

Matching de Formes

Julien ALTIERI, Benoit SEGUIN, Frédéric WILHELM

Ecole Polytechnique, X2008

Abstract. Le *matching de formes* est un problème récurrent de géométrie algorithmique. Il s'agit d'une part d'évaluer la *proximité géométrique* de deux maillages indépendamment de ces maillages, et d'autre part de trouver une *transformation rigide* qui envoie l'un sur l'autre, de manière optimale. Le défi consiste donc à extraire des propriétés géométriques *intrinsèques* de l'objet, ce que nous faisons en exploitant le *tenseur de courbure*.

1 Introduction, motivation, ...

Nous souhaitons au départ développer un jeu de sculpture, avec des formes à reproduire. Cet objectif nous a naturellement conduit à devoir évaluer un score de proximité, et donc au matching de forme. Ce dernier étant une partie particulièrement difficile, nous avons finalement décidé d'en faire notre projet entier.

2 La méthode employée

Nous voulons pouvoir évaluer la correspondance entre deux maillages, et ce de manière invariante par changement d'échelle. Nous nous sommes alors intéressés à la courbure du maillage, et plus précisément à la distribution des courbures. Nous calculons donc une courbure en chaque point du maillage, puis avec ces courbures, une signature. Les méthodes de calcul de courbure sont variées et nous en avons implémenté deux : la courbure de Gauss [?] et le tenseur de courbure par la méthode de Taubin [?].

3 Courbure de Gauss

La première manière et la plus simple de calculer la courbure en un point est la courbure de Gauss. En version discrète, elle s'exprime par la formule suivante :

$$\kappa_G(v) = \frac{3(\sum_i \theta_i - 2\pi)}{\sum_i \text{Aire}(F_i)}$$

Cette formule permet d'obtenir instantanément le produit des courbures principales. Ainsi, en effectuant un passage sur chacun des points on obtient une distribution de la courbure de Gauss du maillage.

Comme l'on essaye de traiter le problème en étant indépendant par rapport à l'échelle, on impose une certaine moyenne à la distribution des courbures. On divise donc toutes les valeurs par la moyenne désirée, puis grâce à un *arctan* on peut transposer l'intervalle non borné des courbures dans un intervalle $[-1; 1]$.

4 Taubin

4.1 Évaluer le tenseur de courbure

Une seconde méthode consiste à utiliser la méthode de Taubin pour évaluer un tenseur de courbure sur notre maillage. Ce tenseur représente l'application bilinéaire en un point du maillage, qui à un vecteur direction (dans le plan tangent à la surface) associe la valeur de la courbure suivant cette direction. C'est un donc tenseur 2x2 que l'on va diagonaliser.

Sa base de diagonalisation est constituée des deux directions principales de courbure (orthogonales dans cette approximation). Les valeurs propres associées sont les courbures selon ces directions et servent à comparer deux maillages.

4.2 Calcul de la signature

Dans le cas d'estimation de courbure précédent (courbure de Gauss), à chaque point correspondait une unique courbure, donc un unique nombre. L'établissement d'une signature consistait donc à recenser les différentes courbures. Dans le cas présent, chaque point est caractérisé par deux valeurs propres du tenseur de courbure. Il s'agira donc d'effectuer un recensement en deux dimensions.

On implémente donc la signature par une matrice de valeurs réelles à deux dimensions $S_{i,j}$, de taille donnée selon la résolution voulue, par exemple 512×512 . Pour chaque vertex v ayant comme courbures c_1 et c_2 , on va incrémenter $S_{i,j}$ où i et j sont fonction de v (on incrémente également $S_{j,i}$ car les deux valeurs propres ne sont pas ordonnées). Chaque point "vote" donc pour un couple de courbure :

$$S_{i,j} = S_{j,i} = \#\{v \in V | f(c_1(v)) = i \text{ et } f(c_2(v)) = j\}$$

où f est une fonction à définir.

Pour déterminer f , il est nécessaire de s'intéresser aux problèmes d'échelle et d'échantillonnage : en effet, même si deux maillages que l'on souhaite comparer ont intuitivement et visuellement "la même forme", rien ne dit qu'ils ont la même échelle, ni le même échantillonnage (nombre de vertex). Pire encore, il se peut que pour deux formes similaires, les densités d'échantillonnage varient au sein de la même forme, et perturbent le vote.

Pour l'échantillonnage, le problème se résout en pondérant les votes des points

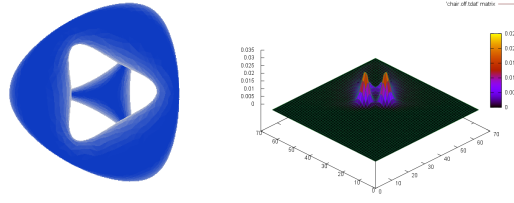


Fig. 1. À gauche maillage *chair.off*. À droite, sa signature.

par leurs poids, où l'on définit le poids w d'un sommet par la somme des surfaces des faces avoisinantes :

$$\forall v \in V, w(v) = \sum_i A(f_i),$$

Où les f_i sont les faces voisines de v , et $A(f_i)$ leurs aires.

Quand à l'indépendance vis-à-vis de l'échelle, nous avons choisi d'effectuer, pour chaque maillage, une homothétie sur l'ensemble des courbures de telle sorte que la moyenne soit la même. Ainsi, la carte des courbures n'est pas modifiée si on agrandit la forme.

Formellement, l'algorithme de construction de la signature est le suivant :

```
MC : moyenne des courbures
Pour chaque vertex v
    Soient c1(v), c2(v) les valeurs propres de courbure
    Soient i = floor(c1(v) / MC), j = floor(c2(v) / MC)
    Faire signature(i,j) += w(v)
```

Au final, la signature obtenue est une courbe discrétisée à deux dimensions. Les maximas de cette courbe correspondent aux couples de courbures que l'on retrouve le plus souvent sur le maillage.

La signature pour un maillage en forme de tore est représentée sur la figure 1.

5 Comparer deux courbures

Les méthodes présentées nous fournissent un *descripteur de courbure*, mais comment les comparer ? Notre difficulté majeure réside dans le choix de la distance à utiliser : si nos descripteurs sont remis à l'échelle en alignant les moyennes de chaque distribution, la simple distance euclidienne entre les deux vecteurs à

comparer nous donne des résultats vraiment décevants. Par exemple, essayant de corréler `tanglecube.off` avec `tanglecube.fin.off` (censés se ressembler très fortement) et `tanglecube.off` avec `skull.off` (n'ayant vraiment rien à voir), les deux distances n'ont qu'un rapport de 5 environ. Conceptuellement, deux pics "éloignés" dans la distribution sont aussi mal corrélés que deux pics "proches".

Grâce à cet algorithme de Taubin, nous avons réduit un problème de comparaison de formes en $3d$ à un problème de matching d'images $2d$. Nous pourrions donc potentiellement appliquer les algorithmes classiques de comparaisons d'images (SIFT, etc.). Pour simplifier, nous avons choisi d'utiliser la distance euclidienne, mais après application d'un filtre gaussien pour éliminer les hautes fréquences et résoudre les problèmes de proximité.

Pour tester nos différents algorithmes, considérons les maillages de la **figure 2**.

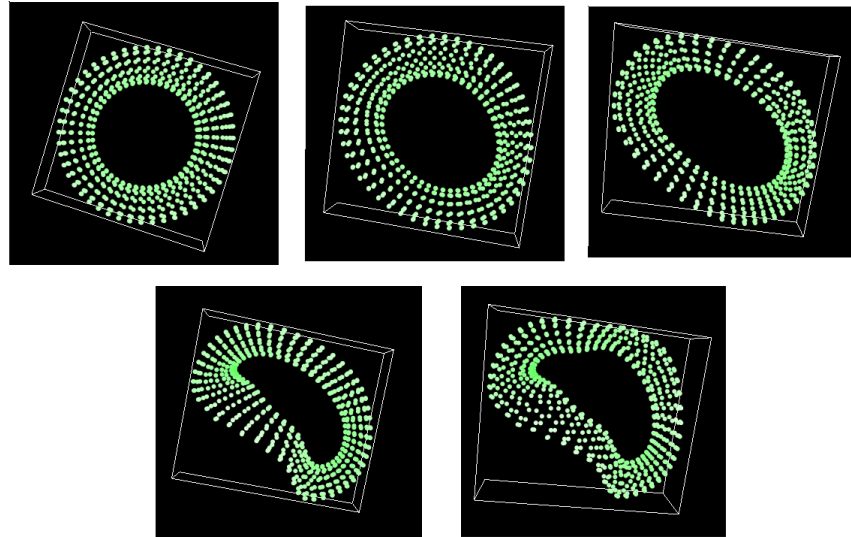


Fig. 2. Maillage

Il s'agit d'un tore que l'on a petit-à-petit déformé. Le maillage déformée ressemble de moins en moins au premier, donc nous devons tester si la signature s'en éloigne de plus en plus.

Avec le calcul de la courbure de Gauss, nous obtenons différentes signatures, représentées sur la **figure 3**. Le tore non-déformé a pour signature la courbe au maxima le plus marqué (comme il s'agit d'une forme très simple, les courbures sont peu variées et les votes se font toujours au même endroit. Au fur et à mesure

de la déformation, la courbe s’“écrase”. La courbe la plus écrasée correspond au maillage précédent (*chair.off*), dont la signature est clairement différente.

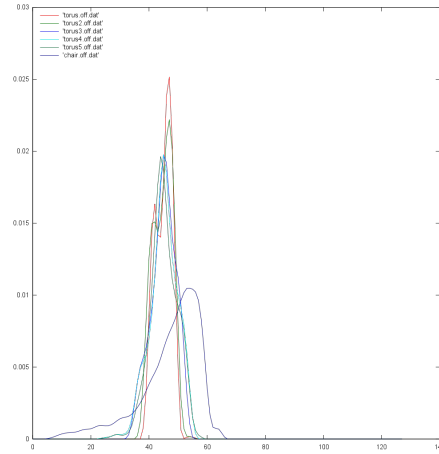


Fig. 3. Maillage

Pour effectuer une comparaison plus formelle, nous calculons la distance euclidienne après avoir appliqué un filtre gaussien.

torus2.off	0.01700
torus3.off	0.02597
torus4.off	0.02814
torus5.off	0.02747
chair.off	0.04093
skull.off	0.91170

Distance de divers objets vers torus.off

En utilisant l’algorithme de Taubin, on obtient également un jeu de différentes signatures (**figure 4**). On commence par un profil aux maxima très marqués, qui s’étale petit-à-petit. On remarque que le profil de départ a globalement une forme d’“eperon” (deux en fait, à cause de la symétrie). Cela peut s’interpréter par la forme du tore : en chaque point, la courbure selon le cercle générateur est la même, ce qui explique la présence d’une valeur propre commune à chaque point.

Nous sommes à nouveau en mesure de comparer les distances entre les courbes, après convolution avec un filtre gaussien.

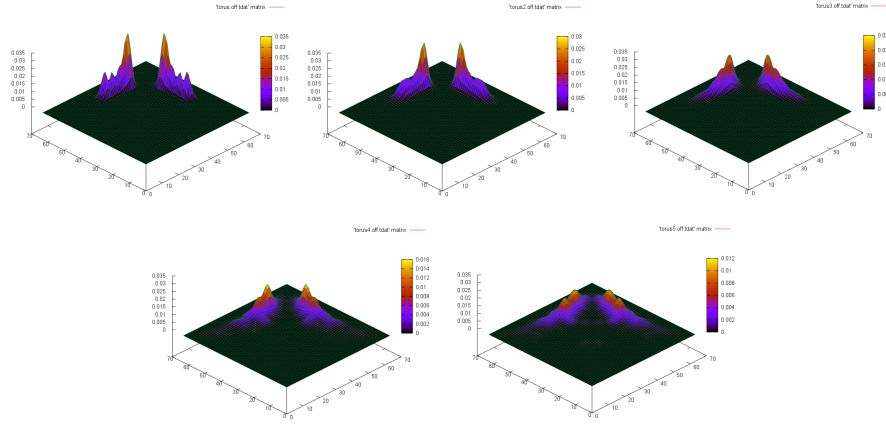


Fig. 4. Maillage

torus2.off	0.00117
torus3.off	0.00593
torus4.off	0.00897
torus5.off	0.01405
chair.off	0.040395
skull.off	0.02913

Distance de divers objets vers torus.off

Effectivement, la distance est plus grande si la forme du maillage est différente.

6 Organisation du code

Nous choisissons d'implémenter deux versions différentes de la courbure, nous utilisons donc une classe abstraite `CourbureEstimator` qui comporte essentiellement une méthode `double compareTo(CourbureEstimator c)` renvoyant la distance entre les deux maillages, et une méthode `void computeSignature()` qui évalue la courbure suivant la méthode utilisée. Deux classes l'implémentent : `GaussianCourbureEstimator` pour la méthode de Gauss, et `Taubin` pour le tenseur de courbure. Le programme principal se situe dans la classe `Matching`

7 Conclusion

Ce problème de matching de formes tridimensionnelles est actuellement l'objet de nombreuses recherches. La méthode implémentée ici, consistant à comparer deux signatures, permet de caractériser deux objets potentiellement proches, mais pas d'en assurer la ressemblance, car nous pourrions imaginer deux formes très différentes mais aux cartes de courbures similaires.

La prochaine étape, la plus difficile dans les problématiques de matching, consiste à orienter les deux maillages que l'on souhaite comparer, de telle sorte qu'ils se superposent. Cette étape est nécessaire avant d'appliquer un algorithme de matching plus précis.

Notre implémentation de l'algorithme de Taubin constitue une piste exploitable, à l'aide du tenseur de courbure en chaque point. En effet, notre algorithme ne calculait pas seulement ses valeurs propres, mais également ses vecteurs propres (aussi appelés directions principales de courbure). Dans l'hypothèse où l'on sait qu'un point sur le maillage A correspond à un certain point sur le maillage B, lequel doit avoir un tenseur de courbure égal, on est donc capable de trouver une transformation permettant de passer de l'un à l'autre : celle qui transforme les directions principales du point de A en celles de B. Toute la difficulté consiste donc à trouver une correspondance entre deux points.

References