Corrections

1. (*Première solution*). *(Unicité)*. On suppose que $A = B + C$, où B est symétrique et C est antisymétrique. Alors ${}^tA = {}^tB + {}^tC = B - C$. Donc :

$$\begin{cases} A = B + C, \\ {}^tA = B - C \end{cases} \implies \begin{cases} B = \frac{1}{2}(A + {}^tA), \\ C = \frac{1}{2}(A - {}^tA), \end{cases}$$

   et les matrices B, C sont détérminées uniquement.
   (Existence). On pose $B = \frac{1}{2}(A + {}^tA)$, $C = \frac{1}{2}(A - {}^tA)$. On voit que B est symétrique, C est antisymétrique et $A = B + C$.
   (Deuxième solution). Les matrices symétriques forment un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{C})$ de dimension $\frac{n^2+n}{2}$. Les matrices antisymétrique forment un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{C})$ de dimension $\frac{n^2-n}{2}$. Si une matrice A et symétrique et antisymétrique on a : $A = {}^tA = -A$ et donc $A = 0$. Donc, l'intersection des sous-espaces des matrices symétriques et antisymétrique est $\{0\}$ et ces sous-espaces donc forment une somme directe qui est de dimension m^2 par la formule de Grassmann, et donc coincide avec $M_n(\mathbb{C})$.
2. On calcule l'action de $\mathcal{J}$ sur la base f_1, f_2, f_3 :

$$\begin{aligned} &\mathcal{J} f_1 = 3f_2, \\ &\mathcal{J} f_2 = 0, \\ &\mathcal{J} f_3 = f_1 + (1 - e^{-\pi})f_2 - f_3. \end{aligned}$$

   Donc, la matrice de $\mathcal{J}$ dans la base f_1, f_2, f_3 est :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 - e^{-\pi} \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

   On calcule le polynôme caractéristique de J :

$$\chi_J(\lambda) = \det(J - \lambda \,\mathrm{Id}) = (-1 - \lambda)(-\lambda)^2,$$

   d'où les valeurs propres de J sont $\lambda_1 = -1$ de multiplicité algébrique 1 et $\lambda_2 = 0$ de multiplicité algébrique 2.
   On calcule les vecteurs propres associés à λ_1 : il faut trouver une base de $B = \ker(J - \lambda_1 I)$. Donc,

$$\begin{pmatrix} B \\ \hline \mathrm{Id} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 - e^{-\pi} \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 2 + e^{-\pi} \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

   On en déduit que $e_1 = {}^t(-1, 2 + e^{-\pi}, 1)$ est un vecteur propre associé à λ_1. Il vient que $\phi_1 = -\sin x + (2 + e^{-\pi})\cos x + e^{-x}$ est un vecteur propre de $\mathcal{J}$ associé à la valeur propre $\lambda_1 = -1$.
3. (1). Montrons que f^1, f^2, f^3 constituent une base. Comme $\dim V^* = 3$, il suffit de montrer que la famille f^1, f^2, f^3 est libre. Supposons qu'il existe λ_1, λ_2, $\lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que

$$\lambda_1 f^1(P) + \lambda_2 f^2(P) + \lambda_3 f^3(P) = 0, \quad P \in \forall \mathbb{R}_2[t].$$

   On posant $P(t) = 1$, $P(t) = t$, $P(t) = t^2$ on trouve que $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 0$ et donc la famille f^1, f^2, f^3 est libre.

Déterminons la base préduale $f_1,\, f_2,\, f_3$. Soit $f_1(t) = a_{11} + a_{12}t + a_{13}t^2$. Alors :

$$f^1(f_1) = a_{11} = 1, \quad f^2(f_1) = a_{12} = 0, \quad f^3(f_1) = 2a_{13} = 0.$$

On en déduit que $f_1(t) = 1$. De la même manière, on trouve que $f_2(t) = t,\; f_3(t) = \frac{t^2}{2}$.
(2). Montrons que $g^1,\, g^2,\, g^3$ est une base. Comme $\dim V^* = 3$, il suffit de montrer que ils sont linéairement indépendants. On suppose qu'il existe $\lambda_1,\, \lambda_2,\, \lambda_3$ tels que

$$\lambda_1 g^1(P) + \lambda_2 g^2(P) + \lambda_3 g^3(P) = 0, \quad \forall P \in \mathbb{R}_2[t].$$

En posant $P(t) = 1,\; P(t) = t^2,\; P(t) = t^3$ on obtient le système suivant :

$$A\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \lambda_3\end{pmatrix} = 0, \quad A = \begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5}\end{pmatrix}.$$

En utilisant la méthode de Gauss, on peut montrer que A est inversible et donc $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$:

$$\begin{aligned}
(A|\,\mathrm{Id}_3) &\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & -\frac{1}{2} & 1 & 0\\ 0 & \frac{1}{12} & \frac{4}{45} & -\frac{1}{3} & 0 & 1\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & -\frac{1}{2} & 1 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{180} & \frac{1}{6} & -1 & 1\end{array}\right)\\
&\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & -6 & 12 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 30 & -180 & 180\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & 0 & -9 & 60 & -60\\ 0 & 1 & 0 & -36 & 192 & -180\\ 0 & 0 & 1 & 30 & -180 & 180\end{array}\right)\\
&\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 9 & -36 & 30\\ 0 & 1 & 0 & -36 & 192 & -180\\ 0 & 0 & 1 & 30 & -180 & 180\end{array}\right) = (I|A^{-1}),
\end{aligned}$$

et donc A est inversible.
Soit $g_1,\, g_2,\, g_3$ la base préduale de $g^1,\, g^2,\, g^3$:

$$\begin{aligned}
g_1(t) &= b_{11} + b_{21}t + b_{31}t^2,\\
g_2(t) &= b_{12} + b_{22}t + b_{32}t^2,\\
g_3(t) &= b_{13} + b_{23}t + b_{33}t^2.
\end{aligned}$$

Par définition de la base préduale :

$$\begin{aligned}
g^1(g_1) &= b_{11} + \tfrac{1}{2}b_{21} + \tfrac{1}{3}b_{31} = 1,\\
g^2(g_1) &= \tfrac{1}{2}b_{11} + \tfrac{1}{3}b_{21} + \tfrac{1}{4}b_{31} = 0,\\
g^3(g_1) &= \tfrac{1}{3}b_{11} + \tfrac{1}{4}b_{21} + \tfrac{1}{5}b_{31} = 0.
\end{aligned}$$

Donc, ...

4. *(Première solution)*. Soit $P \in \mathbb{C}[t]$, $P(t) = a_0 + a_1t + \cdots + a_mt^m$. On a $P(0) = a_0 \neq 0$ et

$$P(A) = a_0 + a_1A + \cdots + a_mA^m = 0,$$

ce qui implique

$$\begin{aligned}
a_0 + A(a_1 + a_2A + \cdots + a_mA^{m-1}) &= 0,\\
A\big(a_1 + a_2A + \cdots + a_mA^{m-1}\big) &= -a_0.
\end{aligned}$$

On pose $B = -\frac{1}{a_0}(a_1 + a_2 A + \cdots + a_m A^{m-1})$. On voit que $AB = \mathrm{Id}$ et donc A est inversible et $B = A^{-1}$.

(Deuxième solution). La matrice A est inversible si et seulement si $\lambda = 0$ n'est pas une valeur propre de A. P est un polynôme annulateur de A et donc le polynôme minimal μ_A divise P. En particulier, $\lambda = 0$ n'est pas une racine de μ_A car $\lambda = 0$ n'est pas une racine de P. Mais les racines de μ_A sont les valeurs propres de A. On en déduit que $\lambda = 0$ n'est pas une valeur propre de A et A est inversible.