

Coloration des Arêtes des Graphes Planaires

Antonio Gallastegui

Mémoire de Master 2 MIMSE

Modélisation, Ingénierie Mathématique, Statistique et Économique
spécialité Recherche Opérationnelle et Aide à la Décision

stage de recherche au LaBRI

Laboratoire Bordelais de Recherche en Informatique

responsable de stage : František Kardoš

thème : Graphes et optimisation

équipe : Combinatoire et algorithmique

Résumé

Dans la démonstration du fameux Théorème des quatre couleurs, la question principale est traduite en une recherche d'une 3-coloration des arêtes d'un graphes planaire cubique. L'existence d'une telle coloration est démontré en utilisant la méthode de déchargement ; la réductibilité de certaines configurations est démontrée à l'aide d'un ordinateur. En s'inspirant de cette technique, pour attaquer une question ouverte sur la coloration des arêtes des graphes planaires (4-arête-colorabilité des graphes planaires de degré max 4 sans triangles), nous avons conçu et implémenté un programme qui permettra de vérifier la réductibilité de configurations d'une façon automatisée.

Introduction

La théorie des graphes est un domaine des mathématiques discrètes qui remonte au XVIIIème siècle et le célèbre problème des ponts de Königsberg (Kaliningrad). Ce problème consiste à essayer de construire un promenade qui commence et finit au même point, tout en parcourant les 7 ponts qu'il y avait dans la ville à l'époque, chacun une seule fois. C'est un domaine très étendu et appliqué parmi des autres sciences.

Un des problèmes principaux au sein de la théorie des graphes est le problème de coloration des graphes. Le champ d'applications de la coloration des graphes couvre notamment le problème de l'attribution de fréquences dans les télécommunications, la conception de puces électroniques ou l'allocation de registres en compilation.

Le problème étudié est un problème de coloration des graphes. Plus particulièrement, il s'agit d'une conjecture disant qu'il est toujours possible de colorier avec quatre couleurs les arêtes des graphes d'une certaine classe. Pour aborder ce problème on a pensé à utiliser les méthodes utilisées pour résoudre un autre problème de coloration des graphes très connu, le Théorème de quatre couleurs.

Le mémoire est structuré de la façon suivante : Dans le chapitre 1, nous présentons les définitions, les théorèmes et les exemples pour bien se placer dans le domaine. Nous illustrons sur deux exemples d'une complexité non-triviale les deux méthodes principales utilisées aussi dans la preuve du Théorème de quatre couleurs : la réductibilité de configurations et la méthode de déchargement. Le concept de réductibilité est décrit plus détaillé, par ce que c'est pour avancer dans cette démarche qu'on a développé un programme.

Le chapitre 2 contient les preuves des propositions voisines de la conjecture traité dans cet écrit. Nous avons prouvé la proposition 5-4-5 et 4-5-4, afin de introduire l'idée générale des méthodes que nous allons utiliser après.

Le chapitre 3 est dédié aux aspects théoriques de la réductibilité, la partie fondamental de ce travail sur laquelle nous avons travaillé la plupart de temps. Ensuite dans le chapitre 4 nous décrivons les aspects pratiques et surtout, comment nous avons développé le programme qui vérifie la réductibilité.

Suivant la méthode utilisé dans le Théorème de quatre couleurs et dans les propositions que nous avons montré dans un chapitre précédent nous avons défini des règles de déchargement pour prouver la conjecture. Et finalement, nous nous sommes appuyés sur ces règles pour définir des objectives, c-à-d des configurations dont nous allons chercher une réduction, donc dans le chapitre 6 nous montrons les résultats obtenus.

1 Présentation de Sujet

Dans cette partie nous faisons, d'abord, un petit rappel des fondamentaux de la théorie des graphes ainsi que des explications plus profondes des méthodes et techniques nécessaires pour bien comprendre le sujet du problème traité. Ensuite, la question principale étudiée est introduite avec son contexte. Nous allons, quand même, commenter la démonstration du Théorème de quatre couleurs, l'expliquer et évoquer des ressemblances avec notre problème.

1.1 Notions générales de la théorie des graphes

Dans cette partie nous rappelons quelques notions de la théorie de graphes, des définitions de base et des concepts qui seront nécessaires pour la suite.

Définition 1 Un graphe G est un couple $G = (V, E)$ d'ensembles finis, où

- $V = V(G)$ est l'ensemble de sommets (Vertices) de G , et
- $E = E(G)$ est un ensemble de paires de sommets, appelées des arêtes (Edges) de G .

Si $e = uv \in E(G)$, on dit que u et v sont adjacent (ou voisins), d'ailleurs, l'arête e est incidente aux sommets u et v .

Deux arêtes $e, e' \in E(G)$ sont adjacentes si $e = uv$ et $e' = uv'$ pour $u, v, v' \in V(G)$, $v \neq v'$.

Définition 2 Le degré $d_G(v)$ d'un sommet v d'un graphe G est le nombre de voisins de v . Le degré maximum d'un graphe G (le maximum des degrés de ses sommets) est noté $\Delta(G)$ et le degré min $\delta(G)$.

Définition 3 Soit $G = (V(G), E(G))$ un graphe simple. Alors un couplage M est un ensemble d'arêtes deux à deux non adjacentes. C-à-d que M est une partie de l'ensemble E des arêtes telle que pour tout $(e, e') \in M^2$, $e \neq e' \Rightarrow e \cap e' = \emptyset$.

Un couplage maximum est un couplage contenant le plus grande nombre possible d'arêtes.

Un couplage maximal est un couplage du graphe tel que toute arête du graphe possède au moins un de ses sommets incidentes qui est au même temps incidente à une arête du couplage. c-à-d M est un couplage auquel ajoutant n'importe quelle arête $e \in E(G)$, $M \cup \{e\}$ n'est plus un couplage.

Un couplage parfait est un couplage du graphe tel que tout sommet du graphe est incident à une seule arête du couplage.



FIGURE 1 – Un exemple d'un couplage maximal (gauche) et un couplage maximum que dans ce cas là c'est aussi un couplage parfait (droite)

Définition 4 Soit G un graphe non orienté. Un cycle est une suite ou une chaîne des arêtes du graphe dont le premier sommet incident à la première arête et le dernier sommet incident à la dernière arête sont le même.

Définition 5 Soit $G = (V, E)$ un graphe. G est un graphe planaire si et seulement s'il peut être dessiné sur le plan sans croisement des arêtes.

Étant donné un plongement d'un graphe planaire dans le plan, une face est une région connexe délimitée par des arêtes. Il y a toujours une face infinie, appelée ainsi la face extérieure de G .

On note $F(G)$ l'ensemble des faces de G . La taille d'une face f , $d_G(f)$, est la longueur de la chaîne fermée (pas nécessairement élémentaire) parcourant la frontière de la face f .

Théorème 1 (Euler, 1750) Soit G un graphe planaire connexe qui a n sommets, m arêtes et f faces. Alors

$$n - m + f = 2.$$



FIGURE 2 – Un exemple d'un graphe de degré minimum 2 et degré maximum 4 (gauche). Le même graphe plongé dans le plan sans croisements d'arêtes (droite). Il a quatre faces triangulaires et une face extérieure de taille 8.

Par exemple, le graphe de Figure 3 il a $n = 7$ sommets, $m = 10$ arêtes et $f = 5$ faces. En effet, $7 - 10 + 5 = 2$.

Il est facile de déduire de la formule d'Euler l'énoncé suivant.

Proposition 1 *Tout graphe planaire contient un sommet de degré au plus 5.*

Si un graphe planaire a une face de taille supérieur à 3, on peut insérer une arête (une diagonale de la face) afin de la diviser en deux faces de moindre taille. Un graphe planaire obtenu en appliquant cette opération tant que possible n'a que des faces triangulaires, il est appelé ainsi une *triangulation*. Étant donné un graphe planaire G , quelque soit la façon d'ajouter des arêtes, toute triangulation obtenu à partir de G a le même nombre d'arêtes :

Proposition 2 *Un graphe G planaire, à $n \geq 3$ sommets, a au plus $3n - 6$ arêtes.*

Définition 6 La maille (girth) $g(G)$ d'un graphe G est la longueur du plus petit cycle dans G , s'il en existe un. Sinon, $g(G)$ est infinie.

1.2 Coloration de Graphes

La coloration de graphes est un domaine central dans la théorie de graphes. Nous présentons ainsi les définitions et quelques propriétés des colorations des graphes.

Définition 7 Une coloration propre d'un graphe G est une application $\varphi : V(G) \rightarrow C$, où $C = \{1, 2, 3, \dots, k\}$ est un ensemble d'entiers (de couleurs), telle que pour tout arête $uv \in E(G)$, on a $\varphi(u) \neq \varphi(v)$.

Un graphe G est dit k -coloriable si on peut le colorier à k couleurs, c-à-d si l'ensemble C de couleurs est de taille k .

Le nombre chromatique $\chi(G)$ d'un graphe G , est le plus petit entier k tel que G est k -coloriable. Si $\chi(G) = k$, alors on dit que le graphe G est k -chromatique. Cela signifie donc que G est k -coloriable mais pas $(k - 1)$ -coloriable.

Le problème de k -coloration (le problème de décider si un graphe donné est k -coloriable) est NP-complet pour tout $k \geq 3$ [1]. Pour $k = 1$, un graphe G est 1-coloriable si et seulement si G ne contient pas d'arêtes. Puis, pour $k = 2$, on revient sur la question de tester si un graphe G est biparti (ce qui est le cas si et seulement si il ne contient aucun cycle impair).

Dans le domaine de la coloration de graphes il existe plusieurs types de colorations et même si la coloration propre est la plus connue ou la plus utilisée, dans notre problème on va s'intéresser à la coloration d'arêtes également.

Définition 8 Une coloration d'arêtes d'un graphe G est une application $\varphi : E(G) \rightarrow C$, où $C = \{1, 2, 3, \dots, k\}$ est un ensemble d'entiers (de couleurs), telle que pour tout paire $e, e' \in E(G)$ d'arêtes adjacentes on a $\varphi(e) \neq \varphi(e')$.

L'indice chromatique $\chi'(G)$ d'un graphe G est le nombre de couleurs minimum qu'on nécessite pour colorier les arêtes de G .

Théorème 2 (Vizing) Soit G un graphe planaire. Alors, $\chi'(G) = \Delta(G)$ ou $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$.



FIGURE 3 – Un exemple d’une coloration propre d’un graphe G avec $\chi(G) = 3$ (gauche) et un exemple d’une coloration d’arêtes d’un graphe G avec $\chi'(G) = 3$.

La question de déterminer/caractériser les classes de graphes pour lesquelles on a $\chi'(G) = \Delta(G)$ (on les appelle aussi les graphes de classe 1) reste une question centrale.

Il existe des résultats concernant la classification des graphes de classe 1 pour les graphes planaires. C’est Vizing [2] qui a montré que les graphes planaires avec $\Delta(G) \geq 8$ sont des graphes de classe 1. Le cas de $\Delta = 7$ a été prouvé en 2001 par Sanders et Zhao [4]. En revanche, pour $\Delta \leq 5$ il existe des graphes planaires avec $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$ – il suffit de subdiviser par un sommet de degré 2 une arête d’un graphe Δ -régulier et Δ -arête-coloriable [3]. Le cas $\Delta = 6$ reste largement ouvert.

Cependant, les graphes planaires avec $\Delta(G) = 5$ sans triangles (c-à-d avec $g(G) \geq 4$) sont 5-arête-coloriables, donc classe 1 ; pareil, les graphes planaires avec $\Delta(G) = 4$ et $g(G) \geq 5$ sont 4-coloriables. Ces deux derniers cas, on les reprouvera ci-dessus. Il reste encore une classe de graphe planaire, plus riche que cette dernière, pour laquelle la question est toujours ouverte :

Conjecture 1 *Soit G un graphe planaire avec $\Delta(G) = 4$ et $g(G) \geq 4$. Alors, $\chi'(G) = 4$.*

Cette conjecture est le problème principal à traiter dans cet écrit.

2 Résultats Connus

Nous allons refaire la démonstration de deux propositions voisines de la conjecture étudiée, afin de pouvoir illustrer sur ces deux exemples-ci non-triviaux les méthodes utilisées pour démontrer ce type d’énoncé. Nous introduisons d’abord quelques notions et notation techniques.

Soit G un graphe avec les arêtes coloriées. Considérons le sous-graphe $G[c_1, c_2]$ de G induit par les arêtes coloriées c_1 et c_2 . Par la définition d’une coloration, aucun sommet de $G[c_1, c_2]$ ne peut avoir un degré supérieur à 2. Par conséquent, toute composante connexe de $G[c_1, c_2]$ est une chaîne ou un cycle. Si on choisit une composante connexe C de $G[c_1, c_2]$, qu’on échange les couleurs c_1 et c_2 le long de C et qu’on garde la couleur de toutes les autres arêtes, on obtiendra une autre coloration de G .

Étant donné une arête e de G de couleur c et une autre couleur c' , il existe une et une seule composante connexe de $G[c, c']$ contenant e . Nous allons appeler celle-là la (c, c') -chaîne de Kempe de e .

Proposition 3 *Soit G un graphe planaire avec $\Delta(G) = 5$ et $g(G) \geq 4$. Alors $\chi'(G) = 5$.*

Preuve. Supposons que la proposition est fausse. Soit G un contre-exemple minimal, c-à-d un graphe planaire avec $\Delta = 5$ et $g \geq 4$ qui n’est pas 5-arête-coloriable, mais tout sous-graphe de G l’est.

D’abord, nous montrons quelques propriétés structurelles de G .

Lemme 1 *Il n’existe pas de sommet v de G tel que $d_G(v) = 1$.*

Preuve. Soit $v \in V(G)$ tel que $d_G(v) = 1$. Alors, il existe une 5-arête-coloration de $G' = G \setminus v$. Soit u le voisin de v . Par définition, $d_G(u) \leq 5$ donc $d_{G'}(u) \leq 4$. Par conséquence, il existe au moins une couleur c avec laquelle aucune arête incidente à u dans G' n’est coloriée, donc on peut colorier l’arête uv avec c . On tombe donc sur une contradiction avec la supposition que G n’est pas 5-arête-coloriable. \square

Lemme 2 *Soit $v \in V(G)$ tel que $d_G(v) = 2$. Alors $\forall u \in N(v)$, $d_G(u) = 5$.*

Preuve. Supposons qu’un sommet $v \in V(G)$ tel que $d_G(v) = 2$ ait un voisin $u \in N(v)$ avec $d_G(u) \leq 4$. Considérons une 5-arête-coloration de $G' = G \setminus uv$. L’arête uv est adjacente à quatre arêtes de G' , alors, il existe au moins une couleur c pour colorier l’arête uv , donc G aussi est 5-arête-coloriable, une contradiction. \square

Lemme 3 Soit $v \in V(G)$ tel que $d_G(v) = 3$. Alors, $\forall u \in N(v)$, $4 \leq d_G(u) \leq 5$.

Preuve. De la même manière que la démonstration du lemme précédent, si v avait un voisin u de degré (au plus) 3, l'arête uv serait adjacente à (au plus) quatre autres arêtes, alors, n'importe quelle coloration de $G \setminus uv$ donnerait une coloration de G , une contradiction.

Nous savons ainsi que les voisins d'un sommet de degré 3 dans G sont de degré 4 ou 5. On peut en dire encore plus.

Lemme 4 Soit $v \in V(G)$ tel que $d_G(v) = 3$. Alors, au moins deux voisins de v sont de degré 5.

Preuve. Supposons, par l'absurde, que $N(v) = \{u_1, u_2, u_3\}$, où $4 \leq d_G(u_1) \leq 5$ et $d_G(u_2) = d_G(u_3) = 4$.

Soit $e_i = vu_i$, $i = 1, 2, 3$; soit $\{e_i, e_{i1}, e_{i2}, e_{i3}\}$ l'ensemble des arêtes incidentes à u_i , $i = 2, 3$. Considérons une coloration φ du sous-graphe $G' = G \setminus e_3$. Afin que celle-ci ne s'étende pas en une coloration de G , on peut supposer, sans perdre de la généralité, que $\varphi(e_1) = 1$, $\varphi(e_2) = 2$, $\varphi(e_{31}) = 3$, $\varphi(e_{32}) = 4$ et $\varphi(e_{33}) = 5$.

Si les $(2, 3)$ -chaînes de Kempe des arêtes e_2 et e_{31} sont distinctes, alors en alternant les couleurs d'une parmi elles on obtiendrait une coloration de G' dans laquelle les arêtes adjacentes à e_3 ne seraient pas coloriées de cinq couleurs différentes, ce qui est absurde. Donc, il existe une $(2, 3)$ -chaîne de Kempe reliant e_2 et e_{31} ; il y a ainsi une arête incident à u_2 coloriée 3, disons que $\varphi(e_{21}) = 3$. Voir Figure 4 pour illustration.

Similairement, il existe une $(2, 4)$ -chaîne (une $(2, 5)$ -chaîne) reliant e_2 et e_{32} (e_2 et e_{33} , respectivement). Par ailleurs, il n'y a pas d'arête coloriée 1 incidente à u_2 .

Considérons maintenant les $(1, 3)$ -chaînes de Kempe. Par le même argument, la chaîne qui commence par e_1 se termine forcément par e_{31} . Donc, on est libre à alterner la chaîne de Kempe de e_{21} , recolorier $\varphi(e_2) = 3$ et poser $\varphi(e_3) = 2$, créant ainsi une coloration de G , une contradiction. \square

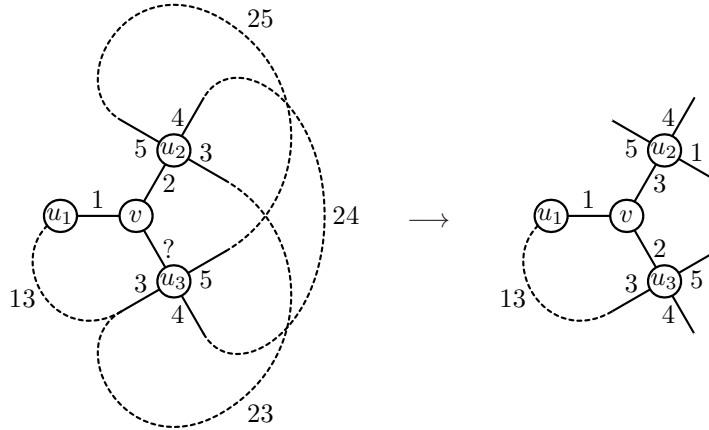


FIGURE 4 – Un sommet de degré trois avec deux voisins de degré quatre constitue une configuration réductible.

Lemme 5 Soit $uv \in E(G)$ tel que $d_G(u) = 2$ et $d_G(v) = 5$. Alors, tous les voisins de v sauf u sont de degré 5.

Preuve. Supposons le contraire, c-à-d, que v ait un voisin w de degré au plus 4.

Soit $e = uv$, soit e' l'autre arête incidente à u . Considérons une 5-arête-coloration φ de $G' = G \setminus e$. On peut supposer que $\varphi(e') = 1$ et que les quatre arêtes incidentes à v dans G' sont coloriées avec les couleurs 2, 3, 4, 5, dont $\varphi(vw) = 2$ (Sinon, on trouverait une coloration de G facilement).

Pour $i = 2, 3, 4, 5$, la $(1, i)$ -chaîne de Kempe de e' doit se terminer par une arête incidente à v , sinon, on aurait pu alterner la coloration de cette chaîne de sorte que l'arête e puisse être coloriée avec la couleur 1.

Par conséquent, il existe une arête incidente à w coloriée 1, disons f . D'ailleurs, il existe une couleur, disons 3, avec laquelle aucune arête incidente à w n'est coloriée (rappelons que $d_{G'}(w) = d_G(w) = 4$). Donc, la $(1, 3)$ -chaîne de Kempe de f est bien distincte de la $(1, 3)$ -chaîne de Kempe de e' .

Après avoir alterné les couleurs la $(1, 3)$ -chaîne de Kempe de f , en recoloriant $\varphi(vw) = 1$ et en posant $\varphi(e) = 2$ on obtient une coloration de G , une contradiction. \square

Lemme 6 Soit $v \in V(G)$ tel que $d_G(v) = 5$. Alors, v a au plus deux voisins de degré 3.

Preuve. Supposons que cette condition n'est pas vrai, i.e., que v ait trois voisins de degré 3, disons u_1, u_2 et u_3 . Soit u_4 et u_5 les autres voisins de v . Soit $e_i = u_i v$ pour tout $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Soit $\{e_i, e_{i1}, e_{i2}\}$ l'ensemble des arêtes incidentes à u_i pour $i \in \{1, 2, 3\}$. Considérons une 5-arête-coloration φ de $G' = G \setminus e_1$. On peut supposer que $\varphi(e_2) = 2, \varphi(e_3) = 3, \varphi(e_4) = 4$ et $\varphi(e_5) = 5$, et que $\varphi(e_{11}) = 1$.

On peut même supposer que $\varphi(e_{12}) \in \{3, 5\}$. Donc, pour $i \in \{2, 4\}$, la $(1, i)$ -chaîne de Kempe relie e_{11} à e_i , ce qui provoque que u_2 est incident à une arête coloriée 1, disons e_{21} .

Si $\varphi(e_{22}) \neq 4$, alors la $(1, 4)$ -chaîne de Kempe de e_{21} est bien différente de celle reliant e_{11} et e_4 . En alternant les couleurs de la $(1, 4)$ -chaîne de Kempe de e_{21} , on trouverait une coloration φ' avec $\varphi'(e_{21}) = 4$, ce qui permettrait de recolorier $\varphi'(e_2) = 1$ laissant disponible la couleur 2 pour l'arête e_1 . On obtiendrait donc une coloration de G , ce qui est absurde.

Par conséquence, $\varphi(e_{22}) = 4$. Colorions $\varphi(e_1) = 2$, recolorions $\varphi(e_2) = 3$ et enlevons la couleurs de e_3 . On peut supposer que $\varphi_{31} = 1$, sinon, la couleur 1 serait libre pour l'arête e_3 .

En considérant les $(1, 2)$ -chaînes de Kempe, on peut déduire que $\varphi(e_{32}) = 2$. Or, dans ce cas-là, la $(1, 4)$ -chaîne de Kempe de e_{31} est bien différente de celle reliant e_{11} et e_4 , que cette dernière passe par u_2 ou pas. On peut donc transformer φ en une autre coloration avec $\varphi(e_{31}) = 4$ et colorier e_3 de la couleur 1, ce qui est absurde. \square

Ensuite, on va montrer que les propriétés structurelles de G montrées ci-dessus entraînent une contradiction à l'aide de la technique de déchargement. Cette technique a été utilisée aussi pour prouver le théorème de quatre couleurs.

Soit $w : V(G) \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\begin{aligned} w(v) &= d_G(v) - 4 && \text{pour tout } v \in V(G), \\ w(f) &= d_G(f) - 4 && \text{pour tout } f \in F(G), \end{aligned}$$

appelée aussi la *charge initiale* des sommets et des faces de G . Nous montrons d'abord que la somme totale de la charge dans G est strictement négative, puis nous définissons des règles de redistribution de charge telles que la somme totale de la charge reste invariante, finalement, nous observons qu'après la redistribution il ne reste plus de charge strictement négative, ce qui est absurde.

Lemme 7 *Soit G un graphe planaire connexe. Alors,*

$$\sum_{v \in V(G)} (d_G(v) - 4) + \sum_{f \in F} (d_G(f) - 4) = -8.$$

Preuve. D'après la formule d'Euler et la formule de poignées de mains, on a

$$n - m + f = 2, \quad \sum_{v \in V(G)} d_G(v) = 2m, \quad \sum_{f \in F} d_G(f) = 2m.$$

Alors,

$$\sum_{v \in V(G)} (d_G(v) - 4) + \sum_{f \in F} (d_G(f) - 4) = 2m - 4n + 2m - 4f = -4(n - m + f) = -4 \cdot 2 = -8.$$

\square

Selon la définition de la charge initiale, on sait que

$$\begin{aligned} w(v) &= -2 && \text{pour tout } v \in V(G), \text{ tel que } d_G(v) = 2, \\ w(v) &= -1 && \text{pour tout } v \in V(G), \text{ tel que } d_G(v) = 3, \\ w(v) &= 0 && \text{pour tout } v \in V(G), \text{ tel que } d_G(v) = 4, \\ w(v) &= 1 && \text{pour tout } v \in V(G), \text{ tel que } d_G(v) = 5. \end{aligned}$$

Par ailleurs, la charge initiale de toutes les faces est positive puisque $g(G) \geq 4$.

Nous redistribuons la charge selon les règles suivantes :

(R1) Tout sommet de degré 5 donne une unité de charge à chacun de ses voisins de degré 2.

(R2) Tout sommet de degré 5 donne $1/2$ de charge à chaque voisin de degré 3.

Évidemment, la somme totale de charge reste invariante et la charge de toutes les faces reste positive.

Vérifions que pour toute sommet de G la charge finale est positive également, ce qui nous donnera la contradiction. Selon Lemme 1 il n'y a pas de sommet de degré 1. Les sommets de degré 4 ni donnent ni reçoivent rien, leur charge reste nulle.

Soit v un sommet de degré 2. Selon Lemme 2, il a deux voisins de degré 5. D'après (R1), sa charge finale est de $-2 + 2 \cdot 1 = 0$.

Soit v un sommet de degré 3. Selon Lemme 4, il a au moins deux voisins de degré 5. D'après (R2), sa charge finale est au moins $-1 + 2 \cdot 1/2 = 0$.

Soit v un sommet de degré 5. Si v a un voisin de degré 2, selon Lemme 5 il n'a pas d'autre voisins de degré 2 ou 3, donc, il ne donne que de la charge de son (unique) voisin de degré 2. Sa charge finale est donc de $1 - 1 = 0$. Supposons alors que v n'ait pas de voisin de degré 2. Si v a des voisins de degré 3, il en a au plus deux, grâce à Lemme 6. Sa charge finale est alors d'au moins $1 - 2 \cdot 1/2 = 0$.

Alors, après la redistribution de charge on obtient un graphe chargé non-négativement, ce qui est absurde. On confirme alors l'hypothèse de base, celle qui dit que le graphe est 5-arête-coloriable. \square

Proposition 4 *Soit G un graphe planaire avec $\Delta(G) = 4$ et $g(G) \geq 5$. Alors G est 4-arête-coloriable.*

Preuve. Supposons que la proposition est fausse. Soit G un contre-exemple minimal. Dans ce cas aussi nous allons d'abord montrer des propriétés structurelles de G . Les deux premières sont exactement les mêmes que pour la proposition précédente, nous omettons la preuve.

Lemme 8 *Il n'existe pas de sommet v de G tel que $d_G(v) = 1$.*

Lemme 9 *Soit $v \in V(G)$ tel que $d_G(v) = 2$. Alors $\forall u \in N(v)$, $d_G(u) = 4$.*

Lemme 10 *Soit $uv \in E(G)$ tel que $d_G(u) = 2$ et $d_G(v) = 4$. Alors, tous les voisins de v sauf u sont de degré 4.*

Preuve. Nous suivons les idées de la preuve de Lemme 5. Supposons par l'absurde que v ait un voisin w tel que $d_G(w) = 3$. Soit $e = uv$ et e' l'autre arête incidente de u . Considérons une 4-arête-coloration φ de $G' = G \setminus e$. On peut supposer que $\varphi(e') = 1$ et que les trois arêtes incidentes de v dans G' sont coloriées avec les couleurs 2, 3 et 4, dont $\varphi(vw) = 2$.

Il existe forcément une $(1, i)$ -chaîne de Kempe reliant e' à une arête incidente à v dans G' pour tout $i \in \{2, 3, 4\}$. Par conséquence, il existe une arête incidente à w coloriée avec la couleur 1, disons e'' . D'ailleurs, il existe une couleur $c \in \{3, 4\}$ que w ne voit pas. On peut donc renverser la couleur 1 et c obtenant $\varphi(e'') = c$ ce qui permet de colorier $\varphi(vw) = 1$ et $\varphi(e) = 2$. On trouve alors une 4-arête-coloration de G ce qui est absurde. \square

Lemme 11 *Soit $v \in V(G)$ tel que $d_G(v) = 3$. Alors, v a au moins deux voisins de degré 4.*

Preuve. Supposons qu'il existe $u_1, u_2 \in N(v)$ tel que $d(u_1) = d(u_2) = 3$. Soient $e_1 = u_1v$, $e_2 = u_2v$ et e_3 les arêtes incidentes à v . Notons e_{ij} les arêtes incidentes à u_i différentes de e_i , pour $i \in \{1, 2\}$, $j \in \{1, 2\}$. Considérons une 4-arête-coloration de $G' = G \setminus e_1$ qui ne soit pas une coloration de G . Alors, on peut supposer que $\varphi(e_2) = 1$, $\varphi(e_3) = 2$, $\varphi(e_{11}) = 3$ et $\varphi(e_{12}) = 4$. De plus, il existe forcément des (i, j) -chaînes de Kempe pour $i \in \{1, 2\}$ et $j \in \{3, 4\}$ (sinon il serait facile de trouver une 4-arête-coloration de G) reliant les arêtes incidentes à v avec les arêtes incidentes à u_1 dans G' . On peut donc supposer que $\varphi(e_{21}) = 3$ et $\varphi(e_{22}) = 4$.

Observons maintenant que la $(2, 4)$ -chaîne de Kempe reliant e_{12} et e_2 est bien différente de la $(2, 4)$ -chaîne de Kempe de e_{22} . Alors on trouve, en renversant les couleurs de cette dernière chaîne, une coloration de G' telle que $\varphi(e_{22}) = 2$, ce qui permet de poser $\varphi(e_2) = 4$ tout en laissant la possibilité de colorier e_1 avec la couleur 2. On obtient donc une 4-arête-coloration de G ce qui provoque une contradiction. \square

Les propriétés que nous venons de vérifier vont entraîner une contradiction grâce à la procédure de déchargement. Similairement que dans la proposition précédente, on définit d'abord la charge initiale par la fonction

suivante :

$$\begin{aligned} w(v) &= \frac{3}{2}d_G(v) - 5 && \text{pour tout } v \in V(G), \\ w(f) &= d_G(f) - 5 && \text{pour tout } f \in F(G). \end{aligned}$$

Puis, nous montrons que la somme de la charge totale est strictement négative, et que après la redistribution de la charge par des règles de déchargement, la charge de tous les éléments du graphe deviendra positive, ce qui provoquera une contradiction.

Lemme 12 *Soit G un graphe planaire connexe. Alors,*

$$\sum_{v \in V(G)} \left(\frac{3}{2}d_G(v) - 5 \right) + \sum_{f \in F(G)} (d_G(f) - 5) = -10.$$

Preuve. Tout comme pour Lemme 7, on déduit de la formule d'Euler que

$$\sum_{v \in V(G)} \left(\frac{3}{2}d_G(v) - 5 \right) + \sum_{f \in F(G)} (d_G(f) - 5) = 3m - 5n + 2m - 5f = -5(n - m + f) = -5 \cdot 2 = -10.$$

□

Connaissant la charge des sommets, on sait que,

$$\begin{aligned} w(v) &= -2 && \text{pour tout } v \in V(G), \text{ tel que } d_G(v) = 2, \\ w(v) &= -\frac{1}{2} && \text{pour tout } v \in V(G), \text{ tel que } d_G(v) = 3, \\ w(v) &= 1 && \text{pour tout } v \in V(G), \text{ tel que } d_G(v) = 4. \end{aligned}$$

D'ailleurs, la charge initiale de toutes les faces est positive puisque $g(G) \geq 5$.

Alors, les règles qui vont distribuer la charge des sommets sont les suivantes :

- (R1) tout sommet de degré 4 donne 1 de charge à chacun de ses voisins de degré 2.
- (R2) tout sommet de degré 4 donne $1/4$ de charge à chaque voisin de degré 3.

Dans ce cas là aussi, la somme totale de la charge reste invariante et la charge de toutes les faces reste positive.

Nous allons vérifier, comme dans la proposition précédente, que pour tout sommet de G la charge finale est positive, ce qui donnera la contradiction. Nous avons déjà montré l'inexistence des sommets de degré 1 dans ces configurations grâce au Lemme 8. Puis, selon Lemme 9, tout sommet de degré 2 n'a que des voisins de degré 4, donc par (R1) la charge finale d'un sommet de degré 2 devient nulle.

Ensuite, soit v un sommet de degré 3. Selon Lemme 11, le sommet v a au moins deux voisins de degré 4. Par (R2) on sait que v reçoit $1/4$ d'unité de charge négative de chacun de ses deux voisins de degré 4. Sa charge est donc d'au moins $-1/2 + 2 \cdot 1/4 = 0$.

Finalement, soit v un sommet de degré 4. Si v a un voisin de degré 2, selon le Lemme 10 tous ses autres voisins sont de degré 4, alors, sa charge est de $1 - 1 = 0$. Si v a des voisins de degré 3, on sait qu'il ne peut avoir que 4 voisins de degré 3, donc il peut donner au maximum $4 \cdot 1/4 = 1$ de charge à ces voisins. Alors la charge finale de v est au moins $1 - 4 \cdot 1/4 = 0$.

Dans tous les cas, après la redistribution de charge on obtient un graphe chargé non-négativement, ce qui est absurde. On confirme alors l'hypothèse de base, celle qui dit que le graphe est 4-arête-coloriable. □

2.1 Théorème de 4 Couleurs

Le Théorème de 4 couleurs est un des théorèmes le plus connu dans le domaine de la coloration des graphes et même de la théorie des graphes. Le théorème dit que n'importe quel graphe planaire est coloriable avec 4 couleurs. C'est une conjecture proposée par Gurthrie en 1852 et qui a été prouvé par Appel et Haken [5] en 1976. Malheureusement, la preuve de Appel et Haken n'a pas été complètement acceptée car il y avait une partie faite sur machine difficile à vérifier et une autre partie dont l'explication n'était pas tout à fait précise.

C'est pour ce fait-ci qu'il y a eu plusieurs personnes qui ont tenté de démontrer ce théorème, et c'est Robertson, Sanders, Seymour et Thomas [6] qui l'ont ré-prouvé en 1995. En fait, dans cette nouvelle preuve ils se sont inspirés largement de la preuve de Appel et Haken, cependant, ils ont simplifié d'une manière significative la procédure de déchargement, et leur programme de vérification de réductibilité automatisée est plus robuste et indépendant du déchargement.

Théorème 3 (Théorème de 4 couleurs, Appel & Haken) *Soit G un graphe planaire. Alors G est 4-coloriable.*

Si un graphe G est k -coloriable, alors tout sous-graphe H de G l'est également. C'est pour cela qu'il a suffi de démontrer Théorème 3 pour les graphes planaires maximales – les triangulations.

La preuve de Théorème 3 suit les idées suivantes : Selon la formule d'Euler, le degré moyen d'une triangulation est inférieur à 6, donc, il y a des sommets de degré au plus 5 dans le graphe. Supposons le théorème faux. Il existe alors des contre-exemples, considérons en le plus petit.

Il est montré qu'il existe un ensemble \mathcal{S} de 633 configurations contenant des sommets de degré 5 (et éventuellement d'autres degrés) tel que toute triangulation comporte un sous-graphe isomorphe à une des configurations de \mathcal{S} . Pour le mettre en évidence, une procédure de déchargement est introduite : Tout sommet d'une triangulation est assigné une charge initiale de façon que la charge totale du graphe est négative. La charge est redistribuée parmi les sommets voisins suivant des règles soigneusement définies afin que les charges positives et négatives s'éliminent entre elles. Il est démontré (à l'aide d'un ordinateur) que tout sommet avec une charge finale négative fait partie d'une des configurations de \mathcal{S} .

Pour compléter la preuve, il faut encore vérifier que toute configuration C de \mathcal{S} est *réductible*, c-à-d, si un graphe G comporte C comme sous-graphe, alors toute coloration du graphe G' obtenu en remplaçant C par un autre sous-graphe plus petit s'étend en une coloration de G , ce qui entraînerait une contradiction avec la supposition que G soit le contre-exemple le plus petit. La réductibilité des 633 configurations de \mathcal{S} est vérifiée à l'aide d'un ordinateur également.

3 Réductibilité

Les démonstrations de Lemmes 1-6 et 8-11 ont toutes la même structure : La supposition que le contre-exemple minimal G contienne un arrangement de sommets de certains degrés entraîne une contradiction avec non-colorabilité de G .

Nous allons généraliser cette notion.

Définition 9 *Soit H un graphe étiqueté, c-à-d un graphe $H = (V(H), E(H))$ avec une fonction $\gamma : V(H) \rightarrow \mathbb{N}$ telle que $\forall v \in V(H)$ on a $\gamma(v) \geq d_H(v)$. Le graphe H est une configuration dans G s'il existe un sous-graphe X de G et un isomorphisme $\xi : H \rightarrow X$ tel que $\forall v \in V(H)$, $\gamma(v) = d_G(\xi(v))$.*

Dans la suite, lorsque nous parlons d'une configuration H dans un graphe G , nous identifions H et sa copie $X = \xi(H)$ dans G .

Définition 10 *Soit H une configuration de G . Notons*

$$\partial_G(H) = \{e = uv \in E(G) : u \in V(H) \text{ et } v \in V(G \setminus H)\},$$

l'ensemble des arêtes sortantes de H , et $r = |\partial_G(H)|$ leur nombre. Notons $H^ = H \cup \partial_G(H)$ et $G' = G \setminus H \cup \partial_G(H)$.*

Si $\varphi : E(G) \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$ est une 4-arête-coloration de G , alors φ induit une coloration de $\partial_G(H)$, de H^* , et de G' . Pour capturer la structure de la coloration φ dans G' , nous introduisons les notions et notations suivantes :

Définition 11 *Soit G un graphe avec $\Delta(G) = 4$ et H une configuration de G . Soit $\varphi : E(G') \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$ une 4-arête-coloration de G' . Soient $c, c' \in \{1, 2, 3, 4\}$, $c \neq c'$ deux couleurs quelconques. Une coloration $\varphi' : E(G) \setminus E(H) \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$ est adjacente à φ , si φ' peut être obtenu à partir de φ en alternant les couleurs d'une (c, c') -chaîne de Kempe de e pour un choix d'une arête $e \in \partial_G(H)$ et des couleurs $c, c' \in \{1, 2, 3, 4\}$. Notons $N(\varphi)$ l'ensemble des colorations adjacentes à φ .*

Définition 12 Soit G un graphe avec $\Delta(G) = 4$ et H une configuration de G . Soit $\varphi : E(G') \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$ une 4-arête-coloration de G' . Soient $c, c' \in \{1, 2, 3, 4\}$, $c \neq c'$ deux couleurs quelconques. Le graphe résiduel $\mathcal{X}_{c,c'}^\varphi$ est défini par

- $V(\mathcal{X}_{c,c'}^\varphi) = \partial_G(H)$,
- $E(\mathcal{X}_{c,c'}^\varphi) = \{e_i e_j \text{ tels que } (c, c')\text{-chaîne de Kempe de } e_i \text{ est la même que la } (c, c')\text{-chaîne de Kempe de } e_j\}$.

Il est clair que $d_{\mathcal{X}_{c,c'}^\varphi}(e) \in \{0, 1\}$ pour toute $e \in \partial_G(H)$. Le graphe résiduel est donc un couplage sur $\partial_G(H)$. Plus précisément, si un plongement de G dans le plan est fixé et que les sommets du graphe résiduel sont placés de manière de respecter l'ordre circulaire des arêtes de $\partial_H(G)$, alors les arêtes de $\mathcal{X}_{c,c'}^\varphi$ ne se croisent pas, puisque les chaînes de Kempe ne se croisent pas non plus dans G' . Le graphe résiduel est donc un couplage planaire de $\partial_G(H)$.

Proposition 5 Soit G un graphe avec $\Delta(G) = 4$ et H une configuration de G . Soit $\varphi : E(G') \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$ une 4-arête-coloration de G' . Soit $\varphi' \in N(\varphi)$ une coloration adjacente à φ obtenu en alternant les couleurs de la (c, c') -chaîne de Kempe de $e \in \partial_G(H)$ pour $c, c' \in \{1, 2, 3, 4\}$. Soient $\beta = \varphi|_{\partial_G(H)}$ et $\beta' = \varphi'|_{\partial_G(H)}$ les colorations de $\partial_G(H)$ induites par φ et φ' . Alors,

$$|\{e \in \partial_H(G) : \beta(e) \neq \beta'(e)\}| \in \{1, 2\},$$

de plus, on a

$$\begin{aligned} |\{e \in \partial_H(G) : \beta(e) \neq \beta'(e)\}| &= 1 \text{ si et seulement si } d_{\mathcal{X}_{c,c'}^\varphi}(e) = 0, \text{ et} \\ |\{e \in \partial_H(G) : \beta(e) \neq \beta'(e)\}| &= 2 \text{ si et seulement si } d_{\mathcal{X}_{c,c'}^\varphi}(e) = 1. \end{aligned}$$

Preuve. Il est facile à observer que la modification de couleurs de la (c, c') -chaîne de Kempe de e comporte un changement de couleur de e . Cela peut entraîner un changement de couleur d'une autre arête e' de $\partial_G(H)$ si et seulement si cette chaîne-ci contient cette arête-là. \square

Considérons maintenant les colorations de H .

Définition 13 Soit G un graphe avec $\Delta(G) = 4$ et H une configuration de G . Soit β une coloration de $\partial_G(H)$. Soit $c, c' \in \{1, 2, 3, 4\}$ deux couleurs quelconques. Soit X un couplage planaire de $\partial_G(H)$ tel que si $\beta(e) \notin \{c, c'\}$, alors $d_X(e) = 0$. Une coloration β' est adjacente à β par rapport à c, c' et X si soit

- β' est obtenu à partir de β en alternant la couleur (modifiant c en c' et vice versa) de deux arêtes $e, e' \in \partial_H(G)$ telles que $ee' \in E(X)$, soit
- β' est obtenu à partir de β en alternant la couleur d'une arête e telle que $d_e(X) = 0$ et $\beta(e) \in \{c, c'\}$.

Nous notons $N_{c,c'}^X(\beta)$ l'ensemble de colorations adjacentes à β par rapport à c, c' et X .

Définition 14 Soit H une configuration de G et β une coloration de $\partial_G(H)$. Alors, β s'étend vers H s'il existe une coloration ψ de H^* telle que $\psi|_{\partial_G(H)} = \beta$. Notons Φ_0 l'ensemble des colorations de $\partial_G(H)$ qui s'étendent vers H , i.e.,

$$\Phi_0 = \{\beta : \exists \psi : E(H^*) \rightarrow \{1, 2, 3, 4\} \text{ une coloration telle que } \psi|_{\partial_G(H)} = \beta\}.$$

Ensuite, pour $i \in \mathbb{N}$, soit

$$\Phi_{i+1} = \{\beta : \beta \in \Phi_i \text{ ou } \exists c, c' \in \{1, 2, 3, 4\}, \forall X \text{ couplage planaire de } \partial_G(H), N_{c,c'}^X(\beta) \cap \Phi_i \neq \emptyset\},$$

c-à-d, l'ensemble des colorations β telles que pour une paire de couleurs c, c' , quelque soit un couplage planaire X de $\partial_G(H)$, il existe une coloration adjacente à β déjà dans Φ_i . Finalement, soit

$$\Phi(H) = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \Phi_i(H).$$

Théorème 4 Soit H une configuration de G , soit H' une autre configuration telle que $\partial(H) = \partial(H')$. Soit G' le graphe obtenu à partir de G en remplaçant H par H' . Si $\Phi_0(H') \subseteq \Phi(H)$, alors, pour toute 4-arête-coloration φ' de G' il existe une 4-arête-coloration φ de G .

Preuve. Soit φ' une coloration de G' , soit $\beta' = \varphi'|_{\partial_H(G)}$. Comme φ est une coloration de G' , β' est une coloration de $\partial_G(H')$ qui s'étend vers H' , d'où $\beta' \in \Phi_0(H')$. Alors, il existe $i \in \mathbb{N}$ tel que $\beta' \in \Phi_i(H)$. Nous démontrons l'existence d'une coloration φ de G par récurrence par rapport à i .

Si $i = 0$, alors β' s'étend vers H , c-à-d, il existe une coloration ψ de H^* telle que $\psi|_{\partial_G(H)} = \beta'$. On définit

$$\varphi(e) = \begin{cases} \varphi'(e) & \text{si } e \notin H, \\ \psi(e) & \text{si } e \in H. \end{cases}$$

Il est évident que c'est une 4-arête-coloration de G

Supposons que $\beta' \in \Phi_{i+1}(H) \setminus \Phi_i(H)$ pour un $i \in \mathbb{N}$. Alors, il existe deux couleurs c, c' telles que, quelque soit un couplage planaire X de $\partial_G(H)$, il existe $\beta'' \in \Phi_i(H)$ adjacente à β' . Considérons maintenant le couplage planaire $\mathcal{X}_{\varphi'}^{c, c'}$. La coloration β'' adjacente à β' correspondante est une restriction d'une coloration de G' adjacente à φ' , disons φ'' . Puisque $\beta'' \in \Phi_i(H)$, par l'hypothèse de récurrence, pour φ'' il existe une 4-arête-coloration φ de G .

Autrement dit, il suffit de modifier la coloration φ' le long des chaînes de Kempe un nombre fini de fois afin d'obtenir une coloration qui s'étend directement vers H . \square

Définition 15 Soit H et H' deux configurations telles que $\partial(H) = \partial(H')$. La configuration H se réduit vers H' si $\Phi_0(H') \subseteq \Phi(H)$. La configuration H est réductible s'il existe une configuration H' vers la quelle elle se réduit.

Théorème 4 permet d'automatiser la vérification de réductibilité de configurations – on n'a pas besoin de connaître la structure du graphe G , il suffit de deviner la réduction (la configuration H') et vérifier que la condition de la définition de réductibilité est satisfaite.

Dans le chapitre 4, nous donnons la description plus détaillée de l'implémentation de cette procédure.

4 Description de l'outil de réductibilité

Ce chapitre sera consacré à décrire la fonctionnalité de l'outil de vérification de la réductibilité que nous avons implémenté. Nous allons expliquer plus profondément qu'est-ce que le programme fait.

D'abord, c'est un programme qui prend en entrée une configuration H , que nous voulons réduire et une autre configuration H' , une réduction de H potentielle, avec la même disposition des arêtes sortantes et il donne en sortie une réponse de "oui" ou "non". Ensuite nous allons présenter des aspects du programme pour une meilleure compréhension de son déroulement. Nous allons définir des concepts que nous avons dû pré-calculer, puis nous expliquerons le traitement ou l'algorithme général du programme et finalement nous allons introduire des notions que nous avons utilisé lors de l'implémentation.

4.1 Pré-calcul

Il y a deux variables, ou plutôt deux ensembles que nous avons voulu calculer en avance, car générer ces types de calculs pour chaque itération était très coûteuse. D'une coté nous avons généré l'ensemble de tous les couplages possibles à k sommets pour k allant de 1 jusqu'à le nombre maximum des arêtes sortantes de une configuration (MAXRING). Les couplages sont fixes, c-à-d, l'ensemble de couplages ne change jamais, il change seulement le nombre de sommets pour lequel nous les générons, donc pour calculer les Φ_i (c'est à ce moment là que nous utilisons les couplages), générer tous ces couplages n'était pas efficace.

De l'autre coté, nous avons calculé un tableau de modifications. Sur cet aspect nous ne pouvons pas dire grande chose parce qu'il nécessite des autres concepts que nous allons définir au long de cette description. Il s'agit d'un tableau qui stocke les valeurs de la formule suivante,

$$(-2 \cdot m + k + l)4^i \text{ pour } m, k, l \in 0, 1, 2, 3 \text{ et } i \in 1, 2, \dots, 17.$$

Donc, ce tableau aussi, nous l'avons calculé en avance afin de ne pas répéter les mêmes calculs pour chaque itération. La signification des variables utilisées dans cette formule nous les introduirons dans la partie de l'implémentation.

4.2 Traitement

Dans ce partie nous exhibons l'algorithme du programme, une idée générale de ce que le programme fait. Nous allons observer que nous nous appuyons sur les bases de la réductibilité que nous venons d'étudier dans le chapitre 3.

Commençons prenant en entrée H et H' , une paire des configurations avec le même ensemble des arêtes sortantes et vérifions si H se réduit vers H' . Nous générons d'abord, toutes les colorations ψ de H qui s'étendent, ne gardant que la coloration des arêtes sortantes, c-à-d nous gardons $\beta = \psi|_{\partial_G(H)}$. Cet ensemble des colorations sera Φ_0 . Puis, le prochain pas (suivant les notions théoriques de la réductibilité) sera générer les colorations adjacentes aux colorations qui s'étendent déjà tant qu'ils en existent. C-à-d à chaque itération nous allons trouver des nouvelles colorations qui s'étendent vers des colorations qui s'étendent directement (celles qui appartiennent à Φ_0) ou vers des colorations adjacentes aux colorations étendues (colorations qui se sont étendues dans une itération précédente). On répète ces processus tant qu'il y a des colorations qui s'étendent. Pour chaque itération, l'ensemble des colorations étendues est Φ_i . L'ensemble de toutes les colorations étendues de H est noté par Φ .

Une coloration β' des arêtes sortantes de H s'étend s'il existe une paire de couleurs, pour laquelle n'importe quel couplage des arêtes sortantes coloriés avec ces deux couleurs il existe une coloration β (qui s'étend) adjacente à β' .

Une fois générées toutes les colorations étendues de H , nous prenons H' l'autre configuration et nous générons toutes les colorations ψ' de H' qui s'étendent directement obtenant l'ensemble Φ'_0 .

Finalement si Φ'_0 est inclus dans Φ ($\Phi'_0(H') \subseteq \Phi(H)$), alors H se réduit vers H' et H sera réductible.

4.3 Implémentation

Finalement lors de l'implémentation nous allons décrire comme ce programme a été conçu. Nous avons déjà mentionné que nous nous sommes inspirés du Théorème de 4 couleurs, alors nous avons pris aussi le programme que ils ont utilisé pour montrer la réductibilité dans leur cas et nous avons regardé les parties que nous pouvions utiliser. Pourtant, les conditions requises dans le Théorème de 4 couleurs ne sont pas les mêmes que dans notre problème, nous n'avons gardé que la structure du programme. Ensuite nous parlons plus en détail des aspects à remarquer dans le programme.

Nous avons dit que le programme prend deux configurations en entrée. Ces configurations sont présentées sous forme d'une liste d'adjacence. D'après une lecture, les deux configurations sont stockées dans deux matrices différentes. Puis le programme crée une numérotation des arêtes de la configuration. Le programme numérote d'abord, les arêtes sortantes et après il continue vers l'intérieur.

Ensuite pour générer l'ensemble Φ_0 des colorations de H , le programme utilise une méthode de retour sur le trace ou Backtrack, et il stocke les colorations de H sous forme de code, gardant que la coloration des arêtes sortantes. Ce code a été calculé de la manière suivante,

$$k = \sum_{e=0}^{r-1} (\beta(e)) \cdot 4^e \quad \text{tel que } c(i) \in \{0, 1, 2, 3\} \quad \text{pour } i \in \{1, 2, 3, 4\},$$

étant c le code qui donne la valeur 0, 1, 2 ou 3 selon la couleur de l'arête e .

Une fois générées toutes ces colorations, passons à la partie des colorations voisines ou adjacentes. C'est dans ce parti où le programme utilise les couplages et les modifications pré-calculés. L'ensemble de tous les couplages M à k (entier) sommets est \mathcal{M} . Le programme se sert des couplages pour effectuer les changements des couleurs produits par des chaînes de Kempe. Remarquons que une seule modification de la coloration des arêtes sortantes est possible au même temps. C-à-d, une seule chaîne de Kempe produit un seul changement de la coloration pour une paire de couleurs c, c' . De cette façon le programme génère les colorations qui s'étendent et qui seront stockées dans l'ensemble Φ_i à la i -ème itération. Ce processus itérative se répète tant que le programme trouve des nouvelles colorations étendues. Finalement, pour savoir si une coloration β est adjacente d'une autre coloration β' il suffit trouver une modification de β d'une paire de couleurs, le programme vérifie la formule suivante,

$$\begin{cases} k' = k + (-2\beta'(e) + c + c') \cdot 4^e & \text{si } d_M(e) = 0 \\ k' = k + (-2\beta'(e) + c + c') \cdot 4^e + (-2\beta'(e') + c + c') \cdot 4^{e'} & \text{si } d_M(e) = d_M(e') = 1. \end{cases}$$

où k et k' sont les codes correspondantes aux colorations β et β' respectivement. Remarquons que le morceau de formule suivant $(-2\beta'(e) + c + c') \cdot 4^e$, est la modification de couleurs pour une arête quelconque sortante et c'est la partie pré-calculée que nous avons déjà mentionné.

5 Déchargement

Dans ce chapitre, nous présentons la charge initiale et des règles de déchargement qui permettraient de démontrer la conjecture, si nous complétions la liste de configurations réductibles. Nous avons déjà introduit le processus de déchargement dans le chapitre 2, dans ce cas-là nous allons faire pareil.

Définition 16 Soit G un graphe planaire avec $\Delta(G) = 4$ et $g(G) \geq 4$. La charge initiale w des sommets et des faces de G est définie par

$$\begin{aligned} w : V(G) \cup F(G) &\rightarrow \mathbb{R}, \\ w(x) &= d_G(x) - 4. \end{aligned}$$

Comme dans la démonstration du Proposition 3, la somme de charge initial est égale à -8 .

Notons que la charge de tous le sommets est négative et la charge de toutes les faces est positive. Plus précisément,

$$\begin{aligned} w(v) &= -2 && \text{pour tout } v \in V(G), \text{ tel que } d_G(v) = 2, \\ w(v) &= -1 && \text{pour tout } v \in V(G), \text{ tel que } d_G(v) = 3, \\ w(v) &= 0 && \text{pour tout } v \in V(G), \text{ tel que } d_G(v) = 4 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} w(f) &= 0 && \text{pour tout } f \in F, \text{ tel que } d_G(f) = 4, \\ w(f) &= 1 && \text{pour tout } f \in F, \text{ tel que } d_G(f) = 5, \\ w(f) &\geq 2 && \text{pour tout } f \in F, \text{ tel que } d_G(f) \geq 6. \end{aligned}$$

Contrairement au cas des propositions 3 et 4, il ne suffit pas de définir les règles de déchargement parmi les sommets, puisqu'il n'y a pas de sommet de charge strictement positive. Nous sommes forcés à utiliser la charge des faces de taille au moins 5 pour éliminer la charge négative des sommets de degré 2 et 3.

Nous proposons la règle de déchargement provisionnelle suivante :

(R) Toute face de taille au moins 5 donne une unité de charge à chaque sommet incident de degré 2 ou 3.

Dans la suite, il faut montrer que tout élément de graphe (sommet ou face) dont la charge reste strictement négative après la redistribution, fait partie d'une configuration réductible. Regardons sur quelles configurations serait nécessaire trouver des réductions.

Pour un sommet de degré 2, par la règle défini dessus, il faudrait trouver des configurations réductibles pour les cas où le sommet de degré 2 il a deux faces de taille 4 autour de lui car dans ce cas là le sommet il ne recevrait aucune charge positive des faces voisines. Et le cas où ce même sommet-ci a une face de taille 4 et une autre de taille 5 ne suffirait non plus pour décharger complètement la charge négative du sommet.

Puis pour un sommet de degré 3, d'abord il faudrait considérer les cas où le sommet a comme voisin un autre sommet de degré 3 et le cas où le sommet de degré 3 il a des voisins de degré supérieur. Pour le premier cas il suffirait de trouver une réductions pour le cas où le pair de sommets de degré 3 a autour de lui 4 carrés et une autre réduction pour le cas où il y a une face de taille 5 et des autres faces de taille 4. S'il y a 4 faces de taille 4, observons que les faces de taille 4 ne donnent aucune charge ce qui laisserait le pair de sommets chargé négativement. Même dans le cas où il y a une face de taille 5, il ne serait pas suffisant, car une pentagone, d'après la règle de déchargement défini, donnerait sa charge à un des sommets mais l'autre sommet resterait chargé négativement.

Pour le sommet de degré 3 voisin des sommets de plus grand degré il faudrait trouver une réduction pour la configuration qui a un sommet de degré 3 avec que des faces de taille 4 autour de lui, car les faces de taille 4 ne déchargeraient pas le sommet de degré 3.

Finalement, un autre objectif serait de trouver une réduction pour le cas où nous avons une face de grande taille avec beaucoup de sommets de petit degré incidentes.

Dans le chapitre suivant nous allons montrer les réductions que nous avons réussi à trouver.

6 Résultats

Dans ce dernier chapitre, nous montrons les résultats obtenus grâce à l'outil de réductibilité. Nous avons essayé de trouver les réductions nécessaires pour pouvoir décharger le graphe correctement.

6.1 Pair de sommets de degré 3

Pour un pair de sommets de degré 3, nous devons différencier 3 cas. Les premiers deux cas correspondent à des configurations qui avaient déjà été prouvées à la main et nous les avons vérifié sur machine.

3-3-4-3 :



FIGURE 5 – La configuration 3-3-4-3 (gauche) et sa réduction (droite).

3-3 avec 4 carrés autour :



FIGURE 6 – La configuration 3-3 avec 4 carrés autour de ce pair (gauche) et sa réduction (droite).

Le troisième cas il s'agit de deux configurations dont elles sont deux des nouvelles réductions que nous avons trouvé, le pair de sommets de degré 3 avec un pentagone autour, soit en haut, soit de côté.

3-3 1 pentagone en haut :



FIGURE 7 – La configuration 3-3 avec un pentagone en haut (gauche) et sa réduction (droite).

3-3 1 pentagone de coté :



FIGURE 8 – La configuration 3-3 avec un pentagone de coté (gauche) et sa réduction (droite).

6.2 Sommet de degré 2

Pour un sommet de degré 2, nous avons remarqué deux cas. Un cas où le sommet avait deux faces de taille 4 autour de lui et un autre où ce sommet-ci avait une face de taille 4 et une autre de taille 5. Pour le premier cas nous avons réussi à trouver la réductions, mais malheureusement nous n'avons pas pu trouver une réduction pour le deuxième cas. Voici la réduction trouvée.

2 avec 2 carrés



FIGURE 9 – La configuration 2 avec deux carrés (gauche) et sa réduction (droite).

Il faut remarquer que pour que cette réduction soit valide, il est nécessaire la présence de deux pentagones autour de cette configuration, afin que la contraction de l'arête reliant deux arêtes sortantes ne crée pas un triangle. Alors, autour de la configuration défini par un sommet de degré 2 avec 2 carrés autour de lui, il faut qu'il ait autour de cette configuration deux pentagones et c'est nécessaire que la disposition de ces deux pentagones soit symétrique par rapport au sommet central.

7 Conclusion

Pour conclure, nous allons faire un petit résumé récapitulatif du travail fait lors de ces 5 mois de stage et nous ferons des remarques sur les apportes obtenus. À la fin de ce stage nous avons voulu prendre un peu de recul et réfléchir sur les objectifs que nous avions au début du stage et ce que nous avons réussi.

D'une coté, nous avons développé un outil capable de vérifier la réductibilité de n'importe quelle paire de configurations. Puis nous avons réussi à trouver des nouvelles configurations réductibles qui contribuent énormément à prouver cette conjecture ouverte depuis des décennies. Parmi plus de 50 paires de configurations testées nous avons réussi à prouver qu'est-ce qui se passe autour des sommets de petit degré.

De l'autre coté, c'est vrai que le travail n'est pas fini. Il y a encore des configurations dont nous n'avons pas pu trouver ses réductions. Nous n'avons pas trouvé la réduction pour un sommet de degré 2 avec un pentagone autour de lui et nous ne avons pas encore étudié les faces de grande taille avec des sommets de petit degré autour. Même la règle de déchargement définie est encore une version préliminaire, mais qui a bien répondu aux problèmes que nous avons posé. Pourtant, le stage n'est pas fini et nous sommes persuadés de que nous sommes sur la bonne route pour prouver ce qui nous manque et pouvoir compléter la preuve. Il reste encore du travail et même si le stage sera bientôt fini nous ne abandonnerons pas cet idée que nous avons suivi.

Par rapport à la suite, comme nous avons déjà dit, il reste encore du travail et le pas suivant ce serait le développement d'autre outil qui permet de vérifier que les réductions trouvés ne violent pas des contraintes de connexité, qui ne forment pas des triangles etc.

Au niveau personnel, ce stage a été un défi, une expérience très enrichissante qui m'a permis d'une coté, améliorer mes compétences acquises lors de ma formation et d'une autre coté, apprendre des nouvelles techniques

ainsi que des outils nécessaires pour le travail de recherche. A mon avis le sujet en soi et les concepts théoriques concernant la méthodologie utilisé pour la preuve du Théorème de 4 couleurs ont été le plus grand obstacle de ce travail. Puis je dois remarquer la présence constante et le soutien de mon encadrant Monsieur Kardoš, qui m'a transmis des aspects surtout liés à ce qui concerne être un chercheur et qui m'a aidé lors de ce 5 mois à dépasser les obstacles..

Pour conclure, ce stage m'a apporté de la confiance, de la force et de l'envie de continuer ma formation avec une thèse. Bien que ce soit vrai que je hésitait à continuer, ce stage m'a donné une piste du type de travail que je souhaiterait effectuer dans les prochains ans.

Références

- [1] M.R. Garey, D.S. Johnson, L. Stockmeyer, Some simplified NP-complete problems, Proceedings of the Sixth Annual ACM Symposium on Theory of Computing (1974) 47–63.
- [2] V.G. Vizing, On an estimate of the chromatic class of a p-graph, Diskret. Analiz. (3) (1964), 25–30.
- [3] V.G. Vizing, Critical graphs with given chromatic class, Metody Diskret. Analiz (5) (1965), 9–17.
- [4] D.P. Sanders et Y. Zhao, Planar graphs of maximum degree seven are class I, J. Combin. Theory Ser. B, 83 (2), (2001), 201–212.
- [5] K. Appel, W. Haken, Every Planar Map is Four Colorable. I. Discharging, Illinois Journal of Mathematics 21 (3), (1977), 429–490
- [6] N.Robertson, D.P.Sanders, P.Seymour, R.Thomas, The Four-Colour Theorem, J. Combin. Theory Ser. B 70 (1), (1997) 2–44,