Агапов М.Т. 221-03 1 вар.

1. Даны точки A, B, C, D. Доказать, что точки ABCD лежат в одной плоскости и разложить вектор $\overline{AB}$ по векторам $\overline{AC}$ и $\overline{AD}$.

$A(1;1;1)$, $B(2,-1,4)$, $C(-1,4,2)$, $D(1,0,8)$

а) • Вычислим координаты векторов $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}$

$\overline{AB} = B - A = \{2-1; -1-1; 4-1\} = \{1; -2; 3\}$

$\overline{AC} = C - A = \{-1-1; 4-1; 2-1\} = \{-2, 3, 1\}$

$\overline{AD} = D - A = \{1-1; 0-1; 8-1\} = \{0, -1, 7\}$

• Векторы лежат в одной плоскости, если они компланарны, т.е. $\det = 0$

Вычислим смешанное произведение векторов (определитель)

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 7 \end{vmatrix} = 1\cdot 3\cdot 7 + (-2)\cdot 1\cdot 0 + (-2)\cdot(-1)\cdot 3 - (0 + (-2)(-2)\cdot 7 + 1\cdot(-1)\cdot 1) = 0$$

Следовательно векторы лежат в одной плоскости.

б) Разложить вектор $\overline{AB}$ по векторам $\overline{AC}$ и $\overline{AD}$

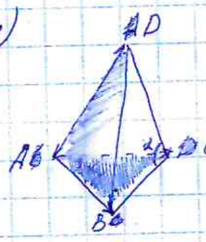
$(1; -2; 3) = x(-2; 3, 1) + y(0; -1; 7)$

$$\begin{cases} 1 = -2x + 0y & \Rightarrow x = -1/2 \\ -2 = 3x - y & \Rightarrow y = -1/2 \\ 3 = x + 7y & \Rightarrow 3 = -1/2 + 7\cdot(1/2) \Rightarrow 3 = -1/2 - \frac{7}{2} \Rightarrow 3 \neq -4 \end{cases}$$

Видим, что $3 \neq 4$, следовательно вектор $\overline{AB}$ нельзя разложить по $\overline{AC}$ и $\overline{AD}$

2. Дана пирамида ABCD. Найти: 1) Угол $\angle CBD$; 2) Площадь грани ABC 3) объем пирамиды.

$A(2; 4; -3)$, $B(-1; 3; 5)$, $C(6; -2; 1)$, $D(-2; -3; 4)$



1) • найдем координаты векторов $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}$

$\overline{AB} = B - A = \{-1-2; 3-4; 5+3\} = \{-3; -1; 8\}$

$\overline{AC} = C - A = \{6-2; -2-4; 1+3\} = \{4; -6; 4\}$

$\overline{AD} = D - A = \{-2-2; -3-4; 4+3\} = \{-4; -7; 7\}$

• пусть α – угол $\angle CBD$, тогда

$\cos\alpha = \dfrac{\overline{BD}\cdot\overline{BC}}{|\overline{BD}|\cdot|\overline{BC}|}$, и тут понимаем, что нам нужны координаты векторов $\overline{BD}$

$\overline{BD} = D - B = \{-2+1; -3-3; 4-5\} = \{-1; -6; -1\}$, теперь считаем $\cos\alpha$

$\overline{BC} = C - B = \{6+1; -2-3; 1-5\} = \{7; -5; -4\}$

$$\cos\alpha = \frac{-1\cdot 7 + (-6)\cdot(-5) + (-1)\cdot(-4)}{\sqrt{(-1)^2+(-6)^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{7^2+(-5)^2+(-4)^2}} = \frac{-7+30+4}{\sqrt{38}\cdot\sqrt{90}} = \frac{27}{\sqrt{3420}}$$

2) Площадь грани ABC можно вычислить по формуле $S_{ABC} = 1/2\,|\overline{AB}\times\overline{AC}|$

• найдем векторное произведение $\overline{AB}\times\overline{AC}$

$$\overline{AB}\times\overline{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -3 & -1 & 8 \\ 4 & -6 & 4 \end{vmatrix} = i\cdot\begin{vmatrix} -1 & 8 \\ -6 & 4 \end{vmatrix} - j\cdot\begin{vmatrix} -3 & 8 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} + k\cdot\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 4 & -6 \end{vmatrix} =$$

$$= i\cdot(-4\cdot(-48)) - j(-12+32) + k\cdot(18+4) = 196i - 20j + 22k$$

$$\frac{1}{2}|\overline{AB}\times\overline{AC}| = \frac{1}{2}\sqrt{196^2+(-20)^2+22^2} = \frac{\sqrt{39500}}{2}$$

3) Объем пирамиды вычислим с помощью смешанного произв-ия $\frac{1}{6}|\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot$

$$\begin{vmatrix} -3 & -1 & 8 \\ 4 & -6 & 4 \\ -4 & -7 & 7 \end{vmatrix} = (-3)\cdot(-6)\cdot 7 + (-1)\cdot 4\cdot(-4) + 4\cdot(-7)\cdot 8 - (8\cdot(-6)\cdot(-4) + 1\cdot(-4)\cdot 7 +$$

$$\Rightarrow 18\cdot 7 + 16 + (-224) - (192 + (-28) + 84) = 126 - 208 - 192 + 28 - 8$$

$$\Rightarrow -330$$

$$V_{пир} = \frac{1}{6}\cdot|-330| = 55$$

2. Дана пирамида ABCD. Найти:

1) Угол CBD;
2) Площадь грани ABC;
3) Объем пирамиды.

$A(2;4;-3)$; $B(-1;3;5)$; $C(6;-2;1)$; $D(-2;-3;4)$

1) Найдем координаты векторов $\overline{CB}$ и $\overline{CD}$

$\overline{CB} = B-C = \{-1-6; 3+2; 5-1\} = \{-7;5;4\}$

$\overline{CD} = D-C = \{-2-6;-3+2;4-1\} = \{-8;-1;3\}$

$$\cos\alpha = \frac{\overline{CB}\cdot\overline{CD}}{|\overline{CB}|\cdot|\overline{CD}|} = \frac{-7\cdot(-8)+5\cdot(-1)+4\cdot 3}{\sqrt{(-7)^2+5^2+4^2}\cdot\sqrt{(-8)^2+(-1)^2+3^2}} = \frac{63}{\sqrt{6660}}$$

2) Площадь грани ABC можно вычислить по формуле $1/2\cdot|\overline{AB}\times\overline{AC}|$

Найдем векторное произведение $\overline{AB}\times\overline{AC}$

$$\overline{AB}\times\overline{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -3 & -1 & 8 \\ 4 & -6 & 4 \end{vmatrix} = i\cdot\begin{vmatrix} -1 & 8 \\ -6 & 4 \end{vmatrix} - j\cdot\begin{vmatrix} -3 & 8 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} + k\cdot\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 4 & -6 \end{vmatrix} =$$

$$= i\cdot(-1)\cdot 4+48 - j((-12)-32) + (18-4)k = i44 + j44 + k14 = \{44;44;14\}$$

$\overline{AB} = B-A = \{-1-2; 3-4; 5+3\} = \{-3;-1;8\}$

$\overline{AC} = C-A = \{6-2;-2-4;1+3\} = \{4;-6;4\}$

$$S_{\text{грани ABC}} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{44^2+44^2+14^2} = \frac{\sqrt{4068}}{2}$$

3) Объем пирамиды можно вычислить при помощи смешанного произведения векторов $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}$, умноженное на 1/6.

$\overline{AB}$ и $\overline{AC}$ известны, необходимо вычислить координаты вектора $\overline{AD}$

$\overline{AD} = D-A = \{-2-2; -3-4; 4+3\} = \{-4;-7;7\}$

Смешанное произведение (определитель):

$$\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{AD} = \begin{vmatrix} -3 & -1 & 8 \\ 4 & -6 & 4 \\ -4 & -7 & 7 \end{vmatrix} = -82-192+28-84 = -330$$

$$V_{\text{пир}} = \frac{1}{6}\cdot|-330| = 55$$