Feuille d'exercices n° 1 – Espaces vectoriels et applications linéaires

Dans tout ce qui suit, $\Bbbk$ désignera un corps commutatif, comme par exemple $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Sauf mention explicite du contraire, l'expression « espace vectoriel » signifiera « $\Bbbk$-espace vectoriel ».

Espaces vectoriels, sous-espaces vectoriels

1 — Soit E un espace vectoriel.

1) Soit $(F_i)_{i\in I}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E. Montrer que :

$$\bigcap_{i\in I} F_i \;=\; \{x \in E \mid \forall\, i \in I,\ x \in F_i\}$$

est un sous-espace vectoriel de E.

2) Soient $n \in \mathbb{N}^*$, et $F_1, \ldots, F_n$ des sous-espaces vectoriels de E. Montrer que :

$$F_1 + \cdots + F_n \;=\; \{x_1 + \cdots + x_n \mid x_1 \in F_1, \ldots, x_n \in F_n\}$$

est un sous-espace vectoriel de E.

3) Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.
   a. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
      (i) $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E.
      (ii) $F \subset G$ ou $G \subset F$.
   b. Expliciter des espaces E, F et G tels que $F \cup G$ ne soit pas un sous-espace vectoriel de E.

2 — On suppose $\Bbbk = \mathbb{R}$ et on se place dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites numériques à valeurs réelles. Dans chacun des cas suivants, l'ensemble F proposé est-il un sous-espace vectoriel de E ?

1) F est l'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$ telles que $u_0 \in \mathbb{Z}$.
2) F est l'ensemble des suites constantes de E.
3) F est l'ensemble des suites monotones de E, c'est-à-dire croissantes ou décroissantes.
4) F est l'ensemble des suites bornées de E.
5) F est l'ensemble des suites convergentes de E.
6) F est l'ensemble des suites divergentes de E.
7) F est l'ensemble des suites presque nulles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$, c'est-à-dire pour lesquelles il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_n = 0$ dès que $n \geqslant N$.
8) F est l'ensemble des suites de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$ vérifiant $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, avec $a, b \in \mathbb{R}$.

3 — On suppose $\Bbbk = \mathbb{R}$. Dans chacun des cas suivants, montrer que l'ensemble E proposé est un espace vectoriel.

1) E est l'ensemble des fonctions constantes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
2) Pour $\tau > 0$, E est l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τ-périodiques, c'est-à-dire telles que $f(t+\tau) = f(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
3) $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continues sur $\mathbb{R}$.
4) E est l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dérivables sur $\mathbb{R}$.
5) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $E = \mathcal{D}^n(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ n fois dérivables sur $\mathbb{R}$.
6) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $E = \mathcal{C}^n(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ n fois dérivables sur $\mathbb{R}$ et de dérivée n-ième continue sur $\mathbb{R}$.
7) $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $f \in \mathcal{C}^n(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
8) E est l'ensemble des fonctions paires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
9) E est l'ensemble des fonctions impaires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

4 — Dans chacun des cas suivants, montrer que l'ensemble E proposé est un espace vectoriel.

1) Pour $n \in \mathbb{N}$, $E = \mathbb{k}_n[X]$ est l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{k}$ de degré au plus n.
2) E est l'ensemble des polynômes pairs à coefficients dans $\mathbb{k}$.
3) E est l'ensemble des polynômes impairs à coefficients dans $\mathbb{k}$.

5 — On suppose $\mathbb{k} = \mathbb{R}$. Dans chacun des cas suivants, l'ensemble E proposé est-il un espace vectoriel ?

1) E est l'ensemble des triplets $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ vérifiant $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1$.
2) E est l'ensemble des quadruplets $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ vérifiant $t = 3x - 2y + 4z$.
3) E est l'ensemble des triplets $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ solutions du système :

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & 5y & - & 3z & = & 0 \\ -x & + & y & - & 4z & = & 0 \end{array} \right. .$$

Familles libres, familles génératrices, bases

6 — Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

1) Tous les sous-espaces vectoriels de E sont-ils de dimension finie ? Si oui, que peut-on dire de leur dimension ?
2) Soit F un sous-espace vectoriel de E tel que $\dim F = \dim E$. Démontrer que $F = E$.
3) Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.
   a. Établir la *formule de Grassmann* : $\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$.
   b. On suppose E de dimension 5, et F et G de dimension 3. Montrer que $F \cap G \neq \{0_E\}$.

7 — On suppose $\mathbb{k} = \mathbb{R}$. Dans chacun des cas suivants, les vecteurs proposés forment-ils une famille libre de $\mathbb{R}^3$? une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$? une base de $\mathbb{R}^3$? S'ils forment d'une base de $\mathbb{R}^3$, déterminer les coordonnées du vecteur $u = (1, 1, 1)$ dans cette base.

1) $v_1 = (-1, 4, 1)$, $v_2 = (2, 2, -3)$.
2) $v_1 = (1, 0, 4)$, $v_2 = (-1, 3, 0)$, $v_3 = (0, 0, 0)$.
3) $v_1 = (1, 1, 0)$, $v_2 = (1, 0, 1)$, $v_3 = (0, 1, 1)$.
4) $v_1 = (1, 2, 3)$, $v_2 = (4, 5, 6)$, $v_3 = (7, 8, 9)$.
5) $v_1 = (1, 0, -2)$, $v_2 = (-1, 1, 0)$, $v_3 = (-2, 1, 3)$.
6) $v_1 = (1, 0, 2)$, $v_2 = (0, -3, 1)$, $v_3 = (-1, -5, 0)$, $v_4 = (1, 2, 1)$.

8 — Dans chacun des cas suivant, déterminer une base de l'ensemble E proposé.

1) $\mathbb{k} = \mathbb{Q}$, et E est l'ensemble des quadruplets $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{Q}^4$ vérifiant $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$.
2) $\mathbb{k} = \mathbb{C}$, et E est l'ensemble des quadruplets $(z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{C}^4$ solutions du système :

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} z_1 & - & iz_2 & + & 2z_3 & + & 2iz_4 & = & 0 \\ iz_1 & + & z_2 & + & iz_3 & - & z_4 & = & 0 \end{array} \right. .$$

9 — Le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes est à la fois un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

1) *a.* Rappeler la dimension de $\mathbb{C}$ en tant que $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et en donner une base.
   b. Rappeler la dimension de $\mathbb{C}$ en tant que $\mathbb{C}$-espace vectoriel, et en donner une base.
   c. Soient $z_1 = 1 + i \in \mathbb{C}$ et $z_2 = 1 - i \in \mathbb{C}$. La famille (z_1, z_2) est-elle libre sur $\mathbb{R}$? et sur $\mathbb{C}$?
2) *a.* Déterminer la dimension de $\mathbb{C}^2$ en tant que $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et en donner une base.
   b. Déterminer la dimension de $\mathbb{C}^2$ en tant que $\mathbb{C}$-espace vectoriel, et en donner une base.
   c. Une famille de $\mathbb{C}^2$ libre sur $\mathbb{C}$ est-elle libre sur $\mathbb{R}$? et réciproquement ?

10 — Soient E un espace vectoriel et $u, v, w \in E$ tels que la famille (u, v, w) soit libre.

1) On suppose, dans cette question seulement, E de dimension finie. Que peut-on dire de $\dim E$?
2) La famille $(u + v, v + w, w + u)$ est-elle libre ?
3) La famille $(u - v, v - w, w - u)$ est-elle libre ?

Applications linéaires

11 — Soient E_1 et E_2 deux espaces vectoriels, et $f : E_1 \to E_2$ une application linéaire.

1) Soit F_1 un sous-espace vectoriel de E_1.
   a. Démontrer que $f(F_1) = \{f(x) \mid x \in F_1\}$ est un sous-espace vectoriel de E_2.
   b. En déduire que $\operatorname{im} f$ est un sous-espace vectoriel de E_2.
2) Soit F_2 un sous-espace vectoriel de E_2.
   a. Démontrer que $f^{-1}(F_2) = \{x \in E_1 \mid f(x) \in F_2\}$ est un sous-espace vectoriel de E_1.
   b. En déduire que $\ker f$ est un sous-espace vectoriel de E_1.

12 — On suppose $\mathbb{k} = \mathbb{R}$. Dans chacun des cas suivants, l'application f proposée est-elle linéaire ? Si oui, est-ce un endomorphisme ? une forme linéaire ?

1) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto xy$.
2) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sin x$.
3) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_2 - x_1, x_3 - x_2, x_3)$.
4) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ x \mapsto \big(2x, -x, x\sqrt{2}\big)$.
5) $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R},\ (x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto 3x_2 - 2x_4$.
6) $f : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R},\ P \mapsto P(0)$.
7) $f : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.
8) $f : \mathcal{B} \to \mathbb{R},\ (u_n)_{n\in\mathbb{R}} \mapsto \sup\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, où $\mathcal{B}$ est l'ensemble des suites bornées de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
9) $f : \mathcal{C} \to \mathbb{R},\ (u_n)_{n\in\mathbb{R}} \mapsto \lim u_n$, où $\mathcal{C}$ est l'ensemble des suites convergentes de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
10) $f : \mathcal{D} \to \mathcal{D},\ u \mapsto u'$, où $\mathcal{D}$ est l'ensemble des fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

13 — 1) On munit $\mathbb{C}$ de sa structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Étudier la linéarité des applications suivantes :

$$\mathrm{Re}\ :\ \mathbb{C} \to \mathbb{R},\ x + iy \mapsto x, \qquad \mathrm{Im}\ :\ \mathbb{C} \to \mathbb{R},\ x + iy \mapsto y, \qquad |\cdot|\ :\ \mathbb{C} \to \mathbb{R},\ x + iy \mapsto \sqrt{x^2 + y^2}.$$

2) Pour $z = x + iy \in \mathbb{C}$, on rappelle que $\overline{z} = x - iy$ est le *conjugué* de z. Soit alors $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \overline{z}$.
   a. On suppose $\mathbb{C}$ muni de sa structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel. L'application f est-elle linéaire ?
   b. On suppose $\mathbb{C}$ muni de sa structure de $\mathbb{C}$-espace vectoriel. L'application f est-elle linéaire ?

14 — On rappelle que l'espace vectoriel $\mathbb{k}[X]$ n'est pas de dimension finie. On considère les opérateurs D de dérivation et L de multiplication par X définis par :

$$D\ :\ \mathbb{k}[X] \to \mathbb{k}[X],\ P(X) = \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k X^k \mapsto P'(X) = \sum_{k\in\mathbb{N}} (k+1)a_{k+1}X^k \quad \text{et} \quad L\ :\ \mathbb{k}[X] \to \mathbb{k}[X],\ \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k X^k \mapsto \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k X^{k+1}.$$

1) Montrer que D et L sont des endomorphismes de $\mathbb{k}[X]$.
2) Déterminer les images et noyaux de D et L. Qu'en déduisez-vous ?

15 — Soit $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^2,\ (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \mapsto (x_1 + x_2 + x_3, x_1 - x_4 - x_5)$.

1) Montrer que f est linéaire.
2) Déterminer des bases de $\ker f$ et $\operatorname{im} f$. L'application f est-elle injective ? surjective ? bijective ?

16 — On suppose $\mathbb{k} = \mathbb{R}$, et on considère $E = \mathbb{R}_3[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et de degré au plus 3. Soit f l'application définie, pour $P \in E$, par $f(P) = 2P(X) - (X - 1)P'(X)$.

1) Montrer que f est un endomorphisme de E.
2) Déterminer des bases de $\ker f$ et $\operatorname{im} f$.

17 — 1) Soient E_1, E_2, E_3 trois espaces vectoriels et $f : E_1 \to E_2$, $g : E_2 \to E_3$ deux applications linéaires. Montrer que $g \circ f$ est nulle si et seulement si $\operatorname{im} f \subset \ker g$.

2) On suppose $\mathbb{k} = \mathbb{R}$, et on considère $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x, y, z) \mapsto (2y + z, z, 0)$.
   a. Montrer que $\phi \in \mathrm{End}\big(\mathbb{R}^3\big)$, et que $\ker \phi = \operatorname{im} \phi^2$.
   b. En déduire que ϕ est nilpotent, c'est-à-dire qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\phi^n = 0$.

18 — Soit E un espace vectoriel.

1) Soit $\phi \in \mathrm{End}(E)$. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :
   (i) Pour tout $v \in E$, la famille $(v, \phi(v))$ est liée.
   (ii) Pour tout $v \in E$, il existe $\lambda_v \in \mathbb{k}$ tel que $\phi(v) = \lambda_v v$.
   (iii) ϕ est une homothétie, c'est-à-dire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{k}$ tel que $\phi(v) = \lambda v$ pour tout $v \in E$.
2) On suppose E de dimension finie $n > 0$. Déduire de la question précédente que le *centre* du groupe $\mathrm{GL}(E)$, c'est-à-dire l'ensemble des $\phi \in \mathrm{GL}(E)$ vérifiant $\phi \circ \psi = \psi \circ \phi$ pour tout $\psi \in \mathrm{GL}(E)$, est l'ensemble des homothéties inversibles de E.

19 — Soient E un espace vectoriel et f une forme linéaire non nulle sur E. Que peut-on dire de f ?

Matrices

20 — On rappelle que, pour $p, q \in \mathbb{N}^*$ et $M = (m_{ij})_{(i,j)\in[\![1,p]\!]\times[\![1,q]\!]} \in \mathrm{M}_{p,q}(\mathbb{k})$, la *transposée* de la matrice M est la matrice ${}^tM = (m'_{ij})_{(i,j)\in[\![1,q]\!]\times[\![1,p]\!]} \in \mathrm{M}_{q,p}(\mathbb{k})$ où $m'_{ij} = m_{ji}$ pour tout $(i,j) \in [\![1,q]\!] \times [\![1,p]\!]$.

1) Soient $p, q \in \mathbb{N}^*$.
   a. Vérifier que l'application $\mathrm{M}_{p,q}(\mathbb{k}) \to \mathrm{M}_{q,p}(\mathbb{k})$, $M \mapsto {}^tM$ est linéaire.
   b. Montrer que ${}^t({}^tM) = M$ pour toute matrice $M \in \mathrm{M}_{p,q}(\mathbb{k})$.
   c. En déduire que l'application $\mathrm{M}_{p,q}(\mathbb{k}) \to \mathrm{M}_{q,p}(\mathbb{k})$, $M \mapsto {}^tM$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.
2) Soient $p, q, r, n \in \mathbb{N}^*$.
   a. Montrer que ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$ pour toutes matrices $A \in \mathrm{M}_{p,q}(\mathbb{k})$ et $B \in \mathrm{M}_{q,r}(\mathbb{k})$.
   b. En déduire que ${}^tM \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{k})$ pour toute matrice $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{k})$, avec $({}^tM)^{-1} = {}^t(M^{-1})$.
3) Soient $p, q \in \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathrm{M}_{p,q}(\mathbb{k})$. Montrer que M et ${}^tM$ sont de même rang.

21 — Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Dans chacun des cas suivants, montrer que l'ensemble F proposé est un sous-espace vectoriel de $\mathrm{M}_n(\mathbb{k})$, et préciser sa dimension.

1) F est l'ensemble des matrices $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{k})$ symétriques, c'est-à-dire telles que ${}^tM = M$.
2) On suppose que $2 \neq 0$ dans $\mathbb{k}$, et que F est l'ensemble des matrices $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{k})$ antisymétriques, c'est-à-dire telles que ${}^tM = M$.
3) F est l'ensemble des matrices $M = (m_{ij})_{i,j\in[\![1,n]\!]} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{k})$ diagonales, c'est-à-dire telles que $m_{ij} = 0$ dès que $i, j \in [\![1,n]\!]$ sont distincts.
4) F est l'ensemble des matrices $M = (m_{ij})_{i,j\in[\![1,n]\!]} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{k})$ triangulaires supérieures, c'est-à-dire telles que $m_{ij} = 0$ dès que $i, j \in [\![1,n]\!]$ vérifient $i > j$.

22 — On suppose $\mathbb{k} = \mathbb{R}$. Dans chacun des cas suivants, les produits matriciels AB et BA sont-ils bien définis ? Si oui, les calculer.

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

23 — On suppose $\mathbb{k} = \mathbb{R}$, et on se place dans $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$, où l'on considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Calculer AB, BA, $(A-B)^2$ et $A^2 - 2AB + B^2$. Que remarque-t-on ?

24 — On suppose $\mathbb{k} = \mathbb{R}$, et on considère la matrice de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ suivante :

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculer ${}^tAA$. La matrice A est-elle inversible. Si oui, déterminer son inverse.

25 — On suppose $\mathbb{k} = \mathbb{R}$, et on considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ -2 & -3 & 0 & -5 \\ 4 & 9 & 6 & 7 \\ 1 & -1 & -5 & 5 \end{pmatrix}.$$

1) Déterminer le rang des matrices A, B et C.
2) Les matrices A, B et C sont-elles inversibles ? Si oui, calculer leur inverse.

26 — On suppose $\Bbbk = \mathbb{R}$. Soient $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini, pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, par :

$$f(x, y, z) \;=\; (x + y,\ 2x - y + z,\ x + z).$$

1) Expliciter $M = \mathrm{mat}_{\mathcal{E}}(f)$, la matrice de f dans la base $\mathcal{E}$.
2) Calculer $f(1, 2, 3)$ de deux manières : en utilisant la définition de f d'une part, et la matrice M d'autre part.
3) Montrer que f est un automorphisme de E.
4) Montrer que la famille $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$, où $b_1 = (1, 1, 0)$, $b_2 = (1, 2, 1)$ et $b_3 = (1, 3, 1)$, est une base de $\mathbb{R}^3$.
5) Soit $M' = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(f)$ la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.
   a. Déterminer les coordonnées de $f(b_1)$, $f(b_2)$ et $f(b_3)$ dans la base $\mathcal{B}$. En déduire les composantes de M'.
   b. Retrouver le résultat de 5.a en utilisant la formule du changement de base.

27 — On suppose $\Bbbk = \mathbb{Q}$, et on considère la matrice :

$$M \;=\; \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

1) *a.* Déterminer une matrice $N \in \mathrm{M}_3(\mathbb{Q})$ telle que $M = 3\,\mathrm{I}_3 + N$.
   b. Calculer N^2, N^3, puis N^k pour tout entier $k \geqslant 3$.
   c. En déduire la valeur de M^k, pour tout entier $k \in \mathbb{Z}$.
2) Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites à coefficients dans $\mathbb{Q}$ définies par :

$$\begin{cases} x_0 &= 1 \\ y_0 &= 2 \\ z_0 &= 7 \end{cases} \quad \text{puis, pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} x_{n+1} &= 3x_n + y_n \\ y_{n+1} &= 3y_n + 2z_n \\ z_{n+1} &= 3z_n \end{cases}.$$

   a. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $X_n = {}^t(x_n, y_n, z_n)$. Démontrer que $X_n = M^n X_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   b. En déduire les valeurs de x_n, y_n et z_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

28 — On suppose $\Bbbk = \mathbb{R}$. On désigne par $\mathcal{E}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, et on note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice $M = \mathrm{mat}_{\mathcal{E}}(f)$ dans la base $\mathcal{E}$ est :

$$M \;=\; \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & -4 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

1) Montrer que $f \circ f = 2f$.
2) Démontrer, *sans étudier* $\mathrm{im}\, f$, que $f(v) = 2v$ pour tout $v \in \mathrm{im}\, f$.
3) *a.* Déterminer des bases de $\ker f$ et $\mathrm{im}\, f$.
   b. En déduire que $\ker f$ et $\mathrm{im}\, f$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$, c'est-à-dire que $\ker f \cap \mathrm{im}\, f = \{(0, 0, 0)\}$ et $\mathbb{R}^3 = \ker f + \mathrm{im}\, f$.
4) Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ de $\mathbb{R}^3$ telle que $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(f) = D$, où :

$$D \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

5) Soit P la matrice de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs b_1, b_2, b_3 dans la base $\mathcal{E}$.
   a. Justifier que la matrice P est inversible.
   b. Exprimer M en fonction de D, P et P^{-1}.
   c. En déduire l'expression de M^n, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

29 — Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On rappelle que la *trace* sur $\mathrm{M}_n(\Bbbk)$ est définie par :

$$\mathrm{tr} \;:\; \mathrm{M}_n(\Bbbk) \to \Bbbk,\ (m_{ij})_{i,j\in[\![1,n]\!]} \mapsto \sum_{k=1}^{n} m_{kk}.$$

1) Montrer que tr est une forme linéaire vérifiant, pour tous $A, B \in \mathrm{M}_n(\Bbbk)$, $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.
2) Soit ϕ une forme linéaire sur $\mathrm{M}_n(\Bbbk)$. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :
   (i) Pour tous $A, B \in \mathrm{M}_n(\Bbbk)$, on a $\phi(AB) = \phi(BA)$.
   (ii) ϕ est proportionnelle à la trace, c'est-à-dire qu'il existe $\lambda \in \Bbbk$ tel que $\phi = \lambda\,\mathrm{tr}$.