6c. Lineare Programmierung

Das Simplex-Verfahren II

Optimierung SoSe 2020

Dr. Alexey Agaltsov

Plan

- Erinnerung: Gaußsches Eliminationsverfahren
- Simplex-Tableaus
- Initialisierung des Simplex-Verfahrens

Tableaus

$$2x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 2$$
$$x_1 - x_2 + 2x_3 = -3$$
$$2x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

Tableau

	x_1	x_2	x_3	RS
E_1	2	2	-2	2
E_2	1	-1	2	-3
E_3	2	1	1	0

Pivotisierung

- Wir wählen ein von Null verschiedenes Pivotelement (i, j) der Koeffizientenmatrix
- Durch Elementare Zeilenumformungen transformieren wir die Spalte j der Pivotelements zur Form:

$$e_i = [0 \dots 0 \underbrace{1}_{i} 0 \dots 0]^T$$

- Erlaubte Umformungen:
  1. Normiere die Zeile i
  2. Ein Vielfaches der Zeile i zu anderen Zeilen addieren

Pivotisierung: Schritt 1

Pivotelement

	x_1	x_2	x_3	RS
E_1	$\boxed{2}$	2	-2	2
E_2	1	-1	2	-3
E_3	2	1	1	0

Pivotisierung

	x_1	x_2	x_3	RS
$E_4 = \frac{1}{2}E_1$	1	1	-1	1
$E_5 = E_2 - \frac{1}{2}E_1$	0	-2	3	-4
$E_6 = E_3 - E_1$	0	-1	3	-2

e_1

Pivotisierung: Schritt 2

Pivotelement

	x_1	x_2	x_3	RS
E_4	1	1	-1	1
E_5	0	$\boxed{-2}$	3	-4
E_6	0	-1	3	-2

Pivotisierung

	x_1	x_2	x_3	RS
$E_7 = E_4 + \frac{1}{2}E_5$	1	$\boxed{0}$	$\frac{1}{2}$	-1
$E_8 = -\frac{1}{2}E_5$	0	$\boxed{1}$	$-\frac{3}{2}$	2
$E_9 = E_5 - \frac{1}{2}E_5$	0	$\boxed{0}$	$\frac{3}{2}$	0

e_2

Pivotisierung: Schritt 3

Pivotelement

	x_1	x_2	x_3	RS
E_7	1	0	$\frac{1}{2}$	-1
E_8	0	1	$-\frac{3}{2}$	2
E_9	0	0	$\boxed{\frac{3}{2}}$	0

Pivotisierung

	x_1	x_2	x_3	RS
$E_{10} = E_7 - 3E_9$	1	0	0	-1
$E_{11} = E_8 + E_9$	0	1	0	2
$E_{12} = \frac{2}{3}E_9$	0	0	1	0

e_3

Lösung

	x_1	x_2	x_3	RS
$E_{10} = E_7 - 3E_9$	1	0	0	-1
$E_{11} = E_8 + E_9$	0	1	0	2
$E_{12} = \frac{2}{3}E_9$	0	0	1	0

$$x_1 + 0x_2 + 0x_2 = -1$$
$$0x_1 + x_2 + 0x_3 = 2$$
$$0x_1 + 0x_2 + x_3 = 0$$

$$x_1 = -1$$
$$x_2 = 2$$
$$x_3 = 0$$

Plan

- Erinnerung: Gaußsches Eliminationsverfahren
- Simplex-Tableaus
- Initialisierung des Simplex-Verfahrens

Simplex-Tableau

Minimiere $z = 4x_1 + 2x_2 + x_3 + x_5 - 1$

u.d.N. $x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 5$

$2x_1 - 4x_2 - x_3 + 2x_5 + x_6 = 1$

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$

Simplex-Tableau

$-z$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RS
1	4	2	1	0	1	0	1
0	1	-2	1	1	-1	0	5
0	2	-4	-1	0	2	1	1

Kanonische Form

$-z$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RS	
1	4	2	1	0	1	0	1	
0	1	-2	1	1	-1	0	5	≥ 0
0	2	-4	-1	0	2	1	1	≥ 0

Das lineare Programm ist in kanonischer Form mit Basisvariablen x_4, x_6:

- Die Zielfunktion enthält x_4 und x_6 nicht
- Die Koeffizientenmatrix für x_4, x_6 ist die Einheitsmatrix
- Die rechten Seiten der Nebenbedingungen sind nicht-negativ

Basislösung

$-z$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RS
1	4	2	1	0	1	0	1
0	1	-2	1	1	-1	0	5
0	2	-4	-1	0	2	1	1

Die Basislösung für die gegebene kanonische Form ist gegeben durch:

- Setze die Nichtbasisvariablen gleich Null

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_5 = 0$$

- Setze die Basisvariablen gleich die zugehörigen rechten Seiten

$$x_4 = 5, x_6 = 1$$

- Der zugehörige Zielfunktionswert ist gleich der freie Term

$$z = -1 \qquad \textit{Vorzeichen!}$$

Optimalitätsbedingung

$-z$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RS
1	4	2	1	0	1	0	1
0	1	-2	1	1	-1	0	5
0	2	-4	-1	0	2	1	1

- Das Problem ist in kanonischer Form und alle Zielfunktionskoeffizienten sind nichtnegativ

$\Rightarrow$ Die aktuelle Basislösung ist optimal nach Lemma 6.8

Beispiel

$$\text{Minimiere } z = -3x_1 + 4x_2 + 3x_3 - x_5$$

$$\text{u.d.N. } x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 6$$

$$2x_1 - 4x_2 - 2x_3 + 2x_5 + x_6 = 1$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

Simplex-Tableau

$-z$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RS
1	-3	4	3	0	-1	0	0
0	1	-4	1	1	-2	0	6
0	2	-4	-2	0	2	1	1

Kanonische Form

$-z$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RS	
1	-3	4	3	0	-1	0	0	
0	1	-4	1	1	-2	0	6	≥ 0
0	2	-4	-2	0	2	1	1	≥ 0

Das lineare Program ist in kanonischer Form mit Basisvariablen x_4, x_6:

- Die Zielfunktion enthält x_4, x_6 nicht
- Die Koeffizientenmatrix für x_4, x_6 ist die Einheitsmatrix
- Die rechten Seiten der Nebenbedingungen sind nichtnegativ

Basislösung: $x_1 = x_2 = x_3 = x_5 = 0, \quad x_4 = 6, x_6 = 1, \quad z = 0$

In die Basis eintretende Variable

Die erste Variable mit negativem Zielfunktionskoeffizienten

$-z$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RS
1	$\boxed{-3}$	4	3	0	$\boxed{-1}$	0	0
0	1	-4	1	1	-2	0	6
0	2	-4	-2	0	2	1	1

- Es gibt negative Zielfunktionskoeffizienten

  $\Rightarrow$ Die Optimalitätsbedingung von Lemma 6.8 ist nicht erfüllt

- x_1 ist die Nichtbasisvariable mit negativem Zielfunktionskoeffizient und mit möglichst kleinem Index (Bland-Regel)

$\Rightarrow$ x_1 ist in die Basis eintretende Variable

Aus der Basis austretende Variable

$-z$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RS
1	-3	4	3	0	-1	0	0
0	1	-4	1	1	-2	0	6
0	2	-4	-2	0	2	1	1

$6/1 = 6$

$1/2 = 0.5$

Minimaler Koeffizient

- Die zweite und die dritte Zeile der x_1-Spalte sind strikt positiv
- Berechne die Verhältnisse der rechten Seiten zu diesen Koeffizienten
- Die Spalte mit minimalem Quotienten und möglichst kleinem Index entspricht der aus der Basis austretenden Variable (Bland-Regel)

$\Rightarrow x_6$ ist aus der Basis austretende Variable

Basisaustausch

$-z$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RS
1	-3	4	3	0	-1	0	0
0	1	-4	1	1	-2	0	6
0	$\boxed{2}$	-4	-2	0	2	1	1

Das Pivotelement befindet sich in der Spalte der eingehenden Variable und in der Zeile der ausgehenden Variable

Pivotisierung

$-z$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
1	0	-2	0	0	2	1.5	1.5
0	0	-2	2	1	-3	-0.5	5.5
0	1	-2	-1	0	1	0.5	0.5

Unbeschränktheit

Die erste Variable mit negativem Zielfunktionskoeffizienten

$-z$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
1	0	-2	0	0	2	1.5	1.5
0	0	-2	2	1	-3	-0.5	5.5
0	1	-2	-1	0	1	0.5	0.5

Alle Koeffizienten sind negativ

Basislösung: $x_1 = 0.5,\ x_4 = 5.5,\quad x_2 = x_3 = x_5 = x_6 = 0,\ z = -1.5$

- x_2 tritt in die Basis ein als die Nichtbasisvariable mit negativem Zielfunktionskoeffizienten und mit möglichst kleinem Index
- Alle Koeffizienten in der Spalte von x_2 sind negativ

$\Rightarrow$ Das Problem ist nicht nach unten beschränkt nach Lemma 6.9

Plan

- Erinnerung: Gaußsches Eliminationsverfahren
- Simplex-Tableaus
- Initialisierung des Simplex-Verfahrens

Die Zwei-Phasen-Methode

$$\begin{aligned} \text{Minimiere} \quad & c^T x \quad \text{über } x \in \mathbb{R}^n \\ \text{u.d.N.} \quad & Ax = b, \quad \text{wobei } b \geq 0 \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Die Zwei-Phasen-Methode

Phase-I
Wahl der anfänglichen Basislösung

Phase-II
Das Simplex-Verfahren

Phase-I: Hilfsproblem

$[1, \dots, 1]^T$ *künstliche Variablen*

Minimiere $c^T x$ über $x \in \mathbb{R}^n$

u.d.N. $Ax = b$, wobei $b \geq 0$

$x \geq 0$

$\longrightarrow$

Minimiere $\mathbf{1}^T y$ über $x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m$

u.d.N. $Ax + y = b$

$x, y \geq 0$ Hilfsproblem

- Lemma 6.13. $(\bar{x}, 0)$ ist eine optimale Lösung des HP $\Leftrightarrow \bar{x} \in \mathcal{F}$, wobei $\mathcal{F} = \{x \geq 0 : Ax = b\}$
- Löse das Hilfsproblem um eine anfängliche Basislösung des ursprünglichen Problems zu bestimmen

Phase-I: Hilfsproblem

$$\text{Minimiere}\ \ \mathbf{1}^T y \text{ über } x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m$$
$$\text{u.d.N.}\ \ Ax + y = b$$
$$x, y \geq 0$$

subtrahiere
$\mathbf{1}^T(Ax + y - b) = 0$
von der Zielfunktion

$$\text{Minimiere}\ \ -\mathbf{1}^T Ax + \mathbf{1}^T b \ \text{ über } x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m$$
$$\text{u.d.N.}\ \ Ax + y = b$$
$$x, y \geq 0$$

Kanonische Form

- Das Simplex-Verfahren ist direkt anwendbar

Beispiel

Minimiere $2x_1 + 2x_2 + 4x_3$

u.d.N. $x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 2$ | + künstliche Variable y_1

$-x_1 + 3x_2 + x_3 = 1$ | + künstliche Variable y_2

$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$

Hilfsproblem

Minimiere $y_1 + y_2$

u.d.N. $x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + y_1 = 2$

$-x_1 + 3x_2 + x_3 + y_2 = 1$

$x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2 \geq 0$

Phase-I

Minimiere $y_1 + y_2$

u.d.N. $x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + y_1 = 2$

$-x_1 + 3x_2 + x_3 + y_2 = 1$

$x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2 \geq 0$

Simplex-Tableau

$-z$	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	RS
1	0	0	0	0	1	1	0
0	1	-1	1	-1	1	0	2
0	-1	3	1	0	0	1	1

Eliminiere y_1, y_2 aus der Zielfunktion

$-z$	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	RS
1	0	-2	-2	1	0	0	-3
0	1	-1	1	-1	1	0	2
0	-1	3	1	0	0	1	1

kanonische Form

Pivotisierung

$-z$	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	RS
1	0	-2	-2	1	0	0	-3
0	1	-1	1	-1	1	0	2
0	-1	$\boxed{3}$	1	0	0	1	1

$-z$	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	RS
1	$-0.(6)$	0	$-1.(3)$	1	0	$0.(6)$	$-2.(3)$
0	$\boxed{0.(6)}$	0	$1.(3)$	-1	1	$0.(3)$	$2.(3)$
0	$-0.(3)$	1	$0.(3)$	0	0	$0.(3)$	$0.(3)$

$-z$	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	RS
1	0	0	0	0	1	1	0
0	1	0	2	-1.5	1.5	0.5	3.5
0	0	1	1	-0.5	0.5	0.5	1.5

STOP

Anfängliche Basislösung

$-z$	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	RS
1	0	0	0	0	1	1	0
0	1	0	2	-1.5	1.5	0.5	3.5
0	0	1	1	-0.5	0.5	0.5	1.5

- Optimale Basislösung des Hilfsproblems:

$$x_1 = 3.5, x_2 = 1.5 \qquad x_3 = x_4 = y_1 = y_2 = 0$$

- x_1, x_2, x_3, x_4 liefern eine anfängliche Basislösung des ursprünglichen Problems, weil $y_1 = y_2 = 0$ nach Lemma 6.13

Start der Phase-II

$-z$	x_1	x_2	x_3	x_4	$\cancel{y_1}$	$\cancel{y_2}$	RS
1	0	0	0	0	$\cancel{1}$	$\cancel{1}$	0
0	1	0	2	-1.5	$\cancel{1.5}$	$\cancel{0.5}$	3.5
0	0	1	1	-0.5	$\cancel{0.5}$	$\cancel{0.5}$	1.5

- Entferne die Spalten von y_1 und y_2
- Ersetze die Zielfunktion durch die ursprüngliche Zielfunktion

$$z = 2x_1 + 2x_2 + 4x_3$$

$\Rightarrow$

$-z$	x_1	x_2	x_3	x_4	RS
1	2	2	4	0	0
0	1	0	2	-1.5	3.5
0	0	1	1	-0.5	1.5

Phase-II

Eliminiere x_1, x_2 aus der Zielfunktion

$-z$	x_1	x_2	x_3	x_4	RS
1	2	2	4	0	0
0	1	0	2	-1.5	3.5
0	0	1	1	-0.5	1.5

$-z$	x_1	x_2	x_3	x_4	RS
1	0	0	-2	4	-10
0	1	0	2	-1.5	3.5
0	0	1	$\boxed{1}$	-0.5	1.5

kanonische Form

$$3.5/2 = 1.75$$
$$1.5/1 = 1.5$$

Pivotisierung

$-z$	x_1	x_2	x_3	x_4	RS
1	0	2	0	3	-7
0	1	-2	0	-0.5	0.5
0	0	1	1	-0.5	1.5

optimale Lösung

$$x_1 = 0.5, x_2 = 1.5$$
$$x_2 = x_4 = 0$$
$$z = 7$$

Bemerkung

- Schlupfvariablen und künstliche Variablen: Was ist der Unterschied?
- Man fügt Schlupfvariablen hinzu, um ein lineares Program mit Ungleichungsnebenbedingungen in Standardform zu bringen
- Man fügt künstliche Variablen hinzu, um ein Hilfsproblem zu formulieren

Zusammenfassung

- Erinnerung: Gaußsches Eliminationsverfahren
- Simplex-Tableaus
- Initialisierung des Simplex-Verfahrens

Nächstes Video

- 6d. Lineare Programmierung: Sensitivitätsanalyse