时间序列-随机模型与概率模型的模拟

1. Markov链[1]

对于现实问题：

例 8.1 一个宠物商店出售 20 加仑○的水族箱．每个周末商店的老板要盘点存货，开出定单．商店的策略是，如果当前所有的存货都被售出了就在这个周末进三个新的 20 加仑的水族箱．如果只要在店内还保存有一个存货，就不再进新的水族箱．这个策略是基于商店平均每周仅出售一个水族箱的事实提出的．这个策略是不是能够保证防止当商店缺货时顾客需要水族箱而无货销售的损失？

使用五步方法对该问题进行建模。

Step1：提出问题

这个商店在每个销售周开始的存货在1~3个水族箱之间。在一周内销售个数依赖于供给和需求，需求为每周平均一个，但随机波动。我们希望计算需求超过攻击的概率。

假设潜在的购买者在每周以一定的概率随机到达。因此，在一周内潜在的购买者的数目服从均值为1的**Possion分布**。

Step2：建立Markov Chain 模型

Markov链可以描述为一个随机跳跃的序列。

假设随机变量X_n在有限的离散集合中取值，即：

$$X_n \in \{1, 2, 3, \ldots, m\} \tag{1}$$

若$X_{n+1} = j$的概率仅仅依赖于X_n,则称$\{X_n\}$为Markov链。

定义$p_{ij} = Pr\{X_{n+1} = j | X_n = i\}$，则过程$\{X_n\}$的性质被$p_{ij}$和$X_0$的初始概率分布决定。

则上述问题可描述为：

变量：

S_n＝第 n 周之初水族箱的供应

D_n＝第 n 周内水族箱的需求

假设：

如果 $D_{n-1}<S_{n-1}$，则 $S_n=S_{n-1}-D_{n-1}$

如果 $D_{n-1}\geqslant S_{n-1}$，则 $S_n=3$

$\Pr\{D_n=k\}=e^{-1}/k!\ \ k=0, 1, 2, 3, \cdots$

目标： 计算 $\Pr\{D_n>S_n\}$

Step3：组建模型

取$X_n = S_n$作为状态变量，表示销售周期初库存的水族箱数量，需求量D_n与模型的动态有关。

状态空间$X_n \in \{1,2,3\}$,假设初始状态$X_0 = 3$.由题意知：

$$
\begin{aligned}
Pr\{D_n = 0\} &= 0.368 \\
Pr\{D_n = 1\} &= 0.368 \\
Pr\{D_n = 2\} &= 0.184 \\
Pr\{D_n = 3\} &= 0.061 \\
Pr\{D_n > 3\} &= 0.019
\end{aligned}
$$

则当$X_n = 3$时：

$$
\begin{aligned}
&Pr\{X_{n+1} = 1\} = Pr\{D_n = 2\} = 0.184 \\
&Pr\{X_{n+1} = 2\} = Pr\{D_n = 1\} = 0.368 \\
&Pr\{X_{n+1} = 3\} = 1 - Pr\{X_{n+1} = 1\} - Pr\{X_{n+1} = 2\} = 0.448
\end{aligned}
$$

其余的状态转移概率可类似计算，则状态转移方程为：

$$
P = \begin{pmatrix} 0.368 & 0 & 0.632 \\ 0.368 & 0.368 & 0.264 \\ 0.184 & 0.368 & 0.448 \end{pmatrix} \tag{2}
$$

状态转移图为:

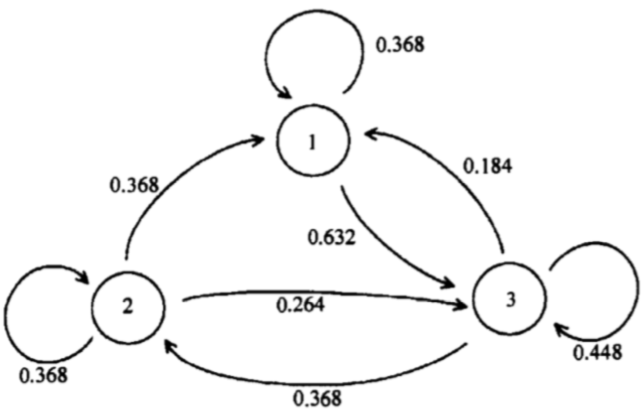


图 8-3　存货问题的状态转移图

Step4：计算分析目标

目标是计算需求超过供给的概率:

$$Pr\{D_n > S_n\} \tag{3}$$

通常上述概率依赖于X_n,当$X_n=3$时，有：

$Pr\{D_n > S_n\} = Pr\{D_n > 3\} = 0.019$

因为$\{X_n\}$是一个遍历的Markov链，可知一定存在一个唯一的渐进稳定概率向量π,其可通过求解稳定状态方程计算得到。

$$\begin{cases} \pi_1 = 0.368\pi_1 + 0.368\pi_2 + 0.184\pi_3 \\ \pi_2 = 0.368\pi_2 + 0.368\pi_3 \\ \pi_3 = 0.632\pi_1 + 0.264\pi_2 + 0.448\pi_3 \end{cases} \tag{4}$$

需要在条件:

$$\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1 \tag{5}$$

下求解得到X_n的稳定状态分布，即：

$$\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3) = (0.285, 0.263, 0.452) \tag{6}$$

对于充分大的n, 近似有：

$$\begin{aligned} Pr\{X_n = 1\} &= 0.285 \\ Pr\{X_n = 2\} &= 0.263 \\ Pr\{X_n = 3\} &= 0.452 \end{aligned} \tag{7}$$

即有：

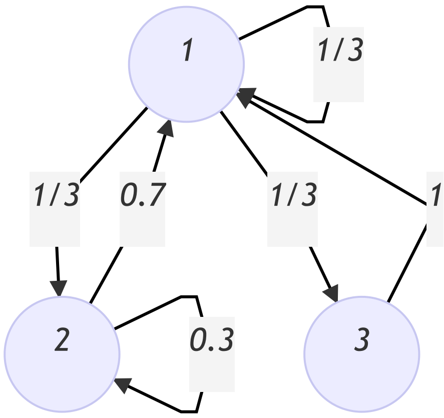
$$\begin{aligned} Pr\{D_n > S_n\} &= \sum_{i=1}^{3} Pr\{D_n > S_n | X_n = i\} Pr\{X_n = i\} \\ &= (0.264)(0.285) + (0.080)(0.263) + (0.019)(0.452) \\ &= 0.105 \end{aligned}$$

得到：在长时间的运行中，需求将有10%的时间超过供给。

Step5：回答问题

最后，我们进行步骤五．当前的存货策略导致有大约 10％的时间的无货销售的损失，或者说每年至少有 5 次缺货．这主要是由于当仅有一个水族箱的库存时我们没有更多地进货．虽然我们每周平均仅仅出售一个，每一周潜在销售的实际个数(需求)从一周到下一周是波动的．因此当我们开始仅有一个水族箱库存的这一周的销售时，我们冒着很大的(大约是四分之一)由于不充足的库存而失去潜在的销售机会的损失．如果不存在其他的因素，例如对预定三个或更多的水族箱时打折扣等，似乎有理由尝试新的策略使得不会在开始一周的销售时仅有一个水族箱．

关于Markov链的表示方法：

> *例：状态变量$X_n \in \{1,2,3\}$若$X_n=1$则$X_{n+1}=1 or 2 or 3$以相同的概率出现；若$X_n=2$,则$X_{n+1}=1$以概率0.7出现， $X_{n+1}=2$以概率0.3出现；若$X_n=3$，则$X_{n+1}=1$以概率1出现。*
>
> *则**状态转移概率**：*
>
> $$\begin{aligned} p_{11}=\frac{1}{3} \quad p_{12}=\frac{1}{3} \quad p_{12}=\frac{1}{3} \\ p_{21}=0.7 \quad p_{22}=0.3 \quad p_{31}=1 \end{aligned} \tag{8}$$
>
> *其余为0.则表示成**状态转移矩阵**：*
>
> $$P=(p_{ij})=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0.7 & 0.3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{9}$$
>
> *表示成**状态转移图**：*
>
> 
>
>
> *则可计算:*
>
> $Pr\{X_2=1\}=(\frac{1}{3})(\frac{1}{3})+(\frac{1}{3})(0.7)+(\frac{1}{3})(1)=0.677$
>
> $Pr\{X_2=2\}=(\frac{1}{3})(\frac{1}{3})+(\frac{1}{3})(0.3)=0.211$
>
> *为计算较大的n对应的$Pr\{X_n=j\}$，有：*
>
> $$Pr\{X_n=j\}=\sum_i p_{ij} Pr\{X_n=i\} \tag{10}$$
>
> *例如：*
>
> $Pr\{X_2=1\}=p_{11}Pr\{X_1=1\}+p_{21}Pr\{X_1=2\}+p_{31}Pr\{X_1=3\}$
>
> *若令：*

$$\pi_n(i) = Pr\{X_n = i\} \tag{11}$$

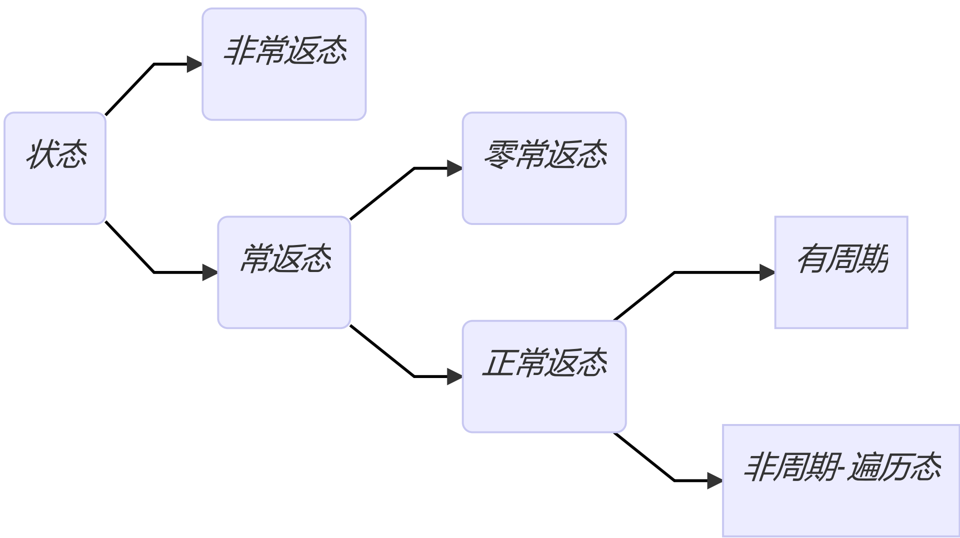
则有：

$$\pi_{n+1}(i) = \sum_i p_{ij}\pi_n(i) \tag{12}$$
$$\pi_{n+1} = \pi_n P$$

若由上式可得到$\pi_n \to \pi$，称状态变量为稳态。

*一般地，称X_n是δ**周期**的，若在$X_n = i$开始，这条链仅仅在时间$n + k\delta$回到状态i.*

Markov链的状态分类：



关于灵敏度分析：

主要的灵敏性分析来自于潜在的购买者到达率λ对需求超过供给的概率的影响。

$\forall\lambda$，利用D_n服从Poisson分布，X_n的状态转移矩阵有：

$$p = \begin{pmatrix} e^{-\lambda} & 0 & 1 - e^{-\lambda} \\ \lambda e^{-\lambda} & e^{-\lambda} & 1 - (1+\lambda)e^{-\lambda} \\ \frac{\lambda^2 e^{-\lambda}}{2} & \lambda e^{-\lambda} & 1 - (\lambda + \frac{\lambda^2}{2})e^{-\lambda} \end{pmatrix} \tag{13}$$

对$\lambda = 1$附近的λ值进行计算，可得：

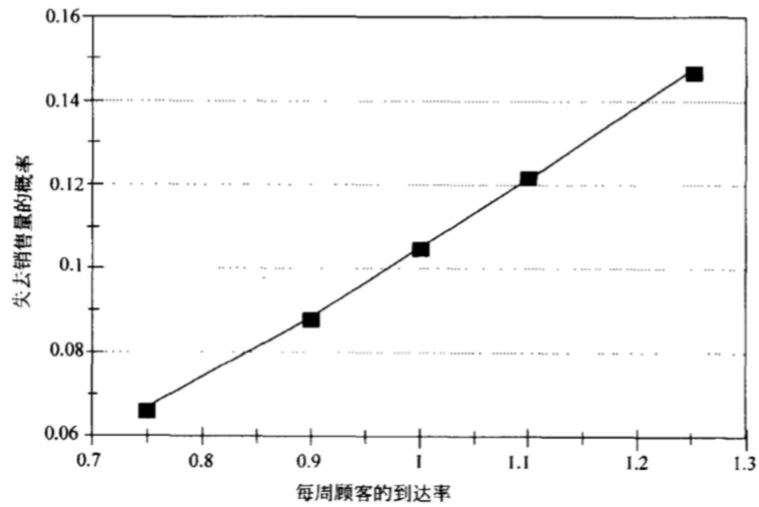


图 8-5 库存问题中失去销售量的概率对到达率的灵敏性

可知结果对λ值不是特别敏感。

补充:

对于不同的库存策略，可以狗仔一个基于"Markov链模型"的一般最优化模型，这类模型的研究成为"Markov决策理论"[3].

2. 蒙特卡洛模拟[2]

蒙特卡洛模拟模型的随机状况，通常使用计算机的伪随机数发生器。

例:

当地气象预报说明这一周每天有50%的可能下雨，连续三天下雨的可能性有多大。

Step1：提出问题

变量：

$$X_t=\begin{cases}0 & \text{第 } t \text{ 天没下雨}\\ 1 & \text{在第 } t \text{ 天下雨}\end{cases}$$

假设：

X_1，X_2，…，X_y 是独立的

$\Pr\{X_t=0\}=\Pr\{X_t=1\}=1/2$

目标： 确定对于 $t=1$，2，3，4 或 5，$X_t=X_{t+1}=X_{t+2}=1$ 的概率

Step2：模型建立

使用蒙特卡洛模拟，其使用随机化的方式，按照取值的概率分布给出每个随机变量的值。因为模拟的结果易拉与随机隐私，接连重复同样的模拟将会产生不同的结果。

蒙特卡洛模拟通常被用于估计系统的性能一个或多个系统表现的度量值(MOPs)。

考虑仅有一个模拟参数Y的情况，重复模拟的结果得到$Y_1, Y_2, ..., Y_n$，可视为独立同分布的随机变量。由强大数定律，当$n \to \infty$时：

$$\frac{Y_1 + ... + Y_n}{n} \to EY \tag{14}$$

故可使用$Y_1, Y_2, .., Y_n$的平均数来估计Y的真实期望值，令：

$$S_n = Y_1 + Y_2 + ... Y_n \tag{15}$$

由中心极限定理可知，当n足够大时：

$$\frac{(S_n - n\mu)}{\sigma\sqrt{n}} \tag{16}$$

近似于标准正态分布，其中$\mu = EY$，$\sigma^2 = Var(Y)$。

观测的平均$\frac{S_n}{n}$与真实的均值$\mu = EY$之差：

$$\frac{S_n}{n} - \mu = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}(\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}) \tag{17}$$

可知，期望观测值与真值的收敛速度与$\frac{1}{\sqrt{n}}$一样快。

若希望使用蒙特卡洛模拟，必须要满足于平均性质相当粗放的估计。

Step3：本问题的蒙特卡洛方法表示

记$Random\{S\}$表示从集合S中随机选取一点。在该问题中每一天的天气将使用区间$[0, 1]$中的随机数表示，若选取的数$< p$，则假设这一天是雨天，否则就是晴天。即p就是任何一天下雨的概率，变量C简单计数了连续雨天的天数。

```
算法：雨天模拟
变量：
        P=一个雨天的概率
        X(t)= { 1，在第 t 天下雨
                0，第 t 天不下雨
        Y= { 1，≥3 个连续的雨天
             0，<3 个连续的雨天
输入：p
过程：
        Begin
        Y←0
        C←0
        for t=1 to 7 do
          Begin
        if Random([0, 1])<p then
            X(t)=1
          else
            X(t)=0
        if X(t)=1 then
            C←C+1
        else
            C←0
        if C≥3 then Y←1
            End
        End
输出：Y
```

图 9-2　雨天问题的蒙特卡罗模拟的伪代码

```
算法：重复雨天模拟
变量：p=一个雨天的概率
      n=模拟的周数
      S=下雨周的数目
输入：p, n
过程：
      Begin
      S←0
      for k=1 to n do
        Begin
        Y ←Rainy Day Simulation(p)
        S←S+Y
      End
输出：S
```

图 9-3　雨天问题中重复进行蒙特卡罗模拟以确定平均特征的伪代码

Step4：模型求解

实现图9-3方法，令参数$p=0.5, n=100$。模拟出100次中有43个下雨的周，因此估计出现下雨周的机会是43%.

Step5:灵敏性分析

系统性能的度量值(MOP)是Y，其中$Y=1$意味着一个下雨周，$Y=0$表示相反的方面。模型模拟了$n=100$个独立的随机变量$Y_1,\dots,Y_n$他们都有与Y相同的分布，并输出随机变量$S_n=Y_1+Y_2+\dots+Y_n$，表示下雨周的数目，令：

$$q=Pr\left\{Y=1\right\} \tag{18}$$

表示下雨周的概率，则有：

$$\begin{aligned}\mu &= EY=q \\ \sigma^2 &= Var(Y)=q(1-q)\end{aligned} \tag{19}$$

运行第一个模型得到$S_n=43$，以此为基础使用强大数定理估计q:

$$q=EY\approx\frac{S_n}{n}=0.43 \tag{20}$$

使用中心极限定理，可知$\frac{S_n}{n}$与$\mu=q$之差不太可能大于$\frac{2\sigma}{\sqrt{n}}$，有95%的把握确定标准正态随机变量的绝对值小于2。

调整每天降雨的概率$P=0.3,0.4,0.5,0.6,0.7$并运行10次模型，得到：当连续三天下雨的概率变化相当小时，可以认为若每天下雨的坑你性适中时，一周内连续三个雨天的可能性适中。

3. Markov性质[2]

考虑具有随机因素的对接问题模拟：

Step1：问题重述

变量：

t_n = 第 n 次速度观测的时间(秒)

v_n = 在时间 t_n 的速度(米/秒)

c_n = 进行第 n 次速度调整的时间(秒)

a_n = 第 n 次速度调整后的加速度(米/秒^2)

w_n = 第$(n+1)$次观测前的等待时间(秒)

R_n = 读速度的时间(秒)

S_n = 计算调整的时间(秒)

T_n = 进行调整的时间(秒)

ε_n = 控制调整的随机误差(米/秒^2)

E_n = 等待时间的随机误差(秒)

假设：

$t_{n+1}=t_n+c_n+w_n$

$v_{n+1}=v_n+a_{n-1}c_n+a_nw_n$

$a_n=-kv_n+\varepsilon_n$

$c_n=R_n+S_n+T_n$

$w_n=15-c_n+E_n$

$v_0=50$，$t_0=0$

$ER_n=1$，$ES_n=ET_n=2$，且

R_n，S_n，T_n 的分布已经被给出了

ε_n 是 0 均值，0.05 标准差的正态分布

E_n 是 0 均值，0.1 标准差的正态分布

目标： 确定 $T=\min\{t_n: \ |v_n| \leqslant 0.1\}$

图 9-6 具有随机因素的对接问题的步骤一的结果

Step2：建立模型的方法

使用基于Markov性质的蒙特卡洛模拟方法。

```
Begin
Read data
Initialize X0
While(not done) do
   Begin
   Determine distribution of Xn+1 using Xn
   Use Monte Carlo method to determine Xn+1
   Update records for MOPs
   End
Calculate and output MOPs
End
```

图 9-7 一般的马尔可夫模拟算法

对于内循环的情况：

假设状态向量X_n是一维的，令：

$$F_\Theta(t)=Pr\{X_{n+1}\leq t|X_n=\Theta\} \tag{21}$$

$\Theta = X_n$的数值确定了X_{n+1}的概率分布，函数F_Θ将状态空间$E \subseteq \mathbb{R}$映射到区间$[0,1]$可以使用多种方法产生$[0,1]$上的随机数，同时可以用来产生具有分布F_Θ的随机表示能量。因为：

$$y = F_\Theta(x) \tag{22}$$

给出映射:

$$E \to [0,1] \tag{23}$$

其反函数:

$$x = F_\Theta^{-1}(y) \tag{24}$$

给出映射：

$$[0,1] \to E \tag{25}$$

若U是$[0,1]$上均匀分布的随机变量，则$X_{n+1} = F_\Theta^{-1}(U)$将有分布$F_\Theta$，由于$X_n = \Theta$:

$$\begin{aligned} Pr\left\{X_{n+1} \le t\right\} &= Pr\left\{F_\Theta^{-1}(U) \le t\right\} \\ &= Pr\left\{U \le F_\Theta(t)\right\} \\ &= F_\Theta(t) \end{aligned}$$

其中有：$Pr\left\{U \le x\right\} = x \quad for \quad 0 \le x \le 1.$

> *例：令$\{X_n\}$表示一个随机过程，其中X_{n+1}服从速率参数为X_n的指数分布，假设$X_0 = 1$，首次通过时间:*
>
> $$T = min\left\{n : X_1 + \ldots + X_n \ge 100\right\} \tag{26}$$
>
> *可以使用计算机模拟解决由X_n得到X_{n+1}的问题。*
>
> *令$\Theta = X_n$，X_{n+1}的密度函数:*
>
> $$f_\Theta(x) = \Theta e^{-\Theta x} \quad (x \ge 0) \tag{27}$$
>
> *分布函数为:*
>
> $$F_\Theta(x) = 1 - e^{-\Theta x} \tag{28}$$
>
> *令$y = F_\Theta(x)$，求得反函数:*
>
> $$x = F_\Theta^{-1}(y) = \frac{-ln(1-y)}{\Theta} \tag{29}$$
>
> *故可令:*
>
> $$X_{n+1} = \frac{-ln(1-U)}{\Theta} \tag{30}$$

其中U是0与1之间的随机数。

```
算法：首次通过时间模拟(例 9.3)
变量：X=初始状态
      N=首次通过时间
输入：X
过程：Begin
      S←0
      N←0
      until(S≥100)do
        Begin
        U←Random {[0, 1]}
        R←X
        X←−ln(1−U)/R
        S←S+X
        N←N+1
        End
      End
输出：N
```

图 9-8　例 9.3 马尔可夫模拟的伪代码

而对于现实问题中，通常不能很方便得到其反函数$x = F_{\Theta}^{-1}$,同行可以通过从函数值表中插值得到其反函数的插值函数，而对于正态分布的情况，有：

中心极限定理保证了任何均值为μ、方差为σ^2的$i.i.d$随机变量序列$\{X_n\}$，标准化部分和：

$$\frac{((X_1+\ldots+X_n)-n\mu)}{\sigma\sqrt{n}} \tag{31}$$

趋向于标准正态分布。假设$X_n \sim U(0,1)$,计算可得：

$$\mu = \int_0^1 xdx = \frac{1}{2}$$
$$\sigma^2 = \int_0^1 (x-\frac{1}{2})^2 dx = \frac{1}{12}$$

同时当$n \to \infty$时：

$$Z \to \frac{(X_1+\ldots+X_n)-\frac{n}{2}}{\sqrt{\frac{n}{12}}} \tag{32}$$

则给定标准正态随机变量Z，其他的均值μ和标准差σ的正态随机变量可由下式得到：

$$Y = \mu + \sigma Z \tag{33}$$

即：

```
算法：正态随机变量
变量：μ=均值
      σ=标准差
      Y=具有均值 μ 和标准差 σ 的正态随机变量
输入：μ，σ
过程：
      Begin
      S←0
      for n =1 to 12 do
          Begin
          S←S+Random{[0，1]}
          End
      Z←S−6
      Y←μ+σZ
      End
输出：Y
```

图 9-9　正态随机变量蒙特卡罗模拟的伪代码

则对于原数学建模问题：

回到对接的问题，我们开始步骤三．首先要关心的是确定我们的状态变量．在这个情况下我们可以取

$$\begin{aligned} T &= t_n \\ V &= v_n \\ A &= a_n \\ B &= a_{n-1} \end{aligned} \tag{11}$$

作为我们的状态变量．以前的 MOP 已经是一个状态变量，为了这个目的我们不需要初始化或者更新任何附加的变量．图 9-10 给出了我们的对接问题模拟的算法．记法 Normal(μ，σ)表示图 9-9 描述的算法给出的正态随机变量的输出．现在我们将假设

$$c_n = R_n + S_n + T_n$$

服从均值为 μ=5 秒，标准差为 σ=1 秒的正态分布．

```
算法：对接模拟
变量：k=控制参数
      n=控制调整次数
      T(n)=时间(秒)
      V(n)=当前的速度(英尺/秒)
      A(n)=当前的加速度(英尺/秒²)
      B(n)=先前的加速度(英尺/秒²)
输入：T(0)，V(0)，A(0)，B(0)，k
过程：
      Begin
      n←0
      while |V(n)|>0.1 do
        Begin
        c←Normal(5, 1)
        B(n)←A(n)
        A(n)←Normal (−kV(n), 0.05)
        w←Normal (15−c, 0.1)
        T(n)←T(n)+c+w
        V(n)←V(n)+cB(n)+wA(n)
        n←n+1
        End
      End
输出：T(n)
```

图 9-10　对接问题蒙特卡罗模拟的伪代码

参考资料

[1] 《数学建模方法与分析》-第八章 随机模型

[2] 《数学建模方法与分析》-第九章 概率模型的模拟

[3] 知乎-【决策模型】马尔可夫决策过程

> https://zhuanlan.zhihu.com/p/271221558?utm_source=qzone