Corrigé

1. (a) Soit $\pi\colon E \to E/F$ une application canonique $\pi(e) = e + F$. On voit que $g_1 + F_1, \ldots, g_m + F$ engendrent E/F. On suppose que cette une famille liée :

$$0 = \sum_{i=1}^{m} c_i(g_i + F) = \sum_{i=1}^{m} c_i g_i + F.$$

Donc, $\sum_{i=1}^{m} c_i g_i \in \ker(\pi) = F$. Alors, il existe $d_1, \ldots, d_k$ tels que

$$d_1 f_1 + \cdots + d_k f_k - c_1 g_1 - \cdots - c_m g_m = 0.$$

Comme $f_1, \ldots, f_k, g_1, \ldots, g_m$ est une base de E, cela implique $c_1 = \cdots = c_m = 0$ et donc la famille $\{g_i + F\}$ est libre.

2. (a) Soit $G \in \mathbb{C}[x]$. Alors, il existe une unique décomposition $G(x) = P(x)Q(x) + R(x)$ où soit $\deg R \le d - 1$, soit $R = 0$. Alors, $G + \langle P \rangle = R + \langle P \rangle$ pour un unique polynôme R de $\deg R \le d-1$ (ou $R = 0$). L'application $G + \langle P \rangle \mapsto R$ est linéaire et inversible (l'inverse est $R \mapsto R + \langle P \rangle$).

   (b) Soit $P(x) = (x - x_1) \cdots (x - x_d)$. Soit $l_d(x)$ un polynôme de Legendre : $l_d(x_d) = 1$, $l_d(x_i) = 0$ pour $i \ne d$, $\deg l_d = d - 1$. Alors pour tout $G \in \mathbb{C}[d]$,

$$G(x) = P(x)Q(x) + R(x), \quad R(x) = G(x_1) l_1(x) + \cdots + G(x_d) l_d(x).$$

Il en découle que $G + \langle P \rangle = G(x_1) l_1 + \cdots + G(x_d) l_d + \langle P \rangle$. L'application $G + \langle P \rangle \mapsto (G(x_1), \ldots, G(x_d))$ est un isomorphisme d'algèbres.

3. (a) Soit $\phi \in \mathrm{Bilin}_{\mathbf{k}}(V \times W, U)$. Considérons une applications $\mathbf{k}$-linéaire $\widetilde{\Phi}\colon V * W \to U$,

$$\widetilde{\Phi}\big(\textstyle\sum c_{ij}(x_i, y_j)\big) = \textstyle\sum c_{ij}\phi(x_i, y_j).$$

On voit que

$$\begin{aligned}
\widetilde{\Phi}\big((x_1 + x_2, y) - (x_1, y) - (x_2, y)\big) &= \phi(x_1 + x_2, y) - \phi(x_1, y) - \phi(x_2, y) = 0,\\
\widetilde{\Phi}\big((x, y_1 + y_2) - (x, y_1) - (x, y_2)\big) &= \phi(x, y_1 + y_2) - \phi(x, y_1) - \phi(x, y_2) = 0,\\
\widetilde{\Phi}\big((ax, y) - a(x, y)\big) &= \phi(ax, y) - a\phi(x, y) = 0,\\
\widetilde{\Phi}\big((x, ay) - a(x, y)\big) &= \phi(x, ay) - a\phi(x, y) = 0.
\end{aligned}$$

Donc, $\widetilde{\Phi}(p) = \widetilde{\Phi}(p')$ si $p - p' \in F$, i.e. $\widetilde{\Phi}$ ne dépend que de $p + F$. On pose $\Phi(p) = \widetilde{\Phi}(p + F)$:

$$\Phi\big(\textstyle\sum c_{ij} x_i \otimes y_j\big) = \textstyle\sum c_{ij}\phi(x_i, y_j).$$

On voit que Φ est $\mathbf{k}$-linéaire. De plus, Φ détermine ϕ uniquement par $\phi(x, y) = \Phi(x \otimes y)$.

   (b) Soit $p = \sum_{ij} c_{ij}(x_i \otimes y_j) \in V \otimes W$. On a $x_i = \sum_k a_{ik} v_k$, $y_j = \sum_l b_{jl} w_l$,

$$p = \sum c_{ij} a_{ik} b_{jl} (v_k \otimes w_l),$$

et donc la famille $\{v_k \otimes w_k\}$ est génératrice dans $V \otimes W$.
On suppose que

$$\sum d_{ij}(v_i \otimes w_j) = 0.$$

Soient $\{v^k\}$, $\{w^l\}$ les bases duales de $\{v_i\}$, $\{w_j\}$. Considérons

$$\phi^{kl}(x, y) = v^k(x) w^l(y), \quad \phi^{kl} \in \mathrm{Bilin}_{\mathbf{k}}(V \times W, U),$$

et soient $\Phi^{kl} \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{k}}(V \otimes W, U)$ les applications linéaires correspondantes. Par définition,

$$\Phi^{kl}(v_i \otimes w_j) = v^k(v_i) w^l(w_j) = \delta_i^k \delta_j^l.$$

D'autre part,

$$0 = \Phi^{kl}\big(\sum d_{ij}(v_i \otimes w_j)\big) = \sum d_{ij} \Phi^{kl}(v_i \otimes w_j) = \sum d_{ij} \delta_i^k \delta_j^l = d_{kl},$$

et donc la famille $\{v_i \otimes w_j\}$ est libre dans $V \otimes W$.

(c) On définit une application $\mathbf{k}$-linéaire $\widetilde{P} \colon V^* * W \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{k}}(V, W)$ comme suit :

$$\text{si } p = \textstyle\sum c_{ij}(\phi^i, y_j) \in V^* \otimes W, \text{ alors } \widetilde{P}(p) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{k}}(V, W),$$
$$\big(\widetilde{P}(p)\big)x = \textstyle\sum c_{ij} \phi^i(x) y_j \in W, \quad x \in V.$$

Comme dans (a), on vérifie que $\widetilde{P}$ s'annulle sur le sous-espace F engendré par

$$(\phi^i + \phi^j, y) - (\phi^i, y) - (\phi^j, y), \quad (\phi, y_1 + y_2) - (\phi, y_1) - (\phi, y_2),$$
$$(a\phi, y) - a(\phi, y), \quad (\phi, ay) - a(\phi, y),$$

where ϕ^1, ϕ^2, $\phi \in V^*$, y_1, y_2, $y \in W$, $a \in \mathbb{C}$. Donc, on peut poser $P(p + F) = \widetilde{P}(p)$ pour tout $p \in V^* * W$. Explicitement,

$$\text{si } q = \textstyle\sum c_{ij} \phi^i \otimes y_j \in V^* \otimes W, \text{ alors } P(q) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{k}}(V, W),$$
$$\big(P(q)\big)x = \textstyle\sum c_{ij} \phi^i(x) y_j \in W, \quad x \in V.$$

En choisissant des bases pour V et W on peut simplement construir une inverse à droite de l'application $q \mapsto P(q)$. Or, comme les dimensions de $V^* \otimes W$ et $\mathrm{Hom}_{\mathbf{k}}(V, W)$ sont égales, $q \mapsto P(q)$ est l'isomorphisme.

4. On suppose qu'il existe $v = \sum v_i e_i$, $w = \sum w_j e_j$ telles que $e_1 \otimes e_2 + e_3 \otimes e_4 = v \otimes w$. Il vient que

$$e_1 \otimes e_2 + e_3 \otimes e_4 = \sum v_i w_j e_i \otimes e_j.$$

Comme $\{e_i \otimes e_j\}$ est une base, on a $v_1 w_2 = 1$, $v_3 w_4 = 1$ et $v_i w_j = 0$ pour autres i, j. En particulier on a $v_1 \neq 0$ et $v_1 w_1 = v_1 w_3 = v_1 w_4 = 0$ ce qui implique $w_1 = w_3 = w_4 = 0$. Mais cela contredit à $v_3 w_4 = 1$.

5. (a)

(b)

(c) Si toutes les racines sont différentes, la formule découle de (b). En général, soit A_1' la matrice de $\mathcal{A}_1$ dans la base de Jordan. On considère une matrice $A_{1,\varepsilon}' = A_1' + \varepsilon D$, où $D = \mathrm{diag}(1, 2, \ldots, n_1)$ (par exemple). Pour tous les petits ε la matrice $\mathcal{A}_{1,\varepsilon}'$ admet des valeurs propres différentes et on se ramène au cas des racines différentes, en notant que le polynôme caractéristique dépend d'une manière continue de la matrice de l'opérateur.

Il en découle que

$$\mathrm{tr}(\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2) = \mathrm{tr}(\mathcal{A}_1)\,\mathrm{tr}(\mathcal{A}_2),$$
$$\det(\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2) = \det(\mathcal{A}_1)^{\dim V_2} \det(\mathcal{A}_2)^{\dim V_1}.$$

Pour le rang, on note que $\mathrm{rang}(\mathcal{A}_1)$ est égal au nombre de λ_i non nuls, $\mathrm{rang}(\mathcal{A}_2)$ est égal au nombre de μ_j non nuls, $\mathrm{rang}(\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2)$ est égal au nombre de $\lambda_i \mu_j$ non nuls et donc

$$\mathrm{rang}(\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2) = \mathrm{rang}(\mathcal{A}_1)\,\mathrm{rang}(\mathcal{A}_2).$$

6. (a) Soit z un nombre algèbrique (resp. un entier algèbrique) et $P(x)$ un polynôme à coefficients dans $\mathbb{Q}$ (resp. $\mathbb{Z}$) qui l'annule. Soit M_P la matrice compagnon de P. Elle a P comme polynôme caractéristique et il en découle que z est une valeur propre de M_P.

   (b) Soit z_1, $z_2 \in \overline{\mathbb{Q}}$. Alors z_1, z_2 sont des valeurs propres des matrices $A_1 \in M_{n_1}(\mathbb{Q})$, $A_2 \in M_{n_2}(\mathbb{Q})$. Or, $z_1 z_2$ est une valeur propre de $A_1 \otimes A_2$ et $z_1 \pm z_2$ est une valeur propre de $A_1 \otimes \mathrm{Id} \pm \mathrm{Id} \otimes A_2$. Donc, $\overline{\mathbb{Q}}$ est un anneau. Finalement, si z est une racine d'un polynôme $P(x)$, $1/z$ est une racine de $z^d P(1/x)$, où $\deg P = d$.

   Le cas de $\mathbb{A}$ est complètement pareil.