FdE nº 9 – Exponentielle d'une matrice

1. Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$.
   (a) Résoudre le problème de Cauchy $\dot{X}(t) = AX(t)$, $X(0) = \mathrm{Id}_n$ pour une fonction $X(t) \colon \mathbb{R} \to M_n(\mathbb{C})$. *Indication* : poser $X(t) = X_0 + tX_1 + t^2X_2 + \cdots$ et déterminer successivement les coefficients.
   (b) Formuler une définition de l'exponentielle $e^A \in M_n(\mathbb{C})$.
   (c) Calculer les dérivées de la fonction $t \mapsto e^{tA}$.
2. Calculer l'exponentielle d'une matrice.
   (a) $D_2 = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}$, $D_3 = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix}$, …, D_n.
   (b) $N_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $N_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, …, N_n.
   (c) $P \in M_n(\mathbb{C})$, $P^2 = P$.
   (d) $B = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix}$ avec $b \in \mathbb{R}$
3. (a) Soit A, $B \in M_n(\mathbb{C})$ deux matrices semblables : $A = P^{-1}BP$ avec $P \in GL_n(\mathbb{C})$. Expliciter la relation entre e^A et e^B.
   (b) Calculer e^A pour A $= \begin{pmatrix} -6 & -2 \\ 10 & -3 \end{pmatrix}$.
4. (a) Soit $A(t)$, $B(t)$ deux fonctions dérivables à valeurs dans $M_n(\mathbb{C})$. Montrer que $A(t)B(t)$ est une fonction dérivable et calculer sa dérivée.
   (b) Soit $A(t)$ une fonction dérivable à valeurs dans $GL_n(\mathbb{C})$. Montrer que $(A(t))^{-1}$ est une fonction dérivable et calculer sa dérivée.
   (c) Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. Montrer que pour tout t, $s \in \mathbb{C}$, $e^{tA+sA} = e^{tA}e^{sA}$.
   (d) Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. Montrer que e^A est inversible et $(e^A)^{-1} = e^{-A}$.

Proposition 1. *Soit A, $B \in M_n(\mathbb{C})$, $AB = BA$. Alors $e^{A+B} = e^Ae^B$.*

5. Calculer l'exponentielle de $J_2 = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$, $J_3 = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$, …, J_n.
6. Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. Calculer la dérivée de $f(t) = \det(e^{At})$. En déduire que $\det(e^A) = e^{\operatorname{tr} A}$. En particulier, le déterminant de l'exponentielle d'une matrice réelle est *toujours positif*. *Indication* : on calcule la dérivée par définition en utilisant que $\det(\mathrm{Id}_n + A\cdot\Delta t + o(\Delta t)) = 1 + \operatorname{tr} A \cdot \Delta t + o(\Delta t)$ lorsque $\Delta t \to +0$.
7. Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$. Donner deux interprétations géométriques de $\det A$. *Indication* : pour la deuxième, on considère l'application $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto Ax$. Soit $D \subset \mathbb{R}^n$ un domaine ouvert bornée. Comparer les volumes $\mathrm{vol}(D)$ et $\mathrm{vol}(AD)$.
8. Soit A, $B \in M_n(\mathbb{C})$. Résoudre le problème de Cauchy $\dot{X}(t) = AX(t) + X(t)B$, $X(0) = \mathrm{Id}_n$.