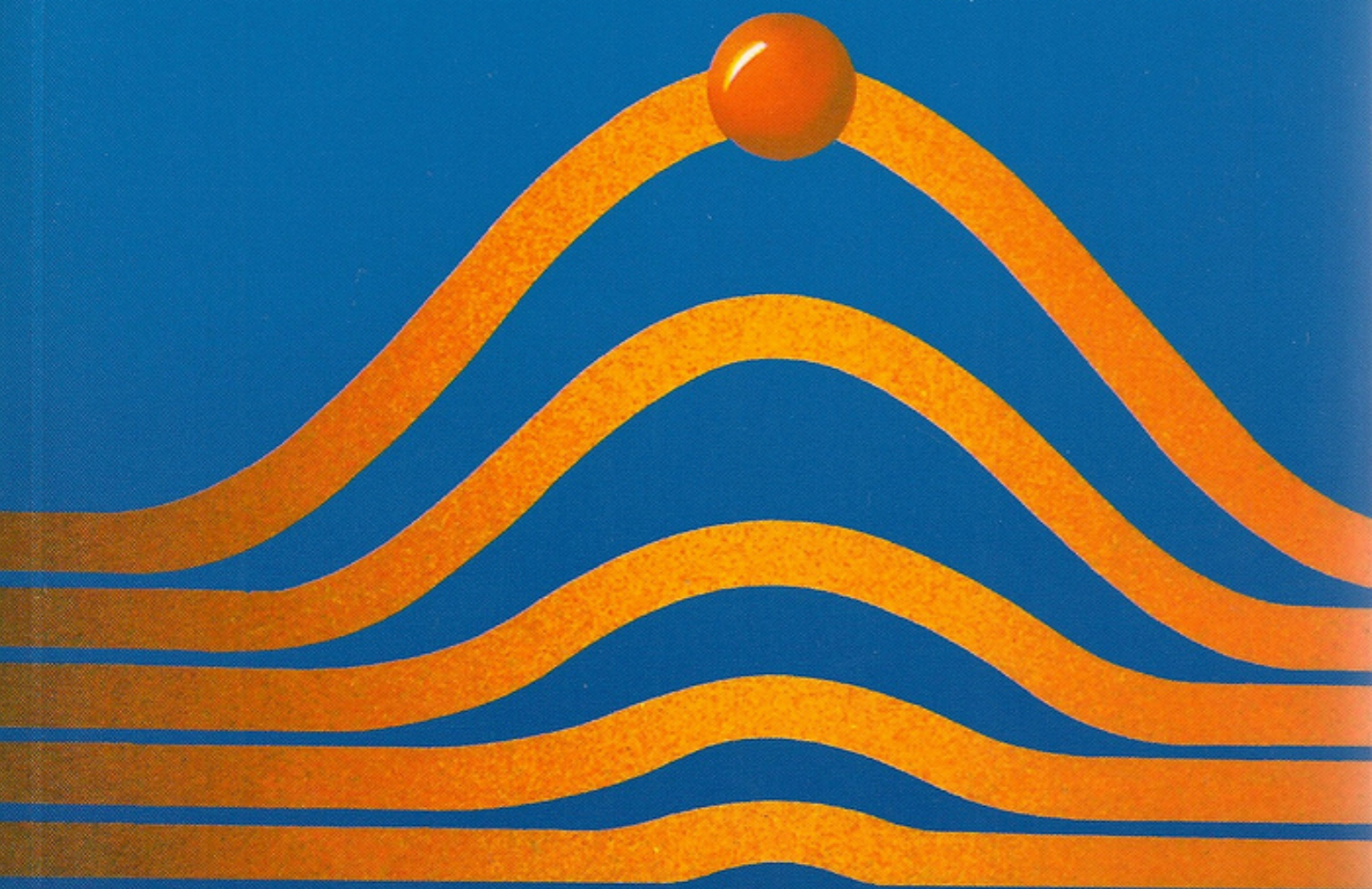




# FÍSICA QUÂNTICA

Átomos, Moléculas, Sólidos,  
Núcleos e Partículas

EISBERG • RESNICK





# FÍSICA QUÂNTICA

Átomos, Moléculas, Sólidos,  
Núcleos e Partículas

**ROBERT EISBERG**

Universidade da Califórnia, Santa Bárbara

**ROBERT RESNICK**

Instituto Politécnico Rensselaer

**23ª Tiragem**



## Índice

- 1 RADIAÇÃO TÉRMICA E O POSTULADO DE PLANCK, 17**
  - 1-1 INTRODUÇÃO, 19
  - 1-2 RADIAÇÃO TÉRMICA, 20
  - 1-3 A TEORIA CLÁSSICA DA RADIAÇÃO DE CAVIDADE, 24
  - 1-4 A TEORIA DE PLANCK DA RADIAÇÃO DE CAVIDADE, 32
  - 1-5 O USO DA LEI DA RADIAÇÃO DE PLANCK NA TERMOMETRIA, 39
  - 1-6 O POSTULADO DE PLANCK E SUAS IMPLICAÇÕES, 40
  - 1-7 UM POUCO DA HISTÓRIA DA FÍSICA QUÂNTICA, 42
    - QUESTÕES, 43
    - PROBLEMAS, 45
- 2 FÓTONS – PROPRIEDADES CORPUSCULARES DA RADIAÇÃO, 49**
  - 2-1 INTRODUÇÃO, 51
  - 2-2 O EFEITO FOTOELÉTRICO, 51
  - 2-3 A TEORIA QUÂNTICA DE EINSTEIN DO EFEITO FOTOELÉTRICO, 54
  - 2-4 O EFEITO COMPTON, 59
  - 2-5 A NATUREZA DUAL DA RADIAÇÃO ELETROMAGNÉTICA, 66
  - 2-6 FÓTONS E A PRODUÇÃO DE RAIOS X, 67
  - 2-7 PRODUÇÃO E ANIQUILAÇÃO DE PARES, 69
  - 2-8 SEÇÕES DE CHOQUE PARA ABSORÇÃO E ESPALHAMENTO DE FÓTONS, 75
    - QUESTÕES, 79
    - PROBLEMAS, 81
- 3 O POSTULADO DE DE BROGLIE – PROPRIEDADES ONDULATÓRIAS DAS PARTÍCULAS, 85**
  - 3-1 ONDAS DE MATÉRIA, 87
  - 3-2 A DUALIDADE ONDA-PARTÍCULA, 94

3-3	O PRINCÍPIO DA INCERTEZA, 97
3-4	PROPRIEDADES DAS ONDAS DE MATÉRIA, 102
3-5	ALGUMAS CONSEQUÊNCIAS DO PRINCÍPIO DA INCERTEZA, 112
3-6	A FILOSOFIA DA TEORIA QUÂNTICA, 113
	QUESTÕES, 115
	PROBLEMAS, 117
4	O MODELO DE BOHR PARA O ÁTOMO, 129
4-1	O MODELO DE THOMSON, 123
4-2	O MODELO DE RUTHERFORD, 127
4-3	A ESTABILIDADE DO ÁTOMO NUCLEAR, 134
4-4	ESPECTROS ATÔMICOS, 135
4-5	OS POSTULADOS DE BOHR, 137
4-6	O MODELO DE BOHR, 139
4-7	CORREÇÃO PARA A MASSA NUCLEAR FINITA, 145
4-8	ESTADOS DE ENERGIA DO ÁTOMO, 148
4-9	INTERPRETAÇÃO DAS REGRAS DE QUANTIZAÇÃO, 151
4-10	O MODELO DE SOMMERFELD, 155
4-11	O PRINCÍPIO DA CORRESPONDÊNCIA, 158
4-12	UMA CRÍTICA À ANTIGA TEORIA QUÂNTICA, 160
	QUESTÕES, 162
	PROBLEMAS, 164
5	A TEORIA DE SCHROEDINGER DA MECÂNICA QUÂNTICA, 169
5-1	INTRODUÇÃO, 171
5-2	ARGUMENTOS PLAUSÍVEIS PARA SE CHEGAR À EQUAÇÃO DE SCHROEDINGER, 174
5-3	A INTERPRETAÇÃO DE BORN PARA FUNÇÕES DE ONDA, 182
5-4	VALORES ESPERADOS, 189
5-5	A EQUAÇÃO DE SCHROEDINGER INDEPENDENTE DO TEMPO, 200
5-6	AS PROPRIEDADES NECESSÁRIAS ÀS AUTOFUNÇÕES, 205
5-7	A QUANTIZAÇÃO DA ENERGIA NA TEORIA DE SCHROEDINGER, 207
5-8	RESUMO, 216
	QUESTÕES, 219
	PROBLEMAS, 222
6	SOLUÇÕES DA EQUAÇÃO DE SCHROEDINGER INDEPENDENTE DO TEMPO, 231
6-1	INTRODUÇÃO, 233
6-2	O POTENCIAL NULO, 234
6-3	O POTENCIAL DEGRAU (ENERGIA MENOR DO QUE A ALTURA DO DEGRAU), 241
6-4	O POTENCIAL DEGRAU (ENERGIA MAIOR DO QUE A ALTURA DO DEGRAU), 251
6-5	A BARREIRA DE POTENCIAL, 258

6-6	EXEMPLOS DE PENETRAÇÃO DE BARREIRAS POR PARTÍCULAS, 265
6-7	O POÇO DE POTENCIAL QUADRADO, 270
6-8	O POÇO DE POTENCIAL QUADRADO INFINITO, 275
6-9	O POTENCIAL DO OSCILADOR HARMÔNICO SIMPLES, 284
6-10	RESUMO, 290
	QUESTÕES, 291
	PROBLEMAS, 294
7	ÁTOMOS DE UM ELÉTRON, 299
7-1	INTRODUÇÃO, 301
7-2	DESENVOLVIMENTO DA EQUAÇÃO DE SCHROEDINGER, 303
7-3	SEPARAÇÃO DA EQUAÇÃO INDEPENDENTE DO TEMPO, 304
7-4	SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES, 307
7-5	AUTOVALORES, NÚMEROS QUÂNTICOS E DEGENERESCÊNCIA, 308
7-6	AUTOFUNÇÕES, 313
7-7	DENSIDADE DE PROBABILIDADE, 316
7-8	MOMENTO ANGULAR ORBITAL, 327
7-9	EQUAÇÕES DE AUTOVALOR, 332
	QUESTÕES, 336
	PROBLEMAS, 338
8	MOMENTOS DE DIPOLO MAGNÉTICO, SPIN E TAXAS DE TRANSIÇÃO, 343
8-1	INTRODUÇÃO, 345
8-2	MOMENTOS DE DIPOLO MAGNÉTICO ORBITAL, 345
8-3	A EXPERIÊNCIA DE STERN-GERLACH E O SPIN DO ELÉTRON, 351
8-4	A INTERAÇÃO SPIN-ÓRBITA, 357
8-5	MOMENTO ANGULAR TOTAL, 361
8-6	ENERGIA DE INTERAÇÃO SPIN-ÓRBITA E OS NÍVEIS DE ENERGIA DO HIDROGÊNIO, 365
8-7	TAXAS DE TRANSIÇÃO E REGRAS DE SELEÇÃO, 369
8-8	COMPARAÇÃO ENTRE AS TEORIAS QUÂNTICAS MODERNA E ANTIGA, 377
	QUESTÕES, 379
	PROBLEMAS, 381
9	ÁTOMOS MULTIELETRÔNICOS – ESTADOS FUNDAMENTAIS E EXCITAÇÕES DE RAIOS X, 385
9-1	INTRODUÇÃO, 387
9-2	PARTÍCULAS IDÊNTICAS, 388
9-3	O PRINCÍPIO DE EXCLUSÃO, 395
9-4	FORÇAS DE TROCA E O ÁTOMO DE HÉLIO, 398
9-5	TEORIA DE HARTREE, 406
9-6	RESULTADOS DA TEORIA DE HARTREE, 410
9-7	ESTADOS FUNDAMENTAIS DE ÁTOMOS MULTIELETRÔNICOS E A TABELA PERIÓDICA, 418

9-8 ESPECTROS DISCRETOS DE RAIOS X, 427  
QUESTÕES, 434  
PROBLEMAS, 436

10 ÁTOMOS MULTIELETRÔNICOS – EXCITAÇÕES ÓTICAS, 441

10-1 INTRODUÇÃO, 443  
10-2 ÁTOMOS ALCALINOS, 444  
10-3 ÁTOMOS COM VÁRIOS ELÉTRONS ÓTICAMENTE ATIVOS, 448  
10-4 ACOPLAMENTO LS, 452  
10-5 NÍVEIS DE ENERGIA DO ÁTOMO DE CARBONO, 459  
10-6 O EFEITO ZEEMAN, 462  
10-7 SUMÁRIO, 470  
QUESTÕES, 471  
PROBLEMAS, 473

11 ESTATÍSTICA QUÂNTICA, 477

TRIAGO

11-1 INTRODUÇÃO, 479  
11-2 INDISTINGUIBILIDADE E ESTATÍSTICA QUÂNTICA, 480  
11-3 AS FUNÇÕES DE DISTRIBUIÇÃO QUÂNTICAS, 484  
11-4 COMPARAÇÃO ENTRE AS FUNÇÕES DE DISTRIBUIÇÃO, 488  
11-5 O CALOR ESPECÍFICO DE UM SÓLIDO CRISTALINO, 493  
11-6 A DISTRIBUIÇÃO DE BOLTZMANN COMO UMA APROXIMAÇÃO ÀS DISTRIBUIÇÕES QUÂNTICAS, 498  
11-7 O LASER, 499  
11-8 O GÁS DE FÓTONS, 505  
11-9 O GÁS DE FÔNONS, 506  
11-10 CONDENSACÃO DE BOSE E O HÉLIO LÍQUIDO, 507  
11-11 O GÁS DE ELÉTRONS LIVRES, 513  
11-12 POTENCIAL DE CONTATO E EMISSÃO TERMOIÔNICA, 517  
11-13 DESCRIÇÕES CLÁSSICA E QUÂNTICA DO ESTADO DE UM SISTEMA, 519  
QUESTÕES, 521  
PROBLEMAS, 523

12 MOLÉCULAS, 527 ALLEN

12-1 INTRODUÇÃO, 529  
12-2 LIGAÇÕES IÔNICAS, 529  
12-3 LIGAÇÕES COVALENTES, 532  
12-4 ESPECTROS MOLECULARES, 536  
12-5 ESPECTROS DE ROTAÇÃO, 537  
12-6 ESPECTROS DE VIBRAÇÃO – ROTAÇÃO, 541  
12-7 ESPECTROS ELETRÔNICOS, 544  
12-8 O EFEITO RAMAN, 548  
12-9 DETERMINAÇÃO DO SPIN NUCLEAR E NATUREZA DA SIMETRIA, 549  
QUESTÕES, 554  
PROBLEMAS, 556

13 SÓLIDOS – CONDUTORES E SEMICONDUTORES, 561

FABIO

13-1 INTRODUÇÃO, 563  
13-2 TIPOS DE SÓLIDOS, 563  
13-3 TEORIA DE BANDA DOS SÓLIDOS, 565  
13-4 CONDUÇÃO ELÉTRICA EM METAIS, 570  
13-5 O MODELO QUÂNTICO DE ELÉTRONS LIVRES, 572  
13-6 O MOVIMENTO DOS ELÉTRONS NUMA REDE PERIÓDICA, 578  
13-7 MASSA EFETIVA, 583  
13-8 SEMICONDUTORES, 587  
13-9 DISPOSITIVOS SEMICONDUTORES, 593  
QUESTÕES, 600  
PROBLEMAS, 602

14 SÓLIDOS – PROPRIEDADES SUPERCONDUTORAS E MAGNÉTICAS, 607

ELEOMAR

14-1 SUPERCONDUTIVIDADE, 609  
14-2 PROPRIEDADES MAGNÉTICAS DOS SÓLIDOS, 618  
14-3 PARAMAGNETISMO, 620  
14-4 FERROMAGNETISMO, 624  
14-5 ANTIFERROMAGNETISMO E FERRIMAGNETISMO, 631  
QUESTÕES, 632  
PROBLEMAS, 634

15 MODELOS NUCLEARES, 639

GUILLERMO

15-1 INTRODUÇÃO, 641  
15-2 UMA VISÃO GERAL DE ALGUMAS PROPRIEDADES NUCLEARES, 643  
15-3 FORMAS E DENSIDADES NUCLEARES, 647  
15-4 MASSAS E ABUNDÂNCIAS NUCLEARES, 652  
15-5 O MODELO DA GOTA LÍQUIDA, 661  
15-6 NÚMEROS MÁGICOS, 666  
15-7 O MODELO DO GÁS DE FERMI, 667  
15-8 O MODELO DE CAMADAS, 670  
15-9 PREDIÇÕES DO MODELO DE CAMADAS, 677  
15-10 O MODELO COLETIVO, 681  
15-11 RESUMO, 688  
QUESTÕES, 689  
PROBLEMAS, 691

16 DECAIMENTO NUCLEAR E REAÇÕES NUCLEARES, 695

DEZOLIO

16-1 INTRODUÇÃO, 697  
16-2 DECAIMENTO ALFA, 698  
16-3 DECAIMENTO BETA, 705  
16-4 A INTERAÇÃO DECAIMENTO BETA, 719  
16-5 DECAIMENTO GAMA, 725  
16-6 O EFEITO MÖSSBAUER, 732  
16-7 REAÇÕES NUCLEARES, 735

16-8 ESTADOS EXCITADOS DOS NÚCLEOS, 747  
16-9 FISSÃO E REATORES, 751  
16-10 FUSÃO E ORIGEM DOS ELEMENTOS, 758  
QUESTÕES, 764  
PROBLEMAS, 767

17 PARTÍCULAS ELEMENTARES, 773

*FELIPE*  
17-1 INTRODUÇÃO, 775  
17-2 FORÇAS NUCLEÔNICAS, 776  
17-3 ISOSPIN, 790  
17-4 PIONS, 793  
17-5 MUONS, 802  
17-6 ESTRANHEZA, 804  
17-7 INTERAÇÕES FUNDAMENTAIS E LEIS DE CONSERVAÇÃO, 810  
17-8 FAMÍLIAS DE PARTÍCULAS ELEMENTARES, 815  
17-9 HIPERCARGA E QUARKS, 818  
QUESTÕES, 822  
PROBLEMAS, 825

APÊNDICE A

A TEORIA DA RELATIVIDADE ESPECIAL, 829

APÊNDICE B

A RADIAÇÃO EMITIDA POR UMA CARGA ACELERADA, 851

APÊNDICE C

A DISTRIBUIÇÃO DE BOLTZMANN, 855

APÊNDICE D

AS TRAJETÓRIAS DO ESPALHAMENTO DE RUTHERFORD, 861

APÊNDICE E

GRANDEZAS COMPLEXAS, 865

APÊNDICE F

SOLUÇÃO NUMÉRICA DA EQUAÇÃO DE SCHROEDINGER  
INDEPENDENTE DO TEMPO PARA UM POÇO DE POTENCIAL QUADRADO, 871

APÊNDICE G

SOLUÇÃO ANALÍTICA DA EQUAÇÃO DE SCHROEDINGER  
INDEPENDENTE DO TEMPO PARA UM POÇO DE POTENCIAL QUADRADO, 879

APÊNDICE H

SOLUÇÃO EM SÉRIE DA EQUAÇÃO DE SCHROEDINGER  
INDEPENDENTE DO TEMPO PARA UM POTENCIAL DE

OSCILADOR HARMÔNICO SIMPLES, 887

APÊNDICE I

O LAPLACIANO E OS OPERADORES MOMENTO ANGULAR EM  
COORDENADAS ESFÉRICAS, 895

APÊNDICE J

A PRECESSÃO DE THOMAS, 901

APÊNDICE K

O PRINCÍPIO DE EXCLUSÃO NO ACOPLAMENTO  $LS$ , 907

APÊNDICE L

REFERÊNCIAS, 911

APÊNDICE M

RESPOSTAS DE PROBLEMAS ESCOLHIDOS, 913

APÊNDICE N

CONSTANTES ÚTEIS E FATORES DE CONVERSÃO, 915

ÍNDICE ANALÍTICO, 917

---

# Radiação Térmica e o Postulado de Planck

## 1-1 INTRODUÇÃO 19

a antiga teoria quântica; relação entre a física quântica e a física clássica; papel da constante de Planck

## 1-2 RADIAÇÃO TÉRMICA 20

propriedades da radiação térmica; corpos negros; radiância espectral; funções de distribuição; radiância; lei de Stefan; constante de Stefan-Boltzmann; lei de Wien; radiação de cavidade; densidade de energia; lei de Kirchhoff

## 1-3 A TEORIA CLÁSSICA DA RADIAÇÃO DE CAVIDADE 24

ondas eletromagnéticas em uma cavidade; ondas estacionárias; contagem de frequências permitidas; equipartição de energia; constante de Boltzmann; espectro de Rayleigh-Jeans

## 1-4 TEORIA DE PLANCK DA RADIAÇÃO DE CAVIDADE 32

distribuição de Boltzmann; energias discretas; violação da equipartição; constante de Planck; espectro de Planck

## 1-5 O USO DA LEI DA RADIAÇÃO DE PLANCK NA TERMOMETRIA, 39

pirômetros óticos; radiação universal de 3°K e o *big bang*

enunciado geral do postulado; energias quantizadas; estados quânticos; números quânticos; pêndulo macroscópico

o trabalho inicial de Planck; tentativas de reconciliar a quantização com a física clássica

# Radiação Térmica e o Postulado de Planck

## 1-1 INTRODUÇÃO

Numa reunião da Sociedade Alemã de Física, a 14 de dezembro de 1900, Max Planck apresentou seu artigo "Sobre a Teoria da Lei de Distribuição de Energia do Espectro Normal". Este artigo, que a princípio atraiu pouca atenção, foi o início de uma revolução na física. A data de sua apresentação é considerada como sendo a do nascimento da física quântica, embora só um quarto de século mais tarde a mecânica quântica moderna, base de nossa concepção atual da natureza, tenha sido desenvolvida por Schroedinger e outros. Diversos caminhos convergiram nessa concepção, cada um deles mostrando um dos aspectos onde falhava a física clássica. Neste e nos três capítulos seguintes vamos examinar os marcos fundamentais do que agora é chamado a *antiga teoria quântica*. Os fenômenos experimentais que vamos discutir em conexão com a antiga teoria quântica abrangem todas as disciplinas da física clássica: mecânica, termodinâmica, mecânica estatística e eletromagnetismo. Suas repetidas contradições com as leis clássicas, e a resolução desses conflitos com base nas idéias quânticas, vão nos mostrar a necessidade da mecânica quântica. E nosso estudo da antiga teoria quântica vai nos permitir obter mais facilmente uma compreensão mais profunda da mecânica quântica, quando começarmos a considerá-la, no quinto capítulo.

Assim como a teoria da relatividade (que é tratada muito rapidamente no Apêndice A), a física quântica representa uma generalização da física clássica, que inclui as leis clássicas como casos especiais. Assim como a relatividade estende o campo de aplicação das leis físicas para a região de grandes velocidades, a física quântica estende esse campo à região de pequenas dimensões; e, assim como uma constante universal de significação fundamental, a velocidade da luz  $c$ , caracteriza a relatividade, também uma constante universal de significação fundamental, a chamada constante de Planck  $h$ , caracteriza a física quântica. Planck introduziu essa constante em seu artigo de 1900, quando tentava explicar as propriedades observadas da radiação térmica. Vamos agora começar a examinar essa radiação. Seremos levados por esse estudo à constante de Planck e ao conceito quântico extremamente relevante a ela relacionado, o fato de que a energia assume valores discretos. Também veremos que, por sua vez, a radiação térmica tem considerável importância e é hoje em dia bastante relevante. Por exemplo, o fenômeno recentemente ajudou os astrofísicos na escolha de teorias sobre a origem do universo.

## 1-2 RADIAÇÃO TÉRMICA

A radiação emitida por um corpo devido à sua temperatura é chamada *radiação térmica*. Todo corpo emite esse tipo de radiação para o meio que o cerca, e dele a absorve. Se um corpo está inicialmente mais quente do que o meio, ele irá se esfriar, porque a sua taxa de emissão de energia excede à taxa de absorção. Quando o equilíbrio térmico é atingido, as taxas de emissão e absorção são iguais.

A matéria em um estado condensado (isto é, sólido ou líquido) emite um espectro contínuo de radiação. Os detalhes do espectro são praticamente independentes do material particular do qual o corpo é composto, mas dependem bastante da temperatura. A temperaturas usuais, a maioria dos corpos é visível para nós não pela luz que emitem, mas pela luz que refletem. Se nenhuma luz incidir sobre eles, não os podemos ver. A temperaturas muito altas, no entanto, os corpos têm luminosidade própria. Podemos vê-los brilhar num quarto escuro; mas mesmo a temperaturas da ordem de muitos milhares de graus Kelvin, bem mais de 90% da radiação térmica emitida é invisível para nós, estando na região do infravermelho do espectro eletromagnético. Portanto, corpos com luminosidade própria são muito quentes.

Consideremos, por exemplo, o aquecimento de um atizador de ferro no fogo, de onde o retiramos periodicamente para observarmos suas propriedades. Quando o atizador está ainda a uma temperatura relativamente baixa, ele irradia calor, mas esta radiação não é visível. Com a temperatura crescendo, a quantidade de radiação que o atizador emite aumenta muito rapidamente, e notamos efeitos visíveis. O atizador adquire uma cor vermelha apagada, depois uma cor vermelha brilhante, e, a temperaturas muito altas, uma cor branco-azulada intensa. Isto é, com o aumento da temperatura, o corpo emite mais radiação térmica e a frequência na qual a radiação é mais intensa aumenta.

A relação entre a temperatura de um corpo e o espectro de frequência da radiação emitida é utilizada em um aparelho chamado pirômetro ótico. Ele é essencialmente um espectrômetro rudimentar que permite ao operador estimar a temperatura de um corpo quente, tal como uma estrela, observando a cor, ou composição de frequências, da radiação térmica por ele emitida. Há um espectro contínuo de radiação emitida, e o olho vê principalmente a cor correspondente à emissão mais intensa na região do visível. Exemplos familiares de objetos que emitem radiação visível incluem carvões em brasa, filamentos de lâmpada e o sol.

De uma maneira mais geral, a forma detalhada do espectro da radiação térmica emitida por um corpo quente depende de algum modo da composição desse corpo. No entanto, a experiência nos mostra que há um tipo de corpo quente que emite espectros térmicos de caráter universal. Esses corpos são chamados *corpos negros*, isto é, corpos cujas superfícies absorvem toda a radiação térmica incidente sobre eles. O nome é apropriado porque esses corpos não refletem luz e são negros. Um exemplo de um (quase) corpo negro seria *qualquer* objeto coberto com uma camada difusa de pigmento preto, tal como o negro de fuligem. Um outro exemplo, completamente diferente, será descrito mais adiante. Independentemente dos detalhes de sua composição, verifica-se que *todos* os corpos negros à mesma temperatura emitem radiação térmica com o mesmo espectro. Esse fato geral pode ser entendido com base em argumentos clássicos que envolvem equilíbrio termodinâmico. A forma específica do espectro, no entanto, não pode ser obtida a partir de argumentos termodinâmicos apenas. As propriedades universais da radiação emitida por corpos negros fazem com que eles sejam de interesse teórico particular, e que os físicos procurem explicar as características específicas de seu espectro.

A distribuição espectral da radiação de corpo negro é especificada pela quantidade  $R_T(\nu)$ , chamada *radiância espectral*, que é definida de forma que  $R_T(\nu) d\nu$  seja igual à energia emitida por unidade de tempo em radiação de frequência compreendida no intervalo de  $\nu$  a  $\nu + d\nu$  por unidade de área de uma superfície a temperatura absoluta  $T$ . As primeiras medidas precisas dessa grandeza foram feitas por Lummer e Pringsheim em 1899. Eles utilizaram um instrumento

basicamente igual aos espectrômetros de prisma usados nas medidas de espectros óticos, diferindo apenas nos materiais especiais que eram necessários para que as lentes, prismas, etc., fossem transparentes à radiação térmica de frequência relativamente baixa. A dependência observada experimentalmente de  $R_T(\nu)$  em  $\nu$  e  $T$  é mostrada na Figura 1-1.

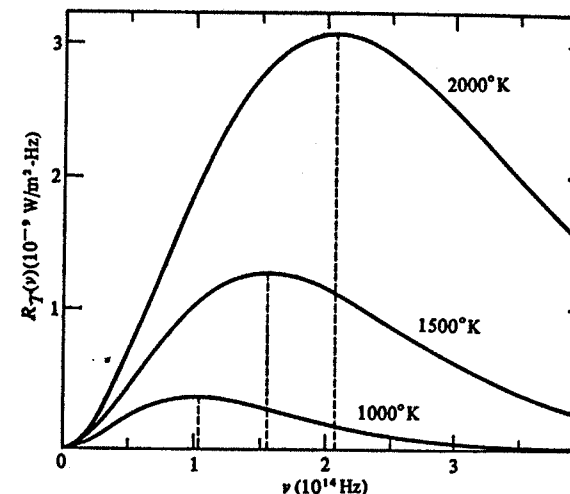


FIGURA 1-1. A radiância espectral de um corpo negro em função da frequência da radiação, mostrada para temperaturas de 1000°K, 1500°K e 2000°K. Observe-se que a frequência na qual a radiância máxima ocorre (linha pontilhada), aumenta linearmente com a temperatura, e a potência total emitida por metro quadrado (área sob a curva) aumenta muito rapidamente com a temperatura.

*Funções de distribuição*, das quais a radiância espectral é um exemplo, são muito comuns na física. Por exemplo, a função de distribuição de velocidades de Maxwell (que se parece bastante com as curvas da figura 1-1) nos diz como as moléculas em um gás a pressão e temperatura fixas se distribuem de acordo com a sua velocidade. Outra função de distribuição que o estudante já provavelmente viu é a que especifica os tempos de decaimento de núcleos radioativos em uma amostra contendo núcleos de dadas espécies (que tem a forma de uma exponencial decrescente), e ele certamente já viu uma função de distribuição das notas recebidas em um exame de física.

A função de distribuição da radiância espectral da figura 1-1 para um corpo negro de área dada e a uma temperatura particular, por exemplo, 1000°K, nos mostra que: (1) há muito pouca potência irradiada num intervalo de frequência fixa  $d\nu$  se este intervalo estiver em uma frequência  $\nu$  muito pequena comparada a  $10^{14}$  Hz. A potência é nula para  $\nu$  igual a zero. (2) A potência irradiada no intervalo  $d\nu$  cresce rapidamente à medida que  $\nu$  cresce a partir de valores muito pequenos. (3) Fica máxima para um valor de  $\nu \approx 1,1 \times 10^{14}$  Hz. Isto é, a potência irradiada é mais intensa nessa frequência. (4) Acima de  $\approx 1,1 \times 10^{14}$  Hz a potência irradiada cai lentamente mas continuamente à medida que  $\nu$  cresce. É novamente zero quando  $\nu$  se aproxima de valores infinitamente grandes.

As duas funções de distribuição para valores maiores da temperatura, 1500°K e 2000°K, apresentadas na figura, nos mostram que (5) a frequência na qual a potência irradiada é mais intensa cresce com o aumento da temperatura. Uma inspeção verificará que essa frequência cresce linearmente com a temperatura. (6) A potência total irradiada em todas as frequências cresce quando a temperatura aumenta, e o faz de forma mais rápida do que linearmente. A potência total irradiada a uma temperatura particular é dada simplesmente pela área sob a curva para essa temperatura,  $\int_0^\infty R_T(\nu) d\nu$ , já que  $R_T(\nu) d\nu$  é a potência irradiada no intervalo de frequência de  $\nu$  a  $\nu + d\nu$ .

A integral da radiância espectral  $R_T(\nu)$  sobre todas as frequências  $\nu$  é a energia total emiti-



da por unidade de tempo por unidade de área por um corpo negro a temperatura  $T$ . É dita a *radiância*  $R_T$ . Isto é,

$$R_T = \int_0^\infty R_T(\nu) d\nu \quad (1-1)$$

Como vimos na discussão precedente, da Figura 1-1,  $R_T$  cresce rapidamente com o aumento da temperatura. De fato, esse resultado é chamado *lei de Stefan*, e foi enunciado pela primeira vez em 1879 sob a forma de uma equação empírica.

$$R_T = \sigma T^4 \quad (1-2)$$

onde

$$\sigma = 5,67 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2 \cdot ^\circ\text{K}^4$$

é a chamada *constante de Stefan-Boltzmann*. A figura 1-1 também mostra que o espectro se desloca para maiores frequências à medida que  $T$  aumenta. Este resultado é chamado *lei do deslocamento de Wien*

$$\nu_{\max} \propto T \quad (1-3a)$$

onde  $\nu_{\max}$  é a frequência  $\nu$  na qual  $R_T(\nu)$  tem seu valor máximo para uma dada temperatura. Quando  $T$  cresce,  $\nu_{\max}$  se desloca para frequências mais altas. Todos esses resultados estão de acordo com as experiências familiares discutidas anteriormente, especialmente de que a quantidade de radiação térmica emitida aumenta rapidamente (o atizador irradia muito mais energia térmica a altas temperaturas), e a frequência principal da radiação se torna maior (o atizador muda de cor, do vermelho ao branco azulado) com o aumento da temperatura.

Um outro exemplo de corpo negro, que veremos ser de grande importância, pode ser obtido ao considerarmos um objeto que contém uma cavidade ligada ao exterior por um pequeno orifício, como na Figura 1-2. A radiação térmica que incide sobre o orifício vinda do exterior entra na cavidade e é refletida repetidas vezes pelas suas paredes, sendo eventualmente por elas absorvida. Se a área do orifício for muito pequena comparada com a área da superfície interna da cavidade, uma quantidade desprezível da radiação incidente será refletida para fora da cavidade. Essencialmente toda a radiação incidente sobre o orifício é absorvida; portanto, o orifício

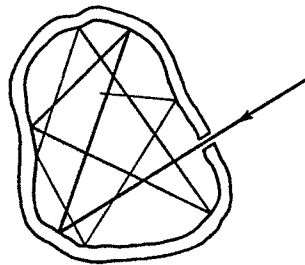


FIGURA 1-2. Uma cavidade em um corpo ligada ao exterior por um pequeno orifício. A radiação incidente sobre o orifício é completamente absorvida após sucessivas reflexões sobre a superfície interna da cavidade. O orifício absorve como um corpo negro. No processo inverso, no qual a radiação que deixa o orifício é constituída a partir de emissões da superfície interna, o orifício emite como se fosse um corpo negro.

deve ter propriedades da superfície de um corpo negro. A maioria dos corpos negros utilizados em experiência de laboratório são construídos dessa forma.

Suponhamos agora que as paredes da cavidade estejam uniformemente aquecidas a uma temperatura  $T$ . Então as paredes emitirão radiação térmica que vai encher a cavidade. A pequena fração dessa radiação vinda do interior que incide sobre o orifício vai atravessá-lo. Portanto este atua como um emissor de radiação térmica. Como ele deve ter as propriedades da superfície de um corpo negro, a radiação emitida por ele deve ter um espectro de corpo negro; mas como o orifício está simplesmente nos dando uma amostra da radiação existente dentro da cavidade, é claro que a radiação dentro dela deve também ter um espectro de corpo negro. De fato, ela terá um espectro de corpo negro característico da temperatura  $T$  das paredes, já que esta é a única temperatura definida para o sistema. O espectro emitido pelo buraco na cavidade é especificado em termos do fluxo de energia  $R_T(\nu)$ . É mais útil, entretanto, especificar o espectro da radiação dentro da cavidade, dita *radiação de cavidade*, em termos de uma *densidade de energia*,  $\rho_T(\nu)$ , que é definida como a energia contida em um volume unitário da cavidade a temperatura  $T$  no intervalo de frequência de  $\nu$  a  $\nu + d\nu$ . É evidente que essas quantidades são proporcionais entre si, isto é

$$\rho_T(\nu) \propto R_T(\nu) \quad (1-4)$$

Portanto, a radiação dentro de uma cavidade cujas paredes estão a uma temperatura  $T$  tem o mesmo caráter que a radiação emitida pela superfície de um corpo negro a temperatura  $T$ . É conveniente experimentalmente produzir um espectro de corpo negro por meio de uma cavidade num corpo aquecido que tem um orifício para o exterior, e é conveniente em trabalhos teóricos estudar a radiação de corpo negro analisando a radiação de cavidade, porque é possível aplicar argumentos muito gerais para prever as propriedades desta radiação.

#### EXEMPLO 1-1

(a) Como  $\lambda\nu = c$ , a velocidade constante da luz, a lei do deslocamento de Wien (1-3a) também pode ser colocada na forma

$$\lambda_{\max} T = \text{const} \quad (1-3b)$$

onde  $\lambda_{\max}$  é o comprimento de onda no qual a radiância espectral atinge seu valor máximo para uma dada temperatura  $T$ . O valor determinado experimentalmente para a constante de Wien é de  $2,898 \times 10^{-3} \text{ m} \cdot ^\circ\text{K}$ . Se supusermos que as superfícies estelares se comportam como corpos negros, podemos obter uma boa estimativa de suas temperaturas medindo-se  $\lambda_{\max}$ . Para o sol,  $\lambda_{\max} = 5100 \text{ \AA}$ , enquanto que para a Estrela do Norte (Estrela Polar)  $\lambda_{\max} = 3500 \text{ \AA}$ . Achar a temperatura da superfície dessas estrelas. (Um *angstrom* =  $1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ m}$ .)

Para o sol,  $T = 2,898 \times 10^{-3} \text{ m} \cdot ^\circ\text{K} / 5100 \times 10^{-10} \text{ m} = 5700^\circ\text{K}$ . Para a Estrela do Norte,  $T = 2,898 \times 10^{-3} \text{ m} \cdot ^\circ\text{K} / 3500 \times 10^{-10} \text{ m} = 8300^\circ\text{K}$ .

A  $5700^\circ\text{K}$ , a superfície do sol está próxima da temperatura na qual a maior parte da radiação está dentro da região visível do espectro. Isto sugere que, durante a evolução humana, nossos olhos se adaptaram ao sol, de forma a ficarem mais sensíveis aos comprimentos de onda que ele irradia mais intensamente.

(b) Usando a Lei de Stefan, (1-2), e a temperatura obtida acima, determinar a potência irradiada por  $1 \text{ cm}^2$  de superfície estelar.

Para o sol,

$$R_T = \sigma T^4 = 5,67 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2 \cdot ^\circ\text{K}^4 \times (5700^\circ\text{K})^4 \\ = 5,90 \times 10^7 \text{ W/m}^2 = 6000 \text{ W/cm}^2$$

Para a Estrela do Norte,

$$R_T = \sigma T^4 = 5,67 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}^4 \times (8300^\circ \text{K})^4 \\ = 2,71 \times 10^8 \text{ W/m}^2 \approx 27.000 \text{ W/cm}^2$$

#### EXEMPLO 1-2

Suponha que temos dois pequenos corpos opacos separados por uma grande distância, sustentados por fios num grande recipiente onde se fez vácuo, e cujas paredes são opacas e mantidas a temperatura constante. Neste caso, os corpos e as paredes podem trocar energia apenas através de radiação. Seja  $e$  a taxa de emissão de energia radiante por um corpo, e seja  $a$  a taxa de absorção de energia radiante. Mostre que, no equilíbrio,

$$\frac{e_1}{a_1} = \frac{e_2}{a_2} = 1 \quad (1-5)$$

Esta relação, (1-5), é conhecida como a *lei de Kirchhoff para a radiação*.

O estado de equilíbrio é tal que a temperatura é constante em todo sistema fechado, e nesse estado a taxa de emissão é necessariamente igual à taxa de absorção para cada corpo. Então

$$e_1 = a_1 \quad e \quad e_2 = a_2$$

Portanto

$$\frac{e_1}{a_1} = 1 = \frac{e_2}{a_2}$$

Se um corpo, por exemplo, o corpo 2, for um corpo negro, então  $a_2 > a_1$ , porque um corpo negro absorve melhor do que um que não é um corpo negro. Logo, segue-se de (1-5) que  $e_2 > e_1$ . Então, o fato observado de que bons absorvedores também são bons emissores é previsto pela lei de Kirchhoff.

### 1-3 A TEORIA CLÁSSICA DA RADIAÇÃO DE CAVIDADE

No início deste século, Rayleigh, e também Jeans, fizeram o cálculo da densidade de energia da radiação de cavidade (ou de corpo negro), o qual mostrou uma séria divergência entre a física clássica e os resultados experimentais. Esse cálculo é análogo aos que aparecem ao considerarmos muitos outros fenômenos (por exemplo, calores específicos de sólidos), que serão tratados mais tarde. Apresentaremos os detalhes do cálculo aqui, mas, como uma forma de facilitar a sua compreensão, faremos antes uma digressão sobre o problema.

Consideremos uma cavidade com paredes metálicas aquecidas uniformemente a uma temperatura  $T$ . As paredes emitem radiação eletromagnética na faixa térmica de frequências. Sabemos que isso acontece, basicamente, por causa dos movimentos acelerados dos elétrons nas paredes metálicas, que surgem como resultado da agitação térmica (vide Apêndice B). No entanto, não é necessário estudar detalhadamente o comportamento dos elétrons nas paredes da cavidade. Em vez disso, estudaremos o comportamento das ondas eletromagnéticas em seu interior. Rayleigh e Jeans procederam da seguinte maneira. Inicialmente, a teoria eletromagnética clássica é usada para mostrar que a radiação dentro da cavidade deve existir na forma de ondas estacionárias com nós sobre as superfícies metálicas. Usando-se argumentos geométricos, faz-se uma contagem do número dessas ondas estacionárias cujas frequências estão no intervalo de  $\nu$  a  $\nu + d\nu$ , de forma a determinar como esse número depende de  $\nu$ . Então usa-se um resultado da teoria cinética clássica dos gases para calcular a energia total média dessas ondas quando o sistema está em equilíbrio térmico. A energia total média depende, na teoria clássica, apenas da temperatura  $T$ . O número de ondas estacionárias no intervalo de frequências, multiplicado pela energia média das ondas e dividido pelo volume da cavidade, nos dá a energia média contida em uma

unidade de volume no intervalo de frequência de  $\nu$  a  $\nu + d\nu$ . Esta é a quantidade desejada, a densidade de energia  $\rho_T(\nu)$ . Façamos agora tudo isto em detalhe.

Suponhamos para simplificar que a cavidade com paredes metálicas contendo radiação eletromagnética tenha a forma de um cubo cujas arestas medem  $a$ , como na figura 1-3. Então a radiação que é refletida sucessivamente pelas paredes pode ser decomposta em três componentes, ao longo das três direções mutuamente perpendiculares definidas pelas arestas da cavidade\*. Como as paredes opostas são paralelas, as três componentes da radiação não se misturam, e podemos tratá-las separadamente. Consideremos inicialmente a componente  $x$  e a parede metálica em  $x = 0$ . Toda a radiação nessa direção que incide sobre a parede é por ela refletida, e as ondas incidente e refletida se combinam formando uma onda estacionária. Como a radiação eletromagnética é uma vibração transversal, com o vetor campo elétrico  $E$  perpendicular à direção de propagação, e como a direção de propagação para essa componente é perpendicular à parede considerada, seu vetor campo elétrico  $E$  é paralelo à parede. No entanto, na parede metálica não pode haver um campo elétrico paralelo à superfície, pois as cargas sempre fluem de forma a neutralizar o campo elétrico. Portanto, essa componente de  $E$  deve ser sempre zero na parede. Isto é, a onda estacionária associada à componente  $x$  da radiação deve ter um nó (amplitude zero) em  $x = 0$ . A onda estacionária também deve ter um nó em  $x = a$ , pois não é possível aí a existência de campo elétrico paralelo a essa parede. Além disso, condições semelhantes se aplicam às duas outras componentes; a onda estacionária associada à componente  $y$  deve ter nós em  $y = 0$  e  $y = a$ , e a onda estacionária associada à componente  $z$  deve ter nós em  $z = 0$  e  $z = a$ . Essas condições limitam os possíveis comprimentos de onda, e, conseqüentemente, as possíveis frequências da radiação eletromagnética na cavidade.

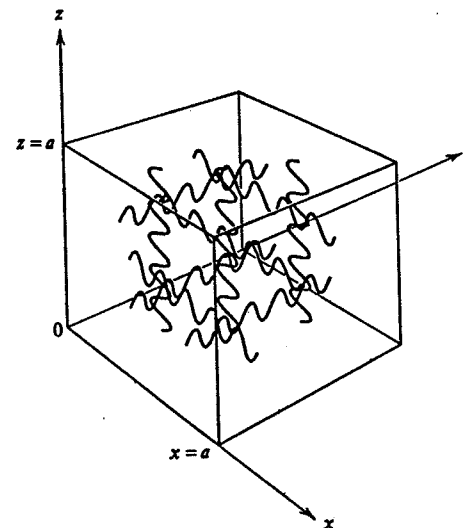


FIGURA 1-3. Uma cavidade cúbica com paredes metálicas contendo radiação eletromagnética, mostrando as três componentes que não se misturam desta radiação oscilando entre as paredes e formando ondas estacionárias com nós em cada parede.

\* O autor se refere à direção de propagação e não a componentes do vetor campo elétrico. (N. do T.)

Consideremos agora o problema da contagem do número de ondas estacionárias com nós nas superfícies da cavidade, com comprimentos de onda no intervalo entre  $\lambda$  e  $\lambda + d\lambda$ , que corresponde ao intervalo de frequências de  $\nu$  a  $\nu + d\nu$ . Para ressaltar as idéias envolvidas no cálculo, vamos inicialmente trabalhar apenas com a componente  $x$ ; ou seja, vamos considerar o caso simplificado, se bem que artificial, de uma "cavidade unidimensional" de comprimento  $a$ . Depois que resolvermos este caso, veremos que a maneira de generalizá-lo para o caso da cavidade tridimensional real é óbvia.

→ O campo elétrico para ondas estacionárias unidimensionais pode ser descrito matematicamente pela função

$$E(x, t) = E_0 \sin(2\pi x/\lambda) \sin(2\pi \nu t) \quad (1-6)$$

onde  $\nu$  é a frequência da onda,  $\lambda$  seu comprimento de onda e  $E_0$  sua amplitude máxima. As duas primeiras grandezas estão relacionadas pela equação

$$\nu = c/\lambda \quad (1-7)$$

onde  $c$  é a velocidade de propagação das ondas eletromagnéticas. A equação (1-6) representa uma onda cuja amplitude varia no espaço senoidalmente segundo  $\sin(2\pi x/\lambda)$  e que oscila no tempo também senoidalmente com frequência  $\nu$ , como um oscilador harmônico simples. Como a amplitude é obviamente zero, em qualquer instante  $t$ , para posições que satisfazem à relação

$$2x/\lambda = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (1-8)$$

a onda tem nós fixos; ou seja, é uma onda estacionária. Para satisfazer à condição de que as ondas tenham nós nos dois extremos da cavidade unidimensional, escolhemos a origem do eixo  $x$  como estando em um dos extremos da cavidade ( $x = 0$ ) e então impomos que no outro extremo ( $x = a$ )

$$2x/\lambda = n \quad \text{para } x = a \quad (1-9)$$

onde

$$n = 1, 2, 3, 4, \dots$$

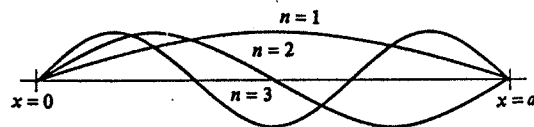


FIGURA 1-4. Amplitude das ondas estacionárias em uma cavidade unidimensional com paredes em  $x = 0$  e  $x = a$ , para os três primeiros valores do índice  $n$ .

Esta condição determina um conjunto de valores possíveis para o comprimento de onda  $\lambda$ . Para esses valores possíveis, a amplitude das ondas estacionárias tem a aparência mostrada na figura 1-4. Estas podem ser reconhecidas como análogas às amplitudes das ondas estacionárias em uma corda vibrando com os dois extremos fixos, um sistema físico real que também satisfaz a (1-6). No nosso caso, são ondas estacionárias eletromagnéticas.

É conveniente continuarmos a discussão em termos de frequências possíveis, em vez de comprimentos de ondas possíveis. Essas frequências são  $\nu = c/\lambda$ , onde  $2a/\lambda = n$ . Isto é,

$$\nu = cn/2a \quad n = 1, 2, 3, 4, \dots \quad (1-10)$$

Podemos representar esses possíveis valores da frequência em termos de um diagrama, consistindo de um eixo no qual marcamos um ponto para cada valor inteiro de  $n$ . Num diagrama desse tipo, o valor da frequência permitida correspondente ao valor particular de  $n$  é, por (1-10), igual a  $c/2a$  vezes a distância  $d$  da origem ao ponto considerado, ou a distância  $d$  é  $2a/c$  vezes a frequência  $\nu$ . Estas relações estão mostradas na figura 1-5. Tal diagrama é útil para calcularmos o número de frequências possíveis no intervalo de frequência entre  $\nu$  e  $\nu + d\nu$ , que denominamos  $N(\nu) d\nu$ . Para obtermos essa quantidade, basta que contemos o número de pontos sobre o eixo  $n$  que estão entre esses dois limites, que são construídos de forma a corresponderem às frequências  $\nu$  e  $\nu + d\nu$ , respectivamente. Como os pontos estão distribuídos uniformemente sobre o eixo  $n$ , é evidente que o número de pontos entre esses dois limites será proporcional a  $d\nu$ , mas não dependerá de  $\nu$ . De fato, é fácil verificar que  $N(\nu) d\nu = (2a/c) d\nu$ . No entanto, devemos multiplicar essa expressão por um fator dois, pois, para cada uma das frequências possíveis, há na realidade duas ondas independentes, correspondendo aos dois possíveis estados de polarização das ondas eletromagnéticas. Então temos

$$N(\nu) d\nu = \frac{4a}{c} d\nu \quad (1-11)$$

Isto completa o cálculo do número de ondas estacionárias para o caso artificial de uma cavidade unidimensional.

O cálculo acima torna evidente a generalização para o caso real de uma cavidade tridimensional. Essa extensão é indicada na figura 1-6. Neste caso, o conjunto de pontos uniformemente distribuídos ao longo de um único eixo  $n$  é substituído por um arranjo tridimensional uniforme de pontos cujas três coordenadas são valores inteiros tomados ao longo de três eixos  $n$  mutuamente perpendiculares. Cada ponto do arranjo corresponde a uma possível onda estacionária tridimensional. Os valores inteiros de  $n_x$ ,  $n_y$  e  $n_z$  especificados para cada ponto dão o número de nós das componentes  $x$ ,  $y$  e  $z$ , respectivamente, da onda tridimensional\*. O processo é equivalente a decompor uma onda tridimensional (isto é, que se propaga numa direção arbitrária) nas três ondas unidimensionais que a compõem. O número de frequências permitidas no intervalo de frequência entre  $\nu$  e  $\nu + d\nu$  é igual ao número de pontos contidos entre camadas de raios correspondentes às frequências  $\nu$  e  $\nu + d\nu$ , respectivamente; este número será proporcional ao volume contido entre essas duas camadas, pois os pontos se distribuem uniformemente. É evidente, portanto, que  $N(\nu) d\nu$  será proporcional a  $\nu^2 d\nu$ , sendo o primeiro fator,  $\nu^2$ , proporcional à área das camadas, e o segundo,  $d\nu$ , à distância entre elas. No exemplo abaixo, faremos esse cálculo detalhadamente, e obteremos

$$N(\nu) d\nu = \frac{8\pi V}{c^3} \nu^2 d\nu \quad (1-12)$$

sendo  $V = a^3$ , o volume da cavidade.

\* O leitor poderá verificar, examinando a fig. 1-4, que o número de nós de cada componente é  $n_i - 1$ , para  $i = x, y, z$ , não sendo contados os extremos do intervalo. (N. do T.)

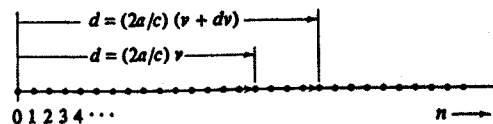


FIGURA 1-5. Os valores possíveis do índice  $n$ , que determinam os possíveis valores da frequência em uma cavidade unidimensional de comprimento  $a$ .

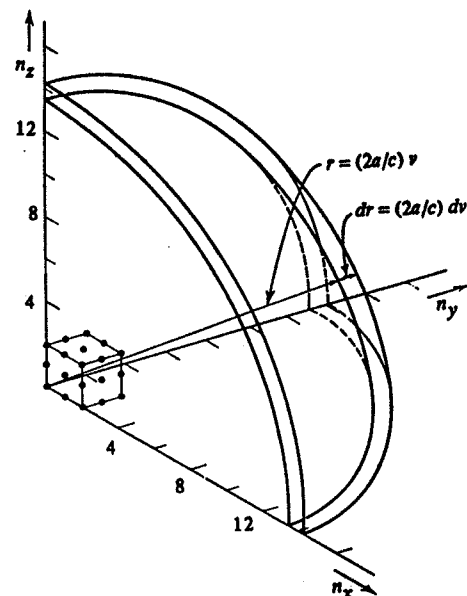


FIGURA 1-6. As frequências possíveis em uma cavidade tridimensional com a forma de um cubo cuja aresta mede  $a$  são determinadas por três índices  $n_x$ ,  $n_y$  e  $n_z$ , em que cada um deles pode assumir apenas valores inteiros. Para que o desenho não fique sobrecarregado, apenas poucos dos muitos pontos correspondendo a conjuntos destes índices são mostrados.

#### EXEMPLO 1-3

Obter (1-12), que dá o número de ondas eletromagnéticas estacionárias possíveis em cada intervalo de frequência, para o caso de uma cavidade tridimensional na forma de um cubo de paredes metálicas cujas arestas têm comprimento  $a$ .

Consideremos radiação de comprimento de onda  $\lambda$  e frequência  $\nu = c/\lambda$ , propagando-se na direção definida pelos três ângulos  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , como mostrados na figura 1-7. A radiação deve ser uma onda estacionária, já que todas as suas três componentes são ondas estacionárias. Indicamos as localizações de alguns dos nós fixos da onda estacionária por um conjunto de planos perpendiculares à direção de propagação  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ . A distância entre esses planos nodais da radiação é exatamente  $\lambda/2$ , onde  $\lambda$  é seu comprimento de onda. Também indicamos as localizações, nos três eixos, dos nós das três componentes. As distâncias entre estes nós são

$$\begin{aligned}\lambda_x/2 &= \lambda/2 \cos \alpha \\ \lambda_y/2 &= \lambda/2 \cos \beta \\ \lambda_z/2 &= \lambda/2 \cos \gamma\end{aligned}\quad (1-13)$$

Vamos escrever as expressões para os valores, nos três eixos, dos campos elétricos das três componentes. São

$$E(x, t) = E_{0x} \sin(2\pi x/\lambda_x) \sin(2\pi \nu t)$$

$$E(y, t) = E_{0y} \sin(2\pi y/\lambda_y) \sin(2\pi \nu t)$$

$$E(z, t) = E_{0z} \sin(2\pi z/\lambda_z) \sin(2\pi \nu t)$$

A expressão para a componente  $x$  representa uma onda com amplitude máxima  $E_{0x}$ , com variação espacial  $\sin(2\pi x/\lambda_x)$ , e que oscila com frequência  $\nu$ . Como  $\sin(2\pi x/\lambda_x)$  é zero para  $2x/\lambda_x = 0, 1, 2, 3, \dots$ , a onda é uma onda estacionária de comprimento de onda  $\lambda_x$ , porque tem nós fixos separados pela distância  $\Delta x = \lambda_x/2$ . As expressões para as componentes  $y$  e  $z$  representam ondas estacionárias de amplitudes máximas  $E_{0y}$  e  $E_{0z}$  e comprimentos de onda  $\lambda_y$  e  $\lambda_z$ , mas todas as três ondas estacionárias componentes oscilam com a frequência  $\nu$  da radiação. Observemos que essas expressões automaticamente satisfazem à condição de que a componente  $x$  tenha um nó em  $x = 0$ , a componente  $y$  tenha um nó em  $y = 0$  e a componente  $z$  tenha um nó em  $z = 0$ . Para que elas também satisfaçam à condição de que a componente  $x$  tenha um nó em  $x = a$ , a componente  $y$  tenha um nó em  $y = a$  e a componente  $z$  tenha um nó em  $z = a$ , façamos

$$\begin{aligned}2x/\lambda_x &= n_x && \text{para } x = a \\ 2y/\lambda_y &= n_y && \text{para } y = a \\ 2z/\lambda_z &= n_z && \text{para } z = a\end{aligned}$$

onde  $n_x = 1, 2, 3, \dots$ ;  $n_y = 1, 2, 3, \dots$ ;  $n_z = 1, 2, 3, \dots$ . Usando (1-13) estas condições ficam

$$(2a/\lambda) \cos \alpha = n_x \quad (2a/\lambda) \cos \beta = n_y \quad (2a/\lambda) \cos \gamma = n_z$$

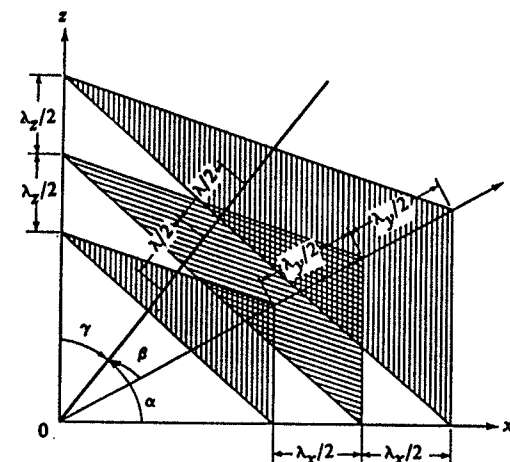


FIGURA 1-7. Os planos nodais de uma onda estacionária que se propaga em uma certa direção em uma cavidade cúbica.

Elevando os dois membros dessas equações ao quadrado e somando-as, obtemos

$$(2a/\lambda)^2 (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma) = n_x^2 + n_y^2 + n_z^2$$

Os ângulos  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  têm a propriedade

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$



Portanto

$$2a/\lambda = \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2}$$

onde  $n_x$ ,  $n_y$  e  $n_z$  podem assumir qualquer valor inteiro. Essa equação descreve a limitação que existe para os possíveis comprimentos de onda da radiação eletromagnética contida na cavidade.

Vamos novamente continuar a discussão em termos das frequências possíveis, em vez dos comprimentos de onda possíveis. Elas são

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{c}{2a} \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2} \quad (1-14a)$$

Vamos agora contar o número de frequências possíveis em um dado intervalo de frequência, construindo uma rede cúbica uniforme em um octante de um sistema de coordenadas retangulares, de tal forma que as três coordenadas de cada ponto da rede sejam iguais a um conjunto possível de três inteiros  $n_x$ ,  $n_y$ ,  $n_z$  (vide figura 1-6). Por construção, cada ponto da rede corresponde a uma possível frequência. Além disso,  $N(\nu)d\nu$ , o número de frequências permitidas entre  $\nu$  e  $\nu + d\nu$ , é igual a  $N(r)dr$ , o número de pontos contidos entre camadas concêntricas de raios  $r$  e  $r + dr$ , onde

$$r = \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2}$$

De (1-14a), isto fica

$$r = \frac{2a}{c} \nu \quad (1-14b)$$

Como  $N(r)dr$  é igual ao volume compreendido entre as camadas, multiplicado pela densidade dos pontos da rede, e já que, por construção, a densidade é um,  $N(r)dr$  é simplesmente

$$N(r)dr = \frac{1}{8} 4\pi r^2 dr = \frac{\pi r^2}{2} dr \quad (1-15)$$

Igualando essa expressão a  $N(\nu)d\nu$ , e calculando  $r^2 dr$  de (1-14b), obtemos

$$N(\nu)d\nu = \frac{\pi}{2} \left(\frac{2a}{c}\right)^3 \nu^2 d\nu$$

Com isto terminamos o cálculo, mas ainda devemos multiplicar este resultado por um fator 2, pois, para cada frequência possível que consideramos, há, na realidade, duas ondas independentes, correspondentes aos dois possíveis estados de polarização da radiação eletromagnética. Portanto obtivemos (1-12). Pode-se mostrar que  $N(\nu)$  independe da forma suposta da cavidade, e que depende apenas de seu volume.

Observemos que há uma diferença muito significativa entre os resultados obtidos para o caso de uma cavidade tridimensional real e os resultados obtidos anteriormente para o caso artificial de uma cavidade unidimensional. Veremos que o fator  $\nu^2$  encontrado em (1-12), mas não em (1-11), desempenhará um papel fundamental nos argumentos que se seguem. Este fator aparece, basicamente, porque vivemos em um mundo tridimensional — sendo a potência à qual  $\nu$  está elevado igual a essa dimensionalidade menos um. Embora Planck, ao solucionar as sérias discrepâncias entre a teoria clássica e a experiência, tenha questionado certos pontos que se tinham como obviamente verdadeiros, nem ele nem outras pessoas trabalhando no problema questionaram (1-12). Era, e ainda é, geralmente aceito que (1-12) é válida.

Agora temos uma contagem do número de ondas estacionárias. O próximo passo na teoria clássica de Rayleigh-Jeans da radiação de corpo negro é fazer o cálculo da energia total média

associada a cada onda estacionária de frequência  $\nu$ . De acordo com a física clássica, a energia de uma onda pode ter qualquer valor, desde zero até infinito, sendo este valor proporcional ao quadrado do módulo de sua amplitude constante  $E_0$ . No entanto, para um sistema contendo um grande número de entes físicos do mesmo tipo, que estão em equilíbrio térmico entre si a uma temperatura  $T$ , a física clássica faz uma previsão bem definida dos valores médios das energias destes entes. Isto se aplica ao nosso caso, já que o grande número de ondas estacionárias que constituem a radiação térmica dentro da cavidade são entes do mesmo tipo que estão em equilíbrio térmico entre si a uma temperatura  $T$ , a temperatura das paredes da cavidade. O equilíbrio térmico é garantido pelo fato de que as paredes de qualquer cavidade real vão sempre absorver e irradiar novamente, em diferentes frequências e direções, mesmo uma pequena quantidade da radiação incidente sobre elas, e, portanto, as diferentes ondas estacionárias podem trocar de energia gradualmente, como é necessário para que o equilíbrio seja mantido.

A previsão vem da teoria cinética clássica, e é chamada *lei ou princípio da equipartição da energia*. Esta lei afirma que, para um sistema de moléculas de um gás em equilíbrio térmico a uma temperatura  $T$ , a energia cinética média de uma molécula por grau de liberdade é  $kT/2$ , onde  $k = 1,38 \times 10^{-23}$  joule/K, e é chamada *constante de Boltzman*. A lei se aplica, na realidade, a qualquer sistema clássico que contenha, no equilíbrio, um grande número de entes do mesmo tipo. Para o caso considerado, os entes são as ondas estacionárias que têm um grau de liberdade, a amplitude de seu campo elétrico. Portanto, em média, todas suas energias cinéticas têm o mesmo valor,  $kT/2$ . No entanto, cada onda estacionária que oscila senoidalmente tem uma energia total que é igual a duas vezes a sua energia cinética média. Esta é uma propriedade usual de sistemas físicos que têm um único grau de liberdade e que executam oscilações harmônicas simples com o tempo; casos familiares são um pêndulo ou uma mola. Portanto, cada onda estacionária na cavidade tem, de acordo com a lei de equipartição clássica, uma energia total média

$$\bar{\epsilon} = kT \quad (1-16)$$

O ponto mais importante a ser notado é que se prevê que a energia total média tem o mesmo valor para todas as ondas estacionárias na cavidade, independentemente de suas frequências.

A energia por unidade de volume no intervalo de frequência de  $\nu$  a  $\nu + d\nu$  do espectro de corpo negro de uma cavidade a temperatura  $T$  é portanto o produto da energia média por onda estacionária vezes o número de ondas estacionárias no intervalo de frequência, dividido pelo volume da cavidade. De (1-15) e (1-16) obtemos finalmente o resultado

$$\rho_T(\nu)d\nu = \frac{8\pi\nu^2 kT}{c^3} d\nu \quad (1-17)$$

Esta é a fórmula de Rayleigh-Jeans para a radiação de corpo negro.

Na figura 1-8 comparamos as previsões dessa equação com os dados experimentais. A discrepância é evidente. No limite de baixas frequências, o espectro clássico se aproxima dos resultados experimentais, mas, à medida que a frequência cresce, a previsão teórica vai a infinito. A experiência nos mostra que a densidade de energia sempre permanece finita, como é óbvio que deveria permanecer; na realidade, a densidade de energia vai a zero para frequências muito altas. O comportamento grosseiramente não realista da previsão da teoria clássica para altas frequências é conhecido na física como a "catástrofe do ultravioleta". O termo sugere e enfatiza a não validade da teoria clássica nesta região.

## 1-4 TEORIA DE PLANCK DA RADIAÇÃO DE CAVIDADE

Ao tentar solucionar a discrepância entre a teoria e a experiência, Planck foi levado a considerar a hipótese de uma violação da lei da equipartição da energia sobre a qual a teoria se ba-

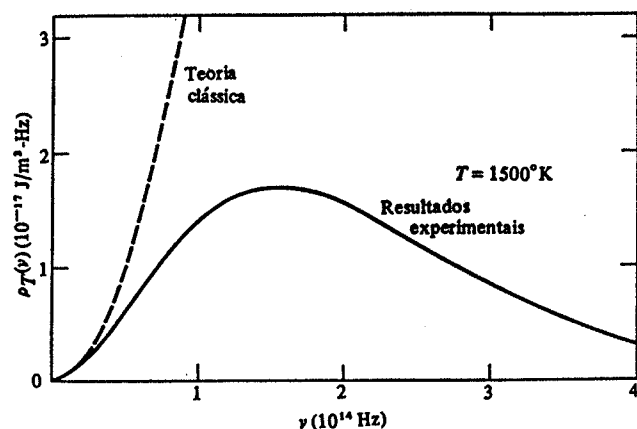


FIGURA 1-8. A previsão de Rayleigh-Jeans (linha pontilhada) em comparação com os resultados experimentais (linha sólida) para a densidade de energia de uma cavidade de corpo negro, mostrando a discrepância séria chamada de catástrofe do ultravioleta.

seava. Da figura 1-8 é claro que a lei dá resultados satisfatórios para baixas frequências. Portanto, podemos supor

$$\bar{\epsilon} \rightarrow kT \quad \nu \rightarrow 0 \quad (1-18)$$

isto é, a energia total média tende a  $kT$  quando a frequência se aproxima de zero. A discrepância para altas frequências poderia ser eliminada se houvesse, por algum motivo, um corte, de forma que

$$\bar{\epsilon} \rightarrow 0 \quad \nu \rightarrow \infty \quad (1-19)$$

isto é, se a energia total média tender a zero quando a frequência tender a infinito. Em outras palavras, Planck descobriu que, nas circunstâncias que predominam no caso da radiação de corpo negro, a energia média das ondas estacionárias é uma função da frequência  $\bar{\epsilon}(\nu)$ , com as propriedades indicadas em (1-18) e (1-19). Isto contradiz a lei da equipartição da energia que associa à energia média  $\bar{\epsilon}$  um valor independente da frequência.

Voltemos à origem da lei da equipartição. Ela surge, basicamente, de um resultado mais compreensível da teoria cinética clássica, a distribuição de Boltzmann. (Os argumentos que levam à distribuição de Boltzmann estão desenvolvidas no Apêndice C, para os estudantes que ainda não têm familiaridade com ela.) Vamos aqui utilizar uma *forma especial da distribuição de Boltzmann*

$$P(\epsilon) = \frac{e^{-\epsilon/kT}}{kT} \quad (1-20)$$

na qual  $P(\epsilon)d\epsilon$  é a probabilidade de encontrar um dado ente de um sistema com energia no intervalo entre  $\epsilon$  e  $\epsilon + d\epsilon$ , quando o número de estados de energia para o ente nesse intervalo independe de  $\epsilon$ . Supõe-se que o sistema contém um grande número de entes do mesmo tipo em equilíbrio térmico a temperatura  $T$ , e  $k$  representa a constante de Boltzmann. As energias dos entes no sistema que estamos considerando, um conjunto de ondas estacionárias oscilando em movimento harmônico simples em equilíbrio térmico em uma cavidade de corpo negro, são governadas por (1-20).

A função de distribuição de Boltzmann está intimamente relacionada à função de distribuição de Maxwell para a energia de uma molécula num sistema de moléculas em equilíbrio térmico. De fato, a exponencial na distribuição de Boltzmann é responsável pelo fator exponencial na distribuição de Maxwell. O fator  $\epsilon^{1/2}$ , que alguns estudantes já devem ter visto na distribuição de Maxwell, resulta do fato que o número de estados de energia para uma molécula no intervalo de  $\epsilon$  a  $\epsilon + d\epsilon$  não é independente de  $\epsilon$ , mas sim aumenta proporcionalmente a  $\epsilon^{1/2}$ .

A função de distribuição de Boltzmann nos dá informações completa sobre as energias dos entes no nosso sistema, incluindo, é claro, o valor médio  $\bar{\epsilon}$  das energias. Este pode ser obtido de  $P(\epsilon)$  usando-se (1-20)

$$\bar{\epsilon} = \frac{\int_0^{\infty} \epsilon P(\epsilon) d\epsilon}{\int_0^{\infty} P(\epsilon) d\epsilon} \quad (1-21)$$

O integrando no numerador é a energia  $\epsilon$ , com peso dado pela probabilidade que o ente tem de ser encontrado com esta energia. Integrando-se sobre todas as energias possíveis, obtém-se o valor médio desta energia. O denominador é a probabilidade de encontrar o ente com *qualquer* energia e portanto tem valor um. A integral no numerador pode ser calculada, e o resultado é justamente a lei da equipartição da energia

$$\bar{\epsilon} = kT \quad (1-22)$$

Em vez de fazermos todo o cálculo aqui, é melhor, para os argumentos que se seguem, observarmos os gráficos de  $P(\epsilon)$  e  $\bar{\epsilon}$  mostrados na parte superior da figura 1-9. Esta figura é o gráfico de  $P(\epsilon)$  em função de  $\epsilon$ . Seu valor máximo,  $1/kT$ , ocorre para  $\epsilon = 0$ , e o valor de  $P(\epsilon)$  decresce suavemente à medida que  $\epsilon$  cresce, se aproximando de zero quando  $\epsilon \rightarrow \infty$ . Isto é, o resultado que seria encontrado com maior probabilidade em uma medida de  $\epsilon$  é zero. Mas a média  $\bar{\epsilon}$  dos resultados que seriam obtidos num grande número de medidas de  $\epsilon$  é maior do que zero, como é mostrado na abscissa da figura do alto, já que muitas medidas de  $\epsilon$  vão dar valores maiores que zero. A parte de baixo da figura 1-9 indica o cálculo de  $\bar{\epsilon}$  a partir de  $P(\epsilon)$ .

A grande contribuição de Planck surgiu quando ele descobriu que poderia obter o corte necessário, indicado em (1-19), se modificasse o cálculo que leva de  $P(\epsilon)$  a  $\bar{\epsilon}$ , tratando a energia  $\epsilon$  como se ela fosse uma *variável discreta* em vez de uma *variável contínua*, como sempre foi considerada na física clássica. Quantitativamente, isto pode ser feito reescrevendo-se (1-21) em termos de uma soma, em vez de uma integral. Veremos logo que isto não é difícil de ser feito, mas será muito mais instrutivo estudarmos em primeiro lugar a representação gráfica na figura 1-10.

Planck supôs que a energia  $\epsilon$  poderia ter apenas certos valores discretos, em vez de qual-

quer valor, e que os valores discretos da energia fossem uniformemente distribuídos; isto é, ele tomou

$$\mathcal{E} = 0, \Delta\mathcal{E}, 2\Delta\mathcal{E}, 3\Delta\mathcal{E}, 4\Delta\mathcal{E}, \dots \quad (1-23)$$

como o conjunto de valores possíveis da energia. Aqui  $\Delta\mathcal{E}$  é o intervalo constante entre valores possíveis sucessivos da energia. A parte superior da figura 1-10 ilustra um cálculo de  $\bar{\mathcal{E}}$  a partir

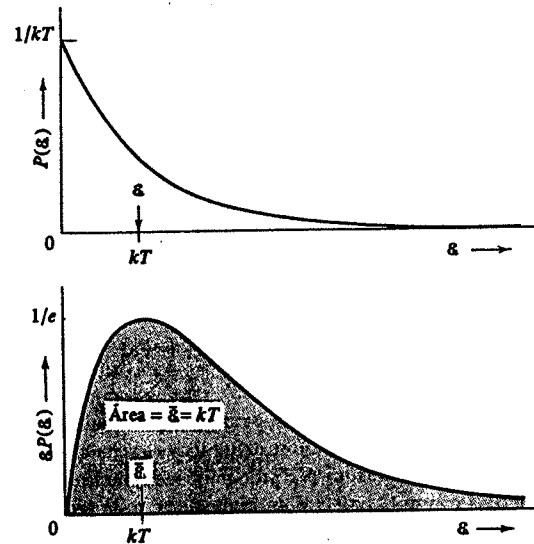


FIGURA 1-9. Ao alto: Gráfico da distribuição de probabilidade de Boltzmann  $P(\mathcal{E}) = e^{-\mathcal{E}/kT}/kT$ . O valor médio da energia  $\mathcal{E}$  para essa distribuição é  $\bar{\mathcal{E}} = kT$ , que é a lei clássica da equipartição da energia. Para calcular este valor de  $\bar{\mathcal{E}}$ , integramos  $\mathcal{E}P(\mathcal{E})$  de zero até infinito. Esta é a quantidade da qual estamos calculando a média,  $\mathcal{E}$ , multiplicada pela probabilidade relativa  $P(\mathcal{E})$  com a qual o valor  $\mathcal{E}$  será obtido numa medida da energia. Embaixo: Um gráfico de  $\mathcal{E}P(\mathcal{E})$ . A área sob essa curva dá o valor de  $\bar{\mathcal{E}}$ .

de  $P(\mathcal{E})$ , para um caso no qual  $\Delta\mathcal{E} \ll kT$ . Neste caso, o resultado obtido é  $\bar{\mathcal{E}} \approx kT$ . Ou seja, obtém-se um valor essencialmente igual ao resultado clássico, já que o intervalo  $\Delta\mathcal{E}$  é muito pequeno comparado ao intervalo de 0 a  $kT$  no qual  $P(\mathcal{E})$  varia de forma significativa; neste caso não faz nenhuma diferença fundamental se  $\mathcal{E}$  é discreta ou contínua. A parte do meio da figura 1-10 ilustra o caso no qual  $\Delta\mathcal{E} \approx kT$ . Aqui encontramos  $\bar{\mathcal{E}} < kT$ , porque a maioria dos entes têm energia  $\mathcal{E} = 0$ , já que  $P(\mathcal{E})$  tem um valor muito pequeno para o primeiro valor possível não nulo  $\Delta\mathcal{E}$ , de forma que  $\mathcal{E} = 0$  domina o cálculo do valor médio de  $\mathcal{E}$ , e obtém-se um resultado menor. O efeito do fato de  $\mathcal{E}$  ser discreto é visto mais claramente, no entanto, na parte de baixo da figura 1-10, que ilustra um caso no qual  $\Delta\mathcal{E} \gg kT$ . Neste caso, a probabilidade de encontrarmos um ente com qualquer dos valores de energia possíveis maior que zero é desprezível, já que  $P(\mathcal{E})$  é extremamente pequeno para todos esses valores, e o resultado obtido é  $\bar{\mathcal{E}} \ll kT$ .

Resumindo, Planck descobriu que ele poderia obter  $\bar{\mathcal{E}} \approx kT$  quando a diferença entre energias sucessivas  $\Delta\mathcal{E}$  for pequena, e  $\bar{\mathcal{E}} \approx 0$  quando  $\Delta\mathcal{E}$  é grande. Como ele precisava obter o

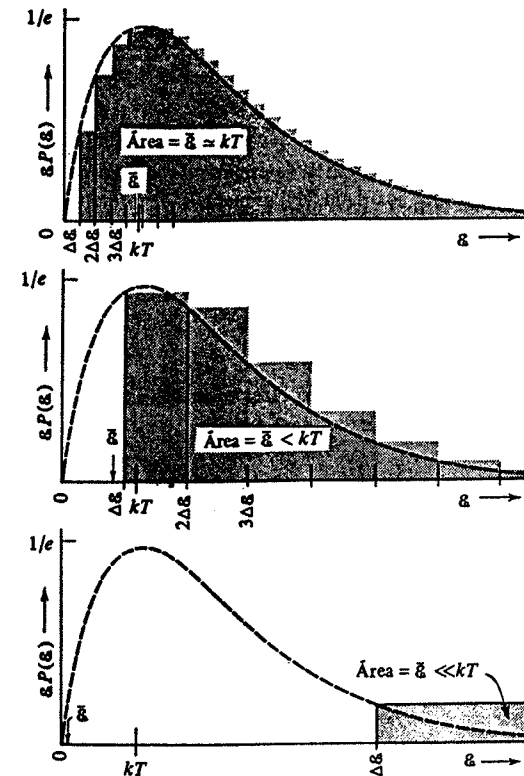


FIGURA 1-10. Ao alto: Se a energia  $\mathcal{E}$  não é uma variável contínua, mas sim restrita a valores discretos  $0, \Delta\mathcal{E}, 2\Delta\mathcal{E}, 3\Delta\mathcal{E}, \dots$ , como indicado pelos traços no eixo  $\mathcal{E}$  da figura, a integral utilizada para o cálculo do valor médio  $\bar{\mathcal{E}}$  deve ser substituída por uma soma. O valor médio é então uma soma das áreas dos retângulos, cada um de largura  $\Delta\mathcal{E}$ , e com alturas dadas pelo valor possível de  $\mathcal{E}$  multiplicado pelo valor de  $P(\mathcal{E})$  no começo de cada intervalo. Nesta figura,  $\Delta\mathcal{E} \ll kT$ , e como as energias possíveis estão bastante próximas, a área de todos os retângulos não difere quase da área sob a curva suave. Portanto o valor médio  $\bar{\mathcal{E}}$  é quase igual a  $kT$ , o valor obtido na figura 1-9. Meio:  $\Delta\mathcal{E} \approx kT$ , e  $\bar{\mathcal{E}}$  tem um valor menor do que no caso da figura de cima. Embaixo:  $\Delta\mathcal{E} \gg kT$ , e  $\bar{\mathcal{E}}$  é mais reduzido ainda. Nas três figuras os retângulos mostram a contribuição para a área total de  $\mathcal{E}P(\mathcal{E})$ , para cada energia possível. O retângulo para  $\mathcal{E} = 0$  tem, é claro, sempre, altura zero. Isto causa um efeito bastante grande na área total, se as larguras dos retângulos são grandes.

primeiro resultado para baixos valores da frequência  $\nu$ , e o segundo para grandes valores de  $\nu$ , ele obviamente precisava fazer de  $\Delta\mathcal{E}$  uma função crescente de  $\nu$ . Alguns cálculos lhe mostraram que se poderia tomar a relação mais simples possível entre  $\Delta\mathcal{E}$  e  $\nu$  com essa propriedade. Isto é, ele supôs que essas grandezas fossem proporcionais

$$\Delta\mathcal{E} \propto \nu \quad (1-24)$$

Escreto na forma de uma equação em vez de uma proporcionalidade, temos

$$\Delta \mathcal{E} = h\nu \quad (1-25)$$

onde  $h$  é a constante de proporcionalidade.

Cálculos posteriores permitiram a Planck determinar o valor da constante  $h$ , obtendo o valor que ajustava melhor sua teoria aos dados experimentais. O valor por ele obtido estava bem próximo do valor atualmente aceito

$$h = 6,63 \times 10^{-34} \text{ joule-s}$$

Esta constante, muito famosa, é chamada *constante de Planck*.

A fórmula obtida por Planck para  $\bar{\mathcal{E}}$ , ao fazer o cálculo da soma de forma análoga ao da integral em (1-21), e que obteremos no exemplo 1-4, é

$$\bar{\mathcal{E}}(\nu) = \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1} \quad (1-26)$$

como  $e^{h\nu/kT} \rightarrow 1 + h\nu/kT$  quando  $h\nu/kT \rightarrow 0$ , vemos que  $\bar{\mathcal{E}}(\nu) \rightarrow kT$  neste limite, como é previsto por (1-18). No limite  $h\nu/kT \rightarrow \infty$ ,  $e^{h\nu/kT} \rightarrow \infty$ , e  $\bar{\mathcal{E}}(\nu) \rightarrow 0$ , de acordo com a previsão de (1-19).

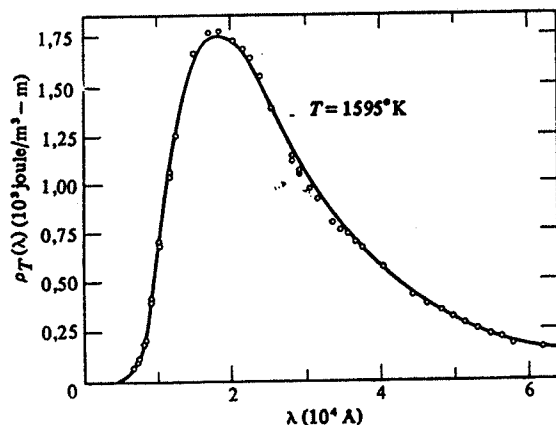


FIGURA 1-11. A previsão de Planck para a densidade de energia (linha sólida) comparada aos resultados experimentais (círculos) para a densidade de energia de um corpo negro. Os dados foram divulgados por Coblentz em 1916 e foram obtidos para uma temperatura de 1595°K. O autor observou em seu artigo que, após traçar as curvas da energia espectral resultantes de suas medidas, "devido ao cansaço da vista, foi impossível nos meses seguintes dar atenção à análise dos dados". Os dados, quando finalmente analisados, levaram a um valor de  $6,57 \times 10^{-34}$  joule-s para a constante de Planck.

A fórmula que ele imediatamente obteve para a densidade de energia do espectro do corpo negro, usando esse resultado para  $\bar{\mathcal{E}}(\nu)$  em vez do valor clássico  $\bar{\mathcal{E}} = kT$ , é

$$\rho_T(\nu) d\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1} d\nu \quad (1-27)$$

Este é o *espectro de corpo negro de Planck*. A figura 1-11 mostra uma comparação do resultado da teoria de Planck (expresso em termos de comprimento de onda) com os resultados experimentais para uma temperatura  $T = 1595^\circ\text{K}$ . Os resultados experimentais estão em total acordo com a fórmula de Planck, para qualquer temperatura.

Devemos lembrar que Planck não alterou a distribuição de Boltzmann. "Tudo" que ele fez foi tratar a energia das ondas estacionárias eletromagnéticas, oscilando senoidalmente com o tempo, como grandeza discreta em vez de contínua.

#### EXEMPLO 1-4

Obter a expressão de Planck para a energia média  $\bar{\mathcal{E}}$  e também para o espectro de corpo negro. A quantidade  $\bar{\mathcal{E}}$  é calculada a partir da razão entre as somas

$$\bar{\mathcal{E}} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{E} P(\mathcal{E})}{\sum_{n=0}^{\infty} P(\mathcal{E})}$$

análoga à razão entre as integrais em (1-21). Deve-se usar somas porque, com o postulado de Planck, a energia  $\mathcal{E}$  se torna uma variável discreta, que assume apenas os valores  $\mathcal{E} = 0, h\nu, 2h\nu, 3h\nu, \dots$ . Isto é,  $\mathcal{E} = nh\nu$ , onde  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ . Substituindo-se esta expressão na distribuição de Boltzmann  $P(\mathcal{E}) = e^{-\mathcal{E}/kT}$ , temos

$$\bar{\mathcal{E}} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{nh\nu}{kT} e^{-nh\nu/kT}}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{kT} e^{-nh\nu/kT}} = kT \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n\alpha e^{-n\alpha}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\alpha}} \quad \text{onde } \alpha = \frac{h\nu}{kT}$$

Isto, por sua vez, pode ser calculado mais facilmente se notarmos que

$$-\alpha \frac{d}{d\alpha} \ln \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\alpha} = \frac{-\alpha \frac{d}{d\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\alpha}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\alpha}} = \frac{-\sum_{n=0}^{\infty} \alpha e^{-n\alpha}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\alpha}} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n\alpha e^{-n\alpha}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\alpha}}$$

de forma que

$$\bar{\mathcal{E}} = kT \left( -\alpha \frac{d}{d\alpha} \ln \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\alpha} \right) = -h\nu \frac{d}{d\alpha} \ln \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\alpha}$$



Mas

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\alpha} = 1 + e^{-\alpha} + e^{-2\alpha} + e^{-3\alpha} + \dots$$

$$= 1 + X + X^2 + X^3 + \dots$$

onde  $X = e^{-\alpha}$

e

$$(1 - X)^{-1} = 1 + X + X^2 + X^3 + \dots$$

de forma que

$$\begin{aligned} \bar{\epsilon} &= -h\nu \frac{d}{d\alpha} \ln(1 - e^{-\alpha})^{-1} \\ &= \frac{-h\nu}{(1 - e^{-\alpha})^{-1}} (-1)(1 - e^{-\alpha})^{-2} e^{-\alpha} \\ &= \frac{h\nu e^{-\alpha}}{1 - e^{-\alpha}} = \frac{h\nu}{e^{\alpha} - 1} = \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1} \end{aligned}$$

Obtivemos (1-26) para a energia média de uma onda estacionária eletromagnética de frequência  $\nu$ . Multiplicando essa expressão por (1-12), o número  $N(\nu) d\nu$  de ondas que têm esta frequência, obtido no exemplo 1-3, obtemos imediatamente o espectro de corpo negro de Planck, (1-27). ▲

#### EXEMPLO 1-5

É conveniente, na análise de resultados experimentais, como na figura 1-11, expressarmos o espectro de corpo negro de Planck em função do comprimento de onda  $\lambda$  em vez da frequência  $\nu$ . Obter  $\rho_T(\lambda)$ , a expressão para o espectro de Planck em função do comprimento de onda, a partir de  $\rho_T(\nu)$ , a expressão para o espectro em função da frequência. A quantidade  $\rho_T(\lambda)$  é definida a partir da igualdade  $\rho_T(\lambda) d\lambda = -\rho_T(\nu) d\nu$ .

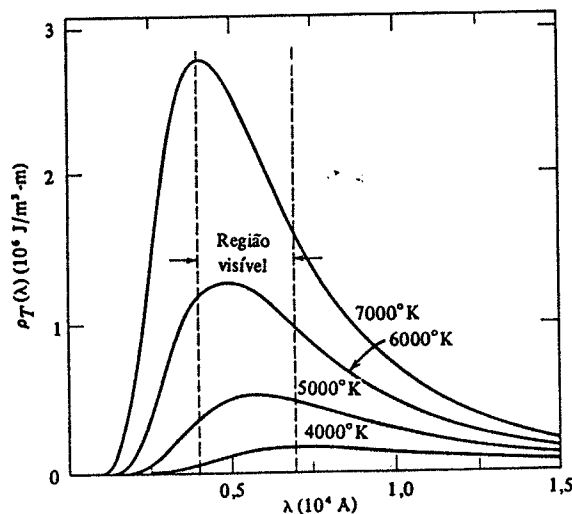


FIGURA 1-12. A densidade de energia de Planck da radiação de corpo negro a várias temperaturas em função do comprimento de onda. Observe que o comprimento de onda no qual a curva atinge seu máximo decresce à medida que a temperatura cresce.

O sinal menos indica que, embora  $\rho_T(\lambda)$  e  $\rho_T(\nu)$  sejam ambos positivos,  $d\nu$  e  $d\lambda$  têm sinais opostos. (Um acréscimo na frequência causa um decréscimo correspondente no comprimento de onda.)

Da relação  $\nu = c/\lambda$  temos  $d\nu = -(c/\lambda^2) d\lambda$ , ou  $d\nu/d\lambda = -(c/\lambda^2)$ , de forma que

$$\rho_T(\lambda) = -\rho_T(\nu) \frac{d\nu}{d\lambda} = \rho_T(\nu) \frac{c}{\lambda^2}$$

Se fizermos agora  $\nu = c/\lambda$  em (1-27) obtemos

$$\rho_T(\lambda) d\lambda = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{d\lambda}{e^{hc/\lambda kT} - 1} \quad (1-28)$$

Na figura 1-12 mostramos um gráfico de  $\rho_T(\lambda) \times \lambda$  para várias temperaturas diferentes. A mudança da "cor vermelha" para a "cor branca" e para a "cor azul" da radiação térmica, à medida que a temperatura aumenta, se torna evidente quando estudamos a distribuição de energia radiante em função do comprimento de onda para temperaturas crescentes. ▲

A lei de Stefan, (1-2), e a lei do deslocamento de Wien, (1-3), podem ser obtidas a partir da fórmula de Planck. Ajustando-as aos resultados experimentais, podemos determinar os valores das constantes  $h$  e  $k$ . A lei de Stefan é obtida integrando-se a lei de Planck sobre todo o espectro de comprimento de onda. Obtém-se que a radiancia é proporcional à quarta potência da temperatura, sendo a constante de proporcionalidade  $2\pi^5 k^4 / 15c^2 h^3$  identificada com  $\sigma$ , a constante de Stefan, que tem o valor determinado experimentalmente de  $5,67 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2 \cdot ^\circ\text{K}^4$ . A lei do deslocamento de Wien é obtida fazendo-se  $d\rho(\lambda)/d\lambda = 0$ . Encontramos  $\lambda_{\text{max}} T = 0,2014 hc/k$ , e identificamos o lado direito desta equação com a constante de Wien, determinada experimentalmente como sendo  $2,898 \times 10^{-3} \text{ m} \cdot ^\circ\text{K}$ . Usando-se esses dois valores medidos, e supondo-se um valor para a velocidade da luz  $c$ , podemos calcular os valores de  $h$  e  $k$ . De fato, isto foi feito por Planck, estando os valores obtidos bastante próximos dos obtidos posteriormente por outros métodos.

#### 1-5 O USO DA LEI DA RADIAÇÃO DE PLANCK NA TERMOMETRIA

A radiação emitida por um corpo quente pode ser usada para medir sua temperatura. Se a radiação total é usada, então, a partir da lei de Stefan-Boltzmann, sabemos que a razão entre as energias emitidas pelas duas fontes é igual à razão entre as quartas potências das temperaturas. No entanto, é difícil medir a radiação total da maioria das fontes, de forma que medimos, em vez dela, a radiancia sobre uma faixa finita de comprimentos de onda. Aqui utilizamos a lei de radiação de Planck, que dá a radiancia em função da temperatura e do comprimento de onda. Para radiação monocromática de comprimento de onda  $\lambda$ , a razão entre as intensidades espectrais emitidas por fontes a  $T_2$  °K e a  $T_1$  °K é dada pela lei de Planck como

$$\frac{e^{hc/\lambda kT_1} - 1}{e^{hc/\lambda kT_2} - 1}$$

Se  $T_1$  é tomada como temperatura de referência padrão, então  $T_2$  pode ser determinada relativamente a este valor, a partir desta expressão, medindo-se a razão experimentalmente. Esse procedimento é utilizado na Escala Prática de Temperatura Internacional, onde o ponto de fusão normal do ouro ( $1068^\circ\text{C}$ ) é tomado como o ponto fixo padrão. Isto é, o *pirômetro ótico* é ajustado de forma a comparar a radiancia espectral de um corpo negro a temperatura desconhecida  $T > 1068^\circ\text{C}$  com um corpo negro no ponto de fusão do ouro. Na prática, para levar em conta que a maioria das fontes não são corpos negros e que uma faixa espectral finita é usada em vez de radiação monocromática, devemos estender a teoria e adotar procedimentos especiais.

A maioria dos pirômetros óticos usa o olho como um detector e necessita de uma larga faixa espectral, de forma que haja suficiente energia para que o olho enxergue. O tipo mais simples e mais preciso de ins-

trumento usado para temperaturas acima do ponto de fusão do ouro é o pirômetro ótico de filamento (ver figura 1-13). A luz da fonte cuja temperatura queremos medir é focalizada sobre o filamento da lâmpada do pirômetro, e varia-se a corrente na lâmpada até que o filamento pareça sumir na imagem da fonte. Uma calibração cuidadosa e potenciômetros de precisão asseguram uma medida precisa da temperatura.

Um exemplo particularmente interessante na categoria geral da termometria usando a radiação de corpo negro foi descoberto por Dicke, Penzias e Wilson na década de 1950. Usando um radiotelescópio que operava em um campo de comprimentos de onda de alguns milímetros a alguns centímetros, eles descobriram que o espectro de corpo negro da radiação eletromagnética, com uma temperatura característica de aproximadamente 3°K, está atingindo a Terra com igual intensidade em todas as direções. A uniformidade em direção indica que a radiação preenche o universo uniformemente. Os astrofísicos consideram essas medidas como

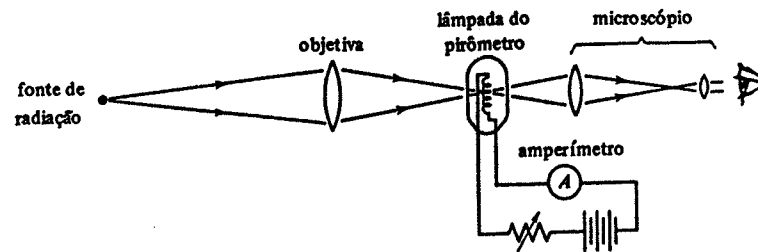


FIGURA 1-13. Diagrama esquemático de um pirômetro ótico.

uma forte evidência em favor da chamada "teoria do big bang", segundo a qual o universo estaria na forma de uma bola de fogo muito densa e quente de partículas e radiação há aproximadamente  $10^{10}$  anos. Devido à expansão subsequente e ao efeito Doppler, esperar-se-ia que a temperatura da radiação estivesse atualmente da ordem do valor observado de 3°K.

## 1-6 O POSTULADO DE PLANCK E SUAS IMPLICAÇÕES

A contribuição de Planck pode ser colocada na forma de um postulado, como se segue:

*Qualquer ente físico com um grau de liberdade cuja "coordenada" é uma função senoidal do tempo (isto é, executa oscilações harmônicas simples) pode possuir apenas energias totais  $\mathcal{E}$  que satisfaçam à relação*

$$\mathcal{E} = nh\nu \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

onde  $\nu$  é a frequência da oscilação, e  $h$  uma constante universal.

A palavra coordenada é usada em seu sentido geral, significando qualquer quantidade que descreva a condição instantânea do ente. São exemplos o comprimento de uma mola, a posição angular de um pêndulo e a amplitude de uma onda. Em todos esses exemplos as coordenadas são também funções senoidais do tempo.

Um diagrama de níveis de energia, como é mostrado na figura 1-14, nos dá uma forma conveniente de ilustrar o comportamento de um ente regido por esse postulado, e também é útil para ressaltar a diferença entre esse comportamento e o que seria esperado com base na física clássica. Em um diagrama desse tipo, indicamos por uma linha horizontal cada um dos possíveis estados de energia. A distância de uma linha à linha de energia zero é proporcional à energia to-

\* A expressão *big bang* poderia ser traduzida como "grande explosão". Preferimos, entretanto, manter a expressão original, que é de uso corrente entre os físicos brasileiros que se referem aos modelos e teorias do origem do universo, segundo os quais teria havido uma tal "explosão" nos primórdios da formação do universo. Esta "explosão" justificaria o fato atualmente observado de que o universo está em expansão. (N. do T.)

tal à qual ela corresponde. Como o ente pode ter qualquer energia de zero a infinito, de acordo com a física clássica, o diagrama de níveis de energia clássico consiste de um contínuo de linhas que se estendem para cima a partir de zero. No entanto, o ente, executando oscilações harmônicas simples, pode ter apenas as energias totais discretas  $\mathcal{E} = 0, h\nu, 2h\nu, 3h\nu, \dots$ , caso ele obedea ao postulado de Planck. Isto é indicado pelo conjunto discreto de linhas em seu diagrama de níveis de energia. A energia do ente que obedece ao postulado de Planck é dita *quantizada*, os estados de energia possíveis são ditos *estados quânticos*, e o inteiro  $n$  é dito *número quântico*.

É possível que o estudante se recorde de alguns sistemas físicos cujo comportamento parece estar em claro desacordo com o postulado de Planck. Por exemplo, um pêndulo comum executa oscilações harmônicas simples, e mesmo assim esse sistema certamente parece ser capaz de possuir um conjunto contínuo de energia. Antes de aceitarmos esse argumento, entretanto, faremos algumas estimativas numéricas simples relacionadas com este sistema.

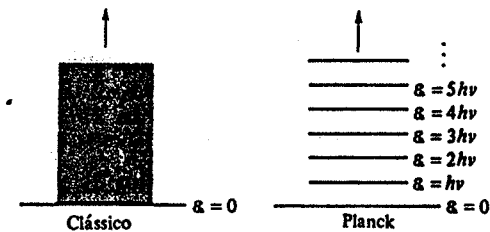


FIGURA 1-14. À esquerda: As energias possíveis para um sistema clássico, oscilando senoidalmente com frequência  $\nu$ , são distribuídas continuamente. À direita: As energias possíveis, de acordo com o postulado de Planck, são distribuídas discretamente, já que podem assumir apenas os valores  $nh\nu$ . Dizemos que a energia é quantizada,  $n$  sendo o número quântico de um estado quântico possível.

### EXEMPLO 1-6

Um pêndulo, consistindo de uma massa de 0,01 kg, está suspenso por uma corda de 0,1 m de comprimento. Façamos a amplitude de sua oscilação tal que a corda em suas posições extremas faça um ângulo de 0,1 rad com a vertical. A energia do pêndulo diminui, por exemplo, devido a efeitos de atrito. A diminuição de energia observada é contínua ou descontínua?

A frequência de oscilação do pêndulo é

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{9,8 \text{ m/s}^2}{0,1 \text{ m}}} = 1,6/\text{s}$$

A energia do pêndulo é igual à sua energia potencial máxima

$$mgh = mgl(1 - \cos \theta) = 0,01 \text{ kg} \times 9,8 \text{ m/s}^2 \times 0,1 \text{ m} \times (1 - \cos 0,1) \\ = 5 \times 10^{-5} \text{ joule}$$

A energia do pêndulo é quantizada, de forma que variações de energia ocorrem em saltos de valor  $\Delta E = h\nu$ ; mas

$$\Delta E = h\nu = 6,63 \times 10^{-34} \text{ joule-s} \times 1,6/\text{s} = 10^{-33} \text{ joule}$$

enquanto que  $E = 5 \times 10^{-5} \text{ joule}$ . Portanto,  $\Delta E/E = 2 \times 10^{-29}$ . Logo, para observarmos que a diminuição na energia é discreta, precisamos medi-la com precisão maior do que duas partes em  $10^{29}$ . É evidente que mesmo o equipamento experimental mais sensível é totalmente incapaz de ter esta resolução em energia. ▲

Concluimos que experiências envolvendo um pêndulo comum não podem determinar se o postulado de Planck é válido ou não. O mesmo é válido para experiências em todos os outros sistemas mecânicos macroscópicos. O fato de  $h$  ser extremamente pequeno faz com que os níveis de energia destes sistemas estejam tão próximos uns dos outros que se torna impossível distingui-los de uma distribuição contínua. Sem dúvida,  $h$  poderia ser tomado como zero para sistemas clássicos, e, de fato, uma forma de reduzir as fórmulas quânticas ao seu limite clássico é fazer  $h \rightarrow 0$  nessas fórmulas. Apenas quando consideramos sistemas nos quais  $v$  é muito grande e/ou  $\lambda$  é tão pequeno que  $\Delta\epsilon = h\nu$  é da ordem de  $\epsilon$  é que estamos em condições de testar o postulado de Planck. Exemplos são, evidentemente, as ondas estacionárias de alta frequência na radiação de corpo negro. Muitos outros exemplos serão considerados nos próximos capítulos.

## 1-7 UM POUCO DE HISTÓRIA DA FÍSICA QUÂNTICA

Em sua forma original, o postulado de Planck não era tão abrangente quanto na forma em que o expusimos. O trabalho inicial de Planck foi feito tratando, detalhadamente, o comportamento de elétrons nas paredes do corpo negro e seu acoplamento ou interação com a radiação eletromagnética dentro da cavidade. Este acoplamento leva ao mesmo fator  $v^2$  que obtivemos em (1-12) se partirmos de argumentos mais gerais, devidos a Rayleigh e Jeans. Através deste acoplamento, Planck associou a energia a uma dada frequência da radiação de corpo negro à energia de um elétron na parede oscilando senoidalmente com a mesma frequência, e ele postulou apenas que a energia da partícula oscilante é quantizada. Somente mais tarde foi que Planck aceitou a idéia de que as próprias ondas eletromagnéticas eram quantizadas, e o postulado foi ampliado de forma a incluir qualquer ente cuja coordenada oscilasse senoidalmente.

Em princípio, Planck não estava certo se sua introdução da constante  $h$  era apenas um artifício matemático ou algo de significado físico mais profundo. Numa carta a R. W. Wood, Planck chamou seu postulado limitado de "um ato de desespero". "Eu sabia", escreveu, "que o problema (do equilíbrio entre matéria e radiação) é de fundamental significado para a física; eu sabia a fórmula que reproduz a distribuição de energia no espectro normal; uma interpretação teórica tinha que ser encontrada a qualquer custo, não interessando quão alto". Por mais de uma década, Planck tentou encaixar a idéia quântica dentro da teoria clássica. Em cada tentativa, ele parecia recuar de sua ousadia original, mas sempre gerava novas idéias e técnicas que a teoria quântica mais tarde adotou. Aparentemente, o que finalmente o convenceu da correção e do profundo significado de sua hipótese quântica foi o fato dessa hipótese levar a uma formulação mais exata da terceira lei da termodinâmica e do conceito estatístico de entropia.

Foi durante esse período de dúvida que Planck foi o editor do jornal alemão de pesquisa *Annalen der Physik*. Em 1905, ele recebeu o primeiro artigo de Einstein sobre a relatividade, e defendeu vigorosamente esse trabalho. Depois disso, tornou-se um dos patronos do jovem Einstein em círculos científicos, mas resistiu durante algum tempo às idéias emitidas por Einstein sobre a teoria quântica da radiação, que mais tarde confirmaram e estenderam o próprio trabalho de Planck. Einstein, cuja profunda visão do eletromagnetismo e da mecânica estatística talvez fosse inigualável nessa época, viu como resultado do trabalho de Planck a necessidade de uma reformulação completa na estatística e eletromagnetismo clássicos. Ele formulou previsões e interpretações de muitos fenômenos físicos que foram mais tarde notavelmente confirmados pelas experiências. No próximo capítulo, vamos voltar a um destes fenômenos e seguir um outro caminho em direção à mecânica quântica.

## QUESTÕES

1. Um corpo negro sempre aparenta ser negro? Explique o termo corpo negro.
2. Cavidades formadas por carvões em brasa parecem mais brilhantes que os próprios carvões. É a temperatura em tais cavidades apreciavelmente maior do que a temperatura da superfície de um carvão incandescente exposto?
3. Se olharmos para o interior de uma cavidade cujas paredes são mantidas a uma temperatura constante, os detalhes do interior não são visíveis. Explique.
4. A relação  $R_T = \sigma T^4$  é exata para corpos negros e vale para todas as temperaturas. Por que essa relação não é usada como base para uma definição de temperatura a, por exemplo,  $100^\circ\text{C}$ ?
5. Um pedaço de metal brilha com uma cor vermelha brilhante a  $1100^\circ\text{K}$ . Nesta mesma temperatura, no entanto, um pedaço de quartzo absolutamente não brilha. Explique. (Sugestão: o quartzo é transparente à luz visível.)
6. Faça uma lista das funções de distribuição usadas normalmente nas ciências sociais (por exemplo, distribuição de famílias em relação à renda). Em cada caso, especifique se a variável cuja distribuição é descrita é discreta ou contínua.
7. Em (1-4), que relaciona a radiancia espectral com a densidade de energia, que dimensões deveria ter a constante de proporcionalidade?
8. Qual é a origem da catástrofe do ultravioleta?
9. A lei da equipartição da energia requer que o calor específico dos gases seja independente da temperatura, o que não está de acordo com a experiência. Vimos que essa lei conduz à lei de radiação de Rayleigh-Jeans, que também não está de acordo com a experiência. Como você pode relacionar nestes dois casos a não validade da lei da equipartição?
10. Compare as definições e as dimensões da radiancia espectral  $R_T(\nu)$ , da radiancia  $R_T$  e a densidade de energia  $\rho_T(\nu)$ .
11. Por que se usa normalmente um pirômetro ótico para temperaturas acima do ponto de fusão do ouro e não abaixo dele? Quais objetos têm tipicamente suas temperaturas medidas dessa forma?
12. Há grandezas quantizadas na física clássica? É a energia quantizada na física clássica?
13. Faz sentido falar de quantização da carga em física? Em que isto é diferente da quantização da energia?
14. As partículas elementares parecem ter um conjunto discreto de massas de repouso. Pode-se encarar esse fato como uma quantização da massa?
15. Em muitos sistemas clássicos as frequências possíveis são quantizadas. Cite alguns desses sistemas. Nestes casos a energia também é quantizada?
16. Mostre que a constante de Planck tem dimensões de momento angular. Isto necessariamente sugere que o momento angular é quantizado?
17. Para que os efeitos quânticos fossem perceptíveis no dia-a-dia de nossas vidas, qual deveria ser a ordem de grandeza mínima de  $h$ ?

18. O que é que a radiação de corpo negro universal de  $3^\circ\text{K}$  nos diz, se é que diz algo, sobre a temperatura do espaço exterior?
19. A teoria de Planck sugere estados de energia atômica quantizados?
20. Discuta o fato memorável de que a descoberta de que a energia é discreta ter sido feita pela primeira vez na análise de um espectro contínuo emitido por átomos interagindo em um sólido, em vez de ter sido feita na análise de um espectro discreto tal como o emitido por um átomo isolado em um gás.

## PROBLEMAS

1. Em que comprimento de onda um radiador de cavidade a  $6000^\circ\text{K}$  irradia mais por unidade de comprimento de onda?
2. Mostre que a constante de proporcionalidade em (1-4) é  $4/c$ . Isto é, mostre que a relação entre a radiação espectral  $R_T(\nu)$  e a densidade de energia  $\rho_T(\nu)$  é  $R_T(\nu) = (c/4)\rho_T(\nu) dv$ .
3. Considere duas cavidades de material e formato arbitrários, as duas a uma mesma temperatura  $T$ , ligadas por um tubo estreito no qual podem ser colocados filtros de cor (supostos ideais) que vão permitir a passagem apenas de radiação com uma dada frequência  $\nu$ . (a) Suponha que em uma certa frequência  $\nu'$ ,  $\rho_T(\nu') dv$  para a cavidade 1 seja maior que  $\rho_T(\nu') dv$  para a cavidade 2. Um filtro que permite a passagem apenas da frequência  $\nu'$  é colocado no tubo que liga as duas cavidades. Discuta o que vai acontecer em termos de fluxo de energia. (b) O que vai acontecer com as respectivas temperaturas? (c) Mostre que isto violaria a segunda lei da termodinâmica; portanto, prove que todos os corpos negros a uma mesma temperatura devem emitir radiação térmica com o mesmo espectro, independentemente dos detalhes de sua composição.
4. Um radiador de cavidade a  $6000^\circ\text{K}$  tem um orifício de  $0,10\text{ mm}$  de diâmetro feito em sua parede. Ache a potência irradiada através do orifício no intervalo de comprimentos de onda entre  $5500\text{ \AA}$  e  $5510\text{ \AA}$ . (Sugestão: Veja problema 2.)
5. (a) Supondo que a temperatura da superfície do sol é  $5700^\circ\text{K}$ , use a lei de Stefan, (1.2), para determinar a massa de repouso perdida por segundo pelo sol sob forma de radiação. Considere o diâmetro do sol como sendo  $1,4 \times 10^9\text{ m}$ . (b) Que fração da massa de repouso do sol é perdida a cada ano sob forma de radiação eletromagnética? Considere a massa de repouso do sol sendo  $2,0 \times 10^{30}\text{ kg}$ .
6. Em uma explosão termonuclear, a temperatura no centro da explosão é momentaneamente  $10^7^\circ\text{K}$ . Ache o comprimento de onda para o qual a radiação emitida é máxima.
7. A uma dada temperatura,  $\lambda_{\text{max}} = 6500\text{ \AA}$  para uma cavidade de corpo negro. Qual será  $\lambda_{\text{max}}$  se a temperatura nas paredes da cavidade for aumentada de forma que a taxa de emissão de radiação espectral seja duplicada?
8. A que comprimento de onda o corpo humano emite sua radiação térmica máxima? Apresente uma lista das hipóteses que você fez para chegar a esta resposta.
9. Supondo que  $\lambda_{\text{max}}$  está no infravermelho próximo para a radiação térmica de cor vermelha e no ultravioleta próximo para a radiação térmica de cor azul, a aproximadamente que temperatura na lei do deslocamento de Wien corresponde a radiação térmica de cor vermelha? E a de cor azul?
10. A taxa média de radiação solar incidente por unidade de área sobre a superfície da Terra é  $0,485\text{ cal/cm}^2\text{-min}$  (ou  $355\text{ W/m}^2$ ). (a) Explique a consistência entre esse número e a constante solar (a energia solar que incide segundo a normal por unidade de tempo sobre uma unidade de área da superfície da Terra) cujo valor é  $1,94\text{ cal/cm}^2\text{-min}$  (ou  $1340\text{ W/m}^2$ ). (b) Considere a Terra como sendo um corpo negro irradiando energia para o espaço segundo essa mesma taxa. Qual seria a temperatura de sua superfície sob tais circunstâncias?