6a. Lineare Programmierung

Existenz von Lösungen und Dualität

Optimierung SoSe 2020

Dr. Alexey Agaltsov

Plan

- Existenz von Lösungen
- Dualität
- Ökonomische Interpretation der Dualität

Lineares Program

$$
\begin{aligned}
\text{Minimiere} \quad & c_1 x_1 + c_2 x_2 \quad \text{über } x_1 \in \mathbb{R}^{n_1}, x_2 \in \mathbb{R}^{n_2} \\
\text{u.d.N.} \quad & A_{11} x_1 + A_{12} x_2 \geq b_1 \\
& A_{21} x_1 + A_{22} x_2 = b_2 \\
& x_1 \geq 0
\end{aligned}
$$

$c_j \in \mathbb{R}^{n_j}$

$b_i \in \mathbb{R}^{m_i}$

$A_{ij} \in \mathbb{R}^{m_i \times n_j}$

- Wie kann man Existenz von Lösungen garantieren?
- Wie kann man eine optimale Lösung charakterisieren und bestimmen?

Minimiere $c_1 x_1 + c_2 x_2$ über $x_1 \in \mathbb{R}^{n_1}, x_2 \in \mathbb{R}^{n_2}$

LP in Standardform

Minimiere $c_1 x_1 + c_2 x_2$ über $x_1 \in \mathbb{R}^{n_1}, x_2 \in \mathbb{R}^{n_2}$

u.d.N. $A_{11} x_1 + A_{12} x_2 \geq b_1$

$A_{21} x_1 + A_{22} x_2 = b_2$

$x_1 \geq 0$

$x_2 = x_2^+ - x_2^-$ mit $x_2^+, x_2^- \geq 0$

$s = A_{11} x_1 + A_{12} x_2 - b_1$

Minimiere $c_1 x_1 + c_2 x_2^+ - c_2 x_2^-$

u.d.N. $A_{11} x_1 + A_{12} x_2^+ - A_{12} x_2^- - s = b_1$

$A_{21} x_1 + A_{22} x_2^+ - A_{22} x_2^- = b_2$

$x_1, x_2^+, x_2^-, s \geq 0$

Standardform:

Alle Variablen sind ≥ 0

Alle anderen NB sind „ $=$ “

Satz 6.1. Existenz von Lösungen

$$\begin{aligned} \text{Minimiere}\quad & z = c^T x \ \text{ über } x \in \mathbb{R}^n \\ \text{u.d.N.}\quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

$$c \in \mathbb{R}^n \qquad b \in \mathbb{R}^m \qquad A \in \mathbb{R}^{m\times n}$$

Angenommen:

- $\mathcal{F} = \{x\colon\ Ax = b, x \geq 0\} \neq \emptyset$
- $z_* = \inf_{x\in\mathcal{F}} c^T x > -\infty$

Dann $\exists x_* \in \mathcal{F}$ so, dass $c^T x_* = z_*$

Beweis

Angenommen, $\nexists x \in \mathbb{R}^n_{\geq 0}$ so, dass $Ax = b,\ c^T x = z_*$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} c^T \\ A \end{bmatrix},\ \bar{b} = \begin{bmatrix} z_* \\ b \end{bmatrix}$$

$\nexists x \in \mathbb{R}^n_{\geq 0}$ so, dass $\bar{A}x = \bar{b}$

Lemma von Farkas 5.10

$\exists d$ so, dass: $\bar{A}^T d \geq 0, \bar{b}^T d < 0$

$$\begin{bmatrix} \delta \\ -\lambda \end{bmatrix} \coloneqq d$$

$\exists \delta, \lambda: \quad \delta c - A^T \lambda \geq 0, \delta z_* - b^T \lambda < 0$

Beweis

$\exists \delta, \lambda: \quad \delta c - A^T\lambda \geq 0, \delta z_* - b^T\lambda < 0$

Behauptung: $\delta > 0$.

Sei $x \in \mathbb{R}^n_{\geq 0}$ mit $Ax = b$

$$\underbrace{\lambda^T A}_{\leq \delta c} x = \underbrace{\lambda^T b}_{> \delta z_*}$$

$$\delta c^T x \geq \lambda^T b > \delta z_* \qquad \Rightarrow \delta > 0, \text{ weil } c^T x > z_*$$

Behauptung: $\inf_{x \in \mathcal{F}} c^T x > z_*$ *(Widerspruch zur Definition von z_*)*

Die Annahme, dass es keine optimale Lösung gibt, ist falsch

$$c^T x \geq (1/\delta)\lambda^T b > z_*$$

$$\inf_{x \in \mathcal{F}} c^T x > z_*$$

$\square$

Aufgabe 6.2. Existenz von Lösungen

$$
\begin{aligned}
\text{Minimiere}\quad & \mathrm{z} = c_1^T x_1 + c_2^T x_2 \ \text{ über } x_1 \in \mathbb{R}^{n_1}, x_2 \in \mathbb{R}^{n_2} \\
\text{u.d.N.}\quad & A_{11} x_1 + A_{12} x_2 \geq b_1 \\
& A_{21} x_1 + A_{22} x_2 = b_2 \\
& x_1 \geq 0
\end{aligned}
$$

Sei $\mathcal{F}$ der zulässige Bereich. Angenommen:

- $\mathcal{F} \neq \emptyset$
- $z_* = \inf_{x \in \mathcal{F}} (c_1^T x_1 + c_2^T x_2) > -\infty$

Dann $\exists (x_1^*, x_2^*) \in \mathcal{F}$ so, dass $c_1^T x_1^* + c_2^T x_2^* = z_*$

Plan

- Existenz von Lösungen
- Dualität
- Ökonomische Interpretation der Dualität

Lagrange-Funktion

Minimiere $c_1^T x_1 + c_2^T x_2$ über $x_1 \in \mathbb{R}^{n_1}_{\geq 0}, x_2 \in \mathbb{R}^{n_2}$ $\quad A_{ij} \in \mathbb{R}^{m_i \times n_j}$

u.d.N. $A_{11}x_1 + A_{12}x_2 \geq b_1 \quad \big| \mu \in \mathbb{R}^{m_1}_{\geq 0}$

$A_{21}x_1 + A_{22}x_2 = b_2 \quad \big| \lambda \in \mathbb{R}^{m_2}$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(x_1, x_2, \mu, \lambda) &= c_1^T x_1 + c_2^T x_2 + \mu^T(b_1 - A_{11}x_1 - A_{12}x_2) + \lambda^T(b_2 - A_{21}x_1 - A_{22}x_2) \\ &= b_1^T\mu + b_2^T\lambda + x_1^T(c_1 - A_{11}^T\mu - A_{21}^T\lambda) + x_2^T(c_2 - A_{12}^T\mu - A_{22}^T\lambda)\end{aligned}$$

$$G(\mu, \lambda) = \inf_{x_1 \geq 0, x_2} \mathcal{L} = \begin{cases} b_1^T\mu + b_2^T\lambda, & \text{falls } c_1 - A_{11}^T\mu - A_{21}^T\lambda \geq 0,\ c_2 - A_{12}^T\mu - A_{22}^T\lambda = 0 \\ -\infty & \end{cases}$$

Das duale Programm

$$G(\mu,\lambda) = \inf_{x_1 \geq 0, x_2} \mathcal{L} = \begin{cases} b_1^T\mu + b_2^T\lambda, & \text{falls } c_1 - A_{11}^T\mu - A_{21}^T\lambda \geq 0,\ c_2 - A_{12}^T\mu - A_{22}^T\lambda = 0 \\ -\infty & \end{cases}$$

Maximiere $G(\mu,\lambda)$ über $\mu \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{m_1}, \lambda \in \mathbb{R}^{m_2}$

u.d.N. $G(\mu,\lambda) > -\infty$

Maximiere $b_1^T\mu + b_2^T\lambda$, $\mu \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{m_1}, \lambda \in \mathbb{R}^{m_2}$

u.d.N. $A_{11}^T\mu + A_{21}^T\lambda \leq c_1$

$A_{12}^T\mu + A_{22}^T\lambda = c_2$

Das duale des Dualen ist das Primale

Maximiere $b_1^T\mu + b_2^T\lambda$

u.d.N. $A_{11}^T\mu + A_{21}^T\lambda \leq c_1$

$A_{12}^T\mu + A_{22}^T\lambda = c_2$

$\mu \geq 0$

$\longleftrightarrow$

Minimiere $-b_1^T\mu - b_2^T\lambda$

u.d.N. $-A_{11}^T\mu - A_{21}^T\lambda \geq -c_1$

$-A_{12}^T\mu - A_{22}^T\lambda = -c_2$

$\mu \geq 0$

Dualität

Maximiere $-c_1^T x_1 - c_2^T x_2$

u.d.N. $-A_{11}x_1 - A_{12}x_2 \leq -b_1$

$-A_{12}x_1 - A_{22}x_2 = -b_2$

$x_1 \geq 0$

$\longleftrightarrow$

Minimiere $c_1^T x_1 + c_2^T x_2$

u.d.N. $A_{11}x_1 + A_{12}x_2 \geq b_1$

$A_{21}x_1 + A_{22}x_2 = b_2$

$x_1 \geq 0$

$\Rightarrow$ „Das Duale des Dualen ist das Primale“

Satz 6.3. Dualität für LP

Seien $\mathcal{F}, \mathcal{F}^*$ die zulässigen Bereiche des primalen bzw. dualen LP

Seien α, β die optimalen Werte im primalen bzw. dualen Problem

Es gilt genau eine der folgenden Aussagen:

1. $\mathcal{F} = \mathcal{F}^* = \emptyset,\ \alpha = \infty, \beta = -\infty$
2. $\mathcal{F} \neq \emptyset, \mathcal{F}^* = \emptyset,\ \alpha = \beta = -\infty$
3. $\mathcal{F} = \emptyset, \mathcal{F}^* \neq \emptyset,\ \alpha = \beta = \infty$
4. $\mathcal{F} \neq \emptyset,\ \mathcal{F}^* \neq \emptyset$ und $\alpha = \beta < \infty$

Beweis: $\mathcal{F} = \mathcal{F}^* = \emptyset \Rightarrow \alpha = \infty, \beta = -\infty$

$$\alpha = \inf \emptyset = +\infty$$
$$\beta = \sup \emptyset = -\infty$$

Nach Definition

Beweis: $\mathcal{F} \neq \emptyset, \mathcal{F}^* = \emptyset \Rightarrow \alpha = \beta = \infty$

$$\beta = \sup \emptyset = -\infty$$

Angenommen, $\alpha > -\infty$

Aufgabe 6.2

$\exists$ optimale Lösung (x_1^*, x_2^*) des primalen Programms

Satz 5.15

$\exists$ optimale Lösung (μ_*, λ_*) des dualen Programms

Widerspruch zu $\mathcal{F}^* = \emptyset$

$$\Rightarrow \quad \alpha = -\infty$$

Beweis: $\beta = \infty \Rightarrow \mathcal{F} = \emptyset$

Angenommen, $\mathcal{F} \neq \emptyset$

sei $x \in \mathcal{F}$

schwache Dualität (Satz 5.13)

primale Zielfunktion

$$\beta \leq f(x)$$

$$\infty \quad < \infty$$

Widerspruch!

$$\Rightarrow \mathcal{F} = \emptyset$$

Beweis: $\mathcal{F}^* \neq \emptyset, \beta < \infty \Rightarrow \mathcal{F} \neq \emptyset, \alpha = \beta$

- $\beta < \infty$ impliziert Lösbarkeit des dualen Problems nach Aufgabe 6.2
- Das Duale des Dualen ist äquivalent zum Primalen
- Das Primale hat eine optimale Lösung und $\alpha = \beta$ nach Satz 5.15

$\square$

Aufgabe 6.4. Komplementaritätsbedingungen

Sei (x_1^*, x_2^*) primal zulässig und sei (μ_*, λ_*) dual zulässig

Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

1. (x_1^*, x_2^*) und (μ_*, λ_*) sind optimale Lösungen des Primalen bzw. Dualen
2. Die Komplementaritätsbedingungen sind erfüllt:

$$(b_1 - A_{11}x_1^* - A_{12}x_2^*)^T \mu_* = 0$$

$$(c_1 - A_{11}^T\mu_* - A_{21}^T\lambda_*)^T x_1^* = 0$$

Tipp: Zeigen Sie, dass diese Bedingungen zum Folgenden äquivalent sind:

$$c_1^T x_1^* + c_2^T x_2^* = b_1^T \mu_* + b_2^T \lambda_*$$

Plan

- Existenz von Lösungen
- Dualität
- Ökonomische Interpretation der Dualität

Produktionsplanung

- Ein Betrieb stellt Produkte $P_1, \ldots, P_n$ her
- Herstellung benötigt Hilfsmittel $H_1, \ldots, H_m$ (Arbeitszeit, Lagerraum, …)

	P_1	P_2		P_n	Maximalmenge
H_1	a_{11}	a_{12}		a_{1n}	$\boxed{b_1}$
H_2	a_{21}	a_{22}		a_{2n}	b_2
H_m	a_{m1}	a_{m2}		a_{mn}	b_m

Vorhandene Menge von H_1

angefordert pro Einheit von P_1

- Reingewinn pro Einheit von P_i ist c_i

Produktionsplanung

- Produktionsplan $x = (x_1, .., \underbrace{x_i}_{\text{hergestellte Einheiten von } P_i}, .., x_n)$

- Zielfunktion:

$$Reingewinn = c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n = c^T x$$

- Nebenbedingungen:

$$\underbrace{a_{i1} x_1 + \cdots + a_{in} x_n}_{\text{angeforderte Menge von } H_i} \leq \overbrace{b_i}^{\text{vorliegende Menge von } H_i} \qquad \forall i$$

Produktionsplanung

$$\begin{aligned} &\text{Maximiere} \quad Reingewinn = c^T x \\ &\text{u.d.N.} \quad Ax \leq b \qquad A = (a_{ij}) \\ &\qquad\quad x \geq 0 \end{aligned} \quad \longleftrightarrow \quad \begin{aligned} &\text{Minimiere} \quad -c^T x \\ &\text{u.d.N.} \quad -Ax \geq -b \\ &\qquad\quad x \geq 0 \end{aligned}$$

- Das duale Problem:

$$\begin{aligned} &\text{Maximiere} \quad -b^T \mu \\ &\text{u.d.N.} \quad -A^T \mu \leq -c \\ &\qquad\quad \mu \geq 0 \end{aligned} \quad \longleftrightarrow \quad \begin{aligned} &\text{Minimiere} \quad b^T \mu \\ &\text{u.d.N.} \quad A^T \mu \geq c \\ &\qquad\quad \mu \geq 0 \end{aligned}$$

- *Wie interpretiert man dieses Problem?*

Interpretation

- Ein Konkurrent möchte das Betrieb kaufen und bietet μ_i pro Einheit von H_i

$$Gersamtpreis = b^T\mu$$

- Wann wäre das Angebot wirtschaftlich attraktiv für den Betrieb?

$$\underbrace{a_{1j}\mu_1 + \cdots + a_{mj}\mu_m}_{\text{Gesamtpreis der angeforderten Hilfsmittel pro Einheit von } P_j} \geq \overbrace{c_j}^{\text{Reingewinn pro Einheit von } P_j} \qquad \forall j$$

Interpretation des Dualen

$$\begin{aligned} &\text{Minimiere} \quad && Gesamtpreis = b^T \mu \\ &\text{u.d.N.} \quad && A^T \mu \geq c \,\big] \text{ Angebot ist akzeptabel für den Betrieb} \\ & && \mu \geq 0 \end{aligned}$$

- *Schwache Dualität:* $\forall$ Produktionsplan x, $\forall$ akzeptable Preise μ:

$$c^T x \leq b^T \mu$$

- *Starke Dualität:* Seien x_*, μ_* optimale Lösungen, so gilt:

$$\underbrace{c^T x_*}_{\text{möglichst großer Reingewinn}} = \overbrace{b^T \mu_*}^{\text{möglichst kleiner akzeptabel Preis}}$$

Interpretation

Komplementaritätsbedingung:

$$(Ax_* - b)^T \mu_* = 0$$

$$\underbrace{A[i,:]x_* < b_i}_{\substack{\text{Kapazität des } i\text{-ten Hilfsmittels} \\ \text{wird nicht ausgeschöpft}}} \quad \Rightarrow \quad \overbrace{\mu_{*,i} = 0}^{\substack{\text{Es wird für das } i\text{-te} \\ \text{Hilfsmittel nicht bezahlt}}}$$

Zusammenfassung

- Existenz von Lösungen
- Dualität
- Ökonomische Interpretation der Dualität

Nächstes Video

6b. Lineare Programmierung: Das Simplex-Verfahren I