4. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres de A. Alors $\det A = \lambda_1 \ldots \lambda_n$ et $\operatorname{tr} A = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n$. Par l'inégalité arithmético-géométrique,

$$(\det A)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\lambda_1 \ldots \lambda_n} \leq \tfrac{\lambda_1 + \cdots + \lambda_n}{n} = \tfrac{\operatorname{tr} A}{n}. \tag{1}$$

Or,

$$\operatorname{tr} A = a_{11} + \cdots + a_{nn} \leq 1 + \cdots + 1 = n.$$
$$\det A \in \mathbb{Z}, \quad \det A \geq 1.$$

In vient que $\det A = 1$, ce qui implique $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 1$, car on a le cas d'égalité dans (1).

7. Soit $D = \frac{d}{dt}$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}[t]$. Le raisonnement par l'absurde : soit

$$f(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_{n-1} t^{n-1} + t^n, \quad a_n \neq 0,$$

le polynôme minimal monique de D. Alors, pour tout $P \in \mathbb{R}[t]$ on a

$$a_0 + a_1 P' + \cdots + a_n P^{(n)} = 0.$$

On choisit $P(t) = t^n$. Alors,

$$a_0 t^n + n a_1 t^{n-1} + \cdots + n! = 0 \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

En posant $t = 0$ on obtient $n! = 0$. Contradiction.

8. (a) Le polynôme $F(x) = x(x-1)$ annule P. Le polynôme minimal divise chaque polynôme annulateur. Donc $\mu_P(x) \in \{x, x-1, x(x-1)\}$. Comme les racines de μ_P sont simples et réelles, P est diagonalisable dans $M_n(\mathbb{R})$.
   (b) Le polynôme $G(x) = (x-1)(x+1)$ annule P. Donc $\mu_R \mid G$ et on déduit $\mu_R \in \{x-1, x+1, (x-1)(x+1)\}$. Les racines sont simples est réelles et on conclut.
   (c) Le polynôme $H(x) = x^k - 1$ annule A est n'as pas de racines multiples. Comme $\mu_A \mid H$, c'est également vrai pour μ_A.

9. Le polynôme $P(x) = (x-3)^2(x-5)^7$ annule A. Le polynôme minimal divise chaque polynôme annulateur. De plus, comme A est diagonalisable, les racines de μ_A sont simples. Cela implique que soit $\mu_A(x) = x - 3$, soit $\mu_A(x) = x - 5$, soit $\mu_A(x) = (x-3)(x-5)$. Comme A n'est pas scalaire, on en déduit que $\mu_A(x) = (x-3)(x-5)$. Donc, $x = 3$ et $x = 5$ sont les valeurs propres de A. Dans le cas $n = 2$ la matrice A est donc diagonalisable et en la diagonalisant on obtient $\left(\begin{smallmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{smallmatrix}\right)$. Comme la matrice A est symétrique, la matrice de passage est dans $O(2)$.

10. (a) Les racines du polynôme minimal sont les valeurs propres de A. Comme 0 est une valeur propre, A n'est pas ni injective, ni surjective.
   (a) On a $\mu_A(x) = x^3(x^7 - 1)$. La multiplicité de la racine $x = 0$ corréspond à la taille maximale d'un bloc de Jordan dans la forme canonique de A. Comme la multiplicité est égale à $3 > 1$, la matrice n'est pas diagonalisable.

11. (a) (i) Soit $J^2 = -I$, alors :

$$\det(J^2) = \det(-I) \implies (\det J)^2 = (-1)^{\dim V} \implies \dim V = 2n.$$

   (ii) Comme $J^2 + I = 0$, $P(x) = x^2 + 1 = (x+i)(x-i)$ est un polynôme annulateur pour J. Le polynôme minimal divise $P(x)$ et est réel, ce qui conduit à $\mu_J(x) = x^2 + 1$. Les racines des polynomes μ_J est χ_J coincide, donc $\chi_J(x) = (x-i)^k(x+i)^l$, $k + l = 2n$. Comme $\chi_J(x)$ est réel, on a $k = l = n$ et $\chi_J(x) = (x^2+1)^n$.
   (iii) J n'est pas trigonalisable car μ_J n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$.
   (iv) Soit $e_1 \neq 0$. Alors e_1, Je_1 sont linéairement indépendants, car autrement J a une valeur propre réelle. On choisit $e_2 \notin \operatorname{Vect}\{e_1, Je_1\}$. Alors $\{e_1, e_2, Je_1, Je_2\}$ est une famille libre. Sinon, $W = \operatorname{Vect}\{e_1, e_2, Je_1\}$ est un s.e.v. J-invariant est on peut definir $J|_W$. Mais comme $(J|_W)^2 = -I$, $\dim W$ est paire ce qui est contradictoire à (i). On procède par induction. Dans la base construite, J a une matrice $\left(\begin{smallmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

12. (a) Comme $\operatorname{rang} A = 1$, $\operatorname{im} A = \operatorname{Vect}_{\mathbb{R}}\{u\}$, $u \neq 0$. Soit $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$. Alors, $Ax = \lambda(x)u$, $A^2x = \lambda(x)Au = \lambda(x)\lambda(u)u$. On voit que $A^2 = \lambda(u)A$. On va montrer que $\lambda(u) = \operatorname{tr} A$ ci-dessous.

    (b) Comme $A(A - \lambda(u)) = 0$, $\mu_A \in \{x, x - \lambda(u), x(x - \lambda(u))\}$. Comme $A \neq 0$ et $A \neq \lambda(u)I$, on a $\mu_A(x) = x(x - \lambda(u))$.

    Si $\lambda(u) = 0$, $\mu_A(x) = x^2$ et toutes les valeurs propres de A sont nulles, d'où $\lambda(u) = \operatorname{tr} A$ et A n'est pas diagonalisable. Si $\lambda(u) \neq 0$, les valeurs propres de A sont 0 et $\lambda(u)$. Si la multiplicité algébrique de $\lambda(u)$ est supérieure à 1, de la forme canonique de A on déduit que $\operatorname{rang} A > 1$, ce qui contredit l'hypothèse. On en déduit que $\lambda(u) = \operatorname{tr} A$, $\chi_A(x) = x^{n-1}(x - \operatorname{tr} A)$ et A est diagonalisable.

13. Soit $B \in M_2(\mathbb{C})$ tel que $B^2 = A$. Alors $B^4 = 0$ et la matrice B est nilpotente. Donc, les valeurs propres de B sont 0. Si B est diagonalisable, $B = 0$, contradiction avec $B^2 = A$. Sinon, B est conjuguée à A et $B^2 = 0$ car $A^2 = 0$, contradiction avec $B^2 = A$.