2. Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. Montrer que

$$\det(\mathrm{Id} + tA) = 1 + \operatorname{tr} A \cdot t + o(t), \quad t \to +0.$$

4. Soit $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{C})$. On suppose que $a_{ij} \in \{0, 1\}$ pour tout i, j et que toutes les valeurs propres de A sont positives. Montrer que toutes le valeurs propres de A sont égales à 1.

7. Trouver un example d'un endomorphisme qui n'admet pas d'un polynôme minimal.
8. (a) Soit $P \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice de projection : $P^2 = P$. Montrer que P est diagonalisable.
   (b) Soit $R \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice de réflection : $R^2 = I$. Montrer que R est diagonalisable.
   (c) Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ une matrice satisfaisant à $A^k = I$, où $k \geq 2$. Montrer que A est diagonalisable.
9. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique telle que $(A - 3I)^2(A - 5I)^7 = 0$. Trouver le polynôme minimal de A, en supposant que A n'est pas scalaire. Pour $n = 2$, trouver A à une conjugaison par une matrice $P \in O(2)$ près.
10. Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ une matrice avec le polynôme minimal $\mu_A(x) = x^{10} - x^3$.
    (a) Montrer que A n'est pas surjective.
    (b) Montrer que A n'est pas diagonalisable.
11. Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension fini. Soit $J \in \operatorname{End}_{\mathbb{R}}(V)$, $J^2 = -\mathrm{id}$. On appelle J *une structure complexe sur* V.
    (a) (i) Montrer que $\dim V = 2n$, $n \geq 1$.
        (ii) Calculer le polynôme caractéristique et le polynôme minimal de J.
        (iii) Montrer que J n'est pas trigonalisable.
        (iv) Montrer qu'il existe une base $\{e_1, \ldots, e_n, f_1, \ldots, f_n\}$ telle que $Je_k = f_k$, $Jf_k = -e_k$. Ecrire la matrice de J dans cette base.
    (b) On pose $(\alpha + i\beta) \cdot v = \alpha v + \beta J(v)$ pour tout α, $\beta \in \mathbb{R}$ et $v \in V$.
        (i) Montrer que $\lambda_1 \cdot (\lambda_2 \cdot v) = (\lambda_1 \lambda_2) \cdot v$ pour tout $v \in V$, λ_1, $\lambda_2 \in \mathbb{C}$. En déduire qu'une structure complexe permet de munir V d'une structure d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. On désigne ce $\mathbb{C}$-espace vectoriel par V_J.
        (ii) Montrer que $\{e_1, \ldots, e_n\}$ est une base de V_J. En déduire $\dim V_J$.
        (iii) Soit $T \in \operatorname{End}_{\mathbb{R}}(V)$. Montrer que $\lambda \cdot (Tv) = T(\lambda \cdot v)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $v \in V$ si et seulement si $TJ = JT$. On pose $\operatorname{End}_{\mathbb{R}}(V, J)$. En déduire que $\operatorname{End}_{\mathbb{C}}(V_J) \simeq_{\mathrm{Set}} \operatorname{End}_{\mathbb{R}}(V, J)$.
        (iv) Soit $T \in \operatorname{End}_{\mathbb{R}}(V, J)$. Montrer que dans la base e_1, ..., e_n, Je_1, ..., Je_n construite ci-dessus la matrice de T a une forme $\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}$, où A, $B \in M_n(\mathbb{R})$. En déduire $\dim_{\mathbb{R}} \operatorname{End}_{\mathbb{R}}(V, J)$.

12. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$, $\operatorname{rang} A = 1$.
    (a) Montrer que $A^2 = \operatorname{tr} A \cdot A$.
    (b) Calculer χ_A et μ_A. Est-ce que A est diagonalisable ?
13. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer qu'il n'existe pas de $B \in M_2(\mathbb{C})$ tel que $B^2 = A$.