Devoir maison n° 2 – A rendre sur feuille le 23 février

Problème 1. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une unique matrice symétrique B et une unique matrice antisymétrique C telles que $A = B + C$. (On dit que B est symétrique si ${}^tB = B$, on dit que C est antisymétrique si ${}^tC = -C$).

Problème 2. Soit V le sous-espace vectoriel de $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ engendré par $f_1(x) = \sin(x)$, $f_2(x) = \cos(x)$, $f_3(x) = e^{-x}$. Soit $\mathcal{J}$ l'opérateur

$$(\mathcal{J}f)(x) = \cos x \int_0^\pi f(y)dy + \frac{df(x)}{dx} + f(0)\sin x.$$

1. Ecrire la matrice J de $\mathcal{J}$ dans la base f_1, f_2, f_3.
2. Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de J. En déduire les valeurs propres et les vecteurs propres de $\mathcal{J}$.

Problème 3. Soit $V = \mathbb{R}_2[t]$.

1. Soient f^1, f^2, $f^3 \in V^*$ les formes linéaires définies comme suit :

$$f^1(P) = P(0), \quad f^2(P) = \tfrac{dP}{dt}(0), \quad f^3(P) = \tfrac{d^2P}{dt^2}(0), \quad P \in V.$$

   Montrer que f^1, f^2, f^3 constituent une base de V^* et déterminer sa base préduale f_1, f_2, f_3 (on appele f_1, f_2, f_3 une base préduale de la base f^1, f^2, f^3 si f^1, f^2, f^3 est la base duale de f_1, f_2, f_3).
2. Soient g^1, g^2, $g^3 \in V^*$ les formes linéaires définies comme suit :

$$g^1(P) = \int_0^1 P(t)dt, \quad g^2(P) = \int_0^1 tP(t)dt, \quad g^3(P) = \int_0^1 t^2P(t)\,dt, \quad P \in V.$$

   Montrer que g^1, g^2, g^3 constituent une base de V^* et déterminer sa base préduale g_1, g_2, g_3.
3. Trouver la matrice de passage de la base f^1, f^2, f^3 à la base g^1, g^2, g^3.

Problème 4. Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ et $P \in \mathbb{C}[t]$ un polynôme tel que $P(0) \neq 0$, $P(A) = 0$. Montrer que A est inversible.

Problème 5 (Facultatif)**.** Soit $A = \mathbf{k}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ l'algèbre de polynômes en x_1, …, x_k. Vu comme un espace vectoriel, A est la somme directe :

$$A = A[0] \oplus A[1] \oplus A[2] \oplus \cdots,$$

où $A[k]$ désigne l'espace vectoriel de polynômes homogènes du degré k. On pose

$$f(t) = \dim A[0] + \dim A[1]t + \dim A[2]t^2 + \cdots$$

Calculer $f(t)$ (la série de Hilbert pour $\mathbf{k}[x_1, \ldots, x_n]$). (*Indication* : le nombre $\left(\binom{n}{k}\right)$ de k-combinaisons avec répétition d'un ensemble à n éléments est égal à $(-1)^k\binom{-n}{k}$, où $\binom{-n}{k}$ est le coefficient binomial standard qui survient dans le développement de Taylor de ...).