Coloration des arêtes des graphes planaires

Antonio Gallastegui František Kardoš

Laboratoire Bordelais de Recherche Informatique
Université de Bordeaux

Bordeaux, 10 juin, 2016

Le degré $d_G(v)$ de $v \in V(G)$ est le nombre de sommets voisins de v.

- $\Delta(G)$ degré maximum
- $\delta(G)$ degré minimum

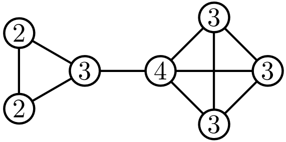


FIGURE – Un exemple d'un graphe de $\delta(G) = 2$ et $\Delta(G) = 4$

La *maille* $g(G)$ d'un graphe G est la longueur du plus petit cycle dans G, s'il en existe un. Sinon $g(G)$ est infinie.

Soit un graphe G. Un *couplage* M est un ensemble d'arêtes deux à deux non-adjacentes.

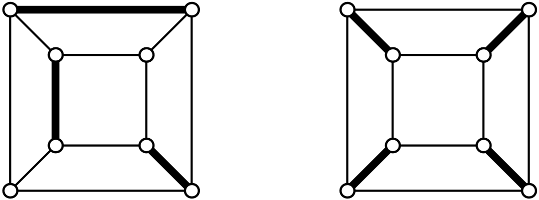


FIGURE – Un exemple d'un couplage maximal (gauche) et un couplage maximum que dans ce cas là c'est aussi un couplage parfait (droite)

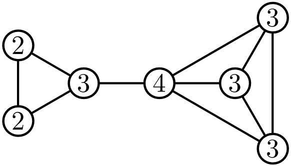
Le graphe G est *planaire* ssi il peut être dessiné sur le plan sans croisement des arêtes. Une face f, est une région connexe délimitée par des arêtes. Il y a toujours une face infinie.

Le graphe G est *planaire* ssi il peut être dessiné sur le plan sans croisement des arêtes. Une face f, est une région connexe délimitée par des arêtes. Il y a toujours une face infinie.

Theorem (Euler, 1750)

Soit G un graphe planaire connexe à n sommets, m arêtes et f faces. Alors,

$$n - m + f = 2$$



Soit G graphe, une *coloration propre* de G est application $\varphi : V(G) \rightarrow C$ où $C = \{1, 2, ..., k\}$ ensemble d'entiers, t.q. $\forall uv \in E(G) \implies \varphi(u) \neq \varphi(v)$.
Le nombre chromatique $\chi(G)$.

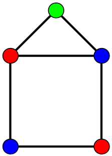


FIGURE – Un exemple d'une coloration propre d'un graphe G avec $\chi(G) = 3$.

Soit G un graphe. Une coloration d'arêtes de G est une application $\varphi : E(G) \to C$, où $C = \{1, 2, ..., k\}$ t.q. $\forall e$, $e' \in E(G)$ adjacentes $\implies \varphi(e) \neq \varphi(e')$.
L'indice chromatique $\chi'(G)$.

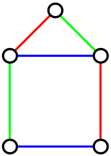


FIGURE – Un exemple d'une coloration d'arêtes d'un graphe G avec $\chi'(G) = 3$.

Theorem (Vizing)

Soit G un graphe simple. Alors $\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$*.*

Si $\chi'(G) = \Delta(G)$, G est de classe 1.

Theorem (Vizing)

Soit G un graphe simple. Alors $\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$.

Si $\chi'(G) = \Delta(G)$, G est de classe 1.
Quels graphes planaires sont de classe 1 ?

- $\Delta(G) \geq 8 \implies \chi'(G) = \Delta$ (Vizing 1965).
- $\Delta(G) = 7 \implies \chi'(G) = 7$ (Sanders, Zhao 2001).
- $\Delta(G) = 5$ $g(G) \geq 4 \implies \chi'(G) = 5$ (Li, Luo 2003).
- $\Delta(G) = 4$ $g(G) \geq 5 \implies \chi'(G) = 4$ (Li, Luo 2003).

Conjecture

Soit G un graphe planaire. Alors,
$\Delta(G) = 4$ $g(G) \geq 4 \implies \chi'(G) = 4$

Tableau des résultats connus pour des graphes de classe 1.

Δ	3	4	5	6	7	≥ 8
$g \geq 3$	X	X	X	?	✓	✓
$g \geq 4$	X	?	✓			
$g \geq 5$	X	✓				

Proposition

Soit G un graphe planaire avec $\Delta(G) = 5$ et $g(G) \geq 4$. Alors $\chi'(G) = 5$.

Propriétés structurelles de un contre-exemple minimal G :

- Il n'existe pas de sommet v de G tel que $d_G(v) = 1$.
- Soit $v \in V(G)$ tel que $d_G(v) = 2$. Alors $\forall u \in N(v)$, $d_G(u) = 5$.
- Soit $v \in V(G)$ tel que $d_G(v) = 3$. Alors, $\forall u \in N(v)$, $4 \leq d_G(u) \leq 5$.
- Soit $v \in V(G)$ tel que $d_G(v) = 3$. Alors, au moins deux voisins de v sont de degré 5.
- Soit $uv \in E(G)$ tel que $d_G(u) = 2$ et $d_G(v) = 5$. Alors, tous les voisins de v sauf u sont de degré 5.
- Soit $v \in V(G)$ tel que $d_G(v) = 5$. Alors, v a au plus deux voisins de degré 3.

Déchargement :
La charge initiale est définie par

$$\begin{aligned} w(v) &= d_G(v) - 4 \qquad \text{pour tout } v \in V(G), \\ w(f) &= d_G(f) - 4 \qquad \text{pour tout } f \in F(G), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w(v) &= -2 \qquad \text{pour tout } v \in V(G), \text{ tel que } d_G(v) = 2, \\ w(v) &= -1 \qquad \text{pour tout } v \in V(G), \text{ tel que } d_G(v) = 3, \\ w(v) &= 0 \qquad \text{pour tout } v \in V(G), \text{ tel que } d_G(v) = 4, \\ w(v) &= 1 \qquad \text{pour tout } v \in V(G), \text{ tel que } d_G(v) = 5. \end{aligned}$$

La charge initiale de toutes les faces est positive puisque $g(G) \geq 4$.

Lemme

Soit G un graphe planaire connexe. Alors,

$$\sum_{v \in V(G)} (d_G(v) - 4) + \sum_{f \in F(G)} (d_G(f) - 4) = -8.$$

Preuve.

$$\sum_{v \in V(G)} (d_G(v) - 4) + \sum_{f \in F(G)} (d_G(f) - 4) = 2m - 4n + 2m - 4f =$$

$$= -4(n - m + f) = -4 \cdot 2 = -8.$$

Les règles de déchargement :

(R1) Tout sommet de degré 5 donne une unité de charge à chacun de ses voisins de degré 2.

(R2) Tout sommet de degré 5 donne $1/2$ de charge à chaque voisin de degré 3.

Proposition

Soit G un graphe planaire avec $\Delta(G) = 4$ et $g(G) \geq 5$. Alors G est 4-arête-coloriable.

Propriétés structurelles d'un contre-exemple minimal G :

- Il n'existe pas de sommet v de G tel que $d_G(v) = 1$.
- Soit $v \in V(G)$ tel que $d_G(v) = 2$. Alors $\forall u \in N(v)$, $d_G(u) = 4$.
- Soit $uv \in E(G)$ tel que $d_G(u) = 2$ et $d_G(v) = 4$. Alors, tous les voisins de v sauf u sont de degré 4.
- Soit $v \in V(G)$ tel que $d_G(v) = 3$. Alors, v a au moins deux voisins de degré 4.

Déchargement :
La charge initiale est définie par,

$$\begin{aligned} w(v) &= \frac{3}{2} d_G(v) - 5 \qquad \text{pour tout } v \in V(G), \\ w(f) &= d_G(f) - 5 \qquad \text{pour tout } f \in F(G). \end{aligned}$$

Les règles de déchargement :

(R1) tout sommet de degré 4 donne 1 de charge à chacun de ses voisins de degré 2.

(R2) tout sommet de degré 4 donne $1/4$ de charge à chaque voisin de degré 3.

Soit H une configuration de G. Notons

$$\partial_G(H) = \{e = uv \in E(G) : u \in V(H) \text{ et } v \in V(G \setminus H)\}.$$

Notons $H^* = H \cup \partial_G(H)$ et $G' = G \setminus H \cup \partial_G(H)$.

Soit

- G un graphe avec $\Delta(G) = 4$ et H une configuration de G,
- $\varphi : E(G') \to \{1, 2, 3, 4\}$ une 4-arête-coloration de G',
- $c, c' \in \{1, 2, 3, 4\}$, $c \neq c'$ deux couleurs quelconques.

Une coloration $\varphi' : E(G) \setminus E(H) \to \{1, 2, 3, 4\}$ est *adjacente* à φ, si φ' peut être obtenu à partir de φ en alternant les couleurs d'une (c, c')-chaîne de Kempe de e pour $e \in \partial_G(H)$

Le *graphe résiduel* $\mathcal{X}^{\varphi}_{c,c'}$ est défini par

- $V(\mathcal{X}^{\varphi}_{c,c'}) = \partial_G(H)$,
- $E(\mathcal{X}^{\varphi}_{c,c'}) = \{e_i e_j$ tels que (c, c')-chaîne de Kempe de e_i est la même que la (c, c')-chaîne de Kempe de $e_j\}$.

Le graphe résiduel est donc un couplage planaire de $\partial_G(H)$.

Proposition

Soit

- G *avec* $\Delta(G) = 4$ *et* H *une configuration de* G,
- $\varphi : E(G') \to \{1, 2, 3, 4\}$ *4-arête-coloration de* G',
- $\varphi' \in N(\varphi)$ *une coloration adjacente à* φ,
- $\beta = \varphi|_{\partial_G(H)}$ *et* $\beta' = \varphi'|_{\partial_G(H)}$.

Alors,

$$|\{e \in \partial_H(G) : \beta(e) \neq \beta'(e)\}| \in \{1, 2\},$$

de plus, on a

$|\{e \in \partial_H(G) : \beta(e) \neq \beta'(e)\}| = 1 \Leftrightarrow d_{\mathcal{X}_\varphi^{c,c'}}(e) = 0$, *et*

$|\{e \in \partial_H(G) : \beta(e) \neq \beta'(e)\}| = 2 \Leftrightarrow d_{\mathcal{X}_\varphi^{c,c'}}(e) = 1$.

Considérons des coloration de H.

Soit H une configuration de G et β une coloration de $\partial_G(H)$. Alors, β *s'étend* vers H si $\exists\psi$ de H^* t.q. $\psi|_{\partial_G(H)} = \beta$

$$\Phi_0 = \{\beta : \exists\psi : E(H^*) \to \{1,2,3,4\} \text{t.q.} \psi|_{\partial_G(H)} = \beta\}.$$

Pour $i \in \mathbb{N}$, soit

$$\Phi_{i+1} = \{\beta : \beta \in \Phi_i \text{ ou } \exists c, c' \in \{1,2,3,4\},$$

$$\forall X \text{ couplage planaire de } \partial_G(H), N^X_{c,c'}(\beta) \cap \Phi_i \neq \emptyset\},$$

$$\Phi(H) = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \Phi_i(H).$$

Theorem

Soit

- *H une configuration de G.*
- *H' une autre configuration t.q. $\partial_G(H) = \partial_G(H')$.*
- *G' le graphe obtenu à partir de G en remplaçant H par H'.*

Si $\Phi_0(H') \subseteq \Phi(H)$, alors, pour toute 4-arête-coloration φ' de G' il existe une 4-arête-coloration φ de G.

Preuve. il suffit de modifier la coloration φ' le long des chaînes de Kempe un nombre fini de fois afin d'obtenir une coloration qui s'étend directement vers H.

C'est un programme qui prend,

- Entrée : Une configuration H et sa réduction potentielle H'.
- Sortie : Une réponse de OUI/NON à la question de réductibilité.

Ensuite, nous décrivons l'outil de la manière suivante,

- Pré-calcul,
- Traitement,
- Implémentation.

- Génération de Couplages de r sommets, pour r allant de 1 à MAXRING.
- Variation entre deux codes adjacents (Plus Tard).

Partant d'une configuration H de G et H' sa réduction potentielle,

- On génère l'ensemble des colorations ψ de H^* t.q. $\psi|_{\partial_G(H)} = \beta$, constituent Φ_0,
- Tant que $\Phi_i \subset \Phi_{i+1}$ pour $i \geq 0$, on génère des colorations adjacentes à $\beta \in \Phi_i$,
- L'ensemble totale des colorations qui s'étendent vers H est $\Phi(H) = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \Phi_i(H)$,
- On génère l'ensemble Φ'_0 des colorations ψ' de H' t.q. une coloration de G' s'étend vers H' et
- On regarde si $\Phi'_0(H') \subseteq \Phi(H)$.

Alors, pour β' quelconque qui ne s'étend pas, s'il existe une paire de couleurs c, c' tel que pour n'importe quel couplage des arêtes coloriées avec c ou c' il existe un code β adjacent à β', β' s'étend.

Lecture de H et H' :

- Lecture de configuration H et sa réduction potentielle H' présentées sous forme d'une liste d'adjacence.
- Les deux seront stockées dans deux matrices différentes.

Coloration de H :
Nous commençons par numéroter les arêtes du graphe H, commençant par les arêtes sortantes et nous continuons vers l'intérieur.
Nous colorions les arêtes de H partant de la dernière arête vers l'extérieur à l'aide de la méthode de retour sur le trace (Backtrack).
Nous n'allons stocker que la coloration $\beta = \psi|_{\partial_G(H)}$ sous forme de code suivant,

$$k = \sum_{e=0}^{r-1} c(\beta(e)) \cdot 4^e \qquad \text{tel que } c(i) \in \{0,1,2,3\} \qquad \text{pour } i \in \{1,2,3,4\}$$

$\Phi_0(H)$ est un ensemble de k.

Colorations voisines :

Soit H une configuration, une coloration β avec son code k de $\partial_G(H)$ et deux couleurs c et c'.

Alors $\mathcal{M}$ est l'ensemble de tous les couplages M possibles des arêtes de $\partial_G(H)$ coloriées avec c ou c'.

Colorations voisines :

Soit H une configuration, une coloration β avec son code k de $\partial_G(H)$ et deux couleurs c et c'.
Alors $\mathcal{M}$ est l'ensemble de tous les couplages M possibles des arêtes de $\partial_G(H)$ coloriées avec c ou c'.
Alors, il existe des colorations β' de $\partial_G(H)$ avec code de coloration k' *adjacentes* de β si pour une paire de couleurs c et c',

$$\begin{cases} k' = k + (c + c' - 2\beta'(e)) \cdot 4^e \text{ si } d_M(e) = 0 \\ k' = k + (c + c' - 2\beta'(e)) \cdot 4^e + (c + c' - 2\beta'(e')) \cdot 4^{e'} \text{ si } d_M(e) = 1. \end{cases}$$

Cet ensemble de codes de coloration k' forment Φ_{i+1} pour tout $i \in \mathbb{N}$.

Soit G un graphe planaire. V(G) ensemble de sommets et F ensemble de faces de G.
La *charge initiale* des sommets et des faces,

$$w : V(G) \cup F(G) \to \mathbb{R},$$
$$w(x) = d_G(x) - 4.$$

Lemme

Soit G un graphe planaire et w la application de la charge initiale. Alors la charge initiale totale du graphe est -8.

Preuve.

$$\sum_{u \in V(G)} (d_G(v) - 4) + \sum_{f \in F} (d_G(f) - 4) = 2m - 4n + 2m - 4f =$$
$$= -4(n - m + f) = -4 \cdot 2 = -8.$$

Alors les charges pour chaque sommet et face,

$$\begin{aligned} w(v) &= -2 \qquad \forall v \in V(G), \text{ t.q. } d_G(v) = 2,\\ w(v) &= -1 \qquad \forall v \in V(G), \text{ t.q. } d_G(v) = 3,\\ w(v) &= 0 \qquad \forall v \in V(G), \text{ t.q. } d_G(v) = 4 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} w(f) &= 0 \qquad \forall f \in F(G), \text{ t.q. } d_G(f) = 4,\\ w(f) &= 1 \qquad \forall f \in F(G), \text{ t.q. } d_G(f) = 5,\\ w(f) &\geq 2 \qquad \forall f \in F(G), \text{ t.q. } d_G(f) \geq 6. \end{aligned}$$

Les règles de déchargement :

(R) Toute face de taille au moins 5 donne une unité de charge à chaque sommet incident de degré 2 ou 3.

Les règles de déchargement :

(R) Toute face de taille au moins 5 donne une unité de charge à chaque sommet incident de degré 2 ou 3.

Objectifs :
L'objectif est de réduire les configurations suivantes,

- Un sommet de degré 2 avec 1 pentagone autour de lui.
- Les sommets de degré 3 avec un pentagone autour d'eux.
- Une face de grande taille avec beaucoup de sommets de petit degré autour d'elle.

3-3-4-3 :

FIGURE – La configuration 3-3-4-3 (gauche) et sa réduction (droite).

Pair de sommets avec 4 carrées :

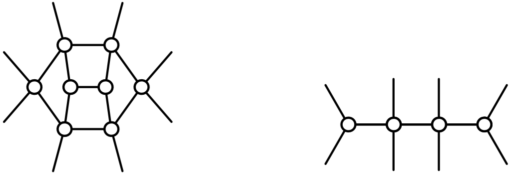


FIGURE – La configuration 3-3 avec 4 carrés autour de ce pair (gauche) et sa réduction (droite).

3-3 1 pentagone en haut :

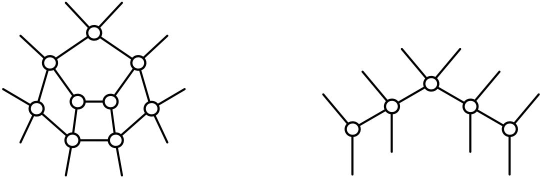


FIGURE – La configuration 3-3 avec un pentagone en haut (gauche) et sa réduction (droite).

3-3 1 pentagone de coté :

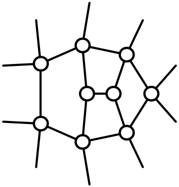


FIGURE – La configuration 3-3 avec un pentagone de coté (gauche) et sa réduction (droite).

2 carrés :

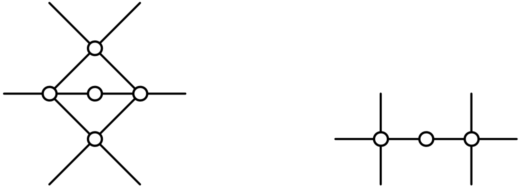


FIGURE – La configuration 2 avec deux carrés (gauche) et sa réduction (droite).

1. Réussi :
   - Développement d'un outil de vérification.
   - 3 nouvelles configurations réductibles parmi plus de 50 essais des paires H, H'.
2. En cours de travail :
   - Réduction pour v de degré 2.
   - Réduction pour v de degré 3.
   - Vérification de connexité et aucune présence des triangles autour des réductions

Merci pour votre attention !