Coloration des arêtes des graphes planaires

Antonio Gallastegui   František Kardoš

Laboratoire Bordelais de Recherche Informatique
Université de Bordeaux

Bordeaux, 10 juin, 2016

Le degré $d_G(v)$ de $v \in V(G)$ est le nombre de sommets voisins de v.

- $\Delta(G)$ degré maximum
- $\delta(G)$ degré minimum

Figure——

Le degré $d_G(v)$ de $v \in V(G)$ est le nombre de sommets voisins de v.

- $\Delta(G)$ degré maximum
- $\delta(G)$ degré minimum

Figure——

La *maille* $g(G)$ d'un graphe G est la longueur d'un plus petit cycle dans G, s'il en existe un. Sinon $g(G)$ est infinie.

Soit G simple. Un *couplage* M est un ensemble d'arêtes deux à deux non-adjacentes. —figure couplage maximum, maximal, parfait—-

Le graphe G est planaire ssi il peut être dessiné sur le plan sans croisement des arêtes. Une face f, est une région connexe délimitée par des arêtes. Il y a toujours une face infinie.

Le graphe G est planaire ssi il peut être dessiné sur le plan sans croisement des arêtes. Une face f, est une région connexe délimitée par des arêtes. Il y a toujours une face infinie.

Theorem (Euler, 1750)

Soit G un graphe planaire connexe à n sommets, m arêtes et f faces. Alors,

$$n - m + f = 2$$

figure—

Soit G graphe, une *coloration propre* de G est application $\varphi : V(G) \to C$ où $C = \{1, 2, ..., k\}$ ensemble d'entiers, t.q. $\forall uv \in E(G) \implies \varphi(u) \neq \varphi(v)$.
Le nombre chromatique $\chi(G)$ est le nombre de couleurs minimum pour colorier G.
image—coloration nombre chromatique et k-coloration

Soit G un graphe. Une coloration d'arêtes de G est une application $\varphi : E(G) \to C$, où $C = \{1, 2, ..., k\}$ t.q. $\forall e$, $e' \in E(G)$ adjacentes $\implies \varphi(e) \neq \varphi(e')$.
L'indice chromatique $\chi'(G)$ est le nombre de couleurs minimum qu'on nécessite pour colorier les arêtes de G.
—-image coloration d'aretes et apres indice chromatique etc—-

Theorem (Vizing)

Soit G un graphe simple. Alors $\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$.

Si $\chi'(G) = \Delta(G)$, G est appelé graphe de classe 1.

Theorem (Vizing)

Soit G un graphe simple. Alors $\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$.

Si $\chi'(G) = \Delta(G)$, G est appelé graphe de classe 1.
Pour un graphe planaire G voici quelques résultats connus

- $\Delta(G) \geq 8 \implies \chi'(G) = 8$. (Vizing 1965).
- $\Delta(G) = 7 \implies \chi'(G) = 7$. (Sanders, Zhao 2001).
- $\Delta(G) = 5$ $g(G) \geq 4 \implies \chi'(G) = 5$.
- $\Delta(G) = 4$ $g(G) \geq 5 \implies \chi'(G) = 4$.

Conjecture

Soit G un graphe planaire. Alors,
$\Delta(G) = 4$ $g(G) \geq 4 \implies \chi'(G) = 4$

Coloration de Graphes

Proposition

Soit G un graphe planaire avec $\Delta(G) = 5$ et $g(G) \geq 4$. Alors $\chi'(G) = 5$.

Propriétés structurelles de un contre-exemple minimal G :

- Il n'existe pas de sommet v de G tel que $d_G(v) = 1$.
- Soit $v \in V(G)$ tel que $d_G(v) = 2$. Alors $\forall u \in N(v)$, $d_G(u) = 5$.
- Soit $v \in V(G)$ tel que $d_G(v) = 3$. Alors, $\forall u \in N(v)$, $4 \leq d_G(u) \leq 5$.
- Soit $v \in V(G)$ tel que $d_G(v) = 3$. Alors, au moins deux voisins de v sont de degré 5.
- Soit $uv \in E(G)$ tel que $d_G(u) = 2$ et $d_G(v) = 5$. Alors, tous les voisins de v sauf u sont de degré 5.
- Soit $v \in V(G)$ tel que $d_G(v) = 5$. Alors, v a au plus deux voisins de degré 3.

Déchargement :
La charge initiale est définie par

$$\begin{aligned} w(v) &= d_G(v) - 4 \qquad \text{pour tout } v \in V(G), \\ w(f) &= d_G(f) - 4 \qquad \text{pour tout } f \in F(G), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w(v) &= -2 \qquad \text{pour tout } v \in V(G), \text{ tel que } d_G(v) = 2, \\ w(v) &= -1 \qquad \text{pour tout } v \in V(G), \text{ tel que } d_G(v) = 3, \\ w(v) &= 0 \qquad \text{pour tout } v \in V(G), \text{ tel que } d_G(v) = 4, \\ w(v) &= 1 \qquad \text{pour tout } v \in V(G), \text{ tel que } d_G(v) = 5. \end{aligned}$$

La charge initiale de toutes les faces est positive puisque $g(G) \geq 4$.

Lemme

Soit G un graphe planaire connexe. Alors,

$$\sum_{v \in V(G)} (d_G(v) - 4) + \sum_{f \in F(G)} (d_G(f) - 4) = -8.$$

Preuve.

$$\sum_{v \in V(G)} (d_G(v) - 4) + \sum_{f \in F(G)} (d_G(f) - 4) = 2m - 4n + 2m - 4f =$$

$$= -4(n - m + f) = -4 \cdot 2 = -8.$$

Les règles de déchargement :

(R1) Tout sommet de degré 5 donne une unité de charge à chacun de ses voisins de degré 2.

(R2) Tout sommet de degré 5 donne $1/2$ de charge à chaque voisin de degré 3.

Proposition

Soit G un graphe planaire avec $\Delta(G) = 4$ et $g(G) \geq 5$. Alors G est 4-arête-coloriable.

Propriétés structurelles d'un contre-exemple G :

- Il n'existe pas de sommet v de G tel que $d_G(v) = 1$.
- Soit $v \in V(G)$ tel que $d_G(v) = 2$. Alors $\forall u \in N(v)$, $d_G(u) = 4$.
- Soit $uv \in E(G)$ tel que $d_G(u) = 2$ et $d_G(v) = 4$. Alors, tous les voisins de v sauf u sont de degré 4.
- Soit $v \in V(G)$ tel que $d_G(v) = 3$. Alors, v a au moins deux voisins de degré 4.

Déchargement :
La charge initiale est définie par,

$$w(v) = \frac{3}{2}d_G(v) - 5 \qquad \text{pour tout } v \in V(G),$$
$$w(f) = d_G(f) - 5 \qquad \text{pour tout } f \in F(G).$$

Déchargement :
La charge initiale est définie par,

$$w(v) = \frac{3}{2}d_G(v) - 5 \qquad \text{pour tout } v \in V(G),$$
$$w(f) = d_G(f) - 5 \qquad \text{pour tout } f \in F(G).$$

$$w(v) = -2 \qquad \text{pour tout } v \in V(G), \text{ tel que } d_G(v) = 2,$$
$$w(v) = -\frac{1}{2} \qquad \text{pour tout } v \in V(G), \text{ tel que } d_G(v) = 3,$$
$$w(v) = 1 \qquad \text{pour tout } v \in V(G), \text{ tel que } d_G(v) = 4.$$

D'ailleurs, la charge initiale de toutes les faces est positive puisque $g(G) \geq 5$.

Lemme

Soit G un graphe planaire connexe. Alors,

$$\sum_{v \in V(G)} \left(\frac{3}{2} d_G(v) - 5 \right) + \sum_{f \in F(G)} (d_G(f) - 5) = -10.$$

Preuve.

$$\sum_{v \in V(G)} \left(\frac{3}{2} d_G(v) - 5 \right) + \sum_{f \in F(G)} (d_G(f) - 5) =$$

$$= 3m - 5n + 2m - 5f = -5(n - m + f) = -5 \cdot 2 = -10.$$

Les règles de déchargement :

(R1) tout sommet de degré 4 donne 1 de charge à chacun de ses voisins de degré 2.

(R2) tout sommet de degré 4 donne $1/4$ de charge à chaque voisin de degré 3.

Dans ce cas là aussi, la somme totale de la charge reste invariante et la charge de toutes les faces reste positive.

Soit H un graphe étiqueté avec une fonction $\gamma : V(G) \to \mathbb{N}$ telle que $\forall v \in V(H)$ on a $\gamma(v) \geq d_H(v)$. Le graphe H est une *configuration* dans G s'il existe un sous-graphe X de G et un isomorphisme $\xi : H \to X$ tel que $\forall v \in V(H)$, $\gamma(v) = d_G(\xi(v))$.

Soit H un graphe étiqueté avec une fonction $\gamma : V(G) \to \mathbb{N}$ telle que $\forall v \in V(H)$ on a $\gamma(v) \geq d_H(v)$. Le graphe H est une *configuration* dans G s'il existe un sous-graphe X de G et un isomorphisme $\xi : H \to X$ tel que $\forall v \in V(H), \gamma(v) = d_G(\xi(v))$. Dans la suite, lorsque nous parlons d'une configuration H dans un graphe G, nous identifions H et sa copie $X = \xi(H)$ dans G.

Soit H une configuration de G. Notons

$$\partial_G(H) = \{e = uv \in E(G) : u \in V(H) \text{ et } v \in V(G \setminus H)\},$$

l'ensemble des arêtes sortantes de H et $r = |\partial_G(H)|$.

Soit H une configuration de G. Notons

$$\partial_G(H) = \{e = uv \in E(G) : u \in V(H) \text{ et } v \in V(G \setminus H)\},$$

l'ensemble des arêtes sortantes de H et $r = |\partial_G(H)|$.
Notons $H^* = H \cup \partial_G(H)$ et $G' = G \setminus H \cup \partial_G(H)$.

Si $\varphi : E(G) \to \{1,2,3,4\}$ est une 4-arête-coloration de G, alors φ induit une coloration de $\partial_G(H)$, de H^*, et de G'. Pour capturer la structure de la coloration φ dans G', nous introduisons les notions et notations suivantes :

Soit

- G un graphe avec $\Delta(G) = 4$ et H une configuration de G.
- $\varphi : E(G') \to \{1, 2, 3, 4\}$ une 4-arête-coloration de G'.
- $c, c' \in \{1, 2, 3, 4\}$, $c \neq c'$ deux couleurs quelconques.

Une coloration $\varphi' : E(G) \setminus E(H) \to \{1, 2, 3, 4\}$ est *adjacente* à φ, si φ' peut être obtenu à partir de φ en alternant les couleurs d'une (c, c')-chaîne de Kempe de e pour un choix d'une arête $e \in \partial_G(H)$ et des couleurs $c, c' \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Notons $N(\varphi)$ l'ensemble des colorations adjacentes à φ.

Soit

- G un graphe avec $\Delta(G) = 4$ et H une configuration de G.
- $\varphi : E(G') \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$ une 4-arête-coloration de G'.
- $c, c' \in \{1, 2, 3, 4\}$, $c \neq c'$ deux couleurs quelconques.

Soit

- G un graphe avec $\Delta(G) = 4$ et H une configuration de G.
- $\varphi : E(G') \to \{1, 2, 3, 4\}$ une 4-arête-coloration de G'.
- $c, c' \in \{1, 2, 3, 4\}$, $c \neq c'$ deux couleurs quelconques.

Le *graphe résiduel* $\mathcal{X}^{\varphi}_{c,c'}$ est défini par

- $V(\mathcal{X}^{\varphi}_{c,c'}) = \partial_G(H)$,
- $E(\mathcal{X}^{\varphi}_{c,c'}) = \{e_i e_j$ tels que (c, c')-chaîne de Kempe de e_i est la même que la (c, c')-chaîne de Kempe de $e_j\}$.

Soit

- G un graphe avec $\Delta(G) = 4$ et H une configuration de G.
- $\varphi : E(G') \to \{1, 2, 3, 4\}$ une 4-arête-coloration de G'.
- $c, c' \in \{1, 2, 3, 4\}$, $c \neq c'$ deux couleurs quelconques.

Le *graphe résiduel* $\mathcal{X}^{\varphi}_{c,c'}$ est défini par

- $V(\mathcal{X}^{\varphi}_{c,c'}) = \partial_G(H)$,
- $E(\mathcal{X}^{\varphi}_{c,c'}) = \{e_i e_j$ tels que (c, c')-chaîne de Kempe de e_i est la même que la (c, c')-chaîne de Kempe de $e_j\}$.

Le graphe résiduel est donc un couplage planaire de $\partial_G(H)$.

Proposition

Soit

- *G avec $\Delta(G) = 4$ et H de G.*
- *$\varphi : E(G') \to \{1, 2, 3, 4\}$ 4-arête-coloration de G'.*
- *$\varphi' \in N(\varphi)$ une coloration adjacente à φ*
- *$\beta = \varphi|_{\partial_G(H)}$ et $\beta' = \varphi'|_{\partial_G(H)}$*

Alors,

$$|\{e \in \partial_H(G) : \beta(e) \neq \beta'(e)\}| \in \{1, 2\},$$

de plus, on a

$|\{e \in \partial_H(G) : \beta(e) \neq \beta'(e)\}| = 1 \Leftrightarrow d_{\mathcal{X}_\varphi^{c,c'}}(e) = 0$, *et*

$|\{e \in \partial_H(G) : \beta(e) \neq \beta'(e)\}| = 2 \Leftrightarrow d_{\mathcal{X}_\varphi^{c,c'}}(e) = 1.$

Considérons des coloration de H

Soit H une configuration de G et β une coloration de $\partial_G(H)$. Alors, β *s'étend* vers H si $\exists \psi$ de H^* t.q. $\psi|_{\partial_G(H)}$

$$\Phi_0 = \{\beta : \exists \psi : E(H^*) \to \{1,2,3,4\} \text{t.q.} \psi|_{\partial_G(H)} = \beta\}.$$

Pour $i \in \mathbb{N}$, soit

$$\Phi_{i+1} = \{\beta : \beta \in \Phi_i \text{ ou } \exists c, c' \in \{1,2,3,4\},$$
$$\forall X \text{ couplage planaire de } \partial_G(H), N^X_{c,c'}(\beta) \cap \Phi_i \neq \emptyset\},$$
$$\Phi(H) = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \Phi_i(H).$$

Theorem

Soit

- *H une configuration de G.*
- *H' une autre configuration t.q. $\partial(H) = \partial(H')$.*
- *G' le graphe obtenu à partir de G en remplaçant H par H'.*

Si $\Phi_0(H') \subseteq \Phi(H)$, alors, pour toute 4-arête-coloration φ' de G' il existe une 4-arête-coloration φ de G.

Preuve. il suffit de modifier la coloration φ' le long des chaînes de Kempe un nombre fini de fois afin d'obtenir une coloration qui s'étend directement vers H.

Soit H et H' deux configurations telles que $\partial(H) = \partial(H')$. La configuration H *se réduit* vers H' si $\Psi_0(H') \subseteq \Psi(H)$. La configuration H est *réductible* s'il existe une configuration H' vers la quelle elle se réduit.

Soit H et H' deux configurations telles que $\partial(H) = \partial(H')$. La configuration H *se réduit* vers H' si $\Psi_0(H') \subseteq \Psi(H)$. La configuration H est *réductible* s'il existe une configuration H' vers la quelle elle se réduit.
Ce théorème permet d'automatiser la vérification de réductibilité de configurations – on n'a pas besoin de connaître la structure du graphe G, il suffit de deviner la réduction (la configuration H') et vérifier que la condition de la définition dé réductibilité est satisfaite.

C'est un programme qui prend,

- Entrée : Une configuration H et sa réduction potentielle H'.
- Sortie : Une réponse de OUI/NON à la question de réductibilité.

Pré-calcul

- Génération de Couplages de $\mathcal{X}_{\varphi}^{c,c'}$ $\forall c, c$ et $\forall \varphi$.
- Variation entre deux codes adjacents (Plus Tard).

Partant d'une configuration H de G et H' sa réduction potentielle.

- On génère l'ensemble des colorations ψ de H t.q. $\psi|_{\partial_G(H)} = \beta$, c-à-d Φ_0.
- Pour $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ on génère l'ensemble Φ_{i+1} des colorations adjacentes aux colorations de $\cup_{j=0}^{i} \Phi_i$.
- L'ensemble totale des colorations qui s'étendent vers H est $\Phi(H) = \bigcup_{i \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \Phi_i(H)$.
- On génère l'ensemble Φ_0' des colorations ψ' de H' t.q. une coloration de G' s'étend vers H'.
- Regardons si $\Phi_0'(H') \subseteq \Phi(H)$

Lecture de H et H' :

- Lecture de configuration H et sa réduction potentielle présentées sous forme d'une liste d'adjacence.
- Les deux seront stockées dans deux matrices différentes.

<u>Coloration de H :</u> Nous commençons par numéroter les arêtes du graphe H, commençant par les arêtes sortantes et nous continuons vers l'intérieur.
Nous colorions les arêtes de H partant de la dernière arête vers l'extérieur à l'aide de la méthode de retour sur le trace (Backtrack).
Nous n'allons stocker que la coloration $\beta = \psi|_{\partial_G(H)}$ sous forme de code suivant,

$$k = \sum_{i=0}^{r-1} c(\beta(e)) \cdot 4^e \qquad \text{tel que } c(i) \in \{0,1,2,3\} \qquad \text{pour } i \in \{1,2,3,4\}$$

$\Phi_0(H)$ est un ensemble de k.

Colorations voisines : Soit H une configuration, une coloration β avec son code k de $\partial_G(H)$ et deux couleurs c et c'.
Alors M est l'ensemble de tous les couplages possibles des arêtes de $\partial_G(H)$ coloriées avec c ou c'. Les arêtes du graphe résiduel sont l'ensemble M.

Colorations voisines : Soit H une configuration, une coloration β avec son code k de $\partial_G(H)$ et deux couleurs c et c'.
Alors M est l'ensemble de tous les couplages possibles des arêtes de $\partial_G(H)$ coloriées avec c ou c'. Les arêtes du graphe résiduel sont l'ensemble M.
Alors, il existe des colorations β' de $\partial_G(H)$ avec code de coloration k' *adjacentes* de β si pour une paire de couleurs c et c',

$$\begin{cases} k' = k - (2\beta'(e) + c + c') \cdot 4^e \text{ si } e \notin \mathcal{M} \\ k' = k - (2\beta'(e) + c + c') \cdot 4^e - (2\beta'(e') + c + c') \cdot 4^{e'} \text{ si } ee' \in \mathcal{M} \end{cases}$$

Autrement dit, le premier cas correspond à $d_{\mathcal{X}_\varphi^{c,c'}}(e) = 0$, et le deuxième cas correspond à $d_{\mathcal{X}_\varphi^{c,c'}}(e) = 1$.

Alors, pour k' quelconque qui ne s'étend pas, s'il existe une paire de couleurs c, c' pour laquelle n'importe quel couplage des arêtes coloriées avec c ou c' il existe un code k adjacent à k', k' s'étend.

Soit G un graphe planaire. V(G) ensemble de sommets et F ensemble de faces de G.
La *charge initiale* des sommets et des faces

$$w : V(G) \cup F(G) \rightarrow \mathbb{R},$$
$$w(x) = d_G(x) - 4.$$

Lemme

Soit G un graphe planaire et w la application de la charge initiale. Alors la charge initiale totale du graphe est -8.

Preuve.

$$\sum_{u \in V(G)} (d_G(v) - 4) + \sum_{f \in F} (d_G(f) - 4) = 2m - 4n + 2m - 4f =$$

$$= -4(n - m + f) = -4 \cdot 2 = -8.$$

Alors les charges pour chaque sommet et face,

$$\begin{aligned} w(v) &= -2 && \forall v \in V(G), \text{ t.q. } d_G(v) = 2, \\ w(v) &= -1 && \forall v \in V(G), \text{ t.q. } d_G(v) = 3, \\ w(v) &= 0 && \forall v \in V(G), \text{ t.q. } d_G(v) = 4 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} w(f) &= 0 && \forall f \in F(G), \text{ t.q. } d_G(f) = 4, \\ w(f) &= 1 && \forall f \in F(G), \text{ t.q. } d_G(f) = 5, \\ w(f) &\geq 2 && \forall f \in F(G), \text{ t.q. } d_G(f) \geq 6. \end{aligned}$$

Il ne suffit pas de définir les règles de déchargement parmi les sommets, puisqu'il n'y a pas de sommet de charge strictement positive. Nous sommes forcés à utiliser la charge des faces de taille au moins 5 pour éliminer la charge négative des sommets de degré 2 et 3.
Les règles de déchargement :

(R) Toute face de taille au moins 5 donne une unité de charge à chaque sommet incident de degré 2 ou 3.

Lemme

Soit G un contre-exemple et v un sommet de G tel que $d_G(v) = 2$. Alors, il existe autour de v deux pentagones ou un hexagone et tous les sommets autour des faces sont de degré 4.
2 avec 2 carrés
2 avec 1 carré et un pentagone

Lemme

Soit G un contre-exemple minimal et u et v deux sommets voisins tels que $d_G(u) = d_G(v) = 3$. Alors parmi les 4 faces autour de ce paire de sommets il y a au moins deux pentagones, et tous les sommets autour des faces sauf v et u ont degré 4.
3-3-4-3
3-3 avec 4 carrés
3-3 avec 3 carrés et un pentagone

Lemme

Soit G un contre-exemple minimal et $v \in V(G)$ tel que $d_G(v) = 3$ avec que des voisins de grand degré. Alors, il existe une face f incidente à v t.q. $d_G(f) \geq 5$
3 avec 3 carrés

Ces deux derniers cas n'ont pas encore été prouvés et nous n'avons pas trouvé leurs réductions non plus.

1. Réussi :
   - Développement d'un outil de vérification.
   - 3 nouvelles configurations réductibles parmi plus de 50 essais.
   - Des propriétés qui soutiennent les règles de déchargement.
2. En cours de travail :
   - Réduction pour v de degré 2 avec 1 carré et 1 pentagone.
   - Réduction pour v de degré 3 avec 3 carrés
   - Vérification de connexité et aucune présence des triangles autour des réductions

Merci pour votre attention !