Matrices semblables et classes de similitude

4. Quel est le nombre de classes de similitude de matrices nilpotents dans $M_6(\mathbf{k})$? Donner un répresentant de chaque classe et déterminer son polynôme minimal.
5. Quel est le nombre de classes de similitude de matrices dans $M_7(\mathbb{C})$ dont le polynôme caractréristique est $-x^7 + 3x^6 - 3x^5 + x^4$? Déterminer le polynôme minimal de chaque classe.
6. A quelle condition sur $P(x) = (\lambda_1 - x)^{m_1} \cdots (\lambda_r - x)^{m_r} \in \mathbb{C}[x]$, l'ensemble de matrices qui admettent P comme le polynôme caractréristique est-il formé d'une seule classe de similitude ?

7. Soit $J_n(\lambda)$ un bloc de Jordan. Montrer que $J_n(\lambda)$ est semblable à ${}^tJ_n(\lambda)$. En déduire que tout $A \in M_n(\mathbb{C})$ est semblable à ${}^tA$.
8. Soit J une structure complexe sur $\mathbb{R}^{2n}$, i.e. une matrice $J \in M_{2n}(\mathbb{R})$ telle que $J^2 = -\mathrm{Id}$. On appelle $S \in M_{2n}(\mathbb{R})$ *une matrice symplectique* si ${}^tSJS = J$.
   (i) Montrer que S est inversible.
   (ii) Montrer que S est semblable à S^{-1}.
   (iii) Montrer que $\chi_S(\lambda) = \lambda^{2n}\chi_S(\frac{1}{\lambda})$. En déduire que si λ est une valeur propre de S, alors $\frac{1}{\lambda}$, $\bar{\lambda}$, $\frac{1}{\bar{\lambda}}$ sont aussi des valeurs propres de S.
9. On rappelle que $GL_n(\mathbf{k})$ désigne le sous-groupe de matrices inversibles dans l'algèbre $M_n(\mathbf{k})$ et $SL_n(\mathbf{k})$ désigne le sous-groupe de matrices inversibles du déterminant 1.
   (i) Soit $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ tels que $A = P^{-1}BP$ avec $P \in GL_2(\mathbb{C})$. Prouver qu'il existe $Q \in GL_2(\mathbb{R})$ tel que $A = Q^{-1}BQ$.
   (ii) Trouver A, $B \in M_2(\mathbb{R})$ tels que $A = P^{-1}BP$ avec $P \in SL_2(\mathbb{C})$ mais il n'existe pas de $Q \in SL_2(\mathbb{R})$ telle que $A = Q^{-1}BQ$.