Corrections

1. (a) On calcule
$$\chi_A(\lambda) = \det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} -3-\lambda & 1 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+3)(\lambda-2),$$
on en déduit que les valeurs propres sont $\lambda_1 = -3$ et $\lambda_2 = 2$. Pour calculer les vecteurs propres correspondant à λ_1 on calcule $\ker(A-\lambda_1 I)$:
$$A - \lambda_1 I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$
Le vecteur propre est donc $v_1 = {}^t(1,0)$. On calcule $\ker(A-\lambda_2 I)$:
$$\begin{pmatrix} A-\lambda_2 I \\ \hline I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A' \\ \hline P \end{pmatrix}$$
Les colonnes en-dessous des colonnes nulles de A' formet une base de $\ker A$, car $A' = AP$. Il vient que $v_2 = {}^t(1,5)$.

   (b) On calcule
$$\begin{aligned}\chi(B-\lambda I) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & -1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda)((1-\lambda)^2+1) = (1-\lambda)(1+i-\lambda+i)(1-i-\lambda).\end{aligned}$$
Il vient que B a un seule valeur propre $\lambda_1 = 1$. On calcule le vecteur propre :
$$\begin{pmatrix} B-\lambda_1 I \\ \hline I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$
d'où $v_1 = {}^t(0,1,1)$.

2.

3.

4. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de A. Alors $\det A = \lambda_1 \dots \lambda_n$ et $\operatorname{tr} A = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n$. Par l'inégalité arithmético-géométrique,
$$(\det A)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\lambda_1 \dots \lambda_n} \leq \tfrac{\lambda_1 + \cdots + \lambda_n}{n} = \tfrac{\operatorname{tr} A}{n}. \tag{1}$$
Or,
$$\operatorname{tr} A = a_{11} + \cdots + a_{nn} \leq 1 + \cdots + 1 = n.$$
$$\det A \in \mathbb{Z}, \quad \det A \geq 1.$$
In vient que $\det A = 1$, ce qui implique $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 1$, car on a le cas d'égalité dans (1).

5. (a) Déterminant d'une matrice bloc-diagonale.
   (b) On a $C^k = \begin{pmatrix} A^k & 0 \\ 0 & B^k \end{pmatrix}$ pour tout $k \geq 1$. Alors $P(C) = \begin{pmatrix} P(A) & 0 \\ 0 & P(B) \end{pmatrix}$ pour tout $P \in \mathbb{C}[x]$. On voit que
$$P(C) = 0 \text{ si et seulement si } P(A) = 0 \text{ et } P(B) = 0. \tag{2}$$
   En posant $P = \mu_C$, on en obtient $\mu_C(A) = 0$, $\mu_C(B) = 0$ et donc $\mu_A \mid \mu_C$, $\mu_B \mid \mu_C$.
   Soit $P \in \mathbb{C}[x]$ tel que $\mu_A \mid P$, $\mu_B \mid P$. En utilisant (2), on obtient $P(C) = 0$ et donc $\mu_C \mid P$. Il vient que $\mu_C = \mathrm{lcm}(\mu_A, \mu_B)$ par définition.
6. (a) On calcule $(J_n(\lambda) - \lambda)^k$, $k = 2$, n. On déduit que ces matrices pour $k = 0, 1, \ldots, n-1$ sont linéairement indépendantes et donc aucun polynôme de dégré $d \leq n-1$ peut annuler $J_n(\lambda)$. Par contre, $(x-\lambda)^n$ est un polynôme monique qui annule $J_n(\lambda)$, il vient que $\mu_{J_n(\lambda)} = (x-\lambda)^n$. On calcule $\chi_{J_n(\lambda)} = (x-\lambda)^n$ par définition.
   (b) $\chi(x) = (x-\lambda)^{n_1+\cdots+n_k}$, $\mu(x) = (x-\lambda)^{\mathrm{lcm}(n_1,\ldots,n_k)}$.
   (c) On a
$$\chi_J(x) = (x-\lambda_1)^{|\overline{n}^1|} \cdots (x-\lambda_m)^{|\overline{n}^m|},$$
$$\mu_J(x) = (x-\lambda_1)^{\mathrm{lcm}(\overline{n}^1)} \cdots (x-\lambda_m)^{\mathrm{lcm}(\overline{n}^m)},$$
   où $|\overline{a}| = a_1 + \cdots + a_N$ pour $\overline{a} = (a_1, \ldots, a_N)$.
7. Soit $D = \frac{d}{dt}$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}[t]$. Le raisonnement par l'absurde : soit
$$f(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_{n-1}t^{n-1} + t^n, \quad a_n \neq 0,$$
   le polynôme minimal monique de D. Alors, pour tout $P \in \mathbb{R}[t]$ on a
$$a_0 + a_1 P' + \cdots + a_n P^{(n)} = 0.$$
   On choisit $P(t) = t^n$. Alors,
$$a_0 t^n + n a_1 t^{n-1} + \cdots + n! = 0 \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}.$$
   En posant $t = 0$ on obtient $n! = 0$. Contradiction.
8. (a) Le polynôme $F(x) = x(x-1)$ annule P. Le polynôme minimal divise chaque polynôme annulateur. Donc $\mu_P(x) \in \{x, x-1, x(x-1)\}$. Comme les racines de μ_P sont simples et réelles, P est diagonalisable dans $M_n(\mathbb{R})$.
   (b) Le polynôme $G(x) = (x-1)(x+1)$ annule P. Donc $\mu_R \mid G$ et on déduit $\mu_R \in \{x-1, x+1, (x-1)(x+1)\}$. Les racines sont simples est réelles et on conclut.
   (c) Le polynôme $H(x) = x^k - 1$ annule A est n'as pas de racines multiples. Comme $\mu_A \mid H$, c'est également vrai pour μ_A.
9. Le polynôme $P(x) = (x-3)^2(x-5)^7$ annule A. Le polynôme minimal divise chaque polynôme annulateur. De plus, comme A est diagonalisable, les racines de μ_A sont simples. Cela implique que soit $\mu_A(x) = x-3$, soit $\mu_A(x) = x-5$, soit $\mu_A(x) = (x-3)(x-5)$. Comme A n'est pas scalaire, on en déduit que $\mu_A(x) = (x-3)(x-5)$. Donc, $x = 3$ et $x = 5$ sont les valeurs propres de A. Dans le cas $n = 2$ la matrice A est donc diagonalisable et en la diagonalisant on obtient $\left(\begin{smallmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{smallmatrix}\right)$. Comme la matrice A est symétrique, la matrice de passage est dans $O(2)$.
10. (a) Les racines du polynôme minimal sont les valeurs propres de A. Comme 0 est une valeur propre, A n'est pas ni injective, ni surjective.
   (a) On a $\mu_A(x) = x^3(x^7-1)$. La multiplicité de la racine $x = 0$ corréspond à la taille maximale d'un bloc de Jordan dans la forme canonique de A. Comme la multiplicité est égale à $3 > 1$, la matrice n'est pas diagonalisable.

11. (a) (i) Soit $J^2 = -I$, alors :

$$\det(J^2) = \det(-I) \implies (\det J)^2 = (-1)^{\dim V} \implies \dim V = 2n.$$

(ii) Comme $J^2 + I = 0$, $P(x) = x^2 + 1 = (x+i)(x-i)$ est un polynôme annulateur pour J. Le polynôme minimal divise $P(x)$ et est réel, ce qui conduit à $\mu_J(x) = x^2 + 1$. Les racines des polynomes μ_J est χ_J coincide, donc $\chi_J(x) = (x-i)^k(x+i)^l$, $k + l = 2n$. Comme $\chi_J(x)$ est réel, on a $k = l = n$ et $\chi_J(x) = (x^2+1)^n$.

(iii) J n'est pas trigonalisable car μ_J n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$.

(iv) Soit $e_1 \neq 0$. Alors e_1, Je_1 sont linéairement indépendants, car autrement J a une valeur propre réelle. On choisit $e_2 \notin \mathrm{Vect}\{e_1, Je_1\}$. Alors $\{e_1, e_2, Je_1, Je_2\}$ est une famille libre. Sinon, $W = \mathrm{Vect}\{e_1, e_2, Je_1\}$ est un s.e.v. J-invariant est on peut definir $J|_W$. Mais comme $(J|_W)^2 = -I$, $\dim W$ est paire ce qui est contradictoire à (i). On procède par induction. Dans la base construite, J a une matrice $\left(\begin{smallmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

12. (a) Comme $\operatorname{rang} A = 1$, $\operatorname{im} A = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\{u\}$, $u \neq 0$. Soit $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$. Alors, $Ax = \lambda(x)u$, $A^2x = \lambda(x)Au = \lambda(x)\lambda(u)u$. On voit que $A^2 = \lambda(u)A$. On va montrer que $\lambda(u) = \operatorname{tr} A$ ci-dessous.

(b) Comme $A(A - \lambda(u)) = 0$, $\mu_A \in \{x, x - \lambda(u), x(x - \lambda(u))\}$. Comme $A \neq 0$ et $A \neq \lambda(u)I$, on a $\mu_A(x) = x(x - \lambda(u))$.

Si $\lambda(u) = 0$, $\mu_A(x) = x^2$ et toutes les valeurs propres de A sont nulles, d'où $\lambda(u) = \operatorname{tr} A$ et A n'est pas diagonalisable. Si $\lambda(u) \neq 0$, les valeurs propres de A sont 0 et $\lambda(u)$. Si la multiplicité algébrique de $\lambda(u)$ est supérieure à 1, de la forme canonique de A on déduit que $\operatorname{rang} A > 1$, ce qui contredit l'hypothèse. On en déduit que $\lambda(u) = \operatorname{tr} A$, $\chi_A(x) = x^{n-1}(x - \operatorname{tr} A)$ et A est diagonalisable.

13. Soit $B \in M_2(\mathbb{C})$ tel que $B^2 = A$. Alors $B^4 = 0$ et la matrice B est nilpotente. Donc, les valeurs propres de B sont 0. Si B est diagonalisable, $B = 0$, contradiction avec $B^2 = A$. Sinon, B est conjuguée à A et $B^2 = 0$ car $A^2 = 0$, contradiction avec $B^2 = A$.