8b. Diskrete Optimierung
Branch-and-Bound-Verfahren

Dr. Alexey Agaltsov
Optimierung SoSe 2020

Plan

- BB für binäre Programme
- BB für ganzzahlige lineare Programme

Rucksackproblem

Wir erwägen verschiedene Anlagemöglichkeiten:

	Projekt 1	Projekt 2	Projekt 3	Projekt 4
Erforderliche Investition	8	1	5	4
Erwarteter Gewinn	24	2	20	4

Wähle die Anlagemöglichkeiten so aus, dass der erwartete Gewinn maximal ist und die die Gesamtkosten kleiner als **9** sind

Rucksackproblem

$$\left.\begin{array}{rl} \text{Maximiere} & 24x_1 + 2x_2 + 20x_3 + 4x_4 \\ \text{u.d.N.} & 8x_1 + 1x_2 + 5x_3 + 4x_4 \leq 9 \\ & x_j \in \{0,1\}, \quad j = 1, \dots, 4 \end{array}\right\} GP(1)$$

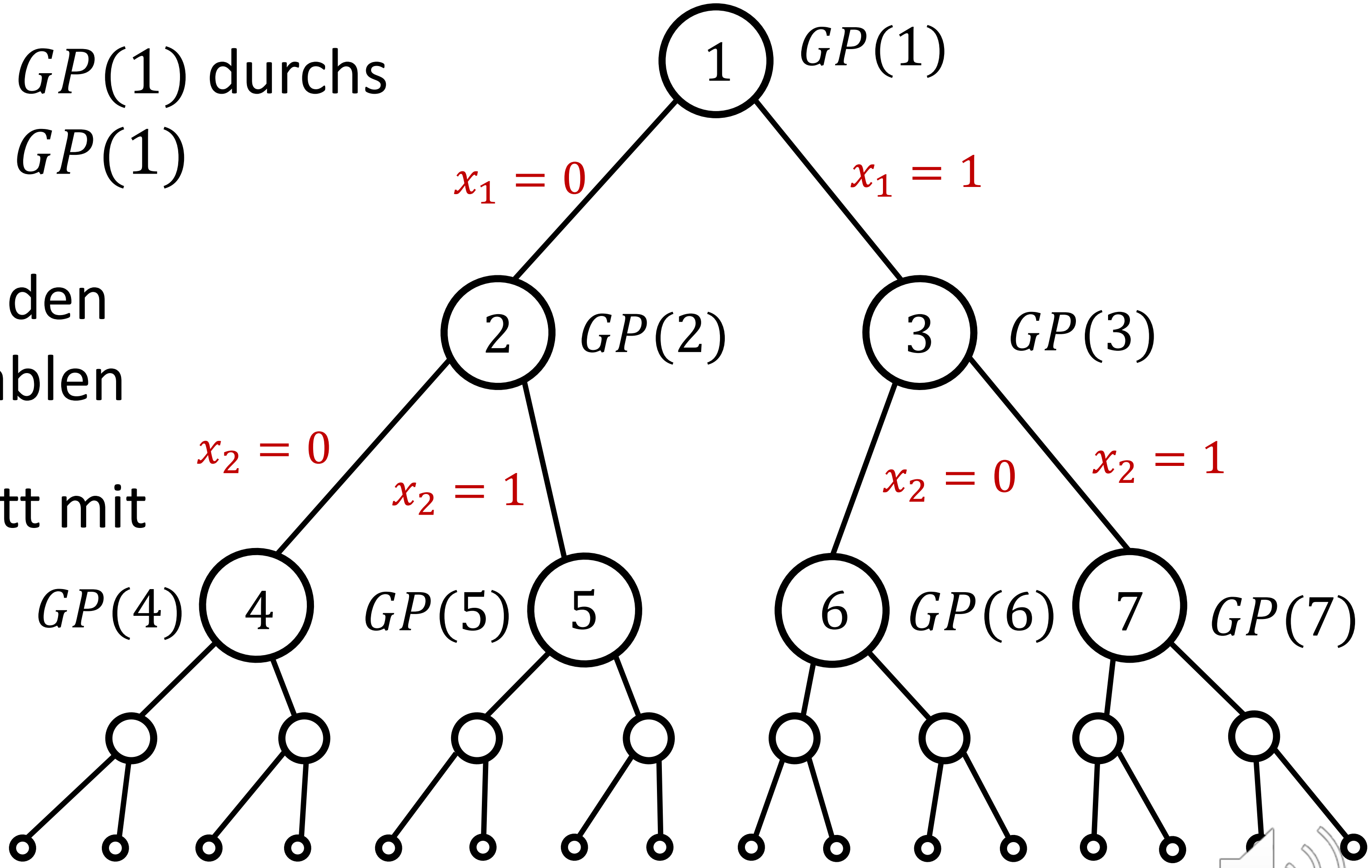
- Sei $z_* = z_{GP(1)}$ der optimale Zielfunktionswert
- Kann man einfach alle Kombinationen der Variablen überprüfen?

Aufzählungsbaum

- Wir erhalten $GP(2)$ aus $GP(1)$ durchs Einsetzen von $x_1 = 0$ in $GP(1)$

- Die Blätter entsprechen den Programmen ohne Variablen

- Wähle ein zulässiges Blatt mit dem besten Wert aus



Aufzählungsbaum

- Für n Entscheidungsvariablen gibt es 2^n Punkte zu überprüfen
- Angenommen, wir überprüfen $2^{30} \approx 10^9$ Punkte pro Sekunde

Variablen	30	40	50	60	70
Zeit	$1\ s$	$16.7\ m$	$12.1\ Tage$	$34\ Jahre$	$34{,}865\ Jahre$

Branch-and-bound (Verzweigungsbaumverfahren)

- Aufzählung aller Punkte ist häufig sehr langsam

- Das *Branch-and-Bound-Verfahren* ist eine optimierte Aufzählung

  Mehrere unteroptimale Zweige werden abgeschnitten

- Das BB-Verfahren wurde im Jahre 1954 von G.B. Dantzig, L. Ford und R. Fulkerson geprägt

LP-Relaxation

$$\left.\begin{array}{rl} \text{Maximiere} & 24x_1 + 2x_2 + 20x_3 + 4x_4 \\ \text{u.d.N.} & 8x_1 + 1x_2 + 5x_3 + 4x_4 \leq 9 \\ & \cancel{x_j \in \{0,1\}}\,, \quad j = 1, \dots, 4 \end{array}\right\} \cancel{GP(1)} \quad LP(1)$$

$$0 \leq x_j \leq 1$$

- Wir lassen die Ganzzahligkeitsbedingung weg und dies ergibt die LP-Relation $LP(1)$ von $GP(1)$
- Welche Informationen über $GP(1)$ kann man durch die Lösung von $LP(1)$ erhalten?

LP-Relaxation

$$\left.\begin{aligned} \text{Maximiere } \; & 24x_1 + 2x_2 + 20x_3 + 4x_4 \\ \text{u.d.N. } \; & 8x_1 + 1x_2 + 5x_3 + 4x_4 \le 9 \\ & \cancel{x_j \in \{0,1\}}, \quad j = 1, \dots, 4 \end{aligned}\right\} \cancel{GP(1)} \quad LP(1)$$

$$0 \le x_j \le 1$$

- Im Allgemeinen kann man eine LP-Relaxation mit dem Simplex-Verfahren lösen
- Aber die LP-Relaxation von Rucksackproblem ist mithilfe eines Greedy-Algorithmus lösbar

Greedy-Algorithmus

- Berechne die Verhältnisse der erwarteten Gewinne zu den erforderlichen Investitionen

- Wähle die Projekte in abnehmender Reihenfolge des Quotienten

	Projekt 1	Projekt 2	Projekt 3	Projekt 4
Erforderliche Investition	8	1	5	4
Erwarteter Gewinn	24	2	20	4
Quotient	3	2	4	1
Rang:	2	3	1	4

Lösung von $LP(1)$

$$\left.\begin{array}{r} \text{Maximiere } \; 24x_1 + 2x_2 + 20x_3 + 4x_4 \\ \text{u.d.N. } \; 8x_1 + 1x_2 + 5x_3 + 4x_4 \leq 9 \\ 0 \leq x_j \leq 1, \; j = 1, \dots, 4 \end{array}\right\} LP(1)$$

	x_1	x_2	x_3	x_4
Rang	2	3	1	4
Wert	0.5	0	1	0

$$z_{LP(1)} = 32$$

- Damit erhalten wir eine Abschätzung nach oben für den optimalen Wert:

$$z_* \leq z_{LP}(1) = 32$$

Verzweigung

$\boldsymbol{LP(1)}$
$x = (\frac{1}{2}, 0,1,0)$
$z = 32$

- Die Lösung von $LP(1)$ ist nicht zulässig in $GP(1)$, weil x_1 nicht ganzzahlig ist
- Um diese Lösung auszuschießen, betrachten wir zwei neue Probleme, wobei wir die Nebenbedingung $x_1 = 0$ bzw. $x_1 = 1$ hinzufügen

Verzweigung

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & LP(1) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ LP(2) & & LP(3) \end{tikzcd}$$

Maximiere $24x_1 + 2x_2 + 20x_3 + 4x_4$

u.d.N. $8x_1 + 1x_2 + 5x_3 + 4x_4 \leq 9$

$0 \leq x_j \leq 1,\ j = 1, \dots, 4$

$x_1 = 0$

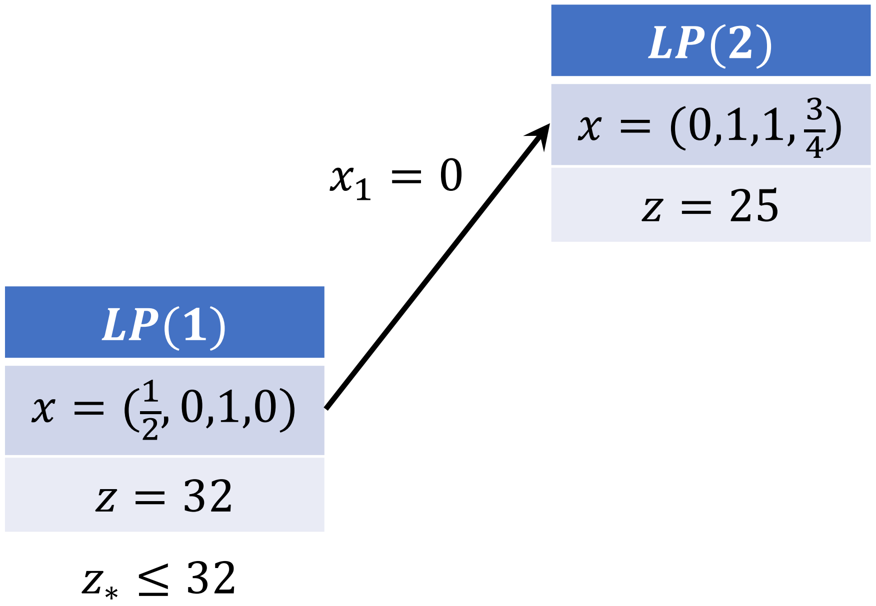
Maximiere $24x_1 + 2x_2 + 20x_3 + 4x_4$

u.d.N. $8x_1 + 1x_2 + 5x_3 + 4x_4 \leq 9$

$0 \leq x_j \leq 1,\ j = 1, \dots, 4$

$x_1 = 1$

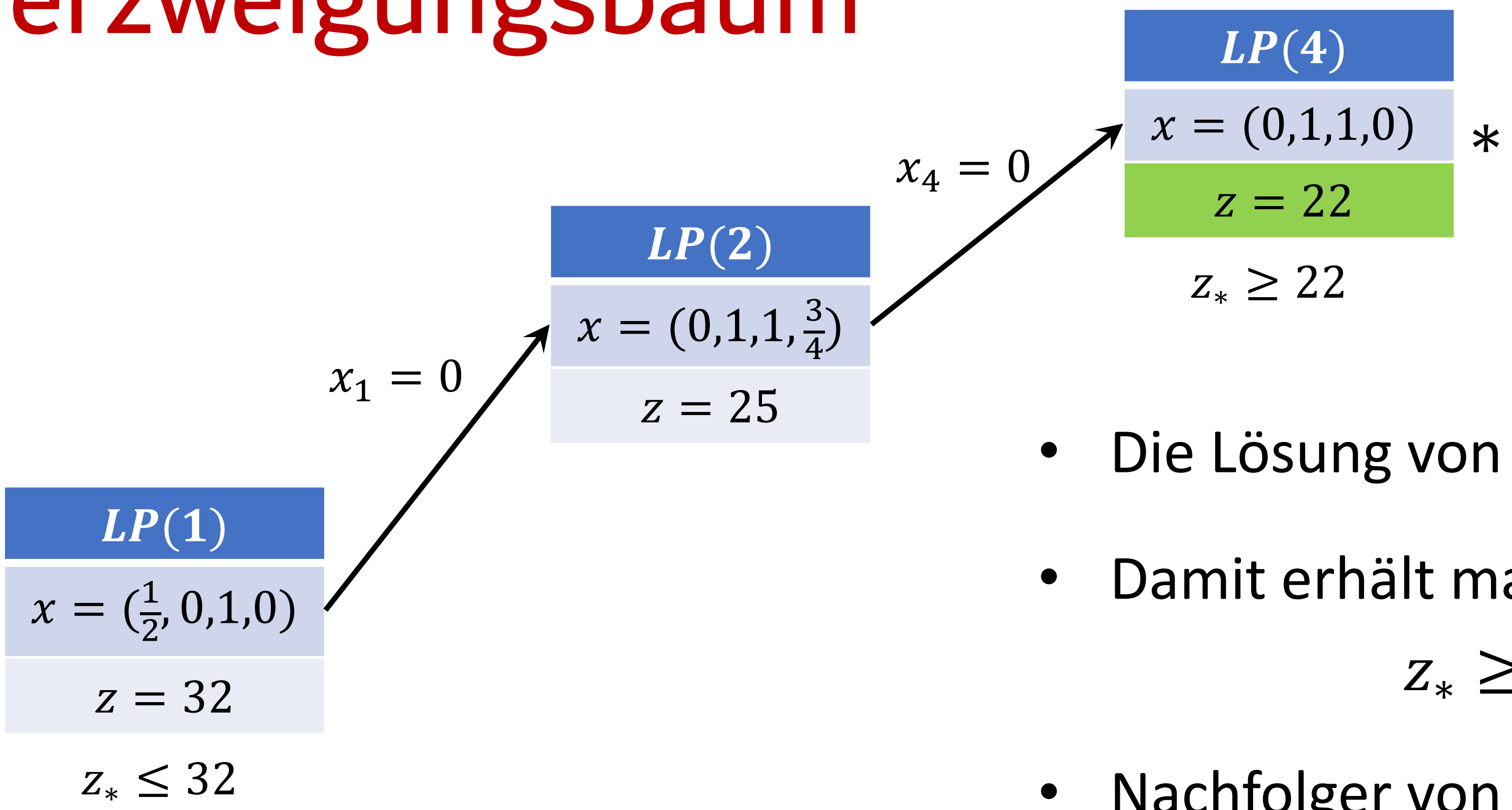
Verzweigungsbaum



- Wir lösen $LP(2)$
- Die Lösung von $LP(2)$ ist nicht in $GP(1)$ zulässig, weil x_4 nicht ganzzahlig ist
- Wir verzweigen $LP(2)$ in zwei Nachfolger durch die Zugabe der Nebenbedingung $x_4 = 0$ bzw. $x_4 = 1$

x_4 ist die Verzweigungsvariable

Verzweigungsbaum



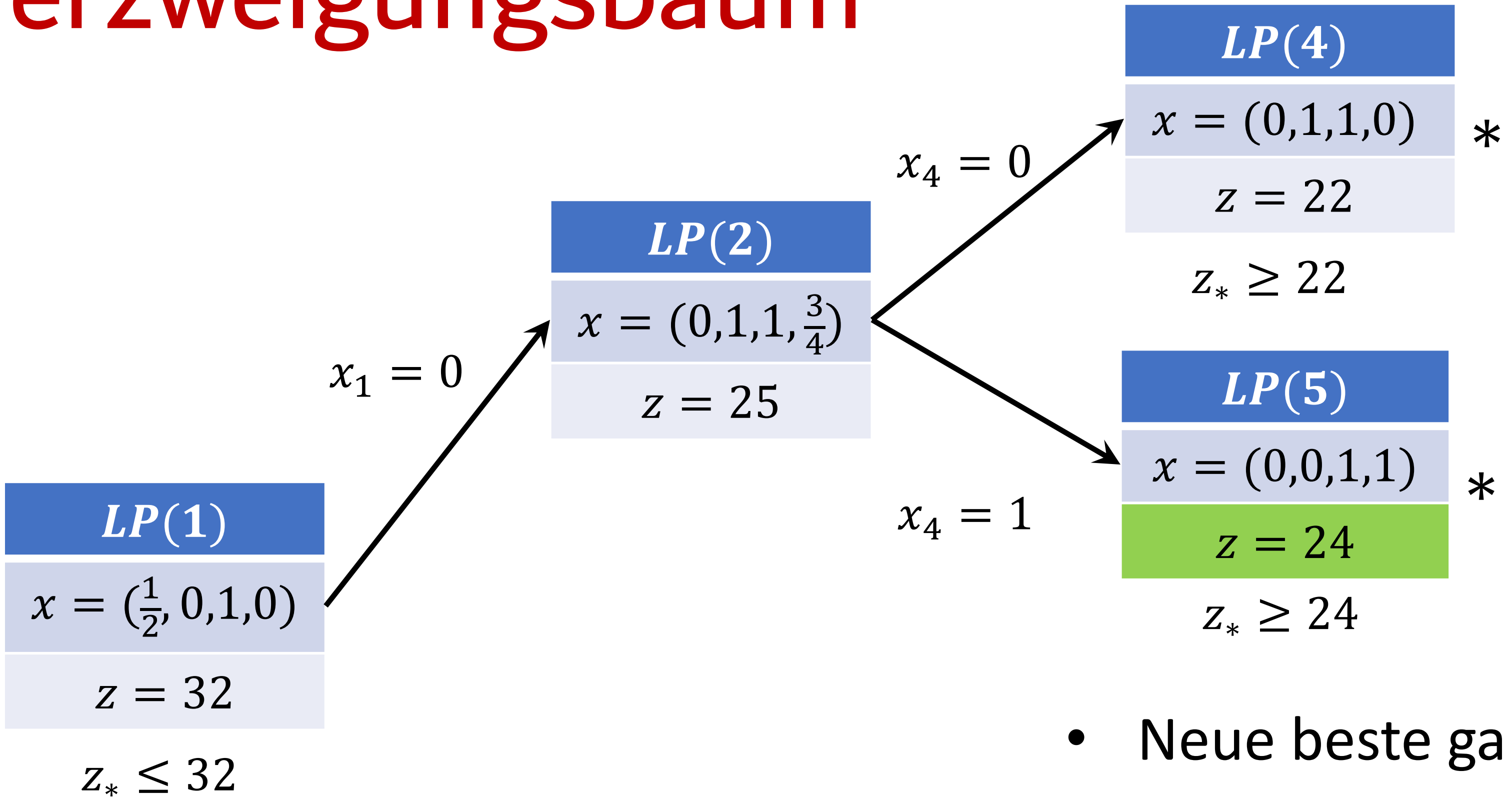
- Die Lösung von $LP(4)$ ist zulässig in $GP(1)$
- Damit erhält man eine untere Schranke:

$$z_* \geq z_{LP(4)} = 22$$

- Nachfolger von $LP(4)$ können nur kleinere optimale Werte haben

Der Zweig von $LP(4)$ wird abgeschnitten

Verzweigungsbaum



- Neue beste ganzzahlige Lösung
- Neue untere Schanke:

$$z_* \geq z_{LP(5)} = 24$$

- Der Zweig von $LP(5)$ wird abgeschnitten

Verzweigungsbaum

$LP(1)$: $x = (\frac{1}{2}, 0,1,0)$, $z = 32$, $z_* \leq 32$

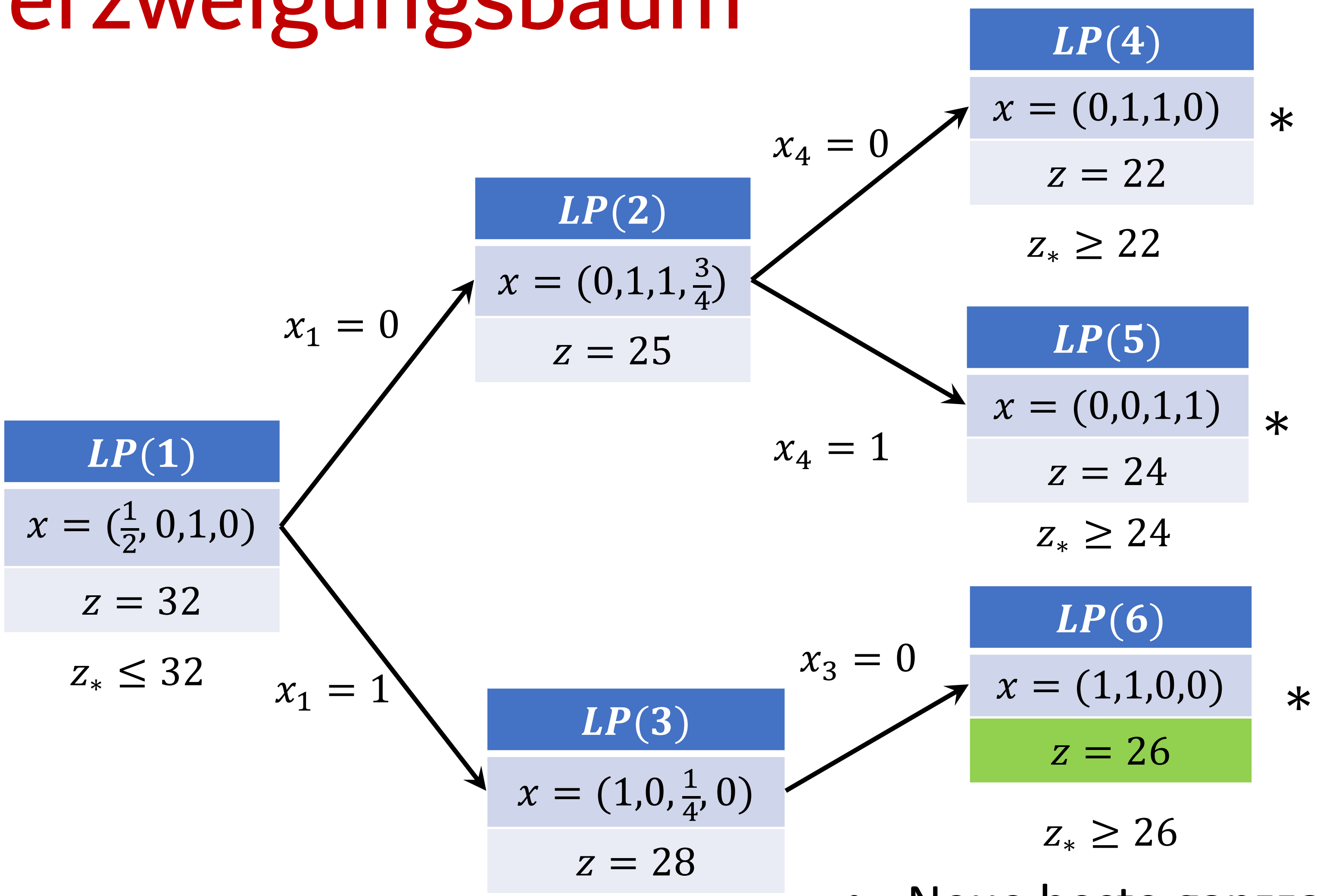
$x_1 = 0$ → **$LP(2)$**: $x = (0,1,1,\frac{3}{4})$, $z = 25$

- $x_4 = 0$ → **$LP(4)$**: $x = (0,1,1,0)$ *, $z = 22$, $z_* \geq 22$
- $x_4 = 1$ → **$LP(5)$**: $x = (0,0,1,1)$ *, $z = 24$, $z_* \geq 24$

$x_1 = 1$ → **$LP(3)$**: $x = (1,0,\frac{1}{4}, 0)$, $z = 28$

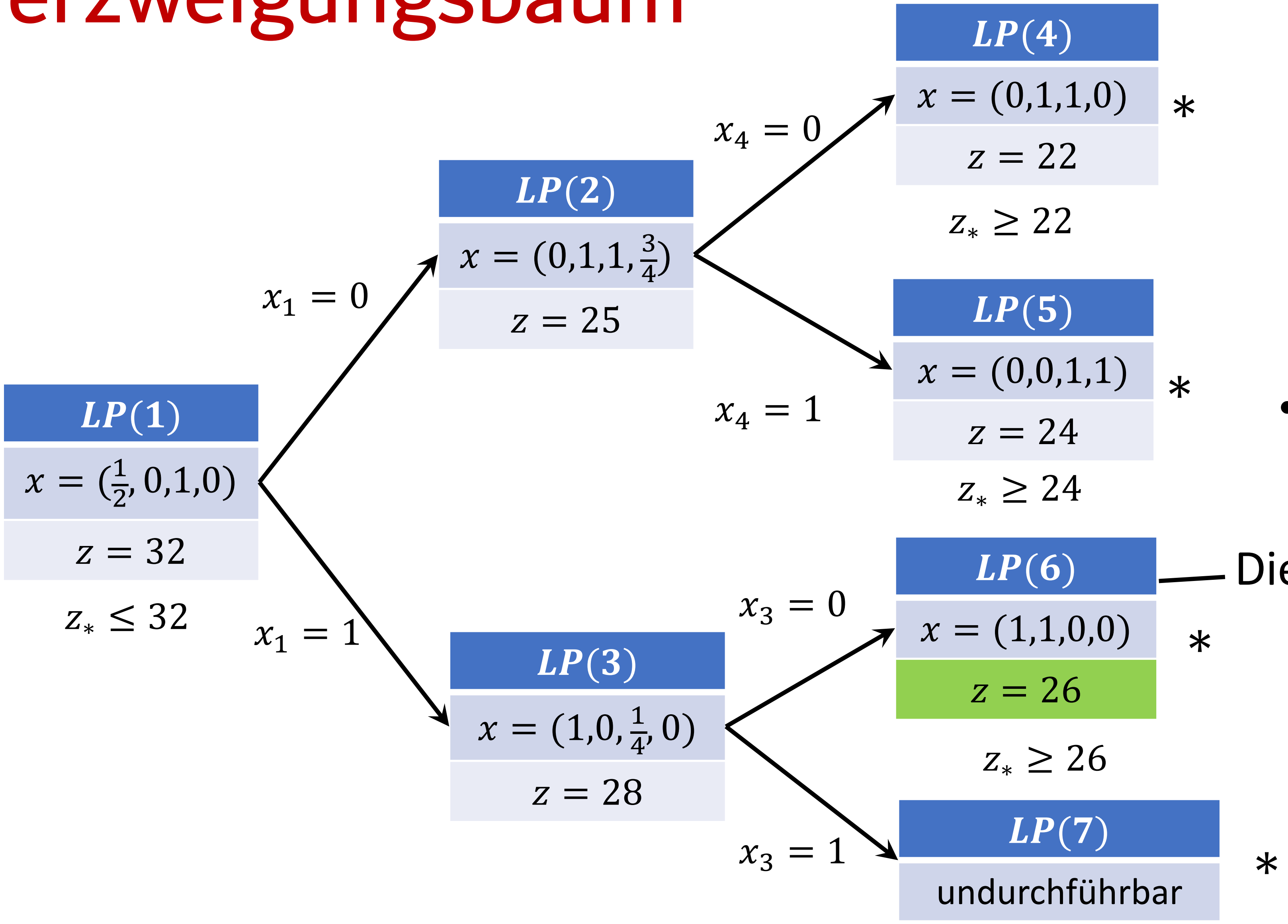
- Die Lösung von $LP(3)$ ist nicht ganzzahlig
- Nachfolger von $LP(3)$ können eine ganzzahlige Lösung mit Wert $z > 24$ haben

Verzweigungsbaum



- Neue beste ganzzahlige Lösung
- Der Zweig von $LP(6)$ wird abgeschnitten

Verzweigungsbaum



- Der Zweig von $LP(7)$ wird abgeschnitten
- Keine Probleme zu überprüfen

Die bisher beste ganzzahlige Lösung ist die optimale Lösung von $GP(1)$

Wann wird der Zweig von $LP(k)$ abgeschnitten?

- Die Lösung von $LP(k)$ ist ganzzahlig

  Die Nachfolger von $LP(k)$ können nur kleinere Werte haben

Wann wird der Zweig von $LP(k)$ abgeschnitten?

- Die Lösung von $LP(k)$ ist ganzzahlig

  Die Nachfolger von $LP(k)$ können nur kleinere Werte haben

- $LP(k)$ ist undurchführbar

- $z_{LP(k)} \leq z_i$, wobei z_i der Funktionswert der bisher besten ganzzahligen Lösung ist

  Seien die Zielfunktionskoeffizienten ganzzahlig, so kann man den Zweig auch bei $\lfloor z_{LP(k)} \rfloor \leq z_i$ abschneiden

Plan

- BB für binäre Programme
- BB für ganzzahlige lineare Programme

Ganzzahliges lineares Programm

$$\begin{array}{rl} \text{Maximiere} & 5x_1 + 8x_2 \\ \text{u.d.N.} & x_1 + x_2 \leq 6 \\ & 5x_1 + 9x_2 \leq 45 \\ & x_1, x_2 \geq 0,\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{array} \qquad GP(1)$$

- Wir bezeichnen mit $z_* = z_{GP(1)}$ den optimalen Funktionswert im $GP(1)$
- Die Koeffizientenmatrix ist nicht TU

Das Simplex-Verfahren ist nicht anwendbar

LP-Relaxation

$$
\begin{array}{lll}
 & \text{Maximiere} & 5x_1 + 8x_2 \\
LP(1) & \text{u.d.N.} & x_1 + x_2 \leq 6 \\
\cancel{GP(1)} & & 5x_1 + 9x_2 \leq 45 \\
 & & x_1, x_2 \geq 0,\ \ x_1, x_2 \in \cancel{\mathbb{Z}}\ \mathbb{R}
\end{array}
$$

$\longrightarrow$

$LP(1)$
$x_1 = 2.25$
$x_2 = 3.75$
$z = 41.25$

$z_* \leq 41$

- Lasse die Ganzzahligkeitsbedingung weg
  $\Rightarrow$ *LP-Relaxation* $LP(1)$ *von* $GP(1)$
- Bestimme eine Lösung von $LP(1)$ (z.B. mit dem Simplex-Verfahren)

Wahl der Verzweigungsvariable

$\boldsymbol{LP(1)}$
$x_1 = 2.25$
$x_2 = 3.75$
$z = 41.25$

- Die Lösung von $LP(1)$ ist nicht zulässig in $GP(1)$
- Wähle eine Variable mit nichtganzzahligem Wert als Verzweigungsvariable

$$x_2$$

Verzweigung

$LP(2)$

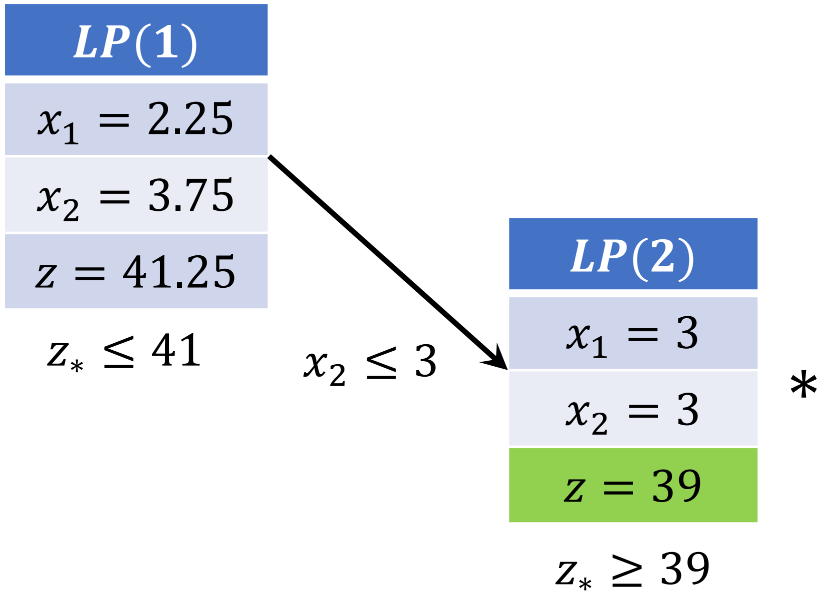
$$\begin{aligned} \text{Maximiere } & 5x_1 + 8x_2 \\ \text{u.d.N. } & x_1 + x_2 \le 6 \\ & 5x_1 + 9x_2 \le 45 \\ & x_2 \le 3 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

$LP(3)$

$$\begin{aligned} \text{Maximiere } & 5x_1 + 8x_2 \\ \text{u.d.N. } & x_1 + x_2 \le 6 \\ & 5x_1 + 9x_2 \le 45 \\ & x_2 \ge 4 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

- Die optimale Lösung von $LP(1)$ ist nicht zulässig in $LP(2)$ und in $LP(3)$
- Ist $\bar{x}$ eine optimale Lösung von $GP(1)$, so ist $\bar{x}$ zulässig entweder in $LP(2)$ oder in $LP(3)$

Verzweigungsbaum



Die Lösung von $LP(2)$ ist zulässig in $GP(1)$

Wir speichern diese Lösung als die bisher beste Lösung von $GP(1)$

Damit erhalten wir eine untere Abschätzung des optimalen Wertes in $GP(1)$

$$z_* \geq 39$$

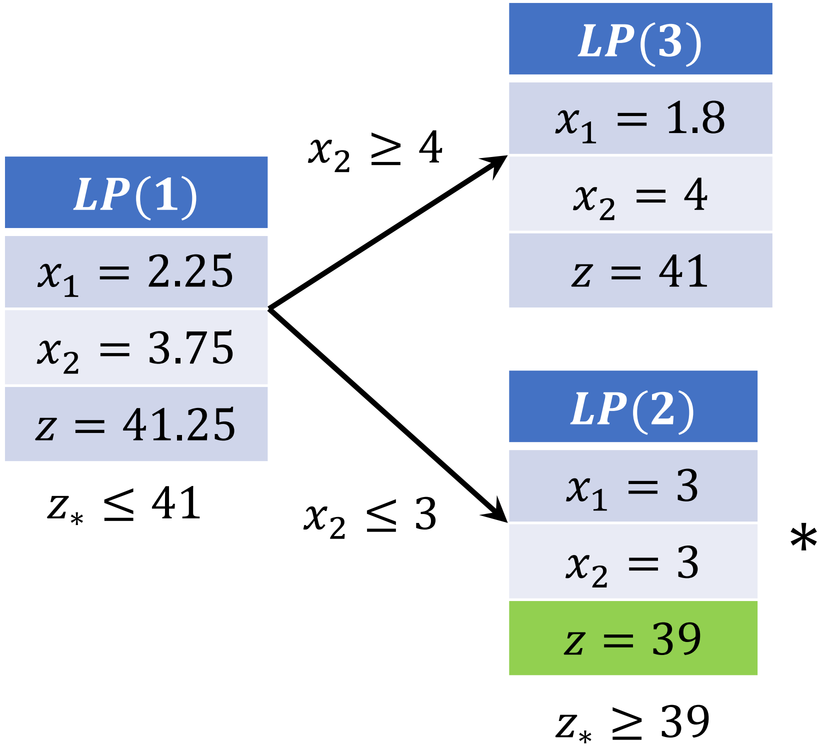
Aktuelle Abschätzungen

$$39 \leq z_* \leq 41$$

$$1 \leq \frac{z_*}{39} \leq \frac{41}{39} \approx 1.05$$

- Der optimale Wert in $GP(1)$ liegt in 5%-Umgebung von $z_{LP(2)} = 39$
- Oft bricht man die Iteration ab, wenn der aktuelle Wert hinreichend nah am optimalen Funktionswert liegt

Verzweigungsbaum

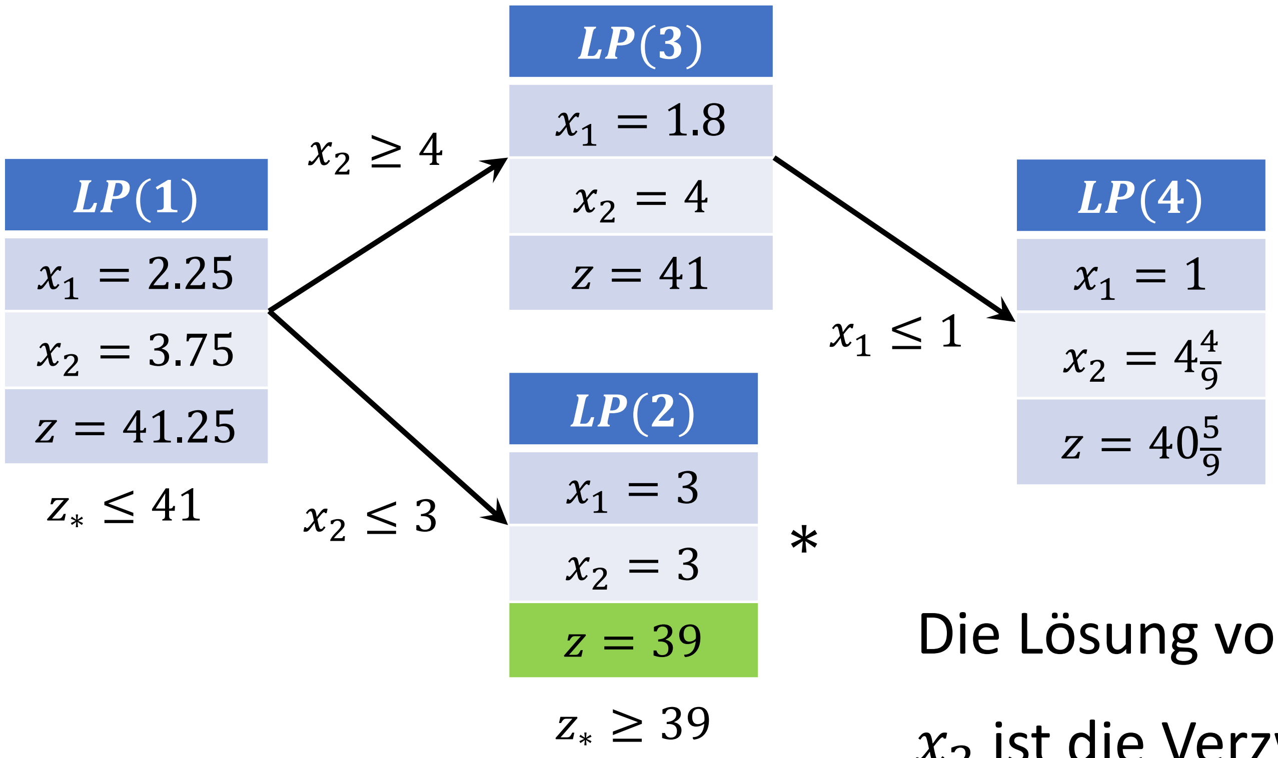


Die Lösung von $LP(3)$ ist nichtganzzahlig

Wähle x_1 als die Verzweigungsvariable

Löse die zugehörigen Nachfolger $LP(4), LP(5)$ von $LP(3)$

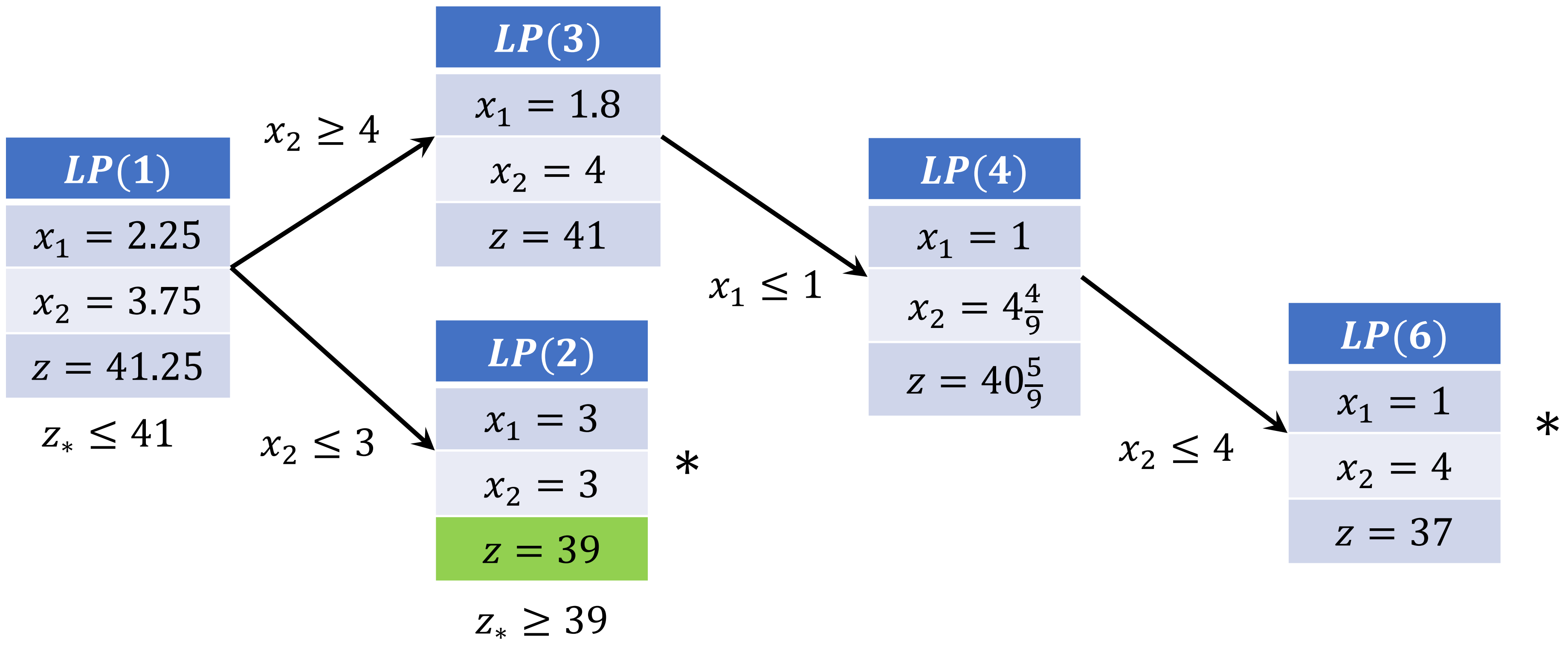
Verzweigungsbaum



Die Lösung von $LP(4)$ ist nicht zulässig in $GP(1)$

x_2 ist die Verzweigungsvariable

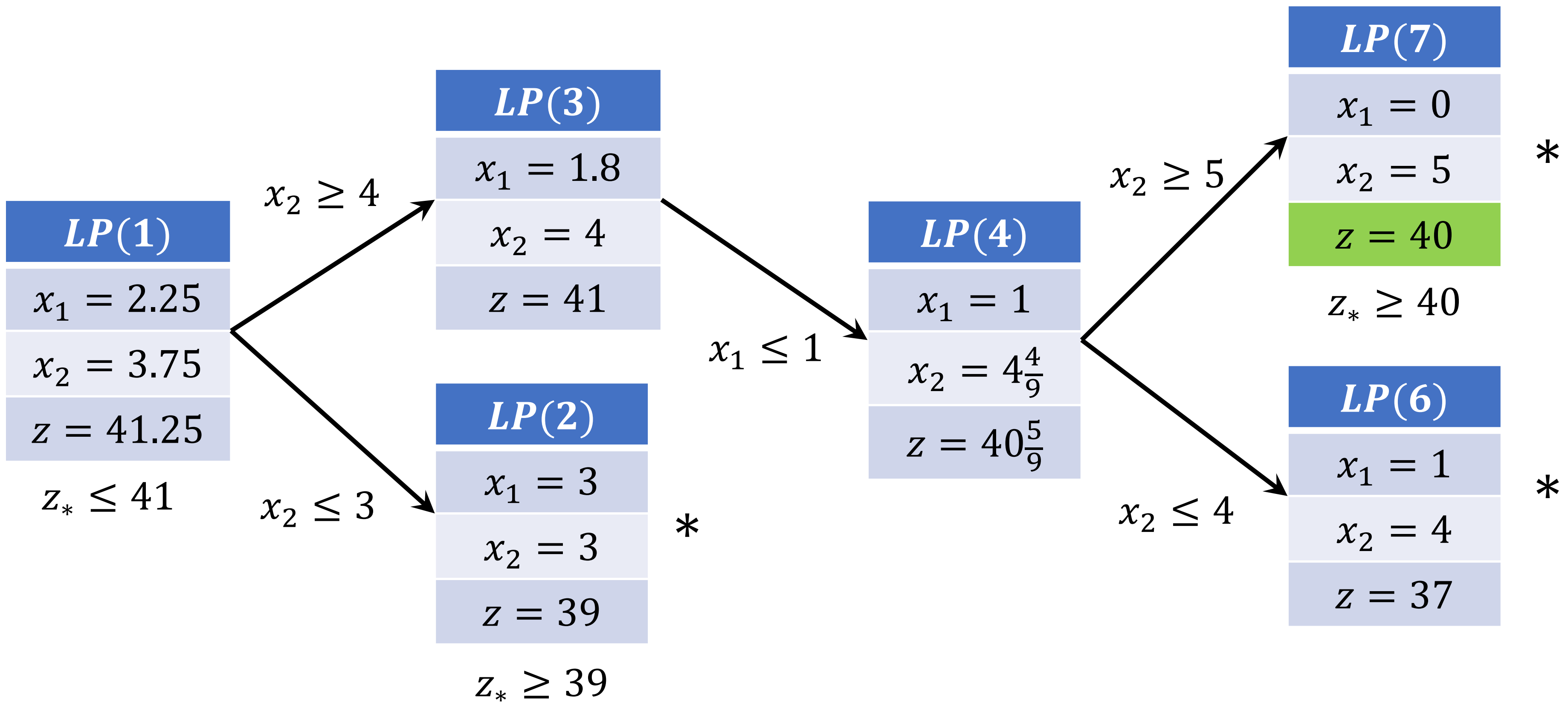
Verzweigungsbaum



Die Lösung von $LP(6)$ ist ganzzahlig, aber schlechter als die Lösung von $LP(2)$

Der Zweig von $LP(6)$ wird abgeschnitten

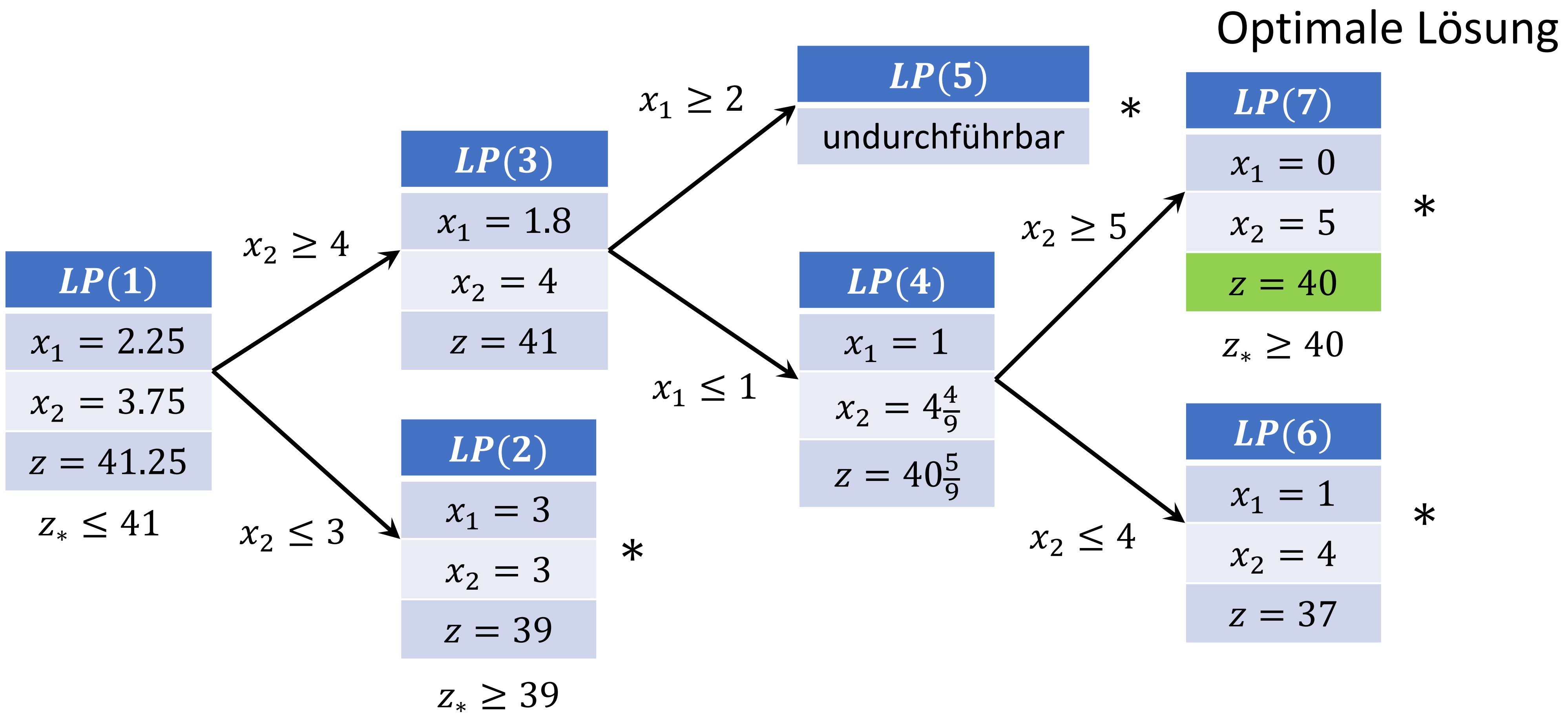
Verzweigungsbaum



Die Lösung von $LP(7)$ ist der neue beste ganzzahlige Lösung

Der Zweig von $LP(7)$ wird abgeschnitten

Verzweigungsbaum



$LP(5)$ und seine Nachfolger sind undurchführbar

Die Lösung von $LP(7)$ ist eine optimale Lösung von $GP(1)$

Branch-and-Bound-Verfahren (durch Warteschlange)

Die bisher beste ganzzahlige Lösung

1. *Initialisierung:* Warteschlange Q, $x_i = \emptyset$, $z_i = -\infty$

   Probleme zu überprüfen
2. $Q.add(1)$

Branch-and-Bound-Verfahren (durch Warteschlange)

Die bisher beste ganzzahlige Lösung

1. *Initialisierung:* Warteschlange Q, $x_i = \emptyset,\ z_i = -\infty$
   Probleme zu überprüfen
2. $Q.add(1)$
3. **while** $Q \neq \emptyset$ **do**:
4. $\quad k \coloneqq Q.pop()$
5. $\quad$ Sei x, z eine Lösung von $LP(k)$ ← $x \coloneqq \emptyset, z = -\infty$ falls $LP(k)$ undurchführbar ist
6. $\quad$ **if** $x = \emptyset$ **or** $z \leq z_i$ **then: continue**

Branch-and-Bound-Verfahren (durch Warteschlange)

Die bisher beste ganzzahlige Lösung

1. *Initialisierung:* Warteschlange Q, $x_i = \emptyset$, $z_i = -\infty$
   Probleme zu überprüfen
2. $Q.add(1)$
3. **while** $Q \neq \emptyset$ **do**:
4. $\quad k := Q.pop()$
5. $\quad$ Sei x, z eine Lösung von $LP(k)$ ← $x := \emptyset, z = -\infty$ falls $LP(k)$ undurchführbar ist
6. $\quad$ **if** $x = \emptyset$ **or** $z \leq z_i$ **then: continue**
7. $\quad$ **if** x ist ganzzahlig **then:**
8. $\quad\quad x_i := x, z_i := z$
9. $\quad\quad$ **continue**
10. $\quad Q.add(j)$ für alle Nachfolger $LP(j)$ von $LP(k)$
11. **end while**

Zusammenfassung

- BB für binäre Programme
- BB für ganzzahlige lineare Programme