**Feuille d'exercices n$^o$ 5 – Espace quotient - produit tensoriel**

**Définition 1.** Soit $E$ un $\mathbf{k}$-espace vectoriel et $F \subseteq E$ un sous-espace vectoriel. On définit la relation $\sim_F$ sur $E$ :

$$x \sim_F y \text{ si et seulement si } x - y \in F.$$

Les éléments de $E/\sim_F$ sont les ensembles

$$v + F = \{v + f \mid f \in F\}, \quad v \in E.$$

On munit $E/\sim_F$ d'une structure d'un $\mathbf{k}$-espace vectoriel comme suit :

$$(v_1 + F) + (v_2 + F) = v_1 + v_2 + F, \quad \lambda(v + F) = \lambda v + F.$$

Cet espace vectoriel $E/\sim_F$ s'appelle *le quotient de $E$ par $F$* et se note $E/F$.

1. Soit $E$ un $\mathbf{k}$-espace vectoriel de dimension finie et $F \subseteq E$ un sous-espace vectoriel. Soit $f_1, \ldots, f_k$ une base de $F$ et $f_1, \ldots, f_k, g_1, \ldots, g_m$ une base de $E$.
   (a) Montrer que $g_1 + F, \ldots, g_m + F$ est une base de $E/F$. En déduire la formule $\dim E = \dim F + \dim(E/F)$.
   (b) Soit $\mathcal{A} \in \mathrm{End}_{\mathbf{k}}(E)$ un endomorphisme qui fixe $F$ (i.e. $\mathcal{A}f \in F$ pour tout $f \in F$). Alors on peut définir les opérateurs $\mathcal{A}|_F \in \mathrm{End}_{\mathbf{k}}(F)$ et $\mathcal{A}' \in \mathrm{End}_{\mathbf{k}}(E/F)$ comme suit :
   $$\mathcal{A}|_F f = Af, \quad f \in F,$$
   $$\mathcal{A}'(e + F) = \mathcal{A}e + F, \quad e \in E.$$
   Montrer que $\mathcal{A}'$ est bien défini (si $e + F = e' + F$, alors $\mathcal{A}'(e + F) = \mathcal{A}'(e' + F)$) et $\mathcal{A}' \in \mathrm{End}_{\mathbf{k}}(E/F)$.
   (c) Montrer que la matrice $A$ de $\mathcal{A}$ dans la base $f_1, \ldots, f_k, e_1, \ldots, e_m$ est triangulaire par bloc : $A = \left(\begin{smallmatrix} B & C \\ 0 & E \end{smallmatrix}\right)$. Trouver la matrice de $\mathcal{A}|_F$ dans la base $f_1, \ldots, f_k$ et la matrice de $\mathcal{A}'$ dans la base $e_1 + F, \ldots, e_m + F$.
   (d) Montrer que $\chi_{\mathcal{A}} = \chi_{\mathcal{A}|_F}\chi_{\mathcal{A}'}$. Montrer que $\mu_{\mathcal{A}|_F}$ et $\mu_{\mathcal{A}'}$ divisent $\mu_{\mathcal{A}}$. Montrer que $\mu_{\mathcal{A}}$ divise $\mu_{\mathcal{A}|_F}\mu_{\mathcal{A}'}$.
2. Soit $P \in \mathbb{C}[x]$, $\deg P = d$. On désigne par $\langle P \rangle$ l'idéal engendré par $P$ :
   $$\langle P \rangle = \big\{QP \mid Q \in \mathbb{C}[x]\big\}.$$
   (a) Montrer qu'il existe un isomorphisme naturel de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels $\mathbb{C}[x]/\langle P \rangle \to \mathbb{C}_{d-1}[x]$ (on dit qu'un morphisme est *naturel* s'il ne dépend pas du choix des bases).
   (b) On suppose que $P$ est *séparable* (i.e. n'admet aucune racine multiple). Montrer qu'il existe un isomorphisme naturel de $\mathbb{C}$-algèbres $\mathbb{C}[x]/\langle P \rangle \to \mathbb{C}^d$ (multiplication dans $\mathbb{C}^d$ est définie élément-par-élément).

**Définition 2.** Soit $V$, $W$ deux $\mathbf{k}$-espaces vectoriels. Le *produit tensoriel* de $V \otimes W$ est le quotient de l'espace vectoriel $V * W$ dont la base consiste des paires $(v, w)$, $v \in V$, $w \in W$, par le sous-espace $F$ engendré par les éléments

$$(v_1 + v_2, w) - (v_1, w) - (v_2, w),$$
$$(v, w_1 + w_2) - (v, w_1) - (v, w_2),$$
$$(av, w) - a(v, w),$$
$$(v, aw) - a(v, w),$$

où $v_1$, $v_2$, $v \in V$, $w_1$, $w_2$, $w_2 \in W$ et $a \in \mathbf{k}$. On désigne $v \otimes w = (v, w) + F$ et on appelle les éléments de cette forme *tenseurs purs*.

3. (a) Soit $U$, $V$, $W$ trois $\mathbf{k}$-espaces vectoriels. Construire une bijection naturelle entre les applications bilinéaires $V \times W \to U$ est les applications linéaires $V \otimes W \to U$.
   (b) Soit $\{v_i\}$ une base de $V$ et $\{w_j\}$ une base de $W$. Montrer que $\{v_i \otimes w_j\}$ est une base de $V \otimes W$. En déduire $\dim(V \otimes W)$.
   (c) Construire un isomorphisme naturel $V^* \otimes W \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{k}}(V, W)$ dans le cas $\dim V, \dim W < \infty$.
4. Soit $e_1$, $e_2$, $e_3$, $e_4$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$. Montrer que $e_1 \otimes e_2 + e_3 \otimes e_4$ n'est par un tenseur pur dans $\mathbb{R}^4 \otimes \mathbb{R}^4$.
5. Soit $\mathcal{A}_1 \colon V_1 \to W_1$, $\mathcal{A}_2 \colon V_2 \to W_2$ deux applications $\mathbf{k}$-linéaires des espaces de dimension finie. On définit leur produit tensoriel $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 \colon V_1 \otimes V_2 \to W_1 \otimes W_2$ sur les tenseurs purs comme suit :

$$(\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2)(v_1 \otimes v_2) = (\mathcal{A}_1 v_1) \otimes (\mathcal{A}_2 v_2),$$

   et on étend la définition sur $V_1 \otimes V_2$ par linéarité. On peut vérifier que la définition est correcte.
   (a) Soient $\{e_i\}$, $\{f_j\}$, $\{h_i\}$, $\{g_j\}$ les bases de $V_1$, $W_1$, $V_2$, $W_2$ ; $A_1$ la matrice de $\mathcal{A}_1$ dans les bases $\{e_i\}$, $\{f_j\}$ ; $A_2$ la matrice de $\mathcal{A}_2$ dans les bases $\{h_i\}$, $\{g_j\}$. Ecrire la matrice $A_1 \otimes A_2$ de $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ dans les bases $\{e_i \otimes h_i\}$, $\{f_j \otimes g_j\}$. On appelle $A_1 \otimes A_2$ *le produit de Kronecker* des matrices $A_1$ et $A_2$.
   (b) Soit $V_1 = W_1$, $V_2 = W_2$. Soient $\lambda_1$, $v_1$ une valeur propre et un vecteur propre de $\mathcal{A}_1$ ; $\lambda_2$, $v_2$ une valeur propre et un vecteur propre de $\mathcal{A}_2$. Montrer que $\lambda_1\lambda_2$, $v_1 \otimes v_2$ sont une valeur propre et un vecteur propre de $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$.
   (c) Soit $\mathbf{k} = \mathbb{C}$, $V_1 = W_1$, $V_2 = W_2$, $\chi_{\mathcal{A}_1}(\zeta) = \prod_{i=1}^{n_1}(\lambda_i - \zeta)$, $\chi_{\mathcal{A}_2}(\zeta) = \prod_{j=1}^{n_2}(\mu_j - \zeta)$ (on autorise des racines multiples). Montrer que

$$\chi_{\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2}(\zeta) = \prod_{\substack{1 \leq i \leq n_1 \\ 1 \leq j \leq n_2}} (\lambda_i \mu_j - \zeta).$$

   En déduire les expressions pour $\mathrm{tr}(\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2)$, $\det(\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2)$ et $\mathrm{rang}(\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2)$.
   (d) Soit $V_1 = W_1$, $V_2 = W_2$. Soient $\lambda_1$, $v_1$ une valeur propre et un vecteur propre de $\mathcal{A}_1$ ; $\lambda_2$, $v_2$ une valeur propre et un vecteur propre de $\mathcal{A}_2$. Montrer que $\lambda_1 \pm \lambda_2$, $v_1 \otimes v_2$ sont une valeur propre et un vecteur propre de

$$\mathcal{A}_1 \otimes \mathrm{id}_{V_2} \pm \mathrm{id}_{V_1} \otimes \mathcal{A}_2.$$

   Pour $\mathbf{k} = \mathbb{C}$ obtenir l'expression pour le polynôme caractéristique des opérateurs $\mathcal{A}_1 \otimes \mathrm{id}_{V_2} \pm \mathrm{id}_{V_1} \otimes \mathcal{A}_2$.
6. On appelle $z \in \mathbb{C}$ un nombre algèbrique (resp. un entier algèbrique), si $z$ est une racine d'un polynôme monique à coefficients dans $\mathbb{Q}$ (resp. dans $\mathbb{Z}$). L'ensemble de nombres algèbriques est noté $\overline{\mathbb{Q}}$, l'ensemble d'entiers algèbriques est noté $\mathbb{A}$.
   (a) Montrer que $z \in \mathbb{Z}$ est un nombre algèbrique (resp. un entier algèbrique) si est seulement si $z$ est une valeur propre d'une matrice avec des éléments dans $\mathbb{Q}$ (resp. dans $\mathbb{Z}$). (*Indication* : utiliser la *matrice compagnon*).
   (b) Montrer que $\overline{\mathbb{Q}}$ est un corps et $\mathbb{A}$ est un anneau.