_2])+([b_1]-[b_2])i;$

3) $([a_1]+[b_1]i)\cdot([a_2]+[b_2]i)=([a_1][a_2])-([b_1][b_2])+([a_1][b_2])+([b_1][a_2])i;$

4) $\dfrac{[a_1]+[b_1]i}{[a_2]+[b_2]i} = \dfrac{1}{[a_2]^2+[b_2]^2} =([a_1][a_2])+([b_1][b_2])+([a_2][b_1])-([b_2][a_1])i.$

Деление выполнимо при $0 \notin [a_2]+[b_2]i$.

Деление комплексных интервалов может быть определено и другими способами.

Рассмотрим *арифметические операции над круговыми комплексными интервалами*:

1) $<c_1,r_1>+<c_2,r_2>=<c_1+c_2,r_1+r_2>;$

2) $<c_1,r_1>-<c_2,r_2>=<c_1-c_2,r_1+r_2>;$

3) $<c_1,r_1><c_2,r_2>=<c_1c_2,|c_1|r_2+|c_2|r_1+r_1r_2>;$

4) $\dfrac{1}{<c,r>} = < \dfrac{c^*}{|c|^2-r^2}; \dfrac{r}{|c|^2-r^2};$

$\dfrac{<c_1,r_1>}{<c_2,r_2>} = <c_1,r_1> \dfrac{1}{<c_2,r_2>}$, где c^* - сопряженное к c комплексное число.

Рассмотрим *алгебраические свойства комплексных интервальных арифметик*.

Для комплексных интервальных арифметик имеют место следующие свойства:

1) коммутативность сложения: $[u]+[v]=[v]+[u]$;

2) ассоциативность сложения: $([u]+[v])+[w]=[v]+([u]+[w])$;

3) коммутативность умножения: $[u][v]=[v][u]$;

4) субдистрибутивность: $[u]([v]+[w])\subseteq[u][v]+[u][w]$. При этом, как и в вещественном случае: $u([v]+[w])=u[v]+u[w]$, для любого $u\in C$, $[v]$, $[w]\in IC$.

Умножение в прямоугольной комплексной интервальной арифметике IC_{rect} не обладает ассоциативностью, т.к. отсутствует дистрибутивность умножению в IR. В круговой комплексной интервальной арифметике ассоциативность умножения выполняется, $([u][v])[w]=[v]([u][w])$ для любых $[u]$, $[v]$, $[w]\in IC_{circ}$.

Арифметические операции в комплексной интервальной арифметике IC_{rect} и IC_{circ} монотонны по включению, т.е. для любых $[u]$, $[v]$, $[u']$, $[v']\in IC$ и любых операций $\circ\in\{+,-,*,/\}$ справедливо если $[u]\subseteq[u']$, $[v]\subseteq[v']$, то $[u]\circ[v]\subseteq[u']\circ[v']$.

Также бывают и другие интервальные арифметики. Рассмотрим некоторые из них.

1. Интервальная арифметика Кахана.

Помимо обычных интервалов из IR ее элементами являются множества вида $]-\infty;p]$, $[q;+\infty[$ и $]-\infty;p]\cup[q;+\infty[$. Результаты сложения, вычитания, умножения, деления в классической интервальной арифметике и арифметике Кахана полностью совпадают. Но в арифметике Кахана дополнительно определено деление обычных интервалов $[a]$, $[b]$ с $0\in[b]$.

$$\frac{[a]}{[b]}=\frac{[\underline{a},\overline{a}]}{[\underline{b},\overline{b}]}=\begin{cases} [a][\frac{1}{\overline{b}},\frac{1}{\underline{b}}], & \textit{если } 0\notin[b]; \\ ]-\infty,+\infty[, & \textit{если } 0\notin[a],\ 0\in[b]; \\ [\frac{\overline{a}}{\underline{b}},+\infty[, & \textit{если } \overline{a}<0,\ \underline{b}<\overline{b}=0; \\ ]-\infty,\frac{\overline{a}}{\overline{b}}]\cup[\frac{\overline{a}}{\underline{b}},+\infty[, & \textit{если } \overline{a}<0,\ \underline{b}<0<\overline{b}; \\ ]-\infty,\frac{\overline{a}}{\overline{b}}], & \textit{если } \overline{a}<0,\ 0=\underline{b}<\overline{b}; \\ ]-\infty,\frac{\underline{a}}{\underline{b}}], & \textit{если } \overline{a}>0,\ \underline{b}<\overline{b}=0; \\ ]-\infty,\frac{\underline{a}}{\underline{b}}]\cup[\frac{\underline{a}}{\overline{b}},+\infty[, & \textit{если } 0<\overline{a},\ \underline{b}<0<\overline{b}; \\ [\frac{\underline{a}}{\overline{b}},+\infty[, & \textit{если } 0<\overline{a},\ 0=\underline{b}<\overline{b}; \\ 0, & \textit{если } [a]=0,\ 0\notin[b]. \end{cases}$$

Эта арифметика полезна, например, при вычислениях с цепными дробями.

В арифметике Кахана выполняется монотонность операций по включению и фундаментальное свойство – основа классической интервальной арифметики и ее применение.

2. Мультиинтервальная арифметика.

Мультиинтервал – объединение конечного числа несвязных интервалов числовой оси.

Между мультиинтервалами могут быть определены арифметические операции «по представителям» совершенно аналогично, как на множестве интервалов.

В мультиинтервале не выполняется закон сокращения.

Пример: ([1,2]∪[3,4])+[0,1]=[1,3]∪[3,5]=[1,5]. Но и [1,4]+[0,1]=[1,5].

Невозможность сокращения имеет следствием отсутствие обратимости арифметических операций. Таким образом, алгебраическое пополнение мультиинтервальной арифметики похожее на арифметику Каухера, не может быть построено.

Главный недостаток мультиинтервальной арифметики - быстрое нарастание сложности вычислений, вследствие лавинообразного размножения компонент связности операндов. Например, при сложении или вычитании двух мультиинтервалов, каждый из которых имеет по две компоненты связности, результат будет иметь уже 4 компоненты связности.

3. Сегментные арифметики.

Сегментом или ***отрезком*** числовой оси R называется множество чисел, заключенных между данными числами $a, b \in R$, сами они включены в сегмент. Такие множества называются ***интервалами.*** Иногда сегмент обозначает полуоткрытый и открытый промежуток числовой оси, т.е. множество точек между двумя границами, из которых либо одна, либо обе не принадлежат самому множеству, т.е. сегментная арифметика – множество таких сегментов, снабженные арифметическими операциями подобными интервальной арифметике.

Целесообразность введения таких арифметик оспаривается многими исследователями. аргументом этой точки зрения является тот факт, что все вещественные операции являются одновременно открытыми и замкнутыми в топологическом смысле. Они переводят открытые множества в открытые, а замкнутые в замкнутые. Исключение лишь является деление на ноль.

4. Твины и твинная арифметика.

Слово «твин» от англ. «twin» - двойной интервал. ***Твин*** – интервал интервалов, т.е. интервал с интервальными концами. Необходимость возникает в ряде практических ситуаций. Например, ряд наблюдений с интервальными значениями порождает интервалы с неопределенными концами, т.к. интервалы могут быть упорядочены различными способами, то существуют различные виды твинов [3].

4 Лекция 4. Интервальные векторы и матрицы

Интервальные векторы – вектор компоненты, которого являются интервалы, таким образом, если $[a_1]$, $[a_2]$,…, $[a_n]$ некоторые интервалы, то

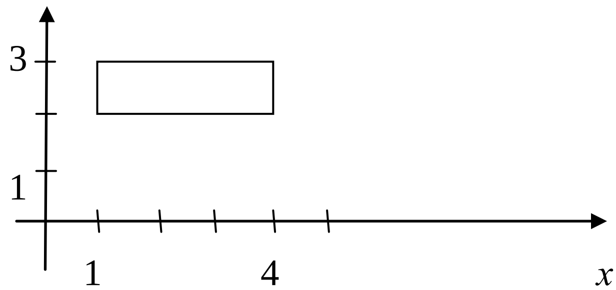
$$[a]=\begin{pmatrix}[a_1]\\ [a_2]\\ \vdots\\ [a_n]\end{pmatrix}\text{- интервальный вектор-столбец.}$$

$[a]=([a_1], [a_2],\dots, [a_n])$ – интервальный вектор-строка.

Множество всех n-мерных интервальных векторов, компоненты которых принадлежат IR обозначим IR^n, а KR – KR^n.

Пример 4.1.

Изобразить графически вектор $[a]$=([1,4] [2,3]).



Множество векторов не образуют линейное пространство, т.к. не дистрибутивна интервальная арифметика. Геометрический образ интервальных векторов IR^n являются прямоугольные параллелепипеды со сторонами параллельными осям координат или брус.

Если S – непустое множество в R^n ($S\subset R$), то его ***интервальной оболочкой*** $\square S$ называется наименьший по включению интервальный вектор, содержащий S. Интервальная оболочка множества S - пересечение множества всех векторов, содержащих S, т.е.

$$\square S=\cap\{[x]\in IR^n \setminus [x]\supseteq S\}.$$

ID – множество всех интервальных векторов $[x]\in IR$, содержащихся в D, т.е. $[x]\subseteq D$.

Над интервальными векторами можно производить операции сложения, вычитания, умножение на интервал аналогично, операциям над точечными векторами.

Пример 4.2.

Выполнить действие:

[4,5]·([-5,3] [-1,3])+[-2,0]·([-3,-1]   [0,5]).

Решение:

[4,5]·([-5,3] [-1,3])+[-2,0]·([-3,-1]   [0,5])=([4,5]·[-5,3] [4,5]·[-1,3])+
+([-2,0]·[-3,-1] [-2,0]·[0,5])=([-25,15] [-5,15])+([0,6] [-10,0])=([-25, 21] [-15,15].

Интервальная матрица – это матрица, элементами которой являются интервалы.

$$[A]=\begin{pmatrix} [a_{11}] & [a_{12}] & \dots & [a_{1n}] \\ [a_{21}] & [a_{22}] & \dots & [a_{2n}] \\ . & . & \dots & . \\ [a_{m1}] & [a_{m1}] & \dots & [a_{mn}] \end{pmatrix}$$

Сокращенная запись $[A]=([a_{ij}])$.

Множество всех интервальных матриц размера $m\times n$ над IR и KR обозначим $IR^{m\times n}$ и $KR^{m\times n}$.

Операции взятия середины интервала, его радиуса и ширины, операции *dual, pro, opp* к интервальным векторам и матрицам будут применены покомпонентно и элементно.

Две интервальные матрицы $[A]=([a_{ij}])$ и $[B]=([b_{ij}])$ размерности $m\times n$ считаются ***равными,*** т.е. $[A]=[B]$, если все их соответствующие компоненты равны.

Упорядочение по включению на множестве интервальных векторов и матриц с элементами из KR есть по определению прямое произведение порядка по включению на отдельных компонентах KR , таким образом,

$$[a]\subseteq[b] \Leftrightarrow [a_i]\subseteq[b_i], \text{ для любого } i;$$

$$[A]\subseteq[B] \Leftrightarrow [a_{ij}]\subseteq[b_{ij}], \text{ для любых } i \text{ и } j.$$

Операции ∨ и ∧ в применении к интервальным матрицами и векторам будут пониматься покомпонентно. Аналогично, определяются отношения <, ≤, >, ≥.

Рассмотрим операции над интервальными матрицами.

$[A]\circ[B]=\square\{A\circ B \setminus A\in[A], B\in[B]\}$, $\circ$ - операции +, -, *.

Для любых $[A], [B]\in IR^{m\times n}$ множество $\square\{A\pm B \setminus A\in[A], B\in[B]\}$ совпадает с интервальной матрицей $[C]=([c_{ij}])\in IR^{m\times n}$ такой, что $[c_{ij}]=[a_{ij}]+[b_{ij}]$.

Для любых $[A]\in IR^{m\times p}$, $[B]\in IR^{p\times n}$ множество $\square\{AB \setminus A\in[A], B\in[B]\}$ совпадает с интервальной матрицей $[C]=([c_{ij}])\in IR^{m\times n}$ такой, что

$$[c_{ij}]=\sum_{k=1}^{p}[a_{ik}][b_{kj}]. \tag{4.1}$$

Доказательство:

Элементы матрицы AB по определению для обычных матриц равны

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{p}a_{ik}b_{kj} \tag{4.2}$$

и содержат по одному вхождению a_{ik} и b_{kj} в первой степени. Тогда в силу основной теоремы интервальной арифметики интервальными выражениями (4.1) выражений даются точные значения для соответствующих выражений (4.2) при $a_{ik}\in[a_{ik}]$ и $b_{kj}\in[b_{kj}]$, что и требовалось доказать [5].

Пример 4.3.

Перемножить матрицы:

$$\begin{pmatrix}[1,3] & 1\\ 3 & [1,3]\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & [-2,0]\\ [0,2] & 1\end{pmatrix}.$$

Решение:

$$\begin{pmatrix}[1,3] & 1\\ 3 & [1,3]\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & [-2,0]\\ [0,2] & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}[1,3]\cdot[1,1]+[1,1]\cdot[0,2] & [1,3]\cdot[-2,0]+1\cdot 1\\ [3,3]\cdot[1,1]+[1,3]\cdot[0,2] & [3,3]\cdot[-2,0]+[1,3]\cdot 1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}[1,3]+[0,2] & [-6,0]+[1,1]\\ [3,3]+[0,6] & [-6,0]+[1,3]\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}[1,5] & [-5,1]\\ [3,9] & [-5,3]\end{pmatrix}.$$

Сумма (разность) двух интервальных матриц одинаковой размерности называется интервальная матрица той же размерности, образованная поэлементно суммой (разностью) операндов. Если матрица $[A]=([a_{ij}])\in KR^{m\times p}$, $[B]=([b_{ij}])\in KR^{p\times n}$, тогда $[A][B]$ есть $[C]=([c_{ij}])\in KR^{m\times n}$, такая что выполняется равенство (4.1).

Замечание:

Существует один частный случай интервального матричного умножения, при котором его результат совпадает с множеством всевозможных точечных произведений по представителям. Частным случаем является умножение интервальных матриц на точечный вектор, таким образом, для любых $[A]\in IR^{m\times n}$, $b\in R^n$ справедливо $[A]b=\{Ab \setminus A\in[A]\}$.

Пример 4.4.

Выполнить действия над матрицами:

$$[1,2]\cdot\begin{pmatrix}0 & [-4,4]\\ 2 & 1\end{pmatrix}+[-1,5]\cdot\begin{pmatrix}[3,5] & -1\\ 2 & [-1,1]\end{pmatrix}.$$

Решение:

$$[1,2]\cdot\begin{pmatrix}0 & [-4,4]\\ 2 & 1\end{pmatrix}+[-1,5]\cdot\begin{pmatrix}[3,5] & -1\\ 2 & [-1,1]\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}[0,0] & [-8,8]\\ [2,4] & [1,2]\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}[-5,25] & [-5,1]\\ [-2,10] & [-5,5]\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}[-5,25] & [-13,9]\\ [0,14] & [-4,7]\end{pmatrix}.$$

Рассмотрим свойства операций над интервальными матрицами.

Для любых $[A], [B], [C]\in IR^{m\times n}$ справедливы следующие свойства:

1) коммутативность сложения: $[A]+[B]=[B]+[A]$;

2) ассоциативность сложения: $([A]+[B])+[C]=[A]+([B]+[C])$;

3) коммутативность по включению: $[A]\pm[B]\subseteq[A']\pm[B']$, если $[A]\subseteq[A']$, $[B]\subseteq[B']$.

Особенностью интервального матричного умножения является отсутствие ассоциативности.

Пример 4.5.

$$[A]=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix},[B]=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix},\ [C]=\begin{pmatrix}[-1,1] & 0\\ 0 & [-1,1]\end{pmatrix}.$$

$$([A][B])[C]=(\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix})\begin{pmatrix}[-1,1] & 0\\ 0 & [-1,1]\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}[-1,1] & 0\\ 0 & [-1,1]\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 0 & [-1,1] \\ [-1,1] & [-1,1] \end{pmatrix}.$$

$$[A]([B][C])=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} [-1,1] & 0 \\ 0 & [-1,1] \end{pmatrix})=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} [-1,1] & 0 \\ [-1,1] & [-1,1] \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} [-2,2] & [-1,1] \\ [-1,1] & [-1,1] \end{pmatrix}.$$

Если $[A]=([a_{ij}])\in IR^{m\times p}$, $B=(b_{ij})\in R^{p\times q}$, $C=(c_{ij})\in R^{q\times n}$, тогда $[A](BC)\subseteq([A]B)C$. Если $[A]=([a_{ij}])\in KR^{m\times p}$ матрица состоит из неправильных элементов, $B=(b_{ij})\in R^{p\times q}$, $C=(c_{ij})\in R^{q\times n}$, тогда $[A](BC)\subseteq([A]B)C$.

Если $A=(a_{ij})\in R^{m\times p}$, $[B]=([b_{ij}])\in KR^{p\times q}$, $C=(c_{ij})\in R^{q\times n}$, тогда $(A[B])C=A([B]C)$.

Эффект обертывания – поразительное увеличение оценивающего множества в сравнении с множеством решений при итерировании, либо рекуррентном вычислении, происходящее от последовательной замены множества решений на более простые оценивающие множества.

Свойства середины:

1) $mid([A]\pm[B])=mid[A]\pm mid[B]$;

2) $mid(A[B])=Amid[B]$;

3) $mid([A]B)=(mid[A])B$.

Свойства радиуса:

1) $rad([A]\pm[B])=rad[A]+rad[B]$.

2) $rad[A]\cdot\left|[B]\right|\le rad([A][B])\le rad[A]\cdot\left|[B]\right|+rad[B]\left|med[A]\right|$.

Пример 4.6.

Для матрицы $[A]=\begin{pmatrix} [-3,-1] & [-1,2] & [-1,2] \\ [1,2] & [-2,0] & [0,1] \\ [1,2] & [-3,2] & [1,5] \end{pmatrix}$ найти $rad[A]$, $mid[A]$.

Решение:

$$rad[A]=\begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{5}{2} & 2 \end{pmatrix}; \quad mid[A]=\begin{pmatrix} -2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 3 \end{pmatrix}.$$

5 Лекция 5. Метрика и топология на интервальных пространствах. Нормы и спектральный радиус. Невырожденные и обратные интервальные матрицы

Метрикой на множестве KR^n называется величина

$$dist([a],[b])=max\{\|\underline{a}-\underline{b}\|,\|\overline{a}-\overline{b}\|\}, \tag{5.1}$$

если $[a],[b]\in KR^n$, где $\| \ \|$ - векторная норма на R^n.

$$Dist([a],[b])=\begin{pmatrix} dist([a_1],[b_1]) \\ \vdots \\ dist([a_n],[b_n]) \end{pmatrix}\in R^n. \tag{5.2}$$

Все интервальные арифметические операции на KR^n, а также $\wedge$ и $\vee$, являются непрерывными как в (5.1), так и в мультиметрике (5.2).

Аналогично, мультиметрика вводится для интервальных матриц:

$$Dist([A],[B])=\begin{pmatrix} dist([a_{11}],[b_{11}]) & \dots & dist([a_{1n}],[b_{1n}]) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ dist([a_{m1}],[b_{m1}]) & \dots & dist([a_{mn}],[b_{mn}]) \end{pmatrix}. \tag{5.3}$$

Для любых интервальных матриц $[A]=([a_{ij}])\in KR^{m\times p}$, $[B]=([b_{ij}])\in KR^{m\times p}$, $[C]=([c_{ij}])\in KR^{p\times n}$ имеет место неравенство:

$$Dist([A][B],[A][C])\leq|[A]|\,Dist([B],[C]). \tag{5.4}$$

Доказательство:

В силу свойств топологии и метрики на интервальных пространствах для интервалов имеем:

$$dist(([A][B])_{ij},([A][C])_{ij})=dist(\sum_{k=1}^{p}[a_{ik}][b_{kj}],\sum_{k=1}^{p}[a_{ik}][c_{kj}])\le$$

$$\le\sum_{k=1}^{p}dist([a_{ik}][b_{kj}],[a_{ik}][c_{kj}])\le\sum_{k=1}^{p}\left|[a_{ik}]\right|dist([b_{kj}],[c_{kj}])$$

для любых i=1,2, …, m, j=1,2, …, n, что и доказывает многомерную оценку (5.4).

Аналогично, доказывается следующий результат:

Для любых интервальных матриц $[A]=([a_{ij}])\in KR^{m\times p}$, $[B]=([b_{ij}])\in KR^{m\times p}$, $[C]=([c_{ij}])\in KR^{p\times n}$ имеет место неравенство:

$$Dist([A][C],[B][C])\le Dist([A],[B])\left\|[C]\right\|. \tag{5.5}$$

Частный случай:

$$Dist([A][b],[A][c])\le \left\|[A]\right\|Dist([b],[c]). \tag{5.6}$$

Нормой интервального вектора *[x]* называют вещественную величину $||[x]||$ и удовлетворяющую следующим аксиомам:

1) $||[x]||\ge 0$, причем $||[x]||=0$ тогда и только тогда, когда $[x]=0$ (неотрицательность);

2) $||\alpha[x]||=|\alpha|\cdot||[x]||$ для любого $\alpha\in R$ (абсолютная однородность);

3) $||[x]+[y]||\le ||[x]||+||[y]||$ (неравенство треугольника).

Обобщением норм точечных векторов на интервальные векторы $[x]=([x_i])\in KR^n$ является следующее:

$$||[x]||=|[x_1]|+|[x_2]|+\ldots+|[x_n]|; \tag{5.7}$$

$$||[x]||=\sqrt{\left|[x_1]\right|^2+\left|[x_2]\right|^2+\ldots+\left|[x_n]\right|^2}; \tag{5.8}$$

$$||[x]||=\max_{1\le i\le n}\left|[x_i]\right|. \tag{5.9}$$

Нормой интервальной матрицы *[A]* называют вещественную величину $||[A]||$ и удовлетворяющую следующим аксиомам:

1) $||[A]||\ge 0$, причем $||[A]||=0$ тогда и только тогда, когда $[A]=0$ (неотрицательность);

2) $||\alpha[A]||=|\alpha|\cdot||[A]||$ для любого $\alpha\in R$ (абсолютная однородность);

3) $||[A]+[B]||\le ||[A]||+||[B]||$ (неравенство треугольника);

4) $||[A]\cdot[B]||\leq||[A]||\cdot||[B]||$ (субмультипликативность);

Обобщением норм точечных матриц на интервальные матрицы $[A]=([a_{ij}])\in KR^{m\times n}$ является следующее:

$$||[A]||=\max_{1\leq j\leq n}\sum_{i=1}^{m}\left|[a_{ij}]\right|; \tag{5.10}$$

$$||[A]||=\sqrt{\textit{максимальное собственныое значение матрицы}\left|[A]\right|\cdot\left|[A]\right|^{T}}; \tag{5.11}$$

$$||[A]||=\max_{1\leq i\leq m}\sum_{j=1}^{n}\left|[a_{ij}]\right|. \tag{5.12}$$

Для положительного вектора $u\in R^{n}$, $u>0$ называется ***u-масштабируемой максимум-нормой*** матрицы $[A]=([a_{ij}])\in KR^{n\times n}$ величину:

$$||[A]||_{u}=\max_{1\leq i\leq n}\left(\frac{1}{u_i}\sum_{k=1}^{n}\left|[a_{ik}]\right|u_k\right). \tag{5.13}$$

Спектральным радиусом точечной $n\times n$ матрицы A, обозначим $\rho(A)$ называется наибольшее из абсолютных значений собственных чисел матрицы A.

Спектральный радиус не превышает любую из его норм. В частности, $\rho(|[A]|)\leq ||[A]||_{u}$, для любого $[A]\in KR^{n\times n}$.

Интервальная матрица $[A]\in IR^{n\times n}$ называется ***невырожденной (неособенной)*** если невырожденными являются все точечные $n\times n$ матрицы $A\in[A]$. Интервальная матрица $[A]\in IR^{n\times n}$ называется ***вырожденной (особенной)*** если она содержит вырожденную точечную матрицу.

Теорема 5.1.

Интервальная матрица $[A]\in IR^{n\times n}$ вырождена тогда и только тогда, когда неравенство

$$|(mid[A])x|\leq(rad[A])|x|$$

имеет ненулевое решение.

Теорема 5.2.

Пусть интервальная матрица $[A]\in IR^{n\times n}$ такова, что $mid[A]$ невырожденная и $\rho(|mid[A]|^{-1}rad[A])<1$, тогда $[A]$ невырожденная.

Теорема 5.3.

Пусть интервальная матрица $[A]\in IR^{n\times n}$ такова, что $mid[A]$ невырожденная и $\max_{1\le j\le n}(rad[A]\left|mid[A]\right|^{-1})_{jj}\ge 1$, тогда $[A]$ невырожденная.

Теорема 5.4.

Если существует матрица $R\in R^{n\times n}$ такая, что $\rho(\left|I - Rmid[A]\right| + \left|R\right| rad[A]) < 1$, тогда $[A]$ невырожденная.

Теорема 5.5.

Если для интервальной матрицы $[A]\in IR^{n\times n}$ имеет место $\sigma_{max}(rad[A])<\sigma_{min}(mid[A])$, тогда она невырожденная.

Теорема 5.6.

Если для интервальной матрицы $[A]\in IR^{n\times n}$ имеет место $\sigma_{mIn}(rad[A])\ge\sigma_{max}(mid[A])$, тогда она вырожденная.

Для невырожденной матрицы $[A]\in IR^{n\times n}$ *обратной интервальной матрицей* называется

$$[A]^{-1} = \square\{A^{-1} \setminus A\in[A]\},$$

т.е. интервальную оболочку множества всех обратных для точечных матриц, содержащихся в $[A]$.

Для интервальных 2×2 матриц обратные вычисляются в явном виде. Из линейной алгебры известно:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{d}{ad-bc} & \dfrac{b}{bc-ad} \\ \dfrac{c}{bc-ad} & \dfrac{a}{ad-bc} \end{pmatrix}.$$

В последней матрице выражения для элементов имеют специальный вид, их область значений при изменении a, b, c, d в пределах некоторых интервалов $[a],[b],[c],[d]$ соответственно могут быть найдены простыми средствами. Если $a\neq 0$, то $\dfrac{a}{ad-bc} = \dfrac{1}{d-\dfrac{bc}{a}}$.

Последнее выражение содержит всего по одному вхождению каждой переменной в первой степени, поэтому по основной теореме интервальной арифметики при $a \in [a],\ b \in [b],\ c \in [c],\ d \in [d]$, его область значений совпадает с естественным интервальным расширением

$$\frac{1}{[d]-\frac{[b][c]}{[a]}}.$$

6 Лекция 6. Интервальное оценивание области значений функций. Интервальное и центрированное расширения функций. Оценивание с помощью естественного интервального расширения. Смешанные центрированные интервальные расширения. Тейлоровское интервальное расширение. Сравнение интервальных расширений

Рассмотрим функцию $f\colon R^n \rightarrow R$ (функция n переменных).

Предметом этой темы является задача оценивания области значения функции, т.е. множество:

$$f(D)=\{f(x) \setminus x \in D\},$$

где D – интервал или интервальный вектор.

Для непрерывной функции f:

$$f(D)=\left[\min_{x \in D} f(x), \max_{x \in D} f(x)\right].$$

Удобным в работе является следующий подход: $[f]\colon IR^n \rightarrow IR$.

Результат оценивания f зависит от выбора ее аналитического выражения.

***Пример* 6.1.**

Рассмотрим следующие формальные выражения функции $f(x)$:

$f_1(x)=x^2+x;$

$f_2(x)=x\cdot x+x;$

$f_3(x)=x(x+1);$

$f_4(x)=(x+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}.$

Вычислим значения интервальных аналогов для $[x]=[-1,1]$.

$[f_1]([x])=[x]^2+[x]=[-1,1]^2+[-1,1]=[0,1]+[-1,1]=[-1,2];$

$[f_2]([x])=[x]\cdot[x]+[x]=[-1,1]\cdot[-1,1]+[-1,1]=[-1,1]+[-1,1]=[-2,2];$

$[f_3]([x])=[x]\cdot([x]+1)=[-1,1]\cdot([-1,1]+1)=[-1,1]\cdot[0,2]=[-2,2];$

$[f_3]([x])=([x]+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}=([-1,1]+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}=[-\frac{1}{2},\frac{3}{2}]^2-\frac{1}{4}=[0,\frac{9}{4}]-\frac{1}{4}=[-\frac{1}{4},2].$

Будем говорить, что интервальная функция $[f]: KR^n\rightarrow KR$ является ***интервальным продолжением*** вещественной функции $f: R^n\rightarrow R$ на области $D\subseteq R^n$ если $[f][x]=f(x)$ для любого $x\in D$.

Будем говорить, что интервальная функция $[f]: IR^n\rightarrow IR$ является ***внешней оценивающей функцией*** или ***функцией включения*** для вещественной функции $f: R^n\rightarrow R$ если $f([x])\subseteq[f]([x])$ для любого $[x]\in IR^n$.

Функция включения $[f]$ называется ***минимальной*** если для любого $[x]\in IR^n$ $[f]([x])$ есть минимальный интервал, который содержит $f([x])$.

Интервальная функция $[f]: IR^n\rightarrow IR$ называется ***интервальным расширением*** вещественной функции $f: R^n\rightarrow R$ на области $D\subset R^n$ если она:

1) является интервальным продолжением f на D;

2) монотонна по включению на ID, т.е. для любых $[x], [y]\in ID$ таких, что $[x]\subseteq[y]$ выполняется $[f]([x])\subseteq[f]([y])$.

Легко проверить, что минимальная функция включения является монотонной по функции включения.

Интервальная функция $[f]: IR^n\rightarrow IR$ называется ***объединенным интервальным расширением*** вещественной функции $f: R^n\rightarrow R$ на области $D\subseteq R^n$ если $[f]([x])=\square f([x])$ для любого $[x]\in ID$.

Пример 6.2.

Объединенным интервальным расширением функции *sgn x* является

$$[\operatorname{sgn} x][x] = \begin{cases} 1, & \text{если } \underline{x} \geq 0; \\ [0,1], & \text{если } \underline{x} = 0 < \overline{x}; \\ [-1,1], & \text{если } \underline{x} < 0 < \overline{x}; \\ [-1,0], & \text{если } \overline{x} < 0 = \overline{x}; \\ -1, & \text{если } \overline{x} < 0. \end{cases}$$

Аналитические выражения, которые составлены из символьных переменных, констант, четырех арифметических операций (сложение, вычитание, умножение, деление) и элементарных функций будем называть ***элементарными функциональными выражениями***. Интервальные расширения элементарного функционального выражения, получающегося в результате замены аргументов на объединяющего их интервала, а арифметические операции и элементарные функции на их интервальные аналоги на ***естественные интервальные расширения*** [4].

Замечание:

То, что процедура постановки интервалов вместо переменных и выполнение всех действий в получившихся интервальных выражениях действительно дает интервальное расширение следует из основной теоремы интервальной арифметики.

Пример 6.3.

Рассмотрим $f: R^2 \to R;\ f(x_1,x_2) = \dfrac{x_1 - x_2}{x_1 + x_2}$, $x_1 \in [-1,2]$, $x_2 \in [3,5]$.

Естественные интервальные расширения:

$[f_1]([x_1],[x_2]) = \dfrac{[x_1]-[x_2]}{[x_1]+[x_2]}$.

$[f_1]([-1,2],[3,5]) = \dfrac{[-1,2]-[3,5]}{[-1,2]+[3,5]} = \dfrac{[-6,-1]}{[2,7]} = [-6,-1]\cdot[\dfrac{1}{7},\dfrac{1}{2}] = [-3,-\dfrac{1}{7}]$.

Преобразуем $f(x_1,x_2) = \dfrac{x_1 - x_2}{x_1 + x_2}$ к виду, где меньше переменных:

$$\frac{x_1 - x_2}{x_1 + x_2} = \frac{x_1 + x_2 - 2x_2}{x_1 + x_2} = 1 + \frac{2x_2}{x_1 + x_2} = 1 - \frac{2}{\frac{x_1}{x_2} + 1}$$,т.е. $f_2(x_1,x_2)=1-\frac{2}{\frac{x_1}{x_2}+1}$, тогда

$$[f_2]([-1,2],[3,5])=1-\frac{2}{\frac{[-1,2]}{[3,5]}+1} = 1 - \frac{2}{[-1,2]\cdot[\frac{1}{5},\frac{1}{3}]+1} = 1 - \frac{2}{[-\frac{1}{3},\frac{2}{3}]+1} = 1 - \frac{2}{[\frac{2}{3},\frac{5}{3}]} =$$

$$=1-2\cdot[\frac{3}{5},\frac{3}{2}]=1-[2,2]\cdot[\frac{3}{5},\frac{3}{2}]=1-[\frac{6}{5},3]=[-2,-\frac{1}{5}].$$

Использование естественного интервального расширения не всегда может быть рекомендовано. Их эффективность зависит от количества появления каждой переменной, которое часто трудно уменьшить.

Пусть $f\colon R^2 \to R$ некоторая скалярная функция от векторного аргумента $x=(x_1, x_2, \dots , x_n)^T$, пусть f – дифференцируема на $[x]$, тогда теорема о среднем дает, что для любого $x\in[x]$, существует $z\in[x]$, такое что

$$f(x)=f(mid\ [x])+g^T(z)(z-mid\ [x]),$$

где g – градиент функции f, т.е. вектор столбец $g_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$, таким образом, для любого $x\in[x]$ справедливо:

$$f(x)\in f(mid\ [x])+[g^T]([x])([x]-mid\ [x])$$

или

$$f([x])\subseteq f(mid\ [x])+[g^T]([x])([x]-mid\ [x]).$$

Таким образом,

$$[f]_c([x])=f(mid[x])+[g^T]([x])([x]-mid[x]) \tag{6.1}$$

является интервальной функцией включения для функции f. $[f]_c$ – центрированное интервальное расширение функции f.

Рассмотрим функцию $[f]_c(x)\colon R\to IR$.

$[f]_c(x)=f(mid\ [x])+[f']([x])(x-mid\ [x])$.

График может быть представлен конусом.

Центрированное интервальное расширение $f\colon R^n\to R$ может быть значительно улучшено за счет его формирования.

Для функции одной переменной:

$$\varphi: R \to R;\ \varphi(x) \in \varphi(mid[x] + \varphi'([x])(x - mid[x]). \tag{6.2}$$

Главная идея получения смешанного центрирования интервального расширения состоит в том, чтобы применить (6.2) n раз, рассматривая поочередно каждую из переменных функции f, в результате мы получим

$$f([x]) \subseteq f(mid([x]) + \sum_{i=1}^{n} g_i\,([x_1], \ldots, [x_i], mid[x_{i+1}], \ldots, mid[x_n]) \cdot ([x_i] - mid[x_i]),$$

где $g_i(x_1, \ldots, x_n)$ – i-ая компонента градиента f.

Правая часть определения смешанного центрирования интервального расширения функции f его основное отличие от интервальной функции включения (6.1), состоит в аргументах градиента, что позволяет снизить неточность оценивания. При этом:

$$[g]([x], mid[x]) \subseteq [g]([x]).$$

Можно прийти к мысли применить разложение в ряд Тейлора, чтобы с большим числом членов разложения аппроксимировать функцию: $f: R^n \to R$. Это приводит к тейлоровскому интервальному расширению. В качестве иллюстрации рассмотрим разложение второго порядка.

$$[f]_T([x]) = f(mid[x]) + g^T(mid[x])([x] - mid[x]) + \frac{1}{2}([x] - mid[x])^T[H]([x])([x] - mid[x]) \tag{6.3}$$

где g – градиент функции f;

$[H]([x])$ – интервальная матрица Гессе.

Элементами $[h_{ij}]$ матрицы $[H]$ являются расширения для

$$h_{ij} = \begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}, \text{ если } i = j; \\ \dfrac{2\partial^2 f}{\partial x_i\, \partial x_j}, \text{ если } i > j; \\ 0, \text{ в остальных случаях.} \end{cases}$$

Симметричная матрица Гессе ($h_{ij} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \, \partial x_j}$ для всех i, j) также может быть использована, но связанное с эти увеличение числа интервальных компонент в $[H]([x])$ может привести к ухудшению оценки $[f]_T$. Это ухудшение может быть уменьшено заменой $[H]([x])$ на смешанное выражение $[H]([x], mid[x])$, как это было сделано для градиента смешанной центрированной форме. Когда функция f зависит только от одной переменной: $f: R \to R$, тейлоровское интервальное расширение n-го порядка задается выражением:

$$[f]_T([x]) = f(mid[x]) + f'(mid[x])([x]-mid[x]) + \ldots + f^{(n-1)}(mid[x])\frac{([x]-mid[x])^{n-1}}{(n-1)!} +$$

$$+[f^{(n+1)}]([x]\frac{([x]-mid[x])^n}{n!} \; .$$

При слабых технических ограничениях естественное, центрированное и тейлоровское интервальные расширения являются сходящимися. Грубо говоря, скорость сходимости сходящегося интервального расширения есть наибольшая величина α, такая, что

$$rad\,([f]([x])) - rad\,(f([x])) \leq \beta(rad[x])^n,$$

когда $rad\,|x| \to 0$ (здесь радиус интервального вектора понимается как максимальный из радиусов его координат).

Если интервальное расширение минимально, то его скорость сходимости бесконечна. Скорость сходимости естественного интервального расширения, по крайней мере линейна ($\alpha \geq 1$), а скорость сходимости центрированного интервального расширения, по крайней мере, квадратична ($\alpha \geq 2$). Скорость сходимости тейроловского интервального расширения также, по крайней мере, квадратична для любого $n \geq 2$.

Квадратичная скорость сходимости выглядит более привлекательнее, чем линейная, но необходимо помнить, что это означает лишь то, что более точные результаты могут быть получены только в случае бесконечно малых брусов. Ничего подобного нельзя сказать о поведении интервальных расширений при брусах реальных размеров, когда брус, с которым мы работаем, является большим, естественное интервальное расширение, в общем случае, более предпочтительно, чем центрированное, в то время как последнее работает лучше, если брус мал.

7 Лекция 7. Локализация нулей функции. Метод деления интервала. Интервальная версия метода Ньютона

Нулями функции *f: R→R* на множестве *D⊆R* называется *x*∈D* такие, что *f(x*)=0.*

Когда мы используем интервальные методы нахождения нулей функции, нам нужен алгоритм, который мог бы дать нам интервал *[x] ∈IR*, не содержащий 0, или алгоритм, который дает нам интервалы наименьшей возможной ширины, содержащие нули функции.

Теорема 7.1

Если *[f]: f: IR→IR* – интервальное расширение функции *f: R→R* на множестве *D* и *[x] ⊆D* такой интервал, что 0∈*[f]([x]),* то *f* также не имеет нулей на *[x]*.

Доказательство:

Доказательство теоремы следует непосредственно из того факта, что 0∉*[f]([x]),* а значит 0∉*f([x]).*

Из этой теоремы следует простой метод локализации нулей, который заключается в следующем:

Разобьём интервал *D* на подынтервалы $[x_i]$ *(i=1,…, p)* так, что $D=\bigcup_{i=1}^{p}[x_i]$, и на каждом интервале проверим выполнение условия 0∈$[f]([x_i])$. Если 0∉$[f]([x_i])$, то $[x_i]$ исключаем из рассмотрения, а оставшиеся интервалы подвергаем дальнейшему разбиению. Если *[f]* является хорошей аппроксимацией *f* на *D* и множество нулей функции *f* на *D* конечно, то этот метод дает произвольно узкие интервалы, содержащие нули, а оставшиеся интервалы гарантированно не содержат нулей.

Пример 7.1.

Пусть *D*=[-1,2], $f(x)=x-x^2$ и *[f]([x])=[x](1-[x]).*

Решение:

Имеем $[f](D)$=[-2,4], тогда D содержит нуль. Разобьем D на интервалы $[x_1]$=[-1, $\frac{1}{2}$], $[x_2]$=[$\frac{1}{2}$, 2]. Определяем, что нуль содержится и в $[f]([x_1])$, и в $[f]([x_2])$. Поэтому, оба интервала подвергаем разбиению. Получаем таблицу 7.1.

Таблица 7.1 - Интервальные расширения

i	1	2	3	4
$[x_i]$	$[-1, -\frac{1}{4}]$	$[-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$	$[\frac{1}{2}, \frac{5}{4}]$	$[\frac{5}{4}, 2]$
$[f]([x_i])$	$[-2, -\frac{5}{16}]$	$[-\frac{5}{16}, \frac{5}{8}]$	$[-\frac{5}{16}, \frac{5}{8}]$	$[-2, -\frac{5}{16}]$

Таким образом, после семи вычислений значений интервальных расширений, мы можем исключить $[x_1]$ и $[x_4]$. Интервалы $[x_2]$ и $[x_3]$ содержат нуль.

Этот метод работает также в случае кратных нулей.

Пример 7.2.

Рассмотрим функцию $f(x)=x^2-4x+4=(x-2)^2$ на D=[-4,8] с интервальным расширением $[f]([x])=[x]([x]-4)+4$.

Решение:

Имеем таблицу 7.2.

Таблица 7.2 – Интервальные расширения

i	1	2	3
$[x_i]$	[-4,0]	[0,4]	[4,8]
$[f]([x_i])$	[4,36]	[-12,4]	[4,36]

Мы можем исключить $[x_1]$ и $[x_3]$, и подвергнуть дальнейшему делению $[x_2]$, который содержит нуль кратности 2.

В примере 7.1 задача является простой, а интервальное расширение очень хорошим. Для более сложных задач и плохих аппроксимаций f на D для того, чтобы отсеять интервалы, не содержащие нули, может потребоваться большое количество разбиений.

Этот метод может применяться для доказательства существования простых нулей: если f непрерывна, и значения $[f]$ на соседних с $[x_i]$ интервалах имеет разные знаки, то $[x_i]$ содержит, по крайней мере, один нуль.

Метод проверки существования нулей работает нормально только тогда, когда нуль является нечетным.

Метод проверки существования нулей можно сделать более эффективным, проверяя $[f]$ на точках интервала, в частности на его концах. Так поступают в интервальной версии метода деления отрезка пополам.

Если $[f]([a,a])\ [f]([b,b])<0$, то мы знаем, что $[a,b]$ содержит, по крайней мере, один нуль.

Рассмотрим $[x]$, который содержит нуль x^* непрерывно дифференцируемой функции $f: R \to R$. Тогда по теореме о среднем значении существует $\xi \in [x]$ такое, что

$$0=f(x^*)=f(x)+(x^*-x)f'(\xi).$$

Предположим, что $f'(\xi)\neq 0$, тогда $x^* = x - \dfrac{f(x)}{f'(\xi)}$. Теперь пусть $[f']$-интервальное расширение функции f'. Пусть $[f']([x])$ не содержит нулей. Тогда

$$x^* \in [N](x,[x]) = x - \frac{f(x)}{[f']([x])}, \qquad (7.1)$$

Где мы вводим оператор Ньютона $[N](x,[x])$.

Т.к. нуль функции содержится в $[x]$, то он должен содержаться в пересечении $[x]$ и $[N](x,[x])$:

$$x^* \in [x] \cap [N](x,[x]).$$

Таким образом, мы можем сформулировать интервальную версию метода Ньютона: начиная с $[x^{(0)}] \ni x^*$ вычисляем последовательность вложенных интервалов $[x^{(1)}], [x^{(2)}], \ldots$ по формуле

$$[x^{(k+1)}]= [x^{(k)}]\cap[N](x^{(k)},[x^{(k)}]) \text{ с } x^{(k)}\in[x^{(k)}],\ k=0,1,\ldots . \qquad (7.2)$$

Выражения «вложенных» используется потому, что каждый новый интервал содержится в предыдущем:

$$[x^{(0)}] \supseteq [x^{(1)}] \supseteq \ldots$$

Из этого следует, что их ширина уменьшается

$$wid\,[x^{(0)}] \geq wid\,[x^{(1)}] \geq \ldots,$$

а т.к. все $[x^{(k)}]$ содержатся в $[x^{(0)}]$, то они ограничены, а значит, существует предел $[x^*]$, содержащий x^*.

Пример 7.3.

Рассмотрим функцию $f(x)=x^2-2$ и $[x^{(0)}]=[1,2]$.

Здесь $f'(x)=2x$. Возьмем $x^{(k)}=mid\,[x^{(k)}]$ и $[f']([x])=2[x]$. Тогда оператор Ньютона имеет вид:

$$[N](x^{(k)}, [x^{(k)}])=mid[x^{(k)}- \frac{(mid[x^{(k)}])^2-2}{2[x^{(k)}]}.$$

Первый шаг по (7.2) дает

$$[N](x^{(0)},[x^{(0)}]= \frac{3}{2}-\frac{\frac{1}{4}}{[2,4]}=[\frac{22}{16},\frac{23}{16}] \text{ и } [x^{(1)}]=[1,2]\cap[\frac{22}{16},\frac{23}{16}]=[\frac{22}{16},\frac{23}{16}].$$

Если проводить вычисления далее с точностью до 10^{-6}, то получим таблицу 7.3.

Таблица 7.3 – Вычисление интервалов

k	1	2	3
$[x^{(k)}]$	[1,375;1,4375]	[1,414062;1,414418]	[1,414213;1,414214]

Условие, что $[f'](\[x])$ не содержит нулей, является необходимым для применения оператора Ньютона.

Если функция $f: R \rightarrow R$ является непрерывной функцией на $[x]$ и $0 \notin [f']([x])$, то $[x]$ или содержит простой нуль, или не содержит нулей функции f.

Теорема 7.2

Если x^* - нуль функции f на $[x^{(0)}]$ и $f'([x^0])$ не содержит нулей, то последовательность $[x^{(1)}]$, $[x^{(2)}]$, … определяемая согласно (8.2), сходится к x^*.

Теорема 7.3

Если $[x]$ интервал такой, что $0 \notin f'([x])$ и существует $x \in [x]$ такое, что $[x] \cap [N](x,[x]) \neq \emptyset$, то f не имеет нулей на $[x]$.

Теорема 7.4

Если f непрерывная и дифференцируемая функция, $[x]$ – интервал такой, что $0 \notin f'([x])$ и существует $x \in [x]$ такое, что $[N](x,[x]) \subseteq [x]$, то f имеет нуль на $[x]$.

Сформулируем схему алгоритма, который проверяет интервал $[a]$ на наличие нулей простых для функции f.

1) разобьем $[a]$ на подынтервалы $[a_1]$, $[a_2], \ldots$, $[a_p]$, где подынтервал удовлетворяет или $0 \notin [f']([a_i])$, или $wid\ [a_i] \leq \delta$. Второй тип содержит достаточно узкие интервалы локальных экстремумов или кратных нулей.

2) пусть $[x^{(0)}]=[a_i]$ – подынтервал такой, что $0 \notin [f']([x^{(0)}])$. Если $[x^{(0)}] \cap [N](x^{(0)},[x^{(0)}]) \neq \emptyset$, то мы можем исключить этот интервал из рассмотрения, в противном случае выполняем вычисления по формуле (7.2). Если все $[x^{(k)}]$ удовлетворяет условию $[[N](x^{(k)},[x^{(k)}]) \subseteq [x^{(k)}]$, то мы можем гарантировать, что в $[x^{(k)}]$ имеется нуль и, следовательно, он есть в $[x^{(0)}]$.

Из (7.2) и предположения $0 \notin f'([x])$ следует, что все точки интервала $[N](x,[x])$ лежат или левее, или правее точки x. Поэтому,

$$wid\ ([x] \cap [N])(mid[x],[x])) < \frac{1}{2} wid\ [x] = rad[x].$$

Таким образом, если взять в качестве $x^{(k)}$ середину $[x^{(k)}]$, то мы можем гарантировать уменьшение ширины интервалов [5].

8 Лекция 8. Интервальные системы линейных алгебраических уравнений. Внешнее оценивание объединенного множества решений ИСЛАУ. Интервальный метод Гаусса. Внутреннее оценивание множества решений ИСЛАУ

Интервальной системой линейных алгебраических уравнений (ИСЛАУ) будем называть систему уравнений вида:

$$\begin{cases} [a_{11}]x_1+[a_{12}]x_2+...+[a_{1n}]x_n=[b_1] \\ [a_{21}]x_1+[a_{22}]x_2+...+[a_{2n}]x_n=[b_2] \\ \dots \\ [a_{m1}]x_1+[a_{m2}]x_2+...+[a_{mn}]x_n=[b_m] \end{cases}$$

Или в краткой форме

$$[A]x=[b], \tag{8.1}$$

где $[A]=([a_{ij}])\in IR^{m\times n}$,

$[b]=([b_i])\in IR^m$.

Рассмотрим модель межотраслевого баланса Леонтьева:

$$x=Ax+y,$$

где $x\in R^n$ – вектор объемов выпуска продукции по отраслям;

$y\in R^n$ – вектор объемов конечного потребления по этим отраслям;

$A=(a_{ij})\in R^{n\times n}$ – матрица коэффициентов прямых затрат.

$a_{ij}\in[a_{ij}]$, $[A]=([a_{ij}])$.

Аналогичные требования на y. $[y]\in IR^n$.

Интервальную систему (8.1) можно рассматривать как совокупность всех точечных систем $Ax=b$ с матрицами $A\in[A]$, $b\in[b]$. Поэтому некорректно говорить о решении системы интервальных уравнений, правильно вести речь о решении тех или иных постановках задач, связанных с интервальными системами уравнений.

В свою очередь формулировка той или иной задачи подразумевает указание двух моментов:

1) множество решений задачи;

2) способы оценивания.

Объединенное множество решений ИСЛАУ – это множество

$$\Theta_{uni}([A],[b])=\{x\in R^n \setminus (\exists A\in[A])(\exists b\in[b])(Ax=b)\},$$

т.е. образованное всеми решениями точечной системы $Ax=b$ с матрицами $A\in[A]$, $b\in[b]$.

Допустимое множество решений ИСЛАУ – это множество

$$\Theta_{tol}([A],[b])=\{x\in R^n \setminus (\forall A\in[A])(\exists b\in[b])(Ax=b)\},$$

т.е. образованное всеми $x\in R^n$, что $Ax\in[b]$ для любого $A\in[A]$.

Управляемое множество решений ИСЛАУ – это множество

$$\Theta_{ctrl}([A],[b])=\{x\in R^n \setminus (\forall b\in[b])(\exists A\in[A])(Ax=b)\},$$

т.е. образованное всеми $x\in R^n$, что найдется $A\in[A]$ для любого $b\in[b]$.

Символическое обозначение $\forall A\in[A]$ означает, что $(\forall a_{11}\in[\ a_{11}])$, $(\forall a_{12}\in[\ a_{12}]),\ldots,$ $(\forall a_{mn}\in[\ a_{mn}])$. То же самое верно в отношении существования. Кроме того, кванторы общности и существования не коммутируют друг с другом, следовательно, дальнейшее обобщение понятия множества решений интервальных систем можно получить, разделив действие кванторов по отдельным элементам матрицы и правой части, а также комбинируя $\forall$ и $\exists$ с различными интервалами, меняя их порядок. Таким образом, $\Theta_{uni}([A],[b])$, $\Theta_{tol}([A],[b])$, $\Theta_{ctrl}([A],[b])$ являются крайними точками обширного семейства $2^{m(n+1)}$ всевозможных множеств решений для интервальной системы (8.1).

Точное исчерпывающее описание решений ИСЛАУ с одной стороны является практически невозможным, а с другой стороны не всегда нужным. Чаще нам нужно приближенное описание множеств решений. Следовательно, возникает задача приближенного описания или оценивания множеств решений с помощью более структуры. Наиболее популярными задачами оценивания являются внутренние и внешние, т.е. задача оценивания множества решений и объединяющего множества. Таким образом, будем различать две задачи:

1) задача внутреннего оценивания множества решений системы (8.1): для ИСЛАУ $[A]x=[b]$ и выбранного множества ее решений $\Theta([A],[b])$ найти интервальный вектор содержащийся в множестве решений $\Theta([A],[b])$;

2) задача внешнего оценивания множества решений системы (8.1): для ИСЛАУ $[A]x=[b]$ и выбранного множества ее решений $\Theta([A],[b])$ найти интервальный вектор содержащий множество решений $\Theta([A],[b]$.

Оптимальные оценки – наибольшие внутренние и наименьшие внешние оценки. Иногда интервальное оценивание малоэффективно.

Интервальный вектор называется ***формальным*** или ***алгебраическим решением системы уравнений*** $[A]x=[b]$, если его подстановка вместо x в эту систему и выполнение всех интервальных операций в соответствии с правилами интервальной арифметики приводят к равенству. Т.е. в случае алгебраических решений речь идет о решении уравнения $[A][x]=[b]$, $[x]$ – искомый интервальный вектор.

Внешняя интервальная оценка множества решений, совпадающая с интервальной оболочкой, называется ***оптимальным*** или ***наилучшим решением*** задачи внешнего интервального оценивания. Для всех квадратных невырожденных интервальных матриц $[A]\in IR^{n\times n}$ обратные интервальные матрицы $[A]^{-1}\in IR^{n\times n}$ называются ***внешней оценкой множества всех интервальных матриц*** $[A]^{-1}\supseteq\{A^{-1} \setminus A\in[A]\}$.

Если для ИСЛАУ $[A]x=[b]$ с квадратной матрицей $[A]$ известна обратная матрица A^{-1}, то внешняя оценка объединенного множества решений системы легко вычисляется, как $[A]^{-1}[b]$ при этом включение

$$\square\Theta([A],[b])\subseteq[A]^{-1}[b]$$

обращается в точное равенство для точечных матриц.

Лемма Ноймайера:

Интервальная оболочка объединенного множества решений $\Theta([A],[b])$ интервальной системы $[A]x=[b]$ не может быть в общем случае представлена как произведение *[G][b]* с какой-либо матрицей *[G]* не зависящей от правой части *[b]* системы.

Теорема 8.1. (характеризация Бека)

Если $[A]\in IR^{m\times n}$, $[b]\in IR^{m}$, то

$$\Theta([A],[b])=\{x\in R^n \setminus [A]x\cap[b]\neq 0\}=\{x\in R^n \setminus 0\in[A]x-[b].$$

Пусть задана ИСЛАУ $[A]x=[b]$, где $[A]\in IR^{n\times n}$, $[b]\in IR^{n}$, заменив в расчетных формулах традиционного метода Гаусса все величины на интервальные, а арифметические операции на операции интервальной арифметики, получим алгоритм, который называется ***интервальным методом Гаусса*** [1].

Пример 8.1.

Решить ИСЛАУ методом Гаусса:

$$\begin{cases}[2,3]x_1+[-1,1]x_2=[-2,2]\\ [-1,2]x_1+[2,3]x_2=[-2,1]\end{cases}$$

Решение:

Умножим первое уравнение на $-\dfrac{1}{[2,3]}$ и прибавим ко второму уравнению, получим:

$$\begin{cases}[2,3]x_1+[-1,1]x_2=[-2,2]\\ \qquad\quad [1,4]x_2=[-4,3]\end{cases}$$

Из последнего уравнения найдем x_2.

$$x_2=\frac{[-4,3]}{[1,4]}=[-4,3].$$

Подставляем в первое уравнение и находим x_1.

$$x_1=\frac{[-2,2]-[-1,1]\cdot[-4,3]}{[2,3]}=[-3,3].$$

Ответ: x_1=[-3,3]; x_2=[-4,3].

Внутренняя интервальная оценка не единственна, на практике наибольшую ценность имеют максимальные оценки по включению.

Имеют место следующие факты:

1) если правильный интервальный вектор $[x]$ есть формальное решение уравнения

$$(dual\ [A])[x]=[b], \tag{8.2}$$

то $[x]\subseteq\Theta_{uni}([A],[b])$, т.е. является внутренней интервальной оценкой объединенного множества решений системы $[A]x=[b]$;

2) если правильный интервальный вектор $[x]$ есть формальное решение уравнения

$$[A][x]=[b], \tag{8.3}$$

то $[x]\subseteq\Theta_{tol}([A],[b])$, т.е. является внутренней интервальной оценкой допустимого множества решений системы $[A]x=[b]$;

3) если правильный интервальный вектор $[x]$ есть формальное решение уравнения

$$(dual\ [A])[x]=dual\ [b], \tag{8.4}$$

то $[x]\subseteq\Theta_{ctrl}([A],[b])$, т.е. является внутренней интервальной оценкой управляемого множества решений системы $[A]x=[b]$.

Если формальные решения уравнений (8.2)-(8.4) не существуют или существуют, но не все компоненты правильные, то это не обязательно свидетельствует о том, что соответствующее множество решений пусто и задача внутреннего оценивания не имеет решений. Заметим, что если интервальный вектор $[x]$ – формальное решение для уравнений (8.2)-(8.4), то он также является максимальным по включению вектором, содержащимся в соответствующем множестве решений. В частности, если правильное формальное решение для уравнений (8.2)-(8.4) единственно, то оно также является максимальным по включению решением соответствующей задачи.

Недостатком формального подхода является то, что он не дает исчерпывающего ответа на задачу. Поэтому существуют другие подходы к задаче внутреннего оценивания. Наиболее известным является так называемый центровой подход.

9 Лекция 9. Сжимающие операторы

Рассмотрим n_x переменных $x_i \in R$, i=1,2, … , n_x связанных n_f соотношениями или ограничениями вида:

$$f_j(x_1, x_2, \ldots, x_{n_x})=0, j=1,2, \ldots, n_f. \tag{9.1}$$

Известно, что каждая $x_i \in X_i$. Для простоты эти области полагаются интервалами $[x_i]$, но могут рассматриваться и объединения этих интервалов. Соответствующая область значений вектора $X=(x_1,x_2,\ldots, x_{n_x})$ будет интервальным вектором $[x]=([x_1],[x_2],\ldots,[x_{n_x}])$. Пусть f некоторая вектор-функция, координатами которой являются функции f_j, тогда (9.1) можно записать в векторной форме $f(x)=0$. Оно соответствует так называемой задаче выполнения ограничений

$$H: (f(x)=0, x \in [x]). \tag{9.2}$$

Множество решений (9.2) определяется как множество:

$$S=\{ x \in [x])\backslash f(x)=0\}. \tag{9.3}$$

Задача выполнения ограничения может включать ограничения в виде равенств и неравенств.

Пример 9.1.

$\begin{cases} x_1+\sin x_2 \le 0 \\ x_1 - x_2 = 3 \end{cases}$, где переменные имеют область значений $[x_1]=R$, $[x_2]=R$.

Эта задача может быть сведена к задаче линейного программирования:

$\begin{cases} x_1+\sin x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 - 3 = 0 \end{cases}$, область значений $[x_1]=R$, $[x_2]=R$, $[x_3]=(0,+\infty)$.

$$f_1(x) = x_1 + \sin x_2 + x_3,$$
$$f_2(x) = x_1 - x_2 - 3.$$

Сжатие задачи $[H]$ означает замену бруса $[X]$ некоторой меньшей областью $[x']$ такой, что $S \subseteq [x'] \subset [x]$.

Существует оптимальное сжатие задачи H, которое соответствует замещению бруса x наименьшим брусом, содержащем S.

Сжимающий оператором или оператором сжатия для Н является любой оператор, который может быть применен для сжатия Н.

Замечание 9.1.

Иногда удобно выделить несколько типов областей для величин с неопределенностями вместо объединения в единый брус $[x]$.

Конечные разрешающие операторы задачи выполнения ограничения (9.2) являются конечным алгоритмом, вычисляющим величины некоторых переменных x_i.

Вектор $u=(u_1, u_2, \ldots, u_{n_u})$ является ***подвектором*** вектора $X=(x_1,x_2,\ldots,x_{n_x})$ если существует некоторое подмножество индексов $I=\{i_1, i_2, \ldots, i_{n_u}\}$ множества $\{1,2, \ldots, n_x\}$ такое, что $u=(x_i,\ldots,x_{i_{n_u}})$. При этом I называется ***множеством индексов вектора*** u и записывается $u=x_I$.

Рассмотрим $I=\{i_1, i_2, \ldots, i_{n_u}\}$ и $J=\{j_1, j_2, \ldots, j_{n_\varphi}\}$ два таких множества индексов, что $I\cap J=\emptyset$ и два подвектора $u=x_I$ и $v=x_I$ одного и того же вектора x.

Конечный разрешающий оператор, связанный с задачей Н является множествозначным алгоритмом $\varphi: u\to\varphi(u)$ таким, что выполняется следующее:

$$f(x)=0 \Leftrightarrow v\in\varphi(u). \tag{9.4}$$

Компоненты вектора u являются входами алгоритма φ, а вектора v – выходами.

Пример 9.2.

Рассмотрим задачу выполнения ограничений:

$$H:\left(\begin{array}{l} x_1x_2 - x_3 = 0 \\ x_2 - \sin x_4 = 0 \\ [x_1]=[x_2]=(-\infty,0],\ [x_3]=[x_4]=R \end{array}\right)$$

Многие операторы, разрешающие эту задачу могут быть получены на основе элементарных алгебраических вычислений.

φ_1(вход: x_1, x_2; выход x_3)$\{x_3:=x_1x_2\}$;

φ_2(вход: x_1, x_3; выход x_2) $\begin{cases} x_2 := x_3 / x_1, & x_1 \neq 0 \\ R, & иначе \end{cases}$;

φ_3(вход: x_4; выход x_2)$\{x_2 := \sin x_4\}$;

φ_4(вход: x_1, x_3, x_4; выход x_2)$\{x_2 := \varphi(x_1, x_3) \cap \varphi_3(x_4)\}$;

φ_5(вход: x_3, x_4; выход x_1, x_2) $\left\{x_2 := \sin x_4; x_2 := \begin{cases} x_3 / x_2, & x_2 \neq 0 \\ R, & иначе \end{cases}\right\}$.

Пусть φ некоторый конечный разрешающий оператор для задачи Н с векторов входа u и выхода v.

Интервальное расширение $[\varphi]$ является функцией из $IR^n \rightarrow IR^{n_\varphi}$ так, что для любого бруса $[u] \in IR^{n_u}$ имеет место

$$\varphi([u]) \subseteq [\varphi]([u])$$

$$\varphi([u]) = \bigcup_{u \in [u]} \varphi(u) \tag{9.5}$$

Это определение интервального расширения является обобщением данного ранее определения на случай вектор-функции [6].

Пример 9.3.

Интервализацию разрешающего оператора $\varphi_5(x_3, x_4)$ из примера 9.2 можно задать следующим образом:

$[\varphi_5]$(вход:$[x_3]$,$[x_4]$;выход $[x_1]$,$[x_2]$) $\left\{[x_2] := \sin[x_4]; [x_2] := \begin{cases} [x_3]/[x_2], & 0 \notin [x_2] \\ R, & иначе \end{cases}\right\}$.

Рассмотрим некоторую задачу выполнения ограничения (9.2) и один из ее конечный разрешающий оператор φ с входным вектором $u=x_I$ и выходным вектором $v=x_J$. Если $[\varphi]$ является интервальным расширением для φ, то сжатие задачи Н может быть выполнено замещением каждой области $[x_j]$, $j \in J$ областью $[x_j] \cap [\varphi_j]([u])$.

Докажем это.

Пусть S – множество решений задачи Н, тогда

$x \in S \overset{(9.3)}{\Leftrightarrow} x \in [x]$ и $f(x)=0 \overset{(9.4)}{\Leftrightarrow} x \in [x]$ и $f(x)=0$ и $v \in \varphi(u) \overset{(9.5)}{\Leftrightarrow} x \in [x]$ и $f(x)=0$ и $u[v] \subseteq [\varphi]([u])$.

Что и требовалось доказать.

Важным классом задач выполнения ограничений, для которых можно реализовать интервальный разрешающий оператор является интервальная система линейных алгебраических уравнений.

Задачу выполнения ограничений, для расчета бруса содержащего объединенное множество решений сформулируем следующим образом:

$$\text{H:}\ \begin{pmatrix} A \in [A],\ b \in [b],\ x \in [x] \\ Ax - b = 0 \end{pmatrix}. \tag{9.6}$$

Переменные в (9.6) образуют вектор (a_{11} ... a_{nn} x_1 ... x_n b_1 ... b_n).

Для сжатия задачи (9.6) можно применить оператор с алгоритмом интервального исключения метода Гаусса. Будем обозначать этот оператор $\mathcal{C}_{\mathrm{GE}}$.

Рассмотрим метод неподвижной точки.

Этот алгоритм φ такой, что

$$f(x)=0 \Leftrightarrow x=\psi(x). \tag{9.7}$$

Если последовательность

$$x^{k+1}=\psi(x^k) \tag{9.8}$$

сходится к точке x^k при некотором начальном значении x^0, то x^0 является решением уравнения $f(x)=0$.

Разрешающий оператор с неподвижной точкой дает итерационную процедуру, которая может сходиться к одному из решений $f(x)=0$, например, $n_f=n_x$

Разрешающий оператор с неподвижной точкой для задачи H имеет вид

$$\psi(x)=x-Mf(x), \tag{9.9}$$

где M – некоторая обратная матрица, возможно зависящая от x.

Теорема 9.1.

Пусть ψ: $R^{n_x} \to R^{n_x}$ имеет разрешающий оператор с неподвижной точкой для задачи выполнения ограничений (9.7) и $[\psi]$: $IR^{n_x} \to IR^{n_x}$ некоторое интервальное расширение функции ψ, тогда некоторый сжимающий оператор для задачи H получается замещением бруса $[x]$ в H на брус $[x]\cap[\psi]([x])$.

Этот сжимающий оператор будем называть ***сжимающим оператором с неподвижной точкой,*** связанным с ψ.

Доказательство:

Пусть S – множество решений задачи H в виде (9.7). Для любого $x \in S$ $f(x)=0$ и $x \in [x] \overset{(9.7)}{\Leftrightarrow} x \in [x]$ и $x=\psi(x)$, тогда $x \in [x]$ и $x \in \psi([x])$, тогда $x \in [x] \cap [\psi]([x])$, а это значит $S \subseteq [x] \cap [\psi]([x])$.

Что и требовалось доказать.

Рассмотрим задачу выполнения ограничений H: ($f(x)=0$, $x \in [x]$), где $n_f=n_x$ и функция f – дифференцируема. Так как, для любой обратимой матрицы M имеем

$$f(x)=0 \Leftrightarrow \psi(x)=x-Mf(x),$$

то функция $\psi(x)=x-Mf(x)$ является разрешающим оператором с неподвижной точкой для этой задачи выполнения ограничений.

Центрированное интервальное расширение для задачи ψ имеет вид:

$$[\psi]([x])=\psi(mid\ [x]+[J_\psi]([x])([x]-mid\ [x]),$$

где $[J_\psi]$ – интервальное расширение матрицы Якоби для ψ.

По теореме 9.1. получим следующий оператор сжатия с неподвижной точкой, называемый ***оператором Кравчика:***

$$\mathcal{C}_{\text{K}}: [x] \rightarrow [x] \cap \psi(mid\ [x]+[J_\psi]([x])([x]-mid\ [x]). \tag{9.10}$$

Заменив, (9.10) $\psi(x)$ на $x-Mf(x)$ получаем

$$\mathcal{C}_{\text{K}}: [x] \rightarrow [x] \cap (mid\ [x]-Mf(mid[x])+(I-M[J_f]([x])([x]-mid\ [x]), \tag{9.11}$$

где I – единичная матрица;

$[J_f]$ – некоторое интервальное расширение матрицы Якоби для f;

M – обратная матрица Якоби.

$$M=J_f^{-1}(mid\ [x]).$$

Пример 9.3.

$$H: \left(\begin{array}{l} f_1(x_1,x_2)=x_1^2-4x_2=0 \\ f_2(x_1,x_2)=x_2^2-2x_1+4x_2=0 \\ [x]=[-0{,}1;0{,}1] \quad [-0{,}1;0{,}3] \end{array} \right)$$

x=(0,0).

Составим матрицу Якоби для f_1: $J_f = \begin{pmatrix} 2x_1 & -4 \\ -2 & 2x_2+4 \end{pmatrix}$, тогда

$M = J_f^{-1}(0;\ 0{,}1) = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -2 & 4{,}2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -0{,}525 & -0{,}5 \\ 0{,}25 & 0 \end{pmatrix}$.

Оператор Кравчика дает следующую последовательность:

$\mathcal{C}_К([x]) = \begin{pmatrix} [-0{,}0555;\ 0{,}0455] \\ [-0{,}005;\ 0{,}005] \end{pmatrix}$;

$\mathcal{C}_К(\mathcal{C}_К([x])) = \begin{pmatrix} [-0{,}00258;\ 0{,}00255] \\ [-0{,}00128;\ 0{,}00127] \end{pmatrix}$;

$\mathcal{C}_К(\mathcal{C}_К(\mathcal{C}_К([x]))) = \begin{pmatrix} [-0{,}00000818;\ 0{,}00000817] \\ [-0{,}00000329;\ 0{,}00000329] \end{pmatrix}$.

10 Задачи для самостоятельного решения

1. Выполнить действия: $[a]+[b]$, $[a]-[b]$, $[a]\cdot[b]$, $[a]/[b]$, если $[a]$=[4,5], $[b]$=[1,3].

2. Выполнить действия: $[a]+[b]$, $[a]-[b]$, $[a]\cdot[b]$, $[a]/[b]$, если $[a]$=[-2,4], $[b]$=[3,6].

3. Выполнить действия: $[a]+[b]$, $[a]-[b]$, $[a]\cdot[b]$, если $[a]$=[-3,-1], $[b]$=[-1,3].

4. Выполнить действия: $[a]+[b]$, $[a]-[b]$, $[a]\cdot[b]$, $[a]/[b]$, если $[a]$=[-4,-1], $[b]$=[-5,-4].

5. Выполнить действия: ([4,5]+[1,3])·[-2,6]-[-2,6]/[2,4].

6. Выполнить действия: [-4,7]-[2,5]·[-4,-1]+[-2,6]/([2,4]+[-1,0]).

7. Выполнить действия: [2,8]-[-4,-3]·([1,5]+[-2,-1]/[3,5])-[-4,6].

8. Проверить закон дистрибутивности:

а) ([-1,5]+[-1,2])·[-3,2]=[-1,5]·[-3,2]+[-1,2]·[-3,2];

б) [-1,-2]·([1,2]+[-1,1])=[-1,-2]·[1,2]+[-1,2]·[-1,1];

в) ([-15,30]+[8,16])·[-2,2]=[-15,30]·[-2,2]+[8,16]·[-2,2];

г) ([-3,3]-[1,3])·[-1,2]=[-3,3]·[-1,2]-[1,3]·[-1,2].

9. Решить уравнение: [1,2]x+[-5,3]y=[-3,1].

10. Решить уравнение: [2,3]x+[-5,4]y=[-3,2].

11. Решить уравнение: [-1,1]x+[1,2]y=[0,3].

12. Решить уравнение: [-1,2][x]=[-2,1].

13. Решить уравнение: [2,3][x]=[-3,2].

14. Решить уравнение: [-2,3][x]=[2,5].

15. Решить уравнение: [3,4][x]=[-3,1].

16. Решить уравнение: [-6,1][x]=[-3,5].

17. Для интервалов: *[a]*=[4,7], *[b]*=[-3,1], *[c]*=[-5,-2], *[d]*=[-1,8], *[e]*=[2,6]. Найти центр, радиус, ширину, абсолютную величину, магнитуду, отклонение.

18. Для интервалов *[a]*=[-2,4], *[b]*=[1,8] проверить выполнимость свойства $\|[a]\| - \langle [b] \rangle \leq \|[a] \pm [b]\| \leq \|[a]\| + \|[b]\|$.

19. Для интервалов *[a]*=[5,8], *[b]*=[-2,1] проверить выполнимость свойства $\|[a]/[b]\| \leq \|[a]\| \cdot \langle [b] \rangle$.

20. Для интервалов *[a]*=[-3,1], *[b]*=[-6,-4] проверить выполнимость свойства середины *mid([a]±[b])=mid[a]±mid[b]*.

21. Для интервалов *[a]*=[-1,4], *[b]*=[2,5] проверить выполнимость свойства радиуса $rad([a] \pm [b]) = rad[a] + rad[b]$.

22. Для интервалов *[a]*=[1,3], *[b]*=[-4,2] проверить выполнимость свойства радиуса $\|[a]\| rad[b] \leq rad([a][b]) \leq \|[a]\|\, rad[b] + rad[a]\|mid[b]\|$.

23. Для интервалов *[a]*=[0,5], *[b]*=[-1,4] проверить выполнимость свойства радиуса $rad[a] \cdot \|[b]\| \leq rad([a][b]) \leq rad[a] \cdot \|[b]\| + rad[b]\|mid[a]\|$.

24. Для интервала *[a]*=[2,5] проверить выполнимость свойства радиуса $rad(\frac{1}{[a]}) = \frac{rad[a]}{\langle [a] \rangle \cdot \|[a]\|}$.

25. Изобразить графически следующие векторы:

а) *[a]*=([-1,4] [2,8]);

б) *[b]*=([-2,-1] [-4,8]);

в) *[c]*=([2,5] [-2,-1]);

г) *[d]*=([0,3] [1,5]).

26. Выполнить действия:

а) ([-2,4] [1, 6] [-2,-1])+([-2,0] 2 [4,6]);

б) ([-2,4] [1, 6] [-2,-1])+([-2,0] 2 [4,6]);

в) [2,5]·([2,3] [-4,-2]   4)-([-4,1] [-7,2] [0,5]);

г) ([2,6] [-4, 6] -2)+([4   [-4, 2] [1,6])-[4,7]·([3,4] [-2,0] [-1,6]).

27. Для интервальных матриц *[A]*, *[B]* вычислить: *[A]+[B]*, *[A]-[B]*, *[A]·[B]*, [2,3]·*[A]*-[-2,4]·*[B]*. Если $[A]=\begin{pmatrix} [1,2] & 5 \\ [-4,3] & [-2,-1] \end{pmatrix}$, $[B]=\begin{pmatrix} [-1,3] & [1,6] \\ [0,5] & [3,7] \end{pmatrix}$.

28. Найти произведение матриц *[A]·[B]*, если $[A]=\begin{pmatrix} [1,3] & [0,2] \\ [-2,1] & [1,3] \\ [-4,-1] & [4,6] \end{pmatrix}$, $[B]=\begin{pmatrix} 1 & [-2,3] & [[2,8] \\ [2,4] & [-1,5] & [-4,-2] \end{pmatrix}$.

29. Выполнить действие: *[A]·[B]-[C]·[A]·[B]*, если $[A]=\begin{pmatrix} [-3,2] & [2,8] \\ [4,9] & [-4,-1] \end{pmatrix}$, $[B]=\begin{pmatrix} -2 & [-2,6] \\ [1,5] & [-3,0] \end{pmatrix}$, $[C]=\begin{pmatrix} [2,5] & [-6,-1] \\ [2,5] & [1,3] \end{pmatrix}$.

30. Выполнить действие: *([A]·[B])·[C]-[A]·([B]·[C])*, если $[A]=\begin{pmatrix} [-2,2] & [-1,8] \\ [2,3] & [-1,0] \end{pmatrix}$, $[B]=\begin{pmatrix} [5,6] & [-1,4] \\ [2,3] & [-4,-1] \end{pmatrix}$, $[C]=\begin{pmatrix} [1,3] & [4,5] \\ [-2,1] & [0,3] \end{pmatrix}$.

31. Выполнить действие: *([A]-[B])·[C]-3·[A]·([B]+[C])*, если $[A]=\begin{pmatrix} [0,2] & [-4,-3] \\ [1,5] & [-4,2] \end{pmatrix}$, $[B]=\begin{pmatrix} [0,2] & [1,7] \\ [-2,3] & [4,5] \end{pmatrix}$, $[C]=\begin{pmatrix} [-1,0] & [2,3] \\ [0,1] & 2 \end{pmatrix}$.

32. Оценить:

а) $f(x)=3x^2+x$ на [-2,1];

б) $f(x)=2x^2-2x+1$ на [-1,2];

в) $f(x)=-\ x^2-x+2$ на [-1,1];

г) $f(x)=5x^2+2x-1$ на [-3,2].

33. Оценить:

а) $f(x)= \dfrac{x}{1-x}$ на [2,3];

б) $f(x)= \dfrac{x-1}{1+x}$ на [3,4];

в) $f(x)= \dfrac{x+2}{2x}$ на [1,2].

34. Оценить:

а) $f(x_1,x_2)= \dfrac{x_2}{x_1+2x_2}$ на ([-1,0] [1,2]);

б) $f(x_1,x_2)= \dfrac{2x_1+x_2}{2x_1-x_2}$ на ([0,1] [2,4]).

35. Оценить:

а) $f(x_1,x_2,x_3)= \dfrac{x_1+x_2x_3-2x_3}{x_1+x_2x_3+x_3}$ на ([0,1] [0,1] [1,2]);

б) $f(x_1,x_2,x_3)= \dfrac{-x_1-x_1x_3-2x_2}{x_1-x_1x_3-2x_2}$ на ([-2,-1] [-3,0] [2,3]).

36. Решить интервальные системы интервальным методом Гаусса:

а) $\begin{cases} [2,3]x_1+[-1,2]x_2=[3,4] \\ [1,3]x_1+[4,6]x_2=[2,4] \end{cases}$;

б) $\begin{cases} [1,2]x_1+[2,4]x_2=[4,5] \\ [2,3]x_1+[13,14]x_2=[1,2] \end{cases}$;

в) $\begin{cases} [3,4]x_1+[-2,2]x_2=[1,3] \\ [2,3]x_1+[3,6]x_2=[1,3] \end{cases}$.

37. Решить интервальные системы интервальным методом Гаусса:

а) $\begin{cases} [1,2]x_1+[0,1]x_2+[-1,0]x_3=[-1,1] \\ [-1,1]x_1+2x_2+[-1,0]x_3=[-2,0] \\ [-1,1]x_1+[-2,-1]x_2-5x_3=[-2,0] \end{cases}$;

$$
\text{б) } \begin{cases} [2,4]x_1 + [-2,1]x_2 + [-1,0]x_3 = [-2,2] \\ [-1,2]x_1 + [2,4]x_2 + [-1,0]x_3 = [-2,2]; \\ [0,1]x_1 + [0,1]x_2 + [3,4]x_3 = [-2,2] \end{cases}
$$

$$
\text{в) } \begin{cases} [2,3]x_1 + [-1,1]x_2 + [1,2]x_3 = [-1,2] \\ [1,3]x_1 + [2,4]x_2 + [1,5]x_3 = [2,3] \\ [-1,2]x_1 + [2,6]x_2 + [69,70]x_3 = [-1,0] \end{cases} .
$$

11 Перечень вопросов, выносимых на зачет

1. Основные арифметические операции классической интервальной арифметики.
2. Основная теорема интервальной арифметики.
3. Алгебраические свойства классической интервальной арифметики.
4. Разрешимость уравнения $[a][x]=[b]$ в классической интервальной арифметике.
5. Характеристики интервалов и их свойства.
6. Необходимость расширения классической интервальной арифметики.
7. Описание полной интервальной арифметики.
8. Основные операции полной интервальной арифметики.
9. Минимаксный характер полной интервальной арифметики.
10. Комплексные интервальные арифметики.
11. Интервальные векторы и матрицы.
12. Операции над интервальными матрицами.
13. Свойства операций над матрицами.
14. Метрика и топология на интервальных пространствах.
15. Постановка задачи интервального оценивания областей значений функций.
16. Интервальное расширение функции.
17. Оценивание с помощью естественного интервального расширения.
18. Смешанные интервальные расширения.

19. Тейлоровские интервальные расширения.
20. Сравнение интервальных расширений.
21. Локализация нулей функций.
22. Понятие интервальной системы линейных алгебраических уравнений (ИСЛАУ).
23. Множества решений ИСЛАУ.
24. Задачи оценивания множеств решений ИСЛАУ.
25. Внешнее оценивание множеств решений ИСЛАУ.
26. Интервальный метод Гаусса.
27. Внутреннее оценивание множеств решений ИСЛАУ.
28. Сжимающие операторы.
29. Конечные разрешающие операторы.
30. Интервальные конечные разрешающие операторы.
31. Метод неподвижной точки.
32. Сжимающий оператор Кравчика.

Список использованных источников

1. Алефельд, Д. Введение в интервальные вычисления / Д. Алефельд, Ю. Херцбергер. – Москва: Мир, 1987. – 360 с.

2. Жолен, Л. Прикладной интервальный анализ / Л. Жолен, М. Кифер, О. Дидри, Э. Вальтер. – Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2005. – 468 с. – ISBN: 5-93972-585-6.

3. Фидлер, М. Задачи линейной оптимизации с неточными данными / М. Фидлер, Й. Недома, Я. Рамик, И. Рон, К. Циммерманн. – Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2008. – 288 с. – ISBN: 978-5-93972-688-7.

4. Жолен, Л. Прикладной интервальный анализ [Электронный ресурс] / Л. Жолен, М. Кифер, О. Дидри, Э. Вальтер. – Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2013. – Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/16600.

5. Фидлер, М. Задачи линейной оптимизации с неточными данными [Электронный ресурс] / М. Фидлер, Й. Недома, Я. Рамик, И. Рон, К. Циммерманн. – Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2013. – Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/16520.

6. Шокин, Ю.И. Интервальный анализ / Ю.И. Шокин. – Новосибирск: Наука, 1981. – 112 с.