
Devoir maison n° 6 – A rendre sur feuille le 20 avril

Question 1. Ecrire la forme bilinéaire polaire de la forme quadratique $q(x) = \text{tr}(x^2)$, $x \in M_n(\mathbb{R})$. Est-ce que q est définie positive ?

Problème 1. Pour le graphe suivant, écrire la matrice de Cartan et calculer sa signature. La matrice de Cartan, est-elle définie positive ? Le graphe, est-il un diagramme de Dynkin ?



Problème 2. Soit $V = \mathbb{R}_d[x]$.

- (i) Ecrire la matrice de l'opérateur ∂_x (la dérivée par rapport à x) dans la base $1, x, \frac{x^2}{2!}, \dots, \frac{x^d}{d!}$.
- (ii) Calculer $\exp(t\partial_x)$: montrer que $\exp(t\partial_x)P(x) = P(x+t)$ pour tout $P \in \mathbb{R}_d[x]$.

Problème 3. Soit $P(t)$ une fonction dérivable à valeurs dans le groupe orthogonal $O(n) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid {}^tA = A^{-1}\}$ et soit $P(0) = \text{Id}_n$. Montrer que $\frac{dP}{dt}(0)$ est une matrice antisymétrique.