Feuille d'exercices n° 2 – Espace dual, opérations élémentaires, déterminant

Révision

1. Dans chacun des cas suivants, les produits matriciels AB et BA sont-ils bien définis ? Si oui, les calculer.

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

(c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Démontrer que $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} = \infty$.
3. Soit $\mathbf{k} \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Soit E un $\mathbf{k}$-espace vectoriel, id_E l'endomorphisme identité et ϕ un endomorphisme nilpotent (pour simplicité, on suppose $\psi^3 = 0$). Démontrer qu'il existe un endomorphisme nilpotent ψ tel que $\mathrm{id}_E + \phi = (\mathrm{id}_E + \psi)^2$.

Matrice d'un endomorphisme. Changement de base

4. Dans $\mathbb{R}_2[t]$ considerons les bases $\mathcal{B}_\lambda = \{1, t-\lambda, (t-\lambda)^2\}$, où $\lambda \in \mathbb{R}$.
   (a) Démontrer que $\mathcal{B}_\lambda$ est une base de $\mathbb{R}_2[t]$.
   (b) Expliciter la matrice P_λ de passage de $\mathcal{B}_0$ à $\mathcal{B}_\lambda$.
   (c) Ecrire la matrice D_λ de l'opérateur $\partial_t \colon P \mapsto \frac{dP}{dt}$ dans la base $\mathcal{B}_\lambda$.
5. On désigne par $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Considérons aussi la base $\mathcal{B}' = \{\binom{1}{2}, \binom{-1}{3}\}$.
   (a) Expliciter la matrice P de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. Que vaut la matrice P' de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$?
   (b) Soit $x = \binom{x^1}{x^2} \in \mathbb{R}^2$. Déterminer les coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}'$.
   (c) Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice M dans la base canonique est
   $$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$
   Déterminer la matrice M' de f dans la base $\mathcal{B}'$.

L'espace dual

Definition 1. Soit E un $\mathbf{k}$-espace vectoriel. Une application $\mathbf{k}$-linéaire $E \to \mathbf{k}$ s'appelle une *forme linéaire* sur E, et $\mathrm{Hom}_{\mathbf{k}}(E, \mathbf{k})$ s'appelle *l'espace dual* de E et se note E^* ou $E^\vee$.

L'espace $(\mathbb{R}^n)^*$. Chaque forme linéaire f sur $\mathbb{R}^n$ s'écrit comme $f({}^t(x^1, \ldots, x^n)) = f_1 x^1 + \cdots + f_n x^n$ pour $f_1, \ldots, f_n \in \mathbb{R}$. On identifie $(\mathbb{R}^n)^*$ avec l'ensemble de tous les vecteurs-lignes $(f_1, \ldots, f_n)$, $f_1, \ldots, f_n \in \mathbb{R}^n$. L'action de $f \in (\mathbb{R}^n)^*$ sur $x \in \mathbb{R}^n$ est donnée par multiplication de matrices : $f(x) = f \cdot x$.

6. Soient $n \in \mathbb{N}$, $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $\mathcal{B}$ la base $(1, X, \ldots, X^n)$ de E. Notons ∂ l'endomorphisme de E qui, à tout polynôme $P \in E$, associe son polynôme dérivé P'. On pose alors $\partial^0 = \mathrm{id}_E$, puis, pour tout $i \in \mathbb{N}$, $\partial^{i+1} = \partial \circ \partial^i$. Pour $i = 0, \ldots, n$ on considère la forme linéaire :
$$\phi_i \colon E \to \mathbb{R}, \quad P \mapsto \tfrac{1}{i!}(\partial^i P)(0).$$
Montrer que la famille $(\phi_0, \ldots, \phi_n)$ est la base duale de $\mathcal{B}$.
7. On se place dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathbb{R}^2$.
   (a) Montrer que la famille $\mathcal{B} = \{b_1, b_2\}$, $b_1 = \binom{3}{1}$, $b_2 = \binom{2}{1}$, forme une base de $\mathbb{R}^2$, puis déterminer la base duale $\mathcal{B}^\vee = \{b^1, b^2\}$ de $(\mathbb{R}^2)^*$.
   (b) Déterminer la matrice de passage P de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}' = \{b_1', b_2'\}$, $b_1' = \binom{16}{7}$, $b_2' = \binom{9}{4}$.
   (c) Déterminer la matrice $P^\vee$ de passage de $\mathcal{B}^\vee$ à $(\mathcal{B}')^\vee$ sans calculer $(\mathcal{B}')^\vee$. Trouver $(\mathcal{B}')^\vee = \{b^{1'}, b^{2'}\}$ en utilisant $P^\vee$.
   (d) Soit $\omega \in (\mathbb{R}^2)^*$ une forme linéaire dont les coordonnées dans la base $\mathcal{B}^\vee$ sont $\binom{\omega_1}{\omega_2}$. Déterminer les coordonnées $\binom{\omega_1'}{\omega_2'}$ de ω dans la base $(\mathcal{B}')^\vee$.
   (e) Soit $\mathcal{T} \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}((\mathbb{R}^2)^*)$ est l'endomorphisme dont la matrice dans la base $\mathcal{B}^\vee$ est $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   Déterminer la matrice T' de $\mathcal{T}$ dans la base $(\mathcal{B}')^\vee$.
8. On se place dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$.
   (a) Montrer que la famille $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, b_3\}$,
   $$b_1 = {}^t(1, 0, -1), \quad b_2 = {}^t(-1, -1, 2), \quad b_3 = {}^t(-2, 1, -2),$$
   forme une base de $\mathbb{R}^3$, puis déterminer la base duale $\mathcal{B}^\vee = (b^1, b^2, b^3)$ de $(\mathbb{R}^3)^*$.
   (b) Ecrire la matrice P de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}' = \{b_1', b_2', b_3'\}$,
   $$b_1' = {}^t(1, 0, 0), \quad b_2' = {}^t(1, 1, 0), \quad b_3' = {}^t(0, 1, 1).$$
   (c) Déterminer la matrice $P^\vee$ de passage de $\mathcal{B}^\vee$ à $(\mathcal{B}')^\vee$ sans calculer $(\mathcal{B}')^\vee$. Trouver $(\mathcal{B}')^\vee$ en utilisant $P^\vee$.
   (d) Soit $\omega \in (\mathbb{R}^3)^*$ une forme linéaire dont les coordonnées dans la base $\mathcal{B}^\vee$ sont ${}^t(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$. Déterminer les coordonnées ${}^t(\omega_1', \omega_2', \omega_3')$ de ω dans la base $(\mathcal{B}')^\vee$.
   (e) Soit $\mathcal{T} \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}((\mathbb{R}^3)^*)$ un endomorphisme dont la matrice dans la base $\mathcal{B}^\vee$ est
   $$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
   Déterminer la matrice T' de $\mathcal{T}$ dans la base $(\mathcal{B}')^\vee$.
9. Soient $f_1, \ldots, f_n$ des formes linéaires sur $\mathbf{k}^n$ telles qu'il existe $x \in \mathbf{k}^n$, $x \neq 0$, tel que $f_1(x) = f_2(x) = \cdots = f_n(x) = 0$. Montrer que la famille $\{f_1, \ldots, f_n\}$ est liée.
10. Soit $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathbb{R}^4$, $\mathcal{E}^* = (e_1^*, e_2^*, e_3^*, e_4^*)$ la base duale de $\mathcal{E}$, et P le plan de E engendré par les vecteurs $v_1 = e_1 + 2e_2 + e_3 + e_4$ et $v_2 = e_2 + e_3 + e_4$.
   (a) Soit $f = a_1e_1^* + a_2e_2^* + a_3e_3^* + a_4e_4^* \in E^*$, où $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}$. À quelle(s) condition(s) a-t-on $f_{|P} = 0$?
   (b) Notons $P^\perp = \{f \in V^* \mid \forall\, v \in P,\ f(v) = 0\}$.
      i. Montrer que $P^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E^*, puis déterminer une base de $P^\perp$ et sa dimension d.
      ii. De façon équivalente, déterminer d équations linéairement indépendantes définissant P.
   (c) Considérons maintenant les formes linéaires $\phi = e_1^* + e_2^* - e_3^*$ et $\psi = e_1^* + e_4^*$ de E^*. Montrer que l'ensemble $F = \{v \in E \mid \phi(v) = \psi(v) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de E, puis déterminer une base de F.

Opérations élémentaires

11. On considère la matrice :
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \in M_{3,4}(\mathbb{R}).$$
En faisant des opérations élémentaires sur les colonnes, déterminer le rang de A, ainsi que des bases de $\operatorname{im} A$ et $\ker A$.
12. On considère la matrice :
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix} \in M_{3,4}(\mathbb{R}).$$
En faisant des opérations élémentaires sur les colonnes, déterminer le rang de A, ainsi que des bases de $\operatorname{im} A$ et $\ker A$.
13. On se place dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathbb{R}^5$, où l'on considère L le sous-espace vectoriel de E engendré par les vecteurs $v_1 = {}^t(1,-1,1,-1,1)$, $v_2 = {}^t(1,3,1,3,1)$, $v_3 = {}^t(1,1,1,1,2)$, et M le sous-espace vectoriel de E engendré par les vecteurs $u_1 = {}^t(3,1,3,1,3)$, $u_2 = {}^t(1,2,1,2,1)$, $u_3 = {}^t(1,2,0,2,0)$. En faisant des opérations sur les colonnes de la ou les matrice(s) appropriée(s), déterminer des bases de $L + M$ et $L \cap M$.

Trace et déterminant

14. On rappelle que la trace sur $M_n(\mathbf{k})$ est définie par
$$\operatorname{tr}\colon M_n(\mathbf{k}) \to \mathbf{k}, \quad \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{nn} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & m_{nn} \end{pmatrix} \mapsto m_{11} + m_{22} + \cdots + m_{nn}.$$
   (a) Montrer que tr est une forme linéaire vérifiant, pour tout A, $B \in M_n(\mathbf{k})$, $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.
   (b) Soit ϕ une forme linéaire vérifiant, pour tout A, $B \in M_n(\mathbf{k})$, $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$. Montrer que ϕ est proportionnelle à la trace.
   (c) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. On suppose que $\operatorname{tr}({}^tAA) = 0$. Que dire de la matrice A ?
15. En faisant des opérations élémentaires, calculer les déterminants :
$$V = \begin{vmatrix} 3 & 3 & -3 \\ 3 & 4 & -4 \\ 2 & -3 & -5 \end{vmatrix}, \quad W = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & -3 \\ 1 & 0 & 5 & 0 \end{vmatrix}.$$
16. Demontrer que la matrice A est inversible,
$$A = \begin{pmatrix} 32413 & 21314 & 981256 & 13542 \\ 1732 & 12743 & 34312 & 4374 \\ 2312 & 32434 & 7695423 & 843432 \\ 23948 & 2342346 & 23420 & 198477 \end{pmatrix}.$$

17. (a) Soit $a = {}^t(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. Calculer le déterminant

$$\det(I + a\,{}^t a) = \begin{vmatrix} a_1^2+1 & a_1a_2 & \cdots & a_1a_n \\ a_2a_1 & a_2^2+1 & \cdots & a_2a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_na_1 & a_na_2 & \cdots & a_n^2+1 \end{vmatrix}.$$

(b) Calculer les déterminants :

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \cdots & b & a \end{vmatrix}, a > b > 0.$$

18. (a) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$, ${}^tA = -A$. Démontrer que $\det(I - A^2) \geq 0$.

(b) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Démontrer que $\det(A^2 + I) \geq 0$.

19. (a) Calculer le déterminant de *Vandermonde* :

$$V[x_0, \dots, x_n] = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}.$$

(b) Démontrer que les fonctions $f_\alpha(t) = e^{\alpha t}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, sont linéairement indépendantes sur $\mathbb{R}$.

(c) Démontrer que les fonctions $g_\alpha(t) = \sin(\alpha t)$, $\alpha > 0$, sont linéairement indépendantes sur $\mathbb{R}$.

20. Calculer $\det(zI - C)$, où

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -c_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -c_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -c_2 \\ \vdots & \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -c_{n-1}. \end{pmatrix}$$