7e. Lineare Programmierung

Das duale Simplex-Verfahren

Optimierung SoSe 2020

Dr. Alexey Agaltsov

Plan

- Das Simplex-Verfahren und Dualität
- Das duale Simplex-Verfahren
- Beispiel: Neue Nebenbedingungen
- Beispiel: Störungen in den rechten Seiten

Das duale Programm

Minimiere $c^T x$ über $x \in \mathbb{R}^n$

u.d.N. $Ax = b,\ A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

$x \geq 0$

Lagrange-Funktion

$$\mathcal{L}(x,\lambda) = c^T x + \lambda^T (b - Ax) \quad | \ b = Ax \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}^m$$

$$= b^T \lambda + x^T (c - A^T \lambda) \quad | \ x \geq 0 \Rightarrow c - A^T \lambda \geq 0$$

Das duale Programm

Maximiere $b^T \lambda$ über $\lambda \in \mathbb{R}^m$

u.d.N. $A^T \lambda \leq c$

Programm in Standardform

Minimiere $c^T x$ über $x \in \mathbb{R}^n$

u.d.N. $Ax = b, \; A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

$x \geq 0$

$\xrightarrow{\text{Dualität}}$

Maximiere $b^T \lambda$ über $\lambda \in \mathbb{R}^m$

u.d.N. $A^T \lambda \leq c$

- Das Simplex-Verfahren liefert eine Lösung des primalen Problems
- Ist das optimale Simplex-Tableau bekannt, so kann man eine Lösung des dualen Problems einfach bestimmen

Kanonische Form

Von nun an bezeichnen wir $\mathcal{B}$ als eine Basis, auch wenn $A_{\mathcal{B}}^{-1} b \ngeq 0$

Minimiere $c^T x$

u.d.N. $Ax = b$

$x \geq 0$

wähle $\mathcal{B} = \{i_1, \dots, i_m\} \subseteq \{1, \dots, n\}$:

$A_{\mathcal{B}} := A[:, \mathcal{B}]$ ist regulär

$A_{\mathcal{N}} := A[:, \mathcal{N}]$, $\mathcal{N} = \mathcal{B}^c$

Minimiere $c_{\mathcal{N}}^T x_{\mathcal{N}} + c_{\mathcal{B}}^T x_{\mathcal{B}}$

u.d.N. $A_{\mathcal{N}} x_{\mathcal{N}} + A_{\mathcal{B}} x_{\mathcal{B}} = b$

$x_{\mathcal{N}}, x_{\mathcal{B}} \geq 0$

multipliziere die NB durch $A_{\mathcal{B}}^{-1}$
eliminiere $x_{\mathcal{B}}$ aus der Zielfunktion

Minimiere $\left(c_{\mathcal{N}} - A_{\mathcal{N}}^T A_{\mathcal{B}}^{-T} c_{\mathcal{B}}\right)^T x_{\mathcal{N}} + c_{\mathcal{B}}^T A_{\mathcal{B}}^{-1} b$

u.d.N. $A_{\mathcal{B}}^{-1} A_{\mathcal{N}} x_{\mathcal{N}} + x_{\mathcal{B}} = A_{\mathcal{B}}^{-1} b$

$x_{\mathcal{N}}, x_{\mathcal{B}} \geq 0$

Wir bezeichnen dies als eine kanonische Form, auch wenn $A_{\mathcal{B}}^{-1} b \ngeq 0$

Satz 6.16. Zulässigkeit und Optimalität

$$\text{Minimiere}\quad \Big(c_{\mathcal{N}} - A_{\mathcal{N}}^T \overset{\bar\lambda}{\boxed{A_{\mathcal{B}}^{-T} c_{\mathcal{B}}}}\Big)^T x_{\mathcal{N}} + c_{\mathcal{B}}^T A_{\mathcal{B}}^{-1} b$$

$$\text{u.d.N.}\quad A_{\mathcal{B}}^{-1} A_{\mathcal{N}} x_{\mathcal{N}} + x_{\mathcal{B}} = \underset{\bar{x}_{\mathcal{B}}}{\boxed{A_{\mathcal{B}}^{-1} b}}$$

$$x_{\mathcal{N}}, x_{\mathcal{B}} \geq 0$$

Basislösung zur Basis $\mathcal{B}$

$$\bar{x}_{\mathcal{N}} := 0, \bar{x}_{\mathcal{B}} := A_{\mathcal{B}}^{-1} b$$

$$\bar\lambda := A_{\mathcal{B}}^{-T} c_{\mathcal{B}} \in \mathbb{R}^m$$

- $A_{\mathcal{B}}^{-1} b \geq 0 \Leftrightarrow \bar{x}$ ist primal zulässig *primal zulässige kanonische Form*
- $c_{\mathcal{N}} - A_{\mathcal{N}}^T A_{\mathcal{B}}^{-T} c_{\mathcal{B}} \geq 0 \;\Leftrightarrow\; \bar\lambda$ ist dual zulässig (d.h. $A^T \bar\lambda \leq c$) *dual zulässige kanonische Form*
- Es gilt $c^T \bar{x} = b^T \bar\lambda = c_{\mathcal{B}}^T A_{\mathcal{B}}^{-1} b$. Außerdem sind $\bar{x}, \bar\lambda$ optimal, falls das LP sich gleichzeitig in primal und dual zulässigen Formen befindet

Beweis

$$\bar{\lambda} := A_{\mathcal{B}}^{-T} c_{\mathcal{B}}$$

Behauptung: $c_{\mathcal{N}} - A_{\mathcal{N}}^T A_{\mathcal{B}}^{-T} \mathrm{c}_{\mathcal{B}} \geq 0 \Leftrightarrow \bar{\lambda}$ ist dual zulässig, d.h. $A^T \bar{\lambda} \leq c$

$$\left.\begin{aligned} c_{\mathcal{N}} - A_{\mathcal{N}}^T A_{\mathcal{B}}^{-T} c_{\mathcal{B}} &\geq 0 \\ c_{\mathcal{B}} - A_{\mathcal{B}}^T A_{\mathcal{B}}^{-T} c_{\mathcal{B}} &= 0 \end{aligned}\right]$$

$$c - A^T A_{\mathcal{B}}^{-T} c_{\mathcal{B}} \geq 0$$

$$\bar{\lambda} = A_{\mathcal{B}}^{-T} c_{\mathcal{B}}$$

$$A^T \bar{\lambda} \leq c$$

Beweis

$$\bar{\lambda} := A_{\mathcal{B}}^{-T} c_{\mathcal{B}}$$

- *Behauptung*: $c^T \bar{x} = b^T \bar{\lambda} = c_{\mathcal{B}}^T A_{\mathcal{B}}^{-1} b$

$$\begin{aligned} b^T \bar{\lambda} &= b^T A_{\mathcal{B}}^{-T} c_{\mathcal{B}} \\ &= \bar{x}_{\mathcal{B}}^T c_{\mathcal{B}} \\ &= \bar{x}^T c \end{aligned}$$

$$\bar{x}_{\mathcal{B}} = A_{\mathcal{B}}^{-1} b$$

$$\bar{x}_{\mathcal{N}} = 0$$

- Seien $\bar{x}, \bar{\lambda}$ zulässig, so sind sie optimal aufgrund der schwachen Dualität (Satz 5.13)

Programme in Symmetrischer Form

Minimiere $c^T x$ über $x \in \mathbb{R}^n$

u.d.N. $Ax \leq b$

$x \geq 0$

Lagrange-Funktion

$$\mathcal{L}(x, y) = c^T x + \mu^T (b - Ax) \qquad | \; b - Ax \geq 0 \Rightarrow \mu \leq 0$$

$$= b^T \mu + x^T (c - A^T \mu) \qquad | \; x \geq 0 \Rightarrow c - A^T \mu \geq 0$$

Das Duale

Maximiere $b^T \mu$ über $\mu \in \mathbb{R}^m$

u.d.N. $A^T \mu \leq c$

$\mu \leq 0$

Satz 6.17. Programme in Symmetrischer Form

Minimiere $c^T x$

u.d.N. $Ax \leq b$

$x \geq 0$

Maximiere $b^T \mu$

u.d.N. $A^T \mu \leq c$

$\mu \leq 0$

Schlupfvariablen

$-z$	x_1		x_n	s_1		s_m	RS
1	c_1		c_n	0		0	0
0	a_{11}		a_{1n}	1		0	b_1
0	a_{m1}		a_{mn}	0		1	b_m

dual optimale Lösung

$\bar{\mu}_i = -y_i$

$-z$	x_1		x_n	s_1		s_m	RS
1	$\bar{c}_1$		$\bar{c}_n$	y_1		y_m	$-\bar{z}$
0	$\bar{a}_{11}$		$\bar{a}_{1n}$	β_{11}		β_{1n}	$\bar{b}_1$
0	$\bar{a}_{m1}$		$\bar{a}_{mn}$	β_{m1}		β_{mm}	$\bar{b}_m$

Optimales Simplex-Tableau

Beweis: Duale Programme

Minimiere $c^T x$ u.d.N. $Ax \leq b$, $x \geq 0$ $\xleftrightarrow{\text{Dualität}}$ Maximiere $b^T \mu$ u.d.N. $A^T \mu \leq c$, $\mu \leq 0$ *Vorzeichenbeschr.*

Schlupfvariablen

||

Minimiere $c^T x$ u.d.N. $Ax + s = b$, $x, s \geq 0$ $\xleftrightarrow{\text{Dualität}}$ Maximiere $b^T \mu$ u.d.N. $A^T \mu \leq c$, $\mu \leq 0$ *UNB*

$\Rightarrow$ Wir wenden Satz 6.16 um eine optimale Lösung des Dualen von der optimalen Simplex-Tableau zu bestimmen

Beweis

$$\begin{aligned} \text{Minimiere } & c^T x \\ \text{u.d.N. } & Ax + s = b \\ & x, s \geq 0 \end{aligned}$$

- Sei $\mathcal{B}$ eine optimale Basis und sei $\bar{\mu} = A_{\mathcal{B}}^{-T} c_{\mathcal{B}}$ der zugehörige Dualpunkt
- Seien $\bar{c}, y$ die zugehörigen optimalen Zielfunktionskoeffizienten von x, s

Satz 6.16

$$\begin{bmatrix} \bar{c} \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A & I \end{bmatrix}^T \bar{\mu} \quad \longleftrightarrow \quad \begin{aligned} \bar{c} &= c - A^T \bar{\mu} \\ y &= -\bar{\mu} \end{aligned}$$

$\square$

Plan

- Das Simplex-Verfahren und Dualität
- Das duale Simplex-Verfahren
- Beispiel: Neue Nebenbedingungen
- Beispiel: Störungen in den rechten Seiten

Primales und duales Simplex-Verfahren

$$\begin{aligned} \text{Minimiere } & c^T x \\ \text{u.d.N. } & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

wähle $\mathcal{B} = \{i_1, \dots, i_m\} \subseteq \{1, \dots, n\}$:

$A_{\mathcal{B}} := A[:, \mathcal{B}]$ ist regulär

$A_{\mathcal{N}} := A[:, \mathcal{N}], \;\; \mathcal{N} = \mathcal{B}^c$

$$\begin{aligned} \text{Minimiere } & \left(c_{\mathcal{N}} - A_{\mathcal{N}}^T A_{\mathcal{B}}^{-T} c_{\mathcal{B}}\right)^T x_{\mathcal{N}} + c_{\mathcal{B}}^T A_{\mathcal{B}}^{-1} b \\ \text{u.d.N. } & A_{\mathcal{B}}^{-1} A_{\mathcal{N}} x_{\mathcal{N}} + x_{\mathcal{B}} = A_{\mathcal{B}}^{-1} b \\ & x_{\mathcal{N}}, x_{\mathcal{B}} \geq 0 \end{aligned}$$

primal zulässige kan. Form, falls $A_{\mathcal{B}}^{-1} b \geq 0$

dual zulässige kan. For, falls $c_{\mathcal{N}} - A_{\mathcal{N}}^{-1} A_{\mathcal{B}}^{-T} c_{\mathcal{B}} \geq 0$

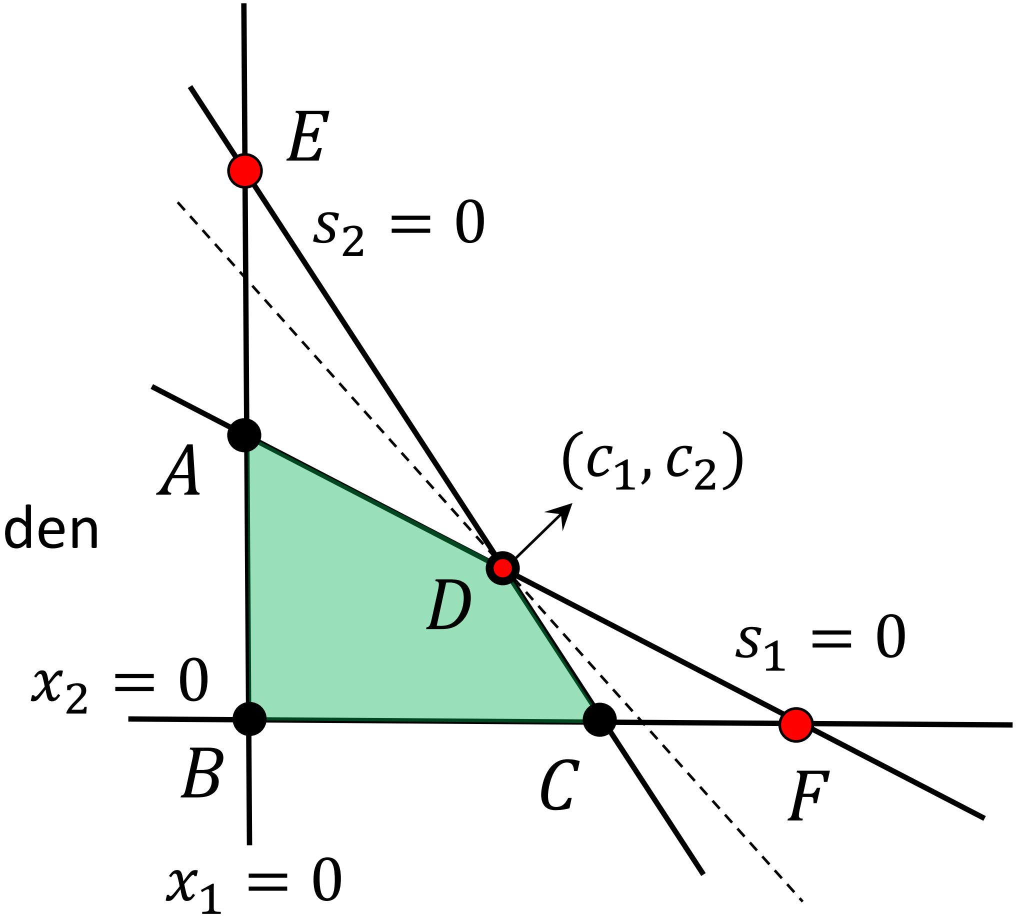
- Das (primales) Simplex-Verfahren bleibt in primal zulässiger kanonischer Form und verkleinert $c_{\mathcal{B}}^T A_{\mathcal{B}}^{-1} b$ bis die kanonische Form dual zulässig wird
- Das duales Simplex-Verfahren bleibt in dual zulässiger kanonischer und vergrößert $c_{\mathcal{B}}^T A_{\mathcal{B}}^{-1} b$ bis die kanonische Form primal zulässig wird

Geometrische Intuition

Minimiere $-c_1x_1 - c_2x_2$

u.d.N.
$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + s_1 \quad &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \quad + s_2 &= b_2 \\ x_1, x_2, s_1, s_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

- Basislösungen sind die Schnittpunkte der Geraden
- Primal zulässige Basislösungen gehören zum Zulässigkeitsbereich $\Leftrightarrow$ $x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0$
  A, B, C, D
- Dual zulässige Basislösungen liefern optimalen oder überoptimalen Funktionswert D, E, F



Beispiel

$-z$	x_1	x_2	x_3	x_4	RS
1	$\boxed{0}$	1	1	$\boxed{0}$	3
0	1	4	0	0	4
0	0	-4	-2	1	-1

- Dual zulässige kanonische Form mit Basisvariablen x_1, x_4:
  1. Die Koeffizientenmatrix von x_1, x_4 ist die Einheitsmatrix
  2. Die Zielfunktionskoeffizienten von x_1, x_2 sind gleich Null
  3. Alle anderen Zielfunktionskoeffizienten sind nichtnegativ

- Das duale Simplex-Verfahren ist anwendbar

Aus der Basis austretende Variable

$-z$	x_1	x_2	x_3	x_4	RS
1	0	1	1	0	3
0	1	4	0	0	4
0	0	-4	-2	1	$\boxed{-1}$

- Wir bewegen uns zu einer benachbarten dual zulässigen Basislösung mit kleinerem Zielfunktionswert

- Die erste Basisvariable mit negativem Wert tritt aus der Basis aus

$$\Rightarrow x_4$$

- Nach dem Austritt aus der Basis wird x_4 gleich Null

In die Basis eintretende Variable

$-z$	x_1	x_2	x_3	x_4	RS	
1	0	1	1	0	3	$\lvert Z_0$
0	1	4	0	0	4	$\lvert Z_1$
0	0	-4	-2	1	-1	$\lvert Z_2$

$$Z_0 + tZ_2:$$

$$z = (1-4t)x_2 + (1-2t)x_3 + tx_4 - 3 + t$$

- Der Funktionswert (für $x_2 = x_3 = x_4 = 0$) steigt mit t
- Für welche t bleiben die Zielfunktionskoeffizienten nichtnegativ?

$$\begin{aligned} x_2&: \quad 1-4t \geq 0 \\ x_3&: \quad 1-2t \geq 0 \\ x_4&: \quad t \geq 0 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} t &\leq \frac{1}{4} \\ t &\leq \frac{1}{2} \\ t &\geq 0 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{4}$$

x_2 tritt aus der Basis aus für $t = \frac{1}{4}$

Schritt des dualen Simplex-Verfahrens

$-z$	x_1	x_2	x_3	x_4	RS
1	0	1	1	0	3
0	1	4	0	0	4
0	0	$\boxed{-4}$	-2	1	-1

$\xrightarrow{\text{Pivotisierung}}$

$-z$	x_1	x_2	x_3	x_4	RS
1	0	0	0.5	0.25	2.75
0	1	0	-2	1	3
0	0	1	0.5	-0.25	0.25

optimales Tableau

Optimale Lösung:

$$\bar{x}_1 = 3, \bar{x}_2 = 0.25 \qquad \bar{x}_3 = 0, \bar{x}_4 = 0$$

$$\bar{z} = -2.75$$

Beispiel: Leerer Zulässigkeitsbereich

$-z$	x_1	x_2	x_3	x_4	RS	
1	0	1	1	0	3	$\vert Z_0$
0	1	4	0	0	4	$\vert Z_1$
0	0	4	2	1	-1	$\vert Z_2$

x_4 tritt aus der Basis aus

$$Z_0 + tZ_2: \qquad z = (1+4t)x_2 + (1+2t)x_3 + tx_4 - 3 + t$$

- Zielfunktionskoeffizienten sind nichtnegativ für alle $t \geq 0$
- Der zugehörige duale Punkt ist zulässig für alle $t \geq 0$
- Der primale Zulässigkeitsbereich ist leer nach Satz 6.3

Das duale Simplex-Verfahren

$$\begin{aligned} \text{Minimiere} \quad & \left(c_{\mathcal{N}} - A_{\mathcal{N}}^T A_{\mathcal{B}}^{-T} c_{\mathcal{B}}\right)^T x_{\mathcal{N}} + c_{\mathcal{B}}^T A_{\mathcal{B}}^{-1} b \\ \text{u.d.N.} \quad & A_{\mathcal{B}}^{-1} A_{\mathcal{N}} x_{\mathcal{N}} + x_{\mathcal{B}} = A_{\mathcal{B}}^{-1} b \\ & x_{\mathcal{N}}, x_{\mathcal{B}} \geq 0 \end{aligned}$$

- Kanonische Form zur Basis $\mathcal{B}$
- Für das duale Simplex-Verfahren muss die anfängliche kanonische Form dual zulässig sein:

$$c_{\mathcal{N}} - A_{\mathcal{N}}^T A_{\mathcal{B}}^{-T} c_{\mathcal{B}} \geq 0$$

$$\bar{A} = A_{\mathcal{B}}^{-1}A, \quad \bar{b} = A_{\mathcal{B}}^{-1}b$$
$$\bar{c} = c - c_{\mathcal{B}}^{T}A_{\mathcal{B}}^{-1}b$$

Das duale Simplex-Verfahren

Initialisierung: Dual zulässige Basis $\mathcal{B}$ und $\mathcal{N} = \mathcal{B}^c$

$\exists i\colon\ \bar{b}_i < 0$

Nein → Basislösung zu $\mathcal{B}$ ist optimal

Ja (wähle die erste zulässige i)

$\bar{A}_{\mathcal{N}}[i,:] \geq 0$

Ja → Zulässigkeitsbereich ist leer

Nein

$$j^+ = \operatorname{Argmin}_k \left(-\frac{\bar{c}_k}{\bar{A}_{\mathcal{N}}[i,k]} \middle| \bar{A}_{\mathcal{N}}[i,k] < 0 \right)$$

$$\mathcal{B} := \{j^+\} \cup \mathcal{B} \setminus \{i\}, \quad \mathcal{N} = \mathcal{B}^c$$

Quotientenregel

Plan

- Das Simplex-Verfahren und Dualität
- Das duale Simplex-Verfahren
- Beispiel: Neue Nebenbedingungen
- Beispiel: Störungen in den rechten Seiten

Neue Nebenbedingung

Minimiere $c^T x$

u.d.N. $a_i^T x \leq b_i, \ i = 1, \dots, m$

$x \geq 0$

Minimiere $c^T x$

u.d.N. $a_i^T x \leq b_i, \ i = 1, \dots, m$

$a_{m+1}^T x \leq b_{m+1}$

$x \geq 0$

- Sei $\bar{x}$ mit dem Simplex-Verfahren gefundene Lösung des linken Problems
- Dann kann man das rechte Problem effizient mit dem dualen Simplex-Verfahren lösen

Beispiel: Neue Nebenbedingung

$$\begin{aligned} \text{Minimiere} \quad & -x_1 - x_2 \\ \text{u.d.N.} \quad & x_1 + 2x_2 \leq 5 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$\longrightarrow$

$$\begin{aligned} \text{Minimiere} \quad & -x_1 - x_2 \\ \text{u.d.N.} \quad & x_1 + 2x_2 \leq 5 \\ & 3x_1 + x_2 \leq 6 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Simplex-Verfahren

$-z$	x_1	x_2	s_1	RS
1	0	1	1	5
0	1	2	1	5

optimales Tableau

$-z$	x_1	x_2	s_1	s_2	RS
1	0	1	1	0	5
0	1	2	1	0	5
0	3	1	0	1	6

Eliminiere x_1 aus der s_2-Zeile

$-z$	x_1	x_2	s_1	s_2	RS
1	0	1	1	0	5
0	1	2	1	0	5
0	0	-5	-3	1	-9

dual zulässiges kan. Tableau

Beispiel: Neue Nebenbedingung

$-z$	x_1	x_2	s_1	s_2	RS
1	0	1	1	0	5
0	1	2	1	0	5
0	0	$\boxed{-5}$	$\boxed{-3}$	1	$\boxed{-9}$
		$1/5$	$1/3$		

- s_2 ist die erste Basisvariable mit negativem Wert -9

  $\Rightarrow s_2$ *tritt aus der Basis aus*

- x_2, s_1 sind die Variablen mit negativen Koeffizienten in s_2-Zeile
- *Quotientenregel:* $1/5 < 1/3$, also tritt x_2 in die Basis ein

Pivotisierung

$-z$	x_1	x_2	s_1	s_2	RS
1	0	1	1	0	5
0	1	2	1	0	5
0	0	$\boxed{-5}$	-3	1	-9

$\xrightarrow{\text{Pivotisierung}}$

$-z$	x_1	x_2	s_1	s_2	RS
1	0	0	0.4	0.2	3.2
0	1	0	-0.2	0.4	1.4
0	0	1	0.6	-0.2	1.8

optimales Tableau

Optimale Lösung: $\bar{x}_1 = 1.4, \bar{x}_2 = 1.8$

Optimale Lösung des Dualen: $\bar{\mu}_1 = -0.4,\ \bar{\mu}_2 = -0.2$ (Satz 6.17)

Plan

- Das Simplex-Verfahren und Dualität
- Das duale Simplex-Verfahren
- Beispiel: Neue Nebenbedingungen
- Beispiel: Störungen in den rechten Seiten

Störungen in der rechten Seiten

$$
\begin{aligned}
\text{Minimiere}\quad & c_1x_1 + c_2x_2 \\
\text{u.d.N.}\quad & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1 + \Delta \\
& a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq b_2 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

- Sei $\bar{x}(0)$ mit dem Simplex-Verfahren gefundene optimale Lösung für $\Delta = 0$
- Gehört Δ dem Gültigkeitsbereich, so kann man eine optimale Lösung $\bar{x}(\Delta)$ durch die Sensitivitätsanalyse finden
- Ansonsten kann man $\bar{x}(\Delta)$ mit dem dualen Simple-Verfahren finden

Beispiel

Minimiere $-x_1 - x_2$

u.d.N. $x_1 + 2x_2 \leq 5$

$3x_1 + x_2 \leq 6$

$x_1, x_2 \geq 0$

Minimiere $-x_1 - x_2$

u.d.N. $x_1 + 2x_2 \leq 5 - 4$

$3x_1 + x_2 \leq 6$

$x_1, x_2 \geq 0$

$-z$	x_1	x_2	s_1	s_2	RS
1	0	0	0.4	0.2	3.2
0	1	0	−0.2	0.4	1.4
0	0	1	0.6	−0.2	1.8

optimales Tableau

Sensitivitätsanalyse

$-z$	x_1	x_2	s_1	s_2	RS
1	0	0	0.4	0.2	$3.2 + 0.4\times(-4) = 1.6$
0	1	0	−0.2	0.4	$1.4 - 0.2\times(-4) = 2.2$
0	0	1	0.6	−0.2	$1.8 + 0.6\times(-4) = -0.6$

dual zulässiges Tableau

Schritt des dualen Simplex-Verfahrens

$-z$	x_1	x_2	s_1	s_2	RS
1	0	0	0.4	0.2	1.6
0	1	0	-0.2	0.4	2.2
0	0	1	0.6	$\boxed{-0.2}$	$\boxed{-0.6}$

- x_2 ist die erste Basisvariable mit negativem Wert -0.6

  $\Rightarrow$ x_2 *tritt aus der Basis aus*

- s_2 ist die einzige Variable mit negativem Koeffizienten in der x_2-Zeile

  $\Rightarrow$ s_2 *tritt in die Basis ein*

Duales Simplex-Schritt

$-z$	x_1	x_2	s_1	s_2	RS
1	0	0	0.4	0.2	1.6
0	1	0	−0.2	0.4	2.2
0	0	1	0.6	$\boxed{-0.2}$	−0.6

Pivotisierung $\longrightarrow$

$-z$	x_1	x_2	s_1	s_2	RS
1	0	1	1	0	1
0	1	2	1	0	1
0	0	−5	−3	1	3

optimales Tableau

Primal optimale Lösung: $\bar{x}_1 = 1, \bar{x}_2 = 0$

Dual optimale Lösung: $\bar{\mu}_1 = -1, \bar{\mu}_2 = 0$

Zusammenfassung

- Das Simplex-Verfahren und Dualität
- Das duale Simplex-Verfahren
- Beispiel: Neue Nebenbedingungen
- Beispiel: Störungen in den rechten Seiten

Nächstes Video

- 7a. Nichtlineare Optimierung: Quadratische Programmierung