Coloration des arêtes des graphes planaires

Antonio Gallastegui František Kardoš

Laboratoire Bordelais de Recherche Informatique
Université de Bordeaux

Bordeaux, 10 juin, 2016

Le degré $d_G(v)$ de $v \in V(G)$ est le nombre de sommets voisins de v.

- $\Delta(G)$ degré maximum
- $\delta(G)$ degré minimum

Figure——

La *maille* $g(G)$ d'un graphe G est la longueur d'un plus petit cycle dans G, s'il en existe un. Sinon $g(G)$ est infinie.

Soit un graphe G. Un *couplage* M est un ensemble d'arêtes deux à deux non-adjacentes. —figure couplage maximum, maximal, parfait—-

Le graphe G est *planaire* ssi il peut être dessiné sur le plan sans croisement des arêtes. Une face f, est une région connexe délimitée par des arêtes. Il y a toujours une face infinie.

Le graphe G est *planaire* ssi il peut être dessiné sur le plan sans croisement des arêtes. Une face f, est une région connexe délimitée par des arêtes. Il y a toujours une face infinie.

Theorem (Euler, 1750)

Soit G un graphe planaire connexe à n sommets, m arêtes et f faces. Alors,

$$n - m + f = 2$$

figure—

Coloration de Graphes

Soit G graphe, une *coloration propre* de G est application $\varphi : V(G) \to C$ où $C = \{1, 2, ..., k\}$ ensemble d'entiers, t.q. $\forall uv \in E(G) \implies \varphi(u) \neq \varphi(v)$.
Le nombre chromatique $\chi(G)$ est le nombre de couleurs minimum pour colorier G.
image—coloration nombre chromatique et k-coloration

Soit G un graphe. Une coloration d'arêtes de G est une application $\varphi : E(G) \to C$, où $C = \{1, 2, ..., k\}$ t.q. $\forall e$, $e' \in E(G)$ adjacentes $\implies \varphi(e) \neq \varphi(e')$.
L'indice chromatique $\chi'(G)$ est le nombre de couleurs minimum qu'on nécessite pour colorier les arêtes de G.
—-image coloration d'aretes et apres indice chromatique etc—-

Theorem (Vizing)

Soit G un graphe simple. Alors $\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$.

Si $\chi'(G) = \Delta(G)$, G est classe 1.

Theorem (Vizing)

Soit G un graphe simple. Alors $\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$.

Si $\chi'(G) = \Delta(G)$, G est classe 1.
Quels graphes planaires sont classe 1 ?

- $\Delta(G) \geq 8 \implies \chi'(G) = \Delta$. (Vizing 1965).
- $\Delta(G) = 7 \implies \chi'(G) = 7$. (Sanders, Zhao 2001).
- $\Delta(G) = 5$ $g(G) \geq 4 \implies \chi'(G) = 5$.
- $\Delta(G) = 4$ $g(G) \geq 5 \implies \chi'(G) = 4$.

Conjecture

Soit G un graphe planaire. Alors,
$\Delta(G) = 4$ $g(G) \geq 4 \implies \chi'(G) = 4$

Coloration de Graphes

Δ	3	4	5	6	7	8
$g \geq 3$	X	X	X	?	✓	✓
$g \geq 4$	X	?	✓			
$g \geq 5$	X	✓				

Proposition

Soit G un graphe planaire avec $\Delta(G) = 5$ et $g(G) \geq 4$. Alors $\chi'(G) = 5$.

Propriétés structurelles de un contre-exemple minimal G :

- Il n'existe pas de sommet v de G tel que $d_G(v) = 1$.
- Soit $v \in V(G)$ tel que $d_G(v) = 2$. Alors $\forall u \in N(v)$, $d_G(u) = 5$.
- Soit $v \in V(G)$ tel que $d_G(v) = 3$. Alors, $\forall u \in N(v)$, $4 \leq d_G(u) \leq 5$.
- Soit $v \in V(G)$ tel que $d_G(v) = 3$. Alors, au moins deux voisins de v sont de degré 5.
- Soit $uv \in E(G)$ tel que $d_G(u) = 2$ et $d_G(v) = 5$. Alors, tous les voisins de v sauf u sont de degré 5.
- Soit $v \in V(G)$ tel que $d_G(v) = 5$. Alors, v a au plus deux voisins de degré 3.

Déchargement :
La charge initiale est définie par

$$\begin{aligned} w(v) &= d_G(v) - 4 \qquad \text{pour tout } v \in V(G), \\ w(f) &= d_G(f) - 4 \qquad \text{pour tout } f \in F(G), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w(v) &= -2 \qquad \text{pour tout } v \in V(G), \text{ tel que } d_G(v) = 2, \\ w(v) &= -1 \qquad \text{pour tout } v \in V(G), \text{ tel que } d_G(v) = 3, \\ w(v) &= 0 \qquad \text{pour tout } v \in V(G), \text{ tel que } d_G(v) = 4, \\ w(v) &= 1 \qquad \text{pour tout } v \in V(G), \text{ tel que } d_G(v) = 5. \end{aligned}$$

La charge initiale de toutes les faces est positive puisque $g(G) \geq 4$.

Lemme

Soit G un graphe planaire connexe. Alors,

$$\sum_{v \in V(G)} (d_G(v) - 4) + \sum_{f \in F(G)} (d_G(f) - 4) = -8.$$

Preuve.

$$\sum_{v \in V(G)} (d_G(v) - 4) + \sum_{f \in F(G)} (d_G(f) - 4) = 2m - 4n + 2m - 4f =$$

$$= -4(n - m + f) = -4 \cdot 2 = -8.$$

Les règles de déchargement :

(R1) Tout sommet de degré 5 donne une unité de charge à chacun de ses voisins de degré 2.

(R2) Tout sommet de degré 5 donne $1/2$ de charge à chaque voisin de degré 3.

Proposition

Soit G un graphe planaire avec $\Delta(G) = 4$ et $g(G) \geq 5$. Alors G est 4-arête-coloriable.

Propriétés structurelles d'un contre-exemple minimal G :

- Il n'existe pas de sommet v de G tel que $d_G(v) = 1$.
- Soit $v \in V(G)$ tel que $d_G(v) = 2$. Alors $\forall u \in N(v)$, $d_G(u) = 4$.
- Soit $uv \in E(G)$ tel que $d_G(u) = 2$ et $d_G(v) = 4$. Alors, tous les voisins de v sauf u sont de degré 4.
- Soit $v \in V(G)$ tel que $d_G(v) = 3$. Alors, v a au moins deux voisins de degré 4.

Déchargement :
La charge initiale est définie par,

$$w(v) = \frac{3}{2}d_G(v) - 5 \qquad \text{pour tout } v \in V(G),$$
$$w(f) = d_G(f) - 5 \qquad \text{pour tout } f \in F(G).$$

Déchargement :
La charge initiale est définie par,

$$w(v) = \frac{3}{2} d_G(v) - 5 \qquad \text{pour tout } v \in V(G),$$
$$w(f) = d_G(f) - 5 \qquad \text{pour tout } f \in F(G).$$

$$w(v) = -2 \qquad \text{pour tout } v \in V(G), \text{ tel que } d_G(v) = 2,$$
$$w(v) = -\frac{1}{2} \qquad \text{pour tout } v \in V(G), \text{ tel que } d_G(v) = 3,$$
$$w(v) = 1 \qquad \text{pour tout } v \in V(G), \text{ tel que } d_G(v) = 4.$$

D'ailleurs, la charge initiale de toutes les faces est positive puisque $g(G) \geq 5$.

Lemme

Soit G un graphe planaire connexe. Alors,

$$\sum_{v \in V(G)} \left(\frac{3}{2} d_G(v) - 5\right) + \sum_{f \in F(G)} (d_G(f) - 5) = -10.$$

Preuve.

$$\sum_{v \in V(G)} \left(\frac{3}{2} d_G(v) - 5\right) + \sum_{f \in F(G)} (d_G(f) - 5) =$$

$$= 3m - 5n + 2m - 5f = -5(n - m + f) = -5 \cdot 2 = -10.$$

Les règles de déchargement :

(R1) tout sommet de degré 4 donne 1 de charge à chacun de ses voisins de degré 2.

(R2) tout sommet de degré 4 donne $1/4$ de charge à chaque voisin de degré 3.

Dans ce cas là aussi, la somme totale de la charge reste invariante et la charge de toutes les faces reste positive.

Soit H un graphe étiqueté avec une fonction $\gamma : V(G) \to \mathbb{N}$ telle que $\forall v \in V(H)$ on a $\gamma(v) \geq d_H(v)$. Le graphe H est une *configuration* dans G s'il existe un sous-graphe X de G et un isomorphisme $\xi : H \to X$ tel que $\forall v \in V(H)$, $\gamma(v) = d_G(\xi(v))$.

Soit H un graphe étiqueté avec une fonction $\gamma : V(G) \to \mathbb{N}$ telle que $\forall v \in V(H)$ on a $\gamma(v) \geq d_H(v)$. Le graphe H est une *configuration* dans G s'il existe un sous-graphe X de G et un isomorphisme $\xi : H \to X$ tel que $\forall v \in V(H)$, $\gamma(v) = d_G(\xi(v))$. Dans la suite, lorsque nous parlons d'une configuration H dans un graphe G, nous identifions H et sa copie $X = \xi(H)$ dans G.

Soit H une configuration de G. Notons

$$\partial_G(H) = \{e = uv \in E(G) : u \in V(H) \text{ et } v \in V(G \setminus H)\}.$$

Soit H une configuration de G. Notons

$$\partial_G(H) = \{e = uv \in E(G) : u \in V(H) \text{ et } v \in V(G \setminus H)\}.$$

Notons $H^* = H \cup \partial_G(H)$ et $G' = G \setminus H \cup \partial_G(H)$.

Soit

- G un graphe avec $\Delta(G) = 4$ et H une configuration de G,
- $\varphi : E(G') \to \{1, 2, 3, 4\}$ une 4-arête-coloration de G',
- $c, c' \in \{1, 2, 3, 4\}$, $c \neq c'$ deux couleurs quelconques.

Une coloration $\varphi' : E(G) \setminus E(H) \to \{1, 2, 3, 4\}$ est *adjacente* à φ, si φ' peut être obtenu à partir de φ en alternant les couleurs d'une (c, c')-chaîne de Kempe de e pour un choix d'une arête $e \in \partial_G(H)$ et des couleurs $c, c' \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Notons $N(\varphi)$ l'ensemble des colorations adjacentes à φ.

Soit

- G un graphe avec $\Delta(G) = 4$ et H une configuration de G,
- $\varphi : E(G') \to \{1, 2, 3, 4\}$ une 4-arête-coloration de G',
- $c, c' \in \{1, 2, 3, 4\}$, $c \neq c'$ deux couleurs quelconques.

Le *graphe résiduel* $\mathcal{X}^{\varphi}_{c,c'}$ est défini par

- $V(\mathcal{X}^{\varphi}_{c,c'}) = \partial_G(H)$,
- $E(\mathcal{X}^{\varphi}_{c,c'}) = \{e_i e_j$ tels que (c, c')-chaîne de Kempe de e_i est la même que la (c, c')-chaîne de Kempe de $e_j\}$.

Soit

- G un graphe avec $\Delta(G) = 4$ et H une configuration de G,
- $\varphi : E(G') \to \{1, 2, 3, 4\}$ une 4-arête-coloration de G',
- $c, c' \in \{1, 2, 3, 4\}$, $c \neq c'$ deux couleurs quelconques.

Le *graphe résiduel* $\mathcal{X}^{\varphi}_{c,c'}$ est défini par

- $V(\mathcal{X}^{\varphi}_{c,c'}) = \partial_G(H)$,
- $E(\mathcal{X}^{\varphi}_{c,c'}) = \{e_i e_j$ tels que (c, c')-chaîne de Kempe de e_i est la même que la (c, c')-chaîne de Kempe de $e_j\}$.

Le graphe résiduel est donc un couplage planaire de $\partial_G(H)$.

Proposition

Soit

- G *avec* $\Delta(G) = 4$ *et* H *une configuration de* G*,*
- $\varphi : E(G') \to \{1, 2, 3, 4\}$ *4-arête-coloration de* G'*,*
- $\varphi' \in N(\varphi)$ *une coloration adjacente à* φ*,*
- $\beta = \varphi|_{\partial_G(H)}$ *et* $\beta' = \varphi'|_{\partial_G(H)}$.

Alors,

$$|\{e \in \partial_H(G) : \beta(e) \neq \beta'(e)\}| \in \{1, 2\},$$

de plus, on a

$|\{e \in \partial_H(G) : \beta(e) \neq \beta'(e)\}| = 1 \Leftrightarrow d_{\mathcal{X}_{\varphi}^{c,c'}}(e) = 0$, *et*

$|\{e \in \partial_H(G) : \beta(e) \neq \beta'(e)\}| = 2 \Leftrightarrow d_{\mathcal{X}_{\varphi}^{c,c'}}(e) = 1$.

Considérons des coloration de H.

Soit H une configuration de G et β une coloration de $\partial_G(H)$. Alors, β *s'étend* vers H si $\exists\psi$ de H^* t.q. $\psi|_{\partial_G(H)} = \beta$

$$\Phi_0 = \{\beta : \exists\psi : E(H^*) \to \{1,2,3,4\} \text{t.q.} \psi|_{\partial_G(H)} = \beta\}.$$

Pour $i \in \mathbb{N}$, soit

$$\Phi_{i+1} = \{\beta : \beta \in \Phi_i \text{ ou } \exists c, c' \in \{1,2,3,4\},$$
$$\forall X \text{ couplage planaire de } \partial_G(H), N^X_{c,c'}(\beta) \cap \Phi_i \neq \emptyset\},$$
$$\Phi(H) = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \Phi_i(H).$$

Theorem

Soit

- *H une configuration de G.*
- *H' une autre configuration t.q. $\partial(H) = \partial(H')$.*
- *G' le graphe obtenu à partir de G en remplaçant H par H'.*

Si $\Phi_0(H') \subseteq \Phi(H)$, alors, pour toute 4-arête-coloration φ' de G' il existe une 4-arête-coloration φ de G.

Preuve. il suffit de modifier la coloration φ' le long des chaînes de Kempe un nombre fini de fois afin d'obtenir une coloration qui s'étend directement vers H.

Soit H et H' deux configurations telles que $\partial(H) = \partial(H')$. La configuration H *se réduit* vers H' si $\Phi_0(H') \subseteq \Phi(H)$. La configuration H est *réductible* s'il existe une configuration H' vers la quelle elle se réduit.

C'est un programme qui prend,

- Entrée : Une configuration H et sa réduction potentielle H'.
- Sortie : Une réponse de OUI/NON à la question de réductibilité.

Ensuite, nous décrivons l'outil de la manière suivante,

- Pré-calcul,
- Traitement,
- Implémentation.

- Génération de Couplages de r sommets, pour r allant de 1 à MAXRING.
- Variation entre deux codes adjacents (Plus Tard).

Partant d'une configuration H de G et H' sa réduction potentielle,

- On génère l'ensemble des colorations ψ de H qui constituent Φ_0,
- Tant que $\Phi_i \subset \Phi_{i+1}$, on génère des colorations adjacentes à $\beta \in \Phi_i$,
- L'ensemble totale des colorations qui s'étendent vers H est $\Phi(H) = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \Phi_i(H)$,
- On génère l'ensemble Φ'_0 des colorations ψ' de H' t.q. une coloration de G' s'étend vers H' et
- On regarde si $\Phi'_0(H') \subseteq \Phi(H)$.

Alors, pour β' quelconque qui ne s'étend pas, s'il existe une paire de couleurs c, c' pour laquelle n'importe quel couplage des arêtes coloriées avec c ou c' il existe un code β adjacent à β', β' s'étend.

Lecture de H et H' :

- Lecture de configuration H et sa réduction potentielle H' présentées sous forme d'une liste d'adjacence.
- Les deux seront stockées dans deux matrices différentes.

Coloration de H :

Nous commençons par numéroter les arêtes du graphe H, commençant par les arêtes sortantes et nous continuons vers l'intérieur.

Nous colorions les arêtes de H partant de la dernière arête vers l'extérieur à l'aide de la méthode de retour sur le trace (Backtrack).

Nous n'allons stocker que la coloration $\beta = \psi|_{\partial_G(H)}$ sous forme de code suivant,

$$k = \sum_{i=0}^{r-1} c(\beta(e)) \cdot 4^e \qquad \text{tel que } c(i) \in \{0,1,2,3\} \qquad \text{pour } i \in \{1,2,3,4\}$$

$\Phi_0(H)$ est un ensemble de k.

Colorations voisines :

Soit H une configuration, une coloration β avec son code k de $\partial_G(H)$ et deux couleurs c et c'.
Alors $\mathcal{M}$ est l'ensemble de tous les couplages M possibles des arêtes de $\partial_G(H)$ coloriées avec c ou c'.

Colorations voisines :

Soit H une configuration, une coloration β avec son code k de $\partial_G(H)$ et deux couleurs c et c'.

Alors $\mathcal{M}$ est l'ensemble de tous les couplages M possibles des arêtes de $\partial_G(H)$ coloriées avec c ou c'.

Alors, il existe des colorations β' de $\partial_G(H)$ avec code de coloration k' *adjacentes* de β si pour une paire de couleurs c et c',

$$\begin{cases} k' = k - (2\beta'(e) + c + c') \cdot 4^e \text{ si } d_M(e) = 0 \\ k' = k - (2\beta'(e) + c + c') \cdot 4^e - (2\beta'(e') + c + c') \cdot 4^{e'} \text{ si } d_M(e) = 1. \end{cases}$$

Cet ensemble de codes de coloration k' forment Φ_{i+1} pour tout $i \in \mathbb{N}$.

Soit G un graphe planaire. V(G) ensemble de sommets et F ensemble de faces de G.
La *charge initiale* des sommets et des faces,

$$w : V(G) \cup F(G) \to \mathbb{R},$$
$$w(x) = d_G(x) - 4.$$

Lemme

Soit G un graphe planaire et w la application de la charge initiale. Alors la charge initiale totale du graphe est -8.

Preuve.

$$\sum_{u \in V(G)} (d_G(v) - 4) + \sum_{f \in F} (d_G(f) - 4) = 2m - 4n + 2m - 4f =$$

$$= -4(n - m + f) = -4 \cdot 2 = -8.$$

Alors les charges pour chaque sommet et face,

$$\begin{aligned} w(v) &= -2 && \forall v \in V(G), \text{ t.q. } d_G(v) = 2, \\ w(v) &= -1 && \forall v \in V(G), \text{ t.q. } d_G(v) = 3, \\ w(v) &= 0 && \forall v \in V(G), \text{ t.q. } d_G(v) = 4 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} w(f) &= 0 && \forall f \in F(G), \text{ t.q. } d_G(f) = 4, \\ w(f) &= 1 && \forall f \in F(G), \text{ t.q. } d_G(f) = 5, \\ w(f) &\geq 2 && \forall f \in F(G), \text{ t.q. } d_G(f) \geq 6. \end{aligned}$$

Il ne suffit pas de définir les règles de déchargement parmi les sommets, puisqu'il n'y a pas de sommet de charge strictement positive. Nous sommes forcés à utiliser la charge des faces de taille au moins 5 pour éliminer la charge négative des sommets de degré 2 et 3.

Les règles de déchargement :

(R) Toute face de taille au moins 5 donne une unité de charge à chaque sommet incident de degré 2 ou 3.

Objectives :

L'objectif est de réduire les configurations suivantes,

- Un sommet de degré 2 avec 1 pentagone autour de lui.
- Les sommets de degré 3 avec un pentagone autour d'eux.
- Une face de grande taille avec beaucoup de sommets de petit degré autour d'elle.

3-3-4-3 :

Pair de sommets avec 4 carrées :

Pair de sommets avec 3 carrés et 1 pentagone :

Un sommet avec 3 carrés :

<u>2 carrés :</u>

1 carré et 1 pentagone :

1. Réussi :
   - Développement d'un outil de vérification.
   - 3 nouvelles configurations réductibles parmi plus de 50 essais des paires H, H'.
2. En cours de travail :
   - Réduction pour v de degré 2.
   - Réduction pour v de degré 3.
   - Vérification de connexité et aucune présence des triangles autour des réductions

Merci pour votre attention !