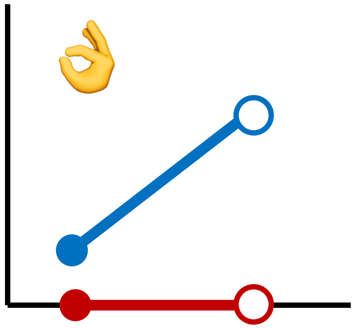
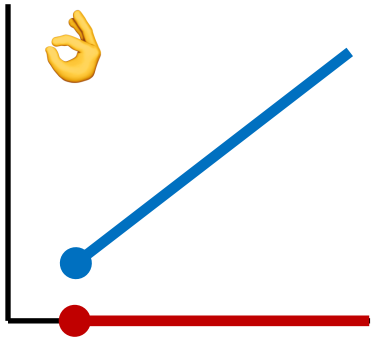


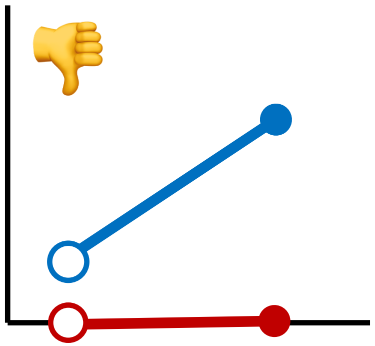


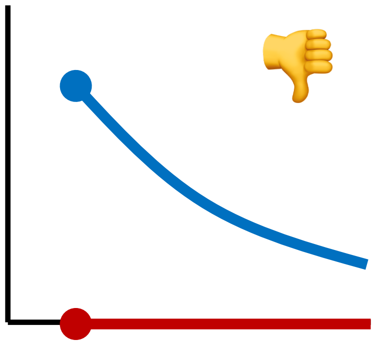
2a. Grundlagen

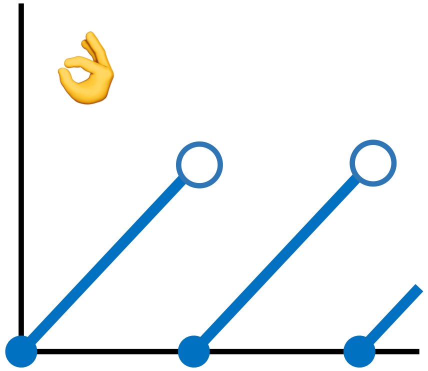
Existenz von Lösungen

Optimierung SoSe 2020

Dr. Alexey Agaltsov







Plan

- Satz von Weierstrass
- Entspannung von Bedingungen
- Unterhalbstetigkeit
- Fortgeschrittener Existenzsatz

Existenz von Lösungen

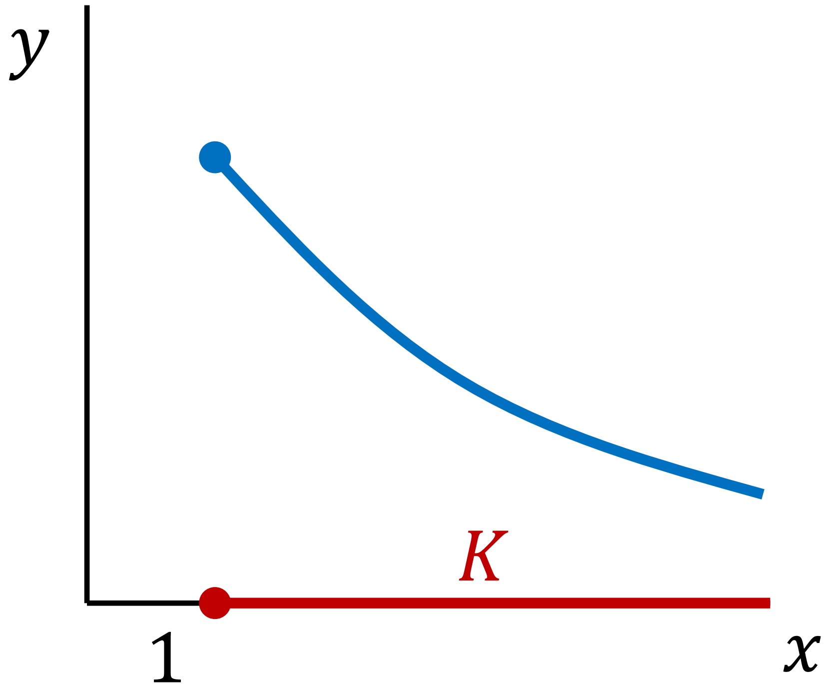
- Wir betrachten das Minimierungsproblem:

$$\text{Minimiere} \quad f(x) \text{ über } x \in K$$
$$K \subseteq \mathbb{R}^n$$

- Zunächst werden wir die Bedingungen auf K und f herleiten, die Existenz von Lösungen garantieren

Wann gibt es keine Lösung?

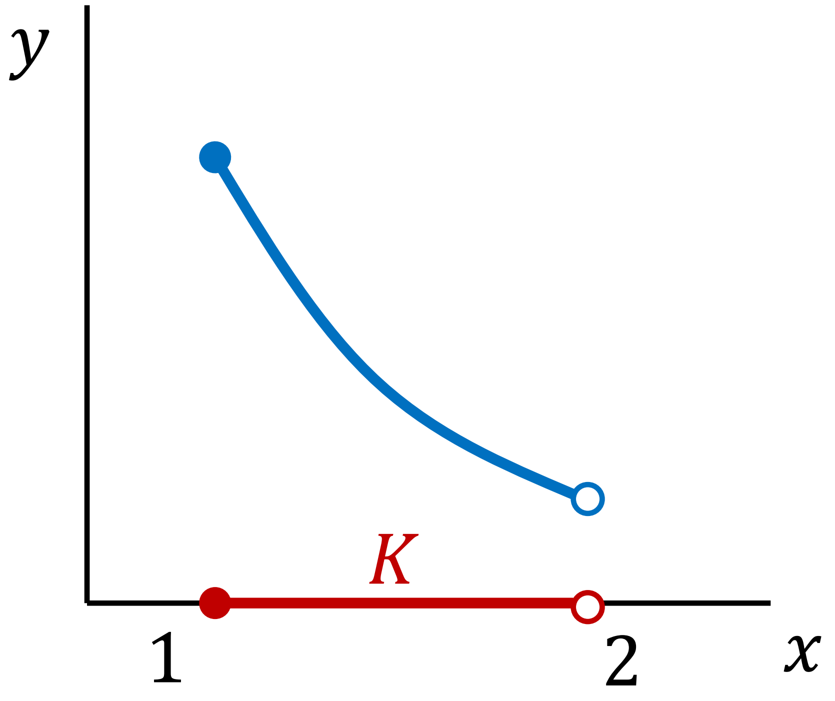
Minimiere $\frac{1}{x}$ über $x \in [1, \infty)$



$K = [1, \infty)$ ist nicht beschränkt

Wann gibt es keine Lösung?

Minimiere $\frac{1}{x}$ über $x \in [1,2)$

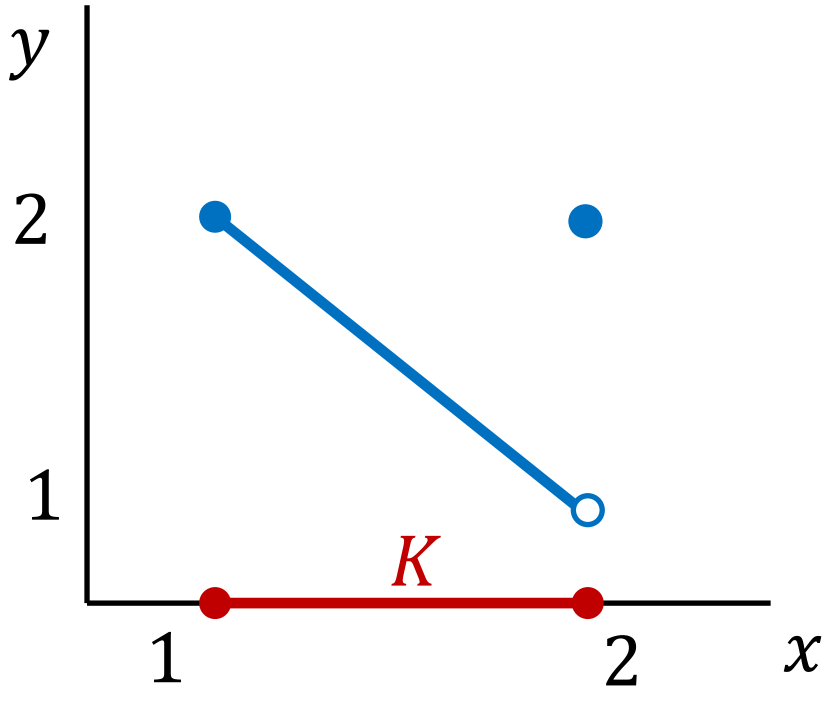


$K = [1, \infty)$ ist nicht abgeschlossen

Wann gibt es keine Lösung?

Minimiere $\lfloor x \rfloor - x + 2$ über $x \in [1,2]$

$\lfloor x \rfloor = \max\{k \in \mathbb{Z} : k \leq z\}$ Abrungungsfunktion



$f = \lfloor x \rfloor - x + 1$ ist nicht stetig

2.1. Satz von Weierstrass

Wir nehmen an:

1. $K \subseteq \mathbb{R}^n$ ist nichtleer und kompakt
2. $f \in C(K)$

Dann $\exists x_* \in K$ mit $f(x_*) = \inf_{x \in K} f(x)$

Beweis

Nach Definition des Infimums $\exists$ Folge $(x_k) \subseteq K$, so dass $f(x_k) \to \inf_{x \in K} f(x)$

Da K kompakt ist, gibt es eine Teilfolge (x_{k_l}) mit $x_{k_l} \to x_* \in K$

Da f stetig ist, $f\left(x_{k_l}\right) \to f(x_*)$

$$\text{Daher gilt } f(x_*) = \inf_{x \in K} f(x)$$

Plan

- Satz von Weierstrass
- Entspannung von Bedingungen
- Unterhalbstetigkeit
- Fortgeschrittener Existenzsatz

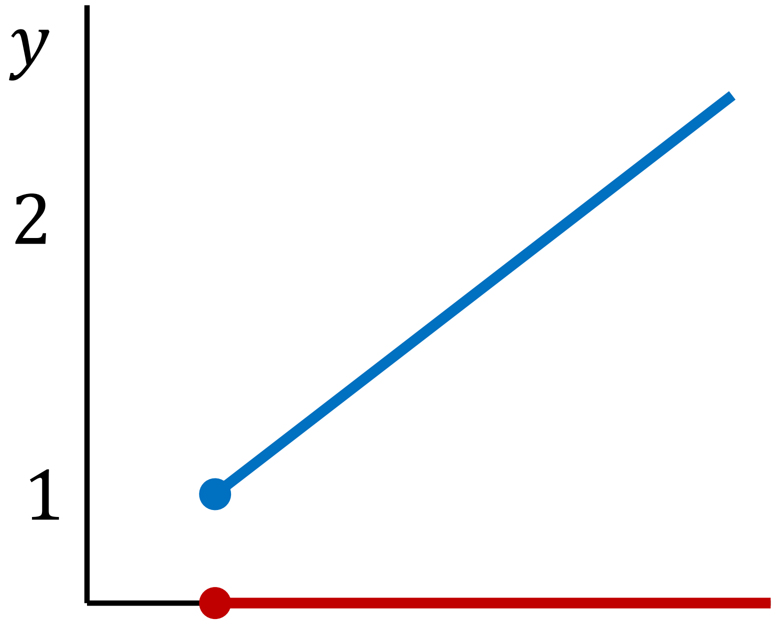
Entspannung von Bedingungen

- Wir haben gesehen, dass man auf die Bedingungen der *Stetigkeit*, *Abgeschlossenheit* und *Beschränktheit* nicht verzichten kann

- Jedoch kann man diese Bedingungen entspannen

Entspannung von Bedingungen

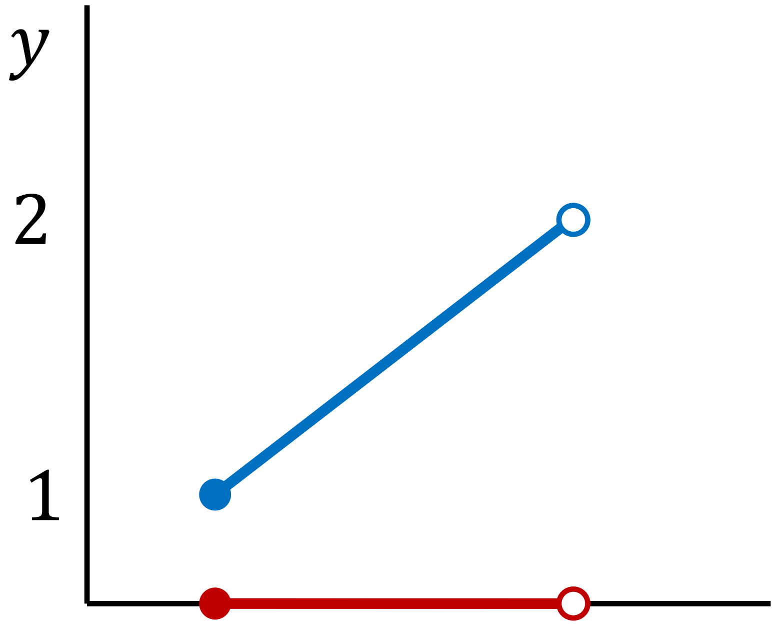
Minimiere x über $x \in [1, \infty)$



~~K ist beschränkt~~ $f(x) \to \infty$ für $x \to \infty$

Entspannung von Bedingungen

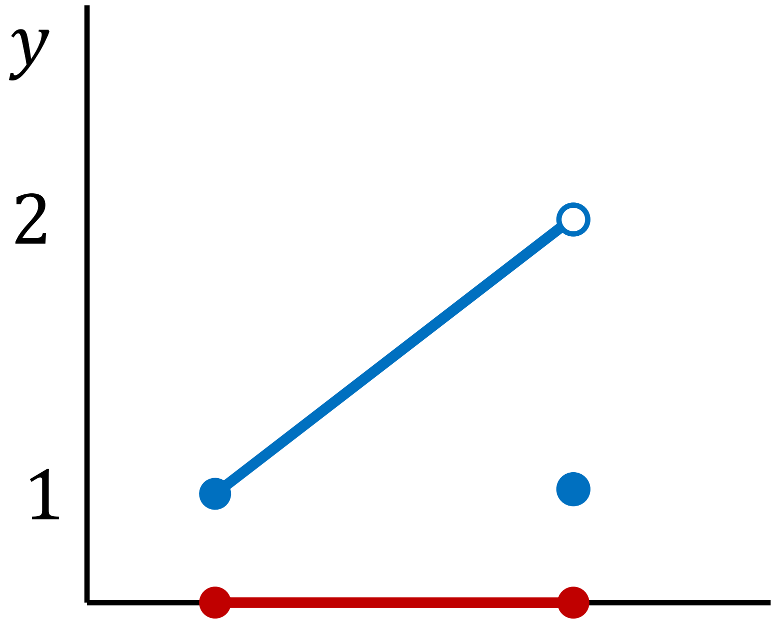
Minimiere x über $x \in [1,2)$



~~K ist abgeschlossen~~ $\exists c$: $\{x \in K: f(x) \leq c\}$ ist kompakt

Entspannung von Bedingungen

Minimiere $x - \lfloor x \rfloor + 1$ über $x \in [1,2]$



~~f ist stetig~~ f ist unterhalbstetig

Erweiterte Funktionen

- Weiterhin werden wir Funktionen definiert auf dem ganzen $\mathbb{R}^n$ und mit Werten in $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ betrachten

- Erweiterte Funktionen vereinfachen Notation durch implizite Angabe des Definitionsbereichs

Erweiterte Funktionen

- Jeder Funktion $g\colon K \to \mathbb{R}$, $K \subseteq \mathbb{R}^n$, ordnen wir eine erweiterte Funktion zu:

$$f\colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}, \quad f(x) := \begin{cases} g(x) & x \in K \\ \infty & sonst \end{cases}$$

- Jeder erweiterten Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ ist hingegen eine gewöhnliche Funktion $g\colon K \to \mathbb{R}$ zugeordnet:

$$K = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) < \infty\},$$

$$g(x) := f(x), \ \ x \in K$$

Effektiver Bereich und Epigraph

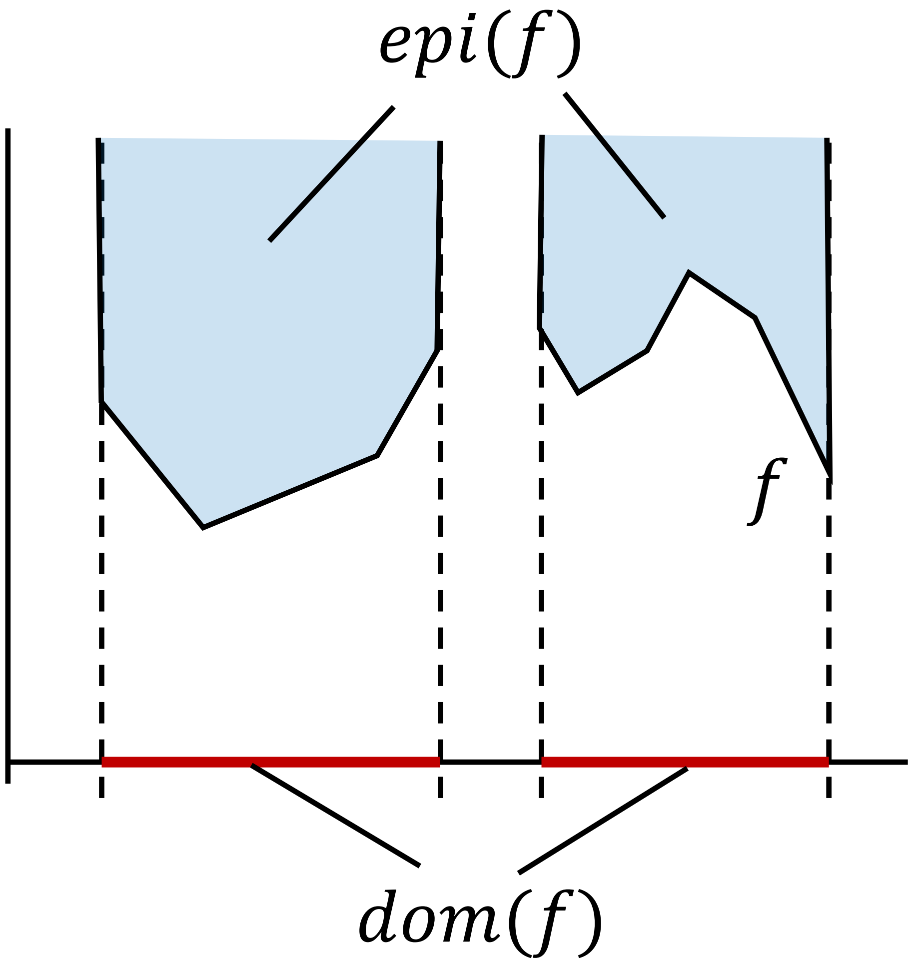
$$f\colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$$

Als effektiver Bereich von f bezeichnen wir:

$$\mathbf{dom}(f) = \{x \in \mathbb{R}^n\colon\ f(x) < \infty\}$$

Als Epigraph von f bezeichnen wir:

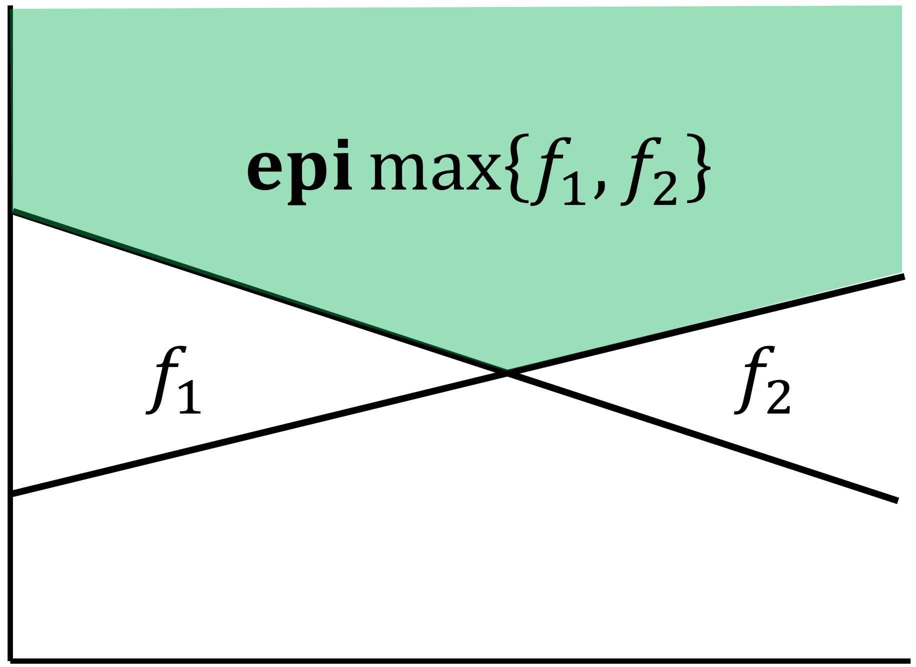
$$\mathbf{epi}(f) = \{(x, z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}\colon\ f(x) \leq z\}$$



Lemma 2.2. Epigraph von Supremum

Seien $f_\alpha\colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$, $\alpha \in I$, $f = \sup\limits_{\alpha\in I} f_\alpha$. Dann gilt:

$$\mathbf{epi}(f) = \cap_{\alpha\in I}\, \mathbf{epi}(f_\alpha)$$



Beweis

$$(x,z) \in \mathbf{epi}(f) \Leftrightarrow \sup_{\alpha \in I} f_\alpha \leq z$$

$$\Leftrightarrow \; f_\alpha(x) \leq z \;\; \forall \alpha \in I$$

$$\Leftrightarrow \; (x,z) \in \mathbf{epi}(f_\alpha) \;\; \forall \alpha \in I$$

$$\Leftrightarrow \; (x,z) \in \cap_{\alpha \in I} \, \mathbf{epi}(f_\alpha)$$

$\square$

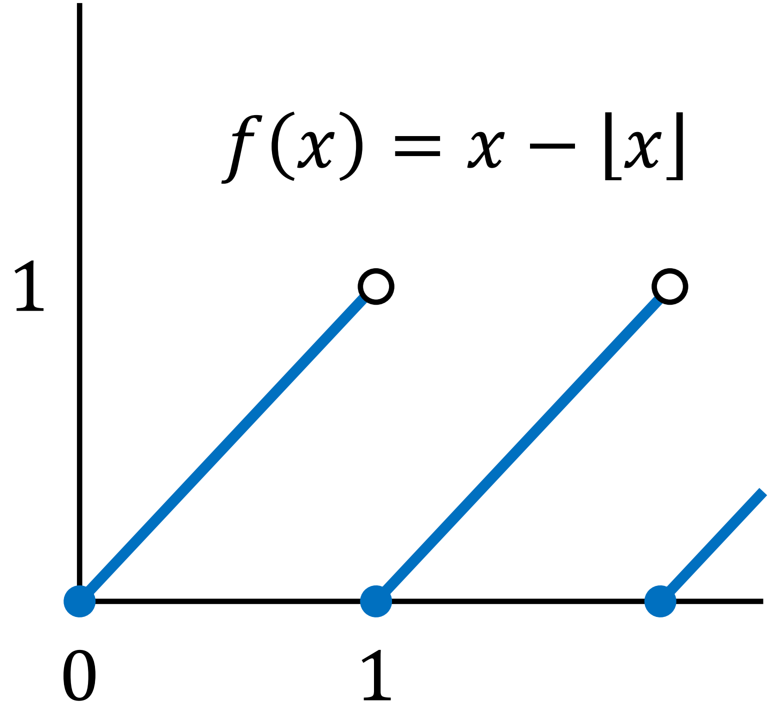
Plan

- Satz von Weierstrass
- Entspannung von Bedingungen
- Unterhalbstetigkeit
- Fortgeschrittener Existenzsatz

Halbstetigkeit

- $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ heißt unterhalbstetig falls:

$$\liminf_{x \to x_*} f(x) \geq f(x_*) \quad \forall x_* \in \mathbb{R}^n$$



Satz 2.3. Äquivalente Definitionen der Unterhalbstetigkeit

Sei $f: \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

1. f ist unterhalbstetig:

$$\liminf_{x \to x_*} f(x) \geq f(x_*) \quad \forall x_* \in \mathbb{R}^n$$

2. $\{x: f(x) \leq c\}$ ist abgeschlossen $\forall c \in \mathbb{R}$
3. $\mathbf{epi}(f)$ ist abgeschlossen

Beweis: 1 ⇒ 2

- f ist unterhalbstetig $\Rightarrow \{x: f(x) \leq c\}$ abgeschlossen $\forall c \in \mathbb{R}$

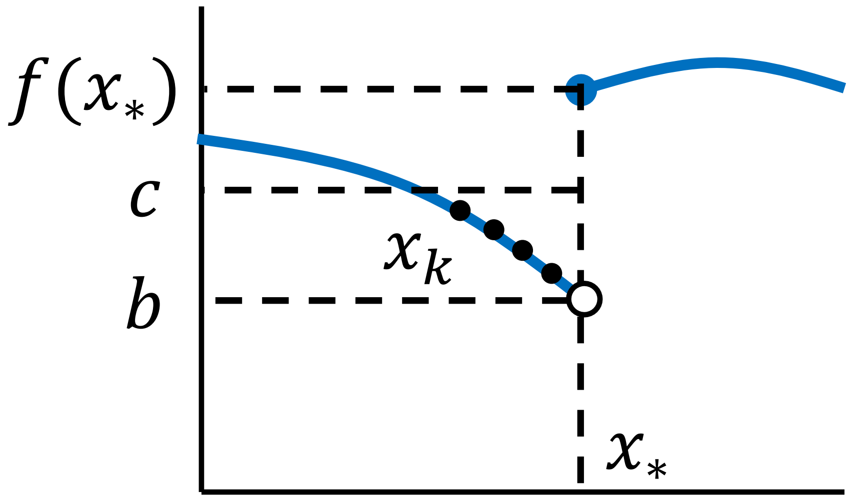
Seien $(x_k) \subseteq \mathbb{R}^n\colon\ f(x_k) \leq c, x_k \to x_*$

$$f(x_*) \leq \liminf_{k\to\infty} \underbrace{f(x_k)}_{\leq c}$$

Also ist $\{x: f(x) \leq c\}$ abgeschlossen

Beweis: $\neg 1 \Rightarrow \neg 2$

- f nicht unterhalbstetig $\Rightarrow \exists c \in \mathbb{R}$: $\{f(x) \leq c\}$ nicht abgeschlossen



$$\exists(x_* \in \mathbb{R}^n, (x_k) \subseteq \mathbb{R}^n): \; x_k \to x_*, f(x_k) \to b < f(x_*)$$

$$\exists c, k_0: \; f(x_k) \leq c < f(x_*) \;\; \forall k \geq k_0$$

$$\Longrightarrow \{x: f(x) \leq c\} \text{ ist nicht abgeschlossen}$$

Beweis: 1 $\Rightarrow$ 3

- f ist unterhalbstetig $\Rightarrow$ $\mathbf{epi}(f)$ abgeschlossen

Seien $(x_k, z_k) \in \mathbf{epi}(f)$, $x_k \to x_*$, $z_k \to z_*$

$$\liminf_{k\to\infty} \underbrace{f(x_k)}_{\leq z_k} \geq f(x_*)$$

$$z_* \geq f(x_*)$$

Also $(x_*, z_*) \in \mathbf{epi}(f)$

Beweis: 3 $\Rightarrow$ 2

- $\mathbf{epi}(f)$ abgeschlossen $\Rightarrow$ $\{x : f(x) \leq c\}$ abgeschlossen $\forall c$

Seien $x_k \in \mathbb{R}^n$ mit $f(x_k) \leq c$, $x_k \to x_*$

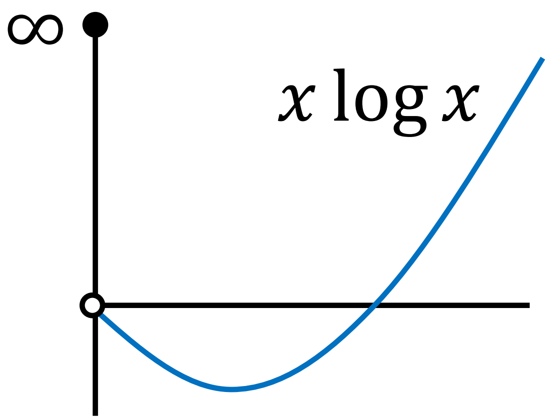
Also $(x_k, c) \in \mathbf{epi}(f)$

Also $(x_*, c) \in \mathbf{epi}(f)$, d.h. $f(x_*) \leq c$

Erweiterungen stetiger Funktionen

- Oft ist die Zielfunktion in Optimierungsproblemen stetig
- Die Definitionsbereich ist dabei oft offen oder abgeschlossen
- Wann ist die zugehörige erweiterte Funktion halbstetig von unten?

Beispiele

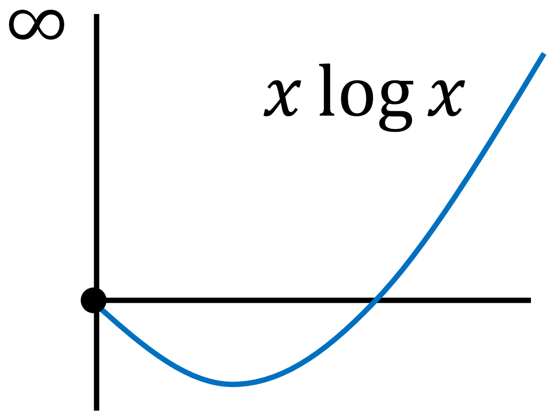


$$f(x) = x \log x \text{ mit } \mathbf{dom}(f) = \mathbb{R}_{>0}$$

$$f(0^-) = \infty,\ f(0^+) = 0,\ f(0) = \infty$$

Da $f(0^+) < f(0)$, ist f nicht unterhalbstetig

Beispiele



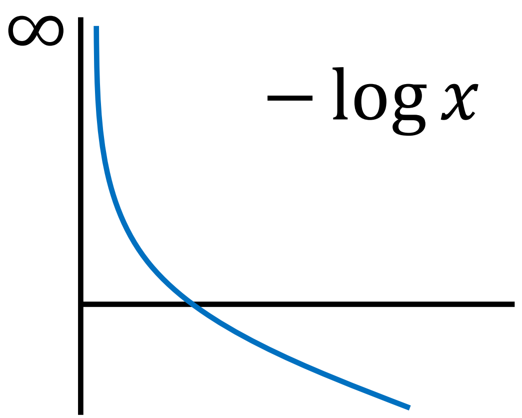
$$f(x) = \begin{cases} x \log x & x > 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \quad \text{mit } \mathbf{dom}(f) = \mathbb{R}_{\geq 0}$$

$$f(0^-) = \infty,\ f(0^+) = 0,\ f(0) = 0$$

$$f(0^-) \geq f(0), f(0^+) \geq f(0)$$

f ist unterhalbstetig

Beispiele



$$f(x) = -\log x \;\text{ mit } \mathbf{dom}(f) = \mathbb{R}_{>0}$$

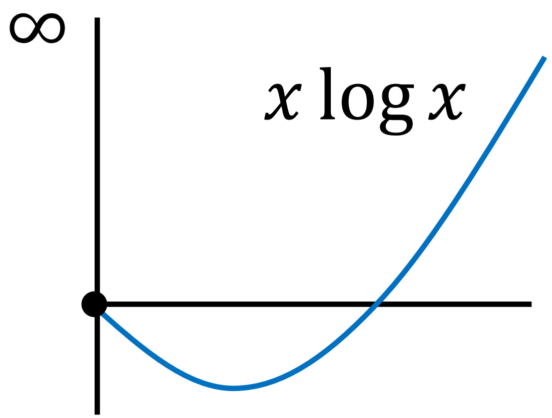
$$f(0^-) = f(0^+) = f(0) = \infty$$

$$f(0^-) \geq f(0), f(0^+) \geq f(0) \;\forall x$$

f ist unterhalbstetig

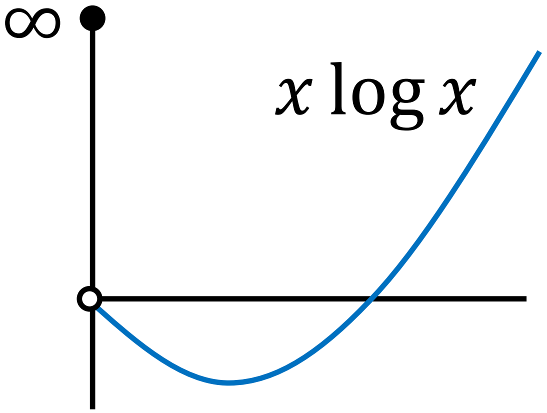
Lemma 2.4: Halbstetigkeit Erweiterungen stetiger Funktionen

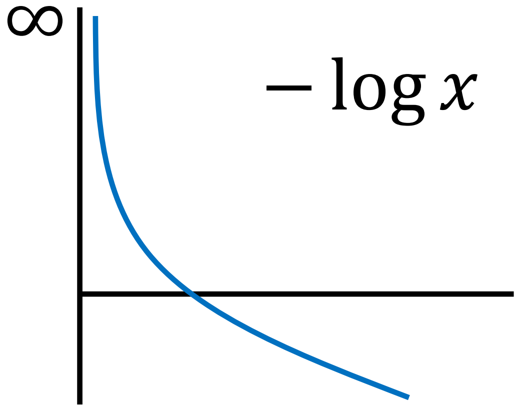
Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ stetig auf $\mathbf{dom}(f)$



1. Ist $\mathbf{dom}(f)$ abgeschlossen, so ist f unterhalbstetig
2. Ist $\mathbf{dom}(f)$ offen, so ist f unterhalbstetig gdw.

$$\lim_{x \to x_*} f(x) = \infty \;\; \forall x_* \in \partial\mathbf{dom}(f)$$





Beweis

Behauptung: Ist $\mathbf{dom}(f)$ abgeschlossen, so ist f unterhalbstetig

Seien $(x_k, z_k) \in \mathbf{epi}(f)$, $(x_k, z_k) \to (x_*, z_*)$

also $f(x_k) \leq z_k$

$\mathbf{dom}(f)$ abgesclossen

f stetig auf $\mathbf{dom}(f)$

$f(x_*) \leq z_*$

also $(x_*, z_*) \in \mathbf{epi}(f)$

$\mathbf{epi}(f)$ ist abgeschlossen, also ist f halbstetig von unten

Beweis

Behauptung: Ist $\mathbf{dom}(f)$ offen, so ist f unterhalbstetig gdw.

$$\lim_{\mathrm{x}\to x_*} f(x) = \infty \ \ \forall x_* \in \partial\mathbf{dom}(f)$$

$$\lim_{\mathrm{x}\to x_*} f(x) = f(x_*) \ \ \forall x_* \in \mathbf{dom}(f)$$

f ist unterhalbstetig gdw.

$$\mathrm{Lim}_{x\to x_*} f(x) = \underbrace{\infty}_{f(x_*)} \forall x_* \in \partial\mathbf{dom}(f)$$

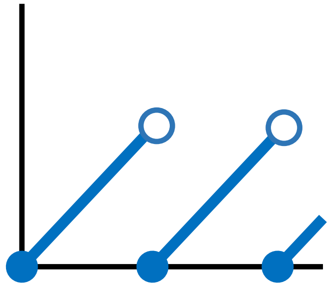
$\square$

Plan

- Satz von Weierstrass
- Entspannung von Bedingungen
- Unterhalbstetigkeit
- Fortgeschrittener Existenzsatz

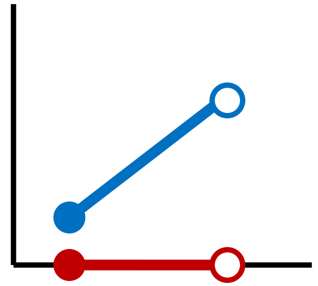
Satz 2.5. Existenz von Lösungen

Sei $f: \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ unterhalbstetig mit $\mathbf{dom}(f) \neq \emptyset$



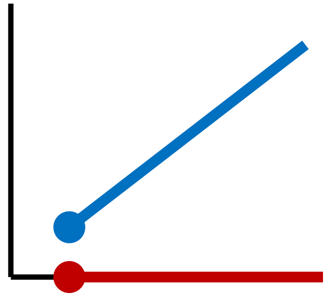
Es gelte eine (oder mehrere) der folgenden Voraussetzengen:

1. $\exists c \in \mathbb{R}$: $\{x: f(x) \leq c\}$ ist nichtleer und beschränkt
2. $\mathbf{dom}(f)$ ist beschränkt
3. $f(x) \to \infty$ für $|x| \to \infty$



$\mathbf{dom}(f)$

Dann ist $\mathbf{Argmin}(f)$ nichtleer und kompakt



$\mathbf{dom}(f)$

Beweis: zu 1

Angenommen, $\exists c$: $L = \{x: f(x) \leq c\}$ ist nichtleer und beschränkt

Nach Satz 2.3 ist L abgeschlossen, also kompakt

Seien $x_k \in L$ mit $x_k \to x_*$, $f(x_k) \to f_* = \inf f(x)$

$$\underbrace{\lim f(x_k)}_{f_*} \geq f(x_*) \quad \textit{(Halbstetigkeit)}$$

Also ist $f(x_*) = f_*$

$$\mathbf{Argmin}\, f = \underbrace{\{x: f(x) \leq f_*\}}_{\text{abgeschlossen}} \subseteq \underbrace{L}_{\text{beschränkt}} \quad \text{also kompakt}$$

Beweis: 2 $\Rightarrow$ 1

- $\mathbf{dom}(f)$ ist beschränkt $\Rightarrow \exists c \in \mathbb{R}$: $\{x\colon f(x) \leq c\}$ ist nichtleer und beschränkt

Sei $\mathbf{dom}(f)$ beschränkt

Sei $x_0 \in \mathbf{dom}(f)$ und setze:

$$L = \{x\colon f(x) \leq f(x_0)\}$$

$L \subseteq \mathbf{dom}(f)$, also ist L beschränkt

Beweis: 3 $\Rightarrow$ 1

- $f(x) \to \infty$ für $|x| \to \infty \Rightarrow \exists c \in \mathbb{R}$: $\{x\colon f(x) \leq c\}$ ist nichtleer und beschränkt

Es gelte $f(x) \to \infty$ für $|x| \to \infty$

Sei $x_0 \in \mathbf{dom}(f)$ und setze $L = \{x\colon f(x) \leq f(x_0)\}$

$f(x_0) < \infty$

L ist beschränkt

$\square$

Zusammenfassung

- Satz von Weierstrass
- Entspannung von Bedingungen
- Unterhalbstetigkeit
- Fortgeschrittener Existenzsatz

Nächstes Video

- 2b. Grundlagen: Konvexe Mengen