Corrections

1. C'est facile.
2. *Première solution.* Si $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} = d < \infty$, alors $\mathbb{R} \simeq \mathbb{Q}^d$, mais $\mathbb{Q}^d$ est un ensemble dénombrable tandis que $\mathbb{R}$ a la puissance du continu.

   Deuxième solution. Démontrons que pour tout $n \geq 1$ les nombres $\log p_1, \ldots, \log p_n$ sont linéairement indépandants sur $\mathbb{Q}$. On suppose qu'il existent $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{Q}$ tels que

   $$c_1 \log p_1 + \cdots + c_n \log p_n = 0.$$

   Sans perte de généralité, nous supposons que $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{Z}$ (on peut toujours multiplier $c_1, \ldots, c_n$ par leur PGCD). Il vient :

   $$p_1^{c_1} p_2^{c_2} \ldots p_n^{c_n} = 1.$$

   On en déduit que $c_1 = \cdots c_n = 0$. Il en découle que $\log p_1, \ldots, \log p_n$ sont linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$ pour tout n. Cela implique que $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} = \infty$.
3. On rappelle que pour $x \in (0,1)$ on a

   $$\sqrt{1+x} = 1 + \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{8}x^2 + \tfrac{1}{16}x^3 + \cdots .$$

   On peut verifier par calcul que

   $$1 + \phi = \left(\mathrm{id}_E + \tfrac{1}{2}\phi - \tfrac{1}{8}\phi^2\right)^2,$$

   car $\phi^k = 0$ pour tout $k \geq 3$. On pose $\psi = \frac{1}{2}\phi + \frac{1}{8}\phi^2$. Il vient donc $\mathrm{id}_E + \phi = (\mathrm{id}_E + \psi)^2$.
4. (a) Soient $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ tels que

   $$P(t) = a_1 + a_2(t-\lambda) + a_3(t-\lambda)^2 = 0 \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

   En particulier, $P(\lambda) = a_1 = 0$, $P'(\lambda) = a_2 = 0$, $P''(\lambda) = 2a_3 = 0$. Il vient que 1, $t-\lambda$, $(t-\lambda)^2$ est une famille libre dans $\mathbb{R}_2[t]$. Elle est une base car $\dim \mathbb{R}_2[t] = 3$.

   (b) On calcule par définition :

   $$\begin{array}{rcrcrcr} 1 & = & 1\cdot 1 & & & & \\ t-\lambda & = & -\lambda \cdot 1 & + & 1 \cdot t & & \\ (t-\lambda)^2 & = & \lambda^2 \cdot 1 & - & 2\lambda \cdot t & + & 1 \cdot t^2, \end{array} \implies P_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & \lambda^2 \\ 0 & 1 & -2\lambda \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   (c) On calcule

   $$\begin{array}{c} \partial_t(1) = 0, \\ \partial_t(t-\lambda) = 1, \\ \partial_t(t-\lambda)^2 = 2(t-\lambda) \end{array} \implies D_\lambda = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
5. (a) On désigne par e_1, e_2 la base canonique et on pose $e_1' = \binom{1}{2}$, $e_2' = \binom{-1}{3}$. On calcule P par définition :

   $$\begin{array}{c} e_1' = 1e_1 + 2e_2, \\ e_2' = -1e_1 + 3e_2, \end{array} \implies P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

   La matrice P' est l'inverse de P :

   $$P' = P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) On désigne par $x' = \binom{x^{1'}}{x^{2'}}$ les coordonnées de x dans la base e_1', e_2'. Par la formule de changement de coordonnées

$$x' = P^{-1}x = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 + x_2 \\ 2x_1 + x_2 \end{pmatrix}.$$

(c) Par la formule de changement de coordonées

$$\begin{aligned} M' = P^{-1}MP &= \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 & 25 \\ -13 & 20 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

6. On a $\phi_i(X^j) = \delta_{ij}$.

7. (a) On construit la matrice

$$B = (b_1, b_2) = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Comme $\operatorname{rang} B = 2$, $\mathcal{B}$ est bien la base de $\mathbb{R}^2$. On calcule l'inverse :

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \end{pmatrix}.$$

Par définition de la matrice inverse

$$B^{-1}B = \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \end{pmatrix}(b_1, b_2) = \begin{pmatrix} b^1b_1 & b^1b_2 \\ b^2b_1 & b^2b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On voit que $b^1 = (1, -2)$, $b^2 = (-1, 3)$ est la base duale de $\mathcal{B}$.

(b) On pose

$$B' = (b_1', b_2') = \begin{pmatrix} 16 & 9 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}.$$

Comme $\det B' = 16 \cdot 4 - 7 \cdot 9 = 1$, $\operatorname{rang} B' = 1$, et $\mathcal{B}'$ est bien la base de $\mathbb{R}^2$. Par définition de la matrice de passage,

$$\begin{aligned} b_1' &= p_{11}b_1 + p_{21}b_2, \\ b_2' &= p_{12}b_1 + p_{22}b_2, \end{aligned} \iff (b_1', b_2') = (b_1, b_2)P, \quad P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix},$$

On en déduit

$$P = B^{-1}B' = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 16 & 9 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

(c) On calcule

$$P^\vee = {}^tP^{-1} = {}^t\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Par définition de la matrice de passage, si $P^\vee = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix}$,

$$\begin{aligned} b^{1'} &= q_{11}b^1 + q_{21}b^2, \\ b^{2'} &= q_{12}b^1 + q_{22}b^2, \end{aligned} \iff \begin{pmatrix} b^{1'} \\ b^{2'} \end{pmatrix} = {}^tP^\vee \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \end{pmatrix}.$$

Il vient

$$\begin{pmatrix} b^{1'} \\ b^{2'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -9 \\ -7 & 16 \end{pmatrix},$$

d'où $b^{1'} = (4, -9)$, $b^{2'} = (-7, 16)$.

(d) On calcule

$$\begin{pmatrix}\omega_1\\ \omega_2\end{pmatrix} = P^\vee \begin{pmatrix}\omega_1'\\ \omega_2'\end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix}\omega_1'\\ \omega_2'\end{pmatrix} = (P^\vee)^{-1}\begin{pmatrix}\omega_1\\ \omega_2\end{pmatrix} = {}^tP\begin{pmatrix}\omega_1\\ \omega_2\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix}2 & 5\\ 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega_1\\ \omega_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\omega_1+5\omega_2\\ \omega_1+3\omega_2\end{pmatrix},$$

d'où $\omega_1' = 2\omega_1 + 5\omega_2$, $\omega_2' = \omega_1 + 3\omega_2$.

(e) On calcule

$$T' = (P^\vee)^{-1}TP^\vee = {}^tPTP^\vee$$
$$= \begin{pmatrix}2 & 5\\ 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & -5\\ -1 & 2\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix}2 & 7\\ 1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & -5\\ -1 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & 4\\ -1 & 3\end{pmatrix}.$$

8. (a) On construit la matrice

$$B = (b_1, b_2, b_3) = \begin{pmatrix}1 & -1 & -2\\ 0 & -1 & 1\\ -1 & 2 & -2\end{pmatrix}$$

et on calcule l'inverse :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0\\ -1 & 2 & -2 & 0 & 0 & 1\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 1\end{array}\right)$$
$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & -6 & 2 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -3 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 1\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1\\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3}\\ 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 1\end{array}\right)$$
$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1\\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3}\\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{4}{3} & -\frac{1}{3}\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1\\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{4}{3} & -\frac{1}{3}\\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3}\end{array}\right)$$

Le système $\mathcal{B}$ est une base car la matrice B est inversible et le lignes de B^{-1} forment la base duale $\{b^1, b^2, b^3\}$ de $(\mathbb{R}^3)^\vee$.

(b) On pose

$$B' = (b_1', b_2', b_3') = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Par définition de la matrice de passage on a $B' = BP$. Il decoule que $P = B^{-1}B'$,

$$P = \begin{pmatrix}0 & -2 & -1\\ -\frac{1}{3} & -\frac{4}{3} & -\frac{1}{3}\\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & -2 & -3\\ -\frac{1}{3} & -\frac{5}{3} & -\frac{5}{3}\\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3}\end{pmatrix}.$$

(c) Il est connu que $P^\vee = {}^tP^{-1}$ ce qui conduit à

$$P^\vee = \begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ 2 & -3 & 2\\ -5 & 3 & -2\end{pmatrix}.$$

Soit $(\mathcal{B}')^\vee = \{b^{1'}, b^{2'}, b^{3'}\}$. Par définition de la matrice de passage on calcule

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} b^{1'} \\ b^{2'} \\ b^{3'} \end{pmatrix} &= (P^\vee)^t \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \\ b^3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 2 & -5 \\ 1 & -3 & 3 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

(d) On calcule

$$\begin{pmatrix} \omega_1' \\ \omega_2' \\ \omega_3' \end{pmatrix} = (P^\vee)^{-1} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = {}^tP \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix},$$

ce qui conduit à

$$\begin{aligned} \omega_1' &= 2\omega_2 - 5\omega_3, \\ \omega_2' &= \omega_1 - 3\omega_2 + 3\omega_3 \\ \omega_3' &= -\omega_1 + 2\omega_2 - 2\omega_3. \end{aligned}$$

(a) On calcule

$$\begin{aligned} T' &= (P^\vee)^{-1} T P^\vee = {}^tP T P^\vee \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -2 & -\frac{5}{3} & -\frac{2}{3} \\ -3 & -\frac{5}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -5 & 3 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{8}{3} & -1 & \frac{2}{3} \\ \frac{13}{3} & 2 & -\frac{2}{3} \\ \frac{7}{3} & 4 & -\frac{5}{3} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

9. Complétons x en une base de k^n, $(x, e_2, \dots, e_n)$. Considérons sa base duale $(e_1^*, ..., e_n^*)$. Alors $f_1, ..., f_n \in \mathrm{Vect}(e_2^*, ..., e_n^*)$ qui est un s.e.v. dimension $n-1$, et elle est donc liée.

10. (a) f s'annule sur P si et seulement si $\left\{ \begin{array}{rcl} f(e_1 - 2e_2 + e_3) & = & 0 \\ f(e_2 + e_3 + e_4) & = & 0 \end{array} \right.$

(b) On trouve $a_2 = -a_3 - a_4$ et $a_1 = -3a_3 - 2a_4$. Une base est par exemple donnée par $(-3, -1, 1, 0), (-2, -1, 0, 1)$.

(c) Si $v = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, $\phi(v) = \psi(v) = 0$ si et seulement si $\left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + x_2 - x_3 & = & 0 \\ x_1 + x_4 & = & 0 \end{array} \right.$ Ce qui est équivalent à $x_1 = -x_4$ et $x_2 = x_4 + x_3$. Une base de E est donnée par $(-1, 1, 0, 1), (0, 1, 1, 0)$.

11. On calcule :

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -2 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Il découle que rang $A = 2$,

$$\operatorname{im} A = \operatorname{Vect}({}^t(1,0,2), {}^t(0,1,0)),$$
$$\ker A = \operatorname{Vect}({}^t(0,-1,1,1), {}^t(2,-1,0,1)).$$

12. On calcule :

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 4 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \\ 2 & -3 & -1 & -4 \\ \hline 1 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 11 & 11 \\ \hline 1 & -2 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ \hline 1 & -2 & \frac{5}{11} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{-4}{11} & -1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{11} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Il découle que rang $A = 3$,

$$\operatorname{im} A = \operatorname{Vect}({}^t(1,0,2), {}^t(0,1,-3), {}^t(0,0,1)) = \mathbb{R}^3,$$
$$\ker A = \operatorname{Vect}({}^t(1,-1,-1,1)).$$

13. On défini la matrice $A = (v_1, v_2, v_3 | u_1, u_2, u_3)$. Il est clair que $\operatorname{im} A = L + M$. D'autre part, $z = {}^t(x^1, x^2, x^3 | y^1, y^2, y^3) \in \ker A$ si et seulement si

$$w = x^1 v_1 + x^2 v_2 + x^3 v_3 = -y^1 u_1 - y^2 u_2 - y^3 u_3 \in L \cap M.$$

Il vient

$$L \cap M = (v_1, v_2, v_3) \cdot \operatorname{Proj}_x \ker A = (u_1, u_2, u_3) \cdot \operatorname{Proj}_y \ker A,$$
$$\operatorname{Proj}_x {}^t(x^1, x^2, x^3 | y^1, y^2, y^3) = {}^t(x^1, x^2, x^3),$$
$$\operatorname{Proj}_y {}^t(x^1, x^2, x^3 | y^1, y^2, y^3) = {}^t(y^1, y^2, y^3).$$

On passe au calcul :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 2 & 4 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 4 & 2 & 4 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ \hline 1 & -1 & -1 & -3 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ \hline 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & -2 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{3}{4} & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & -2 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{3}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

On en deduit que

$$L + M = \operatorname{Im} A = \operatorname{Vect}\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\},$$
$$\ker A = \operatorname{Vect}\left\{{}^t(-2,-1,0,1,0,0), {}^t(-\tfrac{1}{4}, -\tfrac{3}{4}, 0, 0, 1, 0)\right\},$$
$$\operatorname{Proj}_y \ker A = \operatorname{Vect}\{{}^t(1,0,0), {}^t(0,1,0)\},$$
$$L \cap M = \operatorname{Vect}(u_1, u_2).$$

14. *(b)* On a $E_{ij} = E_{ii}E_{ij} - E_{ij}E_{ii}$ pour $i \neq j$ ce qui conduit à $\phi(E_{ij}) = 0$. D'autre part, on a $E_{ii} - E_{jj} = E_{ij}E_{ji} - E_{ji}E_{ij}$ ce qui conduit à $\phi(E_{ii}) = \phi(E_{jj})$. On en déduit que $\phi(A) = \phi(E_{11}) \operatorname{tr}(A)$.
15. C'est facile.
16. Posons $[n] = n \bmod 2$ pour tout entier n, où $n \bmod 2$ désigne le reste de division de n par 2. Alors, $[a + bc] = [[a] + [b][c]]$ pour tous entiers a, b, c. On en déduit que $[\det(a_{ij})] = [\det([a_{ij}])]$. En particulier, on voit que $[\det A] = 1$ ce qui implique que $\det A$ est un nombre impair, et donc $\det A \neq 0$.
17. (a) Soit $P \in \mathrm{SO}(n)$ tel que $Pa = |a|{}^t(1, 0, \ldots, 0)$. On a

$$\det(I + a{}^ta) = \det(I + (PA){}^t(PA)) = \det(I + |a|^2 E_{11}) = 1 + |a|^2.$$

18.

$$A^2 + I = (A + iI)(A - iI),$$
$$\det(A^2 + I) = \det(A + iI)\overline{\det(A + iI)} = |\det(A + iI)|^2 \geq 0.$$

19. On pose

$$f(x) = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{n-1} & \cdots & x_{n-1}^n \\ 1 & x & \cdots & x^n \end{vmatrix}.$$

En saisant un développement suivant la dernière ligne, on voit que $f(x)$ est un polynôme de dégré n. On voit également que $x_0, \ldots, x_{n-1}$ sont les racines de $f(x)$ est donc

$$V[x_0, \ldots, x_n] = f(x_n) = A(x_n - x_0)(x_n - x_1)\ldots(x_n - x_{n-1}),$$
$$A = V[x_0, \ldots, x_{n-1}].$$

On en déduit par induction que

$$V[x_0, \ldots, x_n] = \prod_{i<j}(x_j - x_i).$$

20. On effectue un développement suivant la dernière colonne et on obtient

$$\det(zI - C) = c_0 + c_1 z + \cdots + c_{n-1}z^{n-1} + z^n.$$