Coloration des arêtes des graphes planaires

Antonio Gallastegui František Kardoš

Laboratoire Bordelais de Recherche Informatique
Université de Bordeaux

Bordeaux, 10 juin, 2016

Un graphe G est un couple $G = (V, E)$ d'ensembles finis, où

- $V = V(G)$ *sommets* de G,
- $E = E(G)$ pairs des sommets, *arêtes* de G.

e, $e' \in E(G)$ sont adjacents si $e = uv$ et $e' = uv'$ pour u, v, $v' \in V(G)$, $v \neq v'$.

Un graphe G est un couple $G = (V, E)$ d'ensembles finis, où

- $V = V(G)$ *sommets* de G,
- $E = E(G)$ pairs des sommets, *arêtes* de G.

e, $e' \in E(G)$ sont adjacents si $e = uv$ et $e' = uv'$ pour u, v, $v' \in V(G)$, $v \neq v'$.
Le degré $d_G(v)$ de $v \in V(G)$ est le nombre de sommets voisins de v.

- $\Delta(G)$ degré maximum
- $\delta(G)$ degré minimum

Figure——

Soit G simple. Un *couplage* M est un ensemble d'arêtes deux çà deux non-adjacentes. —figure couplage maximum, maximal, parfait—-

Le graphe G est planaire ssi il peut être dessiné sur le plan sans croisement des arêtes. Une face f, est une région connexe délimitée par des arêtes. Il y a toujours une face infinie.

Le graphe G est planaire ssi il peut être dessiné sur le plan sans croisement des arêtes. Une face f, est une région connexe délimitée par des arêtes. Il y a toujours une face infinie.

Theorem (Euler, 1750)

Soit G un graphe planaire connexe à n sommets, m arêtes et f faces. Alors,

$$n - m + f = 2$$

figure—

La *maille* $g(G)$ d'un graphe G est la longueur d'un plus petit cycle dans G, s'il en existe un. Sinon $g(G)$ est infinie.

La *maille* $g(G)$ d'un graphe G est la longueur d'un plus petit cycle dans G, s'il en existe un. Sinon $g(G)$ est infinie.

Proposition

Tout graphe planaire contient un sommet de degré au plus 5.

La *maille* $g(G)$ d'un graphe G est la longueur d'un plus petit cycle dans G, s'il en existe un. Sinon $g(G)$ est infinie.

Proposition

Tout graphe planaire contient un sommet de degré au plus 5.

Dans un graphe planaire les faces de taille ≥ 3 peuvent être divisées en deux faces. Appliquant cet opération tant que ce soit possible on n'obtient que des faces triangulaires, c'est une triangulation.

Soit G graphe, une *coloration propre* de G est application $\varphi : V(G) \to C$ où $C = \{1, 2, ..., k\}$ ensemble d'entiers, t.q. $\forall uv \in E(G) \Rightarrow \varphi(u) \neq \varphi(v)$.
Le nombre chromatique $\chi(G)$ est le nombre de couleurs minimum pour colorier G
image—coloration nombre chromatique et k-coloration

Soit G un graphe. Une coloration d'arêtes de G est une application $\varphi : E(G) \to C$, où $C = \{1, 2, ..., k\}$ t.q. $\forall e$, $e' \in E(G)$ adjacentes $\Rightarrow \varphi(e) \neq \varphi(e')$.
L'indice chromatique $\chi'(G)$ est le nombre de couleurs minimum qu'on nécessite pour colorier les arêtes de G.
—-image coloration d'aretes et apres indice chromatique etc—-

Theorem (Vizing)

Soit G un graphe planaire. Alors $\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$*.*
Si $\chi'(G) = \Delta(G)$ *alors G est de classe 1.*

Theorem (Vizing)

Soit G un graphe planaire. Alors $\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$. Si $\chi'(G) = \Delta(G)$ alors G est de classe 1.

- $\Delta(G) \geq 8$ $\chi'(G) = 8$. (Vizing 1965).
- $\Delta(G) = 7$ $\chi'(G) = 7$. (Sanders, Zhao 2001).
- $\Delta(G) = 5$ $(g(G) \geq 4)$ $\chi'(G) = 5$.
- $\Delta(G) = 4$ $(g(G) \geq 5)$ $\chi'(G) = 4$.
- $\Delta(G) = 4$ $(g(G) \geq 4)$ $\chi'(G) = 4$?

Soit G graphe avec arêtes coloriées et $G[c1, c2]$ sous graphe de G induit par arêtes coloriées $c1$ et $c2$.
Tout composante connexe C de $G[c1, c2]$ est une chaîne à laquelle renversants les couleurs on obtient nouvelle coloration de G.
Pour $e \in E(G)$ t.q. $\varphi(e) = c$ et une autre couleur c'. Alors il existe une et une seule chaîne de $G[c, c']$ contenant e. C'est (c, c')-*chaîne de Kempe*.

Proposition

Soit G un graphe planaire avec $\Delta(G) = 5$ et $g(G) \geq 4$. Alors $\chi'(G) = 5$.

Preuve.

Propriétés Structurelles :

Lemme

Il n'existe pas de sommet v de G tel que $d_G(v) = 1$.

Lemme

Soit $v \in V(G)$ tel que $d_G(v) = 2$. Alors $\forall u \in N(v)$, $d_G(u) = 5$.

Lemme

Soit $v \in V(G)$ tel que $d_G(v) = 3$. Alors, $\forall u \in N(v)$, $4 \leq d_G(u) \leq 5$.

Lemme

Soit $v \in V(G)$ tel que $d_G(v) = 3$. Alors, au moins deux voisins de v sont de degré 5.

Lemme

Soit $uv \in E(G)$ tel que $d_G(u) = 2$ et $d_G(v) = 5$. Alors, tous les voisins de v sauf u sont de degré 5.

Lemme

Soit $v \in V(G)$ tel que $d_G(v) = 5$. Alors, v a au plus deux voisins de degré 3.

Déchargement :
La charge initiale est une application $w : V(G) \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\begin{aligned} w(v) &= d_G(v) - 4 \qquad \text{pour tout } v \in V(G), \\ w(f) &= d_G(f) - 4 \qquad \text{pour tout } f \in F(G), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w(v) &= -2 \qquad \text{pour tout } v \in V(G), \text{ tel que } d_G(v) = 2, \\ w(v) &= -1 \qquad \text{pour tout } v \in V(G), \text{ tel que } d_G(v) = 3, \\ w(v) &= 0 \qquad \text{pour tout } v \in V(G), \text{ tel que } d_G(v) = 4, \\ w(v) &= 1 \qquad \text{pour tout } v \in V(G), \text{ tel que } d_G(v) = 5. \end{aligned}$$

La charge initiale de toutes les faces est positive puisque $g(G) \geq 4$.

Lemme

Soit G un graphe planaire connexe. Alors,

$$\sum_{v \in V(G)} (d_G(v) - 4) + \sum_{f \in F} (d_G(f) - 4) = -8.$$

Preuve.

$$\sum_{v \in V(G)} (d_G(v) - 4) + \sum_{f \in F} (d_G(f) - 4) = 2m - 4n + 2m - 4f =$$

$$= -4(n - m + f) = -4 \cdot 2 = -8.$$

$\Delta(G) = 5$, $g(G) \geq 4$, $\chi'(G) = 5$

Les règles de déchargement :

(R1) Tout sommet de degré 5 donne une unité de charge à chacun de ses voisins de degré 2.

(R2) Tout sommet de degré 5 donne $1/2$ de charge à chaque voisin de degré 3.

Proposition

Soit G un graphe planaire avec $\Delta(G) = 4$ et $g(G) \geq 5$. Alors G est 4-arête-coloriable.

Preuve.

Propriétés Structurelles :

Lemme

Il n'existe pas de sommet v de G tel que $d_G(v) = 1$.

$\Delta(G) = 4$, $g(G) \geq 5$, $\chi'(G) = 4$

Lemme

Soit $v \in V(G)$ tel que $d_G(v) = 2$. Alors $\forall u \in N(v)$, $d_G(u) = 4$.

Lemme

Soit $uv \in E(G)$ tel que $d_G(u) = 2$ et $d_G(v) = 4$. Alors, tous les voisins de v sauf u sont de degré 4.

$\Delta(G) = 4$, $g(G) \geq 5$, $\chi'(G) = 4$

Lemme

Soit $v \in V(G)$ tel que $d_G(v) = 3$. Alors, v a au moins deux voisins de degré 4.

Déchargement :
La charge initiale est une application $w : V(G) \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\begin{aligned} w(v) &= \frac{3}{2} d_G(v) - 5 \qquad \text{pour tout } v \in V(G), \\ w(f) &= d_G(f) - 5 \qquad \text{pour tout } f \in F(G). \end{aligned}$$

Déchargement :
La charge initiale est une application $w : V(G) \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$w(v) = \frac{3}{2}d_G(v) - 5 \qquad \text{pour tout } v \in V(G),$$
$$w(f) = d_G(f) - 5 \qquad \text{pour tout } f \in F(G).$$

$$w(v) = -2 \qquad \text{pour tout } v \in V(G), \text{ tel que } d_G(v) = 2,$$
$$w(v) = -\frac{1}{2} \qquad \text{pour tout } v \in V(G), \text{ tel que } d_G(v) = 3,$$
$$w(v) = 1 \qquad \text{pour tout } v \in V(G), \text{ tel que } d_G(v) = 4.$$

D'ailleurs, la charge initiale de toutes les faces est positive puisque $g(G) \geq 5$.

Lemme

Soit G un graphe planaire connexe. Alors,

$$\sum_{v \in V(G)} \left(\frac{3}{2} d_G(v) - 5\right) + \sum_{f \in F(G)} (d_G(f) - 5) = -10.$$

Preuve.

$$\sum_{v \in V(G)} \left(\frac{3}{2} d_G(v) - 5\right) + \sum_{f \in F(G)} (d_G(f) - 5) =$$

$$= 3m - 5n + 2m - 5f = -5(n - m + f) = -5 \cdot 2 = -10.$$

$\Delta(G) = 4$, $g(G) \geq 5$, $\chi'(G) = 4$

Les règles de déchargement :

(R1) tout sommet de degré 4 donne 1 de charge à chacun de ses voisins de degré 2.

(R2) tout sommet de degré 4 donne $1/4$ de charge à chaque voisin de degré 3.

Dans ce cas là aussi, la somme totale de la charge reste invariante et la charge de toutes les faces reste positive.

Les démonstrations de Lemmes 1-6 et 8-11 ont toutes la même structure : La supposition que le contre-exemple minimal G contienne un arrangement de sommets de certains degrés entraîne une contradiction avec non-colorabilité de G.
Nous allons généraliser cette notion.

Soit H un graphe étiqueté avec une fonction $\gamma : V(G) \to \mathbb{N}$ telle que $\forall v \in V(H)$ on a $\gamma(v) \geq d_H(v)$. Le graphe H est une *configuration* dans G s'il existe un sous-graphe X de G et un isomorphisme $\xi : H \to X$ tel que $\forall v \in V(H)$, $\gamma(v) = d_G(\xi(v))$.

Soit H un graphe étiqueté avec une fonction $\gamma : V(G) \to \mathbb{N}$ telle que $\forall v \in V(H)$ on a $\gamma(v) \geq d_H(v)$. Le graphe H est une *configuration* dans G s'il existe un sous-graphe X de G et un isomorphisme $\xi : H \to X$ tel que $\forall v \in V(H)$, $\gamma(v) = d_G(\xi(v))$. Dans la suite, lorsque nous parlons d'une configuration H dans un graphe G, nous identifions H et sa copie $X = \xi(H)$ dans G.

Soit H une configuration de G. Notons

$$\partial_G(H) = \{e = uv \in E(G) : u \in V(H) \text{ et } v \in V(G \setminus H)\},$$

l'ensemble des arêtes sortantes de H et $r = |\partial_G(H)|$.

Soit H une configuration de G. Notons

$$\partial_G(H) = \{e = uv \in E(G) : u \in V(H) \text{ et } v \in V(G \setminus H)\},$$

l'ensemble des arêtes sortantes de H et $r = |\partial_G(H)|$.
Notons $H^* = H \cup \partial_G(H)$ et $G' = G \setminus H \cup \partial_G(H)$.

Si $\varphi : E(G) \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$ est une 4-arête-coloration de G, alors φ induit une coloration de $\partial_G(H)$, de H^*, et de G'. Pour capturer la structure de la coloration φ dans G', nous introduisons les notions et notations suivantes :

Soit

- G un graphe avec $\Delta(G) = 4$ et H une configuration de G.
- $\varphi : E(G') \to \{1, 2, 3, 4\}$ une 4-arête-coloration de G'.
- $c, c' \in \{1, 2, 3, 4\}$, $c \neq c'$ deux couleurs quelconques.

Une coloration $\varphi' : E(G) \setminus E(H) \to \{1, 2, 3, 4\}$ est *adjacente* à φ, si φ' peut être obtenu à partir de φ en alternant les couleurs d'une (c, c')-chaîne de Kempe de e pour un choix d'une arête $e \in \partial_G(H)$ et des couleurs $c, c' \in \{1, 2, 3, 4\}$.
Notons $N(\varphi)$ l'ensemble des colorations adjacentes à φ.

Soit

- G un graphe avec $\Delta(G) = 4$ et H une configuration de G.
- $\varphi : E(G') \to \{1,2,3,4\}$ une 4-arête-coloration de G'.
- $c, c' \in \{1,2,3,4\}$, $c \neq c'$ deux couleurs quelconques.

Soit

- G un graphe avec $\Delta(G) = 4$ et H une configuration de G.
- $\varphi : E(G') \to \{1, 2, 3, 4\}$ une 4-arête-coloration de G'.
- $c, c' \in \{1, 2, 3, 4\}$, $c \neq c'$ deux couleurs quelconques.

Le *graphe résiduel* $\mathcal{X}^{\varphi}_{c,c'}$ est défini par

- $V(\mathcal{X}^{\varphi}_{c,c'}) = \partial_G(H)$,
- $E(\mathcal{X}^{\varphi}_{c,c'}) = \{e_i e_j$ tels que (c, c')-chaîne de Kempe de e_i est la même que la (c, c')-chaîne de Kempe de $e_j\}$.

Soit

- G un graphe avec $\Delta(G) = 4$ et H une configuration de G.
- $\varphi : E(G') \to \{1, 2, 3, 4\}$ une 4-arête-coloration de G'.
- $c, c' \in \{1, 2, 3, 4\}$, $c \neq c'$ deux couleurs quelconques.

Le *graphe résiduel* $\mathcal{X}^{\varphi}_{c,c'}$ est défini par

- $V(\mathcal{X}^{\varphi}_{c,c'}) = \partial_G(H)$,
- $E(\mathcal{X}^{\varphi}_{c,c'}) = \{e_i e_j$ tels que (c, c')-chaîne de Kempe de e_i est la même que la (c, c')-chaîne de Kempe de $e_j\}$.

Le graphe résiduel est donc un couplage planaire de $\partial_G(H)$.

Proposition

Soit

- G *avec* $\Delta(G) = 4$ *et* H *de* G*.*
- $\varphi : E(G') \to \{1, 2, 3, 4\}$ *4-arête-coloration de* G'*.*
- $\varphi' \in N(\varphi)$ *une coloration adjacente à* φ
- $\beta = \varphi|_{\partial_G(H)}$ *et* $\beta' = \varphi'|_{\partial_G(H)}$

Alors,

$$|\{e \in \partial_H(G) : \beta(e) \neq \beta'(e)\}| \in \{1, 2\},$$

de plus, on a

$|\{e \in \partial_H(G) : \beta(e) \neq \beta'(e)\}| = 1 \Leftrightarrow d_{\mathcal{X}_\varphi^{c,c'}}(e) = 0$*, et*

$|\{e \in \partial_H(G) : \beta(e) \neq \beta'(e)\}| = 1 \Leftrightarrow d_{\mathcal{X}_\varphi^{c,c'}}(e) = 1.$

Considérons des coloration de H

Soit H de G et β une coloration de $\partial_G(H)$.
Alors, β *s'étend* vers H si $\exists \psi$ de $H*$ t.q. $\psi|_{\partial_G(H)}$

$$\Psi_0 = \{\beta : \exists \psi : E(H^*) \to \{1,2,3,4\} \text{t.q.} \psi|_{\partial_G(H)} = \beta\}.$$

Pour $i \in \mathbb{N}$, soit

$$\Psi_{i+1} = \{\beta : \beta \in \Psi_i \text{ ou } \exists c, c' \in \{1,2,3,4\}, \forall X \quad N^X_{c,c'}(\beta) \cap \Psi_i \neq \emptyset\},$$

$$\Psi(H) = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \Psi_i(H).$$

Theorem

Soit

- *H de G.*
- *H' une autre configuration t.q. $\partial(H) = \partial(H')$.*
- *G' le graphe obtenu à partir de G en remplaçant H par H'.*

Si $\Psi_0(H') \subseteq \Psi(H)$, alors, pour toute 4-arête-coloration φ' de G' il existe une 4-arête-coloration φ de G.

Preuve. il suffit de modifier la coloration φ' le long des chaînes de Kempe un nombre fini de fois afin d'obtenir une coloration qui s'étend directement vers H.

Théorème 3 permet d'automatiser la vérification de réductibilité de configurations – on n'a pas besoin de connaître la structure du graphe G, il suffit de deviner la réduction (la configuration H') et vérifier que la condition de la définition dé réductibilité est satisfaite.

Soit G un graphe planaire. V(G) ensemble de sommets et F ensemble de faces de G.
La *charge initiale* des sommets et des faces

$$w : V(G) \cup F(G) \to \mathbb{R},$$
$$w(x) = d_G(x) - 4.$$

Lemme

Soit G un graphe planaire et w la application de la charge initiale. Alors la charge initiale totale du graphe est -8 (lemme 7).

Preuve.

$$\sum_{u \in V(G)} (d_G(v) - 4) + \sum_{f \in F} (d_G(f) - 4) = 2m - 4n + 2m - 4f =$$

$$= -4(n - m + f) = -4 \cdot 2 = -8.$$

Alors les charges pour chaque sommet et face,

$$\begin{aligned} w(v) &= -2 \qquad \forall v \in V(G), \text{t.q. } d_G(v) = 2, \\ w(v) &= -1 \qquad \forall v \in V(G), \text{t.q. } d_G(v) = 3, \\ w(v) &= 0 \qquad \forall v \in V(G), \text{t.q. } d_G(v) = 4 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} w(f) &= 0 \qquad \forall f \in F(G), \text{t.q. } d_G(f) = 4, \\ w(f) &= 1 \qquad \forall f \in F(G), \text{t.q. } d_G(f) = 5, \\ w(f) &\geq 2 \qquad \forall f \in F(G), \text{t.q. } d_G(f) \geq 6. \end{aligned}$$

Il ne suffit pas de définir les règles de déchargement parmi les sommets, puisqu'il n'y a pas de sommet de charge strictement positive. Nous sommes forcés à utiliser la charge des faces de taille au moins 5 pour éliminer la charge négative des sommets de degré 2 et 3.
Les règles de déchargement :

(R) Toute face de taille au moins 5 donne une unité de charge à chaque sommet incident de degré 2 ou 3.

Soit H configuration de G et $\partial_G(H)$ t.q. $|\partial_G(H)| = r$.
Alors, une *numérotation* de H est l'identification des arêtes de H.

Soit H configuration de G et $\partial_G(H)$ t.q. $|\partial_G(H)| = r$.
Alors, une *numérotation* de H est l'identification des arêtes de H.
Soit H configuration de G numérotée.
Alors, le *voisinage* de e est

$$N(e) = \{e' : \text{ numérotation de } e' \text{ est plus grande}\}$$

Soit H configuration de G numérotée.
Alors, une *coloration des arêtes* ψ de H est obtenu partant du sommet v numéroté avec m et coloriant un par un, sans créer conflits de voisinage, à l'aide du méthode de retour sur le trace (Backtrack).

Soit H configuration de G numérotée.
Alors, une *coloration des arêtes* ψ de H est obtenu partant du sommet v numéroté avec m et coloriant un par un, sans créer conflits de voisinage, à l'aide du méthode de retour sur le trace (Backtrack).
-image-

Ces colorations correspondent aux colorations de l'ensemble Ψ_0 de coloration qui s'étendent.

Ces colorations correspondent aux colorations de l'ensemble Ψ_0 de coloration qui s'étendent.
Pour colorier les arêtes de H, nous utilisons les couleurs 1, 2, 4 et 8, sous forme binaire. Pour un nombre r d'arêtes sortantes de H il existe 4^r possibles colorations. Nous allons s'intéresser aux colorations des arêtes sortantes de H, c-à-d deux colorations différentes de H avec une même coloration des arêtes sortantes sont prises comme une même coloration.

Soit H configuration du graphe G, $\partial_G(H)$ et β coloration de $\partial_G(H)$.
Alors un *code de coloration* est un entier k qui représente β.

$$k = \sum_{i=0}^{r-1} (\beta(i)) \cdot 4^i \qquad \text{tel que } c(i) \in \{0,1,2,3\} \qquad \text{pour } i \in \{1,2,4,8\}$$

Soit H configuration de G, une coloration β de $\partial_G(H)$ et deux couleurs c et c'.
Alors X est l'ensemble de tous les couplages possibles des arêtes de $\partial_G(H)$ coloriées avec c ou c'.

Soit H configuration de G, une coloration β de $\partial_G(H)$ et deux couleurs c et c'.
Alors X est l'ensemble de tous les couplages possibles des arêtes de $\partial_G(H)$ coloriées avec c ou c'.
Soit

- H configuration de G
- Ψ_0 l'ensemble de β colorations étendues vers H
- k Codes de colorations des β.

Alors, il existe des colorations β' de $\partial_G(H)$ avec code de coloration k' *adjacentes* de β si pour une paire de couleurs c et c',

$$\begin{cases} k' = k - (2\beta'(e) + c + c') \cdot 4^e \text{ si } e \in X \text{ renverse ses couleurs} \\ k' = k - (2\beta'(e) + c + c') \cdot 4^e - (2\beta'(e') + c + c') \cdot 4^{e'} \text{ si } (e, e')\text{-chaî} \end{cases}$$

Soit H configuration de G et Ψ_0.
Alors, pour tout $i \in \mathbb{N}$ Ψ_{i+1} est l'ensemble des colorations β' de $\partial_G(H)$ adjacentes aux colorations β de Ψ_i.

Soit H configuration de G et Ψ_0.
Alors, pour tout $i \in \mathbb{N}$ Ψ_{i+1} est l'ensemble des colorations β' de $\partial_G(H)$ adjacentes aux colorations β de Ψ_i.

$$\Psi = \Psi_0 \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \Psi_i.$$

Theorem

Soit H configuration de G et H′ une configuration t.q. $\partial_G(H) = \partial_G(H')$.
Alors,

$$H' \text{ est une réduction de } H \Leftrightarrow \Psi_0\ \Psi'_0 \subseteq \Psi.$$

Les propriétés des Lemmes 8-10 se donnent aussi dans ce cas-là.

Lemme

Soit G un contre-exemple minimal et u et v deux sommets voisins tels que $d_G(u) = d_G(v) = 3$. *Alors parmi les 4 faces autour de ce paire de sommets il y a au moins deux pentagones, et tous les sommets autour des faces sauf v et u ont degré 4.*

Lemme

Pour un pair de sommets u et v de degré 3 adjacentes, la distance à un autre sommet de degré 3 est au moins 2.

Lemme

Soit G un contre-exemple et v un sommet de G tel que $d_G(v) = 2$. Alors, il existe autour de v deux pentagones ou un hexagone et tous les sommets autour des faces sont de degré 4.

Lemme

Soit G un contre-exemple minimal et $v \in V(G)$ tel que $d_G(v) = 3$.

Ces deux derniers cas n'ont pas encore été prouvés et nous n'avons pas trouvé leurs réductions non plus.

4 Carrés :

3 Carrés et 1 Pentagone :

Pair de sommets de degré 3

3-3-4-3 :

2 Carrés

1 Carré et 1 Pentagone

3 Carrés

1. Réussi
   - Développement d'un outil de vérification.
   - 3 nouvelles configurations réductibles parmi plus de 50 essais.
   - Des propriétés qui soutiennent les règles de déchargement.
2. Failli
   - Réduction pour v de degré 2 avec 1 carré et 1 pentagone.
   - Réduction pour v de degré 3 avec 3 carrés
   - Vérification de connexité et aucune présence des triangles autour des réductions

Merci pour votre attention !