Révision

2. Démontrer que $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} = \infty$.
3. Soit $\mathbf{k} \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Soit E un $\mathbf{k}$-espace vectoriel, id_E l'endomorphisme identité et ϕ un endomorphisme nilpotent (pour simplicité, on suppose $\psi^3 = 0$). Démontrer qu'il existe un endomorphisme nilpotent ψ tel que $\mathrm{id}_E + \phi = (\mathrm{id}_E + \psi)^2$.

Trace et déterminant

14. On rappelle que la trace sur $M_n(\mathbf{k})$ est définie par

$$\mathrm{tr}\colon M_n(\mathbf{k}) \to \mathbf{k}, \quad \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{nn} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & m_{nn} \end{pmatrix} \mapsto m_{11} + m_{22} + \cdots + m_{nn}.$$

   (a) Montrer que tr est une forme linéaire vérifiant, pour tout A, $B \in M_n(\mathbf{k})$, $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.
   (b) Soit ϕ une forme linéaire vérifiant, pour tout A, $B \in M_n(\mathbf{k})$, $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$. Montrer que ϕ est proportionnelle à la trace.
   (c) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. On suppose que $\mathrm{tr}({}^tAA) = 0$. Que dire de la matrice A ?

15. En faisant des opérations élémentaires, calculer les déterminants :

$$V = \begin{vmatrix} 3 & 3 & -3 \\ 3 & 4 & -4 \\ 2 & -3 & -5 \end{vmatrix}, \quad W = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & -3 \\ 1 & 0 & 5 & 0 \end{vmatrix}.$$

16. Demontrer que la matrice A est inversible,

$$A = \begin{pmatrix} 32413 & 21314 & 981256 & 13542 \\ 1732 & 12743 & 34312 & 4374 \\ 2312 & 32434 & 7695423 & 843432 \\ 23948 & 2342346 & 23420 & 198477 \end{pmatrix}.$$

17. (a) Soit $a = {}^t(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. Calculer le déterminant

$$\det(I + a\,{}^ta) = \begin{vmatrix} a_1^2+1 & a_1a_2 & \cdots & a_1a_n \\ a_2a_1 & a_2^2+1 & \cdots & a_2a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_na_1 & a_na_2 & \cdots & a_n^2+1 \end{vmatrix}.$$

   (b) Calculer les déterminants :

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \cdots & b & a \end{vmatrix}, a > b > 0.$$

18. (a) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$, ${}^tA = -A$. Démontrer que $\det(I - A^2) \geq 0$.
   (b) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Démontrer que $\det(A^2 + I) \geq 0$.

19. (a) Calculer le déterminant de *Vandermonde* :

$$V[x_0,\ldots,x_n] = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}.$$

(b) Démontrer que les fonctions $f_\alpha(t) = e^{\alpha t}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, sont linéairement indépendantes sur $\mathbb{R}$.

(c) Démontrer que les fonctions $g_\alpha(t) = \sin(\alpha t)$, $\alpha > 0$, sont linéairement indépendantes sur $\mathbb{R}$.

20. Calculer $\det(zI - C)$, où

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -c_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -c_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -c_2 \\ \vdots & \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -c_{n-1}. \end{pmatrix}$$