6d. Lineare Programmierung

Sensitivitätsanalyse

Optimierung SoSe 2020

Dr. Alexey Agaltsov

Sensitivitätsanalyse

$$\begin{aligned} &\text{Minimiere} \quad c^T x \quad \text{über } x \in \mathbb{R}^n \\ &\quad \text{u.d.N.} \quad a_i^T x \le b_i \quad i = 1, \dots, m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\text{Minimiere} \quad c^T x \quad \text{über } x \in \mathbb{R}^n \\ &\quad \text{u.d.N.} \quad a_i^T x \le b_i + \Delta_i \quad i = 1, \dots, m \end{aligned}$$

- Wie ändert sich die optimale Lösung unter diesen Transformation?

Minimiere $c^T x$ über $x \in \mathbb{R}^n$

Plan

- Zweidimensionales Beispiel
- Theorie
- Beispiel aus Operations Research

Beispiel

Minimiere $\quad z = -x - y$

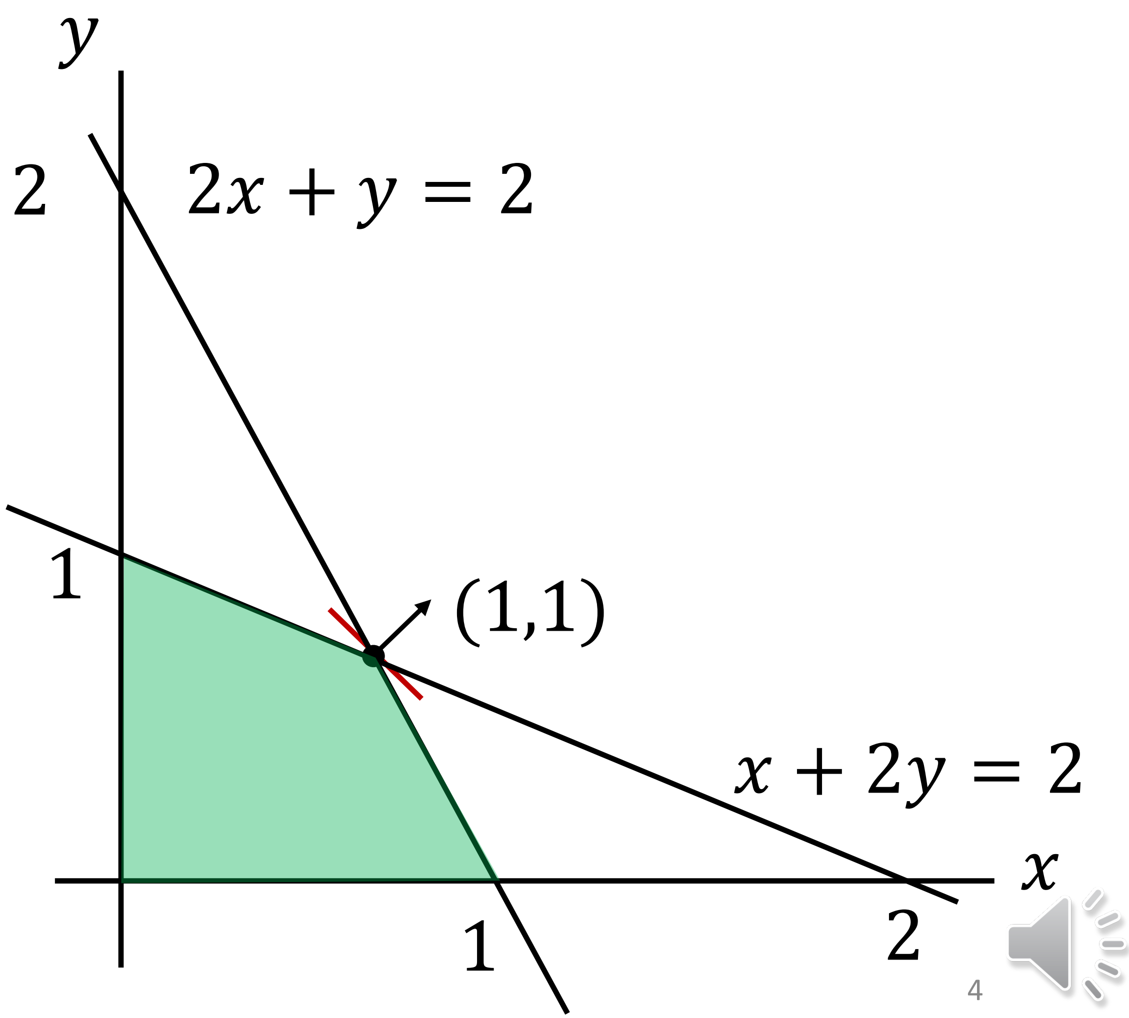
u.d.N. $\quad x + 2y \leq 2$

$$2x + y \leq 2$$

$$x, y \geq 0$$

$$\bar{x} = \frac{2}{3}, \bar{y} = \frac{2}{3}$$

$$\bar{z} = -\frac{4}{3}$$



Beispiel

Minimiere $z = -x - y$

u.d.N. $x + 2y \leq 2 + \Delta_1$

$2x + y \leq 2$

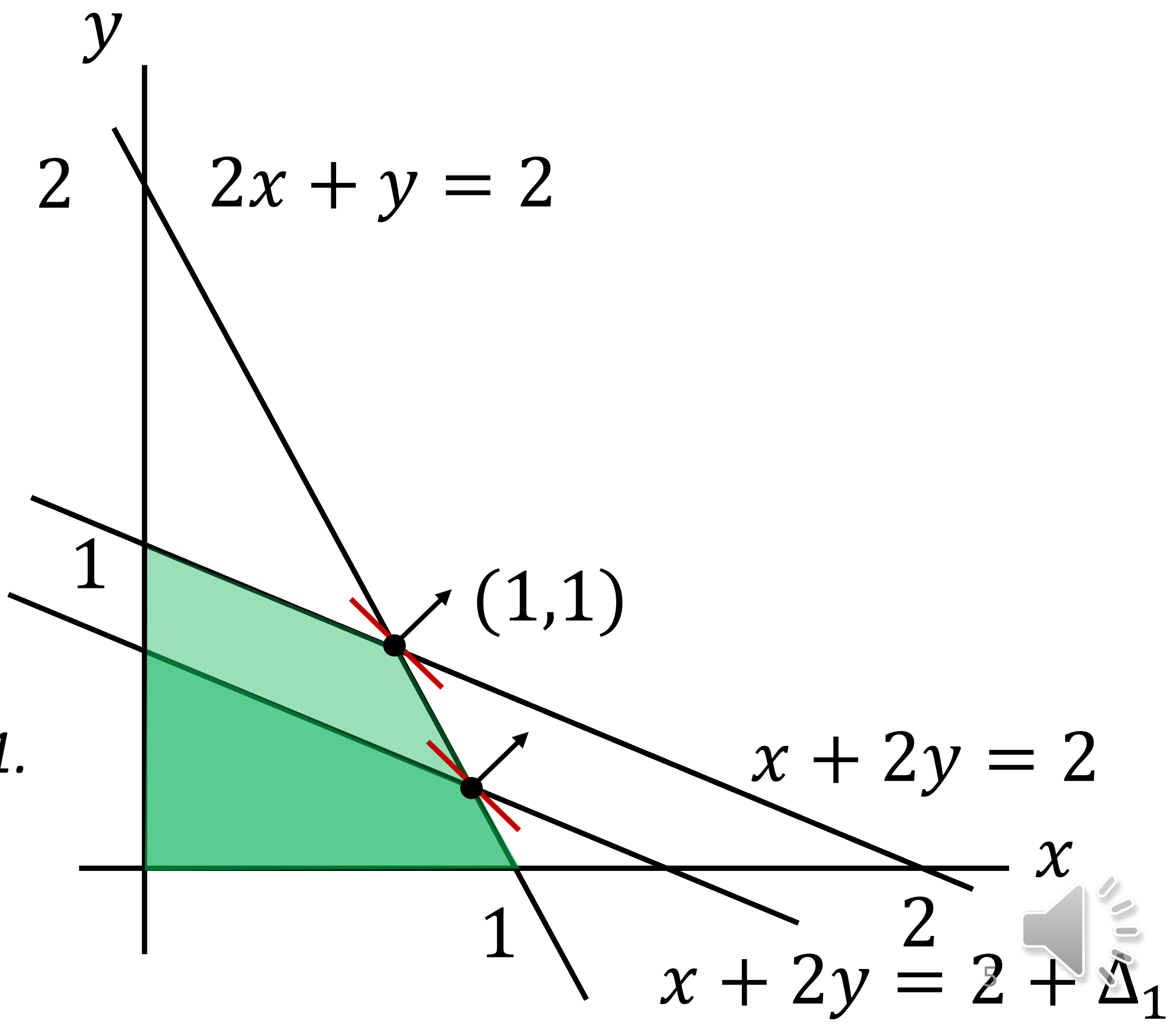
$x, y \geq 0$

$\bar{x} = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}\Delta_1$ $\bar{y} = \frac{2}{3} + \frac{2}{3}\Delta_1$

$\bar{z} = -\frac{4}{3} - \frac{1}{3}\Delta_1$ *Shattenpreis der 1. Nebenbedingung*

$\Delta_1 \in [-1,2]$

Gültigkeitsbereich



Störungen in der zweiten UNB

Minimiere $z = -x - y$

u.d.N. $x + 2y \leq 2$

$2x + y \leq 2 + \Delta_2$

$x, y \geq 0$

$$x^* = \frac{2}{3} + \frac{2}{3}\Delta_2 \qquad y^* = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}\Delta_2$$

$$z^* = -\frac{4}{3} - \frac{1}{3}\Delta_2$$ *Shattenpreis der 2. Nebenbedingung*

$\Delta_2 \in [-1,2]$ *Gültigkeitsbereich*

Gleichzeitige Störungen

Minimiere $z = -x - y$

u.d.N. $x + 2y \leq 2 + \Delta_1$

$2x + y \leq 2 + \Delta_2$

$x, y \geq 0$

$$\bar{x} = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}\Delta_1 + \frac{2}{3}\Delta_2,$$

$$\bar{y} = \frac{2}{3} + \frac{2}{3}\Delta_1 - \frac{1}{3}\Delta_2$$

$$\bar{z} = -\frac{4}{3} - \frac{1}{3}\Delta_1 - \frac{1}{3}\Delta_2$$

- Gültigkeitsbereich: $\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\Delta_1 + \frac{2}{3}\Delta_2 \geq 0, \frac{2}{3} + \frac{2}{3}\Delta_1 - \frac{1}{3}\Delta_2 \geq 0$

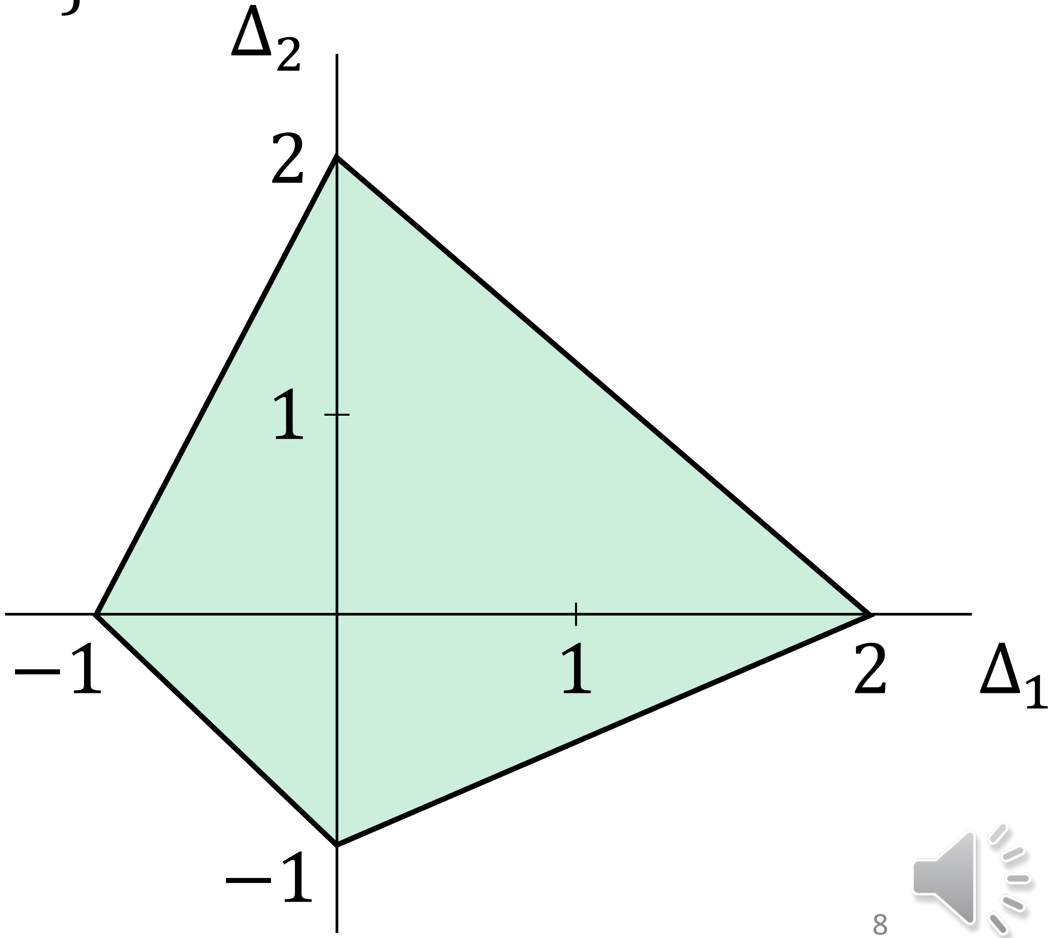
$$\Delta_1 - 2\Delta_2 \leq 2, 2\Delta_1 - \Delta_2 \geq -2$$

100%-Regel

$$P = \{\Delta_1, \Delta_2 \colon \Delta_1 - 2\Delta_2 \le 2, 2\Delta_1 - \Delta_2 \ge -2\}$$

- Gültigkeitsbereich P ist konvex
- Seien $\Delta_1, \Delta_2 \in [-1{,}2]$ und $\alpha \in [0{,}1]$
  Dann $(\alpha\Delta_1, (1-\alpha)\Delta_2) \in P$

100%-Regel



Plan

- Zweidimensionales Beispiel
- Theorie
- Beispiel aus Operations Research

Mathematisches Programm

$$\begin{aligned} \text{Minimiere } & z = c_1 x_1 + c_2 x_2 \\ \text{u.d.N. } & a_{11} x_1 + a_{12} x_2 \leq b_1 + \Delta \qquad b_1, b_2 \geq 0 \\ & a_{21} x_1 + a_{22} x_2 \leq b_2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

- Angenommen, $\bar{x}_1(\Delta), \bar{x}_2(\Delta)$ ist eine optimale Basislösung, die stetig von Δ abhängt. Sei $z(\Delta)$ der zugehörige optimale Wert
- Ist das optimale Simplex-Tableau für $\Delta = 0$ bekannt, so kann man $\bar{x}_1(\Delta), \bar{x}_2(\Delta), z(\Delta)$ auch für kleine Δ einfach bestimmen

Anfangstableau

$$
\begin{aligned}
\text{Minimiere } & z = c_1 x_1 + c_2 x_2 \\
\text{u.d.N. } & a_{11} x_1 + a_{12} x_2 \leq b_1 \\
& a_{21} x_1 + a_{22} x_2 \leq b_2 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Füge Schlupfvariablen s_1, s_2 hinzu

$$
\begin{aligned}
\text{Minimiere } & z = c_1 x_1 + c_2 x_2 \\
\text{u.d.N. } & a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + s_1 = b_1 \\
& a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + s_2 = b_2 \\
& x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

$-z$	x_1	x_2	s_1	s_2	RS
1	c_1	c_2	0	0	0
0	a_{11}	a_{12}	1	0	b_1
0	a_{21}	a_{22}	0	1	b_2

Optimale kanonische Form

$$
\begin{array}{lll}
\text{Minimiere} & c_1x_1 + c_2x_2 & |Z_0 \\
\text{u.d.N.} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + s_1 \qquad\quad - b_1 = 0 & |Z_1 \\
& a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \qquad + s_2 - b_2 = 0 & |Z_2 \\
& x_1, x_2, s_1, s_2 \ \geq 0 &
\end{array}
$$

Das Simplex-Verfahren

$$
\begin{array}{lll}
\text{Minimiere} & \bar{c_1}x_1 + \bar{c_2}x_2 + y_1s_1 + y_2s_2 + \bar{z} & |Z_0 + y_1Z_1 + y_2Z_2 \\
\text{u.d.N.} & \bar{a}_{11}x_1 + \bar{a}_{12}x_2 + \beta_{11}s_1 + \beta_{12}s_2 - \bar{b}_1 = 0 & |\beta_{11}Z_1 + \beta_{12}Z_2 \\
& \bar{a}_{21}x_1 + \bar{a}_{22}x_2 + \beta_{21}s_1 + \beta_{22}s_2 - \bar{b}_2 = 0 & |\beta_{21}Z_1 + \beta_{22}Z_2 \\
& x_1, x_2, s_1, s_2 \ \geq 0 &
\end{array}
$$

$-z$	x_1	x_2	s_1	s_2	RS
1	$\bar{c}_1 \geq 0$	$\bar{c}_2 \geq 0$	$y_1 \geq 0$	$y_2 \geq 0$	$-\bar{z}$
0	$\bar{a}_{11}$	$\bar{a}_{12}$	β_{11}	β_{12}	$\bar{b}_1 \geq 0$
0	$\bar{a}_{21}$	$\bar{a}_{22}$	β_{21}	β_{22}	$\bar{b}_2 \geq 0$

Transformationen, die das Problem in die optimale kanonische Form bringen

Störungen in der rechten Seite

$$\begin{aligned} &\text{Minimiere } c_1x_1 + c_2x_2 \\ &\text{u.d.N. } a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + s_1 = b_1 + \Delta \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + s_2 = b_2 \\ &x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\text{Minimiere } c_1x_1 + c_2x_2 && |Z_0 \\ &\text{u.d.N. } a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + (s_1 - \Delta) = b_1 && |Z_1 \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + s_2 = b_2 && |Z_2 \\ &x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\text{Minimiere } \bar{c}_1x_1 + \bar{c}_2x_2 + y_1(s_1 - \Delta) + y_2s_2 + \bar{z} && |Z_0 + y_1Z_1 + y_2Z_2 \\ &\text{u.d.N. } \bar{a}_{11}x_1 + \bar{a}_{12}x_2 + \beta_{11}(s_1 - \Delta) + \beta_{12}s_2 = \bar{b}_1 && |\beta_{11}Z_1 + \beta_{12}Z_2 \\ &\bar{a}_{21}x_1 + \bar{a}_{22}x_2 + \beta_{21}(s_1 - \Delta) + \beta_{22}s_2 = \bar{b}_2 && |\beta_{21}Z_1 + \beta_{22}Z_2 \\ &x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Optimale Kanonische Form

$$\begin{aligned}
\text{Minimiere } & \bar{c}_1 x_1 + \bar{c}_2 x_2 + y_1 (s_1 - \Delta) + y_2 s_2 + \bar{z} \\
\text{u.d.N. } & \bar{a}_{11} x_1 + \bar{a}_{12} x_2 + \beta_{11}(s_1 - \Delta) + \beta_{12} s_2 = \bar{b}_1 \\
& \bar{a}_{21} x_1 + \bar{a}_{22} x_2 + \beta_{21}(s_1 - \Delta) + \beta_{22} s_2 = \bar{b}_2 \\
& x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Minimiere } & \bar{c}_1 x_1 + \bar{c}_2 x_2 + y_1 s_1 + y_2 s_2 + \bar{z} - y_1 \Delta \\
\text{u.d.N. } & \bar{a}_{11} x_1 + \bar{a}_{12} x_2 + \beta_{11} s_1 + \beta_{12} s_2 = \bar{b}_1 + \beta_{11} \Delta \\
& \bar{a}_{21} x_1 + \bar{a}_{22} x_2 + \beta_{21} s_1 + \beta_{22} s_2 = \bar{b}_2 + \beta_{12} \Delta \\
& x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0
\end{aligned}$$

- Für $\Delta = 0$ ist das Problem in optimaler kanonischer Form
- Seien $\bar{b}_1 + \beta_{11}\Delta \geq 0,\ \bar{b}_2 + \beta_{12}\Delta \geq 0$, so ist das gestörte Problem ebenfalls in optimaler kanonischer Form

Zulässige Zunahme und Abnahme

$$\bar{b}_1 + \beta_{11}\Delta \geq 0,\ \bar{b} + \beta_{21}\Delta \geq 0$$

$$\beta_{i1} > 0 \ \Rightarrow\ \Delta \geq -\bar{b}_i/\beta_{i1}$$

$$\beta_{i1} < 0 \ \Rightarrow\ \Delta \leq -\bar{b}_i/\beta_{i1}$$

−zulässige Abnahme *zulässige Zunahme*

$$\max\left\{-\frac{\bar{b}_i}{\beta_{i1}} : \beta_{i1} > 0\right\} \leq \Delta \leq \min\left\{-\frac{\bar{b}_i}{\beta_{i1}} : \beta_{i1} < 0\right\}$$

Gültigkeitsbereich

- Liegt Δ im Gültigkeitsbereich, so lässt sich eine optimale Lösung des Δ-gestörten Problems aus dem optimalen Tableau für $\Delta = 0$ berechnen

Zusammenfassung

Minimiere $z(\Delta) = c_1x_1 + c_2x_2$

u.d.N. $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1 + \Delta$

$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq b_2$

$x_1, x_2 \geq 0$

Optimales Simplex-Tableau für $\Delta = 0$

$-z$	x_1	x_2	s_1	s_2	RS
1	$\bar{c}_1 \geq 0$	$\bar{c}_2 \geq 0$	$y_1 \geq 0$	$y_2 \geq 0$	$-\bar{z}$
0	$\bar{a}_{11}$	$\bar{a}_{12}$	β_{11}	β_{12}	$\bar{b}_1 \geq 0$
0	$\bar{a}_{21}$	$\bar{a}_{22}$	β_{21}	β_{22}	$\bar{b}_2 \geq 0$

Angenommen, $\max\left\{-\frac{\bar{b}_i}{\beta_{i1}} : \beta_{i1} > 0\right\} \leq \Delta \leq \min\left\{-\frac{\bar{b}_i}{\beta_{i1}} : \beta_{i1} < 0\right\}$

Dann ist eine optimale Basislösung gegeben durch:

$$\bar{x}_1(\Delta) = \bar{b}_1 + \beta_{11}\Delta$$

$$\bar{x}_2(\Delta) = \bar{b}_2 + \beta_{21}\Delta$$

$$z(\Delta) = \bar{z} - y_1\Delta$$

Die Spalte von s_1 enthält die zugehörigen Sentivitiätsdaten

Satz 6.14. Sensitivitätsanalyse

Minimiere $z(\Delta) = c_1x_1 + c_2x_2$

u.d.N. $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1 + \Delta_1$

$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq b_2 + \Delta_2$

$x_1, x_2 \geq 0$

Optimales Simplex-Tableau für $\Delta_1 = \Delta_2 = 0$

$-z$	x_1	x_2	s_1	s_2	RS
1	$\bar{c}_1 \geq 0$	$\bar{c}_2 \geq 0$	$y_1 \geq 0$	$y_2 \geq 0$	$\bar{z}$
0	$\bar{a}_{11}$	$\bar{a}_{12}$	β_{11}	β_{12}	$\bar{b}_1 \geq 0$
0	$\bar{a}_{21}$	$\bar{a}_{22}$	β_{21}	β_{22}	$\bar{b}_2 \geq 0$

Angenommen, $\bar{b}_1 + \beta_{11}\Delta_1 + \beta_{12}\Delta_2 \geq 0,\ \bar{b} + \beta_{21}\Delta_1 + \beta_{22}\Delta_2 \geq 0$

Gültigkeitsbereich

Dann ist eine optimale Basislösung gegeben durch:

$$\bar{x}_1(\Delta) = \bar{b}_1 + \beta_{11}\Delta_1 + \beta_{12}\Delta_2$$
$$\bar{x}_2(\Delta) = \bar{b}_2 + \beta_{21}\Delta_1 + \beta_{22}\Delta_2$$

$$z(\Delta) = \bar{z} + \underbrace{(-y_1)}\Delta_1 + \underbrace{(-y_2)}\Delta_2$$

Schattenpreise

Sensitivitätsbericht für Nebenbedingungen

NB	Rechte Seite	Schattenpreis	Schlupf	Zulässige Zunahme	Zulässige Abnahme
1	b_1	$-y_1$	s_1	$\min\left\{-\frac{\bar{b}_i}{\beta_{i1}} : \beta_{i1} < 0\right\}$	$\min\left\{\frac{\bar{b}_i}{\beta_{i1}} : \beta_{i1} > 0\right\}$
2	b_2	$-y_2$	s_2	$\min\left\{-\frac{\bar{b}_i}{\beta_{i2}} : \beta_{i2} < 0\right\}$	$\min\left\{\frac{\bar{b}_i}{\beta_{i1}} : \beta_{i2} > 0\right\}$

Satz 6.15. 100%-Regel

Seien $\Delta_i \in \left[\max\left\{\frac{\bar{b}_i}{\beta_{i1}} : \beta_{i1} < 0\right\}, \min\left\{\frac{\bar{b}_i}{\beta_{i1}} : \beta_{i1} > 0\right\}\right]$ für $i = 1,2$

Sei $\alpha \in [0,1]$. Dann gehört $(\alpha\Delta_1, (1-\alpha)\Delta_2)$ zum Gültigkeitsbereich für die gleichzeitigen Störungen der Nebenbedingungen, d.h.:

$$\bar{b}_1 + \beta_{11}\alpha\Delta_1 + \beta_{12}(1-\alpha)\Delta_2 \geq 0$$
$$\bar{b}_2 + \beta_{21}\alpha\Delta_1 + \beta_{22}(1-\alpha)\Delta_2 \geq 0$$

Beweis

- Der Gültigkeitsbereich für die gleichzeitigen Störungen in den beiden Nebenbedingungen:

$$P = \{\delta_1, \delta_2 \colon \bar{b}_1 + \beta_{11}\delta_1 + \beta_{12}\delta_2 \geq 0, \bar{b}_2 + \beta_{21}\delta_1 + \beta_{22}\delta_2 \geq 0\}$$

- $P_i = \{\delta_i \colon \bar{b}_1 + \beta_{1i}\delta_i \geq 0, \bar{b}_2 + \beta_{2i}\delta_i \geq 0\}$ ist der Gültigkeitsbereich für die Störungen in der i-ten Nebenbedingung

$$\Rightarrow \quad P_1 \subseteq P, P_2 \subseteq P$$

P ist konvex

$$conv(P_1 \cup P_2) \subseteq P$$

□

Plan

- Zweidimensionales Beispiel
- Theorie
- Beispiel aus Operations Research

Glasherstellung

- Zwei Gläserarten werden produziert:

  Saftgläser und Cocktailgläser

- Der Gewinn ist gleich Verkaufspreis minus Herstellkosten

- Arbeitskraft und Lagerkapazität sind beschränkt

Mathematisches Programm

	Gewinn	Herstellungszeit	Lagerkapazität
Saftgläser	€450	6 Std.	28.3 m^3
Cocktailgläser	€400	5 Std.	56.6 m^3
Vorhandene Menge		60 Std.	430 m^3

Maximiere $Gewinn = 450x_1 + 400x_2$

u.d.N. $6x_1 + 5x_2 \leq 60$ *Herstellungszeit*

$28.3x_1 + 56.6x_2 \leq 430$ *Lagerkapazität*

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

$\bar{x}_1 = 6.29,\ \bar{x}_2 = 4.45,\ \bar{z} = 4610.5$

Sensitivitätsbericht

Nebenbedingung	Rechte Seite	Schattenpreis	Schlupf	Zulässige Zunahme	Zulässige Abnahme
Herstellungszeit	60	71.43	0	6	22
Lagerkapazität	430	0.76	0	294.2	67.76

- Wir erwägen eine Möglichkeit, das Lager um 100 m^3 zu erweitern
- Wäre es profitabel sein, €60 in dieses Projekt zu investieren?

Sensitivitätsanalyse

Nebenbedingung	Rechte Seite	Schattenpreis	Schlupf	Zulässige Zunahme	Zulässige Abnahme
Lagerkapazität	430	$\boxed{0.76}$	0	$\boxed{294.2}$	67.76

- Der Schattenpreis für die Lagerkapazität ist €0.76 pro m^3
- Zunahme um 100 m^3 gehört zum Gültigkeitsbereich des Schattenpreises
- Der Gewinn wird um €$76 (= 0.76 \times 100)$ steigen

$\Rightarrow$ Es wäre profitabel, bis €76 ins Projekt zu investieren

Zusammenfassung

- Zweidimensionales Beispiel
- Theorie
- Beispiel aus Operations Research

Nächstes Video

- 6e. Lineare Programmierung: Das duale Simplex-Verfahren