

Задание 1. Дана $\triangle ABC$. Найдите:

- 1) Уравнение сторон AC и BC ;
- 2) Уравнение и коэффициент наклона AM ;
- 3) Уравнение и коэффициент наклона BD ;
- 4) Точки пересечения наклонных AM с прямой BD и \perp между ними.

$$A(2; 3), B(-4; 3), C(-1; -1)$$

1) Уравнение стороны AC наклон по кофр.

Точки A и C . Но иск. наклоном стороны AC является
Вектор $\overrightarrow{AC} = \{-1-2; -1-3\} = \{-3; -4\}$

Аналогично вычисляем наклон вектора $\overrightarrow{BC} = \{-1-(-4); -1-3\} = \{3; -4\}$

По точке A и накр. Вектору \overrightarrow{AC} находим каноническое уравнение прямой AC

$$\frac{x-(-3)}{2} = \frac{y-(+4)}{3} \Rightarrow 3(x+3) = 2(y+4) \Rightarrow 3x+9-2y-8=0$$

$$AC: 3x-2y+1=0$$

Аналогично с точкой B и накр. Вектору \overrightarrow{BC}

$$\frac{x-3}{-4} = \frac{y+4}{3} \Rightarrow 3x-9 = -4y-16 \Rightarrow 3x-9+4y+16=0$$

$$BC: 3x+4y+7=0$$

2) Так как точка M - середина BC , то ее кофр. координаты по формуле

$$M = \left(\frac{-4+(-1)}{2}, \frac{3+(-1)}{2} \right) = (-2,5; 1)$$

Направляющим вектором наклона AM может служить вектор \overrightarrow{AM}

$$\overrightarrow{AM} = \{-2,5-2; 1-3\} = \{-4,5; -2\}$$

По точке A и направл. вектору \overrightarrow{AM} находим каноническое ур-е наклона AM

$$\frac{x-2}{-4,5} = \frac{y-3}{-2} \Rightarrow -2(x-2) = -4,5(y-3) = -2x+4 = -4,5y+13,5 =$$

$$-2x+4+4,5y-13,5 = -2x+4,5y-9,5 = 0$$

$$\text{Уравнение наклона } AM = -2x+4,5y-9,5=0$$

Для вычисления длины наклона AM (расстояние от точки $A(2; 3)$ до

линии $BC (3x+4y+7=0)$) можно использовать формулу

$$d = \frac{|Ax+By+C|}{\sqrt{A^2+B^2}} = \frac{|3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 7|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{6+12+7}{\sqrt{25}} = \frac{25}{5} = 5$$

$$\text{Длина наклона } AM = 5$$

3) Вектор $\vec{n} = \{3; -2\}$ является вектором перпендикуляра к AC . След-но $\vec{n} \perp AC$ и

вектор $\vec{n} \parallel BD$. Поэтому вектор \vec{n} может служить направляющим вектором прямой BD .

По точке $B(-4; 3)$ и направл. вектору $n = \{3; -2\}$ вычислим каноническое

уравнение наклона BD :

$$BD: \frac{x-(-4)}{3} = \frac{y-3}{-2} \Rightarrow -2x-3y+1=\phi$$

Для вычисления длины вектора BD (расстояние от точки $B(-4; 3)$ до

линии $BD = \{-2x-3y+1=0\}$) можно использовать формулу: (из расстояния $AC (3x-2y+1=0)$)

$$d = \frac{|3 \cdot (-4) - 2 \cdot 3 + 1|}{\sqrt{3^2+2^2}} = \frac{17}{\sqrt{13}}$$

4) Найдем точку пересечения AN и BP , решив систему уравнений

$$\begin{cases} -2x + 4,5y - 9,5 = 0 \\ -2x - 3y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow -2x = 3y - 1 \Rightarrow x = -1,5y + 0,5$$

Найдем б. реш. ур-ия

$$3y - 1 + 4,5y - 9,5 = 0$$

$$7,5y = 10,5$$

$$y = 1,4$$

$$x = -1,5 \cdot 1,4 + 0,5 = -1,6$$

Точка пересечения $O = (-1,6; 1,4)$

Внешний угол между AN и BP не фигура

$$\cos \alpha = \frac{-2 \cdot (-2) + 4,5 \cdot (-3)}{\sqrt{-2^2 + 4,5^2} \cdot \sqrt{-2^2 + (-3)^2}} = \frac{4 + (-13,5)}{\sqrt{24,25} \cdot \sqrt{13}} = -0,5$$

Отв: 120°

Задание 2. Дано параллелограмм $ABCD$. Найти:

- 1) Ур-я плоскостей ABC и ABD
 - 2) Константы и параметры ур-я плоскости AB .
 - 3) Константы и параметры плоскости параллелограмма, отличимся от констант D и C .
 - 4) Точки пересечения плоскостей ABC и ABD
- $A(2; 4; -3)$ $B(-1; 3,5)$ $C(6; -2; 1)$ $D(-2; -3; 4)$

1) Внешний угол A и копланарные прямые

$$\bar{AB} = \{-1-2; 3-4; 5+3\} = \{-3; -1; 8\}$$

$$\bar{AC} = \{6-2; -2-4; 1+3\} = \{4; -6; 4\}$$

Запишем ур-я плоскости плоскостей, кот. токи A и L параллельно:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-4 & z+3 \\ -3 & -1 & 8 \\ 4 & -6 & 4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x-2 / -18 / -y-4 / -38 / +z+3 / -3 \\ = (x-2)(-4+48) - y-4(-12-32) + (z+3)(18+4) = 44x + 44y + 22z - 198 = 0$$

Найдем ур-я 22: $2x+2y+z-9=0$

Ур-я плоскости ABC : $2x+2y+z-9=0$



Внешний угол A и копланарные прямые $\bar{AB} = \{-3; -1; 8\}$ и $\bar{AD} = \{-2-2; -3-4; 4+3\} = \{-4; -7; 7\}$. Запишем ур-я плоскости:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-4 & z+3 \\ -3 & -1 & 8 \\ -4 & -7 & 7 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x-2(-7+56) - (y-4)(-21+32) + (z+3)(21-4) = \\ = 49x - 98 - 11y + 44 + 17z + 51 = 49x - 11y + 17z - 3 = 0$$

Ур-я плоскости ABD : $49x - 11y + 17z - 3 = 0$

2) Чз построение фигуры, очевидно, что токи B лежат на прямой AB .

Вектор \bar{AB} имеет коорд. $\{x_1-x_0, y_1-y_0, z_1-z_0\}$, где y в \bar{B} коорд. $\{x_0, y_0, z_0\}$, а y в A координаты прямых \bar{AB} и копланарные прямые AB параллельны, т.е. должны совпадать по направлению

$$\frac{x-x_0}{P} = \frac{y-y_0}{Q}, \frac{z-z_0}{R} \quad \text{, т.к. они лежат на одной прямой}$$

$$\frac{-1-2}{-3} = \frac{3-4}{-1} = \frac{5+3}{8} \quad \text{равенство соотношения}$$

Из уравнений следует, что константы уравнений плоскости AB

На плоскости AB выбрана точка $A(10, y_0, z_0)$ и точка $B(x, y, z)$, а также направляющие векторы \vec{AB} (p, q, r). Тогда, параллельное уравнение прямой l есть

$$AB: \begin{cases} x = x_0 + pt \\ y = y_0 + qt \\ z = z_0 + rt \end{cases}, \text{ где } t - \text{ параметр. Из условия ур-ия } t=1$$

Построим параллельное уравнение

$$AB: \begin{cases} -t = +2 + (-3) \cdot 1 \\ 3 = 4 + (-1) \cdot 1 \\ 5 = -3 + 8 \cdot 1 \end{cases}$$

4) Найдем наименьшую точку пересечения прямой DE с плоскостью ABC , выраженную через t , если прямая движется параллельно t , пока будет лежать на плоскости.

Напоминаем, что плоскость ABC задана уравнением $2x + 2y + 2 - 9 = 0$

Нам необходимо найти координатное уравнение линии DE параллельной прямой l . Для этого $D(-2; -3; 4)$ и направляющий вектор \vec{DE} . Как узнать \vec{DE} ? Использовано следующее: если плоскость задана уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$, то вектор $\vec{n} = [A, B, C]$ называется нормальным вектором, т.е. единичный вектор нормали плоскости. А у нас винтажное как раз будет \perp плоскости ABC . Тогда единичный направляющий вектор $\vec{DE} = \vec{n}$ и ищем координаты $\vec{DE} = [2; 2; 1]$.

Теперь вычисляем координатное уравнение линии (прямой) DE

$$\frac{x - (-2)}{2} = \frac{y - (-3)}{2} = \frac{z - 4}{1} \Rightarrow \frac{x+2}{2} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-4}{1}$$

Прямая движется параллельно прямой l , обозначим общий параметр времени t .

$$\frac{x+2}{2} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-4}{1} = t, \text{ тогда}$$

$$\frac{x+2}{2} = t \Rightarrow x+2 = 2t \Rightarrow x = 2t - 2$$

$$\frac{y+3}{2} = t \Rightarrow y+3 = 2t \Rightarrow y = 2t - 3$$

$$\frac{z-4}{1} = t \Rightarrow z-4 = t \Rightarrow z = t+4$$

$$\begin{cases} x = 2t - 2 \\ y = 2t - 3 \\ z = t + 4 \end{cases}$$

Теперь, чтобы найти все координатные значения, построим движущуюся прямую l параллельного уравнения $2x + 2y + 2 - 9 = 0$ плоскости

$$2(2t - 2) + 2(2t - 3) + (t + 4) - 9 = 0$$

$$4t - 4 + 4t - 6 + t + 4 - 9 = 0$$

$$9t - 15 = 0 \Rightarrow 3t = 5 \Rightarrow t = 5/3$$

Точка пересечения (E) прямой DE с плоскостью ABC имеет координаты

$$x = 2 \cdot 5/3 - 2$$

$$y = 2 \cdot 5/3 - 3 \Rightarrow E = (1\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; 5\frac{2}{3})$$

$$z = 5/3 + 4$$