TOSHKENT
KIMYO-TEXNOLOGIYA
INSTITUTI

O’ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O’RTA MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI

TOSHKENT KIMYO-TEXNOLOGIYA INSTITUTI

«OZIQ-OVQAT SANOATI MASHINA VA JIHOZLARI-MEXANIKA ASOSLARI» KAFEDRASI

“N A Z A R I Y M E X A N I K A”

FANIDAN
MA’RUZALAR MATNI

TOSHKENT - 2014 y.

Ushbu ma’ruzalar matni kimyo va oziq-ovqat, hamda don mahsulotlari texnologiyasi, avtomatlashtirish va boshqaruv bakalavr yo’nalishi bo’yicha tahsil olayotgan nomexanik mutaxassislarga «Nazariy mexanika» ning statika, kinematika va moddiy nuqta dinamikasi bo’limlarini o’zlashtirishda asos bo’lib xizmat qiladi.

Ma’ruzalar matni 18 ta ma’ruzadan iborat bo’lib, fanining asosiy tushunchalari va qonunlarini yoritish bilan birga muhadislining turli sohalarida uchraydigan qator amaliy masalalarni yechishda asos bo’lib xizmat qiladi. Har bir ma’ruzada nazariy ma’lumotlar va amaliy masalalarni yechish tartibi berilgan.

Hozirgi zamonda fan va texnikaning tez sur’atlar bilan o’sishi ishlab chiqarish jarayonlarini mexanizasiyalashtirish va avtomatlashtirishni taqazo etadi. Bu holat mexanizasiyalashtirish jarayonlarini asosi bo’lgan umumtexnik masalalarni yechishda “Nazariy mexanika” fanini chuqur o’zlashtirishni talab etadi.

Bundan maqsad talabalarni “Nazariy mexanika fani bo’yicha olgan nazariy bilimlarini yanada mustahkamlash va chuqurlashtirishdan iboratdir.

Tuzuvchilar: dots. B.A.Musaboev, katta o’qituvchi A.N.Shernaev

Taqrizchi: t.f.d., professor X.S.Nurmuxammedov

Mazkur ma’ruzalar matni “Mexanika asoslari va muxandislik grafikasi” kafedrasi majlisida muhokama qilindi va “Oziq-ovqat mahsulotlari texnologiyasi” fakulteti “Ilmiy uslubiy kengashi” ga tavsiya etildi.

Bayonnoma №_ 2014 y.

Ma’ruzalar matni TKTI “Ilmiy uslubiy kengashi” da muhokama qilindi va ko’p nusxada nashr etilishga ruxsat berildi.

Bayonnoma № ___ 2014 yil.

MUQADDIMA

Tabiatda ro’y beradigan barcha o’zgarishlar va hodisalar harakat deb ataladi. Materiya harakatining eng sodda turi, jism holatining o’zgarishidir, ya’ni moddiy jismlarning vaqt o’tishi bilan fazoda bir-birlariga nisbatan qo’zg’alishlaridir. Harakatning bu turi mexanik harakat deb ataladi. Nazariy mexanika moddiy jismlar harakatining umumiy qonunlari haqidagi fandir. Xususan, agar jismning fazodagi holati vaqt o’tishi bilan o’zgarmasa, bu holda jism muvozanat holatida turadi. Muvozanat mexanik harakatning xususiy holidir. Binobarin, nazariy mexanika muvozanat qonuniyatlarini ham o’rganuvchi fandir. Harakat va muvozanat tushunchalaridan ularning nisbiyligi haqida xulosa chiqarishimiz mumkin. Mexanika fani matematika fani singari qadimiydir. Nazariy mexanikada izlanishning matematik usullari keng tatbiq qilinadi. Jismning holati boshqa qo’zg’almas deb olingan jismga biriktirilgan koordinata o’qlariga nisbatan kuzatiladi.

Harakat davomida jismning holati kuzatilayotgan sanoq sistemasiga nisbatan vaqt o’tishi bilan o’zgaradi. Tabiatda harakatsiz jism mavjud emas, binobarin qo’zg’almas sanoq sistemasi ham mavjud emasdir. Odatda ko’pgina muhandislik masalalarini hal qilishda (kosmik uchishlar masalasi bundan mustasnodir), yerni qo’zg’almas deb qaraladi. Shuning uchun, keyinchalik, agar alohida ta’kidlanmasa, yerga bog’langan sanoq sistemasini qo’zg’almas deb qabul qilamiz. Hozirgi zamon “Nazariy mexanika” fanining asosiy qonunlarini 1687 yilda mashhur donishmand olim Isaak Nyuton o’zining «Tabiiy fanlar falsafasining matematik asoslari» nomli asarida bayon qilib bergan. Shuni ta’kidlab o’tamizki, Nyuton qonunlari Arximed va Galiley singari va boshqa buyuk olimlarning kundalik kuzatishlari va izlanishlarining natijasidir.

Nazariy mexanika fanining rivojlanishi davomida, undan ko’pgina muhandislik fanlari mustaqil fan bo’lib ajralib chiqdi. Masalan: materiallar qarshiligi, inshootlar nazariyasi, suyuq va gazsimon jismlar mexanikasi, mashina va mexanizmlar nazariyasi va boshqalar. Bu fanlar nazariy mexanika qonunlariga tayangani holda mustaqil fanlar tarzida shakllandi. Hozirgi zamon mexanikasining tez sur’atlar bilan taraqqiy etishi, texnikani rivojlantirishda ijodiy ishlashga qodir bo’lgan yuqori malakali muhandis xodimlarga muhtojlikni oshiradi.

Hozirgi zamon muhandislari o’ta murakkab hisob ishlarini bajarishlari darkor, masalan: inshoot muvozanatlariga oid (imorat, ko’prik va boshqalar), mashina va mexanizmlar harakatiga oid hisob-kitob ishlari. Bunday masalalarni yechishga faqat “Nazariy mexanika” fani qonun-qoidalarini chuqur o’rgangan muhandislargina qodirdirlar.

“Nazariy mexanika” fani uch qismdan iborat: statika, kinematika va dinamika. Statika moddiy jismlar muvozanatiga oid qonunlarni o’rganadi. Kinematika jism harakati qonunlarini bu harakatni vujudga keltiruvchi yoki o’zgartiruvchi sababga bog’lamay tekshiradi. Bundan ko’rinadiki, kinematika jism harakatini faqat geometrik nuqtai nazardan tekshiradi, ya’ni bu harakatni vujudga keltiruvchi sababga e’tibor bermaydi. Shuning uchun kinematikani to’rt o’lchovli geometriya deb atasak ham bo’ladi. Bunda uchta fazoviy o’zgaruvchilarga to’rtinchi o’zgaruvchi vaqt ham qo’shiladi.

Dinamika jismlar harakatini bu harakatni vujudga keltiruvchi, o’zgartiruvchi sababga bog’lab tekshiradi.

1-MA'RUZA. STATIKANING ASOSIY TUSHUNCHALARI BA AKSIOMALARI

Asosiy tushunchalar va ta'riflar

Jismga ta'sir etuvchi kuchlar turlari, ular ustida amallar, kuchlarning muvozanat shartlarini o'rganuvchi nazariy mexanikaning bo'limi statika deb ataladi. Statikani o'rganish uchun zarur bo'lgan asosiy tushuncha va ta'riflarni keltiramiz.

1. Moddiy nuqta. Ko'rilayotgan masalada geometrik o'lchamlarining ahamiyati bo'lmagan jism moddiy nuqta deb ataladi.

2. Mexanik sistema. Har birining holati va harakati boshqalarining holati va harakatiga bog'liq bo'lgan moddiy nuqtalar to'plami mexanik sistema deb ataladi. Ta'rifdan ko'rinadiki mexanik sistema moddiy nuqtalar orasida o'zaro ta'sir mavjud bo'lishini taqozo qiladi.

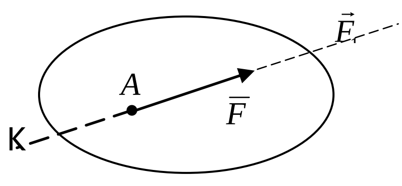
3. Absolyut (mutlaq) qattiq va deformatsiyalanuvchi jism. Qattiq jismning ixtiyoriy ikki nuqtasi orasidagi masofa har qanday holatda ham o'zgarmasdan qolsa, bunday jism absolyut (mutlaq) qattiq jism deb ataladi. Tabiatda mutlaq qattiq jism mavjud emas. Har qanday qattiq jism bo'lmasin, shunday sharoit mavjud qilish mumkinki, uning ikki nuqtasi orasidagi masofa o'zgarishiga olib kelish mumkin. Bu jism shaklining o'zgarishiga olib keladi. Ikki nuqtasi orasidagi masofa o'zgaruvchi bo'lgan qattiq jism deformatsiyalanuvchi jism deb ataladi. Binobarin tabiatda faqat deformatsiyalanuvchi jism mavjuddir.

4. Erkin va erkin bo'lmagan jism. Fazoda ixtiyoriy vaziyatni egallashi mumkin bo'lgan jism erkin jism deb ataladi. Quyosh sistemasining sayyoralari bunga misol bo'la oladi. Agar jismning fazodagi vaziyati yoki harakatiga qandaydir chek qo'yilsa, bunday jism erkin bo'lmagan, ya'ni bog'lanishdagi jism deb ataladi.

5. Kuch. Moddiy jismlarning harakati yoki ichki holatining o'zgarishiga sabab bo'luvchi, o'zaro bir-birlariga ko'rsatgan ta'sirlarning miqdor o'lchovi kuch deb ataladi. Jismlarning o'zaro mexanik ta'siri ularni bir-biriga tegib yoki ma'lum masofada turganida ham mavjud bo'lishi mumkin.

Birinchi toifaga jismlarning o'zaro bir-birlariga bosimi, ikkinchi toifaga har xil tortishish kuchlari : sayyoralar orasidagi o'zaro tortishish, elektr, magnit va boshqalar kiradi. Jismga qo'yilgan kuch: miqdor, yo'nalish va qo'yilish nuqtasi bilan xarakterlanadi, ya'ni kuch vektor kattalikdir. SI xalqaro birliklar sistemasida kuch birligi – Nyuton.

Kuch yo'nalishi deb, tinch holatda turgan erkin moddiy nuqtaning qo'yilgan kuch ta'siridan olgan harakatining yo'nalishiga aytiladi. Kuch yo'nalgan to'g'ri chiziq kuchning ta'sir chizig'i deb ataladi (1-shakl).



1-shakl

Jismning bevosita kuch qo'yilgan nuqtasi kuch qo'yilgan nuqta deb ataladi. Kuch yo'naltirilgan kesma orqali grafik tasvirlanadi. Tanlab olingan masshtabda kesma uzunligi kuch miqdorini ifodalaydi, kesmaning yo'nalishi kuch yo'nalishiga monand, uning boshlanishi yoki oxiri kuch qo'yilgan nuqtaga monand.

1-shaklda $\vec{F}$ kuch A nuqtaga qo'yilgan.

6. Kuchlar sistemasi. Jismga qo'yilgan bir necha kuchlardan iborat bo'lgan $\left(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n\right)$ to'plam kuchlar sistemasi deb ataladi.

7. Ekvivalent kuchlar sistemasi. Agar jismga qo'yilgan $\left(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n\right)$ kuchlar sistemasi ta'sirini, uning tinch yoki harakat holatini o'zgartirmay, boshqa kuchlar sistemasi, ya'ni $\left(\vec{Q}_1, \vec{Q}_2, ..., \vec{Q}_n\right)$, bera olsa, unday ikki kuch sistemasi ekvivalent kuchlar sistemasi deyilali. $\left(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n\right) \Leftrightarrow \left(\vec{Q}_1, \vec{Q}_2, ..., \vec{Q}_n\right)$.

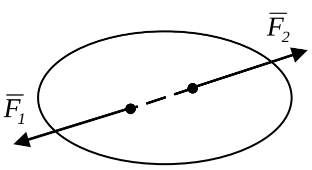
8. Teng ta'sir etuvchi kuch. Berilgan kuchlar sistemasi biror kuchga ekvivalent bo'lsa, bunday kuch teng ta'sir etuvchi kuch deb ataladi. Shuni nazarda tutish kerakki, kuchlar sistemasining jismga bergan ta'sirini yolg'iz bir kuch bera olsa, bunday kuch mazkur kuchlar sistemasining teng ta'sir etuvchisidir $\left(\vec{Q}_1, \vec{Q}_2, ..., \vec{Q}_n\right) \Leftrightarrow \vec{R}$.

9. Muvozanatlashgan kuchlar sistemasi. Erkin jism unga qo'yilgan kuchlar sistemasi ta'sirida tinch holatda qolsa, bunday kuchlar sistemasi muvozanatlashgan kuchlar sistemasi yoki nolga ekvivalent sistema deyiladi. $\left(\vec{Q}_1, \vec{Q}_2, ..., \vec{Q}_n\right) \Leftrightarrow 0$.

Statikaning asosiy aksiomalari

Statikaning asosida isbot talab etilmaydigan, aksioma deb ataluvchi boshlang'ich haqiqatlar to'plami yotadi. Bu aksiomalar tajriba va kuzatishlarning natijasidir. Aksiomalarga asoslanib, statikaning mazmunini tashkil etuvchi teoremalar isbot qilinadi.

1-aksioma. Erkin qattiq jismga qo'yilgan ikki kuch miqdor jihatdan bir-biriga teng $\left|\overline{F}_1 = -\overline{F}_2\right|$ va bir chiziq bo'ylab qarama-qarshi tomonga yo'nalgan bo'lsa, kuchlar sistemasi o'zaro muvozanatlashadi. Bu aksioma oddiy muvozanatlashgan kuchlar sistemasini aniqlaydi (2-shakl).



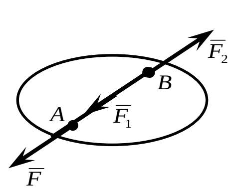
2-shakl

2-aksioma. Agar jismga ta'sir etayotgan kuchlar sistemasi qatoriga, muvozanatlashgan kuchlar sistemasini qo'shsak, yoki undan ayirsak, kuchlar sistemasining jismga ta'siri o'zgarmaydi.

Yuqoridagi ikki aksiomadan quyidagi natija kelib chiqadi:

Bu aksiomadan quyidagi natija kelib chiqadi.

Kuchning jismga ta'sirini o'zgartirmay, uning qo'yilish nuqtasini ta'sir chizig'i bo'ylab jismning ixtiyoriy nuqtasiga ko'chirishimiz mumkin. Jismning A nuqtasiga $\overline{F}$ kuch qo'yilgan (3-shakl).

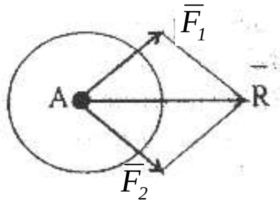


3-shakl

Uning ta'sir chizig'ining, u bo'ylab ixtiyoriy B nuqtasiga muvozanatlashgan kuchlar sistemasini, ya'ni miqdor jihatidan F ga teng bo'lgan $F_1=F_2=F$ va F ning ta'sir chizig'i bo'ylab yo'nalgan, $\left(\vec{F}_1, \vec{F}_2\right) \Leftrightarrow 0$ qo'yamiz.

Ikkinchi aksiomaga asosan bu kuchlar sistemasining jismga ta’siri o’zgarmaydi. Osonlik bilan ko’rish mumkinki, $\vec{F}$ va $\vec{F}_2$ kuchlar sistemasi muvozanatlashgan kuchlar sistemasini tashkil qiladi. Bu muvozanatlashgan kuchlar sistemasini jismdan olib tashlaymiz. U holda jismning B nuqtasiga qo’yilgan $\vec{F}_1 = \vec{F}$ kuchigina qoladi. Demak, kuch o’zining ta’sir chizig’i bo’ylab jismning ixtiyoriy nuqtasiga qo’yilishi mumkin ekan. O’zining ta’sir chizig’i bo’ylab ixtiyoriy nuqtaga ko’chirish mumkin bo’lgan vektor sirpanuvchi vektor deb ataladi.

3-aksioma. Jismning biror nuqtasiga turli yo’nalishda qo’yilgan ikki kuchning teng ta’sir etuvchisi shu nuqtaga qo’yilgan bo’lib, ularning geometrik yig’indisiga teng bo’ladi. Bu aksioma bir nuqtaga qo’yilgan ikki kuchning yig’indisi, shu nuqtaga qo’yilgan ikki vektorni qo’shish qonuniyatiga asoslanadi (4-shakl). $\vec{F}_1$ va $\vec{F}_2$ kuchlarning teng ta’sir etuvchisini R bilan belgilab, 3-aksiomaga asosan quyidagini yozishimiz mumkin:

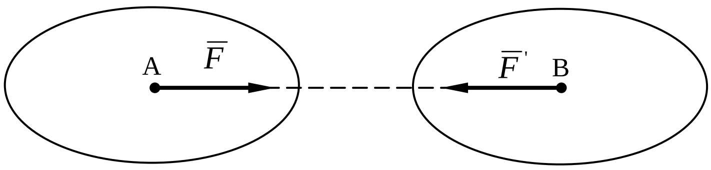


4- shakl

$$\overline{R} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 .$$

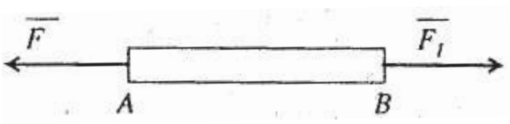
4-aksioma. Ikki jismning bir-biriga ko’rsatgan ta’sir kuchlari o’zaro teng va bir to’g’ri chiziq bo’ylab qarama-qarshi tomonga yo’nalgan. Bu aksioma ta’sir aks ta’sir tenglik aksiomasi deyiladi. Aksioma tabiatda bir tomonlama ta’sir mavjud emasligini ko’rsatadi. Birinchi jism ikkinchi jismga qanday kuch bilan ta’sir etsa (ta’sir), ikkinchi jism birinchi jismga shunday kuch bilan ta’sir etadi (aks ta’sir). Ta’sir va aks ta’sir kuchlarini ikkita jismga alohida-alohida qo’yilganligini osonlik bilan ko’rish mumkin. Shuning uchun bu ikki kuchni muvozanatlashgan kuchlar sistemasi deb qarab bo’lmaydi.

Masalan: agar A jism B jismga $\vec{F}$ kuch bilan ta’sir qilsa, u holda bir vaqtning o’zida B jism ham A jismga shunday kuch bilan ta’sir qiladi: $\overline{F'} = -\overline{F}$ (5-shakl).



5-shakl

5-aksioma. Berilgan kuchlar ta’sirida deformatsiyalangan jism muvozanat holatida absolyut qattiq jismga aylansa, uning muvozanati o’zgarmaydi. Bu aksiomaga qotish prinsipi deyiladi. Aksiomadan ko’rinadiki, absolyut qattiq jismning muvozanat sharti zaruriydir, ammo ko’p hollarda deformatsiyalanuvchi jismning muvozanati uchun yetarli emas, haqiqatan ham, masalan AB sterjenning ikki $\vec{F}$ va $\vec{F}_1$ kuchlar ta’sirida muvozanatini ko’raylik (6-shakl). Bu kuchlar miqdor jihatidan AB to’g’ri chiziq bo’ylab qarama-qarshi yo’nalgan.



6-shakl

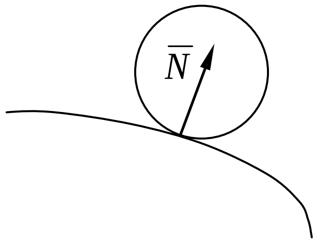
Agar sterjen absolyut qattiq bo’lsa, u holda $\vec{F}$ va $\vec{F}_1$ kuchlarning har qanday miqdorlarida sterjen muvozanatda bo’ladi. Agar sterjen absolyut qattiq bo’lmasa, kuchlarning miqdori ixtiyoriy bo’lmaydi, chunki sterjenni uzishi mumkin bo’lgan kuchlarning chegaraviy qiymatlari mavjuddir.

BOG’LANISH VA BOG’LANISH REAKSIYA KUCHLARI

Jismning holati va harakatini cheklovchi sabab bog’lanish deb ataladi. Mexanikada bog’lanishlar qattiq yoki elastik jismlar vositasida bajariladi.

Bog’lanishni jismga bergan ta’sirini ekvivalent kuch bilan almashtirish mumkin, uni bog’lanish reaksiyasi deb aytiladi. Jismning bog’lanishga ta’siri bosim deb aytiladi.

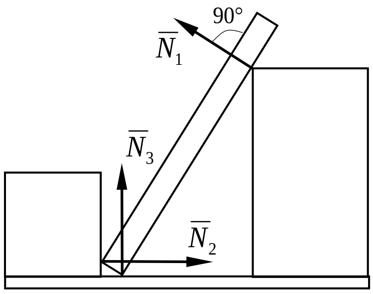
6-aksioma. Har qanday bog’lanishdagi jismni erkin jism deb qarash uchun bog’lanishlarni bog’lanish reaksiya kuchlari bilan almashtirish kerak. Bu aksioma bog’lanishdan qutulish prinsipi deyiladi. By aksiomaga asosan jismga ta’sir etayotgan kuchlar sistemasi qatoriga bog’lanish reaksiya kuchlarini ham qo’shish kerak. Odatda ular noma’lum bo’lib, berilgan kuchlar sistemasining muvozanat shartlaridan topiladi. Bog’lanishdan qutulish uchun bog’lansh reaksiya kuchining yo’nalishini aniqlash ahamiyatlidir. Bog’lanish reaksiya kuchining yo’nalishini aniqlashda quyidagidan foydalanishimiz lozim. Bog’lanishdagi jismlarning harakati qaysi tomonga cheklangan bo’lsa, reaksiya kuchi shu yo’nalishga teskari yo’nalgan bo’ladi. Bog’lanishning turlari va bog’lanish reaksiyalari ishqalanish mavjud bo’lmagan bir necha bog’lanishlarda reaksiyalarning yo’nalishlari qanday bo’lishini ko’ramiz.



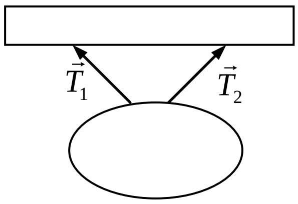
7- shakl.

1. Silliq sirt. Bunday sirt jismga silliq sirt bilan tegib turgan nuqtasidan sirtga o’tkazilgan normal yo’nalishi bo’ylab harakatiga halaqit beradi. Binobarin, reaksiya kuchi $\overline{N}$ silliq sirt bilan jismning tegib turgan nuqtasidan sirtga o’tkazilgan normal bo’ylab yo’nalgan va shu nuqtaga qo’yilgan bo’ladi (7-shakl).

Agar tegib turgan sirtlardan birortasi nuqta bo’lsa, u holda reaksiya kuchi ikkinchi sirtga o’tkazilgan normal bo’ylab yo’nalgan bo’ladi (8-shakl).

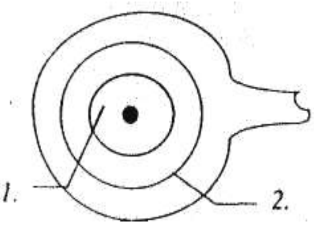


8-shakl



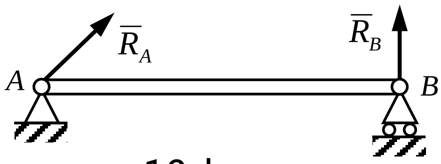
9-shakl

2. Ip (qayish, zanjir, arqon, tros). Agar bog’lanish cho’zil-maydigan ipdan iborat bo’lsa, ip jismning osilish nuqtasidan ip bo’ylab harakatlanishiga chek qo’yadi. Ipning taranglik kuchi ip bo’ylab osilish nuqtasiga tomon yo’naladi (9-shakl).



10-a shakl.

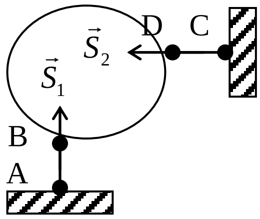
3. Silindrik sharnir (zoldirli g’ildirak-podshipnik). Bolt 1 va kiygizilgan vtulka 2 dan iborat qo’zg’almas silindrik sharnir jism bilan mahkam biriktirilgan vtulkaning ichki diametri bilan barobar (10-a shakl). Jism shakl tekisligiga perpendikulyar bo’lgan sharnir o’qi atrofida aylanishi mumkin. Ammo sharnir o’qiga perpendikulyar yo’nalish bo’yicha harakatlana olmaydi. Shuning uchun silindrik sharnirda reaksiya kuchi, sharnir o’qiga perpendikulyar bo’lgan tekislikda yotib, sharnir o’qini kesib o’tadi.



10-b

Ko’pincha texnikada mustahkam va qo’zg’aluvchan sharnirli tayanchlar uchraydi. 10-b shaklda A mustahkam sharnirli tayanchdir. Bu tayanchda R_A reaksiya kuchi sharnir o’qidan o’tib va unga perpendikulyar tekislikda yotib, ixtiyoriy yo’nalishda bo’ladi. B tayanch sharnirli qo’zg’aluvchan tayanchdir. Bunda R_B reaksiya kuchi qo’zg’aluvchan tayanch tiralib turgan tekislikning normali bo’ylab yo’nalgan bo’ladi.

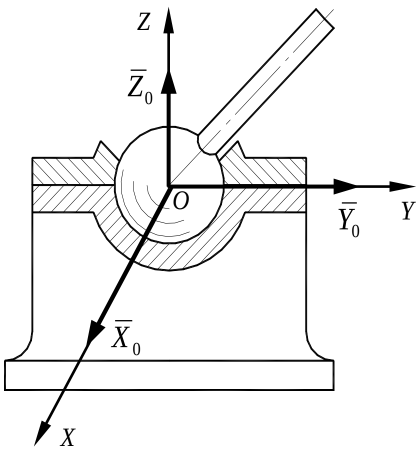
4. Sterjen. Bog’lanish uchlari sharnirlar bilan biriktirilgan AB va CD sterjenlar vositasida bajariladi.



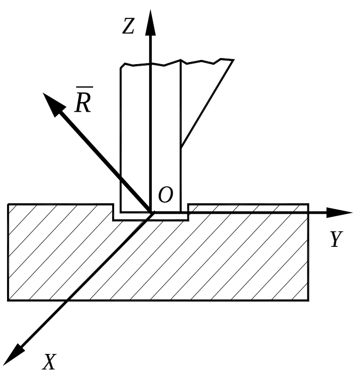
11-shakl

Sterjen og’irliklarini e’tiborga olmay, u sterjenning A va B (C va D) sharnirlariga qo’yilgan ikki kuch ta’sirida muvozanatda bo’ladi. Binobarin reaksiya kuchlari sterjenlarning uchlaridagi, sharnirlardan o’tuvchi o’qlar bo’ylab yo’nalgan bo’ladi (11-shakl).

5. Zoldirli sharnir va tagtovon (podpyatnik). Bu holda jism har qanday harakat qilishi mumkin, faqat sferik sharnirning markazi qo’zg’almas bo’lib qoladi (12- a shakl).



12-a



12-b

Xuddi shunday bog’lanishni siqib tiralib turgan podshipnik (zoldirli g’ildirak) vositasida bajarilganligini ko’rish mumkin, odatda bu tagtovon (podpyatnik) deyiladi (12-b shakl). Fotoapparatlarning shtatividagi zoldirli tutqich, inson va hayvonlarning ko’pgina suyaklarining birlashgan joylari zoldirli sharnirga misol bo’la oladi. Zoldirli (sferik) sharnir va tagtovon (podpyatnik)larda bog’lanish reaksiya kuchlarining yo’nalishi fazoda ixtiyoriy yo’nalishni olishi mumkin.

Statika qismida quyidagi ikki masala hal qilinadi:

1. Jismga ta’sir qilayotgan kuchlar sistemasi unga ekvivalent bo’lgan soddaroq kuchlar sistemasi bilan almashtiriladi.
2. Kuchlar sistemasi ta’siridagi absolyut qattiq jismning muvozanat shartlarining

zarur va yetarliligi tekshiriladi. Bog’lanishdagi jism bog’lanishdan xalos qilinganda erkin jism deb qaraladi. Jism unga ta’sir qilayotgan kuchlar sistemasi va reaksiya kuchlari ta’siridan muvozanatda bo’ladi. Muvozanat tenglamalaridan no’malum reaksiya kuchlari aniqlanadi. Keyinchalik jismga har xil kuchlar sistemasi ta’sir etayotganda statikaning ikki asosiy masalasi yechiladi.

Takrorlash uchun savollar

1. Statika nimani o’rgatadi?
2. Satatikaning asosiy tushunchalari nimalardan iborat?
3. Statikaning asosiy aksiyomalari qanday?
4. Bog’lanishlar deb nimaga aytiladi?
5. Bog’lanish reaksiya kuchi deb nimaga aytiladi?
6. Bog’lanishdan bo’shatish aksiyomasida nima deyiladi?
7. Bog’lanishning qanday turlarini bilasiz?
8. Jism silliq sirtga tayanganda reaksiya kuchi qanday yo’naladi?
9. Sharnirlardagi reaksiya kuchlari qanday yo’naladi?
10. Ip, sterjenlardagi reaksiya kuchlari qanday yo’naladi?
11. Bog’lanishdagi jism erkin jism holatiga qanday keltiriladi?
12. Qotish prinsipi deganda nimani tushunasiz?

Tayanch so’zlar va iboralar:

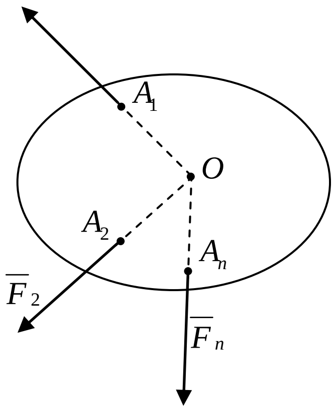
Nazariy mexanika, moddiy nuqta, mexanik sistema, absolyut(mutloq) qattiq jism, erkin va erkin bo’lmagan jism, kuch, kuchlar sistemasi, ekvivalent, teng ta’sir etuvchi kuch, muvozanat, reaksiya kuchi, bo’lanish, sharnir.

2-MA’RUZA. KESISHUVCHI KUCHLAR SISTEMASI

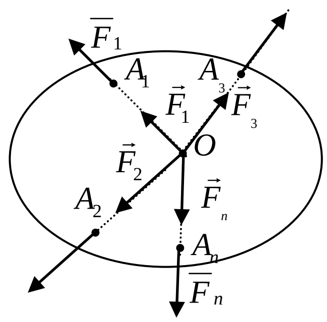
Jismning A_1, A_2,…, A_n nuqtalariga $\overline{F}_1, \overline{F}_2, ..., \overline{F}_n$ kuchlar ta’sir etsin va ularning ta’sir chiziqlari O nuqtada kesishsin.

Ta’sir chiziqlari bir nuqtada kesishuvchi kuchlar sistemasi kesishuvchi kuchlar sistemasi deb aytiladi (13-a shakl).

Kesishuvchi kuchlar sistemasi tekislik (fazo)dagi kesishuvchi kuchlar deyiladi, agar ularning ta’sir chiziqlari bir tekislikda joylashgan (joylashmagan) bo’lsa.
Ularni ta’sir chiziqlari bo’ylab O nuqtaga ko’chirish mumkin bo’lganligi tufayli, kesishuvchi kuchlar sistemasini bir nuqtaga qo’yilgan kuchlar sistemasi bilan almashtiramiz (13-b shakl).



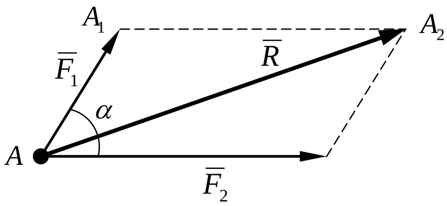
13-a shakl

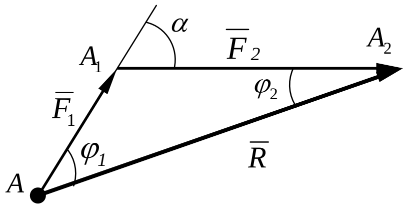


13-b shakl

Kesishuvchi kuchlar sistemasi teng ta’sir etuvchisini geometrik usulda aniqlash

Avvalambor shuni ta’kidlaymizki, parallelogramm aksiomasiga asosan, biror A nuqtaga qo’yilgan ikki kuchning teng ta’sir etuvchisi ularga qurilgan parallelogramm diagonaliga (14-a shakl), yoki parallelogrammning yarmini tashkil etuvchi kuch uchburchagining AA_2 tomoniga teng (14-b shakl). Bu holda $\overline{R}$ vektor ikki $\overline{F}_1$ va $\overline{F}_2$ vektorlarning geometrik yig’indisiga teng, ya’ni $\overline{R} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2$.





14-b shakl

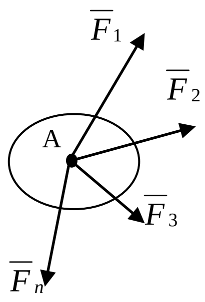
Teng ta’sir etuvchi $\overline{R}$ ni $\overline{F}_1$ va $\overline{F}_2$ kuchlarning yo’nalishlari bilan tashkil qilgan burchaklari φ_1 va φ_2 larni hamda uning miqdorini sinuslar va kosinuslar teoremalaridan foydalanib ΔAA_1A_2 dan aniqlanadi

$$\frac{F_1}{\sin\varphi_2} = \frac{F_2}{\sin\varphi_1} = \frac{R}{\sin\alpha} \qquad (2.1)$$

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\alpha} \qquad (2.2)$$

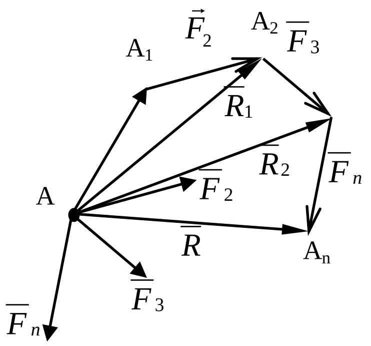
bu yerda, $\alpha -$ $\overline{F}_1$ va $\overline{F}_2$ kuchlarning yo’nalishlari orasidagi burchak.

Aytaylik, A nuqtada kesishuvchi $\overline{F}_1, \overline{F}_2, \ldots, \overline{F}_n$ kuchlarning sistemasi berilgan.(15a-shakl). Birinchi ikki aksiomaning natijasidan foydalanib, bu kuchlar sistemasini A nuqtaga qo'yilgan kuchlar sistemasi bilan almashtiramiz.



15-a shakl

Endi quyidagini qurishni bajaramiz $\overline{F}_1$ kuchining oxiri A_1 dan $\overline{F}_2$ kuch vektoriga teng bo'lgan $\overline{A_1}\overline{A_2}$ vektorni o'tkazamiz, uning oxiridan vektor $\overline{A_2}\overline{A_3} = \overline{F}_3$, uning oxiridan vektor $\overline{A_3}\overline{A_n} = \overline{F}_n$ va hokazo. Hamma kuchlarni qo'ygandan keyin, birinchi kuchning boshi A dan oxirgi kuchining oxiri A_n ga $\overline{AA_n}$ kuch vektorini o'tkazamiz. $A_1A_2...A_n$ ko'pburchakni quramiz, u kuch ko'pburchagi deb ataladi. Kuch ko'pburchagida vektorlar oqimiga qarama-qarshi yo'nalishda bo'lgan $\overline{AA_n}$ vektorga kuch ko'pburchagini yopuvchi tomon deyiladi. Kuch ko'pburchagida shtrixlangan vektor yordamida bo'lingan uchburchaklarni qaraymiz (15b-shakl). Kuch uchburchagini qurish usuliga asosan $\overline{F}_1$ va $\overline{F}_2$ kuchlarning teng ta'sir etuvchisi $\overline{R}_1$, $\overline{AA_2}$ vektor vositasida tasvirlanadi, ya'ni $\overline{R}_1 = \overline{F}_1 + \overline{F}_2$. $\overline{AA_3}$ vektor, $\overline{AA_2}$ va $\overline{F}_3$ kuchlarining teng ta'sir etuvchisi $\overline{R}_2$ ni tasvirlaydi, binobarin, uchta $\overline{F}_1, \overline{F}_2$ va $\overline{F}_3$ kuchlarining teng ta'sir etuvchisidir. Ya'ni, $\overline{R}_2 = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \overline{F}_3$ va hokazo. Hamma uchburchaklarni ko'rib chiqib, quyidagi xulosaga kelamiz. Kuch ko'pburchagini yopuvchi $\overline{AA_n}$ tomoni n-ta kuchning teng ta'sir etuvchisini tasvirlaydi, ya'ni:



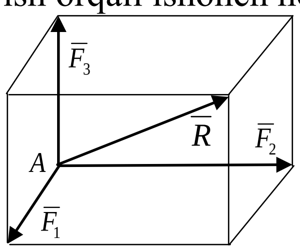
15-b shakl

$$\overline{R} = \overline{F}_1 + \overline{F}_1 + \ldots + \overline{F}_n = \sum \overline{F}_k \qquad (2.3)$$

Shunday qilib kesishuvchi kuchlar sistemasining teng ta'sir etuvchisi, bu kuchlar ustiga qurilgan kuch ko'pburchagining yopuvchi tomoni sifatida geometrik aniqlanar ekan.

Demak, teng ta'sir etuvchi bu kuchlarning geometrik yig'indisiga teng bo'lar ekan. Teng ta'sir etuvchining ta'sir chizig'i kesishuvchi kuchlar sistemasi ta'sir chiziqlarining kesishgan nuqtasidan o'tadi.

Xususiy holda bir tekislikda yotmagan uchta kesishuvchi kuchlar sistemasini ko'raylik (16-shakl). Bu kuchlarning teng ta'sir etuvchisi, kuchlar ustiga qurilgan parallelepipedning diagonali orqali tasvirlanadi (parallelepiped). Da'voimizning haqligiga kuch ko'pburchagini qurish orqali ishonch hosil qilamiz.



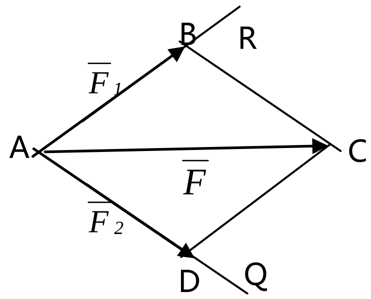
16-shakl

Kuchni tashkil etuvchilarga ajratish

Kuchni kesishuvchi tashkil etuvchi kuchlar sistemasiga ajratish deb, shunday kesishuvchi kuchlar sistemasini topishga aytiladiki, uning teng ta'sir etuvchisi berilgan kuchga teng bo'ladi. Boshqacha qilib aytganda, shunday kuchlar sistemasini topish kerakki, bu kuchlar ustiga qurilgan kuch ko'pburchagining yopuvchi tomoni berilgan kuchga teng bo'ladi. Bir xil yopuvchi tomonga ega bo'lgan har xil kuch ko'pburchaklarini qurish mumkin. Shuning uchun kuchni ta'sir etuvchilarga ajratish masalasini bir qiymatli hal qilish uchun, mumkin bo'lgan tashkil etuvchilar sonini cheklovchi qo'shimcha shartlar berilishi kerak. Tez-tez uchrab turadigan quyidagi ikki holni ko'ramiz:

1. Berilgan $\overline{F}$ kuchni ikkita tashkil etuvchilarga ajratish

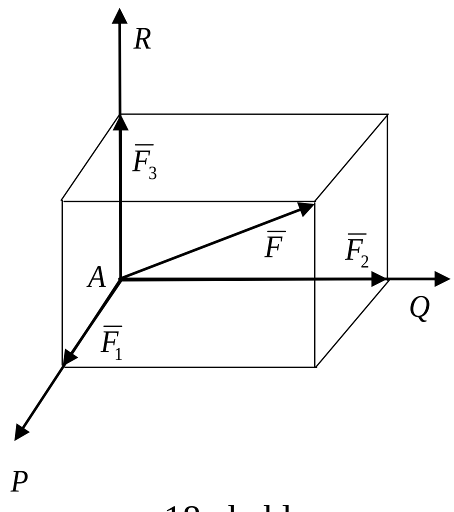
Ularning ta'sir chiziqlarining yo'nalishlari berilgan, AR va AQ $\overline{F}$ kuchi bilan bir tekislikda yotadi. (17-shakl). Buning uchun $\overline{F}$ kuchning oxiridan izlanuvchi kuchlarning ta'sir chiziqlariga parallel qilib to'g'ri chiziqlar o'tkazamiz. Diagonali berilgan $\overline{F}$ kuchi bo'lgan ABCD parallelogramm hosil qilamiz. Uning AB va AD tomonlari izlanuvchi tashkil etuvchi $\overline{F}_1$ va $\overline{F}_2$ kuchlaridir.



17-shakl

2. Berilgan $\overline{F}$ kuchni uchta kesishuvchi tashkil etuvchilarga ajratish

Kuchlarning ta'sir chiziqlarining yo'nalishlari fazoda AP, AQ, AR bo'lgan va $\overline{F}$ kuchi bilan bir tekislikda yotmaydi (18-shakl). Buning uchun shunday parallelepiped qurish yetarliki, uning qirralari, ta'sir yo'nalishlari berilgan izlanuvchi kuchlardir. Diagonali esa berilgan kuchdir, u holda parallelepiped qonuniga asosan $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$, $\overline{F}_3$ kuchlar parallelepiped qirralariga monand bo'lib, kuchning berilgan uchiga yo'nalish b o'yicha tashkil etuvchilaridir.



18-shakl

Masala

Gorizont bilan α burchak tashkil qilgan silliq qiya tekislikda og'irligi $\overline{P}$ bo'lgan jism qiya tekislikka parallel bo'lgan OD ip yordamida muvozanatda tortib turibdi (19-shakl). Ipning taranglik $\overline{T}$ kuchi va jismning qiya tekislikka bo'lgan bosimi aniqlansin.

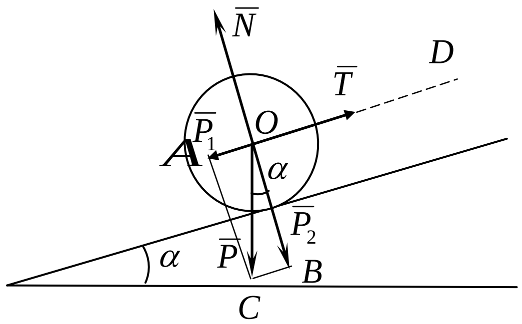
Yechish:

Berilgan $\overline{P}$ kuchni qiya tekislikka parallel va unga perpendikulyar bo'lgan yo'nalishlar bo'yicha $\overline{P_1}$ va $\overline{P_2}$ tashkil etuvchilarga ajratamiz. Buning uchun diagonali $\overline{P}$ kuchiga teng bo'lgan, OA va OB tomonlari tanlab olingan yo'nalishlarga parallel bo'lgan OABC parallelogrammni quramiz. To'g'ri burchakli OBC uchburchakdan quyidagilarni aniqlaymiz:

$$P_1 = P\sin\alpha\,,\ P_2 = P\cos\alpha$$

OD ip bo'ylab yo'nalgan $\overline{P_1}$ tashkil etuvchi ip reaksiya kuchi bilan muvozanatlashadi, ya'ni

$$T = P_1 = P\sin\alpha$$



19-shakl

Qiya tekislikka perpendikulyar bo'lgan $\overline{P_2}$ tashkil etuvchi, izlanayotgan shu tekislikka bo'lgan bosimni ifodalaydi. Shuni ta'kidlaymizki, jismga qo'yilgan qiya tekislikning $\overline{N}$ reaksiya kuchi miqdor jihatidan jismning qiya tekisligiga bo'lgan bosimga teng, ya'ni:

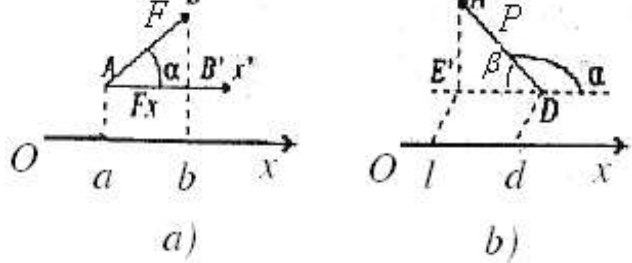
$$N = P_2 = P\cos\alpha\,.$$

Shuning uchun, tayanchga bo'lgan bosimni aniqlasak, unga teng bo'lgan tayanch reaksiya kuchini aniqlagan bo'lamiz.

Kesishuvchi kuchlar sistemasi teng ta'sir etuvchisini analitik usulda aniqlash

1. Kuchning o'qdagi va tekislikdagi proyeksiyasi

Kuchning boshi hamda oxirini biror o'qdagi proyeksiyalari orasiga joylashgan, tegishli ishora bilan olingan, kesma uzunligiga teng bo'lgan skalyar miqdorga kuchning o'qdagi proyeksiyasi deb ataladi (20-shakl).



20-shakl

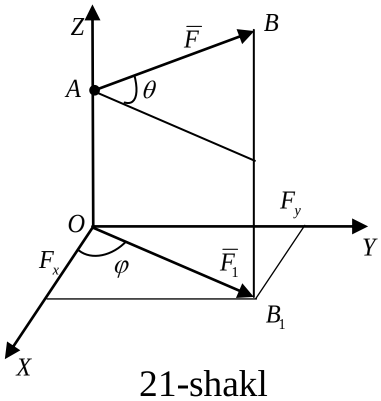
Kuchning o'qdagi proyeksiyasi musbat deb qabul qilinadi, agar proyeksiya boshlanish nuqtasidan oxirga qarab ko'chishi o'qning musbat yo'nalishi bilan hamohang bo'lsa (20-a shakl) va manfiy, agar qarama-qarshi bo'lsa (20-b shakl). Berilgan $\overline{F}$ kuchini OX o'qidagi proyeksiyasini F_x simvol bilan belgilab olamiz. Vektorning yo'nalishlari bir xil bo'lgan ikki parallel o'qlardagi proyeksiyalari o'zaro teng bo'ladi. Agar vektor bilan o'q bir tekislikda yotmasa, undan foydalanish qulaylik tug'diradi. 20b-shakldan quyidagilarni aniqlaymiz:

$$F_x = ab = AB' = F\cos\alpha$$

$$P_x = -dl = -DE' = -P\cos\beta = P\cos\alpha$$

Demak, kuchning o'qdagi proyeksiyasi, kuch miqdori bilan kuchning o'qning musbat yo'nalishi bilan tashkil qilgan burchak kosinusining ko'paytmasiga tengdir. O'qning musbat yo'nalishi bilan (masalan Ox) va $\overline{F}$ kuchi yo'nalishi orasidagi burchakni ($\overline{F}$,^ox) deb belgilaymiz. Burchak ($\overline{F}$,^ox)ning kosinusi, yo'naltiruvchi kosinus deb ataladi. Masalalarni yechishda kuchning proyeksiyasining absolyut qiymatini, kuch miqdorini kuchning ta'sir chizig'i bilan o'q yo'nalishi orasidagi o'tkir burchak kosinusiga ko'paytma shaklida olish tavsiya etiladi. Proyeksiyaning ishorasi to'g'ridan-to'g'ri shakldan olinadi. Berilgan $\overline{F}$ kuchning tekislikdagi proyeksiyasi deb (21-shaklda OXY tekisligi) $\overline{F}$ kuchning boshi va oxirini shu tekislikdagi proyeksiyalari orasidagi $\overline{F}_1$=OB_1 vektorga aytiladi.

Kuchning tekislikdagi proyeksiyasi kuchning o'qdagi proyeksiyasidan farq qiladi, chunki u tekislikda miqdor va yo'nalishga ega bo'lgan vektorli miqdordir. Uning miqdori quyidagiga teng: $F_1 = F\cos\theta$



21-shakl

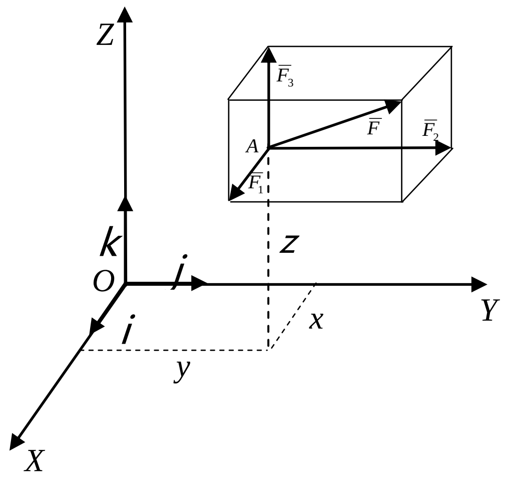
Bu yerda θ – $\overline{F}$ vektor yo'nalishi bilan uning $\overline{F}_1$ proyeksiyasining yo'nalishi orasidagi burchak. Ko'pgina hollarda kuch bilan bir tekislikda yotmagan o'qdagi proyeksiyasini aniqlash uchun avvalo kuchni o'q yotgan tekislikka proyeksiyalab, proyeksiyani shu o'qqa proyeksiyalash kerak (ikki qaytalab proyeksiyalash usuli) masalan, shaklda ko'rsatilgan hol uchun quyidagilarni topamiz:

$$F_x = F_1\cos\varphi = F\cos\theta\cos\varphi$$
$$F_y = F_1\sin\varphi = F\cos\theta\sin\varphi \qquad (2.4)$$

2. Kuchning miqdor va yo'nalishini koordinata o'qlardagi proyeksiyalari orqali aniqlash

Agar $\overline{F}$ kuchning to'g'ri burchakli koordinata o'qlardagi proyeksiyalari berilgan bo'lsa, u holda kuchning miqdori, qirralari kuch proyeksiyalarning absolyut miqdorlariga teng bo'lgan to'g'ri burchakli parallelepipedning diagonali uzunligini hisoblash tariqasida bo'ladi, ya'ni:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} \qquad (2.5)$$



22-shakl

Kuchning yo’nalishi yo’naltiruvchi kosinuslar orqali quyidagicha aniqlanadi.

$$\cos(\overline{F},\ ^{\wedge}x)=\frac{F_x}{F}$$
$$\cos(\overline{F},\ ^{\wedge}y)=\frac{F_y}{F} \qquad (2.6)$$
$$\cos(\overline{F},\ ^{\wedge}z)=\frac{F_z}{F}$$

Ma’lumki F kuchning to’liq berilishi uchun F_x, F_y, F_z ning proyeksiyalaridan tashqari uning qo’yilish nuqtasining koordinatalarini bilish kerak. Bunday usulga analitik usul deyiladi. 22-shakldan parallelepiped qoidasini e’tiborga olib, koordinata o’qlarining i, j, k birlik vektorlaridan foydalanib, $\overline{F}$ kuchni quyidagi yig’indi shaklida tasvirlash mumkin.

$$\vec{F}=F_x\cdot\vec{i}+F_y\cdot\vec{j}+F_z\cdot\vec{k} \quad \text{yoki} \quad \vec{F}=\vec{F}_1+\vec{F}_2+\vec{F}_3$$
$$\overline{F}_1=F_x\cdot\overline{i},\ \ \overline{F}_2=F_y\cdot\overline{j},\ \ \overline{F}_3=F_z\cdot\overline{k} \qquad (2.7)$$

bu yerda F_1, F_2, F_3 – kuchning koordinata o’qlari bo’ylab tashkil etuvchilaridir. Yuqoridagi tenglama kuchning koordinata o’qlari bo’ylab tashkil etuvchilarni tasvirlovchi formuladir.

3. Teng ta’sir etuvchini analitik usulda aniqlash

Geometriyadan ma’lumki, vektorlar yig’indisining biror o’qdagi proyeksiyasi tashkil etuvchi vektorlarning shu o’qdagi proyeksiyalarining algebraik yig’indisiga teng bo’ladi. Shunga asosan (2.3)dan quyidagini topamiz:

$$R_x=\sum_{k=1}^{n}F_{kx}\,;\quad R_y=\sum_{k=1}^{n}F_{ky}\,;\quad R_z=\sum_{k=1}^{n}F_{kz} \qquad (2.8)$$

Shunday qilib, kesishuvchi kuchlar sistemasinnpg to’g’ri burchakli koordinata sistemasi o’qlaridagi proyeksiyalari F_{kx}, F_{ky}, F_{kz} (k=1, 2,…n) berilgan bo’lsa, u holda teng ta’sir etuvchining proyeksiyalari R_x, R_y, R_z (2.8) formula yordamida aniqlanadi. Keyin (2.5) va (2.6) formulalar yordamida teng ta’sir etuvchining miqdori, yo’nalishlari aniqlanadi.

$$R=\sqrt{R_x^2+R_y^2+R_z^2}\ ,$$

$$\cos(\overline{R}, \hat{ox}) = \frac{R_x}{R}$$
$$\cos(\overline{R}, \hat{oy}) = \frac{R_y}{R} \qquad (2.9)$$
$$\cos(\overline{R}, \hat{oz}) = \frac{R_z}{R}$$

Kesishuvchi kuchlar sistemasining geometrik va analitik muvozanat shartlari

Kesishuvchi kuchlar sistemasiga qo'yilgan shart bajarilsa va ularning teng ta'sir etuvchisi $R=0$ bo'lsa, u holda bu shartga kesishuvchi kuchlar sistemasining muvozanat sharti deyiladi.

1. Muvozanatning geometrik sharti. Ma'lumki, kesishuvchi kuchlarga qurilgan kuch ko'pburchagi yopiq bo'lganda, faqat shu holdagina $\overline{R}=0$ bo'ladi. Kesishuvchi kuchlar sistemasi muvozanatda bo'lishi uchun, kuch ko'pburchagining yopiq bo'lishi zarur va yetarlidir.

2. Muvozanatning analitik sharti. Agar $R=0$ bo'lsa, u holda $R_x=0, R_y=0, R_z=0$ u holda (2.8)ga asosan quyidagini olamiz:

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0, \ \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0, \ \sum_{k=1}^{n} F_{kz} = 0 \qquad (2.10)$$

Teskarisi, agar (2.10) shart bajarilsa, u holda R=0 bo'ladi. Binobarin kesishuvchi kuchlar muvozanatda bo'lishi uchun, ularning uchta koordinata o'qlardagi proyeksiyalarining yig'indisi alohida-alohida nolga teng bo'lishi zarur va yetarlidir. Agar kesishuvchi kuchlar sistemasi tekislikda joylashgan bo'lsa, u holda Ox va Oy o'qlarini shu tekislikda olib, quyidagi muvozanat shartini yozamiz.

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0, \ \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0 \qquad (2.11)$$

Agar (2.10) va (2.11) shartlarda noma'lum reaksiya kuchlari qatnashsa va ularni aniqlashni taqozo qilsa, u holda bu shartlar muvozanat tengdamalari deb ataladi.

Takrorlash uchun savollar

1. Kesishuvchi kuchlar sistemasi qanday kuchlardan tashkil topgan?
2. Kuch ko'pburchagi deb qanday ko'pburchakka aytiladi?
3. Kesishuvchi kuchlar sistemasining teng ta'sir etuvchisi geomitrik usulda qanday aniqlanadi?
4. Kuchni qanday tashkil etuvchilarga ajratish mumkin?
5. Kuchning o'qdagi proyeksiyasi qanday aniqlanadi?
6. Kuchning tekislikdagi proyeksiyasi qanday hisoblanadi va u qanday kattalik?
7. Teng ta'sir etuvchini analitik usulda qanday aniqlanadi?
8. Kesishuvchi kuchlar sistemasi geometrik muvozanat sharti qanday?
9. Kesishuvchi kuchlar sistemasi analitik muvozanat sharti qanday?
10. Uch kuch muvozanati haqidagi teoremani isbotlang.

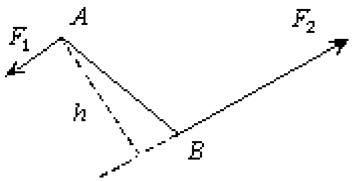
Tayanch so'zlar va iboralar:

Kesishuvchi kuchlar, teng ta’sir etuvchi kuch, kuch ko’pburchagi, kuch uchburchagi, kuchni tashkil etuvchilari, kuchni o’qqa proeksiyasi, muvozanat.

3-MA’RUZA. JUFT KUCHLAR VA JUFT KUCHLAR MOMENTI.

Jismning ikki nuqtasiga qo’yilgan miqdor jihatidan teng va qarama-qarshi yo’nalgan ikkita parallel kuch juft kuch deyiladi.

Kuch o’z ta’sir chizig’iga ega bo’lganidek juft kuchlar o’z ta’sir tekisligiga egdir. Juft kuchlar yotgan tekislikka juft kuchlar ta’sir tekisligidir. Juft kuchlar orasidagi eng qisqa masofa *h* kuchlarni yelkasidir.



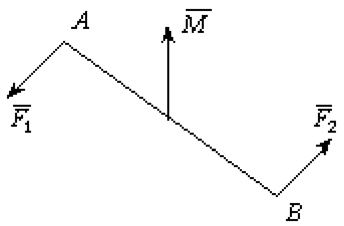
20-shakl

Juft kuchlarni odatda ($\bar{F}_1$, $\bar{F}_2$) deb belgilanadi Juft kuchlarni bir-biri bilan juft yelkasini ko’paytmasidan iborat kattalik juftni algebraik momenti deyiladi. (20-shakl)

Agar juftni algebraik momentini M yoki M($\bar{F}_1\bar{F}_2$) deb belgilasak u quyidagiga teng bo’ladi.

$$M=M(\bar{F}_1\bar{F}_2)=\pm hF_1=\pm F_2, \qquad (3.1)$$

Jismga qo’yilgan juft kuch ta’sir tekisligiga, juft momentiga va juft kuchlar yo’nalishiga ega. Juft kuchlarni bu xususiyatini bitta vektor kattalik: juft kuchlar momenti vektori orqali ifodalash mumkin. Bu vektor shunday vektorki uning miqdori juft kuchlari birini juft yelkasiga ko’paytmasiga teng bo’lib, uning uchidan qaraganimizda juft jismni soat millari yo’nalishiga teskari ravishda aylantiradi. (21-shakl).



21-shakl

Bizga ma’lumki, $M=\pm hF$ bundan $h=r\cdot sin(\bar{F},\bar{r})$

$M=Fr\cdot sin(\bar{F},\wedge\bar{r})$

$\overline{AB}=\bar{r}$, shuning uchun

$$\bar{M}=\bar{r}\cdot\bar{F} \qquad (3.2)$$

Juft moment erkin vektordir. Uni juft tekisligini ixtiyoriy nuqtasiga qo’yish mumkin. Agar ikkita juft momentlari teng bo’lsa ekvivalent juftlar deyiladi.

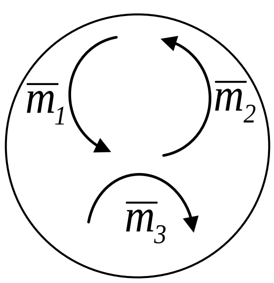
JUFT KUCHLARNI QO’SHISH

Teorema:

Tekislikda ixtiyoriy joylashgan juftlarni, momenti berilgan juftlar momentlarining algebraik yig’indisiga teng bo’lgan bitta juft bilan almashtirish mumkin.

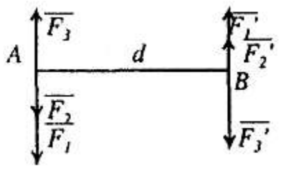
Isbot:

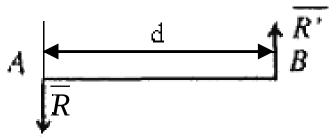
Tekislikda momentlari m_1, m_2, m_3 bo’lgan 3 ta juft joylashgan (22-shakl).



22-shakl

Juftlarning ta’sir tekisligida ixtiyoriy AB kesmani, berilgan juftlar uchun umumiy yelka uchun tanlab olamiz (23a-shakl) momentlari m_1, m_2, m_3 bo’lgan juftlarni, momentlari berilgan juftlarni momentlariga teng bo’lgan ($\overline{F}, \overline{F}'$), ($\overline{F}_2, \overline{F}_2'$), ($\overline{F}_3, \overline{F}_3'$) juftlar bilan almashtiramiz, ya’ni $m_1 = F_1 \cdot d,\ m_2 = F_2 \cdot d,\ m_3 = F_3 \cdot d.$





23-*a* shakl 23-*b* shakl

A nuqtaga qo’yilgan kuchlarni bitta kuch $\overline{R} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \overline{F}_3$ bilan almashtiramiz. B nuqtaga qo’yilgan kuchlarni bitta kuch $\overline{R}' = \overline{F}_1' + \overline{F}_2' + \overline{F}_3'$ bilan almashtiramiz. Boshqacha aytganda ($\overline{R}, \overline{R}'$) kuchlar sistemasi berilgan juftlarga teng ta’sir etuvchi juftidir (23-*b* shakl). Teng ta’sir etuvchi juftning momenti quyidagiga teng bo’ladi

$$M = R_1 d = (F_1 + F_2 - F_3)d = F_1 \cdot d + F_2 \cdot d + (-F_3 \cdot d)$$

yoki $M=m_1+m_2+m_3$, teorema isbotlandi. Xuddi shunday ixtiyoriy sondagi juftlar uchun quyidagini yozish mumkin,

$$M = \sum_{k=1}^{n} m_k \qquad (3.3)$$

4. Juftlarning muvozanat sharti

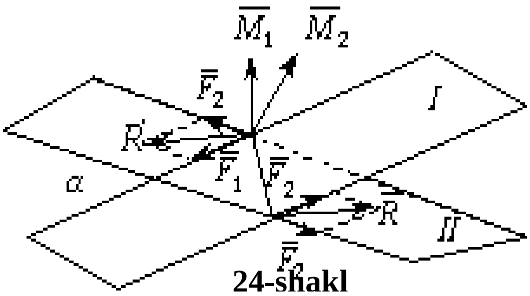
Bir tekislikda ixtiyoriy joylashgan juftlar muvozanatda bo’lsin. Hamma juftlarni bitta juft bilan almashtirib, muvozanat mavjud bo’lishi uchun yoki R=0 yoki d=0 bo’lishi kerak degan xulosaga kelamiz. U holda R·d=0, ya’ni juft momenti M=0. Bu yerdan ko’rinadiki, (3.3) formulaga asosan

$$\sum_{k=1}^{n} m_k = 0 \qquad (3.4)$$

Demak, bir tekislikda ixtiyoriy joylashgan juftlar sistemasi muvozanatda bo’lsa, ular momentlarining algebraik yig’indisi 0 ga teng bo’ladi. Bu xulosaning teskarisi ham o’rinlidir. Ya’ni bir tekislikda ixtiyoriy joylashgan juftlar momentlarning algebraik yig’indisi nolga teng bo’lsa, bu juftlar sistemasi muvozanatda bo’ladi. Haqiqatan ham agar $\sum m_k = 0$ bo’lsa, u holda M=R·d=0. Bu yerdan R=0 yoki d=0 bo’lishi mumkin. Har ikkala holda ham sistema muvozanatda bo’ladi. Demak (3.4) tenglik juftlar sistemasi muvozanatining zarur va yetarli shartini ifodalaydi.

Bir-biri bilan α burchak tashkil etuvchi ikkita kesishuvchi tekisliklar olamiz. I tekislikda yotuvchi juft kuchini $\overline{M}_1$ va II tekislikda yotuvchi juftni moment $\overline{M}_2$ bo’lsin: *$M_1=F_1 \cdot AB$; $M_2=F_2 \cdot AB$.*

A nuqtaga va B nuqtaga qo’yilgan kuchlarni qo’shsak: $\overline{R} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2$ hamda $\overline{R}' = \overline{F}_1' + \overline{F}_2'$ (24-shakl).



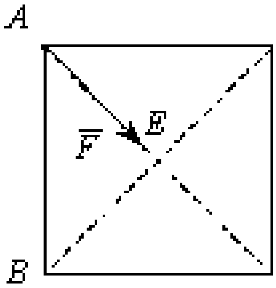
24-shakl

Natijada ikkita kuchlar parallelogrammi hosil bo’ladi. Bu parallelogrammlar teng bo’lgani uchun ularni dioganallari ham teng. Provarida ikkita juftni qo’shishi natijasida bitta juft hosil bo’ladi. Bu juftni $\overline{M}$ momentini topamiz. $\overline{M}$ moment $\overline{M}_1$ va $\overline{M}_2$ momentlardan qurilgan parallelogramm dioganaliga teng: $\overline{M} = \overline{M}_1 + \overline{M}_2$

yoki $\overline{M} = \overline{R} \times \overline{AB}$. *n* dan *n+1* ni isbotlash usuli orqali har qanday songa ega bo'lgan *n* ta juft kuchlarning momentini topish mumkin:

$$\overline{M} = \overline{M}_1 + \overline{M}_2 + ... + \overline{M}_n = \sum_{k=1}^{n} \overline{M}_k \qquad (3.5)$$

Agar jism unga ta'sir etuvchi juft kuchlar ta'sirida muvozanatda bo'lsa u holda bu juft kuchlarning momentlari yig'indisi nolьga teng bo'lishi etarli va zarurdir. ya'ni:

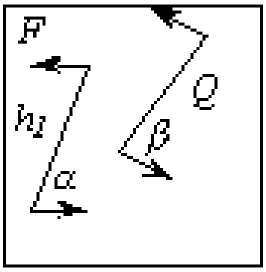


$$\overline{M} = \sum_{k=1}^{n} \overline{M}_K = 0 \qquad (3.6)$$

Masala. Tomonlari *0,2 m* ga teng bo'lgan kvadrat plastinkani *A* uchiga *F=150 N* kuch qo'yilgan. Bu kuchni *V* nuqtaga nisbatan momentini toping.

Masalani yechish.

$$M_B\left(\overline{F}\right) = -BE \cdot F$$



$$BE = \frac{1}{2}\sqrt{(AB)^2 + (AB)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{(0{,}2)^2 + (0{,}2)^2} = 0{,}1\sqrt{2} = 0{,}1414 \ м$$

Masala.

Plitaga uning tekisligiga ikkita juft kuch qo'yilgan.

Agar

$F = 8H, \ Q = 5H, \ AB = 0{,}25 \ м, \ CD = 0{,}20H, \ \alpha = 60^\circ, \ \beta = 70^\circ$

bo'lsa, juft kuchlar momentlarini yig'indisini toping.

$$M_1 = h_1 \cdot F = AB \sin\alpha \cdot F = 0{,}25\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 8 = 1{,}732 \ н \cdot м$$

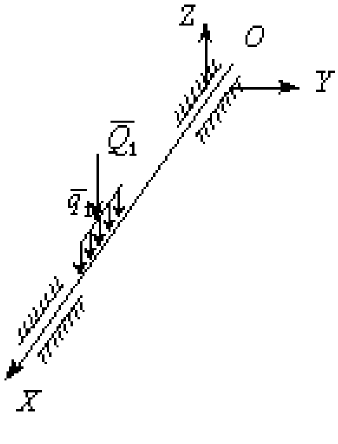
$$M_2 = -h_2 \cdot Q = -DC \cdot Q \sin\beta = 0{,}20 \cdot \sin 75 \cdot 5 = 0{,}9 \ н \cdot м$$

$$M = M_1 - M_2 = 0{,}7924 \ н \cdot м$$

Masala.

Agar $M_0\left(\overline{F}\right) = \bar{i} - \bar{j} + 2K$ berilgan bo'lsa, $\overline{F}$ kuchini *O* nuqtaga nisbatan momentini miqdorini topamiz.

Masalani yechish.



$$M_0\left(\overline{F}\right) = M_{0X}\left(\overline{F}\right)\bar{i} + M_{0Y}\left(\overline{F}\right)\bar{j} + M_{0Z}\left(\overline{F}\right)\overline{K}$$

Buni nazarda tutsak,

$$M_{OX}\left(\overline{F}\right) = 1, \ M_{OY}\left(\overline{F}\right) = -1, \ M_{OZ}\left(\overline{F}\right) = 2$$

Demak,

$$\left|\overline{M}_O\left(\overline{F}\right)\right| = \sqrt{M_{OX}^2 + M_{OY}^2 + M_{OZ}^2} = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6} = 2{,}45 \ н \cdot м$$

Masala.

Agar $\bar{q} \parallel OZ$ bo'lsa, yoyilgan kuchlarni *OU* o'qqa nisbatan momentini toping.

Berilgan: $q = 3 \ н \cdot м, \ OA = 2 \ м, \ AB = 3 \ м$

Masalani yechish.

Yoyilgan kuchni to'plangan kuchga aylantiramiz: $Q = AB$, $q = 3 \cdot 3 = 9\, H$.
Q kuchi AV ni o'rtasiga qo'yilgan bo'ladi.

$$M_Y(Q) = \left(OA + \frac{AB}{2}\right) \cdot Q = \left(2 + \frac{3}{2}\right) Q = 3{,}5 \cdot 9 = 31{,}5 \;\; н \cdot м$$

Takrorlash uchun savollar

1. Juft kuch deb nimaga aytiladi?
2. Juft kuch momenti qanday hisoblanadi?
3. Qanday juft kuchlar ekvivalent bo'ladi?
4. Tekislikdagi juft kuchlarni qanday qo'shish mumkin?
5. Tekislikdagi juft kuchlarning muvozanat shartlari qanday?

Tayanch so'zlar va iboralar:

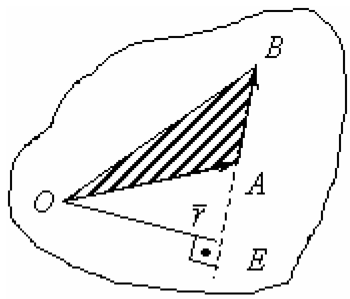
Juft kuch, juft kuch momenti, juftlarni ekvivalentligi, muvozanat, teng ta'sir etuvchi.

4-MA'RUZA. TEKISLIKDA IXTIYORIY JOYLASHGAN KUCHLAR SISTEMASI.

Kuchning nuqtaga nisbatan momenti

Kuchning biror nuqtaga nisbatan algebraik momenti deb, kuch yelkasi bilan kuch miqdorini ko'paytmasidan iborat bo'lgan kattalikka aytiladi.

Moment markazi (0) nuqtadan kuchni ta'sir chizig'iga o'tkazilgan perpendikulyar masofa OE=h kuch yelkasi deyiladi. (25-shakl).



25-shakl

Agar $\overline{F}$ kuchini O nuqtaga nisbatan momentini $M_0(\overline{F})$ deb belgilasak,

$$M_0(\overline{F}) = \pm hF \qquad (4.1)$$

Agar *0* nuqtadan qaraganimizda kuch jismni soat mili yo'nalishiga teskari aylantirsa moment ishorasi musbat, aksincha manfiy bo'ladi.

Uning o'lchovi birligi N·m. Algebraik momentning miqdori kuchning ta'sir chizig'i bo'yicha ko'chirganiga bog'liq emas.

Agar kuchning ta'sir chizig'i O nuqtadan o'tsa, kuchning algebraik momenti nolga teng: 25-shakldan

$$M_0(\overline{F}) = \pm 2S_{OAB} \qquad (4.2)$$

S_{OAB}-uchburchak OAB ning yuziga teng.

Tekislikda ixtiyoriy joylashgan kuchning nuqtaga nisbatan momenti vectori

O nuqtaga nisbatan kuchning algebraik momenti:

$$M_0(\overline{F})=hF \tag{4.3}$$

Agar $\bar{r}$, *A* nuqtani radius vektori bo'lsa, 25-shakldan.

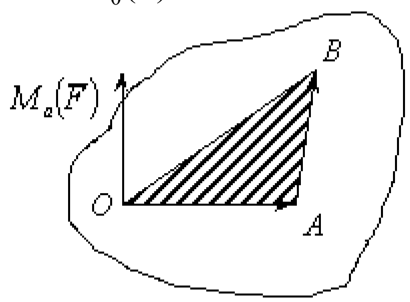
$$h=rSin(\overline{F}\,\hat{}\,\bar{r}) \tag{4.4}$$

(4.4.) ni (4.3) ga qo'ysak,

$$M_0(\overline{F})=F\cdot r\cdot Sin(\overline{F}\,\hat{}\,\bar{r}) \tag{4.5}$$

Vektorlar qoidasiga asosan (4.5) ni quyidagicha yozamiz:

$$\overline{M}_0(\overline{F})=\bar{r}x\overline{F} \tag{4.6}$$



26-shakl

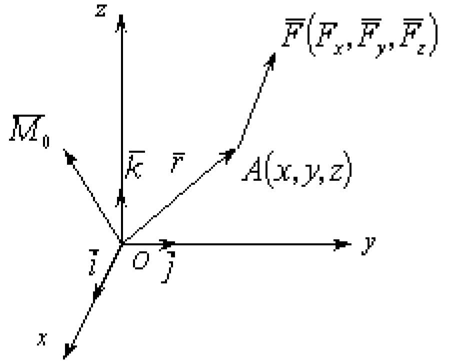
$\overline{M}_0(\overline{F})=\bar{r}x\overline{F}$ vektori $\overline{F}$ kuchni O nuqtaga nisbatan momenti vektori deyiladi. (26-shakl).

Demak, kuchning biror nuqtaga nisbatan momenti vektori deb shunday vektorga aytiladiki, bu vektor shu nuqtaga qo'yilgan bo'lib uning miqdori kuchning nuqtaga nisbatan algebraik momentiga teng bo'ladi. Kuchning nuqtaga nisbatan momenti vektori kuch bilan nuqta yotgan tekislikka prependikulyar bo'lib, uning uchidan qaraganda jism soat mili yo'nalishiga teskari ravishda aylanadi. Agar $\overline{F}$ kuchni nol nuqtaga nisbatan momenti vektorini miqdorini $M_0(\overline{F})$ deb belgilasak $M_0(\overline{F})=F\cdot h$ bo'ladi. $|M_0(\overline{F})|=Fh\cdot 2Soab$

Agar $\overline{F}$ kuchning dekart koordinata sistemasidagi proeksiyalari F_x, F_y, F_z hamda u quyilgan nuqtaning *x, y* va *z* koordinatalari berilgan bo'lsa (4.6) ni quyidagicha yozamiz:

$$\overline{M}_0(\overline{F})=\bar{r}x\overline{F}=\begin{vmatrix}\bar{i},\bar{j},\bar{k}\\ x,y,z\\ F_x,F_y,F_z\end{vmatrix}=(yF_z-ZF_y)\bar{i}+(zF_x-xF_z)\bar{j}+(xF_y-yF_x)\bar{k} \tag{4.7}$$

$\bar{i},\bar{j}$ va $\bar{k}$ lar birlik vektorlar.(27-shakl).



Belgilashlar kiritamiz:

$M_{0x}(F)=yF_z\text{-}zF_y$; $M_{0y}(F)=zF_x\text{-}xF_z$;

$$M_{0z}(F)=xF_y\text{-}yF_x \tag{4.8}$$

$\overline{M}_0(\overline{F})$ ning miqdori quyidagicha aniqlanadi:

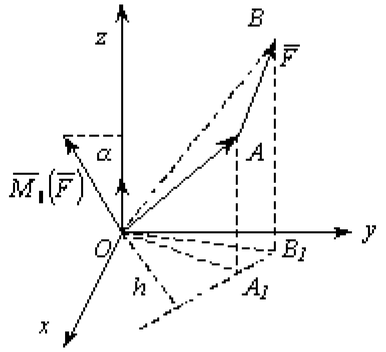
$$\left|\overline{M}_0(\overline{F})\right|=\sqrt{M_{ox}^2+M_{oy}^2+M_{oz}^2} \tag{4.9}$$

Uning yo'nalishi kosinuslar qoidastga asosan topiladi:

$$\cos(\overline{M}_0\hat{\ }x)=\frac{Mox}{|\overline{M}_0(\overline{F})|};\ \cos(\overline{M}_0\hat{\ }y)=\frac{Moy}{|\overline{M}_0(\overline{F})|};\ \cos(\overline{M}_0\hat{\ }z)=\frac{Moz}{|\overline{M}_0(\overline{F})|}$$

(4.10)

Endi kuchning tekislikdagi proeksiyasi teshenchasini kiritamiz. Aytaylik $\overline{F}$ kuchi va tekislik berilgan bo’lsin. Kuchning boshi va ohiridan bu tekislikka perpendikulyar to’g’ri chiziqlar o’tkazamiz, uholda $\overline{F}$ kuchni *XOU* tekislikdagi proeksiyasi $\overline{F}_{XY}$ deb belgilanadi. Uning *O* nuqtaga nisbatan momenti



28-shakl

$$M_0(F_{xy})=(xF_y-yF_x)\ \overline{K} \qquad (4.11)$$

bo’ladi. Bunda $Z=0,\ F_z=0$

Shunday qilib $\overline{M}_0\ (\overline{F}_{xu})$ momenti vektori z o’qi bilan bo’ylab yo’nalgan bo’ladi va uning z o’qidagi proeksiyasi, $\overline{F}$ kuchning *O* nuqtaga nisbatan momenti vektorining z o’kidagi proeksiyasi bilan ustma-ust tushadi. Agar kuchning *OX, OU* va *OZ* o’qiga nisbatan momentlarini $M_x(\overline{F})$, $M_y(\overline{F})$ va $M_z(\overline{F})$ desak, $M_x(\overline{F})=M_{ox}(\overline{F})$, $M_y(\overline{F})=M_{oy}(\overline{F})$, $M_z(\overline{F})=M_{oz}(\overline{F})$ bo’ladi.

$$|\overline{M}_0(\overline{F})|=M_{0z}(\overline{F})=M_{oz}(\overline{F}_{xy})=xF_y-yF_x \qquad (4.12)$$

yoki $M_z(\overline{F})=|\overline{M}_0(\overline{F})|\cos\alpha$

Kuchning biror o’qqa nisbatan momenti kuchning shu o’qda yotuvchi nuqtaga nisbatan momenti vektorlarini mazkur o’qdagi proeksiyasiga teng.

(4.12) dan quyidagi natija chiqadi:

1. *Agar kuchning yelkasi h=0 bo’lsa, kuchning o’qqa nisbatan momenti 0 ga teng.*
2. *Agar kuch o’qqa parallel bo’lsa, kuchning o’qqa nisbatan momenti 0 ga teng bo’ladi.*
3. *Agar kuchning ta’siri chizig’i o’qni kesib o’tsa, kuchning o’qqa nisbatan momnti 0 ga teng bo’ladi(h=0).*

Tekislikda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasini bir markazga keltirish

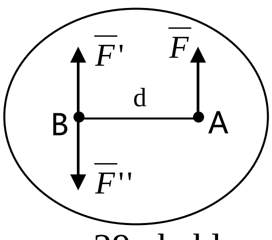
1. Kuchni o’ziga parallel ixtiyoriy nuqtaga ko’chirishga oid teorema.

Teorema:

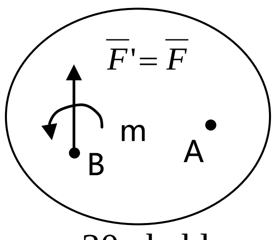
Absolyut qattiq jismning biror nuqtasiga qo’yilgan kuchni jismga ta’sirini o’zgartirmay o’ziga parallel ravishda boshqa ixtiyoriy nuqtaga keltirish, momenti berilgan kuchdan keltirish nuqtasiga nisbatan olingan kuch momentiga teng bo’lgan juft qo’shishni taqozo qiladi.

Isbot:

Jismning biror A nuqtasiga F kuch qo’yilgan bo’lsin.



29-shakl



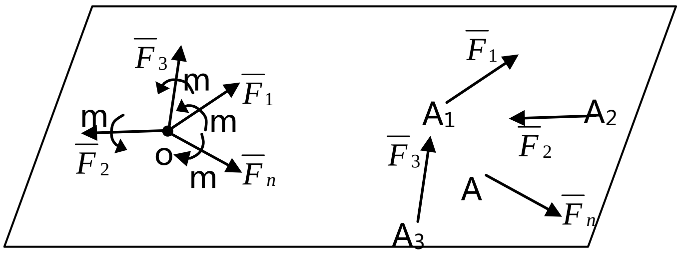
30-shakl

Jismning ixtiyoriy B nuqtasiga (AB=d) tashkil etuvchilari F' va F'' miqdor jihatidan F kuchga teng bo'lgan ya'ni $F'=F''=F$ nolli sistemani kuchga parallel ravishda qo'yamiz (29-shakl). Hosil bo'lgan uchta kuchdan ($\overline{F}, \overline{F}', \overline{F}''$) iborat bo'lgan sistema berilgan F kuchga ekvivalentdir. Bu sistemani F kuch va ($\overline{F}, \overline{F}''$) juftdan tashkil topgan deb qarash mumkin. Binobarin A nuqtaga qo'yilgan F kuchi, B nuqtaga qo'yilgan shunday F' kuchiga va ($\overline{F}, \overline{F}''$) juftga ekvivalentdir. Juft ($\overline{F}, \overline{F}''$) ni qo'shilgan juft deb ataladi. Uning momentini aniqlaymiz $\overline{m}(\overline{F}, \overline{F}'') = F \cdot d = m_B(\overline{F})$.

Binobarin qo'yilgan juftning momenti A nuqtaga qo'yilgan F kuchdan, ko'chirish zarur bo'lgan B nuqtaga nisbatan momentga teng bo'ladi. Bu teoremaning tafsiloti 29 va 30-shakllarda tasvirlangan.

2. Tekislikda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasini bir markazga keltirish

Bosh vektor va bosh moment. Qattiq jismga tekislikda ixtiyoriy joylashgan $\overline{F}_1, \overline{F}_2, ..., \overline{F}_n$ kuchlar sistemasi ta'sir qilsin.



31-shakl

Tekislikda keltirish markazi deb ataluvchi ixtiyoriy O nuqtani olib, momentlari m_1, m_2, m_n bo'lgan qo'shilgan juftlarni qo'shib, hamma kuchlarni shu markazga keltiramiz, (31-shakl). Demak ($\overline{F}_1, \overline{F}_2, ..., \overline{F}_n$). Kuchlar sistemasi O nuqtaga qo'yilgan $\overline{F}_1', \overline{F}_2', ..., \overline{F}_n'$ kuchlar sistemasiga va bir tekislikda joylashgan momentlari

$$m_1 = m_0(\overline{F}_1),\ m_2 = m_0(\overline{F}_2)...m_n = m_0(\overline{F}_n) \qquad (4.13)$$

bo'lgan juftlar sistemasiga ekvivalent bo'ladi.

O nuqtaga qo'yilgan kuchlarni qo'shib, ularni bitta kuch bilan almashtiramiz.

$$\overline{R}' = \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k \qquad (4.14)$$

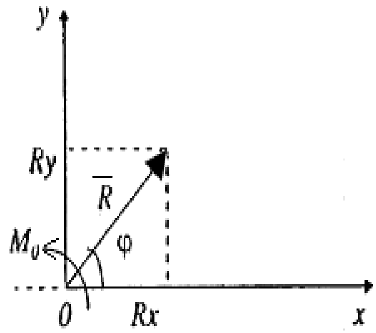
Modomiki $\overline{F}_k' = \overline{F}_k$, u holda $\overline{R}' = \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k$ kattalik berilgan kuchlar sistemasining bosh vektori deb ataladi. Binobarin tekislikda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasini bosh vektori berilgan kuchlarning geometrik yig'indisiga teng ekan. Tekislikda joylashgan qo'shilgan juftlarni jamlab, momenti $M_0=m_1+m_2+…+m_n$ bo'lgan bitta juft bilan almashtiramiz. Formula (4.13)ni e'tiborga olib, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$M_0 = m_0(\overline{F}_1) + m_0(\overline{F}_2) + ... + m_0(\overline{F}_n)$$

yoki

$$M_0 = \sum_{k=1}^{n} m_0(\overline{F}_k) \qquad (4.15)$$

Moment M_o berilgan kuchlar sistemasining O keltirish markaziga nisbatan bosh momenti deb ataladi. Demak, tekislikda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasini biror markazga nisbatan bosh momenti berilgan sistemaning kuchlaridan keltirish markaziga nisbatan olingan momentlarning algebraik yig'indisiga teng. Olingan natijani quyidagi teorema shaklida keltirish mumkin. Tekislikda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasini umumiy holda, sistemaning bosh vektoriga teng bo'lgan va qandaydir O nuqtaga qo'yilgan bitta kuch va shu tekislikda yotuvchi momenti berilgan kuchlar sistemasining shu nuqtaga nisbatan bosh momentiga teng bo'lgan bitta juft bilan almashtirish mumkin (32-shakl).



32-shakl

Bosh vektor R' ni miqdor va yo'nalishini analitik aniqlash. Koordinata sistemasi boshini keltirish markazi O nuqtada olib (32-shakl) OX va OY o'qlarini o'tkazib, R' ning miqdorini quyidagi formula yordamida aniqlaymiz.

$$R' = \sqrt{(R'_x)^2 + (R'_y)^2} \qquad (4.16)$$

Bu yerda R'_x va R'_y bosh vektor R' ning koordinata o'qlaridagi proyeksiyalaridir (4.14). Tenglikni koordinata o'qlariga proyeksiyalab, quyidagini olamiz:

$$R'_x = \sum_{k=1}^{n} F_{kx}, \quad R'_y = \sum_{k=1}^{n} F_{ky} \qquad (4.17)$$

Ya'ni kuchlar sistemasi bosh vektorining koordinata o'qlaridagi proyeksiyalari, kuchlarning shu o'qlardagi proyeksiyalarining algebraik yig'indisiga tengdir. Formula (3.16)ga R'_x, R'_y larning qiymatlarini (3.17) formuladan keltirib qo'yib, quyidagini olamiz

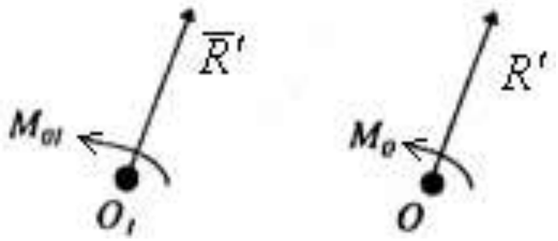
$$R' = \sqrt{(\sum_{k=1}^{n} F_{kx})^2 + (\sum_{k=1}^{n} F_{ky})^2} \qquad (4.18)$$

Bosh vektor R' ning yo'nalishi, uni OX o'qi bilan tashkil qilgan φ burchagi orqali quyidagicha aniqlanadi

$$tg\varphi = \frac{R'_y}{R'_x} \qquad (4.19)$$

Shuni ta'kidlaymizki, bosh vektor R' keltirish markazini o'zgartirish bilan o'zgarmaydi, chunki berilgan kuchlar sistemasining miqdor va yo'nalishlari o'zgarmas qoladi.

Keltirish markazi o'zgarishi bilan bosh momentning o'zgarishi. Berilgan (F_1, F_2,..,F_n) kuchlar sistemasini bir O markazga keltirib, O nuqtaga qo'yilgan R' kuchni va momenti M_o bo'lgan juftni olamiz (33-shak).



33-shakl

Keltirish markazi uchun boshqa O_1 nuqtani olamiz va bu nuqtaga nisbatan bosh momentni M_{o1} deb belgilaymiz, R' kuchni O nuqtadan O_1 nuqtaga ko'chirish uchun momenti O_1 nuqtaga qo'yilgan R' kuchdan O_1 nuqtaga nisbatan olingan kuch momentiga teng bo'lgan ya'ni $m_{o1}(R')$ juftni qo'shish kerak. Bu juftni kuchlar sistemasining O ga keltirish natijasida hosil bo'lgan juft bilan qo'shib, momenti quyidagiga teng bo'lgan bitta juft hosil qilamiz

$$M_{01} = M_0 + m_{01}(\overline{R}') \qquad (4.20)$$

bundan

$$M_{01} - M_0 = m_{01}(\overline{R}') \qquad (4.21)$$

Demak, keltirish markazi o'zgarishi bilan bosh momentning o'zgarishi oldingi markazga qo'yilgan bosh vektordan, keyingi markazga nisbatan olingan momentga teng bo'lar ekan.

3. Keltirishning xususiy hollari. Tekislikda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasini sodda hollarga keltirish. Tekislikda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasini biror O markazga keltirishda quyidagi xususiy hollar mavjud

$$1)\ \overline{R}' = 0,\ M_0 \neq 0$$

$$2)\ \overline{R}' \neq 0,\ M_0 = 0$$

$$3)\ \overline{R}' \neq 0,\ M_0 \neq 0$$

$$4)\ \overline{R}' = 0,\ M_0 = 0$$

1. Kuchlar sistemasini bir juftga keltirish

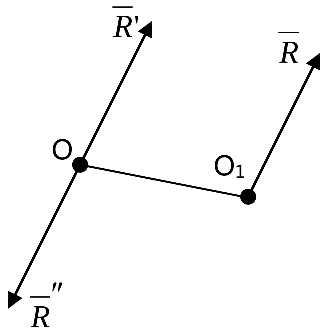
Agar tekislikda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasini bosh vektori nolga teng bo'lib, biror markazga nisbatan bosh momenti nolga teng bo'lmasa, u holda bunday sistema bir juftga keladi. Bunday holda bosh momenti keltirish markazining tanlanishiga bog'liq bo'lmaydi, haqiqatan ham, agar R'=0 bo'lsa, u holda (4.21) formuladan $M_{01}=M_0$ ekanligi kelib chiqadi.

2. Kuchlar sistemasini bir teng ta'sir etuvchiga keltirish. Teng ta'sir etuvchining momenti haqida teorema

Agar kuchlar sistemasining bosh vektori nolga teng bo'lmasa, u holda bunday sistema bitta teng ta'sir etuvchiga keltiriladi (2 va 3 xususiy hollar).

Agar $(\overline{F}_1, \overline{F}_2, ..., \overline{F}_n)$ kuchlar sistemasini biror O markazga keltirish natijasida bitta kuch $\overline{R} = \sum \overline{F}_k$ va momenti $M_0 = \sum m_0(\overline{F}_k)$ bo'lgan bitta juft hosil bo'lsin. Juft tashkil etuvchi kuchlar miqdorini bosh vektorga teng qilib olib, ya'ni, $\overline{R}' = \overline{R}'' = \overline{R}$ va juft tashkil etuvchi kuchlardan birini O nuqtaga R' bilan qarama-qarshi yo'nalishda joylashtiramiz (34-shakl) juft $(\overline{R}_1, \overline{R}'')$ ning yelkasi quyidagi formuladan aniqlanadi.

$$d = \frac{M_0}{R} \qquad (4.22)$$



34-shakl

Hosil bo'lgan $(\overline{R}',\overline{R}'',\overline{R})$ kuchlar 34-shakl sistemasi bitta R kuchga ekvivalent bo'ladi. Darhaqiqat, $\overline{R}$ berilgan ($\overline{F}_1, \overline{F}_2 ... \overline{F}_n$) kuchlar sistemasining teng ta'sir etuvchisi bo'ladi.

Teng ta'sir etuvchining momentiga oid Varin'on teoremasi

Teorema:

Tekislikda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasi teng ta'sir etuvchisining shu tekislikda yotuvchi ixtiyoriy nuqtaga nisbatan momenti, berilgan kuchlardan shu nuqtaga nisbatan olingan kuch momentlarining algebraik yig'indisiga teng.

Isbot:

34-shakldan ko'rinadiki, $m_0(\overline{R}) = R \cdot d$. R=R' ekanligi va (4.22) formulani e'tiborga olib quyidagini yozish mumkin

$$m_0(\overline{R}) = M_0 \quad yoki \quad m_0(\overline{R}) = \sum_{k=1}^{n} m_0(\overline{F}_k) \qquad (4.23)$$

Teorema isbotlandi.

Tekislikda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasining muvozanat shartlari

Tekislikda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasi muvozanatlashishi uchun, quyidagi shartning bajarilishi zarur va yetarlidir.

$$\overline{R}' = 0 \quad \text{va} \quad \overline{M}_0 = 0 \qquad (4.24)$$

Agar biror shart bajarilmasa, u holda kuchlar sistemasi teng ta'sir etuvchiga yoki juftga keltiriladi, ya'ni muvozanatda bo'lmaydi. Agar $\overline{R}' = 0$ bo'lsa, u holda sistema momenti M_0 bo'lgan juftga keltiriladi, modomiki M_0=0, u holda sistema muvozanatda bo'ladi. (4.24) shartdan tekislikda ixtiyoriy joylashgan kuchlar muvozanatining quyidagi analitik shartlari kelib chiqadi:

1. Muvozanat shartining asosiy ko'rinishi

Bosh vektor $\overline{R}'$ va bosh moment M_0 quyidagi formulalar yordamida aniqlanadi

$$R' = \sqrt{\left(\sum_{k=1}^{n} F_{kx}\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^{n} F_{ky}\right)^2}, \quad M_0 = \sum_{k=1}^{n} m_0(\overline{F}_k)$$

Agar $R' = 0$ va M_0=0 bo'lsa, u holda

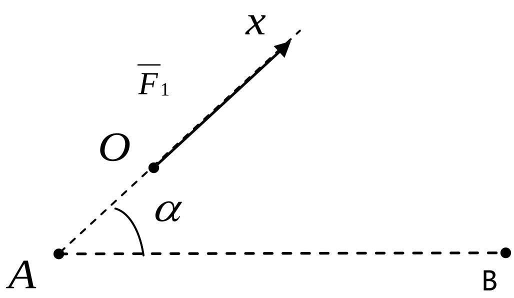
$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} m_0(\overline{F}_k) = 0 \qquad (4.25)$$

Ya'ni tekislikda ixtiyoriy joylashgan kuchlar muvozanatda bo'lishi uchun, kuchlarning koordinata o'qlaridagi proyeksiyalarining yig'indisi, kuchlarning ta'sir tekisligidagi biror nuqtaga nisbatan olingan momentlarning yig'indisi nolga teng bo'lishi zarur va yetarlidir. Bog'lanishdagi jismlarning muvozanatiga oid masalalar yechishda (4.25) shartda noma'lum reaksiya kuchlari ishtirok etadi va muvozanat tenglamari deb ataladi. Agar noma'lum reaksiyalar soni ular qatnashgan tenglamalar soniga teng bo'lsa, u holda hamma noma'lumlar shu tenglamalardan aniqlanadi. Bunday masalar statik aniq masalalar deb ataladi. Agar noma'lum reaksiyalar soni, ular qatnashgan tenglamalar sonidan ko'p bo'lsa, u holda bunday masalalar statik aniqmas masalalar deb ataladi.

2. Muvozanat shartining ikkinchi shakli

Tekislikda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasi muvozanatda bo'lishi uchun kuchlarning ikkita A va B nuqtalarga nisbatan olingan momentlarining yig'indisi, hamda AB kesmaga perpendikulyar bo'lmagan OX o'qiga proyeksiyalarining yig'indisi nolga teng bo'lishi zarur va yetarlidir (35-shakl).

$$\left.\begin{array}{l} \sum\limits_{k=1}^{n} F_{ix} = 0 \\ \sum m_A(\overline{F}_i) = 0 \\ \sum m_B(\overline{F}_i) = 0 \\ \alpha \neq 90^0 \end{array}\right\} \qquad (4.26)$$



35-shakl

3. Muvozanat shartining uchinchi shakli

Tekislikda ixtiyoriy joylashgan kuchlar muvozanatda bo'lishi uchun kuchlarning bir to'g'ri chiziq ustida yotmagan uchta A, B va C nuqtalarga nisbatan olingan momentlarining yig'indisi nolga teng bo'lishi zarur va yetarlidir.

$$\sum_{k=1}^{n} m_A(\overline{F}_k) = 0, \ \sum_{k=1}^{n} m_B(\overline{F}_k) = 0, \ \sum_{k=1}^{n} m_C(\overline{F}_k) = 0 \qquad (4.27)$$

Eslatma: (4.26) va (4.27) shartlar isbotsiz taklif etildi.

1.Tekislikda parallel joylashgan kuchlarning muvozanat shartlari

Agar hamma kuchlar OY o'qiga parallel bo'lsa (36-shakl), u holda

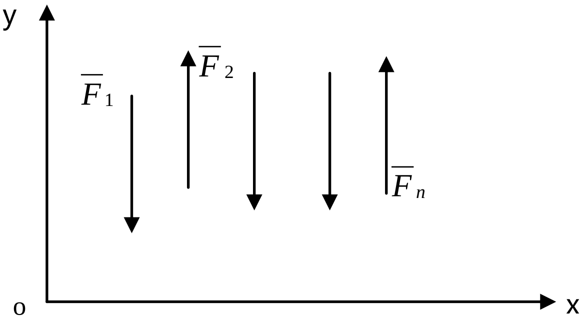
$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0,$$

modomiki

$$\sum_{k=1}^{n} F_{ky} = \sum_{k=1}^{n} F_k$$

va muvozanat sharti quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\sum_{k=1}^{n} F_k = 0, \qquad \sum_{k=1}^{n} m_0(\overline{F}_k) = 0 \qquad (4.28)$$



36-shakl

Demak tekislikdagi parallel kuchlar muvozanatda bo'lishi uchun, kuchlarning algebraik yig'indisi va shu tekislikdagi biror nuqtaga nisbatan olingan momentlarning yig'indisi nolga teng bo'lishi zarur va yetarlidir.

Tekislikda parallel kuchlar muvozanat shartining ikkinchi shakli

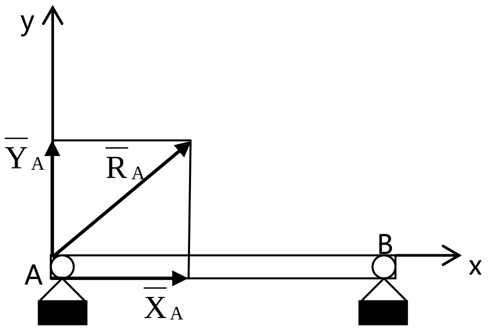
Tekislikda ixtiyoriy joylashgan parallel kuchlar muvozanatda bo'lishi uchun, bu kuchlarga parallel bo'lgan chiziq ustida yotmay turgan ikki A va B nuqtalarga nisbatan olingan kuchlar momentlarining yig'indisi nolga teng bo'lishi zarur va yetarlidir, ya'ni

$$\sum_{k=1}^{n} m_A(\overline{F}_k) = 0, \qquad \sum_{k=1}^{n} m_B(\overline{F}_k) = 0 \qquad (4.29)$$

Reaksiya kuchlarini aniqlashga doir qo'shimchalar

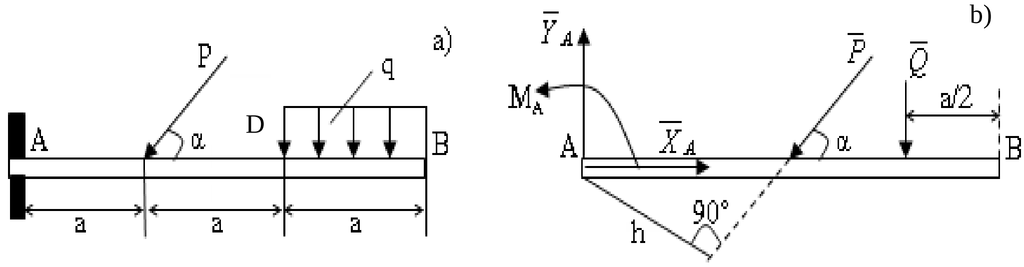
Bog'lanishlarning bir necha xil turlari va ularning reaksiyalari 1-bobda berilgan. Xususan bog'lanish ishqalanishsiz silindrik sharnir vositasida bajarilgan bo'lsa, sharnir bog'lanish reaksiya kuchi silindrik o'qiga perpendikulyar bo'lgan tekislikda yotishi ko'rsatilgan edi. Reaksiya kuchining yo'nalishi noma'lum bo'lib, jismga ta'sir etuvchi boshqa kuchlarga bog'liq bo'ladi. Jism tekislikda ixtiyoriy joylashgan kuchlar ta'sirida muvozanatlashishiga oid masala yechiladigan bo'lsa, qo'zg'almas sharnirning reaksiya kuchi R_A ning miqdor va yo'nalishi noma'lum (37-shakl). Shuning uchun uni OX va OY koordinata o'qlari bo'ylab X_A va Y_A tashkil etuvchilar orqali tasvirlab, R_A ning miqdor va yo'nalishi quyidagi formulalar yordamida aniqlanadi

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2}, \quad tg\alpha = \frac{Y_A}{X_A}$$



37-shakl

Qistirib mahkamlangan bog'lanish (38-a shakl). Agar jismga tekislikda ixtiyoriy joylashgan kuchlar ta'sir qilsa, bu kuchlar sistemasini markazga keltirish natijasida, A nuqtaga qo'yilgan R_A kuchi va momenti M_A bo'lgan juft hosil bo'ladi. Noma'lum R_A reaksiya kuchini koordinata o'qlari bo'ylab X_A va Y_A tashkil etuvchilari orqali tasvirlaymiz.



38-shakl

Binobarin jismning qistirib mahkamlangan kesmasida reaksiyaning ikkita X_A va Y_A tashkil etuvchilari hamda, momenti M_A bo'lgan reaktiv juft ta'sir qiladi.

Masala

38a-shaklda ko'rsatilgan to'sinning tayanch reaksiyalari aniqlansin.

Yechish:

AB to'sin (balka)ga tekislikda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasi ta'sir qiladi. Intensivligi q bo'lgan tekis taqsimlangan kuchni to'plangan Q kuch bilan almashtiramiz. Bu kuch DB kesmaning o'rtasiga qo'yilgan va miqdori Q=q·a ga teng. Muvozanat tenglamalarini tuzamiz

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0, \quad X_A - P\cdot\cos\alpha = 0$$

$$\sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0, \quad Y_A - P\cdot\sin\alpha - Q = 0$$

$$\sum_{k=1}^{n} m_A(\overline{F}_k) = 0, \quad M_A - P\cdot a\sin\alpha - Q\cdot 2{,}5\cdot a = 0$$

Bu tenglamalar sistemasini X_A,Y_A, M_A larga nisbatan yechib quyidagilarni olamiz:

$$X_A = P\cdot\cos\alpha; \qquad Y_A = P\cdot\sin\alpha + Q = P\cdot\sin\alpha + qa$$

U holda

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = \sqrt{(P\cos\alpha)^2 + (P\sin\alpha + qa)^2} =$$

$$= \sqrt{P^2 + 2Pqa\sin\alpha + (qa)^2}$$

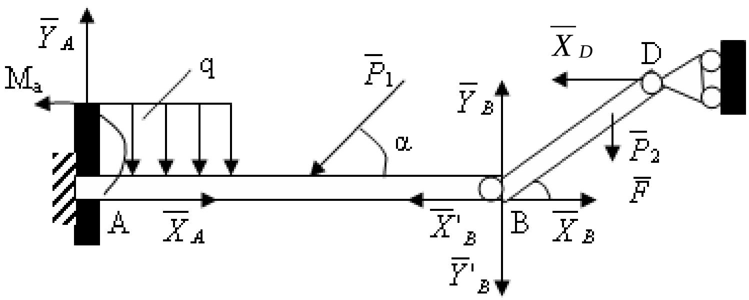
$$M_A = Pa\sin\alpha + Q\cdot 2{,}5a = Pa\sin\alpha + 2{,}5qa^2$$

Jismlar sistemasining muvozanati

Odatda o'zaro bog'langan (sharnir, arqon, sterjen vositasida), bir necha jismlardan tashkil topgan qurilmalar ko'proq uchraydi. 39-shaklda ikkita AB va BD jismlar o'zaro B sharnir yordamida biriktirilgan sistema tasvirlangan. A va D nuqtalardagi tayanch reaksiya kuchlari va B sharnirdagi o'zaro bosim aniqlanishi talab qilindi. B sharnirdagi o'zaro bosim kuchi miqdor va yo'nalish jihatidan noma'lum. Shuning uchun uni koordinata o'qlari bo'ylab tashkil etuvchilar orqali tasvirlaymiz va ta'sir hamda aks ta'sir aksiomasiga asosan quyidagiga ega bo'lamiz

$$\overline{X}_B = -\overline{X}'_B,\ \overline{Y}_B = -\overline{Y}'_B$$

X_B, Y_B tashkil etuvchilar BD jismga ta'sir qiladi va X_B', Y_B' lar AB jismga.



39-shakl

Tashqi bog'lanishlarni bog'lanish reaksiya kuchlari bilan almashtirib, muvozanat holatdagi o'zgaruvchan mexanik sistemani hosil qilamiz, har ikkala jism ham B sharnir atrofida aylanishi mumkin. Qotish prinsipiga asosan, bu sistema uchun, xuddi absolyut qattiq jismga o'xshash, uchta muvozanat tenglamasini tuzamiz. Bu tenglamalar sistemasi noma'lumlarni aniqlashda ojizlik qiladi. Bundan tashqari masalani yechish uchun, jismlardan birortasini, masalan BD jismning muvozanatini ko'rish va u uchun uchta muvozanat tenglamasini tuzish kerak. Bu masalani boshqacha tartibda ham hal qilsa bo'ladi. Ya'ni har ikkala jism uchun alohida-alohida muvozanat tenglamasini tuzish mumkin.

Takrorlash uchun savollar

1. Kuchni o'ziga parallel qanday ko'chirish mumkin?
2. Tekislikdagi kuchlarni bir markazga keltirish natijasida nima hosil bo'ladi?
3. Kuchlar sistemasi bir markazga keltirilsa qanday hollar bo'lishi mumkin?
4. Tekislikda ixtiyoriy joylshgan kuchlar sistemasining muvozanat shartlari qanday?
5. Tekislikda parallel joylashgan kuchlar sistemasining muvozanat shartlari qanday?
6. Jismlar sistemasida reaksiyasi kuchlarini aniqlash masalasi qanday yechiladi?

Tayanch so'zlar va iboralar:

Kuch, kuch momenti, muvozanat, kuchlar sistemasi, reaksiya kuchi, bosh vector, bosh moment, parallel kuchlar

5-MA'RUZA. FAZODA IXTIYORIY JOYLASHGAN KUCHLAR SISTEMASI

Ta'sir chiziqlari fazoda ixtiyoriy ravishda joylashgan kuchlardan tashkil topgan sistema fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasi deyiladi.

Fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchning nuqtaga nisbatan moment vektori

Agar jismga fazoviy kuchlar ta'sir etsa, u holda jismning mazkur kuchlar ta'sirida aylanish yo'nalishini aniqlash uchun kuchning nuqtaga nisbatan momenti vektor tarzida qaraladi.

Kuchning nuqtaga nisbatan momenti vektori moment markaziga qo'yilgan bo'lib, bu markaz va kuchning ta'sir chizig'i orqali o'tgan tekislikka perpendikulyar yo'naladi hamda uning uchidan qaraganimizda kuch jismni soat milining aylanishiga teskari yo'nalishda aylantirishga intiladi.

$\overline{F}$ kuchning O nuqtaga nisbatan momenti vektorini aniqlash uchun kuch qo'yilgan A nuqtaning O markazga nisbatan radius-vektori $\bar{r}$ ning shu kuch vektoriga vektorli ko'paytmasini aniqlaymiz. Vektorlar algebrasidan ma'lumki, $\bar{r}\times\overline{F}$ vektor ustiga tushirish uchun soat milining aylanishiga teskari yo'nalishda eng qisqa burchakka burish kerak. Bu vektorning moduli

$$\left|\bar{r}\times\overline{F}\right| = r\,F\sin\left(\bar{r},^\wedge\,\overline{F}\right) \qquad (5.1)$$

bo'ladi.

O nuqtadan $\overline{F}$ kuchning ta'sir chizig'iga tik *h* kesmani o'tkazamiz, u holda

$$h = r\,\sin\left(\bar{r},^\wedge\,\overline{F}\right) \qquad (5.2)$$

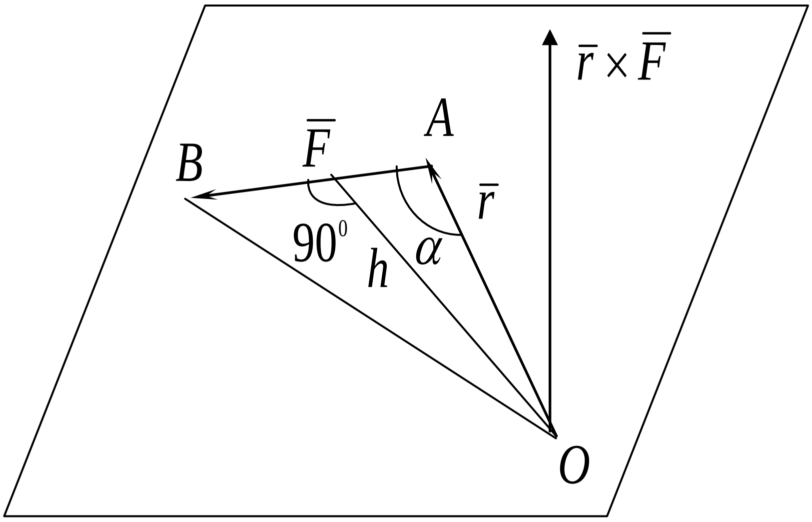
bo'lgani uchun

$$\left|\bar{r}\times\overline{F}\right| = F\cdot h = \left|\overline{M}_0,\left(\overline{F}\right)\right| \qquad (5.3)$$

$\bar{r}\times\overline{F}$ vektorning yo'nalishi kuchning nuqtaga nisbatan momenti vektori bilan ustma-ust tushadi. $\bar{r}\times\overline{F}$ va $\overline{M}_0(\overline{F})$ vektorlarning miqdorlari teng, yo'nalishlari ustma-ust tushgani uchun

$$\overline{M}_0(\overline{F}) = \bar{r}\times\overline{F} \qquad (5.4)$$

Ya'ni F kuchning O nuqtaga nisbatan moment vektori, moment markazidan kuch qo'yilgan nuqtaga o'tkazilgan radius-vektori bilan kuch vektorining vektorli ko'paytmasiga teng ekan.



40-shakl

Kuchning o'qqa nisbatan momenti

O'qqa nisbatan kuch momentining ta'rifi

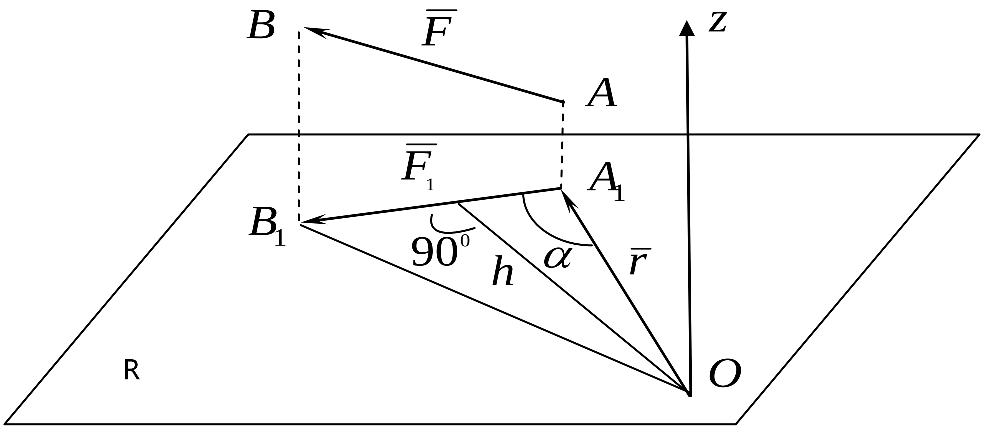
Qattiq jismning biror A nuqtasiga $\bar{F}$ kuchi qo'yilgan. Biror OZ o'qini o'tkazib, unga perpendikulyar bo'lgan R tekislikni olamiz. O'q bilan tekislikning kesishgan nuqtasini O bilan belgilaymiz. $\bar{F}$ kuchini R tekislikka proyeksiyalaymiz va uni $\bar{F}_1$ deb belgilaymiz ya'ni $\bar{F}_1 = \bar{F}_{pro}$ (41-shakl).

Ta'rif.

$\bar{F}$ kuchining OZ o'qiga nisbatan kuch momenti deb, $\bar{F}$ kuchning o'qqa perpendikulyar bo'lgan tekislikdagi $\bar{F}_1$ proyeksiyasining o'q bilan tekislikning kesishgan O nuqtasiga nisbatan olingan kuch momentiga aytiladi ya'ni:

$$m_Z(F) = m_0(\bar{F}_1) = \pm F_1 \cdot h \qquad (5.5)$$

O'qqa nisbatan kuch momenti musbat deb qabul qilinadi, agar OZ o'qining oxiridan qaralganda $\bar{F}_1$ proyeksiya tekislikni OZ o'qi atrofida



41-shakl

soat mili yo'nalishiga qarama-qarshi yo'nalishda aylantirishga intilsa. O'qqa nisbatan kuch momentining sonli qiymati OA_1B_1 uchburchak yuzasining ikkilanganligiga teng, ya'ni

$$m_z(\bar{F}) = 2S_{\Delta OA_1B_1} \qquad (5.6)$$

O'qqa nisbatan kuch momenti quyidagi ikki holda nolga teng bo'ladi:

1.Agar F_1=0, ya’ni kuchning ta’sir chizig’i o’qqa parallel bo’lsa
2.Agar h=0, ya’ni kuchning ta’sir chizig’i o’qni kesib o’tsa

Demak, agar kuch bilan o’q bir tekislikda yotsa, bu o’qqa nisbatan kuch momenti nolga teng bo’lar ekan.

Masala.

Tomonlari a ga teng bo’lgan kubga qo’yilgan F_1,F_2,F_3 (42-shakl) kuchlarning koordinata o’qlariga nisbatan kuch momentlari hisoblansin.

F_1 kuchi OYZ tekisligida yotadi, shuning uchun

$$m_X\left(\overline{F}_1\right) = -F_1 a$$
$$m_Y\left(\overline{F}_1\right) = 0$$
$$m_z\left(\overline{F}_1\right) = 0$$

F_2 kuchi OZ o’qiga parallel, shuning uchun, bu kuchning Z o’qiga nisbatan momenti nolga teng. Demak,

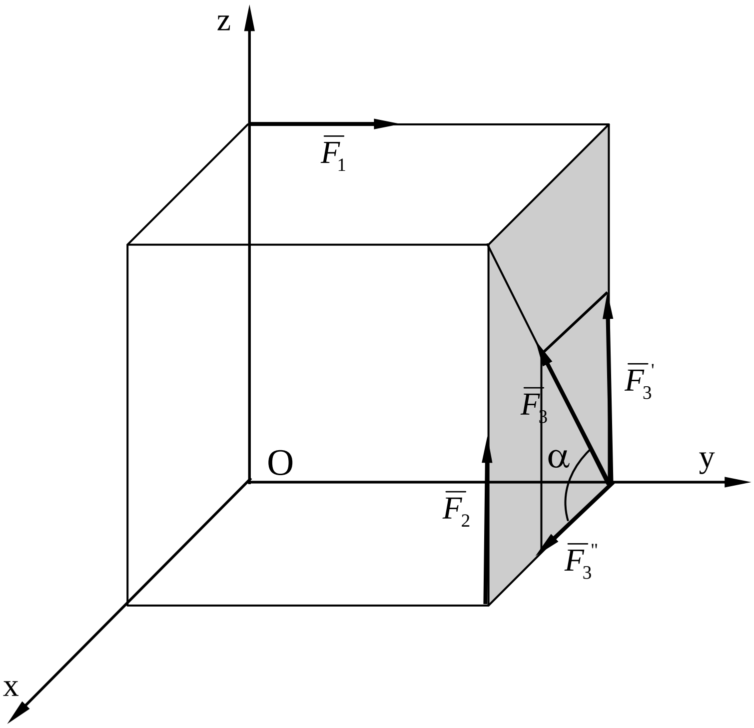
$$m_X\left(\overline{F}_2\right) = F_2 a$$
$$m_Y\left(\overline{F}_2\right) = -F_2 a$$
$$m_z\left(\overline{F}_2\right) = 0$$

$\overline{F}_3$ kuchi OY o’qini kesib o’tadi, shuning uchun bu o’qqa nisbatan kuch momenti nolga teng bo’ladi $\overline{F}_3$ kuchini YOZ tekisligidagi $\overline{F}_3^{'}$ proyeksiyasining miqdori quyidagiga teng:

$$F_3' = F_3 \sin\alpha = F_3 \cdot \sin 45^0 = F_3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$F_3'' = F_3 \cdot \cos\alpha = F_3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

u holda

$$m_X\left(\overline{F}_3\right) = F_3^{'} a = F_3 \frac{a\sqrt{2}}{2}$$
$$m_Z\left(\overline{F}_3\right) = -F_3^{''} a = -F_3 \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

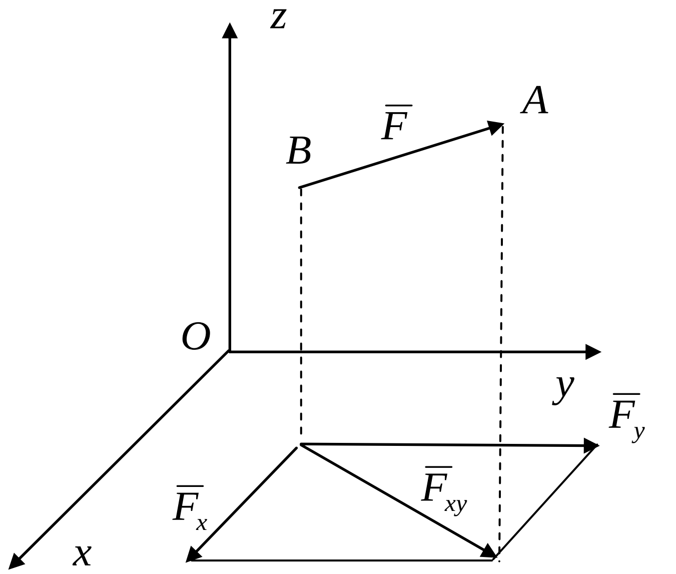


42-shakl

Kuchning koordinata o'qlariga nisbatan momentlarining analitik ifodalari. $\overline{F}$ - berilgan kuch, $\overline{F}_x, \overline{F}_y, \overline{F}_z$ -uning koordinata o'qlaridagi proyeksiyalari, x, y, z-uning qo'yilgan nuqtasi koordinatalari. $\overline{F}$ kuchini koordinata o'qlariga nisbatan olingan momentlarining ifodalarini tuzamiz. $\overline{F}$ kuchini XOY tekisligiga proyeksiyalab, uni $\overline{F}_{xy}$ deb belgilaymiz (43-shakl). Ta'rifga asosan:

$$m_z(\overline{F}_3) = m_0(\overline{F}_{xy}) \qquad (5.7)$$

$\overline{F}_{xy}$ kuchini OX va OY koordinata o'qlari bo'ylab $\overline{F}_x$ va $\overline{F}_y$ tashkil etuvchilarga ajratamiz: $\overline{F}_{xy} = \overline{F}_x + \overline{F}_y$



43-shakl

Teng ta'sir etuvchining momenti haqidagi Varin'on teoremasiga asosan:

$$m_0(\overline{F}_{xy}) = m_0(\overline{F}_x) + m_0(\overline{F}_y) \text{ yoki}$$

$$m_0(\overline{F}_{XY}) = x \cdot F_y - y \cdot F_X$$

u holda (5.7) ga asosan quyidagini olamiz:

$$m_z(\overline{F}) = x \cdot F_y - y \cdot F_X$$

Xuddi shunday asnoda kuchni OX va OY o'qlariga nisbatan momentlarining analitik ifodasini olishimiz mumkin, natijada quyidagiga ega bo'lamiz:

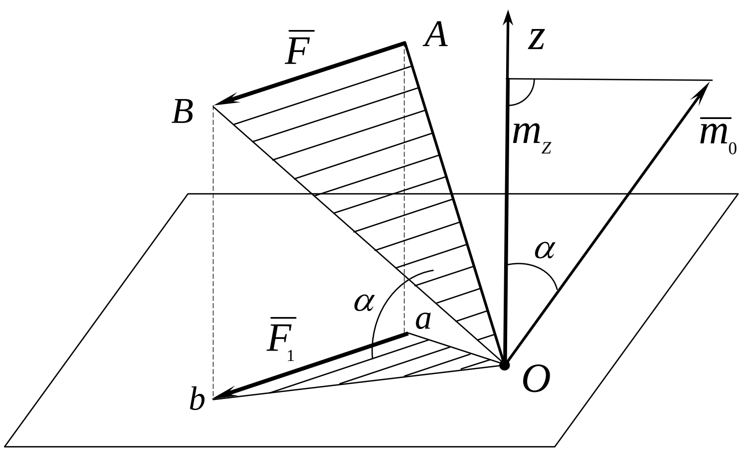
$$\left.\begin{aligned} m_z(\overline{F}) &= x \cdot F_y - y \cdot F_X \\ m_y(\overline{F}) &= z \cdot F_x - x \cdot F_z \\ m_z(\overline{F}) &= x \cdot F_y - y \cdot F_X \end{aligned}\right\} \qquad (5.8)$$

(5.8) tenglik $\overline{F}$ kuchining koordinata o'qlariga nisbatan momentlarining analitik ifodalari deyiladi.

Kuchning o'qqa va shu o'qdagi nuqtaga nisbatan momentlari orasidagi munosabat

Kuchning nuqtaga nisbatan momenti bilan shu nuqtadan o'tuvchi o'qqa nisbatan momentlari orasidagi munosabatlarini o'rnatamiz. $\overline{F}$ berilgan kuch, $\overline{F}_1$ kuchni OZ o'qqa perpendikulyar bo'lgan tekislikdagi proyeksiyasi. $\overline{F}$ kuchini O nuqtaga nisbatan kuch momenti OAB uchburchak yuzining ikkilanganiga teng, bu kuchning OZ o'qiga nisbatan momenti esa OAB uchburchak yuzining ikkilanganiga teng ya'ni:

$$m_0(\overline{F}) = 2S_{\Delta OAB}\,, \quad m_z(\overline{F}) = 2S_{\Delta oab}$$



44-shakl

Uchburchak oab, OAB uchburchakning OZ o'qiga perpendikulyar bo'lgan P tekislikdagi proyeksiyasidir. Shuning uchun

$$S_{\Delta oab} = S_{\Delta OAB} \cdot \cos\alpha$$

bu yerda α - OAB va oab uchburchaklar orasidagi burchakdir. Bu holda

$$m_z(\overline{F}) = 2 \cdot S_{\Delta OAB} \cdot \cos\alpha \text{ yoki } m_z(\overline{F}) = m_0(\overline{F}) \cdot \cos\alpha \qquad (5.9)$$

$\overline{m}_0$-vektor uchburchak yuzi $S_{\Delta OAB}$ ga perpendikulyar yo'nalgan bo'ladi (44-shakl). Ma'lumki, tekisliklar orasidagi burchak ularga o'tkazilgan perpendikulyarlar orasidagi burchakka teng bo'ladi. Shuning uchun $\overline{m}_0$ va OZ o'qi orasidagi burchak α ga teng bo'ladi. Shuning uchun $\overline{m}_0 \cos\alpha$ miqdor $\overline{m}_0$ vektorning OZ o'qidagi proyeksiyasidir.

Shunday qilib, o'qqa nisbatan kuch momenti, kuchning shu o'qda yotuvchi nuqtaga nisbatan moment $\overline{m}_0$-vektorining shu o'qdagi proyeksiyasiga teng bo'ladi. Agar kuch o'qqa perpendikulyar bo'lgan tekislikda yotsa, u holda $\cos\alpha = \pm 1$ bo'ladi va

$$m_z(\overline{F}) = m_0(\overline{F})$$

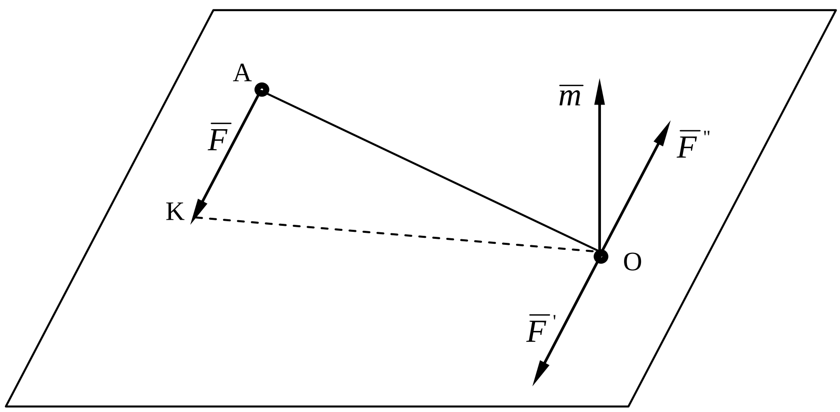
bo'ladi.

Fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasini berilgan bir markazga keltirish

Bosh vektor va bosh moment

Qattiq jismning biror A nuqtasiga $\overline{F}$ kuchi qo'yilgan (45-shakl) kuchni o'ziga parallel ko'chirish haqidagi teoremaga asosan A nuqtaga qo'yilgan $\overline{F}$ kuchni O nuqtaga qo'yilgan shunday $\overline{F}'$ kuch va momenti $\overline{m}$ berilgan $\overline{F}$ kuchidan O nuqtaga nisbatan olingan kuch momentiga teng bo'lgan ($\overline{F}'$, $\overline{F}''$) juft kuch bilan almashtirish mumkin. Juftning $\overline{m}$ moment vektori OAK tekislikka perpendikulyar bo'ladi. Shuning uchun quyidagicha yozish mumkin. $\overline{F} = \overline{F}'$ va juft ($\overline{F}$, $\overline{F}''$) kuchni berilgan markazga keltirish chog'ida hosil bo'lgan qo'shilgan ($\overline{F}$, $\overline{F}''$) juftni shaklda ko'rsatmay uning m momenti vektorini tasvirlash kifoya. Bu natijadan foydalanib ixtiyoriy joylashgan va qattiq jismning A_1, A_2, A_3 nuqtalariga qo'yilgan uchta $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$, $\overline{F}_3$ kuchlarni berilgan markazga keltiramiz (46-shakl). Buning uchun, hamma kuchlarni O nuqtaga keltirib qo'shilgan juftlarni olamiz. Natijada O markazga qo'yilgan $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$, $\overline{F}_3$ kuchlar sistemasi va momentlari $\overline{m}_1$, $\overline{m}_2$, $\overline{m}_3$ bo'lgan qo'shilgan juft kuchlar sistemasini olamiz. Ma'lumki

$$\overline{m}_1 = \overline{m}_0(\overline{F}_1),\ \overline{m}_2 = \overline{m}_0(\overline{F}_2),\ \overline{m}_3 = \overline{m}_0(\overline{F}_3)$$



45-shakl

O nuqta qo'yilgan $\overline{F}_1'$, $\overline{F}_2'$, $\overline{F}_3'$ kuchlarni qo'shib ularning geometrik yig'indisiga teng bo'lgan $\overline{R}'$ ni olamiz ya'ni

$$\overline{R}' = \overline{F}_1' + \overline{F}_2' + \overline{F}_3'$$

agar $\overline{F}_1' = \overline{F}_1$, $\overline{F}_2' = \overline{F}_2$, $\overline{F}_3' = \overline{F}_3$ bo'lsa, u holda $\overline{R}' = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \overline{F}_3$ kuchlarning geometrik yig'indisi bosh vektor deyiladi. Qo'shilgan juftlarni yig'ib teng ta'sir etuvchi juftni hosil qilamiz uning momenti qo'shilgan juft momentlarining geometrik yig'indisiga teng bo'ladi. Ya'ni

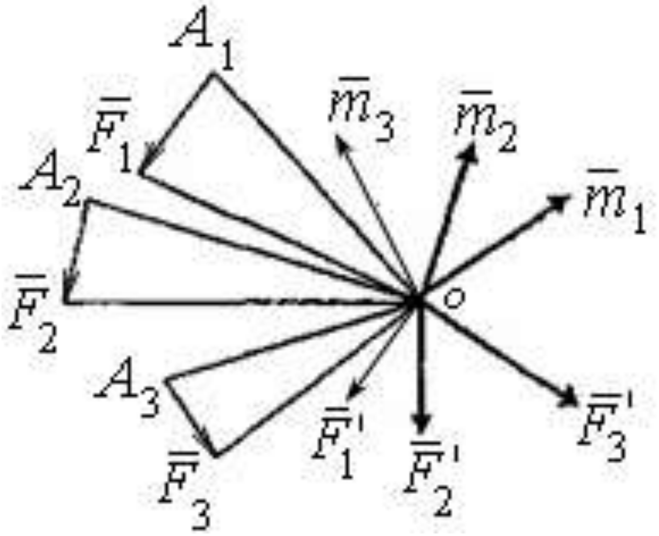
$$\overline{M}_0 = \overline{m}_1 + \overline{m}_2 + \overline{m}_3$$

agar $\overline{m}_1 = \overline{m}_0(\overline{F}_1),\ \overline{m}_2 = \overline{m}_0(\overline{F}_2),\ \overline{m}_3 = \overline{m}_0(\overline{F}_3)$ bo'lsa,

u holda

$$M_0 = \overline{m}_0(\overline{F}_1) + \overline{m}_0(\overline{F}_2) + \overline{m}_0(\overline{F}_3)$$

$\overline{M}_0$-vektor berilgan kuchlardan O keltirish markaziga nisbatan olingan kuch momentlarining geometrik yig'indisiga teng bo'lib, kuchlar sistemasining keltirish markaziga nisbatan olingan bosh momenti deyiladi.

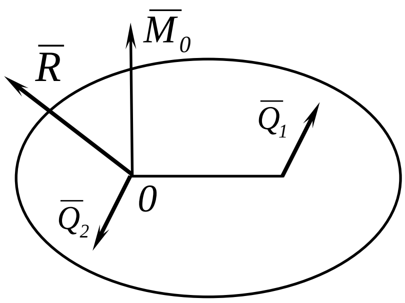


46-shakl

Olingan natijadan fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasi uchun tatbiq qilib quyidagilarga ega bo'lamiz.

$$\overline{R} = \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k; \quad \overline{M}_0 = \sum_{k=1}^{n} \overline{m}_0(\overline{F}_k) \qquad (5.13)$$

Shunday qilib fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasini berilgan kuchlarning geometrik yig'indisiga teng bo'lgan va keltirish markaziga qo'yilgan yolg'iz kuch va momenti berilgan kuchlardan keltirish markaziga nisbatan olingan kuch momentlarining geometrik yig'indisiga teng bo'lgan qandaydir (Q_1, Q_2) juft bilan almashtirish mumkin (47-shakl) shuni ta'kidlab o'tamizki, bosh vektor keltirish markaziga bog'liq bo'lmaydi, lekin bosh moment esa keltirish markazining tanlab olinishiga bog'liq bo'lib, keltirish markazining o'zgarishi bilan bosh moment ham o'zgarishi mumkin.



47-shakl

Fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasi bosh vektori va bosh momentini analitik aniqlash

To'g'ri burchakli koordinata sistemasining boshini keltirish markazi O da olamiz, u holda bosh $\overline{R}$ vektorning koordinata o'qlaridagi proyeksiyalari quyidagi formulalar bilan aniqlanadi:

$$\left.\begin{aligned} R_x &= \sum_{k=1}^{n} F_{kx} \\ R_y &= \sum_{k=1}^{n} F_{ky} \\ R_z &= \sum_{k=1}^{n} F_{kz} \end{aligned}\right\} \tag{5.14}$$

bo'ladi. Bosh vektorning moduli quyidagicha

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} \tag{5.15}$$

Bosh vektor $\overline{R}$ ning yo'nalishi, yo'naltiruvchi kosinuslari

$$\cos(\overline{R},\,^\wedge ox) = \frac{R_x}{R};\ \cos(\overline{R},\,^\wedge oy) = \frac{R_y}{R};\ \cos(\overline{R},\,^\wedge oz) = \frac{R_z}{R} \tag{5.16}$$

Bosh moment M_o ning koordinata o'qlaridagi proyeksiyalarini quyidagi formulalar yordamida aniqlanadi:

$$\left.\begin{aligned} M_{ox} &= \sum_{k=1}^{n} m_x(\overline{F}_k) \\ M_{oy} &= \sum_{k=1}^{n} m_y(\overline{F}_k) \\ M_{oz} &= \sum_{k=1}^{n} m_z(\overline{F}_k) \end{aligned}\right\} \tag{5.17}$$

formula yordamida aniqlanuvchi M_{ox}, M_{0y}, M_{oz} miqdorlar koordinata o'qlariga nisbatan bosh momentlar deyiladi. Qandaydir koordinata o'qiga nisbatan sistema kuchlarining bosh momenti berilgan kuchlardan shu o'qqa nisbatan olingan momentlar algebraik yig'indisiga teng ekanligi (5.17) formuladan yaqqol ko'rinadi. Bosh momentning miqdor va yo'nalishi quyidagi formulalar yordamida aniqlanadi:

$$M_0 = \sqrt{M_{ox}^2 + M_{oy}^2 + M_{oz}^2} \tag{5.18}$$

$$\cos(\overline{M}_0,\,^\wedge ox) = \frac{M_{0x}}{M_0};\ \cos(\overline{M}_0,\,^\wedge oy) = \frac{M_{0y}}{M_0};\ \cos(\overline{M}_0,\,^\wedge oz) = \frac{M_{0z}}{M_0} \tag{5.19}$$

Fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasini bir markazga keltirilganda, bosh vektor bilan bosh moment orasidagi burchak ta'sir qilayotgan kuchlarga bog'liq bo'lib, ixtiyoriy bo'lishi, bu burchakni aniqlash vektorlar skalyar ko'paytmasining ifodasidan

$$\left(\overline{R}\cdot\overline{M}_0\right) = RM_0\cos(\overline{R},\,^\wedge \overline{M}_0)$$

Bundan

$$\cos(\overline{R},\,^\wedge \overline{M}_0) = \frac{\overline{R}\cdot\overline{M}_0}{RM_0} = \frac{R_xM_{ox} + R_yM_{oy} + R_zM_{oz}}{RM_0} \tag{5.20}$$

Agar $R \perp M_0$ bo'lsa, u holda

$$\cos(\overline{R},\,^\wedge \overline{M}) = 0$$

va

$$R_x M_{ox} + R_y M_{oy} + R_z M_{oz} = 0 \qquad (5.21)$$

munosabat (5.21) bosh vektor bilan bosh moment o’zaro perpendikulyarlik alomatidir.

Fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasini bir markazga keltirishning turli hollari

Fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasini berilgan markazga keltirilganda quyidagi hollar sodir bo’lishi mumkin.

1. $R = 0,\ M_0 \neq 0$

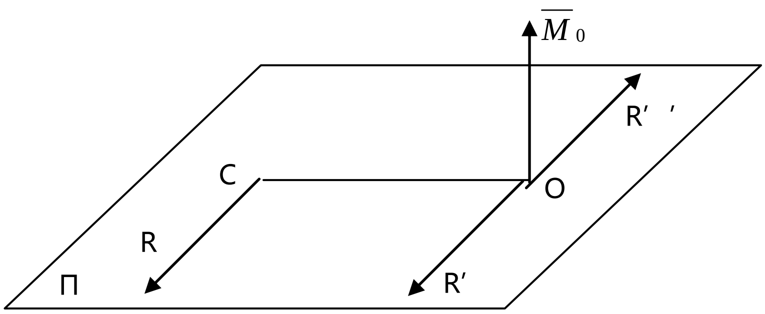
Bu holda kuchlar sistemasi momenti keltirish markaziga nisbatan bosh momentga teng bo’lgan juftga keltiriladi. Juft momenti moment markazining tanlanishiga bog’liq bo’lmaganligi uchun bosh moment ham keltirish markazining olinishiga bog’liq bo’lmaydi.

2. $R \neq 0,\ M_0 = 0$

Bu holda kuchlar sistemasi, ta’sir chizg’i keltirish markazidan o’tuvchi bir teng ta’sir etuvchiga keltiriladi.

3. $R \neq 0,\ M_0 \neq 0$ va $\overline{M}_0 \perp \overline{R}$

Bu holda fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasi, ta’sir chizig’i keltirish markazidan o’tmaydigan bir teng ta’sir etuvchiga keltiriladi. Haqiqatan R va M_o fazoda ixtiyoriy joylashgan $(\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F}_3, \overline{F}_n)$ kuchlar sistemasi bosh vektori va bosh momenti bo’lsin va $M_0 \perp R'$ (48-shakl). Bosh moment M_o ni R=R"=R' bo’lgan (R, R") juft bilan almashtiramiz. Bu juftning biror kuchini O nuqtaga qo’yib, R' kuchga qarama-qarshi qilib olamiz,



48-shakl

juftning yelkasi quyidagi shartdan aniqlanadi:

$$OC = \frac{M_0}{R'} \qquad (5.22)$$

demak kuchlar sistemasi, $(\overline{F}_1, \overline{F}_2, ..., \overline{F}_n) \Leftrightarrow (\overline{R}', \overline{R}'', ..., \overline{R})$, biroq sistema bo’lgani uchun $(\overline{F}_1, \overline{F}_2, ..., \overline{F}_n) \Leftrightarrow \overline{R}$ va berilgan kuchlar sistemasiga ekvivalent bo’lib, C nuqtaga qo’yiladi, O nuqtadan C nuqtagacha bo’lgan masofa (5.22) formula yordamida topiladi.

Teng ta’sir etuvchining momenti haqida Varin’on teoremasi

Biror nuqtaga nisbatan teng ta’sir etuvchining momenti bilan kuchlar sistemasini tashkil etuvchilari momentlari orasidagi munosabatini o’rnatamiz.

Fazodagi $(\overline{F}_1, \overline{F}_2, ..., \overline{F}_n)$ kuchlar sistemasi ta’sir chizig’i C dan o’tuvchi R kuchga keltiriladi deb qaraylik. Teng ta’sir etuvchini ixtiyoriy O nuqtasiga nisbatan momenti

$\overline{m}_0(R)$ ni aniqlaymiz. Ixtiyoriy O markazga nisbatan

$$m_0(\overline{R}) = R \cdot OC$$

modomiki

$$R = R' \text{ va } OC = \frac{M_0}{R'},$$

u holda

$$m_0(\overline{R}) = M_0$$

ya'ni teng ta'sir etuvchining momenti berilgan kuchlar sistemasi bosh momentiga teng. Teng ta'sir etuvchining moment vektori yo'nalishi O keltirish markaziga nisbatan bosh moment vektorining yo'nalishi bilan bir xil. Teng ta'sir etuvchi kuchning momenti $\overline{m}_0(\overline{R})$ bosh moment $\overline{M}_0$ ga geometrik teng ya'ni

$$\overline{m}_0(\overline{R}) = \overline{M}_0$$

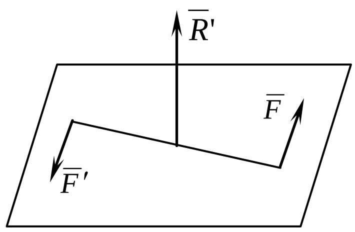
yoki (5.13) ga binoan

$$\overline{m}_0(\overline{R}) = \sum_{k=1}^{n} \overline{m}_0(\overline{F}_k) \tag{5.23}$$

(5.23) ifoda fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasi uchun Varin'on teoremasini ifodalaydi: ***fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasining teng ta'sir etuvchisini O markazga nisbatan momenti berilgan kuchlardan shu markazga nisbatan olingan momentlarning geometrik yig'indisiga teng***. Ixtiyoriy keltirish markazi O dan qandaydir OZ o'qini o'tkazamiz nuqtaga nisbatan kuch momenti bilan undan o'tuvchi o'qqa nisbatan kuch momentlari orasidagi munosabatdan foydalanib va (5.23) vektorli tenglikni OZ o'qiga proyeksiyalab quyidagini olamiz:

$$\overline{m}_z(\overline{R}) = \sum_{k=1}^{n} \overline{m}_z(\overline{F}_k) \tag{5.24}$$

Teng ta'sir etuvchini ixtiyoriy OZ o'qiga nisbatan momenti haqidagi Varin'on teoremasini (5.24) tenglik ifodalaydi. ***Kuchlar sistemasini teng ta'sir etuvchisini biror OZ o'qiga nisbatan momenti berilgan kuchlardan shu o'qqa nisbatan olingan kuch momentlarining algebraik yig'indisiga teng***. Umumiy holda $R' \neq 0$, $\mathrm{M}_0 \neq 0$ va bosh vektor bilan bosh momenti o'zaro perpendikulyar bo'lmasa, u holda kuchlar sistemasi bosh vektor R' ga teng bo'lgan kuchga va bosh vektor perpendikulyar bo'lgan tekislikda yotuvchi qandaydir juftga keltiriladi. Juft va juftning ta'sir tekisligiga perpendikulyar bo'lgan kuchdan tashkil topgan sistema dinama deyiladi (49-shakl).



49-shakl

Fazodagi kuchlar sistemasining muvozanat shartlari

Agar fazodagi kuchlar sistemasining bosh vektori $\overline{R}$ va bosh momenti M_0 lar nolga teng bo'lsa, u holda kuchlar sistemasi o'zaro muvozanatlashadi. Shuning uchun fazodagi kuchlar sistemasining muvozanat shartlari quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$\overline{R}' = 0;\ \overline{M}_0 = 0$$

yoki:

$$\sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k = 0; \quad \sum_{k=1}^{n} m_0(\overline{F}_k) = 0 \qquad (5.25)$$

Fazodagi kuchlar sistemasi uchun (5.25) muvozanatning zarur va yetarli shartlaridir. Agar (5.25) tenglikni koordinata o'qlariga proyeksiyalasak, fazodagi kuchlar sistemasi muvozanat shartlarining analitik ifodasini olamiz:

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0; \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0; \sum_{k=1}^{n} F_{kz} = 0 \qquad (5.26)$$

$$\sum m_x(\overline{F}_k) = 0;\ \sum m_y(\overline{F}_k) = 0;\ \sum m_z(\overline{F}_k) = 0; \qquad (5.27)$$

Agar (5.26) va (5.27) tengliklarda noma'lum reaksiya kuchlari ishtirok etsa u holda bu tengliklar muvozanat tenglamalari deyiladi va ulardan noma'lum bog'lanish reaksiya kuchlari aniqlanadi. Jismga ta'sir etuvchi kuchlar fazoda ixtiyoriy joylashgan bo'lib, bu kuchlar muvozanatiga oid masalalarda noma'lumlar soni oltitadan oshmasa, statik aniq masala deyiladi. Boshqa xususiy hollardagi kuchlar sistemasi uchun muvozanat sistemalari (5.26) va (5.27) lardan kelib chiqadi.

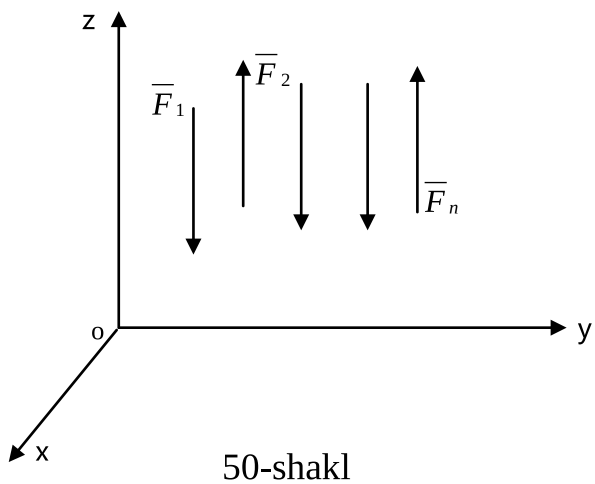
Fazodagi parallel kuchlar sistemasining muvozanat shartlari

Berilgan kuchlar sistemasi OZ o'qiga parallel (50-shakl).

U holda bu kuchlar sistemasining har bir F_z kuchi OX va OY o'qlaridagi proyeksiyalari va OZ o'qiga nisbatan momentlari O ga teng, shuning uchun (5.26) va (5.27) tenglamalar sistemasidan faqat quyidagi tenglamalar qoladi:

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0; \qquad \sum_{k=1}^{n} M_x(\overline{F}_k) = 0; \qquad \sum_{k=1}^{n} M_y(\overline{F}_k) = 0 \qquad (5.28)$$

Tenglamalar (5.28) fazoda parallel kuchlar sistemasining muvozanat shartlari deyiladi.



50-shakl

Takrorlash uchun savollar :

1. Fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasi deb qanday kuchlarga aytiladi?
2. Kuchning nuqtaga nisbatan momenti vektori deb qanday vektorga aytiladi?
3. Kuchning nuqtaga nisbatan momenti vektori qanday hisoblanadi?
4. Kuchning o'qqa nisbatan momenti deb nimaga aytiladi?
5. Kuchning o'qqa nisbatan momenti ishorasi qanday bo'ladi?

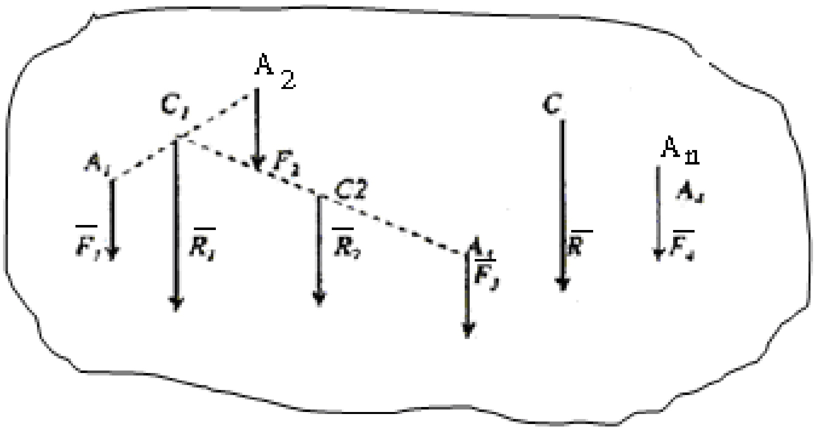
6. Kuchning o'qqa nisbatan momenti qachon nolga teng?
7. Kuchning o'qqa va shu o'qdagi nuqtaga nisbatan momentlari orasida qanday bog'lanishlar bor?
8. Fazodagi juft kuch momenti vektori nima?
9. Juft kuchni o'z tekisligiga parallel tekislikka ko'chirilsa uning jismga ta'siri qanday bo'ladi?
10. Kesishuvchi tekislikda joylashgan juft kuchlarni qanday qo'shish mumkin?
11. Bosh vektor va bosh moment deb qanday vektorlarga aytiladi?
12. Bosh vektor va bosh momentning analitik ifodalari qanday?
13. Bosh vektor va bosh moment bir markazga keltirilsa, qanday hollar bo'ladi?
14. Teng ta'sir etuvchining momenti haqidagi Varin'on teoremasini aytib bering.
15. Fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasining muvozanat shartlari qanday?
16. Fazodagi parallel kuchlar sistemasining muvozanat shartlari qanday?

Tayanch so'zlar va iboralar:

Kuch, kuch momenti, muvozanat, kuchlar sistemasi, reaksiya kuchi, bosh vector, bosh moment, parallel kuchlar

6-MA'RUZA. PARALLEL KUCHLAR MARKAZI VA JISMLARNING OG'IRLIK MARKAZLARINI ANIQLASH USULLARI

Bir tekislikda yotmaydigan $(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3)$ parallel kuchlar sistemasini ko'ramiz (51-shakl)



51-shakl

kuchlarni ketma-ket qo'shamiz $\bar{F}_1$ va $\bar{F}_2$ kuchlarni qo'shib, ularga parallel bo'lgan $\bar{R}_1$ teng ta'sir etuvchisini topamiz. Uning miqdori $R_1=F_1+F_2$ ga teng bo'lib, qo'yilish nuqtasi quyidagi proporsiyadan aniqlanadi:

$$\frac{A_1C_1}{A_2C_1} = \frac{F_2}{F_1}$$

Endi $\bar{R}_1$ va $\bar{F}_3$ kuchlarni qo'shamiz ularning teng ta'sir etuvchisi R_2ning miqdori quyidagiga teng:

$$R_2 = R_1 + F_3 = F_1 + F_2 + F_3$$

qo'yilish nuqtasi esa quyidagi proporsiyadan aniqlanadi:

$$\frac{C_1C_2}{A_3C_2} = \frac{F_3}{R_2}$$

Endi R_2 va F_4 kuchlarning teng ta'sir etuvchisining miqdori

$$R = R_2 + F_4 = F_1 + F_2 + F_3 + F_4$$

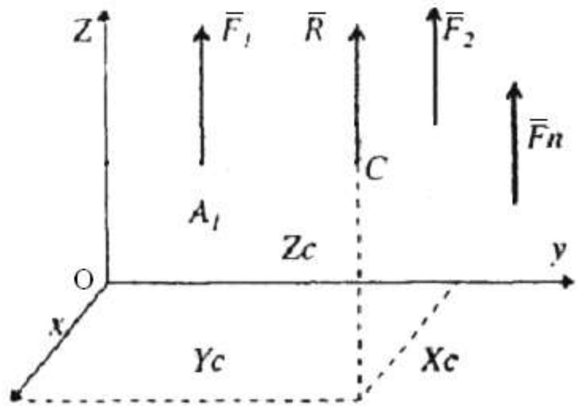
bo'lib, qo'yilish nuqtasi S nuqta quyidagi proporsiyadan aniqlanadi:

$$\frac{A_2C}{A_4C} = \frac{F_4}{R}$$

Yuqoridagi tavsifdan ko'rinadiki, n ta parallel kuchlar sistemasining teng ta'sir etuvchisi ularning yig'indisiga teng:

$$R = \sum_{k=1}^{n} F_k \tag{6.1}$$

Qo'yilish nuqtasi esa kuchlarning fazodagi yo'nalishlariga bog'liq bo'lmaydi, haqiqatan ham agar kuchlarning hammasini ularning qo'yilish nuqtalari atrofida teng burchakka bir tomonga bursak, ularning teng ta'sir etuvchisi ham shu burchakka C nuqta atrofida buriladi. Teng ta'sir etuvchi ta'sir chizig'i har doim parallel kuchlarning fazoda har qanday yo'nalishida ham C nuqtadan o'tadi. C nuqta parallel kuchlar markazi deyiladi.



52-shakl

Parallel kuchlar sistemasi markazining koordinatalarini aniqlash uchun koordinata sistemasi OZ o'qini berilgan kuchlar sistemasiga parallel qilib olamiz (52-shakl). Kuchlar qo'yilgan $A_1, A_2, A_3, ...A_n$ nuqtalarning koordinatalarini mos ravishda $x_1, y_1, z_1', x_2, y_2, z_2', ..., x_n, y_n, z_n'$. Parallel kuchlar markazi C nuqtaning kichik x, y, z koordinatalarini Xc, Yc, Zc deb belgilaymiz. Teng ta'sir etuvchining OX o'qiga nisbatan momenti haqidagi teoremani tatbiq qilamiz:

$$m_x(\overline{R}) = \sum_{k=1}^{n} m_x(F_k) \text{ yoki } R \cdot Y_c = F_1 \cdot y_1 + F_2 \cdot y_2 + ... + F_n \cdot y_n$$

$$\text{bundan } y_c = \frac{F_1 \cdot y_1 + F_2 \cdot y_2 + ... + F_n \cdot y_n}{R} \quad \text{yoki } y_c = \frac{\sum_{k=1}^{n} F_k \cdot y_k}{\sum_{k=1}^{n} F_k}$$

Shu teoremani OY o'qiga nisbatan tatbiq qilib Xc koordinatani aniqlaymiz:

$$x_c = \frac{\sum_{k=1}^{n} F_k \cdot x_k}{\sum_{k=1}^{n} F_k}$$

Endi koordinatani aniqlash uchun hamma kuchlarni bir tomonga OY o'qiga parallel qilib 90^0 ga buramiz va teng ta'sir etuvchining momenti haqidagi teoremani OX o'qiga nisbatan tatbiq qilamiz. Shunday qilib parallel kuchlar markazi quyidagi formulalar yordamida aniqlanadi.

$$x_c = \frac{\sum_{k=1}^{n} F_k \cdot x_k}{\sum_{k=1}^{n} F_k}; \quad y_c = \frac{\sum_{k=1}^{n} F_k \cdot y_k}{\sum_{k=1}^{n} F_k}; \quad z_c = \frac{\sum_{k=1}^{n} F_k \cdot z_k}{\sum_{k=1}^{n} F_k} \qquad (6.2)$$

Biror yo'nalishni musbat tanlab olib, (6.2) formula yordamida nuqta koordinatalari x_c, y_c, $z_c$larni aniqlanayotganda kuchlarning qiymatlari mos ishoralar bilan olinishi zarur.

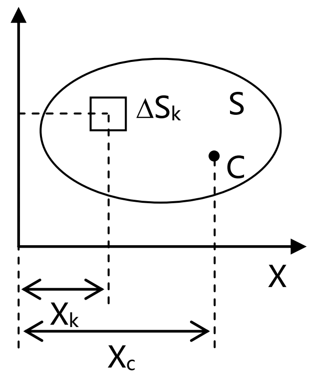
Jism og'irlik markazining koordinatalari uchun umumiy formulalar

Jismni elementar bo'lakchalarga bo'lib, har bir bo'lakka ularning og'irlik kuchlarini qo'yamiz. U holda parallel kuchlar sistemasini hosil qilamiz (53-shakl). Parallel og'irlik kuchlar sistemasining markazi, jismning og'irlik markazi bo'ladi. Jismning og'irlik markazining koordinatalari (6.2) formulaga asosan quyidagicha aniqlanadi:

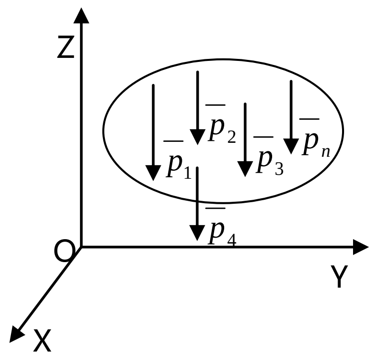
$$X_c = \frac{\sum_{k=1}^{n} P_k \cdot x_k}{\sum_{k=1}^{n} P}; \; Y_c = \frac{\sum_{k=1}^{n} P_k \cdot y_k}{\sum_{k=1}^{n} P}; \; Z_c = \frac{\sum_{k=1}^{n} P_k \cdot z_k}{\sum_{k=1}^{n} P} \qquad (6.3)$$

bu yerda R-jism og'irligi. Bir jinsli jism uchun $P_k = \gamma \Delta V_k; \; P = \gamma V$

bu yerda ΔV_k-elementar bo'lakchaning hajmi, V-jism hajmi, γ-birlik hajmining og'irligi.



54-



53-

P_k va P larning qiymatlarini (6.3) formulalarga qo'yib quyidagilarni olamiz:

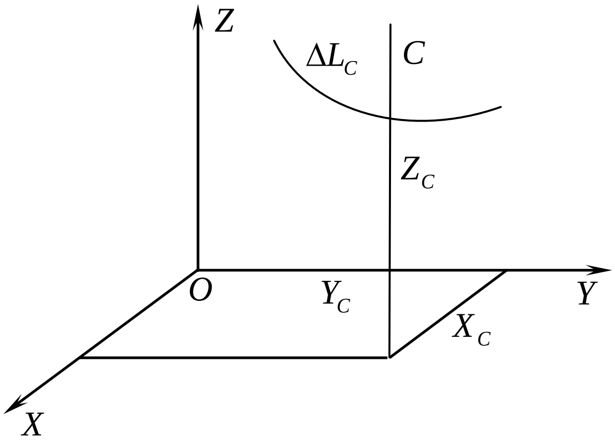
$$X_c = \frac{\sum_{k=1}^{n} X_k \Delta V_k}{V}; \; Y_c = \frac{\sum_{k=1}^{n} Y_k \Delta V_k}{V}; \; Z_c = \frac{\sum_{k=1}^{n} Z_k \Delta V_k}{V}; \qquad (6.4)$$

Agar jism yupqa bir jinsli plastinka bo'lsa, uning og'irlik markazi koordinatalari quyidagi formulalar bilan aniqlanadi (54-shakl):

$$X_c = \frac{\sum_{k=1}^{n} X_k \Delta \rho_k}{\rho}; \; Y_c = \frac{\sum_{k=1}^{n} Y_k \Delta \rho_k}{\rho} \qquad (6.5)$$

bu yerda ΔS_k -elementar bo'lakchaning yuzasi S-butun plastinka yuzasi. Agar jism bir jinsli chiziqdan (55-shakl) iborat bo'lsa, uning og'irlik markazining koordinatalari quyidagi formulalar yordamida aniqlanadi:

$$X_c = \frac{1}{L}\sum_{k=1}^{n} X_k \Delta L_k \;;\; Y_c = \frac{1}{L}\sum_{k=1}^{n} Y_k \Delta L_k \;;\; Z_c = \frac{1}{L}\sum_{k=1}^{n} Z_k \Delta L_k \tag{6.6}$$



55-shakl

Quyidagi belgilarni kiritamiz:

$$S_k = \sum_{k=1}^{n} Y_k \Delta S_k \;;\; S_y = \sum_{k=1}^{n} X_k \Delta S_k \tag{6.7}$$

U holda (6.5) formulalarni quyidagi ko'rinishda yozamiz:

$$X_c = \frac{S_y}{S} \;;\; Y_c = \frac{S_x}{S} \tag{6.8}$$

Bu yerda S_x yuzaning OX o'qiga nisbatan statik momenti deb ataladi, S_y esa Oy o'qiga nisbatan yuzaning statik momenti deb ataladi. Agar yuza og'irlik markazining koordinatalari aniq bo'lsa, uning statik momenti quyidagi formulalar yordamida aniqlanadi:

$$S_x = S \cdot Y_c \;;\; S_y = S \cdot X_c \tag{6.9}$$

Og'irlik markazini aniqlash usullari

1. Simmetrik jismlarning og'irlik markazi

Teorema:

Agar bir jinsli jism simmetriya tekisligi o'qi yoki markaziga ega bo'lsa, u holda uning og'irlik markazi mos ravishda shu tekislikda, o'q yoki markazda yotadi.

Isbot:

Jism simmetriya tekisligiga ega bo'lsin (56-shakl). U holda teoremaga asosan

$$Z_c = 0 \text{ yoki } \sum_{k=1}^{n} Z_k \Delta V_k = 0$$

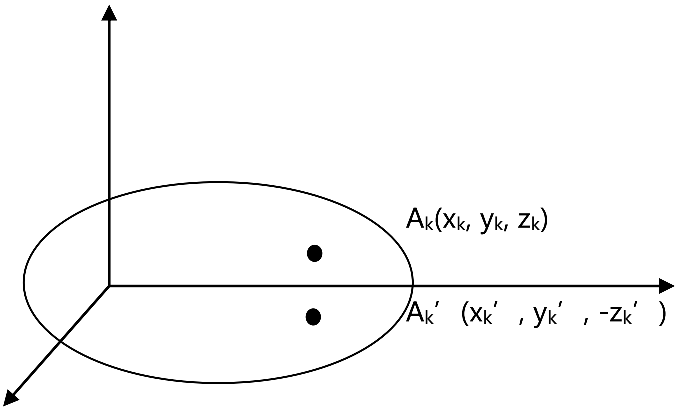
bo'ladi, shunga ko'ra jism elementar $A_1, A_2, \ldots, A_n$ bo'laklarining hajmlarini mos ravishda quyidagicha bo'lgan

$$\Delta V_1, \Delta V_2, \ldots, \Delta V_n$$

bo'lakchalarga bo'lamiz. Simmetriya o'qiga ega bo'lganligi sababli har qanday X_k, Y_k, Z_k koordinatali A_k bo'lakcha OXY tekisligiga nisbatan simmetrik bo'lgan A'_k nuqtaga mos keladi, uning koordinatalari $X_k, Y_k, -Z_k$ bo'ladi. Quyidagi ko'paytmalarni

$Z_k \Delta V_k$ tuzib qo'shsak quyidagini olamiz:

$$\sum_{k=1}^{n} Z_k \Delta V_k = 0$$



56-shakl

u holda $Z_1 = 0$ bo'ladi. Xuddi shunday qolgan hollar ya'ni jism simmetrik o'q yoki markazga ega bo'lgan hollar isbot qilinadi.

2. Bo'laklarga ajratish (to'ldirish) usuli

Agar bir jinsli qattiq jismni og'irlik markazlari ma'lum bo'lgan chekli sonli geometrik shakllarga ajratish mumkin bo'lsa, u holda uning og'irlik markazining koordinatalari (6.4), (6.5), (6.6) formulalar yordamida aniqlanadi. Agar qattiq jismda teshiklar mavjud bo'lsa, uning og'irlik markazini aniqlashda jismni to'liq deb qaraladi, teshiklar va yetishmovchi yuza yoki hajmga tegishli hadlar manfiy ishoralar bilan olinadi. Bu usulni manfiy yuzalar (hajmlar) usuli deb ataladi.

Masala:

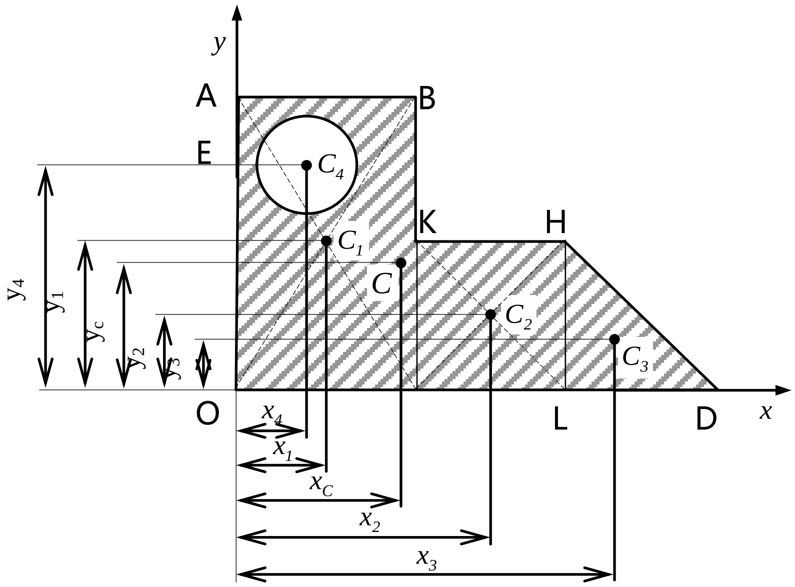
57-shaklda tasvirlangan bir jinsli yupqa plastinka og'irlik markazining koordinatalari aniqlansin.

Yechish:

Plastinkani to'rtta bo'laklarga ajratamiz. Markazga c_1,(x_1, y_1) nuqta bo'lgan to'rt burchak markazi c_2(x_2,y_2) nuqta bo'lgan to'rtburchak markazi c_3(x_3 y_3) nuqta bo'lgan uchburchak va markazi s_4(x_4,y_4) nuqta bo'lgan doira (teshik) shakldan c_1, c_2, c_3, c_4 nuqtalarining koordinatalari ma'lum o'lchovlari yordamida aniqlanadi. Bo'lakchalarning yuzalarini S_1, S_2, S_3, S_4lar bilan belgilaymiz va ular osonlikcha aniqlanadi, (6.5)ga asosan quyidagi formuladan foydalanib, og'irlik markazining koordinatalarini topamiz.

$$\left.\begin{aligned} X_c &= \frac{S_1 \cdot x_1 + S_2 \cdot x_2 + S_3 \cdot x_3 + S_4 \cdot x_4}{S_1 + S_2 + S_3 + S_4} \\ Y_c &= \frac{S_1 \cdot y_1 + S_2 \cdot y_2 + S_3 \cdot y_3 + S_4 \cdot y_4}{S_1 + S_2 + S_3 + S_4} \end{aligned}\right\} \qquad (6.10)$$

Agar OA=30 sm, OD=36 sm, OE=24sm, AB=10 sm, BK=20 sm, x_4=5 sm, y_4=24 sm, r=3 sm, x_1=5, x_2=17, y_1=15, y_2=5 bo'lsa $x_3 = 28;\ y_3 = \frac{10}{3}.$



57-shakl

Agar S_1=300, S_2=140, S_3=60, S_4=9π bo'lsa, (6.10) tenglikdan quyidagilarni topamiz:

$$x_c = \frac{300\cdot 5 + 140\cdot 17 + 60\cdot 28 - 9\pi\cdot 5}{300+140+60-9\pi} = \frac{5418{,}7}{471{,}7} \approx 11{,}5\ sm$$

$$y_c = \frac{300\cdot 15 + 140\cdot 5 + 60\cdot \frac{10}{3} - 9\pi\cdot 24}{300+140+60-9\pi} = \frac{4721}{471{,}7} \approx 10\ sm$$

1. Integrallash usuli

Agar bir jinsli qattiq jismni chekli sondagi sodda geometrik shakllarga ajratishning iloji bo'lmasa, u holda og'irlik markazi koordinatalarni (6.4), (6.5), (6.6) formulalar yordamida aniqlash uchun bu formulalarda bo'lakchalar soni n cheksizlikka intiladi, ularning o'lchovlari nolga intiladi. Bu formulalarda limitga o'tib hajm og'irlik markazining koordinatalari quyidagi formulalar yordamida aniqlanadi:

$$X_c = \frac{1}{V}\int_{(x)} xdV;\ Y_c = \frac{1}{V}\int_{(x)} ydV;\ Z_c = \frac{1}{V}\int_{(x)} zdV \qquad (6.11)$$

Sirt og'irlik markazining koordinatalari quyidagi formulalar yordamida aniqlanadi:

$$X_c = \frac{1}{S}\int_{(S)} xdS;\ Y_c = \frac{1}{S}\int_{(S)} ydS;\ Z_c = \frac{1}{S}\int_{(S)} zdS.$$

bu yerda S – sirt yuzasi.

Agar sirt tekis shakl bo'lsa va XOY tekislik shu shakl tekisligida olinsa, yuqoridagi formulalar quyidagicha yoziladi:

$$X_c = \frac{1}{S}\int_{(S)} xdS;\ Y_c = \frac{1}{S}\int_{(S)} ydS;\ Z_c = \frac{1}{S}\int_{(S)} zdS \qquad (6.12)$$

Кo'ndalang qirqim yuzalari o'zgarmas va bir jinsli moddadan iborat chiziqning og'irlik markazining koordinatalari quyidagi formulalar yordamida aniqlanadi:

$$X_c = \frac{1}{L}\int_{(L)} xdl;\ Y_c = \frac{1}{L}\int_{(L)} ydl;\ Z_c = \frac{1}{L}\int_{(L)} zdl \qquad (6.13)$$

Masala

Aylana qismi (yoyi) og'irlik markazining koordinatalari aniqlansin. Markaziy burchagi 2α bo'lgan R radiusli AB aylana yoyini olamiz (58-shakl). Aylana yoyi simmetriya o'qiga ega OX koordinata o'qidir. Isbot qilingan teoremaga asosan yonning og’irlik markazi uning simmetriya o’qida yotishi kerak, ya’ni $Y_C=0$ koordinata X_C quyidagi formula yordamida aniqlanadi.

$$X_c = \frac{1}{L_1}\int_{(L_1)} x dl$$

og’irlik markazining abssissasi x bo’lgan yoydan cheksiz kichik elementar dl bo’lakchani ajratib olamiz. U holda

$$dl = R\cdot d\varphi,\ x = R\cdot\cos\varphi,\ L = R\cdot\alpha$$

quyidagi ifodalarni dl x va α (7.14) formulaga qo’yib, φ bo’yicha integrallab, quyidagini olamiz:

$$X_C = \frac{1}{2R\alpha}\int_{-a}^{a} R^2\cos\alpha d\varphi = \left(\frac{R}{2\alpha}\cdot\sin\varphi\right)\Big|_{-a}^{a} = \frac{R\sin\alpha}{\alpha}$$

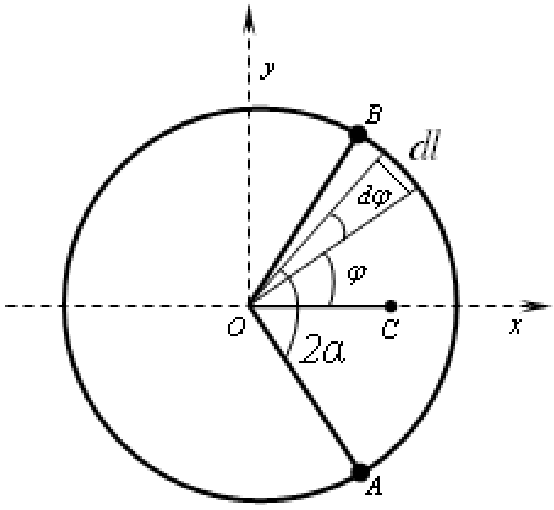
Demak

$$X_c = \frac{R\sin\alpha}{\alpha} \tag{6.15}$$

yarim aylana uchun $\alpha = \frac{\pi}{2}$ bo’lganda

$$X_c = \frac{2R}{\pi} \approx 0{,}63r$$

bo’ladi (58-shakl).



58-shakl

Masala

Doira shaklli sektor yuzaning og’irlik markazi koordinatlarini aniqlang. Ixtiyorimizda R radiusli va markaziy burchagi 2α bo’lgan doira sektor yuzi mavjud. 59-shakl sektor yuzasining simmetriya o’qini OX koordinata o’qi sifatida qabul qilib va OC=x masofani quyidagi formula yordamida aniqlaymiz:

$$X_c = \frac{1}{S}\int_S x dS \tag{6.17}$$

markaziy burchagi $d\varphi$ bo’lgan cheksiz kichik Oab sektor yuzachani ajratamiz. Xuddi teng yonli uchburchak deb qaralgan bu elementar bo’lakchaning og’irlik markazi c' nuqtada bo’lib, bu masofa quyidagiga teng $OC' = \frac{2}{3}R$, bu c' markaz nuqtaning koordinatasi quyidagiga teng

$$X = \frac{2}{3} \cdot R \cdot \cos\varphi$$

yuzacha $dS = \frac{1}{q} \cdot R^2 d\varphi$ sektor yuzasi $S = \frac{1}{2} \cdot R^2 \cdot 2\alpha = R^2\alpha$

olingan ifodalar S_1,dS larni (7.17) formulaga qo'yib va φ bo'yicha integrallab, quyidagini olamiz.

$$X_c = \frac{1}{R^2\alpha} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{1}{3} R^3 \cos\varphi d\varphi = \left(\frac{R}{3\alpha} \cdot \sin\varphi\right)\Big|_{-\alpha}^{\alpha} = \frac{2R\sin\alpha}{3\alpha}$$

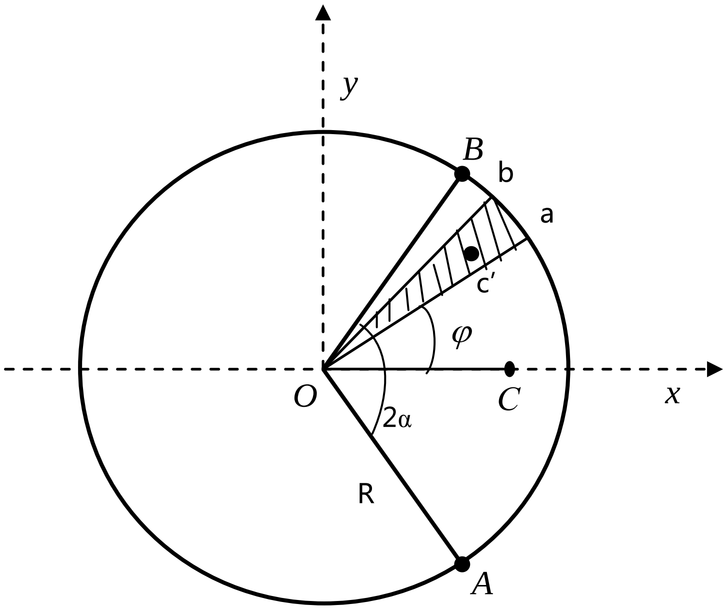
demak,

$$X_c = \frac{2}{3} \cdot R \cdot \frac{\sin\alpha}{\alpha} \qquad (6.18)$$

sektor o'rnida yarim doira bo'lsa $\alpha = \frac{\pi}{2}$ bo'lib,

$$X = \frac{4R}{3\pi} = 0{,}2124$$

qiymatga ega

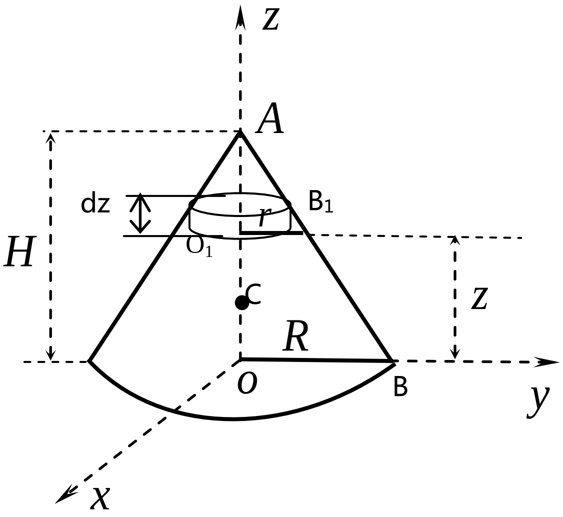


59-shakl

Masala

Balandligi H va asosining radiusi R bo'lgan to'g'ri doiraviy konus og'irlik markazining koordinatalari aniqlansin, konusning simmetriya o'qini OZ koordinata o'qi sifatida olamiz. U holda $X_c = Y_c = 0$, Z_c koordinata quyidagi formula yordamida aniqlanadi:

$$Z_c = \frac{1}{V} \int_V Z dv \qquad (6.20).$$



60-shakl

Konus asosidan Z masofa balandlik dz va radiusi r bo'lgan silindr ko'rinishdagi cheksiz kichik bir element hajmini ajratamiz(60-shakl). Bu element hajmi quyidagiga teng:

$$dV = \pi \cdot r^2 dz$$

radius r ni AOB va O_1AB_1 uchburchaklarning o'xshashligidan aniqlanadi:

$$\frac{r}{R} = \frac{H - z}{H}$$

bundan

$$r = \frac{R}{H}(H - z)$$

u holda

$$dV = \frac{\pi R^2}{H^2}(H - z)^2 dz$$

konusning hajmi quyidagiga teng: $V = \frac{1}{3}\pi \cdot R^2 \; H$ bo'lgani uchun (6.20) ga asosan

$$Z_C = \frac{\int_O^H z \frac{\pi (H - Z)^2 R^2}{H^2} dz}{\frac{1}{3}\pi R^2 H} = \frac{1}{4}\pi \; H \tag{6.21}$$

Takrorlash uchun savollar

1. Parallel kuchlar markazi qanday aniqlanadi?
2. Og'irlik markazini aniqlash formulalari qanday?
3. Hajmning og'irlik markazini aniqlash formulasini keltiring?
4. Yuzaning og'irlik markazi qanday aniqlanadi?
5. Chiziqning og'irlik markazi qanday aniqlanadi?
6. Og'irlik markazini aniqlashning qanday usullarini bilasiz?

Tayanch so'zlar va iboralar:

Parallel kuchlar, parallel kuchlar markazi, teng ta'sir etuvchisi, og'irlik markazi, og’irlik markazi koordinatalari.

7-MA’RUZA. NUQTA KINEMATIKASI. KINEMATIKANING ASOSIY TUSHUNCHALARI. NUQTA TEZLIGINI ANIQLASH USULLARI

Nazariy mexanikaning kinematika bo’limida jismlarning harakati bu harakatni vujudga keltiruvchi kuchlarni nazarda tutilmay, faqat geometrik nuqtai nazardan tekshiriladi. Kinematika so’zi grekcha «kinema» so’zidan olingan bo’lib, harakat degan ma’noni anglatadi. Kinematikada harakatning aniqlanish usullari, harakatni kinematik xarakterlaydigan kattaliklar (trayektoriya, tezlik va tezlanishlar) aniqlanadi. Jismning harakatini kinematik usulda aniqlash texnikada turli mashina va mexanizmlar qismlarining harakatini o’rganish uchun nazariy baza bo’lib xizmat qiladi. XIX asrning boshlarida texnikaning tez taraqqiy etishi va shu jumladan, mashinasozlikning rivojlanishi, jism harakatini geometrik tekshirish masalasini ilgari surdi. Shu davrdan boshlab kinematika nazariy mexanikaning mustaqil qismi bo’lib ajraldi.

Materiya doimo harakatda bo’lganidan, uni vaqt va fazodan ajratib tasvirlab bo’lmaydi. Olamda harakat qiluvchi materiyadan boshqa hech narsa yo’qdir, harakat qiluvchi materiya esa fazo va vaqtda harakat qiladi. Ta’rifga ko’ra harakat materiyaning ajralmas asosiy xossasidir.

Tabiat to’g’risidagi fanlardan biri bo’lgan nazariy mexanikani o’rganish dunyoga mantiqiy nuqtai nazardan qarash va to’g’ri uslublar asosida fikr yurgizishga yordam beradi. Nazariy mexanikada jismlar harakatining eng sodda shakli - mexanik harakat tekshiriladi. Vaqtning o’tishi bilan moddiy jismlarning fazoda bir-biriga nisbatan ko’chishiga mexanik harakat deyiladi. Kinematikada jismlarning harakati boshqa biror jism bilan bog’langan, koordinata sistemasiga nisbatan tekshiriladi.

Tabiatda mutlaq harakatsiz jism bo’lmagani tufayli mutlaq qo’zg’almas sanoq sistemasi ham mavjud bo’lmaydi. Shu sababli «Harakat» va «Muvozanat» tushunchalari nisbiy tushunchalardir. Agar jismni biror sanoq sistemasiga nisbatan vaziyati vaqtning o’tishi bilan o’zgarmasa, jism mazkur sanoq sistemasiga nisbatan tinch holatda (muvozanatda) bo’ladi. Yerdagi jismlarning harakatini tekshirilganda asosiy yoki «qo’zg’almas» sanoq sistemasi uchun odatda yerga nisbatan qo’zg’almas bo’lgan sanoq sistemasi olinadi. Tanlab olingan sanoq sistemasiga nisbatan har onda jismning vaziyatini aniqlash mumkin bo’lsa, jismning harakati kinematik aniqlangan deb hisoblanadi. Klassik mexanikada moddiy jismning kuzatilayotgan harakati uch o’lchovli Evklid fazosiga nisbatan tekshiriladi va kattaliklarni aniqlashda Evklid geometriyasidan foydalaniladi. Klassik mexanikada vaqtni universal deb hisoblanadi, ya’ni vaqtni barcha sanoq sistemalari uchun, ularni nisbiy harakatidan qat’iy nazar bir xilda deb qaraladi. Kinematikada matematik nuqtai nazardan qaraganda, vaqtni erkin o’zgaruvchi (argument) sifatida qaraladi va t bilan belgilanadi. Texnika masalalarini yechishda vaqtning o’lchov birligi 1 sekund deb qabul qilingan. Kinematikada uchraydigan chiziqli o’lchovlarni (harakatdagi nuqtaning koordinatalari, o’tgan yo’lning uzunligi va h.k) xuddi texnik va xalqaro SI birliklar sistemasida, metrlarda o’lchanadi. Qattiq jism harakatini kuzatar ekanmiz, ko’pincha uning turli nuqtalari turlicha harakatlanishini ko’ramiz.

Masalan: to’g’ri rels bo’yicha harakatlanayotgan vagon g’ildiragining harakatini olsak, g’ildirakning markazi to’g’ri chiziqli harakatda bo’ladi: G’ildirak to’g’inidagi nuqta esa egri chiziq (sikloida) bo’yicha harakatlanadi. Jism nuqtalarining bir xil vaqtda o’tgan yo’li turli xil bo’ladi. Shu sababli jismning harakatini tekshirishni ayrim nuqtaning harakatini tekshirishdan ya'ni nuqta kinematikasidan boshlash kerak.

Vaqtning o'tishi bilan nuqtaning fazoda qoldirgan iziga trayektoriya deyiladi. Nuqta trayektoriyasi to'g'ri chiziqdan iborat bo'lsa, u holda nuqtaning bunday harakatiga to'g'ri chiziqli harakat, aks holda egri chiziqli harakat deyiladi.

Nuqta harakatini aniqlash usullari

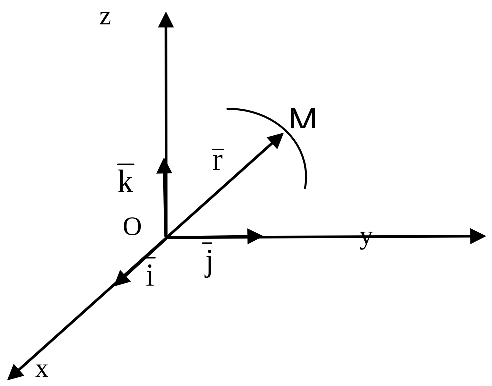
Agar istalgan t vaqt uchun nuqtaning berilgan sanoq sistemasiga nisbatan holati (vaziyati) ma'lum bo'lsa, mazkur sanoq sistemasiga nisbatan nuqtaning harakat qonuni ma'lum bo'ladi. Kinematikada nuqtaning harakat qonuni uchta usulda aniqlanadi:

1. Vektor usuli
2. Koordinata usuli
3. Tabiiy usul

1. Vektor usuli: Bu usulda M nuqtaning holati biror qo'zg'almas markazdan $\bar{r}(t)$ radius vektori bilan aniqlanadi (61-shakl). Vaqtnnng o'tishi bilan M nuqta harakatlanganda uning $\bar{r}$-radius vektori ma'lum qonun asosida o'zgaradi. Ya'ni skalyar argument t ning vektorli funksiyasidan iborat bo'ladi.

$$\bar{r} = \bar{r}(t) \tag{7.1}$$

Arap $\bar{r}(t)$ funksiya ma'lum bo'lsa, t vaqtning har bir payti uchun M nuqtaning holati ma'lum bo'ladi.

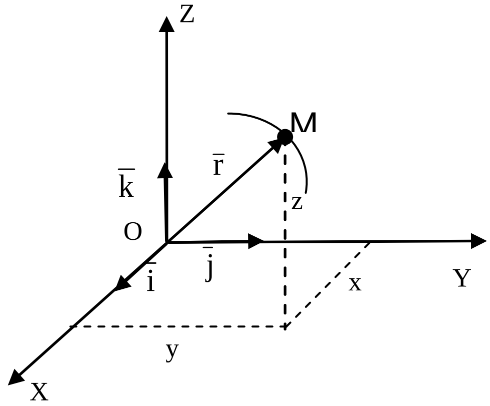


61-shakl

Shu sababli, (7.1)-tenglamani nuqtaning harakat tenglamasi, yoki harakat qonuni deyiladi. $\bar{r} = \text{const}$ bo'lsa, nuqta tinch holatda bo'ladi. Nuqta harakatini vektor usulida aniqlash harakatni o'rganishni soddalashtiradi, shuning uchun bu usuldan kinematika va dinamikada keng foydalaniladi.

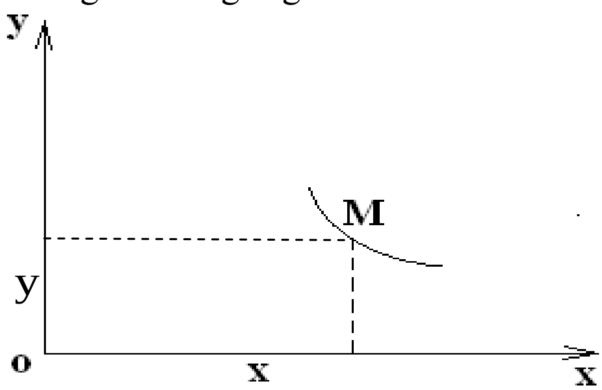
2. Koordinata usuli: Bu usulda harakatlanayotgan M nuqtaning holati uning uchta x, y, z to'g'ri burchakli Dekart koordinatalari orqali aniqlanadi (62-shakl). Nuqta harakatlanganda uning koordinatlari vaqt o'tishi bilan o'zgaradi. Binobarin, M nuqtaning koordinatlari x, y, z vaqtning bir qiymatli va uzluksiz differensiallanadigan funksiyasidan iborat bo'ladi.

$$\left.\begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \\ z &= z(t) \end{aligned}\right\} \tag{7.2}$$



62-shakl

Nuqta koordinatalari bilan t vaqt orasidagi (7.2) munosabatlar berilgan bo’lsa, M nuqtaning fazoda istalgan paytdagi holati ma’lum bo’ladi. Shu sababli nuqtaning Dekart koordinatalaridagi harakat tenglamalari deb ataluvchi (7.2) tenglamalar nuqtaning holatini butunlay aniqlaydi, (7.2) tenglamalardan t vaqtni yo’qotib, nuqta trayektoriyasining tenglamasi aniqlanadi. Agar nuqta trayektoriyasi bir tekislikda yotsa, u holda OXY tekisligi uchun mazkur trayektoriya yotgan tekislikni olamiz (63-shakl). Natijada nuqtaning ikkita harakat tenglamalariga ega bo’lamiz.



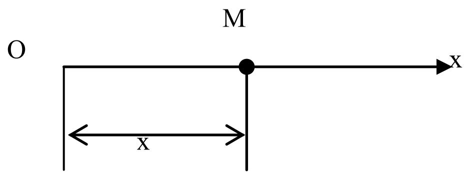
63-shakl

$$\left.\begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= x(t) \end{aligned}\right\} \tag{7.3}$$

(7.3) tenglamalarga nuqtaning tekislikdagi harakat tenglamalari deyiladi. Moddiy nuqta o’zining fazodagi harakati natijasida to’g’ri chiziqli yo’lni o’tsa, bunday harakat to’g’ri chiziqli harakat deyiladi. O nuqtani koordinatalar boshi desak, biror M nuqta harakatlanmasdan oldin O da yoki O dan ma’lum uzoqlikda bo’ladi. (64-shakl) Nuqtaning to’g’ri chiziqli harakati bitta

$$x=x(t) \tag{7.4}$$

tenglama bilan aniqlanadi.



64-shakl

Masala

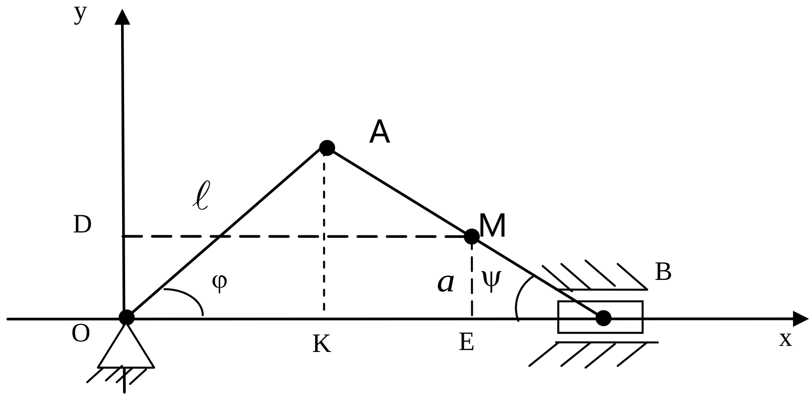
OA krivoship doimiy ω burchak tezligi bilan aniqlanadi. Uzunlik OA=a, AB=ℓ.

Shatun o'rtasidagi M nuqtaning harakat tenglamasi va trayektoriya tenglamasi aniqlansin. Shuningdek B polzunning harakat tenglamasi topilsin. Harakat boshlanishida B polzun o'ngdagi eng chetki holatda bo'lsin. Koordinata o'qlari shaklda ko'rsatilgan $l = a$ bo'lsin.

Yechish:

M nuqtadan koordinata o'qlariga MD va ME perpendikulyarlar tushiramiz. Shakldan (65-shakl)

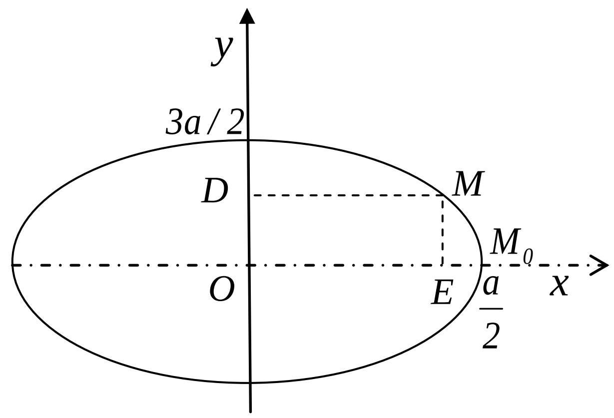
$$X=OE=OK+KE=OA\cdot\cos\omega t+AM\cdot\cos\omega t; \quad Y = ME = \frac{1}{2}\sin\psi$$



65-shakl

$l = a$ bo'lgani uchun OA=AB bo'ladi, u holda

$$X = a\cos\varphi + \frac{a}{2}\cos\varphi = \frac{3a}{2}\cos\varphi; \quad Y = \frac{a}{2}\sin\varphi$$



66-shakl

Bizda $\varphi = \omega \cdot t$ u holda

$$\left.\begin{aligned} X &= \frac{3a}{2}\cos\omega\cdot t \\ Y &= \frac{a}{2}\sin\omega\cdot t \end{aligned}\right\} \tag{7.5}$$

(7.5) tenglamalar sistemasi M nuqtaning harakat tenglamalari bo'ladi. Bu tenglamalardan vaqt t ni yo'qotsak, trayektoriya tenglamalasini topamiz. Sinus va kosinus funksiyalarning argumentlari bir xil bo'lsa, vaqt t ni yo'qotish uchun (1) tenglamalarni quyidagi ko'rinishda yozamiz:

$$\left.\begin{aligned}\cos\omega t &= \frac{2}{3}\cdot\frac{x}{a}\\ \sin\omega t &= \frac{2}{a}\cdot y\end{aligned}\right\} \qquad (7.2)$$

(7.2) tenglamalarning ikkala tomonini kvadratga ko'taramiz

$$\left.\begin{aligned}\cos^2\omega\cdot t &= \frac{4}{9}\cdot\frac{x^2}{a^2}\\ \sin^2\omega\cdot t &= \frac{4}{a^2}\cdot y^2\end{aligned}\right\} \qquad (7.3)$$

o'zaro qo'shib quyidagini hosil qilamiz:

$$\frac{4x^2}{9a^2}+\frac{4y^2}{a^2}=1 \quad yoki \quad \frac{x^2}{\frac{9a^2}{4}}+\frac{y^2}{\frac{a^2}{4}}=1 \qquad (7.4)$$

(7.4) ko'rinishdagi trayektoriya tenglamasini olamiz. M nuqtaning trayektoriyasi (7.4) tenglama yarim o'qlari $\frac{3a}{2}$ *va* $\frac{a}{2}$ ga teng bo'lgan va markazi koordinata boshida bo'lgan ellipsdan iboratdir (66-shakl). Endi B polzunning harakat tenglamasini topamiz. 65-shakldan:

$X=OB=a\cos\omega t+l\cos\omega t=a\cos\omega t+a\cos\omega t=2a\cos\omega t$ yoki $X_B=2a\cos\omega t$

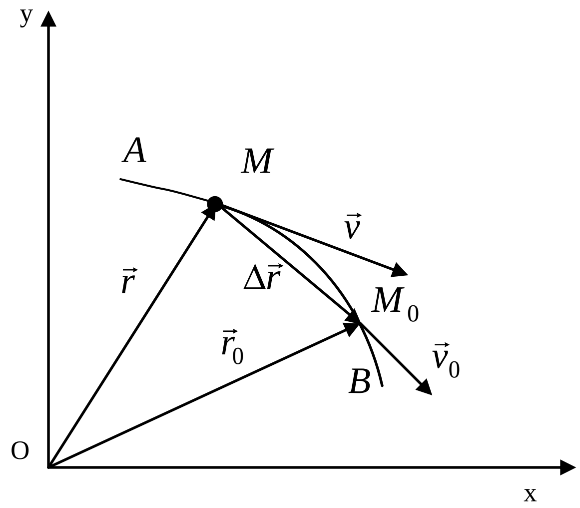
3. Tabiiy usul:

Harakatlanayotgan nuqtaning trayektoriyasi oldindan ma'lum bo'lsa, nuqta harakatini tabiiy usulda aniqlash qulay. Nuqtaning trayektoriyasi to'g'ri chiziqdan yoki egri chiziqdan iborat bo'ladi. Traektoriyada qo'zg'almas O nuqtani olib, bu nuqtaga nisbatan yoy koordinatasini o'tkazamiz (67-shakl). Harakatlanayotgan M nuqtaning trayektoriyadagi holatini O nuqtadan trayektoriya bo'yicha OM=S yoy koordinatasi bilan aniqlaymiz. O nuqtadan bir tomonga qo'yilgan masofani musbat, ikkinchi tomonga qo'yilgan masofani manfiy, deb hisoblaymiz. Vaqtning o'tishi bilan harakatlanayotgan nuqtadan qo'zg'almas O nuqtagacha bo'lgan OM masofa o'zgaradi, ya'ni koordinatasi vaqtning funksiyasidan iborat:

$$S=f(t) \qquad (7.5)$$

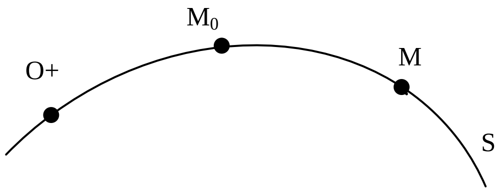
Bu munosabatga nuqtaning tabiiy usuldagi harakat tenglamasi yoki harakat qonuni deyiladi.

Agar f(t) funksiya ma'lum bo'lsa, u holda t vaqtning har bir payti uchun OM ni aniqlab, O nuqtadan trayektoriya bo'yicha qo'yamiz. Natijada M nuqtaning berilgan t paytdagi holati aniqlanadi. Shunday qilib, M nuqtaning harakatini tabiiy usulda aniqlash uchun, uning trayektoriyasida O qo'zg'almas nuqta (hisoblash boshi) va yoy koordinatasining hisoblash yo'nalishi hamda S=f(t) harakat tenglamasi bo'lishi kerak. Nuqtaning S yoy koordinatasi bilan trayektoriya ustidan o'tgan OM yo'li doimo bir xil bo'lavermaydi.



67 a-shakl

MK vektorni topamiz. Bu vektorni nuqtaning t vaqtdagi tezligi deyiladi. Agar nuqtaning o'rta tezliga V^* bilan belgilasak, agar M nuqtaning harakati O qo'zg'almas nuqtadan boshlanib $\Delta t = t - t_0$ vaqt oralig'ida doimo musbat yo'nalishi bo'yicha bo'lsa, t vaqtda nuqtaning yoy koordinatasi bilan Δt vaqt oralig'ida o'tilgan yo'l o'zaro teng.



67 b-shakl

Agar t_o boshlang'ich vaqtda nuqta M_0 holatda bo'lib, Δt vaqtdan keyin M holatni egallasa, u holda Δt oralig'ida nuqtaning bir tomonga harakatlanishi natijasida o'tilgan yo'l:

$$S = \int_{l_0}^{l} f'(t)dt$$

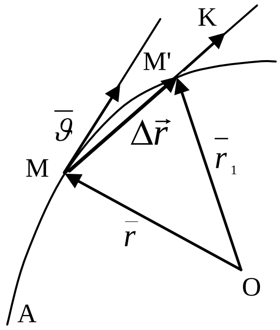
formula bilan aniqlanadi.

Nuqtaning tezligi

Harakat qonuni vektor usulda berilganda nuqtaning tezligi

Nuqta tezligi vektor miqdor bo'lib, nuqta harakatining berilgan momentdagi tezligi va bu harakatning yo'nalishini harakterlaydi. Nuqta AB egri chiziqli trayektoriya chizgan bo'lsin, $\bar{r} = \bar{r}(t)$ - harakat tenglamasi. Harakatlanayotgan bu nuqta holatini ixtiyoriy olingan qo'zg'almas O nuqtadan o'tkazilgan, uning $\bar{r}(t)$ radius vektori bilan aniqlanadi (68-shakl). Kichik vaqt Δt oralig'ida esa ya'ni t+Δt momentda M' holatni olsin. M' nuqtaning radius vektorini r_1 bilan belgilaymiz. MM' vektor nuqtaning Δt vaqtdagi ko'chishi deb ataladi. MM' ko'chishni vaqt oralig'i Δt ga nisbatini ifodalovchi $\overline{MK}$ vektorni o'rtacha tezlik deyiladi. Agar nuqtaning o'rtacha tezligini ϑ^* bilan belgilasak,

$$\overline{\vartheta *} = \frac{\overline{MM'}}{\Delta t} = \overline{MK} \qquad \text{ga teng.}$$



68-shakl

Endi Δt ni nolga intiltirib boramiz, bunda M′ nuqta M nuqtaga intiladi. $\overline{\vartheta *}$ vektor yo'nalishining limiti trayektoriyaning M nuqtasidagi urinma yo'nalishiga mos keladi, uning moduli esa,

$$\bar{\vartheta} = \lim_{\Delta t \to 0} \overline{\vartheta *} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{MM'}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \overline{MK} = \overline{Ml}$$

Ammo ΔOMM' uchburchakdan $\bar{r}_1 = \bar{r} + \overline{MM'}$, $\overline{MM'} = \bar{r}_1 - \bar{r} = \overline{\Delta r}$ olamiz. Bu yerda Δr harakatlanayotgan nuqta radius vektorining Δt vaqtdagi o'zgarishidir. Shuning uchun $\bar{\vartheta}* = \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t}$ *va* $\bar{\vartheta} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t}$.

Demak,

$$\bar{\vartheta} = \frac{d\bar{r}}{dt} \tag{7.6}$$

ya'ni *harakatlanayotgan nuqta tezligi bu nuqtaning radius vektoridan vaqt bo'yicha olingan birinchi tartibli hosilasiga teng.*

Harakat qonuni koordinata va tabiiy usulda berilganda nuqtaning tezligi

Nuqta harakati koordinat usulda berilgan bo'lsin:

$$\left.\begin{array}{l} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{array}\right\} \tag{7.7}$$

$\bar{r}$ radius vektorni koordinata o'qlaridagi proyeksiyalari orqali yozish mumkin.

$$\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{i} + z\bar{k} \tag{7.8}$$

Bu yerda $\bar{i},\ \bar{j},\ \bar{k}$ koordinata o'qlari bo'ylab yo'nalgan birlik vektorlardir. Tezlik vektorining koordinata o'qlaridagi proyeksiyalari $\vartheta_x, \vartheta_y, \vartheta_z$ bo'lsin, u holda $\bar{\vartheta}$ ni quyidagicha yozish mumkin.

$$\bar{\vartheta} = \vartheta_x \bar{i} + \vartheta_y \bar{j} + \vartheta_z \bar{k} \tag{7.9}$$

(7.8) va (7.9) ni (7.6) ga qo'ysak, quyidagini hosil qilamiz:

$$\vartheta_x \bar{i} + \vartheta_y \bar{j} + \vartheta_z \bar{k} = \frac{d}{dt}(x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}) = \frac{dx}{dt}\bar{i} + \frac{dy}{dt}\bar{j} + \frac{dz}{dt}\bar{k}$$

Ifoda ayniyat bo'lgani uchun birlik vektorlar oldidagi koeffitsientlar tegishlicha bo'lishi kerak:

$$\vartheta_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}; \quad \vartheta_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y}; \quad \vartheta_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z} \tag{7.10}$$

Demak, tezlik vektorining koordinata o'qidagi proyeksiyasi harakatdagi nuqta koordinatasidan vaqtga nisbatan olingan hosilaga teng bo'lar ekan.

Vektorning proyeksiyalari ma'lum bo'lsa, uning moduli va yo'nalishini topish mumkin. U proyeksiyalarga qurilgan parallelopiped diagonaliga teng, shunga ko'ra:

$$\vartheta = \sqrt{\vartheta_x^2 + \vartheta_y^2 + \vartheta_z^2}$$

Tezlik vektorining yo'naltiruvchi kosinuslari uchun quyidagi formulalarni yozamiz

$$\cos(\overline{\vartheta}, \hat{\ } \overline{i}) = \frac{\vartheta_x}{\vartheta}; \quad \cos(\overline{\vartheta}, \hat{\ } \overline{j}) = \frac{\vartheta_y}{\vartheta}; \quad \cos(\overline{\vartheta}, \hat{\ } \overline{k}) = \frac{\vartheta_z}{\vartheta}$$

Harakat tekislikda bo'lsa, X, Y o'qlarni harakat tekisligida olamiz

$$\vartheta_x = \frac{dx}{dt}; \quad \vartheta_y = \frac{dy}{dt}; \quad \vartheta = \sqrt{\vartheta_x^2 + \vartheta_y^2}$$

$$\cos(\overline{\vartheta}, \hat{\ } \overline{i}) = \frac{\vartheta_x}{\vartheta}; \quad \cos(\overline{\vartheta}, \hat{\ } \overline{j}) = \frac{\vartheta_y}{\vartheta}$$

Harakat qonuni tabiiy usulda berilganda nuqta tezligi

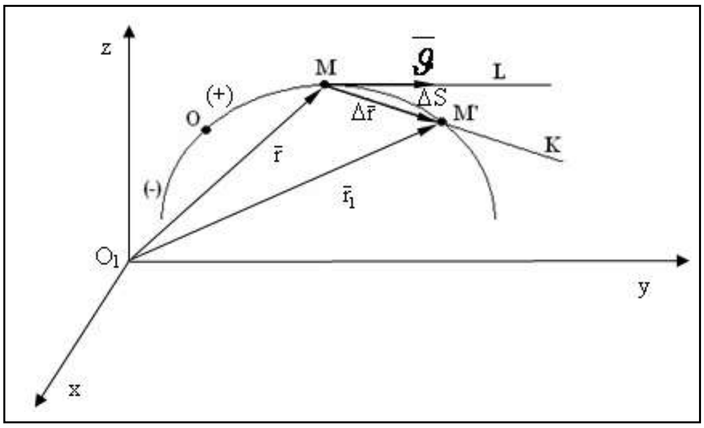
Nuqta berilgan trayektoriya bo'ylab S=f(t) qonuniga muvofiq harakatlanayotgan bo'lsin. Nuqta t vaqtda M vaziyatda va $t + \Delta t$ momentda esa M' vaziyatda bo'lsin (69-shakl)

$$\overline{MM'} = \overline{OM'} - \overline{OM} = \overline{S'} - \overline{S} = \overline{\Delta S}$$

bo'ladi.

Trayektoriyasi ma'lum bo'lgandagi nuqtaning istalgan momentdagi tezlik vektori urinma bo'ylab yo'naladi. Shuning uchun bizga tezlikning modulini topishgina qoladi. Ma'lumki, tezlik

$$\overline{\vartheta} = \lim_{\Delta t \to 0} \overline{\vartheta *} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overline{MM'}}{\Delta t}$$



69-shakl

Shakl almashtirish kiritamiz

$$\overline{\vartheta} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overline{MM'}}{\Delta S} \cdot \frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta \overline{r}}{\Delta S} \cdot \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}$$

$\lim\limits_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta \overline{r}}{\Delta S} = \overline{\tau}$ bo'lgani uchun tezlik moduli

$$\vartheta = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = f'(t) \qquad (7.11)$$

bo'ladi. $ds/dt > 0$ bo'lsa, S o'sib boradi. $\frac{ds}{dt} < 0$ bo'lsa harakat teskari sodir bo'ladi, keyingi holda tezlik moduli uchun $\frac{ds}{dt}$ning absolyut qiymati olinadi, ya'ni $\vartheta = /\frac{ds}{dt}/$. Agar $\frac{ds}{dt} = \vartheta = const$ bo'lsa, harakat tekis bo'ladi ya'ni $S=S_0+\vartheta t$, agar t=0 da $S_0=0$ bo'lsa, $S=\vartheta t$ bo'ladi.

Takrorlash uchun savollar

1. Kinematika nimani o'rgatadi?
2. Nuqta trayektoriyasi deb nimaga aytiladi?
3. Nuqta harakati berilishining qanday usullarini bilasiz va ular qanday bo'ladi?
4. Nuqta harakati qonuni koordinata usulida berilganda uning trayektoriyasi qanday aniqlanadi?
5. Nuqta tezligi qanday aniqlanadi va qanday yo'nalishga ega?
6. Nuqta tezligining Dekart koordinata o'qlaridagi proyeksiyalari qanday? Nuqta tezligi moduli va yo'nalishi tezlik proyeksiyalari orqali qanday aniqlanadi?
7. Nuqta harakati qonuni tabiiy usulda berilganda uning tezligi qanday aniqlanadi?

Tayanch so'zlar va iboralar:

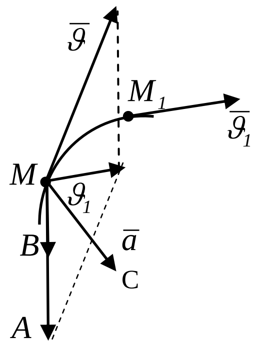
Harakat, mehanik harakat, trayektotiya, kinematika, sanoq sistemasi, vaqt, tezlik vektori.

8-MA’RUZA. NUQTANING TEZLANISHI

1. Harakat qonuni vektor usulda berilganda nuqta tezlanishi

Nuqtaning tezlanishi vektor kattalik bo’lib, berilgan daqiqadagi nuqta tezlik vektorining vaqtga qarab o’zgarishini xarakterlaydi. Trayektoriya bir tekislikda yotsin (69-shakl).

Harakatlanayotgan nuqta trayektoriyada t daqiqada M holatda, tezligi $\bar{\vartheta}$ bo’lsin, bu nuqta Δt kichik vaqt oralig’ida, ya’ni t+Δt daqiqada M' holatni olsin va tezligi $\bar{\vartheta}'$ bo’lsin, $\bar{\vartheta}'$ vektorni M' nuqtaga parallel ko’chiramiz, uning uchini $\bar{\vartheta}'$ vektorning uchi bilan tutashtiramiz va chizilgan uchburchakning parallelogrammga to’ldiramiz. U holda $\overline{MA} = \bar{\vartheta}' - \bar{\vartheta} = \Delta\bar{\vartheta}$ bo’lgani uchun $\overline{MA}$ vektor Δt vaqtda tezlik o’zgarishini ifodalaydi. Endi Δt vaqtga mos keluvchi $\Delta\bar{\vartheta}$ vektorni Δt ga nisbatiga teng bo’lgan $\overline{MB}$ vektorni yasaymiz. Ya’ni $\overline{MB} = \frac{\Delta\bar{\vartheta}}{\Delta t} = \frac{\overline{MA}}{\Delta t}$ bu vektor nuqtaning Δt vaqtdagi o’rtacha tezlanishi deyiladi.



70-shakl

Uning Δt nolga intilgandagi daqiqada M nuqtaning haqiqiy tezlanishi vektorini ifodalaydi.

$$\bar{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \overline{MB} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\bar{\vartheta}}{\Delta t} = \frac{d\,\bar{\vartheta}}{d\,t}$$

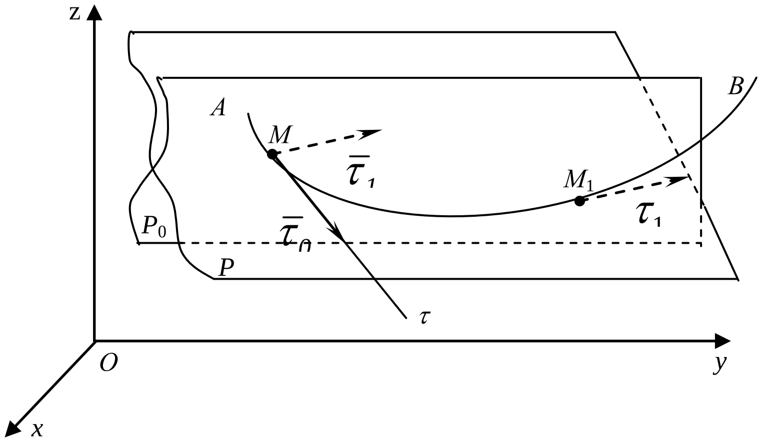
$$\bar{a} = \frac{d\,\bar{\vartheta}}{d\,t} \tag{8.1}$$

Bu vektorni chizmada $\overline{MC}$ vektor bilan ifodalaymiz. $\overline{MC}$ trayektoriya tekisligida yotadi.

M nuqta bir tekislikda yotmaydigan egri chiziqli trayektoriya bo’ylab harakatlansin (71-shakl).

Egri chiziqda bir-biriga yaqin ikkita M va M_1 nuqtalarni olib, hap biri orqali nuqtaning harakati yo’nalishida $M\bar{\tau}$ va $M_1\bar{\tau}_1$ urinmalarini o’tkazamiz. Egri chiziq bir tekislikda yotmagani uchun ikki $M\bar{\tau}$ va $M_1\bar{\tau}_1$ urinmalar orqali bitta tekislik o’tkazib bo’lmaydi. M nuqtadan $M_1\bar{\tau}_1$ ga parallel $M\bar{\tau}_1$ chiziqni o’tkazamiz $\bar{\tau}M_1\bar{\tau}_1$ yotgan tekislikni P_0 bilan belgilaymiz. M_1 nuqta M ga intilnganda P_0 tekislikning $M\bar{\tau}$ atrofida aylanib, holati o'zgarib boradi. M_1 nuqta M ga intilganda P_0 ning egallagan limiti holatini P bilan belgilaymiz.

P tekislikda $M\bar{\tau}$ bilan egri chiziqning juda kichik elementi ham joylashadi. Shunday tekislik egri chiziqning egrilik yoki yopishma tekisligini ifodalaydi. Agar egri chiziq bir tekislikda yotsa, shu tekislik egrilik tekisligi bo'ladi. Egri chiziqning (trayektoriyaning) qaralayotgan nuqtasidan o'tgan urinma va shu nuqtaga juda yaqin bo'lgan nuqtalar orqali o'tgan tekislik yopishma tekislik deyiladi. Tezlanish vektorining yopishma tekislikda yotishi uning ta'rifidan ko'rinib turibdi. $\Delta\bar{\vartheta}$ tezlik orttirmasi trayektoriyaning botiq tomoniga qarab yo'nalgani uchun, tezlanish vektori ham shu tomonga qarab yo'naladi.



71-shakl

Harakat qonuni koordinata usulda berilgandagi nuqta tezlanishi

Tezlanish vektorining koordinata o'qlaridagi proyeksiyalari a_x, a_y, a_z bo'lsin. $\bar{a}$ tezlanishni proyeksiyalari orqali ifodalaymiz.

$$\bar{a} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k} \tag{8.2}$$

(7.9) va (8.2) formulalarni (8.1) ga qo'yamiz.

$$a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k} = \frac{d}{dt}\left(\vartheta_x\bar{i} + \vartheta_y\bar{j} + \vartheta_z\bar{k}\right) = \frac{d\vartheta_x}{dt}\bar{i} + \frac{d\vartheta_y}{dt}\bar{j} + \frac{d\vartheta_z}{dt}\bar{k} \qquad (8.3) \qquad \bar{i}, \bar{j}, \bar{k} = const$$

Yuqoridagi ifoda ayniyat bo'lgani uchun $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ birlik vektorning oldidagi koeffitsientlar tegishlicha bir-biriga teng bo'lishi kerak:

$$a_x = \frac{d\vartheta_x}{dt}; \quad a_y = \frac{d\vartheta_y}{dt}; \quad a_z = \frac{d\vartheta_z}{dt}; \tag{8.4}$$

Bu formulalarga ϑ_x, ϑ_y, ϑ_z ning qiymatlarini (7.10) keltirib qo'ysak, tezlanish proyeksiyalarini koordinatalar orqali ifodalagan bo'lamiz.

$$\left.\begin{aligned} a_x &= \frac{d\vartheta_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x} \\ a_y &= \frac{d\vartheta_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} = \ddot{y} \\ a_z &= \frac{d\vartheta_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2} = \ddot{z} \end{aligned}\right\} \tag{8.5}$$

Demak, tezlanish vektorining koordinata o'qidagi proyeksiyalari, tezlik vektorining tegishlicha koordinata o'qidagi proyeksiyasining vaqtga nisbatan birinchi tartibli hosilasiga yoki harakatlanayotgan nuqta koordinatasining ikkinchi tartibli hosilasiga teng bo'lar ekan. Tezlanishning moduli va uning yo'naltiruvchi kosinuslari quyidagicha yoziladi.

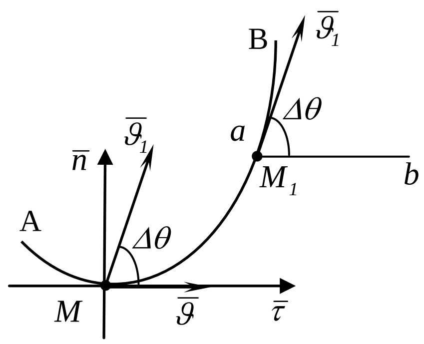
$$a=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$$

$$\left.\begin{aligned}\cos(\overline{a},\overline{i})&=\frac{a_x}{a}\\ \cos(\overline{a},\overline{j})&=\frac{a_y}{a}\\ \cos(\overline{a},\overline{k})&=\frac{a_z}{a}\end{aligned}\right\}$$

Harakat qonuni tabiiy usulda berilgandagi nuqta tezlanishi

Nuqtaning harakat tenglamasi tabiiy usulda berilgan bo'lsa, (7.5), nuqta tezlanish vektorini uning tabiiy koordinata o'qlaridagi proyeksiyalari orqali aniqlash ancha qulay bo'ladi.

Nuqta AB trayektoriya bo'ylab harakatlansin. Trayektoriya bo'ylab harakatlanuvchi M nuqta tezlanishining tabiiy koordinata o'qlaridagi proyeksiyalarini topamiz (72-shakl).



72-shakl

Buning uchun M nuqtadan trayektoriyaning musbat yo'nalishi bo'ylab $\overline{M\tau}$ urinma va trayektoriyani botiq tomoniga qarab $\overline{Mn}$ bosh normal o'tkazamiz. Bu ikki urinma va bosh normal trayektoriyaning M nuqtasidan o'tgan yopishma tekislikda yotadi. Egri chiziqli harakatda nuqta tezlanishi yopishma tekislikda yotishi bizga ma'lum. Endi biz $\overline{a}$ tezlanish vektorining urinma va bosh normaldagi proyeksiyalarini aniqlaymiz. Aytaylik t vaqtda nuqta M holatda bo'lib, uning tezlik vektori $\overline{\vartheta}$ tezlik t+Δt vaqt o'tgandan keyin M_1 holatga ko'chib, tezligi $\overline{\vartheta}_1$ bo'lsin.

Nuqtaning tezlanish vektorini aniqlaymiz.

$$\overline{a}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\overline{\vartheta}_1-\overline{\vartheta}}{\Delta t} \tag{8.6}$$

(1.17) ni $\overline{M\tau}$ va $\overline{Mn}$ tabiiy o'qlarga proyeksiyalaymiz.

$$a_\tau=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vartheta_{1\tau}-\vartheta_\tau}{\Delta t}\qquad a_n=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vartheta_{1n}-\vartheta_n}{\Delta t} \tag{8.7}$$

M_1 nuqtadan Mτ ga parallel ab chiziq o'tkazamiz ϑ_1 tezlik vektori bilan ab orasidagi burchakni Δθ bilan belgilaymiz.

$\vartheta_{1\tau}=\vartheta_1\cdot\cos\Delta\theta$; $\vartheta_{1n}=\vartheta_1\cdot\sin\Delta\theta$; $\vartheta_\tau=\vartheta$; $\vartheta_n=0$ ga teng.

Bu yerda ϑ va ϑ_1 M nuqtaning t va t+Δt paytdagi tezliklarining miqdorlaridir. Olingan proyeksiyalarni yuqoridagi tengliklarga keltirib qo'yamiz.

$$a_\tau=\lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{\vartheta_1\cos\Delta\theta-\vartheta}{\Delta t}\right);\ a_\tau=\lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{\vartheta_1\sin\Delta\theta}{\Delta t}\right); \tag{8.8}$$

kelib chiqadi. Bunda $\Delta t \to 0$ da $M_1 \to M$, $\Delta S \to 0$, $\vartheta_1 \to \vartheta$, $\Delta\theta \to 0$ ga intiladi.

Natijada M_1 nuqta M ga yaqinlashganda $\lim\limits_{\Delta f \to 0} \cos\Delta\theta = 1$ bo'ladi, bu holda

$$a_\tau = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vartheta_1 - \vartheta}{\Delta t} = \frac{d\vartheta}{dt}$$

bo'ladi. Demak,

$$a_\tau = \frac{d\vartheta}{dt} \tag{8.9}$$

bo'lib, urinma tezlanishi deyiladi.

Urinmalarning orasidagi burchakni $\Delta\theta$ bilan va $MM_1 = \Delta S$ bilan belgilaymiz $\frac{\Delta\theta}{\Delta S}$ nisbatga egri chiziqning (trayektoriyaning) o'rtacha egriligi deyiladi. Buning $\Delta S \to 0$ dagi limiti

$$k = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta S} = \frac{d\theta}{dS} \tag{8.10}$$

ga egri chiziqning M nuqtasidagi egriligi deyiladi. Egrilikning teskari qiymatiga egri chiziq (trayektoriya)ning kuzatilgan $\overline{\text{M}}$ nuqtasidagi egrilik radiusi deyiladi va uni

$$\rho = \frac{1}{k} = \frac{dS}{d\theta}$$

deb belgilaymiz. Endi a_n ni topamiz. Buning uchun (8.8) ni o'ng tomoni surat va maxrajini $\Delta\theta \cdot \Delta S$ ga ko'paytiramiz

$$a_n = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\vartheta_1 \cdot \sin\theta}{\Delta\theta} \cdot \frac{\Delta\theta}{\Delta S} \cdot \frac{\Delta S}{\Delta t} \right) \tag{8.11}$$

Δt nolga intilganda qavs ichidagi har bir ko'paytmaning limiti quyidagicha hisoblanadi $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\sin\Delta\theta}{\Delta\theta} = 1$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = \vartheta; \ \vartheta_1 \text{ esa } \vartheta \text{ ga intiladi.}$$

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta S} = \frac{d\theta}{dS} = k = \frac{1}{\rho}$$

Shunday qilib, urinma tezlanishining moduli

$$a_\tau = \frac{d\vartheta}{dt} \quad ёки \quad a_\tau = \frac{d^2 S}{dt^2} \tag{8.12}$$

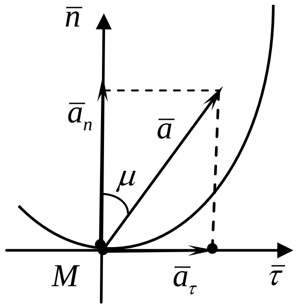
(8.11) formuladan normal tezlanishining moduli

$$a_n = \frac{\vartheta^2}{\rho} \tag{8.13}$$

formuladan topiladi.

Egri chiziqli harakatdagi nuqtaning urinma tezlanishining moduli tezlik modulidan vaqt bo'yicha olingan birinchi tartibli hosilaga yoki nuqtaning yoy koordinatasidan vaqt bo'yicha olingan ikkinchi tartibli hosilaga teng bo'ladi. Hosilaning ishorasi urinma tezlanishining trayektoriyaning qaysi tomoniga yo'nalishini ko'rsatadi. Masalan: agar $\frac{d\vartheta}{dt} \rangle 0$ bo'lsa, a_τ nuqtaning tezligi bilan bir yo'nalishda bo'ladi. Bu holda harakat tezlanuvchan egri chiziqli harakat bo'ladi. Agar $\frac{d\vartheta}{dt} \langle 0$ bo'lsa, a_τ nuqta tezligiga teskari yo'naladi. Harakat sekinlanuvchan egri chiziqli harakat bo'ladi.

Normal tezlanishning moduli harakati tekshirilayotgan nuqta tezligi kvadratining, egri chiziqning shu nuqtadagi ρ egrilik radiusiga nisbatiga teng- $\frac{\vartheta^2}{\rho}$



73-shakl

Hamma vaqt musbat miqdor bo'lgani uchun normal tezlanish hamma vaqt kuzatilayotgan nuqtadan trayektoriyaning bosh normali bo'ylab botiq tomoniga yo'naladi. Agar urinmaning birlik vektorini τ, bosh normalini n bilan belgilasak, urinma va normal tezlanishlarning vektorli ifodasi

$$\bar{a}_\tau = \frac{d\vartheta}{dt}\bar{\tau} \qquad \bar{a}_n = \frac{\vartheta^2}{\rho}\bar{n}$$

ko'rinishda yoziladi. To'la tezlanishning vektor ifodasi

$$\bar{a} = \bar{a}_\tau + \bar{a}_n = \frac{d\vartheta}{dt}\bar{\tau} + \frac{\vartheta^2}{\rho}\bar{n}$$

bo'ladi.

Bu ikki $\bar{a}_\tau$ bilan $\bar{a}_n$ o'zaro tik yo'nalganidan to'la tezlanishning moduli quyidagi formuladan topiladi.

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{\vartheta^2}{\rho}\right)^2}$$

Yo'nalishi $tg\mu = \frac{|a_\tau|}{a_n}$ formuladan topiladi (73-shakl).

Nuqtaning harakat tenglamasi tabiiy usulda berilsa, uning tezlanishi vektori urinma va normal tezlanish vektorlarining geometrik yig'indisiga teng.

Takrorlash uchun savollar

1. Nuqta tezlanish vektori qanday aniqlanadi?
2. Nuqta tezlanishi Dekart koordinata o'qlaridagi proyeksiyalari qanday aniqlanadi? Nuqta tezlanish moduli va yo'nalishi Dekart o'qlardagi proyeksiyalari orqali qanday aniqlanadi?
3. Nuqta tezlanishining trayektoriya bosh normali va urinmasidagi proyeksiyalari nimaga teng?
4. Urinma tezlanishi qachon nolga teng bo'ladi? Normal tezlanishchi?
5. Urinma va normal tezlanishlar orqali nuqtaning to'liq tezlanishi nimaga teng?
6. Tekis harakat nima? Tekis o'zgaruvchan harakatchi?
7. M nuqta ellips bo'yicha tekis harakat qiladi. Nuqtaning tezlanishi ellipsning qaysi nuqtalarida eng katta va eng kichik bo'ladi?

Tayanch so'zlar va iboralar:

Harakat, tezlik, tezlanish, urinma tezlanish, normal tezlanish, tekis harakat, tekis o'zgaruvchan harakat, tezlanish moduli, radius vector, yoy.

9-MA'RUZA. QATTIQ JISMNING SODDA HARAKATLARI. QATTIQ JISMNING ILGARINLANMA HARAKATI. QATTIQ JISMNING QO'ZG'ALMAS O'Q ATROFIDAGI AYLANMA HARAKATI

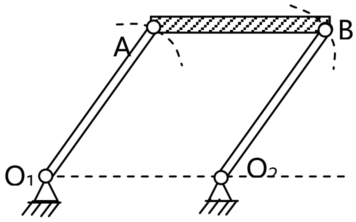
Kinematikada statikadagidek qattiq jismni mutlaq qattiq jism deb qaraladi. Jismning istalgan ikki nuqtasining oralig'i hamma vaqt o'zgarmasdan qolsa, bunday qattiq jismga mutlaq qattiq jism deyiladi. Bundan buyon jism yoki qattiq jism deganda mutlaq qattiq jism tushuniladi. Qattiq jism harakatini kinematik o'rganish bu harakatlanayotgan jismni harakat tenglamalarini tuzish va harakatni xarakterlaydigan kinematik xarakteristikalarini o'rganishdan iborat bo'ladi. Butun jismning harakatlanishi kinematik elementlari: harakat qonuni, tezlik va tezlanishlari ma'lum bo'lgandan keyin jism bo'laklarining harakati o'rganiladi. Jismni tashkil etuvchi bo'laklarning xarakterlariga xos bo'lgan qonuniyatlar aniqlanadi.

Odatda qattiq jism harakatini o'rganish uning sodda harakatlarini o'rganishdan boshlanadi. Jismning ilgarilanma va qo'zg'almas o'q atrofidagi aylanma harakatlariga jismning sodda yoki asosiy harakatlari deyiladi. Jismning har qanday murakkab harakatlarini shu ikki harakatdan tashkil topgan deb qaraladi.

Qattiq jismning ilgarinlanma harakati

Jismda olingan har qanday kesma harakat davomida hamma vaqt o'z-o'ziga parallel qolsa, jismning bunday harakatiga ilgarilanma harakat deyiladi. Ilgarilanma harakatdagi jism nuqtalarining trayektoriyalari istalgan egri chiziq bo'lishi mumkin. Masalan to'g'ri chiziqli relsda harakatlanayotgan vagon kuzovining harakati ilgarilanma harakat bo'lib, kuzov nuqtalarining trayektoriyalari to'g'ri chiziqdan iborat bo'ladi.

Ikkinchi misol tariqasida 74 a-shaklda ko'rsatilgan



74 a-shakl

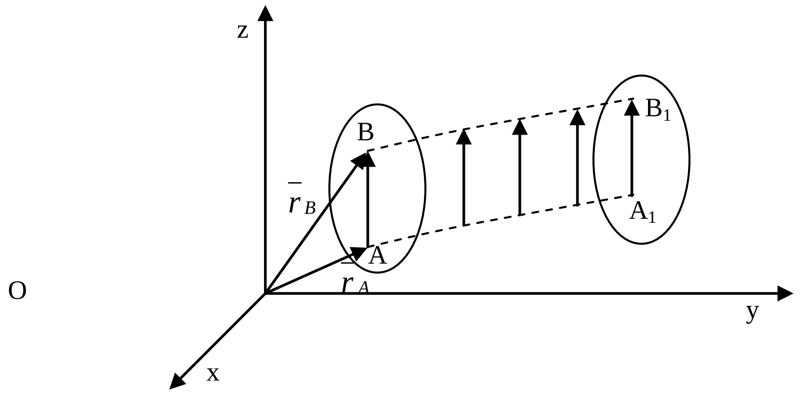
AB sparnik harakatini kuzatamiz. O_1A va O_2B krivoshiplar O_1, O_2 nuqtalar atrofida aylanganda AB sparnik hamma vaqt o’z-o’ziga pa-rallel qoladi, ya’ni ilgarilnma harakat qiladi. Sparnik nuqtalari markazi O_1O_2 chizig’ida yotgan aylanalar chizadi. Demak, bu holda ilgarilanma harakatdagi AB sparnik nuqtalarining trayektoriyalari egri chiziqdan iborat bo’ladi. Ilgarilanma harakatning kinematik xususiyatlarini aniqlaydigan quyidagi teoremani isbotlaymiz.

Teorema: Ilgarilanma harakatdagi qattiq jismning hamma nuqtalari bir xil trayektoriya chizadi va har onda jism nuqtalarining tezlik va tezlanishlari bir-biriga teng bo’ladi.

Teoremani isbotlash uchun berilgan OXYZ qo’zg’almas hisoblash sistemasiga nisbatan ilgarilanma harakatni tekshiramiz. Jismning ixtiyoriy A va B nuqtalarini olib, ularning radius vektorlarini o’tkazamiz.

Shakldan $$\bar{r}_B = \bar{r}_A + \overline{AB} \qquad (9.1)$$

tenglikni olamiz (74 b-shakl). Jism harakatlanganda $\bar{r}_B$ va $\bar{r}_A$ lar o’zgaradi.



74 b-shakl

Ammo AB kesmaning uzunligi va yo’nalishi o’zgarmaydi, chunki qattiq jism ta’rifiga ko’ra AB uzunligi o’zgarmas bo’lib, ilgarilanma harakat ta’rifiga ko’ra doimo o’z-o’ziga parallel qoladi, ya’ni $\overline{AB} = const$. Shuning uchun tenglamadagi $\bar{r}_B$ va $\bar{r}_A$ vektorlarni o’zgarganda ularning uchlaridagi A va B nuqtalarining chizgan AA_1 va BB_1 trayektoriyalari o’zaro teng $AA_1=BB_1$ va $AA_1 || BB_1$ bo’ladi. (9.1) dan vaqtga nisbatan hosila olamiz.

$$\frac{d\bar{r}_B}{dt} = \frac{d\bar{r}_A}{dt} + \frac{d\overline{AB}}{dt} \quad \text{bunda} \quad \frac{d\overline{AB}}{dt} = 0$$

bo’lgani uchun

$$\frac{d\bar{r}_B}{dt} = \frac{d\bar{r}_A}{dt} \qquad (9.2)$$

A va B nuqtalar ixtiyoriy nuqta bo’lgani uchun ilgarilanma harakatdagi jismning hamma nuqtalarining tezliklari bir xilda bo’ladi degan natijaga kelamiz. (9.2) dan vaqtga nisbatan hosila olamiz.

$$\frac{d\bar{\vartheta}_B}{dt} = \frac{d\bar{\vartheta}_A}{dt} \quad \text{bundan} \quad \bar{a}_B = \bar{a}_A \qquad (9.3)$$

(9.3) tenglikdan ilgarilanma harakatdagi jismning hamma nuqtalarining tezlanishlari bir xilda bo’ladi, degan natijaga kelamiz. Shunday qilib, teorema isbotlandi. Ilgarilanma harakat ta’rifidan va isbotlangan teoremadan jismning ilgarilanma harakati uning biror nuqtasining harakati bilan aniqlanishini ko’ramiz. Bunday nuqta uchun ko’pincha jism og’irlik markazi olinadi.

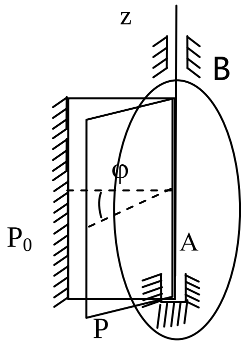
$$\left.\begin{aligned} X_c &= f_1(t) \\ Y_c &= f_2(t) \\ Z_c &= f_3(t) \end{aligned}\right\} \qquad (9.4)$$

C nuqtaning harakat tenglamalari jismning ilgarlanma harakat tenglamalari bo'ladi. Shuning uchun ilgarilanma harakatdagi jism kinematikasi nuqta kinematikasidan farq qilmaydi.

Ilgarilanma harakatdagi jism nuqtasining $\bar{\vartheta}$ tezligi va $\bar{a}$ tezlanishi jismning hamma nuqtalari uchun bir xilda bo'lgani uchun $\bar{\vartheta}$ tezlikka jismning ilgarilanma harakat tezligi, $\bar{a}$ ga jismning ilgarilanma harakat tezlanishi deyiladi. $\bar{\vartheta}$ va $\bar{a}$ tezlik va tezlanish jismning istalgan nuqtasiga qo'yilgan deb tasvirlanadi. Shuni ta'kidlab o'tamizki, faqat jismning ilgarilanma harakati uchun $\bar{\vartheta}$ va $\bar{a}$ tezlik va tezlanishlar jismning ilgarilanma harakat tezligi va tezlanishi deb ataladi. Ammo jismning boshqa turdagi harakatlarida uning nuqtalari turlicha harakat qiladi. Shuning uchun uning biror nuqtasining harakati bilan aniqlab bo'lmaydi. Bunday holda jism nuqtasining tezligi, tezlanishini jism tezligi va tezlanishi deb atash mumkin emas.

Qattiq jismning qo'zg'almas o'q atrofidagi aylanma harakati

Qattiq jism harakatlanganda uning ikki nuqtasi doimo harakatsiz qolsa, qattiq jismning bunday harakatiga qo'zg'almas o'q atrofidagi aylanma harakati deyiladi. Shu qo'zg'almas nuqtalardan o'tgan to'g'ri chiziqqa aylanish o'qi deyiladi. Aylanish o'qida joylashgan jism nuqtalari doimo harakatsiz bo'ladi. Aylanish o'qidan tashqarida joylashgan hamma nuqtalari trayektoriyasi aylanish o'qiga tik bo'lgan tekisliklarda joylashgan, markazi aylanish o'qida bo'lgan aylanalardan iborat bo'ladi. Qattiq jismning aylanma harakatini tekshirish uchun aylanish o'qi orqali ikki tekislik o'tkazamiz. Ulardan biri qo'zg'almas P_0 , ikkinchisi jism bilan birlashtirilgan, u bilan birga harakatlanadigan P tekislik bo'lsin. Aylanish o'qini jismning qo'zg'almas A va B nuqtalari orqali yuqoriga yo'naltiramiz va uni Az deb belgilaymiz. Jismni Az o'qi atrofida harakatlanganda P tekislik P_0 tekislikka nisbatan φ burchakka buriladi. Bu burchak aylanish burchagi deyiladi. Aylanish o'qining musbat yo'nalishidan qaraganimizda jism soat milining aylanishiga teskari tomonga aylanma harakatini musbat yo'nalishda deb qaraymiz. Aks holda harakat manfiy yo'nalishda bo'ladi. Demak, burchak P_0 dan P tekislikka qarab soat milining aylanishiga teskari yo'nalishda kesib boradi.



75-shakl

Aylanish burchagining o'zgarishi P tekislikni P_0 tekislikka nisbatan harakatlanishini ifodalaydi. Shuning uchun aylanish burchagi φ bilan vaqt orasidagi munosabat

$$\varphi = f(t) \tag{9.5}$$

(9.5) ga jism aylanma harakat tenglamasi deyiladi. Agar (9.5) tenglik berilgan bo'lsa, vaqtning har bir paytdagi jismning holati ma'lum bo'ladi. Aylanish burchagi radianda o'lchanadi, u vaqtning bir qiymatli, uzliksiz, differensiallanadigan funksiyasi bo'ladi. Jism qo'zg'almas o'q atrofidagi holati bitta aylanish burchagi bilan aniqlangani uchun aylanma harakatdagi jism bitta erkinlik darajasiga ega bo'ladi.

Aylanma harakat burchak tezligi

Faraz qilaylik, jism t-vaqtda φ burchakka burilgan bo'lib, Δt vaqtdan keyin $\varphi + \Delta\varphi$ burchakka burilsin. $\Delta\varphi$ning Δtga nisbati (9.6) ga o'rtacha burchakli tezlik deyiladi. Vaqtning har bir paytdagi burchak tezligini aniqlash uchun (9.6) dan Δt nolga intilgandagi limitni olamiz

$$\omega^* = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \tag{9.6}$$

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt}; \quad \omega = \frac{d\varphi}{dt} \tag{9.7}$$

Demak, haqiqiy burchak tezligi aylanish burchagidan vaqtga nisbatan olingan birinchi hosilasiga teng, hosilaning ishorasi harakat o'suvchi yoki kamayuvchi ekanini ko'rsatadi. Masalan, agar $\frac{d\varphi}{dt} > 0$ bo'lsa, harakat o'suvchi bo'lib, φ burchagi orta boradi, $\frac{d\varphi}{dt} < 0$ bo'lsa, φ burchagi kamayadi va harakat kamayuvchi bo'ladi. Shunday qilib hosilaning ishorasi harakat yo'nalishini aniqlaydi. Burchak tezligi rad/s bilan yoki 1/s bilan o'lchanadi. Aylanma harakatda burchak tezligi $\bar{\omega}$ - aylanish o'qi bo'ylab yo'nalgan vektor kattalik bilan ifodalanadi. U aylanish o'qining istalgan nuqtasiga qo'yiladi va uning uchidan qaraganimizda jism soat milining yo'nalishiga teskari aylanishini ko'rish kerak.

Agar harakat davomida hamma vaqt ω o'zgarmas bo'lsa, harakat tekis aylanma harakat bo'ladi. Bu o'zgarmasni ω_0 bilan belgilab, (9.7) tenglikka qo'yamiz.

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega_0$$

bundan

$$d\varphi = \omega_0 dt$$

Hosil bo'lgan tenglikda boshlang'ich shartlarni hisobga olib,
yani t=0 da $\varphi = \varphi_0$, tenglamani integrallaymiz.

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi = \int_0^t \omega_0 \, dt$$

ω_0-o'zgarmas bo'lgani uchun quyidagi tenglik tekis aylanma harakat tenglamasini olamiz:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t \tag{9.8}$$

Agar boshlang'ich t=0 paytda $\varphi_0 = 0$ bo'lsa, yuqoridagi tenglik quyidagi ko'rinishga keltiriladi.

$$\varphi = \omega_0 t \text{ bundan } \omega_0 = \frac{\varphi}{t} \tag{9.9}$$

Kinematika masalalarida ko'pincha tekis aylanma harakat burchak tezligini jismning t=l min ichidagi aylanish soni n ifodasidan foydalanishga to'g'ri keladi. Jism bir aylanganda $\varphi = 2\pi$ burchakka aylanadi. Agar t=1 minut 60 s jism n marotaba aylansa, $\varphi=2n\pi$ bo'ladi (9.9) tenglikdan foydalanib, ω bilan n orasidagi munosabatni topamiz

$$\omega = \frac{\pi n}{30}$$

Bunda $\omega=\omega_0=const$ deb hisoblanadi.

Aylanma harakat burchak tezlanishi

Burchak tezlanishi aylanma harakat burchak tezligining vaqt birligi ichida o'zgarishini xarakterlaydi. Burchak tezlanishi burchak tezligidan vaqtga nisbatan birinchi hosila yoki aylanish burchagidan vaqt bo'yicha olingan ikkinchi hosilaga teng bo'ladi. Burchak tezlanishini ε bilan belgilaymiz

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} \tag{9.10}$$

Burchak tezlanishi rad/s^2 yoki 1/s^2 bilan o'lchanadi. Agar ω bilan ε bir xil ishorali bo'lsa, harakat tezlanuvchan, har xil ishorali bo'lsa, harakat sekinlanuvchan bo'ladi. Harakat davomida ε=const bo'lsa, bunday harakatga tekis o'zgaruvchan aylanma harakat deyiladi. Tekis o'zgaruvchan aylanma harakat tenglamasi quyidagi ko'rinishda aniqlanadi

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} \text{ dan } \omega = \omega_0 + \varepsilon t$$

tenglikni olamiz. Bunda ε=const. Hosil bo'lgan tenglikni hisobga olgan holda (9.7) formulani quyidagi ko'rinishda yozamiz.

$$d\varphi = (\omega_0 + \varepsilon t)dt$$

Buni yana t=0 da $\varphi = \varphi_0$ boshlang'ich shartlarda integrallab tekis o'zgaruvchan harakat tenglamasini olamiz:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}.$$

ε ning ishorasi harakatni tezlanuvchan yoki sekinlanuvchan ekanini ko'rsatadi. Agar t=0 da $\varphi = 0$ bo'lsa, $\varphi = \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}$ tenglik hosil bo'ladi.

Aylanish o'qining birlik yo'naltiruvchi vektorini $\bar{k}$ bilan belgilasak, aylanish o'qi bo'ylab yo'nalgan burchak tezlik $\bar{\omega}$ vektorning vaqtga nisbatan hosilasi burchak tezlanish vektorini ifodalaydi.

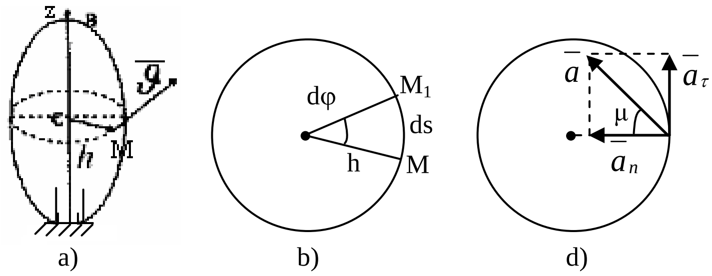
$$\bar{\varepsilon} = \frac{d\omega}{dt}\bar{k} \quad \text{yoki} \quad \bar{\varepsilon} = \varepsilon \cdot \bar{k}$$

Aylanish o'qi qo'zg'almas bo'lgani uchun $\bar{k}$=const bo'ladi. Demak, burchak tezlanishi $\bar{\varepsilon}$ vektori aylanish o'qi bo'ylab yo'nalgan bo'lib, $\bar{\omega}$ va $\bar{\varepsilon}$ bir tomonga yo'nalsa, tezlanuvchan, qarama-qarshi tomonga yo'nalsa, harakat sekinlanuvchan bo'ladi.

Aylanma harakatdagi jism nuqtasining tezlik va tezlanishi

Qattiq jismning nuqtalari harakatlarini xarakterlovchi kinematik elementlari – trayektoriya, tezlik va tezlanishlarini topamiz. Buning uchun jismni aylanish Az

(76a-shakl) o'qidan ixtiyoriy masofada joylashgan M nuqtasining tezlik va tezlanishini aniqlaymiz. Faraz qilaylik M nuqta aylanish o'qidan h masofada joylashgan bo'lsin, jism harakatlanganda M nuqta radiusi h bo'lgan markazi aylanish o'qining S nuqtasida joylashgan aylana chizadi. Agar jism dt vaqt ichida aylanish o'qi atrofida dφ burchakka burilsa, M nuqta trayektoriya bo'ylab $MM_1=dS=hd\varphi$ yoyini o'tadi.(76b-shakl).



76-shakl

Harakat egri chiziqli bo'lgani uchun M nuqtaning tezligi quyidagi formula bo'yicha topiladi:

$$\vartheta = \frac{dS}{dt} = h\frac{d\varphi}{dt} = h\omega \tag{9.11}$$

Demak, aylanma harakatdagi jism nuqtasining tezligi nuqtadan aylanish o'qigacha bo'lgan masofaga proporsional o'zgarar ekan. Tezlik harakat yo'nalishida trayektoriyaga urinma bo'ylab yo'naladi. Endi M nuqtaning tezlanishini topamiz. Harakat egri chiziqli bo'lgani uchun M nuqtaning tezlanishi urinma va normal tezlanishlardan tashkil topadi (76d-shakl).

$$a_n = \frac{\vartheta^2}{\rho}; \quad a_\tau = \frac{d\vartheta}{dt}$$

Bu tengliklarga (9.11) dan ϑ ning qiymatini qo'yamiz:

$$a_n = \frac{d}{dt}(\omega \cdot h) = h \cdot \varepsilon; \quad a_n = \frac{(\omega \cdot h)^2}{h} = \omega^2 \cdot h \tag{9.12}$$

M nuqtaning to'liq tezlanishining miqdori:

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = h \cdot \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} \tag{9.13}$$

va yo'nalishi

$$tg\mu = \frac{|\varepsilon|}{\omega^2} \tag{9.14}$$

(9.14) formulalardan aniqlanadi. (9.11), (9.12) hamda (9.13) formulalar aylanma harakatdagi jism nuqtalarining tezlik va tezlanishlari nuqtadan aylanish o'qigacha bo'lgan masofaga proporsional ekanligini ifodalaydi. a_n tezlanishi hamma vaqt aylanish markaziga qarab yo'naladi, ammo urinma tezlanish yo'nalishi harakatning tezlanuvchan yoki sekinlanuvchanligiga bog'liq bo'ladi. $\varepsilon > 0$ bo'lsa, harakat tezlanuvchan bo'lib, a_τ bilan ϑ bir yo'nalishda, $\varepsilon < 0$ bo'lsa, harakat sekinlanuvchan bo'lib, a_τ, ϑ ga teskari yo'naladi.

Takrorlash uchun savollar

1. Qattiq jismning qanday harakati ilgarilanma deyiladi?
2. Jismni ilgarilanma harakatida uning nuqtalari trayektoriyasi aylanadan iborat bo'lishi mumkinmi?

3. Qattiq jimsning ilgarilnma harakati qanday xossalarga ega?
4. Qattiq jimsning qanday harakati qo'zg'almas o'q atrofida aylanma harakat deyiladi? Qattiq jism nuqtasi trayektoriyasi nimadan iborat bo'ladi?
5. Qattiq jismning qo'zg'almas o'q atrofida aylanma harakat tenglamasi qanday?
6. Burchak tezlik, burchak tezlanish nima?
7. Burchak vektori va burchak tezlanishi vektori qanday bo'ladi?
8. Qo'zg'almas o'q atrofida aylanma harakatdagi qattiq jism nuqtasi tezligi qanday aniqlanadi?
9. Qo'zg'almas o'q atrofida aylanma harakatdagi qattiq jism nuqtasi tezlanishi qanday aniqlanadi? Urinma va normal tezlanishlarchi?
10. Agar A nuqta disk markazidan B nuqtaga nisbatan ikki marta uzoqroq joylashgan bo'lsa, diskning A nuqtasi tezlanishi B nuqtasi tezlanishidan necha marta katta bo'ladi?

Tayanch so'z va iboralar:

Aylanish o'qi, ilgarilanma harakat, aylanma harakat, Burchak tezlik, burchak tezlanish, qo'zg'almas o'q atrofida aylanma harakat, Burchak vektori va burchak tezlanishi vektori, urinma va normal tezlanish

10-MA'RUZA. NUQTANING MURAKKAB HARAKATI

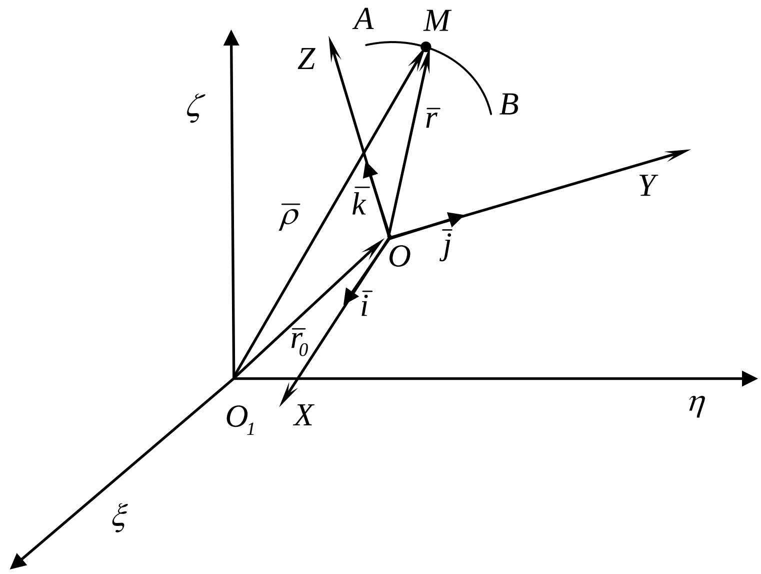
Nuqta ikki va undan ortiq harakatda ishtirok etsa, uning bunday harakati *murakkab harakat* deb ataladi. Yuqorida nuqta yoki qattiq jismning qo'zg'almas, koordinatalar sistemasiga nisbatan harakatini tekshirgan edik, lekin nuqta yoki qattiq jismning harakatini qo'zg'aluvchi hamda qo'zg'almas koordinatalar sistemalariga nisbatan ham tekshirish mumkin. Nuqta yoki qattiq jism qo'zg'aluvchi sistemaga nisbatan harakatda bo'lib, qo'zg'aluvchi sistemani o'zi boshqa bir qo'zg'almas sistemaga nisbatan harakatlansa, nuqta yoki jismning qo'zg'almas koordinata sistemasiga nisbatan harakati murakkab harakat bo'ladi. Nuqtaning murakkab harakatini qo'zg'almas sistemaga nisbatan tekshirish masalasi ancha murakkab masaladir. Amaliy masalalarni yechishda nuqtaning murakkab harakatini sodda harakatlarga ajratib yozish ancha qulay bo'ladi. Buning uchun nuqtaning harakatini qo'zg'aluvchi hamda qo'zg'almas koordinatalar sistemasiga nisbatan tekshiriladi.

Masalan:

Kema palubasida harakatlanuvchi jismning daryo qirg'og'iga nisbatan harakati murakkab harakatdan iborat. Palubadagi jismning harakatini bevosita daryo qirg'og'iga nisbatan tekshirib bo'lmaydi. Bu harakatni kema bilan bog'langan qo'zg'aluvchi hamda qirg'oq bilan biriktirilgan qo'zg'almas koordinatalar sistemalariga nisbatan tekshirsak, harakatlanuvchi jismning murakkab harakatini ikki oddiy harakatlarga keltirib tekshirgan bo'lamiz. Ko'pincha murakkab harakatga oid masalalarda qo'zg'aluvchi koordinata sistemasining qo'zg'almas sistemaga nisbatan harakatini aniqlash yengil bo'ladi yoki shu harakat oldindan berilgan bo'ladi. Masalan keltirilgan misolda kemaning qirg'oqqa nisbatan harakati berilgan bo'lishi mumkin.

Nuqtaning nisbiy, ko'chirma va mutlaq harakatlari

Nuqtaning qo'zg'almas O_1, ξ, η, ζ sistemasiga nisbatan murakkab harakatini tekshiramiz. Buning uchun O_1, ξ, η, ζ ga nisbatan harakatlanuvchi O, X, Y, Z koordinatalar sistemasini olamiz (77-shakl).



77-shakl

M nuqtaning shu ikki sistemaga nisbatan harakatini tekshiramiz. Shu ikki sistemaga nisbatan M nuqtaning harakati ikki xil bo'ladi. Bu ikki harakatni bir-biridan farq qilish uchun quyidagi belgilashlar kiritiladi. Harakatlanuvchi M nuqtaning qo'zg'aluvchi OXYZ sistemasiga nisbatan harakatiga nisbiy harakat deyiladi. M nuqtani qo'zg'aluvchi sistemaga nisbatan harakatsiz deb qarab, shu sistema bilan birgalikda qo'zg'almas $O_1 \xi \eta \zeta$ sistemaga nisbatan harakatiga ko'chirma harakat deyiladi. Harakatlanuvchi M nuqtani bevosita qo'zg'almas koordinata sistemasiga nisbatan harakatiga murakkab yoki mutlaq harakat deyiladi. Nuqtaning nisbiy harakatini tekshirilganda, qo'zg'aluvchi koordinata sistemasini harakatda ekanligini nazarda tutib, harakatini faqat shu sistemaga nisbatan kuzatiladi. Bu kuzatilgan harakat trayektoriyasiga nisbiy harakat trayektoriyasi deyiladi. Nisbiy trayektoriya bo'ylab nuqtaning tezligiga nisbiy tezlik, nisbiy tezlikning o'zgarishini ifodalovchi tezlanishga nisbiy tezlanish deyiladi. Nisbiy tezlikni $\bar{\vartheta}_r$ va nisbiy ezlanishni $\bar{a}_r$ bilan belgilanadi. Keltirilgan misol kema palubasida harakatlanayotgan jism (nuqta)ning nisbiy harakatiga faqat kemaga (kema bilan bog'langan sistemaga) nisbatan kuzatiladi.

Jismning kemaga nisbatan tezligi nisbiy tezlik, tezlanishi nisbiy tezlanish bo'ladi. Harakat kuzatilayotgan paytda M nuqta qo'zg'aluvchi OXYZ koordinatalar sistemasiga biror nuqtasi bilan ustma-ust tushgan deb qarab, shu nuqtaning tezligiga ko'chirma tezlik va tezlanishiga ko'chirma tezlanish deyiladi. Ko'chirma tezlikni $\bar{\vartheta}_e$, tezlanishni $\bar{a}_e$ deb belgilanadi. Keltirilgan misolda jism (nuqta) kesmaning biror nuqtasida joylashgan deb qarab, jismning kema bilan qirg'oqqa nisbatan harakati ko'chirma harakat bo'ladi.

Nuqtaning bevosita O_1, ξ, η, ζ qo'zg'almas sistemasiga nisbatan mutlaq harakati tezligiga mutlaq tezlik, tezlanishiga deyiladi. Mutlaq tezlikni $\bar{\vartheta}_a$, mutlaq tezlanishni $\bar{a}_a$ bilan belgilanadi. Keltirilgan misolda kema palubasida harakatlanayotgan jism (nuqta)ni to'g'ridan-to'g'ri daryo qirg'og'i bilan bog'langan koordinata sistemasiga nisbatan harakati mutlaq harakat bo'ladi.

Nisbiy harakat tenglamalari

Qo'zg'aluvchi OXYZ koordinatalar sistemasiga nuqtaning holatini aniqlovchi x,y,z koordinatalari vaqtning funksiyalari

$$\left.\begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \\ z &= z(t) \end{aligned}\right\} \tag{10.1}$$

shaklda berilgan bo'lsa, nuqtaning qo'zg'aluvchi koordinata sistemasiga nisbatan istalgan paytdagi holatini-harakatini aniqlash mumkin (77-shakl). Shu sababli (10.1) tenglamalarga nuqtaning nisbiy harakat tenglamalari deyiladi. (10.1) dan vaqt t ni chiqarib tashlasak, nuqtaning nisbiy harakat trayektoriyasi tenglamasini olamiz. Bu trayektoriya vaqt o'tishi bilan qo'zg'aluvchi sistema bilan birgalikda qo'zg'almas sistemaga nisbatan harakatlanadi. Odatdagi harakat sifatida (10.1) dan vaqt bo'yicha bir marta hosila olsak, nisbiy tezlikning tegishli koordinata o'qlaridagi proyeksiyalarini aniqlaydigan tengliklarni olamiz:

$$\left.\begin{aligned} \vartheta_{rx} &= \frac{dx}{dt} = \dot{x} \\ \vartheta_{ry} &= \frac{dy}{dt} = \dot{y} \\ \vartheta_{rz} &= \frac{dz}{dt} = \dot{z} \end{aligned}\right\} \tag{10.2}$$

(9.2) tengliklardan vaqt bo'yicha hosilani olsak, nisbiy tezlanishning proyeksiyalarini aniqlaydigan tengliklarni olamiz:

$$\left.\begin{aligned} a_{rx} &= \frac{d\vartheta_{rx}}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x} \\ a_{ry} &= \frac{d\vartheta_{ry}}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} = \ddot{y} \\ a_{rz} &= \frac{d\vartheta_{rz}}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2} = \ddot{z} \end{aligned}\right\} \tag{10.3}$$

Qo'zg'aluvchi OXYZ koordinata sistemasining koordinata o'qlarining birlik vektorlarini $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ deb belgilab, ϑ_r ni (10.2) ga a_r ni (10.3) ga muvofiq quyidagi ko'rinishlarda yozamiz:

$$\vartheta_r = \vartheta_{rx}\bar{i} + \vartheta_{ry}\bar{j} + \vartheta_{rz}\bar{k} \tag{10.4}$$

$$a_r = a_{rx}\bar{i} + a_{ry}\bar{j} + a_{rz}\bar{k} \tag{10.5}$$

Ko'chirma va mutlaq harakatlarning tezlik va tezlanishlari harakatlanuvchi OXYZ sistemaning harakatiga bog'liq bo'ladi.

Murakkab harakatdagi nuqtaning tezligi

Qo'zg'aluvchi OXYZ koordinata sistemasi qo'zg'almas O_1, ξ, η, ζ sistemaga nisbatan $\bar{\vartheta}_0$ tezlik bilan ilgarilanma harakat qilsin deylik, harakatlanuvchi M nuqtaning OXYZ ga nisbatan nisbiy harakat tenglamalari (10.1) da berilgan bo'lib, harakat tekshirilayotgan onda uning nisbiy harakat trayektoriyasi AB egri chiziqdan iborat bo'ladi. O_1, ξ, η, ζ qo'zg'almas sistemaga nisbatan $\overline{OO_1} = \bar{r}_0(t)$, hamda $\overline{OM} = \bar{\rho}(t)$ deb belgilasak, M nuqtaning murakkab harakat radius vektori 77-shakldagi

$$\bar{\rho} = \bar{r}_0 + \bar{r} \tag{10.6}$$

ga teng. Agar $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ larni qo'zg'aluvchi koordinata o'qlarining birlik vektorlari desak, nisbiy harakat radius vektorini

$$\bar{r} = x \cdot \bar{i} + y \cdot \bar{j} + z \cdot \bar{k} \tag{10.7}$$

ko'rinishda yozish mumkin. (10.7) ga ko'ra (10.6) ni quyidagi ko'rinishda yozamiz:

$$\bar{\rho} = \bar{r}_0 + x \cdot \bar{i} + y \cdot \bar{j} + z \cdot \bar{k} \tag{10.8}$$

Bu tenglikdagi $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ larning yo'nalish o'zgaruvchi vektorlar ekanligini e'tiborga olib, (10.8) dan t-vaqt bo'yicha birinchi tartibli hosila olamiz:

$$\frac{d\bar{\rho}}{dt} = \frac{d\bar{r}_0}{dt} + \frac{dx}{dt}\bar{i} + \frac{dy}{dt}\bar{j} + \frac{dz}{dt}\bar{k} + \left(x\frac{d\bar{i}}{dt} + y\frac{d\bar{j}}{dt} + z\frac{d\bar{k}}{dt} \right) \tag{10.9}$$

bundan

$$\frac{d\bar{\rho}}{dt} = \bar{\vartheta}_a; \quad \frac{d\bar{r}_0}{dt} = \bar{\vartheta}_0 \tag{10.10}$$

Eyler formulalariga asosan

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\bar{i}}{dt} &= \bar{\omega}_e \times \bar{i} \\ \frac{d\bar{j}}{dt} &= \bar{\omega}_e \times \bar{j} \\ \frac{d\bar{k}}{dt} &= \bar{\omega}_e \times \bar{k} \end{aligned}\right\} \tag{10.11}$$

(10.2), (10.4), (10.10), (10.11) larni hisobga olsak, (10.9) quyidagicha yoziladi:

$$\bar{\vartheta}_a = \bar{\vartheta}_r + \bar{\vartheta}_o + \bar{\omega}_e \times \left(x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k} \right) \tag{10.12}$$

$$\bar{\vartheta}_a = \bar{\vartheta}_r + \bar{\vartheta}_o + \bar{\omega}_e \times \bar{r} \tag{10.13}$$

Bu yerda $\bar{\omega}_e \times \bar{r} = \bar{\omega}_e \times \left(x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k} \right)$

M nuqtaning ko'chirma tezligi

$$\bar{\vartheta}_e = \bar{\vartheta}_o + \bar{\omega}_e \times \bar{r} \tag{10.14}$$

ga teng.

Agar ko'chirma harakat ilgarilanma harakatdan iborat bo'lsa,

$$\bar{\vartheta}_e = \bar{\vartheta}_o,$$

qo'zg'almas o'q atrofida aylanma harakatdan iborat bo'lsa,

$$\bar{\vartheta}_e = \bar{\omega}_e \times \bar{r}$$

bo'ladi.

Shunday qilib (78-shakl)

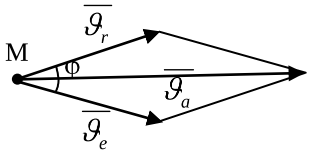
$$\bar{\vartheta}_a = \bar{\vartheta}_r + \bar{\vartheta}_e \tag{10.15}$$

Bunda (10.15) tenglik tezliklarni qo'shish teoremasini ifodalaydi.

Teorema. Nuqtaning murakkab harakatida uning mutlaq tezligi ko'chirma va nisbiy tezliklarning geometrik yig’indisiga teng bo’ladi. Boshqacha aytganda mutlaq tezligi ko’chirma va nisbiy tezlik vektorlariga qurilgan parallelogramm diagonaliga teng bo’ladi.

Agar $\bar{\vartheta}_e$, $\bar{\vartheta}_r$ tezliklar qiymati va ular orasidagi burchak berilgan bo’lsa, mutlaq tezlik moduli quyidagicha aniqlanadi:

$$\vartheta_a = \sqrt{\vartheta_e^2 + \vartheta_r^2 + 2\vartheta_e\,\vartheta_r\,\cos\varphi}$$



78-shakl

Agar:

a) φ=0° bo’lsa, $\vartheta_a = \vartheta_e + \vartheta_r$

b) φ=90° bo’lsa, $\vartheta_a = \sqrt{\vartheta_e^2 + \vartheta_r^2}$

c) φ=180° bo’lsa, $\vartheta_a = \left|\vartheta_e - \vartheta_r\right|$.

Tezlanishlarni qo’shish teoremasi. (Koriolis teoremasi)

M nuqtaning mutlaq tezlanishini aniqlash uchun (10.9) dan vaqt bo’yicha hosila olamiz

$$\begin{aligned}\frac{d\bar{\vartheta}_a}{dt} &= \frac{d^2\bar{r}_0}{dt^2} + \left(\frac{d^2x}{dt^2}\bar{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\bar{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\bar{k}\right) + \\ &+ 2\left(\frac{dx}{dt}\frac{d\bar{i}}{dt} + \frac{dy}{dt}\frac{d\bar{j}}{dt} + \frac{dz}{dt}\frac{d\bar{k}}{dt}\right) + \\ &+ x\frac{d^2\bar{i}}{dt^2} + y\frac{d^2\bar{j}}{dt^2} + z\frac{d^2\bar{k}}{dt^2}\end{aligned} \tag{10.16}$$

Bu yerda $\frac{d\bar{\vartheta}_a}{dt} = \bar{a}_a$ – M nuqtaning mutlaq tezlanishi.

$$\frac{d^2\bar{i}}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\bar{\omega}_e \times \bar{i}\right) = \frac{d\bar{\omega}_e}{dt} \times \bar{i} + \bar{\omega}_e \times \frac{d\bar{i}}{dt} = \bar{\varepsilon}_e \times \bar{i} + \bar{\omega}_e \times \left(\bar{\omega}_e \times \bar{i}\right)$$

$$\frac{d^2\bar{j}}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\bar{\omega}_e \times \bar{j}\right) = \frac{d\bar{\omega}_e}{dt} \times \bar{j} + \bar{\omega}_e \times \frac{d\bar{j}}{dt} = \bar{\varepsilon}_e \times \bar{j} + \bar{\omega}_e \times \left(\bar{\omega}_e \times \bar{j}\right)$$

$$\frac{d^2\bar{k}}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\bar{\omega}_e \times \bar{k}\right) = \frac{d\bar{\omega}_e}{dt} \times \bar{k} + \bar{\omega}_e \times \frac{d\bar{k}}{dt} = \bar{\varepsilon}_e \times \bar{k} + \bar{\omega}_e\left(\bar{\omega}_e \times \bar{k}\right)$$

bo’lib,

$$\begin{aligned}x\frac{d^2\bar{i}}{dt^2} + y\frac{d^2\bar{j}}{dt^2} + z\frac{d^2\bar{k}}{dt^2} &= \bar{\varepsilon}_e \times \left(x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}\right) + \bar{\omega}_e \times \\ \times\left(x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}\right) &= \bar{\varepsilon}_e \times \bar{r} + \bar{\omega}_e \times \left(\bar{\omega}_e \times \bar{r}\right) = \bar{a}_e^{\tau} + \bar{a}_e^{n}\end{aligned}$$

$\frac{d^2\bar{r}_0}{dt^2} = \bar{a}_0$ – O qutbning tezlanishi.

$\bar{a}_e = \bar{a}_0 + \bar{a}_e^n + \bar{a}_e^{\tau}$ – M nuqtaning ko’chirma tezlanishi bo’lib, O nuqtaning tezlanishi hamda aylanma va o’qqa intilma tezlanishlarning geometrik yig’indisiga teng.

$$\bar{a}_r = \frac{d^2x}{dt^2}\bar{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\bar{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\bar{k} \tag{10.17}$$

– nisbiy tezlanish.

$$\bar{a}_k = 2\left(\frac{dx}{dt}\frac{d\bar{i}}{dt} + \frac{dy}{dt}\frac{d\bar{j}}{dt} + \frac{dz}{dt}\frac{d\bar{k}}{dt}\right) = 2(\bar{\omega}_e \times \bar{v}_r) \qquad (10.18)$$

– Koriolis tezlanishi.

Demak, M nuqtaning mutlaq tezlanishi quyidagicha hisoblanadi:

$$\bar{a}_a = \bar{a}_e + \bar{a}_r + \bar{a}_k \qquad (10.19)$$

(10.19) Koriolis teoremasini ifodalaydi: ***ko'chirma harakati ilgarilanma bo'lmagan murakkab harakatdagi nuqtaning mutlaq tezlanishi uning nisbiy ko'chirma va Koriolis tezlanishlarining geometrik yig'indisiga teng.***

Agar ko'chirma harakat ilgarilanma harakatdan iborat bo'lsa (ω_e=0), (10.18) ga asosan Koriolis tezlanishi ($\bar{a}_k = 0$) nolga teng bo'ladi. Bu holda Koriolis teoremasi quyidagicha bo'ladi.

Agar nuqtaning ko'chirma harakati ilgarilanma harakatdan iborat bo'lsa, uning mutlaq tezlanishi nisbiy va ko'chirma tezlanishlarining geometrik yig'indisidan iborat bo'ladi.

$$\bar{a}_a = \bar{a}_r + \bar{a}_e \qquad (10.20)$$

Koriolis tezlanishi

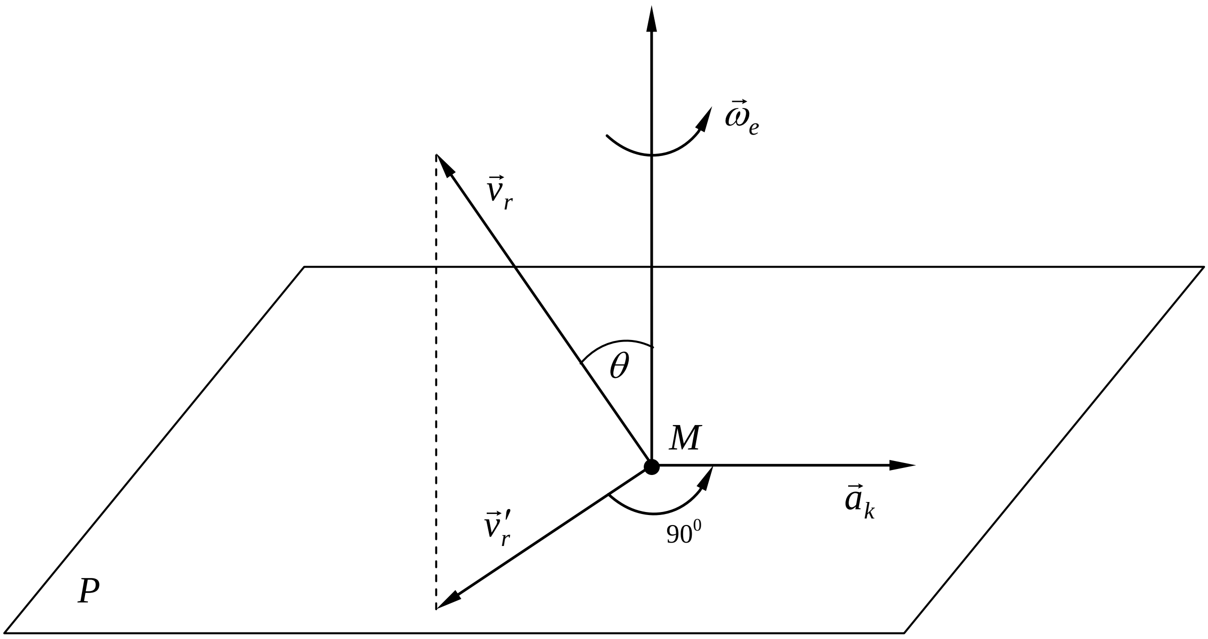
Koriolis tezlanishi ko'chirma harakat burchak tezlik vektorining nisbiy harakat tezlik vektoriga vektorli ko'paytmaning ikkilanganligiga teng.

$$\bar{a}_k = 2(\bar{\vartheta}_r \times \bar{\omega}_e) \qquad (10.21)$$

Ko'chirma nisbiy tezlanishlar vaqt birligi ichida tegishlicha nisbiy, ko'chirma tezliklarning o'zgarishini xarakterlaydi. Koriolis tezlanishi esa, nisbiy tezlikni ko'chirma harakat ta'siridan, aksincha ko'chirma harakat burchak tezligini nisbiy harakat ta'sirida o'zgarishini xarakterlaydi. Agar ko'chirma harakat ilgarilanma bo'lsa, $\omega_e = 0$, bu holda $a_k = 0$. Koriolis tezlanishi hosil bo'lmaydi. Ko'chirma harakati aylanma bo'lgan nuqta murakkab harakatiga tegishli masalani yechishda, ko'chirma, nisbiy tezlanishlardan tashqari Koriolis tezlanishini ham hisoblash talab etiladi. (10.21) formuladan Koriolis tezlanishining miqdor va yo'nalishini aniqlaymiz. Agar $\bar{\omega}$ bilan ϑ_r orasidagi θ burchak berilgan bo'lsa, Koriolis tezlanish a_k ning miqdori,

$$a_k = 2\omega_e \vartheta_r \sin\theta \qquad (10.22)$$

tenglikdan topiladi. Koriolis tezlanishi ko'chirma harakat ω_e-burchak tezlik vektori bilan ϑ_r nisbiy harakat tezlik vektorining vektor ko'paytmasi yo'nalishida yo'nalgan $\bar{a}_k$ vektor bo'lib, $\bar{\omega}$ bilan $\bar{\vartheta}_r$ yotgan tekislikka tik yo'naladi. $\bar{a}_k$ ning yo'nalishini aniqlash uchun $\bar{\omega}_e$ vektorni tezlanishi izlanayotgan M nuqtaga ko'chiramiz (79-shakl). Koriolis tezlanishi vektori uchidan qaraganda, vektor soat milining aylanishiga teskari aylanishda θ burchakka burib $\bar{\vartheta}_r$ vektor bilan bir yo'nalishda ko'rinishi kerak. Koriolis tezlanish yo'nalishini quyidagi *Jukovskiy qoidasi* asosida aniqlanadi. Nisbiy tezlik vektorini ko'chirma harakat burchak tezligi yo'nalishiga perpendikulyar tekislikka proyeksiyalaymiz. Bu proyeksiya $\bar{\vartheta}_r'$ ni mazkur tekislikda ko'chirma harakat aylanish yo'nalishida 90° ga buramiz (79-shakl). Bu yo'nalish Koriolis tezlanishining yo’nalishidir. $P \perp \omega_e$



79-shakl

Quyidagi hollarni tekshiramiz:

1. Agar ϑ_r nisbiy tezlik, ko’chirma harakat ωe - burchak tezligiga tik yo’nalgan bo’lsa, Koriolis tezlanishining qiymati $a_k = 2\omega_e \vartheta_r$ ga teng bo’ladi.

ϑ_r ni ω_e ga tik tekislikda aylanma harakat yo’nalishida 90° ga aylantirsak, Koriolis tezlanishining yo’nalishini olamiz.

2. Agar $\overline{\vartheta_r}$ $\overline{\omega_e}$ ga parallel bo’lsa, u holda $(\omega_e \hat{\ } \vartheta_r) = 0$, yoki $(\omega_e \hat{\ } \vartheta_r) = 180^o$ bo’lib, $a_k = 0$ bo’ladi.

3. Ko’chirma harakat ilgarilanma harakatdan iborat bo’lsa, $\omega_e = 0$ bo’lib, $a_k = 0$ bo’ladi.

Takrorlash uchun savollar

1. Nuqtaning nisbiy, ko’chirma, mutlaq harakatlari deb qanday harakatlarga aytiladi?
2. Nisbiy, ko’chirma, mutlaq tezliklar orasida qanday bog’lanish mavjud?
3. Qo’zg’almas sanoq sistemasiga nisbatan tinch turgan nuqtaning nisbiy va ko’chirma tezliklari orasida qanday bog’lanish mavjud?
4. Nuqtaning mutlaq tezlanishi qanday aniqlanadi?
5. Koriolis tezlanishi qanday aniqlanadi? Koriolis tezlanishi qanday hollarda nolga teng bo’ladi?

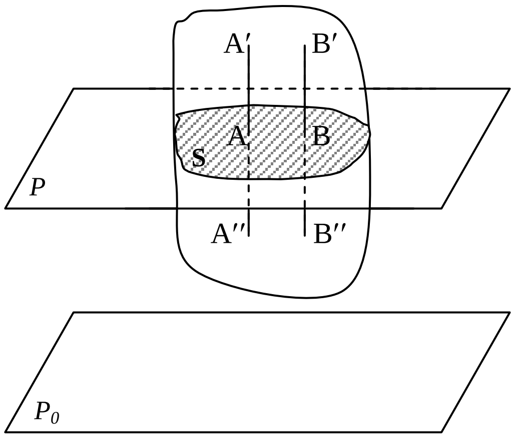
Tayanch so’z va iboralar:

Nuqtaning nisbiy, ko’chirma, mutlaq harakatlari, Nisbiy, ko’chirma, mutlaq tezliklar, Qo’zg’almas sanoq sistemasi, Nuqtaning mutlaq tezlanishi, Koriolis tezlanishi

11-MA'RUZA. QATTIQ JISMNING TEKIS-PARALLEL HARAKATI. QATTIQ JISMNING TEKIS-PARALLEL HARAKATI. QATTIQ JISMNING TEKIS-PARALLEL HARAKATINI ANIQLASH

Qattiq jism harakatlanganda uning hamma nuqtalari biror qo'zg'almas tekislikka parallel tekisliklarda harakatlansa, qattiq jismning bunday harakatiga tekis-parallel harakat deyiladi (80-shakl). Jismni P_0 tekislikka parallel bo'lgan ixtiyoriy P tekislik bilan qirqamiz. Natijada P tekislikda S qirqim yuza hosil bo'ladi. Bu yuzani tekis shakl deb ataladi. Tekis shakl hamma vaqt P tekislikda harakatlanadi. Jismda tekislikka tik qilib A', A'' olingan kesma jism harakatlanganda P o'ziga o'zi parallel qoladi. Uning hamma nuqtalarining tezlik va tezlanishlari bir xil bo'lib, P tekislikka parallel bo'ladi. Bunday holda A', A'' kesma ustida yotuvchi jismning hamma nuqtalarining harakatini o'rganish o'rniga, shu nuqtalardan birining harakatini o'rganish kifoya. Shunday nuqta uchun S tekis shaklning *a* nuqtasini olsak bo'ladi.

Demak qattiq jism tekis parallel harakatini o'rganish uchun, jismda P_0 qo'zg'almas tekislikka parallel bo'lgan S yuzaning (tekis shaklning) P tekislikdagi harakatini bilsak kifoya. Kinematikada qattiq jismning tekis parallel harakati sohasida yuritiladigan mulohazalar mashina va mexanizmlarning va ularning ayrim qismlarining harakatini o'rganishda nazariy baza sifatida qo'llaniladi. Shuning uchun qattiq jismning tekis parallel harakati kinematikaning asosiy qismi bo'lib, bu qismni ayrim o'rganiladi. Tekis shakl harakatlanadigan tekislikka tekis shaklning harakat tekisligi deyiladi. Tekis shaklning harakat tekisligida joylashgan qo'zg'almas OXY koordinata sistemasiga nisbatan harakatini o'rganamiz.



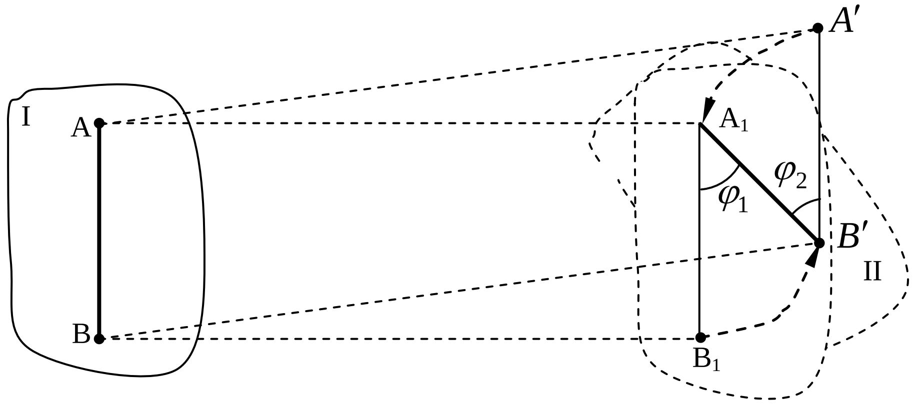
80-shakl

Tekis shakl S ning qo'zg'almas koordinata sistemasiga nisbatan vaziyati unda olingan ixtiyoriy ikkita nuqtasini tutashtiruvchi AB kesmaning vaziyati bilan aniqlanadi. Biroq AB kesmaning qo'zg'almas sistemaga nisbatan vaziyati uning biror nuqtasining koordinatalari va bu kesmaning OX o'qi bilan tashkil etgan φ burchagi bilan aniqlanadi. Bunday nuqtaga *qutb nuqta* deyiladi. Faraz qilaylik, S tekis shakl t vaqtda 1-holatda bo'lib uning holati AB kesma bilan aniqlansin, $t+\Delta t$ vaqtda S, II holatga ko'chib, AB kesma A_1B_1 holatni oladi. A nuqtani qutb deb olamiz. AB ning A nuqtasi A_1 ga S o'tguncha tekis shaklga ilgarilanma harakat beramiz, shunda AB kesma A_1B' holatga keladi. Bu holda S ning hamma nuqtalari geometrik AA_1 ga teng masofaga ko'chadi. A_1B' ni A_1 nuqta atrofida $<BA_1B'=\varphi_1$ ga aylantirsak,

A_1B' kesma A_1B_1 holatga ko'chadi. Tekis shakl S birinchi holatdan ikkinchi holatga o'tadi. Endi B nuqtani qutb deb olamiz. B nuqta B_1 holatga kelguncha S tekis shaklga ilgarilanma harakat beramiz. Bu holda AB kesma $A'B_1$ holatga o'tadi. Tekis shaklning hamma nuqtalari bir xilda BB' masofaga ko'chadi. B nuqta atrofida $\angle A'B_1A_1=\varphi_2$ burchakka aylantirsak, AB kesma A_1B_1 holatga keladi. Bu holda S tekis shakl B nuqta harakati bilan ilgarilanma ko'chib, B nuqta atrofida φ_2 burchakka aylanishi natijasida S birinchi holatdan ikkinchi holatga o'tadi. Birinchi holda S tekis shakl A nuqtaning ilgarilanma harakati bilan A nuqta atrofida φ_1 burchakka aylanishi natijasida birinchi holatdan ikkinchi holatga o'tgan edi. Har ikki holda tekis shaklni birinchi holatdan ikkinchi holatga ko'chishi ikki harakat natijasida bajarilishini ko'rdik. Bu tekis shaklning harakat tekisligida ko'chishiga doir teoremani ifodalaydi.

Teorema:

Tekis shaklning harakat tekisligidagi har qanday harakatini ixtiyoriy tanlab olingan qutb nuqtasining harakati bilan ilgarilanma harakatdan va shu qutb nuqta atrofida aylanma harakatlardan tashkil topgan deb qarash mumkin (81-shakl).



81-shakl

Biz yuqorida bir gal A, ikkinchi galda B nuqtani qutb deb oldik A va B lar ixtiyoriy nuqtalar bo'lgani uchun qutb nuqtani tanlab olish ixtiyoriy bo'ladi. Tekis shaklni ilgarilanma harakati qutb nuqtani tanlab olishga bog'liq. Masalan yuqorida A nuqtani qutb nuqta uchun olganimizda S ni nuqtalari ilgarilanma harakat natijasida AA' masofaga ko'chgan bo'lsa, B nuqtani qutb uchun olganimizda BB' masofaga ko'chadi. Biroq $AA'\neq BB'$ aks holda ($AA'=BB'$) tekis shakl faqat ilgarilanma harakat qiladi. Shakldan $AB\neq A_1B'$ va $AB\neq A'B_1$ bo'lgandan $A_1B'\neq A'B_1$ bo'ladi. Har ikki holda $\angle B'AB_1=\angle A'B_1A_1$: ya'ni $\varphi_1=\varphi_2$. Bundan tekis shaklni har ikki qutb nuqta atrofida aylanish yo'nalishi va aylanish burchagi bir xilda ekanligini ko'ramiz. Demak tekis shaklning ilgarilanma harakati qutb nuqtani tanlab olishga bog'liq, ammo aylanma harakati qutb nuqtani tanlashga bog'liq bo'lmaydi.

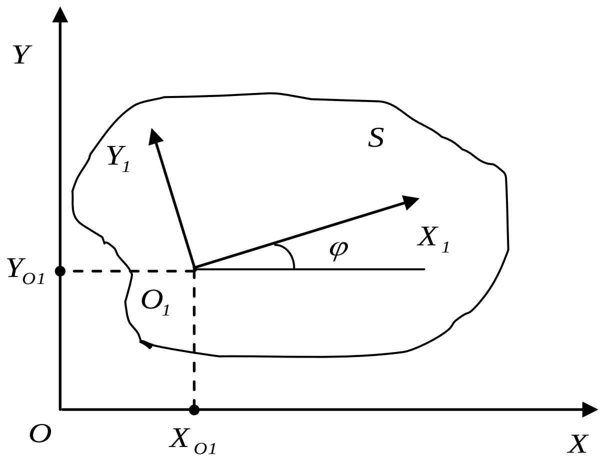
Tekis shaklning harakat tenglamalari

Tekis shakl S ni harakat tekisligida joylashgan OXY qo'zg'almas koordinata sistemasiga nisbatan harakatini tekshiramiz. Qutb nuqta uchun S ning biror O nuqtasini ixtiyoriy tanlab olamiz. Shu O_1 nuqtada S bilan mahkam bog'langan, u bilan birga harakatlanuvchi $O_1X_1Y_1$ koordinata sistemasini o'tkazamiz. $O_1X_1Y_1$ koordinata sistemasini OXY koordinata sistemasiga nisbatan harakati S ni OXY ga nisbatan harakatini ifodalaydi. $O_1X_1Y_1$ ning OXY ga nisbatan holati O_1 ni X_{o1}, Y_{o1} koordinatalari hamda OX ning O_1X_1 bilan tashkil etgan φ burchagi bilan aniqlanadi. Vaqt o'tishi bilan S harakatlanganda X_{01}, Y_{o1} va φ lar t vaqtning funksiyasi shaklida o'zgaradi (82-shakl).

Ya'ni

$$\left.\begin{aligned} X_{01} &= f_1(t) \\ Y_{01} &= f_2(t) \\ \varphi &= f_3(t) \end{aligned}\right\} \qquad (11.1)$$

bo'ladi. X_{01}, Y_{o1} va φ lar vaqtning bir qiymatli, uzluksiz differensiallanuvchi funksiyasi bo'ladi. (11.1) tenglamalar berilgan bo'lsa, istalgan t vaqt uchun S ning XY tekisligidagi holati ma'lum bo'ladi. (11.1) tenglamalar tekis shaklning harakat tenglamalari deyiladi. Agar harakat davomida φ=const bo'lsa, S va Y bilan bog'langan $O_1X_1Y_1$ koordinata o'qlari o'zlarining boslang'ich holatiga doimo parallel harakatlanadi.



82-shakl

S ilgarilanma harakatda bo'ladi. Agar X_{01},Y_{01}=const bo'lsa, S va Y bilan bog'langan $O_1X_1Y_1$ koordinata o'qlari O_1 nuqta atrofida aylanma harakat qiladi. φ aylanish burchagini OX dan boshlab soat milining aylanish tomoniga teskari aylanishda hisoblanadi. Shunday qilib S ning qo'zg'almas XY tekisligidagi harakati ikki harakatdan tashkil topadi.

(11.1) tenglamalarning birinchi ikkitasi S tekis shaklning ilgarilanma harakatini, uchinchisi S ning qutb nuqta atrofidagi aylanma harakatini ifodalaydi. Agar (11.1) berilgan bo'lsa, ularni birinchi ikkitasidan t bo'yicha bir marta hosila olib, S ning ilgarilanma harakat ϑ tezligini topamiz:

$$\vartheta_{0_1x} = f_1'(t);\ \vartheta_{0_1y} = f_2'(t)$$

bunda

$$\vartheta_{0_1} = \sqrt{\dot{X}_{0_1}^2 + \dot{Y}_{0_1}^2} = \sqrt{\vartheta_{o_1x}^2 + \vartheta_{o_1y}^2}$$

Agar (11.1) ning uchinchi tenglamasidan t vaqt bo'yicha bir marta hosila olsak, S tekis shaklning O_1 nuqta atrofidagi aylanma harakat burchak tezligi ω ni va ikki marta hosila olsak, burchak tezlanishi ε ni topamiz.

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}; \quad \varepsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

Demak S tekis shakl harakat tekisligidagi harakati ixtiyoriy tanlab olingan

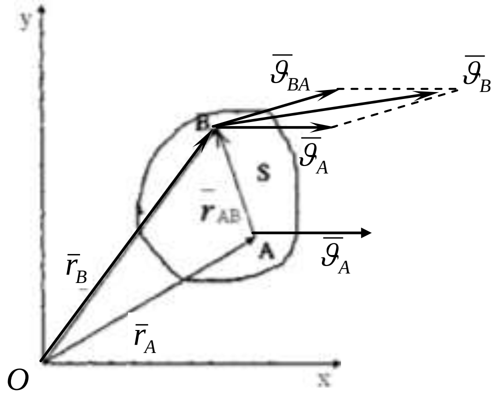
O_1 qutb nuqtasining tezligi bilan ilgarilanma va O_1 qutb nuqta atrofida aylanma harakatlardan tashkil topadi. S tekis shakl OXY qo'zg'almas koordinata sistemasiga nisbatan bir vaqtda ikki harakatda ishtirok etadi. Shuning uchun S ning OXY ga nisbatan harakati murakkab harakatdan iborat deb qarash mumkin. S ning ilgarilanma harakati ko'chirma, uning qutb nuqta atrofidagi aylanma harakati nisbiy harakat bo'ladi.

Tekis shakl nuqtasining tezligini qutb usulida aniqlash

Tekis shaklning XY tekisligidagi harakatini tekshiramiz (83-shakl). S ning biror A nuqtasini qutb uchun tanlab, uning radius vektorini $\bar{r}_A$ bilan belgilaymiz, S ning ixtiyoriy B nuqtasining radius vektori $\bar{r}_B$. Yuqorida isbotlangan teoremaga asosan

$$\bar{r}_B = \vec{r}_A + \vec{r}_{AB} \qquad (11.2)$$

bo'ladi.



83-shakl

Bunda $\bar{r}_{AB}$ B nuqtaning A nuqta atrofida aylanma (nisbiy) harakat radius vektori. Nuqta harakatlanganda uning radius vektori t vaqtning funksiyasi sifatida o'zgaradi. B nuqtaning tezligi (11.2) dan t vaqt bo'yicha olingan hosilaga teng bo'ladi. Ya'ni

$$\frac{d\bar{r}_B}{dt} = \frac{d\bar{r}_A}{dt} + \frac{d\bar{r}_{AB}}{dt} \qquad (11.3)$$

$$\frac{d\bar{r}_B}{dt} = \bar{\vartheta}_B; \quad \frac{d\bar{r}_A}{dt} = \bar{\vartheta}_A; \quad \frac{d\bar{r}_{AB}}{dt} = \bar{\vartheta}_{AB}$$

bunda $\bar{\vartheta}_{AB}$ B nuqtaning A nuqta atrofidagi nisbiy (aylanma) harakat tezligi. Aylanma harakat tezligi, aylanma harakat ω burchak tezlik vektorining aylanish radius vektoriga vektorlik ko'paytmasiga teng ekanligi bizga ma'lum

$$\bar{\vartheta}_{BA} = \bar{\omega} \times \overline{AB};$$

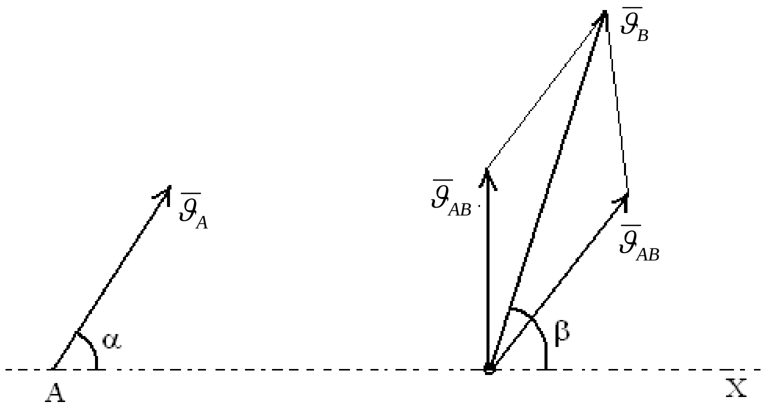
Bunda $\bar{\omega} \perp AB$ bo'lgani uchun ϑ_{BA} ning miqdori $\vartheta_{BA} = \omega$ AB bo'ladi. Bularning qiymatlarini (11.3) ga qo'ysak quyidagi tenglikni olamiz

$$\bar{\vartheta}_B = \bar{\vartheta}_A + \bar{\vartheta}_{AB} \qquad (11.4)$$

Demak, tekis shaklning biror nuqtasining tezligi, qutb nuqtasining ilgarilanma harakat tezligi bilan qutb nuqta atrofidagi aylanma harakat tezliklarining geometrik yig'indisiga teng ekan. Boshqacha aytganda, tekis shaklning biror nuqtasining absolyut ($\bar{\vartheta}_B$) tezligi uning qutb nuqtasining ko'chirma harakat ($\bar{\vartheta}_A$) tezligi bilan qutb nuqta atrofida nisbiy ($\bar{\vartheta}_{BA}$ aylanma) harakat tezliklarining geometrik yig'indisiga teng bo'ladi. (11.4) tenglikdan foydalanib, amaliy masalalarni yechishda katta ahamiyatga ega bo'lgan quyidagi teoremani isbotlaymiz.

Teorema: Tekis shakl ikki nuqtasining tezliklarini shu nuqtalarni tutashtiruvchi to'g'ri chiziqdan o'tuvchi o'qdagi proyeksiyalar o'zaro teng bo'ladi.

Tekis shaklning $\overline{\vartheta}_A$ va $\overline{\vartheta}_B$ tezliklari berilgan bo'lsin (84-shakl). Shu tezliklarning A va B nuqtalarini tutashtiruvchi AX yo'nalishiga proyeksiyasining tengligini ko'rsatsak, teoremani isbotlagan bo'lamiz. Buning uchun (11.4) ni AX yo'nalishiga proyeksiyalaymiz.



84-shakl

$$pr_{AX}(\overline{\vartheta}_B) = pr_{AX}(\overline{\vartheta}_A) + pr_{AX}(\overline{\vartheta}_{AB})$$

Bunda $\overline{\vartheta}_{BA} \perp AB$ bo'lgani uchun $pr_{AX}(\overline{\vartheta}_{AB}) = 0$.

Demak,

$$pr_{AX}(\overline{\vartheta}_B) = pr_{AX}(\overline{\vartheta}_A) \qquad (11.5)$$

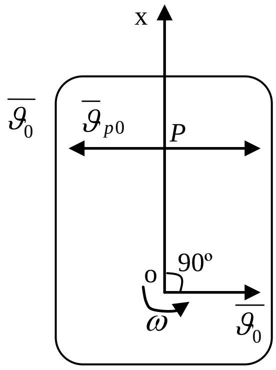
$$\vartheta_A \cos\alpha = \vartheta_B \cos\beta$$

bo'ladi.

Teorema isbotlandi.

Tezliklar oniy markazi

Berilgan onda (daqiqada) tezligi nolga teng bo'lgan tekis shakl nuqtasiga tezliklar oniy markazi deb ataladi. Tekis shaklning bunday nuqtasini topish uchun uning istalgan nuqtasining tezligini aniqlaydigan (11.4) formuladan foydalanamiz. Aytaylik tekis shaklning biror O nuqtasining ϑ_0 ilgarilanma (ko'chirma) harakat tezligi va shu O nuqta atrofidagi (nisbiy) aylanma harakat ω burchak tezligi berilgan bo'lsin. Shu O nuqtani qutb nuqta deb olamiz. Bu holda tekis shaklning ixtiyoriy nuqtasining (absolyut) tezligi, qutb nuqta ϑ_0 ilgarilanma (ko'chirma) harakat tezligi bilan qutb nuqta atrofida ϑ_{OR} (nisbiy) aylanma harakat tezligining geometrik yig'indisiga teng bo'ladi. O nuqtadan ϑ_0 ga aylanma harakat yo'nalishiga tik chiziq o'tkazamiz (85-shakl).



85-shakl

Bu chiziq ustida yotgan hamma nuqtalarning O nuqta atrofida aylanma tezligi o'tkazilgan chiziqqa tik, qutb nuqta ϑ_0 tezligiga teskari yo'naladi. Aylanma harakat tezliklari nuqtalardan aylanish markazi O gacha bo'lgan oraliqqa proporsional ekani bizga formuladan ma'lum. O'tkazilgan to'g'ri chiziq ustida shunday P nuqta topamizki, uning aylanish tezligi ϑ_{PO} miqdor jihatidan qutb nuqta tezligiga teng bo'lsin, ya'ni $\vartheta_0=\vartheta_{PO}$ yo'nalishi unga qarama-qarshi bo'lsin $\overline{\vartheta}_0 = -\overline{\vartheta}_{P0}$. Bu holda P nuqtaning (absolyut) tezligi (11.4) formulaga muvofiq

$$\overline{\vartheta}_P = \overline{\vartheta}_O + \overline{\vartheta}_{PO}$$

bo'ladi. Shunday qilib shu onda P nuqta tekis shaklning tezliklar oniy markazi bo'ladi. Endi P nuqtaning to'g'ri chiziq ustidagi holatini aniqlaydigan formulaga muvofiq $\vartheta_{PO}=\omega OP$, ikkinchi tomondan $\vartheta_{PO}=\vartheta_0$ bu holda $\omega OP=\vartheta_0$ bo'ladi. Bundan

$$OP = \frac{\vartheta_0}{\omega} \tag{11.6}$$

Demak, tekis shaklning tezliklar oniy markazi, qutb nuqtadan uning tezligiga aylanish yo'nalishda tik o'tgan to'g'ri chiziqda qutb nuqtasidan $\frac{\vartheta_0}{\omega}$ masofada joylashgan bo'lar ekan.

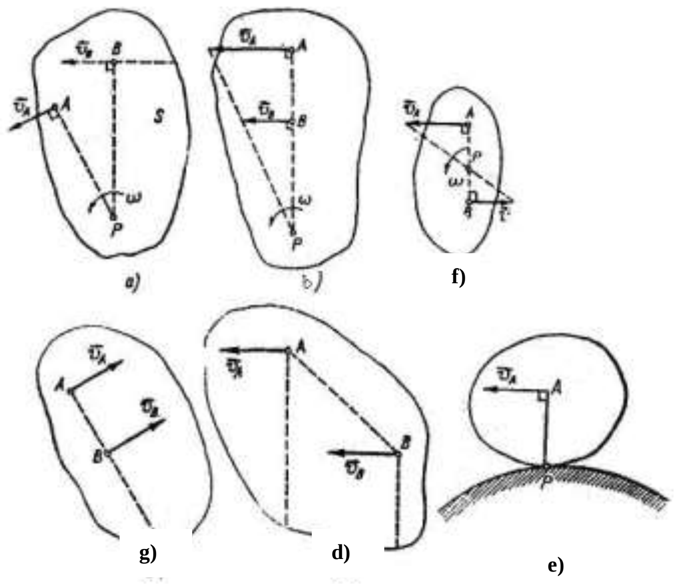
Tezliklar oniy markazini aniqlash usullari

Agar tekis shaklning biror A nuqtasining ϑ_A tezligi va ikkinchi B nuqtasining ϑ_B tezligining yo'nalishi berilgan bo'lsa, tezliklar oniy markazi shu A va B nuqtalardan tezliklarga o'tkazilgan tik chiziqlarni kesishgan nuqtasida bo'ladi (86- shakl, *a*);

1) Agar tekis shaklni ikki A va B nuqtalarini $\overline{\vartheta}_A, \overline{\vartheta}_B$ tezliklari shu nuqtalarni tutashtiruvchi AB ga tik, miqdorlari farqli bo'lsa ($\vartheta_A \neq \vartheta_B$), tezliklar oniy markazi tezliklarning uchini tutashtiruvchi chiziq bilan AB chiziqni davomining kesishgan nuqtasida bo'ladi (86- shakl, *b, d*);

2) Agar tekis shaklning A va B nuqtalarining tezliklari teng va parallel bo'lsa, tezliklar oniy markazi (AP=∞) cheksizlikda bo'ladi. Shu onda tekis shakl oniy ilgarilanma harakat qiladi (86-shakl, e,*f*).

3) Amaliyotda ko'pincha tekis shakl S qo'zg'almas egri chizig'i ustida sirpanmasdan dumalaydi. Bu holda S ning egri chiziqqa tegib turgan nuqtasining tezligi nolga teng bo'ladi. Shu nuqta mazkur on uchun oniy markaz bo'ladi (86-shakl, g).



86-shakl

Tekis shakl nuqtalarining tezliklarini tezliklar oniy markazi yordamida aniqlash

Berilgan onda tekis shaklning oniy markazi P ma'lum bo'lsin. P ni qutb nuqta uchun olib, (11.4) formulaga muvofiq tekis shaklning A, B, C nuqtalari tezliklarini topamiz:

$$\bar{\vartheta}_A = \bar{\vartheta}_P + \bar{\vartheta}_{PA}$$
$$\bar{\vartheta}_B = \bar{\vartheta}_P + \bar{\vartheta}_{BP}$$
$$\bar{\vartheta}_C = \bar{\vartheta}_P + \bar{\vartheta}_{CP}$$

Bu yerda $\vartheta_P=0$ bo'lgani uchun

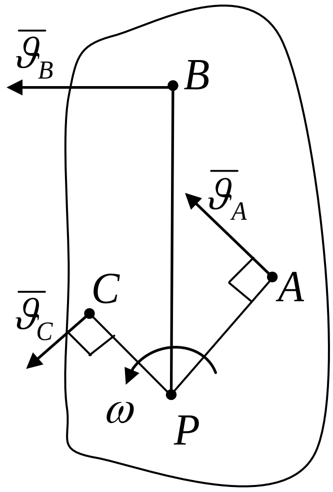
$$\vartheta_A=\omega_p AP, \vartheta_B=\omega_p BP, \vartheta_C=\omega_p CP \qquad (11.7)$$

yo'nalishlari $\bar{\vartheta}_A \perp AP$ $\bar{\vartheta}_B \perp BP$ $\bar{\vartheta}_C \perp CP$.

Agar tekis shaklning olingan onda oniy markazi ma'lum bo'lsa, tekis shakl nuqtalarining shu ondagi tezliklari, oniy markazi atrofida xuddi oniy aylanma harakatdagi jism nuqtalarining tezliklari kabi topiladi. Demak, tekis shaklning oniy markazi ma'lum bo'lganda, uning nuqtalari tezliklarining miqdorlari tekis shaklning aylanma harakat burchak tezligini nuqtalardan oniy markazgacha bo'lgan masofalariga ko'paytmasiga teng bo'ladi.

Tezliklar mos ravishda shu oraliqlarga aylanma harakat yo'nalishlarda tik yo'nalgan bo'ladilar (87-shakl). (11.7) dan tekis shakl nuqtalarining oniy paytdagi tezliklari orasidagi munosabatni aniqlaymiz

$$\frac{\vartheta_A}{AP} = \frac{\vartheta_B}{BP} = \frac{\vartheta_C}{CP} \qquad (11.8)$$



87-shakl

Tezlanishlar oniy markazi

Tekis shaklning har onda tezliklar oniy markazi bo'lgani kabi, tezlanishlar oniy markazi ham bo'ladi. Harakatlanayotgan tekis shaklning kuzatilayotgan onda tezlanishi nolga teng bo'lgan nuqtasiga tezlanishlar oniy markazi deyiladi. Tezlanishlar oniy markazini Q bilan belgilaymiz va uning holatini aniqlaymiz. Q nuqtaning tezlanishi S tekis shaklning boshqa nuqtalarining tezlanishi kabi (11.9) formulaga muvofiq aniqlanadi. Buning uchun S ning biror O nuqtasining a_0 ilgarilanma ko'chirma harakat tezlanishi bilan S ning burchak tezligi ω va burchak tezlanishi ε berilgan bo'lishi kerak. Bu holda (11.9) ga muvofiq

$$\overline{a}_Q = \overline{a}_0 + \overline{a}_{Q0} \tag{11.16}$$

bo'ladi.

Q tezlanishlar oniy markazi bo'lishi uchun $a_Q = 0$ bo'lishi kerak. Bundan $a_0 = a_{Q0}$ kelib chiqadi. Demak, Q tezlanishlar oniy markazi bo'lishi uchun Q ning ko'chirma harakat a_0 tezlanishi oniy aylanma harakat a_{Q0} tezlanishiga miqdor jihatidan teng bo'lib, bir chiziq bo'ylab qarama-qarshi tomonlarga yo'nalgan bo'lishi kerak. (11.16) ga muvofiq

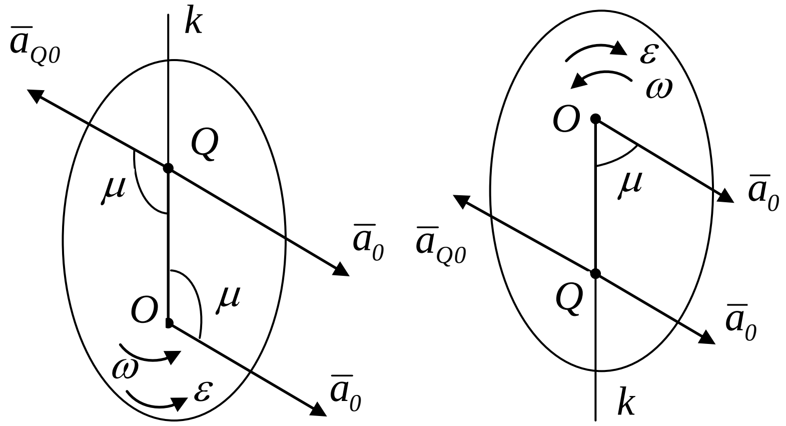
$$|a_{Q0}| = Q0\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$$

shartga ko'ra $a_0 = |a_{Q0}|$ bo'lganidan

$$Q0 = \frac{a_0}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}} \tag{11.17}$$

ni topamiz. Bu tenglik tezlanishlar oniy markazi Q ning 0 nuqtagacha bo'lgan masofasini aniqlaydi. Oniy aylanish radiusi QO ning a_{Q0} bilan tashkil etgan burchagi (11.14) formulaga muvofiq

$$tg\mu = \frac{|\varepsilon|}{\omega^2} \tag{11.18}$$



88-shakl

a_0 ga μ burchak ostida (ε>0) aylanma harakat yo'nalishida (agar ε<0 aylanma harakatga teskari yo'nalishda bo'lsa) OK chizig'ini o'tkazamiz (88-shakl). Shu OK chiziq olingan QO kesmaning Q uchi tezlanishlar oniy markazini ifodalaydi. Shunday qilib tekis shaklning tezlanishlar oniy markazining holatini (11.17) va (11.18) formulalaridan foydalanib topiladi. Buning uchun a_0 va ω, ε lar berilgan bo'lishi shart. Tekis shaklning tezlanishlar oniy markazi Q ma'lum bo'lsa, uning boshqa nuqtalarining tezlanishlarini aniqlash soddalashadi. Q ni qutb nuqtasi uchun olib tekis shaklning boshqa A va B nuqtalarining tezlanishlarini (11.1) formulaga muvofiq topamiz

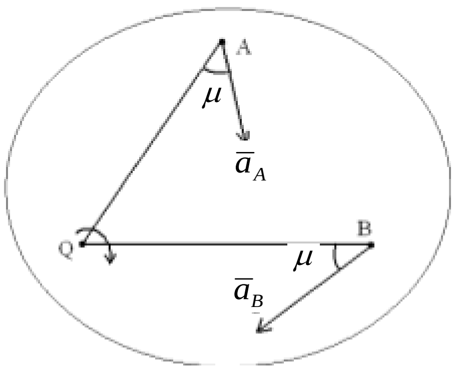
$$\bar{a}_A = \bar{a}_Q + \bar{a}_{AQ}$$
$$\bar{a}_B = \bar{a}_Q + \bar{a}_{BQ}$$

Bu yerda Q tezlanishlar oniy markazi bo'lgani uchun $\bar{a}_Q$=0 bo'lib, yuqoridagi tengliklar quyidagi ko'rinishga keltiriladi.

$$\bar{a}_A = \bar{a}_{AQ} \qquad \bar{a}_B = \bar{a}_{BQ} \tag{11.19}$$

bu tezlanishlarning moduli

$$a_A = a_{AQ} = AQ\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} \qquad a_B = a_{BQ} = BQ\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} \tag{11.20}$$



89-shakl

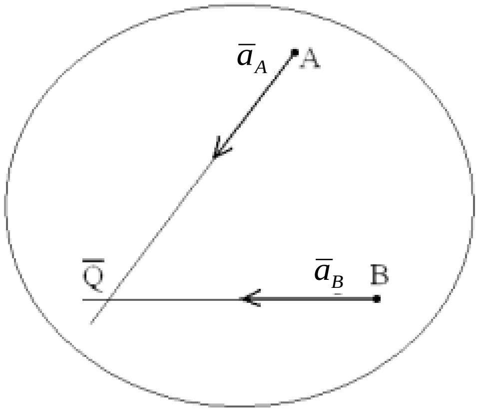
tengliklaridan aniqlanadi. (11.11) formulalardan S tekis shaklning tegishli nuqtalarining tezlanishlari nuqtalardan tezlanishlar oniy markazi bo'lgan oraliqlarga proporsional ekani kelib chiqadi

$$\frac{a_A}{a_B} = \frac{AQ}{BQ} \tag{11.21}$$

olingan (11.11) va (11.12) ga asosan quyidagi natijaga kelish mumkin.

Agar tekis shaklning tezlanishlar oniy markazi, aylanma harakat burchak tezligi ω va burchak tezlanishi ε lar berilgan bo'lsa, tekis shaklning istalgan nuqtalarining tezlanishlarini qutb nuqta atrofida oddiy aylanma harakat tezlanishlari kabi aniqlanar ekan. Tezlanishlar oniy markazi A va B nuqtalardan ularning $\bar{a}_A$ va $\bar{a}_B$ tezlanishlariga μ burchak ostida o'tkazilgan chiziqlarning kesishgan nuqtasida joylashgan bo'ladi (90-shakl). Agar ε=0 bo'lsa, $a_A = a_{AQ}^n$ *ва* $a_B = a_{BQ}^n$ bo'lib, tezlanishlar oniy markazi $\bar{a}_A$ va $\bar{a}_B$ tezlanishlar yo'nalgan chiziqlarning kesishgan nuqtasida joylashgan bo'ladi (90-shakl).

Shuni ta'kidlab o'tish lozimki, tezliklar oniy markazi bilan tezlanishlar oniy markazi bir nuqtada bo'lmaydi.



90-shakl

Takrorlash uchun savollar

1. Ko'chirma harakat ilgarilanma bo'lgan holda nuqtaning mutlaq tezlanishi qanday aniqlanadi?
2. Nuqtaning mutlaq tezligi moduli qanday aniqlanadi?
3. Nuqta doira gardishi bo'ylab, doiraga nisbatan, doira aylanishiga teskari tomonga harakatlanadi. Bu nuqtaning mutlaq tezligi qanday yo'naladi?
4. Harakatdagi doira gardishi bo'ylab, doira harakati yo'nalishi bo'yicha harakatlanuvchi nuqtaning Koriolis tezlanishi qanday yo'naladi?
5. O'z o'qi atrofida tekis aylanuvchi silindrning yo'naltiruvchisi bo'ylab nuqta tekis harakat qiladi. Nuqtaning Koriolis tezlanishi nimaga teng?

Tayanch so'zlar va iboralar:

Tekis shkl, **k**o'chirma harakat, ilgarilanma harakat, oniy markaz, tezliklar oniy markazi, qutb nuqtasi, qutb nuqtasining ilgarilanma harakat tezligi, radius vektori.

12-MA’RUZA. DINAMIKA. DINAMIKAGA KIRISH. DINAMIKANING ASOSIY TUSHUNCHALARI

Dinamika nazariy mexanikaning asosiy bo'limi bo'lib. unda jismlarning mexanik harakat qonunlari shu harakatni vujudga keltiruvchi kuchlarga bog'liq holda o'rganiladi.

Mexanikaning asosiy, birlamchi tushunchasi bo'lgan kuch dinamikada moddiy jismlar harakatini o'zgartiruvchi ta'siri bilan aniqlanadi. Dinamikada jismlarga o'zgarmas kuchlardan tashqari miqdori va yo'nalishi o'zgaruvchan kuchlar ham ta'sir ko'rsatishi mumkin deb qaraladi. Kuchlar aktiv, faol yoki passiv. chunonchi. bog'lanish reaksiya kuchlari bo'lishi mumkin.

Dinamikaning asosiy tushunchalari, ta 'riflari

Massa jismlarning moddiy miqdor o'lchovi bo'lib. dinamikaning asosiy tushunchalaridan biri hisoblanadi. Jismning harakati faqat unga qo'yilgan kuchgagina bog'liq bo'lmay, uning inerlligiga ham bog'liq. Jismning inertligini miqdor jihatdan ifodalovchi fizikaviy kattalik jismning massasi deyiladi. Biz o'rganayotgan mexanika klassik mexanika bo'Iib, bunda jismning tezligi yorug'lik tezligidan ancha kichik. uning massasi o'zgarmas. skalyar va musbat kattalik deb qaraladi.

Harakatini o'rganishda o'lchamlari ahamiyatga ega bo'lmagan, lekin massaga ega moddiy jismga moddiy nuqta deyiladi. Moddiy nuqta asl ma'noda, biror jismni anglatgani uchun u shu jismning massasiga teng massaga va shu sababli, jism kabi ta'sirlasha olish xususiyatiga ega bo'ladi. Moddiy nuqta tushunchasiga binoan, mexanik sistema yoki jism massasi uni tashkil elgan moddiy nuqtalar massalarining yig'indisi bilan aniqlanadi. Umumiy holda. jismning harakali faqat ushbu moddiy nuqtalar yig'indisigagina emas, ularning jism bo'ylab taqsimlanishi (jism shakli)ga ham bog'liq.

Dinamikaning masalasi. Dinamikaning masalasi jismga ta'sir etuvchi kuchlar bilan uning harakatining kinematik xarakteristikalari o'rtasidagi bog’lanish qonunlarini aniqlash va bu qonunlarni iiarakatning xususiy hollariga tatbiq etishdan iborat. Dinamika masalasini dinamikaning asoschisi Nyuton juda yaxshi la'riflagan. U aytganki. dinamika «harakatning yuz berishiga ko'ra tabiat kuchlarini bilish, so'ngra bu kuchlar bilan tabiatning boshqa hodisalarini tushuntirishi» zarur.

Dinamikaning asosiy qonunlari

Dinamikaning asosida tajriba va kuzatishlarda aniqlangan va Galiley-Nyuton qonunlari deb ataluvchi quyidagi qonunlar yotadi. Bu qonunlarga asoslanib mantiqiy yo'l bilan matematika usullanni qo'llash natijasida dinamikaning turli teoremalari va tenglamalari keltirilib chiqariladi. Dinamikaning ushbu qonunlari birinchi bor Galiley va Nyuton tomonidan XVII asrda ta'riflangan. Bu qonunlarning to'g'riligi insonning amaliy faoliyatida, texnikaning rivojlauishida hamon kuzatilib kelinmoqda.

1 - qonun (inersiya qonuni)

Har qanday kuch ta'siridan xoli etilgan moddiy nuqta tinch holatda yoki to'g'ri chiziqli tekis harakatda bo'ladi.

Birinchi qonunda qayd etilgan holatda moddiy nuqlaga boshqa jismlar yoki nuqtalar ta'sir etmaydi. ya'ni nuqtaga hech qanday ta'sir kuchlari qo'yilmagan yoki qo'yilgan kuchlar o'zaro muvozanatlashgan bo'ladi. Bu qonun mexanik harakatlarningcng soddasi — jismning yoki nuqtaning boshqa jismlardan to'la ajralgan sharoitdagi harakatini ifodalaydi. ***Qonunga muvofiq nuqtaning o'z holatini saqlash xususiyatiga uning inertligi deyiladi.*** Moddiy nuqtaning bunday holati inersion holat, harakati ***inersion harakat deyiladi.*** Birinchi qonunning o'zini esa inersiya qonuni deb ataladi.

Nuqtaning tinch holati uning inersion harakat holatiningxususiy holi bo'ladi. Galiley - Nyutonning bu qonuniga muvofiq hamma jismlar o'zining inersion harakat holatini o'zgarishiga qarshilik ko'rsatish qobiliyatiga ega.

2-qonun (dinamikaning asosiy qonuni)

Kuch ta'siridagi moddiy nuqta shu kuchga proporsional va kuch bilan bir xil yo'nalgan tezlanishda bo'ladi.
Agar nuqtaga qo'yilgan kuchni $\vec{F}$, nuqta lezlanishini $\vec{a}$ deb belgilasak, ikkinchi qonun quyidagicha ifodalanadi:

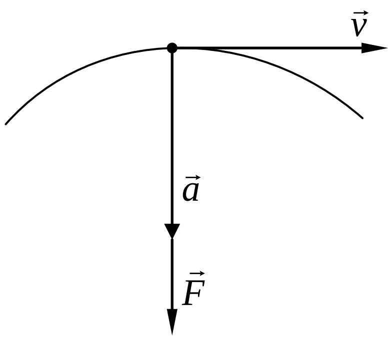
$$m \cdot \vec{a} = \vec{F} \qquad (12.1)$$

Bu yerda m nuqtaning massasi. Ikkinchi qonun nuqta dinamikasining asosiy qonuni, ushbu qonunni ifodalovchi (12.1) tenglama dinamikaning asosiy tenglamasi deyiladi.

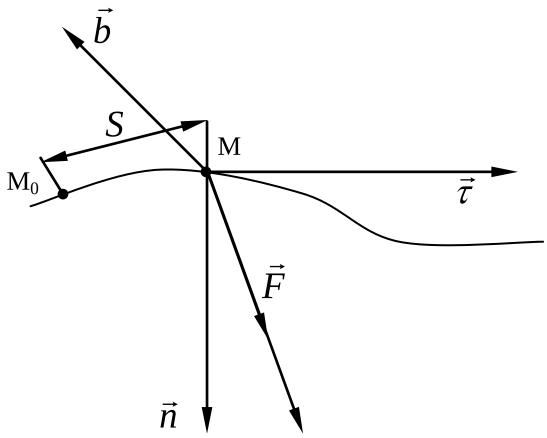
Qo'yilgan ma'lum kuch ta'sirida olgan tezlanishga ko'ra nuqtaning massasini aniqlash mumkin. Chunonchi, og'irlik kuchi P ta'sirida moddiy nuqtaning olgan tezlanishi uning erkin tushish tezlanishi (g) ga teng, demak (12.1) ga ko'ra

$$m = \frac{P}{g} \qquad (12.2)$$

Klassik mexanikada harakatdagi jism massasi shu jismning tinch holatdagi massasiga teng deb qaraladi.



91a-shakl



91a-shakl

Yer sirtidagi har qanday jismga Nyutonning, bizga yaxshi tanish, butun Olam tortishish qonuniga ko’ra

$$F = \gamma \cdot \frac{m \cdot M}{R^2} \qquad (12.3)$$

kuch ta'sir qiladi. Bu yerda m—Yer sirtidagi jismning massasi bo'Iib, uni gravitatsion massa deyiladi, M,R — Yerning massasi va radiusi. Gravitatsion (12.3) va inersion

(12.2) massalar materiya xususiyatlarining turli tomonlarini aks ettirsa ham ular o'zaro teng deb hisoblanadi.

Nyutonning ikkinchi qonuni birinchi — inersiya qonunini ham o'z ichiga oladi. Haqiqatan ham. agar F=0 bo'lsa, (12.1) dan v=const kelib chiqadi. Demak, nuqtaga kuch ta'sir etmasa, u to'g'ri chiziqli tekis harakatdagi inersion holatda bo'ladi.

Dinamikaning asosiy tenglamasidagi tezlanish nuqtaning absolyut tezlanishi deb tushuniladi.

3-qonun (ta'sir va aks ta'sirning tenglik qonuni)

Ikki moddiy nuqta miqdorlari teng va ularni tutashtiruvchi to'g'ri chiziq bo'ylab qarama-qarshi yo'nalgan kuchlar bilan o'zaro ta'sirlashadi.

Masalan, A moddiy nuqta B moddiy nuqtaga FA kuch bilan ta'sir etsa, B nuqta ham A nuqtaga, FA kuch yotgan AB chiziq bo'ylab teskari yo'nalgan, miqdori FA ga teng FB kuch bilan ta'sir qiladi. Dinamikaning asosiy qonuniga muvofiq A va B nuqtalar uchun $F_B = m_A a_A$, $F_A = m_B a_B$ formulalarni yozish mumkin. Uchinchi qonunga ko'ra $F_B = F_A$, $m_A a_A = m_B a_B$ ya'ni Bundan,

$$\frac{a_B}{a_A} = \frac{m_A}{m_B} \tag{12.4}$$

kelib chiqadi, ya'ni ikki moddiy A va B nuqtalarning bir-biriga ta'siri natijasida olgan tezlanishlari massalariga teskari proporsional. Ushbu nuqtalarning tezlanish vektorlari esa AB chiziq bo'ylab qarama-qarshi tomonga yo'nalgan. (12.4) ga ko'ra ikkita ixtiyoriy A va B jismlarning bir-biri bilan o'zaro mexanik ta'sirlashuvi natijasida olgan tezlanishlarining nisbati har doim ayni shu A va B lar uchun o'zgarmas bo'Iib, faqat A va B laming tabiatiga bog'liq.

Dinamikaning birinchi va ikkinchi qonunlari birgina moddiy nuqta uchun yozilgan, uchinchi qonun esa ikki va undan orliq nuqtalar. ya'ni moddiy nuqtalar sistemasi uchun o'rinli.

4-qonun (kuchlar la'sirining o'zaro bog'liqmasiik qonuni)

Bir necha kuch ta'siridagi moddiy nuqtaning tezlanishi uning har bir kuch ta'siridan oladigan tezlanishlaming vektorli yig'indisiga teng.
To'rtinchi qonunga ko'ra nuqtaga ta'sir etayotgan kuchlar sistemasini har doim teng ta'sir etuvchi kuch bilan almashtirish mumkin.

Moddiy nuqtaga $F_1, F_2, ..., F_n$ kuchlar ta'sir etayotgan bo'lsin. U holda ularning teng ta'sir etuvchisi

$$\vec{F} = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k$$

ga teng. Bu kuchlarning har birining ta'siridan nuqtaning olgan tezlanishlari uchun ikkinchi qonunga ko'ra

$$\vec{F}_1 = m\vec{a}_1$$
$$\vec{F}_2 = m\vec{a}_2$$
$$.............$$
$$\vec{F}_n = m\vec{a}_n$$
tenglamalarni yozish mumkin. Tenglamalarning o'ng va chap tomonlarini qo'shib
$$\sum_{k=1}^{n}\vec{F}_k = m\sum_{k=1}^{n}\vec{a}_k$$
hosil qilamiz. 4-qonunga ko'ra
$$\vec{a} = \sum_{k=1}^{n}\vec{a}_k$$
Demak,
$$m\vec{a} = \sum_{k=1}^{n}\vec{F}_k \qquad (12.5)$$
hosil bo'ladi. (12.5) tenglama kuchlar sistemasi ta'siridagi moddiy nuqta uchun dinamikaning asosiy qonunini ifodalaydi.

Ushbu qonunga muvofiq har bir kuch moddiy nuqtaga boshqa kuchlarning la'siriga bog'liq bo'lmagan holda alohida tezlanish beradi, shu sababli, bu qonun ***kuchlar ta'sirining o'zaro bog'liqmaslik qonuni deyiladi***. To'rtinchi qonunni kuchlarni qo'shish aksiomasi—kuchlarning parallelogramm qoidasidan keltirib chiqarish mumkin. shuning uchun to'rtinchi qonunni ba'zan mustaqil qonun emas ham deyiladi.

Inersial sanoq sistemasi

Moddiy nuqtaning umuman har qanday jismning mexanik harakati odatda uch o'lchovli Yevklid fazoda biror qo'zg'almas jism bilan biriktirilgan sanoq sistemaga nisbatan kuzatiladi.

Tabiat qonunlarining matematik ifodasini har qanday sanoq sistemada yozish mumkin. Lekin inersial sanoq sistemalardagina tabiat qonunlari yagona va sodda ko'rinishda matematik ifodalanadi.

Inersial sanoq sistema deb, Yevklid fazoda tezlanishsiz harakatlanayotgan jism bilan biriktirilgan sanoq sistemaga aytiladi.

Kuch qo'yilmagan har qanday moddiy nuqta inertsial sanoq sistemaga nisbatan faqat tinch holda yoki to'g'ri chiziqli tekis harakatda bo'ladi. Nyutonningbirinchi qonuni ta'rifiningmazmuni inersial sanoq sistemasining haqiqatdan ham mavjud bo'lishini tasdiqlaydi. Umuman, Nyuton qonunlari faqat inertsial sanoq sistemalardagi kuzatishlar uchun to'g'ri.

Mexanik o'lchov birliklari sistemasi

Kuch va tezlanish modullari orasidagi $F = ma$ chiziqli bog'lanishga asoslangan holda, mexanik kattaliklarni o'lchash uchun ikki tur birliklar sistemasi kirililadi. Buning uchun har gal uchta asosiy o'lchov birliklari olinadi.

Birinchi tur birliklar sistemasi. Xalqaro birliklar sistemasi SI. Bu sistemada uzunlik va vaqt birliklari 1 m. va 1 s deb olinadi. Uchinchi o'lchov birligi sifatida massa olinadi. Uning etalon birlik massasi deb 1 kg olinadi. U holda kuch o'lchov birligi ushbu uch asosiy birliklardan hosilaviy birlik bo'Iib, asosiy qonunning yuqoridagi ifodasiga muvofiq aniqlanadi va 1N deb

$$1N = 1\frac{kg \cdot m}{s^2}$$

ataladi: ya'ni 1 kg massaga $1\,m/s^2$ tezlanish beradigan kuch $1\,\mathrm{N}$ teng. Aynan shunday, qolgan mexanik kattaliklarning birligi asosiy birliklardan hosilaviy birlik kabi aniqlanadi.

<u>Ikkinchi tur birliklar sistemasi.</u> Birliklarning texnik sistemasi. Bu sistemada asosiy o'lchov birliklari sifatida uzunlik birligi 1 m, vaqt birligi 1 s va kuch birligi 1 kgk (kilogramm-kuch) olinadi. Bu sistemada massa hosilaviy birlik kabi asosiy tenglamadan quyidagicha aniqlanadi:

$$[m] = [F]/[a]$$

va bir massa birligi uchun bir texnik birlik massa qabul qilingan (1 t.b.m.). Dinamikaning asosiy tenglamasiga muvofiq 1 kgk ta'siridan $1\,\mathrm{m/s^2}$ tezlanish oladigan nuqtaning massa 1 t.b.m. ga teng bo'ladi, yoki 1 kg massaga 1 kgk g=9,81 $1\,\mathrm{m/s^2}$ tezlanish yoki xuddi shu 1 kg massaga 1 N kuch $1\,\mathrm{m/s^2}$ tezlanish beradi, ya'ni 1 kgk=9,81 N, 1N=0,102 kgk.

Takrorlash uchun savollar:

1. Dinamika nimani o'rgatadi?
2. Kuchqanday kattalik?
3. Inertlik nima va uni qanday kattalik ifodalaydi?
4. Inersiya qonuni nima haqida?
5. Kuch va tezlanishning mutanosiblik qonuni qanday ifodalanadi va ta'riflanadi?
6. Mexanik sistema uchun o'rinli qonun qanday ta'riflanadi?
7. Bir necha kuch ta'siridan nuqta qanday tezlanadi?
8. Qanday sanoq sistema inersial deyiladi?
9. Inersial sanoq sistema qaysi qonunlarda aniqlanadi?
10. Mexanik o'lchov birliklar sistemasi qanday tanlanadi?

Tayanch so'zlar va iboralar:

Dinamika. O'zgarmas, o'zgaruvchan kuch. Inersiya va massa. Og'irlik va gravitatsion massa. Inersial sanoq sistema. Kuch va tezlanish mutanosibligi. Ta'sir va aks ta'sir. Kuchlar ta'sirining o'zaro bog'liqmasligi. SI o'lchov birliklar sistemasi. Texnik birliklar. Dinamika masalasi.

13-MA'RUZA. MODDIY NUQTA DINAMIKASI. DINAMIKANING ASOSIY MASALALARI

Moddiy nuqta harakatining dijferensial tenglamalari

Dinamikaning fundamenial qonuni (13.1) dan foydalanib, erkin va bog'lanishdagi moddiy nuqtalar harakatining diffcrensial tenglamalarini keltirib chiqarish mumkin.

Bu tenglamalarning ko'rinishi nuqta harakatining qanday usullarda berilishiga bog'liq bo'ladi. m massali biror M erkin moddiy nuqtaning $\vec{F}$ (ёки $\vec{F} = \sum \vec{F}_k$) kuch ta'siridagi harakatini tekshiramiz. Nuqtaning a tezlanishini uning radius vektori r orqali aniqlab, (12.1) ga ko'ra, erkin moddiy nuqta harakati uchun differensial tenglamaning quyidagi vektorli ifodasini yozamiz.

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F} \qquad (13.1)$$

Asosiy tenglamaning (13.1) vektorli ko'rinishidan Dekart koordinata o'qlariga proyeksiyalaridagi analitik ko'rinishiga o'tish uchun uning har ikki tomonini Dekart koordinata o'qlariga proyeksiyalab, erkin moddiy nuqtaning Dekart koordinatalaridagi harakat differensial tenglamalarini hosil qilamiz.

$$m\ddot{x} = F_x,\ m\ddot{y} = F_y,\ m\ddot{z} = F_z \qquad (13.2)$$

(13.2) tenglamalar nuqta koordinatalariga nisbatan ikkinchi tartibli differensial tenglamalar sistemasini tashkil qiladi.
Buyerda

$$a_x = \ddot{x}, a_y = \ddot{y}, a_z = \ddot{z}$$

Xususiy hollar. Agar erkin moddiy nuqta harakati tekislikda sodir bo'lsa, masalan, Oxy koordinatalar tekisligida, uning harakat differensial tenglamasi uchun quyidagini hosil qilamiz:

$$m\ddot{x} = F_x, \mathrm{m\ddot{y}} = \mathrm{F_y} \qquad (13.3)$$

Shuningdek, moddiy nuqtaning to'g'ri chiziqli harakalida, masalan. Ox o'qi bo'ylab, nuqtaning to'g'ri chiziqli harakatining bitta dilTerensial tenglamasiga kelamiz:

$$m\ddot{x} = F_x \qquad (13.4)$$

Moddiy nuqtaning harakat differensial tenglamalarini tabiiy koordinata o'qlarida ham ifodalash mumkin. Buning uchun nuqta trayektoriyasida u bilan birgalikda harakatlanuvchi (qo'zg'aluvchi) tabiiy koordinatalar sistemasini o'tkazamiz. (12.1) ning har ikki tomonini bu sistema o'qlariga proyeksiyalaymiz:

$$m\frac{dv}{dt} = F_\tau, m\frac{v^2}{\rho} = F_n, 0 = \mathrm{F_b} \qquad (13.5)$$

(13.5) tenglama erkin moddiy nuqtaning tabiiy koordinata o'qlardagi harakat differensial tenglamalarini ifodalaydi. Buni ko'pincha erkin nuqta harakati differensial tenglamalarining Eyler formulasi deyiladi. (13.5) dagi $F_b = 0$ ekanligi moddiy nuqtaga ta'sir etuvchi kuch egrilik tekisligida yotishini ko'rsatadi.

Bog'lanishdagi nuqtaning harakat differensial tenglamalari

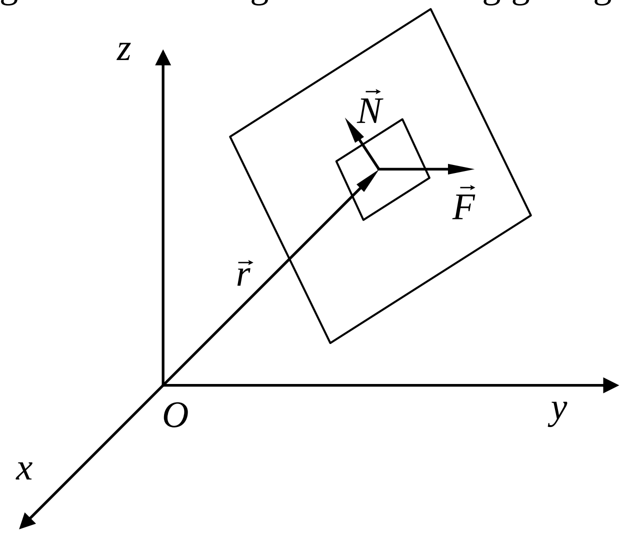
Bog'lanishdagi moddiy nuqta uchun bog'lanishlardan bo'shatish haqidagi aksioma va bog'lanish reaksiya kuchlariga asoslanib moddiy nuqtaga qo'yilgan barcha kuchlar qatoriga reaksiya N kuchlarini ham qo'shib erkin nuqta kabi (12.1) tenglamani yozish mumkin.

$$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{N} \tag{13.6}$$

Koordinata sistemasidagi harakat differensial tenglamalarni quyidagicha ifodalash mumkin.

$$m\ddot{x} = F_x + N_x, m\ddot{y} = F_y + N_y, m\ddot{z} = F_z + N_z \tag{13.7}$$

Moddiy nuqtaning harakalida bog'lanish reaksiya kuchlari. umumiy holda, nuqtaga qo'yilgan bog'lanishlarga va ta'sir etuvchi kuchlarga bog'liq bo'libgina qolmay, balki uning harakatining xarakteriga ham bog'liq. Masalan, nuqtaning havodagi yoki birorqarshilik ko'rsatadigan muhit ichidagi harakati tezligiga bog'liq bo'ladi.



92-shakl

Reaksiya kuchlarining muhim tomoni shundaki, ular masalalarda avvaldan berilmaydi, balki dinamika masalalarini yechish natijasida moddiy nuqtaning harakati kabi, berilgan bog'lanishlarga ko'ra aniqlanadi. Dinamikada bog'lanishlarni, statikadan farqli ravishda, dinamik bog'lanishlar yoki dinamik bog'lanish reaksiyalari deb ataladi.

Moddiy nuqta dinamikasining ikki asosiy masalasi

Moddiy nuqtaning u yoki bu koordinatalar sistemasidagi harakat differensial tenglamalaridan foydalanib, nuqta dinamikasining ikki asosiy masalasini yechish mumkin.

Birinchi masala

Nuqtaning massasi va harakat qonuniga ko'ra nuqtaga ta'sir etuvchi kuchni topish. Haqiqatan, m massali moddiy nuqtaning harakat tenglamalari Dekart koordinatalarda berilgan bo'lsin:

$$x = f_1(t),\ \ y = f_2(t), \mathrm{z} = f_3(t)$$

Kuchning koordinata o'qlaridagi proyeksiyalari nuqta harakat differensial tenglamalari (13.2) dan aniqlanadi, ya'ni

$$F_x = m\ddot{x} = m\ddot{f}_1(t);\ \ F_y = m\ddot{y} = m\ddot{f}_2(t), F_z = m\ddot{z} = m\ddot{f}_3(t) \tag{13.8}$$

U holda kuchning moduli

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} = m\sqrt{\ddot{f}_1^{\,2}(t) + \ddot{f}^{\,2}{}_2(t) + \ddot{f}_3^{\,2}(t)} \tag{13.9}$$

yo'nalishi esa yo'naltiruvchi kosinuslarga ko'ra

$$\cos(\overline{F}\,^\wedge, x) = \frac{F_x}{F},\ \cos(\overline{F}\,^\wedge, y) = \frac{F_y}{F},\ \cos(\overline{F}\,^\wedge, z) = \frac{F_z}{F} \qquad (13.10)$$

formulalardan aniqlanadi.

Ikkinchi masala

Nuqta massasi va unga ta’sir etuvchi kuch berilganda, nuqtaning harakat qonunini aniqlash. Bu masalaning yechilishini ham Dekart koordinatalar sistemasida qaraymiz. Nuqtaga ta'sir etuvchi kuch, umumiy holda, birdaniga bir qancha faktorlarga bog'liq bo'lishi mumkin. $\overline{F} = \overline{F}(t, \overline{r}, \overline{v})$

U holda, (13.2) quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \frac{1}{m} F_x(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \\ \ddot{y} &= \frac{1}{m} F_y(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \\ \ddot{z} &= \frac{1}{m} F_z(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \end{aligned} \qquad (13.11)$$

Nuqtaning Dekart koordinalalardagi harakat tenglamalarini aniqlash uchun x,y,z larga nisbatan uchta ikkinchi tartibli differensial tenglamalar sistemasi (13.11) ni birgalikda integrallash zarur. Malematikaning biror melodi bilan (13.11) ni yechib differensial tenglamalar sistemasining birinchi integraliga erishaylik:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= f_1(t, x, y, z, C_1, C_2, C_3) \\ \ddot{y} &= f_2(t, x, y, z, C_1, C_2, C_3) \\ \ddot{z} &= f_3(t, x, y, z, C_1, C_2, C_3) \end{aligned} \qquad (13.12)$$

Bu yerda C_1, C_2, C_3 differensial tenglamalar sistemasini bir marta integrallash natijasida paydo bo'lgan ixtiyoriy o'zgarmaslar.

(13.12) tenglamalarni ham integrallash imkoniga ega boisak, u holda, koordinatalarning hosilalaridan butunlay qutilamiz. Bu integrallash natijasida yana uchta ixtiyoriy o'zgarmaslar; C_4, C_5va C_6 paydo bo'ladi. Yana ilgarigidek, bu ixtiyoriy o'zgarmaslar, uch munosabalga kiradi. Natijada, yuqoridagi (13.11) differensial tenglamalarning integrallari, umumiy holda, quyidagicha yoziladi;

$$\begin{aligned} f_1(t, x, y, z, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6) &= 0 \\ f_2(t, x, y, z, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6) &= 0 \\ f_3(t, x, y, z, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6) &= 0 \end{aligned} \qquad (13.13)$$

Bu munosabatlarga koordinatalarning hosilalari kirmaydi; faqat koordinatalar bilan vaqt o'zaro bog'langan.

Topilgan (13.13) harakat tenglamalarni dinamikaning asosiy masalasining aniq bir yechimi deb bo'lmaydi, chunki tenglamada oltita ixtiyoriy o'zgarmas son bor. Shunday qilib, masalaning yechimi bir emas, bir necha ko'rinishda topilgan, ya'ni, nuqta berilgan kuch ta'sirida biror aniq yo'nalishda harakatlanmaydi, uning harakati ixtiyoriy o'zgarmaslarning har xil qiymatlariga mos keluvchi harakatlar to'plamidan iborat bo'ladi. Muayyan harakatning qanday sodir bo'lishi boshlang'ich shartlarga bog'liq boiadi. Masalan, og'irlik kuchi ta'sirida harakatlanayotgan nuqtaning trayektoriyasi boshlang'ich lezlikning yo'nalishiga qarab. to'g'ri yoki egri chiziqli bo'lishi mumkin. Moddiy nuqtaning boshlang'ich paytdagi holati va tezligini ifodalovchi sharllar ***boshlang'ich shartlar*** *deyiladi.*

Demak, dinamikaning ikkinchi masalasining (yagona) xususiy yechimini aniqlash uchun moddiy nuqtaga ta'sir etuvchi kuchning xususiyatlarini bilish bilan birga, moddiy nuqta harakatining boshlang'ich shartini ham bilish zarur. Boshlang'ich shart berilmasa, dinamikaning ikkinchi masalasining yechimi nuqtaning biror muayyan harakatini tasvirlamaydi.

Takrorlash uchun savollar:

1. Erkin nuqtaning harakat differensial tenglamalari Dekart koordinatalarida qanday ifodalanadi?
2. Qanday differensial tenglamalar nuqta harakatining tabiiy tenglamalari deyiladi?
3. Differensial tenglamalarga ko'ra qanday masalalar qo'yilgan?
4. Dinamikaning birinchi masalasi qanday qo'yiladi va yechiladi?
5. Dinamikaning ikkinchi masalasi qanday qo'yiladi va yechiladi?
6. Integrallash doimiylari nima?
7. Nuqta harakatining boshlang'ich sharllari nima?
8. Differensial tenglamaning umumiy va xususiy yechimlari.
9. Nuqtaning to'g'ri chiziqli harakat differensial tenglamalari qanday yoziladi va yechiladi?

lO. Gorizontga burchak ostida otilgan jism (nuqta) harakati qanday bo'ladi?

Tayanch so'zlar va iboralar:

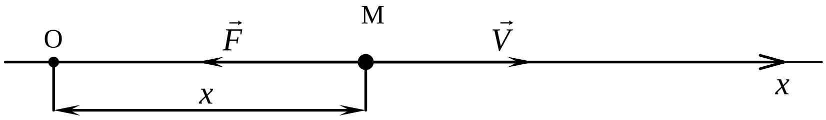
Moddiy nuqta harakatining differensial tenglamalari. Dekart koordinatalarda harakat differensial tenglamalar. Nuqta harakatining tabiiy o'qlardagi differensial tenglamalari Dinamikaning ikki asosiy masalasi.

Nuqta harakatining vektorli differensial tenglamasi. Nuqta harakatining Dekart koordinatalarda differensial tenglamalari. Nuqta harakatining tabiiy tenglamalari. Nuqta dinamikasining ikki masalasi. Dinamikaning ikkinchi masalasi. Harakatning boshlang'ich shartlari. Differensial tenglamaning umumiy va xususiy yechimi. O'zgarmas kuch. Vaqtga bog'liq kuch. Nuqtaning holatiga bog'liq kuch.

14-MA'RUZA. NUQTANING TEBRANMA HARAKATI

Moddiy nuqtaning erkin tebranma harakati

Dinamikaning ikkinchi masalasiga misol tariqasida moddiy nuqtaning to'g'ri chiziqli tebranma harakatini ko'ramiz. Dastlab, moddiy nuqtaning erkin tebranma harakatini o'rganishdan boshlaymiz. Faraz qilaylik, massasi m bo'lgan M moddiy nuqta O muvozanat holaldan x masofaga siljitib, qo'yib yuborilganda, u hamma vaqt muvozanat holati O ga qarab yo'nalgan va nuqtadan muvozanai holatgacha bo'lgan x masofaga proporsional $F_x = c|x|$ kuch ta'sirida to'g'ri chiziqli harakatda bo'lsin. Moddiy nuqta ana shunday kuch ta'sirida hamma vaqt o'zining muvozanat



93-shakl

holatiga intilib. shu o nuqta atrofida tebranma harakat qiladi. Bunday kuch ta'siridagi moddiy nuqtaning tebranishi (bir maromli) garmonik yoki erkin tebranma harakat deyilib, F kuch esa qaytaruvchi (tiklovchi kuch) deb ataladi. Bu yerda C elastik jismning N/m bilan o'lchanadigan bikirlik koeffitsienti bo'lib, u nuqtani birlik masofaga ko'chirish uchun zarur bo'lgan kuchga teng. Bunday kuchlarga misol sifatida elastik kuchni keltirish mumkin.

Erkin tebranma harakatni lekshirish uchun moddiy nuqtaning harakat differensial tenglamasini integrallash usulini talbiq etamiz. M nuqtaning to'g'ri chiziqli trayektoriyasini x o'qi deb qabui qilib. koordinatani O muvozanat holatdan hisoblaymiz. Qaytaruvchi kuch hamma vaqt muvozanat markazga yo'nalib, M nuqtaning ixtiyoriy holati uchun. yuqoridagi mulohazaga ko'ra, quyidagicha ifodalanadi:

$$F_x = -cx \tag{14.1}$$

U holda, M nuqtaning harakat differensial tenglamasi:

$$m\ddot{x} = -cx \tag{14.2}$$

ko'rinishda yoziladi (14.2) ning ikkala tomonini m ga bo'Iib, va

$$k^2 = c/m$$

belgilash kiritsak, differensial tenglama quyidagicha ko'rinishga keladi.

$$\ddot{x} + k^2 x = 0 \tag{14.4}$$

Bu tenglama nuqtaning erkin tebranma harakatining differensial tenglamasini ifodalaydi. I) koeffilsiyentlari o'zgannas bo'lgan bir jinsli, ikkinchi tartibli, chiziqli differensial lenglamadir. Bunday lenglamani yechish uchun, differensial tenglamalar uazariyasida. quyidagicha xarakteristik tenglama tuzish talab etiladi:

$$\lambda^2 + k^2 = 0$$

$\lambda_{1,2} = \pm ik$ bo'lganligidan, (14.4) tenglamaning umumiy yechimi differensial tenglamalar nazariyasidan ma'lumki, ushbu korinishni oladi:

$$x = A\cos(kt) + B\sin(kt) \tag{14.5}$$

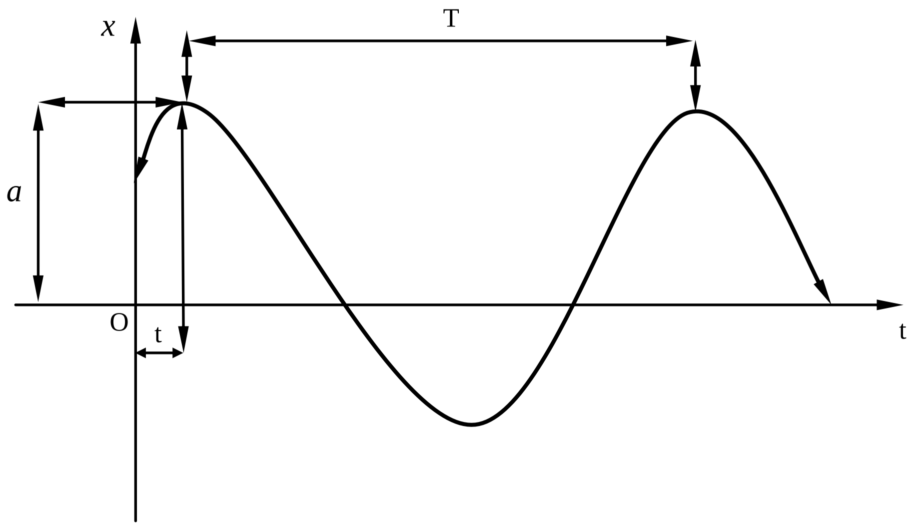
Bundagi A va B lar nuqtaning boshlang'ich holatiga bog'liq bo'lgan ixliyoriy o'zgarmaslar. Bularning o'miga boshqa ikkita ixliyoriy a va a o'zgarmaslar olamiz.

$$\begin{aligned} A &= a\sin\alpha \\ B &= a\cos\alpha \end{aligned} \tag{14.6}$$

U holda, (14.5) yechim quyidagi ko'rinishni oladi:

$$x = a\sin(kt + \alpha) \tag{14.7}$$

Bu (14.4) tenglamaning boshqacha ko'rinishdagi yechimi bo'Iib, a va α



94-shakl

ixtiyoriy o'zgarmaslar, (14.7) yechim garmonik tebranma harakatni ifodalaydi. Bunday harakatni to'liq tekshirish uchun (14.7) dan foydalanish qulay. Chunonchi, harakati kuzatilayotgan nuqtaning tezligi

$$v_x = \dot{x} = a \cdot k \cdot \cos(kt + \alpha),$$

ga teng bo'ladi.

Demak, moddiy nuqta qaytaruvchi kuch ta'sirida garmonik tebranma harakatda bo'ladi. $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ga teng bo'lganda uning grafigi shaklda tasvirlangan. Bu harakatni xarakterlovchi hamma mexanik kattaliklarni oddiy kinematik obraz vositasi bilan oydinlashtirish mumkin. M nuqtaning 0 tebranish markazidan eng katta chetlanishiga teng bo'lgan a miqdorga ***tebranish amplitudasi*** deyiladi. ***Tebranish fazasi*** f, nuqta koordinatasidan farqlanib, uning berilgan vaqtdagi holatini aniqlabgina qolmay, balki so'ngi holatining yo'nalishini ham aniqlaydi. α kattalik ***boshlang'ich faza*** deb ataladi. Nuqtaning to'la bir marta tebranishi uchun ketgan vaqt T ga ***tebranish davri*** deyiladi. Endi, tebranma harakatning davrini topamiz. Buning uchun (14.7) formulani quyidagicha yozamiz:

$$\sin[k(t + T) + \alpha] = \sin(kt + \alpha)$$

Keltirilgan ayniyaldan:

$$kT = 2\pi$$

ya'ni davr sarllanguncha tebranish fazasi 2π ga o'zgaradi, bundan

$$T = \frac{2\pi}{k} \tag{14.8}$$

keib chiqadi. k-**tebranish chastotasi** deyiladi. (14.7) dagi ixtiyoriy o'zgarmaslarni harakatning boshlang'ich sharlidan topamiz, ya'ni

$t = 0$ bo'lganda $x = x_0, \dot{x} = \dot{x}_0 = v_0$ bo'lsin, u holda (14.5) tenglamadan: $A = x_0,\ B = v_0 / k$ kelib chiqadi. Bularni ko'zda tutib (14.6) tenglamadan a ampliluda bilan a boshlang'ich fazani aniqlash uchun:

$$\left.\begin{aligned} a &= \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{k^2}} \\ tg\alpha &= \frac{x_0 \cdot k}{v_0} \end{aligned}\right\} \qquad (14.9)$$

tormulaga ega bo'lamiz.

Keltirilgan natijalarga binoan, moddiy nuqtaning erkin tebranma harakatining quyidagi xossalarini ta'kidlab o'tami:

1) tebranishning amplitudasi va boshlang'ich fazasi, (14.9) ga ko'ra boshlang'ich shartlarga bog'liq bo'ladi;

2) tebranish chastotasi (14.3), davri (14.8) boshlang'ich shartlarga bog'liq bo'lmaydi, ular bcrilgan tebranuvchi sistemaning ***o'zgarmas xarakleristikasi*** deyiladi.

Agar masalada T yoki к kaltalikni hisobiashga to'g'ri kelsa, kuzatilayotgan nuqta tebranishining dilTerensial tenglamasi tuzilib. uni (14.4) ko'rinishga keltiriladi. So'ngra esa uni inlegrallab o'tinnasdan davtf T(yoki k) (14.8) formuladan topiladi.

$$k^2 = \frac{F_{st}}{m\delta_{st}}; \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{F_{st}}\delta_{st}}; \quad F_{st} = P = mg; \; T = 2\pi\sqrt{\frac{\delta_{st}}{g}}$$

Takrorlash uchun savollar:

1. Qanday kuchga qaytaruvchi kuch deyiladi?
2. Elastiklik koeffitsienli nima?
3. Nuqtaning chiziqli erkin tebranma harakat differensial tenglamasi qanday ifodalanadi?
4. Nuqtaning garmonik tebranma harakati nima?
5. Erkin tebranma harakat chastotasi va davri qanday aniqlanadi?
6. Erkin tebranma harakatning amplitudasi va fazasi qanday aniqlanadi?
7. Erkin tebranma harakatning qaysi xarakteristikalari boshlang'ich sharllariga bog'liq?
8. Erkin tebranma harakatga o'zgarmas kuchning ta'siri qanday bo'ladi?
9. Nuqtaning so'nuvchi tebranma harakati qanday kuchlar ta'sirida sodir bo'ladi?

10.So'nuvchi tebranma harakat qanday differensial tenglama bilan ifodalanadi? 11.So'nuvchi tebranma harakat chastotasi va davri nimaga bog'liq?

12.So'nuvchi tebranma harakat differensial lenglamasining yechimi qaytaruvchi va qarshilik kuchlari nisbatiga qanday uch xil bog'liq?

13.So'nuvchi tebranma harakat amplitudasi va fazasi qanday aniqlanadi?

14. So'nuvchi tebranma harakat dekrementi nimani ifodalaydi?

Tayanch so'zlar va ihoralar

Tebranma harakat. Qaytaruvchi kuch. Elastiklik koeffitsienli. Erkin tebranma harakat. Erkin tebranma harakat differensial tenglamasi. Garmonik harakat. Erkin tebranma harakal chastotasi. Erkin tebranma harakat davri. Erkin tebranma harakat amplitudasi va fazasi. Statik cho'zilish. Muhitning qarshilik kuchi. So'nuvchi tebranma harakal differensial tenglamasi. So'nuvchi tebranma harakat dekrementi. Aperiodik harakal.

15 – MA'RUZA. MEXANIK SISTEMA DINAMIKASI. ASOSIY TUSHUNCHALAR

Mexanik sistemaning dinamikasi

Bir-biri bilan bog'lanishlar orqali bog'langan hamda har bir nuqtasining harakati boshqa nuqtalarning holati va xarakatiga bog'liq bo'lgan nuqtalar to'plamiga ***mexanik sistema*** deyiladi.

Mashina va mexanizmlar, qurilma va planetalar sistemasi mexanik sistemasiga misol bo'la oladi.

Mexanik sistemaning harakati differensial tenglamasi

Mexanik sistemani nuqtalariga ta'sir etuvchi kuchlarini tashqi va ichki kuchlarga ajratiladi.

Mexanik sistemaga taaluqli bo'lmagan biror bir jismni sistema nuqtalariga ta'sir kuchi sistemani tashqi kuchi deyiladi-$\overline{F}_k^e$. Berilgan sistemadagi nuqta yoki jismlarning o'zaro ta'sir kuchlari ichki kuchlar deyiladi. Sistema ichki kuchi $\overline{F}^i$ deb belgilanadi.

U holda mexanik sistemaning har nuqtasi uchun Nyutonning qonunini quyidagicha yozish mumkin:

$$m_k\overline{W}_k = \overline{F}_k^e + \overline{F}_k^i \qquad (15.1)$$

Shuning uchun mexanik sistemaning harakati differensial tenglamasini quyidagicha yozish mumkin:

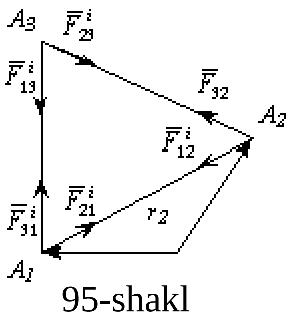
$$\frac{m_k d\overline{V}_k}{dt} = \overline{F}_k^e + \overline{F}_k^i \qquad (15.2)$$

Bu vektorli tenglikni har ikkala tomomnini dekart koordinata sistemasidagi proeksiyalari orqali ifodalasak, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$m_k\ddot{x}_k = F_{kx}^e + F_{kx}^i; \quad m_k\ddot{y}_k = F_{ky}^e + F_{ky}^i; \quad m_k\ddot{z}_k = F_{kz}^e + F_{kz}^i; \ (\text{k=1,2....n}) \qquad (15.3)$$

Mexanik sistemaning ichki kuchlarini hossasi

Ichki kuchlarni ba'zi xususiyatlarni qarab chiqamiz. Bizga ma'lumki, Nyutonning uchinchi qonuniga asosan ikkita moddiy nuqta miqdor jixatdan teng va qarama-qarshi yo'nalgan kuchlar orqali ta'sirida bo'ladi.



95-shakl

Masalan A_1 nuqtaning A_2 nuqtaga ta'sir kuchi $\overline{F}_{12}$, A_2 nuqtaning A_1 nuqtaga ta'sir kuchi $\overline{F}_{21}$ga miqdor jihatdan teng bo'lib, qarama-qarshi tomonga yo'nalgan bo'ladi va hokazo. Shunday qilib ichki kuchlar juft ravishda teng bo'lib, qarama-qarshi tomonga qarab yo'nalgan.

Shuning uchun ularni bosh vektori:

$\overline{R}^i = \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k^i = \overline{F}_{12}^i + \overline{F}_{21}^i + \overline{F}_{13}^i + \overline{F}_{31} + ... + \overline{F}_{1n}^i + \overline{F}_{ni} = 0$ demak $\overline{R}^i = 0$, ya'ni sistema ichki kuchlari bosh vektori nolga tengdir.

Sistema ichki kuchlarni biror O markazga nisbatan bosh momentini topamiz: $\overline{M}_0^i = \sum_{k=1}^{n} \overline{M}_0(\overline{F}_k^i) = \overline{M}_0(\overline{F}_{21}^i) + \overline{M}_0(\overline{F}_{31}^i) + \overline{M}_0(\overline{F}_{13}^i) + ... + \overline{M}_0(\overline{F}_{1n}^i) + \overline{M}_0(\overline{F}_{n1}^i)$

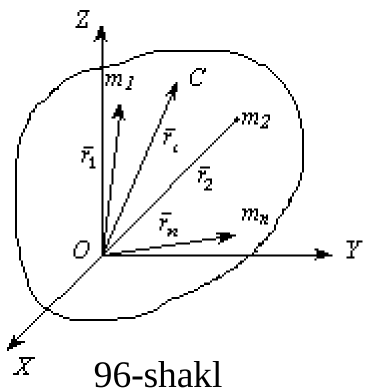
Bu ifodaning o'ng tomonidagi har ikkalasini yig'indisi nolga tengdir.

$$\overline{M}_0(\overline{F}_{12}^i)+\overline{M}_0(\overline{F}_{21}^i)=\bar{r}_2\times\overline{F}_{12}^i+\bar{r}_1\times\overline{F}_{21}^i=(\bar{r}_1+\overline{A_1A_2})\times\overline{F}_{21}^i+\bar{r}_1\times\overline{F}_{21}^i=$$
$$=-\bar{r}_1\times\overline{F}_{21}^i-\overline{A_1A_2}\times\overline{F}_{21}^i+\bar{r}_1\times\overline{F}_{21}^i=-\overline{A_1A_2}\times\overline{F}_{21}^i=0 \qquad (15.4)$$

Chunki $\overline{AA}_2$ vektori $\overline{F}_{21}$ vektoriga koleniardir. Demak, sistema ichki kuchlarini va biror nuqtaga nisbatan bosh momenti nolga teng.

Mexanik sistema massalar markazi

Mexanik sistemaning xarakati faqat ta’sir kuchlarigagina bog’liq bo’lmasdan balki massasining taqsimlanishiga ham bog’liq.



96-shakl

Mexanik sistema massalari $m_1, m_2, \ldots, m_n$ ga teng bo’lgan n ta moddiy nuqtalardan iborat bo’lsin. Sistemaning massasi $M=\sum_{k=1}^{n} m_k$ ga teng. Radiusi vektori $\bar{r}_e$ quyidagicha

$$\bar{r}_{\tilde{n}}=\frac{\sum_{k=1}^{n} m_k \bar{r}_k}{M} \qquad (15.5)$$

Formula bilan aniqlanadigan geometrik nuqta sistema massasi markazi yoki inersiya markazi deyiladi. $\bar{r}_e$ ni x, u va z o’qidagi proeksiyalari orqali ifodalasak:

$$X_s\frac{\sum_{k=1}^{n} m_k \tilde{O}_k}{M},\ U_s\frac{\sum_{k=1}^{n} m_k Y_k}{M},\ Z_e=\frac{\sum_{k=1}^{n} m_k Z_k}{M}, \qquad (15.6)$$

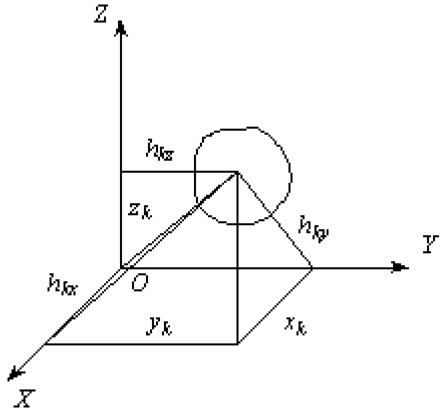
Injenerlik hisoblarida og’irlik markazi bilan inersiya markazi ustma-ust tushadi.

Jismni inersiya momenti

Jismning ilgarilanma harakatida uning massasi qanchalik o’rinni egallasa, jismni aylanma harakatida inersiya momenti shunchalik ahamiyatga ega.

Sistema masalalarining taqsimlanishi uning inersiya momenti orqali ifodalanadi. Demak, jismni harakati uning massasiga hamda massalaraning joylashishiga ham bog’liq.

Sistemaning biror o’qqa nisbatan inersiya momenti deb sistema har bir nuqtasi massasining shu nuqtadan mazkur o’qqachan bo’lgan masofa kvadratiga ko’paytmasining sistema nuqtalari bo’yicha olingan yig’indisiga aytiladi. Agar sistemaning OZ o’qqa nisbatan inersiya momenti I_z deb belgilasak



97-shakl

$$Iz=\sum_{k=1}^{n} m_k h_{kz}^2=\sum_{k=1}^{n} m_k (X_k^2+Y_k^2) \qquad (15.7)$$

$$Iy=\sum_{k=1}^{n} m_k h_{ky}^2=\sum_{k=1}^{n} m_k (Z_k^2+X_k^2) \qquad (15.8)$$

$$Ix=\sum_{k=1}^{n} m_k h_{ky}^2=\sum m_k (Z_k^2+Y_k^2) \qquad (15.9)$$

Inersiya momentini o’lchov birligi: *SN* da $1\ kg{\cdot}m^2$

Agar sistemaning I_0 ni qutb inersiya momenti deb belgilasak: $I_0 = \sum_{k=1}^{n} m_k r_k^2 = \sum_{k=1}^{n} m_k (X_k^2 + Y_k^2 + Z_k^2)$ (15.10)

Demak, $I_x + I_y + I_z = 2I_0$

$$I_{xy} = \sum_{k=1}^{n} m_k X_k Y_k \tag{15.11}$$

$$I_{yz} = \sum_{k=1}^{n} m_k Y_k Z_k \tag{15.12}$$

$$I_{zx} = \sum_{k=1}^{n} m_k Z_k X_k \tag{15.13}$$

I_{xy}, I_{yz}, I_{zx} - ***markazdan qochma inersiya momentlari*** deyiladi.

Agar biror koordinata sistemasiga nisbatan markazdan qochma inersiya momenti nolga teng bo’lsa, bu sistemani o’qlar inersiya bosh o’qlari deyiladi.

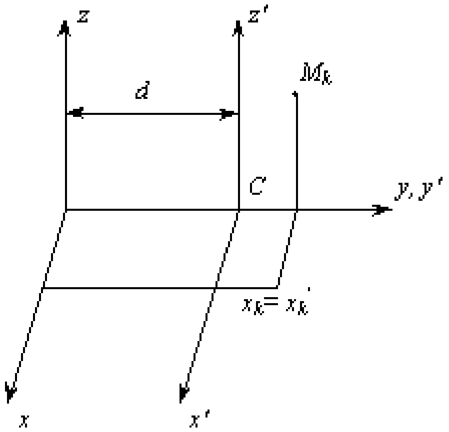
Agar sistema inersiya markazi bilan sanoq sistemasini boshi ustma-ust tushsa, bu sanoq sistemasi markaziy inersiya o’qlari jeyiladi.

Bir jinsli jismning biror o’qqa nisbatan inersiya momenti uning shu o’qqa nisbatan inersiya radiusi deb ataluvchi chiziqli kattalikdan foydalanib ham aniqlash mumkin.

$$I_z = M \cdot \rho_z^2 \quad \rho_z = \sqrt{\frac{Iz}{M}} \tag{15.14}$$

Gyuygens-Shteyner teoremasi

Jismning biror o’qqa nisbatan inersiya momenti jism inersiya markazidan o’tuvchi va berilgan o’qqa parallel bo’lgan o’qqa nisbatan inersiya momenti bilan jism massasining mazkur o’qlar oralig’i kvadratiga ko’paytmasini yig’indisiga teng.



98-shakl

Isbot. Jismning $CZ^{/}$ o’qiga nisbatan inersiya momenti

$$I_z = \sum m_k (x_k^{12} + y_k^{12})$$

OZ o’qiga nisbatan inersiya momenti esa $I_z = \sum m_k (x_k^2 + y_k^2)$

Lekin $X_k = X_k^1, \mathrm{Y_k} = d + Y_k^1$ shuning uchun

$$I_z = \sum_{k=1}^{n} m_k (X_{kl}^2 + Y_k^2) = \sum_{k=1}^{n} m_k (X_k^{12} + Y_k^{12} + 2Y_k^1 d + d^2) =$$

$$\sum_{k=1}^{n} m_k (X_k^{12} + Y_k^{12}) + \sum_{k=1}^{n} m_k 2Y_k^1 d + \sum_{k=1}^{n} m_k d^2;$$

$\sum \mathrm{m_k} 2\mathrm{Y_k^1 d} = 0,$ chunki $S(x', y', z')$ koordinataning boshi massalar markazi ustida yotadi.

Demak, $I_z = I_{z'} + Md^2$ (15.15)

Agar $dm = \rho dv$ ligini inobatga olsak, $I_z = \int_{(v)} h^2 dm$ yoki $I_z = \int_{(v)} \rho h^2 dv$ bunda ρ-jismni zichligi, V-hajmi.

Ba’zi jismlarni inersiya momentlari

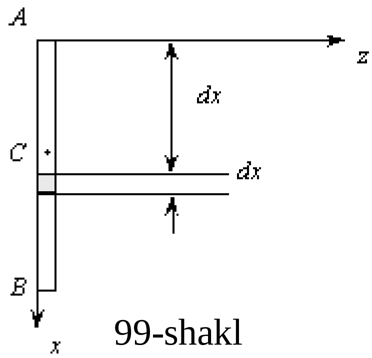
a) Massasi M va uzunligi L ga teng bo’lgan ingichka bir jinsli stnrjenni olamiz.

Uning *A* uchidan o’tuvchi va unga perpendikulyar bo’lgan *AZ* o’qiga nisbatan inersiya momentini topamiz. *AV* bo’ylab *X* o’qini yo’naltiramiz.

U holda uning har qanday dx qismini massasi $dm = \rho dx$ ga teng.

$$I_{AZ} = \int_0^e x^2 dm = \rho \int_0^e x^2 dx = \frac{\rho L^3}{3} \quad \rho = \frac{M}{L}, \ I_{AZ} = \frac{ML^3}{3L} \quad I_{AZ} = \frac{ML^2}{3}$$

$\rho = M/L$ - sterjen uzunlik birligini massasi.



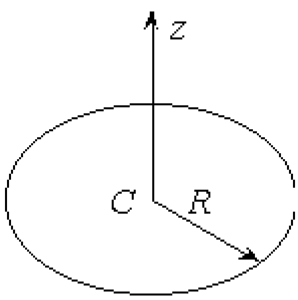
99-shakl

b) *AZ* ga parallel CZ_1 o’qqa nisbatan inersiya momentni topamiz.

$$I_{CZ} = I_{AZ} - M(CA)^2 = \frac{MI^2}{3} - \frac{MI^2}{4} = \frac{MI^2}{12};$$

$$I_{CZ} = \frac{MI^2}{12}$$

2. Ingichka aylanma bir jinsli xalqani radiusi *R* va massa *M*. Uning *SZ* o’qiga nisbatan inersiya momentini topamiz. *S*-inersiya markazi bo’lsin.

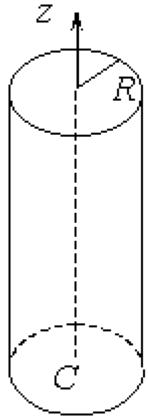


100-shakl

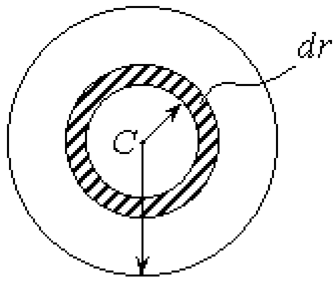
Xalqani hamma nuqtalari inersiya markazidan baravar uzoqlikda turadi. Shuning uchun

$$I_C = \sum_{k=1}^{n} M_k R^2 = MR^2$$

3. Aylanma bir jinsli plastinka yoki silindrni radiusi *R* va massasi *M*. *CZ*-o’qi plastinkaga $\perp$ bo’lsin. *S*-inersiya markazi.



101-shakl



102-shakl

Silindrdan radiusi *r* va kengligi *dr* ga teng xalqa olamiz. Bu halqani yuzasi.

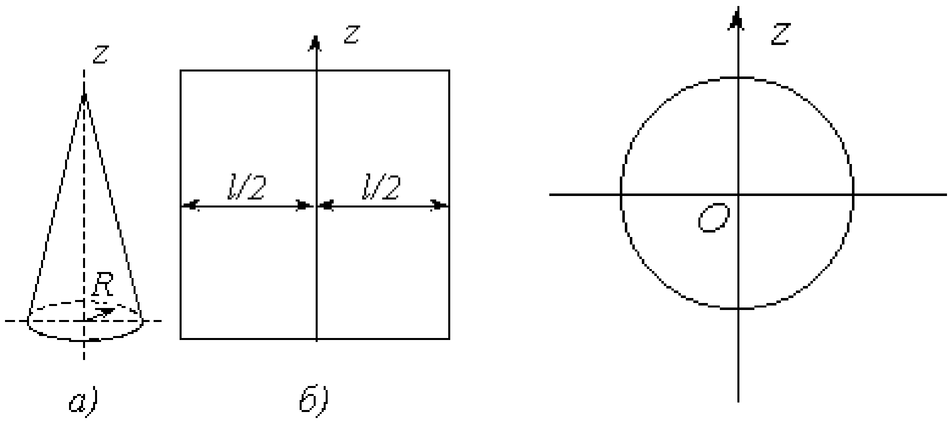
$S_1=2\pi r dr$. massa $dm=\rho 2\pi r dr$ bo’lib $\rho=\frac{M}{\pi r^2}$; $I_c=r^2 dm=2\pi\rho r^3 dr$

Silindr uchun $Ic=2\pi\rho\int_0^R 3rdr = \pi\rho\frac{R^4}{2}$, ρ ni o’rniga qo’ysak, $Ic=M\frac{R^2}{2}$

4. Shar uchun inersiya momenti $I_z=2/5\ MR^2$

5. Konus uchun Z o’qiga nisbatan inersiya momenti

$$I_z=1/2Ml^2$$



103-shakl

6. Plastinka uchun inersiya momenti $Iz = \frac{1}{12} Ml^2$ (103b-shakl).

Takrorlash uchun savollar:

1. Mexanik sistema deb nimaga aytiladi ?
2. Og'irlik markazi bilan inersiya markazi ustma – ust tushadimi?
3. Jismning inersiya momenti deganda nimani tushunasiz ?
4. Jismning biror o'qqa nisbatan inersiya momenti haqidagi Guygens-Shteyner teoremasini isbotlang ?
5. Turli kesimdagi jismlar uchun inersiya momentlarini hisoblash usullari qanday ifodalanadi ?

Tayanch so'zlar va ihoralar:

Inersiya momenti, mexanik sistema, ichki kuchlar, tashqi kuchlar, massa markazi, sistemaning massalar markazi,harakat differensial tenglamasi, markazdan qochma, parallel o'qlarga nisbatan inersiya momentlari, nuqtaning inersiya radiusi.

16-MA’RUZA. DINAMIKANING UMUMIY TEOREMALARI

Sistema massasi markazi harakati haqidagi teorema

Mexanik sistema *n* ta moddiy nuqtalardan iborat bo’lsin. Uning biror *K*-chi nuqtasini tanlab olamiz, unga ta’sir etuvchi aktiv va reaksiya kuchlarini tashqi va ichki kuklariga ajratsak, *K* nuqta uchun harakat qonuni

$$m_k \overline{W}_k = \overline{F}_k^e + \overline{F}_k^i \tag{16.1}$$

Xuddi shunga o’xshash boshqa nuqtalar uchun ham yozish mumkin. Demak, *n* ta nuqtadan iborat mexanik sistema uchun quyidagi tenglamalar sistemasiga ega bo’lamiz:

$$\begin{aligned} m_1\overline{W}_1 &= \overline{F}_1^e + F_1^i \\ m_2\overline{W}_2 &= \overline{F}_2^e + F_2^i \\ &- - - - - - - - \\ m_n\overline{W}_n &= \overline{F}_n^e + F_n^i \end{aligned} \tag{16.2}$$

(16.2) tenglamalar sistemasi mexanik sistemani xarakati differensial tenglamasini vektorli ko’rinishidir.

(16.2) tenglamalar sistemasini quyidagicha yozish mumkin.

$$\sum_{k=1}^{n} m_k \overline{W}_k = \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k^e + \sum_{k=1}^{n} F_k^i \tag{16.3}$$

bizga ma’lumki,

$$\sum_{k=1}^{n} m_k \overline{r}_k = M \overline{r}_c \tag{16.4}$$

(16.4) ikki tomonini vaqt bo’yicha differensiallasak,

$$\sum_{k=1}^{n} m_k \frac{d^2\overline{r}k}{dt^2} = M\frac{d^2\overline{r}_c}{dt^2} \tag{16.5}$$

Sistema uchun $\sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k^i = 0$

Shuning uchun

$$M\overline{W}c = \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k^e \tag{16.6}$$

(16.6) tenglama masalalar markazi harakati haqidagi teoremani ifoda etadi: Sistema massasini uning inersiya markazini tezlanishiga ko’paytmasi sistemasiga qo’yilgan tashqi kuchlarni geometrik yig’indisiga teng bo’ladi.

(16.6) ni koordinata o’qlariga nisbatan proeksiyalasak

$$M\ddot{x}_c = \sum_{k=1}^{n} F_{kx},\ M\ddot{y}_c = \sum_{k=1}^{n} F_{ky},\ M\ddot{z}_c = \sum_{k=1}^{n} F_{kz} \tag{16.7}$$

Bu tenglama sistema massa, markazi harakati differensial tenglamasining skalyar ko’rinishidir.

Massalar markazi harakati saqlanish qonuni

1. Aytaylik, sistema tashqi kuchlari nolga teng bo’lsin:

$\sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k^e = 0$ $M\overline{W}c = 0$ bu holda $\overline{W}_c = 0,\ \mathrm{V_e} = const$ bo’ladi.

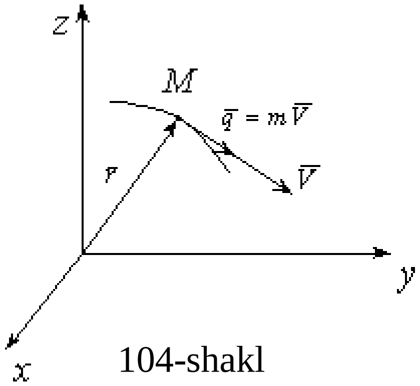
Demak, sistema tashqi kuchlarining bosh vektori nolga teng bo’lsa, mexanik sistema markazi o’zgarmas tezlik bilan harakat qiladi.

2. Agar sistema tashqi kuchlari bosh vektorini biror o’qdagi proeksiyasi nolga teng bo’lsa, $\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0$ u holda $\ddot{X}c = 0, \dot{X}_c$ =const.

Moddiy nuqta va mexanik sistemaning harakat miqdori

Moddiy nuqtaning harakat miqdori

Moddiy nuqta massasi bilan tezligini ko’paytmasiga teng bo’lgan vektor $\bar{q} = m\bar{V}$ kattalik nuqtaning harakat miqdori deyiladi:



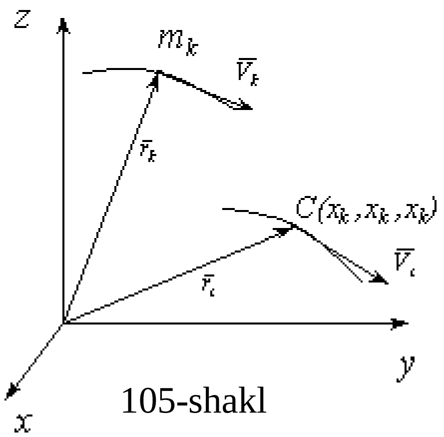
104-shakl

$\bar{q}$ – vektori tezlik vektori bo’yicha yo’nalgan bo’lib, u moddiy nuqtaga qo’yilgan bo’ladi. Harakat miqdorinnig o’lchov birligi SI da kgm/s. Uning *Oxyz* sanoq sistemasidagi proeksiyasi.

$$q_x = mV_x; \quad q_y = mV_y; \quad qz = mV_z$$

Sistema harakat miqdorini hisoblash

Sistema harakat miqdori $\overline{Q}$ ni uning massasi va inersiya markazi tezligi V_c orqali quyidagicha topiladi:



105-shakl

$$\overline{Q} = M\overline{V}_C \qquad (16.8)$$

Dekart koordinata sistemasida.

$$\overline{Q}_x = M\overline{V}_{cx};$$
$$\overline{Q}_y = M\overline{V}_{cy};$$
$$\overline{Q}_z = M\overline{V}_{cz}$$

Isboti.

$$\overline{Q} = \sum_{k=1}^{n} m_k \overline{V}_k = \frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{n} m_k r_k \text{ Lekin} \sum_{k=1}^{n} m_k \bar{r}_k = M\bar{r}_c$$

Shuning uchun

$$\overline{Q} = \frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{n} m_k r_k = \frac{d}{dt}(M\bar{r}_c) = M\frac{d\bar{r}_c}{dt} = MV_c: \ \overline{Q} = M\overline{V}_C$$

Кuchning elementar va to’la impulsi

$\bar{F}$ kuchining nuqtaga ta’siri effekti uning jismga qo’yilish vaqtiga ham bog’liq. $\bar{F}\,dt$ vektor kattalik kuchning elementar impulsi deyiladi: $d\bar{S} = \bar{F}dt$ (16.9)

Кuchning *t* vaqtdagi to’la impulsi esa uyidagiga teng.

$$\bar{S} = \int_0^t \bar{F}dt; \ \bar{S}_x = \int_0^t \bar{F}_x dt, \ \bar{S}_y = \int_0^t \bar{F}_y dt, \ \bar{S}_z = \int_0^t \bar{F}_z dt \qquad (16.10)$$

Uning o’lchov birligi: SI da 1 kg·m/s, МКGSS da 1kG·s

Nuqta harakat miqdori o'zgarishi haqidagi teorema

$\overline{F}$ kuchi ta'siridagi moddiy nuqtaning harakat differensial tenglamasidan

$$\frac{d}{dt}\left(m\bar{v}\right)=\overline{F}$$

Demak, harakat miqdoridan vaqt bo'yicha olingan birinchi hosila nuqtaga ta'sir etuvchi kuchga teng, yuqoridagi ifodadan

$$d\left(m\bar{v}\right)=\overline{F}dt \qquad (16.11)$$

Harakat miqdorining differensiali nuqtaga ta'sir etuvchi kuchning elementar impulsiga teng. (16.11) ni ikki tomonini $t=0,\ \bar{v}=\bar{v}_0$ bo'lganda integrallasak:

$$m\bar{v}-m\bar{v}_0=\overline{S} \qquad (16.12)$$

yoki

$$m\bar{v}_x-m\bar{v}_{0x}=\overline{S}_x,\quad m\bar{v}_y-m\bar{v}_{0y}=\overline{S}_y,\quad m\bar{v}_z-m\bar{v}_{0z}=\overline{S}_z$$

Sistema harakat miqdorining o'zgarishi haqidagi teorema

Sistema nuqtalarini birini olamiz va bu nuqtaga ta'sir etuvchi barcha kuchlarni tashqi va ichki kuchlarga ajratamiz. U holda K-chi nuqtaning harakat miqdorini o'zgarishi quyidagicha bo'ladi:

$$\frac{d}{dt}\left(m_k\bar{v}_k\right)=\overline{F}_k^e+\overline{F}_k^i \qquad k=1,2,\ldots,n$$

Mexanik sistema uchun yuqoridagi ifoda quyidagicha bo'ladi:

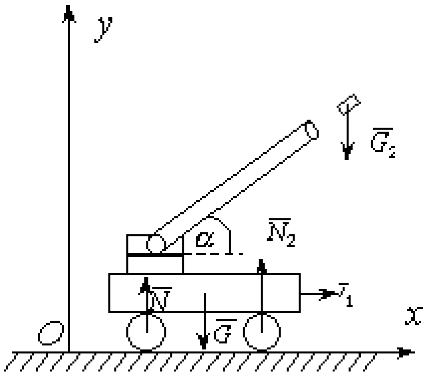
$$\frac{d}{dt}\sum m_k\bar{v}_k=\sum_{k=1}^{n}\overline{F}_k^e+\sum_{k=1}^{n}\overline{F}_k^i,$$

$$\sum_{k=1}^{n}\overline{F}_k^{(i)}=0,\quad \sum_{k=1}^{n}m_k\bar{v}_k=\overline{Q}$$

Demak,

$$\frac{dQ}{dt}=\sum_{k=1}^{n}\overline{F}_k^e \qquad (16.13)$$

(16.13) dan sistema harakat miqdoridan vaqt bo'yicha olingan birinchi hosila sistema nuqtalariga qo'yilgan tashqi kuchlarning bosh vektoriga teng ekan.



106-shakl

(16.13) ikki tomonini *dt* ga ko'paytirsak.

$$dQ=\sum_{k=1}^{n}\overline{F}_k^e dt \qquad (16.14)$$

Demak, sistema harakat miqdorining differensiali unga ta'sir qiluvchi tashqi kuchlar bosh vektorining elementar impulsiga teng.

(16.13) ni dekart koordinata o'qlaridagi proeksiyasi:

$$\frac{dQ_x}{dt}=\overline{R}_{kx}^e;\qquad \frac{dQ_y}{dt}=\overline{R}_{ky}^e;\qquad \frac{dQ_z}{dt}=\overline{R}_{kz}^e \qquad (16.15)$$

Bunda $\overline{R}^e=\sum_{k=1}^{n}\overline{F}_k^e$ (16.13) ni t_0 dan t_1 gacha vaqt oralig'ida integrallasak:

$$\overline{Q}_1 - \overline{Q}_0 = \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k^e dt = \overline{R}^e dt \qquad (16.16)$$

Sistema harakat miqdorining ma'lum vaqt oralig'ida o'zgarishi unga ta'sir qiluvchi tashqi kuchlar bosh vektorining shu vaqt oralig'idagi impulsiga teng. (16.16) dan:

$$\begin{aligned} \overline{Q}_x - \overline{Q}_{0x} &= \overline{R}_x^e dt, \\ \overline{Q}_y - \overline{Q}_{0y} &= \overline{R}_y^e dt, \\ \overline{Q}_z - \overline{Q}_{0z} &= \overline{R}_z^e dt \end{aligned} \qquad (16.17)$$

Harakat miqdorining saqlanish qonuni

1. Agar sistemaga ta'sir qiluvchi tashqi kuchlarni bosh vektori nolga teng bo'lsa, sistema harakat miqdori o'zgarmaydi, ya'ni

$$\overline{R}^e = 0, \qquad \frac{d\overline{Q}}{dt} = 0, \qquad \overline{Q} = const$$

2. Agar sistemaga ta'sir qiluvchi tashqi kuchlar bosh vektorining biror o'qdagi proeksiyasi nolga teng bo'lsa, sistema harakat miqdorining shu o'qdagi proeksiyasi o'zgarmaydi.

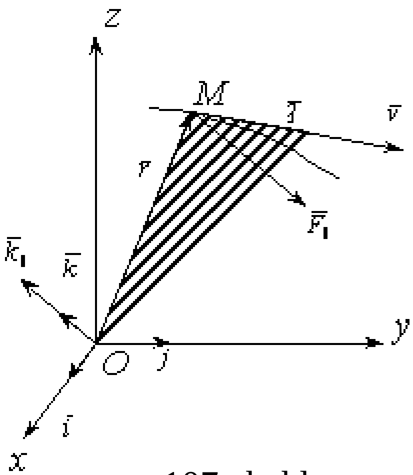
Masalan:

$$R_x^e = 0, \qquad Q_x = const \qquad (16.17)$$

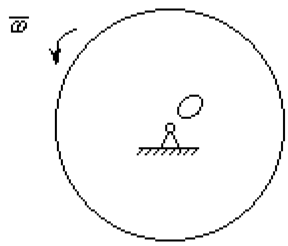
Nuqta va sistemaning kinetik momenti

Harakat miqdori sistema harakatini inersiya markaziga nisbatan aniqlay olmaydi. Masalan, *O* o'q atrofida aylanuvchi g'ildirakni olsak, uning *O* inersiya markazini tezligi $v_0 = 0$ shuning uchun uning harakat miqdori ham nolga teng:

$$mv_0 = 0$$



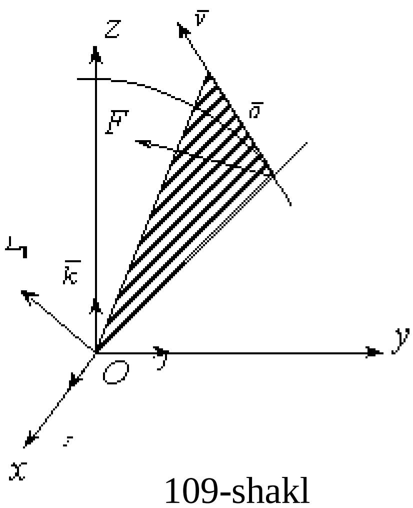
107-shakl



108-shakl

Shu tufayli harakat miqdori momenti tushunchasidan foydalaniladi.

m massaga ega bo'lgan va $\bar{v}$ tezlik bilan harakat qilayotgan nuqtaning biror markazga nisbatan harakat miqdori momenti deb quyidagi $\overline{k}_0$ vektor kattalikka aytiladi.



109-shakl

$$\overline{k}_0 = \overline{M}_0 (m\bar{v}) = \bar{r} \cdot m\bar{v} \qquad (16.18)$$

Kinetik moment $\overline{k}_0$,0 nuqtaga (132-shakl) qo'yilgan bo'ladi. $\overline{k}_0$ ni *x*, *y* va *z* o'qidagi proeksiyalari orqali ifodalaymiz:

$$\overline{k}_0 = \overline{r} \cdot m\overline{v} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ x & y & z \\ m\dot{x} & m\dot{y} & m\dot{z} \end{vmatrix} \qquad (16.19)$$

$$\begin{aligned} k_x &= M_x(m\overline{v}) = m(yv_z - zv_y) = m(y\dot{z} - z\dot{y}) \\ k_y &= M_y(m\overline{v}) = m(zv_x - xv_z) = m(z\dot{x} - x\dot{z}) \\ k_z &= M_z(m\overline{v}) = m(xv_y - yv_x) = m(x\dot{y} - y\dot{x}) \end{aligned} \qquad (16.20)$$

Kinetik momentning o'lchov birligi $kg{\cdot}m^2/s$ yoki $n{\cdot}m{\cdot}s$.

Sistemaning kinetik momenti, uning nuqtalarini kinetik momentlarining geometrik yig'indisiga teng. $\overline{L}_0 = \sum M_0(m_k\overline{v}_k) = \sum_{k=1}^{n} \overline{r}_k \cdot m_k \overline{v}_k$; $\overline{L}_0$ ni x, y va z o'qidagi proeksiyalari ifodalasak,

$$\begin{aligned} \overline{L}_{0x} &= \sum_{k=1}^{n} M_x(m_k\overline{v}_k) = \sum_{k=1}^{n} m_k(y_k\dot{z}_k - z_k\dot{y}_k) \\ \overline{L}_{0y} &= \sum_{k=1}^{n} M_y(m_k\overline{v}_k) = \sum_{k=1}^{n} m_k(z_k\dot{x}_k - x_k\dot{z}_k) \\ \overline{L}_{0z} &= \sum_{k=1}^{n} M_z(m_k\overline{v}_k) = \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k\dot{y}_k - y_k\dot{x}_k) \end{aligned} \qquad (16.21)$$

Nuqta harakat miqdori momentning o'zgarishi haqidagi teorema

$$\frac{d\overline{K}_0}{dt} = \overline{M}_0(\overline{F}) \qquad (16.22)$$

(16.22) dan vaqt bo'yicha hosila olamiz:

$$\frac{d\overline{K}_0}{dt} = \frac{d(m\overline{v} \cdot \overline{r})}{dt} = m\frac{d\overline{v}}{dt} \cdot \overline{r} + m\overline{v} \cdot \frac{d\overline{r}}{dt}; \quad \frac{d\overline{K}_0}{dt} = \overline{r} \cdot m\overline{v},$$

Chunki $m\overline{v} \cdot \frac{d\overline{r}}{dt} = m\overline{v} \cdot \overline{v} = 0$, (16.22) dan nuqta harakat miqdori momentidan vaqt bo'yicha olingan hosila unga qo'yilgan kuchlarni biror markaziga nisbatan momentiga teng. (16.22) dan

$$\frac{d\overline{K}_x}{dt} = \overline{M}_x(\overline{F}), \quad \frac{d\overline{K}_y}{dt} = \overline{M}_y(\overline{F}), \quad \frac{d\overline{K}_z}{dt} = \overline{M}_z(\overline{F}) \qquad (16.23)$$

Sistema kinetik momenti o'zgarishi haqidagi teorema

Agar sistema nuqtalariga ta'sir etuvchi kuchlarni tashqi va ichki kuchlarga ajratsak:

$$\frac{d}{dt}(\overline{r}_k \cdot m_k\overline{v}_k) = \overline{r}_k \cdot \overline{F}_k^e + \overline{r}_k \cdot \overline{F}_k^i \qquad k = 1,2,\ldots n$$

Bu ifoda sistema uchun quyidagicha bo'ladi:

$$\frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{n}(\overline{r}_k \cdot m_k\overline{v}_k) = \sum_{k=1}^{n}(\overline{r}_k \cdot \overline{F}_k^e) + \sum_{k=1}^{n}(\overline{r}_k \cdot \overline{F}_k^i)$$

Sistema uchun $\sum_{k=1}^{n}\left(\overline{r}_k \cdot \overline{F}_k^{\,i}\right)=0$ demak,

$$\sum_{k=1}^{n}\overline{r}_k \cdot m_k\overline{v}_k = \overline{L}_0,\ldots\frac{d\overline{L}_0}{dt}=\sum_{k=1}^{n}\overline{r}_k \cdot \overline{F}_k^{\,e} \qquad (16.24)$$

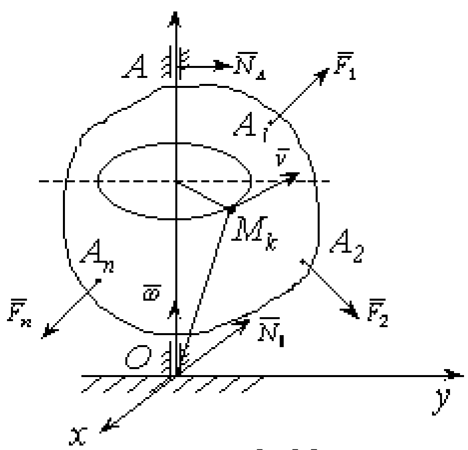
Sistema kinetik momentidan vaqt bo'yicha olingan hosila, sistema nuqtalariga qo'yilgan tashqi kuchlarning geometrk yig'indisiga teng:

(16.24) ni *x, y* va *z* o'qlardagi proeksiyasi:

$$\frac{d\overline{L}_{0x}}{dt}=M_x\left(\overline{R}_x^{\,e}\right),\quad \frac{d\overline{L}_{0y}}{dt}=M_y\left(\overline{R}_y^{\,e}\right),\quad \frac{d\overline{L}_{0z}}{dt}=M_z\left(\overline{R}_z^{\,e}\right) \qquad (16.25)$$

Aylanma harakatdagi jism kinetik momenti va harakati differensial tenglamasi

Jism biror o'q atrofida, masalan, *z* o'qi atrofida $\overline{\omega}$ burchak tezligi bilan aylanma harakatda bo'lsin. U $\overline{F}_1,\overline{F}_2\ldots,\overline{F}_n$ kuchlar ta'sirida bo'lib, inersiya momenti J_z bo'lsin



110-shakl

$$J_z=\sum_{k=1}^{n}m_k h_k^2;\quad L_z=\omega J_z \qquad (16.26)$$

Demak, aylanma harakatdagi jismning kinetik momenti uning burchak tezligi bilan jismni aylanish o'qiga nisbatan inersiya momentini ko'paytmasiga teng. (16.25) va (16.26) ga asosan

$$\frac{d\overline{L}_z}{dt}=M_z\left(\overline{F}_k\right) \qquad \frac{d\left(\omega J_z\right)}{dt}=\sum_{k=1}^{n}M_z\left(\overline{F}_k^{\,e}\right)$$

$$J_z\frac{d\omega}{dt}=\sum_{k=1}^{n}M_z\left(\overline{F}_k^{\,e}\right) \qquad (16.27)$$

(16.27) ifoda aylanma harakatdagi jism harakatini differensial tenglamasini ifoda etadi.

Kinetik momentini saqlanish qonuni

1. Agar sistema nuqtalari tashqi kuchlarining bosh vektorini biror nuqtaga nisbati bosh momenti nolga teng bo'lsa, ya'ni:

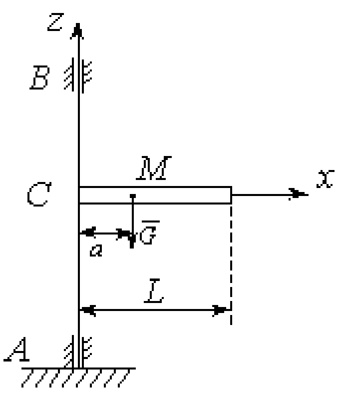
$\sum_{k=1}^{n}M_0\left(\overline{F}_k\right)=0$ u holda,

Bundan $\overline{L}_0=const$

2. Agar aylanuvchi jismda tashqi kuchlar vektori aylanish o'qiga parallel bo'lsa yoki uni kesib o'tsa, u holda

$$\sum_{k=1}^{n}M_z\left(\overline{F}_k^{\,e}\right)=0;\quad L_z=J_z\omega=const$$

yoki $J_0\omega_0=J_z\omega_z$



111-shakl

Masala.

Gorizontal *CD* truba *AV* o'q atrofida erkin aylanishi mumkin. Truba ichida o'qdan *SM=a* masofada *M* sharcha qo'yilgan. Biroz vaqtdan so'ng trubaga ω_0 boshlang'ich burchak tezligi beriladi. Sharcha trubadan chiqib ketganda trubani ω burchak tezligini toping. Trubani aylanish o'qiga nisbatan inersiya momenti. J, L – uning uzunligi. Ishqalanish hisobga olinmasin. Sharcha moddiy nuqta deb olinadi.

Masalani yechish. Sharchaga $\overline{G}$ og'irlik kuchi va markazdan qochma kuch ta'sir etadi. Bu kuchlarni biri *AV* ga parallel, ikkinchisi uni kesib o'tganligi uchun

$$\frac{dL_z}{dt} = \sum M_z\left(\overline{F}_k^e\right) = 0$$

Shuning uchun

$$\frac{dL_z}{dt} = 0, \quad L_z = const$$

Harakat aylanma bo'lgani uchun

$$L_z = \omega \cdot J = \omega_0 \cdot J_0 = const$$

Sharchaning boshlang'ich paytidagi inersiya momenti J_0 quyidagiga teng:

$$J_0 = J + ma^2$$

Sharchaning keyingi inersiya momenti esa: $J = J + mL^2$

Harakat davomida kinetik moment o'zgarmas bo'lgani uchun

$$\left(J + mL^2\right)\omega = \left(J + ma^2\right)\omega_0$$

Bundan $\omega = \dfrac{J + ma^2}{J + mL^2}\omega_0$

Takrorlash uchun savollar:

1. Moddiy nuqtaning harakat miqdori deb nimaga aytiladi ?
2. Sistema massalar markazi qanday aniqlanadi?
3. Sistemaning harakat miqdori momenti deganda nimani tushunasiz ?
4. Sistema harakat miqdori o'zgarishi haqidagi teoremani ifodalang ?
5. Kuch impulsi nima va u qanday aniqlanadi ?
6. Qo'zg'almas o'q atrofidagi aylanma harakatdagi jismning kinetic momenti qanday aniqlanadi?

Tayanch so'zlar va ihoralar

Massalar markazi, harakat miqdori, harakat miqdori momenti, inersiya momenti, mexanik sistema, ichki kuchlar, tashqi kuchlar, sistemaning massalar markazi, harakat differensial tenglamasi, kuch impulsi.

17-MA'RUZA. MEXANIK SISTEMA KINETIK ENERGIYASI. ISH VA QUVVAT

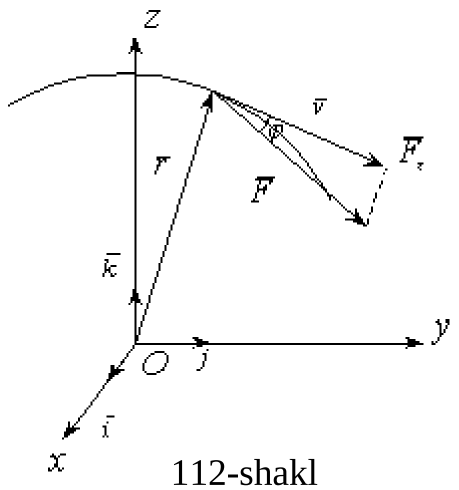
Kuchlarning ish.

Kuchlarning ishi – skalyar kattalik bo'lib kuchlar quyilgan nuqtalarning siljishiga bo'lgan ta'sirini ifoda etadi. Ishning o'lchov birligi jouldir.

Elementlar ishi

$\overline{F}$ kuchi ta'sirida harakt qilayotgan M nuqtani $d\bar{r}$ elementlar ko'chishdagi bajargan elementar ishi quyidagi dA kattalikka teng:

$$dA=F_\tau \cdot ds \quad (17.1)$$



112-shakl

F_τ, F kuchning tezlik yo'nalishi bo'yicha yotgan to'g'ri chiziqdagi proeksiyasi. Elementar ish dA skalyar kattalik. Uning ishorasi $\overline{F}_\tau$ ni ishorasi bilan aniqlanadi. dS ni ishorasi xamisha musbat. $F_\tau>0$ bo'lsa $dA>0$, bo'lsa $F_\tau<0$ $dA<0$ bo'ladi.

$$F\tau=F\cos\alpha \qquad (17.2)$$

Demak,

$$dA=F\cdot\cos\varphi ds \qquad (17.3)$$

Agar $\varphi=0$ bo'lsa $dA=Fds$, F xarakatni tezlashtiradi, $\varphi=\frac{\pi}{2}$ bo'lsa $dA=0$, F kuchning ishi bajarilmaydi.

$\varphi=\pi$ bo'lsa $dA=-Fds$, F kuchi xarakatni sekinlashtiradi. Elementar ishni hisoblashni boshqacha formulalarini keltirib chiqaramiz.

Kinematikadan ma'lumki,

$$\bar{v}=\frac{d\bar{r}}{dt},\ |\bar{v}|=v=\frac{ds}{dt};\ ds=|d\bar{r}|\,vdt \qquad (17.4)$$

(17.3) va (17.4) ga asosan, $dA=Fdr\cos\varphi$

Vektorlar qoidasiga asosan, dA ni quyidagicha yozamiz:

$$dA=\overline{F}\cdot d\bar{r} \qquad (17.5)$$

Demak, kuchning elementar ishi kuch bilan kuch qo'yilgan nuqta radiusi vektorini differensialini skalyar ko'paytmasiga teng:

$$dA=\overline{F}\cdot d\bar{r}=\overline{F}\cdot\bar{v}dt=\overline{F}\cdot dt\cdot\bar{v} \qquad (17.6)$$

Elementar ish kuchning elementar impulsi bilan tezlikning skalyar ko'paytmasiga teng. Ma'lumki,

$$\overline{F}=F_x\bar{i}+F_y\bar{j}+F_z\bar{k} \qquad (17.7)$$

$$d\bar{r}=dx\bar{i}+dy\bar{j}+dz\bar{k} \qquad (17.8)$$

Shuning uchun

$$dA=F_xdx+F_ydy+F_zdz \qquad (17.9)$$

formula elementar ishni analitik ifodasini belgilaydi.

Kuchning to'la ishi

$\overline{F}$ kuchning M_0 dan M nuqtaga ko'chgandagi to'la ishni topish uchun ko'chishdagi oraliqni n ta mayda kichik bo'lakchalarga bo'lamiz. U holda A ish quyidagicha topiladi.

$$A=Lim\sum_{k=1}^{n} dA_k \qquad (17.10)$$

dA_k – kuchni elementar ko'chishdagi bajargan elementar ishi.

$$A=\int_{M_0}^{M} F_\tau dS \qquad (17.11)$$

Yoki

$$A=\int_{M_0}^{M} \overline{F} d\overline{r}=\int_{M}^{M}(F_x dx+F_y dy+F_z dz) \qquad (17.12)$$

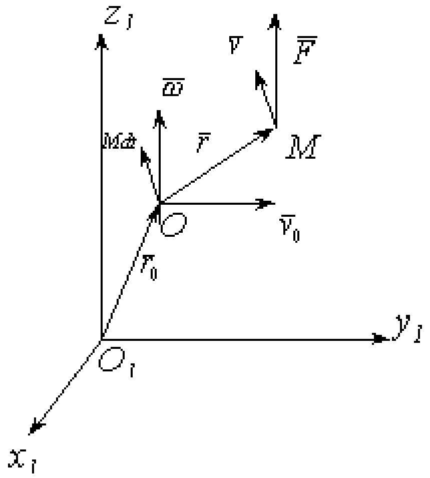
Shuning uchun
$$A=\int_0^t \overline{F}\overline{v}dt \qquad (17.13)$$

Umumiy xolda, harakatdagi jismni ixtiyoriy nuqtasining tezligini quyidagicha ifodalanadi:

$$\overline{v}=\overline{v}_0+\overline{\omega}_x\overline{r} \qquad (17.14)$$

lekin $\overline{V}_0 dt=d\overline{r}_0 \quad \overline{F}\cdot(\overline{\omega}\times\overline{r})=\overline{\omega}(\overline{r}\times\overline{F})=\overline{\omega}\cdot\overline{M}_0$

Yuqoridagilarni nazarda tutsak:



113-shakl

$$dA=\overline{F}\cdot\overline{V}dt=\overline{F}d\overline{r}_0+\omega\cdot\overline{M}_0(\overline{F})dt=\overline{F}d\overline{r}_0+$$
$$+\omega dt\cdot M_0 cos\alpha,\ \ M_0cos\alpha=M_0(\overline{F}),$$

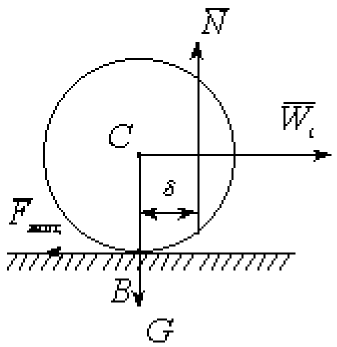
$$dA=\overline{F}d\overline{r}_0+M_\omega(\overline{F})d\varphi \qquad (17.15)$$

Agar jism bir qancha ($\overline{F}_1\overline{F}_1,... \ \overline{F}_N$) kuchlar ta'sirida bo'lsa:

$$dA=\sum_{k=1}^{n}dAk=(\sum_{k=1}^{n}\overline{F}_k)d\overline{r}_{ok}+\left[\sum_{k=1}^{N}M_0(F_k)\right]\overline{\omega}dt=\overline{R}d\overline{r}_0+\overline{L}_0\overline{\omega}dt=\overline{R}d\overline{r}_0 d\overline{\varphi}$$

$$dA=\overline{R}dr_0+\overline{L}_0 d\overline{\varphi}=\overline{R}d\overline{r}_0+\overline{L}_0\overline{\omega}dt,\quad dA=\overline{R}dr_0+\overline{L}_0\overline{\omega}dt \qquad (17.16)$$

Jismni harakat qilgandagi dumalab ishqalanish kuchini ishi



114-shakl

Radiusi R o'lgan g'ildirak tekislik ustida sirg'anmasdan dumalaganida V nuqtasini tezligi nolga teng bo'ladi. $A=\int_{m_0}^{M}\overline{F}\overline{V}dt$ ga asosan, $\overline{V}_V=0$ demak $A=A(\overline{F})=0.$

Ma'lumki sirtlar deformasiyalansa kuchlarni dumalashdagi momenti hosil bo'ladi. $M=\delta N$ – dumalashdagi ishqalanishni koefisenti, N normal reaksiya kuchi. $A=\delta Nd\varphi;$

Agar $M=sonst;\ A=\delta N\varphi$ (17.17)

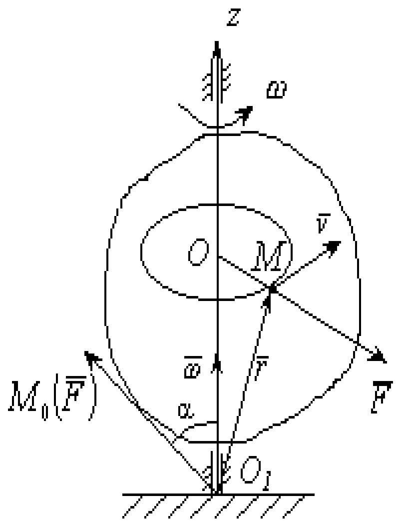
Aylanma harakatdagi jismga qo'yilgan kuchning ishi

OZ qo'zg'almas o'q atrofida aylanuvchi jismning *M* nuqtasiga $\overline{F}$ kuch ta'sir qilsin. Bu kuchning elementar ishini topamiz: $dA=\overline{F}\,\overline{V}\,dt$

lekin $\overline{V}=\overline{\omega}\times\overline{r}$ shuning uchun

$dA=\overline{F}\cdot(\overline{\omega}\times\overline{r})dt=\omega(\overline{r}\times\overline{F})dt$, bunda $\overline{r}\times\overline{F}=M_0(\overline{F})$

$\overline{F}$ kuchini *O* nuqtaga nisbatan momenti.



115-shakl

$dA=\overline{\omega}\cdot M_0(\overline{F})dt=\omega\cdot M_0(\overline{F})sos\alpha dt$ ammo, $M_0(\overline{F})sos\alpha=M_z(\overline{F})$, $\omega dt=\frac{d\varphi}{dt}\cdot dt=d\varphi$,

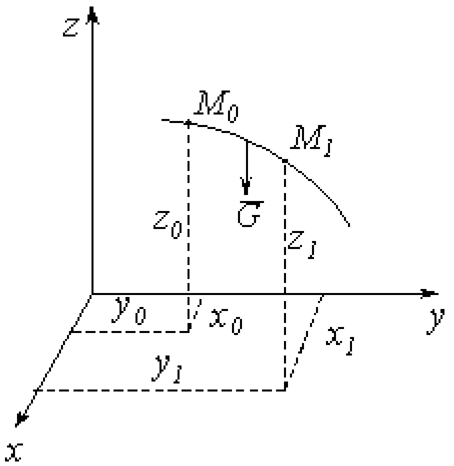
$dA=M_z(\overline{F})d\varphi$ $A=\int_{\varphi_0}^{\varphi} M_z(\overline{F})d\varphi$; $M_z(\overline{F})=sonst$

$$A=M_z(\overline{F})(\varphi_1-\varphi_0) \qquad (17.18)$$

Quvvat

Kuchning vaqt birligidagi bajargan ishi *quvvat* deb ataladi.

$$N=\frac{dA}{dt};\quad N=\frac{F\tau ds}{dt}=F\tau\cdot V \qquad (17.19)$$



116-shakl

Demak, quvvat kuchning nuqta traektoriyasiga o'tkazilgan urinmadagi proeksiyasi bilan nuqta tezligini ko'paytmasiga teng.

$A=\overline{F}\,d\overline{r}$ dan $N=\overline{F}\cdot\overline{V}=FVsos\varphi$ o'lchov birligi SI da vatt: (vt=1j/s). MKGSSda-1 kG·m/s. Texnikada quvvat birligi qilib 1 ot kuchini qabul qiladi.

1 ot kuchi 736 Vt (yoki 75 kG·m/s).

1kV t·s=3,6·10=367100 kg·m.

Mashina bajargan ishni uning quvvati va ishlagan soatini ko'paytmasidan iborat deb qarash mumkin.

Og'irlik kuchining ishi

G – og'irlik kuchi ta'siridagi nuqta M_0 dan M_1 holatga o'tgan bo'lsin. *G* ning koordinati o'qlaridagi proeksiyasi quyidagicha bo'ladi:

$$G_x=0;\ G_y=0;\ G_z=-G$$

$$dA = G_z dz = -Gdz$$

Nuqta M_0 dan M_1 holatga kelganida.

$$A=\int_{M_0}^{M_1}(-G)dz = G\int_{z_0}^{z_1}dz = G(z_0 - z_1)$$

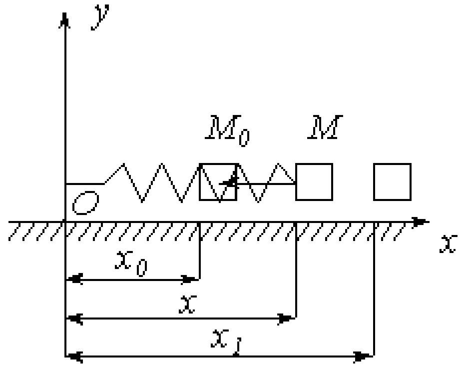
$$|z_0 - z_1| = h,$$

$$A = G(z_0 - z_1) = G(z_1 - z_0)$$

$$A=G(z_1-z_0) \qquad (17.20)$$

Elastik kuchining ishi

Gorizontal tekislikda prujinaga maxkamlangan *M* yukni olaviz. Prujinani kuchlanmagan paytdagi xolati uchun koordinata boshini qabul qilamiz.



117-shakl

$$F_z=F_y=0;\ \ F_x= -cx.$$

$$dA=F_x dx+F_y dy+F_z dz$$

$$dA=-cxdx$$

$$A=\int_{M_0}^{M_1}dA = -\int_{x_0}^{x}cxdx = \frac{c}{2}(x_1^2 - x_0^2)\ ;\ A=\frac{C}{2}(x_0^2 - x_1^2) \qquad (17.21)$$

Kinetik energiya

Moddiy nuqta va sistemaning kinetik energiyasi

Moddiy nuqtaning kinetik energiyasi deb nuqta massasi bilan uning tezligini kvadratini ko'paytmasini yarmiga teng bo'lgan skalyar kattalikka aytiladi:

$$T=\frac{\mathrm{mV}^2}{2} \qquad (17.22)$$

Sistema kinetik energiyasi deb sistema nuqtalari kinetik energiyalarini yig'indisiga aytiladi.

$$T=\sum_{k=1}^{n}\frac{m_k V_k^2}{2} \qquad (17.23)$$

Uning o'lchov birligi - N·m

Agar sisitema nuqtalarining hammasi qo'zg'almas bo'lsa sistema kinetik energiyasi nolga teng bo'ladi.

Ilgarilama harakatdagi jismni kinematik energiyasi

Agar jism ilgarilama harakatda bo'lsa, jismning hamma nuqalarini tezligi teng, ya'ni $V_k = V$. Shuning uchun ilgarilama harakatdagi jismning kinetik energiyasi.

$$T=\sum_{k=1}^{n}\frac{m_k \cdot V_k^2}{2} = \frac{V^2}{2}\sum_{k=1}^{n}m_k = \frac{MV^2}{2} \qquad (17.24)$$

$M = \sum_{k=1}^{n} m_k$ -jismning massasi.

Aylanma harakatdagi jismni kinetik energiyasi

Agar jism aylanma harakatda bo’lsa, uning kinetik energiyasi quyidagiga teng bo’ladi:

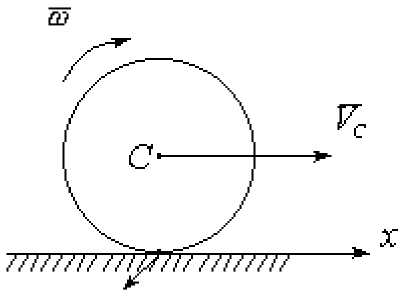
$$\mathrm{T} = \sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}} \frac{\mathrm{m_k V_k^2}}{2} = \sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}} \frac{\mathrm{m_k} \omega^2 \mathrm{h}^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{m_k} \cdot \mathrm{h}^2$$

Bundan
$$T = \frac{I_z \cdot \omega^2}{2} \qquad (17.25)$$

J_z jismni Z o’qiga nisbatan inersiya momenti.

b(tekis parallel harakatdagi jismni kinetik energiyasi.

Agar jism tekis-parallel harakatda bo’lsa, uning kinetik energiyasi quyidagicha bo’ladi.



118-shakl

$$\grave{O} = \frac{MV_c^2}{2} + \frac{J_z \cdot \omega^2}{2} \qquad (17.26)$$

J_z – jismni z-o’qiga nisbatan inersiya momenti.

Moddiy nuqta kinetik energiyasining o’zgarishi haqida teorema

$\overline{F}$ kuchi ta’siridagi m massaga ega bo’lgan moddiy nuqta uchun dinamikani qonunini quyidagicha yozamiz:

$$m\frac{dV}{dt} = F \qquad (17.27)$$

(17.27) ni ikki tomonini $d\bar{r}$ ga skalyar ravishda ko’paytiramiz.

$$m\frac{d\overline{V}}{dt} \cdot d\bar{r} = \overline{F}d\bar{r},\, m\overline{V}d\overline{V} = \overline{F}d\bar{r},\ dA = m\overline{V}d\overline{V};\ m\overline{V}d\overline{V} = d(\frac{m\overline{V}^2}{2}) \quad \text{nihoyat}$$

$$d\left(\frac{mV^2}{2}\right) = dA \qquad (17.28)$$

(17.28) dan nuqta kinetik energiyasining differensiali unga qo’yilgan kuchlarni elementar ishiga teng.

Agar (17.28) ni har ikkala tomonini dt ga bo’lsak,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{mV^2}{2}\right) = \frac{dA}{dt}, \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{mV^2}{2}\right) = N \qquad (17.29)$$

Kinetik energiyadan vaqt bo’yicha olingan hosila, uning quvvatiga tengdir.

(17.28) ni M_0 dan M gacha integrallasak:

$\frac{mV^2}{2} = A + S$, $t = 0$ da $A = 0$, $V = V_0$, $C = \frac{mV_0^2}{2}$, $\frac{mV_0^2}{2} = A + \frac{mV_0^2}{2}$ bundan,

$$\frac{mV^2}{2} - \frac{mV_0^2}{2} = A \qquad (17.30)$$

Nuqta kinetik energiyasining biror ko’chishdagi o’zgarishi, unga qo’yilgan kuchlarni shu ko’chishdagi bajargan ishiga tengdir.

Sistema kinetik energiyasining o'zgarishi haqidagi teorema

Sistema n-ta moddiy nuqtalardan iborat bo'lsin. Bu nuqtalarni birini tanlab olamiz va unga ta'sir etuvchi kuchlarni tashqi va ichki kuchlarga ajratsak, nuqta uchun dinamikani qonuni quyidagicha bo'ladi.

$$m_k \frac{d\overline{V}_k}{dt} = \overline{F}_k^e + \overline{F}_k^i \qquad (17.31)$$

(17.31) ni har ikkala tomonini dr_k ga skalyar ravishda ko'paytirsak:

$$d\overline{r}_k \cdot m_k \frac{d\overline{V}_k}{dt} = \overline{F}_k^e d\overline{r}_k + \overline{F}_k^i d\overline{r}_k \text{ bo'ladi}$$

$$m_k \frac{d\overline{r}_k}{dt} \cdot d\overline{V}_k = \overline{F}_k^e d\overline{r}_k + \overline{F}_k^i d\overline{r}_k \,;\, m_k \overline{V}_k \cdot d\overline{V}_k = \overline{F}_k^e d\overline{r}_k + \overline{F}_k^i d\overline{r}_k \; d\left(\frac{m_k \overline{V}_k^2}{2}\right) = \overline{F}_k^e d\overline{r}_k + \overline{F}_k^i d\overline{r}_k \qquad (17.32)$$

(17.32) ni ikkala tomonini yig'indisini sistema uchun quyidagicha yozamiz:

$$d\sum_{k=1}^{n} \frac{m_k \overline{V}_k^2}{2} = \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k^e d\overline{r} + \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k^i d\overline{r}$$

yoki

$$dT = \sum_{k=1}^{n} dA_k^e + \sum_{k=1}^{n} dA_K^I \qquad (17.33)$$

Sistema kinetik energiyasining diferensiali sistemaga qo'yilgan tashqi va ichki kuchlarning elementar ishlarini yig'indisidan iboratdir.

Agar (17.33) ni integrallasak:

$$T_1 - T_0 = \int_0^1 d\sum_{k=1}^{n} \frac{m_k V_k^2}{2} = \sum_{k=1}^{n} \int_{M_0}^{M_1} dA_k^e + \sum_{k=1}^{n} \int_{M_0}^{M_1} dA_k^i \qquad (17.34)$$

yoki

$$T_1 - T_0 = \sum_{k=1}^{n} A_k^e + \sum_{k=1}^{n} A_k^i \qquad (17.35)$$

Sistemaning bir holatdan ikkinchi holatga ko'chishidagi kinetik energiyasining o'zgarishi unga qo'yilgan tashqi va ichki kuchlarning shu ko'chishidagi bajargan elementar ishlarning yig'indisiga teng.

Takrorlash uchun savollar:

1. Kuchning ishi va quvvati qanday aniqlanadi?
2. Qachon elementar ish tushunchasi qo'llaniladi ?
3. Teng ta'sir etuvchining ishi qanday aniqlanadi ?
4. Og'irlik kuchining ishi nimaga bog'liq ?
5. Elastiklik kuchining ishi qanday aniqlanadi?
6. Nuqtaning kinetik energiyasining o'zgarishi haqidagi teoremaning differensialli ifodasi qanday ta'riflanadi ?
7. Mexanik sistema kinenik energiyasi deb nimaga aytiladi ?

Tayanch so'zlar va ihoralar

Ish, quvvat, kinetik energiya, mexanik sistema, ichki kuchlar, tashqi kuchlar, harakat differensial tenglamasi, kuch impulsi, elastiklik kuchi, ish differensiali.

18-MA'RUZA. INERSIYA KUCHLARINING BOSH VEKTORI VA BOSH MOMENTI. DALAMBER PRINSIPI

Qattiq jism inersiya kuchlarini ixtiyoriy tanlab olingan O markazga qo'yilgan bitta $\overline{R}'^{i}$ kuch va momenti $\overline{M}_0^i$ ga teng bo'lgan bitta juft bilan almashtirish mumkin. Buning uchun kuchni ixtiyoriy markazga keltirish usulidan foydalanamiz. Dinamikada inersiya kuchlarini keltirish markazi sifatida, odatda, jismning massalar markazi C nuqtasi olinadi. $\overline{F}_k = -m_k\overline{a}_k$ bo'lganligidan sistema massalar markazining radius vektorini aniqlovchi tenglikni e'tiborga olgan holda quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\overline{R}' = \sum F_k^i = -\sum m_k\overline{a}_k = -M\overline{a}_c \qquad (18.1)$$

Bu yerda M—jism massasi, $\overline{a}_c$—jismning massalar markazining tezlanishi. Demak. ixtiyoriy harakat qilayotgan jism inersiya kuchlarining bosh vektori moduli jihatdan jism massasini uning massalar markazi tezlanishiga ko'paytirilganiga teng va bu tezlanishga qarama-qarshi tomonga yo'nalgan bo'ladi.

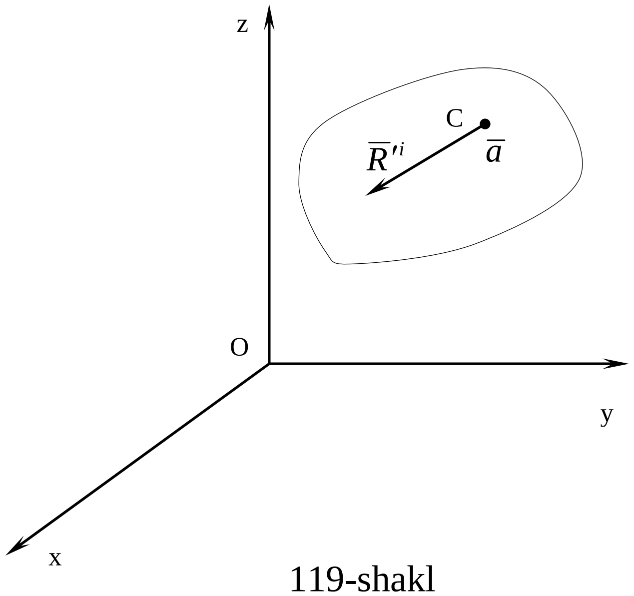
Inersiya kuchlarining bosh momentini qattiq jism harakatlarining ba'zi xususiy hollarida hisoblaymiz.

1. Jism ilgarilanma harakat qiladi.

Agar jism ilgarilanma harakatlanayotgan bo'lsa. uning barcha nuqtalarining berilgan paytdagi tezlanishlari o'zaro teng bo'ladi, ya'ni:

$$\overline{a}_1 = \overline{a}_2 = ... = \overline{a}_k = \overline{a}_c$$

Demak, jism nuqlalarining inersiya kuchlari o'zaro parallel, bir yo'nalishda bo'ladi. Bu holda inersiya kuchlar sistemasi teng ta'sir etuvchiga keladi va u jism massalar markaziga qo'yilgan bo'ladi. Bu natijaga oson ishonch hosil qilish mumkin. Haqiqatan ham jism ilgarilanma harakat qilayotganidan C atrofida aylanma harakat ro'y bennaydi. Shuning uchun C nuqtadan o'tuvchi o'qqa nisbatan tashqi kuchlarning bosh momenti nolga teng bo'ladi, ya'ni:



119-shakl

$$\overline{M}_c^e = 0$$

U holda (18.1) tengliklarning ikkinchisidan quyidagini yoza olamiz:

$$\overline{M}_c^e = -\overline{M}_c^e = 0$$

Shuningdek, ana shu tengliklarning birinchisidan esa:

$$\overline{R}^i = -\overline{R}^e = \sum \overline{F}_k^e = -M\overline{a}_c = \overline{R}^i \qquad (18.2)$$

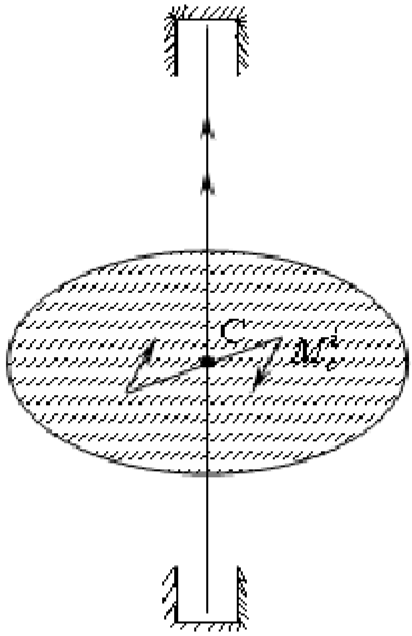
kelib chiqadi. Bu yerda inersiya kuchlarining teng ta'sir etuvchisi.

2. **Jism qo'zg'almas o'q atrofida aylanadi**.

Jismning simmetriva tekisligi bo'lib, qo'zg'almas o'q C nuqtadan shu tekislikka perpendikulyar o'tsin. Bu holda $\overline{a}_c = 0$ bo’ladi, demak, inersiya kuchlarining bosh vektori

$$\overline{R}'^i = -\overline{R}^e = -M \cdot \overline{a}_c = 0 .$$

Inersiya kuchlarining bosh momentini hisoblaymiz. (18.1) tengliklarning ikkinchisidan quyidagi munosabatni yoza olamiz: $\overline{M}_C^i = -\overline{M}_C^e$, $M_z^i = -M_z^e$,



120-shakl

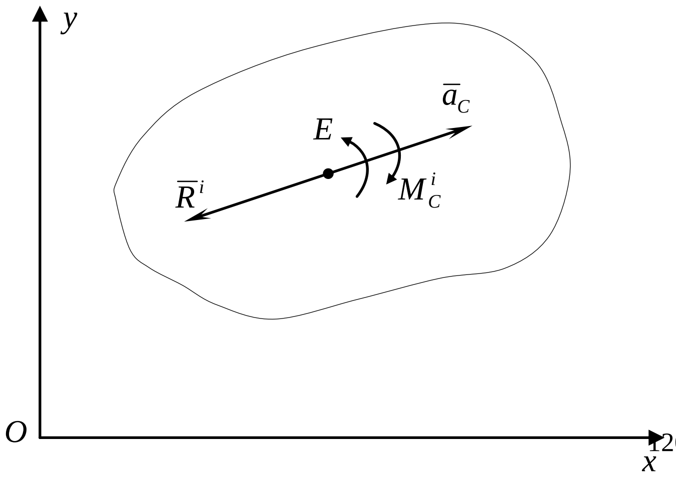
Jismning aylanma harakat differensial tenglamasini ko'zda tutib quyidagi natijaga kelamiz:

$$M_C^i = -M_C^e = -I_C \cdot E \qquad (18.3)$$

Shunday qilib, bu holda inersiya kuchlar sistemasi momenti M_C^i ga teng va aylanish o'qiga perpendikulyar bo'lgan tekislikda yotuvchi juft kuchga keladi. Formuladagi minus ishora M_C^i moment yo'nalishini jismning burchak tezlanish yo'nalishiga qarama-qarshi yo'nalganligini ko'rsatadi.

3. **Jism tekis parallel harakat qiladi**.

Jismning simmetriya tekisligi bo'lib va uning hamma nuqlalari bu tekislikka parallel tekisliklarda harakat qilayotgan bo'lsin. Jismning bunday harakatini uning qutb deb atalgan nuqtasining ilgarilanma harakati bilan bu nuqtadan o'tuvchi o'q atrofida aylanma harakatlarga ajratish mumkinligini kursimizning kinematika bo'limida



121-shakl

ko'rsatganmiz. Biroq qutb sifatida dinamikada jism massalar markazi C nuqta olinadi. U holda avvalgi hollarai e'tiborga olinsa. inersiya kuchlarining ham bosh vektori, ham bosh momenti bo'ladi, ya'ni:

$$\overline{R}'^{i} = -M \cdot \overline{a}_C, M_C^i = -I_C \cdot E \qquad (18.4)$$

Boshqacha aytganda, qaralayotgan holda inersiya kuchlar sistemasi bitta kuch va bitta juft bilan almashiladi. (18.1) va (18.2) formulalarga asosan masalalar ycchishda tegishli kattaliklarning miqdorlari hisoblanadi, ularning yo'nalishlari esa shaklda ko'rsatiladi, xolos.

Dalamber prinsipiga кo'ra bog'lanishdagi nuqta va sistemaning erkinmas harakat dinamik reaksiyalarini aniqlash

Erkinmas har qanday moddiy nuqta yoki mexanik sistema harakatini o'rganish uchun Dalamber prinsipini qo'llash ularning harakat tenglamalarini tuzishning birdan-bir qulay usulidir. Ayniqsa, moddiy nuqta yoki mexanik sistema harakati ma'lum yoki u noma’lum reaksiyalar qatnashmagan tenglamalar orqali aniqlanishi mumkin bo'lgan hollarda Dalamber prinsipini bog’lianish reaksiyalarini aniqlash uchun qo’llash g’oyat darajada osonlik tug’diradi.

Bunday masalalarni yechishda ko’pincha oldindan noma’lum bo’ladigan ichki kuchlar hisobga olinmaydi. Ichki bo’lanishning reaksiyalarini aniqlash zarur bo’lgan hollarda esa mexanik sistemani ushbu ichki kuchlar tashqi kuch bo’ladigan qismlarga ajratib o’rganish kerak bo’ladi.

Bog'lanishli moddiy nuqta harakatida (18.1) (yoki mexanik sistema uchun esa Dalamber prinsipi yordamida aniqlangan reaksiya kuchlari, shu muvozanat tenglamalardan ayonki, bir tomondan qo'yilgan kuchlarning xarakteriga bog'liq bo'lsa, ikkinchidan, inersiya kuchlari (bosh vektori va bosh momenli) orqali, nuqta yoki jism (mexanik sislema nuqtalari) harakat qonuniga. massalar markazi va aylanish o'qining joylashishlariga nihoyatda bog'liq.

Shuning uchun (18.1) dagi reaksiya kuchlarini ta'sir etayotgan tashqi aktiv kuchlarga bog'liq va massalar markazining hamda aylanish o'qiningjoylashishlariga va (nuqtaning yoki sistemaning) harakat qonuniga bog'liq reaksiyalarga ajratib aniqlashga to'g'ri keladi. Shuni esda tutish kerakki, ta'sir ko'rsatuvchi tashqi kuchlar ham harakat qonuniga (jumladan. qarshilik kuchlari tezlikka) bog'liq bo'lishi mumkin.

Shunday qilib, bog'lanishli erkinmas jismning harakatida bog'lanish reaksiyalari ikkita: aktiv kuchlarning ta'siri bilan aniqlanuvchi statik reaksiyalar $\overline{N}_0$ dan va massa taqsimlanishi hamda harakat qonuni xarakterlari bilan aniqlanuvchi qo'shimcha dinamik reaksiyalar $\overline{N}_d$ iborat bo'ladi. Jumladan, moddiy nuqtaning erkinmas harakatida reaksiya (yoki, umumiy holda bog'lanishlar reaksiyalarining teng ta'sir etuvchisi) $\overline{N}$ statik $\overline{N}^c$ va qoshimcha dinamik $\overline{N}^d$ reaksiyalardan yig'iladi:

$$\overline{N} = \overline{N}^c + \overline{N}^d \qquad (18.5)$$

Bog'lanish reaksiyasining ushbu ikki reaksiyadan iborat ifodasini harakatdagi nuqta uchun Dalamber prinsipini (18.1) muvozanat tenglamasiga qo'yib harakatdagi uqta muvozanatining

$$\overline{F} + \overline{N}^C + \overline{N}^d + \overline{F}^i = 0 \qquad (18.6)$$

tenglamasiga kelamiz. Bu (18.6) tenglamadan nuqtaning statik muvozanatini ifodalovchi

$$\overline{F} + \overline{N}^C = 0 \qquad (18.7)$$

tenglamani ajratib nuqtaning erkinmas harakatidagi qo'shimcha dinamik reaksiyalarni aniqlovchi

$$\overline{N}^d + \overline{F}^i = 0 \qquad (18.8)$$

dan iborat dinamik muvozanat tenglamani hosil qilamiz.

Mexanik sistemaning erkinmas harakatidagi bog'lanishlar reaksiyalarining bosh vektori va bosh momenti ham xuddi nuqtadagi kabi ikkita: statik va dinamik reaksiyalardan yig'iladi

$$\overline{N}' = \overline{N}'^C + \overline{N}'^d, \overline{M}_0^N = \overline{M}_0^{NC} + \overline{M}_0^{ND} \qquad (18.9)$$

Ushbu o'zgarishlarni hisobga olgan holda (13.9) quyidagi ko'rinishga keladi:

$$\overline{R}' + \overline{N}'^C + \overline{N}'^d + \overline{R}'^i = 0,\ \overline{\mathrm{M}}_0 + \overline{M}_0^{NC} + \overline{M}_0^{Nd} + \overline{M}_0^i = 0 \qquad (18.10)$$

Harakatdagi bog'lanishli mexanik sistema muvozanatining ushbu ko'rinishdagi Dalamber prinsipi tenglamasidan sistemaning statik muvozanat tenglamalari

$$\overline{R}' + \overline{N}'^C = 0,\ \overline{\mathrm{M}}_0 + \overline{M}_0^{NC} = 0 \qquad (18.11)$$

ni ajratib harakatdagi erkinmas mexanik sistema uchun Dalamber prinsipidan kelib chiqadigan qo'shimcha dinamik reaksiyalarni aniqlovchi quyidagi

$$\overline{N}'^d + \overline{R}'^i = 0,\ \overline{M}_0^{Nd} + \overline{M}_0^i = 0 \qquad (18.12)$$

muvozanat tenglamalarni hosil qilamiz.

(18.8) va (18.12) tengliklardan ko'ramizki, qo'shimcha dinamik reaksiyalarni aniqlash uchun yozilgan muvozanat tenglamalarda aktiv kuchlar hisobga olinmaydi. Moddiy nuqta uchun (18.8). mexanik sistema uchun (18.12) vektor tenglamalarning har biri. koordinata o'qlariga proyeksiyalar tarzidagi uchtadan skalyar muvozanat tenglamalarga ekvivalent, chunonchi, (18.12) uchun qo'shimcha dinamik reaksiyalarni aniqlovchi oltila skalyar tenglamalarga ega bo'lamiz.

$$\overline{M}_0(\overline{R}_A) = \overline{r}_A \times \overline{N}_A = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & -a \\ N_{Ax} & N_{Ay} & N_{Az} \end{vmatrix},$$

$$\overline{M}_0(\overline{R}_B) = \overline{r}_B \times \overline{N}_B = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & -a \\ N_{Bx} & N_{By} & N_{Bz} \end{vmatrix}$$

Reaksiya kuchlari bosh momentining proyeksiyalarini yuqoridagi ifodalarni hisoblab aniqlaymiz:

$$M_x^N = a \cdot N_{Ay} - b \cdot N_{By},\ M_y^N = -a \cdot N_{Ax} - b \cdot N_{Bx},\ \mathrm{M}_z^{\mathrm{N}} = 0 (M_z^{Nd} = 0).$$

Reaksiya kuchlarining bosh vektori esa quyidagicha aniqlanadi:

$$N_x^/ = N_{Ax} + N_{Bx},\ N_y^/ = N_{Ay} + N_{By},\ \mathrm{N}_z^/ = N_{Az}$$

Inersiya kuchlarining bosh vektori (yoki dinamik reaksiya) proyeksiyalarini hisoblash uchun yuqorida kelliribchiqarganimizdek, massalar markazi tezlanishining koordinata o'qlardagi proyeksiyalarini aniqlashimiz kerak. Jismning aylanma harakatida nuqtasining tezlanishi aylanma va markazga intilma tezlanishlardan tashkil topadi, ya'ni:

$$-my_C\varepsilon - mx_C\omega^2 = N_{Ax}^d + N_{Bx}^d$$

$$mx_C\varepsilon - mx_C\omega^2 = N_{Ay}^d + N_{By}^d$$

$$-I_{xz}\varepsilon + I_{yz}\omega^2 = a \cdot N_{Ay}^d - b \cdot N_{By}^d$$

$$I_{yz}\varepsilon + I_{xz}\omega^2 = -a \cdot N_{Ax}^d + b \cdot N_{Bx}^d$$

Takrorlash uchun savollar:

1. Nuqtaning erkinmas harakat dinamik reaksiyalari nima?
2. Mexanik sistema harakati dinamik reaksiyalari qanday aniqlanadi?
3. Dinamik reaksiyalarni aniqlash inersiya kuchlarini aniqlash masalasiga qanday keltiriladi?
4. O'zgarmas burchak tezlik bilan aylanma harakat qilayotgan jismning aylanish o'qiga dinamik reaksiyasi qanday aniqlanadi?
5. Jismning aylanish o'qiga qachon dinamik reaksiyasi bo'lmaydi?
6. Jismning aylanish o'qiga dinamik reaksiyalari bo'lmaslikning qanday zaruriy shartlari bor?

Tayanch so'zlar va iboralar:

Nuqta va mexanik sistemaning erkinmas harakat dinamik reaksiyalari. Qo'zg'almas o'q atrofida aylanuvchi jismning aylanish o'qiga ko'rsatadigan dinamik bosimi, dinamik reaksiyalar. Dinamik muvozanat. Dinamik muvozanat tenglamalari. Aylanish o'qiga bosim. Aylanish o'qiga dinamik reaksiyaning bo'lmaslik shartlari.

Asosiy adabiyotlar

1. Shoxaydarova P. va boshqalar. Nazariy mexanika. -T.: O’qituvchi, 1992.
2. Rashidov T.R. va boshqalar. Nazariy mexanika asoslari. -T.: O’qituvchi, 1991.
3. Yaxyoev M.S., Mo’minov K.B. Nazariy mexanika. -T.: O’qituvchi, 1990.
4. Shoobidov Sh.A, Xabibullaeva X.N, Fayzullaeva F.D. Kinematika.–Toshkent, ToshDTU, 2003.
5. Yo’ldoshev K. Nazariy mexanikadan kurs ishlarini bajarishga doir metodik qo’llanma. -T.: O’zbekiston, 1993.
6. Bat’ M.I., Djanalidze G.Yu., Kelzon A.S. Teoreticheskaya mexanika v primerax i zadachax. -M.: Nauka, 1992.
7. Turanov X.T., Teoreticheskaya mexanika v zadachax gruzovix perevozok. Novosibirsk: Nauka, 2009. – 376 s.
8. Targ S.M. Kratkiy kurs teoreticheskoy mexaniki. -M.: Vыsshaya shkola, 2002.
9. Meshcherskiy I.V. Nazariy mexanikadan masalalar to’plami.-T.:O’qituvchi, 1990.
10. Meshcherskiy I.V. Sbornik zadach po teoreticheskoy mexanike.-M.: Nauka, 1986.
11. Anorqulov T., Xusanov Q., Komiljonov A. Nazariy mexanikadan kurs ishlari uchun topshiriqlar to’plami. -T.: Ziyo-nashr, 2002.
12. Zoirov J. Nazariy mexanika. -T.: Fan, 1998.
13. Nazariy mexanikadan kurs ishlari uchun topshiriqlar to’plami.-T.:O’qituvchi, 2002.
14. Murodov M.M., Inoyatova X.M., Usnatdinov K.U. Nazariy mexanika.-T.: stiqlol, 2004.
15. Zozulya V.V., Martinenko L.V, Lukin A.N. Teoreticheskaya mexanika. -Xarkov, 2004. 244p. Russian djvu. 1971 KB 8.1 KB/p. 300dpi OCR lib.homelinux.org /fayl/
16. Juravlev V.F. Osnovi teoreticheskoy mexaniki. 2-e izd., Fizmatlit, 2001 321p.Russian djvu. 2901 KB 0,9 KB/p. 600dpi OCR lib.homelinux.org /fayl/

Qo’shimcha adabiyotlar

1. Mirsaidov M.M. va boshqalar «Nazariy mexanikaning qisqa kursi», Toshkent, “O’zbekiston”-2008 y
2. Valiev M.Yo. Nazariy mexanika bo’yicha Hisob grafik ishlari uchun metodik ko’rsatma va topshiriqlar Toshkent 1988 y. 32 b
3. Kovalevskiy V.I., Qo’chqorov U.X. «Nazariy mexanika» Ruscha–o’zbekcha atamalar lug’ati. Toshkent 1995 y. 480 b. institut kutubxonasi

4. Turanov X.T., Teoreticheskaya mexanika v zadachax gruzovix perevozok. Novosibirsk: Nauka, 2009. – 376 s.
5. http://www.Teor-mex.ru.

MUNDARIJA

1.	1-ma’ruza. Statiкaning asosiy tushunchalari ba aкsiomalari	3
2.	2-ma’ruza. Кesishuvchi kuchlar sistemasi	9
3.	3-ma’ruza. Juft kuchlar va juft kuchlar momenti	17
4.	4-ma’ruza. Tekislikda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasi.	22
5.	5-ma’ruza. Fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasi	29
6.	6-ma’ruza. Parallel kuchlar markazi va jismlarning og’irlik markazlarini aniqlash usullari	40
7.	7-ma’ruza. Nuqta kinematikasi.	47
8.	8-ma’ruza. Nuqtaning tezlanishi	55
9.	9-ma’ruza. Qattiq jismning sodda harakatlari. qattiq jismning ilgarinlanma harakati	59
10.	10-ma’ruza. Nuqtaning murakkab harakati	66
11.	11-ma’ruza. Qattiq jismning tekis-parallel harakati.	73
12.	12-ma’ruza. Dinamika. Dinamikaning asosiy tushunchalari va qonunlari.	83
13.	13-ma’ruza. Moddiy nuqta dinamikasi. Moddiy nuqta harakatining dijferensial tenglamalari. Dinamikaning asosiy masalalari.	88
14.	14-ma’ruza. Nuqtaning tebranma harakati	92
15.	15-ma’ruza. Mexanik sistema dinamikasi. Asosiy tushunchalar	95
16.	16-ma’ruza. Dinamikaning umumiy teoremalari	100
17.	17-ma’ruza. Mexanik sistema kinetik energiyasi. ish va quvvat	107
18.	18-ma’ruza. Inersiya kuchlarining bosh vektori va bosh momenti. Dalamber prinsipi	113