6b. Lineare Programmierung
Das Simplex-Verfahren I

Optimierung SoSe 2020

Dr. Alexey Agaltsov

Plan

- Polyeder und Eckpunkte
- Herleitung des Simplex-Verfahrens

Hyperebene und Halbräume

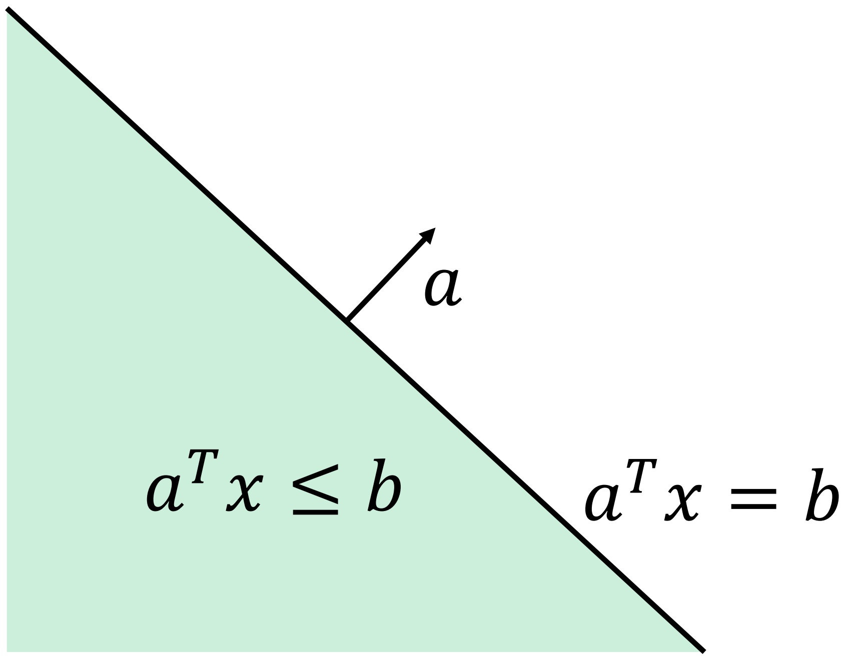
- Seien $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und $b \in \mathbb{R}$
- Zu a senkrechte Hyperebene:

$$\{x \in \mathbb{R}^n : a^T x = b\}$$

- Zugehörige Halbräume:

$$\{x \in \mathbb{R}^n : a^T x \leq b\}$$

$$\{x \in \mathbb{R}^n : a^T x \geq b\}$$



Polyeder

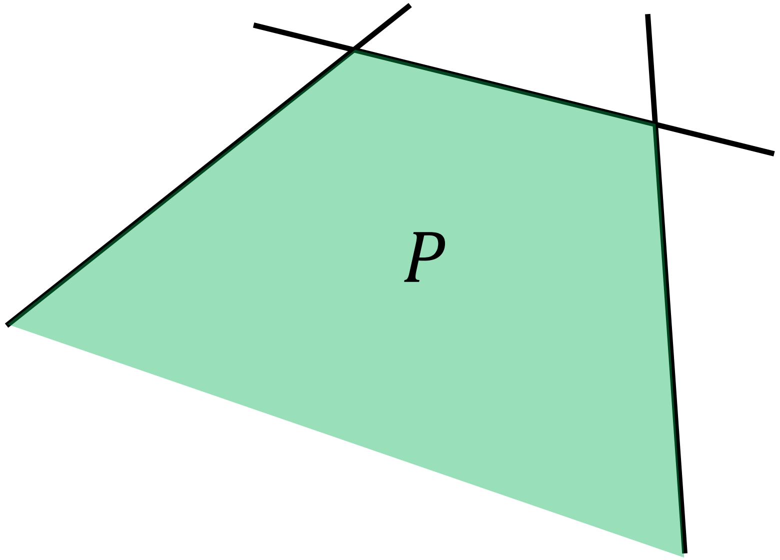
- Ein Polyeder ist die Schnittmenge endlich vieler Halbräume:

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : a_i^T x \leq b_i, i = 1, .., m\}$$

a_i^T i-te Zeile von A

$b = (b_1, \dots b_m)$

$$= \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$$



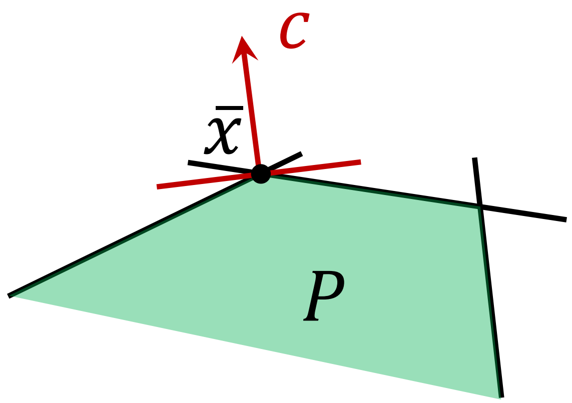
- Ein beschränktes Polyeder heißt Polytop

Eckpunkte

$$P = \{x : Ax \leq b\},\ A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m$$

- $\bar{x} \in P$ heißt Eckpunkt, falls $\exists c \in \mathbb{R}^n$ sodass:

$$c^T \bar{x} > c^T x \quad \forall x \in P \setminus \{\bar{x}\}$$

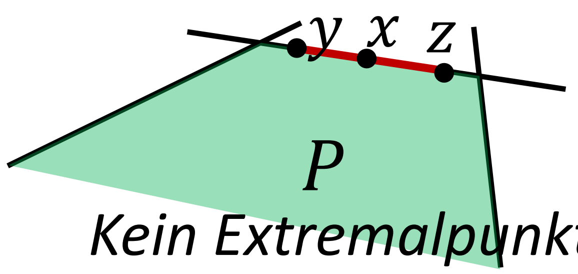


Extremalpunkte

$$P = \{x: Ax \leq b\},\ A \in \mathbb{R}^{m\times n}, b \in \mathbb{R}^m$$

- $\bar{x} \in P$ heißt Extremalpunkt, falls $\forall y, z \in P, \forall \alpha \in (0,1)$:

$$\bar{x} = \alpha y + (1-\alpha)z \Rightarrow \bar{x} = y = z$$



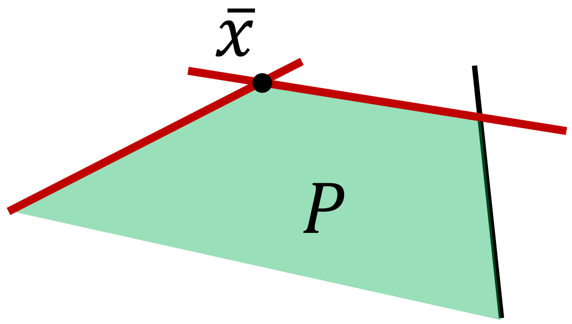
Kein Extremalpunkt

Basislösungen

$$P = \{x: Ax \leq b\},\ A \in \mathbb{R}^{m\times n}, b \in \mathbb{R}^m$$

- Sei $\bar{x} \in P$ und sei $\mathcal{A}(\bar{x}) = \{i: a_i^T \bar{x} = b_i\}$ die aktive Menge bei $\bar{x}$
- $\bar{x} \in P$ heißt Basislösung, falls:

$$\operatorname{rang}(A[\mathcal{A}(\bar{x}),:]) = n \qquad (\Rightarrow \bar{x} = A[\mathcal{A}(\bar{x}),:]^{-1} b)$$



Schnittpunkt zweier (nicht kollinearer) Geraden in $\mathbb{R}^2$

Schnittpunkt dreier (nicht koplanarer) Ebenen in $\mathbb{R}^3$

Satz 6.5. Eckpunkte

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}, \quad A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m$$

Sei $\bar{x} \in P$. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

1. $\bar{x}$ ist ein Eckpunkt
2. $\bar{x}$ ist ein Extremalpunkt
3. $\bar{x}$ ist eine Basislösung

Beweis

Behauptung: $\bar{x}$ ist ein Eckpunkt $\Rightarrow$ $\bar{x}$ ist ein Extremalpunkt

Sei $\bar{x}$ ein Eckpunkt

Angenommen, $\bar{x} = \alpha y + (1-\alpha)z$ mit $y, z \in P, \alpha \in (0,1)$

$$c^T\bar{x} = \alpha c^T y + (1-\alpha)c^T z$$
$$\leq \alpha c^T\bar{x} + (1-\alpha)c^T\bar{x} = c^T\bar{x}$$

$$c^T y = c^T z = c^T\bar{x}$$

$$y = z = \bar{x}$$

$\bar{x}$ ist ein Eckpunkt

$\Rightarrow$ $\bar{x}$ ist ein Extremalpunkt

Beweis

Behauptung: $\bar{x}$ ist ein Extremalpunkt $\Rightarrow$ $\bar{x}$ ist eine Basislösung

Sei $\bar{x}$ ein Extremalpunkt

$\mathcal{A}(\bar{x}) = \{i: a_i^T \bar{x} = b_i\}$

Angenommen, $\operatorname{rang}(A[\mathcal{A}(\bar{x}), :]) < n$

Sei $d \in \ker A[\mathcal{A}(\bar{x}), :] \setminus \{0\}$ und sei $\varepsilon > 0$ so, dass:

$$A[\mathcal{A}(\bar{x})^c, :](x \pm \varepsilon d) < b[\mathcal{A}(\bar{x})^c]$$

$$x_\pm := \bar{x} \pm \varepsilon d$$

$$x_\pm \in P \text{ und } \bar{x} = \tfrac{1}{2}(x_+ + x_-)$$

Widerspruch

$\Rightarrow$ $\bar{x}$ ist eine Basislösung

Beweis

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : a_i^T x \leq b_i, i = 1, \dots m\}$$

Behauptung: $\bar{x}$ ist eine Basislösung $\Rightarrow$ $\bar{x}$ ist ein Eckpunkt

Sei $\bar{x}$ eine Basislösung und setze $c := \sum_{i \in \mathcal{A}(\bar{x})} a_i$

Sei $y \in P$, so gilt:

$$c^T y = \sum_{i \in \mathcal{A}(\bar{x})} a_i^T y \leq \sum_{i \in \mathcal{A}(\bar{x})} b_i = c^T \bar{x}$$

$$c^T y = c^T \bar{x} \iff a_i^T y = b_i \; \forall i \in \mathcal{A}(\bar{x})$$

$$\iff y = \bar{x}$$

$\ker A[\mathcal{A}(\bar{x}), :] = \{0\}$

$\Rightarrow$ $\bar{x}$ ist ein Eckpunkt $\square$

Aufgabe 6.6. Eckpunkte

$$P = \{x: Ax = b, x \geq 0\}, \quad A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m, \ \mathrm{rang}(A) = m$$

- $\bar{x} \in P$ heißt Basislösung zur Basis $\mathcal{B} = \{i_1, \dots, i_m\} \subseteq \{1, \dots, n\}$, falls:

  $\bar{x}_i = 0$ für $i \notin \mathcal{B}$

  $A[:, \mathcal{B}]$ ist regulär $\quad (\Rightarrow \ \bar{x}_\mathcal{B} = A[:, \mathcal{B}]^{-1} b)$

  Die Definition der Basislösung hängt von der Darstellung von P ab

- Zeigen Sie, dass $\bar{x} \in P$ genau dann ein Eckpunkt ist, wenn $\bar{x}$ eine Basislösung zu einer gewissen Basis $\mathcal{B}$ ist.

Aufgabe 6.7. Eigenschaften der Eckpunkte

$$P = \{x : Ax \leq b\},\ A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m$$

- Es gibt endlich viele Eckpunkte
- P enthält zumindest einen Eckpunkt $\Leftrightarrow$ P enthält keine Gerade
- Hauptsatz der linearen Optimierung. Angenommen, P hat Eckpunkte und $\inf\limits_{x \in P} c^T x > -\infty$. Dann gibt es einen Eckpunkt $\bar{x}$ so, dass:

$$\bar{x} = argmin_{x \in P}\, c^T x$$

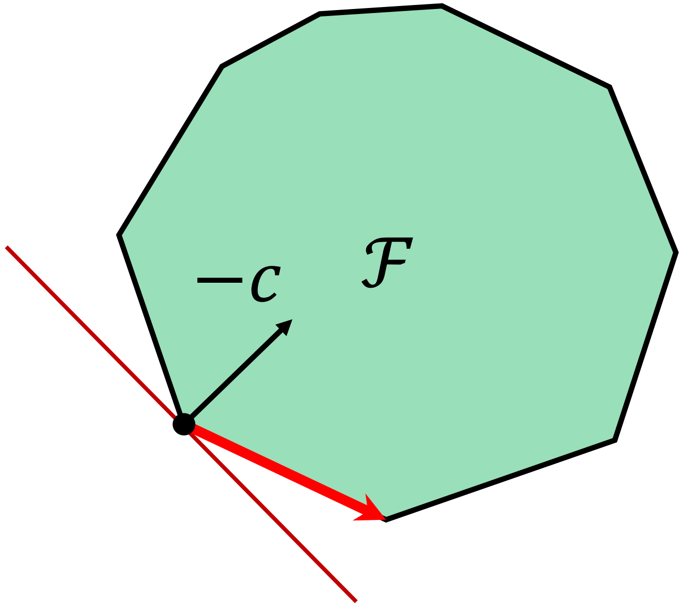
Plan

- Polyeder und Eckpunkte
- Herleitung des Simplex-Verfahrens

Das Simplex-Verfahren

$$\begin{aligned} \text{Minimiere} \quad & c^T x \;\text{ über } x \in \mathbb{R}^n \\ \text{u.d.N.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

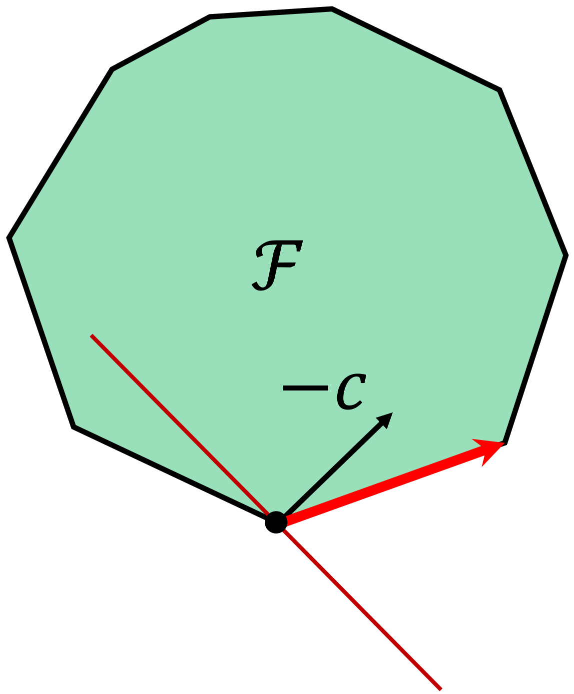
- Wähle eine Startecke des zulässigen Bereiches $\mathcal{F} = \{x : Ax = b, x \geq 0\}$
- Finde eine benachbarte Kante entlang welcher $c^T x$ sich verkleinert
- Gehe entlang dieser Kante zu einem benachbarten Eckpunkt von $\mathcal{F}$



Das Simplex-Verfahren

$$\begin{aligned} \text{Minimiere}\quad & c^T x \ \text{ über } x \in \mathbb{R}^n \\ \text{u.d.N.}\quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

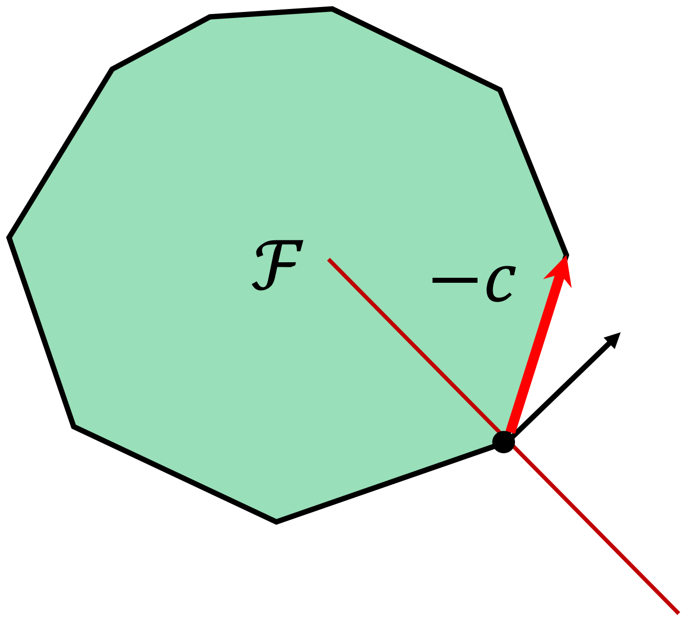
- Wähle eine Startecke des zulässigen Bereiches $\mathcal{F} = \{x: Ax = b, x \geq 0\}$
- Finde eine benachbarte Kante entlang welcher $c^T x$ sich verkleinert
- Gehe entlang dieser Kante zu einem benachbarten Eckpunkt von $\mathcal{F}$



Das Simplex-Verfahren

$$\begin{aligned} \text{Minimiere } \quad & c^T x \quad \text{über } x \in \mathbb{R}^n \\ \text{u.d.N.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

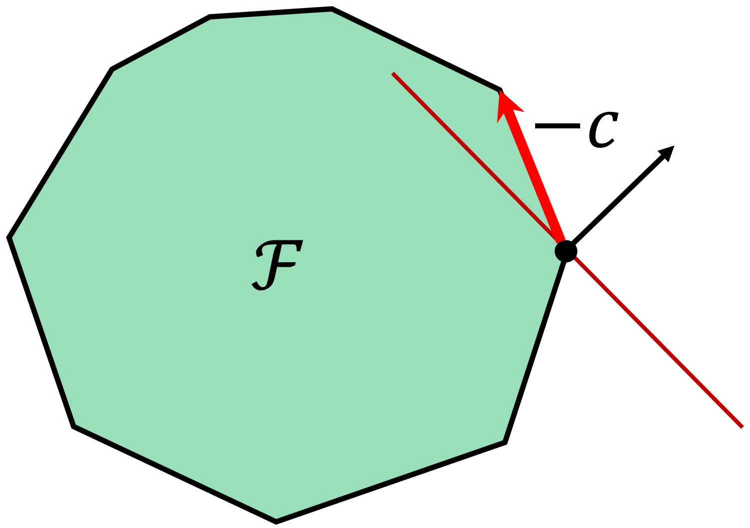
- Wähle eine Startecke des zulässigen Bereiches $\mathcal{F} = \{x : Ax = b, x \geq 0\}$
- Finde eine benachbarte Kante entlang welcher $c^T x$ sich verkleinert
- Gehe entlang dieser Kante zu einem benachbarten Eckpunkt von $\mathcal{F}$



Das Simplex-Verfahren

$$\begin{aligned} \text{Minimiere} \quad & c^T x \quad \text{über } x \in \mathbb{R}^n \\ \text{u.d.N.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

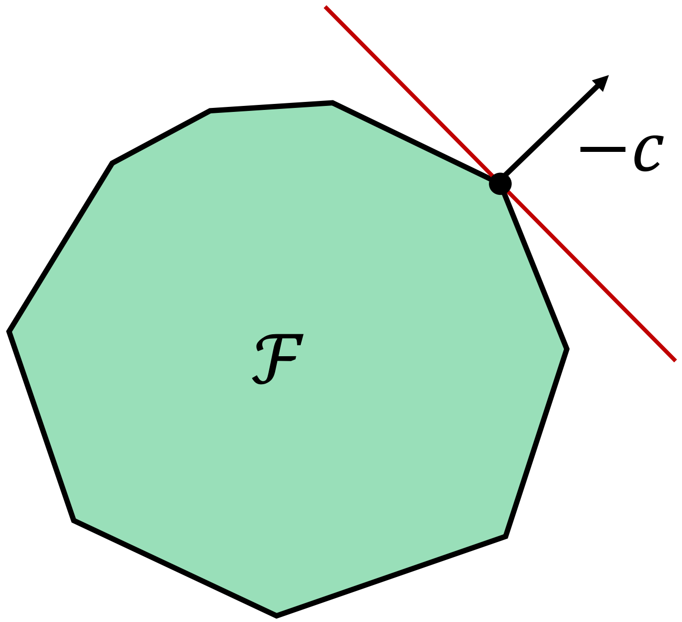
- Wähle eine Startecke des zulässigen Bereiches $\mathcal{F} = \{x: Ax = b, x \geq 0\}$
- Finde eine benachbarte Kante entlang welcher $c^T x$ sich verkleinert
- Gehe entlang dieser Kante zu einem benachbarten Eckpunkt von $\mathcal{F}$



Das Simplex-Verfahren

$$\begin{aligned} \text{Minimiere} \quad & c^T x \quad \text{über } x \in \mathbb{R}^n \\ \text{u.d.N.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

- Wähle eine Startecke des zulässigen Bereiches $\mathcal{F} = \{x : Ax = b, x \geq 0\}$
- Finde eine benachbarte Kante entlang welcher $c^T x$ sich verkleinert
- Gehe entlang dieser Kante zu einem benachbarten Eckpunkt von $\mathcal{F}$



Reduktion zur kanonischen Form

Wähle einen Eckpunkt $\bar{x}$

Sei $\mathcal{B}$ die zugehörige Basis (Aufgabe 6.6)

$$A_{\mathcal{B}} := A[:, \mathcal{B}]$$

$$A_{\mathcal{N}} := A[:, \mathcal{N}], \mathcal{N} := \mathcal{B}^c$$

Minimiere $z = c^T x$

u.d.N. $Ax = b$

$x \geq 0$

Minimiere $z = c_{\mathcal{B}}^T x_{\mathcal{B}} + c_{\mathcal{N}}^T x_{\mathcal{N}}$ $\quad |Z_0$

u.d.N. $A_{\mathcal{N}} x_{\mathcal{N}} + A_{\mathcal{B}} x_{\mathcal{B}} = b$ $\quad |Z$

$x_{\mathcal{N}}, x_{\mathcal{B}} \geq 0$

$A_{\mathcal{B}}$ ist invertierbar

Minimiere $z = \left(c_{\mathcal{N}} - A_{\mathcal{N}}^T A_{\mathcal{B}}^{-T} c_{\mathcal{B}}\right)^T x_{\mathcal{N}} + b^T A_{\mathcal{B}}^{-T} c_{\mathcal{B}} + r$ $\quad |Z_0 - c_{\mathcal{B}}^T A_{\mathcal{B}}^{-1} Z$

u.d.N. $A_{\mathcal{B}}^{-1} A_{\mathcal{N}} x_{\mathcal{N}} + x_{\mathcal{B}} = A_{\mathcal{B}}^{-1} b$ $\quad |A_{\mathcal{B}}^{-1} Z$

$x_{\mathcal{N}}, x_{\mathcal{B}} \geq 0$

Kanonische Form des LP zur Basis $\mathcal{B}$

Basis- und Nichtbasisvariablen

$$\bar{A} = A_{\mathcal{B}}^{-1}A\,,\ \bar{b} = A_{\mathcal{B}}^{-1}b$$

$$\bar{c} = c - c_{\mathcal{B}}^T\bar{A}\,,\ \ \bar{z} = c_{\mathcal{B}}^T\bar{b}$$

$$\begin{array}{ll} \text{Min.} & z = \left(c_{\mathcal{N}} - A_{\mathcal{N}}^T A_{\mathcal{B}}^{-T} c_{\mathcal{B}}\right)^T x_{\mathcal{N}} + b^T A_{\mathcal{B}}^{-T} c_{\mathcal{B}} \\ \text{u.d.N.} & A_{\mathcal{B}}^{-1} A_{\mathcal{N}} x_{\mathcal{N}} + x_{\mathcal{B}} = A_{\mathcal{B}}^{-1} b \\ & x_{\mathcal{N}}, x_{\mathcal{B}} \geq 0 \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{ll} \text{Min.} & z = \bar{c}_{\mathcal{N}}^T x_{\mathcal{N}} + \bar{z} \\ \text{u.d.N.} & \bar{A}_{\mathcal{N}} x_{\mathcal{N}} + x_{\mathcal{B}} = \bar{b} \\ & x_{\mathcal{N}}, x_{\mathcal{B}} \geq 0 \end{array}$$

$$\bar{c}_{\mathcal{B}} = 0$$
$$\bar{A}_{\mathcal{B}} = I$$

kanonische Form

- Die Komponenten von $x_{\mathcal{B}}$ heißen Basisvariablen und die Komponenten von $x_{\mathcal{N}}$ heißen Nichtbasisvariablen
- $x_{\mathcal{N}} := 0 \Rightarrow x_{\mathcal{B}} = \bar{b} = A_{\mathcal{B}}^{-1}b$ aus den Nebenbedingungen

Das ist die Basislösung zur Basis $\mathcal{B}$ (Aufgabe 6.6)

Optimalitätsbedingung

$$
\begin{aligned}
\text{Minimiere} \quad & z = \bar{c}_{\mathcal{N}}^T x_{\mathcal{N}} + \bar{z} \\
\text{u.d.N.} \quad & \bar{A}_{\mathcal{N}} x_{\mathcal{N}} + x_{\mathcal{B}} = \bar{b} \\
& x_{\mathcal{N}}, x_{\mathcal{B}} \geq 0
\end{aligned}
$$

Entsprechende Basislösung:

$$\bar{x}_{\mathcal{B}} = \bar{b}, \ \bar{x}_{\mathcal{N}} = 0 \text{ und } z = \bar{z}$$

Lemma 6.8. Sei $\bar{c}_{\mathcal{N}} \geq 0$, so ist $\bar{x}$ eine optimale Lösung

Beweis. Für alle zulässigen x gilt $z = \overset{\geq 0}{\bar{c}_{\mathcal{N}}^T x_{\mathcal{N}}} + \bar{z} \geq \bar{z}$ $\square$

Simplex-Schritt

$$\begin{aligned} \text{Minimiere} \quad & z = \bar{c}_{\mathcal{N}}^T x_{\mathcal{N}} + \bar{z} \\ \text{u.d.N.} \quad & \bar{A}_{\mathcal{N}} x_{\mathcal{N}} + x_{\mathcal{B}} = \bar{b}, \\ & x_{\mathcal{N}}, x_{\mathcal{B}} \geq 0 \end{aligned}$$

- Angenommen, $\exists j \in \mathcal{N} \text{ mit } \bar{c}_j < 0$
- Wir vergrößern x_j, indem x_k, $k \in \mathcal{N} \setminus \{j\}$ gleich 0 bleiben:

$$x_j(\Delta) := \Delta \geq 0$$

„j tritt in die Basis ein“

$$x_k(\Delta) := 0, \quad k \in \mathcal{N} \setminus \{j\}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} x_{\mathcal{B}}(\Delta) &= \bar{b} - \bar{A}_{\mathcal{N}}[:, j]\Delta \\ z(\Delta) &= \bar{z} + \bar{c}_j \Delta \end{aligned}$$

Unbeschränktheit

$$x_{\mathcal{B}}(\Delta) = \bar{b} - \bar{A}_{\mathcal{N}}[:, j]\Delta$$
$$z(\Delta) = \bar{z} + \bar{c}_j\Delta, \quad \bar{c}_j < 0$$

Lemma 6.9. Seien $\bar{c}_j < 0$, $\bar{A}_{\mathcal{N}}[:, j] \leq 0$, so ist

$$\inf_{x \in \mathcal{F}} c^T x = -\infty$$

Beweis.

$$x_{\mathcal{B}}(\Delta) \geq 0 \ \forall \Delta \geq 0 \Rightarrow x(\Delta) \text{ ist zulässig } \forall \Delta \geq 0$$
$$z(\Delta) \rightarrow -\infty \ \textit{für} \ \Delta \rightarrow \infty \qquad \square$$

Simplex-Schritt

$$x_{\mathcal{B}}(\Delta) = \bar{b} - \bar{A}_{\mathcal{N}}[:,j]\Delta$$
$$z(\Delta) = \bar{z} + \bar{c}_j\Delta, \quad \bar{c}_j < 0$$

Angenommen, $\mathcal{J}(j) = \{\, i\colon\ \bar{A}_{\mathcal{N}}[i,j] > 0\} \neq \emptyset$

Wie groß kann Δ sein?

$$x_{\mathcal{B}}(\Delta) \geq 0 \Leftrightarrow x(\Delta) \text{ ist zulässig} \Leftrightarrow \ \bar{b} \geq \bar{A}_{\mathcal{N}}[:,j\,]\Delta$$
$$\Delta \leq \Delta^{+} = \min\{\bar{b}_i/\bar{A}_{\mathcal{N}}[i,j]\colon i \ \in \mathcal{J}(j)\}$$

Sei $i^{+} = \operatorname{argmin}_i \left\{\frac{\bar{b}_i}{\bar{A}_{\mathcal{N}}[i,j]}\colon i \in \mathcal{J}(j)\right\}$ *Quotientenregel*

$\Rightarrow \ x_{\mathcal{B},i^{+}}(\Delta^{+}) = 0 \quad$ „i^{+} tritt aus der Basis aus“

Simplex-Schritt

$$\bar{x}^+ := x(\Delta^+)$$
$$\bar{z}^+ := z(\Delta^+) = \bar{z} + \bar{c}_j \Delta^+ \qquad \textit{Simplex-Schritt}$$
$$\mathcal{B}^+ := \{j\} \cup \mathcal{B} \setminus \{i^+\}$$

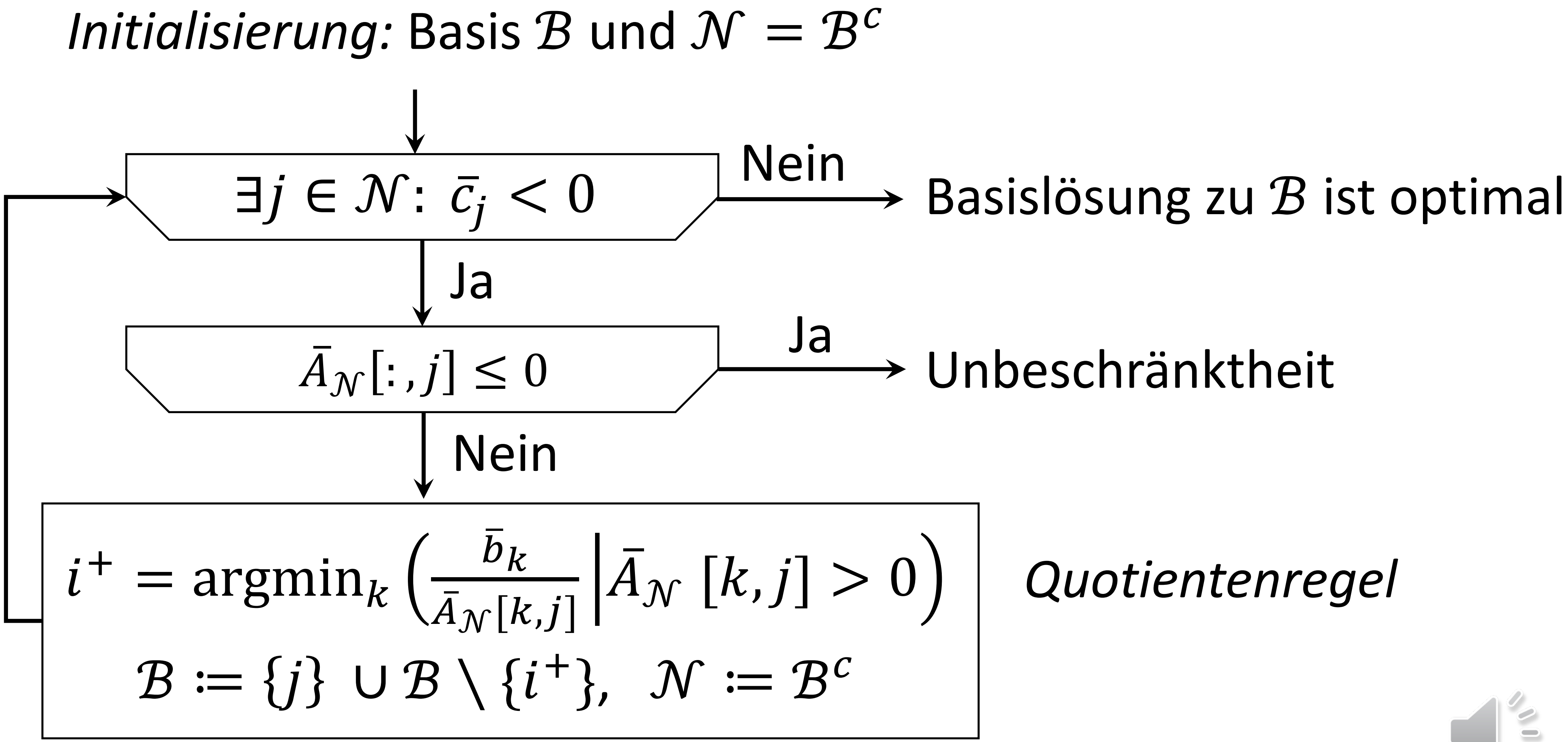
Lemma 6.10. $\bar{x}^+$ ist eine Basislösung zur Basis $\mathcal{B}^+$

Beweis.

$$\bar{A}[:,\mathcal{B}] = \begin{array}{c} \quad i^+ \\ \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \end{array} \xRightarrow[+j\text{-te Spalte}]{-i^+\text{-te Spalte}} \bar{A}[:,\mathcal{B}^+] = \begin{pmatrix} \bar{A}_{\mathcal{N}}[< i^+, j] & I & 0 \\ \underbrace{\bar{A}_{\mathcal{N}}[i^+, j]}_{> 0} & 0 & 0 \\ \bar{A}[> i^+, j] & 0 & I \end{pmatrix} \text{ ist regulär}$$

$$A[:,\mathcal{B}^+] = \underbrace{A[:,\mathcal{B}]}_{\text{regulär}} \underbrace{\bar{A}[:,\mathcal{B}^+]}_{\text{regulär}} \xrightarrow[\text{Aufgabe 6.6}]{} \bar{x}^+ \text{ ist Basislösung zur Basis } \mathcal{B}^+$$

Das Simplex-Verfahren



Nichtentartete Basen

Die Basis $\mathcal{B}$ heißt nichtentartet falls $\bar{x}_{\mathcal{B}} = \bar{b} = A_{\mathcal{B}}^{-1} b > 0$

Lemma 6.11. Sei $\mathcal{B}$ nichtentartet. Dann gilt $\bar{z}^+ < \bar{z}$

Beweis.

$$\Delta^+ = \min_i \{ \overbrace{\bar{b}_i}^{>0} / \bar{A}_{\mathcal{N}}[i,j] : \bar{A}_{\mathcal{N}}[i,j] > 0 \} > 0$$

$$\bar{z}^+ = \bar{z} + \bar{c}_j \Delta^+ < \bar{z} \qquad \square$$

Konvergenz

- Ein LP heißt nichtentartet falls alle Basen $\mathcal{B}$ nichtentartet sind
- Lemma 6.12. Ist das LP nichtentartet, so konvergiert das SV gegen eine optimale Lösung x_*

  Beweis: In jedem Schritt wird die Zielfunktion verkleinert

  Es gibt endlich viele Eckpunkte, also konvergiert das SV

  $\square$

Bland-Regel

- Angenommen, die Iterationen $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots$ konvergieren nicht.
  Dann gibt es $1 \leq k < l$ so, dass $\bar{x}_k = \bar{x}_\ell$ *Zyklus*

- Bland-Regel. Auf jedem Schritt:
  - Wähle eine Nichtbasisvariable x_j mit $\overline{c_j} < 0$ und möglichst kleinem j als in die Basis eintretende Variable
  - Wähle eine Basisvariable x_{i^+} durch die Quotientenregel und möglichst kleinem i^+ als aus der Basis austretende Variable

- Das Simplex-Verfahren mit Bland-Regel vermeidet die Zyklen

Zusammenfassung

- Polyeder und Eckpunkte
- Herleitung des Simplex-Verfahrens

Nächstes Video

- 6c. Lineare Programmierung: Simplex Verfahren II