FdE nº 11 – Produit vectoriel

1. Soit
   (a) $a = (1, -1, 2)$, $b = (1, 1, -1)$
   (b) $a = (1, 0, 0)$, $b = (0, 1, 0)$
   (c) $a = (1, 1, 1)$, $b = (0, 1, 1)$

   Dans chacun de ces cas :
   (i) calculer le produit vectoriel $c = a \times b$;
   (ii) calculer l'aire du parallélogramme engendré par a et b ;
   (iii) trouver la matrice $L_c \in M_3(\mathbb{R})$ telle que $L_c x = c \times x$ pour tout $x \in \mathbb{R}^3$.
2. Soit e_1, e_2, e_3 la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
   (i) Que vaut $e_1 \times e_2$, $e_2 \times e_3$, $e_3 \times e_1$?
   (ii) Trouver les matrices L_1, L_2, L_3 telles que $e_1 \times a = L_1 a$, $e_2 \times a = L_2 a$, $e_3 \times a = L_3 a$ pour tout $a \in \mathbb{R}^3$. Que vaut $[L_1, L_2]$, $[L_2, L_3]$, $[L_3, L_1]$? (On rappelle que $[A, B] = AB - BA$).
   (iii) Soit $\phi \in \mathbb{R}$. Calculer $\exp(\phi L_1)$, $\exp(\phi L_2)$, $\exp(\phi L_3)$ et décrire leur action sur $\mathbb{R}^3$.
   (iv) Soit $n \in \mathbb{R}^3$, $|n| = 1$, et soit $\phi \in \mathbb{R}$. En citant le théorème du cours, calculer $\exp(\phi L_n)$ et décrire son action sur $\mathbb{R}^3$.
   (v) Trouver une matrice de rotation qui fait tourner $a = (1, -1, 2)$ vers $b = (1, 1, -1)$.
3. Soit e_1, e_2, e_3 la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Résoudre le système
$$\dot{y}(t) = e_1 \times y(t), \quad y(0) = e_2.$$
4. Soit a, $b \in \mathbb{R}^3$. Montrer que $|a \times b|^2 + |a \cdot b|^2 = |a|^2 |b|^2$.
5. Soit $A(3, 5, 4)$, $B(2, 1, 3)$, $C(8, 5, 5)$ les points dans $\mathbb{R}^3$. Calculer le produit vectoriel $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ et en déduire l'aire du triangle $\triangle ABC$ et la mesure de l'angle $\angle BAC$ en radians.
6. (i) Ecrire la matrice de rotation d'angle $\frac{3\pi}{4}$ dans le sens antihoraire dans le plan $\mathbb{R}^2$.
   (ii) Ecrire la matrice de réflection par rapport à la droite $2x + y = 0$ dans $\mathbb{R}^2$.
7. (i) Ecrire la matrice de rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ dans le sens horaire d'axe orienté par $(1, 0, 0)$ dans $\mathbb{R}^3$.
   (ii) Ecrire la matrice de rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$ dans le sens antihoraire d'axe orienté par $(1, 1, 1)$ dans $\mathbb{R}^3$.