7a. Nichtlineare Optimierung

Quadratische Programmierung

Optimierung SoSe 2020

Dr. Alexey Agaltsov

Plan

- Beispiel: Portfoliotheorie von Markowitz
- Strategie der aktiven Mengen

Beispiel: Portfolio-Optimierung

n Anlagemöglichkeiten $A_1, \dots, A_n$

Aktien, Renten, ETFs

Für jede Anlagemöglichkeit A_i seien:

- x_i investierter in A_i Anteil des Vermögens
- Z_i prozentualer Gewinn von A_i (Zufallsvariable)

Portfolio-Gewinn:

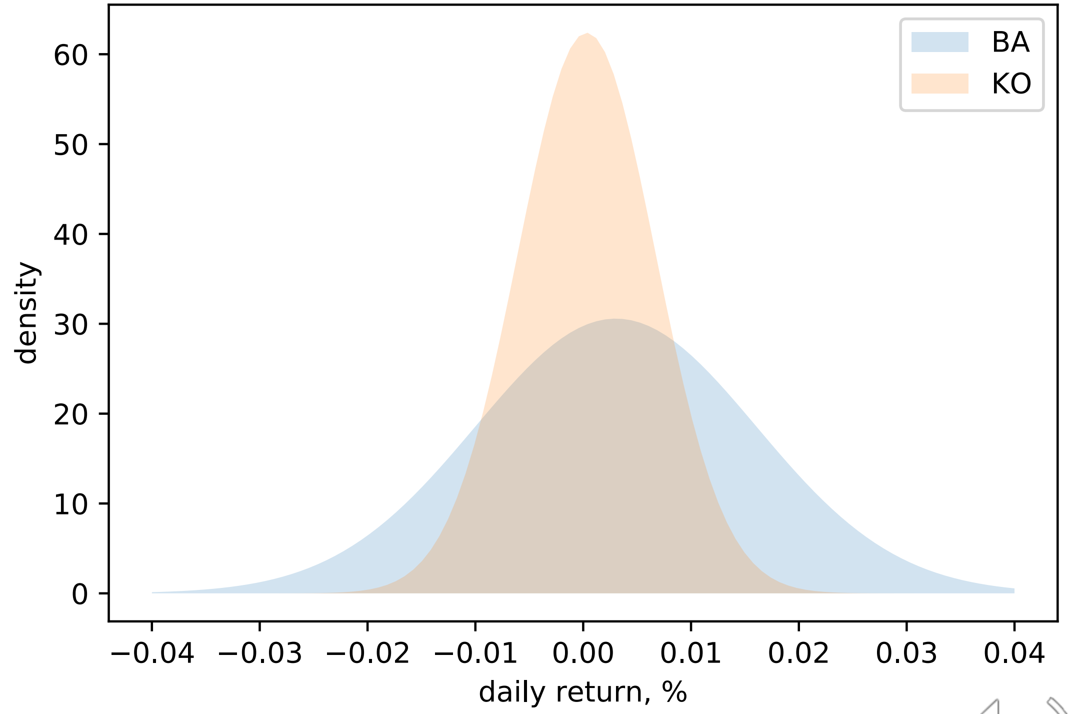
$$Y = x_1 Z_1 + \cdots + x_n Z_n$$

Zielfunktion

Zwei vernünftige jedoch nicht unabhängige Ziele:

$$\mathbb{E}[Y] \longrightarrow max$$

$$\mathrm{Var}[Y] \longrightarrow min$$



Geeigneter Ausgleich:

$$\mathbb{E}[Y] - \underbrace{\kappa}_{\text{Risiko-Toleranz-Parameter}}\mathrm{Var}[Y] \longrightarrow max$$

Portfolio-Optimierung

$$\mu_i := \mathbb{E}[Z_i], \quad \mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)^T$$

$$V_{ij} := \mathrm{Cov}(Z_i, Z_j), \quad \boldsymbol{V} = (V_{ij})$$

Erinnerung. $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}X)(Y - \mathbb{E}Y)]$

$$= \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$$

$$\mathrm{Var}[X] = \mathrm{Cov}(X,X)$$

Lemma 7.1.
1. $\mathbb{E}[Y] = \mu^T x, \quad x = (x_1, \dots, x_n)^T$
2. $\mathrm{Var}[Y] = x^T \boldsymbol{V} x$

Beweis: zu 1

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[Y] &= \mathbb{E}[x_1 Z_1 + \cdots + x_n Z_n] \\
&= x_1 \mathbb{E}[Z_1] + \cdots + x_n \mathbb{E}[Z_n] \\
&= x_1 \mu_1 + \cdots + x_n \mu_n = \mu^T x
\end{aligned}
$$

Beweis: zu 2

$$
\begin{aligned}
Var[Y] &= \mathbb{E}[Y^2] - \mathbb{E}[Y]^2 \\
&= \mathbb{E}[(x_1 Z_1 + \cdots + x_n Z_n)^2] - \mathbb{E}[x_1 Z_1 + \cdots + x_n Z_n]^2 \\
&= \sum_{i,j} x_i x_j \mathbb{E}\left[Z_i Z_j\right] - \sum_{i,j} x_i x_j \mathbb{E}[Z_i]\mathbb{E}[Z_j] \\
&= \sum_{i,j} x_i x_j \underbrace{Cov[Z_i, Z_j]}_{V_{ij}} = x^T \boldsymbol{V} x
\end{aligned}
$$

Effiziente Portfolios

Portfolio x_* ist effizient falls die folgenden äquivalenten Aussagen gelten:

Es hat die minimale Renditevarianz für gegebene erwartete Rendite

$$\begin{aligned} \text{Minimiere} \quad & x^T \boldsymbol{V} x \ \text{ über } x \in \mathbb{R}^n \\ \text{u.d.N.} \quad & \mu^T x \geq \bar{\mu} \\ & \mathbf{1}^T x = 1 \end{aligned}$$

voll investiertes Portfolio

Es liefert die maximale erwartete Rendite für gegebene Renditevarianz

$$\begin{aligned} \text{Maximiere} \quad & \mu^T x \ \text{ über } x \in \mathbb{R}^n \\ \text{u.d.N.} \quad & x^T \boldsymbol{V} x \leq \bar{\sigma}^2 \\ & \mathbf{1}^T x = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Maximiere} \quad & \mu^T x - \tfrac{\kappa}{2} x^T \boldsymbol{V} x \\ \text{u.d.N.} \quad & \mathbf{1}^T x = 1 \end{aligned}$$

Risiko-Toleranz-Parameter $\kappa > 0$

Minimum-Varianz-Portfolio

- Für $\kappa \to +\infty$ erhalten wir das Minimum-Varianz-Portfolio:

$$\text{Minimiere} \quad \tfrac{1}{2}x^T \boldsymbol{V} x$$
$$\text{u.d.N.} \quad \mathbf{1}^T x = 1$$

$$\mathcal{L}(x,\lambda) = \tfrac{1}{2}x^T \boldsymbol{V} x + \lambda(1 - \mathbf{1}^T x)$$

$$\begin{aligned} \nabla_x \mathcal{L}(x,\lambda) &= \boldsymbol{V}x - \lambda\mathbf{1} = 0 \\ \nabla_\lambda \mathcal{L}(x,\lambda) &= 1 - \mathbf{1}^T x = 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x_* &= \lambda_* \boldsymbol{V}^{-1}\mathbf{1}, \\ \lambda_* &= \frac{1}{\mathbf{1}^T \boldsymbol{V}^{-1}\mathbf{1}} \end{aligned}$$

$$x_* = \frac{\boldsymbol{V}^{-1}\mathbf{1}}{\mathbf{1}^T \boldsymbol{V}^{-1}\mathbf{1}}$$

Effiziente Portfolios

$$\text{Maximiere } \mu^T x - \frac{\kappa}{2} x^T \boldsymbol{V} x$$
$$\text{u.d.N. } \mathbf{1}^T x = 1$$

$$\mathcal{L}(x, \lambda) = \mu^T x - \frac{\kappa}{2} x^T \boldsymbol{V} x + \lambda(1 - \mathbf{1}^T x)$$

$$\begin{aligned} \nabla_x \mathcal{L}(x, \lambda) &= \mu - \kappa \boldsymbol{V} x - \lambda \mathbf{1} = 0 \\ \nabla_\lambda \mathcal{L}(x, \lambda) &= 1 - \mathbf{1}^T x = 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x_* &= \frac{1}{\kappa} \boldsymbol{V}^{-1}(\mu - \lambda_* \mathbf{1}) \\ \lambda_* &= \frac{\mathbf{1}^T \boldsymbol{V}^{-1} \mu - \kappa}{\mathbf{1}^T \boldsymbol{V}^{-1} \mathbf{1}} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Zwei-Fonds-Theorem:

$$x_* = \alpha \frac{\boldsymbol{V}^{-1} \mu}{\mathbf{1}^T \boldsymbol{V}^{-1} \mu} + (1 - \alpha) \frac{\boldsymbol{V}^{-1} \mathbf{1}}{\mathbf{1}^T \boldsymbol{V}^{-1} \mathbf{1}}, \quad \alpha = \frac{1}{\kappa} 1^T V^{-1} \mu$$

Maximum-Sharpe-Ratio-Portfolio *Minimum-Varianz-Portfolio*

Maximum-Sharpe-Ratio-Portfolio

Sharpe-Ratio

Maximiere $\frac{\mu^T x}{\sqrt{x^T \boldsymbol{V} x}}$ über $x \in \mathbb{R}^n$

$\mathbf{1}^T x = 1$

Risikoadjustierte Performance-Maß

$x := \frac{z}{\gamma}$ mit $z^T \mu = 1$ und $\gamma > 0$

Minimiere $z^T \boldsymbol{V} z$ über $z \in \mathbb{R}^n, \gamma \in \mathbb{R}$

u.d.N. $\mathbf{1}^T z = \gamma$

$\mu^T z = 1$

$\gamma > 0$

$$\Rightarrow \gamma_* = \mathbf{1}^T z_*, \quad z_* = \frac{\boldsymbol{V}^{-1} \mu}{\mu^T \boldsymbol{V}^{-1} \mu}$$

$$x_* = \frac{\boldsymbol{V}^{-1} \mu}{\mathbf{1}^T \boldsymbol{V}^{-1} \mu}$$

Plan

- Beispiel: Portfoliotheorie von Markowitz
- Strategie der aktiven Mengen

Quadratisches Programm

$$\text{Minimiere} \quad f(x) = \tfrac{1}{2}x^T Q x - c^T x, \quad Q \in \mathbb{S}^n_{\succ}$$
$$\text{u.d.N.} \quad A_U x \le b_U$$
$$A_G x = b_G$$

- Satz 5.12: x_* ist eine optimale Lösung $\Leftrightarrow \exists \mu_* \in \mathbb{R}^{m_U}, \lambda_* \in \mathbb{R}^{m_G}$ sodass:

$$Q x_* + A_U^T \mu_* + A_G^T \lambda_* = c$$
$$A_U x_* \le b_U, \;\; A_G x_* = b_G \qquad \textit{KKT-Bedingungen}$$
$$\mu_* \ge 0$$
$$(b_U - A_U x_*)^T \mu_* = 0$$

- Man kann x_* durch die Lösung dieses Systems finden

Aktive und inaktive Mengen

- x_* ist eine optimale Lösung $\Leftrightarrow \exists \mathcal{A}_* \subseteq \{1, \dots, m_U\}, \mu_* \in \mathbb{R}^{m_U}, \lambda_* \in \mathbb{R}^{m_G}$:

$$Qx_* + A_U[\mathcal{A}_*, :]^T \mu_*[\mathcal{A}_*] + A_G^T \lambda_* = c$$

$$A_U[\mathcal{A}_*, :]x_* = b_U[\mathcal{A}_*], \quad A_G x_* = b_G$$

$$\mathcal{A}_U[\mathcal{A}_*^c, :]x_* \leq b_U[\mathcal{A}_*^c]$$

$$\mu_*[\mathcal{A}_*] \geq 0, \ \mu_*[\mathcal{A}_*^c] = 0$$

- Also ist $\mathcal{A}_* \subseteq \mathcal{A}(x_*)$, wobei $\mathcal{A}(x_*)$ ist die aktive Menge bei x_*:

$$\mathcal{A}(x_*) = \{i\colon \ A_U[i, :]x_* = b_U[i]\}$$

Einfache Strategie

- x_* ist eine optimale Lösung $\Leftrightarrow \exists \mathcal{A}_* \subseteq \{1, \dots, m_U\}, \mu_* \in \mathbb{R}^{m_U}, \lambda_* \in \mathbb{R}^{m_G}$:

$$\begin{bmatrix} Q & A_U[\mathcal{A}_*,:]^T & A_G^T \\ A_U[\mathcal{A}_*,;] & 0 & 0 \\ A_G & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_* \\ \mu_*[\mathcal{A}_*] \\ \lambda_* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ b_U[\mathcal{A}_*] \\ b_G \end{bmatrix} \quad \textit{Sattelpunktgleichung}$$

$$A_U[\mathcal{A}_*^c,:]x_* \leq b_U[\mathcal{A}_*^c]$$

$$\mu_*[\mathcal{A}_*] \geq 0, \mu_*[\mathcal{A}_*^c] = 0$$

Einfache Strategie

- x_* ist eine optimale Lösung $\Leftrightarrow \exists \mathcal{A}_* \subseteq \{1, \dots, m_U\}, \mu \in \mathbb{R}^{m_U}, \lambda \in \mathbb{R}^{m_G}$:

$$\begin{bmatrix} Q & A_U[\mathcal{A}_*,:]^T & A_G^T \\ A_U[\mathcal{A}_*,;] & 0 & 0 \\ A_G & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_* \\ \mu_*[\mathcal{A}_*] \\ \lambda_* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ b_U[\mathcal{A}_*] \\ b_G \end{bmatrix} \quad \textit{Sattelpunktgleichung}$$

$$A_U[\mathcal{A}_*^c,:]x_* \leq b_U[\mathcal{A}_*^c]$$

$$\mu_*[\mathcal{A}_*] \geq 0, \mu_*[\mathcal{A}_*^c] = 0$$

- Einfache Strategie:

1. Wähle $\mathcal{A} \subseteq \{1, \dots, m_U\}$ und bestimme $x, \mu[\mathcal{A}], \lambda$ als eine Lösung der Sattelpunktgleichung
2. Ist $A_U[\mathcal{A}^c,:]x \leq b_U[\mathcal{A}^c]$ und $\mu[\mathcal{A}] \geq 0$, so ist x optimal

Sattelpunktgleichung

$$\begin{bmatrix} Q & A_U[\mathcal{A}_*,:]^T & A_G^T \\ A_U[\mathcal{A}_*,;] & 0 & 0 \\ A_G & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_* \\ \mu_*[\mathcal{A}_*] \\ \lambda_* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ b_U[\mathcal{A}_*] \\ b_G \end{bmatrix}$$

- Hat $\begin{bmatrix} A_U[\mathcal{A},:] \\ A_G \end{bmatrix}$ vollen Zeilenrang und $Q \in \mathbb{S}^n_>$, so gibt es eine eindeutige Lösung nach Aufgabe 5.6

- In diesem Fall gibt es eine analytische Formel für die optimale Lösung

$$x_* = Q^{-1}c + Q^{-1}A_U[\mathcal{A}_*,:]^T\mu_*[\mathcal{A}_*] + Q^{-1}A_G^T\lambda_*$$

Setze x_* in 2. und 3. Gleichungen ein um $\mu_*[\mathcal{A}_*], \lambda_*$ zu finden

Strategie der aktiven Mengen (SAM)

- Sei $\mathcal{A}_k$ eine aktuelle Approximation an $\mathcal{A}_*$
- Sei x_k ein zulässiger Punkt mit $\mathcal{A}_k \subseteq \mathcal{A}(x_k)$:

$$A_U[\mathcal{A}_k,:]x_k = b_U[\mathcal{A}_k]$$
$$A_U[\mathcal{A}_k^c,:]x_k \leq b_U[\mathcal{A}_k^c]$$
$$A_G x_k = b_G$$

- Der SAM-Schritt findet eine bessere Approximation $\mathcal{A}_{k+1}$ an $\mathcal{A}_*$ und eine bessere Approximation x_{k+1} an x_* mit $\mathcal{A}_{k+1} \subseteq \mathcal{A}(x_{k+1})$

Neue Näherungslösung

$$\begin{bmatrix} Q & A_U[\mathcal{A}_*,:]^T & A_G^T \\ A_U[\mathcal{A}_*,;] & 0 & 0 \\ A_G & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_* \\ \mu_*[\mathcal{A}_*] \\ \lambda_* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ b_U[\mathcal{A}_*] \\ b_G \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} Q & A_U[\mathcal{A}_k,:]^T & A_G^T \\ A_U[\mathcal{A}_k,;] & 0 & 0 \\ A_G & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{k+1} \\ \mu_{k+1}[\mathcal{A}_k] \\ \lambda_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ b_U[\mathcal{A}_k] \\ b_G \end{bmatrix}$$

$$p_k \coloneqq x_{k+1} - x_k$$
$$A_U[\mathcal{A}_k,:]x_k = b_U[\mathcal{A}_k]$$
$$A_G x_k = b_G$$

$$\begin{bmatrix} Q & A_U[\mathcal{A}_k,:]^T & A_G^T \\ A_U[\mathcal{A}_k,;] & 0 & 0 \\ A_G & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_k \\ \mu_{k+1}[\mathcal{A}_k] \\ \lambda_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c - Qx_k \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Optimalitätsbedingung

- Ist $p_k = 0$, so ist x_k nach Satz 5.5 eine optimale Lösung von:

$$\begin{aligned} \text{Minimiere } & \frac{1}{2}x^T Q x - c^T x \text{ über } x \in \mathbb{R}^n \\ \text{u.d.N. } & A_U[\mathcal{A}_k, :]x_k = b_U[\mathcal{A}_k], \quad A_G x_k = b_G \end{aligned}$$

- Ist zusätzlich $\mu_{k+1}[\mathcal{A}_k] \geq 0$, so ist x_k nach Satz 5.12 eine optimale Lösung von:

$$\begin{aligned} \text{Minimiere } & \frac{1}{2}x^T Q x - c^T x \text{ über } x \in \mathbb{R}^n \\ \text{u.d.N. } & A_U[\mathcal{A}_k, :]x_k \leq b_U[\mathcal{A}_k], \quad A_G x_k = b_G \end{aligned}$$

- Nach Annahme $A_U[\mathcal{A}_k^c, :]x_k \leq b_U[\mathcal{A}_k^c]$, also ist x_k eine optimale Lösung von:

$$\begin{aligned} \text{Minimiere } & \frac{1}{2}x^T Q x - c^T x \text{ über } x \in \mathbb{R}^n \\ \text{u.d.N. } & A_U x_k \leq b_U, \quad A_G x_k = b_G \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ STOP

Deaktivierungsschritt

- Ist $p_k = 0$, so ist x_k eine optimale Lösung von:

$$\text{Minimiere } \frac{1}{2}x^T Q x - c^T x \text{ über } x \in \mathbb{R}^n$$
$$\text{u.d.N. } A_U[\mathcal{A}_k, :]x_k = b_U[\mathcal{A}_k]$$
$$A_G x_k = b_G$$

- Gibt es ein $k_* \in \mathcal{A}_k$ mit $\mu_{k+1}[k_*] < 0$, so steigt der optimale Funktionswert im obigen Problem mit $b_U[k_*]$ nach Satz 5.4

- Neue Approximation an $\mathcal{A}_*$:

$$\mathcal{A}_{k+1} = \mathcal{A}_k \setminus \{k_*\} \qquad \textit{Deaktivierungsschritt}$$

Lemma 7.2: Abstiegsrichtung

Angenommen, $p_k \neq 0$. Dann gelten die folgenden Aussagen:

- p_k erfüllt die Bedingungen:

$$-\nabla f(x_k)^T p_k = p_k^T Q p_k > 0 \quad \textit{Abstiegsrichtung}$$

$$A_U[\mathcal{A}_k, :]p_k = 0$$

$$A_G p_k = 0$$

- $g(\alpha) = f(x_k + \alpha p_k)$ eine quadratische Funktion und $\alpha = 1$ ist ihr globales Minimum

- Also ist $g(\alpha)$ monoton fallend für $\alpha \in [0,1]$

Beweis: zu 1

$$\begin{bmatrix} Q & A_U[\mathcal{A}_k,:]^T & A_G^T \\ A_U[\mathcal{A}_k,;] & 0 & 0 \\ A_G & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_k \\ \mu_{k+1}[\mathcal{A}_k] \\ \lambda_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overbrace{c - Qx_k}^{-\nabla f(x_k)} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} |Z_1 \\ |Z_2 \\ |Z_3 \end{array}$$

$$Z_2: \quad A_U[\mathcal{A}_k,:]p_k = 0$$

$$Z_3: \quad A_G p_k = 0$$

$$p_k^T Z_1: \quad \underbrace{p_k^T Q p_k}_{>0} + \overbrace{(A_U[\mathcal{A}_k,:]p_k)}^{=0}{}^T \mu_{k+1}[\mathcal{A}_k] + \overbrace{(A_G p_k)}^{=0}{}^T \lambda_{k+1} = -\nabla f(x_k)^T p_k$$

Beweis: zu 2 und 3

$$f(x) = \frac{1}{2}x^T Q x - c^T x$$

$$\Longrightarrow g(\alpha) = f(x_k + \alpha p_k) \text{ ist ebenfalls quadratisch}$$

$$\begin{aligned} g'(1) &= \nabla f(x_k + p_k)^T p_k \\ &= (Q(x_k + p_k) - c)^T p_k \\ &= p_k^T Q p_k + (Q x_k - c)^T p_k \\ &= -\nabla f(x_k)^T p_k + \nabla f(x_k)^T p_k = 0 \end{aligned}$$

$\alpha = 1$ ist das globale Minimum von g

g fällt auf $[0,1]$

$\square$

Neue Approximation

$$x(\alpha) := x_k + \alpha p_k$$

Lemma 7.2

$$A_U[\mathcal{A}_k,:]x(\alpha) = b_U[\mathcal{A}_k], \quad A_G x(\alpha) = b_G$$

$f(x(\alpha))$ fällt auf $[0,1]$ und $\alpha = 1$ ist das Minimum

$$A_U[\mathcal{A}_k^c,:]x(\alpha) \leq b_U[\mathcal{A}_k^c] \iff \alpha A_U[\mathcal{A}_k^c,:]p_k \leq b_U[\mathcal{A}_k^c] - A_U[\mathcal{A}_k^c,:]x_k$$

$$\iff \alpha \leq \min\left\{\frac{b_U[i] - A_U[i,:]x_k}{A_U[i]p_k} : A_U[i]p_k > 0, i \in \mathcal{A}_k^c\right\} = \alpha_*$$

- Neue Approximation:

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k$$

$$\alpha_k := \min\{\alpha_*, 1\} \quad \textit{Schrittweitenregel}$$

Aktivierungsschritt

- Angenommen:

$$\alpha_k = \min\left\{\frac{b_U[i]-A_U[i,:]x_k}{A_U[i,:]p_k} : A_U[i,:]p_k > 0, i \in \mathcal{A}_k^c\right\} < 1$$

- Wir nennen $i_* \in \mathcal{A}_k^c$ blockierender Index falls

$$\alpha_k = \alpha_k(i_*) := \frac{b_U[i_*] - A_U[i_*,:]x_k}{A_U[i_*,:]p_k} \Rightarrow A_U[i_*,:]x_{k+1} = b_U[i_*]$$

- Neue Approximation an $\mathcal{A}_*$:

$$\mathcal{A}_{k+1} = \mathcal{A}_k \cup \{i_*\}$$

Strategie der aktiven Mengen

1. *Initialisierung:* Zulässiger Startwert x_0, Menge $\mathcal{A}_0$ sd. $A_U[\mathcal{A}_0,:]x_0 = b_U[\mathcal{A}_0]$
2. **for** $k = 0,1,2,\dots$ **do**:
3. bestimme $p_k, \mu_{k+1}[\mathcal{A}_k]$ aus der Sattelpunktgleichung
4. **if** $p_k = 0$ **then:**
5. **if** $\mu_{k+1}[\mathcal{A}_k] \geq 0$ **then** STOP(„Optimale Lösung")
6. $j_* = \mathrm{argmin}_{i \in \mathcal{A}}\, \mu_{k+1}[j],\ \mathcal{A}_{k+1} = \mathcal{A}_k \setminus \{j_*\}, x_{k+1} = x_k$ *Deaktivierungsschritt*

Strategie der aktiven Mengen

1. *Initialisierung:* Zulässiger Startwert x_0, Menge $\mathcal{A}_0$ sd. $A_U[\mathcal{A}_0,:]x_0 = b_U[\mathcal{A}_0]$
2. **for** $k = 0,1,2,\ldots$ **do**:
3. bestimme $p_k, \mu_{k+1}[\mathcal{A}_k]$ aus der Sattelpunktgleichung
4. **if** $p_k = 0$ **then:**
5. **if** $\mu_{k+1}[\mathcal{A}_k] \geq 0$ **then** STOP(„Optimale Lösung“)
6. $j_* = \operatorname{argmin}_{i \in \mathcal{A}} \mu_{k+1}[j],\ \mathcal{A}_{k+1} = \mathcal{A}_k \setminus \{j_*\}, x_{k+1} = x_k$ *Deaktivierungsschritt*
7. **else:**
8. bestimme α_k mithilfe der Schrittweitenregel und setze $x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k$
9. **if** $\alpha_k = \alpha_k(i_*) < 1$ **then** $\mathcal{A}_{k+1} = \mathcal{A}_k \cup \{i_*\}$ **else** $\mathcal{A}_{k+1} = \mathcal{A}_k$
10. **end for** *Aktivierungsschritt*

Satz 7.3. Durchführbarkeit

$$H_k := \begin{bmatrix} Q & A_U[\mathcal{A}_k,:]^T & A_G^T \\ A_U[\mathcal{A}_k,:] & 0 & 0 \\ A_G & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad Q \in \mathbb{S}_{\succ}^n$$

Angenommen:

- $\operatorname{rang}\begin{bmatrix} A_U[\mathcal{A}_0,:] \\ A_G \end{bmatrix} = |\mathcal{A}_0| + m_G$
- x_k mit $k \geq 0$ ist nicht optimal

Dann ist H_k regulär und somit ist x_{k+1} wohldefiniert

Beweis

Behauptung: $\operatorname{rang}\begin{bmatrix} A_U[\mathcal{A}_k,:] \\ A_G \end{bmatrix} = |\mathcal{A}_k| + m_G \;\Rightarrow H_k$ ist regulär

positiv definit

$$H_k = \begin{bmatrix} Q & A_U[\mathcal{A}_k,:]^T & A_G^T \\ A_U[\mathcal{A}_k,;] & 0 & 0 \\ A_G & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Voller Zeilenrang

Aufgabe 5.6

H_k ist regulär

Beweis

Behauptung: $\begin{cases} \text{rang}\begin{bmatrix} A_U[\mathcal{A}_k,:] \\ A_G \end{bmatrix} = |\mathcal{A}_k| + m_G \\ x_k \text{ ist nicht optimal} \end{cases} \Longrightarrow \text{rang}\begin{bmatrix} A_U[\mathcal{A}_{k+1},:] \\ A_G \end{bmatrix} = |\mathcal{A}_{k+1}| + m_G$

1. Fall: $p_k = 0, \mu_{k+1}[\mathcal{A}_k] \geq 0 \Rightarrow x_k$ ist optimal (Widerspruch zur Annahme)

2. Fall: $p_k = 0, \mu_{k+1}[\mathcal{A}_k] \ngeq 0$ oder $p_k \neq 0, \alpha_k = 1 \Rightarrow \mathcal{A}_{k+1} \subseteq \mathcal{A}_k \Rightarrow$ Behauptung

Beweis

Behauptung: $\begin{cases} \operatorname{rang}\begin{bmatrix} A_U[\mathcal{A}_k,:] \\ A_G \end{bmatrix} = |\mathcal{A}_k| + m_G \\ x_k \text{ ist nicht optimal} \end{cases} \Rightarrow \operatorname{rang}\begin{bmatrix} A_U[\mathcal{A}_{k+1},:] \\ A_G \end{bmatrix} = |\mathcal{A}_{k+1}| + m_G$

1. Fall: $p_k = 0, \mu_{k+1}[\mathcal{A}_k] \geq 0 \;\Rightarrow x_k$ ist optimal (Widerspruch zur Annahme)

2. Fall: $p_k = 0, \mu_{k+1}[\mathcal{A}_k] \ngeq 0$ oder $p_k \neq 0, \alpha_k = 1 \;\Rightarrow\; \mathcal{A}_{k+1} \subseteq \mathcal{A}_k \;\Rightarrow$ Behauptung

3. Fall: $p_k \neq 0, \alpha_k = \alpha_k(i_*) < 1 \quad \Rightarrow A_{k+1} = A_k \cup \{i_*\}$

Angenommen, $\exists d, q$ so, dass: $A_U[i_*,:] = d^T A_U[\mathcal{A}_k,:] + q^T A_G$

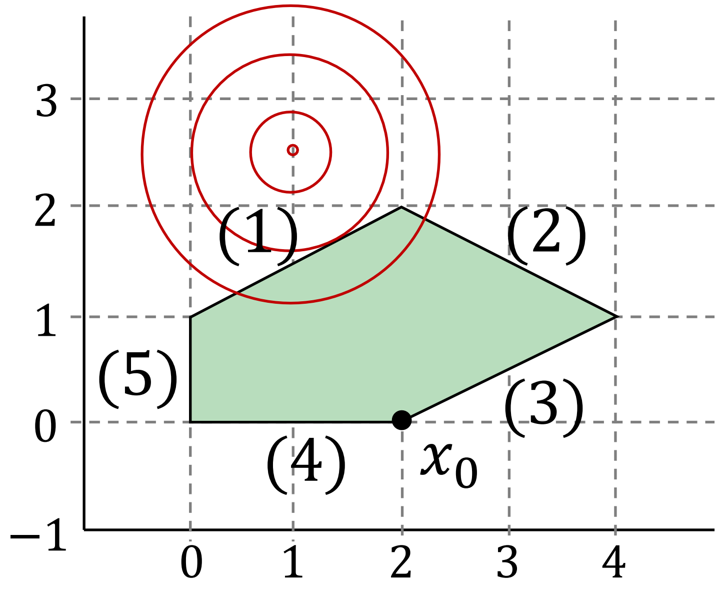
$$A_U[i_*,:]p_k = 0$$ Lemma 7.2

Widerspruch zur Definition von i_*

$\square$

Beispiel

$$\begin{aligned} \text{Minimiere} \quad & \tfrac{1}{2}(x-1)^2 + \tfrac{1}{2}(y-2.5)^2 \\ \text{u.d.N.} \quad & -x + 2y \le 2 \quad (1) \\ & x + 2y \le 6 \quad (2) \\ & x - 2y \le 2 \quad (3) \\ & -y \le 0 \quad (4) \\ & -x \le 0 \quad (5) \end{aligned}$$

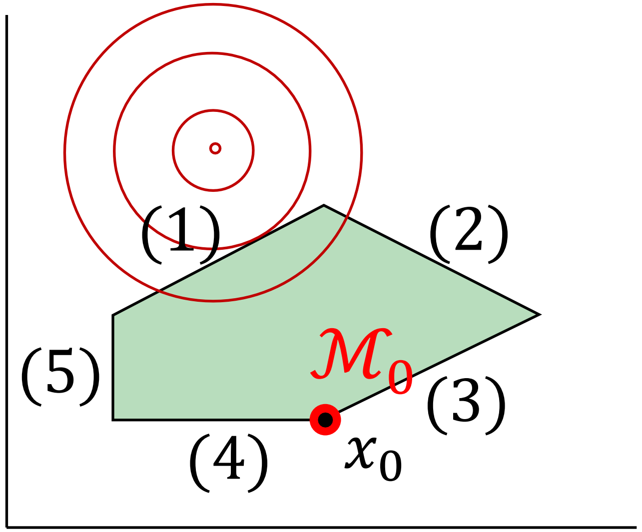


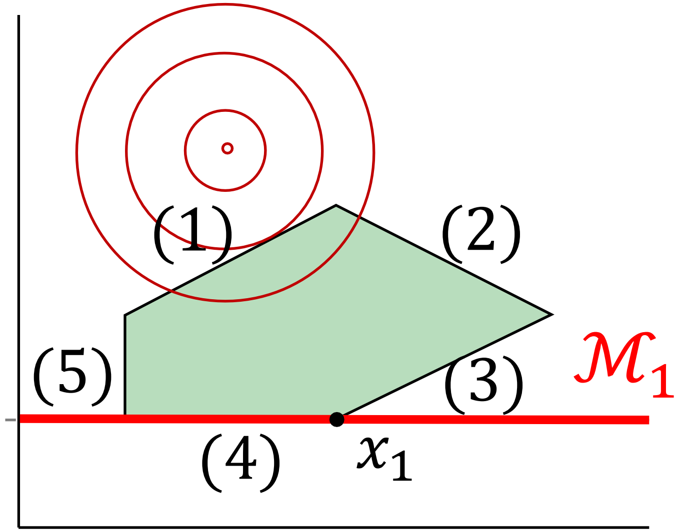
$$x_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{A}_0 = \{3,4\}$$

$$\mathcal{F} := \{x : x \text{ erfüllt alle NB}\}$$

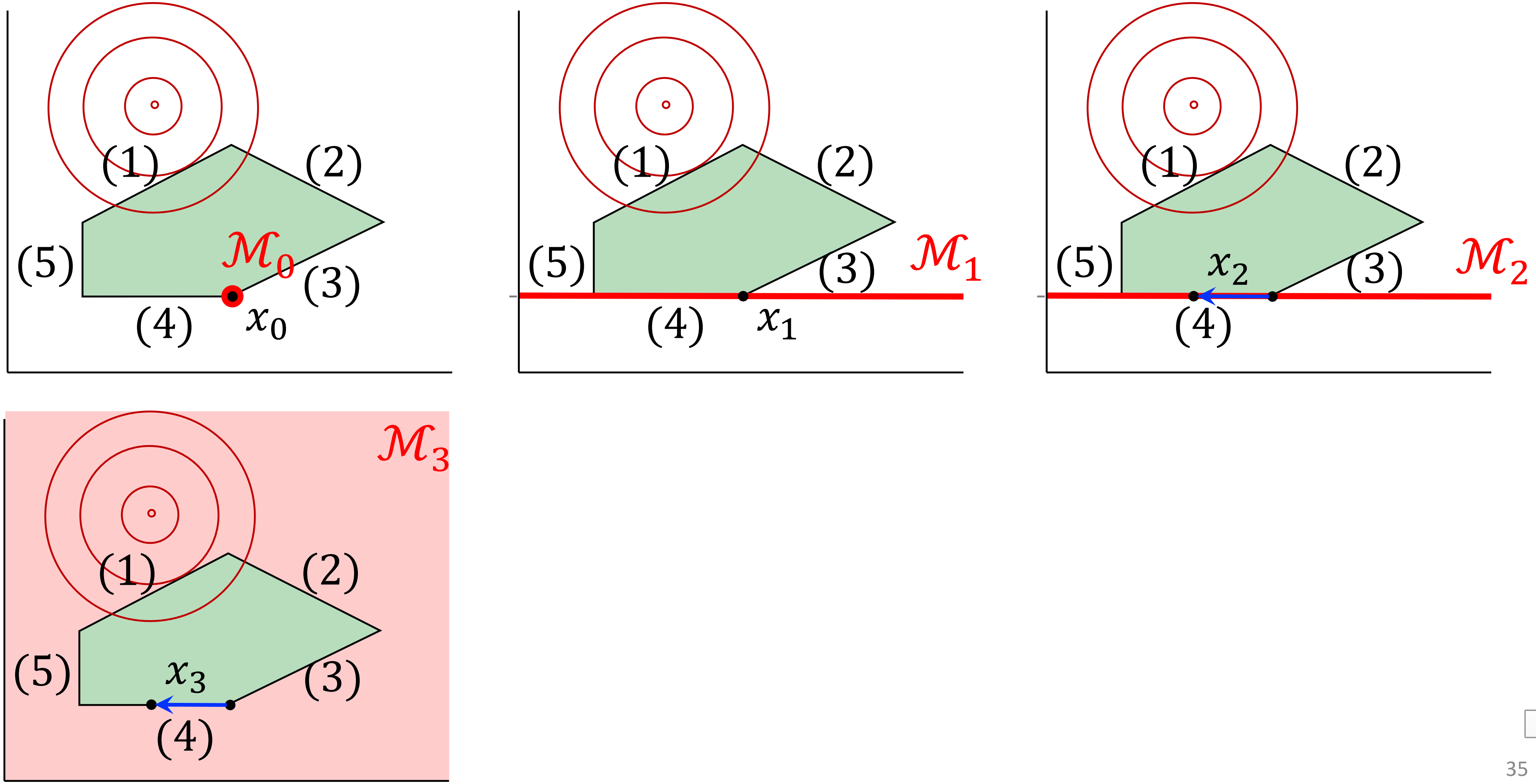
$$\mathcal{M}_k := \{x : x \text{ erfüllt die NB } \mathcal{A}_k \text{ mit Gleichheit}\}$$

Strategie der aktiven Mengen

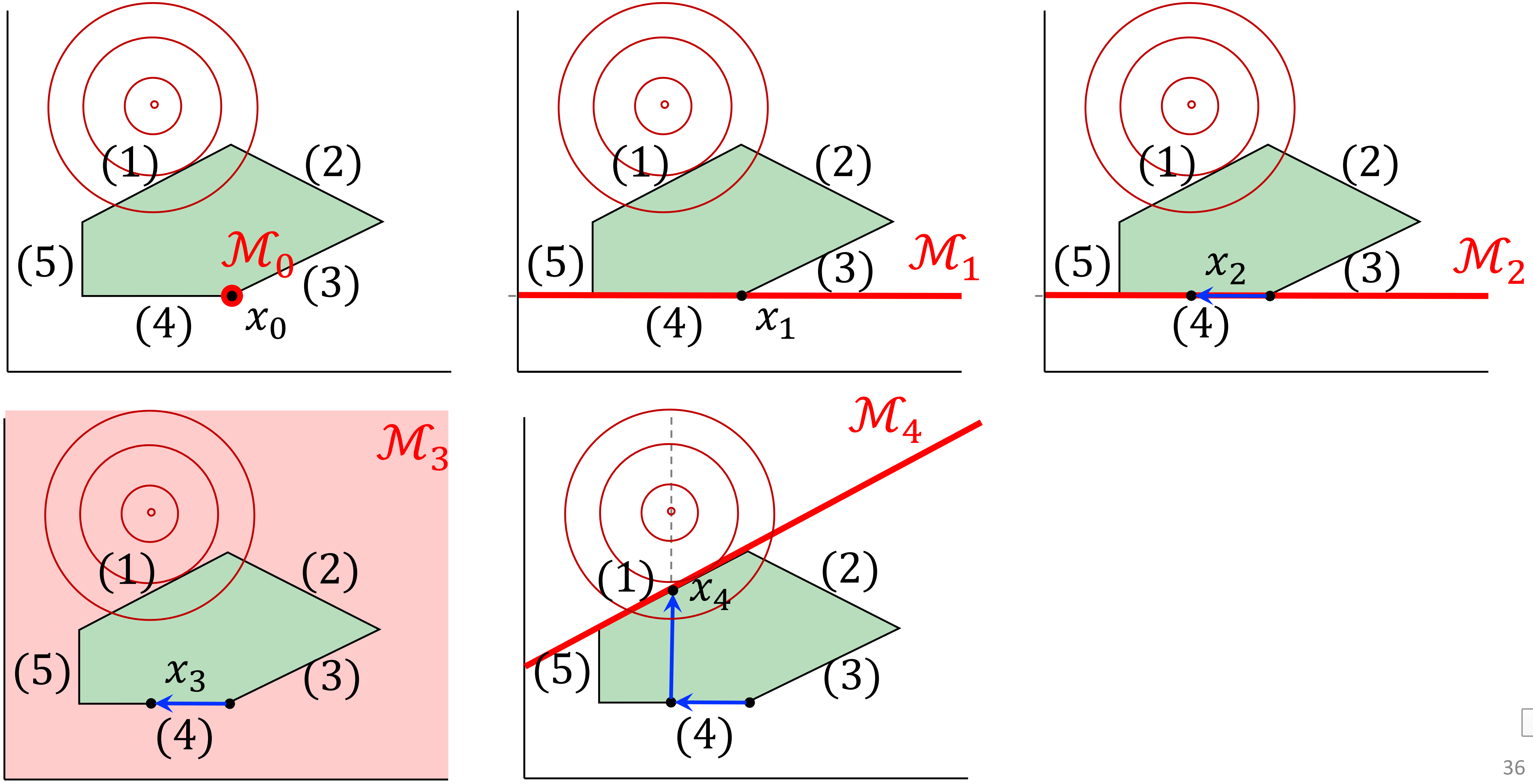




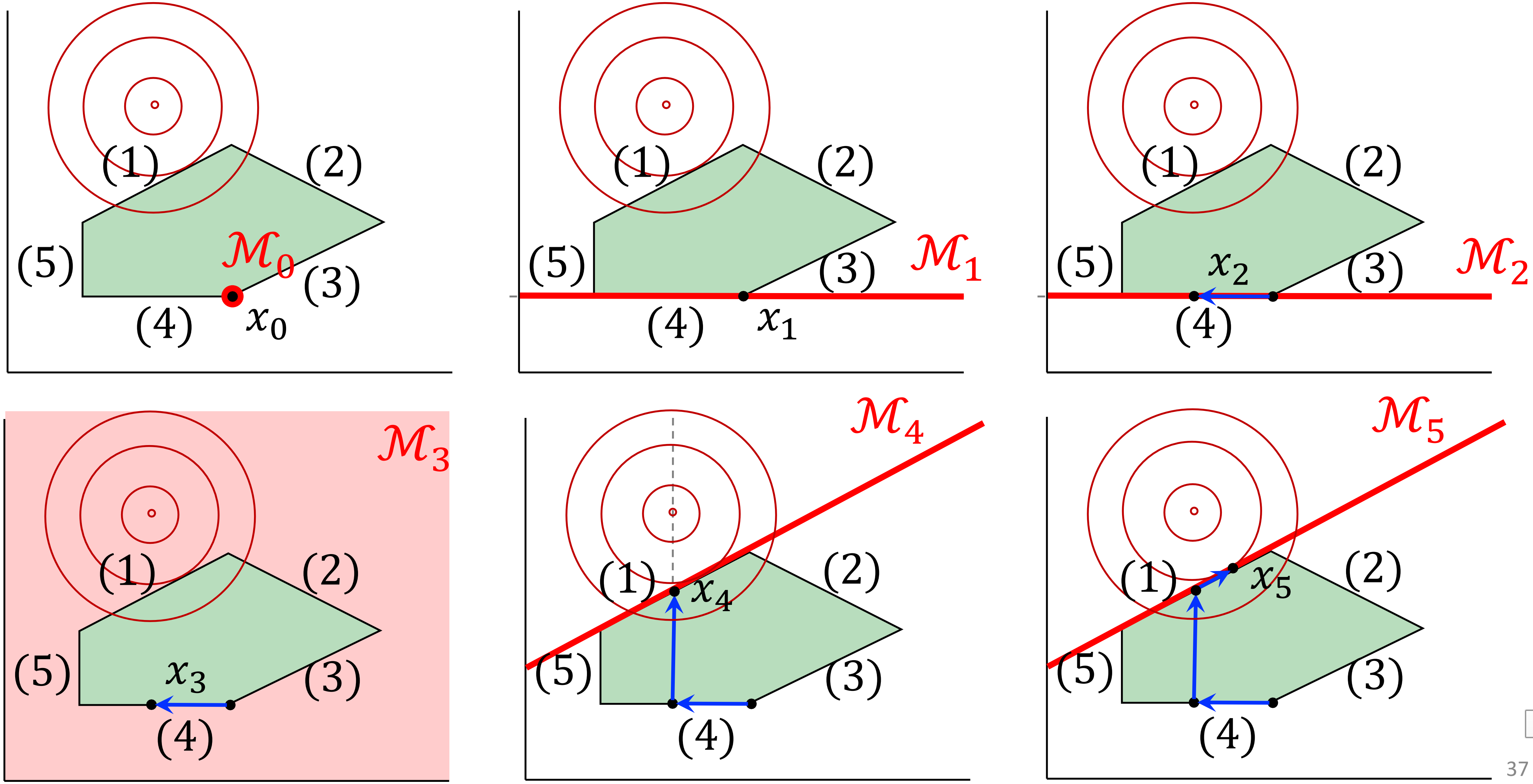
Strategie der aktiven Mengen



Strategie der aktiven Mengen



Strategie der aktiven Mengen



Zusammenfassung

- Beispiel: Portfoliotheorie von Markowitz
- Strategie der aktiven Mengen

Zusammenfassung

- 7b. Nichtlineare Optimierung: Optimalitätsbedingungen