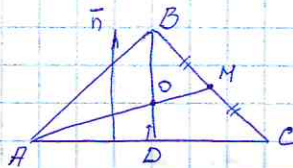


Задача 1. Дан $\triangle ABC$. Найти:

- 1) Уравнение стороны AC и BC ;
- 2) Уравнение и длину медианы AM ;
- 3) Уравнение и длину высоты BD ;
- 4) Точку пересечения медиан AM с высотой BD и \angle между ними.

$$A(2; 3), B(-4; 3), C(-1; -1)$$



1) Уравнение стороны AC найдем по коор. точек A и C . По ним найдем направляющий вектор $\overrightarrow{AC} = \{-1-2; -1-3\} = \{-3; -4\}$

Аналогично найдем направляющий вектор $\overrightarrow{BC} = \{-1-(-4); -1-3\} = \{3; -4\}$

По точке A и напр. вектору \overrightarrow{AC} найдем каноническое уравнение прямой AC

$$\frac{x-(-3)}{2} = \frac{y-(-4)}{3} \Rightarrow 3(x+3) = 2(y+4) \Rightarrow 3x+9-2y-8=0$$

$$AC = 3x - 2y + 1 = 0$$

Аналогично с точкой B и напр. вектору \overrightarrow{BC}

$$\frac{x-3}{-4} = \frac{y+4}{3} \Rightarrow 3x-9 = -4y-16 \Rightarrow 3x-9+4y+16=0$$

$$BC = 3x + 4y + 7 = 0$$

- 2) Так как точка M — середина BC , то ее коор. найдем по формуле

$$M = \left(\frac{-4+(-1)}{2}, \frac{3+(-1)}{2} \right) = (-2, 5; 1)$$

Направляющий вектор прямой AM может служить вектор \overrightarrow{AM}

$$\overrightarrow{AM} = \{-2, 5-2; 1-3\} = \{-4, 5; -2\}$$

По точке A и напр. вектору \overrightarrow{AM} найдем каноническое уравнение прямой AM

$$\frac{x-2}{-4,5} = \frac{y-3}{-2} \Rightarrow -2(x-2) = -4,5(y-3) = -2x+4 = -4,5y+13,5 =$$

$$= -2x+4+4,5y-13,5 = -2x+4,5y-9,5=0$$

$$\text{Уравнение медианы } AM = -2x + 4,5y - 9,5 = 0$$

Для вычисления длины медианы AM (расстояние от точки $A(2; 3)$ до прямой $BC (3x+4y+7=0)$) найдем используя формулу

$$d = \frac{Ax+By+C}{\sqrt{A^2+B^2}} = \frac{3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 7}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{6+12+7}{\sqrt{25}} = \frac{25}{5} = 5$$

$$\text{Длина медианы } AM = 5$$

- 3) Вектор $\vec{n} = \{3; -2\}$ является вектором нормали к AC . Следовательно $\vec{n} \perp AC$ и вектор $\vec{n} \parallel BD$. Поэтому вектор \vec{n} может служить направляющим вектором для BD .

По точке $B(-4; 3)$ и напр. вектору $\vec{n} = \{3; -2\}$ найдем каноническое уравнение прямой BD :

$$BD = \frac{x-(-4)}{3} = \frac{y-3}{-2} \Rightarrow -2x-3y+1=0$$

Для вычисления длины высоты BD (расстояние от точки $B(-4; 3)$ до прямой $AC (3x-2y+1=0)$) найдем используя формулу:

$$d = \frac{|3 \cdot (-4) - 2 \cdot 3 + 1|}{\sqrt{3^2+2^2}} = \frac{17}{\sqrt{13}}$$

4) Найдём точку пересечения AM и BP , решив систему уравнений

$$\begin{cases} -2x + 4,5y - 9,5 = 0 \\ -2x - 3y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow -2x = 3y - 1 \Rightarrow x = -1,5y + 0,5$$

Подставим в первое ур-ие

$$3y - 1 + 4,5y - 9,5 = 0$$

$$7,5y = 10,5$$

$$y = 1,4$$

$$x = -1,5 \cdot 1,4 + 0,5 = -1,6$$

Точка пересечения $O = (-1,6; 1,4)$

Вычислим угол между AM и BP по формуле

$$\cos \angle = \frac{-2 \cdot (-2) + 4,5 \cdot (-3)}{\sqrt{-2^2 + 4,5^2} \cdot \sqrt{-2^2 + (-3)^2}} = \frac{4 + (-13,5)}{\sqrt{24,25} \cdot \sqrt{13}} = -0,5$$

Отсюда: 120°

Задача 2. Дана пирамида $ABCD$. Найдите.

- 1) Ур-ие плоскостей ABC и ABD
- 2) Компланарные и перпендикулярные ур-ие плоскостей AB .
- 3) Компланарные и пер-ие ур-ие плоскостей пирамиды, описанных из вершин D и A
- 4) Точку пересечения плоскостей с прямой AB

$$A(2; 4; -3) \quad B(-1; 3; 5) \quad C(6; -2; 1) \quad D(-2; -3; 4)$$



1) Возьмем точку A и направляющие векторы

$$\vec{AB} = \{-1-2; 3-4; 5+3\} = \{-3; -1; 8\} \text{ и}$$

$$\vec{AC} = \{6-2; -2-4; 1+3\} = \{4; -6; 4\}$$

Запишем ур-ие плоскости пирамиды через точку A и B вектора:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-4 & z+3 \\ -3 & -1 & 8 \\ 4 & -6 & 4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x-2 \begin{vmatrix} -1 & 8 \\ -6 & 4 \end{vmatrix} - y-4 \begin{vmatrix} -3 & 8 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} + z+3 \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

$$= (x-2)(-4+48) - y-4(-12-32) + (z+3)(18+4) = 44x + 44y + 22z - 198 = 0$$

Разделим на 22: $2x + 2y + z - 9 = 0$

Ур-ие плоскости ABC : $2x + 2y + z - 9 = 0$

Возьмем точку A и направляющие векторы $\vec{AB} = \{-3; -1; 8\}$ и $\vec{AD} = \{-2-2; -3-4; 4+3\} = \{-4; -7; 7\}$. Запишем ур-ие плоскости:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-4 & z+3 \\ -3 & -1 & 8 \\ -4 & -7 & 7 \end{vmatrix} = 0 = x-2(-7+56) - (y-4)(-21+32) + (z+3)(21-4) =$$

$$= 49x - 98 - 11y + 44 + 17z + 51 = 49x - 11y + 17z - 3 = 0$$

Ур-ие плоскости ABD : $49x - 11y + 17z - 3 = 0$

2) Из построенной фигуры, очевидно, что точка B лежит на плоскости AB .

Вектор \vec{AB} имеет коэф $\{x-x_0, y-y_0, z-z_0\}$, где y B коэф $\{x_0, y_0, z_0\}$, а y A $\{x_0, y_0, z_0\}$ координаты векторов \vec{AB} и направляющие векторы AB коллинеарны, т.е. должно выполняться равенство

$$\frac{x-x_0}{p} = \frac{y-y_0}{q} = \frac{z-z_0}{r}, \text{ получим что, подставив коэф.}$$

$$\frac{-1-2}{-3} = \frac{3-4}{-1} = \frac{5+3}{8} \text{ равенство выполняется.}$$

Это уравнение является каноническим уравнением плоскости AB

На прямой AB известны координаты точек $A(1, y_0, z_0)$ и точки $B(x, y, z)$, а также направляющий вектор $\overrightarrow{AB} (p, q, r)$. Тогда, параметрические ур-ия имеют вид

$$AB: \begin{cases} x = x_0 + pt \\ y = y_0 + qt \\ z = z_0 + rt \end{cases}, \text{ где } t - \text{параметр. Из канонич. ур-ия } t = 1$$

Подставим в ур-ия координаты точек

$$AB: \begin{cases} -1 = +2 + (-3) \cdot 1 \\ 3 = 4 + (-1) \cdot 1 \\ 5 = -3 + 8 \cdot 1 \end{cases}$$

4) Чтобы найти точку пересечения высоты DE с плоскостью ABC , нужно найти, при каком значении параметра t , точка будет лежать на плоскости.

Напомним, плоскость ABC задана ур-ием $2x + 2y + z - 9 = 0$

Нам необходимо найти каноническое ур-ие прямой DE используя координаты $D(-2; -3; 4)$ и направляющий вектор \overrightarrow{DE} . Как узнать \overrightarrow{DE} ? Используем свойство: если плоскость задана ур-ием $Ax + By + Cz + D = \phi$, то вектор $\vec{n} = [A, B, C]$ перпендикулярен плоскости, т.е. является вектором нормали к плоскости. А у нас высота как раз будет \perp плоскости ABC . Таким образом, направляющий вектор $\overrightarrow{DE} = \vec{n}$ и имеет коорр. $\overrightarrow{DE} = \{2; 2; 1\}$

Теперь выписываем каноническое ур-ие прямой (высоты) DE

$$\frac{x - (-2)}{2} = \frac{y - (-3)}{2} = \frac{z - 4}{1} \Rightarrow \frac{x+2}{2} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-4}{1}$$

Чтобы записать параметрическое ур-ие, обозначим общий множитель буквой t .

$$\frac{x+2}{2} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-4}{1} = t, \text{ тогда}$$

$$\frac{x+2}{2} = t \Rightarrow x+2 = 2t \Rightarrow x = 2t-2$$

$$\frac{y+3}{2} = t \Rightarrow y+3 = 2t \Rightarrow y = 2t-3$$

$$\frac{z-4}{1} = t \Rightarrow z-4 = t \Rightarrow z = t+4$$

Получим параметрические уравнения:

$$\begin{cases} x = 2t-2 \\ y = 2t-3 \\ z = t+4 \end{cases}$$

Теперь, имея на руках все необходимые данные, подставим значения x, y, z в параметрическое ур-ие в уравнение плоскости

$$2(2t-2) + 2(2t-3) + (t+4) - 9 = \phi$$

$$4t-4+4t-6+t+4-9=0$$

$$9t-15=0 \Rightarrow 3t=5 \Rightarrow t=5/3$$

Точка пересечения (E) высоты DE с плоскостью ABC имеет координаты

$$x = 2 \cdot 5/3 - 2$$

$$y = 2 \cdot 5/3 - 3 \Rightarrow E = \left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{5}{3} + 4 \right)$$

$$z = 5/3 + 4$$